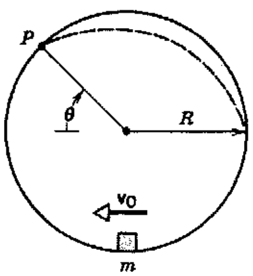
نقطهٔ مسیر v_0 است. (الف) حداقل مقدار v_0، یعنی v_m، برای اینکه m بتواند یک دورکامل بزند و از ریل جدا نشود چقدر است؟ (ب) فرض کنید $v_0 = 0.775 v_m$ است. ذره تا نقطهٔ P بر ریل حرکت می‌کند و در آنجا از ریل جدا می‌شود و روی مسیری که با خط‌چین مشخص شده است حرکت می‌کند. مکان زاویه‌ای (θ) نقطهٔ P را پیدا کنید.

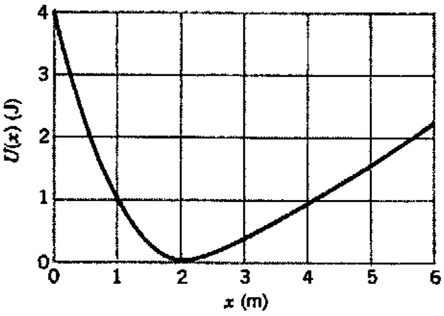


شکل ۴۰. مسئلهٔ ۳۷

۳۸. فرض کنید که به جای میلهٔ شکل ۲۴، ریسمانی بسیار کشسان، مثلاً از جنس لاستیک بگذاریم. هنگامی که گلوله رها می‌شود، ریسمان هنوزکشیده نشده و طول آن L است. (الف) توضیح بدهید که چرا انتظار دارید گلوله به نقطه‌ای پایین‌تر از مسافت L زیر نقطهٔ ثابت ریسمان برسد. (ب) با استفاده از مفاهیم دینامیکی و انرژی، نشان بدهید که اگر ΔL نسبت به L کوچک باشد، ریسمان به‌اندازهٔ $\Delta L = 3mg/k$ کشیده می‌شود؛ k ثابت نیروی ریسمان است. توجه کنید که هر چه k بزرگتر باشد ΔL کوچکتر است و تقریب $\Delta L \ll L$ بهتر می‌شود. (ج) نشان بدهید که در این شرایط سرعت گلوله در پایین مسیر $v = \sqrt{2g(L - 3mg/2k)}$ است، یعنی کمتر از مقداری که در حالت ناکشسان ($k = \infty$) بود. با استفاده از پایستگی انرژی، یک توضیح فیزیکی برای این نتیجه ارائه کنید.

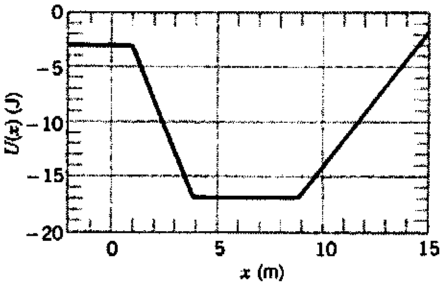
بخش ۸ـ۴ سیستمهای پایستار یک‌بعدی: حل کامل

۳۹. ذره‌ای در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $U(x)$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به‌صورت شکل ۴۱ است. (الف) نمودار نیروی $F(x)$ وارد بر ذره را به‌طورکمی رسم کنید؛ مقیاس x را همان مقیاس شکل ۴۱ بگیرید. (ب) انرژی مکانیکی (ثابت) ذره، E، برابر با ۴٫۰ J است. نمودار انرژی جنبشی ذره، $K(x)$، را مستقیماً روی همان شکل ۴۱ رسم کنید.



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۳۹

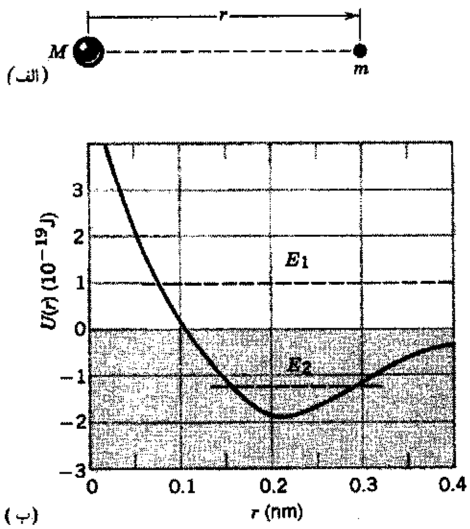
۴۰. ذره‌ای به جرم ۲٫۰ kg در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $U(x)$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به صورت شکل ۴۲ است. در $x = 2.0\,\text{m}$ سرعت ذره $-2.0\,\text{m/s}$ است.



شکل ۴۲. مسئلهٔ ۴۰

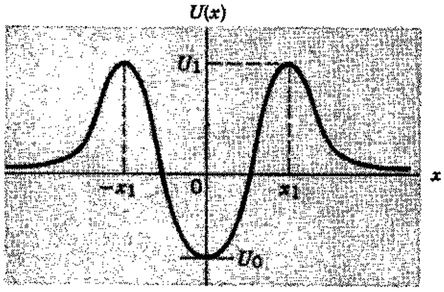
(الف) نیروی وارد بر ذره در این نقطه چقدر است؟ (ب) ذره در چه محدوده‌ای از x حرکت می‌کند. (ج) سرعت ذره در $x = 7.0\,\text{m}$ چقدر است؟

۴۱. شکل ۴۳الف اتمی به جرم m را در فاصلهٔ r از اتم ساکنی به جرم m نشان می‌دهد؛ $m \ll M$ است. شکل ۴۳ب تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ برحسب مکان اتم سبکتر را نشان می‌دهد. حرکت این اتم را (الف) اگر انرژی مکانیکی کل از صفر بزرگتر، مثلاً E_1، باشد، و (ب) اگر این انرژی از صفر کوچکتر، مثلاً E_2 باشد، توصیف کنید. به‌ازای $E_1 = 1.0 \times 10^{-19}\,\text{J}$، و در $r = 0.30\,\text{nm}$ (ج) انرژی پتانسیل، (د) انرژی جنبشی، و (ه) (اندازه و جهت) نیروی وارد بر ذرهٔ متحرک را به‌دست بیاورید.



شکل ۴۳. مسئلهٔ ۴۱

۴۲. یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ هلیم)، با انرژی پتانسیلی به‌صورت شکل ۴۴، داخل هستهٔ بزرگی مقید است. (الف) تابعی از x بسازید که به این شکل کلی باشد: یک کمینه به مقدار U_0 در $x = 0$ و یک بیشینه به مقدار U_1 در $x = x_1$ و $x = -x_1$ داشته باشد. (ب) نیروی بین ذرهٔ آلفا و هسته را به‌صورت تابعی از x رسم کنید. (ج) انواع حرکتهای ممکن را توصیف کنید.



شکل ۴۴. مسئلهٔ ۴۲

بخش ۸ـ۵ سیستمهای پایستار دو و سه‌بعدی

۴۳. نشان بدهید که، به‌ازای سرعتهای اولیهٔ یکسان v_0، سرعت v همهٔ پرتابه‌ها، در ارتفاع یکسان، یکسان است و به زاویهٔ پرتاب بستگی ندارد. مقاومت هوا را به‌حساب نیاورید.

۴۴. انرژی پتانسیل متناظر با نیروی دوبعدی معینی $U(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ است. (الف) F_x و F_y را به‌دست بیاورید. بردار نیرو را در هر نقطه، برحسب مختصات x و y آن نقطه، بیان کنید. (ب) F_r و F_θ را به‌دست بیاورید و بردار نیرو را در هر نقطه، برحسب مختصات قطبی r و θی آن نقطه، بیان کنید. (ج) آیا مدل فیزیکی‌ای برای چنین نیرویی به‌نظرتان می‌رسد؟

۴۵. انرژی پتانسیل یوکاوا

$$U(r) = -\frac{r_0}{r}U_0 e^{-r/r_0}$$

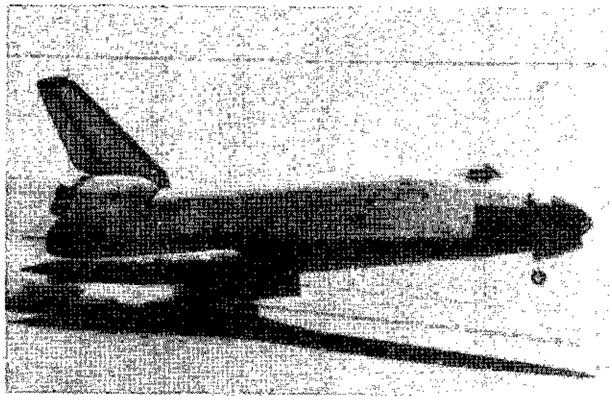
توصیف نسبتاً دقیقی از برهم‌کنش بین هستکها (یعنی نوترونها و پروتونها که اجزای سازندهٔ هسته‌اند) به‌دست می‌دهد. ثابت r_0 در حدود $1.5 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$، و ثابت U_0 در حدود ۵۰MeV است. (الف) عبارت نیروی جاذبهٔ متناظر با این پتانسیل را پیدا کنید. (ب) نشان بدهید که این نیرو کوتاه‌برد است؛ به این منظور، نسبت مقادیر نیرو در هر یک از فواصل $r = 2r_0$، $r = 4r_0$، و $r = 10r_0$ را به مقدار آن در $r = r_0$ حساب کنید.

۴۶. با انتگرال‌گیری در روی همان سه مسیر مثال ۵، نشان بدهید که نیروی $\mathbf{F} = -k_1 y\mathbf{i} - k_2 x\mathbf{j}$، اگر $k_1 \neq k_2$ باشد ناپایستار است.

بخش ۸ـ۶ پایستگی انرژی در سیستمهای ذرات

۴۷. توله خرسی به جرم ۲۵٫۳kg از حالت سکون روی تنهٔ درخت کاجی می‌لغزد و ۱۲٫۲m پایین می‌آید؛ سرعت او در پایین مسیر ۵٫۵۶m/s است. (الف) انرژی پتانسیل اولیهٔ توله خرس چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی‌اش در پایین درخت چقدر است؟ (ج) تغییر انرژی مکانیکی توله خرس، در اثر نیروهای اصطکاک، چقدر است؟

۴۸. فضاپیمای شاتل (به جرم ۷۹۰۰۰kg)، هنگام بازگشت از مدار


شکل ۴۵. مسئلهٔ ۴۸

به زمین، با سرعت ۱۸۰۰۰mi/h وارد جو می‌شود؟ این سرعت به تدریج کم می‌شود تا شاتل به‌سرعت فرودِ ۱۹۰ گره (یعنی۲۲۰mi/h) برسد. انرژی جنبشی فضاپیما (الف) هنگام ورود به جو و (ب) هنگام فرود چقدر است (شکل ۴۵)؟ (ج) چه بر سر انرژی "از دست رفته" می‌آید؟

۴۹. شخصی به جرم ۶۸kg در حال سقوط آزاد با سرعت حد ثابت ۵۹m/s است. آهنگ افزایش انرژی داخلی این شخص و هوای اطراف او چقدر است؟

۵۰. رودخانه‌ای طی عبور از تنداب در مسیرش ۱۵m ارتفاع از دست می‌دهد. سرعت آب، هنگام ورود به تنداب ۳٫۲m/s، و هنگام خروج ۱۳m/s است. چند درصد از انرژی پتانسیل که آب، در گذشتن از تنداب، از دست می‌دهد به شکل انرژی جنبشی آب در پایین رود ظاهر می‌شود؟ چه بر سر بقیهٔ انرژی می‌آید؟

۵۱. سنگی به جرم ۵۲۴kg از حالت سکون روی شیب تپه‌ای شروع به لغزش می‌کند. طول شیب ۴۸۸m و ارتفاع آن ۲۹۲m است. سرعت سنگ در پایین تپه ۶۲٫۶m/s است. این سنگ طی لغزش، در اثر اصطکاک، چقدر انرژی مکانیکی از دست داده است؟

۵۲. پرتابه‌ای به جرم ۹٫۴kg در راستای قائم به بالا پرتاب می‌شود. طی مدتی که پرتابه به بالا می‌رود، ۶۸kJ از انرژی مکانیکی آن در اثر اصطکاک با هوا تلف می‌شود. اگر مقاومت هوا ناچیز بود، پرتابه چقدر بالاتر می‌رفت؟

۵۳. جسمی به جرم ۴٫۲۶kg، با سرعت ۷٫۸۱m/s روی شیبی به‌زاویهٔ ۳۳٫۰° شروع به بالا رفتن می‌کند. این جسم، با فرض اینکه ۳۴٫۶J از انرژی مکانیکی‌اش صرف مقابله با اصطکاک شود، تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟

۵۴. سنگی به وزن w در امتداد قائم با سرعت اولیهٔ v_0 به بالا پرتاب می‌شود. فرض کنید که نیروی مقاومت هوا، f، در مسافت y که سنگ طی می‌کند به‌اندازهٔ fy از انرژی مکانیکی آن می‌کاهد. (الف) نشان

بدهید که بیشترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد

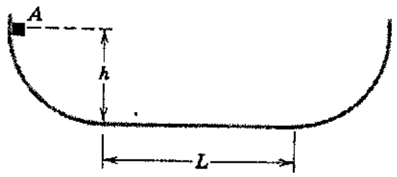
$$h = \frac{v_\circ^{۲}}{۲g(۱ + f/w)}$$

است. (ب) نشان بدهید که سرعت سنگ، هنگام برخورد با زمین برابر است با

$$v = v_\circ \left(\frac{w - f}{w + f}\right)^{۱/۲}$$

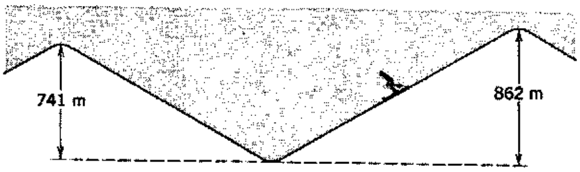
۵۵. جسمی به جرم ۱٫۳۴kg، که روی سطحی افقی در حال لغزش است، به فنری با ثابت نیروی ۱٫۹۳N/cm برمی‌خورد. جسم فنر را به‌اندازهٔ ۴٫۱۶cm، نسبت به حالت آزاد آن، فشرده می‌کند. از زمانی که جسم به فنر می‌خورد تا زمانی که ساکن می‌شود، در اثر اصطکاک میان جسم و سطح ۱۱۷mJ انرژی مکانیکی اتلاف می‌شود. سرعت جسم در لحظهٔ برخورد با فنر چقدر بوده است؟

۵۶. جسم کوچکی به جرم $m = ۲۳۴\text{g}$ در مسیری که در شکل ۴۶ نشان داده شده است می‌لغزد؛ دو انتهای مسیر به طرف بالا شیب دارند و بخش میانی آن تخت است. طول بخش میانی $L = ۲٫۱۶\text{m}$ است. بخشهای خمیدهٔ مسیر بدون اصطکاک‌اند. جسم، هنگام گذشتن از بخش تخت مسیر، در اثر اصطکاک ۶۸۸mJ انرژی مکانیکی از دست می‌دهد. اگر این جسم از نقطهٔ A به ارتفاع $h = ۱٫۰۵\text{m}$ نسبت به قسمت تخت مسیر، رها شود، سرانجام، در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟



شکل ۴۶. مسئلهٔ ۵۶

۵۷. ارتفاع دو قلهٔ پوشیده از برف، ۸۶۲m و ۷۴۱m است. از قلهٔ بلندتر تا قلهٔ کوتاهتر یک پیست اسکی هست (شکل ۴۷). (الف) اسکی‌بازی اسکی‌بازی از قلهٔ بلندتر، از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. اگر این اسکی‌باز از میله‌های اسکی خود استفاده نکند و فقط سربخورد، با چه سرعتی به قلهٔ کوتاهتر می‌رسد؟ فرض کنید که مسیر یخبندان است و عملاً اصطکاکی در کارنیست. (ب) پس



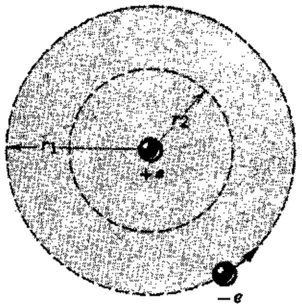
شکل ۴۷. مسئلهٔ ۵۷

از بارش برف، اسکی‌بازی به جرم ۵۴٫۴kg با همین شرایط، بدون استفاده از میله‌هایش، شروع به حرکت می‌کند؛ این اسکی‌باز فقط می‌تواند (با سرعت نهایی صفر) خودش را به قلهٔ کوتاهتر برساند. انرژی داخلی چوبهای اسکی و برفِ مسیر چقدر افزایش یافته است؟

۵۸. اندازهٔ نیروی جاذبهٔ بین پروتون با بار مثبت و الکترون با بار منفی در اتم هیدروژن

$$F = k\frac{e^{۲}}{r^{۲}}$$

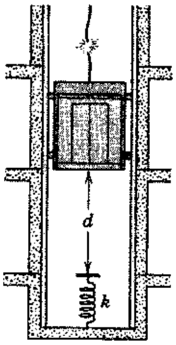
است، که درآن e بار الکترون، k ثابت، و r فاصلهٔ میان الکترون و پروتون است. فرض کنید که پروتون ساکن است. تصور کنید که الکترون در ابتدا در حال حرکت بر دایره‌ای به شعاع $r_۱$ حول پروتون است و ناگهان به مداری دایره‌ای با شعاع $r_۲$، کوچکتر از $r_۱$، می‌جهد (شکل ۴۸). (الف) با استفاده از قانون دوم نیوتون، تغییر انرژی جنبشی الکترون را حساب کنید. (ب) با استفاده از رابطهٔ نیرو با انرژی پتانسیل، تغییر انرژی پتانسیل اتم را حساب کنید. (ج) در این فرایند، انرژی کل اتم چقدر تغییر کرده است؟ (این انرژی معمولاً به شکل تابش از اتم خارج می‌شود).



شکل ۴۸. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. آسانسوری به وزن ۴۰۰۰lb در طبقهٔ اول ساختمان ساکن است، چنانکه کف آن به فاصلهٔ $d = ۱۲٫۰\text{ft}$ بالاتر از فنر بازدارندهٔ زیر آسانسور (هم سطح با طبقهٔ همکف) واقع شده است؛ ثابت نیروی این فنر ۱۰۰۰۰lb/ft است. در این حالت کابل نگهدارندهٔ آسانسور پاره می‌شود (شکل ۴۹). در این لحظه یک ترمز ایمنی به کار می‌افتد و باعث می‌شود که آسانسور با ریلهای مسیر درگیر شود؛ در نتیجه، به‌ازای هر ۱٫۰۰ft که آسانسور حرکت می‌کند، ۱۰۰۰ftlb انرژی مکانیکی از سیستم گرفته می‌شود. (الف) سرعت آسانسور، درست پیش از برخورد به فنر، چقدر است؟ (ب) حداکثر فشردگی فنر را حساب کنید. (ج) حداکثر مسافتی را که آسانسور، نسبت به فنر، به بالا برمی‌گردد پیدا کنید. (د) به‌طور تقریبی، کل مسافتی که آسانسور قبل

از توقف کامل طی می‌کند چقدر است؟ چرا این جواب دقیق نیست؟



شکل ۴۹. مسئلهٔ ۵۹

۶۰. اتومبیلی به جرم ۱۷۰۰kg با سرعت ثابت ۱۵m/s حرکت می‌کند. در این حالت، موتور آن ۱۶kW توان تولید می‌کند که صرف غلبه بر اصطکاک، مقاومت باد، و غیره می‌شود. (الف) نیروی بازدارندهٔ مؤثر ناشی از مجموعهٔ همهٔ نیروهای اصطکاک چقدر است؟ (ب) اگر اتومبیل بخواهد با سرعت ۱۵m/s از یک شیب ۰٫۸٪ بالا برود، باید چقدر توان از موتور بگیرد؟ (شیب ۸٫۰m ارتفاع به‌ازای ۱۰۰m مسافت افقی.) (ج) اتومبیل در چه شیبی (به‌درصد بیان کنید) با موتور خاموش می‌تواند با سرعت ۱۵m/s پایین بیاید؟

بخش ۸ـ۷ جرم و انرژی

۶۱. (الف) چند ژول انرژی معادل با ۱۲۰ گرم جرم است؟ (ب) این انرژی چند سال نیاز انرژی یک خانه، با مصرف متوسط ۱٫۳۰kW، را تأمین می‌کند؟

۶۲. رابطهٔ "شدت" زلزله در مقیاس ریشتر، M، با انرژی آزاد شده، E، برحسب ژول، چنین است

$$\log E = ۱٫۴۴M + ۵٫۲۴$$

(الف) شدت زلزلهٔ سال ۱۹۸۹ در منطقهٔ سان‌فرانسیسکو (شکل ۵۰) ۷٫۱ بود. در این زلزله چقدر انرژی آزاد شده بود؟ (ب) مقدار کاهش جرم متناظر با این انرژی آزاد شده چقدر است؟

۶۳. یک نیروگاه هسته‌ای در اورگون، طی یک سال به‌طور پیوسته ۱۰۳۰MW توان مفید تحویل می‌دهد. علاوه بر این، ۲۱۰۰MW توان هم به شکل انرژی گرمایی به رود کلمبیا منتقل می‌کند. تغییر جرم سوخت هسته‌ای، پس از یک سال کار نیروگاه، چقدر است؟

۶۴. در سال ۱۹۸۳، ایالات متحده در حدود $۲٫۳۱ \times ۱۰^{۱۲}$kWh انرژی الکتریکی تولید کرد. فرض کنید که این انرژی در نیروگاههای هسته‌ای تولید شده باشد. مقدار کاهش جرم سوخت هسته‌ای این نیروگاهها، برای تولید این انرژی چقدر بوده است؟

۶۵. جرم یک قرص آسپیرین ۳۲۰mg است. انرژی متناظر با این جرم (به شکل بنزین) تا چند مایل توان یک اتومبیل را تأمین می‌کند؟ فرض کنید اتومبیل با هرگالن بنزین ۳۰ مایل حرکت می‌کند و گرمای احتراق بنزین ۱۳۰MJ/gal است. جواب خودتان را برحسب محیط استوایی زمین بیان کنید.

۶۶. توان فضاپیمایی از نابودی ماده‌ـپادماده تأمین می‌شود. چقدر ماده و پادماده باید نابود شود تا فضاپیمایی به جرم ۱۸۲۰ton را از سکون به یک دهم سرعت نور برساند؟ رابطهٔ غیرنسبیتی انرژی جنبشی را به‌کار ببرید.

۶۷. خورشید با آهنگ ۴×۱۰^{۲۶}W انرژی تابش می‌کند. هر روز "چند تن آفتاب" به زمین می‌رسد؟

شکل ۵۰. مسئلهٔ ۶۲

۶۸. انرژی بستگی هستهٔ یک اتم برابر است با تفاضل مجموع انرژیهای سکون پروتونها و نوترونهای سازندهٔ آن هسته، و انرژی سکون خود هسته. هستهٔ اتم طلا ۷۹ پروتون و ۱۱۸ نوترون دارد و جرم آن ۱۹۶٫۹۲۳۲u است. انرژی بستگی این هسته را حساب کنید. (جرم پروتون ۱٫۰۰۷۲۸u، و جرم نوترون ۱٫۰۰۸۶۷u است؛ انرژی سکون یک یکای جرم اتمی برابر با ۹۳۱٫۵MeV است.)

بخش ۸ـ۸ کوانتش انرژی

۶۹. انرژی یک اتم چقدر باید تغییر کند تا نوری با بسامد $5.34 \times 10^{14}\,\text{s}^{-1}$ از آن گسیل شود؟

۷۰. (الف) انرژی اتم هیدروژنی $-3.4\,\text{eV}$ است. اگر این انرژی به $-13.6\,\text{eV}$ تغییر کند، فرکانس نور چقدر خواهد بود؟ (ب) آیا این نور گسیل می‌شود یا جذب؟

پروژه‌های کامپیوتری

۷۱. فرض کنید نیروی وارد بر ذره‌ای $\mathbf{F} = 8xy^3\mathbf{i} + 12x^2y^2\mathbf{j}$ باشد. این نیرو پایستار، و پتانسیل متناظر با آن $U = -4x^2y^3$ است. با استفاده از این تابع می‌توانید بعضی از ویژگیهای مهم نیروهای پایستار را نشان بدهید. اولاً، انرژی پتانسیل ذره فقط به مختصات آن بستگی دارد. روی یک کاغذ دستگاه مختصاتی رسم کنید که در آن، x و y هر دو بین -5m تا $+5\text{m}$ باشند. اکنون با استفاده از یک برنامهٔ کامپیوتری یا الگوریتم، مقادیر انرژی پتانسیل را به‌ازای همهٔ مقادیر صحیح x و y (برحسب متر)، بین دو حد بالا، به‌دست بیاورید. و این مقادیر را، در نقاط متناظر، به نمودار منتقل کنید. با استفاده از این نمودار، به پرسشهای زیر جواب بدهید. (الف) طی حرکت ذره از $x = -5\text{m}$، $y = -5\text{m}$ به مبدأ، این نیرو چقدر کارانجام می‌دهد؟ (ب) طی حرکت ذره از مبدأ به $x = +5\text{m}$، $y = +3\text{m}$ چطور؟ (ج) طی حرکت ذره از $x = -5\text{m}$، $y = -5\text{m}$ به $x = +5\text{m}$، $y = +3\text{m}$ چطور؟ جواب شما باید برابر با مجموع جوابهای قسمتهای (الف) و (ب) باشد. (د) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی ۹۰۰J شروع می‌کند و به نقطهٔ $x = +5\text{m}$، $y = +2\text{m}$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطهٔ اخیر چقدر است؟ (ه) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی ۹۰۰J شروع می‌کند و به $x = +5\text{m}$، $y = -2\text{m}$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطهٔ اخیر چقدر است؟ (و) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی ۶۰۰J شروع می‌کند و در راستای خط $x = -y$ به‌طرف $x = +5\text{m}$، $y = -5\text{m}$ حرکت می‌کند. نیروی دیگری هم لازم است تا ذره دراین مسیر بماند اما فرض کنید که این نیرو همواره بر مسیر عمود است. ذره درکجا می‌ایستد؟

۷۲. روبوتی صندوقی به جرم ۲۰kg را با سرعت ثابت، از $x = 0$ تا $x = 5.0\text{m}$، روی زمین هل می‌دهد. شرایط سطح زمین تغییر می‌کند، و روبوت هم صندوق را با نیروی افقی متغیری هل می‌دهد تا سرعت آن ثابت بماند. معلوم می‌شود که رابطهٔ $F(x) = 0.30mg\sqrt{x}e^{-0.20x}$، توصیف خوبی برای این نیروست؛ در این رابطه، x برحسب متر و F برحسب نیوتون است. کاری را که روبوت بین $x = 0$ و $x = 5\text{m}$ انجام می‌دهد حساب کنید.

کار انجام شده از رابطهٔ $W = \int_0^5 F\,dx$ به‌دست می‌آید. این انتگرال را نمی‌شود به‌طور تحلیلی محاسبه کرد، اما می‌شود مقدار آن‌را با روشهای عددی، به کمک کامپیوتر، تخمین زد. ناحیهٔ انتگرال‌گیری را N بازه، هر یک به اندازهٔ Δx، تقسیم کنید، و F_i را مقدار نیرو در مرکز بازهٔ iام بگیرید. در این صورت خواهیم داشت $\int_0^5 F\,dx \approx \Delta x \Sigma_{i=1}^{N} F_i$. هر چه Δx کوچکتر شود، براورد دقیقتر می‌شود. اما Δx را خیلی هم نمی‌شود کوچک کرد چون در این‌صورت در محاسبهٔ مجموع، ارقام بامعنی از دست می‌روند. (شاید بخواهید از روش سیمسون استفاده کنید، که براورد بهتری می‌دهد. برای آشنایی با جزئیات این روش به کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال رجوع کنید.)

برنامه‌ای برای کامپیوتر بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که کار این نیرو را محاسبه کند. در این برنامه باید بتوانید مقادیر x_0، x_f و N را وارد کنید. جمع را می‌توانید با یک حلقهٔ تکرار انجام بدهید. در هر بار تکرار حلقه، نیرو در مرکز بازه حساب می‌شود و به مجموعی که قبلاً حساب شده است افزوده می‌شود. در اجرای اول بگیرید $N = 20$؛ سپس برنامه را چند بار دیگر هم اجرا کنید و هر بار N را دو برابرکنید. هنگامی که نتیجهٔ دو اجرای متوالی، تا سه رقم بامعنی، یکسان شد کار را متوقف کنید.

۷۳. نیروی پایستار $\mathbf{F}$ با مؤلفه‌های $F_x = y(1-x)e^{-x}$، $F_y = xe^{-x}$، و $F_z = 0$، بر ذره‌ای وارد می‌شود. (الف) فرض کنید ذره از مبدأ، در راستای محور x، حرکت می‌کند و به $x = 2.0\text{m}$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور y حرکت می‌کند و به $x = 2.0\text{m}$، $y = 2.0\text{m}$ می‌رسد. کار انجام شده توسط این نیرو را، به‌راحتی می‌توان به‌طور تحلیلی محاسبه کرد. این محاسبه را انجام بدهید. حالا فرض کنید که ذره از مبدأ در راستای محور y حرکت می‌کند. به $y = 2.0\text{m}$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور x حرکت می‌کند و به $x = 2.0\text{m}$، $y = 2.0\text{m}$ می‌رسد. کارنیرو را در این مسیر هم حساب کنید، اما این بار با استفاده از انتگرال‌گیری عددی. برای جزئیات روش کار به مسئلهٔ قبلی رجوع کنید. سرانجام، یک برنامهٔ انتگرال‌گیری عددی به‌کار ببرید که کار این نیرو را، در حرکت جسم از مبدأ به نقطهٔ $x = 2.0\text{m}$، $y = 2.0\text{m}$ روی خط $y = x$، محاسبه کند. چون نیرو پایستار است، جواب حاصل از هر سه مسیر (در محدودهٔ دقت محاسبه) باید یکسان باشد. (ب) نیروی $\mathbf{F}$، با مؤلفه‌های $F_x = y^2(1-x)e^{-x}$، $F_y = xe^{-x}$ و $F_z = 0$، ناپایستار است. کار این نیرو را طی حرکت ذره از مبدأ به نقطهٔ $x = 2.0\text{m}$، $y = 2.0\text{m}$، در هر یک از سه مسیر قسمت (الف) حساب کنید. توجه کنید که نتایج حاصل برای مسیرهای مختلف یکسان نخواهد بود.

۹

سیستمهای ذرات

تا اینجا اجسام را ذره ــ یعنی «با جرم» ولی «بی‌اندازه» ــ در نظر گرفته‌ایم. این البته فرض خیلی بدی هم نیست، چون در حرکت انتقالی ساده، در واقع تمام نقاط جسم دقیقاً مثل هم حرکت می‌کنند و فرقی نمی‌کند که جسم را ذره بگیریم یا یک جسم گستردهٔ واقعی. اما در مورد بسیاری از اجسام متحرک نمی‌توانیم چنین کنیم. مثلاً وقتی جسمی ضمن انتقال دوران هم داشته باشد، یا وقتی اجزاء جسمی نسبت به‌یکدیگر نوسان کنند دیگر درست نیست که کل جسم را مثل یک ذره در نظر بگیریم. حتی در این موارد پیچیده‌تر هم، یک نقطهٔ مربوط به جسم هست که، تحت تأثیر نیروهای خارجی، درست مثل یک ذره رفتارمی‌کند. اسم این نقطه **مرکز جرم** است. در این فصل خواهیم گفت که چه‌طور می‌توانیم مرکز جرم اجسام را پیدا کنیم، و نشان خواهیم داد که قوانین ساده (یعنی همان قوانین نیوتون) برای توصیف حرکت مرکز جرم سیستمهای پیچیده، به فرمولبندی دومین قانون بزرگ پایستگی، یعنی **پایستگی تکانهٔ خطی**، منجر می‌شود.

۹ـ۱ سیستمهای دوذره‌ای

در فصلهای ۷ و ۸ برای مطالعهٔ حرکتِ جسمی که تحت تأثیر نیروی فنر بود از مفاهیم مربوط به انرژی استفاده کردیم. حالا می‌خواهیم به مسئله‌ای بپردازیم که کمی پیچیده‌تر است: حرکت یک‌بعدی دو جسم که به‌وسیلهٔ فنری به هم متصل‌اند. برای سادگی، فعلاً فرض می‌کنیم که جز نیروی فنر، هیچ نیروی خارجی خالص دیگری به این اجسام اثر نمی‌کند. یعنی، فرض می‌کنیم که دو جسم می‌توانند بدون اصطکاک، روی یک سطح افقیِ هموار بلغزند. یک نمونهٔ عملی از چنین وضعیتی می‌تواند حرکت دو لَغزندهٔ متصل با فنر روی یک ریل هوا باشد.

وقتی فنر کشیده یا فشرده می‌شود، به هر دو جسم، که می‌توانیم هر یک را به تنهایی مثل ذره در نظر بگیریم، نیرو وارد می‌کند. نیروهای وارد بر دو جسم مقدارهای مساوی دارند. (فنر را می‌شود صرفاً نمایش مادی نیروهایی دانست که دو جسم ــ مثلاً دو اتم در یک مولکول ــ می‌توانند بی‌واسطه بر یکدیگر وارد کنند. در این صورت، قانون سوم نیوتون، ایجاب می‌کند که نیروهای وارد بر دو ذره مساوی و در جهتهای مخالف باشند. وجود فنر، که بی‌جرم فرض شده است، این الزام را تغییر نمی‌دهد.)

حرکتهای این دو جسم را نمی‌توانیم مستقل از یکدیگر با استفاده از قوانین نیوتون تحلیل کنیم، زیرا حرکت هر کدام وابسته به حرکت دیگری است. مثلاً، اگر یکی از اجسام خیلی پرجرمتر از دیگری باشد، جابه‌جایی آن نسبتاً کوچک است و جابه‌جایی جسم کم‌جرمتر تقریباً برابر با تغییر طول فنر است. از طرف دیگر، اگر دو جسم دارای جرمهای مساوی باشند، اندازهٔ جابه‌جایی هرکدام از آنها برابر با نصف افزایش طول فنر است.

در شکل ۱ نمونه‌ای از حرکتی که می‌خواهیم بررسی‌اش کنیم نشان داده شده است. در این مورد ابتدا فنر (با ثابت نیروی k) مقداری کشیده شده است و دو جسم از حالت سکون رها شده‌اند. فرض کنید کشیدگی اولیهٔ فنر d_i باشد، در این‌صورت انرژی اولیه برابر است با $E_i = U_i + K_i = \frac{1}{2}kd_i^2 + 0$. در هر لحظهٔ خاصی که در آن تغییر طول فنر برابر با d باشد، انرژی سیستم برابر است با

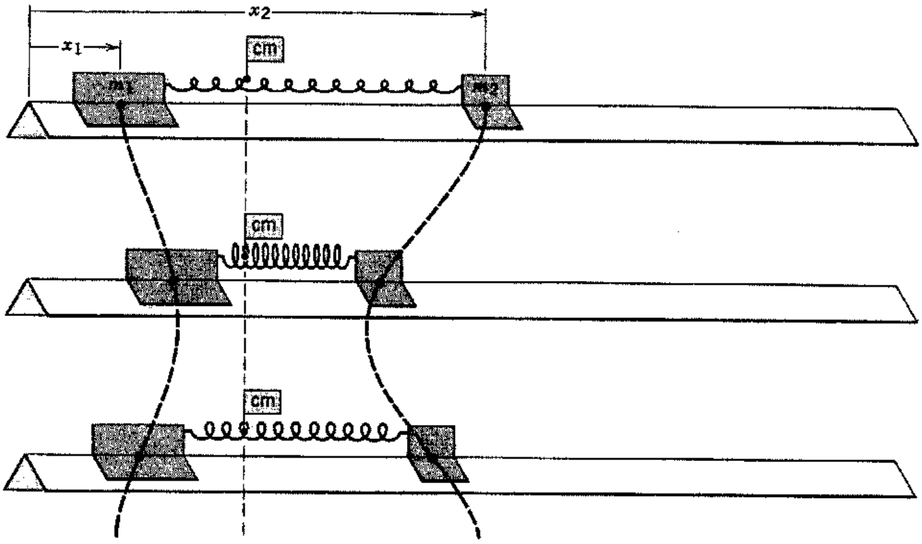
$$E = U + K = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (1)$$

که شامل انرژی پتانسیل فنر و انرژی جنبشی دو جسم است. پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که انرژی E در هر زمانی مساوی با انرژی اولیه (E_i) باشد، یعنی

$$\frac{1}{2}kd_i^2 = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (2)$$

از شکل ۱ پیداست که مکانهای دو جسم با رابطهٔ زیر به هم مربوط می‌شوند

$$x_2 = x_1 + L + d \qquad (3)$$



شکل ۱. دو لغزنده که با یک فنر کشیده شده به هم متصل‌اند، روی یک ریل هوا از حالت سکون رها می‌شوند. حرکت حاصل، جز برای نقطهٔ مشخص شده با پرچم، که ساکن می‌ماند، ساده نیست. بازه‌های زمانی بین وضعیتهای متوالی، با هم مساوی‌اند. در مورد این سیستم $m_1 = 2m_2$ است.

که در آن L طول عادی فنر است. معادله‌های ۲ و ۳ حاوی اطلاعات کافی برای تعیین x_1 و x_2 به‌صورت توابعی از زمان نیستند، و بنابراین نمی‌توانیم بدون دستیابی به اطلاعات بیشتر، این مسئله را به‌طور کامل حل کنیم.

اطلاعات اضافیِ مورد نیاز از بررسی و تحلیل یک نقطهٔ خاص در سیستم شکل ۱ حاصل می‌شود. این نقطه، که مرکز جرم (cm) سیستم نامیده می‌شود، در شکل ۱ با پرچم کوچکی مشخص شده است. در مورد این سیستم، مرکز جرم اصلاً حرکت نمی‌کند.

ببینیم که استفاده از مرکز جرم چگونه ما را در تکمیل حل این مسئله یاری می‌کند. مکان مرکز جرم، برای مورد خاص دو ذره در یک بعد، به‌صورت

$$x_{\rm cm} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2) \qquad (۴)$$

تعریف می‌شود، که در آن x_1 و x_2 مختصات دو ذره و M جرم کل سیستم است

$$M = m_1 + m_2$$

مرکز جرم یک سیستم دو جسمی نقطه‌ای است در فضا که با معادلهٔ ۴، در یک بعد، تعریف می‌شود. الزامی نیست که این نقطه، جزئی از این یا آن جسم باشد.

سرعت مرکز جرم، $v_{\rm cm}$، از مشتق معادلهٔ ۴ نسبت به زمان به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} v_{\rm cm} = \frac{dx_{\rm cm}}{dt} &= \frac{1}{M}\frac{d}{dt}(m_1x_1 + m_2x_2) \\ &= \frac{1}{M}\left(m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{M}(m_1v_1 + m_2v_2) \end{aligned} \qquad (۵)$$

که همان سرعت پرچم در شکل ۱ است. برای پیدا کردن شتاب مرکز جرم، یکبار دیگر (این بار از معادلهٔ ۵) مشتق می‌گیریم؛ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} a_{\rm cm} = \frac{dv_{\rm cm}}{dt} &= \frac{1}{M}\frac{d}{dt}(m_1v_1 + m_2v_2) \\ &= \frac{1}{M}\left(m_1\frac{dv_1}{dt} + m_2\frac{dv_2}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{M}(m_1a_1 + m_2a_2) \end{aligned} \qquad (۶)$$

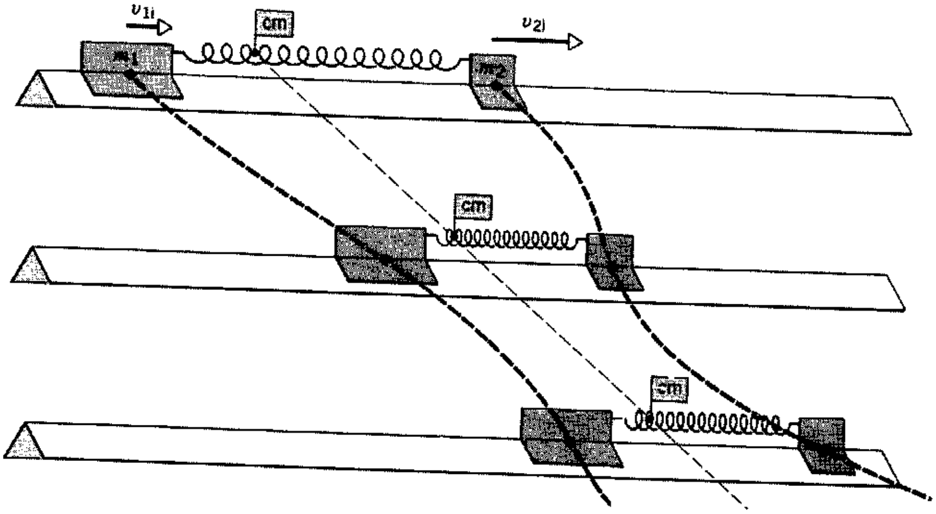
که در آن a_1 شتاب m_1 و a_2 شتاب m_2 است.

در ادامهٔ مطلب، قوانین نیوتون را جداگانه به هر یک از جرمهای m_1 و m_2 اعمال می‌کنیم. نیروی وارد بر m_1 از m_2 را $\mathbf{F}_{12}$ و نیروی وارد بر m_2 از m_1 را با $\mathbf{F}_{21}$ نمایش می‌دهیم. از قانون دوم نیوتون در مورد m_1 و m_2 به‌ترتیب نتیجه می‌شود $\mathbf{F}_{12} = m_1\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{F}_{21} = m_2\mathbf{a}_2$. (در مثال ما، این فنر است که نیروها را به m_1 و m_2 وارد می‌کند. ولی، این فرض که اجسام بی‌واسطه به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند، تا وقتی فنر بدون جرم در نظر گرفته شود، چیزی از کلیت مسئله کم نمی‌کند.) قانون سوم نیوتون ایجاب می‌کند که $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. از نشاندن این کمیتها در معادلهٔ ۶ نتیجه می‌شود که

$$a_{\rm cm} = \frac{1}{M}(\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) = 0$$

در این مورد خاص، که هیچ نیروی خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود، مرکز جرم هیچ شتابی ندارد و بنابراین با سرعت ثابت حرکت می‌کند (این سرعت ثابت در مورد سیستم شکل ۱ اتفاقاً صفر است). با استفاده از معادله‌های ۴ و ۵ در ترکیبی از معادلات ۲ و ۳ می‌توانیم یا x_1 و v_1 را حذف کنیم یا x_2 و v_2 را، و به این ترتیب حل مسئله کامل می‌شود (نگاه کنید به مسئلهٔ ۱).

شکل ۲ حالت کلی‌تری را نشان می‌دهد که در آن به فنر یک [illegible] و به جسمها سرعتهای اولیهٔ v_{1i} و v_{2i} داده شده



شکل۲. به دو جسم لغزنده که توسط فنر کشیده شده‌ای به هم متصل شده‌اند سرعتهای اولیهٔ دلبخواهی داده شده است. این دو جسم حرکات پیچیده‌ای دارند، در حالی‌که مرکز جرم ـ‌که با پرچم مشخص شده است‌ـ با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بازه‌های زمانی بین وضعیتهای متوالی، با هم مساوی‌اند.

است. در اینجا می‌توانید ببینید که مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند ـ‌کل سیستم اگرچه کاملاً پیچیده است.

معادله‌های ۴ و ۵ و ۶ خیلی کلی‌تر از آن‌اند که این مسئله خاص مطرح می‌کند. حالا برای اینکه مسئله را به کلی‌ترین صورت مطرح کرده باشیم، فرض می‌کنیم که به جسم m_1، علاوه بر نیروی داخلی $\mathbf{F}_{12}$ که از طرف جسم m_2 وارد می‌شود، یک نیروی خارجی $\mathbf{F}_{\text{ext},1}$ نیز اثر می‌کند. (مثلاً، ممکن است ریل هوا شیبدار باشد و نیروی وزن اثر کند، یا ممکن است آزمایش روی سطحی که اصطکاک دارد انجام شود.) قانون دوم نیوتون در مورد m_1 نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{F}_{\text{ext},1} + \mathbf{F}_{12} = m_1\mathbf{a}_1 \qquad (۷)$$

همچنین فرض می‌کنیم که بر جسم m_2 نیز یک نیروی خارجی $\mathbf{F}_{\text{ext},2}$ و یک نیروی داخلی $\mathbf{F}_{21}$ اثر کند، در این صورت داریم

$$\mathbf{F}_{\text{ext},2} + \mathbf{F}_{21} = m_2\mathbf{a}_2 \qquad (۸)$$

از جمع معادله‌های ۷ و ۸ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{F}_{\text{ext},1} + \mathbf{F}_{\text{ext},2} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 \qquad (۹)$$

مجموع دو جملهٔ اول، $\Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}}$، نیروی خارجی خالص وارد بر سیستم است (که قبلاً فرض کرده بودیم صفر باشد). مجموع دو جملهٔ بعدی، $\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}$، بنا به قانون سوم نیوتون که ایجاب می‌کند $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ باشد، صفر است. سمت راست معادلهٔ ۹، بنا به معادلهٔ ۶، برابر است با $M\mathbf{a}_{\text{cm}}$. به این ترتیب نتیجهٔ کلی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}} \qquad (۱۰)$$

این رابطه بسیار شبیه به قانون دوم نیوتون است ـ‌قانون دوم است در مورد ذره‌ای به جرم M که در مکان x_{cm} با سرعت v_{cm} در حرکت باشد.

با خلاصه کردن نتایج بررسی این سیستم دو ذره‌ای یک‌بعدی، می‌بینیم که برای بعضی مقاصد معین می‌توانیم فرض کنیم که جرم کل سیستم در x_{cm} متمرکز شده است و با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند. به‌علاوه، در غیاب نیروی خارجی خالص، $a_{\text{cm}} = ۰$ است و مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در بخشهای بعدی عبارتهای کلی‌تری برای این مفاهیم به‌دست می‌آوریم.

۹-۲ سیستمهای بس-ذره‌ای

در این بخش نتایج بخش قبلی را به سیستمهایی در سه‌بعد که شامل بیش از دو ذره‌اند تعمیم می‌دهیم.

سیستمی شامل N ذره با جرمهای m_1، m_2، ...، m_N را در نظر می‌گیریم. جرم کل این سیستم برابر است با

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \Sigma m_n$$

هر ذرهٔ این سیستم را می‌توان با جرمش، $m_n(n = 1, 2, \ldots, N)$، موقعیتش در دستگاه مختصات $\mathbf{r}_n$ (با مؤلفه‌های x_n، y_n و z_n)، سرعتش $\mathbf{v}_n$ (با مؤلفه‌های v_{nx}، v_{ny} و v_{nz}) و شتابش $\mathbf{a}_n$ نمایش داد. هر ذره تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}_n$ قرار می‌گیرد که در حالت کلی برای ذرات مختلف متفاوت است. بخشی از این نیرو از $N-1$ ذرهٔ دیگر ناشی می‌شود و بخش دیگرش ممکن است ناشی از عوامل خارجی باشد.

مرکز جرم سیستم را می‌توان با تعمیم منطقی معادلهٔ ۴ تعریف کرد

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N) = \frac{1}{M}\Sigma m_nx_n \qquad (۱۱\text{الف})$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_Ny_N) = \frac{1}{M}\Sigma m_ny_n \qquad (۱۱\text{ب})$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_N z_N) = \frac{1}{M}\Sigma m_n z_n \qquad (\text{۱۱ج})$$

با نمادهای برداری، این سه معادله را می‌توان به‌صورت جمع‌وجورتر، یعنی به شکل یک تک عبارت نوشت که موقعیت مرکز جرم را می‌دهد

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_N \mathbf{r}_N) = \frac{1}{M}\Sigma m_n \mathbf{r}_n \qquad (\text{۱۲})$$

با مشتق‌گیری از این عبارت، سرعت مرکز جرم به‌دست می‌آید

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \cdots + m_N \frac{d\mathbf{r}_N}{dt}\right)$$

یا

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + m_N \mathbf{v}_N) = \frac{1}{M}\Sigma m_n \mathbf{v}_n \qquad (\text{۱۳})$$

با یک مشتق‌گیری دیگر، شتاب مرکز جرم را به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N) = \frac{1}{M}\Sigma m_n \mathbf{a}_n \qquad (\text{۱۴})$$

معادلهٔ ۱۴ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$M\mathbf{a}_{cm} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N$$

یا

$$M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N \qquad (\text{۱۵})$$

طرف راست معادلهٔ ۱۵ مثل این است که قانون دوم نیوتون، یعنی $\mathbf{F}_n = m_n \mathbf{a}_n$، را به تک‌تک ذرات سیستم اعمال کرده باشیم. به این ترتیب نیروی کل وارد بر یک سیستم ذرات برابر است با جرم کل سیستم ضربدر شتاب مرکز جرم. معادلهٔ ۱۵ همان قانون دوم نیوتون برای یک سیستم N ذره‌ای است که به‌صورت یک تک ذره به جرم M واقع در مرکز جرم در نظر گرفته شده است. این تک ذره با سرعت $\mathbf{v}_{cm}$ حرکت می‌کند و شتابش $\mathbf{a}_{cm}$ است.

معادلهٔ ۱۵ را می‌توانیم از این هم که هست کمی ساده‌تر کنیم. در میان نیروهای وارد بر ذرات، یک دسته نیروهای داخلی‌اند که از برهم‌کنش با ذرات دیگر همان سیستم ناشی می‌شوند و دستهٔ دیگر نیروهای خارجی‌اند که از بیرون سیستم روی آن عمل می‌کنند. هر ذرهٔ m_n ممکن است تحت تأثیرنیرویی از ذرهٔ m_k واقع شود، که آن‌را با $\mathbf{F}_{nk}$ نمایش می‌دهیم. این نیروی خاص یکی از نیروهایی است که نیروی $\mathbf{F}_n$، نیروی کل وارد بر m_n، را می‌سازد. به همین ترتیب، نیروی کل وارد بر m_k شامل جملهٔ $\mathbf{F}_{kn}$ است که از برهم‌کنش با ذرهٔ m_n ناشی می‌شود. بنابر قانون سوم نیوتون $\mathbf{F}_{nk} = -\mathbf{F}_{kn}$ است و در نتیجه، این دو نیروی خاص به هنگام جمع کردن همهٔ نیروها در معادلهٔ ۱۵ همدیگر را حذف می‌کنند. درواقع، همهٔ چنین نیروهای داخلی‌ای، عضوی از یک زوج عمل‌ـعکس‌العمل‌اند و نهایتاً حذف می‌شوند. (در فصل ۵ هشدار دادیم که نیروهای عمل‌ـعکس‌العمل به ذرات متفاوت وارد می‌شوند و بنابراین نمی‌توانند با هم مخالفت کنند. اینجا هم این هشدار را فراموش نکرده‌ایم؛ باز هم عمل به یک ذره وارد می‌شود و عکس‌العمل به ذرهٔ دیگر، اینجا فرقش در این است که ما نیروها را جمع می‌کنیم تا نیروی خالص وارد بر دو ذره را به‌دست بیاوریم، و در این صورت، اعضای زوج عمل‌ـعکس‌العمل، که همچنان به ذرات متفاوت وارد می‌شوند، واقعاً یکدیگر را حذف می‌کنند.)

پس آنچه باقی می‌ماند کل نیروهای خارجی است و معادلهٔ ۱۵ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\Sigma\mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm} \qquad (\text{۱۶})$$

که می‌توان آن‌را برحسب مؤلفه‌هایش هم نوشت

$$\Sigma F_{ext,x} = M a_{cm,x}, \qquad \Sigma F_{ext,y} = M a_{cm,y}$$

و

$$\Sigma F_{ext,z} = M a_{cm,z}$$

می‌توانیم این نتیجه مهم را به‌صورت زیر بیان کنیم:

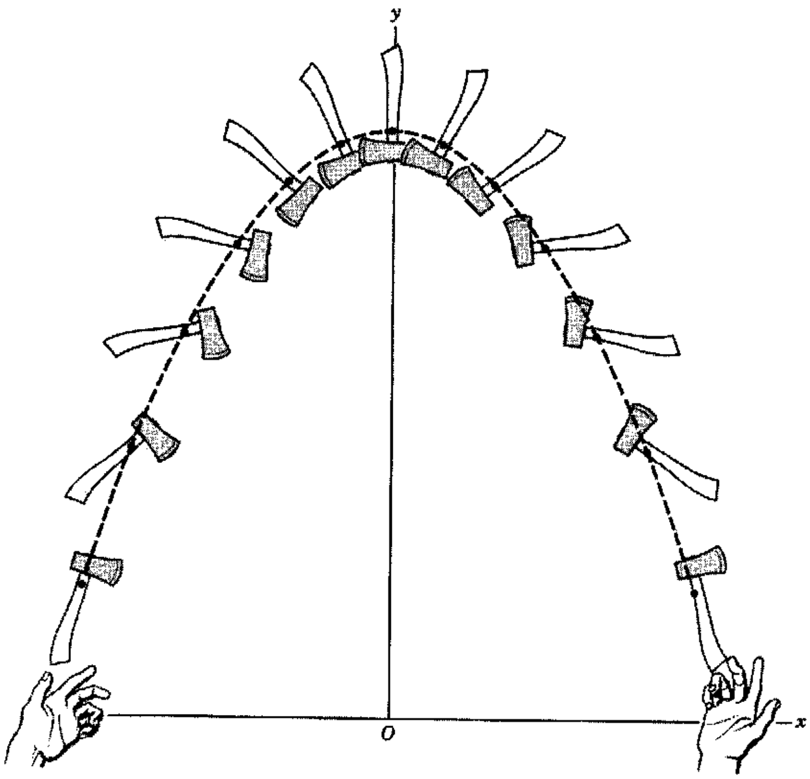
> حرکت انتقالی کلی یک سیستم از ذرات را می‌توان با استفاده از قوانین نیوتون تجزیه و تحلیل کرد؛ با این فرض که کل جرم سیستم در مرکز جرم متمرکز شده است و کل نیروی خارجی به آن نقطه وارد می‌شود.

یک نتیجهٔ ضمنی هم برای حالت $\Sigma\mathbf{F}_{ext} = 0$ حاصل می‌شود:

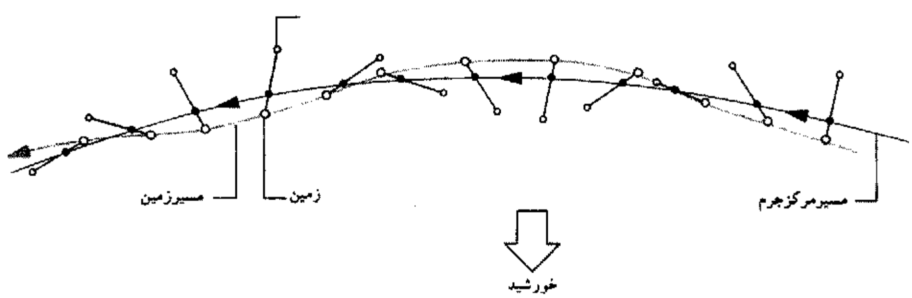
> اگر نیروی خالص خارجی وارد بر یک سیستم ذرات صفر باشد، مرکز جرم این سیستم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

این مطلب، مشاهدات ما در بخش ۹ـ۱ را، در مورد مسئلهٔ حرکت دو جرم که با فنر به هم متصل‌اند، توضیح می‌دهد.

اینها نتایجی هستند کلی، که هم درمورد مجموعه‌ای از ذرات منفرد و هم در مورد ذراتی که مانند ذرات یک جسم جامد توسط نیروهای داخلی به هم متصل‌اند به‌کار می‌روند. خود جسم ممکن



شکل۳. تبری که بین دو بازیگر پرتاب شده است. این تبر در حین انتقال می‌چرخد. مسیرسهمی شکل مرکز جرم را (که با نقطه روی تبر مشخص شده است) با خط‌چین نشان داده‌ایم. تک ذره‌ای که به همین صورت پرتاب شده باشد، همین مسیر را طی می‌کند. حرکت نقطهٔ دیگری از تبر به این سادگی نیست.

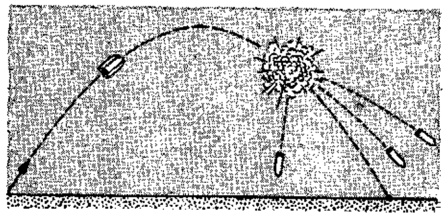


شکل۴. مرکز جرم سیستم زمین‌ـماه یک مقدار تقریباً دایره‌ای را طی می‌کند، در حالی‌که زمین و ماه هرکدام حول مرکز جرم مشترکشان می‌گردند (همان‌طور که تبر شکل ۳ می‌چرخید). این اثر که موجب یک "انحراف" جزئی در مدار زمین می‌شود، درشکل به‌صورت بسیار اغراق‌آمیزی نشان داده شده است. مرکز جرم سیستم زمین‌ـماه عملاً در داخل زمین است، به‌طوری که زمین همواره روی مسیر مداری مرکز جرم واقع می‌شود.

است هر حرکت پیچیده‌ای داشته باشد، ولی مرکز جرم آن مطابق معادلهٔ ۱۶ حرکت می‌کند. شکل ۳ حرکت یک جسم ناهمگن را تحت تأثیر گرانش نشان می‌دهد. این جسم در حین انتقال، چرخش هم دارد، اما، مرکز جرم آن مسیر سهمی ساده‌ای را طی می‌کند. تا آنجا که به نیروی خارجی (گرانش) مربوط می‌شود سیستم چنان رفتار می‌کند که گویی ذره‌ای است به جرم M که در مرکز جرم قرارگرفته است. به این ترتیب یک مسئلهٔ پیچیده به دو مسئلهٔ نسبتاً ساده کاهش یافته است —حرکت مرکز جرم روی مسیر سهمی، و چرخش حول مرکز جرم.

به‌عنوان مثالی دیگر، سیستم زمین‌ـماه را، که تحت تأثیر گرانش خورشید (نیروی خارجی) حرکت می‌کند، در نظر بگیرید. شکل ۴ نشان می‌دهد که مرکز جرم سیستم مسیر پایداری را حول خورشید طی می‌کند (این همان مسیری است که اگر ذره‌ای با جرم $m_{زمین} + m_{ماه}$ داشتیم طی می‌کرد). زمین و ماه حول مرکز جرم مشترکشان دوران هم می‌کنند، و این موجب می‌شود که زمین در اطراف مسیر مدار پایدار نوسان کوچکی داشته باشد. با استفاده از داده‌های پیوست ج، می‌توانیم نشان بدهیم که مرکز جرم سیستم زمین‌ـماه تقریباً در فاصلهٔ ۴۶۰۰ کیلومتر از مرکز زمین قرار دارد و بنابراین در داخل زمین (که شعاع متوسطش ۶۳۷۰ کیلومتر است) واقع می‌شود.

در شکل ۵ حرکت یک موشک بالستیک که به سه پاره شکافته می‌شود نشان داده شده است. انفجاری سه کلاهک را از هم جدا و به اطراف پرتاب می‌کند، اما این انفجار چون فقط نیروهای داخلی تولید می‌کند تأثیری بر حرکت مرکز جرم ندارد. مرکز جرم در همان مسیر



شکل۵. موشکی شامل سه کلاهک، در یک مسیر سهموی درحرکت است. این کلاهکها در اثر یک انفجار رها می‌شوند و چنان حرکت می‌کنند که مرکز جرم آنها همان مسیر سهمی اولیه را می‌پیماید.

اولیه موشک به حرکتش ادامه می‌دهد، چنانکه گویی انفجاری صورت نگرفته است؛ این البته تا وقتی است که هیچ یک از کلاهکها تحت تأثیر نیرویی، مثلاً مقاومت هوا یا ضربهٔ ناشی از برخورد با هدف و غیره، قرار نگرفته باشد.

مثال ۱. شکل ۶الف سیستمی شامل سه ذره است که در ابتدا ساکن‌اند. جرم این ذرات به‌ترتیب $m_۱ = ۴٫۱\text{kg}$، $m_۲ = ۸٫۲\text{kg}$، و $m_۳ = ۴٫۱\text{kg}$ است. این ذرات تحت تأثیر نیروهای خارجی متفاوتی قرار می‌گیرند که عبارت‌اند از $F_۱ = ۶\text{N}$، $F_۲ = ۱۲\text{N}$ و $F_۳ = ۱۴\text{N}$. جهت این نیروها در شکل مشخص شده است. مرکز جرم این سیستم در کجا واقع شده و شتاب آن چقدر است؟

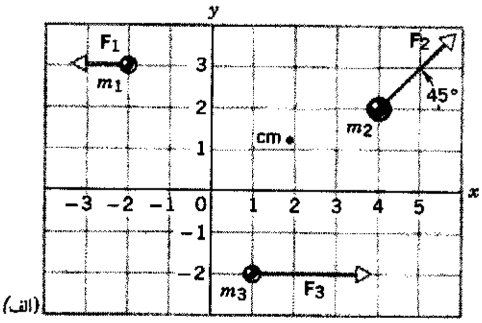
حل: موقعیت مرکز جرم با نقطه در شکل نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۶ب برمی‌آید می‌شود فرض کرد که در این نقطه ذره‌ای واقعی با جرمی برابر مجموع جرم هر سه ذره، یعنی $M = m_۱ + m_۲ + m_۳ = ۱۶٫۴\text{kg}$ قرار گرفته است و همهٔ نیروهای خارجی بر آن وارد می‌شود. مختصات مرکز جرم را از معادله‌های ۱۱الف و ۱۱ب پیدا می‌کنیم

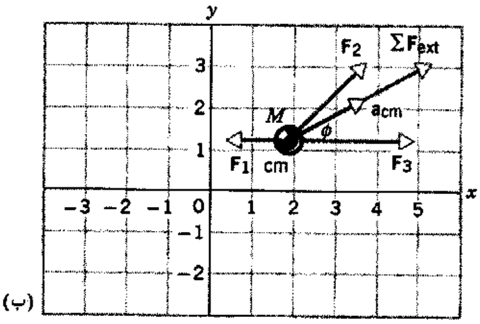
$$x_{cm} = \frac{۱}{M}(m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + m_۳x_۳)$$
$$= \frac{۱}{۱۶٫۴\text{kg}}[(۴٫۱\text{kg})(-۲\text{cm}) + (۸٫۲\text{kg})(۴\text{cm}) + (۴٫۱\text{kg})(۱\text{cm})] = ۱٫۸\text{cm}$$

$$y_{cm} = \frac{۱}{M}(m_۱y_۱ + m_۲y_۲ + m_۳y_۳)$$
$$= \frac{۱}{۱۶٫۴\text{kg}}[(۴٫۱\text{kg})(۳\text{cm}) + (۸٫۲\text{kg})(۲\text{cm}) + (۴٫۱\text{kg})(-۲\text{cm})] = ۱٫۳\text{cm}$$

توجه کنید که در این محاسبات، مخلوط کاملاً قابل قبولی از یکاها را به‌کار برده‌ایم.

مؤلفهٔ x نیروی خارجی خالص وارد بر مرکز جرم عبارت است از





شکل۶. مثال ۱. (الف) سه ذره در حالت سکون در موقعیتهای نشان داده شده قرار گرفته‌اند. به این ذره‌ها نیروهای معینی وارد می‌شوند. مرکز جرم سیستم مشخص شده است. (ب) حرکت انتقالی کل سیستم را می‌توان با حرکت ذره‌ای به جرم کل M که در مکان مرکز جرم واقع شده و تحت تأثیر سه نیروی خارجی است، نشان داد. برایند نیروها و شتاب مرکز جرم را در شکل مشخص کرده‌ایم.

شکل ۶ب

$$F_{ext,x} = F_{۱x} + F_{۲x} + F_{۳x}$$
$$= -۶\text{N} + (۱۲\text{N})(\cos ۴۵^\circ) + ۱۴\text{N} = ۱۶٫۵\text{N}$$

و مؤلفهٔ y این نیرو برابر است با

$$F_{ext,y} = F_{۱y} + F_{۲y} + F_{۳y}$$
$$= ۰ + (۱۲\text{N})(\sin ۴۵^\circ) + ۰ = ۸٫۵\text{N}$$

به‌این ترتیب مقدار نیروی خارجی خالص برابر است با

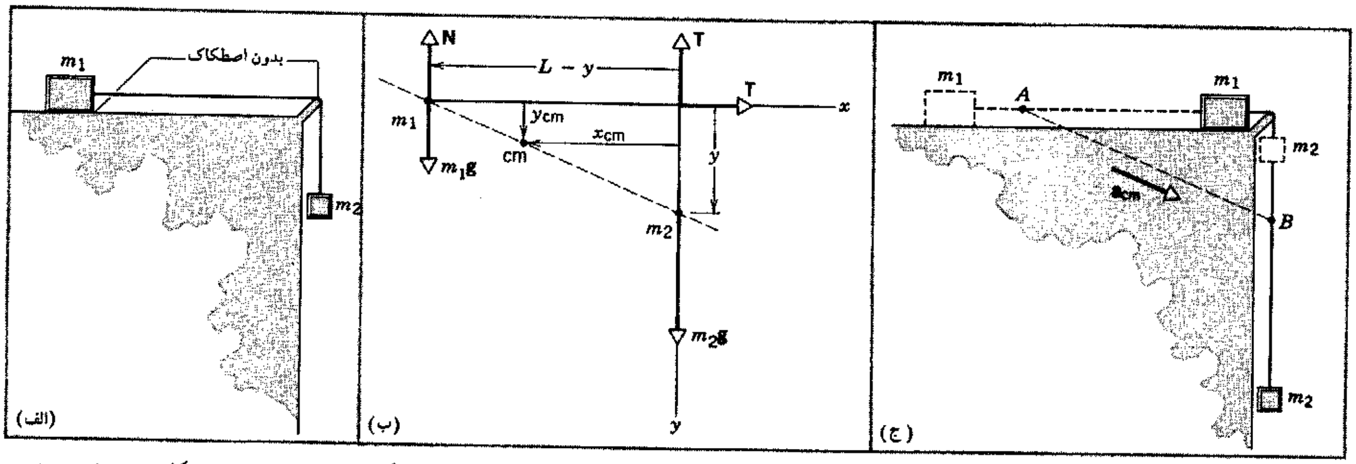
$$F_{ext} = \sqrt{(F_{ext,x})^۲ + (F_{ext,y})^۲} = \sqrt{(۱۶٫۵\text{N})^۲ + (۸٫۵\text{N})^۲} = ۱۸٫۶\text{N}$$

و زاویه‌ای که با محور x می‌سازد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\phi = \tan^{-۱}\frac{F_{ext,y}}{F_{ext,x}} = \tan^{-۱}\frac{۸٫۵\text{N}}{۱۶٫۵\text{N}} = ۲۷^\circ$$

بردار شتاب هم در همین جهت است. بنابر معادلهٔ ۱۶ مقدار شتاب مرکز جرم برابر است با

$$a_{cm} = \frac{F_{ext}}{M} = \frac{۱۸٫۶\text{N}}{۱۶٫۴\text{kg}} = ۱٫۱\text{m/s}^۲$$



شکل۷. مثال ۲. (الف) دو جسم توسط ریسمانی به طول L به همدیگر متصل شده‌اند. این ریسمان از روی تکیه‌گاه بدون اصطکاکی می‌گذرد. (ب) نیروهای خارجی وارد بر سیستم نشان داده شده است. تکیه‌گاه بدون اصطکاک یک نیروی خارجی بر ریسمان اعمال می‌کند که هرکدام از مؤلفه‌های آن برابر کشش T در ریسمان است (که نیرویی داخلی است و بنابراین نشان داده نشده است.) (ج) مرکز جرم از نقطه A به نقطهٔ B می‌رود. در نقطهٔ A جسم m_2 در بالاترین موقعیت قرار دارد و درنقطهٔ B جسم m_1 به تکیه‌گاه رسیده است. با سقوط جسم m_2، جسم m_1 به سمت راست حرکت می‌کند، و درنتیجه مرکز جرم سیستم هم باید به سمت راست حرکت کند. نیروی افقی T تنها نیروی خارجی ممکن است که می‌تواند موجب حرکت افقی مرکز جرم شود. البته نیروی خارجی ناشی از گرانش هم موجب حرکت مرکز جرم به طرف پایین می‌شود.

هر سه ذرهٔ شکل ۶الف و نیز مرکز جرم آنها با شتابهای ثابت (ولی متفاوت) حرکت می‌کنند. اگرذرات از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشند، هر یک با سرعت فزاینده درامتداد یک خط راست در جهت نیروی وارد بر آن حرکت خواهد کرد.

مثال ۲. درسیستم شکل ۷الف، اندازهٔ شتاب مشترک دو قالب را پیدا کنید. قبلاً این مسئله را در مثال ۸ فصل ۵ با اعمال کردن قانون نیوتون به هر یک از دو قالب، حل کرده‌ایم. این بار مسئله را با در نظر گرفتن حرکت مرکز جرم سیستم دو ذره‌ای حل کنید.

حل: شکل ۷ب نمودار جسم آزاد مربوط به سیستم دو‌ـ‌ذره‌ای را نشان می‌دهد. ابتدا با استفاده از معادله‌های ۱۱الف ۱۱ب، مرکز جرم سیستم (شکل ۷ب) را تعیین می‌کنیم

$$x_{\text{cm}} = -\frac{m_1}{M}(L-y) \quad \text{و} \quad y_{\text{cm}} = \frac{m_2}{M} = y$$

در رابطهٔ بالا L طول ریسمان و y مختصهٔ قائم جرم m_2 است.

با مشتق‌گیری نسبت به زمان، می‌توانیم مؤلفه‌های سرعت مرکز جرم را تعیین کنیم

$$v_{\text{cm},x} = \frac{m_1}{M}v \quad \text{و} \quad v_{\text{cm},y} = \frac{m_2}{M}v$$

که $v(=dy/dt)$ مقدار سرعت مشترک دو قالب است. با مشتق‌گیری مجدد، می‌توانیم مؤلفه‌های شتاب را پیدا کنیم

$$a_{\text{cm},x} = \frac{m_1}{M}a \quad \text{و} \quad a_{\text{cm},y} = \frac{m_2}{M}a$$

که $a(=dv/dt)$ مقدار شتاب مشترک دو قالب است.

حالا قوانین نیوتون را به کار می‌بریم. در شکل ۷ب، نیروی خارجی اعمال شده توسط تکیه‌گاه بدون اصطکاک بر ریسمانی که دو جسم را به هم متصل کرده به مؤلفه‌های x و y تجزیه شده است. مقدار هر کدام از این مؤلفه‌ها برابر با T (کشش ریسمان) است. با استفاده از معادلهٔ ۱۶ داریم

$$T = Ma_{\text{cm},x} \qquad :x \text{ مؤلفهٔ}$$

$$m_1g - N + m_2g - T = Ma_{\text{cm},y} \qquad :y \text{ مؤلفهٔ}$$

با جانشانی مقادیر $a_{\text{cm},x}$ و $a_{\text{cm},y}$ می‌توانیم T را بین این دو معادله حذف کنیم و با در نظر گرفتن اینکه $m_1g = N$ است، شتاب را به‌دست بیاوریم

$$a = g\frac{m_2}{M}$$

که با نتیجه‌ای که قبلاً در فصل ۵ به‌دست آورده‌ایم سازگار است.

توجه کنید که در این مثال، باید نیروی خارجی اعمال شده از تکیه‌گاه بدون اصطکاک بر سیستم را در نظر بگیریم. این نیرو وقتی نیروهای وارد بر جسم ۱ و جسم ۲ را جداگانه بررسی می‌کنیم در معادلات وارد نمی‌شود.

اگر سیستم از حالت سکون از وضعیتی که در آن جسم m_2 در بالاترین موقعیت قرار دارد رها شود؛ حرکت مرکز جرم، در امتداد خط راستی است که در شکل ۷ج می‌بینید. جهت $\mathbf{a}_{\text{cm}}$ را می‌توان از جمع برداری پنج نیروی وارد بر سیستم، که در شکل ۷ب نشان داده شده است، تعیین کرد.

۹ـ۳ مرکز جرم اجسام صلب

تعیین مرکز جرم جسم جامد با استفاده از معادلهٔ ۱۲ و جمع بستن روی تک‌تک اتمهای سیستم عملاً مشکل‌تر از آن است که ممکن باشد. در عوض جسم را به اجزای بسیار کوچکی به جرم δm_n تقسیم می‌کنیم. وقتی این اجزاء بسیار بسیار کوچک شوند، جمعهای مربوط به معادله‌های ۱۱ و ۱۲ به انتگرال تبدیل می‌شوند

$$x_{\rm cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \to 0} \Sigma x_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int x\, dm \qquad (\text{۱۷الف})$$

$$y_{\rm cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \to 0} \Sigma y_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int y\, dm \qquad (\text{۱۷ب})$$

$$z_{\rm cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \to 0} \Sigma z_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int z\, dm \qquad (\text{۱۷ج})$$

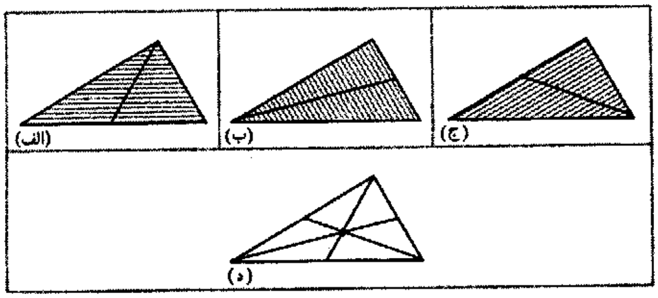
این معادله‌ها را می‌توان به‌صورت برداری هم نوشت

$$\mathbf{r}_{\rm cm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r}\, dm \qquad (\text{۱۸})$$

در بسیاری از موارد، با استفاده از ملاحظات بر هندسی یا تقارن، امکان ساده‌سازی محاسبات مربوط به مرکز جرم اجسام جامد وجود دارد. جسمی که تقارن کروی دارد، مرکز جرمش باید در مرکز هندسی کره قرار بگیرد. (لازم نیست که در این مورد چگالی ثابت باشد؛ مثلاً توپ بیسبال با آنکه از لایه‌هایی از مواد مختلف تشکیل شده است تقارن کروی دارد. مرکز جرم آن بر مرکز هندسی‌اش واقع است. وقتی از تقارن کروی صحبت می‌کنیم، منظورمان این است که چگالی ممکن است با r تغییر کند ولی این تغییر باید در همهٔ جهتها یکسان باشد.) اگر جامدی دارای تقارن استوانه‌ای باشد (یعنی، اگر جرم آن به‌طور متقارن حول محوری توزیع شده باشد)، در این صورت مرکز جرم آن باید روی آن محور واقع شود. اگر جرم به‌طور متقارن حول یک صفحهٔ توزیع شده باشد، مرکز جرم باید در آن صفحه باشد.

اغلب با اجسام جامد نامنظمی مواجه می‌شویم که می‌توانیم آنها را به چند قسمت تقسیم کنیم. می‌توانیم مرکز جرم هر قسمت را پیدا کنیم و سپس هر قسمت را مثل ذره‌ای مستقر در مرکز جرم خودش در نظر بگیریم و مرکز جرم جسم مرکب را پیدا کنیم.

به عنوان مثال، یک ورق مثلث را در نظر بگیرید. این ورق را به تعداد زیادی نوارهای باریک موازی با قاعدهٔ مثلث تقسیم می‌کنیم (شکل ۸). مرکز جرم هر نوار باید در مرکز هندسی آن واقع شود و بنابراین مرکز جرم ورق باید در جایی روی خطی که مرکزهای نوارها را به هم متصل می‌کند باشد. (هر نوار را با یک جرم نقطه‌ای مستقر در مرکز جرم نوار جایگزین می‌کنیم. از رشتهٔ این جرمهای نقطه‌ای عملاً یک جسم یک‌بعدی ایجاد می‌شود که مرکز جرم آن باید مطمئناً روی خود این خط قرار بگیرد.) با تکرار همین روش برای نوارهای موازی با دو ضلع دیگر (شکلهای ۸ب و ۸ج)، دو خط دیگر به‌دست می‌آوریم که هر یک از آنها هم باید شامل مرکز جرم ورق باشد. اگر امتداد این



شکل۸. در (الف)، (ب)، و (ج)، مثلث به نوارهای باریکی موازی با هر یک از سه ضلع تقسیم شده است، مرکز جرم در هر مورد باید روی خط میانه که از وسط نوارهای موازی گذشته است قرار بگیرد. (د) تنها نقطهٔ مشترک این سه خط، محل تقاطع آنهاست که همان مرکز جرم مثلث است.

سه خط (شکل ۸د) می‌بینیم که تنها نقطهٔ مشترک آنها الزاماً باید مرکز جرم مثلث باشد.

مثال ۳. شکل ۹الف یک ورق فلزی دایره‌ای به شعاع $2R$ را نشان می‌دهد که از آن قرصی به شعاع R درآورده شده است. این جسم را، که مرکز جرم آن با نقطه‌ای روی محور x نشان داده شده است، X می‌نامیم. محل دقیق این نقطه را پیدا کنید.

حل: شکل ۹ب جسم X را نشان می‌دهد، که سوراخ آن با قرصی به شعاع R پر شده است. این قرص را جسم D، و قرص مرکب یکنواختی را که به این ترتیب ایجاد می‌شود جسم C می‌نامیم. با استفاده از تقارن می‌دانیم که مرکز جرم جسم C در مبدأ دستگاه مختصات قرار دارد.

برای پیدا کردن مرکز جرم یک جسم مرکب، می‌توانیم فرض کنیم که جرم هر یک از اجزای آن در مرکز جرم آن جزء متمرکز شده است. پس می‌توانیم جسم C را معادل دو جرم نقطه‌ای که نمایندهٔ اجسام X و D هستند در نظر بگیریم. شکل ۹ج محل مراکز جرمهای این سه جسم را نشان می‌دهد.

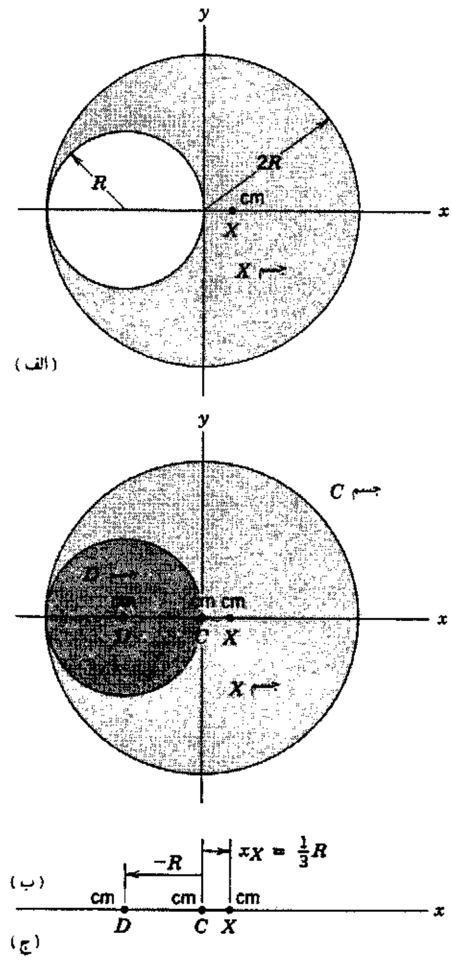
مکان مرکز جرم جسم C از معادلهٔ ۱الف به‌دست می‌آید

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X}$$

x_D و x_X به‌ترتیب عبارت‌اند از مکان مراکز جرمهای اجسام D و X. با توجه به اینکه $x_C = 0$ است، معادله را برای x_X حل می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}$$

نسبت m_D/m_X باید مثل نسبت مساحت اجسام D و X باشد به شرطی که هر دو جسم دارای چگالی یکنواخت و ضخامت یکنواخت



شکل۹. مثال ۳. (الف) جسم X یک قرص فلزی به شعاع $۲R$ است که در آن یک سوراخ به شعاع R ایجاد شده است. (ب) جسم D یک قرص فلزی است که سوراخ جسم X را پر می‌کند؛ مرکز جرم آن در $x_D = -R$ قرار دارد. جسم C یک قرص مرکب است که از اجسام X و D به وجود آمده است؛ مرکز جرم آن در مبدأ مختصات است. (ج) مرکزهای جرم سه‌جسم.

است). یعنی

$$\frac{m_D}{m_X} = \frac{D\text{مساحت}}{X\text{مساحت}} = \frac{D\text{مساحت}}{(C\text{مساحت} - D\text{مساحت})}$$

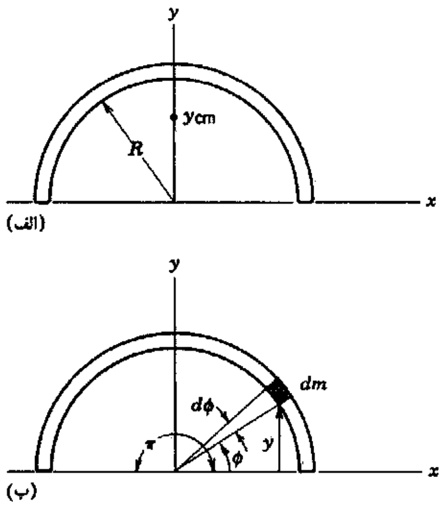
$$= \frac{\pi R^{۲}}{\pi(۲R)^{۲} - \pi R^{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

می‌دانیم $x_D = -R$ است، پس خواهیم داشت

$$x_X = \frac{۱}{۳}R$$

مثال ۴. نوار نازکی را به‌صورت نیمدایره‌ای به شعاع R درآورده‌ایم (شکل ۱۰). مرکز جرم این جسم را پیدا کنید.

حل: در این مورد با استفاده از یک مختصهٔ زاویه‌ای می‌شود کار انتگرال‌گیری را ساده‌تر کرد. به‌علاوه، از تقارن جسم نتیجه می‌گیریم که مرکز جرم باید روی محور y باشد (یعنی، $x_{\text{cm}} = ۰$). بنابراین برای



شکل۱۰. مثال ۴. (الف) نوار نازک فلزی را به شکل نیمدایره در آورده‌ایم. (ب) عنصری از نوار به جرم dm در مختصهٔ ϕ قرارگرفته است.

تعیین y_{cm} از معادلهٔ ۱۷ب استفاده می‌کنیم. عنصر کوچک با جرم dm را که در شکل ۱۰ب نشان داده شده است در نظر بگیرید. این عنصر روبه‌روی زاویهٔ $d\phi$ است، و چون جرم M کل نوار روبه‌روی زاویه π است (یک دایره کامل زاویه ۲π را دربر می‌گیرد)، جرم dm باید همان کسر از M باشد که $d\phi$ از π است. یعنی، $dm/M = d\phi/\pi$ یا $dm = (M/\pi)d\phi$. عنصر dm در موقعیت $y = R\sin\phi$ قرارگرفته است. در این مورد معادلهٔ ۱۷ب را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

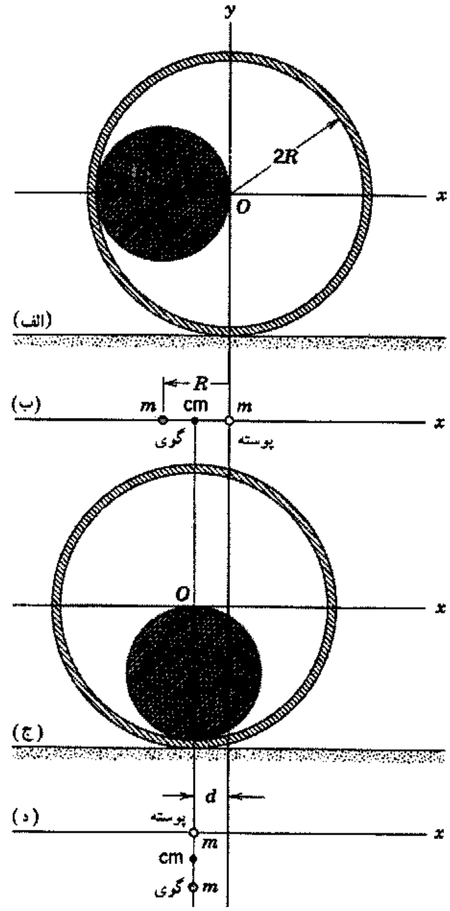
$$y_{\text{cm}} = \frac{۱}{M}\int y\, dm = \frac{۱}{M}\int_{۰}^{\pi}(R\ \sin\ \phi)\frac{M}{\pi}d\phi$$

$$= \frac{R}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin\phi\, d\phi = \frac{۲R}{\pi} = ۰{,}۶۳۷R$$

مرکز جرم تقریباً در فاصلهٔ دو سوم شعاع در امتداد محور y است. توجه داشته باشید که، همان‌طور که در این مثال نشان داده شد، لازم نیست مرکز جرم حتماً در داخل حجم یا مادهٔ جسم باشد.

مثال ۵. گویی به جرم m و شعاع R در داخل یک پوستهٔ کروی با همان جرم m و شعاع داخلی $۲R$ قرار داده شده است. این جسم مرکب روی میزی در حال سکون است (شکل ۱۱الف). گوی از محل اولیه‌اش رها می‌شود و در داخل پوسته به پس و پیش می‌غلتد و سرانجام در پایین متوقف می‌شود (شکل ۱۱ج). در طی این فرایند جابه‌جایی d پوسته چقدر است؟

حل: تنها نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم گوی‌ـپوسته عبارت‌اند از نیروی گرانی به‌طرف پایین و نیروی عمودی به طرف بالا که از میز وارد می‌شود. هیچ یک از نیروها مؤلفهٔ افقی ندارند. بنابراین $\Sigma F_{\text{ext},x} = ۰$ است. از معادلهٔ ۱۶، مؤلفهٔ افقی شتاب مرکز جرم هم باید صفر باشد. یعنی مکان افقی مرکز جرم سیستم باید ثابت بماند، و پوسته باید چنان حرکت کند که جای مرکز جرم تغییر نکند.



شکل ۱۱. مثال ۵. (الف) گویی با شعاع R از این مکان اولیه رها شده است و می‌تواند آزادانه در داخل پوستهٔ کروی به شعاع $2R$ بغلتد. (ب) مرکز جرم گوی، پوستهٔ کروی و ترکیب آنها. (ج) وضعیت نهایی پس از آنکه گوی به حال سکون درآمد. پوستهٔ کروی چنان جابه‌جا می‌شود که مرکز جرم سیستم در جای خودش باقی می‌ماند. (د) مراکز جرمهای گوی، پوستهٔ کروی، و ترکیب آنها.

می‌توانیم هم گوی و هم پوسته را با تک ذراتی با جرم m نمایش بدهیم که هر کدام در مرکز جرم مربوط به خودش قرار گرفته است. شکل ۱۱ ب سیستم را قبل از رها‌کردن گوی نشان می‌دهد و شکل ۱۱ د نمایش حالتی است که گوی در پایین پوسته متوقف شده است. مبدأ مختصات را منطبق مکان اولیهٔ مرکز پوسته می‌گیریم. شکل ۱۱ ب نشان می‌دهد که، نسبت به این مبدأ مختصات، مرکز جرم سیستم گوی‌ـپوسته در فاصلهٔ $\frac{1}{2}R$ در سمت چپ مبدأ قرار دارد. این نقطه در وسط دو ذره است. شکل ۱۱ د نشان می‌دهد که جابه‌جایی پوسته عبارت است از

$$d = \frac{1}{2}R$$

پوسته باید در طی مدتی که گوی به حال سکون در می‌آید این مقدار به سمت چپ حرکت کند.

گوی در اثر اصطکاکی که با پوستهٔ کروی دارد به حالت سکون در می‌آید. چرا این نیروی اصطکاک در مکان نهایی مرکز جرم مؤثر نیست؟

۹ـ۴ تکانهٔ خطی ذره

تکانهٔ هر ذره برداری است مانند $\mathbf{p}$ که به‌صورت حاصل‌ضرب جرم آن ذره در سرعتش $\mathbf{v}$ تعریف می‌شود

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (۱۹)$$

تکانه، که حاصل‌ضرب یک کمیت اسکالر در یک بردار است، خودش یک بردار است. چون $\mathbf{p}$ متناسب با $\mathbf{v}$ است؛ بستگی به چارچوب مرجع ناظر دارد؛ بنابراین همواره باید این چارچوب را مشخص کنیم.

نیوتون، در پرینکیپیای معروفش، قانون دوم حرکت را برحسب تکانه (که خودش آن‌را "مقدار حرکت" می‌نامید) بیان کرده است. قانون دوم نیوتون با اصطلاحات امروزی چنین بیان می‌شود:

> آهنگ تغییر تکانهٔ هر جسم برابر با نیروی برایند وارد بر آن جسم و در جهت همان نیروست.

به‌صورت نمادی یعنی اینکه

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (۲۰)$$

که در آن $\Sigma\mathbf{F}$ نیروی برایند وارد بر ذره است.

برای یک تک ذره با جرم ثابت، این صورت از قانون دوم هم‌ارز صورت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ است که تا کنون از آن استفاده کرده‌ایم. یعنی، اگر m ثابت باشد،

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

در مکانیک کلاسیک دو رابطهٔ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ و $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ برای تک‌ذره کاملاً هم‌ارزند.

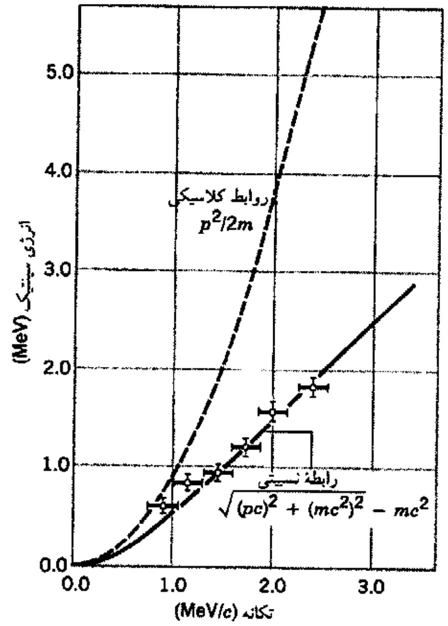
از ترکیب رابطه‌های $K = \frac{1}{2}mv^2$ و $p = mv$ رابطهٔ مفیدی بین تکانه و انرژی جنبشی به‌دست می‌آید

$$K = \frac{p^2}{2m} \qquad (۲۱)$$

تکانه در سرعتهای زیاد (اختیاری)

وقتی سرعت ذره نزدیک به سرعت‌نور باشد (ناحیه‌ای که‌در آن باید از نظریهٔ نسبیت به‌جای مکانیک نیوتونی استفاده کرد)، دیگر قانون دوم نیوتون به‌صورت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ معتبر نیست. اما معلوم می‌شود که این قانون به‌صورت $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ هنوز هم معتبر است مشروط بر اینکه تکانهٔ $\mathbf{p}$ تک‌ذره را نه به‌صورت $m\mathbf{v}$ بلکه به‌صورت

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (۲۲)$$



شکل۱۲. مقایسهٔ روابط کلاسیکی (معادلهٔ ۲۱) و نسبیتی (معادلهٔ ۲۳) بین تکانه و انرژی جنبشی الکترونهای گسیل شده در بعضی فرایندهای واپاشی پرتوزا. دایره‌ها اندازه‌گیریهای تجربی را نمایش می‌دهند؛ خطوط افقی و عمودی که از میان دایره‌ها می‌گذرند محدودهٔ عدم قطعیت در اندازه‌گیریها را نشان می‌دهند. روشن است که داده‌ها با رابطهٔ نسبیتی سازگارترند. توجه کنید که در سرعتهای کم (انرژی و تکانهٔ کم) دو رابطه از هم متمایز نیستند.

تعریف کنیم. در این رابطه c سرعت نور است. در سرعتهای معمولی $(v \ll c)$، معادلهٔ ۲۲ به همان معادلهٔ ۱۹ تبدیل می‌شود.

در مورد ذرات نسبیتی، می‌شود نشان داد که رابطهٔ اساسی میان تکانه و انرژی جنبشی به‌صورت زیر است

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \qquad (۲۳)$$

این نتیجه را در فصل ۲۱ به‌دست خواهیم آورد. شکل ۱۲ مقایسه‌ای بین نتایج کلاسیکی (معادلهٔ ۲۱) و نسبیتی (معادله ۲۳) را برای ذرات در محدوده‌ای از سرعتها نشان می‌دهد. روشن است که نتایج کلاسیکی در سرعتهای زیاد نادرست است. همان‌طورکه انتظار می‌رود (مسئلهٔ ۲۷) معادلهٔ ۲۳ در سرعتهای معمولی به معادلهٔ ۲۱ کاهش می‌یابد.

انرژی جنبشی، به هر صورتی که نوشته شود، دارای ابعاد جرم ضربدر مربع سرعت است، که همان حاصل‌ضرب سرعت در تکانه است. بنابراین با استفاده از نمادگذاری بخش ۱ـ۷ برای بیان ابعاد می‌توانیم بنویسیم

$$[p] = \frac{[K]}{[v]}$$

اغلب مفید است که تکانه را برحسب یکای انرژی تقسیم بر سرعت بیان کنیم و انتخابهای مناسب در مورد ذرات عبارت‌اند از eV/c، MeV/c، و مانند آنها. این انتخاب به ما امکان می‌دهد که کمیت pc را برحسب یکاهای انرژی مانند MeV بیان کنیم و کارکردن با روابطی مانند معادلهٔ ۲۳ را بسیار ساده‌تر می‌کند. مثلاً، برای الکترونی با تکانهٔ معلوم $۱٫۵MeV/c$، جملهٔ pc در معادلهٔ ۲۳ برابر با ۱٫۵MeV است. انرژی جنبشی الکترون را می‌توانیم به‌راحتی از این معادله محاسبه کنیم و برای آن مقدار ۱٫۱MeV را به‌دست بیاوریم.

در ناحیهٔ سرعتهای بسیار زیاد، تکانهٔ ذره ممکن است آنقدر بزرگ باشد که جملهٔ pc در معادلهٔ ۲۳ خیلی بزرگتر از جملهٔ mc^2 شود، و در این‌صورت معادله با تقریب خوبی به $K = pc$ کاهش می‌یابد. بیان تکانه برحسب یکای انرژی تقسیم بر c در این ناحیه بسیار مفید است. مثلاً الکترونی که تکانهٔ آن برابر $۵۰۰MeV/c$ است انرژی جنبشی‌ای خیلی نزدیک به ۵۰۰MeV دارد. (توجه کنید که این تقریب برای الکترون ۱٫۵MeV که قبلاً در نظر گرفته شد هیچ خوب نیست.)

۹ـ۵ تکانهٔ خطی سیستمی از ذرات

تصور کنید که به‌جای یک تک‌ذره، سیستمی شامل N ذره با جرمهای m_1، m_2، ...، m_N داشته باشیم. فرض می‌کنیم که هیچ جرمی به این سیستم وارد یا از آن خارج نمی‌شود، یعنی جرم کل M (یعنی Σm_n) سیستم در طی زمان ثابت می‌ماند. ذرات می‌توانند با هم برهم‌کنش داشته باشند و ممکن است نیروهای خارجی به آنها وارد شود. هر ذره در چارچوب مرجعی که مورد استفاده است، سرعت و تکانهٔ معینی دارد. سیستم دارای تکانهٔ کل $\mathbf{P}$ است، که طبق تعریف برابر با جمع برداری تکانه‌های تک‌تک ذرات آن در همان چارچوب مرجع است:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_N \\ &= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_N\mathbf{v}_N \qquad (۲۴)\end{aligned}$$

اگراین رابطه را با معادلهٔ ۱۳ مقایسه کنیم، فوراً درمی‌یابیم که

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\rm cm} \qquad (۲۵)$$

که تعریفی هم‌ارز برای تکانهٔ سیستمی متشکل از ذرات است

> تکانهٔ خطی کل سیستمی از ذرات برابر است با حاصل‌ضرب جرم کل سیستم در سرعت مرکز جرم آن.

اگر از معادلهٔ ۲۵، با فرض ثابت بودن جرم، نسبت به‌زمان مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_{\rm cm}}{dt} = M\mathbf{a}_{\rm cm} \qquad (۲۶)$$

با توجه به معادلهٔ ۲۶ و معادلهٔ ۱۶ (یعنی $\Sigma\mathbf{F}_{\rm ext} = M\mathbf{a}_{\rm cm}$) می‌توانیم قانون دوم نیوتون برای سیستمی از ذرات را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Sigma\mathbf{F}_{\rm ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad (۲۷)$$

معادلهٔ ۲۷ می‌گوید که برایند نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر با آهنگ تغییر تکانهٔ خطی آن سیستم است. این معادله، تعمیم معادلهٔ مربوط به تک‌ذره، یعنی $\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (معادلهٔ ۲۰)، به سیستمی است که شامل تعداد زیادی ذره‌باشد. فرض کرده‌ایم که هیچ جرمی به این سیستم وارد یا از آن خارج نمی‌شود. معادلهٔ ۲۷ در مورد خاص تک‌ذره به معادلهٔ ۲۰ تبدیل می‌شود، زیرا هر نیروی وارد بر سیستم یک‌ـذره‌ای حتماً خارجی است. در بخش ۹ـ۸ شکل اصلاح شدهٔ معادلهٔ ۲۷ را برای سیستمهایی که جرمشان متغیر است به‌دست خواهیم آورد.

۹ـ۶ پایستگی تکانهٔ خطی

فرض کنید حاصل‌جمع نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر صفر باشد. در این‌صورت، از معادلهٔ ۲۷ داریم

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{P} = \text{a const.}$$

اگر نیروی خارجی خالص وارد بر یک سیستم صفر باشد، بردار تکانهٔ کل سیستم ثابت می‌ماند.

این نتیجهٔ ساده ولی کاملاً عام، قانون پایستگی تکانهٔ خطی نامیده می‌شود. قانون پایستگی تکانهٔ خطی هم (مانند قانون پایستگی انرژی) در گسترهٔ بسیار وسیعی از پدیده‌های فیزیکی معتبر است و هیچ استثنایی بر آن مشاهده نشده است.

قوانین پایستگی (مانند قوانین پایستگی انرژی و تکانهٔ خطی، که با آنها آشنا شده‌ایم، و قوانین پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای و بار الکتریکی که بعداً در این کتاب به آنها خواهیم رسید) در فیزیک به لحاظ نظری و عملی بسیار با اهمیت‌اند زیرا هم ساده‌اند و هم عمومیت دارند. قوانین پایستگی انرژی و تکانهٔ خطی از محدودهٔ مکانیک کلاسیک فراتر می‌روند و در حوزه‌های نسبیتی و کوانتومی هم صدق می‌کنند.

قوانین پایستگی همگی به این شکل‌اند: در سیستمی که دارد تغییر می‌کند، نمودی هست که تغییر نمی‌کند. اگر ناظران متفاوتی که هرکدام در چارچوب مرجع متفاوتی قرار دارند به یک سیستم در حال تغییر نگاه کنند، همگی توافق خواهند داشت که قوانین پایستگی در سیستم برقرار است. مثلاً، در مورد پایستگی تکانهٔ خطی، هر یک از ناظران چارچوبهای لخت متفاوت، مقدار متفاوتی به تکانهٔ خطی سیستم نسبت می‌دهند، ولی جملگی توافق دارند (با فرض $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$) که ذرات تشکیل‌دهندهٔ سیستم هر طور هم که حرکت کنند، $\mathbf{P}$ تغییر نمی‌کند. نیروی $\mathbf{F}$ نسبت به تبدیلهای گالیله‌ای ناورداست (همهٔ ناظرهای لخت در مورد آن با هم توافق دارند). اگر در یک چارچوب لخت $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ باشد، همهٔ ناظرهای لخت مشاهده خواهند کرد که $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ است و نتیجه خواهند گرفت که تکانه پایسته است.

تکانهٔ کل یک سیستم را فقط نیروهای خارجی می‌توانند تغییر بدهند. نیروهای داخلی که دو به دو مساوی و مختلف‌الجهت هستند موجب تغییر تکانه‌های مساوی و مختلف‌الجهتی می‌شوند که همدیگر را حذف می‌کنند. برای سیستمی از ذرات که تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی خالصی نباشد داریم

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N = \text{a const.} \qquad (۲۸)$$

تکانهٔ هر یک از ذرات ممکن است تغییر کند، ولی اگر هیچ نیروی خارجی خالصی در کار نباشد مجموع تکانه‌ها باید ثابت باقی بماند.

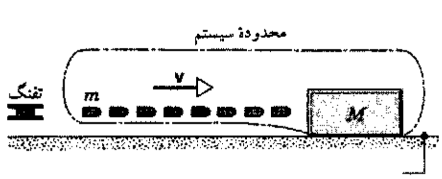
تکانه کمیتی برداری است. بنابراین معادلهٔ ۲۸ هم‌ارز سه معادلهٔ اسکالر، برای سه راستای مختصات، است. بنابراین، پایستگی تکانهٔ خطی سه شرط در مورد حرکت سیستم مربوط فراهم می‌کند. اما پایستگی انرژی تنها یک شرط در مورد حرکت سیستم در اختیار ما می‌گذارد، چون انرژی کمیتی اسکالر است.

اگر سیستم فقط از یک ذره تشکیل شده باشد، معادلهٔ ۲۸ معنی‌اش این می‌شود که وقتی هیچ نیروی خارجی خالصی روی ذره اثر نکند تکانهٔ آن ثابت می‌ماند، که (برای یک ذرهٔ تنها) معادل آن است که بگوییم سرعتش ثابت می‌ماند. این صرفاً بیان دیگری از قانون اول نیوتون است.

مثال ۶. رگباری از گلوله‌هایی به جرم $m = 3.8\,\mathrm{g}$ به‌طور افقی با سرعت $1100\,\mathrm{m/s}$ به‌قطعه چوب بزرگی به جرم $M = 12\,\mathrm{kg}$ که در ابتدا روی سطح میزی افقی ساکن است، شلیک می‌شود (شکل ۱۳). اگر قطعه چوب بتواند بدون اصطکاک روی سطح میز بلغزد، سرعت آن پس از دریافت ۸ گلوله چقدر می‌شود؟

حل: معادلهٔ ۲۸ $(\mathbf{P} = \text{const.})$ فقط برای سیستمهای بسته معتبر است، یعنی سیستمهایی که هیچ ذره‌ای به آنها وارد یا از آنها خارج نمی‌شود. پس سیستم ما باید مجموعه‌ای شامل قطعهٔ چوب و ۸ گلوله باشد. در شکل ۱۳، این سیستم را، با کشیدن یک منحنی بسته به دور آن، مشخص کرده‌ایم.

ابتدا فقط راستای افقی را بررسی می‌کنیم. هیچ نیروی خارجی افقی روی سیستم متشکل از چوب + گلوله‌ها اثر نمی‌کند. نیروهایی که هنگام برخورد گلوله‌ها با چوب ایجاد می‌شوند نیروهای داخلی‌اند و در $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ که هیچ مؤلفهٔ افقی ندارد سهیم نیستند.



شکل۱۳. مثال ۶. تفنگی رگباری از گلوله به‌سوی یک قطعه چوب شلیک می‌کند. سیستم را مرکب از قطعه چوب به‌علاوهٔ گلوله‌های در حال پرواز گرفته‌ایم.

چون هیچ نیروی خارجی (افقی) اثر نمی‌کند، می‌توانیم قانون پایستگی تکانه (معادلهٔ ۲۸) را به‌کار بگیریم. تکانهٔ اولیه (افقی)، مربوط به وقتی که هنوز گلوله‌ها در پروازند و چوب ساکن است، برابر است با

$$P_{\mathrm{i}} = N(mv)$$

که mv تکانهٔ هرکدام از گلوله‌های منفرد و $N = ۸$ است. تکانهٔ نهایی وقتی اندازه‌گیری می‌شود که همهٔ گلوله‌ها در چوب جا گرفته‌اند و چوب با سرعت V روی سطح میز می‌لغزد. این تکانه برابر است با

$$P_{\mathrm{f}} = (M + Nm)V$$

پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که داشته باشیم

$$P_{\mathrm{i}} = P_{\mathrm{f}}$$

یا

$$N(mv) = (M + Nm)V$$

از حل این معادله برای V نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} V &= \frac{Nm}{M+Nm}v \\ &= \frac{(۸)(۳٫۸ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{kg})}{۱۲\mathrm{kg} + (۸)(۳٫۸ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{kg})} \times (۱۱۰۰\,\mathrm{m/s}) \\ &= ۲٫۸\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

به دلیل نوع انتخاب سیستم، مجبور نبودیم که نیروهای اعمال شده در هنگام برخورد گلوله‌ها با چوب را در نظر بگیریم. همهٔ آنها نیروهای داخلی بودند.

در راستای قائم، نیروهای خارجی عبارت‌اند از وزن گلوله‌ها، وزن قطعه چوب، و نیروی عمود بر سطح که به قطعه چوب وارد می‌شود. گلوله‌ها در طی پرواز، تحت تأثیر نیروی گرانی، تکانهٔ کوچکی در راستای قائم به‌دست می‌آورند. وقتی گلوله‌ها به چوب برخورد می‌کنند، چوب باید به هرگلوله نیرویی واردکند. این نیرو هم مؤلفهٔ افقی و هم مؤلفهٔ قائم دارد. همراه با نیروی قائم وارد برگلوله که برای صفرکردن مؤلفهٔ قائم تکانهٔ آن لازم است باید (بنابر قانون سوم نیوتون) نیروی عمودی وارد بر چوب از طرف سطح هم افزایش پیداکند. این افزایش نه فقط به خاطر وزن گلولهٔ فرورفته در چوب نیست، بلکه آهنگ تغییرمؤلفهٔ قائم تکانهٔ گلوله هم در آن سهیم است. وقتی همهٔ گلوله‌ها در داخل قطعه چوب متوقف شدند، نیروی عمودی برابر با مجموع وزن چوب وگلوله‌های جاگرفته در آن خواهد شد.

به منظور ساده کردن حل این مسئله فرض کردیم که گلوله‌ها چنان سریع شلیک شوند که هر ۸ گلوله قبل از اینکه گلولهٔ اول به چوب برخورد کند در پرواز باشند. آیا می‌توانید این مسئله را بدون این فرض حل کنید؟

فرض کنید مرز سیستم را چنان وسیع بگیریم که شامل تفنگ هم بشود. تفنگ به زمین محکم شده است. آیا تکانهٔ ... قبل و بعد از شلیک، تغییر می‌کند؟ آیا نیروی افقی خارجی‌ای به این سیستم وارد می‌شود؟

مثال ۷. شکل ۱۴ توپی به جرم $M = ۱۳۰۰\,\mathrm{kg}$ را نشان می‌دهد که گلوله‌ای ۷۲ کیلوگرمی را در راستای افقی با سرعت دهانه‌ای v برابر $۵۵\,\mathrm{m/s}$ شلیک می‌کند. توپ چنان مستقر شده است که می‌تواند آزادانه پس بزند. (الف) سرعت پس‌زنی توپ (V) را نسبت به زمین پیداکنید. (ب) سرعت اولیهٔ گلولهٔ توپ (v_{E}) را نسبت به زمین پیداکنید.

حل: (الف) توپ وگلوله را به عنوان سیستم اختیار می‌کنیم. با این کار، نیروهای مربوط به عمل شلیک توپ، نیروهای داخلی سیستم‌اند و نیازی به بررسی آنها نیست. نیروهای خارجی وارد بر سیستم هیچ مؤلفهٔ افقی ندارند. بنابراین مؤلفهٔ افقی تکانهٔ خطی کل سیستم باید در حین شلیک توپ ثابت بماند.

چارچوب مرجعی، ساکن نسبت به زمین، اختیار می‌کنیم و سرعتهای به‌سمت راست در شکل ۱۴ را مثبت می‌گیریم.

قبل از اینکه گلوله شلیک شود، تکانهٔ اولیهٔ سیستم یعنی P_{i}، برابر با صفر است. پس از شلیک، گلوله دارای سرعت افقی v نسبت به توپ پس‌رونده است. v سرعت دهانه‌ای گلوله است. ولی، در چارچوب مرجع زمین، سرعت افقی گلوله برابر $v+V$ است. به این ترتیب تکانهٔ خطی سیستم پس از شلیک برابر است با

$$P_{\mathrm{f}} = MV + m(v+V)$$

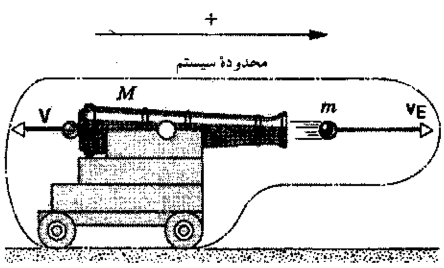
جملهٔ اول سمت راست عبارت است از تکانهٔ توپ پس‌رونده و جملهٔ دوم تکانهٔ گلولهٔ در حال پرواز است.

پایستگی تکانهٔ خطی در راستای افقی ایجاب می‌کند که $P_{\mathrm{i}} = P_{\mathrm{f}}$ باشد، یعنی

$$۰ = MV + m(v+V)$$

از حل این معادله برای V نتیجه می‌شود

$$V = -\frac{mv}{M+m} = -\frac{(۷۲\mathrm{kg})(۵۵\mathrm{m/s})}{۱۳۰۰\mathrm{kg} + ۷۲\mathrm{kg}} = -۲٫۹\,\mathrm{m/s}$$



شکل۱۴. مثال ۷. توپی به جرم M گلوله‌ای به جرم m شلیک می‌کند. سرعتهای گلوله و توپ پس‌رونده در چارچوب مرجع ساکن نسبت به زمین ... شده‌اند. سرعتهای به سمت راست مثبت گرفته شده‌اند.

علامت منفی حاکی از آن است که، همان‌طور که انتظار می‌رود، توپ شکل ۱۴ به سمت چپ پس می‌زند.

(ب) سرعت گلوله نسبت به توپ (پس‌رونده) همان سرعتِ دهانه‌ای است. سرعت گلوله، نسبت به زمین برابر است با

$$\begin{aligned} v_E &= v + V \\ &= 55\,\mathrm{m/s} + (-2{,}9\,\mathrm{m/s}) = 52\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

به علت پس‌زدن توپ، سرعت گلوله نسبت به زمین کمی کمتر از سرعت دهانه‌ای است. در این مسئله، توجه کنید که انتخاب معقول سیستم (توپ + گلوله) اهمیت دارد و چارچوب مرجعی (زمین یا توپ پس‌رونده) که اندازه‌گیری نسبت به آن انجام می‌شود باید کاملاً مشخص باشد.

مثال ۸. شکل ۱۵ دو قالب را که توسط فنری به هم متصل شده‌اند، نشان می‌دهد. این دو قالب می‌توانند آزادانه روی سطح افقی بدون اصطکاکی بلغزند. قالبها را که جرم آنها برابر m_1 و m_2 است از همدیگر دور می‌کشیم و سپس از حال سکون رها می‌کنیم. در زمانهای بعدی هر کدام از دو قالب حامل چه کسری از انرژی جنبشی کل سیستم خواهند بود؟

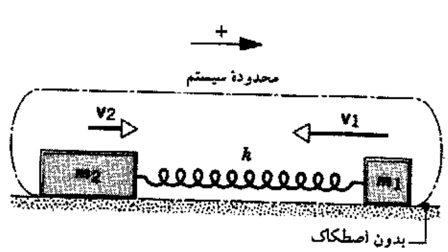
حل: دو قالب و فنر را (که بدون جرم فرض شده است) به عنوان سیستم می‌گیریم و سطح افقی‌ای را که این دو قالب روی آن می‌لغزند به عنوان چارچوب مرجع انتخاب می‌کنیم. جهت مثبت سرعتها را، در شکل ۱۵، به طرف راست اختیار می‌کنیم.

تکانهٔ اولیهٔ سیستم، P_i، در لحظهٔ رها شدن قالبها، صفر است. تکانهٔ نهایی سیستم در هرزمان بعدی، برابر است با

$$P_f = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

که v_1 و v_2 سرعتهای دو قالب‌اند. پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که $P_i = P_f$ باشد، یا

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$



شکل ۱۵. مثال ۸. دو قالب را که روی سطح بدون اصطکاک توسط فنری به هم متصل‌اند از همدیگر دور کرده و از حالت سکون رها کرده‌ایم. تکانهٔ کل در حالت اول (در لحظهٔ رها شدن سیستم) صفر است و بنابراین باید در همهٔ زمانهای بعدی هم صفر بماند. سرعتهای به سمت راست را مثبت در نظر گرفته‌ایم.

از این رابطه نتیجه می‌شود

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1} \qquad (29)$$

علامت منفی حاکی از آن است که سرعتها همواره در جهتهای مخالف‌اند. رابطهٔ بالا مربوط به سرعتهای خاصی نیست و در هر لحظه پس از رها کردن قالبها صادق است.

انرژی جنبشی قالبها عبارت‌اند از $K_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$ و $K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2$. کسر مورد نظر ما برای قالب m_1 برابر است با

$$f_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}$$

با جانشانی $v_2 = -v_1(m_1/m_2)$ در رابطهٔ بالا و با کمی عملیات جبری نتیجه می‌شود

$$f_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

به طریق مشابه، برای قالب m_2 خواهیم داشت

$$f_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

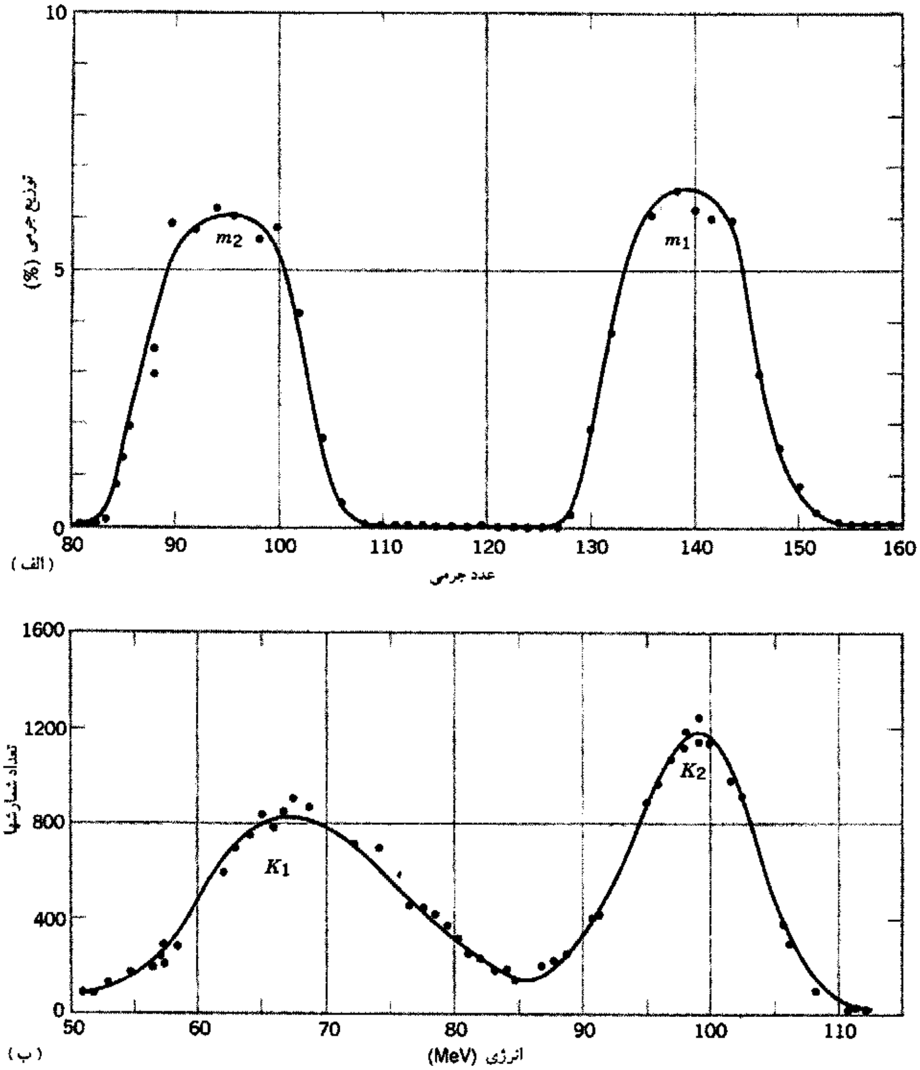
به این ترتیب، اگرچه انرژی جنبشی سیستم نوسان‌کننده با زمان تغییر می‌کند، اما سهم هر یک از دو قالب از این انرژی، کسری ثابت و مستقل از زمان است. قالبی که جرمش کمتر است سهم بیشتری از انرژی جنبشی قابل حصول را دریافت می‌کند. مثلاً، اگر $m_2 = 10 m_1$ باشد، خواهیم داشت

$$f_1 = \frac{10 m_1}{m_1 + 10 m_1} = 0{,}91 \text{ و } f_2 = \frac{m_1}{m_1 + 10 m_1} = 0{,}09$$

در این مورد، قالب سبکتر (m_1) حامل ۹۱٪ انرژی جنبشی سیستم و قالب سنگین‌تر (m_2) حامل ۹٪ باقی‌مانده است. در حد $m_2 \gg m_1$، قالب سبکتر اساساً تمام انرژی جنبشی را می‌گیرد.

عبارتهای مربوط به f_1 و f_2 به همین صورت در مورد سنگی که در میدان گرانشی زمین سقوط می‌کند صادق است. فرض کنید که m_2 جرم زمین باشد و m_1 جرم سنگ. در چارچوب مرجع مرکز جرم آنها، سنگ تقریباً همهٔ انرژی جنبشی را به‌خود اختصاص می‌دهد ($f_1 \approx 1$) و زمین سهم بسیار کوچکی دارد ($f_2 \approx 0$). مقادیر تکانه‌های خطی زمین و سنگ با هم برابرند، ولی سرعت بسیار کم زمین با جرم بسیار بزرگ آن جبران می‌شود. با همین استدلال بود که (در فصل ۸) وقتی پایستگی انرژی را در مورد اجسام سقوط‌کننده در میدان گرانش زمین به کار می‌بردیم، انرژی جنبشی زمین را به‌حساب نمی‌آوردیم.

مثال کاربردی دیگری از این اثر در شکافت هسته‌ای رخ می‌دهد، که در آن هستهٔ سنگینی مانند ^{235}U به دو پارهٔ سبکتر می‌شکافد.



شکل۱۶. (الف) توزیع جرمی پاره‌های گسیل‌شده در یک شکافت هسته‌ای. مقیاس قائم، آن کسری از شکافتها را نشان می‌دهد که به پاره‌ای با عدد جرمی نشان داده شده روی مقیاس افقی بینجامد. (ب) توزیع انرژی پاره‌های گسیل‌شده در شکافت.

پاره‌ها که در اثر رانش الکتریکی از همدیگر دور می‌شوند، در ابتدا خیلی به هم نزدیک و تقریباً ساکن‌اند. از معادلهٔ ۲۹ انتظار داریم که نسبت انرژیهای جنبشی پاره‌ها پس از شکافت به‌صورت زیر باشد

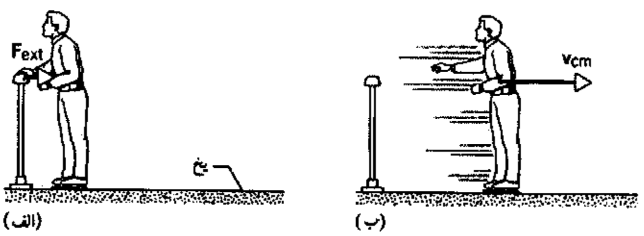
$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}$$

یعنی، پارهٔ سنگین‌تر انرژی جنبشی کمتری کسب می‌کند.

شکافت یک فرایند آماری است، یعنی‌برای پاره‌های شکافت یک توزیع جرم و متناظر با آن یک توزیع انرژی جنبشی داریم. در شکل ۱۶الف توزیع جرم و در شکل ۱۶ب توزیع انرژی جنبشی نشان داده شده است. توجه داشته باشید که شکافت به پاره‌هایی با جرمهای مساوی پدیده‌ای بسیار نادر است. معمولاً عدد جرم یکی از پاره‌ها در حدود ۱۳۸ و عدد جرم دیگری در حدود ۹۴ است. به‌این ترتیب، نسبت جرمی نوعی m_2/m_1 حدوداً برابر است با ۰٫۶۸ = ۹۴/۱۳۸، و نسبت انرژی جنبشی نوعی K_1/K_2 حدوداً برابر با ۰٫۶۸ = ۶۷MeV/۹۹MeV، یعنی (همان‌طور که انتظار می‌رود) برابر با همان نسبت جرمی نوعی است. پس سهم انرژی جنبشی هر یک از پاره‌های شکافت هم بنابر قید پایستگی تکانه تعیین می‌شود.

۹ـ۷ کار و انرژی در سیستمی از ذرات (اختیاری)

شکل ۱۷ اسکیت‌بازی را نشان می‌دهد که به نرده‌ای فشار می‌آورد و



شکل۱۷. (الف) اسکیت‌بازی نرده‌ای را هل می‌دهد. نرده نیروی $\mathbf{F}_{ext}$ بر اسکیت‌باز اعمال می‌کند. (ب) اسکیت‌باز پس از آنکه به عقب رانده شد با سرعت $\mathbf{v}_{cm}$ حرکت می‌کند.

در این فرایند انرژی جنبشی کسب می‌کند. اگر از اسکیت‌باز بپرسیم که این انرژی جنبشی از کجا می‌آید، او با توجه به فعالیت عضلانی‌اش، احتمالاً پاسخ خواهد داد که انرژی مود نیاز باید از ذخیرهٔ انرژی داخلی خودش آمده باشد. می‌خواهیم صحت ادعای اسکیت‌باز را با به‌کار بردن پایستگی انرژی در مورد سیستمی که فقط شامل اسکیت‌باز است، تحقیق کنیم.

از معادلهٔ ۲۸ فصل ۸ داریم

$$\Delta U + \Delta K_{cm} + \Delta E_{int} = W \qquad (۳۰)$$

در استنتاج معادلهٔ ۳۳ فصل ۸، انرژی جنبشی سیستم را به دو بخش تقسیم کردیم: ΔK_{int}، که نمایندهٔ حرکتهای داخلی ذرات در سیستم است و ΔK، که نمایندهٔ حرکت "کلی" سیستم است. در اینجا به صراحت می‌گوییم که این حرکت "کلی" در واقع همان حرکت مرکز جرم است، و انرژی جنبشی متناظر با آن عبارت است از

$$K_{cm} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \qquad (۳۱)$$

این انرژی سیستمی است به جرم کل M، اگر به‌صورت ذره‌ای با سرعت v_{cm} حرکت کند. انرژی جنبشی داخلی در معادلهٔ ۳۰ به‌صورت بخشی از ΔE_{int} منظور شده است. (مسئلهٔ ۴۹ به استخراج این قسمت از انرژی جنبشی مربوط است.)

چون سطح یخ افقی است تغییری در انرژی پتانسیل اسکیت به‌وجود نمی‌آید، بنابراین $\Delta U = 0$ است. به‌علاوه، چون نقطهٔ اعمال نیرو حرکت نمی‌کند نرده کاری روی اسکیت‌باز انجام نمی‌دهد. در بحث مربوط به شکل ۱۳ در فصل ۸ گفتیم که هرگاه کار خارجی روی سیستمی انجام شود، انرژی از طریق مرزهای سیستم به آن منتقل می‌شود. هیچ انرژی‌ای از طریق نرده به اسکیت‌باز منتقل نشده است، بنابراین نرده هیچ کار خارجی‌ای روی اسکیت‌باز انجام نداده است. به این ترتیب $W = 0$ است و معادلهٔ ۳۰ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\Delta K_{cm} = -\Delta E_{int} \qquad (۳۲)$$

از آنجا که ΔK_{cm} کمیتی مثبت است (اسکیت‌باز در اثر هل دادن نرده انرژی جنبشی کسب می‌کند)، ΔE_{int} باید کمیتی منفی باشد. این مطلب ادعای اسکیت‌باز را تأیید می‌کند که: انرژی جنبشی کسب شده بر اثر هل دادن نرده از ذخیرهٔ انرژی داخلی خود او حاصل می‌شود، نه از منبع خارجی.

تحلیل مبتنی بر انرژی مفید است، ولی گاهی ممکن است مایل باشیم سیستم را برحسب نیروها و شتابها هم تحلیل کنیم. می‌خواهیم ببینیم که از کاربرد قانون دوم نیوتون در مورد اسکیت‌باز چه چیزی عایدمان می‌شود. نرده نیروی $\mathbf{F}_{ext}$ را به اسکیت‌باز (که همچنان آن‌را سیستم در نظر می‌گیریم) اعمال می‌کند. برای اینکه اسکیت‌باز از نرده رانده شود باید بازوهای خود را به‌صورت کشیده در بیاورد. در نتیجه، ممکن است اعضای مختلف بدن او به هنگام هل دادن نرده، جابه‌جاییها، سرعتها و شتابهای متفاوت داشته باشند. پس اسکیت‌باز را نباید به‌صورت تک‌ذره در نظر گرفت، بلکه باید او را به شکل سیستمی از ذرات بررسی کرد. در این مورد، با استفاده از معادلهٔ ۱۶ می‌توانیم شتاب مرکز جرم اسکیت‌باز را معین کنیم مشروط بر آنکه نیروی خارجی اعمال شده از طرف نرده بر او را بدانیم

$$F_{ext} = Ma_{cm} \qquad (۳۳)$$

برای تک‌ذره دریافتیم که‌قضیهٔ کار-انرژی ($W = \Delta K$) نتیجهٔ مفیدی است. روشن است که نمی‌توانیم این قضیه را در مورد اسکیت‌باز به‌کار ببریم، زیرا اسکیت‌باز مانند تک‌ذره حرکت نمی‌کند. چنانکه قبلاً نتیجه گرفته‌ایم $W = 0$ است ولی $\Delta K \neq 0$ است. بنابراین، صورت تک‌ذره‌ای قضیهٔ کار-انرژی دراین مورد معتبر نیست. حالا سعی می‌کنیم رابطه‌ای به‌دست بیاوریم که برای سیستمی از ذرات قابل استفاده باشد.

فرض کنید نیروی خارجی خالص $\mathbf{F}_{ext}$ بر سیستمی از ذرات وارد شود. در حالت کلی، در چارچوب مرجع لخت انتخابی ما، ممکن است نقطهٔ اثر نیرو حرکت بکند یا (مانند مورد اسکیت‌باز شکل ۱۷) حرکت نکند. فرض می‌کنیم که همهٔ نیروها و حرکتها در جهت x باشند. از آنجا که با سیستمی از ذرات سروکار داریم، به حرکت نقطهٔ اثر نیروی خارجی توجه نمی‌کنیم بلکه حرکت مرکز جرم سیستم را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید مرکز جرم سیستم به اندازهٔ dx_{cm} در امتداد محور x حرکت کند. اگر طرفین معادلهٔ ۳۳ را در dx_{cm} ضرب کنیم نتیجه می‌شود

$$F_{ext}dx_{cm} = Ma_{cm}dx_{cm} = M\frac{dv_{cm}}{dt}v_{cm}dt$$

که در آن dv_{cm}/dt را به جای a_{cm} و $v_{cm}dt$ را به جای dx_{cm} گذاشته‌ایم. معادلهٔ ۳۳ را می‌توانیم به این‌صورت هم بنویسیم

$$F_{ext}dx_{cm} = Mv_{cm}dv_{cm} \qquad (۳۴)$$

فرض کنید در حینی که این نیرو اثر می‌کند مرکز جرم از x_i تا x_f حرکت می‌کند. از معادلهٔ ۳۴، بین این حدود، انتگرال می‌گیریم

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{ext} + dx_{cm} = \int_{v_{cm,i}}^{v_{cm,f}} Mv_{cm}dv_{cm} = \frac{1}{2}Mv_{cm,f}^2 - \frac{1}{2}Mv_{cm,i}^2 \qquad (۳۵)$$

طرف راست معادلهٔ ۳۵ را با استفاده از معادلهٔ ۳۱ می‌شود به‌صورت $K_{cm,f} - K_{cm,i} = \Delta K_{cm}$ نوشت. این عبارت تغییر انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم M را، در اثر تغییر سرعت آن از $v_{cm,i}$ به $v_{cm,f}$، نشان می‌دهد.

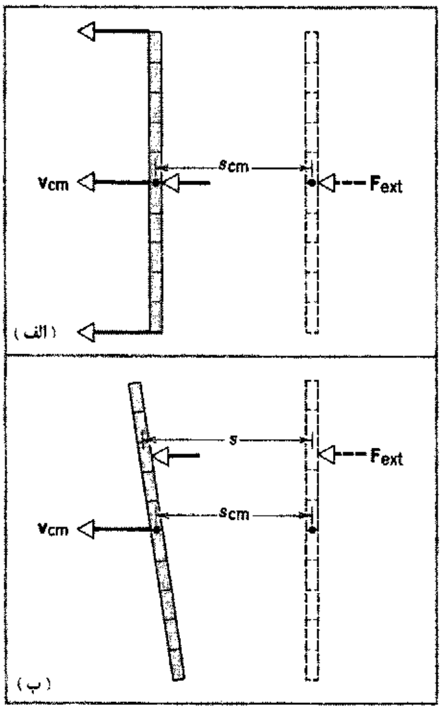
طرف چپ معادلهٔ ۳۵ قدری شبیه به تعریف کاراست، و در واقع این انتگرال دارای بعد کار هم هست. ولی این عبارت، به آن مفهومی که قبلاً کار را تعریف کرده‌ایم، کار نیست زیرا $dx_{\rm cm}$ جابه‌جایی نقطهٔ اثر نیروی خارجی نیست. (در تعریف کار به‌صورت $W = \int F dx$ که در فصل ۷ داشتیم، dx عبارت بود از جابه‌جایی نقطه اثر نیروی F.) توجه داشته باشید که جابه‌جایی نقطهٔ اثر نیروی خارجی در شکل ۱۷ صفر است؛ پس در این مورد $W = ۰$ است ولی طرف چپ معادلهٔ ۳۵ صفر نیست.[۱]

در بسیاری از مواردی که با آنها سروکار داریم، نیروی خارجی ثابت است و در معادلهٔ ۳۵ می‌شود آن‌را از زیر علامت انتگرال بیرون آورد. انتگرالِ به‌جا مانده جابه‌جایی خالص $s_{\rm cm}$ مرکز جرم سیستم را به‌دست می‌دهد. در این‌گونه موارد، معادلهٔ ۳۵ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$F_{\rm ext} s_{\rm cm} = \Delta K_{\rm cm} \qquad (۳۶)$$

معادلهٔ ۳۵ شبیه قضیهٔ کارـانرژی برای تک‌ذره است، و اگر سیستم ما فقط شامل یک ذره باشد (یا از جسمی تشکیل شده باشد که بتوان آن‌را مثل ذره در نظرگرفت)، درواقع به همان نتیجه هم می‌رسد. با این همه، بین معادلهٔ ۳۵ و قضیهٔ کارـانرژی برای تک‌ذره، اختلاف مهمی وجود دارد. قضیهٔ کارـانرژی برای تک‌ذره، بیانی دربارهٔ پایستگی انرژی در حرکت یک ذره هم هست، زیرا انرژی انتقالی تنها نوع انرژی‌ای است که یک ذره می‌تواند داشته باشد. اما معادلهٔ ۳۵ به هیچ وجه بیان مناسبی برای پایستگی انرژی نیست، زیرا یک سیستم متشکل از ذرات می‌تواند شامل شکلهای دیگری از انرژی ـــاز جمله انرژیهای داخلی، پتانسیل، و چرخشی ـــ هم باشد. در مورد یک سیستم متشکل از ذرات، معادلهٔ ۳۵ و پایستگی انرژی (معادلهٔ ۳۰) را می‌شود به عنوان دو رابطهٔ جدا و مستقل از هم به کار برد.

به عنوان مثالی از کاربرد این اصول، می‌خواهیم حاصل اعمال نیرو به یک چوب متر را که در ابتدا ساکن است و می‌تواند آزادانه روی یک سطح افقی بدون اصطکاک بلغزد، بررسی کنیم. نیروی ثابتی به مقدار $F_{\rm ext}$ به این جسم اعمال می‌کنیم. اگر این نیرو را در محل علامت ۵۰cm وارد کنیم (شکل ۱۸الف)، چوب متر مانند یک ذره با شتاب $a_{\rm cm} = F_{\rm ext}/m$ به‌حرکت در می‌آید، و تمام نقاط آن با همین شتاب حرکت می‌کنند. جابه‌جایی s نقطه‌ای که نیرو به آن وارد می‌شود برابر است با جابه‌جایی $s_{\rm cm}$ مرکز جرم. در این حالت، وقتی همهٔ چوب‌متر (که به‌صورت یک ذره حرکت می‌کند) به‌اندازهٔ $s_{\rm cm}$ جابه‌جا شد، کاری به اندازهٔ $F_{\rm ext}s$ انجام داده‌ایم. می‌توانیم صورت ذره‌ای قضیهٔ کارـانرژی را به کار ببریم و سرعت vی همهٔ نقاط چوب‌متر را به‌دست بیاوریم. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که نیرو درمحل علامت ۲۵cm اثر می‌کند (شکل ۱۸ب). اگر خودتان این آزمایش را انجام بدهید می‌بینید که چوب‌متر دیگر مانند یک ذره حرکت نمی‌کند. همان‌طورکه در فصل ۱۲ خواهیم دید، این حرکت پیچیده را می‌توانیم به دو بخش تقسیم کنیم ـــیکی انتقال جسم به عنوان ذره و دیگری



شکل۱۸. (الف) چوب‌متری را با نیروی $\mathbf{F}_{\rm ext}$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی هل می‌دهیم. نیرو در نقطهٔ نشانهٔ ۵۰cm وارد می‌شود. (ب) نیرو در نقطهٔ نشانهٔ ۲۵cm وارد می‌شود. در این حالت، چوب‌متر علاوه بر حرکت انتقالی به چرخش هم در می‌آید و دیگر مانند ذره عمل نمی‌کند. در این مورد نیرو در فاصلهٔ s که بزرگتر از جابه‌جایی مرکز جرم ($s_{\rm cm}$) است اثر می‌کند.

چرخش آن حول مرکز جرم. نقطه‌ای که به آن نیرو وارد می‌شود مسافتی بیشتر از $s_{\rm cm}$ می‌پیماید (شکل ۱۸ب). بنابراین کاری که روی چوب‌متر انجام می‌دهیم بیشتر از $F_{\rm ext}s_{\rm cm}$ است. برای تحلیل این حرکت باید از هر دو معادلهٔ ۳۰ و ۳۶ استفاده کنیم. حاصل‌ضرب $F_{\rm ext}s_{\rm cm}$، بنابه معادلهٔ ۳۶، تغییر در انرژی جنبشی انتقالی چوب‌متر را به‌دست می‌دهد. حاصل‌ضرب $F_{\rm ext}s$، که در آن s مسافتی است که نقطهٔ اثر نیرو (نشانهٔ ۲۵cm) طی می‌کند، کار W را به‌دست می‌دهد که در معادلهٔ ۳۰ آمده است، و معادلهٔ ۳۰ بیانی است از پایستگی انرژی. در فصل ۱۲ خواهیم دید که می‌توانیم بخشی از انرژی جنبشی کل را به حرکت انتقالی و بخشی را به حرکت چرخشی نسبت بدهیم.[۱]

مثال ۹. یک اسکیت‌باز ۷۲ کیلوگرمی نیروی ثابت $F = ۵۵{\rm N}$ را به نرده‌ای وارد می‌کند (شکل ۱۷). مرکز جرم او تا زمانی که تماسش با نرده

---

۱. بعضی مؤلفان برای توصیف طرف چپ معادلهٔ ۳۵ از اصطلاح شبه‌کار، یا کارِ مرکز جرم استفاده می‌کنند. این معادله گاهی معادلهٔ مرکز جرم نامیده می‌شود. ما ترجیح می‌دهیم برای توصیف کمیتی که ارتباطی با کار در مفهوم پذیرفته شدهٔ آن ندارد، از هیچ اصطلاحی که شامل واژهٔ کار باشد استفاده نکنیم. مرور جامعی بر مفاهیم کار و انرژی در مورد سیستمهای ذرات در مرجع زیر یافت می‌شود:
"Developing the Energy Concepts in Introductory Physics," A. B. Arons, *The Physics Teacher*, October 1989, p. 506.

قطع می‌شود به اندازه $s_{cm} = ۳۲cm$ جابه‌جا می‌شود. (الف) سرعت مرکز جرم اسکیت‌باز در هنگام جدا شدن او از نرده چقدر است؟ (ب) در این فرایند انرژی داخلی اسکیت‌باز چقدر تغییر می‌کند؟

حل: (الف) این بار هم اسکیت‌باز را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. بنابر قانون سوم نیوتون، نرده هم نیروی ۵۵N به‌سمت راست (در شکل ۱۷) به اسکیت‌باز وارد می‌کند. این نیرو تنها نیروی خارجی است که باید آن‌را در نظر بگیریم. از معادلهٔ ۳۶ داریم

$$F_{ext}s_{cm} = \frac{۱}{۲}Mv_{cm}^{۲} - ۰$$

یا

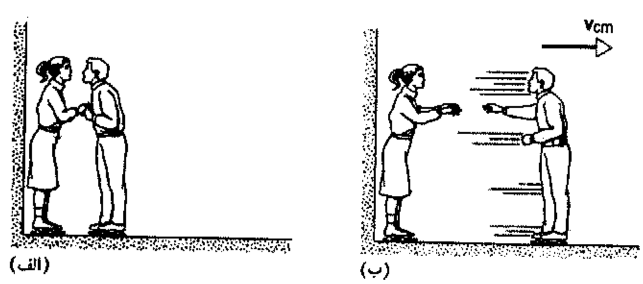
$$v_{cm} = \sqrt{\frac{۲F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{۲(۵۵N)(۰٫۳۲m)}{۷۲kg}} = ۰٫۷۰ m/s$$

(ب) حالا قانون پایستگی انرژی را، که در شرایط این مسئله به‌صورت معادلهٔ ۳۲ در می‌آید، به‌کار می‌بریم

$$\Delta E_{int} = -\Delta K_{cm} = -\frac{۱}{۲}Mv_{cm}^{۲}$$
$$= -\frac{۱}{۲}(۷۲kg)(۰٫۷۰ m/s)^{۲} = -۱۷٫۶J$$

این مقدار انرژی داخلی را می‌شود با خوردن تقریباً یک چهارم‌قاشق چایخوری سودای رژیمی جبران کرد.

مثال ۱۰. دراین مورد، اسکیت‌باز با هل دادن همبازیش که پشت به دیوار ایستاده است به حرکت در می‌آید (شکل ۱۹الف). در آغاز دستهای هر دوی آنها خمیده است. تا زمانی که دستهایشان به حالت کشیده در بیاید و تماسشان با هم قطع شود یکدیگر را هل می‌دهند (شکل ۱۹ب). همبازی اسکیت‌باز نیروی ثابت $F_{ext} = ۵۵N$ را در طی مسافت $s = ۳۲cm$ بر او وارد می‌کند؛ این همان مسافتی است که دستهای همبازی تا زمانی که به حالت کاملاً کشیده در می‌آید طی می‌کند. تا زمانی که تماس قطع می‌شود. مرکز جرم اسکیت‌باز مسافت کل $s_{cm} = ۵۸cm$ را، که در واقع مقدار کشیده‌شدگی دستان دو نفر است، طی کرده است. (الف) سرعت مرکز جرم اسکیت‌باز پس از قطع تماس چقدر است؟ (ب) تغییرانرژی داخلی اسکیت‌باز در طی این فرایند چقدر است؟



شکل۱۹. مثال ۱۰. (الف) اسکیت‌باز و همبازیش، تا کشیده شدن کامل دستهایشان، به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. همبازی پشت به دیوار ایستاده است و در نتیجه حرکت نمی‌کند. (ب) پس از آنکه دستها به حالت کشیده در آمدند، اسکیت‌باز با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند.

حل: (الف) اسکیت‌باز را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که در این مورد کار خارجی روی سیستم انجام شده است، بنابراین از طریق مرز سیستم باید انتقال انرژی صورت گرفته باشد. از معادلهٔ ۳۶ داریم

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm} = \frac{۱}{۲}Mv_{cm}^{۲} - ۰$$

یا

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{۲F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{۲(۵۵N)(۰٫۵۸m)}{۷۲kg}} = ۰٫۹۴ m/s$$

(ب) از معادلهٔ پایستگی انرژی داریم

$$\Delta K_{cm} + \Delta E_{int} = W$$

که در آن W (یعنی $F_{ext}s$) کار خارجی انجام شده روی اسکیت‌باز توسط همبازی‌اش است. این معادله را برای تغییر انرژی داخلی ΔE_{int} حل می‌کنیم و با استفاده از قسمت الف، به‌جای ΔK_{cm} مقدار معادلش $F_{ext}s_{cm}$ را قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\Delta E_{int} = W - \Delta K_{cm} = F_{ext}s - F_{ext}s_{cm}$$
$$= (۵۵N)(۰٫۳۲m) - (۵۵N)(۰٫۵۸m)$$
$$= +۱۷٫۶J - ۳۱٫۹J = -۱۴٫۳J$$

به‌این ترتیب اسکیت‌باز برای کسب انرژی جنبشی نهایی‌اش باید ۱۴٫۳J از انرژی داخلی‌اش را مصرف کند. همبازی با انجام کار روی اسکیت‌باز ۱۷٫۶J انرژی به او می‌دهد، که البته این انرژی از ذخیرهٔ انرژی داخلی همبازی تأمین می‌شود. اگر همبازی حضور نداشت و اسکیت‌باز می‌خواست همین انرژی جنبشی را با هل دادن دیوار کسب کند می‌بایست تمام ۳۱٫۹J انرژی جنبشی را از انرژی داخلی خودش فراهم می‌کرد.

مثال ۱۱. قطعه‌ای به جرم ۲٫۵ کیلوگرم با سرعت اولیهٔ افقی ۰٫۶۵ متر بر ثانیه روی سطح افقی پرتاب می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان سطح و قطعه ۰٫۱۲ است. (الف) چه بر سر انرژی جنبشی اولیهٔ قطعه می‌آید؟ (ب) قطعه قبل از اینکه متوقف شود چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) برای حل این مسئله با پایستگی انرژی، مناسبترین سیستمی که می‌توانیم در نظر بگیریم عبارت است از قطعه به‌اضافهٔ آن قسمتی از سطح افقی که قطعه روی آن می‌لغزد. چون در سطح افقی هیچ تغییری در انرژی پتانسیل حاصل نمی‌شود، در معادلهٔ ۳۰

داریم $\Delta U = 0$. به‌علاوه، چون هیچ نیروی خارجی به این سیستم اثر نمی‌کند، داریم $W = 0$. (سیستم را چنان تعریف کرده‌ایم که برای آن اصطکاک یک نیروی داخلی است.) به‌این ترتیب معادلهٔ ۳۰ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta K_{\text{cm}}$$

که خود ΔK_{cm} منفی است، چون انرژی جنبشی کم می‌شود. با جانشانی مقادیر معلوم داریم

$$\Delta E_{\text{int}} = -(0 - \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2) = +\frac{1}{2}(5.2\,\text{kg})(0.65\,\text{m/s})^2 = +1.1\,\text{J}$$

این افزایش انرژی داخلی سیستم به‌صورت افزایش کوچکی در دمای قطعه و سطح ظاهر می‌شود. محاسبهٔ چگونگی تقسیم این انرژی بین قطعه و سطح دشوار است؛ و بیشتر به خاطر اجتناب از این دشواری بود که سیستم را، به‌جای قطعهٔ تنها، شامل قطعه و سطح در نظر گرفتیم.

(ب) در این مورد قطعهٔ تنها را به عنوان سیستم انتخاب می‌کنیم. در اینجا نمی‌توانیم قطعه را مانند ذره در نظر بگیریم، زیرا شکلهای دیگر تبادل انرژی، غیر از انرژی جنبشی انتقالی (در این مورد انرژی داخلی) هم در کارند. با استفاده از معادلهٔ ۳۶ داریم

$$F_{\text{ext}} s_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{cm}}$$

در این مورد F_{ext} نیروی اصطکاکی است (برابر با $-\mu M g$ اگر جهت حرکت قطعه را مثبت بگیریم) که از خارج بر قطعه اثر می‌کند و s_{cm} جابه‌جایی مرکز جرم قطعه است. به این ترتیب داریم

$$(-\mu M g)(s_{\text{cm}}) = 0 - \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$$

یا

$$s_{\text{cm}} = \frac{v_{\text{cm}}^2}{2\mu g} = \frac{(0.65\,\text{m/s})^2}{2(0.12)(9.8\,\text{m/s}^2)} = 0.18\,\text{m}$$

۸ـ۹ سیستمهای با جرم متغیر (اختیاری)

تصور کنید ارابهٔ حامل توپ شکل ۱۴، حامل تعداد زیادی گلوله توپ هم باشد. وقتی که توپ به‌طور پیاپی شلیک می‌کند، ارابه (که فرض می‌کنیم بدون اصطکاک حرکت می‌کند) به سمت چپ پس می‌زند و در هر پس‌زنی سرعتش زیادتر می‌شود. با مرز رسم شده در شکل ۱۴، می‌دانیم که تکانهٔ افقی کل باید صفر باشد و می‌دانیم که هیچ نیروی خالص افقی بر سیستم اثرنمی‌کند. ولی اگر سیستم را چنان در نظر بگیریم که فقط شامل ارابه و توپ باشد، گفتهٔ بالا دیگر درست نیست. هر بار که توپ شلیک می‌کندتکانه‌اش افزایش می‌یابد، و بهتر است با استفاده از زبان آشنای فیزیک نیوتونی، این تغییر تکانه را به نیروی مناسبی نسبت بدهیم. در این مورد، نیرویی که توپ را شتاب می‌دهد یک نیروی واکنشی است: توپ توسط خرجِ انفجارش به گلوله‌ها نیرو وارد می‌کند و آنها را از دهانهٔ لوله به بیرون پرتاب می‌کند و نیروی واکنش (گلوله‌ها هم به توپ نیرو وارد می‌کنند) توپ را به سمت چپ می‌راند.

با شلیک پیاپی توپ، جرم کل ارابه به اندازهٔ مجموع جرم گلوله‌هایی که پرتاب شده‌اند کاهش می‌یابد. روش ارائه شده در مثال ۷ را نمی‌توان به همین سادگیها برای حل این مسئله هم به کاربرد، زیرا جرم جسم پس‌رونده، با شلیک هر گلوله، تغییر می‌کند.

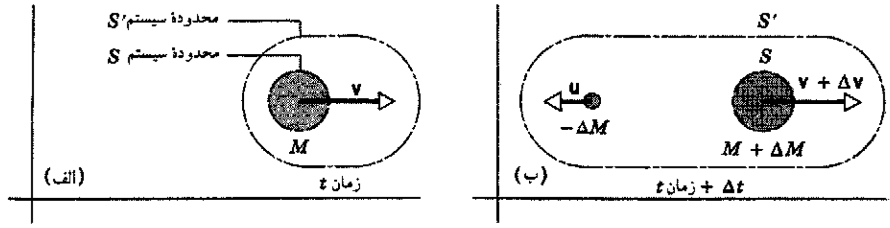
در اینجا سیستم S را که شامل توپ به‌اضافهٔ ارابه است، به عنوان سیستمی "با جرم متغیر" در نظر می‌گیریم. البته سیستم بزرگتر S' مشتمل بر ارابه، توپ، و گلوله‌های شلیک شده، سیستمی است با جرم ثابت، که (در نبود نیروی خارجی) تکانهٔ آن هم ثابت است. ولی سیستم کوچکتر S جرم ثابتی ندارد. به‌علاوه، گلوله‌های شلیک شده حامل تکانه‌اند، و تکانهٔ خالصی که از S بیرون می‌رود موجب می‌شود که این سیستم شتاب بگیرد.

مثال بالا تصور نسبتاً روشنی از چگونگی عملکرد موشک به‌دست می‌دهد. سوخت می‌سوزد و با سرعت خیلی زیادی به بیرون رانده می‌شود؛ محصولات سوخت نقش گلوله‌های توپ را دارند. شتاب موشک (منهای سوخت مصرف شده) به آهنگ مصرف سوختْ و به سرعت خروج محصولات سوخت وابسته است.

هدف از تحلیل سیستمهایی نظیر موشک این نیست که سینماتیک کل سیستم S' را مطالعه کنیم، بلکه می‌خواهیم توجه‌مان را به سیستم مشخص S معطوف کنیم و ببینیم که وقتی توزیع جرم در داخل سیستم کلی S'، و در نتیجه جرم زیر سیستم S تغییرمی‌کند، حرکت S چگونه است. جرم کل در داخل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S که مورد نظر ماست ممکن است با افزایش یا کاهش جرم (و تکانه) وضعیت حرکتی‌اش را تغییر بدهد.

شکل ۲۰ طرحی از یک سیستم تعمیم‌یافته را نشان می‌دهد. در زمان t، از چارچوب مرجع خاصی که در آن قرار داریم، مشاهده می‌کنیم که زیرسیستم S دارای جرم M است و با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. در زمان $t + \Delta t$، جرم S به‌اندازهٔ ΔM (که در صورت بیرون رفتن جرم، مقداری منفی است) تغییر کرده و به $M + \Delta M$ رسیده است، در حالی‌که جرم باقی‌ماندهٔ سیستم S' به‌اندازهٔ $-\Delta M$ تغییر کرده است. اکنون سیستم S با سرعت $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ و مادهٔ بیرون رانده شده با سرعت $\mathbf{u}$ حرکت می‌کند. این اندازه‌گیریها در چارچوب مرجع خودمان انجام می‌شود.

برای اینکه مسئله حتی‌الامکان کلی‌تر باشد، فرض می‌کنیم که یک نیروی خارجی F_{ext} هم می‌تواند روی کل سیستم اثر کند. این نیرو نیرویی نیست که موشک را به پیش می‌راند (نیروی پیشران برای S' یک نیروی داخلی است) بلکه نیروی ناشی از یک عامل



شکل ۲۰. (الف) سیستم S' در زمان t از جرم M تشکیل شده است که با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. (ب) اندک زمانی بعد، Δt، جرمی به اندازهٔ $-\Delta M$ از سیستم بیرون رانده شده است. در این هنگام، جرم باقی‌مانده، $M+\Delta M$، که ما آن‌را زیرسیستم S می‌نامیم، با سرعت $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ حرکت می‌کند.

خارجی، مانند گرانش یا مقاومت جو است. تکانهٔ کل مربوط به سیستم S' برابر است با $\mathbf{P}$، و قانون دوم نیوتون را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}=\frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad (۳۷)$$

در بازهٔ زمانی Δt، تغییرتکانه برابر است با

$$\Delta\mathbf{P}=\mathbf{P}_f-\mathbf{P}_i \qquad (۳۸)$$

که در آن $\mathbf{P}_f$ تکانهٔ نهایی سیستم S' در لحظهٔ $t+\Delta t$ و $\mathbf{P}_i$ تکانهٔ اولیهٔ سیستم S' در لحظهٔ t است. این تکانه‌ها از روابط زیرحاصل می‌شوند

$$\mathbf{P}_i=M\mathbf{v} \qquad (\text{۳۹الف})$$

$$\mathbf{P}_f=(M+\Delta M)(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})+(-\Delta M)\mathbf{u} \qquad (\text{۳۹ب})$$

پس تغییر تکانهٔ سیستم S' برابر است با

$$\Delta\mathbf{P}=\mathbf{P}_f-\mathbf{P}_i=(M+\Delta M)(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})+(-\Delta M)\mathbf{u}-M\mathbf{v} \qquad (۴۰)$$

در معادلهٔ ۳۷ مشتق را به‌صورت حد می‌نویسیم و $\Delta\mathbf{P}$ را از معادلهٔ بالا در آن قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{ext}}&=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{(M+\Delta M)(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})+(-\Delta M)\mathbf{u}-M\mathbf{v}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to ۰}\left[M\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}+(\mathbf{v}-\mathbf{u})\frac{\Delta M}{\Delta t}+\Delta\mathbf{v}\frac{\Delta M}{\Delta t}\right]\\&=M\frac{d\mathbf{v}}{dt}+(\mathbf{v}-\mathbf{u})\frac{dM}{dt} \qquad (۴۱)\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در انجام عمل حدگیری، آخرین جملهٔ داخل کروشه صفر می‌شود، زیرا وقتی $\Delta t\to ۰$ برود، $\Delta\mathbf{v}$ هم به صفر میل می‌کند. در معادلهٔ ۴۱، M جرم زیرسیستم S در زمان t و $d\mathbf{v}/dt$ شتاب S در وقتی است که جرمی را با سرعت $\mathbf{u}$ (در چارچوب مرجع خودمان) و با آهنگ $|dM/dt|$ به بیرون می‌راند.

معادلهٔ ۴۱ را می‌توانیم به‌صورت کمی کلی‌تر هم بنویسیم

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}=\frac{d}{dt}(M\mathbf{v})-\mathbf{u}\frac{dM}{dt} \qquad (۴۲)$$

معادلهٔ ۴۲ اصلاً شباهتی به $\mathbf{F}_{\text{ext}}=M\mathbf{a}$ یا $\mathbf{F}_{\text{ext}}=d(M\mathbf{v})/dt$ که قبلاً برای بررسی حرکت ذرات یا سیستمهای با جرم ثابت به‌کار بردیم، ندارد. این معادله را فقط در دو مورد خیلی خاص می‌توانیم به‌صورت قانون دوم نیوتون برای ذره در بیاوریم: ۱. وقتی $dM/dt=۰$ یعنی M ثابت باشد، که در این صورت به همان مورد سیستمهای با جرم ثابت بازگشته‌ایم، یا ۲. وقتی $\mathbf{u}=۰$ باشد، که در این صورت در واقع داریم سیستم با جرم متغیر را از چارچوب مرجع خیلی خاصی، که در آن جرم بیرون رانده شده ساکن است، مشاهده می‌کنیم.

به‌طور کلی، وقتی قانون $\mathbf{F}_{\text{ext}}=d\mathbf{P}/dt$ را در مورد سیستمی مانند S که جرم آن افزایش یا کاهش می‌یابد به‌کار می‌بریم، باید تغییر در تکانهٔ جرم افزوده یا کاسته شده را هم در نظر بگیریم.[۱] یعنی همان‌طور که در معادلهٔ ۴۲ و شکل ۲۰ می‌بینیم، باید سیستم بزرگتر S' را که شامل سیستم S و جرم اضافی است، بررسی کنیم. این رهیافت در مورد دینامیک سیستمهای با جرم متغیر، اهمیت قانون پایستگی انرژی را به‌خوبی نشان می‌دهد و دستورالعمل نسبتاً ساده‌ای برای بررسی سیستمهای پیچیده در اختیار ما می‌گذارد.

معادلهٔ ۴۱ را به‌صورت خاصی به‌دست آورده‌ایم که می‌توانیم از آن در بررسی حرکت موشک به راحتی استفاده کنیم. کمیت $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ برابر با $\mathbf{v}_{\text{rel}}$، یعنی سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک است. وارد کردن این کمیت کار معقولی است زیرا سرعت گازهای خروجی یک مشخصهٔ اساسی در طراحی موتور موشک است و نباید به صورتی

---

۱. یک مرجع عمومی خیلی خوب دربارهٔ سیستمهای با جرم ثابت و سیستمهای با جرم متغیر عبارت است از

"Force, Momentum Change, and Motion," *American Journal of Physics*, January 1969, p. 82. Martin S. Tiersten.

بیان شود که به چارچوب مرجعی غیراز خودِ موشک وابسته باشد. برحسب $\mathbf{v}_{\text{rel}}$، معادلهٔ ۴۱ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = F_{\text{ext}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}\frac{dM}{dt} \qquad (۴۳)$$

آخرین جملهٔ معادلهٔ ۴۳ آهنگ انتقال تکانه به داخلِ (یا خارج از) زیرسیستم S را به‌دست می‌دهد. این جمله را می‌توان به عنوان نیروی اعمال شده بر S توسط جرمی که به آن وارد یا از آن خارج می‌شود تعبیر کرد. در مورد موشک، این نیرو را نیروی پیشران می‌نامیم؛ برای اینکه نیروی پیشران هر چه بیشتر باشد، طراحان موشک می‌کوشند که هم $\mathbf{v}_{\text{rel}}$، (سرعت خروج گاز) و هم $|dM/dt|$ (آهنگ بیرون راندن جرم) را حتی‌الامکان زیاد کنند.

معادلهٔ موشک

موشکی را در فاصلهٔ دوری در فضا، جایی‌که هیچ نیروی خارجی‌ای بر آن اثر نمی‌کند، در نظر بگیرید. برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم حرکت به یک بعد محدود باشد، و فرض می‌کنیم $d\mathbf{v}/dt$ جهت مثبت را، که موشک در آن شتاب می‌گیرد، معین می‌کند و بنابراین $\mathbf{v}_{\text{rel}}$، درجهتِ منفی است. معادلهٔ ۴۳ را در این مورد می‌شود به‌صورت زیر نوشت

$$M\frac{dv}{dt} = -v_{\text{rel}}\frac{dM}{dt} \qquad (۴۴)$$

که در آن v_{rel} سرعت گازهای خروجی است. توجه کنید که dM/dt منفی است و در نتیجه، طرف راست معادلهٔ ۴۴ هم مانند طرف چپ آن مثبت است.

معادلهٔ ۴۴ معادلهٔ اساسی حاکم بر رفتار موشک است. در حین عملکرد پیوستهٔ موتور، نیروی پیشران (طرف راست معادلهٔ ۴۴) ثابت است (ولی شتاب حاصل برای موشک، dv/dt، ثابت نیست چون جرم M با مصرف شدن سوخت تغییر می‌کند).

می‌خواهیم تغییر در سرعت موشک را به‌ازای مصرف مقدار معینی از سوخت، m_{b}، است بررسی کنیم. سرعت اولیه v_{i} و سرعت نهایی پس از مصرف سوخت v_{f} است. معادلهٔ ۴۴ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$dv = -v_{\text{rel}}\frac{dM}{M} \qquad (۴۵)$$

در معادلهٔ بالا M، جرم کل موشک، متغیر است. اگر جرم اولیهٔ موشک به اضافهٔ سوخت در شروع حرکت برابر با $M_\circ$ باشد، در هر زمان دیگر مانند t، باید جرم باقی‌ماندهٔ M به‌اضافهٔ جرم سوخت مصرف شده تا آن زمان، m_{b}، برابر با $M_\circ$ باشد؛ پس $M = M_\circ - m_{\text{b}}$ است. از معادلهٔ ۴۵ بین دو حد v_{i}، وقتی جرم موشک برابر $M_\circ$ است، و v_{f}، وقتی جرم کل برابر $M_\circ - m_{\text{b}}$ است، انتگرال می‌گیریم و به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\int_{v_{\text{i}}}^{v_{\text{f}}} dv = -v_{\text{rel}}\int_{M_\circ}^{M_\circ - m_{\text{b}}}\frac{dM}{M}$$

$$v_{\text{f}} - v_{\text{i}} = -v_{\text{rel}}\ln M\Big|_{M_\circ}^{M_\circ - m_{\text{b}}}$$

$$= -v_{\text{rel}}[\ln(M_\circ - m_{\text{b}}) - \ln M_\circ]$$

$$= -v_{\text{rel}}\ln\left(\frac{M_\circ - m_{\text{b}}}{M_\circ}\right) \qquad (۴۶)$$

معادلهٔ ۴۶ تغییر سرعت موشک را، پس از مصرف شدن مقدار m_{b} از سوخت، به‌دست می‌دهد.

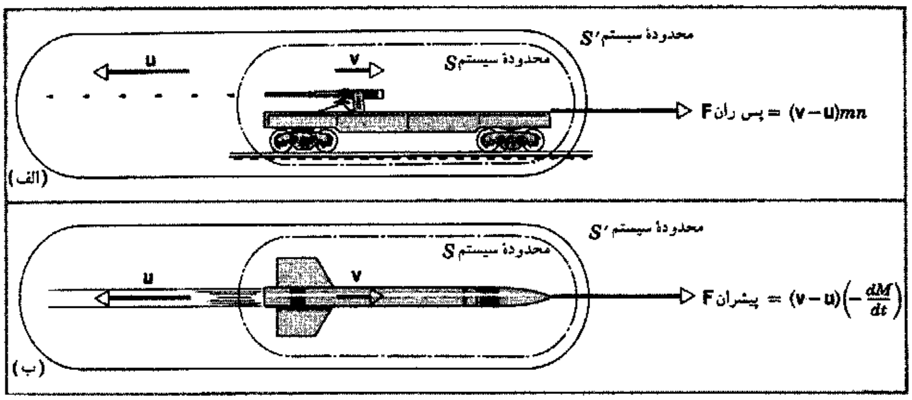
فرض کنید موشک از حال سکون ($v_{\text{i}} = \circ$) با جرم اولیهٔ $M_\circ$ شروع به حرکت کند و پس از مصرف تمامی سوخت با جرمی که اکنون برابر با $M_{\text{f}} = M_\circ - m_{\text{b}}$ است به سرعت پایانی v_{f} برسد. در این‌صورت معادلهٔ ۴۶ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\frac{M_{\text{f}}}{M_\circ} = e^{-v_{\text{f}}/v_{\text{rel}}} \qquad (۴۷)$$

تشابه میان موشک و توپ پس‌رونده از شکل ۲۱ آشکار است. در هر دو مورد تکانهٔ کل سیستم، متشکل از جرم بیرون رانده شده (گلوله‌ها یا سوخت) به‌اضافهٔ جسمی که جرم را به بیرون رانده است، پایسته می‌ماند. وقتی که توپ یا موشک را در داخل سیستم بزرگتر بررسی می‌کنیم می‌بینیم که جرم آنها تغییر می‌کند و نیرویی بر آنها وارد می‌آید؛ نیروی "پس‌ران" در مورد توپ و نیروی " **پیشران** " در مورد موشک. اگر سیستم را از چارچوب مرجع مرکز جرم مشاهده کنیم، در آن صورت با گذشت زمان جرم بیشتری از آن به بیرون رانده شده و این جرم (در شکل ۲۱) بیشتر به سمت چپ حرکت کرده است؛ یعنی که جسم باید بیشتر به سمت راست حرکت کرده باشد تا مرکز جرم ثابت بماند.

مثال ۱۲. جرم موشکی، که به‌طور کامل سوختگیری شده، $۱۳۶۰\circ\,\text{kg}$ است. این موشک در امتداد قائم به‌سوی بالا پرتاب می‌شود و تا هنگام اتمام سوخت، مقدار $۹۱\circ\circ\,\text{kg}$ محصولات سوخت را به خارج می‌ریزد. گازها با آهنگ $۱۴۶\,\text{kg/s}$ و با سرعت $۱۵۲\circ\,\text{m/s}$، نسبت به موشک، از آن خارج می‌شوند. فرض می‌کنیم که این دو کمیت در طی عمل احتراق ثابت بمانند. (الف) نیروی پیشران چقدر است؟ (ب) اگر می‌شد از همهٔ نیروهای خارجی منجمله گرانش و مقاومت هوا چشمپوشی کرد، سرعت موشک در هنگام اتمام سوخت چقدر می‌بود؟

حل: (الف) نیروی پیشران F برابر است با آخرین جملهٔ معادلهٔ ۴۳،



شکل ۲۱. (الف) مسلسلی رگباری از گلوله با آهنگ n گلوله در واحد زمان شلیک می‌کند. تکانهٔ کل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S تحت تأثیر نیروی پس‌زنی قرار می‌گیرد و تکانه‌اش تغییرمی‌کند. تغییر تکانهٔ S در زمان dt دقیقاً برابر است با تکانه‌ای که گلوله‌ها (در خلاف جهت پس‌زنی) حمل می‌کنند، یعنی $mn\,\mathbf{u}\,dt$. (ب) موشک جریانی از محصولات احتراق را به بیرون می‌راند. تکانهٔ کل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S تحت تأثیر یک نیروی پیشران است که تکانه‌اش را تغییر می‌دهد. تغییر تکانهٔ موشک در زمان dt دقیقاً برابر است با تکانه $\mathbf{u}\,dM$ که گازهای خروجی در خلاف جهت حرکت موشک حمل کرده‌اند.

یعنی

$$F = v_{\text{rel}}\left|\frac{dM}{dt}\right| = (۱۵۲۰\,\text{m/s})(۱۴۶\text{kg/s})$$
$$= ۲٫۲۲ \times ۱۰^{۵}\text{N}$$

توجه داشته باشید که در ابتدا وقتی مخزنهای سوخت پر هستند، نیروی خالص بالاسویی که به موشک وارد می‌شود (با چشمپوشی از مقاومت هوا) برابر است با نیروی پیشران منهای وزن اولیهٔ Mg، یعنی برابر است با ۸۸۶۰۰N. در لحظهٔ قبل از اتمام سوخت نیروی خالص بالاسو عبارت است از نیروی پیشران منهای وزن نهایی موشک، یعنی $۱٫۷۸ \times ۱۰^{۵}\text{N}$. (ب) از معادلهٔ ۴۶ می‌توانیم سرعت موشک در لحظهٔ اتمام سوخت را محاسبه کنیم

$$v_{\text{f}} = -v_{\text{rel}}\ln\left(\frac{M_{\circ} - m_{\text{b}}}{M_{\circ}}\right)$$
$$= -(۱۵۲۰\,\text{m/s})\ln\left(\frac{۱۳۶۰۰\,\text{kg} - ۹۱۰۰\,\text{kg}}{۱۳۶۰۰\,\text{kg}}\right)$$
$$= ۱۶۸۰\,\text{m/s}$$

اگر نیروهای خارجی گرانش و مقاومت هوا را در نظر بگیریم، سرعت نهایی کمتر از این مقدار می‌شود.

مثال ۱۳. از قیف ساکنی ماسه با آهنگ dM/dt روی تسمهٔ نقاله‌ای که با سرعت v درچارچوب مرجع آزمایشگاه حرکت می‌کند، ریخته می‌شود (شکل ۲۲). توان لازم برای اینکه تسمه با سرعت v به حرکتش ادامه بدهد چقدر است؟

حل: شکل ۲۲ وضعیت را نشان می‌دهد. سیستم S شامل تسمهٔ نقاله و ماسهٔ انباشته شده است و ΔM نشاندهندهٔ ماسهٔ اضافه‌ای است که روی تسمه ریخته می‌شود. سیستم S' شامل تسمهٔ نقاله و همهٔ ماسهٔ موجود در قیف در آغاز حرکت است. سیستم S (تسمهٔ نقاله و ماسهٔ روی آن) با جرم متغیر M را به عنوان جسم در نظر می‌گیریم. در این مورد، در معادلهٔ ۴۱، $d\mathbf{v}/dt = ۰$ است، زیرا سرعت تسمهٔ نقاله ثابت است، و $\mathbf{u} = ۰$ است، زیرا ماسه در چارچوب مرجع آزمایشگاه سرعت افقی ندارد. به این ترتیب، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{v}\frac{dM}{dt}$$

در این مثال، dM/dt مثبت است چون جرم سیستم با گذشت زمان زیاد می‌شود. پس، همان‌طور که انتظار می‌رود، نیروی خارجی مورد نیاز هم باید در جهت حرکت تسمه باشد. توجه داشته باشید که جرم تسمه در مسئله دخالتی ندارد، چون فرض کرده‌ایم که تسمه با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

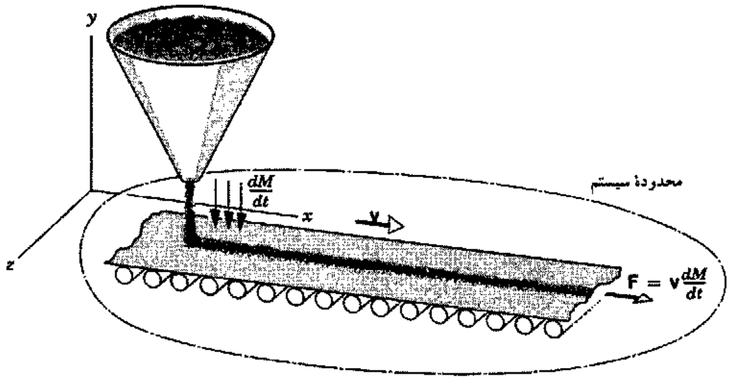
توانی که نیروی خارجی تولید می‌کند عبارت است از

$$P_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v}\frac{dM}{dt}\right) = v^{۲}\left(\frac{dM}{dt}\right)$$

و چون v ثابت است می‌توانیم رابطهٔ بالا را به‌صورت زیر بنویسیم

$$P_{\text{ext}} = \frac{d(Mv^{۲})}{dt} = ۲\frac{d}{dt}\left(\frac{۱}{۲}Mv^{۲}\right) = ۲\frac{dK}{dt}$$

یعنی که توان خارجی مورد نیاز برای در حرکت نگه داشتن تسمه، دو برابر آهنگ افزایش انرژی جنبشی سیستم است؛ توجه داشته باشید که لازم نیست انرژی جنبشی خود تسمهٔ نقاله را هم در نظر بگیریم زیرا سرعت آن ثابت است و در نتیجه انرژی جنبشی‌اش تغییر نمی‌کند.



شکل۲۲. مثال ۱۳. از قیفی با آهنگ dM/dt ماسه روی تسمهٔ نقاله‌ای که با سرعت ثابت $\mathbf{v}$ در چارچوب مرجع آزمایشگاه حرکت می‌کند می‌ریزد. نیروی لازم برای اینکه تسمهٔ نقاله با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه بدهد برابر است با $\mathbf{v}dM/dt$. قیف در چارچوب مرجع آزمایشگاه ساکن است.

روشن است که در این مورد انرژی مکانیکی پایسته نیست. تنها نصف کار انجام شده توسط موتور محرک تسمه به‌صورت انرژی مکانیکی سیستم ظاهر می‌شود. چه بر سر نصف دیگر کار انجام شده آمده است؟ برای پاسخگویی به این پرسش، معادلهٔ پایستگی انرژی (معادلهٔ ۳۰) را در مورد یک عنصر جرم کوچک dM که روی تسمهٔ نقاله می‌افتد به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم این عنصر از ارتفاع خیلی کمی سقوط می‌کند و بنابراین می‌شود از تغییر انرژی پتانسیل آن چشمپوشی کرد. در بازهٔ زمانی dt که طول می‌کشد تا dM با سرعت تسمه به حرکت در بیاید، کار انجام شده توسط منبع خارجی برابر است با $dW = P_{\text{ext}}dt = v^2dM$. انرژی جنبشی این عنصر هم برابر با $\frac{1}{2}(dM)v^2$ است. از معادلهٔ ۳۰ نتیجه می‌شود

$$\Delta E_{\text{int}} = v^2dM - \frac{1}{2}(dM)v^2 = \frac{1}{2}(dM)v^2$$

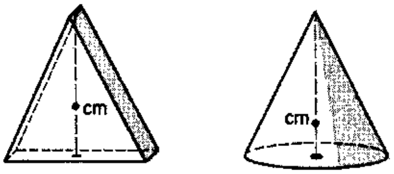
یعنی انرژی داخلی سیستم به‌اندازهٔ انرژی جنبشی آن افزایش می‌یابد. به این ترتیب نصف توان داده شده به سیستم صرف انرژی جنبشی ماسه متحرک می‌شود، در حالی‌که نصف دیگر آن به انرژی داخلی ماسه و تسمه تبدیل می‌شود (که می‌تواند ناشی از اصطکاک میان ماسه و تسمه، بعد از افتادن ماسه روی تسمه ولی قبل از حرکت آن با سرعت تسمه، باشد).

در این مثال جرم تغییر می‌کرد ولی سرعت ثابت بود. در مواردی ممکن است سرعت سیستمی با جرم متغیر، در نتیجهٔ افزودن جرم به سیستم کاهش یابد. چنین چیزی در واقع معکوس عمل موشک است.[1]

پرسشها

۱. آیا مرکز جرم اجسام جامد الزاماً در داخل آنها واقع می‌شود؟ اگر نمی‌شود، مثالی بزنید.

۲. شکل ۲۳ یک منشور مثلث متساوی‌الساقین و یک مخروط دوار قائم را که قطر آن برابر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین است نشان می‌دهد. مرکز جرم مثلث در فاصلهٔ ۱/۳ ارتفاع از قاعده قرار دارد در حالی‌که مرکز جرم مخروط در فاصلهٔ ۱/۴ ارتفاع از قاعده واقع است. آیا می‌توانید علت این اختلاف را توضیح بدهید؟

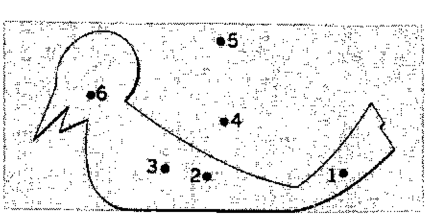


شکل ۲۳. پرسش ۲

۳. مفهوم مرکز جرم با مفهوم مرکز جغرافیایی کشور چه ارتباطی دارد؟ با مفهوم مرکز جمعیتی چطور؟ از اینکه مرکز جغرافیایی غیر از مرکز جمعیتی است چه نتیجه‌ای می‌شود گرفت؟

۴. مرکز جرم جو زمین کجاست؟

۵. مجسمه‌ساز آماتوری می‌خواهد ماکت پرنده‌ای را بسازد. خوشبختانه، مدل نهایی او (شکل ۲۴) می‌تواند سرپا بایستد. مدل با استفاده از یک ورق فلزی ضخیم با ضخامت یکنواخت ساخته شده است. کدام‌یک از نقطه‌های نشان داده شده روی شکل با احتمال بیشتری می‌تواند مرکز جرم باشد؟



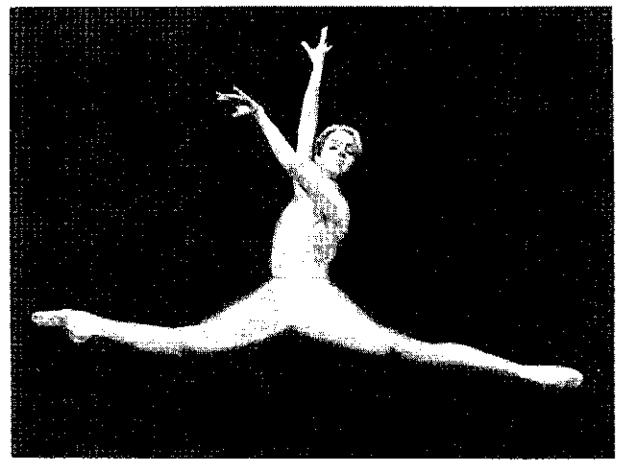
شکل ۲۴. پرسش ۵

۱. یک مقاله مفید در این مورد عبارت است از
"The Falling Raindrop: Variations on a Theme of Newton," K. S. Krane, *American Journal of Physics*, February 1981, p. 113.

۶. کسی می‌گوید که وقتی یک قهرمان پرش ارتفاع از روی میلهٔ نشان می‌گذرد، مرکز جرم او در واقع از زیر میله عبور می‌کند. آیا چنین چیزی امکان دارد؟

۷. بالرینی در حال یک "پرش بزرگ" (شکل ۲۵) است. در قسمت میانی این پرش به نظر می‌رسد که او به‌طور افقی حرکت می‌کند. نشان بدهید که بالرین می‌تواند پاهایش را در حین پرواز حرکت طوری حرکت بدهد که مرکز جرم او واقعاً مسیرسهمی را طی کند، ولی قسمت بالای سرش کم‌وبیش در حرکت افقی باشد.[1]

۸. یک جسم سبک و یک جسم سنگین انرژی جنبشی انتقالی یکسان دارند. تکانهٔ کدام‌یک از این دو جسم بیشتر است؟



شکل ۲۵. پرسش ۷

۹. پرنده‌ای در یک قفس سیمی است که از یک ترازوی فنری آویخته شده است. وقتی این پرنده در حال پرواز است آیا عددی که ترازو نشان می‌دهد بیشتر، کمتر، یا برابر با وقتی است که پرنده در قفس نشسته است؟

۱۰. آیا می‌شود یک قایق بادبانی را با دمیدن هوا به بادبانهای آن توسط بادبزنی که به قایق متصل است، به حرکت در آورد؟ پاسخ خودتان را توضیح بدهید.

۱۱. آیا جسمی که تکانه ندارد می‌تواند انرژی داشته باشد؟ آیا جسمی که انرژی ندارد می‌تواند تکانه داشته باشد؟ در هر مورد توضیح بدهید.

۱۲. قایقران می‌تواند، در آب آرام، با کشیدنهای تند و کوتاهِ (ضربه‌ای) طنابی که به دماغهٔ قایق بسته شده است، خودش را به ساحل برساند (واقعاً می‌تواند)؟ چگونه چنین کاری ممکن است؟

۱۳. شخصی که ساکن روی سطح افقی بدون اصطکاکی نشسته است چگونه می‌تواند از جا برخیزد؟

۱۴. شخصی روی قطعه یخ بزرگ لغزنده‌ای ایستاده است و فشفشهٔ ترقه‌ای روشنی در دست دارد. او فشفشه را در زاویه‌ای (که قائم نیست) به هوا پرتاب می‌کند. حرکت مرکز جرم فشفشه و حرکت مرکز جرم سیستم مشتمل بر شخص و فشفشه را به‌طور خلاصه، ولی حتی‌الامکان دقیق، توصیف کنید. مناسبترین کار این است که هر حرکت را در حین هر یک از بازه‌های زمانی زیر توصیف کنید: (الف) پس از پرتاب فشفشه، ولی قبل از انفجار آن؛ (ب) از زمان انفجار تا وقتی که اولین قطعهٔ فشفشه به یخ برخورد می‌کند؛ (ج) از لحظهٔ برخورد اولین پاره به یخ تا لحظه‌ای که آخرین پاره به زمین می‌خورد؛ و (د) در زمانی که همهٔ پاره‌های فشفشه بر یخ فرود آمده‌اند ولی هیچ‌کدام به لبهٔ یخ نرسیده‌اند.

۱۵. درستی عبارت زیر را تحقیق کنید. "قانون پایستگی تکانهٔ خطی وقتی در مورد یک تک‌ذره به کار گرفته شود، هم‌ارز قانون اول حرکت نیوتون است."

۱۶. قطعه یخی را با سرعت $\mathbf{v}$ به فضای تخلیه‌شده و آزاد از گرانشی که داغ هم هست پرتاب می‌کنیم. یخ کم‌کم ذوب و به آب تبدیل می‌شود و بعد می‌جوشد و بخار می‌شود. (الف) آیا این مجموعه در تمام مدت فرایند سیستمی از ذرات است؟ (ب) اگر چنین است، آیا همواره همان سیستم از ذرات است؟ (ج) آیا حرکت مرکز جرم دچار تغییر ناگهانی می‌شود؟ (د) آیا تکانهٔ خطی کل تغییر می‌کند؟

۱۷. ذره‌ای به جرم $m = 0$ (مثلاً یک نوترینو) حامل تکانه است. از دیدگاه معادلهٔ ۲۲ که در آن می‌بینیم تکانه مستقیماً متناسب با جرم است، چگونه چنین چیزی ممکن است؟

۱۸. اگر فقط نیروی خارجی است که می‌تواند وضعیت حرکتی مرکز جرم یک جسم را تغییر بدهد، پس چگونه نیروی داخلی ترمزها می‌تواند اتومبیل را متوقف کند؟

۱۹. می‌گوییم که اتومبیل از نیروهای داخلی شتاب نمی‌گیرد بلکه به نیروهای خارجی وارد از جاده است که به آن شتاب می‌دهد. پس چرا اتومبیلها نیاز به موتور دارند؟

۲۰. آیا کاری که نیروهای داخلی انجام می‌دهند می‌تواند انرژی جنبشی جسمی را کاهش بدهد؟ ... افزایش بدهد؟

۲۱. (الف) اگر روی سیستمی کار انجام شود، آیا آن سیستم الزاماً انرژی جنبشی کسب می‌کند؟ (ب) اگر سیستمی انرژی جنبشی کسب کند، آیا الزاماً معنی‌اش این است که یک عامل خارجی روی آن کار انجام داده است؟ مثال بیاورید. (اینجا منظور ما از "انرژی جنبشی"، انرژی جنبشی وابسته به حرکت مرکز جرم است.)

۲۲. در مثال ۹، شاهد موردی بودیم (اسکیت‌باز) که در آن انرژی جنبشی پدید آمد ولی هیچ کار خارجی انجام نشده بود. حالا برعکس این مورد را در نظر بگیرید. یک آچار پیچ‌گوشتی را محکم در برابر یک سنگ سنباده چرخان نگه می‌داریم. در اینجا کار خارجی انجام می‌شود ولی انرژی جنبشی آچار پیچ‌گوشتی تغییر نمی‌کند. این تناقض ظاهری را توضیح بدهید.

۲۳. آیا می‌توانید نمونه‌های دیگری غیر از آنچه در متن این کتاب ارائه

---

[1] نگاه کنید به
"The Physics of Dance", Kenneth Laws, *Physics Today*, February 1985, p. 24.

شده است برای سیستمهای با جرم متغیر معرفی کنید؟

۲۴. همان‌طور که در متن کتاب مطرح شد، نمی‌توانیم از معادلهٔ $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ برای سیستمی با جرم متغیر استفاده کنیم. برای نشان دادن این مطلب (الف) معادلهٔ بالا را به‌صورت $(\mathbf{F}_{\text{ext}} - M\,d\mathbf{v}/dt)/(dM/dt) = \mathbf{v}$ می‌نویسیم و (ب) نشان می‌دهیم که یک طرف این معادله در همهٔ چارچوبهای لخت مقدار یکسانی دارد در صورتی که طرفِ دیگر چنین نیست. پس این معادله در حالت کلی برقرار نیست. (ج) نشان بدهید که معادلهٔ ۴۲ به چنین تناقضی منجر نمی‌شود.

۲۵. در سال ۱۹۲۰ یک روزنامهٔ مشهور دربارهٔ اولین آزمایشهای موشک که توسط رابرت اچ گودارد انجام می‌شد مقاله‌ای چاپ کرد که در آن تصور اینکه موشک می‌تواند در خلأ کار کند مردود دانسته شده بود: "پروفسور گودارد، با آن "کرسی"اش در کالج کلارک و با آن حمایتی که مؤسسهٔ اسمیتسونی از او می‌کند، هنوز رابطهٔ بین کنش و واکنش را نمی‌داند، و نمی‌داند که به چیزی بهتر از خلأ نیاز دارد تا در برابر کنش آن واکنشی درکار باشد ــ واکنش به خلأ مهمل است. البته، ندانسته‌های او ظاهراً فقط همین چیزهایی است که در دبیرستان درس داده می‌شود." کجای این استدلال غلط است؟

۲۶. سرعت نهایی مرحلهٔ آخر یک موشک چند مرحله‌ای خیلی بیشتر از سرعت نهایی یک موشک تک‌مرحله‌ای با همان جرم کل و همان مقدار سوخت است. در این مورد توضیح بدهید.

۲۷. آیا یک موشک می‌تواند به سرعتی بیشتر از سرعت گازهای خروجی که آن‌را به حرکت در می‌آورد، برسد؟ در هر صورت توضیح بدهید که چرا.

۲۸. آیا، غیر از موشک، روش دیگری برای پیشروی در فضای بیرونی وجود دارد. اگر چنین روشهایی وجود دارند، کدام‌اند و چرا از آنها استفاده نمی‌شود؟

۲۹. معادلهٔ ۴۹ حاکی از آن است که اگر به قدر کافی سوخت مصرف شود سرعت موشک می‌تواند بدون محدودیت افزایش یابد. آیا این گفته منطقی است؟ محدودیت کاربرد معادلهٔ ۴۶ کدام است؟ موقع به‌دست آوردن معادلهٔ ۴۶ در کجا این محدودیت را اعمال کردیم؟

مسئله‌ها

بخش ۹ـ۱ سیستمهای دوذره‌ای

۱. (الف) x_1 را از معادلهٔ ۴ و v_1 را از معادلهٔ ۵ به‌دست بیاورید و این نتایج را همراه با معادلهٔ ۳ در معادلهٔ ۲ قرار بدهید، تا ببینید که

$$m_1^2 k d_1^2 = k u^2 + \mu \left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

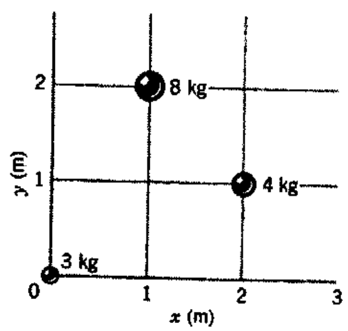
که در آن $\mu = m_1 m_2/M$ و $u = Mx_2 - Mx_{\text{cm}} - m_1 L$ است. (ب) نشان بدهید که با استفاده از روشهای ارائه شده در بخش ۸ـ۴ می‌توان معادلهٔ بالا را برای $u(t)$ حل کرد و به‌دست آورد

$$u(t) = m_1 d_1 \cos \omega t$$

که در آن $\omega = \sqrt{k/\mu}$ است. (ج) از جواب فوق $x_1(t)$، $x_2(t)$، $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را به‌دست بیاورید. این مسئله نشان می‌دهد که با معادلهٔ مرکز جرم می‌توانیم حرکتهای مربوط به m_1 و m_2 در وضعیت شکل ۱ را تحلیل کنیم.

بخش ۹ـ۲ سیستمهای بس‌ـذره‌ای

۲. مرکز جرم سه ذرهٔ نشان داده شده در شکل ۲۶ درکجا واقع است؟



شکل ۲۶. مسئلهٔ ۲

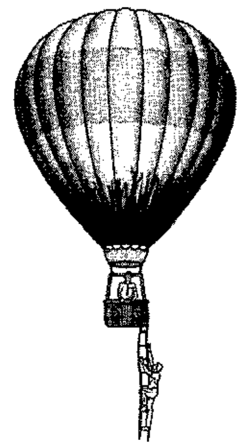
۳. مرکز جرم سیستم زمین‌ـماه در چه فاصله‌ای از مرکز زمین واقع است؟ (برای تعیین جرمهای زمین و ماه و فاصله مرکز به مرکز زمین‌ـماه به‌پیوست ج رجوع کنید. مقایسهٔ جواب این مسئله با شعاع زمین جالب است.)

۴. نشان بدهید نسبت فاصله‌های x_1 و x_2 دو ذره از مرکز جرم آنها برابر با عکس نسبت جرمهای آنهاست: یعنی $x_1/x_2 = m_2/m_1$.

۵. اتومبیلی به جرم ۲۲۱۰kg در جادهٔ مستقیمی با سرعت ۱۰۵km/h در حرکت است. اتومبیل دیگری به جرم ۲۰۸۰kg با سرعت ۴۳٫۵km/h در پی آن در حرکت است. مرکز جرم سیستم متشکل از دو اتومبیل با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

۶. دو اسکیت‌باز، یکی به جرم ۶۵kg و دیگری به جرم ۴۲kg، روی سطح یخزده ایستاده‌اند و دو انتهای تیری به طول ۹٫۷m را، که جرم آن قابل چشم‌پوشی است، در دست دارند. آنها "با کشیدن" تیر به طرف یکدیگر شروع به حرکت می‌کنند تا به هم برسند. اسکیت‌باز ۴۲ کیلوگرمی چه مسافتی را طی می‌کند؟

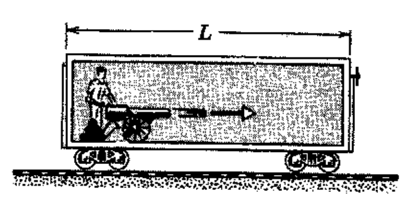
۷. مردی به جرم m در پایین نردبانِ طنابی آویخته از بالونی به جرم M ایستاده است (شکل ۲۷). بالون نسبت به زمین ساکن است. (الف) اگر این مرد با سرعت v (نسبت به نردبان) از نردبان بالا برود، بالون در چه جهتی و با چه سرعتی (نسبت به زمین) حرکت خواهد کرد؟ (ب) وقتی که مرد از صعود باز می‌ایستد وضعیت حرکت چگونه خواهد بود؟



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۷

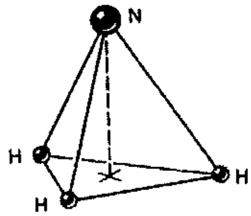
۸. دو ذرهٔ P و Q در ابتدا ساکن‌اند و ۱٫۶۴m از هم فاصله دارند. جرم ذرهٔ P برابر ۱٫۴۳kg و جرم ذرهٔ Q برابر ۴٫۲۹kg است. این دو ذره همدیگر را با نیروی ثابت ۱٫۷۹ × $۱۰^{-۲}$N جذب می‌کنند. هیچ نیروی خارجی روی این سیستم عمل نمی‌کند. (الف) حرکت مرکز جرم را توصیف کنید. (ب) در چه فاصله‌ای از مکان اولیهٔ ذرهٔ P، دو ذره با هم برخورد می‌کنند؟

۹. یک توپ و انبوهی گلولهٔ توپ در یک واگن قطار در بسته به طول L قرار گرفته‌اند (شکل ۲۸). توپ به سمت راست شلیک می‌کند و واگن به سمت چپ پس می‌رود. گلوله‌ها پس از برخورد با دیوار مقابل در داخل واگن باقی می‌مانند. (الف) پس از آنکه همهٔ گلوله‌ها شلیک شد، بیشترین فاصله‌ای که واگن از موقعیت اولیه‌اش جابه‌جا می‌شود، چقدر است؟ (ب) سرعت واگن پس از آنکه همهٔ گلوله‌ها شلیک شد چقدر است؟



شکل ۲۸. مسئلهٔ ۹

۱۰. در مولکول آمونیاک (NH_3)، سه اتم هیدروژن (H) تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند، فاصلهٔ بین مرکزهای اتمها برابر با ۱۶٫۲۸ × $۱۰^{-۱۱}$m است، به‌طوری که مرکز مثلث در فاصلهٔ ۹٫۴۰ × $۱۰^{-۱۱}$m از هر یک از هیدروژنها قرار می‌گیرد. اتم نیتروژن (N) در رأس هرمی قرار دارد که سه هیدروژن قاعدهٔ آن‌را تشکیل می‌دهند (شکل ۲۹). فاصلهٔ بین نیتروژن-هیدروژن برابر با ۱۰٫۱۴ × $۱۰^{-۱۱}$m است و نسبت جرم اتمی نیتروژن به هیدروژن ۱۳٫۹ است. موقعیت مرکز جرم این مولکول را نسبت به اتم نیتروژن معین کنید.

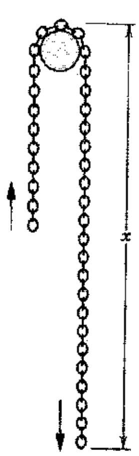


شکل ۲۹. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. دو جسم، که هرکدام از مجموعه‌ای از وزنه‌ها تشکیل شده‌اند، به‌وسیلهٔ نخ سبک‌وزنی به هم متصل شده‌اند. این نخ از روی یک قرقرهٔ سبک وزنِ بدون اصطکاک به قطر ۵۶٫۰mm می‌گذرد. هر دو جسم در یک ترازو قرار دارند. جرم هر یک از دو جسم در آغاز ۸۵۰g است. (الف) موقعیت مرکز جرم آنها را معین کنید. (ب) سی‌و چهار گرم از یک جسم را به دیگری منتقل می‌کنیم، ولی نمی‌گذاریم اجسام حرکت کنند. مرکز جرم سیستم کجاست؟ (ج) اکنون دو جسم را رها می‌کنیم. حرکت مرکز جرم سیستم را توصیف کنید و شتاب آن‌را به‌دست بیاورید.

۱۲. خمپاره‌ای توسط خمپاره‌اندازی با سرعت دهانه‌ای ۴۶۶m/s در امتداد ۵۷٫۴° بالای افق شلیک می‌شود. در بالاترین نقطهٔ مسیر، خمپاره منفجر و به دو پاره با جرمهای مساوی تقسیم می‌شود. یکی از دو پاره که سرعتش بلافاصله پس از انفجار صفر است، در امتداد قائم سقوط می‌کند. با فرض مسطح بودن زمین، پارهٔ دوم در چه فاصله‌ای از خمپاره‌انداز با زمین برخورد می‌کند؟

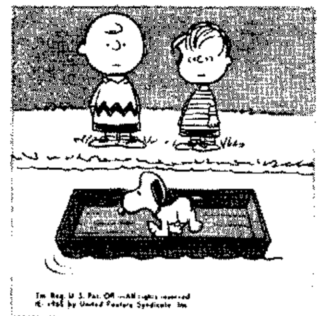
۱۳. زنجیر یکنواخت قابل انعطافی که طول آن L و وزن واحد طولش λ است از روی میخ بدون اصطکاک کوچکی می‌گذرد (شکل ۳۰). این زنجیر وقتی که طول x از یک طرف و طول $L - x$ از طرف دیگر میخ آویخته است، از حالت سکون رها می‌شود. شتاب a را به‌صورت تابعی از x پیدا کنید.



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. سگی به وزن ۱۰٫۸lb روی قایق لختی ایستاده است و ۲۱٫۴ft

از ساحل فاصله دارد. این سگ ۸٫۵۰ft به طرف ساحل حرکت می‌کند و سپس می‌ایستد. وزن قایق ۴۶٫۴lb است و می‌توان فرض کرد که بین آب و قایق اصطکاک وجود ندارد. در این موقع فاصلهٔ سگ از ساحل چقدر است؟ (راهنمایی: مرکز جرم قایق و سگ حرکت نمی‌کند. چرا؟) در طرف چپ شکل ۳۱ هم ساحل هست.



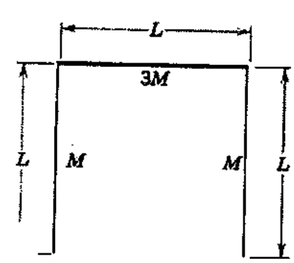
شکل ۳۱. مسئلهٔ ۱۴

۱۵. دو محیط‌بان یکی به جرم ۷۸٫۴kg و دیگری که سبکتر است در یک قایق به جرم ۳۱٫۶kg مشغول گشت‌زنی روی دریاچه‌اند. وقتی قایق در آب آرام دریاچه ساکن است، آنها جاهایشان را که ۲٫۹۳m از هم فاصله دارند نسبت به مرکز قایق متقارن‌اند، با هم عوض می‌کنند. محیط‌بان اول متوجه می‌شود قایق نسبت به یک کنده شناور در آب ۴۱٫۲cm جابه‌جا شده است و از آنجا جرم محیط‌بان دوم را حساب می‌کند. جرم دومی چقدر است؟

۱۶. شخصی به جرم ۸۴٫۴kg در قسمت عقب یک قایق سورتمه‌ای ۴۲۵ کیلوگرمی که با سرعت ۴٫۱۶m/s روی یخ بدون اصطکاک حرکت می‌کند، ایستاده است. این شخص تصمیم می‌گیرد که به جلوی این قایق که ۱۸٫۲m طول دارد برود، و این کار را با سرعت ۲٫۰۸m/s نسبت به قایق انجام می‌دهد. در حینی که این شخص به سمت جلو می‌رود، قایق چقدر روی یخ جابه‌جا می‌شود؟

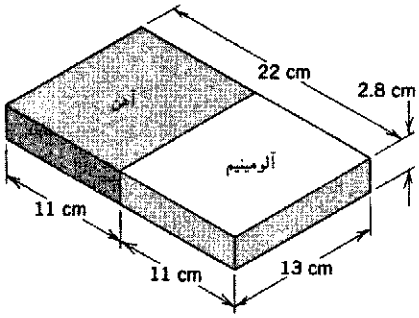
بخش ۹ـ۳ مرکز جرم اجسام جامد

۱۷. با سه میلهٔ نازک، هر یک به طول L، یک "مربع" سه ضلعی ساخته‌ایم (شکل ۳۲). جرم هر یک از دو میلهٔ متقابل M و جرم میلهٔ سوم برابر با $3M$ است. مرکز جرم این مجموعه در کجا واقع شده است؟



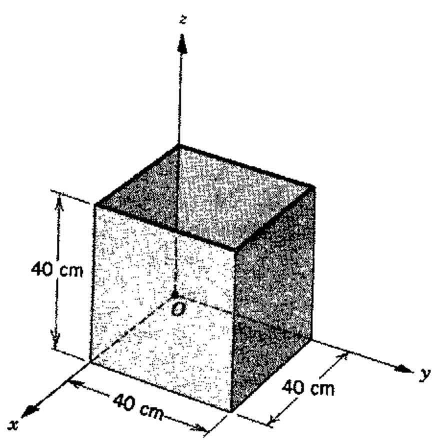
شکل ۳۲. مسئلهٔ ۱۷

۱۸. شکل ۳۳ تیغهٔ مرکبی به ابعاد ۲۲٫۰cm×۱۳٫۰cm×۲٫۸۰cm را نشان می‌دهد. نصف تیغه از آلومینیم با چگالی ($2{,}70\,g/cm^3$) ساخته شده است و نصف دیگر از آهن (با چگالی $7{,}85\,g/cm^3$ چگالی)؛ (شکل ۳۳). مرکز جرم تیغه در کجاست؟



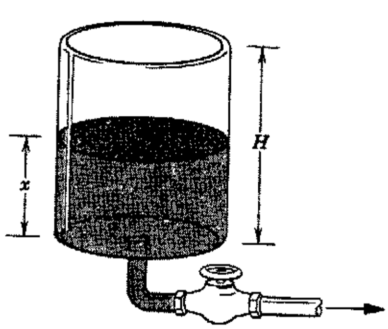
شکل ۳۳. مسئلهٔ ۱۸

۱۹. یک جعبه مکعبی شکل به ضلع ۴۰cm از ورق فلزی نازکی ساخته‌ایم. این جعبه سر ندارد. مختصات مرکز جرم جعبه را در دستگاه مختصات شکل ۳۴ معین کنید.



شکل ۳۴. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. بشکهٔ استوانه‌ای شکلی پر از بنزین هواپیماست. این بشکه را از طریق شیری که در ته آن تعبیه شده است تخلیه می‌کنیم (شکل ۳۵).



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۲۰

(الف) حرکت مرکز جرم بشکه و باقی‌ماندهٔ محتوای آن‌را، در حین تخلیهٔ بنزین، به‌طور کیفی توصیف کنید. (ب) وقتی مرکز جرم بشکه و باقی‌ماندهٔ محتوای آن به پایین‌ترین جای ممکن می‌رسد، عمق x بنزین باقی‌مانده در بشکه چقدر است؟ جواب را برحسب ارتفاع بشکه (H)، جرم بشکه (M)، و جرم بنزینی که بشکه را پر می‌کند (m) بیان کنید.

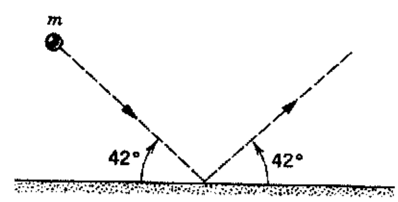
۲۱. مرکز جرم یک ورق نیمدایره‌ای همگن را تعیین کنید. شعاع دایره را R بگیرید.

بخش ۹ـ۴ تکانهٔ خطی یک ذره

۲۲. یک اتومبیل فولکس واگن ۸۱۶ کیلوگرمی با چه سرعتی حرکت کند تا (الف) تکانهٔ آن برابر تکانهٔ اتومبیل کادیلاک ۲۶۵۰ کیلوگرمی که با سرعت ۱۶٫۰km/h حرکت می‌کند باشد، و (ب) انرژی جنبشی آن با انرژی جنبشی همین کادیلاک برابر باشد؟ (ج) همین محاسبات را به‌جای کادیلاک برای یک کامیون ۹۰۸۰ کیلوگرمی انجام بدهید.

۲۳. یک وانت ۲۰۰۰ کیلوگرمی که با سرعت ۴۰٫۰km/h به سمت شمال در حرکت است به طرف شرق می‌پیچد و سرعتش به ۵۰٫۰km/h می‌رسد. (الف) تغییر انرژی جنبشی وانت چقدر است؟ (ب) مقدار و جهت تغییر تکانهٔ وانت را پیدا کنید.

۲۴. جسمی به جرم ۴٫۸۸kg با سرعت ۳۱٫۴m/s و با زاویهٔ ۴۲٫۰° به یک صفحهٔ فولادی می‌خورد و با همان سرعت و تحت همان زاویه باز می‌جهد (شکل ۳۶). تغییر تکانهٔ خطی جسم (مقدار و جهت) را پیدا کنید.



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۲۴

۲۵. یک گوی ۵۲٫۴ گرمی با سرعت اولیهٔ ۱۶٫۳m/s و با زاویه ۲۷٫۴° بالای افق از زمین پرتاب می‌شود. (الف) مقدار انرژی جنبشی گوی در آغاز پرتاب، و درست قبل از اینکه به زمین برخورد کند چقدر است؟ (ب) تکانه‌های (مقدار و جهت) متناظر با حالتهای بالا و تغییر تکانه را تعیین کنید. (ج) نشان بدهید که تغییر تکانه برابر است با وزن گوی ضربدر زمان پرواز آن، و از آنجا زمان پرواز را تعیین کنید.

۲۶. تکانهٔ خطی، p، ذره‌ای به جرم m برابر است با mc. سرعت آن برحسب c، سرعت نور، چقدر است؟

۲۷. نشان بدهید که معادلهٔ ۲۳ در سرعتهای $v \ll c$ به معادلهٔ ۲۱ تبدیل می‌شود. راهنمایی: نشان بدهید که معادلهٔ ۲۳ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$$

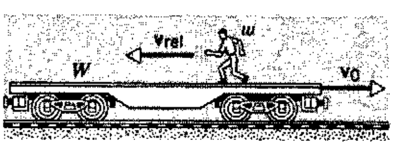
۲۸. سرعت الکترونی برابر با $0{,}990c$ است. (الف) تکانهٔ خطی آن‌را برحسب kg · m/s به‌دست بیاورید. (ب) این تکانه را برحسب یکای MeV/c بیان کنید.

بخش ۹ـ۶ پایستگی تکانهٔ خطی

۲۹. یک مرد ۱۹۵ پوندی روی سطحی با اصطکاک ناچیز ایستاده است. این مرد به یک سنگ ۰٫۱۵۸ پوندی که پیش پایش قرار گرفته ضربه می‌زند و به آن سرعت ۱۲٫۷ft/s می‌دهد. در نتیجهٔ این کار، مرد با چه سرعتی به‌حرکت در می‌آید؟

۳۰. یک مرد ۷۵٫۲ کیلوگرمی سوار بر گاری‌ای است به جرم ۳۸٫۶ کیلوگرم که با سرعت ۲٫۳۳m/s در حرکت است. این مرد چنان از گاری به بیرون می‌پرد که با سرعت افقی صفر بر زمین فرود می‌آید. سرعت گاری در اثر این کار چقدر تغییر می‌کند؟

۳۱. یک واگن روباز قطار به وزن W می‌تواند روی خط آهن افقی و مستقیمی بدون اصطکاک به حرکت دربیاید. در آغاز شخصی به وزن w روی این واگن که با سرعت v_0 به‌سمت راست می‌رود ایستاده است. اگر این شخص به سمت چپ بدود و قبل از اینکه از انتهای واگن به خارج بپرد، سرعت او نسبت به واگن برابر v_{rel} باشد (شکل ۳۷)، تغییر در سرعت واگن چقدر است؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۳۱

۳۲. یک سورتمهٔ موشکی به جرم ۲۸۷۰ کیلوگرم با سرعت ۲۵۲m/s روی یک ریل حرکت می‌کند. در یک نقطه معین، چمچه‌ای که به سورتمه وصل است در گودال پر از آبی که بین ریلها واقع شده است فرو می‌رود و آب به داخل یک مخزن خالی سوار بر سورتمه می‌ریزد. سرعت سورتمه را پس از آنکه ۹۱۷ کیلوگرم آب به مخزن ریخته شد پیدا کنید.

۳۳. یک مسلسل مخصوص در هر دقیقه ۲۲۰ گلوله لاستیکی ۱۲٫۶ گرمی را با سرعت دهانه‌ای ۹۷۵m/s شلیک می‌کند. با این مسلسل چند گلوله باید به یک جانور ۸۴٫۷ کیلوگرمی که با سرعت ۳٫۸۷m/s به طرف ما هجوم می‌آورد شلیک کنیم تا جانور در مسیر خودش متوقف شود؟ (فرض کنید گلوله‌ها افقی حرکت می‌کنند و پس از برخورد با هدف به زمین می‌افتند.)

۳۴. فضاپیمایی با سرعت ۳۸۶۰km/h نسبت به زمین در حرکت است. موتور موشکی آن که سوختش تمام شده است از سفینهٔ فرمان جدا می‌شود و با سرعت ۱۲۵km/h نسبت به سفینه به عقب رانده می‌شود. جرم موتور چهار برابر جرم سفینه است. سرعت سفینه فرمان پس از جدا شدن موتور چقدر است؟

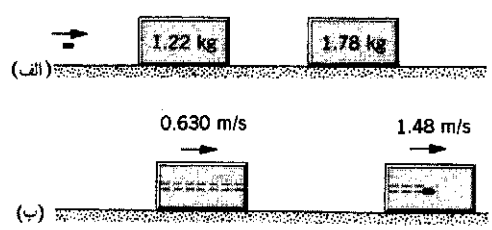
۳۵. مرحلهٔ نهایی موشکی با سرعت ۷۶۰۰m/s در حرکت است. این مرحلهٔ نهایی متشکل از دو قسمت است که به هم جفت شده‌اند، یک قسمت بدنهٔ موشک با جرم ۲۹۰٫۰kg و قسمت دیگر کلاهک با جرم ۱۵۰٫۰kg. وقتی جفت آزاد می‌شود، فنر فشرده‌ای موجب می‌شود که دو قسمت با سرعت نسبی ۹۱۰٫۰m/s از همدیگر جدا شوند. (الف) سرعت هرقسمت پس از جدا شدن چقدر است؟ فرض کنید تمام سرعتها موازی باشند. (ب) انرژی جنبشی کل دو قسمت را پیش و پس از جدایی تعیین کنید و درصورتی که اختلافی وجود دارد علت آن‌را بگویید.

۳۶. مخزنی در حال سکون منفجر و به سه پاره تقسیم می‌شود. دو پارهٔ آن که جرم یکی دو برابر دیگری است عمود بر هم و با سرعت یکسان ۳۱٫۴m/s به پرواز در می‌آیند. جرم پارهٔ سوم سه برابر پارهٔ سبکتر است. بزرگی و جهت سرعت پارهٔ سوم را، بلافاصله پس از انفجار، پیدا کنید. (جهت این پاره را با تعیین زاویه امتداد حرکت آن با امتداد حرکت سبکترین پاره مشخص کنید.)

۳۷. یک هستهٔ پرتوزای ساکن با گسیل یک الکترون و یک نوترینو در جهتهای عمود بر هم، وامی‌پاشد. تکانهٔ الکترون برابر با $1.2\times10^{-22}\,\mathrm{kg.m/s}$ و تکانهٔ نوترینو برابر با $6.4\times10^{-23}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ است. (الف) بزرگی و جهت تکانهٔ هستهٔ پس‌زده را پیدا کنید. (ب) جرم هستهٔ به‌جا مانده $5.8\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$ است. انرژی جنبشی پس‌زنی آن چقدر است؟ نوترینو یکی از ذرات بنیادی طبیعت است.

۳۸. یک واگن روباز به جرم ۱۹۳۰kg، که می‌تواند روی خط آهن عملاً بدون اصطکاکی حرکت کند، درکنار سکوی ایستگاه متوقف است. یک فوتبالیست ۱۰۸ کیلوگرمی که با سرعت ۹٫۷۴m/s در امتداد سکو و موازی با ریلها می‌دود، روی واگن می‌پرد. (الف) سرعت واگن پس از آنکه این شخص بر آن سوار و در آن ساکن شد چقدر است؟ (ب) این مسافر حالا شروع به راه رفتن به سمت جلو با سرعت ۰٫۵۲۰m/s نسبت به واگن می‌کند. سرعت واگن در حین راه رفتن او چقدر است؟

۳۹. یک‌گلولهٔ ۳٫۵۴گرمی به‌طور افقی به طرف دو قالب‌که روی میز بدون اصطکاکی در حال سکون قرار دارند شلیک می‌شود (شکل ۳۸الف). گلوله از قالب اول که جرم آن ۱٫۲۲kg است می‌گذرد و در داخل قالب دوم که جرم آن ۱٫۷۸kg است متوقف می‌شود. بر اثر این برخوردها قالبها به‌ترتیب سرعتهای ۰٫۶۳۰m/s و ۱٫۴۸m/s را کسب می‌کنند (شکل ۳۸ب). با چشمپوشی از مقدار جرمی که گلوله از قالب اول برداشته است، کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) سرعت گلوله بلافاصله پس از خروج از قالب اول و (ب) سرعت اولیه گلوله.



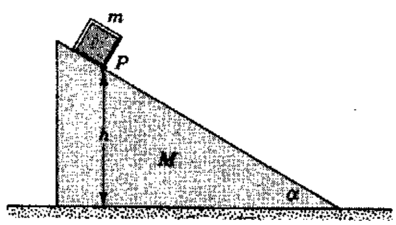
شکل ۳۸. مسئلهٔ ۳۹

۴۰. جسمی به جرم ۸٫۰kg که تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی نیست، با سرعت ۲٫۰m/s حرکت می‌کند. در یک زمان معین یک انفجار داخلی روی می‌دهد و جسم به دو پاره تقسیم می‌شود. جرم هر یک از دو پاره ۴٫۰kg است، و بر اثر انفجار به این سیستم دوپاره‌ای ۱۶ ژول انرژی جنبشی انتقالی داده می‌شود. هیچ یک از دوپاره از خط اولیهٔ حرکت خارج نمی‌شود. سرعت و جهت حرکت هر پاره را تعیین کنید.

۴۱. فرض کنید واگن مسئلهٔ ۳۱ در ابتدا ساکن باشد. این واگن حامل n نفر، هر کدام به وزن w است. افراد یک به یک و به دنبال هم با سرعت نسبی v_{rel} می‌دوند و از واگن پایین می‌پرند. آیا سرعت واگن در این‌صورت بیشتر است یا وقتی که همهٔ n نفر با هم با سرعت v_{rel} واگن را ترک کنند؟

۴۲. یک توپ ۱۴۰۰ کیلوگرمی، که گلوله‌های ۷۰٫۰ کیلوگرمی را با سرعت دهانه‌ای ۵۵۶m/s شلیک می‌کند، در امتداد ۳۹٫۰° بالای افق نشانه‌روی شده است. توپ روی ریلهای بدون اصطکاکی قرار گرفته است و در نتیجه می‌تواند آزادانه پس بزند. (الف) سرعت گلولهٔ توپ نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) گلوله با چه زاویه‌ای نسبت به زمین پرتاب شده است؟ (راهنمایی: مؤلفهٔ افقی تکانهٔ سیستم به هنگام شلیک توپ ثابت می‌ماند.)

۴۳. قالبی به جرم m روی گوه‌ای به جرم M واقع شده و گوه هم روی یک میز افقی قرار گرفته است (شکل ۳۹). سطحهای تماس بدون اصطکاک‌اند. اگر این سیستم از حال سکون از وضعیتی که نقطهٔ P در ارتفاع h از سطح میز قرار دارد شروع به حرکت کنند، سرعت گوه در لحظه‌ای که نقطهٔ P به سطح میز می‌رسد چقدر است؟



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۴۳

بخش ۹ـ۷ کار و انرژی در سیستم ذرات

۴۴. اتومبیلی که با مسافرانش ۳۶۸۰lb (یعنی ۱۶۴۰۰N) وزن دارد، با سرعت ۷۰٫۰mi/h (یعنی ۱۱۳km/h) در حرکت است که راننده ترمز می‌کند. جاده نیروی ۱۸۵۰lb (یعنی ۸۲۳۰N) را بر چرخها وارد می‌کند و لغزشی هم در کار نیست. این اتومبیل قبل از توقف چه مسافتی را طی می‌کند؟

۴۵. از وضعیت ایستاده به حالت نیم‌خیز در می‌آیید و در این فرایند مرکز جرم خودتان را ۱۸٫۰cm پایین می‌آورید. بعد در راستای قائم به بالا می‌پرید. نیرویی که از طرف زمین در حین پرش بر شما وارد می‌شود سه برابر وزن شماست. سرعت شما به طرف بالا، وقتی از وضعیت "تمام قد" می‌گذرید و زمین را ترک می‌کنید، چقدر است؟

۴۶. شخصی به جرم ۵۵٫۰ کیلوگرم از وضعیت نیم‌خیزی که در آن مرکز جرم او ۴۰٫۰cm بالای سطح زمین است به‌طور قائم به بالا می‌پرد. مرکز جرم او که در لحظهٔ جدا شدن از زمین ۹۰٫۰cm بالای سطح زمین است، در این پرش تا ارتفاع ۱۲۰cm بالا می‌رود. (الف) زمین چه نیروی بالاسویی (فرض می‌کنیم ثابت باشد) بر شخص وارد می‌کند؟ (ب) حداکثر سرعتی که شخص به‌دست می‌آورد چقدر است؟

۴۷. یک بازیکن هاکی روی یخ به جرم ۱۱۶kg با سرعت ۳٫۲۴m/s به طرف نرده‌ای در مرز یخ حرکت می‌کند و با دستهای کشیده شده نرده را می‌گیرد و متوقف می‌شود. در حین این توقف، مرکز جرم او ۳۴٫۰cm به سمت نرده حرکت می‌کند. (الف) متوسط نیرویی که شخص به نرده وارد می‌کند چقدر است؟ (ب) این شخص چقدر انرژی داخلی مصرف می‌کند؟

۴۸. در یک آزمایش ایمنی، یک اتومبیل ۲۳۴۰ کیلوگرمی را با سرعت ۱۲٫۶km/h به یک دیوار برخورد می‌دهند. در طی مدت برخورد، مرکز جرم اتومبیل به‌اندازهٔ ۶۴٫۰cm به طرف جلو جابه‌جا می‌شود، و دیوار به اندازهٔ ۸٫۳۰cm فشرده می‌شود. از اصطکاک اتومبیل و جاده چشم بپوشید. (الف) نیروی وارد بر اتومبیل از دیوار را (که فرض می‌کنیم ثابت است) حساب کنید. (ب) انرژی داخلی اتومبیل چقدر افزایش پیدا می‌کند؟

۴۹. فرض کنید انرژی کل یک سیستم N ذره‌ای در چارچوب مرجع دلبخواهی به‌صورت $K = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2$ اندازه‌گیری می‌شود. در چارچوب مرجع مرکز جرم، سرعتها عبارت‌اند از $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm}$، که در آن $\mathbf{v}_{cm}$ سرعت مرکز جرم نسبت به چارچوب مرجع اصلی است. با در نظر گرفتن اینکه $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ است، نشان بدهید که انرژی جنبشی را می‌شود به‌صورت زیر نوشت

$$K = K_{int} + K_{cm}$$

که در آن $K_{int} = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ و $K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$ است. این رابطه نشان می‌دهد که، همان‌طور که در بخش ۹ـ۷ بیان شد، انرژی جنبشی سیستم ذرات را می‌شود به دو قسمت تقسیم کرد؛ یک بخش انرژی داخلی و یک بخش انرژی مرکز جرم. انرژی جنبشی داخلی در چارچوبی اندازه‌گیری می‌شود که در آن مرکز جرم ساکن است؛ مثلاً، حرکتهای کتره‌ای مولکولهای گاز در یک مخزن ساکن، عامل به‌وجود آورندهٔ انرژی جنبشی انتقالی داخلی است.

بخش ۹ـ۸ سیستمهای با جرم متغیر

۵۰. موشکی در فضا، در جایی که عملاً گرانشی وجود ندارد، ساکن است. جرم این موشک 2.55×10^5kg است که مقدار 1.81×10^5kg آن‌را مواد سوختنی تشکیل می‌دهد. موتور با آهنگ ۴۸۰kg/s سوخت را مصرف می‌کند و سرعت خروج گازها ۳٫۲۷km/s است. موتور به مدت ۲۵۰s کار می‌کند. (الف) نیروی پیشران موتور را محاسبه کنید (ب) جرم موشک پس از این مدت چقدر است؟ (ج) سرعت نهایی موشک چقدر است؟

۵۱. موشک ساکنی را در فضای تهی در نظر بگیرید. برای آنکه سرعت موشک پس از اتمام سوخت (الف) برابر سرعت گازهای خروجی و (ب) دو برابر سرعت گازهای خروجی شود، نسبت جرم (نسبت جرم اولیه به نهایی) آن باید چقدر باشد؟

۵۲. در میانهٔ مأموریتی به ماه، یک تغییر سرعت به‌اندازهٔ ۲۲٫۶m/s برای سفینه‌ای که با سرعت ۳۸۸m/s در حرکت است لازم می‌شود. سرعت گازهای خروجی موتور موشک برابر ۱۲۳۰m/s است. چه کسری از جرم اولیه سفینهٔ فضایی را باید، به عنوان جرم زاید، از آن بیرون ریخت؟

۵۳. قرار است موشکی به جرم کل 1.11×10^5kg را که 8.70×10^4kg از آن مواد سوختنی است به‌طور قائم پرتاب شود. سوخت با آهنگ ثابت ۸۲۰kg/s مصرف می‌شود. حداقل سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک چقدر باشد تا موشک بتواند شروع به پرواز کند؟

۵۴. یک سورتمهٔ ۵٫۴ کیلوگرمی که حامل ۳۵kg ماسه است از حال سکون روی یک سطح شیبدار یخزده به طول ۹۳ متر که زاویه شیب آن °۲۶ است به پایین می‌لغزد. ماسه با آهنگ ۲٫۳kg/s از عقب سورتمه بیرون می‌ریزد. چه مدت طول می‌کشد تا سورتمه به پایین شیب برسد؟

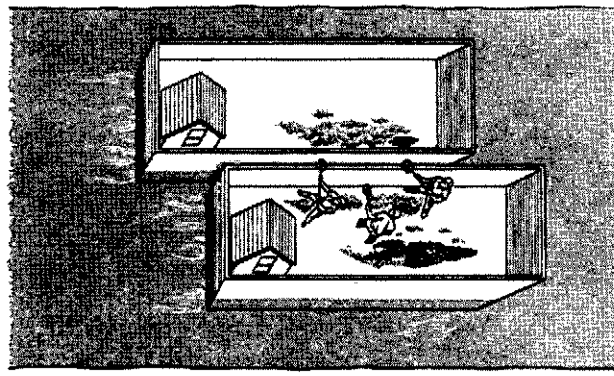
۵۵. برای در حرکت نگه داشتن یک تسمهٔ نقاله، وقتی بار حمل می‌کند نیروی محرک بیشتری لازم است تا وقتی که خالی است. اگر تسمه با سرعت ثابت ۱٫۵m/s در حرکت باشد و بار را با آهنگ ۲۰kg/s از یک سر تسمه روی آن قرار دهیم و از سر دیگر برداریم، چه نیروی محرک اضافی برای ثابت نگه داشتن سرعت حرکت تسمه لازم داریم؟ فرض کنید بار به طور قائم روی تسمه انداخته می‌شود و کارگرها قبل از بلند کردن بار از روی تسمه، آن‌را با دست می‌گیرند و نسبت به خودشان به حال سکون در می‌آورند.

۵۶. یک بارکش روباز به وزن ۹٫۷۵ تن متریک، با دندهٔ خلاص در یک مسیر افقی با اصطکاک ناچیز با سرعت ۱٫۳۶ متر بر ثانیه در حرکت است که باران تندی شروع می‌شود. قطره‌های باران در امتداد قائم نسبت به زمین فرو می‌ریزند. سرعت این بارکش وقتی به اندازهٔ ۰٫۵۰ تن متریک آب در آن جمع شده است چقدر است؟ برای به‌دست آوردن این جواب چه فرضی (اگر لازم باشد) کرده‌اید؟

۵۷. موشکی به جرم ۵۸۶۰kg آماده پرواز قائم است. سرعت خروج گازها ۱٫۱۷km/s است. برای اینکه در هر یک از موارد زیر نیروی پیشران کافی باشد، چه مقدار جرم باید درهر ثانیه از موشک خارج شود؟ (الف) برای خنثی کردن نیروی وزن، (ب) برای اینکه موشک با شتاب اولیه $18.3 m/s^2$ شروع به حرکت کند. توجه داشته باشید که، بر خلاف مثال ۱۲، در این مورد گرانش به عنوان یک نیروی خارجی روی موشک عمل می‌کند.

۵۸. دو یدک‌کش دراز در آبِ ساکن در یک جهت در حرکت‌اند. سرعت یکی ۹٫۶۵km/h و سرعت دیگری ۲۱٫۲km/h است. وقتی ازکنار هم می‌گذرند زغال سنگ با آهنگ ۹۲۵ کیلوگرم در دقیقه از یدک‌کش کندتر به داخل یدک‌کش تندتر ریخته می‌شود؛ (شکل ۴۰).

اگر قرار باشد سرعت هیچ‌کدام از یدک‌کشها تغییر نکند، چه مقدار نیروی اضافی باید توسط موتورهای آنها تأمین شود؟ فرض کنید که جابه‌جایی سنگ کاملاً به‌طور جانبی صورت می‌گیرد و نیروهای اصطکاکی بین یدک‌کشها و آب به وزن آنها بستگی ندارد.



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. هواپیمای جتی با سرعت ۱۸۴m/s (یعنی ۶۰۴ft/s) در حرکت است. موتور این هواپیما در هر ثانیه ۶۸٫۲m³ (یعنی ۲۴۱۰ft³) هوا به جرم ۷۰٫۲kg (یعنی ۴٫۸۱slug) را به داخل می‌کشد. این هوا برای سوزاندن ۲٫۹۲kg (یعنی ۰٫۲۰۰slug) سوخت در هرثانیه مصرف می‌شود. با استفاده از انرژی حاصل از احتراق سوخت، مواد حاصل از احتراق فشرده می‌شوند و از قسمت عقب موتور با سرعت ۴۹۷m/s (یعنی ۱۶۳۰ft/s)، نسبت به هواپیما، به بیرون رانده می‌شوند. (الف) نیروی پیشران موتور چقدر است؟ (ب) توانی که به هواپیما داده می‌شود چقدر است؟

۶۰. ریسمان قابل انعطافِ ناکشسانی به طول L را از داخل لولهٔ صافی می‌گذرانیم و ریسمان می‌تواند به‌راحتی در لوله حرکت کند. لوله یک خم راستگوشه دارد که در صفحهٔ قائم چنان قرارگرفته است که یک شاخه‌اش قائم و شاخهٔ دیگرش افقی است. ابتدا، در $t = ۰$، طول $y_۰$ از ریسمان در داخل لوله آویخته است. ریسمان را رها می‌کنیم تا شروع به لغزیدن در داخل لوله کند. t ثانیه پس از رها شدن، ریسمان با سرعت dy/dt حرکت می‌کند؛ $y(t)$ طول قسمت آویختهٔ ریسمان است. (الف) نشان بدهید که بنابر فرمولبندی مسئلهٔ جرم متغیر، $\mathbf{v}_{\rm rel} = ۰$ است و بنابراین، معادلهٔ حرکت به‌صورت $m d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}_{\rm ext}$ در می‌آید. (ب) نشان بدهید که معادلهٔ حرکت، در این مورد، عبارت است از $d^۲y/dt^۲ = gy$. (ج) نشان بدهید که پایستگی انرژی مکانیکی به معادلهٔ $(dy/dt)^۲ - gy^۲ = \text{const.}$ می‌انجامد، و این جواب با قسمت (ب) سازگار است. (د) نشان بدهید که $y = (y_۰/۲)(e^{\sqrt{g/L}t} + e^{-\sqrt{g/L}t})$ جوابی برای معادلهٔ حرکت است (با جانشانی در قسمت ب)، و دربارهٔ این معادله بحث کنید.

۱۰

برخورد

یکی از کاربردهای مهم پایستگی تکانهٔ خطی، بررسی برخورد میان اجسام است. این اجسام به هر اندازه‌ای هم که باشند (از ذرات بنیادی گرفته تا کهکشانها) و هر نیرویی هم که دخیل باشد (از نیروی هسته‌ای، قوی‌ترین، تا نیروی گرانش، ضعیف‌ترین) قانون پایستگی تکانهٔ خطی صادق است و امکان مطالعهٔ این فرایندها را فراهم می‌کند.

در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان فرایندهای برخورد را با استفاده از قوانین پایستگی انرژی و تکانه تحلیل کرد، و مثالهایی از قلمرو فیزیک زیر اتمی می‌آوریم که نشان می‌دهد چگونه می‌توان از بررسی نتایج انواع مختلف برخوردها، اطلاعات اساسی دربارهٔ جهان فیزیکی به‌دست آورد.

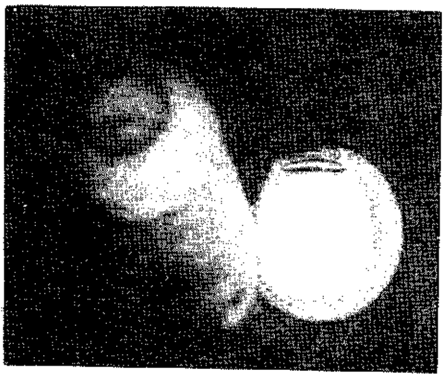
۱۰ـ۱ برخورد چیست

در برخورد، در زمانی نسبتاً کوتاه نیروی نسبتاً بزرگی به هر کدام از ذرات برخوردکننده اثر می‌کند. نظر اصلی دربارهٔ برخورد این است که حرکت ذره‌های برخوردکننده (یا دست‌کم یکی از آنها) به‌طور تقریباً ناگهانی تغییر می‌کند و در نتیجه می‌توانیم، کم‌وبیش به وضوح، زمانهای "قبل از برخورد" و "بعد از برخورد" را از هم تفکیک کنیم.

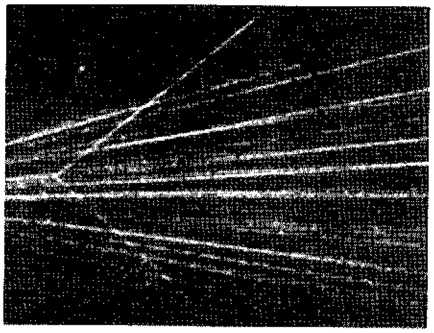
مثلاً، وقتی چوبدست به توپ بیسبال برخورد می‌کند، آغاز و پایان برخورد را می‌توان به‌طور نسبتاً دقیق تعیین کرد. زمان تماس چوبدست و توپ در مقایسه با مدتی که ما توپ را زیر نظر داریم بسیار کوتاه است. در حین برخورد، چوبدست نیروی بزرگی به توپ وارد می‌کند (شکل ۱). این نیرو چنان پیچیده با زمان تغییر می‌کند که مشکل می‌توانیم اندازه‌گیری‌اش کنیم. هم توپ و هم چوبدست در حین برخورد تغییر شکل می‌دهند. به نیروهایی که مدت اثر آنها در مقایسه با مدت زمان مشاهده سیستم کوتاه باشد نیروهای ضربه‌ای می‌گوییم.

وقتی یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ ^4He) با هستهٔ دیگری برخورد می‌کند (شکل ۲)، نیروی مؤثر میان آنها می‌تواند همان نیروی رانشی الکتروستاتیکی وابسته به بارهای این ذره‌ها باشد. ذره‌ها ممکن است عملاً در تماس با یکدیگر قرار نگیرند، اما باز هم این رویداد را برخورد می‌نامیم چون نیرویی نسبتاً قوی، در مدتی که در مقایسه با مدت مشاهدهٔ ذرهٔ آلفا کوتاه است، بر این ذره اثر می‌کند و تأثیری جدی بر حرکت آن می‌گذارد.

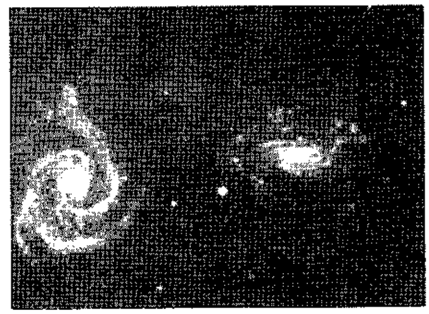
اگر این آمادگی را داشته باشیم که مدت مشاهده را به مقیاس زمانی



شکل۱. عکسی که با سرعت زیاد از برخورد چوبدست با توپ بیسبال گرفته شده است. به تغییر شکل توپ توجه کنید؛ این تغییر شکل حاکی از نیروی ضربه‌ای بزرگی است که بر توپ وارد می‌شود.



شکل۲. یک ذرهٔ آلفا در اتاقک ابر با یک هستهٔ هلیم برخورد می‌کند. اغلب ذرات فرودی (که از سمت چپ می‌آیند) بدون برخورد از اتاقک می‌گذرند.



شکل۳. برخورد دو کهکشان.

میلیونها یا میلیاردها، سال افزایش بدهیم، می‌توانیم حتی راجع به برخورد بین کهکشانها صحبت کنیم (شکل ۳). (البته یک راه عملی‌تر برای کوتاه کردن زمانهایی به این عظمت، استفاده از مدل‌سازی کامپیوتری است!)

برخوردهای میان ذرات بنیادی، منبع اصلی اطلاعات دربارهٔ ساختار داخلی آنهاست. وقتی دو ذره با انرژی زیاد با هم برخورد می‌کنند، محصولات برخورد اغلب با ذره‌های اصلی کاملاً فرق دارند (شکل ۴). گاهی در این برخوردها صدها ذرهٔ محصول تولید می‌شود، که جرم کل آنها ممکن است خیلی بیشتر از جرم ذره‌های برخوردکننده باشد (در این مورد انرژی جنبشی ذره‌های برخوردکننده در فرایند برخورد به انرژی سکون تبدیل می‌شود.) با مطالعهٔ مسیر ذره‌های خروجی و به کار بردن قوانین بنیادی پایستگی، می‌توانیم رویداد اصلی را بازسازی کنیم.

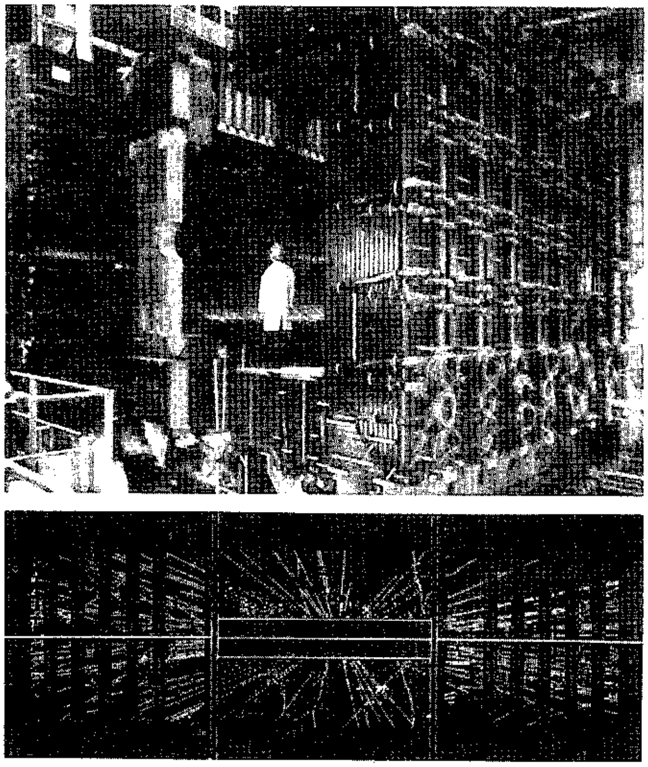
در زمینه‌ای دیگر، در بررسی تصادفات رانندگی هم سعی می‌کنند برخوردها را بازسازی کنند. از مسیرها و نقشهای برخورد اتومبیلهای درگیر در برخورد (شکل ۵)، اغلب می‌توان جزئیات مهمی مانند سرعت و جهت حرکت دو اتومبیل در لحظات قبل از برخورد را استنتاج کرد.

نوع دیگری از برخورد عبارت است از برخورد میان یک کاوهٔ فضایی و یک سیاره، که به آن "اثر تیرکمان" گفته می‌شود. در این برخورد می‌توان سرعت و جهت کاوهٔ فضایی را در "مواجههٔ نزدیک" با یک سیاره (متحرک) تغییر داد. کاوهٔ فضایی واقعاً با سیاره تماس پیدا نمی‌کند، ولی در یک بازهٔ زمانی کوتاه در مقایسه با کل مدت سفر، این کاوه به‌شدت تحت تأثیر گرانش سیاره قرار می‌گیرد. پس موجه است که چنین مواجهه‌ای را هم "برخورد" بنامیم (مسئلهٔ ۴).

۱۰ـ۲ ضربه و تکانه

منظور ما از مطالعهٔ برخورد در این فصل آن است که ببینیم با استفاده از اصول پایستگی تکانه و انرژی و با دانستن حرکت اولیهٔ ذرات برخوردکننده و با این فرض که چیزی از نیروهای مؤثر در حین برخورد نمی‌دانیم، چه اطلاعاتی دربارهٔ حرکت نهایی ذرات درگیر در برخورد می‌توانیم به‌دست بیاوریم.

فرض کنید شکل ۶ نمودار مقدارِ نیروی خالص وارد بر یک جسم در حین یک برخورد باشد. این برخورد در لحظهٔ t_i شروع می‌شود و



(الف)

(ب)

شکل۴. (الف) آشکارساز عظیم UA1 که در برخورددهندهٔ پروتون-پروتون در سرن (CERN) از آن استفاده می‌شود. سرن یک مؤسسهٔ تحقیقاتی در کار فیزیک ذرات است که در نزدیکی شهر ژنو در کشور سوئیس قرار دارد. (ب) یک بازسازی کامپیوتری از مسیرهای ذرات تولیدشده در یک برخورد پروتون-پروتون. چنین بازسازیهایی در سال ۱۹۸۳ برای اثبات وجود ذراتی که W و Z نامیده می‌شوند به‌کار گرفته شد. وجود این ذرات مؤید نظریه‌ای است که نیروی الکترومغناطیسی و نیروی هسته‌ای ضعیف را دو نمود متفاوت از یک نیروی واحد بنیادی‌تر می‌داند.

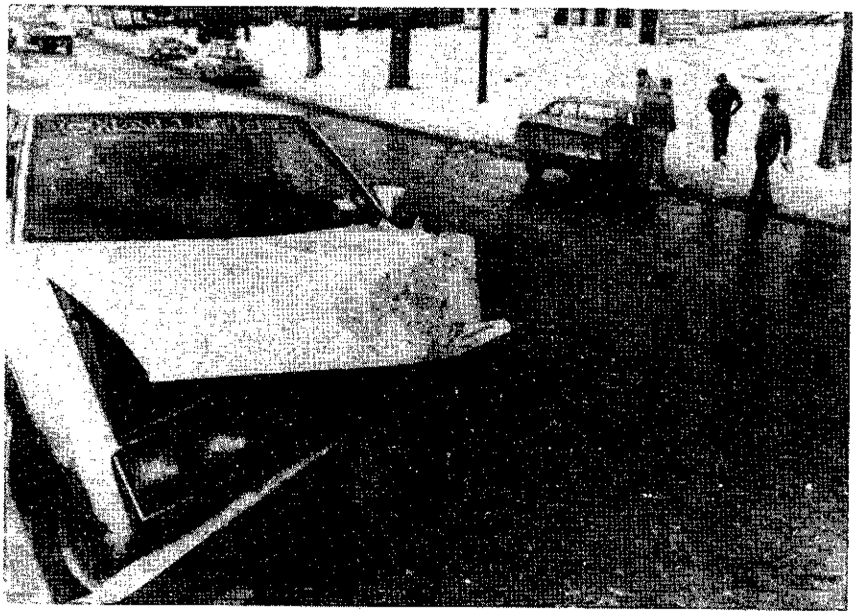
در لحظهٔ t_f پایان می‌یابد. نیروهای مؤثر قبل و بعد از برخورد برابر با صفرند. از قانون دوم نیوتون به‌صورت $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$، می‌توانیم تغییر تکانهٔ $d\mathbf{p}$ یک ذره را که به مدت dt تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ قرار گرفته است به شکل زیر بنویسیم

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\, dt$$

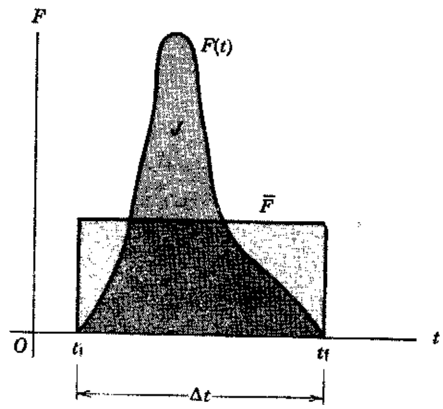
تغییر تکانهٔ یک جسم در خلال یک برخورد را می‌توانیم با انتگرال‌گیری روی مدت برخورد، یعنی، بین شرایط اولیه (تکانهٔ $\mathbf{p}_i$ در زمان t_i) و شرایط نهایی (تکانهٔ $\mathbf{p}_f$ در زمان t_f)، تعیین کنیم

$$\int_{p_i}^{p_f} d\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt \qquad (۱)$$

سمت چپ معادلهٔ ۱ همان تغییر تکانه، $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$، است. سمت راست معادلهٔ ۱ را، که هم به شدت نیرو و هم به مدت زمان اثر آن بستگی



شکل۵. برخورد بین دو اتومبیل. قسمت اعظم انرژی جنبشی اولیه به انرژی تغییر شکل دو اتومبیل تبدیل شده است. متخصصان بازسازی تصادفها از پایستگی تکانه برای محاسبهٔ سرعتهای قبل از برخورد استفاده می‌کنند.



شکل۶. نیروی ضربه‌ای $F(t)$ در حین برخوردی که از t_i تا t_f طول می‌کشد به شکل دلبخواهی تغییر می‌کند. سطح زیرمنحنی $F(t)$ برابر ضربهٔ J است و مستطیلی که به نیروی میانگین $\overline{F}$ محدود شده است همان مساحت را دارد.

دارد، ضربه نیرو، $\mathbf{J}$، می‌نامند

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt \qquad (۲)$$

و از معادلهٔ ۱ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \qquad (۳)$$

معادلهٔ ۳ بیان ریاضی قضیهٔ ضربه‌ـتکانه است:

ضربهٔ نیروی خالص وارد بر یک ذره در یک بازهٔ زمانی معین برابر است با تغییر تکانهٔ آن ذره در آن بازهٔ زمانی.

ضربه و تکانه هر دو بردارند و یکاها و ابعاد یکسان دارند.

گرچه در این فصل از معادلهٔ ۳ فقط در مواردی استفاده می‌کنیم که نیروهای ضربه‌ای (یعنی نیروهایی که زمان تأثیر آنها در مقایسه با زمان مشاهده کوتاه است) در کارند، ولی چنین محدودیتی برای این معادله ذاتی نیست. معادلهٔ ۳ همان کلیت قانون دوم نیوتون را دارد، کما اینکه خودش هم از همین قانون به‌دست آمده است. مثلاً، از معادلهٔ ۳ می‌توانیم برای پیدا کردن تکانه‌ای که جسمی بر اثر سقوط در میدان گرانشی زمین کسب می‌کند استفاده کنیم.

قضیهٔ ضربه‌ـتکانه خیلی شبیه قضیهٔ کارـانرژی است که در فصل ۷ به‌دست آوردیم. هر دو قضیه در مورد تک‌ذره به‌کار می‌روند و هر دو مستقیماً از قانون دوم نیوتون ناشی شده‌اند. کار شامل انتگرال نیروی خالص روی مکان است، در حالی‌که ضربه شامل انتگرال نیروی خالص روی زمان است. قضیهٔ کارـانرژی یک معادلهٔ اسکالر است که با تغییرات انرژی جنبشی ذره سروکار دارد، در حالی‌که قضیهٔ ضربه‌ـتکانه یک معادلهٔ برداری است که به تغییرات تکانهٔ ذره مربوط می‌شود.

فرض کرده‌ایم نیروی ضربه‌ای که مقدار آن در شکل ۶ نشان داده شده است جهت ثابتی دارد. مقدار ضربهٔ این نیرو با سطح زیرمنحنی $F(t)$ نشان داده می‌شود. این ساختار را می‌توانیم با مستطیل شکل ۶ به عرض Δt و ارتفاع $\overline{F}$ نشان بدهیم، که $\overline{F}$ مقدار نیروی متوسطی است که در طی بازهٔ زمانی Δt اثر می‌کند. به این ترتیب

$$J = \overline{F}\, \Delta t \qquad (۴)$$

در برخوردهایی نظیر برخورد توپ و چوبدست (شکل ۱)، اندازه‌گیری مستقیم $F(t)$ دشوار است، ولی می‌توانیم Δt را تخمین بزنیم (شاید چند میلی‌ثانیه) و مقدار معقولی از $\overline{F}$ به‌دست بیاوریم. این محاسبه

مبتنی بر ضربه‌ای است که بنابر معادلهٔ ۳ از تغییر تکانهٔ توپ محاسبه می‌شود (مثال ۱).

۳-۱۰ پایستگی تکانه در حین برخورد

اکنون برخورد بین دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 را در نظر بگیرید (شکل ۷). در طی مدت کوتاه برخورد، این دو ذره نیروهای بزرگی بر یکدیگر وارد می‌کنند. در هر لحظه $\mathbf{F}_{12}$ نیرویی است که از ذرهٔ ۲ بر ذرهٔ ۱ وارد می‌شود و $\mathbf{F}_{21}$ نیرویی است که ذرهٔ ۱ بر ذرهٔ ۲ وارد می‌کند. بنابر قانون سوم نیوتون این نیروها مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند.

تغییر ناشی از برخورد در تکانهٔ ذرهٔ ۱ برابر است با

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{12} dt = \overline{\mathbf{F}}_{12} \Delta t \qquad (5)$$

که در آن $\overline{\mathbf{F}}_{12}$ عبارت است از مقدار متوسط نیروی $\mathbf{F}_{12}$ در مدت برخورد، یعنی در $\Delta t = t_f - t_i$.

تغییر ناشی از برخورد در تکانهٔ ذرهٔ ۲ برابر است با

$$\Delta \mathbf{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{21} dt = \overline{\mathbf{F}}_{21} \Delta t \qquad (6)$$

که در آن $\overline{\mathbf{F}}_{21}$ عبارت است از مقدار متوسط نیروی $\mathbf{F}_{21}$ در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_f - t_i$.

اگر هیچ نیروی دیگری بر این ذرات وارد نشود $\Delta \mathbf{p}_1$ و $\Delta \mathbf{p}_2$ تغییر تکانهٔ کل هر یک از ذرات را به‌دست می‌دهد. دیدیم که در هر لحظه $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ و در نتیجه $\overline{\mathbf{F}}_{12} = -\overline{\mathbf{F}}_{21}$ است، پس

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2 \qquad (7)$$

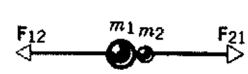
اگر دو ذره را به عنوان یک سیستم منزوی در نظر بگیریم، در آن صورت تکانهٔ کل سیستم عبارت است از

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \qquad (8)$$

و کل تغییر ناشی از برخورد در تکانهٔ سیستم صفر است، یعنی

$$\Delta \mathbf{P} = \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0 \qquad (9)$$

پس، اگر هیچ نیروی خارجی در کار نباشد، تکانهٔ کل یک سیستم دو-ذره‌ای در اثر برخورد تغییر نمی‌کند. این عبارت بیانی است از قانون پایستگی تکانهٔ خطی (بخش ۹-۶) که در مورد یک سیستم دوذره‌ای



شکل ۷. دو ذره با جرمهای m_1 و m_2 در برخورد با یکدیگر نیروهای مساوی و مخالف مبادله می‌کنند.

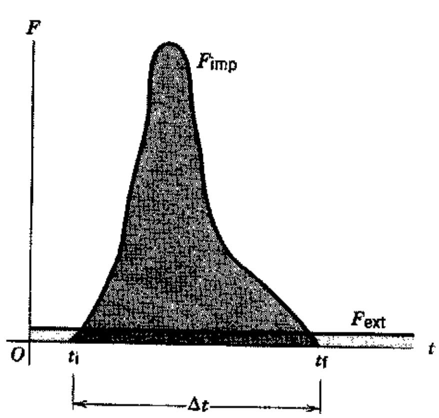
به‌کار گرفته شده است. نیروهای ضربه‌ای مؤثر در طی برخورد، نیروهای داخلی‌اند و اثری بر تکانهٔ کل سیستم ندارند.

برخورد را به‌صورت برهم‌کنشی تعریف کردیم که در مدت زمان Δt، که در مقایسه با زمانی که سیستم را مشاهده می‌کنیم قابل چشمپوشی است، انجام می‌شود. می‌توانیم آن‌را به‌صورت رویدادی هم که در آن نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم در مقایسه با نیروهای ضربه‌ای برخورد قابل چشمپوشی‌اند (مثال ۱) در نظر بگیریم. وقتی "چوبدست" به توپ بیسبال یا به توپ گلف برخورد می‌کند، یا دو گوی بیلیارد به یکدیگر اصابت می‌کنند، نیروهای خارجی هم روی این سیستمها اثر می‌کند. مثلاً، گرانش یا اصطکاک می‌توانند به سیستم نیرو وارد کنند؛ این نیروها ممکن است بر روی اجسام برخوردکننده یکسان نباشند و الزاماً توسط نیروهای خارجی دیگری خنثی نشوند. با این همه، صرفنظر کردن از نیروهای خارجی در حین برخورد کاملاً موجه است و می‌توان فرض کرد تکانه پایسته است مشروط بر اینکه این نیروهای خارجی در مقایسه با نیروهای ضربه‌ای برخورد خیلی کوچک باشند، که معمولاً هم هستند. در نتیجه، تغییر ناشی از نیروی خارجی در تکانهٔ ذره در حین برخورد در مقایسه با تغییر ناشی از نیروی ضربه‌ای قابل چشمپوشی است (شکل ۸).

مثلاً، در برخورد چوبدست به توپ بیسبال، که فقط چند میلی ثانیه طول می‌کشد، چون تغییر تکانهٔ توپ بزرگ است و زمان برخورد کوچک، از رابطهٔ

$$\Delta \mathbf{p} = \overline{\mathbf{F}}\, \Delta t$$

نتیجه می‌شود که نیروی ضربه‌ای متوسط، $\overline{\mathbf{F}}$، نسبتاً بزرگ است. نیروی خارجی گرانش در مقایسه با این نیرو، قابل اغماض است. برای تعیین تغییر حرکت توپ می‌توانیم از این نیروی خارجی بی هیچ نگرانی چشمپوشی کنیم؛ هر چه زمان برخورد کوتاهتر باشد این کار موجه‌تر است.



شکل ۸. نیروی ضربه‌ای F_{imp} در حین برخورد معمولاً خیلی شدیدتر از هر نیروی خارجی دیگری (F_{ext} که در اینجا آن‌را ثابت گرفته‌ایم) است که ممکن است بر سیستم اثر کند.

بنابراین، در عمل می‌توانیم قانون پایستگی تکانه را در برخوردها به‌کار ببریم به این شرط که زمان برخورد به‌اندازهٔ کافی کوتاه باشد. در این صورت می‌توانیم بگوییم که تکانهٔ سیستم درست در لحظات قبل و بعد از برخورد ذرات، یکی است.

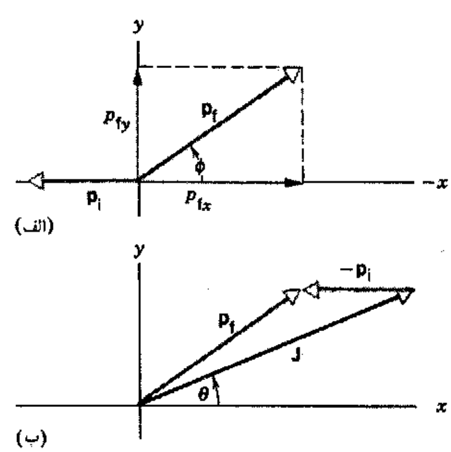
مثال ۱. توپ بیسبالی (که وزن آن حدوداً ۵ اونس است) با سرعت افقی ۹۳mi/h (حدود ۱۵۰ کیلومتر بر ساعت) در حرکت است که با چوبدستی به آن ضربه وارد می‌شود. این توپ چوبدست را در امتداد زاویه $\phi = ۳۵°$ بالاتر از مسیر فرودش با سرعت ۱۸۰km/h ترک می‌کند. (الف) ضربهٔ نیروی وارد بر توپ را تعیین کنید. (ب) فرض کنید برخورد ۱٫۵ میلی‌ثانیه (۰٫۰۰۱۵s) طول بکشد نیروی متوسط چقدر است؟ (ج) تغییر تکانهٔ چوبدست را پیدا کنید.

حل: (الف) شکل ۹الف تکانهٔ اولیهٔ $\mathbf{p}_i$ و تکانهٔ نهایی $\mathbf{p}_f$ مربوط به توپ بیسبال را نشان می‌دهد. جرم متناظر با ۵oz برابر ۰٫۱۴kg است و سرعت نهایی توپ (برحسب یکای مناسبتر) ۵۰m/s است. مؤلفه‌های تکانهٔ نهایی عبارت‌اند از

$$p_{fx} = mv_f \cos\ \phi = (۰٫۱۴\mathrm{kg})(۵۰\mathrm{m/s})(\cos ۳۵°)$$
$$= ۵٫۷\mathrm{kgm/s}$$
$$p_{fy} = mv_f \sin\ \phi = (۰٫۱۴\mathrm{kg})(۵۰\mathrm{m/s})(\sin ۳۵°)$$
$$= ۴٫۰\mathrm{kgm/s}$$

در این دستگاه مختصات، تکانهٔ اولیه فقط دارای مؤلفهٔ x است، که مقدار آن (منفی) برابر است با

$$p_{ix} = mv_i = (۰٫۱۴\mathrm{kg})(-۴۲\mathrm{m/s}) = -۵٫۹\mathrm{kgm/s}$$



شکل۹. مثال ۱. (الف) تکانه‌های اولیه و نهایی بیسبال. (ب) اختلاف $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ برابر است با ضربهٔ $\mathbf{J}$.

اکنون می‌توانیم ضربه را به‌دست بیاوریم

$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = ۵٫۷\mathrm{kgm/s} - (-۵٫۹\mathrm{kgm/s})$$
$$= ۱۱٫۶\mathrm{kgm/s}$$
$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = ۴٫۰\mathrm{kgm/s} - ۰ = ۴٫۰\mathrm{kgm/s}$$

به شکل دیگر، مقدار ضربه برابر است با

$$J = \sqrt{J_x^۲ + J_y^۲} = \sqrt{(۱۱٫۶\mathrm{kgm/s})^۲ + (۴٫۰\mathrm{kgm/s})^۲}$$
$$= ۱۲٫۳\mathrm{kgm/s}$$

و راستای آن متناظر است با

$$\theta = \tan^{-۱}(J_y/J_x)$$
$$= \tan^{-۱}[(۴٫۰\mathrm{kgm/s})/(۱۱٫۶\mathrm{kgm/s})] = ۱۹°$$

این زاویه بالای افق است. شکل ۹ب بردار ضربه را نمایش می‌دهد و، طبق تعریف معادلهٔ ۳، به‌صورت نموداری ثابت کنید که

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f + (-\mathbf{p}_i)$$

(ب) می‌دانیم که $\mathbf{J} = \overline{\mathbf{F}}\Delta t$ و از آنجا $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{J}/\Delta t$ است. پس مقدار $\overline{\mathbf{F}}$ برابر است با

$$\overline{F} = (۱۲٫۳\mathrm{kgm/s})/۰٫۰۰۱۵\mathrm{s} = ۸۲۰۰\mathrm{N}$$

که تقریباً برابر با یک تن است. این نیرو در همان جهت $\mathbf{J}$، یعنی، ۱۹° بالای افق وارد می‌شود. توجه کنید که این نیرو متوسط است؛ همان‌طور که شکل ۶ نشان می‌دهد نیروی ماکزیمم به مقدار قابل‌ملاحظه‌ای از این نیرو بیشتر است. همچنین، توجه داشته باشید که $\overline{F}(= ۸۲۰۰\mathrm{N}) \gg mg(= ۱٫۴\mathrm{N})$ است. به این‌ترتیب با خیال آسوده می‌توانیم فرض کنیم که نیروی ضربه‌ای خیلی بزرگتر از نیروی خارجی (در این مورد گرانش) است و بنابراین با تقریب خوبی برابر است با همان نیروی خالصی که در حین برخورد وارد می‌شود. (ج) تغییر تکانهٔ چوبدست بنابر معادلهٔ ۷ برابر است با تغییر تکانهٔ توپ ولی در جهت خلاف آن. به این ترتیب برای چوبدست داریم

$$\Delta p_x = -۱۱٫۶\mathrm{kgm/s}$$
$$\Delta p_y = -۴٫۰\mathrm{kgm/s}$$

آیا این تغییر تکانه، تغییر کوچکی است یا تغییر بزرگی است؟ برای پاسخگویی به این پرسش سعی کنید تکانهٔ چوبدست در حال حرکت را تخمین بزنید.

۱۰ـ۴ برخورد در یک بعد

در این بخش اثر برخورد میان دو جسم را بررسی می‌کنیم. معمولاً، سرعتهای اولیهٔ دو جسم قبل از برخورد را می‌دانیم و منظورمان این است که با استفاده از قوانین پایستگی یا قوانین حرکت، سرعتهای بعد از برخورد را تعیین کنیم.

اگر نیروهایی راکه در حین برخورد اثر می‌کنند بشناسیم و اگر بتوانیم معادلات حرکت را حل کنیم، همیشه می‌توانیم حرکتِ پس از برخورد اجسام را از حرکت، قبل از برخوردشان محاسبه کنیم. اما دربیشتر برخوردها این نیروها را نمی‌شناسیم. قانون پایستگی تکانه باید در هر برخوردی که در آن فقط نیروهای داخلی شرکت دارند برقرار باشد، و حتی اگر این نیروها را نشناسیم هم می‌توانیم آن‌را به‌کار ببریم. اگرچه ممکن است جزئیات برهم‌کنش را ندانیم، ولی با استفاده از پایستگی تکانه و پایستگی انرژی در بسیاری موارد می‌توانیم نتایج برخورد را پیش‌بینی کنیم.

تکانهٔ خطی همواره در برخوردها پایسته است. انرژی کل هم پایسته است: انرژی کل اولیهٔ ذرات برخوردکننده برابر است با انرژی کل نهایی محصولات برخورد. این انرژی ممکن است علاوه بر انرژی جنبشی شامل شکلهای دیگر انرژی از جمله انرژی داخلی، انرژی تغییر شکل، انرژی چرخشی، و انرژی تابشی باشد.

در ردهٔ خاصی از برخوردها، که برخورد کشسان نامیده می‌شوند، از همهٔ اشکال دیگر انرژی چشمپوشی می‌کنیم و فقط انرژی مکانیکی، $U + K$، را در نظر می‌گیریم. بعلاوه، فرض می‌کنیم در برخوردهای ضربه‌ای نیروهای داخلی به‌مدت کوتاهی عمل می‌کنند و بنابراین در مسافت کوتاهی مؤثرند؛ ما ذرات را فقط در فواصل نسبی بسیار بزرگتری مشاهده می‌کنیم و در نتیجه می‌توانیم از آثار مربوط به انرژی پتانسیل داخلی آنها را ندیده بگیریم. در برخوردِ کشسان، انرژی جنبشی انتقالی تنها شکلی از انرژی است که باید در محاسبات منظور شود، و بنابراین پایستگی انرژی مکانیکی در این مورد هم‌ارز پایستگی انرژی جنبشی است: در برخوردهای کشسان انرژی جنبشی اولیهٔ K_i برابر است با انرژی جنبشی نهایی K_f.

در ردهٔ دیگری از برخوردها، که برخورد ناکشسان نامیده می‌شوند، اشکال دیگر انرژی هم پدید می‌آیند، و انرژیهای جنبشی اولیه و نهایی با هم برابر نیستند. در بعضی موارد $K_i > K_f$ است، مثلاً وقتی که انرژی جنبشی اولیه به انرژی داخلی محصولات برخورد تبدیل می‌شود؛ در موارد دیگر $K_i < K_f$ است، مانند وقتی که انرژی داخلی ذخیره شده در ذرات برخوردکننده آزاد می‌شود. در برخوردهای ناکشسان انرژی مکانیکی $U + K$ پایسته نیست، ولی انرژی کل پایسته است . (بخش ۸ـ۶). وقتی اجسام برخوردکننده ساده‌اند، مانند اتمها یا مولکولها، اغلب می‌توانیم اختلاف بین K_i و K_f را برحسب حالتهای گسستهٔ انرژی داخلی سیستم توجیه کنیم. در سیستمهای پیچیده‌تر، مانند اتومبیلهای برخوردکننده، اختلاف انرژی را به‌صورت انرژی جنبشی "از دست رفته" یا "به دست آمده" در نظر می‌گیریم.

همهٔ برخوردهای میان اجسام واقعی تا حدودی ناکشسان‌اند. در مورد اجسام خیلی صلب، مانند گویهای بیلیارد، اغلب می‌توانیم به‌طور تقریبی برخورد را کشسان در نظر بگیریم. دراین مورد انرژی‌ای که از جنبشی به سایر اشکال تبدیل می‌شود (مثلاً به امواج صوتی که در برخورد گویها شنیده می‌شود) در مقایسه با انرژی جنبشی قابل اغماض است. توجه داشته باشید که طبقه‌بندی برخوردها به کشسان و ناکشسان مستقل از چارچوب مرجعی است که برخورد از آن مشاهده می‌شود.

اگر دو جسم برخوردکننده پس از برخورد به هم بچسبند، می‌گوییم برخورد کاملاً ناکشسان است. مثلاً، برخورد بین یک گلوله و قطعه چوبی که گلوله به آن شلیک شده است کاملاً ناکشسان است مشروط بر اینکه گلوله در داخل قطعه چوب باقی بماند. عبارت "کاملاً ناکشسان" الزاماً به این معنی نیست که تمام انرژی جنبشی اولیه از دست می‌رود، بلکه، همان‌طور که خواهیم دید، به این معنی است که انرژی جنبشی تا بیشترین مقداری که پایستگی تکانه مجاز می‌دارد از دست می‌رود.

با آنکه نیروهای برخورد ناشناخته‌اند، از حرکت ذرات قبل از برخورد می‌توانیم حرکت بعد از برخورد آنها را تعیین کنیم، مشروط بر اینکه برخورد کاملاً ناکشسان باشد، یا، اگر برخورد کشسان است، مشروط بر اینکه برخورد فقط در یک بعد صورت بگیرد. در برخورد یک‌بعدی، حرکت نسبی بعد از برخورد در امتداد همان خطی است که حرکت نسبی قبل از برخورد. فعلاً بحث را به حرکت یک‌بعدی محدود می‌کنیم.

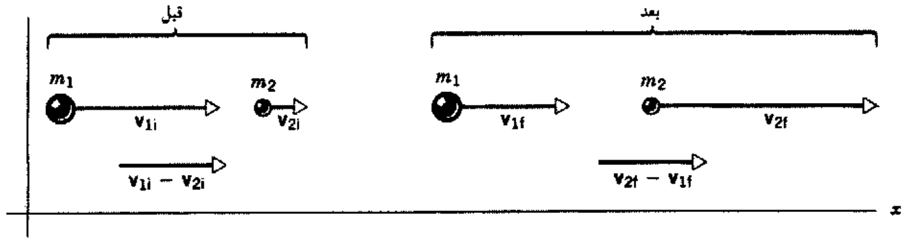
برخوردهای کشسان

ابتدا به برخورد کشسان یک‌بعدی می‌پردازیم. دو جسم را در نظر بگیرید که روی خط واصل بین مرکزهایشان در حرکت‌اند (مثلاً دو لغزنده روی یک ریل هوا)، و پس از برخورد رودررو در امتداد همان خط مستقیم به حرکت درمی‌آیند (شکل ۱۰). نیروهایی که این اجسام در حین برخورد به یکدیگر وارد می‌کنند در راستای خط اولیهٔ حرکت است و بنابراین، حرکت نهایی هم در امتداد همین خط خواهد بود.

جرم ذرات برخوردکننده m_1 و m_2 است و سرعت آنها عبارت است از v_{1i} و v_{2i} قبل از برخورد و v_{1f} و v_{2f} بعد از برخورد. [در نمادگذاری این بخش، شاخصهای ۱ و ۲ ذرات را مشخص می‌کنند، و شاخصهای i و f به‌ترتیب مقادیر اولیه (قبل از برخورد) و نهایی (بعد از برخورد) را نشان می‌دهند.] جهت مثبت تکانه و سرعت را به طرف راست شکل ۱۰ می‌گیریم. فرض می‌کنیم سرعت ذرات برخوردکننده (در مقایسه با سرعت نور) آنقدر کم است که نیازی به استفاده از عبارتهای نسبیتی برای تکانه و انرژی جنبشی نداریم (مگر آنکه صریحاً غیر از این گفته باشیم). از پایستگی تکانه داریم

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (۱۰)$$

چون برخورد را کشسان در نظر گرفته‌ایم، انرژی جنبشی بنابه تعریف



شکل ۱۰. دو ذره قبل و بعد از یک برخورد کشسان. توجه کنید که سرعتهای نسبی قبل و بعد از برخورد با هم برابرند.

پایسته است و از $K_i = K_f$ نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad (۱۱)$$

اگر جرمها و سرعتهای اولیه را بدانیم، می‌توانیم از دو معادلهٔ بالا سرعتهای نهایی v_{1f} و v_{2f} را محاسبه کنیم.

می‌توانیم معادلهٔ مربوط به تکانه را به‌صورت

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \qquad (۱۲)$$

و معادلهٔ مربوط به انرژی را به‌صورت

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \qquad (۱۳)$$

بنویسیم. از تقسیم معادلهٔ ۱۳ بر معادلهٔ ۱۲ و با این فرض که $v_{2f} \neq v_{2i}$ و $v_{1f} \neq v_{1i}$ است (پرسش ۱۵)، به‌دست می‌آوریم

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

که می‌شود آن‌را به این صورت مرتب کرد

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \qquad (۱۴)$$

این معادله حاکی از آن است که در برخورد کشسان یک‌بعدی، سرعت نسبی (نزدیک شدن) دو جسم قبل از برخورد برابر و در جهت مخالف سرعت نسبی (دور شدن) آنها بعد از برخورد است، فرقی هم نمی‌کند که ذرات برخوردکننده چه جرمی داشته باشند.

برای اینکه سرعتهای بعد از برخورد، یعنی v_{1f} و v_{2f} را از سرعتهای قبل از برخورد، یعنی v_{1i} و v_{2i} تعیین کنیم معادله‌های ۱۴ و ۱۲ را ترکیب می‌کنیم تا v_{2f} را حذف و v_{1f} را به‌دست بیاوریم

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \qquad (۱۵)$$

به‌همین ترتیب، می‌توانیم v_{1f} را حذف و v_{2f} را تعیین کنیم

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \qquad (۱۶)$$

روابط ۱۵ و ۱۶، که در تمام چارچوبهای لخت برقرارند، نتایجی کلی هستند که امکان محاسبهٔ سرعتهای نهایی را در هر برخورد یک‌بعدی کشسان فراهم می‌آورند. اغلب با انتخاب چارچوب مرجعی که در آن ذرهٔ هدف (مثلاً m_2) در آغاز ساکن است معادله‌های بالا را ساده می‌کنیم. به این ترتیب می‌توانیم v_{2i} را در معادلات ۱۵ و ۱۶ برابر با صفر بگیریم. در اینجا چند مورد خاص را که بیشتر مورد توجه‌اند بررسی می‌کنیم.

۱. جرمهای مساوی. وقتی ذرات برخوردکننده دارای جرمهای برابر باشند ($m_1 = m_2$)، روابط ۱۵ و ۱۶ به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آیند

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{و} \quad v_{2f} = v_{1i} \qquad (۱۷)$$

یعنی، ذرات سرعتهایشان را مبادله می‌کنند: سرعت نهایی یک ذره برابر است با سرعت اولیهٔ ذرهٔ دیگر.

۲. ذرهٔ هدف ساکن. حالت جالب توجه دیگر آن حالتی است که در آن ذرهٔ m_2 در ابتدا ساکن است. پس $v_{2i} = 0$ است و داریم

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \qquad (۱۸)$$

از ترکیب این مورد خاص با مورد قبلی معلوم می‌شود که در برخورد بین دو ذره با جرمهای مساوی که یکی از آنها در آغاز ساکن باشد، ذرهٔ اول "یکباره متوقف" می‌شود و ذرهٔ دوم با سرعت اولیه ذرهٔ اول "یکباره به‌راه می‌افتد". این اثر را اغلب در برخورد گویهای بیلیارد، اگر چرخان نباشند، می‌توانیم مشاهده کنیم.

۳. ذرهٔ هدف پرجرم. اگر $m_2 \gg m_1$ باشد، روابط ۱۵ و ۱۶ به‌صورتهای سادهٔ زیر درمی‌آیند

$$v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \quad \text{و} \quad v_{2f} \approx v_{2i} \qquad (۱۹)$$

وقتی ذرهٔ پرجرم به‌آرامی حرکت می‌کند یا ساکن است، داریم

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f} = 0 \qquad (۲۰)$$

این وقتی است که یک پرتابهٔ سبک با یک جسم ساکن خیلی پرجرم برخورد می‌کند، در این مورد سرعت جسم سبک "تقریباً معکوس" می‌شود و جسم پرجرم تقریباً ساکن می‌ماند. مثلاً، توپی که از ارتفاع h سقوط می‌کند پس از برخورد با زمین سرعتش معکوس می‌شود و از زمین باز می‌جهد و اگر برخورد کاملاً کشسان باشد و مقاومت هوا هم در کار نباشد، به همان ارتفاع h برمی‌گردد. حرکت الکترون [illegible] با یک اتم (نسبتاً پرجرم) وارونه می‌شود (از اتم

باز می‌جهد) در حالی که اتم هدف اساساً از برخورد تأثیر نمی‌پذیرد و برجا می‌ماند.

۴. پرتابهٔ پرجرم. وقتی $m_1 \gg m_2$ باشد، روابط ۱۵ و ۱۶ به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i} \qquad (۲۱)$$

ذرهٔ هدفِ کم‌جرم اگر در آغاز ساکن باشد (یا خیلی کندتر از m_1 حرکت کند)، پس از برخورد با سرعتی معادل دو برابر سرعت m_1 به حرکت درمی‌آید. ذرهٔ m_1 پس از برخورد به هدف (که خیلی سبکتر است) تقریباً بدون تغییر سرعت به حرکتش ادامه می‌دهد.

در پراکندگی ذرهٔ آلفا (شکل ۲)، ذرهٔ آلفا فرودی (که جرم آن تقریباً ۸۰۰۰ برابر جرم الکترون است) اساساً حرکتش در برخورد با الکترونهای اتمهای هدف، تغییر نمی‌کند (شاهدش تعداد زیاد ردهای مستقیم‌الخط در شکل ۲ است). ذرهٔ آلفا فقط در برخوردهای نادر با هستهٔ سنگین اتم هدف منحرف می‌شود.

برخوردهای ناکشسان

اکنون برخوردهای ناکشسان را، که در آنها بنابه تعریف انرژی جنبشی پایسته نیست و البته تکانهٔ کل همچنان پایسته است، بررسی می‌کنیم. اگرچه پایستگی انرژی کل هم معتبر است. ولی منظورکردن صورتهای دیگر انرژی، جز انرژی جنبشی، جملات دیگری به معادلهٔ ۱۱ می‌افزاید و تا نتوانیم تبدیلات انرژی (مثلاً اینکه چقدر انرژی داخلی به انرژی جنبشی تبدیل شده است) را دقیقاً مشخص کنیم، دستگاه معادلات قابل حل نخواهیم داشت.

در یک مورد خاص، یعنی در برخورد کاملاً ناکشسان، نتیجهٔ نهایی را می‌توانیم از مقادیر اولیه پیدا کنیم. در این مورد، ذرات پس از برخورد به هم می‌چسبند و با سرعت نهایی v_f به حرکت درمی‌آیند. به این ترتیب تنها یک مجهول داریم که معادلهٔ تکانه (معادلهٔ ۱۰) برای پیدا کردن آن کفایت می‌کند. اگر در این معادله به‌جای v_{1f} و v_{2f} سرعت مشترک v_f را قرار بدهیم نتیجه می‌شود

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) v_{2i} \qquad (۲۲)$$

وقتی جسم m_2 در ابتدا ساکن باشد، معادله بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۲۳)$$

سرعت جسم m_1 به نسبت $m_1/(m_1+m_2)$ کم می‌شود. هر چه m_1 بزرگتر باشد، مجموعه تندتر حرکت می‌کند؛ و هر چه m_1 کوچکتر باشد کندتر.

معادلهٔ ۲۲ را می‌توانیم به همین خوبی به‌صورت وارونه هم به‌کار ببریم: یعنی به این صورت که جسمی به جرم M که با سرعت v_f در حرکت است به دو پاره تقسیم می‌شود، یک پاره به جرم m_1 با سرعت v_{1i} حرکت می‌کند و پارهٔ دیگر به جرم $m_2(=M-m_1)$ با سرعت v_{2i} در خلاف جهت به حرکت درمی‌آید. این نتیجه، حتی اگر انفجار مقدار معتنابهی انرژی جنبشی به پاره‌ها بدهد، به همین صورت معتبر است. در حالت خاصی که $v_f = 0$ (جسم اولیه در حال سکون) باشد، داریم $v_{1i}/v_{2i} = -m_2/m_1$. یعنی، همان‌طورکه انتظار می‌رود و لازمهٔ صفر شدن تکانهٔ کل است، ذرهٔ سنگینتر سرعت کمتری دارد و دو ذره در جهتهای مخالف هم حرکت می‌کنند. در بخش ۱۰ـ۷ کاربرد این اصل را درمورد فرایندهای واپاشی خودبه‌خود بررسی خواهیم کرد.

مثال ۲. (الف) انرژی جنبشی یک نوترون (جرم m_1) در برخورد رو در روی کشسان با یک هستهٔ اتم (به جرم m_2) که در ابتدا ساکن است، با چه کسری کاهش می‌یابد؟ (ب) این کاهش نسبی انرژی نوترون را برای برخوردهای کشسان با هستهٔ سرب، هستهٔ کربن، و هستهٔ هیدروژن پیدا کنید. نسبت جرم هسته به جرم نوترون (m_2/m_1) برای سرب ۲۰۶، برای کربن ۱۲ و برای هیدروژن برابر با ۱ است.

حل: (الف) انرژی جنبشی اولیهٔ نوترون، K_i (که نانسبیتی فرض می‌شود) برابر است با $\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2$. انرژی جنبشی نهایی نوترون برابر است با $\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2$. کاهش نسبی در انرژی جنبشی عبارت است از

$$\frac{K_i-K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$

اما برای چنین برخوردی می‌دانیم (معادلهٔ ۱۸) که

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) v_{1i}$$

پس نتیجه می‌شود

$$\frac{K_i-K_f}{K_i} = 1 - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$$

(ب) در مورد سرب داریم $m_2 = 206m_1$ و

$$\frac{K_i-K_f}{K_i} = \frac{4m_1(206m_1)}{(207m_1)^2} = 0{,}02 = \%2$$

در مورد کربن $m_2 = 12m_1$ است، پس

$$\frac{K_i-K_f}{K_i} = \frac{4m_1(12m_1)}{(13m_1)^2} = 0{,}28 = \%28$$

و برای اتم هیدروژن داریم $m_2 = m_1$، یعنی

$$\frac{K_i-K_f}{K_i} = \frac{4m_1(m_1)}{(2m_1)^2} = 1 = \%100$$

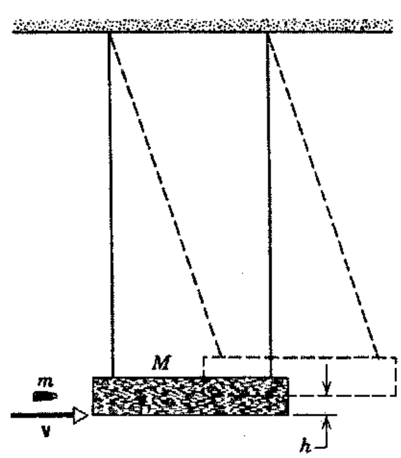
این نتایج نشان می‌دهند که چرا موادی مانند پارافین، که هیدروژن زیادی دارد، در کند کردن نوترونها بسیار مؤثرتر از مواد سنگینی نظیر

سرب هستند. توجه داشته باشید که برخوردها، آن‌طور که ما در این بخش فرض کردیم، همیشه هم "رودررو" نیستند. در برخوردهای "یکبری" که معمول‌تر است، اگرچه نوترون همهٔ انرژی‌اش را به هیدروژن ساکن نمی‌دهد، اما به هر حال درمواد هیدروژن‌دار انرژی بیشتری از دست می‌دهد تا در موادی نظیر کربن یا سرب.

از شکافت اورانیم در رآکتور هسته‌ای نوترونهایی با انرژی جنبشی نسبتاً زیاد، در محدودهٔ MeV، تولید می‌شود و برای ایجاد واکنش زنجیره‌ای، باید از این نوترونها برای شکافتهای دیگر استفاده کرد، ولی با افزایش انرژی جنبشی نوترون، احتمال وقوع شکافت سریعاً کاهش پیدا می‌کند. بنابراین لازم است که نوترونها را کند یا آرام کنیم تا انرژی آنها به محدودهٔ eV برسد، که در این محدوده احتمال وقوع شکافت تقریباً سه مرتبهٔ بزرگی بیشتر است. محاسبهٔ بالا، با آنکه مبتنی بر فرضهای ساده‌کننده است، نشان می‌دهد که مواد غنی از هیدروژن، مانند آب یا پارافین، "آرامساز"های مناسبتری هستند.

مثال ۳. آونگ بالیستیک (شکل ۱۱) ابزاری است که از آن، قبل از به میدان آمدن زمان‌سنجهای الکترونیکی، برای تعیین سرعت گلوله‌ها استفاده می‌شد. این وسیله تشکیل شده است از یک قطعه چوب بزرگ به جرم M، که با دو رشته ریسمان آویزان شده است. گلوله‌ای به جرم m به قطعه چوب شلیک می‌شود و سریعاً نسبت به آن به حال سکون درمی‌آید. مجموعهٔ قطعه چوب و گلوله به طرف بالا تاب می‌خورد، و مرکز جرم مجموعه، قبل از سکون لحظه‌ای، به اندازهٔ مسافت h در راستای قائم جابه‌جا می‌شود. فرض کنید جرم قطعه چوب $M = ۵٫۴\text{kg}$ و جرم گلوله $m = ۹٫۵\text{g}$ باشد. (الف) اگر قطعه چوب تا ارتفاع $h = ۶٫۳$ سانتی‌متر بالا برود، سرعت اولیه گلوله چقدر بوده است؟ (ب) انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله چقدر است؟ چه مقدار از این انرژی به‌صورت انرژی مکانیکی در آونگ باقی می‌ماند؟

حل: (الف) وقتی گلوله با آونگ برخورد می‌کند، از پایستگی تکانه



شکل۱۱. مثال ۳. آونگ بالیستیک، که برای اندازه‌گیری سرعت گلوله از آن استفاده می‌شود.

در راستای افقی داریم

$$mv = (M+m)V$$

که درآن v سرعت گلوله قبل از برخورد و V سرعت مجموعهٔ گلوله و قطعه چوب پس از برخورد است. انرژی مکانیکی در حین برخورد گلوله و قطعه چوب مطمئناً پایسته نیست، اما بعد از برخورد برای آونگی که تاب می‌خورد پایسته است. به این ترتیب انرژی جنبشی مجموعه، وقتی در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر قوسی‌اش واقع می‌شود، باید برابر با انرژی پتانسیل آن در بالاترین نقطهٔ این مسیر باشد، یعنی

$$\frac{۱}{۲}(M+m)V^{۲} = (M+m)gh$$

اگر V را از دو معادلهٔ بالا حذف کنیم نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{M+m}{m}\right)\sqrt{۲gh} \\ &= \left(\frac{۵٫۴\text{kg} + ۰٫۰۰۹۵\text{kg}}{۰٫۰۰۹۵\text{kg}}\right)\sqrt{(۲)(۹٫۸\text{m/s}^{۲})(۰٫۰۶۳\text{m})} \\ &= ۶۳۰\,\text{m/s} \end{aligned}$$

می‌توانیم آونگ بالیستیک را نوعی مبدل بدانیم که سرعت زیاد یک جسم سبک (گلوله) را به سرعت کم یک جسم سنگین (قطعه چوب) تبدیل می‌کند تا اندازه‌گیری آسانتر باشد.

(ب) انرژی جنبشی گلوله برابر است با

$$K_b = \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۱}{۲}(۰٫۰۰۹۵\text{kg})(۶۳۰\text{m/s})^{۲} = ۱۹۰۰\,\text{J}$$

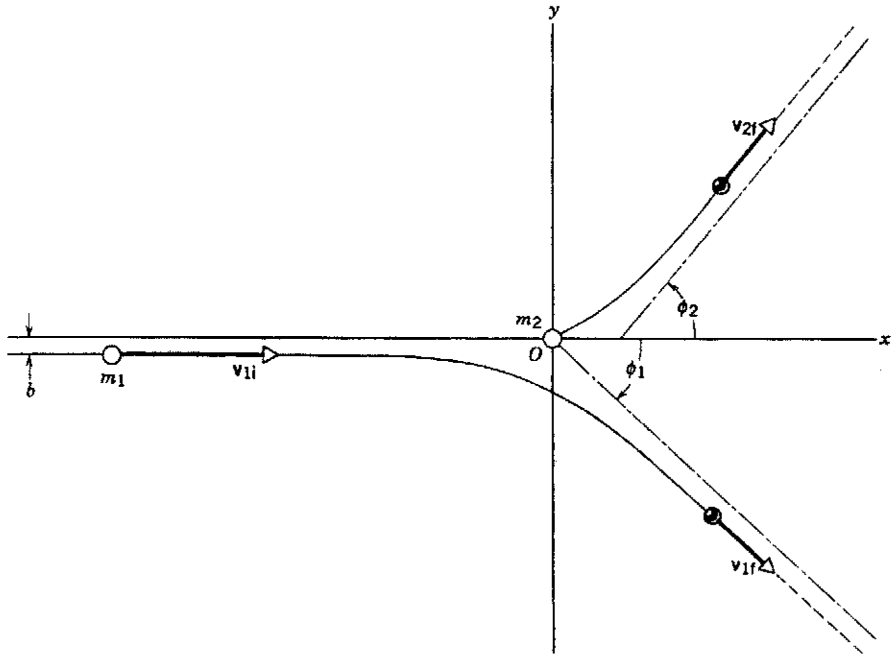
انرژی مکانیکی آونگ در حال تاب خوردن برابر است با انرژی پتانسیل آن در بالاترین نقطهٔ مسیر، یعنی

$$\begin{aligned} E &= (M+m)gh \\ &= (۵٫۴\text{kg} + ۰٫۰۰۹۵\text{kg})(۹٫۸\text{m/s}^{۲})(۰٫۰۶۳\text{m}) \\ &= ۳٫۳\text{J} \end{aligned}$$

به این‌ترتیب فقط ۱۹۰۰/۳٫۳ یا ۰٫۲٪ از انرژی جنبشی اولیه گلوله به انرژی مکانیکی آونگ تبدیل شده است. بقیهٔ انرژی در داخل قطعه چوب به‌صورت انرژی داخلی ذخیره می‌شود، یا به‌صورت گرما و امواج صوتی به محیط منتقل می‌شود.

۵ـ۱۰ برخورد در دوبعد

اگر دو ذره به‌صورتی غیر از رودررو با هم برخورد کنند، ممکن است در راستاهایی غیر از راستاهای اولیه‌شان به حرکت در بیایند. شکل ۱۲ چنین برخوردی را نشان می‌دهد. دستگاه مختصات را چنان اختیار می‌کنیم که مؤلفهٔ x داشته باشد، و محاسبات تا حدودی ساده‌تر



شکل۱۲. دو ذره با هم برخورد می‌کنند. مکان آنها قبل از برخورد با دایره‌های توخالی و بعد از برخورد با دایره‌های توپر نشان داده‌ایم. پارامتر برخورد، b، درواقع فاصلهٔ "بری بودن" از برخورد رودررروست.

شود. فرض کرده‌ایم که ذرهٔ هدف، m_2، در ابتدا ساکن است. فاصلهٔ b بین خط حرکت ذرهٔ فرودی و خطی که به موازات آن از مرکز m_2 می‌گذرد، پارامتر برخورد نامیده می‌شود. برخورد رودررو متناظر است با $b = 0$ و مقادیر بزرگتر b معرف برخوردهای یکبری‌تر (سبکتر)اند. شکل ۱۲ می‌تواند مثلاً نشاندهندهٔ برخورد دو هسته تحت تأثیرنیروی رانشی الکتروستاتیکی میان آنها باشد؛ نیرو به‌عکس مجذور فاصلهٔ بین دو هسته بستگی دارد، و برای برخورد لازم نیست که هسته‌ها واقعاً با هم تماس پیدا کنند. در فواصلی که به‌قدر کافی دور باشند، نیرو کوچک می‌شود و ذرات بی‌آنکه اساساً متأثر از نیرو باشند در امتداد خطهای راست حرکت می‌کنند.

صرفنظر از اینکه چه نیرویی بین ذرات اثر می‌کند، تکانه باید پایسته باشد. نیروی بین ذرات یک نیروی داخلی است، و نمی‌تواند تکانهٔ کل سیستم دو ذره‌ای را تغییر بدهد. به‌علاوه، چون تکانه بردار است، می‌دانیم که مؤلفه‌های x و y دو معادلهٔ مستقل اسکالر به‌دست می‌دهند. در راستای x، تکانهٔ اولیه برابر است با $m_1 v_{1i}$، و تکانهٔ نهایی کل برابراست با مجموع مؤلفه‌های x تکانه‌های نهایی دو ذره

$$p_{ix} = p_{fx}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\phi_1 + m_2 v_{2f} \cos\phi_2 \qquad (۲۴)$$

در اینجا جهتهای بردارهای $\mathbf{v}_{1f}$ و $\mathbf{v}_{2f}$ را به‌ترتیب با زاویه‌های ϕ_1 و ϕ_2 مشخص کرده‌ایم؛ پس در معادلهٔ ۲۴ کمیتهای v_{1f} و v_{2f} مقدار سرعتها را نشان می‌دهند و همواره مثبت‌اند. این با معادله‌های ۱۵ و ۱۶ یا معادلهٔ ۲۲، که در آنها با مؤلفهٔ بردار سرعت سروکار داشتیم که ممکن بود مثبت یا منفی باشند، فرق می‌کند.

مؤلفهٔ y تکانهٔ اولیه صفر است (البته به‌خاطر انتخاب مناسب محورهای مختصات) و مؤلفهٔ y تکانهٔ نهایی عبارت است از اختلاف بین مؤلفه‌های y تکانه‌های دو ذره (زاویه‌های ϕ_1 و ϕ_2 را در دو طرف محور xاند، بنابراین جمع مؤلفه‌های y تبدیل به تفاضل جبری می‌شود):

$$p_{iy} = p_{fy}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\phi_1 - m_2 v_{2f} \sin\phi_2 \qquad (۲۵)$$

اگر برخورد کشسان باشد، پایستگی انرژی برقرار است. از برابر قرار دادن انرژی جنبشی اولیه با انرژی جنبشی نهایی داریم

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad (۲۶)$$

اگر شرایط اولیه معلوم باشد (m_1, m_2 وَ v_{1i})، در معادله‌های ۲۴ تا ۲۶ چهار مجهول وجود دارد ($v_{1f}, v_{2f}, \phi_1, \phi_2$) ولی فقط سه معادله داریم که آنها را به هم مربوط می‌کند. برای چنین دستگاهی از معادلات چند مجهولی نامعین هیچ جواب منحصر به فردی وجود ندارد؛ یا در واقع بینهایت جواب وجود دارد. برای رسیدن به یک جواب واحد باید یک قید یا یک محدودیت دیگر به شرایط اولیه اضافه کنیم. مثلاً می‌توانیم انتخاب کنیم که ذرهٔ ۱ را تحت زاویهٔ مشخص ϕ_1 مشاهده کنیم (مثال ۴). چنین شرطی را که اعمال کردیم، می‌توانیم سه معادله را برای به‌دست آوردن سه مجهول باقی‌مانده حل کنیم.

مثال ۴. یک مولکول گاز که با سرعت $322\,\mathrm{m/s}$ در حرکت است به‌طور کشسان با مولکول دیگری با همان جرم که ساکن است برخورد می‌کند. بعد از برخورد، مولکول اول در راستایی که با امتداد سرعت اولیه‌اش زاویهٔ $30°$ می‌سازد، به حرکت درمی‌آید. سرعت هر یک از مولکولها را پس از برخورد و همچنین زاویهٔ راستای حرکت مولکول هدف با راستای حرکت مولکول فرودی را تعیین کنید.

حل: این مثال دقیقاً مربوط می‌شود به معادله‌های ۲۴ تا ۲۶، وقتی‌که $m_۱ = m_۲$، $v_{۱i} = ۳۲۲\mathrm{m/s}$ و $\phi_۱ = ۳۰°$ باشد. اگر $m_۱$ را برابر $m_۲$ بگیریم معادلات به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$v_{۱i} = v_{۱f}\cos\phi_۱ + v_{۲f}\cos\phi_۲ \qquad (۲۷)$$

$$v_{۱f}\sin\phi_۱ = v_{۲f}\sin\phi_۲ \qquad (۲۸)$$

و

$$v_{۱i}^۲ = v_{۱f}^۲ + v_{۲f}^۲ \qquad (۲۹)$$

حالا باید این معادله‌ها را برای به‌دست آوردن $v_{۱f}$، $v_{۲f}$ و $\phi_۲$ حل کنیم. برای انجام این کار ابتدا $\phi_۲$ را با مربع کردن معادلهٔ ۲۷ (که قبلاً آن‌را به صورت $v_{۱i} - v_{۱f}\cos\phi_۱ = v_{۲f}\cos\phi_۲$ نوشته‌ایم) و افزودن آن به مربع معادلهٔ ۲۸، حذف می‌کنیم. با توجه به اینکه $\sin^۲\phi_۲ + \cos^۲\phi_۲ = ۱$ است، داریم

$$v_{۱i}^۲ + v_{۱f}^۲ - ۲v_{۱i}v_{۱f}\cos\phi_۱ = v_{۲f}^۲$$

از ترکیب این رابطه با معادلهٔ ۲۹ (مشروط بر اینکه $v_{۱f} \neq ۰$ باشد) به‌دست می‌آوریم

$$v_{۱f} = v_{۱i}\cos\phi_۱ = (۳۲۲\mathrm{m/s})(\cos ۳۰°) = ۲۷۹\mathrm{m/s}$$

از معادلهٔ ۲۹ نتیجه می‌شود که

$$v_{۲f}^۲ = v_{۱i}^۲ - v_{۱f}^۲ = (۳۲۲\mathrm{m/s})^۲ - (۲۷۹\mathrm{m/s})^۲$$

یا

$$v_{۲f} = ۱۶۱\mathrm{m/s}$$

سرانجام، از معادلهٔ ۲۸ داریم

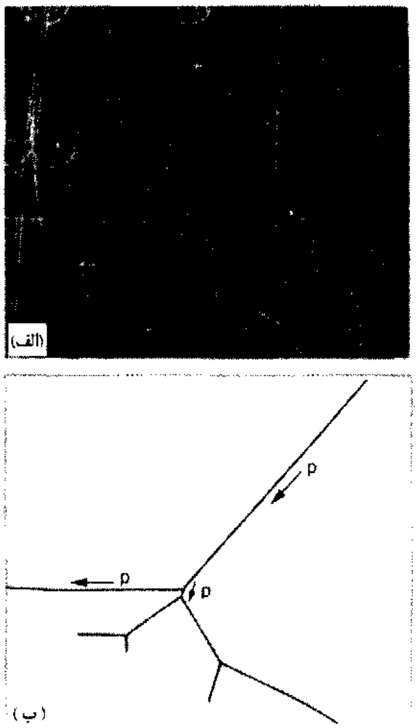
$$\sin\phi_۲ = \frac{v_{۱f}}{v_{۲f}}\sin\phi_۱ = \frac{۲۷۹\mathrm{m/s}}{۱۶۱\mathrm{m/s}}\sin ۳۰° = ۰{,}۸۶۶$$

یا

$$\phi_۲ = ۶۰°$$

دو مولکول در راستاهای متعامد از همدیگر دور می‌شوند (در شکل ۱۲ داریم $\phi_۱ + \phi_۲ = ۹۰°$).

باید بتوانید نشان بدهید که در برخورد کشسان بین دو ذره با جرمهای مساوی، که یکی از آنها در ابتدا ساکن است، امتدادهای حرکت ذرات خروجی همیشه با هم زاویهٔ قائمه می‌سازند. شکل ۱۳ رشته‌ای از چهار برخورد کشسان پیاپی بین پروتونها را نشان می‌دهد.



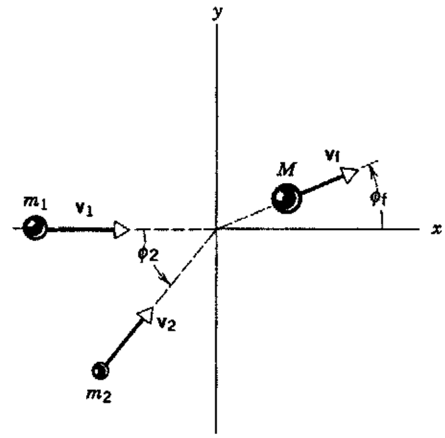
شکل ۱۳. (الف) چهار برخورد پروتون-پروتون در یک اتاقک حباب. (ب) نمایش نموداری مسیرهای پروتونهای برخوردکننده. پروتون اصلی از قسمت بالا سمت راست وارد اتاقک می‌شود. همهٔ ردها در صفحهٔ تصویر قرار ندارند، و مشاهدهٔ استریوسکوپیکی نشان می‌دهد که، طبق انتظار، زاویهٔ بین ذرهٔ فرودی و ذرهٔ هدف پس از هر برخورد ۹۰° است. سایر ردهای موجود در تصویر ناشی از مزونها (انحنای جزئی) و الکترونها (حلزونیهای درهم فشرده) هستند.

این برخوردها وقتی روی می‌دهند که یک پروتون پرانرژی وارد اتاقک حبابی می‌شود که پر از هیدروژن مایع است. مولکولهای هیدروژن مایع نقش پروتونهای هدف را دارند. مسیر ذرات به‌وسیلهٔ رد حبابهای به‌جا مانده از آنها قابل مشاهده می‌شود. چون جرم ذرات برهم‌کنش کننده یکسان است و برخوردها هم کشسان‌اند، ذرات خروجی با هم زاویهٔ قائمه می‌سازند؛ مسیرهای شکل ۱۳ با روش استریوسکوپیک [برجسته نمایی] به‌خوبی آشکار می‌شوند. نمونهٔ دیگری از این دست در شکل ۲ آمده است.

برخوردهای ناکشسان در دوبعد

در برخورد ناکشسان، دیگر معادلهٔ ۲۶ معتبر نیست. معمولاً می‌توانیم این معادله را با عبارت معادلی جایگزین کنیم که انرژی تبدیل شده به انرژی جنبشی یا انرژی جنبشی تبدیل شده به‌صورتهای دیگر را منظور کند و در نتیجه رابطه‌ای بین انرژی جنبشی اولیه و انرژی جنبشی نهایی به‌دست بدهد.

در برخورد کاملاً ناکشسان در دوبعد باید با دو جسم درحال حرکت آغاز شود. (چرا؟) باز هم دستگاه مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که راستای حرکت یکی از ذرات محور x را تعریف کند و



شکل۱۴. یک برخورد کاملاً ناکشسان در دوبعد. ذراتی با جرمهای $m_۱$ و $m_۲$ با هم برخورد می‌کنند و تبدیل به جسم مرکبی به جرم M می‌شوند.

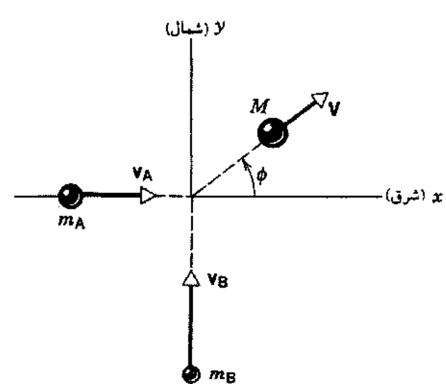
برخورد را چنان تنظیم می‌کنیم که دو ذره در مبدأ به هم برسند و با هم یکی شوند. در این‌صورت جسم مرکب با سرعت $\mathbf{v}_f$ در راستای ϕ_f حرکت می‌کند (شکل ۱۴). پایستگی تکانه برای مؤلفه‌های x و y نتایج زیر را به‌دست می‌دهد

$$m_۱ v_۱ + m_۲ v_۲ \cos\phi_۲ = M v_f \cos\phi_f \quad :x \text{ مؤلفهٔ } \quad (۳۰)$$

$$m_۲ v_۲ \sin\phi_۲ = M v_f \sin\phi_f \quad :y \text{ مؤلفهٔ } \quad (۳۱)$$

که در آن $M = m_۱ + m_۲$ جرم کل مجموعه پس از برخورد است. چون پس از برخورد، فقط یک سرعت (مقدار و جهت) برای جسم مرکب داریم، چهار مجهول مورد مربوط به برخورد کشسان به دو مجهول، v_f و ϕ_f، کاهش می‌یابد و فقط دو معادله (معادله‌های ۳۰ و ۳۱) برای به‌دست آوردن یک جواب یکتا کافی است.

مثال ۵. دو اسکیت‌باز یک برخورد کاملاً ناکشسان انجام می‌دهند. یعنی پس از برخورد، دست در دست هم حرکت می‌کنند (شکل ۱۵). در ابتدا یکی از آنها به جرم $m_A = ۸۳\text{kg}$ با سرعت $v_A = ۶٫۴\text{km/h}$



شکل۱۵. مثال ۵. دو اسکیت‌باز (A و B) برخوردی کاملاً ناکشسان انجام می‌دهند و پس از برخورد در راستای مشخص شده با ϕ به حرکت در می‌آیند.

به‌سمت شرق، و دیگری که جرمش $m_B = ۵۵\text{kg}$ است با سرعت $v_B = ۸٫۸\text{km/h}$ به‌سمت شمال حرکت می‌کند. (الف) سرعت مشترک آنها پس از برخورد، $\mathbf{V}$، چقدر است؟ (ب) تغییر نسبی در انرژی جنبشی اسکیت‌بازان در اثر برخورد چقدر است؟

حل: (الف) تکانه در طی برخورد پایسته است. برای دو مؤلفه تکانه می‌توانیم روابط زیر را بنویسیم

$$m_A v_A = MV\cos\phi \quad :x \text{ مؤلفهٔ } \quad (۳۲)$$

$$m_B v_B = MV\sin\phi \quad :y \text{ مؤلفهٔ } \quad (۳۳)$$

که در آن $M = m_A + m_B$ است. از تقسیم معادلهٔ ۳۳ بر معادلهٔ ۳۲ نتیجه می‌شود

$$\tan\phi = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(۵۵\text{kg})(۸٫۸\text{km/h})}{(۸۳\text{kg})(۶٫۴\text{km/h})} = ۰٫۹۱۱$$

یا

$$\phi = \tan^{-۱} ۰٫۹۱۱ = ۴۲٫۳^\circ$$

از معادلهٔ ۳۳ نتیجه می‌گیریم که

$$V = \frac{m_B v_B}{M\sin\phi} = \frac{(۵۵\text{kg})(۸٫۸\text{km/h})}{(۸۳\text{kg} + ۵۵\text{kg})(\sin ۴۲٫۳^\circ)} = ۵٫۲۱\text{km/h}$$

(ب) انرژی جنبشی اولیه عبارت است از

$$K_i = \frac{۱}{۲} m_A v_A^۲ + \frac{۱}{۲} m_B v_B^۲ = \frac{۱}{۲}(۸۳\text{kg})(۶٫۴\text{km/h})^۲ + \frac{۱}{۲}(۵۵\text{kg})(۸٫۸\text{km/h})^۲ = ۳۸۳۰\,\text{kg km}^۲/\text{h}^۲$$

انرژی جنبشی نهایی برابر است با

$$K_f = \frac{۱}{۲} MV^۲ = \frac{۱}{۲}(۸۳\text{kg} + ۵۵\text{kg})(۵٫۲۱\text{km/h})^۲ = ۱۸۷۰\,\text{kg km}^۲/\text{h}^۲$$

آن کسری از انرژی که در جستجویش هستیم این است

$$f = \frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{۱۸۷۰\,\text{kg km}^۲/\text{h}^۲ - ۳۸۳۰\,\text{kg km}^۲/\text{h}^۲}{۳۸۳۰\,\text{kg km}^۲/\text{h}^۲} = -۰٫۵۱$$

یعنی ۵۱٪ از انرژی جنبشی اولیه در برخورد به هدر رفته است. این انرژی باید به هر حال به‌صورت انرژی داخلی دو اسکیت‌باز هدر شده باشد.

۱۰ـ۶ چارچوب مرجع مرکز جرم

در عمل، وقتی آزمایشهای برخورد انجام می‌شوند، اندازه‌گیریها به‌طور عادی در چارچوب مرجعی که در آزمایشگاه ساکن است (چارچوب آزمایشگاه) صورت می‌گیرند. این نوع آزمایشها در اغلب موارد شامل پرتابه‌ای است که به‌سوی هدفی ساکن در آزمایشگاه پرتاب می‌شود. از طرف دیگر، در اکثر آزمایشهای مربوط به فیزیک ذرات، دو ذره با جرم و سرعت یکسان (دو پروتون یا شاید دو الکترون) مستقیماً به‌سوی یکدیگر شلیک می‌شوند. صرفنظر از چگونگی انجام آزمایش، بررسی و تحلیل برخورد در چارچوب مرجعی که به مرکز جرم ذرات برخوردکننده متصل باشد (چارچوب مرکز جرم) عموماً ساده‌تر است، و درک فیزیکی روشنتری فراهم می‌کند.

مثلاً، مورد سادهٔ برخورد کشسان یک‌بعدی (رودررو) بین دو ذرهٔ یکسان را در نظر بگیرید. اگر یکی از ذرات (هدف) در چارچوب آزمایشگاه ثابت باشد، ذرهٔ دیگر (ذرهٔ فرودی که در ابتدا با سرعت v در حرکت است) پس از برخورد متوقف می‌شود و ذرهٔ هدف با سرعت v به‌سمت جلو به حرکت درمی‌آید. اما در چارچوب مرجع مرکز جرم، دو ذره قبل از برخورد هر یک با سرعت $v/2$ به طرف همدیگر حرکت می‌کنند و پس از برخورد هم با همان سرعت از هم دور می‌شوند. دیگر بین پرتابه و هدف وجه تمایزی وجود ندارد و توصیف رویداد در این چارچوب کاملاً متقارن است.

در شکل ۱۶الف یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" از یک برخورد کشسان بین یک ذرهٔ متحرک به جرم m_1 و یک ذرهٔ ساکن به جرم $m_2 = 3m_1$ را نشان داده‌ایم. چون در حین برخورد فقط نیروهای داخلی مؤثرند، همان‌طور که در شکل ۱۶الف می‌بینیم، حرکت مرکز جرم در اثر برخورد تغییر نمی‌کند. مرکز جرم دو جسم m_1 و m_2، که با معادلهٔ ۴ فصل ۹ تعریف می‌شود، قبل و بعد از برخورد با همان سرعت ثابت v_{cm} حرکت می‌کند.

سرعت مرکز جرم از معادلهٔ ۵ فصل ۹ به‌دست می‌آید

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۴)$$

که در این مورد $v_{2i} = 0$ بوده است. اکنون می‌خواهیم نمودار همین برخورد را از دیدگاه چارچوب مرجع متحرکی که نسبت به آزمایشگاه با سرعت v_{cm} در حرکت است رسم کنیم. این چارچوب همان چارچوب مرجع مرکز جرم است. سرعتهای اجسام m_1 و m_2 در این چارچوب را می‌توانیم از معادلهٔ ۴۳ بخش ۴ـ۶ (مربوط به تبدیلات سرعت بین چارچوبهای مرجع) به‌دست بیاوریم

$$v = v' + u \qquad (۳۵)$$

که در آن v سرعت اندازه‌گیری شده در چارچوب آزمایشگاه، v' سرعت اندازه‌گیری شده در چارچوب متحرک نسبت به آزمایشگاه، و u سرعت نسبی دو چارچوب مرجع است. در مورد مسئله‌ای که در دست بررسی داریم، چارچوب متحرک همان چارچوب مرکز جرم و $u = v_{cm}$ است.

حالا می‌توانیم سرعتهای اولیهٔ جسمهای m_1 و m_2 را در چارچوب متحرک تعیین کنیم

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm} = v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۶)$$

$$v'_{2i} = v_{2i} - v_{cm} = 0 - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} = -\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۷)$$

سرعتهای نهایی اجسام در چارچوب آزمایشگاه را هم (که در معادلهٔ ۱۸ آمده است) می‌توانیم به سرعتهای نظیر درچارچوب مرکز جرم تبدیل کنیم

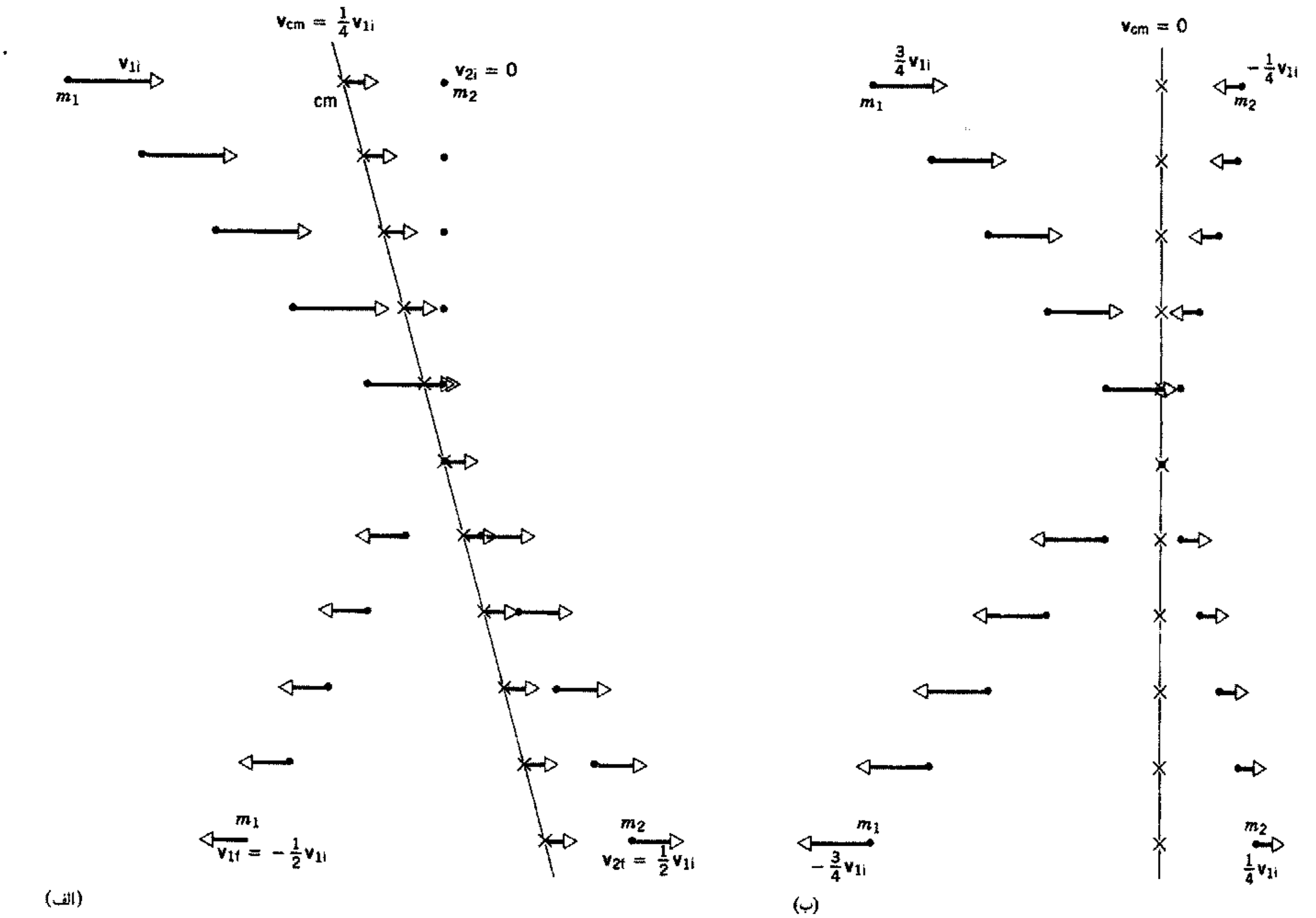
$$v'_{1f} = v_{1f} - v_{cm} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} = -\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۸)$$

$$v'_{2f} = v_{2f} - v_{cm} = \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{1i} \qquad (۳۹)$$

به تقارن این نتایج توجه کنید. در چارچوب مرکز جرم، دربرخورد فقط جهت سرعت جسمهای m_1 و m_2 وارونه می‌شود، به‌این ترتیب که سرعت جسم m_1 از $+m_2v_{1i}/(m_1+m_2)$ به $-m_2v_{1i}/(m_1+m_2)$ تغییر می‌کند و سرعت جسم m_2 از $-m_1v_{1i}/(m_1+m_2)$ به $+m_1v_{1i}/(m_1+m_2)$ تبدیل می‌شود. یک رشته تصویرهای لحظه‌ای برخورد در چارچوب مرجع مرکز جرم در شکل ۱۶ب نشان داده شده است. در این چارچوب مرجع خاص، حرکت هر ذره شبیه به حرکت توپی است که از یک سطح سخت بازمی‌جهد، ذرهٔ دیگر در آنجا حضور دارد تا ضربهٔ لازم برای وارونی حرکت را تأمین کند. این هم روشن است که در این چارچوب مرجع، انرژی جنبشی کل در حین برخورد ثابت می‌ماند. (در واقع، جداگانه برای هر یک از ذره‌ها ثابت می‌ماند.) با مشاهدهٔ برخورد از این دیدگاه، درک تازه‌ای از مفهوم برخورد "کشسان" پیدا می‌کنیم.

اکنون یک برخورد کاملاً ناکشسان یک‌بعدی را از دیدگاه چارچوب مرکز جرم بررسی می‌کنیم. باز هم فرض می‌کنیم جسم m_1 بر جسم m_2 (یعنی $3m_1$) که در چارچوب آزمایشگاه ساکن است فرود می‌آید. پس از برخورد جسم مرکبی به جرم $M = m_1 + m_2$ داریم. سرعت مرکز جرم باز هم از معادلهٔ ۳۴ به‌دست می‌آید. تصویرهای لحظه‌ای در شکل ۱۷الف برخورد را در چارچوب آزمایشگاه نشان می‌دهد؛ اینجا هم مرکز جرم قبل و بعد از برخورد با سرعت یکسانی حرکت می‌کند.

تبدیل سرعتهای اولیهٔ جسمهای m_1 و m_2 دقیقاً مانند مورد قبلی است و طبق معادله‌های ۳۶ و ۳۷ انجام می‌شود. سرعت نهایی



شکل۱۶. یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" مربوط به دو ذره با جرمهای m_1 و $m_2 = 3m_1$ که به‌طور کشسان در یک‌بعد با هم برخورد می‌کنند. مرکز جرم دو ذره با علامت × مشخص شده است. (الف) چارچوب مرجع آزمایشگاه. (ب) چارچوب مرجع مرکز جرم.

جسم M در چارچوب مرکز جرم را می‌توان از تبدیل نتیجهٔ کلی v_f در چارچوب آزمایشگاه، معادلهٔ ۲۳، به‌دست آورد

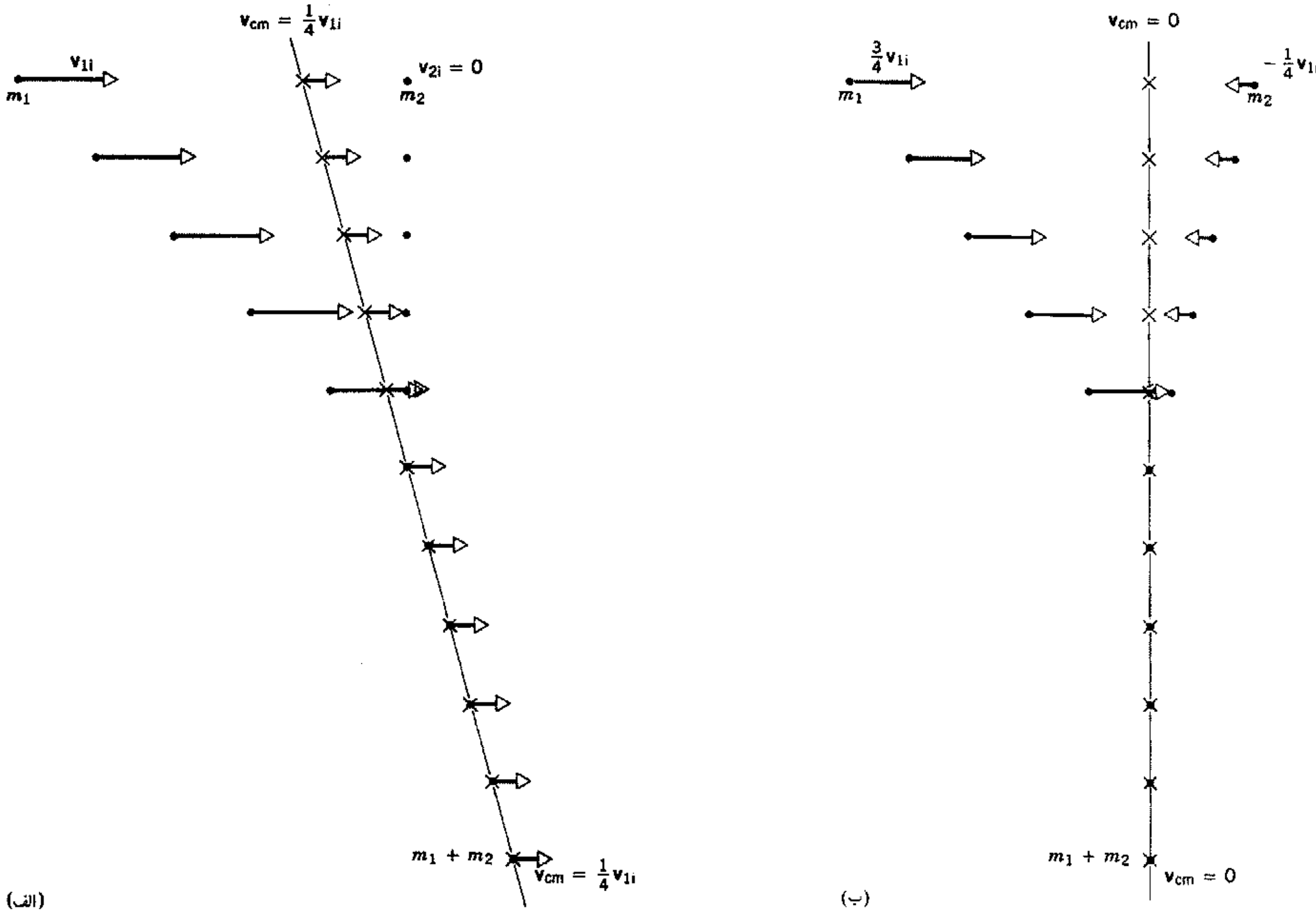
$$v_f' = v_f - v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} = 0$$

البته این نتیجه همان است که انتظار می‌رود و نباید عجیب باشد. جسم مرکب M همواره در مرکز جرم واقع می‌شود، زیرا شامل تمام جرم موجود در سیستم بعد از برخورد است. در چارچوب آزمایشگاه، M باید با سرعت مرکز جرم حرکت کند، و چنانچه معادله‌های ۲۳ و ۳۴ را مقایسه کنید می‌بینید که واقعاً با همین سرعت حرکت می‌کند. در چارچوب مرجعی که در آن مرکز جرم ساکن است، M هم باید در حال سکون باشد.

در چارچوب مرکز جرم (شکل ۱۷ب) باز هم تقارن وجود دارد: قبل از برخورد، اجسام m_1 و m_2 با تکانه‌های مساوی ولی در خلاف جهت به همدیگر نزدیک می‌شوند. پس از آنکه به هم برخوردند و با هم ترکیب شدند، تکانهٔ جسم مرکب باید صفر شود.

برخورد کاملاً ناکشسان در چارچوب مرجع مرکز جرم خاصیت جالب دیگری هم دارد. در چارچوب آزمایشگاه، انرژی جنبشی از دست رفته (یعنی تبدیل شده به انرژی داخلی، انرژی تغییر شکل و مانند اینها) همواره کمتر از ۱۰۰٪ است؛ مثلاً، در برخورد بین دو ذرهٔ هم‌جرم، که در ابتدا یکی از آنها ساکن است، اتلاف انرژی جنبشی ۵۰٪ است. در چارچوب مرکز جرم اتلاف همیشه ۱۰۰٪ است، و فرقی هم نمی‌کند که m_1 و m_2 چه مقادیری داشته باشند. وقتی منظور از برخورد دادن ذرات تبدیل انرژی جنبشی به‌صورتهای دیگر انرژی باشد، صرفه در آن است که نه تنها نتایج را در چارچوب مرکز جرم تحلیل کنیم بلکه آزمایش را هم واقعاً در آن چارچوب انجام بدهیم.

در مطالعهٔ خواص ذرات بنیادی طبیعت، اغلب منظورمان این است که ذرات پر انرژی را به هم بکوبیم تا ذرات جدید و غریبی با جرمهای بیشتر تولید کنیم؛ در این مورد، انرژی جنبشی در طی برخورد به انرژی سکون، mc^2، ذرات دیگر تبدیل می‌شود. انرژی قابل حصول

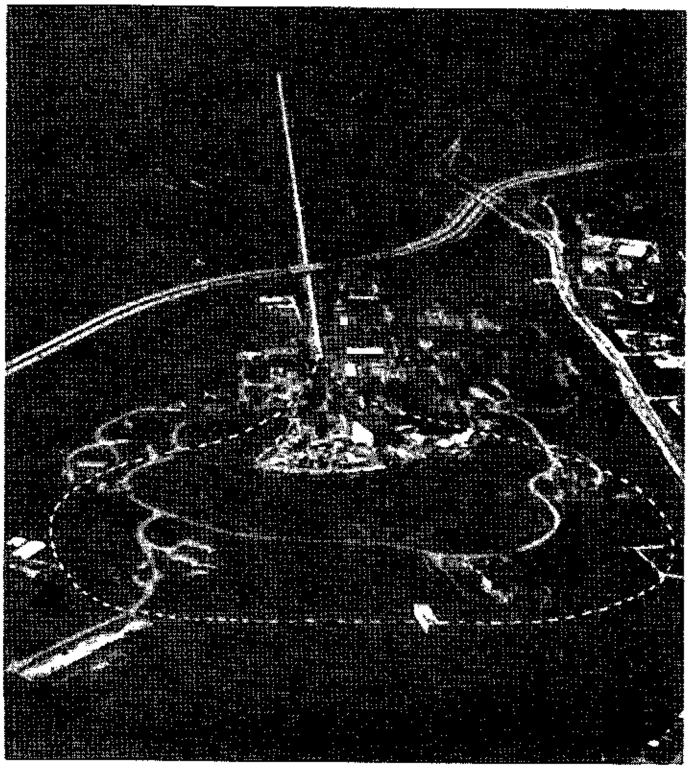


شکل۱۷. یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" دو ذره با جرمهای m_1 و $m_2 = 3m_1$ که به‌طورکاملاً ناکشسان در یک‌بعد با هم برخورد می‌کنند. (الف) چارچوب مرجع آزمایشگاه. (ب) چارچوب مرجع مرکز جرم.

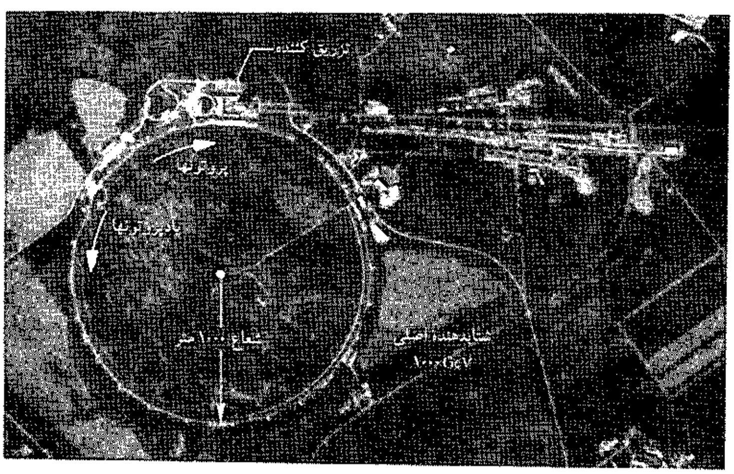
برای ایجاد ذرات جدید درست برابر با انرژی جنبشی "اتلافی" در برخورد ناکشسان است؛ در حوزهٔ این برخوردهای پرانرژی، جایی‌که باید از معادلات سینماتیک نسبیتی استفاده کرد، درمی‌یابیم که درچارچوب آزمایشگاه برای تولید ذرات جدید، انرژی جنبشی اولیهٔ مورد نیاز به‌صورت مربع انرژی سکون ذره‌ای که می‌خواهیم تولید کنیم افزایش می‌یابد. یعنی، برای تولید ذره‌ای که انرژی سکون آن ۱۰ برابر باشد نیاز به انرژی جنبشی ۱۰۰ برابر داریم و بنابراین به شتابگری نیاز داریم که ۱۰۰ برابر بزرگتر و پرهزینه‌تر است. ولی، اگر می‌توانستیم برخورد را درچارچوب مرکز جرم انجام بدهیم، در آن صورت می‌شد ذراتی با ۱۰ برابر انرژی سکون فقط با ۱۰ برابر (و نه ۱۰۰ برابر) انرژی جنبشی تولید کرد، زیرا کارایی این برخوردها در تبدیل انرژی جنبشی ۱۰۰٪ است.

نسل فعلی شتابدهنده‌های ذرات شامل نمونه‌های بسیاری از این‌گونه وسایل برخورددهندهٔ باریکه است. در مرکز شتابدهندهٔ خطی استانفورد (SLAC) در کالیفرنیا، باریکه‌های الکترون و پوزیترون (پادالکترون) هر یک با انرژی ۵۰GeV برخورد داده می‌شوند (شکل ۱۸). در آزمایشگاه شتابدهندهٔ فرمی (FNAL) در ایلینویز، باریکه‌های پروتون و پادپروتون با انرژی ۱۰۰۰GeV (۱TeV) در حلقهٔ واحدی در جهتهای مخالف می‌چرخند و در هر دور یک‌بار به هم می‌خورند (شکل ۱۹). البته، واکنشی که انجام می‌شود در هر دو چارچوبهای مرجع یکسان است؛ فقط تعبیر نتایج است که فرق می‌کند.

تا اینجا در چارچوب مرکز جرم فقط برخوردهای یک‌بعدی را مطالعه کرده‌ایم. برخورد کشسان دوبعدی هم از دیدگاه چارچوب مرجع مرکز جرم ساختار متقارن‌تری دارد. باز هم فرض می‌کنیم که جسم m_2 در ابتدا نسبت به چارچوب آزمایشگاه ساکن باشد. در اینجا به محاسبات ریاضی مربوط به برخورد دوبعدی در چارچوب مرکز جرم (که کمی پیچیده‌تر از حالت یک‌بعدی است) نمی‌پردازیم؛ فقط یک توصیف نموداری از آن را در شکل ۲۰ ارائه می‌کنیم. مانند مورد یک‌بعدی، در این برخورد هم صرفاً سرعت هر ذره معکوس می‌شود. تنها تفاوت در این است که در اینجا دو ذره پس از برخورد در امتداد خطی حرکت می‌کنند که در حالت کلی با راستای اولیهٔ حرکت فرق می‌کند. تقارن ایجاب می‌کند که زاویه‌های بین سرعتهای نهایی و سرعتهای اولیهٔ دو ذره با هم مساوی باشند؛ البته وقتی سرعتها را



شکل۱۸. شتابدهندهٔ الکترون، مرکز شتابدهندهٔ خطی استانفورد، به طول ۲٫۳ کیلومتر. الکترونها و پوزیترونها در قسمت مستقیم شتابدهنده شتاب می‌گیرند، و پس از طی مسیرهای زیرزمینی، که با خط‌چین نشان داده شده است، در آزمایشگاهی که در پایین عکس است به هم برخورد می‌کنند.

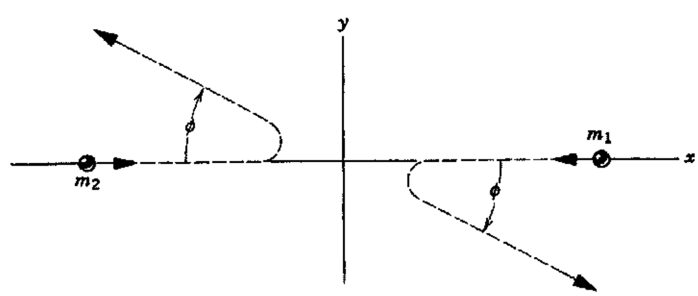


شکل۱۹. آزمایشگاه شتابدهندهٔ ملی فرمی. پروتونها و پادپروتونها از حلقهٔ کوچکی در بالای عکس به داخل حلقهٔ بزرگ (به شعاع یک کیلومتر) تزریق می‌شوند. این ذرات در جهتهای مخالف به چرخش در می‌آیند و در هر دور یکبار با هم برخورد می‌کنند.

به چارچوب آزمایشگاه بازگردانیم، در حالت کلی زاویه‌های نامساوی ϕ_1 و ϕ_2 شکل ۱۲ به‌دست می‌آیند.

۷ـ۱۰ فرایندهای واپاشی خودبه‌خودی (اختیاری)

از بیش از ۲۰۰۰ گونه از هسته‌های اتمی‌ای که تاکنون شناسایی شده‌اند، بیشترشان ناپایدارند و ــ دیر یا زود ــ همه یا بخشی از انرژی اضافی‌شان را با شکافتن به دو یا چند پاره از دست می‌دهند. میانگین عمر چنین فرایندهای واپاشی پرتوزایی از چندین میلیارد سال (مثلاً، برای ^{238}U) تا کسرهای بسیار کوچکی از ثانیه تغییر می‌کند. تمام این واپاشیها خودبه‌خود روی می‌دهند. در یک نمونهٔ معین از یک مادهٔ



شکل۲۰. یک برخورد کشسان دوبعدی در چارچوب مرکز جرم. در این چارچوب ذرات باید در جهتهای مخالف همدیگر حرکت کنند، بنابراین هر دو، پس از برخورد، تحت زاویهٔ یکسانی منحرف می‌شوند.

پرتوزا که شامل تعداد زیادی (شاید 10^{20}) هسته است می‌توانیم دقیقاً تخمین بزنیم که در یک بازهٔ زمانی معلوم چند تا از هسته‌ها وامی‌پاشند، اما هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم پیش‌بینی کنیم کدام هسته واخواهد پاشید.

اتمها، مثلاً اتمهایی که گاز داخل لامپهای مهتابی را تشکیل می‌دهند، ممکن است در حالتی با انرژی اضافی واقع شده باشند و با گسیل (باز هم خودبه‌خودی، برای یک اتم منزوی) یک کوانتوم تابش به ساختار پایدار بازگردند. ذرات بنیادی‌ای که از برخوردهای پروتون-پروتون در شتابدهنده‌های پرانرژی تولید می‌شوند نیز ممکن است خودبه‌خود واپپاشند و به ذرات دیگر تبدیل شوند (شکل ۴). واپاشی خودبه‌خودی بعضی از این ذرات چنان سریع روی می‌دهد (مثلاً، برای ذرهٔ J/ψ در حدود 10^{-20} ثانیه) که تنها شاهدی که برای وجود آنها داریم عبارت از مشاهدهٔ محصولات واپاشی تحت شرایط مساعد برای ایجاد آن ذرات است.

در این بخش دربارهٔ واپاشیهای خودبه‌خودی از نوع

$$A \to B + C$$

که در آن A ذرهٔ واپاشنده و B و C محصولات واپاشی هستند، گفتگو می‌کنیم. معمولاً این رویداد را در آزمایشگاه از چارچوبی مشاهده می‌کنیم که در آن A در حال سکون است. بنابراین واپاشی $A \to B + C$ درست وارونهٔ برخورد کاملاً ناکشسان $B + C \to A$ است که از چارچوب مرجع مرکز جرم مشاهده شده باشد (شکل ۱۷ب). در واقع، اگر در شکل ۱۷ب زمان را به عقب برگردانیم، یعنی اطلاعات روی شکل را از پایین به بالا بخوانیم و جهت بردارهای سرعت را برعکس کنیم، تصویر ذهنی خوبی از فرایند واپاشی به‌دست می‌آوریم.

در برخورد کاملاً ناکشسان، انرژی جنبشی ذرات برخوردکننده در طی برخورد "گم" می‌شود. البته، انرژی کل باید پایسته باشد و بنابراین، انرژی جنبشی "گم" شده باید در سیستم مرکب به‌صورت دیگری ظاهر شود، که آن را به‌صورت افزایش انرژی سکون جسم مرکب مشاهده می‌کنیم (رجوع کنید به بخش ۸-۷). در فرایند واپاشی، معکوس این رویداد صورت می‌گیرد: انرژی سکون A به انرژی جنبشی B و C تبدیل می‌شود. پس در فرایند واپاشی، پایستگی انرژی را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$E_A = E_B + E_C$$
$$m_Ac^2 + K_A = (M_Bc^2 + K_B) + (m_Cc^2 + K_C) \qquad (40)$$

در اینجا انرژی کل هر ذره به‌صورت مجموع انرژی سکون mc^2 و انرژی جنبشی K آمده است. معادلهٔ ۴۰ را به کلی‌ترین صورت نوشته‌ایم و این را هم در نظر گرفته‌ایم که ذره A به هنگام واپاشی ممکن است دارای انرژی جنبشی K_A باشد، ولی معمولاً مواردی را بررسی می‌کنیم که در آنها $K_A = 0$ است.

معادلهٔ ۴۰ را می‌توانیم با گردآوردن جملات انرژی سکون در یک طرف و جملات انرژی جنبشی در طرف دیگر، به‌صورت زیر بنویسیم

$$m_Ac^2 - m_Bc^2 - m_Cc^2 = K_B + K_C - K_A \qquad (41)$$

انرژی آزاد شده در واپاشی، Q، را به‌صورت تفاوت میان انرژی سکون اولیه m_ic^2 و انرژی سکون نهایی m_fc^2 تعریف می‌کنیم:

$$Q = m_ic^2 - m_fc^2 \qquad (42)$$

که برای واپاشی مورد مطالعه چنین می‌شود

$$Q = (m_A - m_B - m_C)c^2 \qquad (43)$$

یا، با استفاده از معادلهٔ ۴۱

$$Q = K_B + K_C - K_A \qquad (44)$$

یعنی، Q برابر است با انرژی جنبشی خالصی که محصولات واپاشی، کسب می‌کنند. در صورتی‌که A از حال سکون واپپاشد، Q برابر است با انرژی جنبشی کل محصولات واپاشی.

در فرایند واپاشی تکانهٔ خطی باید پایسته باشد. اگر A در حال سکون باشد، باشد، تکانهٔ اولیه کل صفر است، و در نتیجه تکانهٔ نهایی هم باید صفر باشد

$$p_i = p_f$$
$$0 = p_B - p_C \qquad (45)$$

معادله‌های ۴۴ (با $K_A = 0$) و ۴۵ دو معادله با دو مجهول‌اند که می‌توان آنها را برای انرژیها یا تکانه‌های محصولات واپاشی B و C حل کرد. حاصل حل این معادلات، وقتی انرژی سکون هیچ‌یک از ذرات B و C صفر نباشد، عبارت است از

$$K_B = Q\frac{m_C}{m_B + m_C} \qquad (46)$$

$$K_C = Q\frac{m_B}{m_B + m_C} \qquad (47)$$

در بسیاری از فرایندهای واپاشی که در آزمایشگاه بررسی می‌شوند، یکی از محصولات، مثلاً B، انرژی سکون بسیار کمتری از دیگری دارد، یعنی $m_B \ll m_C$ است. مثلاً B ممکن است یک الکترون (با انرژی سکون ۰٫۵۱۱MeV) یا یک ذرهٔ آلفا (با انرژی سکون ۳۷۲۷MeV) باشد، در حالی‌که C ممکن است یک اتم یا هستهٔ سنگین (نوعاً، با انرژی سکون 10^5MeV) باشد. اغلب این ذرهٔ سبکتر است که باید در آزمایش مشاهده شود. در چنین صورتی، همان‌طورکه معادلات ۴۶ و ۴۷ نشان می‌دهند، $K_B \approx Q$ و $K_C \ll K_B$ است. توجه داشته باشید که اگر چه انرژیهای جنبشی دو ذره کاملاً متفاوت است، مقدار تکانه‌ها (که در جهتهای مخالف یکدیگرند)، همان‌طور که معادله ۴۵

ایجاب می‌کند، دقیقاً یکسان باقی می‌ماند. در چنین حالتی اغلب از تکانهٔ پس‌زنی یا انرژی (جنبشی) پس‌زنی C صحبت می‌کنیم، گویی که C تفنگ سنگینی است که پس از شلیک گلولهٔ سبک B پس می‌زند (مثال ۷ از فصل ۹).

مثال ۶. گسیل ذره‌های آلفا (هسته‌های اتم هلیم) را در واپاشی طبیعی عنصر پرتوزای رادیم (^{226}Ra) به عنصر گازی رادون (^{222}Rn) در نظر بگیرید

$$^{226}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}\mathrm{Rn} + \alpha$$

اگر ^{226}Ra از حال سکون واپباشد، انرژی جنبشی محصولات چقدر است؟

حل: جرمهای اتمی عبارت‌اند از

$$^{226}\mathrm{Ra}: ۲۲۶{,}۰۲۵۴۰۳\mathrm{u};\qquad {}^{222}\mathrm{Rn}: ۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u}$$
$$\alpha: ۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u}$$

می‌توانیم از معادلهٔ ۴۳ مقدار Q را محاسبه کنیم، در این محاسبه مقدار $c^2 = ۹۳۲\mathrm{MeV/u}$ را به‌کار می‌بریم

$$\begin{aligned} Q &= [m(^{226}\mathrm{Ra}) - m(^{222}\mathrm{Rn}) - m(\alpha)]c^2 \\ &= (۲۲۶{,}۰۲۵۴۰۳\mathrm{u} - ۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u} \\ &\quad - ۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u})(۹۳۲\mathrm{MeV/u}) \\ &= ۴{,}۸۷\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

حالا می‌توانیم انرژی جنبشی ذرات را از معادله‌های ۴۶ و ۴۷ پیدا کنیم

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{Rn}} &= (۴{,}۸۷\mathrm{MeV})\frac{۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u}}{۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u} + ۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u}} \\ &= ۰{,}۰۹\mathrm{MeV} \\ K_{\alpha} &= (۴{,}۸۷\mathrm{MeV})\frac{۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u}}{(۲۲۲{,}۰۱۷۵۷۱\mathrm{u} + ۴{,}۰۰۲۶۰۳\mathrm{u}} \\ &= ۴{,}۷۸\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

توجه کنید که، بنابه معادلهٔ ۴۴ (با $K_A = ۰$)، دو انرژی جنبشی روی هم Q را به‌دست می‌دهند؛ همچنین توجه کنید که ذرهٔ سبکتر آلفا قسمت اعظم انرژی (ولی نه همهٔ آن) را به خودش اختصاص می‌دهد ــ در مورد این مسئله در حدود ۹۸٪.

پرسشها

۱. چگونگی پایستگی تکانه را در مورد بازجهش توپ از دیوار توضیح بدهید.

۲. آیا ضربهٔ یک نیروی غیرصفر می‌تواند صفر باشد؟ در هر صورت توضیح بدهید.

۳. شکل ۲۱ یک وسیلهٔ زورآزمایی تفریحی را نشان می‌دهد. زورآزما سعی می‌کند با پتک هر چه شدیدتر روی هدف بکوبد و یک شاخص متحرک سنگین وزن را حتی‌الامکان بالاتر بفرستد. این ابزار کدام کمیت فیزیکی را اندازه‌گیری می‌کند؟ نیروی متوسط، نیروی بیشینه، کارانجام شده، ضربه، انرژی انتقال‌یافته، تکانهٔ انتقال‌یافته، یا چیز دیگری را؟ جواب خودتان را توضیح بدهید.

شکل ۲۱. پرسش ۳

۴. اگرچه شتاب توپ بیسبال پس از ضربه خوردن ارتباطی به‌زنندهٔ ضربه ندارد، ولی باید کمیتی مربوط به پرواز توپ به زنندهٔ ضربه بستگی داشته باشد. آن کمیت کدام است؟

۵. توضیح بدهید که چگونه ممکن است یک کیسهٔ هوا در اتومبیل، مسافر را از صدمات شدید در تصادف تا حدودی حفظ کند.

۶. گفته می‌شود که در یک تصادف با سرعت $۳۰\mathrm{mi/h}$، کودک $۱۰\mathrm{lb}$ می‌تواند نیروی $۳۰۰\mathrm{lb}$ به مسافری که او را در بغل نشانده است وارد کند. نیرویی به این‌بزرگی از کجا ناشی می‌شود؟

۷. نظرتان را دربارهٔ گفتهٔ زیر بیان کنید: در تصادف اتومبیل نیرویی را که اتومبیل در ضمن متوقف شدن وارد می‌کند می‌توان از تکانه یا انرژی جنبشی آن تعیین کرد. در مورد اول باید زمان توقف و در مورد دوم باید مسافت توقف را بدانیم.

۸. فولاد از لاستیک کشسان‌تر است. توضیح بدهید که منظور از این گفته چیست؟

۹. اگر می‌توانستیم همهٔ حرکتهای داخلی اتمهای اجسام را به‌حساب بیاوریم، می‌شد همهٔ برخوردها را کشسان تلقی کرد. در این باره بحث کنید.

۱۰. اگر (فقط) دو ذره با هم برخورد کنند، آیا هیچ‌وقت مجبور خواهیم شد که برای وصف کردن این رویداد از توصیف سه‌بعدی استفاده کنیم؟ توضیح بدهید.

۱۱. دیده‌ایم که تکانه می‌تواند پایسته باشد صرفنظر از اینکه انرژی جنبشی پایسته باشد یا نباشد. آیا برعکس این موضوع هم درست است؛ یعنی، آیا در فیزیک کلاسیک پایستگی انرژی جنبشی پایستگی تکانه را ایجاب می‌کند؟[۱]

۱۲. آنچه می‌آید از یک ورقهٔ امتحان انتخاب شده است: "برخورد بین دو اتم هلیم کاملاً کشسان است، و در نتیجه تکانه پایسته می‌ماند." نظر شما دربارهٔ این گفته چیست؟

۱۳. در بزرگراهی با سرعت ۵۰ mi/h در حرکتیم، و یک اتومبیل دیگر پشت سر ما با همین سرعت حرکت می‌کند. سرعتمان را به ۴۰ mi/h کاهش می‌دهیم ولی اتومبیل پشت سری چنین نمی‌کند و برخورد روی می‌دهد. سرعتهای اولیهٔ اتومبیلهای برخوردکننده از دیدگاه هر یک از چارچوبهای مرجع زیر چقدر است؟ (الف) خودمان، (ب) رانندهٔ اتومبیل عقبی، و (ج) پلیسی که در اتومبیل گشت خود درکنار بزرگراه متوقف است. (د) قاضی تصادفات می‌پرسد که آیا شما به او "زدید" یا ماشین عقبی به شما زد. شما، به عنوان فیزیک‌پیشه، چه جوابی به این سؤال می‌دهید؟

۱۴. سی آر دایش نوشته است که، برای گلف‌بازان حرفه‌ای، سرعت اولیهٔ توپ موقع جدا شدن از چوبدست در حدود ۱۴۰ mi/h است. و دیگر اینکه: (الف) "اگر می‌شد ساختمان "امپایر استیت "را به عنوان چوبدست با همان سرعت چوبدست تاب داد و به توپ ضربه وارد کرد، سرعت اولیهٔ توپ فقط در حدود ۲٪ افزایش می‌یافت" و (ب) همین که گلف‌باز حرکت تاب رو به پایین چوبدست را آغاز کرد، دیگر صدای شاتر دوربین، عطسه، و مانند اینها تأثیری در حرکت توپ نخواهد داشت. آیا می‌توانید با ارائه یک بحث کیفی این دو گزاره را تأیید کنید؟

۱۵. از معادله‌های ۱۲ و ۱۳ روشن است که یک جواب قابل قبول برای مسئلهٔ برخورد یک‌بعدی کشسان عبارت است از $v_{1f} = v_{1i}$ و $v_{2f} = v_{2i}$ تعبیر فیزیکی این جوابها چیست؟

۱۶. دو گلوله گلی با سرعت و جرم مساوی با یکدیگر رودررو برخورد می‌کنند، به هم می‌چسبند، و به حال سکون در می‌آیند. در این برخورد، انرژی جنبشی قطعاً پایسته نیست. چه بر سر انرژی جنبشی می‌آید؟ تکانه چگونه پایسته می‌ماند؟

۱۷. یک فوتبالیست، در لحظه‌ای که ساکن است، توپی را دریافت می‌کند و در همان موقع مورد اصابت بازیکن دوان تیم مقابل قرار می‌گیرد. مسلماً این رویداد یک برخورد (ناکشسان) است و تکانه باید در آن پایسته بماند. در چارچوب مرجع زمین فوتبال، قبل از برخورد تکانه وجود داشته است ولی به نظر می‌رسد که بعد از برخورد تکانه‌ای در کار نیست. آیا تکانهٔ خطی واقعاً پایسته است؟ اگر چنین است توضیح بدهید چگونه؟ و اگر چنین نیست توضیح بدهید که چرا؟

۱۸. برخورد یک‌بعدی کشسان بین جسم متحرک A و جسم ساکن B را در نظر بگیرید. برای اینکه جسم B پس از برخورد با (الف) بیشترین سرعت، (ب) بیشترین تکانه، و (ج) بیشترین انرژی جنبشی به‌حرکت در بیاید جرم آن‌را در مقایسه با جرم جسم A چگونه انتخاب می‌کنید؟

۱۹. دو جسم مکعب شکل یکسان، که هر دو در یک راستا با سرعت یکسان v در حرکت‌اند، با جسم سومی که مشابه آنهاست و در ابتدا روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال سکون قرار دارد، برخورد می‌کنند. حرکت این سه جسم پس از برخورد چگونه است؟ آیا فرقی می‌کند که دو جسم متحرک با هم در تماس باشند یا نباشند؟ آیا فرقی می‌کند که دو جسم متحرک با چسب به همدیگر چسبانده شده باشند؟ فرض کنید برخوردها (الف) کاملاً ناکشسان و (ب) کشسان باشند.

۲۰. چگونه می‌توانید تفنگی طراحی کنید که پس‌زنی نداشته باشد؟[۱]

۲۱. در برخورد دو جسم در چارچوب مرجع مرکز جرم تکانه‌های آنها، هم قبل از برخورد و هم بعداز برخورد، مساوی و مختلف‌الجهت‌اند. آیا خط مشخص‌کنندهٔ حرکت نسبی بعد از برخورد الزاماً همان خط پیش از برخورد است؟ تحت چه شرایطی مقدار سرعتهای اجسام بر اثر برخورد زیاد می‌شود؟ کم می‌شود؟ تغییر نمی‌کند؟

۲۲. یک ساعت ماسه‌ای را با یک ترازوی حساس وزن می‌کنیم؛ یک‌بار وقتی ماسه با جریان ثابتی از قسمت بالایی به قسمت پایینی می‌ریزد و یک‌بار هم وقتی قسمت بالایی خالی است. آیا وزن این جسم در دو مورد یکسان است؟ دربارهٔ جواب خودتان توضیح بدهید.

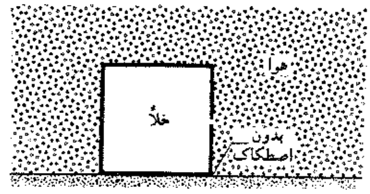
۲۳. توضیح معقولی برای شکسته شدن تخته‌های چوبی و یا آجرها در اثر ضربه‌های کاراته ارائه کنید.[۲]

۲۴. یک جعبهٔ تخلیه‌شده از هوا روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد. سوراخ کوچکی در یک وجه آن ایجاد می‌کنیم به‌طوری که هوا بتواند به آن وارد شود (شکل ۲۲). جعبه چگونه حرکت خواهد کرد؟ استدلال شما برای رسیدن به این جواب چیست؟

---

۱. نگاه کنید به
"Connection Between Conservation of Energy and Conservation of Momentum," Carl G. Adler, *American Journal of Physics*, May 1976, p. 483.

۲. نگاه کنید به
"Karate Strikes," Jearl D. Walker, *American Journal of Physics*, October 1975, p. 845.



شکل ۲۲. پرسش ۲۴

۲۵. در اظهار نظر دربارهٔ پایسته نبودن انرژی جنبشی در برخورد کاملاً ناکشسان، دانشجویی می‌گوید که در انفجار انرژی جنبشی پایسته نیست و برخورد کاملاً ناکشسان هم صرفاً معکوس فرایند انفجار است. آیا چنین استدلالی مفید یا معقول هست؟

۲۶. تحت چه شرایطی، اگر اصلاً شرطی لازم باشد، مجازیم بگوییم که واپاشی $A \to B + C$ صرفاً معکوس برخورد کاملاً ناکشسان $B + C \to A$ است؟

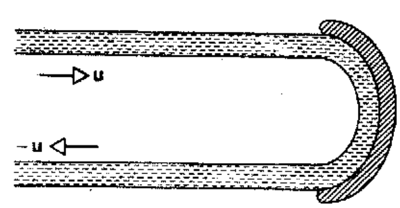
مسئله‌ها

بخش ۱۰ـ۳ پایستگی تکانه در حین برخورد

۱. در یک آزمایش استحکام سپر، اتومبیل ۲۳۰۰ کیلوگرمی که با سرعت ۱۵m/s در حرکت است با پایهٔ کناری پلی برخورد می‌کند و در مدت ۰٫۵۴ ثانیه متوقف می‌شود. نیروی متوسط وارد بر اتومبیل در طی این برخورد چقدر بوده است؟

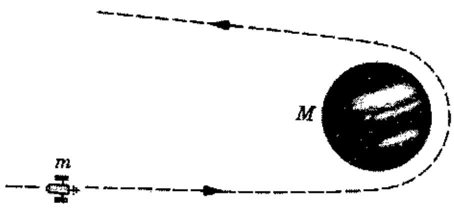
۲. توپی به جرم m با سرعت v به‌طور عمود با دیواری برخورد می‌کند و بی‌آنکه سرعتش کم شود از دیوار باز می‌جهد. (الف) اگر زمان برخورد برابر Δt باشد، نیروی متوسط وارد بر دیوار از توپ چقدر است؟ (ب) این نیروی متوسط را برای یک توپ لاستیکی ۱۴۰ گرمی که با سرعت ۷٫۸m/s در حرکت است و برخورد آن با دیوار ۳٫۹ms طول می‌کشد، محاسبه کنید.

۳. جریان آبی به پرهٔ "بشقابی" توربین که ساکن است برخورد می‌کند (شکل ۲۳). سرعت آب قبل و بعد از برخورد با سطح خمیدهٔ پره برابر با u است و جرم آبی که در واحد زمان با پره برخورد می‌کند مقدار ثابت μ است. چه نیرویی از آب به پره وارد می‌شود؟



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۳

۴. فضاپیمای ویجر ۲ (با جرم m و سرعت v نسبت به خورشید) به سیارهٔ مشتری (با جرم M و سرعت V نسبت به خورشید) نزدیک می‌شود (شکل ۲۴). فضاپیما سیاره را دور می‌زند و در جهت مخالف از آن دور می‌شود. سرعت فضاپیما (نسبت به خورشید) پس از این "برخورد پرتابی" چقدر است؟ فرض کنید $v =$ ۱۲km/s و $V =$ ۱۳km/s (سرعت مداری مشتری) است. جرم مشتری خیلی بیشتر از جرم فضاپیماست ($M \gg m$).[1]



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۴

۵. گلف‌بازی ضربه‌ای به توپ وارد می‌کند و به آن سرعت اولیهٔ ۵۲٫۲m/s در راستای ۳۰° بالای افق می‌دهد. با فرض اینکه جرم توپ ۴۶٫۰ گرم باشد و چوبدست و توپ ۱٫۲۰ms در تماس باشند، کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) ضربهٔ وارد بر توپ، (ب) ضربهٔ وارد بر چوبدست، (ج) نیروی متوسط وارد بر توپ از چوبدست و (د) کار انجام شده روی توپ.

۶. یک اتومبیل ۱۴۲۰ کیلوگرمی با سرعت ۵٫۲۸m/s به‌طرف شمال در حرکت است. این اتومبیل یک گردش به راست ۹۰° را در ۴٫۶۰ ثانیه انجام می‌دهد. پس از آن اتومبیل به یک درخت برخورد می‌کند و در مدت ۳۵۰ms متوقف می‌شود. ضربهٔ وارد بر اتومبیل در هر یک از حالتهای زیر چقدر است؟ (الف) در طی گردش به‌راست و (ب) در طی برخورد. نیروی متوسط وارد بر اتومبیل در دو حالت زیر چقدر است؟ (ج) در طی گردش به‌راست و (د) در طی برخورد.

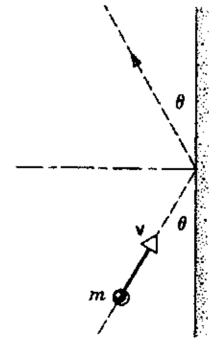
۷. یک توپ بیسبال ۱۵۰ گرمی (وزن = ۵٫۳۰oz) که با سرعت ۴۱٫۶m/s در حرکت است با چوبدست ضربه می‌خورد و با سرعت ۶۱٫۵m/s مستقیماً به عقب برمی‌گردد. مدت تماس توپ و چوبدست ۴٫۷۰ms است. نیروی متوسط وارد بر توپ از چوبدست چقدر است؟

۸. در برخوردی که ۲۷٫۰ms طول می‌کشد، نیروی متوسط ۹۸۴N به یک گوی فولادی ۴۲۰ گرمی که با سرعت ۱۳٫۸m/s در حرکت است وارد می‌شود. اگر نیرو در جهت مخالف سرعت اولیهٔ گوی باشد، سرعت نهایی گوی را پیدا کنید.

۹. یک توپ ۳۲۵ گرمی با سرعت $v =$ ۶٫۲۲m/s تحت زاویهٔ $\theta =$ ۳۳٫۰° به دیواری برخورد می‌کند و تحت همان زاویه و با همان

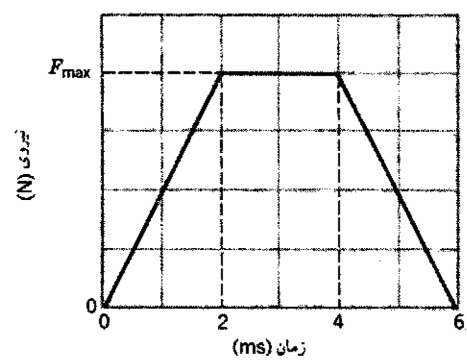
۱. نگاه کنید به
"The Slingshot Effect: Explanation and Analogies," Albert A. Bartlett and Charles W. Hord, *The Physics Teacher*, November 1985, p. 466.

سرعت از دیوار باز می‌جهد (شکل ۲۵). توپ به مدت ۱۰ر۴ms با دیوار در تماس بوده است. (الف) چه ضربه‌ای به توپ وارد می‌شود؟ (ب) نیروی متوسطی که توپ به دیوار وارد می‌کند چقدر است؟



شکل ۲۵. مسئلهٔ ۹

۱۰. شکل ۲۶ نمودار تقریبی نیرو برحسب زمان را برای یک توپ تنیس ۰ر۵۸ گرمی در طی برخورد با یک دیوار نشان می‌دهد. سرعت اولیه توپ ۳۲m/s و عمود بر دیوار است؛ این توپ با همان سرعت و عمود بر دیوار از آن باز می‌جهد. مقدار نیروی ماکزیموم در طی برخورد چقدر است؟



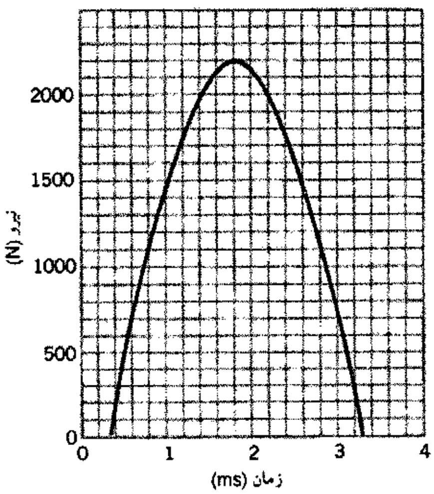
شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. یک کاوشگر فضایی بدون سرنشین به جرم ۲۵۰۰ کیلوگرم با سرعت ثابت ۳۰۰m/s در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. موتور موشکی کاوشگر در یک مرحله نیروی پیشران ۳۰۰۰N برای مدت ۰ر۶۵ ثانیه تولید می‌کند. (الف) اگر نیروی پیشران به سوی عقب، یا به‌سوی جلو، یا در جهت جانبی باشد، تغییر تکانهٔ کاوشگر (فقط مقدار) چقدر است؟ (ب) تغییر انرژی جنبشی کاوشگر در همان سه حالت بالا چقدر است؟ فرض کنید جرم سوختی که به بیرون رانده شد در مقایسه با جرم کل کاوشگر قابل چشمپوشی است.

۱۲. نیرویی به جسمی به جرم m ضربهٔ J وارد می‌کند و سرعت آن را از u به v تغییر می‌دهد. حرکت جسم در همان راستای نیروست. نشان بدهید که کاری که این نیرو انجام می‌دهد برابر است با $\frac{1}{2}J(u+v)$.

۱۳. دو قسمت یک فضاپیما با انفجار مهره‌های منفجره‌ای که آنها را متصل به هم نگه می‌دارد، از هم جدا می‌شوند. جرم دو تکهٔ جدا شده ۱۲۰۰kg و ۱۸۰۰kg است؛ ضربه‌ای که به هر تکه وارد می‌شود برابر با ۳۰۰Ns است. سرعت نسبی دور شدن تکه‌ها چقدر است؟

۱۴. توپی به جرم ۰ر۵۰kg ضربه‌ای می‌خورد که نمودار آن در شکل ۲۷ نشان داده شده است. سرعت توپ درست پس از لحظه‌ای که نیرو صفر می‌شود، چقدر است؟



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۴

۱۵. گلوله‌ها و سایر پرتابه‌هایی که به سوپرمن شلیک می‌شوند، معمولاً از سینهٔ او باز می‌جهند (شکل ۲۸). فرض کنید یک "آدم بد" رگباری از گلوله‌های ۰ر۳ گرمی را با آهنگ ۱۰۰ گلوله بر دقیقه به سینهٔ سوپرمن شلیک می‌کند، و سرعت هر گلوله ۵۰۰m/s است. باز هم فرض کنید

شکل ۲۸. مسئلهٔ ۱۵

که گلوله‌ها بدون از دست دادن سرعت مستقیماً به عقب باز می‌جهند. نشان بدهید که متوسط نیرویی که از این رگبار به سینهٔ سوپرمن وارد می‌شود فقط ۵٫۰ نیوتون (= ۱۸oz) است.

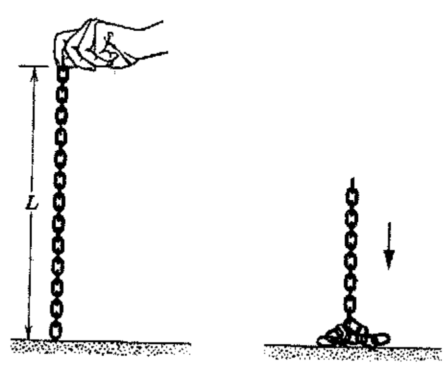
۱۶. یک قهرمان کاراته تخته‌ای به ضخامت ۲٫۲cm را با یک ضربهٔ دست می‌شکند. فیلمبرداری آهسته نشان می‌دهد که دست، که جرم آن‌را می‌توان ۵۴۰g در نظر گرفت، با سرعت ۹٫۵m/s به بالای تخته برخورد می‌کند و در فاصلهٔ ۲٫۸cm پایین‌تر از این نقطه متوقف می‌شود. (الف) مدت زمان این ضربه (با فرض نیروی ثابت) چقدر است؟ (ب) چه نیروی متوسطی اعمال شده است؟

۱۷. یک تفنگ ساچمه‌ای در هر ثانیه ۱۰ ساچمه ۲٫۱۴ گرمی را با سرعت ۴۸۳m/s شلیک می‌کند. ساچمه‌ها در برخورد به یک دیوار صلب متوقف می‌شوند. (الف) تکانهٔ هر ساچمه را معین کنید. (ب) انرژی جنبشی هر ساچمه را به‌دست بیاورید. (ج) میانگین نیروی وارد بر دیوار از رگبار ساچمه‌ها را محاسبه کنید. (د) اگر هر ساچمه به مدت ۱٫۲۵ms با دیوار در تماس باشد، میانگین نیروی وارد بر دیوار از هر ساچمه در طی مدت تماس چقدر است؟ چرا این جواب تا این حد با جواب قسمت (ج) تفاوت دارد؟

۱۸. در یک توفان تندری، دانه‌های تگرگ به قطر یک سانتی‌متر با سرعت ۲۵m/s فرو می‌ریزند. تخمین زده می‌شود که در هر مترمکعب هوا ۱۲۰ تگرگ موجود باشد. از بازجهش تگرگها به هنگام برخورد چشمپوشی کنید. (الف) جرم هر دانهٔ تگرگ چقدر است؟ (ب) در طی این توفان از طرف تگرگ چه نیرویی بر یک بام مسطح به ابعاد ۱۰m × ۲۰m وارد می‌شود؟ فرض کنید که هر سانتی‌متر مکعب تگرگ، مانند یخ، ۰٫۹۲g جرم داشته باشد.

۱۹. فرض کنید پره‌های چرخان یک هلیکوپتر، ستون استوانه‌ای شکل هوای زیرشان را به سمت پایین می‌رانند. جرم کل هلیکوپتر ۱۸۲۰kg و طول پره‌ها ۴٫۸۸m است. حداقل توان مورد نیاز برای اینکه هلیکوپتر در هوا بماند چقدر است؟ چگالی هوا را ۱٫۲۳kg/m³ بگیرید.

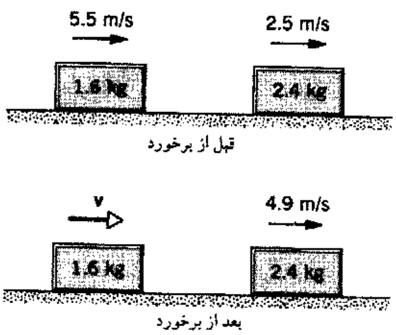
۲۰. زنجیر یکنواخت بسیار قابل انعطافی به جرم M و طول L از یک انتها آویزان شده است. این زنجیر به‌طور قائم قرار گرفته است و انتهای آزاد آن درست مماس با سطح یک میز است. انتهای بالایی ناگهان آزاد می‌شود و زنجیر روی میز می‌افتد و به‌صورت کپهٔ کوچکی در می‌آید (شکل ۲۹). هر حلقه زنجیر در لحظهٔ برخورد با میز به حال سکون در می‌آید. نیروی وارد بر زنجیر از طرف میز را در هر لحظه برحسب وزن آن طولی از زنجیر که در آن لحظه روی میز قرار دارد، معین کنید.



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۲۰

بخش ۱۰ـ۴ برخورد در یک‌بعد

۲۱. قالبهای نشان داده شده در شکل ۳۰ بدون اصطکاک می‌لغزند. (الف) سرعت قالب ۱٫۶ کیلوگرمی پس از برخورد چقدر است؟ (ب) آیا این برخورد کشسان است؟



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۲۱ و ۲۲

۲۲. در شکل ۳۰ فرض کنید جهت سرعت اولیه قالب ۲٫۴ کیلوگرمی برعکس شود و این قالب مستقیماً به‌سوی قالب ۱٫۶ کیلوگرمی حرکت کند. (الف) سرعت قالب ۱٫۶ کیلوگرمی پس از برخورد چقدر است؟ (ب) آیا این برخورد یک برخورد کشسان است؟

۲۳. فیل خشمگینی با سرعت ۲٫۱m/s به پشه سمجی حمله می‌کند. با فرض کشسان بودن برخورد، پشه با چه سرعتی از فیل دور می‌شود؟ توجه داشته باشید که در این مورد پرتابه (فیل) بسیار سنگین‌تر از هدف (پشه) است.

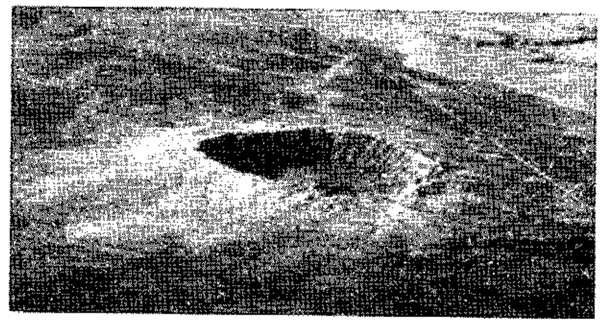
۲۴. دو کره از جنس تیتانیم با سرعت یکسانی به همدیگر نزدیک می‌شوند و رودررو برخورد کشسان می‌کنند. پس از برخورد، یکی از کره‌ها که جرم آن ۳۰۰ گرم است ساکن می‌شود. جرم کرهٔ دیگر چقدر است؟

۲۵. گلوله‌ای به جرم ۴٫۵۴g در راستای افقی به‌سوی یک قالب چوبی به جرم ۲٫۴۱kg که روی سطحی افقی به‌حال سکون قرار دارد شلیک می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان قالب و سطح برابر با ۰٫۲۱۰ است. گلوله در داخل قالب چوبی، که مسافت ۱٫۸۳m را روی سطح طی می‌کند، متوقف می‌شود. (الف) سرعت قالب چوبی درست در لحظه‌ای که گلوله در داخل آن متوقف می‌شود چقدر است؟ (ب) سرعت اولیهٔ گلوله چقدر است؟

۲۶. لغزنده‌ای به جرم ۳۴۲ گرم که با سرعت اولیهٔ ۱٫۲۴m/s روی یک ریل هوای خطی بدون اصطکاک در حرکت است با لغزندهٔ دیگری با جرم مجهول که روی ریل ساکن است برخورد می‌کند. برخورد بین این اجسام کشسان است. پس از برخورد، جسم اول در همان جهت

اولیه‌اش با سرعت ۰٫۶۳۶m/s به حرکتش ادامه می‌دهد. (الف) جرم جسم دوم چقدر است؟ (ب) سرعت جسم دوم پس از برخورد چقدر است؟

۲۷. چنین تصور می‌شود که "حفرهٔ آریزونا" (شکل ۳۱) بر اثر برخورد یک شهاب‌سنگ با زمین در حدود ۲۰۰۰۰ سال قبل ایجاد شده باشد. تخمین زده می‌شود که جرم این شهاب‌سنگ 5×10^{10}kg و سرعت آن ۷٫۲km/s بوده است. چنین شهاب‌سنگی در یک برخورد رودررو چه سرعتی می‌تواند به زمین بدهد؟



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۲۷

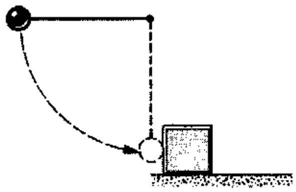
۲۸. یک گلولهٔ ۵٫۱۸ گرمی که با سرعت ۶۷۲m/s در حرکت است با یک قالب چوبی به جرم ۷۱۵ گرم که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد برخورد می‌کند. این گلوله با سرعت کاهش‌یافتهٔ ۴۲۸m/s از طرف دیگر قالب خارج می‌شود. سرعت نهایی قالب را پیدا کنید.

۲۹. جسمی به جرم ۲٫۰kg با جسم دیگری که ساکن است برخورد می‌کند و با سرعتی برابر با یک چهارم سرعت اولیه‌اش در همان راستای اولیه به حرکت ادامه می‌دهد. جرم جسم دیگر چقدر است؟

۳۰. در یک تفنگ خودکار قدیمی، سازوکار "بار کردن" در قسمت عقب لوله وقتی وارد عمل می‌شود که گلنگدن، که پس از شلیک گلوله عقب‌نشینی می‌کند، یک فنر را به اندازهٔ معین d می‌فشارد. (الف) نشان بدهید که برای خودکار بودن تفنگ، باید سرعت گلوله در لحظهٔ شلیک حداقل برابر باشد با $d\sqrt{kM}/m$ که درآن k نیروی ثابت فنر و M جرم گلنگدن، و m جرم گلوله است. (ب) در چه صورتی می‌توانیم (اگر اصولاً بتوانیم) این فرایند را "برخورد " تلقی کنیم؟

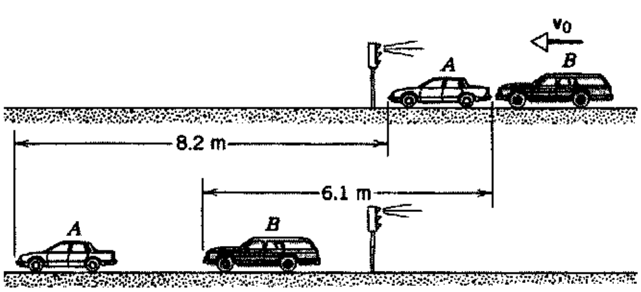
۳۱. سر چوبدست گلف که با سرعت ۴۵٫۰m/s حرکت می‌کند با توپ گلفی به جرم ۴۶٫۰ گرم که روی "پایه"‌اش قرار دارد برخورد می‌کند. جرم مؤثر قسمت سرچوبدست ۲۲۰ گرم است. (الف) توپ با چه سرعتی پایه را ترک می‌کند؟ (ب) اگر جرم قسمت سر چوبدست را دو برابرکنیم سرعت پرتاب توپ از پایه چقدر خواهد شد؟ اگر سه برابرکنیم چطور؟ در مورد استفاده از چوبدستهای سنگین چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟ فرض کنید برخوردها کاملاً کشسان‌اند و دیگر اینکه گلف‌باز می‌تواند چوبدستهای سنگین را تا لحظهٔ برخورد به همان سرعت چوبدست سبک برساند (پرسش ۱۴).

۳۲. گلوله‌ای فولادی به جرم ۰٫۵۱۴ کیلوگرم از یک سر ریسمانی به طول ۶۸٫۷ سانتی‌متر آویزان شده است. ریسمان را از حالت کشیدهٔ افقی رها می‌کنیم. در پایین‌ترین قسمت مسیر، این گلوله با یک قالب فولادی به جرم ۲٫۶۳ کیلوگرم که روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است برخورد می‌کند (شکل ۳۲). برخورد کشسان است. کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) سرعت گلوله درست پس از برخورد، (ب) سرعت قالب فولادی، درست پس از برخورد، (ج) اکنون فرض کنید که در ضمن برخورد، نیمی از انرژی جنبشی مکانیکی به انرژی داخلی و انرژی صوتی تبدیل شود. در این‌صورت سرعتهای نهایی را به‌دست بیاورید.



شکل ۳۲. مسئلهٔ ۳۲

۳۳. دو اتومبیل A و B که می‌خواهند قبل از چراغ راهنما متوقف شوند روی جادهٔ یخ‌زده می‌لغزند. جرم اتومبیل A برابر با ۱۱۰۰ کیلوگرم و جرم اتومبیل B برابر با ۱۴۰۰ کیلوگرم است. ضریب اصطکاک جنبشی بین چرخهای قفل‌شدهٔ هر دو اتومبیل و جاده برابر با ۰٫۱۳۰ است. اتومبیل A موفق می‌شود که قبل از چراغ راهنما بایستد، ولی اتومبیل B نمی‌تواند متوقف شود و از پشت به اتومبیل A می‌زند. پس از برخورد، اتومبیل A در فاصلهٔ ۸٫۲۰ متر از محل برخورد، و اتومبیل B در فاصلهٔ ۶٫۱۰ متر از همان محل متوقف می‌شود (شکل ۳۳). در طی این رویداد ترمزهای هر دو اتومبیل قفل بوده است. (الف) با استفاده از مسافتهایی که اتومبیلها پس از برخورد پیموده‌اند، سرعت آنها را درست پس از برخورد تعیین کنید. (ب) با استفاده از پایستگی تکانه، سرعت اولیهٔ اتومبیل B را در لحظهٔ برخورد با اتومبیل A به‌دست بیاورید. بر چه اساسی می‌توان به کاربرد پایستگی تکانه در این مورد ایراد گرفت؟



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۳۳

۳۴. یک وزنهٔ ۲٫۹ تنی از ارتفاع ۶٫۵ فوت سقوط می‌کند و یک ستون

۵۰٫۰ تنی را به اندازهٔ ۱٫۵ اینچ در زمین فرو می‌برد. فرض کنید برخورد وزنه‌ـستون کاملاً ناکشسان است، و میانگین نیروی مقاومت زمین را تعیین کنید.

۳۵. یک واگن‌باری ۳۵٫۰ تنی با یک واگن خدماتی ساکن برخورد می‌کند و به آن "وصل" می‌شود. در این برخورد ۲۷٫۰٪ از انرژی جنبشی اولیه به‌صورت گرما، صوت، ارتعاش و مانند آن هدر می‌رود. وزن واگن خدماتی را پیدا کنید.

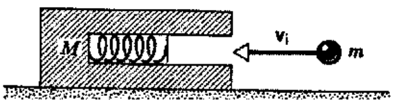
۳۶. سپر یک اتومبیل ۱۲۲۰ کیلوگرمی چنان طراحی شده است که بتواند تمام انرژی را وقتی اتومبیل با سرعت ۵٫۲۰km/h با یک دیوار سنگی برخورد می‌کند، جذب کند. این اتومبیل هنگامی که با سرعت ۷۵٫۵km/h در حرکت است با اتومبیل جلویی به جرم ۹۳۴ کیلوگرم که با سرعت ۶۲٫۰km/h در همان جهت در حرکت است تصادف می‌کند. در نتیجه این برخورد سرعت اتومبیل ۹۳۴ کیلوگرمی تا ۷۱٫۳km/h افزایش می‌یابد. (الف) سرعت اتومبیل ۱۲۲۰ کیلوگرمی بلافاصله پس از برخورد چقدر است؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی جذب شده در برخورد بر آنچه سپر اتومبیل ۱۲۲۰ کیلوگرمی می‌تواند جذب کند چقدر است؟

۳۷. یک واگن باری ۳۱٫۸ تنی که با سرعت ۵٫۲۰ft/s در حرکت است با یک واگن باری ۲۴٫۲ تنی که با سرعت ۲٫۹۰ft/s در همان جهت در حرکت است برخورد می‌کند. (الف) اگر واگنها پس از برخورد به همدیگر ملحق شوند، سرعت مجموعه پس از برخورد چقدر است و چه مقدار انرژی جنبشی در این برخورد به هدر می‌رود؟ (ب) اگر برخورد واگنها کشسان می‌بود (گرچه بسیار نامحتمل است)، سرعت هر واگن پس از برخورد چقدر می‌شد؟

۳۸. یک ترازوی کفه‌ای چنان مدرج شده است که جرم اجسامی را که روی کفه‌اش قرار می‌گیرند برحسب کیلوگرم نشان بدهد. ذراتی از ارتفاع ۳٫۵۳متری پایین می‌افتند و با کفهٔ ترازو برخورد می‌کنند. برخوردها کشسان‌اند و ذرات با همان سرعتی که به کفه می‌خورند از آن باز می‌جهند. جرم هر ذره ۱۱۰ گرم و آهنگ برخوردها ۴۲s^{-1} است. این ترازو در حین ریزش ذرات چه جرمی را نشان می‌دهد.

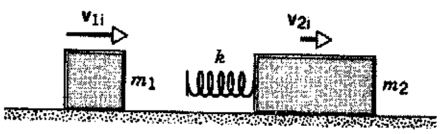
۳۹. جعبه‌ای روی ترازویی قرار دارد، و ترازو چنان تنظیم شده است که وقتی جعبه خالی است رقم صفر را نشان می‌دهد. جریانی از تیله‌ها از ارتفاع h نسبت به ته جعبه، با آهنگ R (تیله در ثانیه) به داخل آن می‌ریزد. جرم هرتیله m است. برخورد میان تیله‌ها و جعبه کاملاً ناکشسان است. ترازو t ثانیه پس از شروع ریزش تیله‌ها چه رقمی را نشان می‌دهد؟ برای وقتی که $R =$ ۱۱۵s^{-1}، $h =$ ۹٫۶۲m، $m =$ ۴٫۶۰g و $t =$ ۶٫۵۰s است جواب عددی پیدا کنید.

۴۰. گلوله‌ای به جرم m با سرعت v_i به داخل لولهٔ یک تفنگ فنری به جرم M که در آغاز روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است شلیک می‌شود (شکل ۳۴). گلوله در نقطهٔ حداکثر فشردگی فنر به داخل لوله گیر می‌کند. هیچ انرژی‌ای صرف مقابله با اصطکاک نمی‌شود. (الف) سرعت تفنگ فنری، پس از آنکه گلوله در داخل لوله متوقف شد، چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله در فنر ذخیره شده است؟



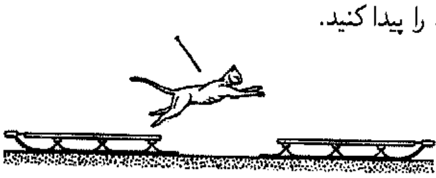
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۴۰

۴۱. قالبی به جرم $m_1 =$ ۱٫۸۸kg روی میز بدون اصطکاکی با سرعت ۱۰٫۳m/s حرکت می‌کند. دقیقاً در جلو این قالب، قالب دیگری به جرم $m_2 =$ ۴٫۹۲kg در همان جهت با سرعت ۳٫۲۷m/s در حرکت است. فنر بدون جرمی با ثابت نیروی $k =$ ۱۱٫۲N/cm به قسمت عقب قالب m_2 وصل شده است (شکل ۳۵). وقتی دو قالب با هم برخورد می‌کنند، حداکثر فشردگی فنر چقدر است؟ (راهنمایی: در لحظهٔ حداکثر فشردگی فنر دو قالب به صورت جسم واحدی حرکت می‌کنند؛ با توجه به اینکه در این نقطه برخورد کاملاً ناکشسان است، سرعت را محاسبه کنید.)



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۴۱

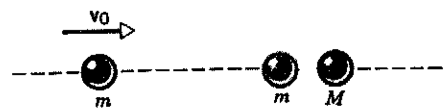
۴۲. دو سورتمه، که جرم هرکدام ۲۲٫۷ کیلوگرم است، در فاصلهٔ کمی پشت سرهم روی سطح یخزدهٔ بدون اصطکاکی قرار دارند (شکل ۳۶). گربه‌ای به جرم ۳٫۶۳ کیلوگرم که روی یکی از دو سورتمه ایستاده است روی سورتمهٔ دیگر می‌پرد و بلافاصله با پرش دیگری به سورتمهٔ اول بازمی‌گردد. هر دو پرش با سرعت ۳٫۰۵m/s نسبت به سورتمه‌ای که پرش از آن صورت می‌گیرد انجام می‌شود. سرعت نهایی هر یک از دو سورتمه را پیدا کنید.


شکل ۳۶. مسئلهٔ ۴۲

۴۳. الکترونی به جرم m، رودررو، با اتم ساکنی به جرم M برخورد می‌کند. در نتیجهٔ این برخورد مقدار معینی انرژی، E، به‌صورت انرژی داخلی در اتم ذخیره می‌شود. حداقل سرعت اولیه‌ای که الکترون باید داشته باشد، v_0، چقدر است؟ (راهنمایی: اصول پایستگی منجر به یک معادلهٔ درجهٔ دوم برای سرعت نهایی الکترون و یک معادلهٔ درجهٔ دوم برای سرعت نهایی اتم می‌شود. حداقل مقدار v_0 از این شرط حاصل می‌شود که رادیکال موجود در جوابهای v و V حقیقی باشد.)

۴۴. دو کرهٔ سمت راستِ شکل ۳۷ کمی با هم فاصله دارند و در ابتدا

هر دو ساکن‌اند؛ کرهٔ سمت چپ با سرعت v_0 به طرف آنها در حرکت است. فرض کنید برخوردها رودررو و کشسان باشند. (الف) نشان بدهید که اگر $M \le m$ باشد دو برخورد روی می‌دهد و سرعتهای نهایی را معین کنید. (ب) نشان بدهید که اگر $M > m$ باشد سه برخورد انجام می‌شود و سرعتهای نهایی سه کره را معین کنید.



شکل ۳۷. مسئله‌های ۴۴ و ۴۵

۴۵. وضعیتی مانند مسئلهٔ قبل را در نظر بگیرید (شکل ۳۷) ولی فرض کنید که در این مورد برخوردها ممکن است همگی کشسان، همگی غیرکشسان، یا بعضی کشسان و بعضی ناکشسان باشند؛ به‌علاوه در این مسئله جرمها را m، m' و M انتخاب می‌کنیم. نشان بدهید برای اینکه بیشترین انرژی جنبشی از m به M منتقل شود باید جرم جسم واسط برابر با $m' = \sqrt{mM}$ ـــ یعنی میانگین هندسی دو جرم مجاور ـــ باشد. (در آکوستیک هم همین رابطه بین جرمهای لایه‌های متوالی هوا در "شیپور نمایی" برقرار است.)[1]

بخش ۱۰ـ۵ برخورد در دو بعد

۴۶. دو خودرو A به وزن ۲۷۲۰ پوند و B به وزن ۳۶۴۰ پوند که به ترتیب به سمت غرب و جنوب در حرکت‌اند در یک تقاطع با هم تصادف می‌کنند و در هم قفل می‌شوند. قبل از برخورد، سرعت خودرو A ۳۸٫۵mi/h و سرعت خودرو B ۵۸٫۰mi/h است. بلافاصله پس از برخورد، خودروهای درهم قفل شده با چه سرعتی و در کدام جهت حرکت می‌کنند؟

۴۷. اجسام A و B با هم برخورد می‌کنند. جرم جسم A برابر با ۲٫۰kg و جرم جسم B برابر با ۳٫۰ کیلوگرم است. سرعتهای این اجسام قبل از برخورد عبارت است از $\mathbf{v}_{iA} = 15\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ و $\mathbf{v}_{iB} = -10\mathbf{i} + 5.0\mathbf{j}$. بعد از برخورد سرعت جسم A به صورت $\mathbf{v}_{fA} = -6.0\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ است. تمام سرعتها برحسب متر بر ثانیه بیان شده‌اند. (الف) سرعت نهایی جسم B را پیدا کنید. (ب) در این برخورد چقدر انرژی جنبشی به سیستم افزوده یا از سیستم کاسته می‌شود؟

۴۸. ذرهٔ آلفایی با یک هستهٔ اکسیژن که در آغاز ساکن است برخورد می‌کند. ذرهٔ آلفا تحت زاویهٔ ۶۴٫۰° بالاتر از راستای اولیه حرکتش پراکنده می‌شود و هستهٔ اکسیژن تحت زاویهٔ ۵۱٫۰° پایین‌تر از همان راستا پس می‌زند. سرعت نهایی هسته برابر با 1.2×10^5m/s است. سرعت نهایی ذرهٔ آلفا چقدر است؟ (جرم ذرهٔ آلفا ۴٫۰۰u و جرم هستهٔ اکسیژن ۱۶٫۰u است.)

۴۹. یک نوترون کند (که نوترون گرمایی هم نامیده می‌شود) در برخورد کشسان با یک دوترون ساکن تحت زاویهٔ ۹۰° پراکنده می‌شود. نشان بدهید که این نوترون دو سوم انرژی جنبشی اولیه‌اش را به دوترون می‌دهد. (جرم نوترون ۱٫۰۱u و جرم دوترون ۲٫۰۱u است.)

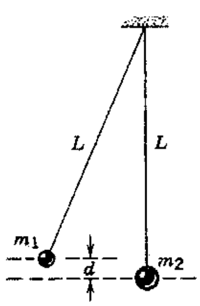
۵۰. دو جسم با جرمهای یکسان که سرعتهای اولیه‌شان هم یکی است در یک برخورد کاملاً ناکشسان به هم می‌چسبند و با سرعت مشترکی که برابر با نصف سرعت اولیهٔ هر یک از آنهاست حرکت می‌کنند. زاویهٔمیان سرعتهای اولیه دو جسم چقدر بوده است؟

۵۱. پروتونی (با جرم اتمی ۱٫۰۱u) با سرعت ۵۱۸m/s با پروتون ساکنی برخورد کشسان انجام می‌دهد. پروتون متحرک با زاویهٔ ۶۴٫۰° نسبت به راستای اولیهٔ حرکتش پراکنده می‌شود. (الف) جهت حرکت پروتونِ هدف پس از برخورد کدام است؟ (ب) سرعت هر یک از پروتونها پس از برخورد چقدر است؟

۵۲. دو گوی A و B با جرمهای متفاوت و مجهول با هم برخورد می‌کنند. گوی A در آغاز ساکن است و گوی B با سرعت v حرکت می‌کند. پس از برخورد، گوی B دارای سرعت $v/2$ است و در راستای عمود بر سرعت اولیه‌اش حرکت می‌کند. (الف) تعیین کنید که گوی A پس از برخورد در چه جهتی حرکت می‌کند. (ب) آیا می‌توانید سرعت گوی A را از اطلاعات داده شده در این مسئله تعیین کنید؟ دربارهٔ پاسخ خودتان توضیح‌بدهید.

۵۳. در یک بازی بیلیارد، به توپ "چوبخور" سرعت اولیهٔ V داده می‌شود و این توپ با مجموعهٔ ۱۵ توپ که مماس به یکدیگر در وسط میز قرار دارند برخورد می‌کند. همهٔ ۱۶ توپ (یکسان) در برخوردهای متعدد توپ به توپ و توپ به دیوارهٔ میز درگیر می‌شوند. برحسب تصادف، پس از اندک زمانی معلوم می‌شود که همهٔ توپها دارای سرعت یکسان vاند. فرض کنید همهٔ برخوردها کشسان باشند و از جنبهٔ چرخشی حرکت توپها هم چشمپوشی کنید. سرعت v را برحسب V به‌دست بیاورید.

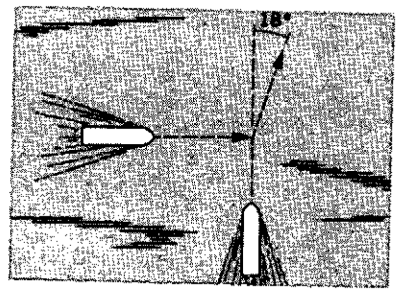
۵۴. دو آونگ هر یک به طول L در آغاز مطابق شکل ۳۸ قرارگرفته‌اند. آونگ اول از ارتفاع d رها می‌شود و با آونگ دوم برخورد می‌کند. فرض کنید برخورد کاملاً ناکشسان است و از جرم ریسمانها و هر نوع آثار اصطکاکی چشمپوشی کنید. مرکز جرم این مجموعه پس از برخورد تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



شکل ۳۸. مسئلهٔ ۵۴

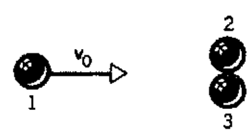
۱. نگاه کنید به
"Energy Transfer in One-Dimensional Collisions of Many Objects," John B Hart and Robert B. Herrmann, *American Journal of Physics*, January 1968, p. 46.

۵۵. یدک‌کشی به جرم $۱٫۵۰ \times ۱۰^{۵}\mathrm{kg}$ با سرعت $۶٫۲۰\,\mathrm{m/s}$ در مه غلیظی به طرف پایین رودخانه‌ای در حرکت است که از پهلو با یدک‌کش دیگری که مستقیماً عرض رودخانه را می‌پیماید برخورد می‌کند (شکل ۳۹). جرم یدک‌کش دوم $۲٫۷۸ \times ۱۰^{۵}\mathrm{kg}$ و سرعت آن $۴٫۳۰\,\mathrm{m/s}$ است. بلافاصله پس از برخورد، ناخدای یدک‌کش دوم در می‌یابد که مسیرش به اندازهٔ ۱۸° از جهت جریان رودخانه انحراف دارد و سرعتش هم به $۵٫۱۰\,\mathrm{m/s}$ افزایش یافته است. سرعت جریان آب در زمان وقوع این حادثه عملاً صفر است. (الف) سرعت و راستای حرکت یدک‌کش اول بلافاصله پس از برخورد چقدر و کدام است؟ (ب) در این برخورد چقدر انرژی جنبشی "تلف" می‌شود؟



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۵۵

۵۶. توپی که با سرعت اولیهٔ $۱۰٫۰\,\mathrm{m/s}$ در حرکت است با دو توپ مشابه مماس به یکدیگر که خط واصل مراکز آنها عمود بر سرعت اولیهٔ خودش است برخورد کشسان می‌کند (شکل ۴۰). توپ اول مستقیماً به طرف نقطهٔ تماس دو توپ دیگر نشانه‌روی شده است. همهٔ توپها بدون اصطکاک‌اند. سرعت هر سه توپ را پس از برخورد معین کنید. (راهنمایی: در صورت نبود اصطکاک، هر ضربه در امتداد خط واصل مراکز توپها و عمود بر سطوح تماس است.)



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۵۶

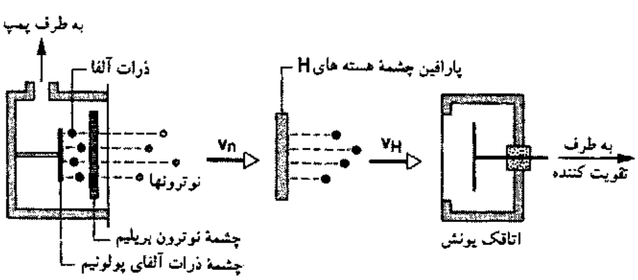
۵۷. در یک بازی بیلیارد، گوی "چوبخور" به گوی دیگری که در آغاز ساکن است برخورد می‌کند. پس از برخورد، گوی چوبخور با سرعت $۳٫۵۰\,\mathrm{m/s}$ در امتداد خطی که با راستای سرعت اولیه‌اش زاویهٔ $۶۵٫۰^{\circ}$ می‌سازد حرکت می‌کند. گوی دوم سرعتی معادل با $۶٫۷۵\,\mathrm{m/s}$ کسب می‌کند. با استفاده از پایستگی تکانه (الف) زاویهٔ راستای حرکت گوی دوم را با امتداد سرعت اولیهٔ گوی چوبخور، و (ب) سرعت اولیهٔ گوی چوبخور را، پیدا کنید.

۵۸. در سال ۱۹۳۲ جیمز چادویک، فیزیکدان انگلیسی، وجود و خواص نوترون (یکی از ذرات اساسی در ساختار اتم) را به‌وسیلهٔ دستگاهی که طرح آن در شکل ۴۱ آمده است، نشان داد. در یک اتاقک تخلیه، نمونه‌ای از پلونیم پرتوزا وامی‌پاشد و ذرات آلفا (هسته‌های هلیم) تولید می‌شوند. این ذرات به قالبی از بریلیم برخورد می‌کنند و فرایندی صورت می‌گیرد که حاصل آن گسیل نوترون است. (آنچه از واکنش He و Be به‌دست می‌آید کربن پایدار + نوترون است) از برخورد این نوترونها به لایه‌ای از پارافین (CH_2)، به آزاد شدن هسته‌های هیدروژن می‌انجامد، که در اتاقک یونش آشکارسازی می‌شوند. به عبارت دیگر، برخورد کشسانی صورت می‌گیرد که در آن بخشی از تکانهٔ نوترون به هستهٔ هیدروژن منتقل می‌شود. (الف) عبارتی برای بیشترین سرعتی که هستهٔ هیدروژن (با جرم m_H) می‌تواند کسب کند، v_H، به دست بیاورید. فرض کنید که نوترون فرودی دارای جرم m_n و سرعت v_n باشد. (راهنمایی: فکر کنید که آیا در برخورد رودررو انرژی بیشتری منتقل می‌شود یا در برخورد سایشی؟) (ب) یکی از هدفهای چادویک پیدا کردن جرم این ذرهٔ جدیدی بود که خودش کشف کرده بود. بررسی عبارت به‌دست آمده در قسمت (الف)، که شامل این پارامتر است، نشان می‌دهد که در آن دو مجهول وجود دارد، m_n و v_n (v_H معلوم است؛ آن را می‌شود در اتاقک یونش اندازه‌گیری کرد). برای حذف پارامتر مجهول v_n، چادویک به‌جای لایهٔ پارافین از پاراسیانوژن (CN) استفاده کرد. در این صورت، نوترونها به جای هستهٔ هیدروژن با هستهٔ نیتروژن برخوردهای کشسان انجام می‌دهند. البته، عبارت به‌دست آمده در قسمت (الف) باز هم معتبر است، کافی است به جای v_H و m_H به ترتیب v_N و m_N بگذاریم. بنابراین اگر v_H و v_N در آزمایشهای جداگانه‌ای اندازه‌گیری شوند، می‌توانیم v_n را بین دو رابطهٔ مربوط به هیدروژن و نیتروژن حذف کنیم تا مقداری برای m_n حاصل شود. مقادیری که چادویک به‌دست آورد اینها بود:

$$v_H = ۳٫۳ \times ۱۰^{۹}\mathrm{cm/s}$$

$$v_N = ۰٫۴۷ \times ۱۰^{۹}\mathrm{cm/s}$$

مقدار m_n (که چادویک محاسبه کرد) چقدر است؟ این مقدار را با مقدار تثبیت شده $m_n = ۱٫۰۰۸۶۷\mathrm{u}$ مقایسه کنید. (در این مسئله فرض کنید $m_H = ۱٫۰\,\mathrm{u}$ و $m_N = ۱۴\mathrm{u}$ است.)



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. در برخورد کشسان بین ذرهٔ m_1 و ذرهٔ m_2 که در ابتدا ساکن است، نشان بدهید که: (الف) زاویه‌ای که تحت آن ذرهٔ m_1

ممکن است بر اثر برخورد بیشترین انحراف را پیدا کند، θ_m، با رابطهٔ $\cos^2\theta_m = 1 - m_2^2/m_1^2$ بیان می‌شود، به‌طوری که اگر $m_1 > m_2$ باشد، $0 \leqq \theta_m \leqq \pi/2$ است؛ (ب) اگر $m_1 = m_2$ باشد، $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ است؛ (ج) اگر $m_1 < m_2$ باشد، θ_1 می‌تواند تمام مقادیر بین ۰ و π را اختیار کند.

بخش ۱۰ـ۶ چارچوب مرجع مرکز جرم

۶۰. (الف) نشان بدهید که، در برخورد کشسان یک‌بعدی بین دو جسم به جرمهای m_1 و m_2 که به‌ترتیب با سرعتهای اولیه v_{1i} و v_{2i} در حرکت‌اند، سرعت حرکت مرکز جرم برابر است با

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)v_{2i}$$

(ب) با استفاده از معادلات ۱۵ و ۱۶ نشان بدهید که v_{cm} بعد از برخورد هم همان است که قبل از برخورد بود.

۶۱. در چارچوب آزمایشگاه، جسمی به جرم ۳٫۱۶ کیلوگرم با سرعت $15.6\,\mathrm{m/s}$ به سمت چپ در حرکت است که با جسمی به جرم ۲٫۸۴ کیلوگرم که با سرعت $12.2\,\mathrm{m/s}$ به سمت راست در حرکت است رودررو برخورد می‌کند. مرکز جرم این سیستم دو جسمی بعد از برخورد با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

۶۲. ذره‌ای به جرم m_1 که با سرعت v_{1i} در حرکت است با ذرهٔ دیگری به جرم m_2 که ساکن است، برخورد کاملاً ناکشسان انجام می‌دهد. (الف) انرژی جنبشی سیستم قبل از برخورد چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی سیستم بعد از برخورد چقدر است؟ (ج) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه هدررفته است؟ (د) فرض کنید $\mathbf{v}_{cm}$ سرعت حرکت مرکز جرم این سیستم باشد. برخورد را از چارچوب مرجعی که همراه مرکز جرم حرکت می‌کند (چارچوب پریم‌دار) نظاره کنید، که درآن $v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$ و $v'_{2i} = -v_{cm}$ است. محاسبات قسمتهای (الف)، (ب)، و (ج) را از دید ناظر این چارچوب تکرار کنید. آیا انرژی جنبشی هدر رفته در هر دو مورد یکسان است؟ در این باره توضیح بدهید.

بخش ۱۰ـ۷ فرایندهای واپاشی خودبه‌خودی

۶۳. ذره‌ای که Σ^- (سیگمای منفی) نامیده می‌شود و در چارچوب مرجع معینی در حال سکون است، به‌طور خودبه‌خودی به‌صورت زیر به دو ذرهٔ دیگر وامی‌پاشد

$$\Sigma^- \to \pi^- + \mathrm{n}$$

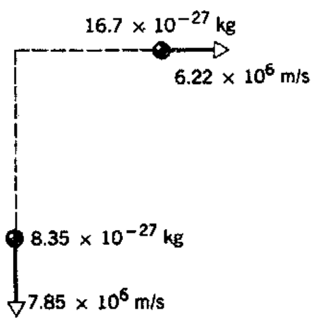
جرم این ذره‌ها عبارت است از

$$m_\Sigma = 2340.5 m_e$$
$$m_\pi = 273.2 m_e$$
$$m_n = 1838.65 m_e$$

که در آنها m_e جرم الکترون است. (الف) انرژی جنبشی کل محصولات واپاشی را به‌دست بیاورید. (ب) هر یک از محصولات واپاشی چقدر انرژی جنبشی کسب می‌کنند؟

۶۴. ذرهٔ ساکنی به جرم m خودبه‌خود، به دو ذره با جرمهای m_1 و m_2 وامی‌پاشد که سرعتهای آنها به ترتیب v_1 و v_2 است. نشان بدهید که $m > m_1 + m_2$ است.

۶۵. هستهٔ ساکنی خودبه‌خود به سه ذره وامی‌پاشد. دو ذره از این سه ذره آشکارسازی می‌شوند؛ جرمها و سرعتهای آنها در شکل ۴۲ مشخص شده است. (الف) تکانهٔ ذرهٔ سوم که می‌دانیم جرمی برابر با $11.7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ دارد چقدر است؟ (ب) چه مقدار انرژی جنبشی (برحسب MeV) در این فرایند واپاشی ظاهر می‌شود؟



شکل ۴۲. مسئلهٔ ۶۵

۶۶. یک پیون ساکن به‌صورت زیر وامی‌پاشد

$$\pi \to \mu + \nu$$

μ نمایندهٔ میون (با انرژی سکون $105.7\,\mathrm{MeV}$) و ν نمایندهٔ نوترینو (با انرژی سکون صفر) است. انرژی جنبشی اندازه‌گیری شده برای میون $4.100\,\mathrm{MeV}$ است. (الف) تکانهٔ نوترینو را برحسب یکای MeV/c محاسبه کنید. (ب) انرژی سکون پیون را محاسبه کنید.

پروژهٔ کامپیوتری

۶۷. یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسید که برخورد کشسان بین دو ذره با جرمهای m_1 و m_2 و سرعتهای اولیه v_{1i} و v_{2i} را توصیف کند. این برنامه باید مقادیر عددی این چهارکمیت را به عنوان داده‌های ورودی بگیرد و مقادیر عددی سرعتهای نهایی v_{1f} و v_{2f} و همچنین سرعت مرکز جرم، v_{cm}، را به عنوان خروجی به‌دست بدهد. از برنامه‌ای که می‌نویسید برای بررسی هر تعداد از حالتهای خاصی که به فکرتان می‌رسد ــ مثلاً $m_1 = m_2$، $m_1 \gg m_2$، $m_1 \ll m_2$، $v_{1i} \gg v_{2i}$، $v_{1i} = v_{2i}$، و $v_{1i} = -v_{2i}$ ــ استفاده کنید.

۱۳

تکانهٔ زاویه‌ای

در فصل ۱۲ دینامیک حرکت دورانی جسم صلب حول محور ثابت در یک چارچوب مرجع لخت را بررسی کردیم. دیدیم که رابطهٔ اسکالر $\sum\tau = I\alpha$ برای حل مسائل دوران حول محور ثابت کافی است.

در این فصل، بررسی‌مان را به وضعیتهایی که در آنها ممکن است محور دوران در یک چارچوب مرجع لخت ثابت نباشد تعمیم می‌دهیم. برای حل این نوع مسائل دینامیکی، یک رابطهٔ برداری برای حرکت دورانی پیدا می‌کنیم که مشابه با شکل برداری قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$، برای حرکت ذره است. **تکانهٔ زاویه‌ای** را هم معرفی می‌کنیم و اهمیت آن‌را، به عنوان یک خاصیت دینامیکی دوران، نشان می‌دهیم.

سرانجام نشان می‌دهیم که، در سیستمهایی که هیچ گشتاور خارجی خالصی به آنها وارد نمی‌شود، قانون مهم **پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای** برقرار است.

۱ـ۱۳ تکانهٔ زاویه‌ای ذره

دیدیم که تکانهٔ خطی برای مطالعهٔ حرکت انتقالی تک‌ذره‌ها یا سیستمهایی از ذره‌ها، منجمله اجسام صلب، کمیت مفیدی است. مثلاً در برخوردها تکانهٔ خطی پایسته‌است. تکانهٔ خطی یک تک‌ذره عبارت است از $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (معادلهٔ ۱۹، فصل ۹)، و تکانهٔ خطی سیستمی از ذره‌ها برابر است با $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$ (معادلهٔ ۲۵، فصل ۹) که در آن M جرم کل سیستم و $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$ سرعت مرکز جرم آن است. مشابه تکانهٔ خطی درحرکت دورانی را تکانهٔ زاویه‌ای می‌نامند، که آن‌را برای مورد خاص یک تک‌ذره در زیر تعریف می‌کنیم. بعداً، این تعریف را گسترش می‌دهیم تا شامل مجموعه‌های ذرات شود و نشان می‌دهیم که تکانهٔ زاویه‌ای در مطالعهٔ حرکت دورانی همان‌قدر مفهوم مفیدی است که تکانهٔ خطی در حرکت انتقالی.

ذره‌ای به جرم m و تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ را در مکان $\mathbf{r}$ نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت در نظر بگیرید؛ برای سادگی، دستگاه مختصات را در شکل ۱ چنان اختیار کرده‌ایم که صفحهٔ متشکل از $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ همان صفحهٔ xy باشد. تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ ذره نسبت به مبدأ O را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (۱)$$

توجه کنید که برای تعریف تکانهٔ زاویه‌ای باید مبدأ O مشخص باشد تا بتوانیم بردار مکان $\mathbf{r}$ را تعریف کنیم.

تکانهٔ زاویه‌ای بردار است. اندازهٔ این بردار برابر است با

$$l = rp\ \sin\ \theta \qquad (۲)$$

که θ زاویهٔ کوچکتر بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ است؛ راستای این بردار عمود است بر صفحه‌ای که $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ تشکیل می‌دهند، و جهت آن طبق قاعدهٔ دست راست معین می‌شود: بردار $\mathbf{r}$ را، از طریق زاویهٔ کوچکتر، در جهت چهار انگشت خمیدهٔ دست راست به طرف $\mathbf{p}$ بچرخانید؛ حالا شست کشیدهٔ دست راست شما در جهت $\mathbf{l}$ است (موازی با محور z در شکل ۱).

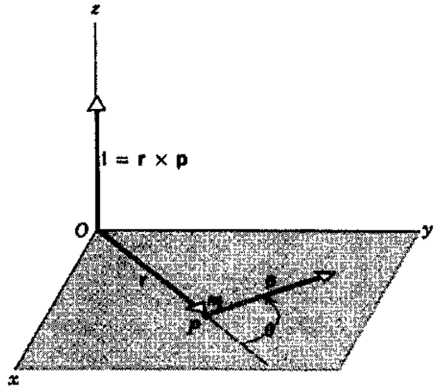
اندازهٔ بردار $\mathbf{l}$ را می‌توانیم به‌صورت

$$l = (r\ \sin\ \theta)p = pr_\perp \qquad (۳\text{الف})$$

یا به‌صورت

$$l = r(p\ \sin\ \theta) = rp_\perp \qquad (۳\text{ب})$$

بنویسیم، که $r_\perp = r\ \sin\ \theta$ مؤلفهٔ بردار $\mathbf{r}$ در راستای عمود بر خط اثر $\mathbf{p}$ است و $p_\perp = p\ \sin\ \theta$ مؤلفهٔ $\mathbf{p}$ در راستای عمود بر $\mathbf{r}$ است. معادلهٔ ۳ب نشان می‌دهد که فقط مؤلفهٔ عمود بر $\mathbf{r}$ بردار $\mathbf{p}$ در تکانهٔ زاویه‌ای سهیم است. وقتی زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ برابر °۰ یا °۱۸۰ باشد، مؤلفه عمودی وجود ندارد ($p_\perp = p\ \sin\ \theta = ۰$)؛ در این‌صورت خط اثر $\mathbf{p}$ از مبدأ می‌گذرد و $r_\perp$ نیز برابر صفر است. در این مورد هر



شکل۱. ذره‌ای به جرم m، در نقطهٔ P قرار دارد که با بردار مکان $\mathbf{r}$ مشخص شده است. تکانهٔ خطی این ذره $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است. (برای سادگی، هم $\mathbf{r}$ و هم $\mathbf{p}$ را در صفحهٔ xy گرفته‌ایم.) نسبت به مبدأ O، تکانهٔ زاویه‌ای ذره $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ است که در این مورد با محور z موازی است.

یک از معادلات ۳الف و ۳ب نشان می‌دهند که تکانهٔ زاویه‌ای l برابر با صفر است.

حالا برای یک ذره رابطهٔ مهمی بین گشتاور نیرو و تکانهٔ زاویه‌ای به‌دست می‌آوریم. ابتدا از معادلهٔ ۱ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \qquad (۴)$$

مشتق‌گیری از یک حاصل‌ضرب برداری به همان صورتی انجام می‌شود که مشتق‌گیری از یک حاصل‌ضرب معمولی، جز آنکه در این مورد مجاز به عوض کردن ترتیب جمله‌ها نیستیم. پس از انجام مشتق‌گیری داریم

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$d\mathbf{r}/dt$ همان سرعت لحظه‌ای $\mathbf{v}$ ذره است و $\mathbf{p}$ هم برابر با $m\mathbf{v}$ است. با نشاندن این مقادیر در جملهٔ اول سمت راست معادلهٔ بالا نتیجه می‌گیریم

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (۵)$$

ولی $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = ۰$، چون حاصل‌ضرب برداری دو بردار موازی صفر است. حالا اگر به جای $d\mathbf{p}/dt$ در جملهٔ دوم، نیروی خالص $\sum \mathbf{F}$ وارد بر ذره را قرار بدهیم داریم

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}$$

طرف راست معادلهٔ بالا همان گشتاور خالص وارد بر ذره است، و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} \qquad (۶)$$

این رابطه می‌گوید که گشتاور خالص وارد بر یک ذره برابر با آهنگ تغییر تکانهٔ زاویه‌ای آن با زمان است. گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ و تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ باید نسبت به مبدأ مشترکی تعریف شده باشند. معادلهٔ ۶ مشابه دورانی $\sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (معادلهٔ ۲۰ فصل ۹) است، که بنابه این معادله، نیروی خالص وارد بر یک ذره برابر است با آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ خطی آن ذره.

معادلهٔ ۶ مانند هر معادلهٔ برداری دیگر، هم‌ارز سه معادلهٔ اسکالر است که عبارت‌اند از

$$\sum \tau_x = \frac{dl_x}{dt}, \quad \sum \tau_y = \frac{dl_y}{dt}, \quad \sum \tau_z = \frac{dl_z}{dt} \qquad (۷)$$

به‌این ترتیب، مؤلفهٔ x گشتاور خارجی برایند برابر است با آهنگ زمانی تغییر در مؤلفهٔ x تکانهٔ زاویه‌ای. در راستاهای y و z هم روابط مشابهی برقرار است.

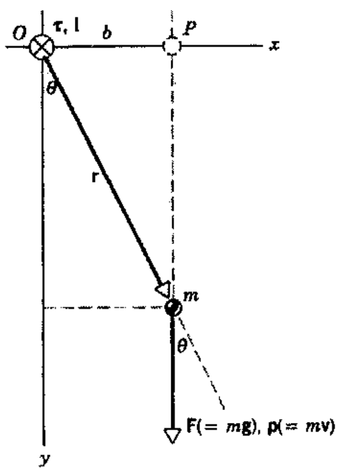
مثال ۱. ذره‌ای به جرم m از حالت سکون از نقطهٔ P در شکل ۲ رها شده است، این ذره موازی محور y (در امتداد قائم) سقوط می‌کند. (الف) گشتاور نیروی وارد بر ذرهٔ m نسبت به مبدأ O را در هر زمان t به‌دست بیاورید. (ب) تکانهٔ زاویه‌ای m را نسبت به همان مبدأ در زمان t پیدا کنید. (ج) نشان بدهید که جوابهای شما در معادلهٔ ۶، $\sum \boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$، صدق می‌کنند.

حل: (الف) گشتاور نیرو عبارت است از $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ و اندازهٔ آن برابر است با

$$\tau = rF \sin \theta$$

در این مثال، داریم $r \sin \theta = b$ و $F = mg$، بنابراین

$$\tau = mgb = \text{مقدار ثابت}$$



شکل۲. مثال ۱. ذره‌ای به جرم m از نقطهٔ P سقوط می‌کند. گشتاور نیروی $\boldsymbol{\tau}$ و تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ نسبت به مبدأ O هر دو عمود بر صفحهٔ شکل و به طرف داخل‌اند؛ نشانهٔ ⊗ در نقطهٔ O به همین معنی بکار رفته است.

توجه کنید که گشتاور نیرو حاصل‌ضرب نیروی mg در بازوی گشتاور b است. قاعدهٔ دست راست نشان می‌دهد که $\boldsymbol{\tau}$ عمود بر صفحهٔ شکل و به‌طرف داخل است.

(ب) تکانهٔ زاویه‌ای از معادلهٔ ۱، $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$، به‌دست می‌آید و اندازهٔ آن (از معادلهٔ ۲) برابر است با

$$l = rp\ \sin\ \theta$$

در این مثال، $r \sin\ \theta = b$ و $p = mv = m(gt)$ است، بنابراین داریم

$$l = mgbt$$

قاعدهٔ دست راست نشان می‌دهد که بردار $\mathbf{l}$ عمود بر صفحهٔ شکل و به طرف داخل صفحه است، یعنی در واقع $\mathbf{l}$ و $\boldsymbol{\tau}$ با هم موازی‌اند. بردار $\mathbf{l}$ برحسب زمان فقط از لحاظ اندازه تغییر می‌کند و جهت آن در این مورد همواره ثابت می‌ماند.

(ج) اگر معادلهٔ ۶ را برحسب اندازهٔ بردارها بنویسیم، داریم

$$\tau = \frac{dl}{dt}$$

با قراردادن عبارتهای مربوط به τ و l از قسمتهای (الف) و (ب) نتیجه می‌شود

$$mgb = \frac{d}{dt}(mgbt) = mgb$$

که حاصل این عمل یک اتحاد است. به این‌ترتیب رابطهٔ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ در این مورد ساده نتیجهٔ صحیح را به‌دست می‌دهد. در واقع، اگر ثابت b را از طرفین دو جملهٔ اول در رابطهٔ بالا حذف کنیم و اگر به‌جای gt کمیت هم‌ارز آن یعنی v را قرار بدهیم، داریم

$$mg = \frac{d}{dt}(mv)$$

از آنجا که $F = mg$ و $p = mv$ است، رابطهٔ بالا همان رابطهٔ آشنای $F = dp/dt$ است. به‌این ترتیب، همان‌طور که قبلاً گفته‌ایم، روابطی مانند $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$، که خیلی هم مفیدند، روابط اساساً جدیدی در مکانیک کلاسیک نیستند، بلکه فرمولبندی مناسبی از همان قوانین نیوتون برای حرکت دورانی‌اند.

توجه داشته باشید که مقادیر τ و l بستگی به مبدأ مختصاتی دارند که انتخاب می‌کنیم یعنی به b وابسته است. درحالت خاص، اگر $b = 0$ باشد، $r = 0$ و در نتیجه $l = 0$ است.

۱۳-۲ سیستمهای ذرات

تا اینجا فقط تک‌ذره‌ها را بررسی کرده‌ایم. برای اینکه تکانهٔ زاویه‌ای کل $\mathbf{L}$ یک سیستم از ذرات را حول یک نقطهٔ معلوم محاسبه کنیم باید تکانهٔ زاویه‌ای تک‌تک‌ذره‌ها حول این نقطه را به‌صورت برداری با هم جمع کنیم. برای یک سیستم N ذره‌ای داریم

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \cdots + \mathbf{l}_N = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{l}_n$$

که در آن جمع (برداری) روی همهٔ ذرات تشکیل‌دهندهٔ سیستم انجام می‌شود.

ممکن است تکانهٔ زاویه‌ای کل $\mathbf{L}$ یک سیستم حول یک نقطهٔ مرجع ثابت (که بنابر تعریف $\mathbf{l}$ در معادلهٔ ۱، آن‌را مبدأ یک چارچوب مرجع لخت در نظر می‌گیریم) برحسب زمان تغییر کند. یعنی

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{l}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{l}_2}{dt} + \cdots = \sum_{n=1}^{N} \frac{d\mathbf{l}_n}{dt}$$

می‌دانیم که برای هر ذره $d\mathbf{l}_n/dt = \boldsymbol{\tau}_n$ است، و با قراردادن در معادلهٔ بالا، داریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_n$$

یعنی، آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ زاویه‌ای کل یک سیستم از ذرات برابر است با برایند گشتاورهای وارد بر آن سیستم.

گشتاورهای وارد بر یک سیستم را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: (۱) گشتاورهای ناشی از نیروهای داخلی بین ذرات و (۲) گشتاورهای مربوط به نیروهای خارجی. اگرقانون سوم نیوتون به‌صورت (به‌اصطلاح) قوی آن برقرار باشد، یعنی، اگر نیروهای بین هر دو ذره نه تنها برابر و در خلاف جهت همدیگر باشند بلکه در امتداد خط واصل بین دو ذره نیز عمل کنند، گشتاور داخلی کل صفر است زیرا گشتاور حاصل از هر زوج نیروی عمل‌ـعکس‌العمل صفر است.

به‌این‌ترتیب چشمهٔ اول، یعنی گشتاور حاصل از نیروهای داخلی، هیچ سهمی در تغییر $\mathbf{L}$ ندارد. تنها چشمهٔ دوم (گشتاور نیروی حاصل از نیروهای خارجی) باقی می‌ماند، و می‌توانیم بنویسیم

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (8)$$

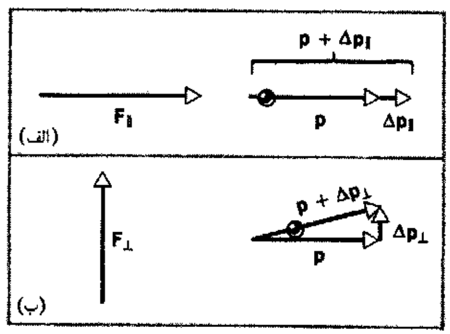
که در آن $\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ عبارت از برایند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم است. معادلهٔ ۸ را می‌توان چنین بیان کرد: گشتاور خارجی خالص وارد بر یک سیستم از ذرات برابر با آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ زاویه‌ای کل آن سیستم است. گشتاور و تکانهٔ زاویه‌ای، هر دو باید نسبت به مبدأ مشترکی در یک چارچوب مرجع لخت محاسبه شوند. در مواردی که امکان بروز هیچ ابهامی در کار نباشد، شاخص پایین $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ را حذف می‌کنیم.

معادلهٔ ۸ تعمیم معادلهٔ ۶ به مجموعه‌ای از ذرات است. این معادله، چه ذرات تشکیل‌دهندهٔ سیستم نسبت به هم در حرکت باشند و چه نسبت به هم وضعیت ثابتی در فضا داشته باشند (مانند جسم صلب) برقرار است.

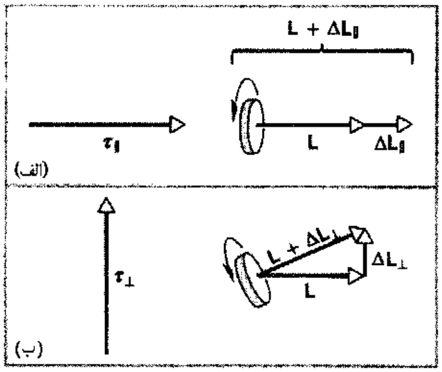
معادلهٔ ۸ مشابه دورانی معادلهٔ ۲۷ فصل ۹ ($\sum \mathbf{F}_{\rm ext} = d\mathbf{P}/dt$) است، و می‌گوید که برای یک سیستم از ذرات (اعم از اینکه صلب باشد یا نباشد) نیروی خارجی خالص وارد بر سیستم برابر است با آهنگ زمانی تغییر در تکانهٔ خطی کل آن سیستم.

می‌خواهیم ببینیم که بین تغییر تکانهٔ خطی در اثر نیرو و تغییر تکانهٔ زاویه‌ای در اثر گشتاور، چه شباهتی هست. فرض کنید نیروی $\mathbf{F}$ به ذره‌ای با تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ در حرکت است وارد شود. نیروی $\mathbf{F}$ را می‌توانیم، مانند شکل ۳، به دو مؤلفه تجزیه کنیم: یک مؤلفهٔ آن ($\mathbf{F}_\parallel$) موازی با جهت (لحظه‌ای) $\mathbf{p}$ و مؤلفهٔ دیگر ($\mathbf{F}_\perp$) عمود بر $\mathbf{p}$. در بازهٔ زمانی کوتاه Δt، نیروی $\mathbf{F}$ سبب تغییر تکانه‌ای برابر با $\Delta\mathbf{p}$ می‌شود، که مطابق با رابطهٔ $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$ است. پس $\Delta\mathbf{p}$ موازی با $\mathbf{F}$ است. مؤلفه $\mathbf{F}_\parallel$ موجب تغییر تکانهٔ $\Delta\mathbf{p}_\parallel$ موازی با $\mathbf{p}$ می‌شود، که این مؤلفه به $\mathbf{p}$ افزوده می‌شود و اندازهٔ آن‌را تغییر می‌دهد ولی جهت آن‌را تغییر نمی‌دهد (شکل ۳الف). از طرف دیگر، مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{F}_\perp$ موجب تغییر تکانهٔ $\Delta\mathbf{p}_\perp$ می‌شود که جهت $\mathbf{p}$ را تغییر می‌دهد، ولی تا وقتی که $\Delta\mathbf{p}_\perp$ در مقایسه با $\mathbf{p}$ کوچک باشد مقدار آن‌را تغییر نمی‌دهد (شکل ۳ب). نمونه‌ای از این حرکت، حرکت ذره‌ای است که با سرعتی به اندازهٔ ثابت روی یک دایره می‌گردد. این حرکت فقط تحت تأثیر نیروی مرکزگرایی که همواره عمود بر سرعت مماسی است انجام می‌شود.

همین تحلیل در مورد اثر گشتاور هم صادق است (شکل ۴). در این مورد $\boldsymbol{\tau} = \Delta\mathbf{L}/\Delta t$ است و $\Delta\mathbf{L}$ باید موازی با $\boldsymbol{\tau}$ باشد. $\boldsymbol{\tau}$ را هم به‌دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم؛ $\boldsymbol{\tau}_\parallel$ موازی با $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\tau}_\perp$ عمود بر $\mathbf{L}$. مؤلفهٔ موازی با $\mathbf{L}$ فقط اندازهٔ تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر می‌دهد و نه جهت آن‌را (شکل ۴الف). مؤلفهٔ عمود بر $\mathbf{L}$ سبب تغییر $\Delta\mathbf{L}_\perp$ عمود بر بردار $\mathbf{L}$ می‌شود، که جهت $\mathbf{L}$ را تغییر می‌دهد ولی مقدار آن‌را تغییر نمی‌دهد (شکل ۴ب). این وضعیت اخیر همان است که در حرکت فرفره و ژیروسکوپ بروز می‌کند (اینها را در بخش ۱۳ـ۵ بررسی خواهیم کرد). از مقایسهٔ شکلهای ۳ و ۴ می‌توانید شباهتهای میان دینامیک انتقالی و دینامیک دورانی را مشاهده کنید.



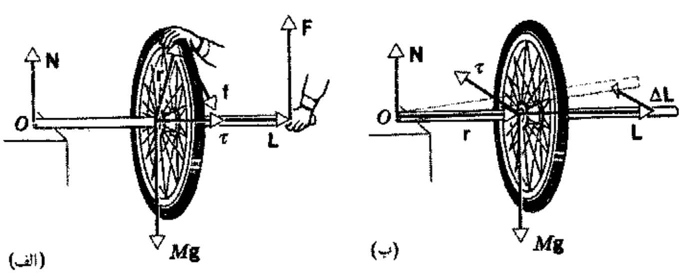
شکل۳. (الف) وقتی نیرو یک مؤلفهٔ موازی $\mathbf{F}_\parallel$ با تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ ذره داشته باشد، تکانهٔ خطی ذره به اندازهٔ $\Delta\mathbf{p}_\parallel$ تغییر می‌کند که موازی با $\mathbf{p}$ است. (ب) وقتی نیرو یک مؤلفهٔ عمود $\mathbf{F}_\perp$ بر تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ ذره داشته باشد، تکانهٔ خطی ذره به اندازهٔ $\Delta\mathbf{p}_\perp$ تغییر می‌دهد که عمود بر $\mathbf{p}$ است. در این‌صورت ذره در راستای بردار $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}_\perp$ حرکت می‌کند.



شکل۴. (الف) مؤلفهٔ $\boldsymbol{\tau}_\parallel$ (موازی با تکانهٔ زاویه‌ای) گشتاور نیرو، تکانهٔ زاویه‌ای را به‌اندازهٔ $\Delta\mathbf{L}_\parallel$ تغییر می‌دهد که با $\mathbf{L}$ موازی است. (ب) مؤلفهٔ $\boldsymbol{\tau}_\perp$ گشتاور نیرو (عمود بر تکانهٔ زاویه‌ای)، تکانهٔ زاویه‌ای را به‌اندازهٔ $\Delta\mathbf{L}_\perp$ تغییر می‌دهد که بر $\mathbf{L}$ عمود است. در این‌صورت محور دوران در راستای برایند برداری $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}_\perp$ قرار می‌گیرد.

یک شباهت دیگر میان پدیده‌های خطی و دورانی این است که اگر (الف) نیرو عمود بر تکانهٔ خطی اثر کند (شکل ۳ب) یا (ب) اگر گشتاور نیرو عمود بر تکانهٔ زاویه‌ای اثر کند (شکل ۴ب)، کاری انجام نمی‌شود. در هیچ‌یک از این دو مورد، عامل خارجی موجب تغییر انرژی جنبشی نمی‌شود، و حرکت با همان سرعت خطی یا دورانی ادامه می‌یابد.

نمونه‌ای از کاربرد معادلهٔ ۸ برای دینامیک دورانی در شکل ۵ نشان داده شده است. در شکل ۵الف یک سر محور یک چرخ چرخان روی ستونی قرار گرفته است و سر دیگر محور را دانشجویی در دست دارد. دانشجو برای اینکه چرخ تندتر بچرخد نیرویی مماس بر لبهٔ چرخ به آن وارد می‌کند. گشتاوری که این نیرو ایجاد می‌کند موازی با تکانهٔ زاویه‌ای چرخ است، و هر دو بردار $\boldsymbol{\tau}$ و $\mathbf{L}$ به‌طرف دانشجو هستند. این گشتاور، موجب افزایش تکانهٔ زاویه‌ای چرخ می‌شود. در شکل ۵ب، دانشجو یک سر محور را رها کرده است. حالا گشتاورها را حول تنها تکیه‌گاه دیگر بررسی می‌کنیم. دو نیرو به سیستم اثر می‌کند؛ یکی نیروی



شکل۵. (الف) نیروی مماسی $\mathbf{f}$ وارد بر طوق چرخ سبب ایجاد گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ (حول مرکز چرخ) در امتداد محور دوران می‌شود، و مقدار سرعت زاویه‌ای چرخ را افزایش می‌دهد ولی جهت آن‌را عوض نمی‌کند. (ب) اگر انتهای محور را رها کنیم، گشتاور نیروی گرانشی حول نقطهٔ O به‌طرف داخل صفحهٔ کتاب، یعنی عمود بر محور دوران است (شکل ۴ب). این گشتاور جهت محور دوران را تغییر می‌دهد و محور چرخ در صفحهٔ افقی به‌طرف وضعیتی که با خط‌چین نشان داده شده است حرکت می‌کند.

عمود بر سطح در نقطهٔ تکیه‌گاه، که حول این نقطه گشتاوری ندارد و دیگری نیروی وزن چرخ که به طرف پایین در مرکز جرم وارد می‌شود. گشتاور ناشی از وزن چرخ حول O بر بردار $\mathbf{L}$ عمود است و اثر آن تغییر جهت $\mathbf{L}$ است (شکل ۴ب). ولی، چون جهت $\mathbf{L}$ همان جهت محور چرخ است.[1] اثر نیروی (رو به پایین) گرانی آن است که محور را به‌طور جانبی بچرخاند. محور چرخ (در صفحهٔ افقی) حول نقطهٔ تکیه‌گاه می‌چرخد. خودتان امتحان کنید! (اگر چرخ در اختیار ندارید، می‌توانید از یک ژیروسکوپ بازیچه‌ای استفاده کنید.)

معادلهٔ ۸ در صورتی درست است که τ و $\mathbf{L}$ نسبت به مبدأ یک چارچوب مرجع لخت اندازه‌گیری شوند. ممکن است این سؤال پیش بیاید که اگر این دو بردار را نسبت به یک نقطهٔ اختیاری (مثلاً یک ذرهٔ مشخص) از سیستم متحرک اندازه‌گیری کنیم، آیا باز هم این معادله برقرار هست یا نه. در حالت کلی، چنین نقطه‌ای وقتی جسم یا سیستم ذرات حرکت انتقالی انجام می‌دهد، پایین و بالا می‌شود، و وضعیت نسبی ذراتش تغییر می‌کند حرکت بسیار پیچیده‌ای دارد و معادلهٔ ۸ در مورد چنین نقطهٔ مرجعی قابل استفاده نیست. ولی اگر نقطهٔ مرجع را مرکز جرم سیستم اختیار کنیم، با آنکه ممکن است این نقطه در چارچوب مرجع لخت مورد نظر ما شتاب داشته باشد، باز هم معادلهٔ ۸ برقرار است. (نگاه کنید به مسئلهٔ ۸) این خاصیت قابل توجه دیگری از مرکز جرم است. به‌این ترتیب می‌توانیم حرکت کلی سیستمی از ذرات را به‌حرکت انتقالی مرکز جرم (معادلهٔ ۲۷ فصل ۹) و حرکت دورانی حول مرکز جرم (معادلهٔ ۸) تجزیه کنیم.

۱۳ـ۳ تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای

برای معرفی وضعیتهایی که در آنها توجه به ماهیت برداری سرعت زاویه‌ای، گشتاور نیرو، و تکانهٔ زاویه‌ای کاملاً ضروری است، ابتدا مثال ساده‌ای از حرکت دورانی یک ذره را در نظر می‌گیریم، که نمونه‌ای از مواردی است که در آنها سرعت زاویه‌ای و تکانهٔ زاویه‌ای با هم موازی نیستند.

شکل ۶الف ذره‌ای به جرم m را نشان می‌دهد که توسط یک بازوی صلب بی‌جرم به طول r'، به محور صلب بی‌جرمی متصل شده است. بازو بر محور عمود است. ذره در دایره‌ای به شعاع r' با سرعتی به مقدار ثابت v حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم آزمایش در ناحیه‌ای انجام می‌شود که در آن گرانش ناچیز است، یعنی منظور کردن نیروی گرانی وارد بر ذره ضروری نیست. تنها نیرویی که به این ذره وارد می‌شود یک نیروی مرکزگراست. این نیرو توسط بازویی که ذره به محور متصل می‌کند اعمال می‌شود.

محور دوران توسط دو یاتاقان ایده‌آل (بدون اصطکاک) مقید به محور z است. یاتاقان پایینی را مبدأ دستگاه مختصات می‌گیریم. خواهیم دید که یاتاقان بالایی برای جلوگیری از لنگی محور دوران حول محور z ضروری است. لنگش در صورتی اتفاق می‌افتد که سرعت زاویه‌ای موازی با تکانهٔ زاویه‌ای نباشد.

سرعت زاویه‌ای ω جسم به طرف بالا در امتداد (یا به‌طور معادل، موازی با) محور z است (شکل ۶ب). این جهت با رابطهٔ برداری $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (معادلهٔ ۱۶ فصل ۱۱) سازگار است. بردار سرعت زاویه‌ای موازی با محور z است، و فرقی نمی‌کند که مبدأ را درکجای این محور گرفته باشیم. همچنین مقدار این بردار هم بستگی به جای مبدأ ندارد، چون این مقدار (از تعریف حاصل‌ضرب خارجی) با رابطهٔ $v/(r\sin\theta) = v/r'$ بیان می‌شود.

تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ ذره نسبت به مبدأ O چارچوب مرجع از رابطهٔ ۱ به‌دست می‌آید، یعنی

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ (یعنی $m\mathbf{v}$) را در شکل ۶ب نشان داده‌ایم. بردار $\mathbf{l}$ بر صفحهٔ متشکل از بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ عمود است و به‌همین دلیل $\mathbf{l}$ موازی با ω نیست. توجه کنید (شکل ۶ج) که $\mathbf{l}$ دارای یک مؤلفهٔ (برداری)، $\mathbf{l}_z$، موازی با ω دارد، ولی مؤلفهٔ (برداری) دیگری هم دارد، $\mathbf{l}_\perp$، که عمودند بر ω است. این حرکت یکی از مواردی است که در آن شباهت میان حرکت خطی و دایره‌ای برقرار نیست: $\mathbf{p}$ همواره موازی با $\mathbf{v}$ است، ولی $\mathbf{l}$ همیشه‌موازی با ω نیست. اگر مبدأ مختصات را چنان اختیار کنیم که در صفحهٔ ذرهٔ چرخنده واقع شود، در آن‌صورت $\mathbf{l}$ موازی با ω هست؛ در غیر این‌صورت دو بردار موازی نیستند.[1]

حالا می‌خواهیم رابطهٔ‌میان $\mathbf{l}_z$ و ωی ذرهٔ چرخان را بررسی کنیم. از شکل ۶ج، که در آن بردار $\mathbf{l}$ را به مرکز دایره منتقل کرده‌ایم، داریم

$$l_z = l\sin\theta = r(mv)\sin\theta = r(mr'\omega)\sin\theta$$

که در آن از رابطهٔ $v = r'\omega$ استفاده کرده‌ایم. در رابطهٔ بالا به‌جای $r\sin\theta$ کمیت r' (شعاع دایره‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند) را می‌نشانیم و نتیجه می‌گیریم

$$l_z = mr'^2\omega \qquad (۹)$$

که mr'^2 لختی دورانی ذره، I، نسبت به محور z است. بنابراین

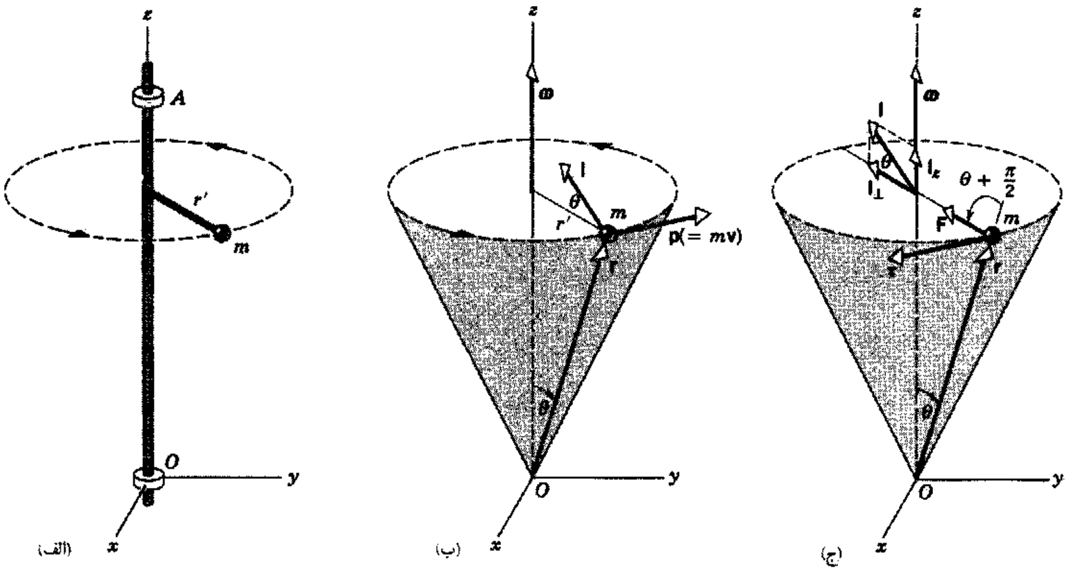
$$l_z = I\omega \qquad (۱۰)$$

توجه داشته باشید که رابطهٔ برداری $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\omega}$ (که مشابه رابطهٔ خطی $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است) در این مورد صحیح نیست، چون $\mathbf{l}$ و ω هم‌جهت نیستند.

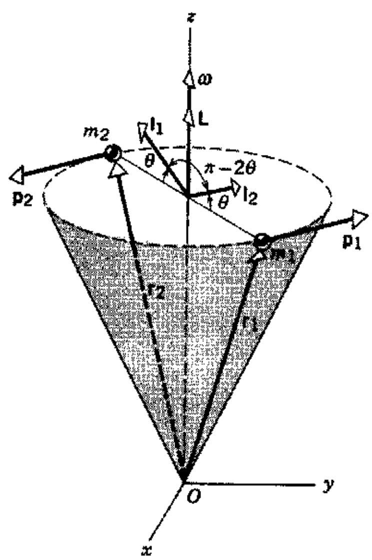
در چه شرایطی تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای در یک جهت قرار می‌گیرند؟ برای نشان دادن مطلب، فرض کنید ذرهٔ دیگری با همان جرم به این سیستم اضافه کنیم. این کار را، آن‌طورکه در شکل ۷ نشان داده شده است، با اتصال یک بازوی دیگر به محور مرکزی شکل ۶الف در همان موقعیت بازوی اول ولی در جهت مخالف انجام می‌دهیم. مؤلفهٔ $\mathbf{l}_\perp$ ناشی از این ذرهٔ دوم مساوی و از نظر جهت مخالف مؤلفهٔ

---

۱. این فقط در صورتی درست است که محور دوران یک محور تقارن جسم باشد.



شکل۶. (الف) ذره‌ای به جرم m توسط بازویی به طول r' به محوری که توسط دو یاتاقان (در نقاط O و A) نگه داشته شده متصل است و می‌تواند حول محور z دوران کند (ب) ذره با سرعت مماسی v در دایره‌ای به شعاع r' حول محور z می‌چرخد (به منظور ساده کردن شکل میله‌ها و یاتاقانها را حذف کرده‌ایم). تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ را حول مبدأ O نشان داده‌ایم. (ج) برای اینکه ذره در یک دایره حرکت کند، باید نیروی مرکزگرای $\mathbf{F}$ به جسم وارد شود. این نیرو در شکل نشان داده شده است. این نیروگشتاوری نیروی τ حول O ایجاد می‌کند. برای روشن شدن وضعیت حرکت، بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{l}$ و مؤلفه‌های موازی با و عمود بر محور z آن‌را در مرکز دایره نشان داده‌ایم.



شکل۷. دو ذره، هر یک به جرم m، که در دو انتهای یک قطر واقع شده‌اند حول محور z دوران می‌کنند. تکانهٔ زاویه‌ای کل دو ذره، $\mathbf{L}$، در این مورد با سرعت زاویه‌ای ω موازی است.

$\mathbf{l}_\perp$ مربوط به ذرهٔ اول است، و جمع دو بردار $\mathbf{l}_\perp$ برابر با صفر می‌شود. ولی، دو بردار $\mathbf{l}_z$ همسو هستند و با هم جمع می‌شوند. پس برای این سیستم دو ذره‌ای، تکانهٔ زاویه‌ای کل $\mathbf{L}$ موازی با ω است.

حالا می‌توانیم سیستم دو ذره‌ای را به یک جسم صلب، که از تعداد بی‌شماری ذره تشکیل شده است، تعمیم بدهیم. اگر جسم حول محور دوران متقارن باشد، یعنی به‌ازای هر ذره‌ای از جسم، یک ذره با همان جرم کاملاً در نقطهٔ مقابل ذرهٔ اول و درهمان فاصله از محور دوران قرار داشته باشد، در آن‌صورت جسم را می‌توان مانند مجموعه‌ای از زوج ذره‌هایی که بررسی کردیم، در نظر گرفت. دو بردار $\mathbf{L}$ و ω چون برای همهٔ چنین زوجهایی موازی هستند، در واقع برای تمام اجسام صلبی که چنین تقارنی داشته باشند نیز موازی‌اند. این نوع تقارن را تقارن محوری می‌گویند.

برای چنین اجسام صلب متقارنی $\mathbf{L}$ و ω موازی‌اند و می‌توانیم رابطهٔ برداری زیر را بنویسیم

$$\mathbf{L} = I\omega \qquad (۱۱)$$

ولی، فراموش نکنید که اگر $\mathbf{L}$ تکانهٔ زاویه‌ای کل باشد، معادلهٔ ۱۱ فقط در مورد اجسامی صادق است که نسبت به محور دوران متقارن باشند. اگر $\mathbf{L}$ نشاندهندهٔ مؤلفهٔ بردار تکانهٔ زاویه‌ای حول محور دوران باشد (یعنی $\mathbf{L}_z$)، در آن‌صورت معادلهٔ ۱۱ در مورد هر جسم صلبی، اعم از متقارن یا نامتقارن، که حول محور ثابتی دوران می‌کند صادق است.

در مورد اجسام متقارن (مانند سیستم دوذره‌ای شکل ۷) می‌توان یاتاقان پایینی شکل ۶الف را حذف کرد، و محور دوران همچنان

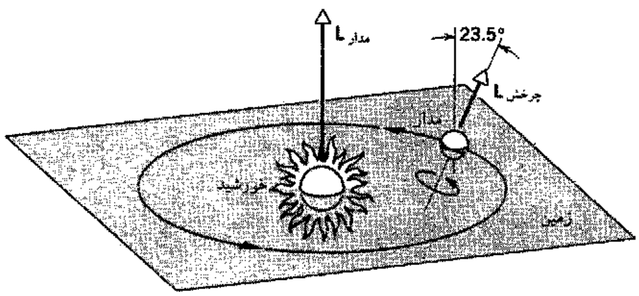
موازی محور z خواهد ماند. برای تحقیق این موضوع، توجه کنید که چرخاندن یک جسم متقارن مانند یک فرفرهٔ کوچک یا یک چرخ سنباده حول محوری که بین شست و انگشت نشان یک دست نگه داشته شده، چقدر آسان است. هر بی‌تقارنی کوچکی در جسم، وجود یاتاقان دوم را برای حفظ محور دوران در یک راستای ثابت الزامی می‌کند؛ چنان‌که در پایان این بخش خواهیم دید، این یاتاقان باید گشتاوری به محور، که همراه با دورانِ جسم می‌لنگد، وارد کند. این لنگ‌زدن برای اجسامی که با سرعتهای زیاد دوران می‌کنند (مانند چرخانهٔ بینِ توربینها) مسئله‌ای کاملاً جدی است. این چرخانه‌ها، با آنکه کاملاً متقارن طراحی می‌شوند، ممکن است به خاطر خطاهای کوچکی که، مثلاً، در نصب پره‌ها پیش می‌آید، اندکی نامتقارن از کار در بیاید. این چرخانه‌ها را می‌شود با افزودن یا حذف قطعات فلزی در مکانهای مناسب مجدداً متقارن کرد. برای این کار چرخ را در دستگاه مخصوصی می‌چرخانند؛ این دستگاه مقدار لنگی را اندازه می‌گیرد، تصحیح‌های لازم را محاسبه می‌کند و نتایج را نشان می‌دهد. در مورد چرخ اتومبیل هم با استفاده از همین نوع دستگاهها، وزنه‌های سربی در مکانهای مناسب روی لبهٔ رینگ لاستیک نصب می‌شود تا لنگی در سرعتهای زیاد را کاهش بدهد. در "بالانس کردن" چرخ اتومبیل، "مکانیک" در واقع سعی می‌کند بردارهای تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای چرخ را با هم موازی کند، تا از کرنش بلبرینگ‌های چرخ کاسته شود.

مثال ۲. کدام‌یک از کمیتهای زیر بزرگتر است: تکانهٔ زاویه‌ای زمین در اثر چرخش زمین حول محور خودش یا تکانهٔ زاویه‌ای زمین که از حرکت زمین به دور خورشید ناشی می‌شود؟

حل: برای مورد اول، زمین را به‌صورت کرهٔ یکنواختی در نظر می‌گیریم ($I = \frac{۲}{۵}MR_{\mathrm{E}}^{۲}$). سرعت زاویه‌ای این حرکت برابر است با $\omega = ۲\pi/T$، که T دورهٔ تناوب دوران است ($۲۴\mathrm{h} = ۸٫۶۴ \times ۱۰^{۴}\mathrm{s}$). به این‌ترتیب تکانهٔ زاویه‌ای چرخشی برابر است با

$$L_{\text{چرخش}} = I\omega = \frac{۲}{۵}MR_{\mathrm{E}}^{۲}\frac{۲\pi}{T}$$
$$= \frac{۲}{۵}(۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}\mathrm{kg})(۶٫۳۷ \times ۱۰^{۶}\mathrm{m})^{۲}\frac{۲\pi}{۸٫۶۴ \times ۱۰^{۴}\mathrm{s}}$$
$$= ۷٫۰۵ \times ۱۰^{۳۳}\mathrm{kg \cdot m^{۲}/s}$$

برای اینکه تکانهٔ زاویه‌ای مداری را محاسبه کنیم، لازم است لختی دورانی زمین را حول محوری که از خورشید می‌گذرد بدانیم. به این منظور می‌توانیم زمین را به‌صورت "ذره"‌ای با تکانهٔ زاویه‌ای $L = R_{\text{مدار}}p$ در نظر بگیریم، که $R_{\text{مدار}}$ شعاع مدار و p تکانهٔ خطی زمین است. اینجا هم سرعت زاویه‌ای از $\omega = ۲\pi/T$ به‌دست می‌آید، ولی در این مورد T دورهٔ تناوب مداری است ($۱\mathrm{y} = ۳٫۱۶ \times ۱۰^{۷}\mathrm{s}$). پس



شکل۸. مثال ۲. زمین روی مداری (که دایره فرض می‌شود) به دور خورشید، و همچنین حول محور خودش دوران می‌کند. دو بردار تکانهٔ زاویه‌ای با هم موازی نیستند، زیرا محور چرخش زمین یک زاویه‌ای، برابر با ۲۳٫۵°، با خط قائم بر صفحهٔ مدار زمین می‌سازد. طول بردارها در مقیاس مشترکی رسم نشده است؛ $L_{\text{مدار}}$ باید با ضریبی در حدود ۴×۱۰^{۶} از $L_{\text{چرخش}}$ بزرگتر باشد.

تکانهٔ زاویه‌ای مداری برابر است با

$$L_{\text{مدار}} = R_{\text{مدار}}p = R_{\text{مدار}}Mv = R_{\text{مدار}}M(\omega R_{\text{مدار}}) = MR_{\text{مدار}}^{۲}\frac{۲\pi}{T}$$
$$= (۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}\mathrm{kg})(۱٫۵۰ \times ۱۰^{۱۱}\mathrm{m})^{۲}\frac{۲\pi}{۳٫۱۶ \times ۱۰^{۷}\mathrm{s}}$$
$$= ۲٫۶۷ \times ۱۰^{۴۰}\mathrm{kg \cdot m^{۲}/s}$$

می‌بینیم که تکانهٔ زاویه‌ای مداری بسیار بیشتر از تکانهٔ زاویه‌ای چرخشی است.

بردار تکانهٔ زاویه‌ای مداری عمود است بر صفحهٔ مدار زمین (شکل ۸)، در حالی‌که بردار تکانهٔ زاویه‌ای چرخشی با خط قائم بر صفحهٔ مدار زاویهٔ ۲۳٫۵° می‌سازد. اگر از حرکت تقدیمی خیلی کندی که محور زمین دارد چشم بپوشیم، در طی حرکت مداری زمین هر دو بردار هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت ثابت می‌مانند.

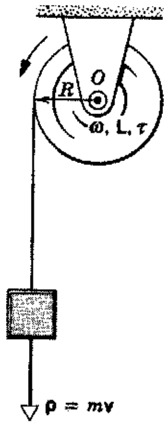
مثال ۳. با استفادهٔ مستقیم از معادلهٔ ۸ ($\tau = d\mathbf{L}/dt$) شتاب قالب در حال سقوط درمثال ۵ فصل ۱۲ را پیدا کنید.

حل: سیستم شکل ۹، متشکل از یک قرص به جرم M و یک قالب به جرم m، تحت تأثیر نیروی پایین‌سویِ گرانشی وارد بر جرمها و نیروی بالاسویی است که از یاتاقانهای محور قرص به سیستم وارد می‌شود. مرکز قرص را به‌عنوان مبدأ اختیار می‌کنیم. (کشش نخ یک نیروی داخلی است و از خارج روی سیستم قرص + قالب اثر نمی‌کند.) تنها نیروی mg از میان نیروهای خارجی گشتاوری حول مبدأ به سیستم وارد می‌کند، که مقدار آن برابر است با $(mg)R$.

تکانهٔ زاویه‌ای سیستم حول نقطهٔ O در هر لحظه برابر است با

$$L = I\omega + (mv)R$$

در این رابطه $I\omega$ تکانهٔ زاویه‌ای قرص (متقارن) است و $(mv)R$ تکانهٔ زاویه‌ای (یعنی تکانهٔ خطی × بازوی گشتاور) قالب افتان حول مبدأ.



شکل۹. مثال ۳. بردارهای سرعت زاویه‌ای، تکانهٔ زاویه‌ای و گشتاور برایند همگی به‌سوی خارجِ صفحهٔ شکل‌اند؛ این جهت با نشانه ⊙ در نقطهٔ O مشخص شده است.

این دو جزء $\mathbf{L}$ هر دو در یک جهت عمود بر صفحهٔ شکل ۹ و به طرف خارج واقع می‌شوند.

حالا رابطهٔ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ را (در شکل اسکالرش) به‌کار می‌گیریم

$$\begin{aligned}(mg)R &= \frac{d}{dt}(I\omega + mvR)\\ &= I\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + mR\left(\frac{dv}{dt}\right)\\ &= I\alpha + mRa\end{aligned}$$

و چون $a = \alpha R$ و $I = \frac{۱}{۲}MR^۲$ است، این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$mgR = \left(\frac{۱}{۲}MR^۲\right)(a/R) + mRa$$

یا

$$a = \frac{۲mg}{M + ۲m}$$

این همان نتیجه‌ای است که در مثال ۵ فصل ۱۲ هم به‌دست آمد.

گشتاور وارد بر ذره‌ای که در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند (اختیاری)

نتیجهٔ شاید غیرمنتظره‌ای که در مورد حرکت سادهٔ شکل ۶ به‌دست آمد، یعنی موازی نبودن $\mathbf{l}$ و $\boldsymbol{\omega}$ ممکن است قدری غریب بنماید، ولی این نتیجه با رابطهٔ کلی $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ برای گشتاور وارد بر یک تک‌ذره سازگار است. بردار $\mathbf{l}$ با گذشت زمان همراه با حرکت ذره تغییر می‌کند. این تغییر فقط در جهت است، نه در اندازه. وقتی ذره دوران می‌کند، هم مقدار $\mathbf{l}_z$ و هم جهت آن ثابت می‌ماند، ولی $\mathbf{l}_\perp$ تغییر جهت می‌دهد.

این تغییر در $\mathbf{l}_\perp$ باید از اعمال یک گشتاور حاصل شده باشد. منشأ این گشتاور کدام است؟

برای اینکه ذره‌ای در یک دایره حرکت کند، باید تحت تأثیر یک نیروی مرکزگرا باشد. مثلاً در شکل ۶ج، این نیرو توسط بازویی که ذره را به محور وصل می‌کند تأمین می‌شود. (در اینجا از سایر نیروهای خارجی، مانند گرانش، چشم پوشیده‌ایم.) تنها گشتاوری که حول O ایجاد می‌شود گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

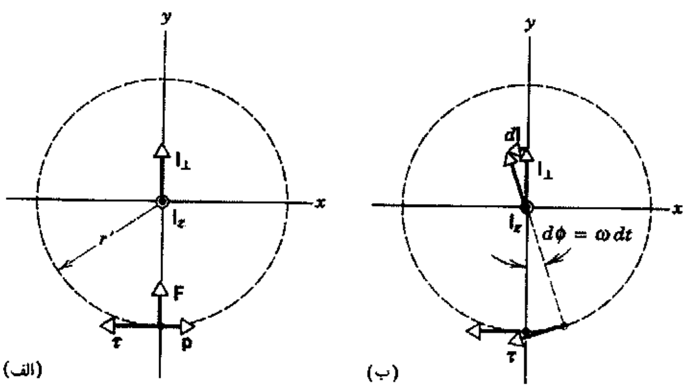
گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ مماس بر دایره (عمود بر صفحه‌ای که از $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ تشکیل می‌شود) و در جهتی است که در شکل ۶ج مشخص شده است. صحت این مطلب را می‌توانید با استفاده از قاعده دست راست تحقیق کنید.

می‌خواهیم نشان بدهیم که این گشتاور در شکل دورانی قانون دوم نیوتون، $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$، صدق می‌کند. شکل ۱۰الف نمایی دوبعدی از ذرهٔ دوران‌کننده را نشان می‌دهد؛ داریم از راستای محور z به طرف پایین به صفحهٔ xy نگاه می‌کنیم. وقتی ذره به‌اندازهٔ زاویهٔ کوچک $d\phi = \omega dt$ دوران می‌کند (شکل ۱۰ب)، بردار $\mathbf{l}_\perp$ به‌اندازهٔ بردار کوچک $d\mathbf{l}$ تغییر می‌کند. از شکل ۱۰ب می‌توانیم ببینیم که $d\mathbf{l}$ همواره موازی با $\boldsymbol{\tau}$ است و بنابراین جهت بردارهای $d\mathbf{l}$ و $\boldsymbol{\tau}$ با رابطهٔ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ سازگار است. همچنین می‌توانیم نشان بدهیم که مقدار این بردارها هم در این رابطه صدق می‌کند. با مراجعه به شکل ۶ـج می‌بینیم که گشتاور نیرو حول O برابر است با

$$\tau = rF\,\sin\left(\frac{۱}{۲}\pi + \theta\right) = rF\,\cos\,\theta$$

در این مورد، $\mathbf{F}$ نیروی مرکزگرا و مقدار آن برابر $mv^۲/r' = m\omega^۲r'$ است، که در آن r' شعاع مسیر دایره‌ای است ($r' = r\sin\,\theta$). بنابراین

$$\tau = m\omega^۲r^۲\sin\,\theta\cos\,\theta \qquad (۱۲)$$



شکل۱۰. (الف) نمایی دوبعدی از صفحهٔ ذرهٔ در حال دوران شکل ۶. مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای به طرف خارج از صفحهٔ شکل است. (ب) به‌ازای دوران ذره به‌اندازهٔ زاویهٔ $d\phi$، مؤلفهٔ بردار $\mathbf{l}_\perp$ در صفحه به‌اندازهٔ $d\mathbf{l}$ تغییر می‌کند. توجه کنید که $d\mathbf{l}$ موازی با $\boldsymbol{\tau}$ است.

از شکل ۱۰ب داریم $dl = l_\perp d\phi = l_\perp \omega dt$، که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_\perp$$

چون $l = mvr$ است، پس $l_\perp = mvr \ \cos\theta$ است. سرعت مماسی v عبارت است از $\omega r' = \omega r \ \sin\theta$، بنابراین داریم

$$l_\perp = m\omega r^{۲} \sin\ \theta \cos\ \theta$$

و

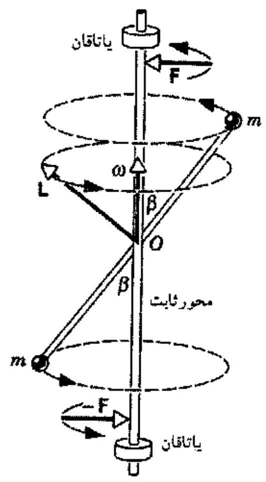
$$\frac{dl}{dt} = \omega l_\perp = m\omega^{۲} r^{۲} \sin\ \theta \cos\ \theta \qquad (۱۳)$$

از مقایسهٔ معادلات ۱۲ و ۱۳، همان‌طور که انتظار می‌رود، می‌بینیم که $\tau = dl/dt$ است.

اجسام متقارن در برابر اجسام نامتقارن

وضعیت دوران برای اجسام متقارن و نامتقارن چه فرقی می‌کند؟ فرض کنید میلهٔ اتصال دو ذرهٔ سیستم متقارن شکل ۷ به‌اندازهٔ دلبخواه β نسبت به محور مرکزی مایل شده باشد. شکل ۱۱ میلهٔ اتصال، محور میل‌گردان، و دو یاتاقان را (که بدون اصطکاک فرض شده‌اند) نشان می‌دهد؛ یاتاقانها میل‌گردان را در راستای محور z نگه می‌دارند. میل‌گردان با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z می‌چرخد، بنابراین بردار $\boldsymbol{\omega}$ هم‌جهت با این محور است. تجربه نشان می‌دهد که این قبیل سیستمها "نامتوازن" یا "یکبری"اند و میلهٔ واسط دو ذره اگر در نقطهٔ O محکم به میل‌گردان متصل نشده باشد، تمایل دارد چنان حرکت کند که زاویهٔ β برابر ۹۰° شود، یعنی به وضعیتی برسد که در آن سیستم حول محور تقارن می‌شود.

در لحظه‌ای که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، ذرهٔ بالایی عمود بر صفحه به طرف داخل آن حرکت می‌کند و ذرهٔ پایینی عمود



شکل۱۱. یک سیستم دوذره‌ای چرخان، مشابه شکل ۲، با این تفاوت که در اینجا محور دوران با میلهٔ اتصال زاویهٔ β می‌سازد. بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ همراه با سیستم می‌چرخد، و همچنین نیروهای $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ که از یاتاقانها وارد می‌شوند نیز می‌چرخند.

بر صفحه از آن خارج می‌شود. بنابراین بردارهای تکانهٔ خطی دو ذره با هم برابر ولی در جهتهای مخالف‌اند و بردارهای مکان این ذرات نسبت به O نیز همین‌طور. بنابراین، با استفاده از قاعدهٔ دست راست در مورد $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$، درمی‌یابیم که $\mathbf{l}$ برای هر دو ذره یکسان است و مجموع $\mathbf{l}$ها، یعنی بردار تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم، $\mathbf{L}$، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، عمود بر میلهٔ واصل دو ذره است و در صفحهٔ شکل قرار دارد. پس $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\omega}$ در این لحظه موازی نیستند. وقتی سیستم دوران می‌کند، بردار تکانهٔ زاویه‌ای در حالی که مقدارش ثابت می‌ماند، حول محور ثابت دوران می‌چرخد.

چرخش $\mathbf{L}$ حول محور ثابت شکل ۱۱ کاملاً با رابطهٔ بنیادی $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ همخوانی دارد. گشتاور نیروی خارجی وارد بر کل سیستم ناشی از نیروهای جانبی موازنه نشده‌ای است که از یاتاقانها به میل‌گردان وارد و از آن به میلهٔ اتصال منتقل می‌شود. در لحظهٔ نشان داده شده در شکل، ذرهٔ بالا متمایل به حرکت به خارج یعنی به سمت راست است. میل‌گردان به سمت راست کشیده می‌شود و به یاتاقان بالایی فشرده می‌شود و در مقابل، یاتاقان بالایی هم نیروی $\mathbf{F}$ را به میل‌گردان وارد می‌کند. این نیرو به سمت چپ است. به همین نحو ذرهٔ پایینی متمایل به حرکت به سمت خارج، یعنی به طرف چپ است. میل‌گردان در محل یاتاقان پایینی به سمت چپ فشرده می‌شود، یاتاقان پایینی هم به میل‌گردان نیروی $-\mathbf{F}$ را که به سمت راست است وارد می‌کند. گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ حول نقطهٔ O که از این نیروها ناشی می‌شود عمود بر صفحهٔ شکل به طرف جلوی صفحه، یعنی در واقع عمود بر صفحهٔ متشکل از $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\omega}$ است و در همان جهتی است که حرکت چرخشی $\mathbf{L}$ را توجیه می‌کند. (این قسمت را با شکل ۱۰ب، که در آن $\boldsymbol{\tau}$ موازی با $d\mathbf{l}$ ولی عمود بر $\mathbf{l}$ بود مقایسه کنید.) توجه داشته باشید که چون $\boldsymbol{\tau}$ بر $\boldsymbol{\omega}$ عمود است، کاری انجام نمی‌شود و بنابراین انرژی جنبشی سیستم چرخان تغییر نمی‌کند. اگر اصطکاک نباشد سیستم تا ابد می‌چرخد. اصطکاک در یاتاقانها سبب ایجاد گشتاوری می‌شود که در راستای میل‌گردان (موازی با $\boldsymbol{\omega}$) است؛ این گشتاور روی سیستم کار انجام می‌دهد و انرژی جنبشی آن‌را کم می‌کند.

نیروهای $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ در لحظهٔ نشان داده شده در شکل ۱۱ در صفحهٔ شکل قرار دارند. وقتی که سیستم می‌چرخد، این نیروها و بنابراین گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ نیز همراه با آن‌طوری می‌چرخند که $\boldsymbol{\tau}$ همواره بر صفحهٔ متشکل از $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{L}$ عمود می‌ماند. نیروهای چرخندهٔ $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ موجب لنگی در یاتاقانهای بالایی و پایینی می‌شوند. یاتاقانها و تکیه‌گاههای آنها باید استحکام کافی داشته باشند تا بتوانند این نیروها را فراهم کنند. در اجسام چرخانِ متقارن هیچگونه لنگی یاتاقان وجود ندارد و میل‌گردان به‌طور یکنواخت و هموار می‌چرخد.

۱۳ـ۴ پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای

در معادلهٔ ۸، دیدیم که آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات حول یک نقطهٔ ثابت در یک چارچوب مرجع لخت (یا حول مرکز جرم) برابر با گشتاور خارجی خالص وارد بر آن سیستم است،

یعنی داریم

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (۸)$$

اگر هیچ گشتاور خارجی بر سیستم اثر نکند، تکانهٔ زاویه‌ای سیستم نسبت به زمان تغییر نمی‌کند

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = ۰ \quad \text{یا} \quad \mathbf{L} = \text{const.} \qquad (۱۴)$$

معادلهٔ ۱۴ بیان ریاضی اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای است.

> وقتی برایند گشتاور نیروی خارجی وارد بر سیستم صفر باشد، بردار تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم ثابت می‌ماند.

این سومین قانون از قوانین مهم پایستگی است که تا به حال بررسی کرده‌ایم. پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای هم مانند پایستگی انرژی و پایستگی تکانهٔ خطی، نتیجه‌ای کلی است که برای طیف بسیار گسترده‌ای از سیستمها معتبر است. این قانون هم در حد نسبیتی صادق است و هم در حد کوانتومی، و تاکنون هیچ استثنایی بر آن مشاهده نشده است.

مانند پایستگی تکانهٔ خطی در سیستمی که هیچ نیروی خارجی خالصی بر آن اثر نمی‌کند، پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای هم در مورد تکانه زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات اعمال می‌شود که بر آن هیچ گشتاور خارجی خالصی اثر نمی‌کند. ممکن است تکانهٔ زاویه‌ای هر یک از ذرات سیستم تغییر کند (درست همان‌طور که در برخورد ممکن است تکانهٔ خطی هر یک از ذرات تغییر کند)، ولی تکانهٔ زاویه‌ای کل ثابت می‌ماند.

تکانهٔ زاویه‌ای (مانند تکانهٔ خطی) یک کمیت برداری است به‌طوری که معادلهٔ ۱۴ هم‌ارز سه معادلهٔ اسکالر (به‌ازای سه محور مختصات) است. بنابراین پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای سه شرط بر حرکت سیستمی که در مورد آن به‌کار می‌رود، اعمال می‌کند. اگر مؤلفه‌ای از گشتاور صفر باشد مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای متناظر با آن ثابت خواهد بود؛ ممکن است مواردی پیش بیاید که در آنها فقط یکی از سه مؤلفهٔ گشتاور صفر باشد، در این‌صورت فقط یکی از مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای ثابت خواهد بود، و مؤلفه‌های دیگر به تبعیت از گشتاورهای متناظرشان تغییر می‌کنند.

برای سیستمی متشکل از یک جسم صلب که حول محوری (مثلاً، محور z) که در چارچوب مرجع لختی ثابت است دوران کند داریم

$$L_z = I\omega \qquad (۱۵)$$

که L_z مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای در امتداد محور دوران و I لختی دورانی سیستم حول همین محور است. ممکن است لختی دورانی جسم چرخان با تغییر وضعیت اجزای آن (از I_i به I_f) تغییر کند. اگر هیچ گشتاور خارجی خالصی اثر نکند، L_z باید ثابت بماند؛ پس اگر I تغییر کند، برای جبران این تغییر باید سرعت زاویه‌ای (ω) جسم هم از ω_i به ω_f تغییر کند. در این‌صورت اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{const.} \qquad (۱۶)$$

معادلهٔ ۱۶ نه‌تنها در مورد دوران حول یک محور ثابت برقرار است بلکه برای دوران حول محوری که از مرکز جرم سیستم می‌گذرد نیز صدق می‌کند، به‌شرطی که سیستم طوری حرکت کند که محور همواره موازی با خودش باقی بماند (رجوع کنید به بحثی که در آغاز بخش ۱۲ـ۶ داشتیم).

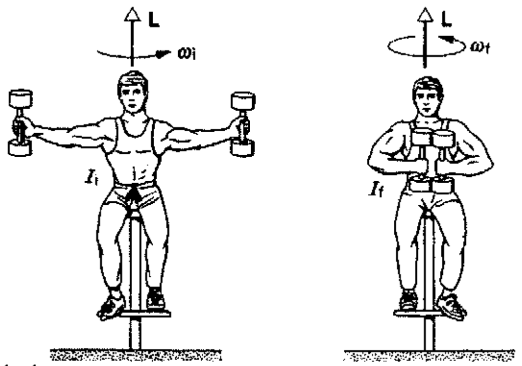
پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای اصلی است که در گسترهٔ وسیعی از فرایندهای فیزیکی، از جهان زیراتمی (بخش ۱۳ـ۶) گرفته تا حرکت اکروباتها و شیرجه‌زنها و بالرین‌ها، تا انقباض ستاره‌هایی که سوخت آنها تمام شده است، و تا چگالش کهکشانها عمل می‌کند. مثالهای زیر بعضی از این کاربردها را نشان می‌دهد.

اسکیت‌باز چرخنده

اسکیت‌باز چرخنده دستهایش را به بدنش نزدیک می‌کند تا تندتر بچرخد و آنها را باز و از بدنش دور می‌کند تا کندتر بچرخد؛ در واقع معادلهٔ ۱۶ را به‌کار می‌گیرد. کاربرد دیگری از این اصل در شکل ۱۲ نشان داده شده است. دانشجویی روی یک چارپایهٔ گردون که می‌تواند آزادانه حول یک محور قائم بچرخد نشسته است. فرض کنید دانشجو که وزنه‌هایی در دست دارد، دستهایش را به‌طرفین بازکرده است و ما او را با سرعت زاویه‌ای ω_i به چرخش درآورده‌ایم. بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ او در امتداد محور قائم در صفحهٔ شکل قرار می‌گیرد.

سیستم متشکل از دانشجو + چارپایه + وزنه‌ها یک سیستم منزوی است که هیچ گشتاور خارجی قائمی بر آن اثر نمی‌کند. بنابراین مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای باید پایسته بماند.

وقتی دانشجو دستهایش (و وزنه‌ها) را به‌طرف داخل می‌کشد و به بدنش نزدیک می‌کند، لختی دورانی سیستم او از مقدار اولیهٔ I_i کمتر می‌شود و به مقدار کوچکتر I_f می‌رسد، چون در این وضعیت وزنه‌ها به محور دوران نزدیکترند. بنابر معادلهٔ ۱۶، سرعت زاویه‌ای دانشجو برابر با $\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$ می‌شود که از سرعت زاویه‌ای اولیهٔ او بیشتر است (چون $I_f < I_i$)، یعنی او تندتر می‌چرخد، و اگر بخواهد سرعتش را کم کند کافی است که دستهایش را دوباره از بدنش دور کند.



(الف) (ب)

شکل۱۲. (الف) دراین وضعیت، لختی دورانی سیستم (دانشجو + وزنه‌ها) بیشتر و سرعت زاویه‌ای آن کمتر است. (ب) دانشجو وزنه‌ها را به طرف سینه می‌آورد و لختی دورانی را کمتر می‌کند و بنابراین سرعت زاویه‌ای‌اش بیشتر می‌شود. تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ برای هر دو وضعیت یکی است.

آیا انرژی جنبشی سیستم تغییر می‌کند؟ اگر پاسخ به این پرسش مثبت است، کاری که انرژی جنبشی را تغییر می‌دهد از کجا تأمین می‌شود؟

شیرجه از روی تختهٔ فنری[1]

در شکل ۱۳ـالف شیرجه‌زنی را در حال شیرجه می‌بینیم. او موقع پریدن از تخته خودش را طوری به جلو هل می‌دهد که سرعت دورانی کمی کسب می‌کند. این سرعت درست به اندازه‌ای است که شیرجه‌زن در طی مسیر به‌اندازهٔ نیم‌دور بچرخد و با سر در آب فرود بیاید.

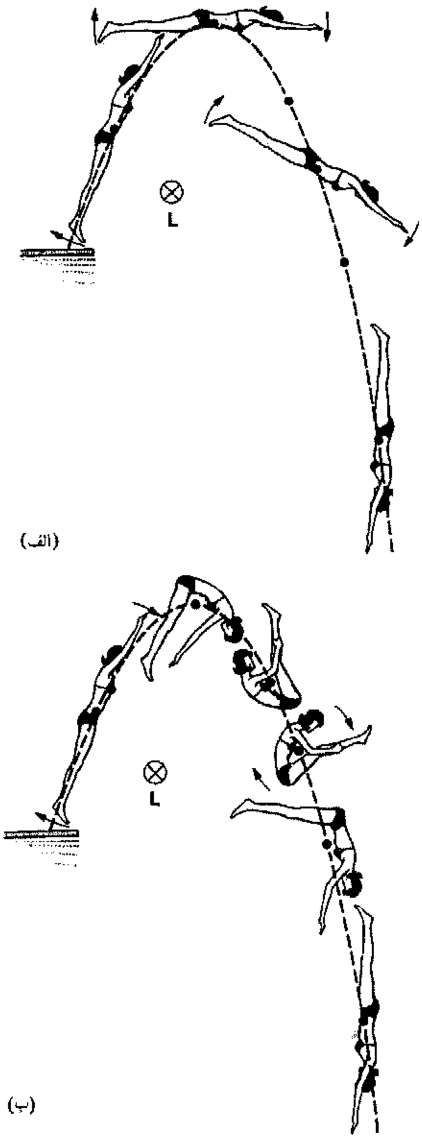
زمانی که "جسم" در هواست، هیچ گشتاور خارجی‌ای بر آن اثر نمی‌کند تا تکانهٔ زاویه‌ای را حول مرکز جرم تغییر بدهد. (تنها نیروی خارجی، گرانی، به مرکز جرم وارد می‌شود و بنابراین گشتاوری حول این نقطه ایجاد نمی‌کند. از مقاومت هوا که ممکن است گشتاور مؤثری تولید کند و تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر بدهد چشم می‌پوشیم.) وقتی شیرجه‌زن خودش را جمع می‌کند و زانوهایش را در بغل می‌گیرد، لختی دورانی‌اش کم می‌شود و بنابر معادلهٔ ۱۶ سرعت زاویه‌ای‌اش باید زیاد شود. این سرعت زاویه‌ای افزایش یافته به شیرجه‌زن امکان می‌دهد که در مدتی که در هواست $1\frac{1}{2}$ دور بزند در صورتی که قبلاً فقط نیم‌دور می‌چرخید (شکل ۱۳ب). در پایان شیرجه پاها و دستها را به‌موقع به‌حالت کشیده درمی‌آورد تا سرعت زاویه‌ای‌اش کم شود و با سر به سطح آب برسد.

چرخ چرخان دوچرخه

در شکل ۱۴الف دانشجویی را می‌بینید که روی چارپایه‌ای نشسته است، و چارپایه می‌تواند به‌راحتی حول محور قائمی دوران کند. این شخص چرخ چرخانی را در دست دارد، و وقتی چرخ را وارونه می‌کند، چارپایه به دوران در می‌آید (شکل ۱۴ب).

هیچ گشتاور قائم مؤثری به سیستم متشکل از دانشجو + چارپایه + چرخ وارد نمی‌شود و بنابراین مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم باید ثابت بماند. درآغاز، چرخ با تکانهٔ زاویه‌ای L_i می‌چرخد، که به‌سوی بالاست و تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم است. وقتی دانشجو چرخ را وارونه می‌کند، مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای چرخ برابر $-L_i$ می‌شود، ولی مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای کل باید همان $+L_i$ باشد، یعنی ثابت بماند. در نتیجه دانشجو + چارپایه باید تکانهٔ زاویه‌ای $L' = +2L_i$ را کسب کند، تا تکانهٔ زاویه‌ای نهایی سیستم یعنی $+2L_i - L_i$ برابر تکانهٔ زاویه‌ای آغازی باشد. اگر لختی دورانی دانشجو + چارپایه برابر با I_s باشد، سرعت زاویه‌ای دانشجو + چارپایه برابر با $\omega_f = 2L_i/I_s$ است.

این مسئله را می‌توانیم به‌صورت دو سیستم مجزا هم بررسی کنیم؛ یک سیستم شامل چرخ و سیستم دیگر شامل دانشجو + چارپایه است. حالا دیگر هیچ‌یک از دو سیستم منزوی نیست: دستِ دانشجو دو سیستم را به هم مرتبط می‌کند. دانشجو وقتی می‌خواهد چرخ را وارونه کند باید گشتاوری اعمال کند تا تکانهٔ زاویه‌ای چرخ را تغییر بدهد. او برای تولید این گشتاور نیرویی به چرخ وارد می‌کند و بنابر قانون سوم



شکل ۱۳. (الف) شیرجه‌زن طوری از تخته جدا می‌شود که تخته به او تکانهٔ زاویه‌ای L می‌دهد. او حول مرکز جرمش (که با نقطه‌ای مشخص شده است) به‌اندازهٔ نیم‌دور دوران می‌کند در حالی‌که مرکز جرمش مسیر سهمی را می‌پیماید. (ب) با بغل کردن پاهایش، لختی دورانی خود را کاهش می‌دهد و به همین علت سرعت زاویه‌ای‌اش افزایش پیدا می‌کند و به او این امکان را می‌دهد که (۱/۲)۱ دور بچرخد. نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر این شخص در (الف) و (ب) یکسان است.

نیوتون، همین نیرو را در جهت مخالف از چرخ دریافت می‌کند. این نیروی خارجی وارد بر سیستم دانشجو + چارپایه سبب می‌شود که

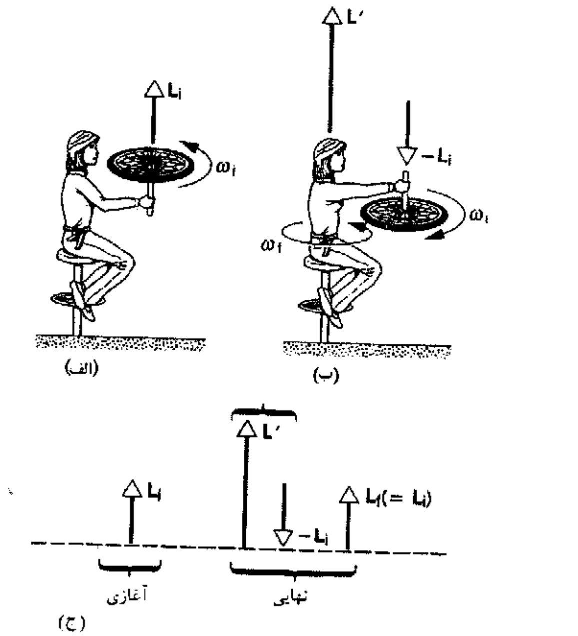
---

۱. نگاه کنید به

"The Mechanics of Swimming and Diving" R. L. Page, *The Physics Teacher*, February 1976, p. 72.

و نگاه کنید به

"The Physics of Somersaulting and Twisting," Cliff Frohlich, *Scientific American*, March 1980, p. 155.



شکل۱۴. (الف) دانشجویی چرخ چرخانی را در دست نگه داشته است. تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم برابر است با L_i. (ب) وقتی چرخ وارونه می‌شود دانشجو شروع به چرخیدن می‌کند. (ج) تکانهٔ زاویه‌ای کل باید در حالتهای آغازی و نهایی یکی باشد.

سیستم بچرخد. از این دیدگاه، دانشجو یک گشتاور خارجی به چرخ وارد می‌کند تا تکانهٔ زاویه‌ای آن‌را تغییر بدهد، در حالی که چرخ، یک گشتاور به دانشجو وارد می‌کند تا تکانهٔ زاویه‌ای او را تغییر بدهد. اگر، همان‌طور که در ابتدا گفتیم، سیستم کامل را متشکل از دانشجو + چارپایه + چرخ در نظر بگیریم، این گشتاور یک گشتاور داخلی است که در محاسبات ما وارد نمی‌شود. اینکه گشتاور نیرو را داخلی بگیریم یا خارجی بستگی دارد به اینکه سیستم مورد نظر را چگونه تعریف می‌کنیم.

پایداری اجسام چرخان

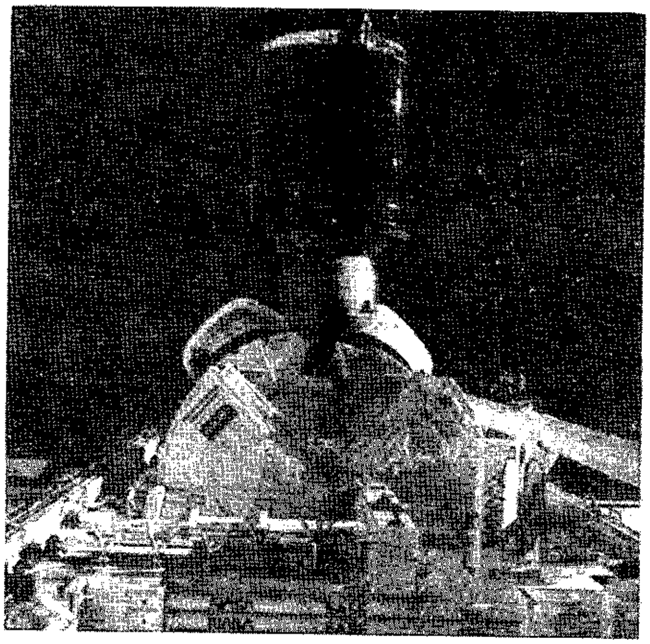
باز هم شکل ۳ب را در نظر بگیرید. جسمی که با تکانهٔ خطی $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ حرکت می‌کند یک پایداری سیستمی است؛ ضربهٔ منحرف‌کننده‌ای موجب تغییر تکانهٔ کوچکی به‌اندازهٔ $\Delta \mathbf{p}_\perp$ در راستای جانبی می‌شود و در نتیجه جهت حرکت به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta = \tan^{-1}(\Delta p_\perp / p)$ تغییر می‌کند. هر چه تکانهٔ p بیشتر باشد، زاویهٔ θ کوچکتر است. بر اثر یک نیروی منحرف‌کنندهٔ معین، جسم هر چه تکانه‌اش بزرگتر باشد کمتر منحرف می‌شود.

تکانهٔ زاویه‌ای هم به‌صورتی کم‌وبیش مشابه برای جسم یک پایداری سیستمی فراهم می‌آورد. هر جسم چرخان دارای تکانهٔ زاویه‌ای معین $\mathbf{L}$ است. هر گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ عمود بر $\mathbf{L}$، جهت بردار $\mathbf{L}$ را تغییر می‌دهد و سبب تغییر جهت محور دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta = \tan^{-1}(\Delta L_\perp / L)$ می‌شود. در اینجا هم به‌ازای یک گشتاور معین، هر چه تکانهٔ زاویه‌ای L بزرگتر باشد، تغییر جهت محور دوران جسم چرخان کوچکتر خواهد بود.

وقتی به جسمی تکانهٔ زاویه‌ای معینی حول یک محور می‌دهیم، در واقع سمتگیری آن‌را پایدار و تغییر سمتگیری را برای نیروهای خارجی دشوار می‌کنیم. در مورد این اثر مثالهای متعددی وجود دارد. اگر یک دوچرخهٔ بدون دوچرخه‌سوار را کمی هل بدهیم می‌تواند مسافتی خیلی بیشتر از آنچه انتظار داریم، سرپا، به حرکتش ادامه بدهد. در این مورد، این تکانهٔ زاویه‌ای چرخهای چرخان دوچرخه است که به آن پایداری می‌دهد. دست‌اندازها و خمهای کوچک جاده، که می‌توانند جسم غیرچرخانی را که روی مقطعی به باریکی لاستیک دوچرخه متوازن شده است به آسانی منحرف یا واژگون کنند، بر چرخ چرخان تأثیر کمتری دارند، زیرا تکانهٔ زاویه‌ای تمایل به حفظ سمتگیری‌اش دارد.[۱]

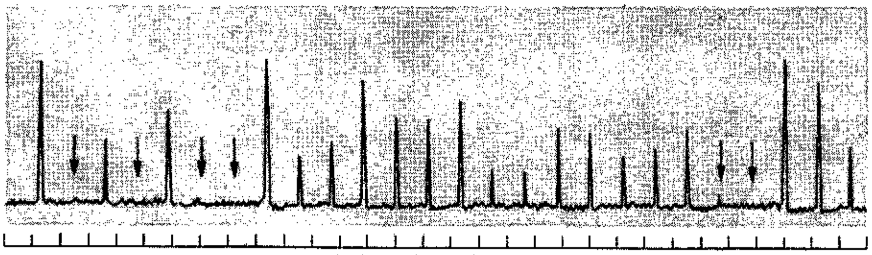
توپ راگبی (فوتبال امریکایی) با توپی به شکل بیضوی را در پاسهای بلند طوری پرتاب می‌کنند که حول محوری تقریباً موازی با سرعت انتقالی‌اش می‌چرخد. با این کار سمتگیری توپ پایدار می‌شود و توپ بی‌آنکه در هوا "معلق" بزند پیش می‌رود. به این‌ترتیب می‌شود توپ را دقیقتر پرتاب کرد و راحت‌تر هم گرفت. در این نوع پرتاب همچنین سطح مواجههٔ توپ در جهت پیشروی به حداقل می‌رسد؛ در نتیجه مقاومت هوا کم می‌شود و برد توپ افزایش پیدا می‌کند.

پایدار کردن سمتگیری ماهواره‌ها اهمیت دارد، به‌خصوص وقتی ماهواره برای رسیدن به موقعیت مداری مشخصی از پیشرانهایش استفاده می‌کند (شکل ۱۵). سمتگیری ممکن است، مثلاً، به‌علت



شکل۱۵. ماهوارهٔ مورلوس-دی، یک ماهوارهٔ مخابراتی برای مکزیک، که در ۱۷ نوامبر ۱۹۸۵ به‌مدار پرتاب شد. ماهواره برای پایداری سمتگیری در فضا حول محور مرکزی‌اش (محور قائم در عکس) به‌چرخش درآورده شد. این پایداری در طی سفر به مدار همزمان شده با زمین ضروری است.

۱. نگاه کنید به
"The Stability of the Bicycle," David E. H. Jones, *Physics Today*, April, 1970, p. 34.



شکل ۱۶. تپهای الکترومغناطیسی که در ایستگاه در زمین از یک ستارهٔ نوترونی چرخان سریع دریافت شده است. پیکانهای قائم نمایندهٔ تپهایی است که ضعیف‌تر از آن بوده‌اند که آشکارسازی شوند. فاصلهٔ تپها به‌طور شگفت‌انگیزی ثابت و برابر با ۱٫۱۸۷۹۱۱۱۶۴s است.

اصطکاک ناشی از وجود جو رقیق در ارتفاع مدار، بادهای خورشیدی (باریکه‌ای از ذرات باردار که از خورشید می‌آیند)، یا به علت برخورد با شهابسنگهای بسیار ریز، تغییر کند. به‌منظور کاهش آثار چنین برخوردهایی، ماهواره را حول محوری به چرخش در می‌آورند و به این‌ترتیب سمتگیری آن‌را پایدار می‌کنند.

ستاره‌های رمبنده

اغلب ستاره‌ها، مثل خورشید خودمان، می‌چرخند. خورشید تقریباً هر ماه یکبار به‌دور خودش می‌چرخد. (خورشید یک گوی گازی است و مانند جسم صلب دوران نمی‌کند؛ دورهٔ چرخش مناطق نزدیک به قطب آن حدوداً ۳۷ روز است، در حالی‌که استوایش هر ۲۶ روز یکبار می‌چرخد.) فشار تابشی از رمبش خورشید جلوگیری می‌کند، در واقع فشار تابشی حاصل برخوردهای ضربه‌ای تابش گسیلی با اتمهای خورشید است. وقتی که سوخت هسته‌ای خورشید تمام شود، فشار تابشی هم از بین می‌رود و خورشید شروع به رمبیدن می‌کند، و در نتیجهٔ رمبش چگالی آن افزایش می‌یابد. در یک مرحله چگالی خورشید خاموش آنقدر زیاد می‌شود که دیگر اتمها نمی‌توانند بیش از آن به هم نزدیک شوند و در نتیجه رمبش متوقف می‌شود.

ولی، در ستاره‌هایی که جرم آنها در حدود ۱٫۴ برابر جرم خورشید است، نیروی گرانشی آنقدر قوی است که اتمها نمی‌توانند از ادامهٔ رمبش جلوگیری کنند. اتمها عملاً در اثر گرانش در هم کوبیده می‌شوند، و رمبش آنقدر ادامه می‌یابد که هسته‌ها در تماس با یکدیگر قرار بگیرند. در واقع ستاره به‌صورت هستهٔ اتمی غول‌پیکری در می‌آید که به آن ستارهٔ نوترونی می‌گویند. شعاع یک ستارهٔ نوترونی به جرم ۱٫۵ برابر جرم خورشید، برابر با ۱۱ کیلومتر است.

فرض کنید ستاره‌ای که مانند خورشید هر ماه یکبار می‌چرخد رمبش خود را آغاز کند. نیروهای دخیل در رمبش نیروهای داخلی‌اند و نمی‌توانند تکانهٔ زاویه‌ای را تغییربدهند. بنابراین سرعت زاویه‌ای نهایی طبق معادلهٔ ۱۶ به‌سرعت زاویه‌ای اولیه مربوط می‌شود؛ $I_i/I_f = r_i^2/r_f^2$. اگر شعاع اولیه در حدود شعاع خورشید باشد (در حدود $7 \times 10^5\mathrm{km}$)، خواهیم داشت

$$I_i/I_f = r_i^2/r_f^2 = (7 \times 10^5\mathrm{km})^2/(11\mathrm{km})^2 = 4 \times 10^9$$

یعنی، سرعت دورانی ستاره از یک دور در ماه به 4×10^9 دور در ماه، یا به بیش از ۱۰۰۰ دور در ثانیه می‌رسد!

ستاره‌های نوترونی از زمین قابل مشاهده‌اند، چون آنها هم (مانند خورشید) میدانهای مغناطیسی‌ای دارند که الکترونها را به‌دام می‌اندازند و الکترونها با دوران ستاره تا سرعتهای مماسی خیلی زیاد شتاب می‌گیرند. چنین الکترونهای شتاب‌یافته‌ای تابش گسیل می‌کنند، که از زمین مانند چراغ چشمک‌زن مشاهده می‌شود. به‌خاطر این تپهای تابشی تیز است که ستاره‌های نوترونی چرخان را "تپ‌اختر" می‌نامند. نمونه‌ای از نمودارهای تابش مشاهده‌شده از یک تپ‌اختر را در شکل ۱۶ آورده‌ایم.

پایستگی تکانهٔ زاویه در مورد پدیده‌های اختر فیزیکی بسیار گوناگونی به‌کار می‌رود. مثلاً دوران کهکشان ما نتیجه دوران بسیارکندترِ تودهٔ گازی است که کهکشان از آن چگالیده شده است؛ چرخش خورشید و مدار سیاره‌ها را دوران اولیهٔ ماده‌ای که منظومهٔ شمسی از آن پدید آمده، تعیین کرده است.

مثال ۴. یک فضانورد ۱۲۰ کیلوگرمی، که مشغول "راه‌پیمایی فضایی" است توسط بندی به طول $180\,\mathrm{m}$ که کاملاً باز شده است به فضاپیما متصل است. عملیات ناخواسته‌ای در قسمت پیشبرنده سبب می‌شود که فضانورد سرعت مماسی کوچکی برابر با $2{,}5\,\mathrm{m/s}$ کسب کند. برای بازگشت به فضاپیما، فضانورد با آهنگ ثابتی بند اتصال را آرام به‌طرف خودش می‌کشد. این فضانورد در فواصل زیر با چه نیرویی باید بند اتصال را بکشد؟ (الف) ۵۰ متر و (ب) ۵ متر از فضاپیما. سرعت مماسی فضانورد در این نقاط چقدر است؟

حل: هیچ گشتاور خارجی بر فضانورد وارد نمی‌شود، بنابراین پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای برقرار است. یعنی، تکانهٔ زاویه‌ای اولیهٔ فضانورد نسبت به فضاپیما به عنوان مبدأ (Mv_ir_i) در لحظه‌ای که شروع به کشیدن بند اتصال می‌کند، باید با تکانهٔ زاویه‌ای او در هر زمان دیگری از حرکت (Mvr) برابر باشد. به این‌ترتیب

$$Mvr = Mv_ir_i$$

یا

$$v = \frac{v_ir_i}{r}$$

در این مرحله نیروی مرکزگرا از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Mv_i^2r_i^2}{r^3}$$

نیروی مرکزگرای اولیه مورد نیاز برابر است با

$$F = \frac{(۱۲۰\,\mathrm{kg})(۲٫۵\,\mathrm{m/s})^{۲}}{۱۸۰\,\mathrm{m}} = ۴٫۲\,\mathrm{N} \quad (\text{در حدود } ۱\,\mathrm{lb})$$

(الف) وقتی‌که فضانورد در فاصلهٔ ۵۰ متری از فضاپیما قرار دارد، سرعت مماسی او برابر است با

$$v = \frac{(۲٫۵\,\mathrm{m/s})(۱۸۰\,\mathrm{m})}{۵۰\,\mathrm{m}} = ۹٫۰\,\mathrm{m/s}$$

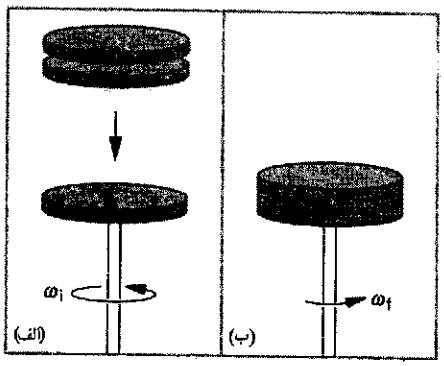
و در این فاصله نیروی مرکزگرا برابر است با

$$F = \frac{(۱۲۰\,\mathrm{kg})(۲٫۵\,\mathrm{m/s})^{۲}(۱۸۰\,\mathrm{m})^{۲}}{(۵۰\,\mathrm{m})^{۳}} = ۱۹۴\,\mathrm{N}$$

(در حدود ۴۴lb)

(ب) در فاصلهٔ ۵ متری از سفینه، سرعت فضانورد با ضریب ۱۰ افزایش پیدا می‌کند و به $۹۰\,\mathrm{m/s}$ می‌رسد، در صورتی‌که نیرو با ضریب $۱۰^{۳}$ افزایش پیدا می‌کند و به $۱٫۹۴ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N}$ می‌رسد! واضح است که فضانورد نمی‌تواند نیرویی به این بزرگی را برای بازگشت به فضاپیما اعمال کند. حتی اگر به‌وسیلهٔ یک سیستم نقاله از داخل سفینه کشیده شود هم بند اتصال نمی‌تواند چنین کششی را تحمل کند؛ این بند در جایی پاره خواهد شد و فضانورد با سرعتی برابر سرعت مماسی‌اش در هنگام پاره شدن بند اتصال، به فضا پرتاب خواهد شد. نتیجهٔ اخلاقی این داستان این است که فضانوردان راه‌پیما باید از کسب سرعت مماسی به‌شدت خودداری کنند! حالا فکر کنید فضانورد برای بازگشتِ بی‌دردسر به سفینه چه می‌تواند بکند؟

مثال ۵. صفحهٔ گرامافونی به جرم $۱۲۵\,\mathrm{g}$ و به شعاع $۷٫۲\,\mathrm{cm}$ با سرعت زاویه‌ای $۰٫۸۴\,\mathrm{rev/s}$ حول یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۱۷الف). صفحهٔ دقیقاً مشابه و غیرچرخانی ناگهان روی آن انداخته می‌شود. اصطکاک بین صفحه‌ها سبب می‌شود که سرانجام دو صفحه با سرعت یکسانی بچرخند. در مرحلهٔ بعدی یک صفحهٔ مشابه دیگر روی دو صفحهٔ قبلی می‌اندازیم، و سرانجام سه صفحه با هم می‌چرخند (شکل ۱۷ب). (الف) سرعت زاویه‌ای کل مجموعه چقدر است؟ (ب) چه مقدار انرژی جنبشی دورانی به‌علت اصطکاک از دست می‌رود؟ (ج) موتوری که اولین صفحه را می‌چرخاند باید در طی یک دور چرخش، سرعت زاویه‌ای کل مجموعه را به‌سرعت اولیهٔ صفحه اول برساند. موتور باید چه گشتاور ثابتی اعمال کند؟



شکل۱۷. مثال ۵. (الف) صفحهٔ گرامافونی با سرعت زاویه‌ای اولیه ω_i می‌چرخد. (ب) دو صفحهٔ کاملاً مشابه با صفحهٔ اول را، که هیچکدام چرخ اولیه ندارند، روی صفحهٔ اول می‌اندازیم. نهایتاً کل سیستم با سرعت زاویه‌ای ω_f می‌چرخد.

حل: (الف) این مسئله مشابه دورانی برخورد کاملاً ناکشسان است. هیچ گشتاور خارجی قائمی در کار نیست، بنابراین مؤلفهٔ قائم تکانهٔ زاویه‌ای ثابت است. نیروی اصطکاک بین صفحه‌ها نیروی داخلی است، که نمی‌تواند تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر بدهد. پس می‌توانیم از معادلهٔ ۱۶ استفاده کنیم و بنویسیم

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$
$$\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$$

بی‌آنکه نیاز به محاسبهٔ جزئیات داشته باشیم، می‌دانیم که لختی دورانی سه‌صفحهٔ گرامافون یکسان حول محور مشترکشان سه برابر لختی دورانی یکی از آنهاست. پس $I_i/I_f = ۱/۳$ است و

$$\omega_f = (۰٫۸۴\,\mathrm{rev/s})(۱/۳) = ۰٫۲۸\,\mathrm{rev/s}$$

(ب) لختی دورانی صفحهٔ گرامافون حول محورش برابر است با $\frac{۱}{۲}MR^{۲}$، بنابراین برای هر یک از صفحه‌ها داریم

$$I = \frac{۱}{۲}(۰٫۱۲۵\,\mathrm{kg})(۰٫۰۷۲\,\mathrm{m})^{۲} = ۳٫۲۴ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{kg\cdot m^{۲}}$$

انرژی جنبشی دورانی اولیه برابر است با

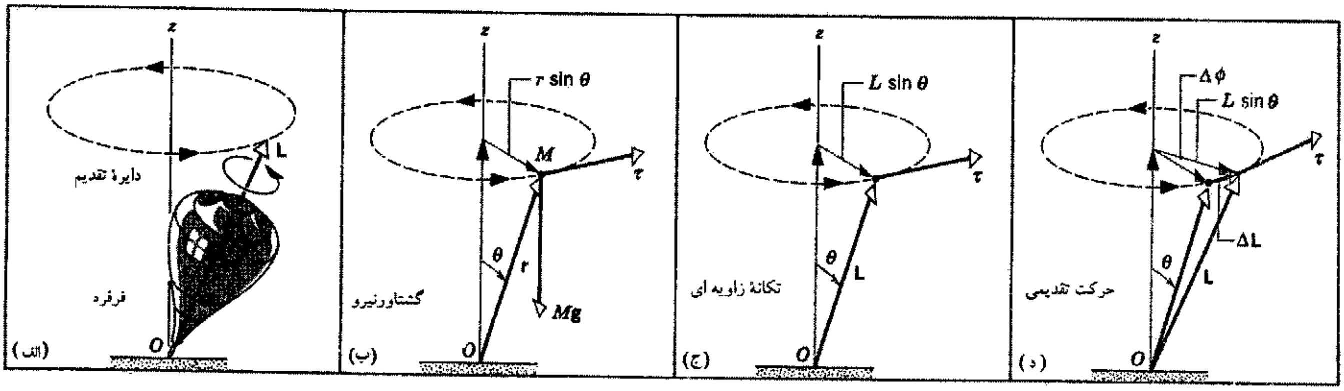
$$\begin{aligned}K_i &= \frac{۱}{۲}I\omega_i^{۲}\\ &= \frac{۱}{۲}(۳٫۲۴\times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{kg\cdot m^{۲}})(۲\pi\,\mathrm{rad/rev}\times ۰٫۸۴\,\mathrm{rev/s})^{۲}\\ &= ۴٫۵۱ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ انرژی جنبشی نهایی می‌توانیم از یک‌راه میان‌بر استفاده کنیم: می‌دانیم که بین حالتهای اولیه و نهایی، لختی دورانی با ضریب ۳ افزایش پیدا می‌کند و سرعت زاویه‌ای با ضریب ۱/۳ کاهش می‌یابد، و چون انرژی جنبشی به مربع سرعت زاویه‌ای بستگی دارد نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}K_f = K_i \times ۳ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} &= \frac{۱}{۳}(۴٫۵۱ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{J})\\ &= ۱٫۵۰ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

تغییر در انرژی جنبشی برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta K = K_f - K_i &= (۱٫۵۰ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}) - (۴٫۵۱ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{J})\\ &= -۳٫۰۱ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$



شکل۱۸. (الف) فرفرهٔ چرخانی حول محور قائم حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. (ب) وزن فرفره گشتاوری حول نقطهٔ تماس فرفره با زمین تولید می‌کند. (ج) این گشتاور بر بردار تکانهٔ زاویه‌ای عمود است. (د) گشتاور نیرو جهت بردار تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر می‌دهد و موجب حرکت تقدیمی می‌شود.

علامت منفی حاکی از اتلاف انرژی جنبشی است.

(ج) برای ثابت نگه‌داشتن سرعت زاویه‌ای اولیه، موتور باید سرعت ω را از ۲۸٫۰rev/s به ۸۲rev/s٫۰ برساند، یعنی آن‌را با ضریب ۳ افزایش بدهد. این افزایش سرعت به این معنی است که انرژی جنبشی باید با ضریب ۹ = ۳

$$\Delta K = ۱۳٫۵ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{J} - ۱٫۵۰ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{J}$$
$$= ۱۲٫۰ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{J}$$

در حرکت دورانی، کار از رابطهٔ $W = \tau\phi$ به‌دست می‌آید، که در آن ϕ (در این مورد ۲π رادیان) جابه‌جایی زاویه‌ای جسم چرخنده است که در طی آن گشتاور باید اثر کند. به‌این ترتیب

$$\tau = \frac{W}{\phi} = \frac{\Delta K}{\phi} = \frac{۱۲٫۰ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{J}}{۲\pi\mathrm{rad}}$$
$$= ۱٫۹۱ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{N \cdot m}$$

۵ـ۱۳ فرفرهٔ چرخان[1]

فرفره، شاید آشناترین نمونه از پدیدهٔ نشان داده شده در شکل ۴ب باشد، که درآن گشتاور جانبی، جهت تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر می‌دهد ولی اندازهٔ آن‌را تغییر نمی‌دهد. شکل ۱۸الف فرفره‌ای را نشان می‌دهد که حول محورش می‌چرخد. فرض می‌کنیم که نوک فرفره در نقطهٔ O، مبدأ چارچوب مختصات لخت، ثابت باشد. از تجربه می‌دانیم که محور این فرفرهٔ چرخان به‌آرامی حول محور قائم دوران می‌کند. این حرکت، که حرکت تقدیمی نامیده می‌شود، ناشی از همان ساختاری است که در شکل ۴ب نشان داده شده است، در این مورد، نیروی گرانی است که گشتاور خارجی را فراهم می‌کند.

شکل ۱۸ب نمودار ساده‌شده‌ای است که درآن به‌جای فرفره ذره‌ای به جرم M گذاشته‌ایم. این ذره در مکان مرکز جرم فرفره واقع شده است. نیروی گرانشی Mg گشتاوری به مقدار

$$\tau = Mgr\ \sin\theta \qquad (۱۷)$$

حول نقطهٔ O اعمال می‌کند. این گشتاور، که عمود بر محور فرفره و در نتیجه عمود بر $\mathbf{L}$ است (شکل ۱۸ج)، می‌تواند جهت $\mathbf{L}$ را تغییر بدهد ولی نمی‌تواند مقدار آن‌را تغییر بدهد. تغییر تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ در مدت زمان Δt از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}\Delta t \qquad (۱۸)$$

و در همان جهت $\boldsymbol{\tau}$، یعنی عمود بر $\mathbf{L}$ است. بنابراین اثر $\boldsymbol{\tau}$ این است که $\mathbf{L}$ را به $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$، که برداری است با همان طول $\mathbf{L}$ ولی در جهتی متفاوت، تغییر می‌دهد. (فرض می‌کنیم فرفره چنان تند می‌چرخد که $\mathbf{L}$ بزرگ و بنابراین $\Delta\mathbf{L} \ll \mathbf{L}$ است.)

اگر فرفره تقارن محوری داشته باشد، تکانهٔ زاویه‌ای در امتداد محور دوران فرفره خواهد بود. همراه با تغییر جهت $\mathbf{L}$ محور دوران هم تغییر جهت می‌دهد. نوک بردار $\mathbf{L}$ و محور فرفره بر دایره‌ای حول محور z حرکت می‌کنند (شکل ۱۸الف). این حرکت همان حرکت تقدیمی فرفره است.[1]

در یک بازهٔ زمانی Δt، محور به‌اندازهٔ زاویه $\Delta\phi$ می‌چرخد (شکل ۱۸د)، و بنابراین سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی، ω_P، برابر است با

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \qquad (۱۹)$$

از شکل ۱۸د، می‌بینیم که

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L\sin\theta} = \frac{\tau\Delta t}{L\sin\theta} \qquad (۲۰)$$

۱. نگاه کنید به
"The Amateur Scientist: The Physics of Spinning Tops, Including Some Far-Out Ones," Jearl Walker, *Scientific American*, March 1981, p. 185.

بنابراین

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L\sin\theta} = \frac{Mgr\ \sin\theta}{L\sin\theta} = \frac{Mgr}{L} \qquad (۲۱)$$

سرعت حرکت تقدیمی با تکانهٔ زاویه‌ای نسبت عکس دارد، هر قدر فرفره تندتر بچرخد، حرکت تقدیمی کندتر است.

حرکت تقدیمی حول محور z انجام می‌شود و بنابراین بردار ω_P باید در راستای محور z باشد. می‌توانیم نشان بدهیم که معادلهٔ برداری زیر رابطهٔ میان مقادیر و جهتهای متغیرهای دینامیکی دخیل در این محاسبات را به‌درستی به‌دست می‌دهد

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L} \qquad (۲۲)$$

آیا می‌توانید معادلهٔ برداری مشابهی برای مورد متناظر ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی مرکزگرا با اندازهٔ سرعت ثابت روی یک دایره حرکت می‌کند بنویسید؟

۱۳ـ۶ کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای (اختیاری)

در بخش ۸ـ۸ دربارهٔ کوانتیدگی انرژی صحبت کردیم. کوانتیدگی انرژی، گسیل و جذب انرژی را به بسته‌های گسسته یا کوانتومها محدود می‌کند. در دنیای میکروسکوپیک به سیستمهای اتمی و زیراتمی، نمی‌توانیم انرژی را به هر مقدار دلبخواهی تغییر بدهیم، فقط می‌توانیم آن‌را به اندازهٔ مقادیر مشخص و از پیش تعیین‌شده‌ای تغییر بدهیم.

تکانهٔ زاویه‌ای هم، مثل انرژی، کوانتیده است. این مفهوم را به‌طور مشروح‌تر در فصل ۵۱ نسخهٔ مبسوط این کتاب که به ساختار اتم اختصاص دارد، همراه با ذکر شواهد تجربی و نظری بررسی خواهیم کرد. در اینجا فقط بعضی نظرهای کلی را مطرح می‌کنیم و ارتباط آنها را با خواص وابسته به تکانهٔ زاویه‌ای که در این فصل مطالعه شد، نشان می‌دهیم.

تغییرات کوانتیده در حرکت دورانی یک سیستم به‌صورت مضربهای صحیحی از یک ثابت عمومی صورت می‌گیرند

$$\Delta L = n(h/2\pi) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (۲۳)$$

در اینجا h ثابت پلانک است که مقدار آن برابر است با $6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$. این یکای پایه معرف مقدار بسیار کوچکی تکانهٔ زاویه‌ای است. تکانهٔ زاویه‌ای صفحهٔ گرامافون، که نسبتاً کند می‌چرخد، از مرتبهٔ 10^{32} برابر یکای $h/2\pi$ است. وقتی دکمهٔ تنظیم دقیق سرعت چرخش گرامافون را دستکاری می‌کنیم، مسلماً نمی‌توانیم مواظب این جهشهای گسسته در مقیاس یک قسمت در 10^{32} باشیم!

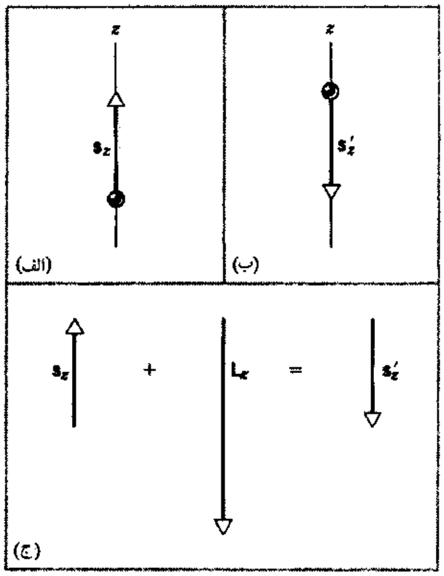
معادلهٔ ۲۳ برای کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای، در مورد حرکت الکترونهای اتم در مدارهایشان به‌دور هسته به‌کار می‌رود. این سیستم دارای تکانهٔ زاویه‌ای مداری است، که باید در حین گردش ثابت بماند، زیرا نیروی بین الکترون و هسته نیروی داخلی سیستم است و بنابراین نمی‌تواند تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر بدهد. نیروهای خارجی، مانند نیروهای ناشی از میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی، می‌توانند سبب جهش الکترون به مدار دیگری بشوند، که در آنها ممکن است تکانهٔ زاویه‌ای‌شان مقدار دیگری داشته باشد، ولی تغییر در L، همان‌طور که معادلهٔ ۲۳ ایجاب می‌کند، در هر حال باید مضرب صحیحی از $h/2\pi$ باشد. به‌این ترتیب تکانهٔ زاویه‌ای مداری می‌تواند "برچسب" مناسب و مفیدی برای مدارهای الکترونی در اتمها باشد.

آزمایشهای انجام شده در دههٔ ۱۹۲۰ حاکی از آن بودند که الکترونها نوع دیگری از تکانهٔ زاویه‌ای هم دارند که نمی‌توان آن‌را به حرکت مداری نسبت داد. این نوع تکانهٔ زاویه‌ای، که تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی نامیده می‌شود، یک خاصیت مشخصهٔ خود جسم است و ربطی به حالت حرکتی خاصی ندارد. یک راه مفید (ولی مطلقاً نادرست) برای تجسم تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی آن است که فرض کنیم جسم حول محورش می‌چرخد؛ به همین دلیل است که اغلب تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی را "اسپین" [چرخش] می‌نامند و آن‌را با نماد $\mathbf{s}$ نشان می‌دهند.

تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی الکترون $\frac{1}{2}(h/2\pi)$ است. این عبارت به این معنی است که، نسبت به هر محور zای که اختیار کنیم، مؤلفه z تکانهٔ زاویه‌ای باید $s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi)$ یا $s_z = -\frac{1}{2}(h/2\pi)$ باشد. توجه کنید که اختلاف بین این دو حالت، که می‌توان آن‌را در حکم تغییر در جهت تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی الکترون دانست، برابر با $h/2\pi$ است که با معادلهٔ ۲۳ هم سازگار است.

معمولاً تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی را با عدد کوانتومی اسپین بیان می‌کنند، که عبارت است از تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی برحسب یکای $h/2\pi$؛ به‌این ترتیب عدد کوانتومی اسپین الکترون برابر با ۱/۲ است. عدد کوانتومی اسپین پروتون و نوترون هم ۱/۲ است. عدد کوانتومی اسپین فوتون (بستهٔ کوانتیدهٔ تابش الکترومغناطیسی) برابر با ۱ است. عدد کوانتومی اسپین جزو ویژگیهای تمام ذرات بنیادی است، و آن هم مثل جرم و بار الکتریکی، از خواص بنیادی ذره محسوب می‌شود.

یکی از کاربردهای مهم اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای کوانتیده، در انرژی به نام تشدید مغناطیسی هسته‌ای مشاهده می‌شود. پروتون (هستهٔ اتم هیدروژن) را که اسپین آن ۱/۲ است در نظر بگیرید. در شکل ۱۹الف تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی پروتون در سمتگیری مشخصی نشان داده شده است. مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای برابر است با $s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi)$. اگر پروتون را در معرض تابشی با انرژی مناسب قرار بدهیم، جذب یک فوتون الکترومغناطیسی (با اسپین ۱ و تکانهٔ زاویه‌ای $h/2\pi$) می‌تواند مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای پروتون را به‌اندازهٔ ۱ واحد تغییر بدهد و از $+\frac{1}{2}(h/2\pi)$ به $-\frac{1}{2}(h/2\pi)$ برساند. این وضعیت در شکل ۱۹ب نشان داده شده است. در شکل ۱۹ج نشان داده‌ایم که چگونه اسپین اولیه s_z پروتون و تکانهٔ‌زاویه‌ای L_z فوتون (مؤلفه‌های z بردارهای $\mathbf{s}$ و $\mathbf{L}$) با هم جمع می‌شوند و اسپین نهایی s'_z پروتون (وارونه) را به‌دست می‌دهند. شکل ۱۹ج همچنین مثال دیگری از اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای است، یعنی نشان می‌دهد که تکانهٔ زاویه‌ای اولیه $(\mathbf{s}+\mathbf{L})$،



شکل۱۹. (الف) پروتونی با تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی (اسپین) $\mathbf{s}$ که دارای مؤلفهٔ s_z در امتداد محور z است. (ب) پس از جذب یک فوتون، مؤلفهٔ z اسپین وارونه می‌شود. (ج) مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای اولیه که برابر با $+۱/۲$ واحد است، با مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای فوتون، که برابر با -۱ واحد است جمع می‌شود و برایندی برابر با $-۱/۲$ واحد به‌دست می‌دهد.

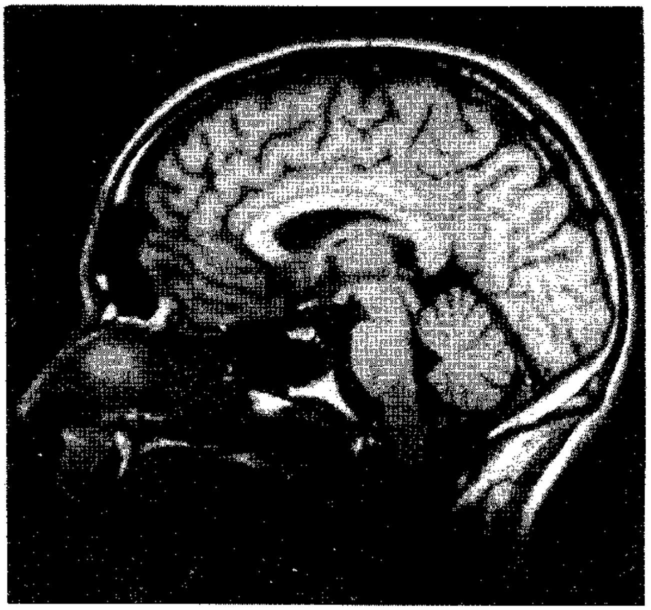
در نبود گشتاور نیروی خارجی، با تکانهٔ زاویه‌ای نهایی ($\mathbf{s}'$) برابر است.

در تشدید مغناطیسی هسته‌ای (NMR)، یک میدان مغناطیسی ایستا که در جهت محور z اعمال می‌شود، اسپین پروتونها را (مانند شکل ۱۹الف) با این محور هم‌جهت می‌کند. یک میدان الکترومغناطیسی متغیر در بسامدهای رادیویی هم فوتونهای با انرژی دقیقاً مناسب را فراهم می‌آورد تا جذب پروتونها شوند و اسپین آنها را وارونه کنند.

از آنجا که بخش اعظم بدن انسان از آب تشکیل شده و آب هم شامل هیدروژن است، جذب این تابش الکترومغناطیسی روشی برای تصویرگیری از اعضای داخلی بدن فراهم می‌آورد (شکل ۲۰). تصور می‌شود که تابشهای الکترومغناطیسی به‌صورت امواج رادیویی آسیب چندانی به بدن نمی‌رساند؛ پرتوهای x، که از آنها هم برای تصویر برداری استفاده می‌شود، بالقوه بسیار مضرترند. این‌گونه تصویر برداری تشدید مغناطیسی ممکن است، به عنوان یک روش تشخیص، به‌طور وسیعی جانشین عکسهای پرتو xای شود.

۱۳ـ۷ مروری بر دینامیک دورانی

در فصلهای ۱۱ تا ۱۳، مروری بر مباحث کلی دینامیک و سینماتیک دورانی داشتیم. مطالعهٔ کامل این مباحث در مجال این کتاب نمی‌گنجد، ولی همین نتایج کلی را می‌شود برای تحلیل بسیاری از وضعیتهای فیزیکی به‌کار برد. توجه به این نکته که بعضی از نتایج به‌دست آمده را فقط در موارد خاص و معینی می‌توان به‌کارگرفت بسیار اهمیت دارد. برای کمک به شما در این زمینه، تعدادی از معادلات بنیادی دینامیک دورانی را در جدول ۱ گرد آورده‌ایم.

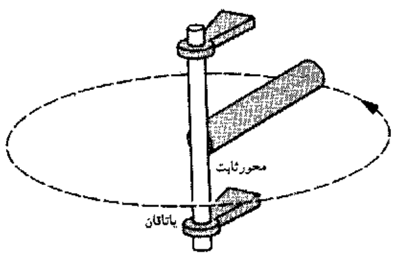

شکل ۲۰. تصویری از جمجمه، با روش تصویرگیری تشدید مغناطیسی (MRI).

پرسشها

۱. تاکنون با کمیتهای برداری متعددی از جمله مکان، جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، تکانه و تکانهٔ زاویه‌ای آشنا شده‌ایم. کدام‌یک از این کمیتها مستقل از مبدأ چارچوب مرجع تعریف می‌شوند؟

۲. فیزیکدان مشهوری (آر. دبلیو. وود) که به شوخیهای عملی بسیار علاقه‌مند بود، یکبار چرخ‌لنگری را که خیلی تند می‌چرخید در یک چمدان کار گذاشت، و از باربری خواست که آن‌را به دنبال او حمل کند. وقتی باربر، به دنبال صاحب چمدان، سریعاً به یک کوچه می‌پیچد چه اتفاقی می‌افتد؟ این رفتار را برحسب $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ توضیح بدهید.

۳. استوانه‌ای حول محوری که از یک انتهایش می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد (شکل ۲۱). برای نشان دادن بردارهای $\mathbf{L}$ و ω مبدأ مناسبی اختیار کنید. آیا این بردارها موازی‌اند؟ آیا ملاحظات مربوط به تقارن در اینجا دخیل‌اند؟



شکل ۲۱. پرسش ۳

۴. فرض کنید میلهٔ یکنواختی به‌طور قائم روی سطحی با اصطکاک ناچیز قرار گرفته است. به انتهای پایینی میله یک ضربهٔ افقی وارد می‌آید. حرکت مرکز جرم و نقطهٔ بالای میله را توصیف کنید.

جدول ۱. خلاصهٔ معادلات مربوط به دینامیک دورانی.

معادلات	ملاحظات
	۱. روابط تعریف کننده
$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	گشتاور ناشی از نیروی $\mathbf{F}$، وارد بر یک ذره حول نقطهٔ O.
$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \sum \boldsymbol{\tau}_n$	برایند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستمی از ذرات که تحت تأثیر چندین گشتاور منفرد $\boldsymbol{\tau}_n$ حول نقطهٔ O قرار گرفته است.
$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	تکانهٔ زاویه‌ای یک ذره حول نقطهٔ O.
$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_n$	تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات حول نقطهٔ O.
	۲. روابط کلی
$\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{l}}{dt}$	معادلهٔ حرکت تک‌ذره‌ای که تحت تأثیر گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ قرار گرفته است. هم $\boldsymbol{\tau}$ و هم $\mathbf{l}$ نسبت به یک نقطهٔ واحد O از یک چارچوب مرجع لخت اندازه‌گیری می‌شوند. این عبارت مشابه دورانی عبارت $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ در حرکت انتقالی است.
$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt}$	قانون حرکت برای سیستمی از ذرات که تحت تأثیر یک گشتاور خارجی خالص است. این معادله در صورتی صادق است که $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ و $\mathbf{L}$ هر دو (۱) نسبت به یک نقطهٔ ثابت O در یک چارچوب مرجع لخت، یا (۲) نسبت به مرکز جرم سیستم، اندازه‌گیری شوند. این عبارت مشابه دورانی معادلهٔ $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$.
	۳. موارد خاص
	نکات زیر در مورد دوران جسم صلب حول محور ثابت در یک چارچوب مرجع لخت صادق است.
$\tau = I\alpha$	α باید در امتداد محور باشد؛ I هم باید نسبت به محور اندازه‌گیری شود، و τ مؤلفهٔ اسکالر $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ در امتداد همان محور است. این رابطه مشابه دورانی رابطهٔ $F = Ma$ است
$L = I\omega$	ω باید در امتداد محور باشد؛ I هم باید نسبت به محور اندازه‌گیری شود، و L باید مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای کل حول همین محور باشد. این رابطه مشابه دورانی رابطهٔ $P = Mv$ است.

۵. اگر وسیلهٔ نشان داده شده در شکل ۵ روی عرشهٔ یک سفینهٔ فضایی بزرگ که در ناحیه‌ای تهی از گرانش در فضا حرکت می‌کند قرار داده شود، آیا اصولاً تغییری در اجرای آزمایش حاصل می‌شود؟ اگر می‌شود، چه تغییری؟

۶. وقتی اتومبیلی که چرخهای عقب آن محرک‌اند، سریعاً از حالت سکون شتاب می‌گیرد، راننده مشاهده می‌کند که جلوی اتومبیل کمی بالا می‌آید. چرا چنین می‌شود؟ آیا اتومبیلی که چرخهای جلویش محرک باشند طور دیگری رفتار می‌کند؟

۷. یک پیکان در طی پرواز چنان جهت‌گیری می‌کند که همواره مماس بر مسیرش باقی بماند. ولی توپ راگبی (که با چرخش قابل‌توجهی حول محور بزرگترش پرتاب می‌شود) چنین نمی‌کند. چرا این دو جسم رفتار متفاوتی دارند؟

۸. یک بازیکن توپ (بیضوی شکل) راگبی را طوری پرتاب می‌کند که توپ ضمن حرکت حول محور مایلی (نامتقارن) می‌چرخد. آیا تکانهٔ زاویه‌ای این توپ ثابت است، یا تقریباً چنین است؟ بین حالتی که توپ حرکت لنگری دارد و حالتی که حرکت آن هموار است چه وجه تمایزی هست؟

۹. آیا می‌توانید نظریهٔ ساده‌ای برای توضیح پایداری دوچرخهٔ متحرک ارائه کنید؟ باید توضیح بدهید که چرا متعادل کردن دوچرخهٔ ساکن بسیار دشوارتر از متعادل کردن دوچرخهٔ متحرک است.

۱۰. چرا یک چوب بلند به بندباز در حفظ تعادلش کمک می‌کند؟

۱۱. وقتی روی یک مسیر باریک راه می‌روید، اگر یک‌دفعه احساس کنید که دارید تعادل خودتان را از دست می‌دهید و مثلاً به‌طرف راست می‌افتید، برای بازگشت به تعادل، بدنتان را به کدام طرف می‌چرخانید؟ توضیح بدهید که چرا.

۱۲. پیچهایی که موتور هواپیماهای جت را به بدنه متصل می‌کنند چنان طراحی شده‌اند که اگر به دلایل پیش‌بینی نشده‌ای موتور (که سریعاً می‌چرخد) ناگهان از کار بیفتد، می‌برند. فایدهٔ این "فیوز" چیست؟

۱۳. یک بازیکن دلخور چوب هاکی‌اش را روی یخ پرتاب می‌کند. چوب ضمن لغزیدن روی یخ حول مرکز جرمش می‌چرخد و سرانجام تحت تأثیر اصطکاک از حرکت می‌ایستد. حرکت دورانی چوب دقیقاً در همان لحظه‌ای به آخر می‌رسد که مرکز جرم آن به حال سکون درآمده است. توضیح بدهید که چرا.

۱۴. وقتی سرعت زاویه‌ای یک جسم زیاد می‌شود، تکانهٔ زاویه‌ای آن ممکن است افزایش پیدا کند یا نکند. برای هر یک از این موارد مثالی بزنید.

۱۵. دانشجویی که روی صفحهٔ چرخانی ایستاده است دو دمبل یکسان در دو دست گرفته و بازوهایش را به طرفین باز کرده است. حالا بی‌آنکه هیچ جزئی از سیستم جابه‌جا شود، دمبلها را رها می‌کند. آیا سرعت زاویه‌ای دانشجو تغییر می‌کند؟ آیا تکانهٔ زاویه‌ای پایسته است؟ در هر دو مورد توضیح بدهید.

۱۶. چرا بدنهٔ هلیکوپتری که در پرواز است در جهت مخالف چرخش پره‌های پیشبرنده‌اش به‌چرخش در نمی‌آید؟

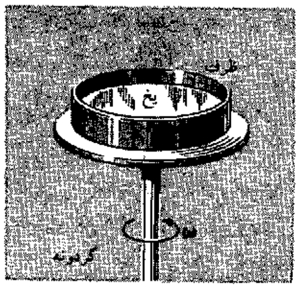
۱۷. برای اینکه هواپیمای تک‌موتوره بتواند تراز پرواز کند باید باله‌های کنترل یک سمت را بالا ببرد و باله‌های سمت دیگر را پایین بیاورد. چرا چنین کاری ضروری است؟ آیا در شرایط عادی این کار در مورد هواپیماهای دوموتوره هم لازم است؟

۱۸. اگر از عقب به ملخ یک هواپیما نگاه کنیم، می‌بینیم که ساعتگرد می‌چرخد. وقتی خلبان می‌خواهد پس از یک شیرجهٔ تند اوج بگیرد، در می‌یابد که برای ثابت نگه‌داشتن صفحهٔ پیشروی باید در قسمت انتهایی شیرجه از سکان چپ استفاده کند. در این باره توضیح بدهید.

۱۹. تعداد زیادی از رودهای بزرگ به‌سوی استوا جریان دارند. رسوبهایی که این رودها با خودشان به دریا می‌برند چه تأثیری بر چرخش زمین دارد؟

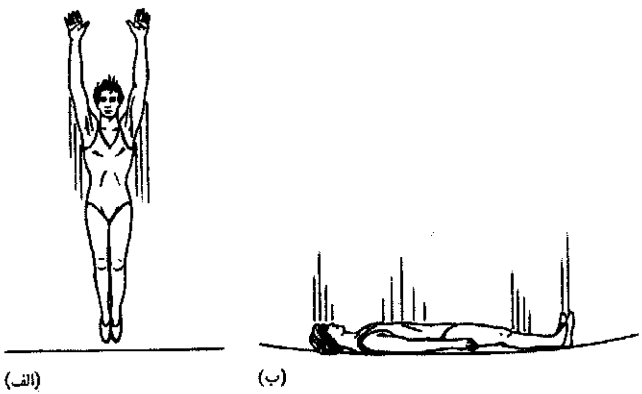
۲۰. اگر تمام جمعیت جهان به قطب جنوب مهاجرت کنند، آیا این اقدام تأثیری در طول مدت روز می‌گذارد؟ اگر چنین است، به چه صورت تأثیر می‌گذارد.

۲۱. یک گردونهٔ دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت حول یک محور قائم می‌چرخد. نه اصطکاک و نه گشتاور محرک در کار نیستند. یک ظرف گرد روی این گردونه قرار گرفته است و با آن می‌چرخد (شکل ۲۲). در ته ظرف یک لایه یخ با ضخامت یکنواخت قرار دارد، که البته آن هم با ظرف می‌چرخد. یخ ذوب می‌شود ولی هیچ آبی از ظرف خارج نمی‌شود. آیا حالا سرعت زاویه‌ای مجموعه بیشتر از، برابر با، یا کمتر از مقدار اولیه است؟ برای پاسخ خودتان دلیل ارائه بدهید.



شکل ۲۲. پرسش ۲۱

۲۲. در شکل ۲۳الف آکروبات‌بازی را می‌بینید که توسط یک ترامپولین با تکانهٔ زاویه‌ای صفر به طرف بالا به‌حرکت درآمده است. آیا این شخص



شکل ۲۳. پرسش ۲۲

می‌تواند با حرکت دادن اندام خود، ترتیبی بدهد که به پشت روی ترامپولین فرود بیاید (شکل ۲۳ب)؟ جالب توجه اینکه ۳۸٪ مربیان شیرجه و ۳۴٪ فیزیک‌پیشگانی که این سؤال از آنها پرسیده شد، به آن پاسخ نادرست دادند. نظر شما در این باره‌چیست؟[1]

۲۳. با استفاده از مفاهیم تکانهٔ زاویه‌ای و لختی دورانی، توضیح بدهید که در تاب‌بازی چگونه می‌توان در موقعیت نشسته ارتفاع تاب‌خوردن را افزایش داد.[2]

۲۴. آیا می‌شود یک تاب را آنقدر بالا برد که یک دایرهٔ کامل را طی کند و به‌طور کامل دور تکیه‌گاهش بچرخد؟ می‌توانید (چنانچه مایل باشید) فرض کنید که سکوی تاب، به‌جای طناب یا زنجیر، با میلهٔ صلب به محور متصل شده است.

۲۵. یک گردونهٔ دایره‌ای کوچک حول یک محور قائم به‌طور آزاد در حال چرخش است. در محور اصطکاک وجود ندارد. (الف) ککی که در ابتدا در مرکز گردونه قرار دارد به طرف لبه حرکت می‌کند و روی لبه می‌ایستد. تکانهٔ زاویه‌ای سیستم (گردونه به‌اضافهٔ کک) چگونه تغییر می‌کند؟ سرعت زاویه‌ای گردونه چگونه تغییر می‌کند؟ (ب) اگر کک از لبهٔ گردونه (بدون پرش) سقوط کند سرعت زاویه‌ای گردونه چگونه تغییر می‌کند؟

۲۶. از یک چرخ سنگین می‌توان برای پایدارکردن حرکت کشتی استفاده کرد. اگر این چرخ چنان نصب شود که محور دورانش عمود بر عرشهٔ کشتی باشد، وقتی که کشتی می‌خواهد از پهلو به پهلو بغلتد، اثر این چرخ چگونه ظاهر می‌شود؟

۲۷. اگر فرفرهٔ شکل ۱۸ در حال چرخش نباشد، می‌افتد. اگر تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی آن در مقایسه با تکانهٔ زاویه‌ای ناشی از گشتاور اعمال شده زیاد باشد، فرفره حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. در حالت میانی، یعنی وقتی فرفره به‌کندی در حال چرخش باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

۲۸. فرفرهٔ "واغلتان" تشکیل شده است از یک قسمت تقریباً کروی با شعاع زیاد در یک طرف و یک قسمت میله‌ای برای چرخاندن آن در طرف دیگر. اگر این فرفره نچرخد روی سطح کروی قرار می‌گیرد و اگر چرخانده شود طوری وامی‌غلتد که روی میله قرار بگیرد. در این باره توضیح بدهید.[3] اگر نتوانستید فرفرهٔ واغلتان پیدا کنید، از یک تخم‌مرغ

---

۱. نگاه کنید به
"Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?" Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, July 1979, p. 583.

۲. نگاه کنید به
"How To Get the Playground Swing Going: A First Lesson in the Mechanics of Rotation", Jearl Walker, *Scientific American*, March 1989, p. 106.

۳. نگاه کنید به
"The Tippy-Top," George D. Freier, *The Physics Teacher*, January 1967, p. 36.

آب‌پز سفت شده استفاده کنید؛ رفتار "ایستادن روی پا"ی تخم‌مرغ چرخان را می‌توانید با گذاشتن یک علامت جوهری روی سر "تیز" تخم‌مرغ بررسی کنید.

مسئله‌ها

بخش ۱۳ـ۱ تکانهٔ زاویه‌ای ذره

۱. اگر r، p، و θ معلوم باشند، می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۲ تکانهٔ زاویه‌ای ذره را محاسبه کنیم. ولی، گاهی اوقات مؤلفه‌های (x, y, z) بردار $\mathbf{r}$ و (v_x, v_y, v_z) سرعت $\mathbf{v}$ را می‌دانیم. (الف) نشان بدهید که مؤلفه‌های بردار $\mathbf{l}$ در امتداد محورهای x، y، و z عبارت‌اند از

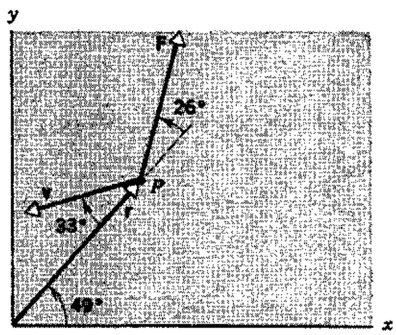
$$l_x = m(yv_z - zv_y)$$

$$l_y = m(zv_x - xv_z)$$

$$l_z = m(xv_y - yv_x)$$

(ب) نشان بدهید که اگر ذره در صفحهٔ xy حرکت کند، بردار تکانهٔ زاویه‌ای برایند تنهادارای مؤلفهٔ z است. (راهنمایی: نگاه کنید به معادلهٔ ۱۷ در فصل ۳).

۲. ذرهٔ P به جرم ۲٫۱۳kg که بردار مکان آن $\mathbf{r}$ و سرعت آن $\mathbf{v}$ است تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ قرار می‌گیرد (شکل ۲۴). این سه بردار در یک صفحه قرار دارند. فرض کنید که $r = ۲٫۹۱\text{m}$، $v = ۴٫۱۸\text{m/s}$، و $F = ۱٫۸۸\text{N}$ باشد. کمیتهای زیر را محاسبه کنید: (الف) تکانهٔ زاویه‌ای ذره و (ب) گشتاور وارد بر ذره حول مبدأ. جهت این دو بردار را مشخص کنید.



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۲

۳. نشان بدهید تکانهٔ زاویه‌ای ذره‌ای که با سرعت ثابت در حرکت است، حول هر نقطهٔ دلبخواه در طی حرکت ثابت می‌ماند.

۴. (الف) با استفاده از داده‌های ارائه شده در پیوستها، تکانهٔ زاویه‌ای کل ناشی از دوران همهٔ سیاره‌ها به‌دور خورشید را محاسبه کنید. (ب) چه کسری از این تکانهٔ زاویه‌ای مربوط به سیارهٔ مشتری است؟

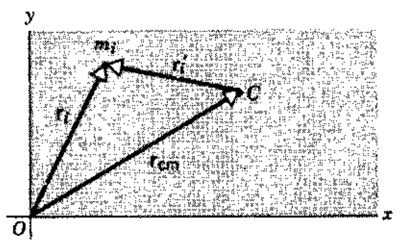
۵. دو ذره، هرکدام با جرم m و سرعت v، در امتداد دو خط موازی که به فاصلهٔ d از هم قرار دارند در جهتهای مخالف در حرکت‌اند. عبارتی برای تکانهٔ زاویه‌ای کل این سیستم حول هر مبدأ دلبخواه به‌دست بیاورید.

۶. تکانهٔ زاویه‌ای شخصی به جرم ۸۴٫۳kg واقع بر استوای زمین را حول مرکز زمین محاسبه کنید.

بخش ۱۳ـ۲ سیستمهای ذرات

۷. تکانهٔ زاویه‌ای کل یک سیستم از ذرات، نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت از عبارت $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ حاصل می‌شود که در آن $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{p}_i$ نسبت به مبدأ O اندازه‌گیری شده‌اند. (الف) از رابطه‌های $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{r}'_i$ و $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{p}'_i$ استفاده کنید و $\mathbf{L}$ را برحسب مکانهای $\mathbf{r}'_i$ و تکانه‌های $\mathbf{p}'_i$ نسبت به مرکز جرم C بیان کنید (نگاه کنید به شکل ۲۵). (ب) از تعریف مرکز جرم و تعریف تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}'$ نسبت به مرکز جرم استفاده کنید و عبارت $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{\text{cm}} \times M\mathbf{v}_{\text{cm}}$ را به‌دست بیاورید. (ج) نشان بدهید که این عبارت را می‌توان چنین تعبیر کرد که تکانهٔ زاویه‌ای کل برابر است با تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی (تکانهٔ زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم) به‌اضافهٔ تکانهٔ زاویه‌ای مداری (تکانهٔ زاویه‌ای مربوط به حرکت مرکز جرم C نسبت به مبدأ O وقتی که تمام جرم جسم در نقطهٔ C متمرکز شده باشد).

۸. فرض کنید $\mathbf{r}_{\text{cm}}$ بردار مکان مرکز جرم C سیستمی از ذرات نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت باشد، و فرض کنید که $\mathbf{r}'_i$ بردار مکان ذرهٔ iام با جرم m_i، نسبت به مرکز جرم C باشد. بنابراین $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{r}'_i$ است (شکل ۲۵). حالا تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم ذرات را نسبت به مرکز جرم C به‌صورت $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$، که در آن $\mathbf{p}_i = m_i d\mathbf{r}'_i/dt$ است، تعریف کنید. (الف) نشان بدهید که $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}_i/dt - m_i d\mathbf{r}_{\text{cm}}/dt = \mathbf{p}_i - m_i\mathbf{v}_{\text{cm}}$ (ب) حالا نشان بدهید $d\mathbf{L}'/dt = \sum \mathbf{r}'_i \times d\mathbf{p}'_i/dt$. (ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را با هم ترکیب کنید و با استفاده از تعریف مرکز جرم و قانون سوم نیوتون نشان بدهید که $\boldsymbol{\tau}'_{\text{ext}} = d\mathbf{L}'/dt$ است. در این رابطهٔ آخر $\boldsymbol{\tau}'_{\text{ext}}$ عبارت از جمع کل گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم حول مرکز جرم است.



شکل ۲۵. مسئله‌های ۷ و ۸

بخش ۱۳ـ۳ تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای

۹. انتگرال زمانی گشتاور نیرو را ضربهٔ زاویه‌ای می‌گوییم. (الف) با شروع از معادلهٔ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ نشان بدهید که ضربهٔ زاویه‌ای کل برابر

با تغییر تکانهٔ زاویه‌ای است. این رابطه مشابه زاویه‌ای رابطهٔ ضربه‌ـتکانه در حرکت خطی است. (ب) برای دوران حول یک محور ثابت، نشان بدهید که

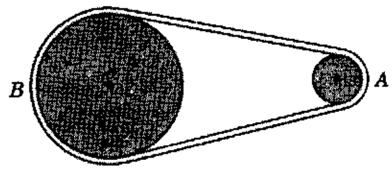
$$\int \tau\, dt = \overline{F} r(\Delta t) = I(\omega_{\rm f} - \omega_{\rm i})$$

که در آن r بازوی گشتاور است، $\overline{F}$ میانگین نیرو در مدتی است که بر جسم اثر می‌کند و $\omega_{\rm i}$ و $\omega_{\rm f}$ به‌ترتیب عبارت‌اند از سرعت زاویه‌ای جسم درست قبل و بعد از اعمال نیرو.

۱۰. قرصی با لختی دورانی ۱٫۲۲ × ۱۰$^{-۳}$kg · m^۲ روی یک متهٔ برقی نصب می‌شود. موتور این مته گشتاور ۱۵٫۸N · m را بر جسم وارد می‌کند. ۳۳٫۰ ms پس از روشن شدن موتور، (الف) تکانهٔ زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای قرص چقدر است؟

۱۱. چرخی با شعاع ۲۴٫۷cm، که در ابتدا با سرعت ۴۳٫۳m/s در حرکت است، ۲۲۵m می‌غلتد تا متوقف شود. کمیتهای زیر را محاسبه کنید. (الف) شتاب خطی و (ب) شتاب زاویه‌ای چرخ. (ج) اگر لختی دورانی چرخ برابر با ۰٫۱۵۵kg · m^۲ باشد، گشتاور وارد بر چرخ در اثر اصطکاک غلتشی را محاسبه کنید.

۱۲. چرخهای A و B توسط تسمه‌ای مطابق شکل ۲۶ به‌هم متصل شده‌اند. شعاع چرخ B سه برابر شعاع چرخ A است. در دو حالت زیر نسبت لختیهای دورانی I_A/I_B چقدر است؟ (الف) هر دو چرخ تکانهٔ زاویه‌ای یکسانی دارند و (ب) هر دو چرخ انرژی جنبشی دورانی یکسانی دارند. فرض می‌کنیم که تسمه روی چرخها نمی‌لغزد.



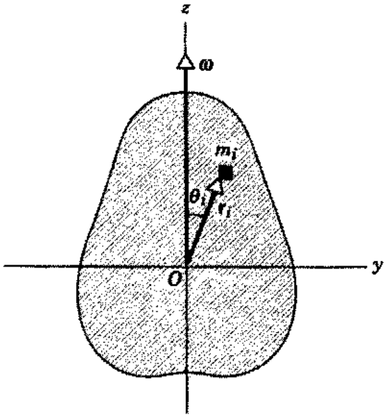
شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۲

۱۳. نشان بدهید که برای سیستم دوذره‌ای شکل ۷، $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ است.

۱۴. با استفاده از داده‌های مندرج در پیوستها، تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی زمین را حول محور دورانش تعیین کنید. فرض کنید زمین کره‌ای یکنواخت است.

۱۵. تکانهٔ زاویه‌ای چرخ‌لنگری با لختی دورانی ۰٫۱۴۲kg · m^۲ در مدت ۱٫۵۳s از ۳٫۰۷ به ۰٫۷۸۸kg · m^۲/s کاهش پیدا می‌کند. (الف) گشتاور متوسط وارد بر چرخ‌لنگر را در این مدت تعیین کنید. (ب) با فرض اینکه شتاب زاویه‌ای ثابت باشد، چرخ‌لنگر در این مدت چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟ (ج) روی این چرخ لنگر چقدر کار انجام شده است؟ (د) این چرخ‌لنگر چه توان متوسطی فراهم می‌کند؟

۱۶. در شکل ۲۷ جسم صلب متقارنی را می‌بینیم که حول محور ثابتی دوران می‌کند. به‌منظور ساده کردن محاسبات، مبدأ مختصات را در مرکز جرم قرار می‌دهیم. با جمع تکانه‌های زاویه‌ای مربوط به همهٔ جرمهای m_i که جسم به آنها تقسیم شده است، ثابت کنید $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ که در آن $\mathbf{L}$ تکانهٔ زاویه‌ای کل است.



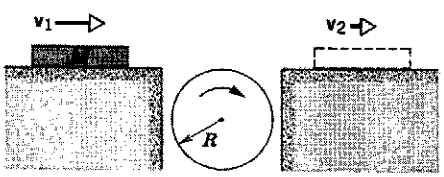
شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۶

۱۷. طول چوبدستی به جرم ۴٫۴۲kg برابر با ۱٫۲۳m است. این چوبدست روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال سکون قرار گرفته است. یک نیروی ضربه‌ای افقی عمود بر چوبدست در فاصلهٔ ۴۶٫۴cm از مرکز جرم به آن وارد می‌شود و ضربه‌ای برابر با ۱۲٫۸N · s تولید می‌کند. حرکت بعدی چوبدست چگونه است؟

۱۸. استوانه‌ای روی سطح شیبداری با زاویه θ به پایین می‌غلتد. با کاربرد مستقیم معادلهٔ ۸ $(\sum \boldsymbol{\tau}_{\rm ext} = d\mathbf{L}/dt)$ نشان بدهید که شتاب مرکز جرم آن برابر $\frac{۲}{۳} g \sin\theta$ است. این روش را با روش مثال ۸ فصل ۱۲ مقایسه کنید.

۱۹. برای اینکه توپ بیلیارد از حالت سکون، بدون لغزش به غلتش در بیاید، چوب بیلیارد نباید در راستای مرکز (یعنی در ارتفاعی به‌اندازهٔ شعاع توپ بالاتر از سطح میز) به‌آن برخورد کند بلکه باید در ارتفاع $۲R/۵$ بالاتر از مرکز به توپ برخورد کند. این را اثبات کنید.[۱]

۲۰. محور استوانهٔ شکل ۲۸ ثابت است. استوانه در آغاز در حالت سکون است. جسمی به جرم M که بدون اصطکاک با سرعت $v_۱$ به‌سمت راست در حرکت است از روی استوانه می‌گذرد و به موقعیت خط‌چین می‌رسد. وقتی این جسم با استوانه تماس پیدا می‌کند، ابتدا روی آن می‌لغزد، ولی اصطکاک آنقدر هست که قبل از آنکه تماس



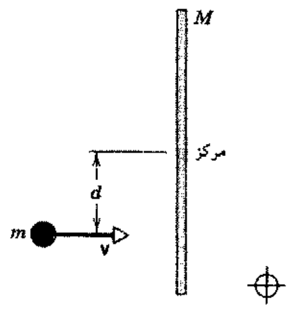
شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۰

۱. نگاه کنید به

Arnold Sommerfeld, Mechanics, *Volume I of Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press Orlando (1964 paperback edition), pp. 158-161, for a supplement on the mechanics of billiards.

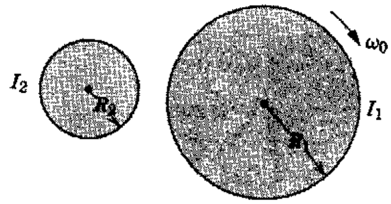
جسم با استوانه قطع شود لغزش تمام می‌شود. شعاع استوانه R و لختی دورانی آن I است. سرعت نهایی v_2 را برحسب v_1، M، I و R بیان کنید. ساده‌ترین راه برای رسیدن به این نتیجه آن است که از رابطهٔ میان ضربه و تغییر تکانه استفاده کنید.

۲۱. چوبدستی به طول L و با جرم M روی سطح یک میز افقی بدون اصطکاک قرارگرفته است. این چوبدست را می‌توانیم آزادانه به هر سو که مایل باشیم به چرخش وابداریم. جسمی به جرم m که با سرعت v، مطابق شکل ۲۹، در حرکت است با چوبدست برخورد کشسان انجام می‌دهد. (الف) در این برخورد چه چیزی پایسته است؟ (ب) برای اینکه جسم بلافاصله پس از برخورد به حالت سکون در بیاید جرم آن، m، باید چقدر باشد؟



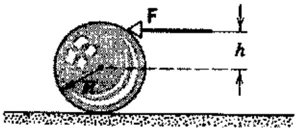
شکل ۲۹. مسئلهٔ ۲۱

۲۲. دو استوانه به شعاعهای R_1 و R_2 به‌ترتیب دارای لختی دورانی I_1 و I_2 هستند. این استوانه‌ها توسط محورهایی که برصفحهٔ شکل ۳۰ عمودند نگهداری می‌شوند. استوانهٔ بزرگتر در آغاز با سرعت زاویه‌ای ω_0 در حرکت است. استوانهٔ کوچکتر به‌سمت راست حرکت داده می‌شود تا با استوانهٔ بزرگتر تماس پیدا کند و به واسطهٔ اصطکاک با استوانه دیگر به دوران در بیاید. سرانجام لغزش به‌پایان می‌رسد و دو استوانه با آهنگهای ثابتی در جهتهای مخالف دوران می‌کنند. سرعت زاویه‌ای نهایی، ω_2، استوانهٔ کوچکتر را برحسب I_1، I_2، R_1، R_2، و ω_0 پیدا کنید. (راهنمایی: تکانهٔ زاویه‌ای و انرژی جنبشی هیچ‌کدام پایسته نیستند. معادلهٔ ضربهٔ زاویه‌ای را در مورد هر یک از استوانه‌ها به‌کار بگیرید. نگاه کنید به مسئلهٔ ۹).



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۲۲

۲۳. به توپ بیلیاردی که در ابتدا ساکن است با چوب بیلیارد ضربه سریعی وارد می‌کنیم. چوب بیلیارد را، قبل از ضربه، به‌طور افقی در ارتفاع h بالای خطی که از مرکز توپ می‌گذرد، مانند شکل ۳۱ نگه داشته‌ایم. توپ با سرعت v_0 از چوب جدا می‌شود و به خاطر "حرکت اسپینی به طرف جلو"، سرعت آن سرانجام به $9v_0/7$ می‌رسد. نشان بدهید که $h = 4R/5$ است (R شعاع توپ بیلیارد است).



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. در مسئلهٔ ۲۳، فرض کنید نیروی $\mathbf{F}$ به‌نقطه‌ای پایین‌تر از خطی که از مرکز توپ می‌گذرد، وارد می‌شود. (الف) نشان بدهید که با این "حرکت اسپینی به‌سوی عقب" غیرممکن است بتوان سرعت پیشروی را، بدون ایجاد غلتش به‌صفر کاهش داد، مگر اینکه $h = R$ باشد. (ب) نشان بدهید که ایجاد یک حرکت به‌سوی عقب درتوپ غیرممکن است مگر اینکه $\mathbf{F}$ یک مؤلفهٔ قائم به‌طرف پایین داشته باشد.

۲۵. یک بازیکن بولینگ توپ بولینگی به شعاع $R = 11{,}0\,\mathrm{cm}$ را با سرعت اولیهٔ $v_0 = 8{,}50\,\mathrm{m/s}$ در امتداد دالان پرتاب می‌کند. این توپ قبل از اینکه شروع به غلتیدن کند مسافت معینی را می‌لغزد. قبل از برخورد توپ با کف دالان، حرکت آن انتقالی محض است و هیچ چرخشی ندارد. ضریب اصطکاک جنبشی بین توپ و کف دالان $0{,}210$ است. (الف) این توپ چه مدتی روی کف دالان می‌لغزد؟ (راهنمایی: در حین لغزش، سرعت v توپ کاهش پیدا می‌کند و سرعت زاویه‌ای آن افزایش می‌یابد؛ لغزش وقتی تمام می‌شود که $v = R\omega$ شود). (ب) چه مسافتی را با لغزش طی می‌کند؟ (ج) قبل از آغاز غلتش چند دور می‌زند؟ (د) وقتی شروع به غلتیدن می‌کند سرعت آن چقدر است؟

بخش ۱۳ـ۴ پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای

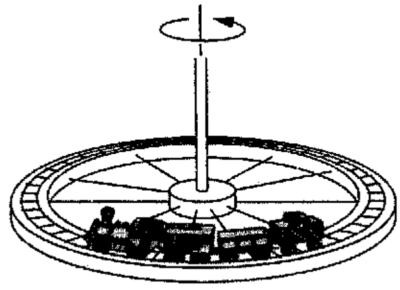
۲۶. مشاهدات اخترشناختی نشان می‌دهد که از سال ۱۸۷۰ تا سال ۱۹۰۰، طول مدت شبانه‌روز به مقدار تقریبی $6{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$ افزایش پیدا کرده است. (الف) تغییر نسبی متناظر در سرعت زاویه‌ای زمین چقدر بوده است؟ (ب) فرض کنید این تغییر ناشی از تغییر ناشی از جابه‌جایی مواد گداخته در هستهٔ زمین بوده باشد. چه تغییر نسبی‌ای در لختی دورانی زمین می‌تواند پاسخ قسمت (الف) را توجیه کند؟

۲۷. فرض کنید خورشید با تمام شدن سوخت هسته‌ای‌اش ناگهان می‌رمبد و به‌یک کوتولهٔ سفید تبدیل می‌شود، و در این فرایند قطر آن برابر با قطر زمین می‌شود. اگر هیچ اتلاف جرمی در کار نباشد، دورهٔ تناوب چرخش خورشید که اکنون در حدود ۲۵ روز است چقدرخواهد شد؟ فرض کنید خورشید و کوتولهٔ سفید کره‌های یکنواختی باشند.

۲۸. شخصی روی سکوی بدون اصطکاکی که با سرعت $1{,}22\,\mathrm{rev/s}$ دوران می‌کند ایستاده است؛ دستهایش رابه طرفین بازکرده و با هر کدام وزنه‌ای را نگه داشته است. وقتی دستهای او در چنین وضعیتی قرار دارند لختی دورانی کل شخص، وزنه‌ها، و سکو برابر

با ۶ر۱۳$\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. اگر این شخص با جابه‌جا کردن دستهایش لختی دورانی را به ۱ر۹۷$\mathrm{kg\cdot m^2}$ کاهش بدهد (الف) سرعت زاویه‌ای سکو چقدر خواهد شد و (ب) نسبت انرژی جنبشی فعلی به انرژی جنبشی اولیه چقدر است؟

۲۹. در یک نمایش کلاسی، ریلهای یک قطار اسباب‌بازی روی یک چرخ بزرگ نصب می‌شود. این چرخ می‌تواند (با اصطکاکی ناچیز) حول یک محور قائم به‌دوران بیاید (شکل ۳۲). قطار اسباب‌بازی به جرم m را روی ریلها قرار می‌دهیم. مجموعه در آغاز در حال سکون است. قطار را روشن می‌کنیم. سرعت قطار پس از مدتی به مقدار پایای v نسبت به مسیر می‌رسد. اگر جرم چرخ M و شعاع آن R باشد، سرعت زاویه‌ای‌اش، ω، چقدر است؟ (جرم پره‌های چرخ ناچیز است.)



شکل ۳۲. مسئلهٔ ۲۹

۳۰. لختی دورانی چرخانهٔ یک موتور الکتریکی حول محور مرکزی‌اش برابر است با $I_m = $ ۲ر۴۷ × ۱۰$^{-3}$$\mathrm{kg\cdot m^2}$. این موتور موازی با محور یک کاوهٔ فضایی نصب شده است. لختی دورانی کاوهٔ فضایی حول محورش برابر با $I_p = $ ۱۲ر۶$\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. تعداد دورهایی که باید موتور بچرخد تا کاوه را به‌اندازه ۲۵ر۰° حول محورش بچرخاند چقدر است؟

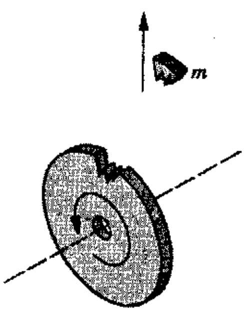
۳۱. چرخی که لختی دورانی آن ۱ر۲۷$\mathrm{kg\cdot m^2}$ است با سرعت زاویه‌ای ۸۲۴$\mathrm{rev/min}$ روی محوری با لختی دورانی ناچیز می‌چرخد. چرخ دیگری با لختی دورانی ۴ر۸۵$\mathrm{kg\cdot m^2}$ که در ابتدا ساکن است، به‌طور ناگهانی به‌همان محور جفت می‌شود. (الف) سرعت زاویه‌ای نهایی مجموعهٔ محور و دو چرخ چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه به علت این جفت‌شدگی تلف می‌شود؟

۳۲. شعاع چرخ دوچرخه‌ای با طوق نازک برابر با ۳۶ر۳cm است. جرم توپی و پره‌های این چرخ قابل اغماض و جرم طوق آن ۳ر۶۶kg است؛ این چرخ را می‌توان با اصطکاکی ناچیز حول محورش به‌چرخش درآورد. شخصی چرخ را طوری بالای سرش نگه داشته است که محور چرخ قائم است. این شخص روی یک گردونه ایستاده است که می‌تواند (بدون اصطکاک) دوران کند. اگر از بالا نگاه کنیم چرخ ساعتگرد می‌چرخد. گردونه در ابتدا ساکن است. سرعت زاویه‌ای اولیهٔ چرخ ۵۷ر۷$\mathrm{rad/s}$ است. لختی دورانی چرخ + شخص + گردونه حول محور مشترکشان برابر با ۲ر۸۸$\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. دست این شخص ناگهان چرخ را از چرخش (نسبت به گردونه) بازمی‌دارد. سرعت زاویه‌ای نهایی (جهت و مقدار) سیستم را پیدا کنید. (ب) آزمایش را تکرار کنید، ولی این‌بار فرض می‌کنیم که اصطکاک محور چرخ قابل ملاحظه می‌باشد. چرخ با همان سرعت زاویه‌ای اولیه (۵۷ر۷$\mathrm{rad/s}$) حرکت را آغاز می‌کند و به‌تدریج (نسبت به گردونه) متوقف می‌شود. این بار هم شخص چرخ را به همان صورت که در بالا توصیف شده نگه داشته است. (باز هم گردونه می‌تواند آزادانه و بدون اصطکاک بچرخد.) چگونگی حرکت این سیستم را متناسب با اطلاعات داده شده به‌طور کمی توصیف کنید.

۳۳. جوانی به جرم ۵۰ر۶kg روی لبهٔ یک چرخ‌وفلک افقی بدون اصطکاک به‌جرم ۸۲۷kg و به‌شعاع ۳ر۷۲m ایستاده است. چرخ‌وفلک حرکتی ندارد، این شخص سنگی به جرم ۱ر۱۳kg را در امتداد افق و مماس با لبهٔ بیرونی چرخ‌وفلک پرتاب می‌کند. سرعت سنگ نسبت به‌زمین برابر با ۷ر۸۲$\mathrm{m/s}$ است. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخ‌وفلک و (ب) سرعت خطی شخص پس از پرتاب سنگ چقدر است؟ چرخ‌وفلک را به‌صورت یک قرص یکنواخت در نظر بگیرید.

۳۴. در مکان بازی بچه‌ها چرخ‌وفلک کوچکی به شعاع ۱ر۲۲m و جرم ۱۷۶kg نصب شده است. شعاع چرخش (نگاه کنید به مسئلهٔ ۱۱ در فصل ۱۲) این چرخ‌وفلک ۹۱ر۶cm است. نوجوانی به جرم ۴۴ر۳kg با سرعت ۲ر۹۲$\mathrm{m/s}$ مماس بر لبهٔ چرخ‌وفلک ساکن می‌دود و روی آن می‌پرد. فرض کنید اصطکاک بین یاتاقانها و محور چرخ‌وفلک ناچیز است. سرعت زاویه‌ای مجموعهٔ چرخ‌وفلک و نوجوان را تعیین کنید.

۳۵. یک قرص تخت یکنواخت به جرم M و شعاع R حول محوری افقی که از مرکز آن می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. (الف) انرژی جنبشی آن چقدر است؟ تکانهٔ زاویه‌ای آن چقدر است؟ (ب) یک تکه به جرم m از لبهٔ قرص می‌شکند و در لحظه‌ای که از آن جدا می‌شود در راستای قائم به‌سمت بالا صعود می‌کند (شکل ۳۳). این تکه تا چه ارتفاعی از محل جداشدن بالاتر می‌رود؟ (ج) سرعت زاویه‌ای نهایی قرص شکسته شده چقدر است؟

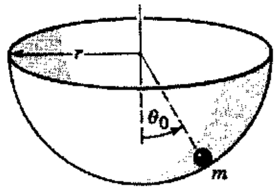


شکل ۳۳. مسئلهٔ ۳۵

۳۶. سوسکی به جرم m روی لبهٔ صفحهٔ گردندهٔ دایره‌ای شکلی به شعاع R و لختی دورانی I که می‌تواند بدون اصطکاک حول محور قائم بچرخد، در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کند. سرعت سوسک (نسبت به‌زمین) v است، در حالی که صفحه با سرعت زاویه‌ای ω در جهت ساعتگرد می‌چرخد. سوسک روی لبهٔ صفحه به ریزه‌نانی می‌رسد، و (الف) سرعت زاویه‌ای صفحه پس از توقف سوسک

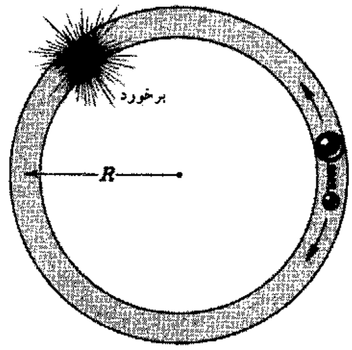
چقدر است؟ (ب) در این فرایند چقدر انرژی جنبشی تلف می‌شود.

۳۷. ذره‌ای به‌طور افقی روی سطح داخل یک جام نیمکره به شعاع r پرتاب می‌شود. جام را بی‌حرکت نگه داشته‌ایم (شکل ۳۴). می‌خواهیم سرعت اولیهٔ v_0 را چنان تعیین کنیم که ذره درست تا لبهٔ جام بالا برود. v_0 را به‌صورت تابعی از θ_0، مکان زاویه‌ای اولیهٔ ذره، تعیین کنید. (راهنمایی: از اصول پایستگی استفاده کنید.)



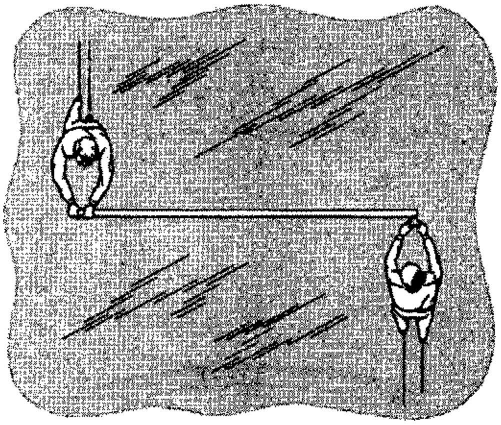
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۳۷

۳۸. روی یک مسیر دایره‌ای افقی بدون اصطکاک به شعاع R، دو گوی کوچک به جرمهای m و M قرار گرفته‌اند که می‌توانند آزادانه روی مسیر بلغزند. بین دو گوی فنری فشرده شده است، ولی این فنر به گویها متصل نیست. دو گوی توسط ریسمانی به هم متصل شده‌اند. (الف) اگر ریسمان پاره شود، فنر فشرده (که بدون جرم فرض می‌شود) دو گوی را در دو جهت مخالف شلیک می‌کند؛ و خودش همانجا باقی می‌ماند. گویها وقتی بار دیگر روی مسیر به هم می‌رسند برخورد می‌کنند (شکل ۳۵). این برخورد در کجا صورت می‌گیرد؟ جواب را به‌صورت زاویه‌ای که گوی M طی می‌کند، برحسب رادیان، بیان کنید. (ب) انرژی پتانسیلی که در آغاز در فنر ذخیره می‌شود U_0 است. زمان لازم برای وقوع برخورد پس از پاره شدن ریسمان چقدر است؟ (ج) فرض کنید برخورد کاملاً کشسان و رودررو است. گویها پس از اولین برخورد، مجدداً در کجا با هم برخورد می‌کنند؟



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۳۸

۳۹. دو اسکیت‌باز، که جرم هرکدام از آنها ۵۱٫۲kg است، در امتداد دو مسیر موازی به‌سوی یکدیگر در حرکت‌اند. فاصلهٔ بین دو مسیر ۲٫۹۲m است. سرعت این دو اسکیت‌باز مساوی و در جهتهای مخالف، و مقدار آن ۱٫۳۸m/s است. اسکیت‌باز اولی چوب پرچم بلند و سبکی به‌طول ۲٫۹۲m در دست دارد؛ دومی وقتی از کنار او می‌گذرد انتهای دیگر چوب را به‌دست می‌گیرد (شکل ۳۶). فرض کنید اصطکاک وجود ندارد. (الف) حرکت اسکیت‌بازها را پس از آنکه توسط چوب پرچم به هم مرتبط شدند به‌طورکمی توصیف‌کنید. (ب) دو اسکیت‌باز در امتداد چوب پرچم به‌هم نزدیک می‌شوند و فاصله‌شان را به ۰٫۹۴m کاهش می‌دهند. در این حالت سرعت زاویه‌ای آنها را تعیین کنید. (ج) انرژی جنبشی سیستم را در قسمتهای (الف) و (ب) محاسبه کنید. اختلاف انرژی از کجا پدید می‌آید؟


شکل ۳۶. مسئلهٔ ۳۹

۴۰. اگر یخهای قطبهای زمین آب می‌شد و به اقیانوسها می‌ریخت، عمق اقیانوسها حدوداً ۳۰ متر بیشتر می‌شد. این حادثه چه تأثیری در چرخش زمین می‌داشت؟ در صورت وقوع چنین حادثه‌ای طول شبانه‌روز، به تخمین، چقدر می‌شد؟ (در واقع نگرانیهایی ابراز شده است که گرم‌شدن جو زمین به‌علت آلودگیهای صنعتی ممکن است نهایتاً موجب ذوب‌شدن یخهای قطبی شود.)

۴۱. زمین در حدود ۴٫۵ میلیارد سال پیش، احتمالاً به‌صورت کره‌ای با چگالی کم‌وبیش یکنواخت به‌وجود آمده است. کمی بعد، گرمای ناشی از واپاشی عناصر پرتوزا سبب شده است که بخش اعظم زمین ذوب شود. به‌این ترتیب مواد سنگین‌تر به‌سمت مرکز زمین رفته و هستهٔ زمین را تشکیل داده‌اند. امروزه می‌توانیم زمین را چنین ترسیم کنیم که تشکیل شده است از یک هستهٔ مرکزی به شعاع ۳۵۷۰km و چگالی ۱۰٫۳$\,\text{g/cm}^3$ که توسط "گوشته"ای با چگالی ۴٫۵۰$\,\text{g/cm}^3$ که تا سطح زمین (تا شعاع ۶۳۷۰km) ادامه دارد احاطه شده است. از پوستهٔ زمین چشمپوشی می‌کنیم. تغییر نسبی در مدت شبانه‌روز، ناشی از شکل‌گیری هسته، چقدر بوده است؟

بخش ۱۳ـ۵ فرفرهٔ چرخان

۴۲. فرفره‌ای با سرعت زاویه‌ای ۲۸٫۶rev/s حول محوری که با امتداد قائم محل زاویهٔ °۳۴٫۰ می‌سازد، می‌چرخد. جرم این فرفره ۴۹۲g و لختی دورانی آن $5{,}12 \times 10^{-4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ است. مرکز جرم آن در فاصلهٔ ۳٫۸۸cm از تکیه‌گاه قرار دارد. اگر از بالا به فرفره نگاه کنیم چرخش آن ساعتگرد است. مقدار (برحسب rev/s) و جهت سرعت

زاویه‌ای حرکت تقدیمی را تعیین کنید.

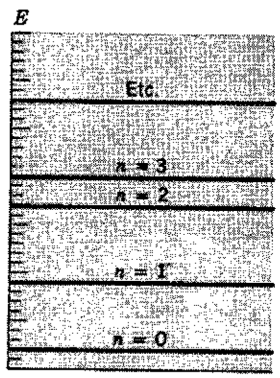
۴۳. ژیروسکوپی شامل یک قرص چرخان با شعاع ۴۸٫۷cm است که به‌دقت در وسط یک محور به طول ۱۲٫۲cm سوار شده است. این ژیروسکوپ می‌تواند آزادانه بچرخد و حرکت تقدیمی داشته باشد. سرعت چرخش آن ۹۷۵rev/min است. جرم قرص ۱٫۱۴kg و جرم محور ۱۳۰g است. اگر محور افقی و یک انتهای آن روی تکیه‌گاه باشد، زمان لازم برای انجام یک‌دور حرکت تقدیمی چقدر است؟

بخش ۱۳ـ۶ کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای

۴۴. در سال ۱۹۱۳ نیلس بور فرض کرد که تکانهٔ زاویه‌ای هر سیستم چرخندهٔ مکانیکی با لختی دورانی I، کوانتیده است. یعنی،

$$L = I\omega = n(h/2\pi)$$

که در آن L تکانهٔ زاویه‌ای و n هر عدد درست مثبت یا صفر است. (الف) نشان بدهید که این فرض ایجاب می‌کند که انرژی جنبشی هر سیستم چرخنده‌ای منحصر به مجموعه‌ای از اعداد گسسته باشد، یعنی انرژی کوانتیده است؛ عبارتی برای کوانتش انرژی به‌دست بیاورید. (ب) یک چرخندهٔ صلب، شامل ذره‌ای به جرم m را که مقید به دوران روی دایره‌ای به‌شعاع R است، در نظر بگیرید. اگر این فرض درست باشد، ذره چه سرعت زاویه‌ای می‌تواند داشته باشد؟ انرژی جنبشی ذره چقدر است؟ (ج) یک نمودار تراز انرژی، مانند شکل ۳۷، رسم کنید و روی این نمودار نشان بدهید که فاصلهٔ بین ترازهای انرژی با افزایش n چگونه تغییر می‌کند. رفتار بعضی از مولکولهای دواتمی کم‌انرژی مانند یک چرخندهٔ صلب است.



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۴۴

۴۵. (الف) فرض کنید در اتم هیدروژن الکترون در مداری دایره‌ای به‌دور پروتون می‌چرخد. نیروی مرکزگرای وارد بر الکترون را نیروی الکتریکی $e^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$ تأمین می‌کند، که در آن e مقدار بار یک الکترون یا یک پروتون است، r شعاع مدار است و ε_0 مقدار ثابتی است. نشان بدهید که شعاع مدار از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود

$$r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2}$$

که در آن m جرم الکترون و v سرعت آن است. (ب) حالا فرض کنید که تکانهٔ زاویه‌ای الکترون حول پروتون فقط می‌تواند مضارب صحیح (n) $h/2\pi$ را اختیار کند، که درآن h ثابت پلانک است. نشان بدهید که در این‌صورت تنها مدارهای ممکن برای الکترون عبارت‌اند از مدارهایی با شعاع

$$r = \frac{nh}{2\pi m v}$$

(ج) بین جوابهای قسمت (الف) و (ب) v را حذف می‌کنیم و نشان می‌دهیم شعاعهای تنها مدارهایی که با هر دو شرط سازگارند برابرند با

$$r = \frac{n^2 \varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

به‌این ترتیب شعاعهای مجاز با مربع اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، و الی‌آخر متناسب‌اند. به‌ازای $n = 1$ باشد، r کمترین مقدار را دارد که برابر است با $0.529 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$.

پروژهٔ کامپیوتری

۴۶. فرض کنید دو چرخ‌لنگر که روی محور مشترکی سوار شده‌اند می‌توانند مستقل از یکدیگر بچرخند. لختی دورانی چرخ ۱، که در آغاز با سرعت زاویه‌ای ۱۰۰rad/s می‌چرخد برابر با $2.5\,\mathrm{kg\cdot m^2}$، و لختی دورانی چرخ ۲، که در آغاز ساکن است برابر با $1.5\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. با لغزاندن یک چرخ روی محور، چرخها در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند، به هم گشتاور وارد می‌کنند و سرانجام به‌سرعت زاویه‌ای یکسانی می‌رسند. (الف) فرض کنید جز گشتاورهایی که چرخها به‌هم اعمال می‌کنند هیچ گشتاور دیگری وجود ندارد و با استفاده از اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای نهایی چرخها را معین کنید.

اگر بتوانیم گشتاور یک چرخ‌لنگر را روی چرخ دیگر حساب کنیم، می‌توانیم برای پیگیری حرکت چرخها که به یک سرعت مشترک می‌رسند از کامپیوتر استفاده کنیم. فرض کنید گشتاوری که چرخ ۲ به چرخ ۱ اعمال می‌کند با رابطهٔ $\tau_1 = -0.20(\omega_1 - \omega_2)$ بیان می‌شود، که در آن ω_1 سرعت زاویه‌ای چرخ ۱ و ω_2 سرعت زاویه‌ای چرخ ۲ است. τ_1 برحسب $\mathrm{N\cdot m}$ و سرعتهای زاویه‌ای برحسب rad/s بیان شده‌اند. گشتاور چرخ ۱ روی چرخ ۲ برابر است با $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$. گشتاورها تا وقتی‌که سرعتهای زاویه‌ای چرخها یکسان شوند بر آنها وارد می‌شوند. در ضمن برهم‌کنش چرخها، چرخ ۱ از $\tau_1 = I_1\alpha_1$ و چرخ ۲ از $\tau_2 = I_2\alpha_2$ پیروی می‌کند. این معادلات از نظر ریاضی مشابه معادلات مربوط به‌قانون دوم نیوتون هستند و می‌توان به روش عددی به‌ترتیبی که در بخش ۶ـ۶ و پروژه‌های کامپیوتری در پایان بخش ۶ توصیف شد انتگرال گرفت. بازه‌های زمانی به‌مدت Δt را در نظر بگیرید و فرض کنید که چرخ ۱، در آغاز یک بازهٔ زمانی، زاویه‌ای θ_{1b} و سرعت زاویه‌ای آن ω_{1b} باشد. در این‌صورت مکان زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای این چرخ در پایان بازهٔ زمانی، با تقریب، به‌صورت $\theta_{1e} = \theta_{1b} + \omega_{1b}\Delta t$ و

$\omega_{1e} = \omega_{1b} + \alpha_{1b}\Delta t = \omega_{1b} + (\tau_{1b}/I_1)\Delta t$ نوشت، که در این روابط τ_{1b} گشتاور وارد بر چرخ ۱ در آغاز این بازهٔ زمانی است. روابط مشابهی هم برای چرخ ۲ برقرار است. هر چه بازهٔ Δt کوچکتر باشد، تقریب انجام شده تقریب بهتری است.

(ب) سرعت زاویه‌ای چرخها را در پایان هر ثانیه در مدت زمان $t = 0$ تا $t = 25\,\mathrm{s}$ با نوشتن یک برنامهٔ کامپیوتری یا با استفاده از یک فهرست برای این منظور، محاسبه کنید. بازهٔ انتگرال‌گیری را $0.001\,\mathrm{s}$ بگیرید. سرعتهای زاویه‌ای را به‌صورت تابعهایی از زمان روی یک نمودار رسم کنید، سپس با استفاده از نمودار یا فهرست، مقادیر سرعتهای زاویه‌ای نهایی را تعیین کنید و جوابهای حاصل را با مقادیر به‌دست آمده در قسمت (الف) مقایسه کنید.

(ج) برای اینکه تأثیر یک گشتاور خارجی را ببینید، فرض کنید گشتاور وارد بر چرخ ۱ به‌صورت $\tau_1 = -4.0 - 0.20(\omega_1 - \omega_2)$ و گشتاور وارد بر چرخ ۲ به‌صورت $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$ است، که در آن گشتاورها برحسب $\mathrm{N\cdot m}$ و سرعتهای زاویه‌ای برحسب $\mathrm{rad/s}$ اند. این روابط حاکی از یک گشتاور خارجی برابر با $-4.0\,\mathrm{N\cdot m}$ است. با بهره‌گیری از برنامهٔ کامپیوتری‌تان، سرعتهای زاویه‌ای چرخها و تکانهٔ زاویه‌ای کل را در پایان بازه‌های زمانی ۱ ثانیه‌ای از $t = 0$ تا $t = 25\,\mathrm{s}$ تعیین کنید. اینجا هم بازه‌های انتگرال‌گیری را $0.001\,\mathrm{s}$ اختیار کنید. سرعتهای زاویه‌ای را به‌صورت توابع زمانی رسم کنید. چون $\tau_{\mathrm{ext}} = dL_{\mathrm{total}}/dt$ است، گشتاور خارجی باید در مدت ۲۵ ثانیه اول سبب ایجاد تغییر تکانهٔ زاویه‌ای کل به‌اندازهٔ $\Delta L = \tau_{\mathrm{ext}}\Delta t = -4.0 \times 25 = -100\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ شود. آیا جواب شما با این مقدار همخوانی دارد؟ کدام چرخ متحمل این تغییر تکانه می‌شود (این مورد را با وقتی که گشتاور نیروی خارجی در کار نیست مقایسه کنید)؟ یا شاید هر دو چرخ در آن سهیم‌اند؟

(د) سرعت زاویه‌ای نهایی به چگونگی اعمال گشتاور از یک چرخ به چرخ دیگر بستگی ندارد. چه کمیتی به گشتاور نیروها بستگی دارد؟

۱۴

شرایط تعادل

برجهای نگهدارندهٔ یک پل معلق باید به‌قدر کافی مستحکم باشند تا زیر سنگینی پل و بار رفت‌وآمد روی آن فرو نریزند؛ سیستم فرود هواپیمایی که کمی ناجور به زمین می‌نشیند نباید به‌راحتی صدمهٔ شدید ببیند؛ صندلی نباید با نشستن کسی بشکند یا واژگون شود. طراحان همهٔ این چیزها سعی‌شان بر این است که این ساختارهای صلب، زیر بار نیروها و گشتاورهایی که به آنها واردمی‌شوند هم واقعاً صلب بمانند.

در چنین مسائلی دو سؤال مطرح است که باید به آنها جواب داد: ۱. چه نیروها و گشتاورهایی به جسم صلب اثر می‌کنند؟ ۲. با در نظر گرفتن طرح و مواد ساختمانی، آیا این اجسام، زیربار این نیروها و گشتاورها، همچنان صلب خواهند ماند؟ در این فصل به‌طور مشروح به سؤال اول خواهیم پرداخت. پاسخ به سؤال دوم مستلزم آشنایی کافی با خواص مواد است، و بررسی کامل آن در حیطهٔ مباحث این کتاب نیست؛ در این باره به بحث کوتاهی در بخش آخر همین فصل اکتفا کرده‌ایم.

۱۴ـ۱ شرایط تعادل

یک جسم صلب، مانند یک صندلی، یک پل، یا یک ساختمان، در صورتی در تعادل مکانیکی است که، اگر آن را از یک چارچوب مرجع لخت مشاهده کنیم، هم تکانهٔ خطی $\mathbf{P}$ و هم تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$اش ثابت باشند. به عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که هم شتاب خطی مرکز جرم $\mathbf{a}_{\rm cm}$ و هم شتاب زاویه‌ای α حول هرمحور ثابتی در چارچوب مرجع صفر است.

این تعریف از تعادل مکانیکی ایجاب نمی‌کند که جسم حتماً در حال سکون باشد؛ یعنی، بردارهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{L}$ الزاماً صفر نیستند. اگر این بردارها صفر باشند (به‌عبارت دیگر اگر سرعت مرکز جرم و سرعت زاویه‌ای ω حول هرمحور واقع در چارچوب مرجع صفر باشند)، جسم در تعادل استاتیکی است.

در این فصل محدودیتهایی را جستجو می‌کنیم که باید بر نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم اعمال کرد تا شرط تعادل برقرار شود. بیشتر به تعادل استاتیکی خواهیم پرداخت، ولی خواهیم دید اعم از اینکه تعادل استاتیکی باشد یا نه، همین محدودیتها برقرارند.

حرکت انتقالی مرکز جرم یک جسم صلب از معادلهٔ ۲۷ فصل ۹، یعنی از

$$\sum \mathbf{F}_{\rm ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

پیروی می‌کند، که در آن $\sum \mathbf{F}_{\rm ext}$ برایند تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم است. اگر $\mathbf{P}$ هر مقدار ثابتی، منجمله صفر، باشد در آن‌صورت داریم $d\mathbf{P}/dt = 0$. به‌این ترتیب اولین شرط تعادل این است: جمع برداری تمام نیروهای وارد بر جسم باید برابر صفر باشد، یا

$$\sum \mathbf{F}_{\rm ext} = 0 \qquad (۱)$$

این معادلهٔ برداری هم‌ارز سه معادلهٔ اسکالر است:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \qquad (۲)$$

که در این روابط برای سهولت شاخص " ext " را از $F_{\rm ext}$ حذف کرده‌ایم. معادلات ۱ و ۲ حاکی از آن‌اند که برایند مؤلفه‌های نیروهای خارجی، در امتداد هر سه راستای دو به‌دو متعامدی، برابر صفر است.

حرکت دورانی یک جسم صلب از معادلهٔ ۸ فصل ۱۳، یعنی از

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\rm ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

پیروی می‌کند، که در آن $\sum \boldsymbol{\tau}_{\rm ext}$ برایند تمام گشتاورهای خارجی وارد بر جسم است. اگر $\mathbf{L}$ هر مقدار ثابتی، منجمله صفر، را اختیارکند، در آن‌صورت داریم $d\mathbf{L}/dt = 0$. به‌این ترتیب دومین شرط تعادل چنین است: جمع برداری تمام گشتاورهای خارجی وارد بر جسم باید برابر صفر شود، یا

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\rm ext} = 0 \qquad (۳)$$

این معادلهٔ برداری را می‌توانیم به‌صورت سه معادلهٔ اسکالر بنویسیم (باز هم شاخص « ext » را حذف می‌کنیم)

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0 \qquad (۴)$$

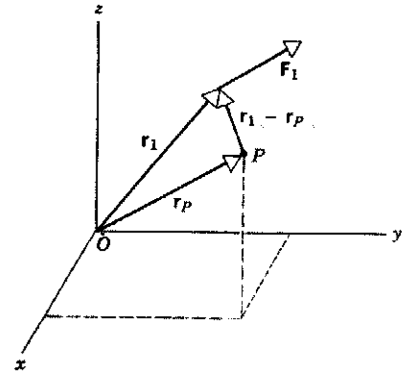
روابط فوق حاکی از آنند که، در حالت تعادل، برایند مؤلفه‌های گشتاور نیروهای خارجی، در امتداد هر سه راستای دو به‌دو متعامدی، برابر صفر است.

شرط دوم تعادل به انتخاب مبدأ و محورهای مختصاتی که برای محاسبهٔ مؤلفه‌های گشتاورها به‌کار می‌روند بستگی ندارد. اگر گشتاور کل برابر با صفر باشد، مؤلفه‌های آن برای هر مجموعه‌ای از محورهای x، y، و z صفر است. بعلاوه، برای یک جسم در حال تعادل، انتخاب مبدأ مختصات برای محاسبهٔ گشتاورها اهمیتی ندارد و برحسب مورد می‌توان هر نقطهٔ راحت یا مناسبی را انتخاب کرد؛ اگر حول یک مبدأ مشخص O داشته باشیم $\tau = 0$، در آن صورت گشتاور وارد بر جسم در حال تعادل حول هر نقطهٔ دیگری از چارچوب مرجع هم صفر است.

حالا این ادعا را اثبات می‌کنیم. فرض کنید N نیروی خارجی به‌جسمی وارد شود. نسبت به مبدأ مختصات O، نیروی $\mathbf{F}_1$ به نقطه‌ای در مکان $\mathbf{r}_1$ وارد می‌شود، $\mathbf{F}_2$ به $\mathbf{r}_2$ و الی‌آخر. بنابراین گشتاور خالص حول نقطهٔ O برابر است با

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N \qquad (۵)\end{aligned}$$

نقطه‌ای مانند P را در نظر بگیرید که نسبت به O در مکان $\mathbf{r}_P$ قرار گرفته است (شکل ۱). نقطهٔ اثر نیروی $\mathbf{F}_1$، نسبت به نقطهٔ P، عبارت از $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P)$ است. گشتاور کل حول نقطهٔ P برابر است با



شکل ۱. نیروی $\mathbf{F}_1$ یکی از N نیروی خارجی است که بر یک جسم صلب (که در شکل نشان داده نشده است) اثر می‌کند. بردار $\mathbf{r}_1$ مکان نقطهٔ اثر نیروی $\mathbf{F}_1$ را نسبت به O مشخص می‌کند. از این بردار برای محاسبهٔ گشتاور نیروی $\mathbf{F}_1$ حول O استفاده می‌کنیم. از بردار $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P$ برای محاسبهٔ گشتاور نیروی $\mathbf{F}_1$ حول P استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\tau_P =&(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_2 \\ &+ \cdots + (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_N \\ =&[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N] \\ &- [\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_N]\end{aligned}$$

عبارت داخل کروشهٔ اول، بنابر معادلهٔ ۵، τ_0 را به‌دست می‌دهد. عبارت داخل کروشهٔ دوم را می‌توانیم با فاکتورگیری از عامل ثابت $\mathbf{r}_P$ بازنویسی کنیم و در این‌صورت داریم

$$\begin{aligned}\tau_P &= \tau_0 - [\mathbf{r}_P \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N)] \\ &= \tau_0 - \left[\mathbf{r}_P \times \left(\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}\right)\right] \\ &= \tau_0\end{aligned}$$

تساوی آخر را به این دلیل نوشتیم که برای هر جسمی که در تعادل انتقالی باشد $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ است. به‌این ترتیب برای هر جسم در حال تعادل انتقالی گشتاور نیرو حول هر دو نقطه‌ای که اختیار کنیم مقدار یکسانی دارد.

اغلب با مسائلی سروکار داریم که در آنها همهٔ نیروها در یک صفحه واقع می‌شوند. در چنین مواردی شش شرط مربوط به‌معادله‌های ۲ و ۴ به سه شرط کاهش می‌یابد. اینجا نیروها را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0 \qquad (۶)$$

و اگر گشتاورها را حول نقطه‌ای که آن هم در صفحهٔ xy باشد محاسبه کنیم، همهٔ گشتاورها در راستای عمود بر صفحهٔ xy قرار می‌گیرند. در این مورد داریم

$$\sum \tau_z = 0 \qquad (۷)$$

بررسی را به مسائل مربوط به نیروهای واقع در یک صفحه محدود می‌کنیم تا محاسبات ساده‌تر باشد؛ این شرط هیچ‌گونه محدودیت بنیادی در کاربرد اصول کلی تعادل ایجاب نمی‌کند.

۱۴ـ۲ گرانیگاه

یکی از نیروهایی که در دینامیک جسم صلب با آن مواجه می‌شویم نیروی گرانشی است، که وزن جسم را تعیین می‌کند. قبلاً برای جسمی به جرم M این نیرو را (بدون هیچ توجیهی) به‌صورت تک‌بردار $M\mathbf{g}$ که در مرکز جرم وارد می‌شود، نمایش داده‌ایم. در اینجا این اقدام را توجیه می‌کنیم و شرایطی را که در آن چنین کاری مجاز است توضیح می‌دهیم.

وزن یک جسم گسترده در واقع برایند تعداد بسیار زیادی نیروست، که از گرانش به هر یک از ذرات آن وارد می‌شود. یعنی، می‌توانیم به‌جای جمع برداری تمام نیروهای گرانشی وارد برتمام ذرات یک جسم،

وزن آن جسم را قرار بدهیم. به‌علاوه، به‌جای برایند خالص گشتاورهای گرانشی وارد بر همهٔ ذرات می‌توانیم گشتاور ناشی از این تک‌نیرو (وزن) را بگذاریم، مشروط بر اینکه فرض کنیم این نیرو به نقطه‌ای از جسم به‌نام گرانیگاه وارد می‌شود.

اگر شتاب گرانشی $\mathbf{g}$ در تمام نقاط جسم مقدار ثابتی داشته باشد، که در تمام مواردی که عملاً با آنها سروکار داریم واقعیت دارد، می‌توانیم این ساده‌سازیها را اعمال کنیم: (۱) وزن جسم برابر با $M\mathbf{g}$ است و گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق‌اند. حالا می‌خواهیم نتایج بالا را اثبات کنیم.

فرض کنید جسمی با جرم M را به‌تعداد بسیار زیادی ذره تقسیم کرده‌ایم. نیروی گرانشی وارد از طرف زمین به ذرهٔ iام، با جرم m_i، برابر است با $m_i\mathbf{g}$. این نیرو به‌سوی پایین و به سمت مرکز زمین است. نیروی خالص ناشی از گرانی وارد بر کل جسم برابر است با مجموع نیروهای وارد بر تک‌تک ذرات، با

$$\sum \mathbf{F} = \sum m_i\mathbf{g} \tag{۸}$$

چون فرض کرده‌ایم که $\mathbf{g}$ برای تمام ذرات جسم مقدار واحدی دارد، می‌توانیم از $\mathbf{g}$ در علامت مجموع در معادلهٔ ۸ به‌عنوان عامل مشترک فاکتور بگیریم، و در این‌صورت داریم

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{g}\sum m_i = M\mathbf{g} \tag{۹}$$

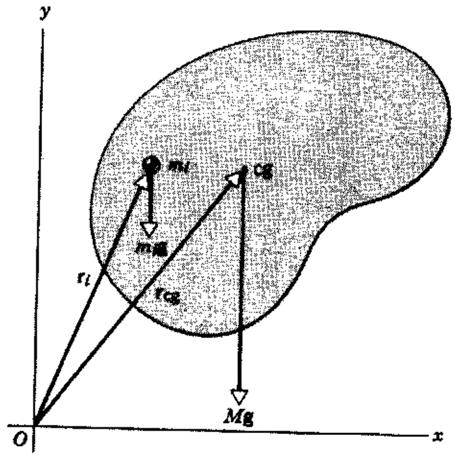
این نتیجه اثبات اولین عبارتی است که در بالا اظهار شد، یعنی به‌جای برایند نیروهای گرانشی وارد بر کل جسم می‌توان تک‌نیروی $M\mathbf{g}$ را گذاشت.

حالا می‌خواهیم شرط گشتاور نیرو، یعنی معادلهٔ ۳، را به‌کار ببریم و گشتاورها را حول نقطهٔ دلبخواه O، آن‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، تعیین کنیم. بردار $\mathbf{r}_i$ موقعیت ذره‌ای به جرم m_i را نسبت به این مبدأ مشخص می‌کند. گشتاور برایند ناشی از نیروی گرانش وارد بر تمام ذرات حول این نقطه برابر است با

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \sum(\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}) = \sum(m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{g}) \tag{۱۰}$$

که تساوی آخر را با جابه‌جا کردن کمیت اسکالر m_i در داخل مجموع به‌دست آوردیم. اینجا هم از ثابت بودن $\mathbf{g}$ استفاده می‌کنیم و آن‌را از زیر علامت جمع درمی‌آوریم، و توجه می‌کنیم که ترتیب بردارهای $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{g}$ عوض نشود، یعنی علامت حاصل‌ضرب خارجی تغییر نکند. بنابر معادلهٔ ۱۲ از فصل ۹، باقی‌ماندهٔ مجموع، یعنی $\sum m_i\mathbf{r}_i$، درست همان $M\mathbf{r}_{\rm cm}$ است. بردار $\mathbf{r}_{\rm cm}$ برداری است که مکان مرکز جرم جسم را نسبت به مبدأ O مشخص می‌کند. با انجام این عملیات معادلهٔ ۱۰ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \left(\sum m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g} = M\mathbf{r}_{\rm cm} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{\rm cm} \times M\mathbf{g} \tag{۱۱}$$

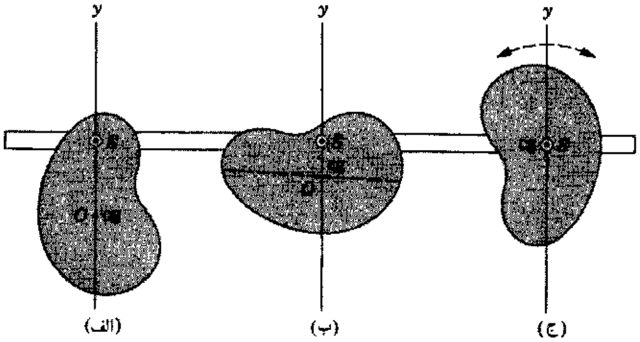


شکل۲. هر ذره‌ای از جسم، مانند m_i، تحت تأثیر یک نیروی گرانشی مانند $m_i\mathbf{g}$ قرار می‌گیرد. با آنکه وزن کل جسم در سرتاسر حجم آن به‌صورت مجموع نیروهای گرانشی وارد بر تمام چنین ذراتی توزیع شده است، می‌توان به‌جای آن یک تک‌نیرو به‌مقدار $M\mathbf{g}$ که در گرانیگاه وارد می‌شود در نظر گرفت. اگر میدان گرانشی یکنواخت باشد (یعنی، برای همهٔ ذرات جسم یکسان باشد) گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق می‌شوند، و بنابراین $\mathbf{r}_{\rm cm}$ و $\mathbf{r}_{\rm cg}$ یکی هستند.

به‌این ترتیب برایند گشتاورهای وارد بر جسم برابر است با گشتاوری که از تک‌نیروی $M\mathbf{g}$ وارد بر مرکز جرم جسم ایجاد می‌شود. به این‌ترتیب گرانیگاه و مرکز جرم جسم بر هم منطبق می‌شوند و بنابراین دومین عبارتی که در بالا اظهار کردیم اثبات می‌شود. یک نتیجهٔ مفید معادلهٔ ۱۱ آن است که گشتاور ناشی از گرانی حول مرکز جرم جسم صفر است.

در چه شرایطی یک جسم در میدان گرانشی زمین در حال تعادل است؟ معادلات ۹ و ۱۱ نشان می‌دهند که، اگر یک نیروی $\mathbf{F}'$ به‌مقدار $M\mathbf{g}$ در جهت بالا به مرکز جرم وارد شود، هم نیروی خالص و هم گشتاور خالص وارد بر جسم صفر خواهد شد و به‌این ترتیب شرایط تعادل برقرار است. در واقع نیروی $\mathbf{F}'$ در هر نقطه‌ای از خط قائم گذرنده از مرکز جرم هم به جسم وارد شود، باز جسم در حال تعادل خواهد بود. در این مورد گشتاور خالص برابر با صفر است، زیرا $M\mathbf{g}$ و $\mathbf{F}'(= -M\mathbf{g})$ خط اثرشان یکی است. بنابراین می‌توانیم هر جسم را با اعمال یک نیروی قائم F' نه فقط به مرکز جرم، بلکه به هر نقطه‌ای مستقیماً در پایین یا در بالای مرکز جرم، به تعادل دربیاوریم.

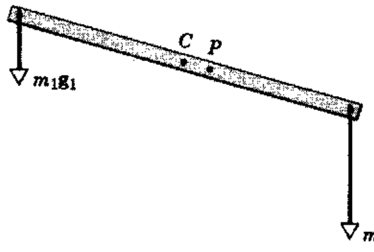
از این خاصیت می‌توانیم برای تعیین مرکز جرم اجسام گسترده استفاده کنیم. جسمی به شکل دلبخواه را در نظر بگیرید که از نقطهٔ S آویخته شده است (شکل ۳) نقطهٔ آویز، که در آن نیروی $\mathbf{F}' = -M\mathbf{g}$ به‌طرف بالا به جسم اعمال می‌شود، باید روی خط قائمی باشد که از مرکز جرم جسم می‌گذرد. اگر خط قائمی را که از S می‌گذرد رسم کنیم، می‌دانیم که مرکز جرم باید جایی روی این خط باشد. این کار را می‌توانیم با انتخاب یک نقطهٔ آویز دیگر تکرار کنیم (شکل ۳ب) و به‌این ترتیب خط دیگری به‌دست می‌آوریم که آن هم شامل مرکز جرم است روشن است که مرکز جرم جسم باید در محل تلاقی این دو خط باش



شکل۳. جسمی از نقطهٔ دلبخواه S آویخته شده است، اگر مانند قسمتهای (الف) و (ب) گرانیگاه (cg) جسم مستقیماً در زیر نقطهٔ آویز S قرار داشته باشد، در آن‌صورت جسم در حال تعادل پایدار است. خط‌چین در شکل (ب) همان خط قائم شکل (الف) است و نشان می‌دهد که گرانیگاه جسم را می‌توان با آویختن آن از دو نقطهٔ متفاوت مشخص کرد. (ج) اگر جسم از گرانیگاه آویخته شود، همواره در تعادل است و فرقی هم نمی‌کند که به کدام سمت قرار گرفته باشد.

اگر جسم را، مانند شکل ۳ج، از مرکز جرمش بیاویزیم، به هرسمتی هم که قرارش بدهیم، همواره در حال تعادل است. یعنی آن‌را هر طوری هم که بچرخانیم، باز در حال تعادل می‌ماند. این مشاهده گویای همان نتیجه‌ای است که از معادلهٔ ۱۱ حاصل می‌شود: گشتاور نیروی گرانی حول مرکز جرم صفر است.

در این بخش "مرکز جرم" و "گرانیگاه" را به‌جای یکدیگر هم به‌کار بردیم. مرکز جرم برای همهٔ اجسام تعریف می‌شود و می‌توان، با روشهای توصیف شده در فصل ۹، آن‌را از روی ابعاد و شکل جسم محاسبه کرد. اما گرانیگاه فقط برای اجسامی که در میدان گرانشی قرار دارند تعریف می‌شود. برای محاسبهٔ گرانیگاه نه تنها باید شکل هندسی جسم را با تمام جزئیات بشناسیم، بلکه باید چگونگی تغییرات $\mathbf{g}$ را هم در سراسر جسم بدانیم. اگر $\mathbf{g}$ در تمام جسم ثابت نباشد، مرکز جرم و گرانیگاه بر هم منطبق نیستند و نمی‌توان $\mathbf{g}$ را از زیر علامت مجموع در معادلات ۸ و ۱۰ بیرون آورد. میلهٔ یکنواخت شکل ۴ را در نظر بگیرید که محورش با افق زاویهٔ غیرصفر می‌سازد. مرکز جرم C میله در مرکز هندسی آن قرار دارد. اگر میله افقی قرار می‌گرفت، گرانیگاه P آن بر مرکز جرمش منطبق می‌بود؛ یعنی تک‌نیروی $\mathbf{F}'$ (به‌بزرگی Mg) که



شکل۴. میلهٔ یکنواخت در میدان گرانشی غیریکنواخت. گرانیگاه در نقطهٔ P است، که بر مرکز جرم (C) منطبق نیست.

در نقطهٔ C به‌طرف بالا به جسم اعمال می‌شود می‌توانست جسم را در تعادل نگه دارد. اگر میله افقی قرار نگیرد دیگر با تک‌نیروی اعمال شده در C نمی‌توان آن‌را متعادل کرد. از آنجا که g با دور شدن از زمین اندکی کاهش پیدا می‌کند، به ذره‌ای که در انتهای پایینی میله قرار دارد جاذبهٔ گرانشی بیشتری وارد می‌شود تا به ذرهٔ کاملاً مشابهی که در انتهای بالایی واقع است برای جبران این تمایل به چرخش ساعتگرد حول C، گرانیگاه P (محل اعمال نیروی رو به بالای متعادل‌کننده) باید اندکی پایین‌تر از C قرار بگیرد. اگر زاویهٔ میل تغییر کند، محل P هم تغییر می‌کند. اگر میله را به‌جایی ببریم که مقدار g دیگری داشته باشد، رابطهٔ بین P و C برای یک زاویه میل معین تغییر خواهد کرد. به‌این ترتیب گرانیگاه نه تنها به‌سمتگیری جسم بستگی دارد بلکه به میدان گرانشی در محل نیز وابسته است. برای میله‌ای که در نزدیکی سطح زمین باشد و با افق زاویهٔ $45°$ بسازد، فاصلهٔ بین مرکز جرم و گرانیگاه در حدود 18nm است، که این مقدار بسیار کوچکتر از دقتی است که ما در مسائل مربوط به تعادل با آن سروکار داریم و بنابراین کاملاً قابل اغماض است. در مسائل مربوط به تعادل، بی‌هیچ دغدغهٔ خاطری می‌توانیم فرض کنیم که گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق‌اند.

۱۴ـ۳ مثالهایی از تعادل

در استفاده از شرایط تعادل (برایند نیروها صفر و برایند گشتاورها حول هر نقطه‌ای صفر) می‌توانیم مراحل کار را به‌صورت زیر روشن و ساده کنیم.

اول، یک مرز فرضی در اطراف سیستم مورد نظر رسم می‌کنیم. این‌کار به ما کمک می‌کند که بدانیم قوانین تعادل را در مورد کدام جسم یا سیستمی از اجسام اعمال می‌کنیم. به این فرایند منزوی کردن سیستم می‌گوییم.

دوم، بردارهایی را که نشاندهندهٔ مقدار، جهت، و نقطه اثر تمام نیروهای خارجی هستند رسم می‌کنیم. نیروی خارجی نیرویی است که از خارج مرزی که قبلاً مشخص کرده‌ایم اثر می‌کند. نیروهای خارجی‌ای که معمولاً با آنها مواجه می‌شویم عبارت‌اند از نیروهای گرانشی و نیروهایی که توسط ریسمانها، سیمها، یا میله‌هایی که مرز را قطع می‌کنند اعمال می‌شوند. توجه داشته باشید که فقط باید به نیروهای خارجی وارد بر سیستم توجه کنیم؛ تمام نیروهای داخلی دو به دو همدیگر را خنثی می‌کنند.

مواردی پیش می‌آید که در آنها جهت یک نیرو ممکن است خوب مشخص نباشد. برای اینکه جهت نیرویی را تعیین کنیم، ارتباط عامل اعمال نیرو را در نقطه‌ای که از مرز سیستم می‌گذرد به‌طور فرضی قطع می‌کنیم. اگر دو سر این برش از هم دور شوند، در آن‌صورت نیرو به‌طرف بیرون است. اگر در این مورد شک دارید، یک جهت دلبخواه اختیار کنید. به‌دست آوردن جواب منفی برای یک نیرو به‌این معنی است که آن نیرو در خلاف جهت مفروض است.

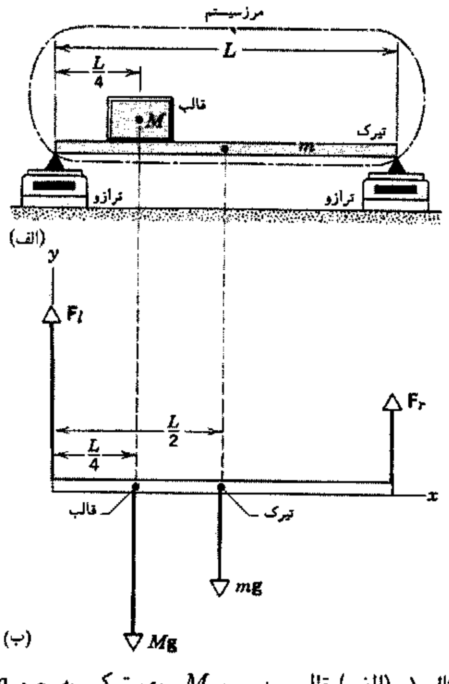
سوم، قبل از اینکه شرط اول تعادل (معادلات ۱ و ۲) را به‌کار ببریم

یک دستگاه مختصات مناسب انتخاب می‌کنیم و نیروهای خارجی را در این دستگاه به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم. هدف این است که محاسبات را ساده کنیم. بهتر است چنان دستگاه مختصاتی انتخاب کنیم که در آن تعداد نیروهایی که باید به مؤلفه‌ها تجزیه شوند به حداقل برسد.

چهارم، قبل از اینکه شرط دوم تعادل (معادلات ۳ و ۴) را به‌کار ببریم یک دستگاه مختصات مناسب انتخاب می‌کنیم و گشتاورهای خارجی را در این دستگاه به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم. باز هم هدف ساده‌کردن محاسبات است و در اعمال کردن دو شرط تعادل استاتیکی، در صورتی که ببینیم کارساده‌تر می‌شود، می‌توانیم از دو دستگاه مختصات متفاوت استفاده کنیم. مثلاً، اگر گشتاورها را حول نقطه‌ای که از آن چند نیرو می‌گذرد در نظر بگیریم، تمام آن نیروها از معادلهٔ گشتاور حذف می‌شوند.

در وضعیت تعادل، گشتاورهای حاصل از تمام نیروهای خارجی باید حول هر محوری صفر باشد. گشتاورهای داخلی دو به‌دو همدیگر را خنثی می‌کنند و نیازی به در نظر گرفتن آنها نداریم. در اینجا هم از همان قرارداد فصلهای قبل در مورد علامت جبری گشتاور حول هر محور مشخص پیروی می‌کنیم: گشتاور را وقتی سبب ایجاد چرخش پادساعتگرد حول محور شود مثبت می‌گیریم.

مثال ۱. تیرک یکنواختی به‌طول L و جرم $m = ۱٫۸\mathrm{kg}$ در اختیار داریم. دو سر آن‌را روی دو ترازوی رقمی قرار می‌دهیم (شکل ۵الف). قالبی به جرم $M = ۲٫۷\mathrm{kg}$ را روی این تیرک گذاشته‌ایم، به‌طوری که



شکل۵. مثال ۱. (الف) قالبی به جرم M روی تیرکی به جرم m قرار گرفته است. ترازوهای رقمی نیروهای قائمی را که به دو سر تیرک وارد می‌شود نشان می‌دهند. (ب) نمودار جسم آزاد نیروهای وارد بر سیستم متشکل از تیرک و قالب.

مرکز قالب در فاصلهٔ یک‌چهارم طول تیرک از انتهای چپ تیرک واقع شده است. ترازوها چه ارقامی را نشان می‌دهند؟

حل: سیستم را متشکل از تیرک و قالب در نظر می‌گیریم. شکل ۵ب نمودار جسم آزاد این سیستم است که تمام نیروهای خارجی وارد بر آن‌را نشان می‌دهد. وزن تیرک، $m\mathrm{g}$، به طرف پایین در مرکز جرم اثر می‌کند. چون تیرک یکنواخت است مرکز جرم آن در مرکز هندسی‌اش واقع می‌شود. وزن قالب، $M\mathrm{g}$، هم به طرف پایین است و به مرکز جرم‌قالب وارد می‌شود. ترازوها دو سر تیرک را با نیروهای $\mathbf{F}_l$ و $\mathbf{F}_r$ به‌طرف بالا می‌فشارند. مقادیر این دو نیرو همان ارقامی است که ترازوها نشان می‌دهند و ما باید پیدایشان کنیم.

این سیستم در تعادل استاتیکی است و بنابراین می‌توانیم معادلهٔ موازنهٔ نیروها (معادلهٔ ۶) و معادلهٔ موازنهٔ گشتاورها (معادلهٔ ۷) را به‌کار بگیریم. این مسئله را از دو راه هم‌ارز حل می‌کنیم.

۱. راه‌حل اول. هیچ یک از نیروها مؤلفهٔ x ندارند و بنابراین شرط $\sum F_x = ۰$ هیچ اطلاعاتی به‌دست نمی‌دهد. برای مؤلفه‌های y، داریم

$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = ۰ \qquad (۱۲)$$

در اینجا دو نیروی مجهول داریم که نمی‌توانیم هر دو را از همین یک معادله تعیین کنیم. خوشبختانه یک معادلهٔ دیگر، یعنی معادلهٔ موازنهٔ گشتاورها (معادلهٔ ۷) را هم در اختیار داریم.

می‌توانیم معادلهٔ ۷ را در مورد هر محوری که بر صفحهٔ شکل ۵ عمود باشد به‌کار بگیریم. اگر محوری راکه از انتهای چپ تیرک می‌گذرد اختیار کنیم، نیروی مجهول F_l از معادلهٔ گشتاورها حذف می‌شود. در این‌صورت از معادلهٔ ۷ داریم

$$\sum \tau_z = (F_l)(۰) + (F_r)(L) - (mg)(L/۲) - (Mg)(L/۴) = ۰ \qquad (۱۳)$$

یا

$$F_r = (g/۴)(M + ۲m) = \left(\frac{۱}{۴}\right)(۹٫۸\mathrm{m/s^۲})[۲٫۷\mathrm{kg} + ۲(۱٫۸\mathrm{kg})] = ۱۵\mathrm{N}$$

توجه کنید که چگونه با این محوری که انتخاب کردیم نیروی F_l از معادلهٔ گشتاور حذف شد و این امکان فراهم آمد که معادله را مستقیماً برای نیروی دیگر حل کنیم. اگر گشتاورها را حول هر نقطهٔ دلبخواهی محاسبه می‌کردیم معادله‌ای به‌دست می‌آمد که شامل F_l و F_r بود و می‌شد آن‌را همزمان با معادلهٔ ۱۲ حل کرد. انتخاب محور مناسب کمک می‌کند که جبر مسئله را تا حدودی ساده کنیم، ولی به هیچ‌وجه جواب نهایی را تغییر نمی‌دهد.

اگر مقدار F_r را در معادلهٔ ۱۲ بگذاریم و آن‌را برای F_l حل کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F_l &= (M+m)g - F_r \\ &= (۲٫۷\mathrm{kg} + ۱٫۸\mathrm{kg})(۹٫۸\mathrm{m/s^۲}) - ۱۵\mathrm{N} = ۲۹\mathrm{N} \end{aligned}$$

توجه کنید که ارتفاع مرکز جرم قالب در محاسبات این مسئله دخالتی ندارد. آیا این از نظر فیزیکی منطقی است؟

۲. راه‌حل دوم. حالا مسئله را از راه دیگری حل می‌کنیم تا صحت جوابها را امتحان کرده باشیم. در این روش از معادلهٔ موازنه گشتاورها حول دو محور متفاوت استفاده می‌کنیم. با انتخاب محوری که از انتهای چپ تیرک می‌گذرد، همان‌طور که در بالا دیدیم، نتیجه می‌شود $F_r = ۱۵\mathrm{N}$.

محور دوم را چنان اختیار می‌کنیم که از انتهای راست تیرک بگذرد، در این‌صورت از معادلهٔ ۷ داریم

$$\begin{aligned} \sum \tau_z = (F_r)(۰) - (F_l)(L) + (mg)(L/۲) \\ + (Mg)(۳L/۴) = ۰ \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

از حل این معادله برای F_l نتیجه می‌گیریم

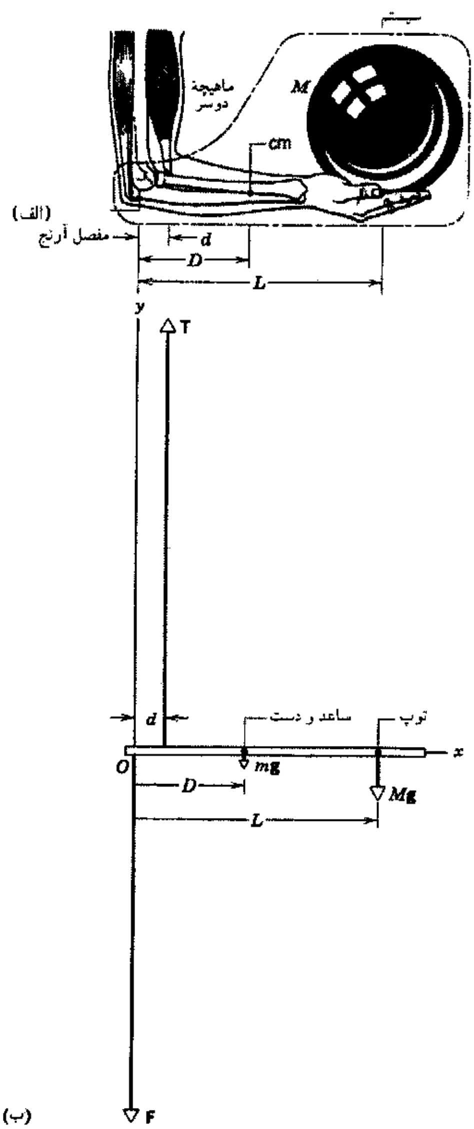
$$\begin{aligned} F_l &= (g/۴)(۳M + ۲m) \\ &= \left(\frac{۱}{۴}\right)(۹٫۸\mathrm{m/s^۲})[۳(۲٫۷\mathrm{kg}) + ۲(۱٫۸\mathrm{kg})] = ۲۹\mathrm{N} \end{aligned}$$

می‌بینیم که جوابها همان جوابهای قبلی‌اند. توجه کنید که طول تیرک در این‌گونه مسائل صریحاً در محاسبات وارد نمی‌شود.

برای تعیین دو مجهول این مسئله (F_r و F_l) نیاز به دو معادلهٔ مستقل داریم. در روش دوم، دو معادله (معادلات ۱۳ و ۱۴) معادلات مربوط به گشتاورها هستند؛ معادلهٔ نیرو (معادلهٔ ۱۲) هیچ اطلاعات مستقل دیگری به‌دست نمی‌دهد. در واقع، می‌توانیم نشان بدهیم که از تفریق دو معادلهٔ گشتاور، معادلهٔ نیرو حاصل می‌شود.

مثال ۲. شخصی توپ بولینگی به جرم $M = ۷٫۲\mathrm{kg}$ را در کف دست نگه داشته است. همان‌طور که در شکل ۶الف می‌بینیم، بازوی بازیکن قائم و ساعد او افقی است. ماهیچه دو سر و ساختار استخوانی بازو چه نیروهایی به ساعد وارد می‌کنند؟ جرم ساعد و کف دست روی‌هم $m = ۱٫۸\mathrm{kg}$ است و فواصل مورد نیاز عبارت‌اند از $d = ۴٫۰\mathrm{cm}$، $D = ۱۵\mathrm{cm}$، و $L = ۳۳\mathrm{cm}$.

حل: سیستم مورد نظر ما تشکیل شده است از ساعد و توپ بولینگ. شکل ۶ب نمودار جسم آزاد این سیستم را نشان می‌دهد. نیروهای مجهول عبارت‌اند از $\mathbf{T}$، نیرویی که ماهیچه به ساعد اعمال می‌کند، و $\mathbf{F}$، نیرویی که بازو به ساعد اعمال می‌کند. اینجا هم مانند مثال ۱ همهٔ نیروها در راستای قائم‌اند.



شکل۶. مثال ۲. (الف) دستی که یک توپ بولینگ را نگه داشته است. مرز سیستم را با خط‌چین مشخص کرده‌ایم. (ب) نمودار جسم آزاد که نیروهای مؤثر را نشان می‌دهد. بردارها عمداً به مقیاس رسم شده‌اند تا نشان بدهند که چه نیروهای بزرگی توسط ماهیچه دو سر و بازو در مفصل آرنج (نقطهٔ O) اعمال می‌شوند.

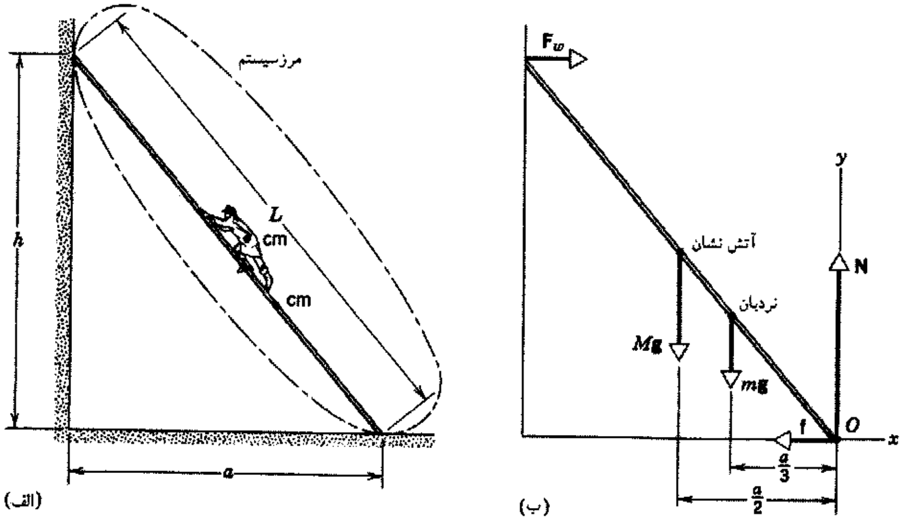
از $\sum F_y = ۰$ (معادلهٔ ۶) نتیجه می‌گیریم

$$\sum F_y = T - F - mg - Mg = ۰ \qquad (۱۵)$$

از کاربرد معادلهٔ ۷ حول محوری که از O می‌گذرد و با استفاده از این قرارداد که چرخشهای پادساعتگرد را مثبت می‌گیریم، داریم

$$\sum \tau_z = (T)(d) + (F)(۰) - (mg)(D) - (Mg)(L) = ۰ \qquad (۱۶)$$

با انتخاب محوری که از نقطهٔ O می‌گذرد، نیروی مجهول F را از این معادله حذف کرده‌ایم. معادلهٔ ۱۶ را حل می‌کنیم و از آن T را به‌دست



شکل ۷. مثالهای ۳ و ۴. (الف) مأمور آتش‌نشانی تا نیمهٔ طول نردبانی که به‌دیوار بدون اصطکاکی تکیه دارد بالا می‌رود. (ب) نمودار جسم آزادی که نیروهای وارد بر سیستم را (در مقیاس متناسب) نشان می‌دهد.

می‌آوریم

$$T = g\frac{mD + ML}{d}$$
$$= (۹٫۸\text{m/s}^۲)\frac{(۱٫۸\text{kg})(۱۵\text{cm}) + (۷٫۲\text{kg})(۳۳\text{cm})}{۴٫۰\text{cm}}$$
$$= ۶۴۸\text{N} = ۱۴۶\text{lb}$$

به‌این ترتیب ماهیچه دو سر ساعد را با نیرویی که تقریباً نه برابر وزن توپ بولینگ است به‌بالا می‌کشد.

اگر معادلهٔ ۱۵ را برای مجهول F حل کنیم و مقدار محاسبه‌شده برای T را در آن قرار بدهیم، داریم

$$F = T - g(M + m)$$
$$= ۶۴۸\text{N} - (۹٫۸\text{m/s}^۲)(۷٫۲\text{kg} + ۱٫۸\text{kg})$$
$$= ۵۶۰\text{N} = ۱۲۶\ \text{lb}$$

نیروی F هم بسیار بزرگ و تقریباً هشت برابر وزن توپ بولینگ است.

مثال ۳. نردبانی به‌طول $L = ۱۲\text{m}$ و جرم $m = ۴۵\text{kg}$ به دیواری تکیه داده شده است. سر بالای این نردبان در ارتفاع $h = ۹٫۳\text{m}$ از سطح زمین قرار دارد (شکل ۷الف). مرکز جرم نردبان در فاصلهٔ یک‌سوم طول آن از سر متکی به زمین واقع است. آتش‌نشانی به جرم $M = ۷۲\text{kg}$ تا نیمهٔ این نردبان بالا رفته است. فرض کنید دیوار بدون اصطکاک است، ولی زمین با نردبان اصطکاک دارد. از طرف دیوار و زمین چه نیروهایی به نردبان وارد می‌شود؟

حل: شکل ۷ب نمودار جسم آزاد نردبان را نشان می‌دهد. دیوار نیروی افقی، $\mathbf{F}_w$، به نردبان وارد می‌کند؛ چون فرض کرده‌ایم تماس بین دیوار–نردبان بدون اصطکاک است، دیوار نمی‌تواند هیچ نیروی قائمی به‌نردبان وارد کند. زمین نیرویی به نردبان وارد می‌کند که مؤلفهٔ افقی آن، f، ناشی از اصطکاک است و مؤلفهٔ قائم آن، N، نیروی عمود بر سطح تماس است. محورهای مختصات را به‌صورتی که در شکل می‌بینید اختیار می‌کنیم و مبدأ O را محل تلاقی نردبان با زمین می‌گیریم. فاصلهٔ پای نردبان از دیوار، a، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$a = \sqrt{L^۲ - h^۲} = \sqrt{(۱۲\text{m})^۲ - (۹٫۳\text{m})^۲} = ۷٫۶\text{m}$$

از معادلهٔ ۶، معادلهٔ موازنهٔ نیروها، داریم

$$\sum F_x = F_w - f = ۰ \qquad (۱۷)$$

و

$$\sum F_y = N - Mg - mg = ۰ \qquad (۱۸)$$

از معادلهٔ ۱۸ نتیجه می‌گیریم

$$N = g(M + m)$$
$$= (۹٫۸\text{m/s}^۲)(۷۲\text{kg} + ۴۵\text{kg}) = ۱۱۵۰\text{N}$$

از معادلهٔ ۷، معادلهٔ موازنهٔ گشتاور نیروها، با انتخاب محوری که از نقطهٔ O (نقطهٔ تماس نردبان با زمین) می‌گذرد داریم

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (Mg)(a/۲) + (mg)(a/۳) = ۰ \qquad (۱۹)$$

با این انتخاب مناسب، دو متغیر f و N از معادلهٔ موازنهٔ گشتاورها حذف می‌شود. از حل معادلهٔ ۱۹ برای F_w داریم

$$F_w = \frac{ga(M/۲ + m/۳)}{h}$$
$$= \frac{(۹٫۸\text{m/s}^۲)(۷٫۶\text{m})[(۷۲\text{kg})/۲ + (۴۵\text{kg})/۳]}{۹٫۳\text{m}}$$
$$= ۴۱۰\text{N}$$

و از معادلهٔ ۱۷ فوراً نتیجه می‌گیریم که

$$f = F_w = ۴۱۰\mathrm{N}$$

مثال ۴. در مثال ۳، ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و نردبان μ_s است. آتش‌نشان تا چه طولی از نردبان می‌تواند بالا برود بی‌آنکه نردبان شروع به لغزش کند؟

حل: در مثال ۳، دیدیم که وقتی آتش‌نشان تا نیمهٔ نردبان بالا رفته باشد، نیروی عمود بر سطح N برابر با ۱۱۵۰N است. بیشترین نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با $f_{\max} = \mu_s N = (۰٫۵۴)(۱۱۵۰\mathrm{N}) = ۶۲۰\mathrm{N}$. نیروی اصطکاکی که در آن مثال تعیین کردیم $f = ۴۱۰\mathrm{N}$ بود که کمتر از $f_{\max}$ است. وقتی آتش‌نشان به صعود خود روی نردبان ادامه می‌دهد، f افزایش پیدا می‌کند تا آنکه وقتی به فاصلهٔ d از پای نردبان رسید $f = f_{\max}$ می‌شود و آن‌وقت لغزش آغاز می‌شود. می‌خواهیم فاصلهٔ d را تعیین کنیم.

نیروهای مؤثر همان نیروهای شکل ۷ هستند. با استفاده از معادلهٔ ۷ حول محوری که از نقطهٔ تماس نردبان با زمین می‌گذرد داریم

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (mg)(a/۳) + (Mg)(da/L) = ۰$$

که در آن da/L فاصلهٔ افقی بین نقطهٔ O و امتداد وزن Mg آتش‌نشان است. از حل این معادله برای F_w نتیجه می‌شود

$$F_w = \frac{ga}{h}\left(M\frac{d}{L} + \frac{m}{۳}\right) \qquad (۲۰)$$

معادلهٔ ۲۰ نشان می‌دهد که وقتی آتش‌نشان از نردبان بالا می‌رود (یعنی، وقتی d زیاد می‌شود)، نیروی F_w هم برای حفظ تعادل باید زیاد شود. برای اینکه d متناظر با شروع لغزش را تعیین کنیم، ابتدا باید F_w را به‌دست بیاوریم.

معادلهٔ ۶، معادلهٔ مربوط به موازنهٔ نیروها در امتداد x، نتیجه می‌دهد

$$\sum F_x = F_w - f = ۰$$

در لحظهٔ آغاز لغزش داریم

$$F_w = f = f_{\max} = \mu_s N \qquad (۲۱)$$

از معادلهٔ ۶ برای موازنهٔ نیروها در امتداد محور y، داریم

$$\sum F_y = N - Mg - mg = ۰$$

یا

$$N = g(M+m) \qquad (۲۲)$$

از ترکیب معادلات ۲۱ و ۲۲ نتیجه می‌گیریم

$$F_w = \mu_s g(M+m) \qquad (۲۳)$$

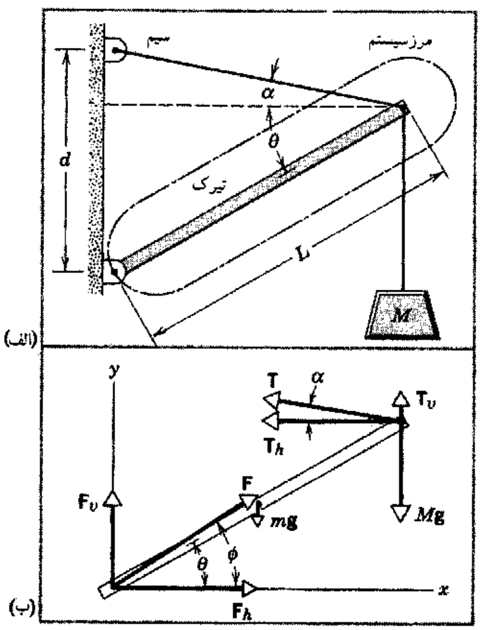
سرانجام d را از ترکیب معادلات ۲۰ و ۲۳ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d &= L\left[\frac{\mu_s h}{a}\,\frac{(M+m)}{M} - \frac{m}{۳M}\right] \\ &= (۱۲\mathrm{m})\left[\frac{(۰٫۵۴)(۹٫۳\mathrm{m})}{۷٫۶\mathrm{m}}\,\frac{(۷۲\mathrm{kg}+۴۵\mathrm{kg})}{۷۲\mathrm{kg}} - \frac{۴۵\mathrm{kg}}{(۳)(۷۲\mathrm{kg})}\right] \\ &= ۱۰٫۴\mathrm{m} \end{aligned}$$

به‌این ترتیب آتش‌نشان می‌تواند تا ۸۷٪ طول نردبان را قبل از آغاز لغزش بپیماید.

حداقل ضریب اصطکاک چقدر باشد تا آتش‌نشان بتواند تمام طول نردبان را بالا برود ($d = L$)؟ حداقل ضریب اصطکاک چقدر باشد تا وقتی آتش‌نشان پا روی نردبان گذاشت، نردبان نلغزد؟

مثال ۵. تیرک یکنواختی به طول $L = ۳٫۳\mathrm{m}$ و جرم $m = ۸٫۵\mathrm{kg}$ به‌دیواری لولا شده است (شکل ۸الف). سیمی که در فاصلهٔ $d = ۲٫۱\mathrm{m}$ بالاتر از لولا به دیوار متصل است به سر دیگر تیرک وصل است، و طول سیم چنان است که تیرک با افق زاویهٔ $\theta = ۳۰^\circ$



شکل۸. مثال ۵. (الف) تیرکی از سر پایین توسط لولا و از سر بالایی توسط یک رشته سیم به دیوار متصل کرده‌ایم. جسمی به جرم M را به سر بالایی این تیرک آویخته‌ایم. (ب) نمودار جسم آزادی که نیروهای وارد بر تیرک را نشان می‌دهد. نیروی F توسط لولا اعمال می‌شود و نیروی T کشش سیم

می‌سازد. جسمی به جرم $M = ۵۶\text{kg}$ را به انتهای بالایی تیرک آویخته‌ایم. کشش سیم و نیروی وارد از لولا به تیرک را تعیین کنید.

حل: در شکل ۸ب نیروهای خارجی وارد بر تیرک را نشان داده‌ایم. تیرک را به عنوان سیستم در نظر گرفته‌ایم. چون دو نیرو از نیروهای وارد بر سیستم قائم و به‌طرف پایین هستند، محورهای مختصات را افقی و قائم اختیار می‌کنیم. کشش سیم و نیروی وارد از لولا به تیرک را با مؤلفه‌های افقی و قائم آنها نمایش داده‌ایم.

از معادلهٔ ۶، معادلهٔ تعادل انتقالی، داریم

$$\sum F_x = F_h - T_h = ۰ \qquad (۲۴)$$

و

$$\sum F_y = F_v + T_v - mg - Mg = ۰ \qquad (۲۵)$$

برای اعمال شرط تعادل دورانی، محوری را انتخاب می‌کنیم که از انتهای بالایی تیرک می‌گذرد. (چرا؟) در این‌صورت از معادلهٔ ۷ داریم

$$\sum \tau_z = -F_v(L\cos\theta) + F_h(L\sin\theta) + mg\left(\frac{L}{۲}\cos\theta\right) = ۰$$

یا

$$F_v = F_h \tan\theta + \frac{mg}{۲} \qquad (۲۶)$$

با قراردادن مقادیر عددی، معادلات ۲۴ تا ۲۶ به‌صورت زیر در می‌آیند

$$F_h = T_h$$

$$F_v + T_v = ۶۳۲\text{N}$$

و

$$F_v = (۰٫۵۷۷)F_h + ۴۱٫۷\text{N}$$

بررسی مسئله نشان می‌دهد که در این مورد چهار مجهول، یعنی F_v، F_h، T_v و T_h داریم، ولی فقط توانسته‌ایم سه رابطه برای آنها بنویسیم. اگر قرار باشد این مسئله را حل کنیم، به رابطهٔ دیگری بین این کمیتها نیاز داریم. این رابطهٔ آخری از این واقعیت نتیجه می‌شود که از جمع T_v و T_h باید بردار $\mathbf{T}$ حاصل شود که در راستای سیم است. سیم (انعطاف‌پذیر) نمی‌تواند نیرویی را که عمود بر طولش باشد تحمل کند. [توجه کنید که این گفته در مورد تیرک (صلب) صدق نمی‌کند.] بنابراین چهارمین معادلهٔ ما چنین است

$$T_v = T_h \tan\alpha \qquad (۲۷)$$

که در آن داریم $\tan\alpha = (d - L\sin\theta)/(L\cos\theta) = ۰٫۱۵۷$، که متناظر با $\alpha = ۸٫۹°$ است. بنابراین معادلهٔ چهارم ما به‌صورت زیر درمی‌آید

$$T_v = ۰٫۱۵۷\, T_h$$

از ترکیب چهار معادلهٔ بالا و پس از انجام عملیات جبری لازم، به‌دست می‌آوریم

$$F_v = ۵۰۶\text{N},\ F_h = ۸۰۴\text{N},\ T_v = ۱۲۶\text{N},\ T_h = ۸۰۴\text{N}$$

و به این ترتیب کشش سیم برابر است با

$$T = \sqrt{T_h^۲ + T_v^۲} = ۸۱۴\ \text{N}$$

و نیرویی که از طرف لولا به تیرک وارد می‌شود عبارت است از

$$F = \sqrt{F_h^۲ + F_v^۲} = ۹۵۰\text{N}$$

توجه کنید که نیروهای T و F هر دو به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای بیشتر از مجموع وزن تیرک و جسم آویخته به آن (۶۳۲N) است.

بردار $\mathbf{F}$ با افق زاویه‌ای می‌سازد که از رابطهٔ زیر معین می‌شود

$$\phi = \tan^{-۱}\frac{F_v}{F_h} = ۳۲٫۲°$$

بنابراین بردار نیروی برایندی که از لولا به تیرک وارد می‌شود، کاملاً در راستای خودِ تیرک قرار نمی‌گیرد.

در مثالهای قبلی مواظب بوده‌ایم که تعداد نیروهای مجهول را برابر با تعداد معادلات مستقلی اختیار کنیم که این نیروها را به‌هم مربوط می‌کنند. اگر همهٔ نیروها در صفحه باشند، تنها می‌توانیم سه معادلهٔ مستقل برای تعادل داشته باشیم، یک معادله برای تعادل دورانی حول هر محور عمود بر صفحه و دو معادلهٔ دیگر برای تعادل انتقالی در صفحهٔ نیروها. ولی، اغلب با بیش از سه نیروی مجهول مواجه هستیم. مثلاً، اگر در مثالهای ۳ و ۴ فرض بدون اصطکاک بودن دیوار را حذف کنیم، در آن صورت چهار کمیت اسکالر مجهول داریم که عبارت‌اند از مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی وارد از دیوار به نردبان و مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی وارد از زمین به نردبان. چون فقط سه معادلهٔ اسکالر داریم، این نیروها را نمی‌توانیم پیدا کنیم. اگر به یکی از نیروهای مجهول مقداری نسبت بدهیم، سایر نیروها را می‌توانیم معین کنیم. ولی اگر هیچ معیاری برای نسبت دادن یک مقدار به یک نیروی مجهول نداشته باشیم، از نظر ریاضی بینهایت جواب امکانپذیر خواهد بود. بنابراین اگر بخواهیم جواب منحصر به‌فردی به‌دست بیاوریم باید بتوانیم یک رابطهٔ مستقل دیگر بین نیروهای مجهول پیدا کنیم. (در مثال ۵، چنین رابطه‌ای را از خواص فیزیکی یکی از اجزای سیستم نتیجه گرفتیم.) محاسبهٔ گشتاور حول یک محور دیگر، معادلهٔ مستقل دیگری به‌دست نمی‌دهد؛ می‌توانیم نشان بدهیم که چنین معادله‌ای ترکیبی خطی از معادلهٔ مربوط به گشتاور و دو معادلهٔ مربوط به نیروست و بنابراین حاوی اطلاعات جدیدی نیست.

مثال سادهٔ دیگری از یک ساختار نامعین، وقتی پیش می‌آید که بخواهیم نیروهای وارد از زمین به چهار چرخ اتومبیلی را که روی سطح

افقی قرار گرفته است مشخص کنیم. اگر فرض کنیم که این نیروها جملگی بر سطح زمین عمودند، در آن‌صورت با چهار کمیت اسکالر مجهول مواجه‌ایم. تمام نیروهای دیگر از جمله وزن اتومبیل و سرنشینان آن عمود بر سطح زمین وارد می‌شوند. بنابراین، تنها سه معادلهٔ مستقل داریم که شرایط تعادل را مشخص می‌کنند، یکی از این معادلات مربوط به تعادل انتقالی در تنها راستای مشترک همهٔ نیروهاست و دو معادلهٔ دیگر از تعادل دورانی حول دو محور عمود بر هم در صفحهٔ افق نتیجه می‌شود. پس جواب این مسئله هم از نظر ریاضی نامعین است. میز چهارپایه‌ای که همهٔ پایه‌هایش روی زمین قرار داشته باشند هم نمونهٔ دیگری از این نوع مسائل است.

البته، چون برای این مسئلهٔ فیزیکی در واقع جواب یگانه‌ای وجود دارد، باید برمبنایی فیزیکی، رابطهٔ مستقل دیگری بین نیروها پیدا کنیم تا بتوانیم مسئله را حل کنیم. برای رفع این مشکل باید توجه کنیم که هیچ ساختاری هرگز چنان صلب نیست که ما تلویحاً در این مسائل فرض کرده‌ایم. همهٔ ساختارها تا حدودی تغییر شکل می‌دهند. مثلاً، نردبان و دیوار تغییر شکل می‌دهند؛ لاستیکهای اتومبیل و زمین هم تغییر شکل می‌دهند. ماهیت این تغییر شکل را قوانین کشسانی و خواص کشسانی هر ساختار تعیین می‌کنند و رابطهٔ مورد نیاز دیگر بین نیروها از همین‌جا فراهم می‌شود. بنابراین برای تحلیل کامل مسئله نه تنها به قوانین مکانیک جسم صلب، بلکه به قوانین کشسانی هم نیاز داریم. این مطالب را به‌طور خلاصه در بخش ۱۴ـ۵ مطالعه خواهیم کرد.

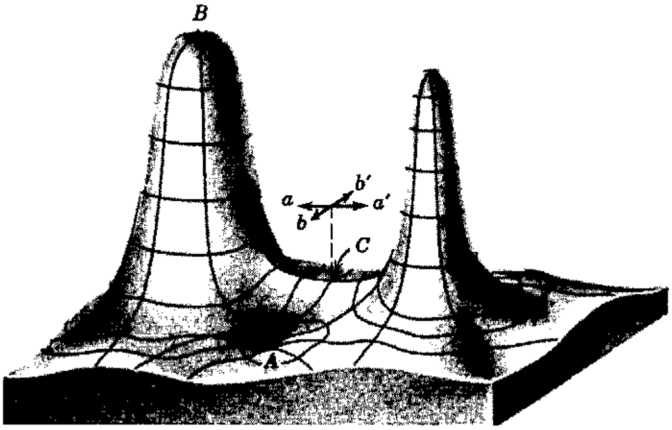
۱۴ـ۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثای اجسام صلب در میدان گرانشی

در فصل ۸، دیدیم که نیروی گرانشی یک نیروی پایستار است. برای نیروهای پایستار می‌توانیم یک تابع انرژی پتانسیل $U(x, y, z)$ تعریف کنیم، که به‌صورت زیر با $\mathbf{F}$ مرتبط است

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

در نقاطی که $\partial U/\partial x$ صفر است، ذره‌ای که تحت تأثیر این نیروی پایستار باشد در راستای x در تعادل انتقالی است، چون در این‌صورت F_x صفر است. به‌همین صورت، در نقاطی که $\partial U/\partial y$ یا $\partial U/\partial z$ صفر باشد، ذره به‌ترتیب در راستاهای y و z در تعادل انتقالی است. مشتق U در یک نقطه، و مؤلفهٔ نیروی متناظر با آن در صورتی صفر است که U در آن نقطه دارای یک مقدار فرین (بیشینه یا کمینه) باشد، یا اینکه U نسبت به مختصهٔ متغیر ثابت باشد. پس جسم وقتی در حال تعادل است که U بیشینه، کمینه یا ثابت باشد. هر یک از این سه حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

وقتی U کمینه باشد (نقطهٔ A در شکل ۹)، ذره در حال تعادل پایدار است؛ هرگونه جابه‌جایی ذره از این وضعیت سبب ایجاد یک نیروی بازگرداننده می‌شود که میل به بازگرداندن ذره به مکان تعادل



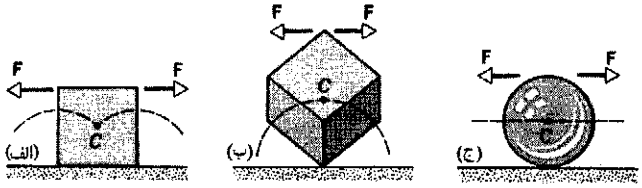
شکل۹. یک سطح انرژی پتانسیل گرانشی. ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی گرانشی متناظر با این شکل قرار بگیرد مانند ذره‌ای رفتار می‌کند که روی یک سطح جامد واقعی و بدون اصطکاک، به همین شکل، می‌لغزد، ذره در نقاط A، B، یا C در حال تعادل است. در نقطهٔ A تعادل پایدار است، زیرا اگر ذره را اندکی از A دور کنیم تمایل دارد که به همان نقطه بازگردد. در نقطهٔ B تعادل ناپایدار است، زیرا ذره‌ای که اندکی از B دور شود تمایل به افزایش فاصله دارد. در نقطهٔ C، اگر ذره در امتداد محور aa' جابه‌جا شود مایل به‌بازگشت به نقطهٔ C است، ولی اگر در امتداد محور bb' جابه‌جا شود مایل به افزایش فاصله است. نقطهٔ C را نقطهٔ زین می‌نامند، زیرا این سطح در این ناحیه تقریباً به‌شکل زین است. تعادل خنثی را اینجا نشان نداده‌ایم؛ این نوع تعادل را باید روی سطح افقی نمایش داد.

دارد. به‌عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که اگر جسمی در حال تعادل پایدار باشد، برای تغییر مکان جسم باید یک عامل خارجی روی آن کار انجام بدهد. این کار سبب افزایش انرژی پتانسیل جسم می‌شود.

وقتی U بیشینه باشد (نقطهٔ B در شکل ۹)، ذره در حال تعادل ناپایدار است؛ هرگونه جابه‌جایی از این وضعیت سبب ایجاد نیرویی می‌شود که تمایل به دورکردن ذره از موقعیت تعادل دارد. در این مورد برای تغییر مکان ذره اصلاً نیازی به‌کار عامل خارجی روی ذره نیست؛ این کار را نیروی پایستار انجام می‌دهد، و در نتیجه انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد.

اگر U ثابت باشد، ذره در حال تعادل خنثی است. در این مورد ذره را می‌توان بدون اعمال هیچ نیروی دورکننده یا بازگرداننده‌ای، اندکی جابه‌جا کرد.

نکاتی که بیان کردیم در مورد ذرات صدق می‌کند، یعنی برای حرکت انتقالی معتبر است. حالا می‌خواهیم به جسم صلب بپردازیم. در این‌صورت علاوه بر تعادل انتقالی باید تعادل دورانی را هم در نظر بگیریم. مسئلهٔ حرکت جسم صلب در میدان گرانشی مسئلهٔ بسیار ساده‌ای است، چون می‌توانیم فرض کنیم که تمام نیروهای گرانشی وارد بر ذرات یک جسم صلب به یک نقطهٔ‌واحد اثر می‌کنند ــ چه به‌منظور بررسی تعادل انتقالی باشد و چه به‌منظور بررسی تعادل دورانی. در مسائل مربوط به تعادل تحت تأثیر نیروهای گرانشی، می‌توانیم به‌جای تمامی جسم صلب، نقطه‌ای با همان جرم و مستقر در گرانیگاه را در نظر بگیریم.



شکل ۱۰. تعادل یک جسم گسترده (الف) مکعبی که روی یک‌وجه تکیه دارد درتعادل پایدار است، زیرا اگر در اثر نیروی افقی **F** از جا بلند شود، گرانیگاه آن، C، بالا می‌رود. (ب) مکعبی که روی یک کنج متوازن شده باشد در تعادل ناپایدار است، چون در اثر نیروی افقی **F**، گرانیگاهش سقوط می‌کند. (ج) کره در مقابل یک نیروی افقی در حال تعادل خنثی است، چون در اثر اعمال نیروی **F**، گرانیگاه C نه بالا می‌رود و نه پایین می‌آید. این معیارهای تعادل برای اجسام بعددار را با شرایط مربوط به ذرهٔ شکل ۹ مقایسه کنید.

مثلاً، مکعبی را در نظر بگیرید که روی یک وجه‌اش روی یک میز افقی قرارگرفته است. گرانیگاه مکعب در مرکز سطح مقطع مرکزی‌اش واقع می‌شود (شکل ۱۰الف). فرض کنید نیرویی به این مکعب اعمال می‌کنیم که آن‌را حول محوری در امتداد یکی از اضلاعش و بدون لغزش می‌چرخاند. توجه کنید که گرانیگاه بالا برده شده و به‌این ترتیب روی مکعب کار صورت گرفته است، و این کار انرژی پتانسیل را افزایش می‌دهد. اگر نیرو را حذف کنیم، مکعب به‌وضعیت اولیه‌اش باز می‌گردد. بنابراین این وضعیت اولیه یک حالت تعادل پایدار است. این فرایند، برای ذره‌ای با همان جرم در مکان گرانیگاه، در شکل نشان داده شده است. خط‌چین نمایندهٔ مسیری است که گرانیگاه در طی این حرکت می‌پیماید. مشاهده می‌کنیم، چنان که باید، ذره در مکان تعادل پایدار، حداقل‌انرژی پتانسیل را دارد. به‌این ترتیب می‌شود نتیجه گرفت که جسم صلب در صورتی در تعادل پایدار است که با اعمال نیرو بتوانیم گرانیگاه آن‌را بالا ببریم ولی نتوانیم پایین بیاوریم.

اگر مکعب را بچرخانیم تا روی یک‌کنج به توازن برسد (شکل ۱۰ ب). در این‌صورت هم مکعب در حال تعادل است. مشاهده می‌کنیم که این وضعیت تعادل یک وضعیت ناپایدار است. اعمال کوچکترین نیروی افقی سبب دور شدن مکعب از این وضعیت می‌شود و انرژی پتانسیل هم در این فرایند کاهش می‌یابد. ذره‌ای با جرم معادل، که در گرانیگاه مستقر باشد مسیری را که با خط‌چین نشان داده‌ایم طی می‌کند. در وضعیت تعادل ناپایدار، همان‌طورکه باید، ذره بیشترین انرژی پتانسیل را دارد. مطلب بالا را می‌توانیم چنین خلاصه کنیم که، جسم صلب در حال تعادل ناپایدار است اگر هر نیروی افقی بتواند گرانیگاه آن‌را پایین بیاورد.

مکعبی که روی یک ضلع‌اش متوازن شده باشد در تعادل ناپایدار است اگر تحت تأثیر یک نیروی افقی عمود بر آن ضلع قرار بگیرد، ولی در مقابل نیروی افقی‌ای که موازی با آن ضلع وارد شود در تعادل پایدار است. به‌این ترتیب ذره ممکن است نسبت به یک مختصه در تعادل پایدار باشد و نسبت به مختصهٔ دیگر در تعادل ناپایدار. چنین وضعیتی را نقطهٔ زین می‌نامیم. این وضعیت متناظر با نقطهٔ C در شکل ۹ است.

تعادل خنثای جسم صلب با یک کره روی یک سطح افقی نشان داده می‌شود (شکل ۱۰ج). اگر به کره یک نیروی افقی اعمال شود، گرانیگاه آن نه بالا می‌رود و نه پایین می‌آید بلکه روی یک خط افقی حرکت می‌کند. مسیر گرانیگاه در شکل با خط‌چین افقی مشخص شده است. انرژی پتانسیل کره، همانند انرژی پتانسیل ذره‌ای با جرم معادل واقع در گرانیگاه، در طی جابه‌جایی ثابت است. این سیستم در غیاب نیرو هیچ تمایلی به حرکت درجهت خاصی ندارد. جسم صلب در صورتی در حال تعادل خنثی است که نیروهای افقی نتوانند گرانیگاه آن‌را پایین و یا بالا ببرند.

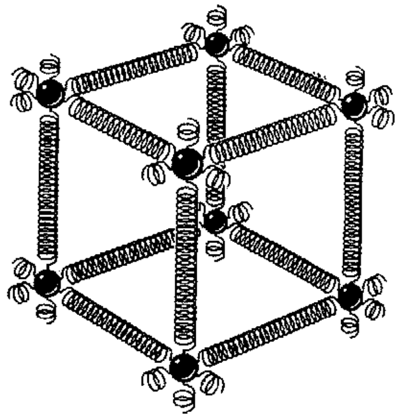
تعادل یک جسم صلب آویخته در چه شرایطی پایدار است؟ چه موقع ناپایدار است؟ و در کدام شرایط خنثی است؟

۱۴ـ۵ کشسانی

میز سه‌پایه ساختاری است که می‌توانیم تعادل آن‌را با روشهایی که در این فصل ارائه شد بررسی کنیم. هرسه پایه روی زمین قرار دارند، و زمین نیروهای قائمی به هر کدام از آنها وارد می‌کند. با استفاده از یک معادلهٔ نیرو (وزن که در گرانیگاه وارد می‌شود باید با جمع سه نیروی قائم برابر باشد) و دو معادلهٔ گشتاور (گشتاورها را حول دو محورعمود بر هم واقع در صفحهٔ افقی کف اتاق محاسبه می‌کنیم)، می‌توانیم سه نیروی مجهول را پیدا کنیم.

اما مسئلهٔ میز چهارپایه شامل چهار نیروی مجهول است و نمی‌توانیم، بدون داشتن اطلاعات بیشتری در مورد ارتباط میان نیروهای قائم، آن‌را حل کنیم. مثلاً، فرض کنید پایه‌ها از نظر طول اندکی با هم تفاوت دارند. با قراردادن یک وزنهٔ بسیار سنگین روی میز می‌توانیم پایه‌های آن‌را به اندازه‌های متفاوت فشرده کنیم، تا هر چهارتایشان با زمین در تماس قرار بگیرند. در این‌صورت می‌توانیم با استفاده از فشردگی پایه‌ها رابطهٔ چهارم بین نیروها را پیدا کنیم و به حل مسئله بپردازیم (نگاه کنید به مثال ۸).

صلبیت اجسام به اصطلاح صلب در واقع یک تصور است. جامدها از اتمها شکل گرفته‌اند و این اتمها در تماس صلب با یکدیگر قرار ندارند. اتمها رویه‌های سختی ندارند که بتوان آنها را خیلی کیپ در کنار هم چید؛ ابر الکترونی آنها را می‌توان با نیروهای خارجی شکل داد و یا تغییر شکل داد. در اجسام جامد، پیوند اتمها به‌واسطهٔ نیروهایی است که تا حدود زیادی مانند نیروی فنر رفتار می‌کنند. شکل ۱۱ قسمتی از یک شبکهٔ جامد را نشان می‌دهد. شبکه آرایش منظمی از اتمهاست که می‌توان آن‌را در بلورها مشاهده کرد. هر اتم تحت تأثیر شش فنری که آن‌را احاطه کرده به حال تعادل درآمده است؛ ثابت مؤثر فنر بسیار بزرگ است، یعنی تغییر دادن فاصلهٔ میان اتمها مستلزم نیروی بسیار بزرگی است. به‌خاطر بزرگی این نیروست که فرض می‌کنیم اجسام صلب‌اند. درجامدهای دیگر، آرایش اتمها ممکن است به‌صورتی غیر از شبکهٔ مکعبی، مثلاً به شکل ردیفهای طویل باشد؛ این نوع اجسام خیلی صلب نیستند. لاستیک نمونه‌ای از آنهاست.



شکل۱۱. اتمهای یک جسم جامد روی یک شبکهٔ سه‌بعدی تکرارشونده توزیع شده‌اند. نیروهای بین اتمی را با فنر نمایش داده‌ایم.

وقتی چنین موادی را می‌کشیم، در واقع نیروی کافی برای تغییر دادن فاصلهٔ بین اتمها را اعمال می‌کنیم.

همهٔ اجسام "صلب" واقعی تا حدودی کشسان‌اند، یعنی، با کشیدن، هل‌دادن، چرخاندن یا فشردن آنها می‌توانیم ابعادشان را اندکی تغییر بدهیم. برای اینکه شناختی از مرتبهٔ بزرگی این نوع تغییر ابعاد داشته باشیم، استوانه‌ای فولادی به‌طول $1\mathrm{m}$ و قطر $1\mathrm{cm}$ را در نظر می‌گیریم. اگر اتومبیل کوچکی را از چنین میله‌ای بیاویزیم، میله فقط در حدود $0{,}5\mathrm{mm}$ یا ۰٫۰۵ درصد تغییر طول می‌دهد. به‌علاوه، وقتی اتومبیل را جدا کنیم، میله به‌طول اصلی‌اش بازمی‌گردد.

اگر به‌این میله دو اتومبیل آویزان کنید، میله به‌طور دائم کشیده خواهد ماند و با برداشتن بار به طول اولیه‌اش باز نمی‌گردد. اگر سه اتومبیل به آن آویزان کنید، میله می‌شکند. درست در لحظات قبل از گسستگی، افزایش طول آن‌کمتر از ۰٫۲٪ است. تغییر شکلهایی به‌این اندازه اگرچه کوچک به‌نظر می‌رسند، ولی در کارهای مهندسی بسیار اهمیت دارند.

در شکل ۱۲ دو نوع تغییر شکل (یا تغییر ابعاد) ممکن برای جسم جامد، در اثر نیروهای وارد بر آن‌را نشان داده‌ایم. در شکل ۱۲الف استوانه تحت تأثیر نیروهای کششی قرار گرفته است. در شکل ۱۲ب استوانه تحت تأثیر نیروهای به‌اصطلاح برشی تغییر شکل پیدا کرده است. این نوع تغییر شکل مانند تغییر شکل یک بسته کارت یا تغییر شکل یک کتاب است. (نوع سومی که ممکن است یک جسم تغییر شکل بدهد، تغییر شکل در اثر فشردگی یکنواخت است. این نوع تغییر شکل ناشی از اعمال نیروهای یکنواخت در همهٔ جهتهاست. فشردگی یکنواخت را در فصل ۱۷ بررسی می‌کنیم.) آنچه در هر سهٔ این صورتها مشترک است یکی تنش است که به نیروهای اعمال شده مربوط می‌شود و دیگری کرنش، که نوعی از تغییر شکل است.

تنش و کرنش در موارد متفاوت شکل ۱۲ به‌شکلهای مختلفی بروز می‌کنند، ولی ــ در محدودهٔ کاربردهای مفید مهندسی ــ با هم متناسب‌اند. ضریب تناسب آنها را مدول کشسانی می‌نامند. بنابراین

$$\text{تنش} = \text{مدول کشسانی} \times \text{کرنش} \qquad (۲۸)$$

در شکل ۱۳ ارتباط بین تنش و کرنش را برای یک استوانهٔ فولادی آزمونی (مانند شکل ۱۴) نشان داده‌ایم. در گسترهٔ وسیعی از تنشهای اعمال شده، منحنی تنش-کرنش یک منحنی خطی است و معادلهٔ ۲۸، با یک مدول ثابت، برقرار است (این قسمت متناظر با بخش خطی شکل ۱۳ است). با افزایش تنش، ممکن است رابطهٔ تنش-کرنش غیرخطی شود، ولی ماده باز هم کشسان می‌ماند: یعنی، اگرتنش را برداریم، نمونه به ابعاد اولیه‌اش بازمی‌گردد.

اگر تنش از استقامت تسلیم یا حد کشسانی نمونه بیشتر شود، نمونه به‌طور دائمی تغییر شکل می‌دهد و پس از حذف تنش هم به ابعاد اولیه‌اش بازنمی‌گردد، این نوع‌رفتار را رفتار پلاستیک می‌گوییم. فراتر از آنچه که استقامت تسلیم نامیده می‌شود، ناگزیر گسیختگی پدید می‌آید. این پدیده وقتی روی می‌دهد که تنش به استقامت حدی برسد.

کشش و تراکم

در مورد کشیدگی یا فشردگی ساده، تنش را به‌صورت F/A، نیرو تقسیم بر مساحتی که نیرو بر آن اثر می‌کند، و کرنش، یا تغییر شکل را به‌صورت کمیت بدون بعد $\Delta L/L$، تغییر نسبی طول نمونه، تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر نمونه یک میلهٔ بلند باشد، نه تنها تمامی میله بلکه هر قسمت آن، تحت تأثیر یک تنش معلوم، کرنش یکسانی را متحمل می‌شود. چون کرنش یک کمیت بدون بعد است، مدول معادلهٔ ۲۸ دارای بعد تنش، یعنی نیرو بر واحد سطح است.

مدول مربوط به تنشهای کششی و تراکمی را مدول یانگ می‌نامند. این مدول در کاربردهای مهندسی با نماد E نشان داده می‌شود. معادلهٔ ۲۸ به صورت زیر درمی‌آید

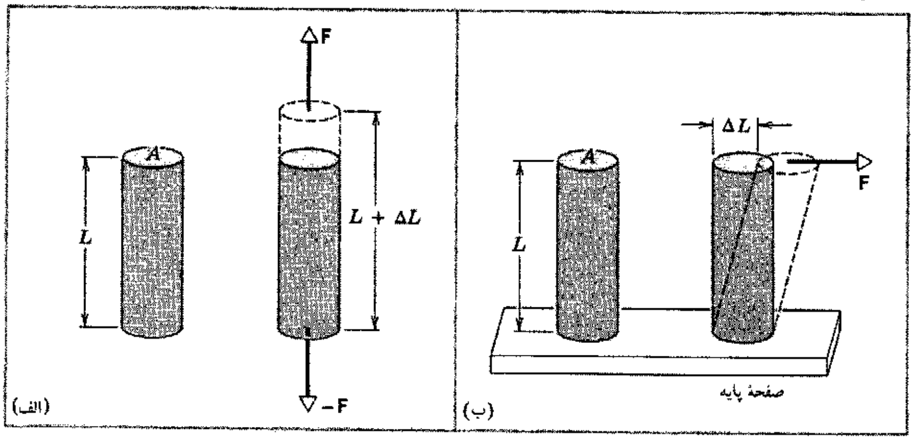
$$\frac{E}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

یا

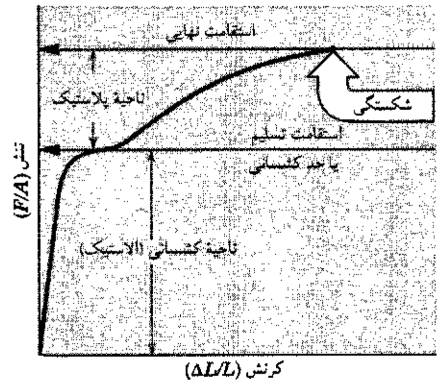
$$\Delta L = \frac{EL}{EA} \qquad (۲۹)$$

کرنش در یک نمونه، $\Delta L/L$، را معمولاً می‌توان به‌راحتی با کرنش‌سنج اندازه‌گیری کرد (شکل ۱۵). این وسائل ساده و کارآمد، که می‌توان آنها را مستقیماً با چسب روی ماشین‌آلات در حال کار نصب کرد، مبتنی بر این اصل ساخته شده‌اند که مقاومت الکتریکی یک سیم (از جنس بعضی مواد) تابعی از کرنش در سیم است.

با آنکه ممکن است مدول کشش و فشارش تقریباً یکی باشد، امکان دارد استقامت جدی در دو مورد کاملاً متفاوت باشد. مثلاً بتون تحت فشار بسیار مقاوم است ولی تحت کشش آن‌چنان سست است که هرگز از آن در کارهای مهندسی (به این منظور) استفاده نمی‌شود.



شکل۱۲. (الف) استوانه‌ای تحت تأثیر تنش کششی به‌اندازهٔ ΔL درازتر شده است. (ب) استوانه‌ای تحت تأثیر تنش برشی، مانند یک دسته کارت تغییر شکل داده است.



شکل۱۳. منحنی تنش-کرنش برای یک نمونهٔ فولادی، مانند شکل ۱۴. وقتی تنش برابر با استقامت تسلیم نمونه باشد، نمونه به‌طور دائمی تغییر شکل می‌دهد. وقتی تنش برابر با استقامت حدی نمونه شود، نمونه از هم می‌گسلد.

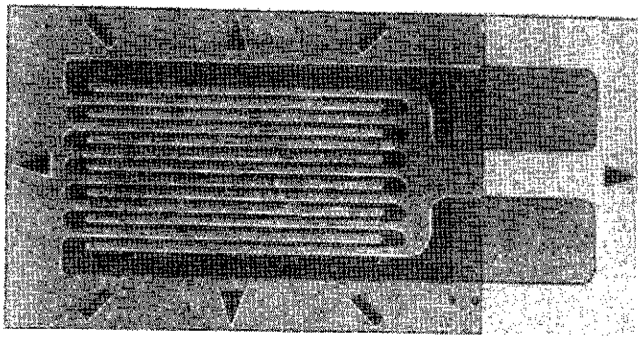
شکل۱۴. نمونهٔ مورد آزمون برای تعیین منحنی تنش-کرنش (مانند شکل ۱۳).

در جدول ۱ مقادیر مربوط به مدول یانگ و سایر خواص کشسانی چند نوع مصالح مورد استفاده در مهندسی را آورده‌ایم.

برش

در مورد نیروهای برشی هم تنش به‌صورت نیرو بر واحد سطح است، ولی در اینجا بردار نیرو در صفحهٔ سطح مورد نظر قرار می‌گیرد و بر آن عمود نیست. کرنش هم به‌صورت نسبت بدون بعد $\Delta L/L$ است. این کمیتها در شکل ۱۲ب نشان داده شده‌اند. مدول مربوط به اینگونه نیروها را که در کاربردهای مهندسی با نماد G نشان داده می‌شود، مدول برشی می‌نامیم. معادلهٔ ۲۹، با نشاندن G به‌جای E، در مورد تنشهای برشی هم به‌کار می‌رود.

تنشهای برشی در میل‌گردانهایی که زیر بار دوران می‌کنند، در شکستگیهای استخوان به‌علت پیچش، و در فنرها نقش بسیار مهمی دارند.



شکل۱۵. یک کرنش‌سنج با ابعاد کلی ۹٫۸mm در ۴٫۶mm. این سنجه را با چسب به جسمی که می‌خواهیم کرنش آن‌را اندازه‌گیری کنیم متصل می‌کنیم. مقاومت الکتریکی سنجه با کرنش تغییر می‌کند و این امکان را فراهم می‌آورد تا کرنشهایی تا حدود ۳٪ را اندازه‌گیری کنیم.

مثال ۶. میله‌ای از فولادسازه‌ای در اختیار داریم. شعاع R این میله ۹٫۵mm و طول L آن برابر ۸۱cm است. نیروی $F = ۶٫۲ \times ۱۰^{۴}\text{N}$ (حدود ۷ تن) این میله را در راستای محور می‌کشد. (الف) تنش در این میله چقدر است؟ (ب) در اثر این نیرو میله چقدر افزایش طول پیدا می‌کند؟

حل: (الف) تنش طبق تعریف عبارت است از

$$\text{تنش} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^{۲}} = \frac{۶٫۲ \times ۱۰^{۴}\text{N}}{(\pi)(۹٫۵ \times ۱۰^{-۳}\text{m})^{۲}}$$
$$= ۲٫۲ \times ۱۰^{۸}\text{N/m}^{۲}$$

استقامت تسلیم برای فولادسازه‌ای برابر با $۲٫۵ \times ۱۰^{۸}\text{N/m}^{۲}$ است، پس این تنش خیلی نزدیک به استقامت حدی میله است.

(ب) با استفاده از معادلهٔ ۲۹ و نتیجه‌ای که در (الف) به‌دست آوردیم داریم

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(۲٫۲ \times ۱۰^{۸}\text{N/m}^{۲})(۰٫۸۱\text{m})}{۲٫۰ \times ۱۰^{۱۱}\text{N/m}^{۲}}$$
$$= ۸٫۹ \times ۱۰^{-۴}\text{m} = ۰٫۸۹\text{mm}$$

جدول ۱. بعضی خواص کشسانی بعضی از مصالح مورد استفاده در مهندسی.

مواد	چگالی (kg/m^3)	مدول یانگ $(10^9 N/m^2)$	استقامت حدی $(10^6 N/m^2)$	استقامت خم شدن $(10^6 N/m^2)$
فولاد[1]	۷۸۶۰	۲۰۰	۴۰۰	۲۵۰
آلومینیم	۲۷۱۰	۷۰	۱۱۰	۹۵
شیشه	۲۱۹۰	۶۵	[2]۵۰	—
بتون[3]	۲۳۲۰	۳۰	[2]۴۰	—
چوب[4]	۵۲۵	۱۳	[2]۵۰	—
استخوان	۱۹۰۰	[2]۹	[2]۱۷۰	—
پلی‌استرین	۱۰۵۰	۳	۴۸	—

۱. فولادسازه‌ای (با استاندارد ASTM – A۳۶)
۲. تحت تراکم
۳. استقامت بالا
۴. نوعی کاج

به‌این ترتیب کرنش $\Delta L/L$ برابر است با $(۸٫۹ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m})/(۰٫۸۱\mathrm{m})$، که برابر با $۱٫۱ \times ۱۰^{-۳}$ یا ۰٫۱۱٪ است.

مثال ۷. حداقل قطر استخوان قلم ران در مردان در حدود ۲٫۸cm است، که متناظر است با سطح مقطع $A = ۶ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m}^۲$. تحت چه بار تراکمی‌ای این استخوان می‌شکند؟

حل: از جدول ۱ می‌بینیم که استقامت حدی، S_u، استخوان تحت تراکم برابر است با $۱۷۰ \times ۱۰^۶\mathrm{N/m}^۲$. بنابراین نیروی فشارشی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$F = S_u A = (۱۷۰ \times ۱۰^۶\mathrm{N/m}^۲)(۶ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m}^۲)$$
$$= ۱٫۰ \times ۱۰^۵\mathrm{N}$$

این نیرو تقریباً معادل ۱۱ تن است. با آنکه این نیرو نیروی بزرگی است، ولی امکان مواجه شدن با آن وجود دارد. مثلاً، ممکن است در یک فرود ناشیانه با چتر روی زمین سخت چنین نیرویی به پاها وارد شود. لازم نیست که نیرو مداوم باشد؛ چند میلی‌ثانیه هم کافی است!

حالا این آمادگی را داریم که بفهمیم چگونه خواص کشسانی مواد می‌تواند در تعیین شرایط تعادل مفید باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۸. طول سه‌تا از پایه‌های یک میز چهارپایه $D = ۱٫۰۰\mathrm{m}$ است؛ پایهٔ چهارم اندکی، به‌اندازهٔ $d = ۰٫۵۰\mathrm{mm}$، از سه پایهٔ دیگر بلندتر است، بنابراین میز کمی لنگ است. یک استوانهٔ فولادی سنگینی به جرم $M = ۲۹۰\mathrm{kg}$ را به‌طور سرپا روی میز قرار می‌دهیم، بدین‌ترتیب همهٔ پایه‌ها متراکم می‌شوند و میز دیگر لنگی ندارد. هر پایهٔ میز استوانه‌ای چوبی با سطح مقطع $A = ۱٫۰\mathrm{cm}^۲$ است. مدول یانگ برای چوب $E = ۱٫۳ \times ۱۰^{۱۰}\mathrm{N/m}^۲$ است. فرض کنید سطح میز تراز باقی بماند و پایه‌ها خم نشوند. زمین A چه نیرویی به هر یک از پایه‌ها وارد می‌کند؟

حل: صفحهٔ میز را به عنوان سیستم مورد مطالعه انتخاب می‌کنیم. اگر صفحهٔ میز تراز باقی بماند، هر یک از سه پایه کوتاهتر باید با نیروی یکسان $F_۲$ به‌یک اندازه، $\Delta L_۲$، متراکم شده باشند. پایهٔ بلندتر هم باید با نیروی $F_۱$ به‌اندازهٔ $\Delta L_۱$ متراکم شده باشد، و باید شرط زیر برقرار باشد

$$\Delta L_۲ + d = \Delta L_۱$$

از معادلهٔ ۲۹ $(\Delta L = FL/EA)$، رابطهٔ بالا را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$F_۲ D + dAE = F_۱(D + d) \simeq F_۱ D \qquad (۳۰)$$

که در جملهٔ آخر تساوی، از d در مقایسه با D چشم پوشیده‌ایم. از معادلهٔ ۶ برای موازنهٔ نیروها در راستای قائم، داریم

$$\sum F_y = ۳F_۲ + F_۱ - Mg = ۰ \qquad (۳۱)$$

اگر معادلات ۳۰ و ۳۱ را برای کمیتهای مجهول حل کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$F_۲ = \frac{Mg}{۴} - \frac{dAE}{۴D}$$
$$= \frac{(۲۹۰\mathrm{kg})(۹٫۸\mathrm{m/s}^۲)}{۴}$$
$$- \frac{(۵٫۰ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m})(۱۰^{-۴}\mathrm{m}^۲)(۱٫۳ \times ۱۰^{۱۰}\mathrm{N/m}^۲)}{(۴)(۱٫۰۰\mathrm{m})}$$
$$= ۷۱۱\mathrm{N} - ۱۶۳\mathrm{N} = ۵۴۸\mathrm{N}$$

$$F_1 = \frac{Mg}{4} + \frac{3dAE}{4D}$$
$$= 711\text{N} + 489\text{N} = 1200\text{N}$$

می‌توانیم نشان بدهیم، برای اینکه میز به‌وضعیت تعادل برسد، هر یک از سه پایهٔ کوتاهتر به‌اندازهٔ ۰٫۴۲mm و پایهٔ بلندتر به‌اندازهٔ ۰٫۹۲mm متراکم می‌شود. اختلاف این دو مقدار ۰٫۵۰mm، یعنی همان مقداری است که انتظار می‌رود.

برای اینکه سطح میز افقی قرار بگیرد باید استوانه را نزدیکتر به پایهٔ بلندتر قرار بدهیم تا به هر یک از پایه‌های کوتاهتر. محل دقیق استوانه را می‌توانیم از معادلهٔ موازنهٔ گشتاورها پیدا کنیم، به شرطی که ابعاد سطح میز و موقعیت پایه‌ها را بدانیم.

پرسشها

۱. آیا معادله‌های ۱ و ۳ هر دو با هم شرایط لازم و کافی برای تعادل مکانیکی را فراهم می‌آورند؟ برای تعادل ایستایی چطور؟

۲. آیا توپ بیسبال در لحظه‌ای که در بالاترین نقطهٔ مسیرش یک پرواز قائم به حال سکون درمی‌آید در حال تعادل است؟

۳. آیا وزنهٔ یک آونگ ساده درهیچ نقطه‌ای از مسیرش در حال تعادل هست؟ اگر چنین نقطه‌ای وجود دارد، آن نقطه کدام است؟

۴. چرخی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ثابتی می‌چرخد در حال تعادل مکانیکی است، چون هیچ نیرو یا گشتاور خارجی به آن وارد نمی‌شود. ولی ذراتی که چرخ را تشکیل داده‌اند شتاب مرکزگرای $\mathbf{a}$ به‌سوی محور دارند. چون $\mathbf{a} \neq 0$ است، چگونه می‌توان گفت که چرخ در حال تعادل است؟

۵. مثالهایی بیاورید از مواردی که در آنها با آنکه برایند نیروهای وارد بر یک جسم صفر است آن جسم در حال تعادل نیست.

۶. آیا در یک ساختمان مسکونی مرکز جرم و گرانیگاه برهم منطبق‌اند؟ در مورد یک دریاچه چطور؟ تحت چه شرایطی تفاوت میان مرکز جرم و گرانیگاه قابل توجه می‌شود؟ مثالی ذکر کنید.

۷. اگر جسم صلبی را بدون چرخش به‌هوا پرتاب کنیم، در صورتی که بتوانیم از مقاومت هوا چشم بپوشیم، در طی پرواز هم چرخشی کسب نمی‌کند. از این آزمایش ساده در مورد مرکز ثقل (گرانیگاه) چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۸. قهرمان المپیک ژیمناستیک ماری‌لورتون عملیات حیرت‌انگیزی روی پارالل با میله‌های ناهمسطح انجام می‌داد. کسی به‌او می‌گوید که تحلیل دقیق فیلمهای عملیات این ژیمناست نشان می‌دهد که مرکز جرم این ژیمناست در تمام حرکتهایی که انجام می‌دهد همواره، همان‌طور که قوانین فیزیک ایجاب می‌کند، بالاتر از تکیه‌گاه(های) او قرار دارد. دربارهٔ این گفته چه نظری دارید؟

۹. نتویی را بین دو درخت بسته‌ایم و آن‌را تکان می‌دهیم. درکدام‌یک از دو مورد زیر احتمال پاره‌شدن آن بیشتر است: (الف) ننو را با کشیدن طنابهایش سفت بسته‌ایم، و (ب) ننو را شل بسته‌ایم، طوری که مقدار قابل‌توجهی شکم داده است. دربارهٔ پاسخ خودتان توضیح بدهید.

۱۰. یک سر نردبانی را به زمین و سر دیگر آن‌را به دیوار قائمی تکیه داده‌ایم. احتمال لغزش نردبان وقتی روی پلهٔ پایین ایستاده‌ایم بیشتر است یا وقتی روی پلهٔ بالا ایستاده‌ایم؟ توضیح بدهید که چرا.

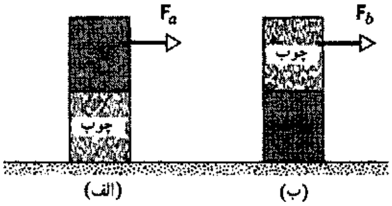
۱۱. کتابی روی میزی قرار گرفته است. میز نیرویی دقیقاً برابر با وزن کتاب به‌طرف بالا به آن وارد می‌کند. میز از کجا "می‌داند" که چه نیرویی به‌طرف بالا باید وارد کند؟ این نیرو، از طریق چه سازوکاری وارد عمل می‌شود؟[1]

۱۲. اگر چنان در برابر یک در باز بایستیم که صورتمان در برابر لبهٔ در و هر پایمان در یک طرف در قرار بگیرد، در می‌یابیم که نمی‌توانیم روی پنجه‌ها بایستیم. چرا؟

۱۳. روی یک صندلی که پشتی آن قائم است بنشینید و سعی کنید بدون خم شدن به‌سمت جلو از جا بلند شوید. چرا نمی‌توانید این کار را انجام بدهید؟

۱۴. یک تیرک موازنهٔ بلند به بندباز در حفظ تعادلش کمک می‌کند. چگونه؟

۱۵. یک قالب مرکب متشکل از چوب و فلز روی سطح یک میز قرار گرفته است. درکدام‌یک از دو وضعیتی که در شکل ۱۶ نشان داده شده است می‌توانید قالب را با نیروی کمتری واژگون کنید؟



شکل ۱۶. پرسش ۱۵

۱۶. در مثال ۵، چرا منظورکردن اصطکاک لولا ضروری نیست؟

۱۷. تابلویی توسط دو سیم به دیواری آویزان شده است. سیمها باید در چه راستاهایی باشند تا کشش در آنها به حداقل برسد؟ توضیح بدهید که چطور با آنکه جرم تابلو معین است تعادل تابلو به‌ازای راستاها و کششهای متفاوتی امکان دارد.

۱۸. نشان بدهید که چگونه می‌توان با استفاده از یک نیروسنج اجسامی را وزن کرد که وزن آنها خیلی بیشتر از بزرگترین مقداری است که نیروسنج می‌تواند نشان بدهد.

۱۹. با استفاده از نیروها و گشتاورها توضیح بدهید که چگونه یک درخت می‌تواند در بادهای بسیار شدید تعادلش را حفظ کند.

۲۰. ویروسی که در یک لولهٔ آزمایش پر از مایع در دستگاه سانتریفوژ

---

۱. نگاه کنید به

"The Smart Table," Earl Zwicker, *The Physics Teacher*, December 1981, p. 633.

در حال چرخش باشد، از دیدگاه ناظر ساکن در آزمایشگاه، حرکت دایره‌ای یکنواخت (یعنی، حرکت شتابدار) دارد. ولی ناظری که با دستگاه سانتریفوژ می‌چرخد ویروس را بدون شتاب می‌بیند. توضیح بدهید که چگونه این ویروس می‌تواند برای ناظر دوم در حال تعادل باشد ولی برای ناظر اول خیر.

۲۱. قالبی به شکل مکعب‌مستطیل که نسبت اضلاع آن به‌صورت ۱ : ۲ : ۳ است، روی یک سطح افقی قرار دارد. در چه وضعیتی، یعنی وقتی کدام وجه آن در تماس با سطح افقی است، قالب در پایدارترین تعادل است؟

۲۲. آیا جسم واقعاً صلب وجود دارد؟ اگر وجود دارد، مثالی بیاورید. اگر نه، توضیح بدهید که چرا.

۲۳. در صندلی رانندهٔ یک اتومبیل ساکن نشسته‌اید. به شما گفته می‌شود که نیروهایی که زمین به طرف بالا بر هر یک از چهارچرخ وارد می‌کند با هم متفاوت‌اند. تأیید صحت و سقم این ادعا مستلزم بررسی چه عواملی است؟

۲۴. در مثال ۳، اگر دیوار بدون اصطکاک نباشد، آیا قوانین تجربی اصطکاک شرط اضافی دیگری را که برای تعیین مؤلفهٔ قائم نیروی وارد از دیوار به نردبان لازم است فراهم می‌کند؟

۲۵. وقتی استوانهٔ مورد آزمایش در شکل ۱۴ در اثر تنش اعمال شده کشیده می‌شود، افزایش طول می‌دهد. آیا قطر استوانه هم تغییر می‌کند؟ اگر می‌کند چگونه؟

۲۶. آیا مدول یانگ برای لاستیک از مدول یانگ برای فولاد بیشتر است یا کمتر؟ با این معیار، آیا لاستیک کشسانتر از فولاد است؟

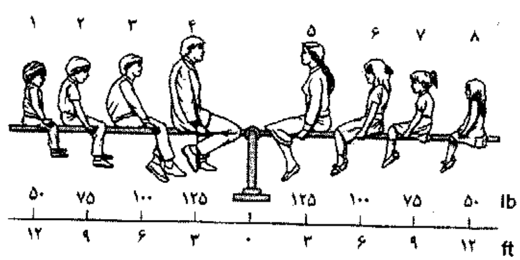
۲۷. یک تیرآهن افقی را که هر سرآن روی تکیه‌گاهی قرار دارد در نقطهٔ وسط بازکرده‌ایم. نشان دهیدکه قسمت بالایی تیرک تحت تراکم است، در حالی‌که قسمت پایینی آن تحت کشش است.

۲۸. چرا در ساختارهای بتونی از میل‌گردهای تقویت‌کننده استفاده می‌کنند؟ (استقامت کششی بتون را با استقامت فشارشی (تراکمی) آن مقایسه کنید.)

مسئله‌ها

بخش ۱۴ـ۱ شرایط تعادل

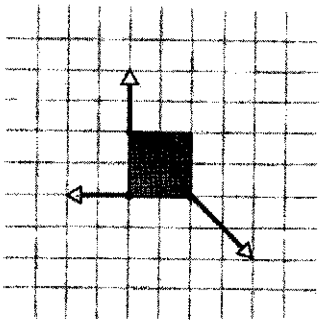
۱. یک خانوادهٔ هشت‌نفره که وزنهای آنها برحسب پوند در شکل ۱۷ نشان داده شده است، یک الاکلنگ را متوازن کرده‌اند. شمارهٔ عضوی



شکل ۱۷. مسئلهٔ ۱

که بیشترین گشتاور را حول تکیه‌گاه (الف) به‌سمت جلوی صفحه و (ب) به‌سمت پشت صفحه ایجاد می‌کند چند است؟

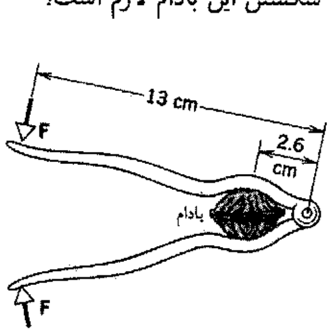
۲. یک جسم صلب مربع شکل با وزن ناچیز تحت تأثیر سه نیرو قرار گرفته است، که مطابق شکل ۱۸ به سه گوشهٔ آن وارد می‌شوند. این نیروها در شکل با بردارهایی در مقیاس متناسب رسم شده‌اند. (الف) آیا شرط اول تعادل برقرار است؟ (ب) آیا شرط دوم تعادل برقرار است؟ (ج) اگر جواب هر یک از دو قسمت قبلی منفی است، آیا نیروی چهارمی می‌تواند تعادل جسم را برقرار کند؟ اگر چنین نیرویی وجود دارد، مقدار، جهت و نقطهٔ اثر آن‌را مشخص کنید.


شکل ۱۸. مسئلهٔ ۲

۳. ثابت کنید که هرگاه جسمی فقط تحت تأثیر سه نیرو در تعادل باشد، این نیروها باید هم‌صفحه باشند و خط اثرهای آنها یا باید همدیگر را در یک نقطه قطع کنند یا با هم موازی باشند.

بخش ۱۴ـ۳ مثالهایی از تعادل

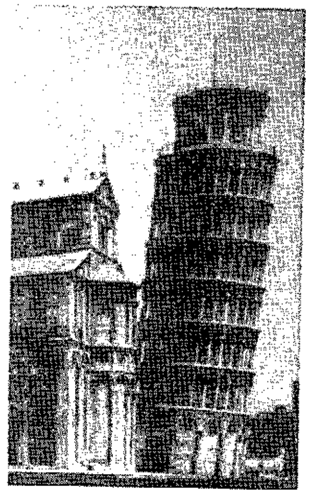
۴. فرض کنید برای اینکه بادامی را بشکنیم لازم است که نیروی ۴۶N از دو طرف به آن وارد کنیم. با استفاده از بادام‌شکن شکل ۱۹ چه نیرویی، F، برای شکستن این بادام لازم است؟



شکل ۱۹. مسئلهٔ ۴

۵. ارتفاع برج کج پیزا ۵۵ متر و قطر آن ۷٫۰m است (شکل ۲۰). قسمت بالای برج به‌اندازهٔ ۴٫۵m از حالت قائم جابه‌جا شده است. برج را به‌صورت یک استوانهٔ دایره‌ای یکنواخت در نظر بگیرید، (الف) چه جابه‌جایی اضافی دیگری می‌تواند تا برج را به مرز واژگونی برساند؟ (ب) در آن لحظه برج با امتداد قائم چه زاویه‌ای می‌سازد؟ (فعلاً آهنگ

حرکت برج در قسمت بالایی ۱ میلی‌متر بر سال است.)



شکل ۲۰. مسئلهٔ ۵

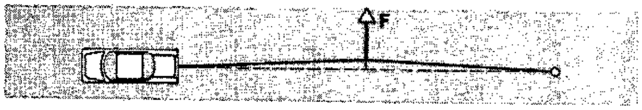
۶. نیروی افقی کوچکی عمود بر یکی از اضلاع بالایی مکعبی که روی یک میز افقی قرار گرفته است، بر وسط آن ضلع وارد می‌شود و مکعب هنوز ساکن است. حالا نیرو را به‌طور یکنواخت افزایش می‌دهیم. آیا مکعب از همان ابتدا واژگون می‌شود یا اینکه شروع به لغزیدن می‌کند؟ ضریب اصطکاک ایستایی بین دوسطح برابر با ۰٫۴۶ است.

۷. صندوقی به شکل مکعب به ضلع ۱٫۲m حاوی یک ماشین صنعتی است. شکل این ماشین چنان است که گرانیگاه صندوق و محتوی آن ۰٫۲۸m بالاتر از مرکز هندسی صندوق واقع شده است. صندوق روی سطح شیبداری قرار دارد که با افق زاویهٔ θ می‌سازد. اگر θ را از صفر به‌تدریج افزایش بدهیم به‌زاویه‌ای می‌رسیم که در آن صندوق یا شروع به لغزیدن می‌کند یا واژگون می‌شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی برابر با (الف) ۰٫۶۰ و (ب) ۰٫۷۰ باشد کدام واقعه اتفاق می‌افتد؟ در هر یک از دو مورد زاویهٔ نهایی را معین کنید.

۸. زنجیر قابل انعطافی به‌وزن W بین دو نقطهٔ ثابت هم تراز A و B آویخته شده است (شکل ۲۱). پیدا کنید (الف) نیرویی را که زنجیر به هر یک از دو انتها وارد می‌کند و (ب) کشش زنجیر را در پایین‌ترین نقطه.

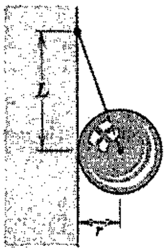
شکل ۲۱. مسئلهٔ ۸

۹. در شکل ۲۲ شخصی می‌خواهد اتومبیلی را که درکنار جاده در گل گیر کرده است، بیرون بکشد. سر طنابی را محکم به سپر جلو اتومبیل گره می‌زند و سر دیگر آن را به یک تیر تلفن که در فاصلهٔ ۶۲ft قرار دارد می‌بندد. سپس به وسط طناب یک نیروی $F = 120\,\text{lb}$ را عمود بر طناب وارد می‌کند و مرکز طناب را به اندازهٔ ۱٫۵ft از موقعیت پیشین جابه‌جا می‌کند؛ و اتومبیل کم‌وبیش از جا تکان می‌خورد. نیروی وارد بر اتومبیل از طناب را معین کنید. (طناب در اثر کشش تا حدودی افزایش طول پیدا می‌کند.)



شکل ۲۲. مسئلهٔ ۹

۱۰. در شکل ۲۳ کرهٔ یکنواختی به وزن w و شعاع r توسط طنابی به یک دیوار بدون اصطکاک آویزان شده است. محل اتصال طناب به دیوار در فاصلهٔ L بالاتر از مرکز جرم کره است. (الف) کشش طناب و (ب) نیروی وارد بر کره از دیوار چقدر است؟

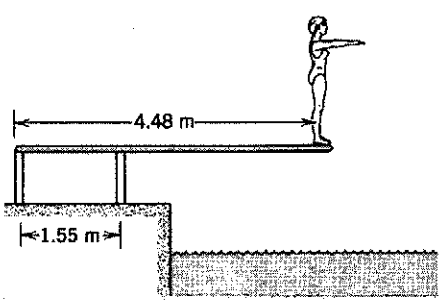


شکل ۲۳. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. جرم اتومبیلی که روی جادهٔ افقی پارک شده است ۱۳۶۰kg و فاصلهٔ بین محورهای جلو و عقب آن ۳۰۵cm است. گرانیگاه این اتومبیل در فاصلهٔ ۱۷۸ سانتی‌متر از محور جلو قرار دارد. کمیتهای زیر را معین کنید: (الف) نیرویی که زمین به‌طرف بالا به هر یک از چرخهای جلو وارد می‌کند. و (ب) نیرویی که زمین به‌طرف بالا به هر یک از چرخهای عقب وارد می‌کند. (در هر مورد فرض کنید که نیروهای وارد به دوچرخ با هم مساوی‌اند.)

۱۲. فردی به‌وزن ۱۶۰lb روی یک پل افقی راه می‌رود و در فاصلهٔ سه‌چهارم طول پل از یک انتها می‌ایستد. ساختار پل یکنواخت و وزن آن ۶۰۰lb است. نیروهای قائمی که از تکیه‌گاهها به هر یک از دو انتهای پل وارد می‌شود چقدر است؟

۱۳. شیرجه‌زنی به وزن ۵۸۲N در انتهای یک تخته شیرجهٔ یکنواخت به‌طول ۴٫۴۸m و وزن ۱۴۲N ایستاده است. تخته شیرجه به دو پایه که در فاصلهٔ ۱٫۵۵m از یکدیگر قرار گرفته‌اند متصل شده است (شکل ۲۴). کشش (یا تراکم) را در هر یک از دو پایه محاسبه کنید.



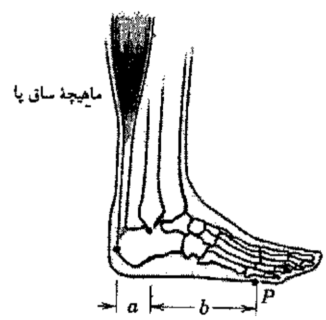
شکل ۲۴. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. چوب‌متری روی نشانهٔ ۵۰٫۰cm روی لبهٔ کاردی متوازن شده است. اگر دو سکه روی نشانهٔ ۱۲٫۰cm بچسبانیم، آنگاه مشاهده می‌کنیم که چوب‌متر روی نشانه ۴۵٫۵cm متوازن می‌شود. جرم هر سکه ۵٫۰۰g است. جرم چوب‌متر چقدر است؟

۱۵. سه کارگر تیرآهنی را حمل می‌کنند. یکی از آنها یک سر تیر را در دست دارد و دو نفر دیگر دو سر تیرچهٔ باریکی را که از زیر تیرآهن گذشته است گرفته‌اند. تیرچه عمود بر تیرآهن چنان قرارگرفته است که وزن تیرآهن به‌طور مساوی بین سه نفر تقسیم شده است. تیرچه در کجای تیرآهن واقع شده است؟ جرم تیرچه در مقایسهٔ با جرم تیرآهن قابل اغماض است.

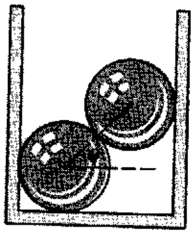
۱۶. یک نظافتچی به جرم ۷۴٫۶kg از نردبانی به جرم ۱۰٫۳kg و طول ۵٫۱۲m استفاده می‌کند. پایهٔ نردبان را در فاصلهٔ ۲٫۴۵m از دیوار می‌گذرد و سر بالایی آن‌را به شیشه ترک‌خورده‌ای تکیه می‌دهد و از نردبان بالا می‌رود. وقتی ۳٫۱۰m از طول نردبان را پیموده است شیشه می‌شکند. با چشمپوشی از اصطکاک بین نردبان و شیشه و با این فرض که پایهٔ نردبان نلغزیده است، کمیتهای زیر را معین کنید: (الف) نیروی وارد بر شیشه از نردبان درست قبل از شکستن شیشه و (ب) مقدار و جهت نیرویی که درست قبل از شکستن شیشه از زمین به نردبان وارد شده است.

۱۷. در شکل ۲۵ ساختمان ساق و کف پا را مشاهده می‌کنید. وقتی پاشنه از زمین جدا می‌شود، پا عملاً فقط در یک نقطه با زمین در تماس قرار می‌گیرد. این نقطه را در شکل با P مشخص کرده‌ایم. نیروهایی را که باید از ماهیچه و استخوانهای ساق به کف پا وارد شوند تا شخصی به جرم ۶۵kg بتواند روی پنجهٔ یک‌پا بایستد محاسبه کنید. این نیروها را با وزن شخص مقایسه کنید. فرض کنید در این شکل $a = ۵٫۰\text{cm}$ و $b = ۱۵\text{cm}$ است.

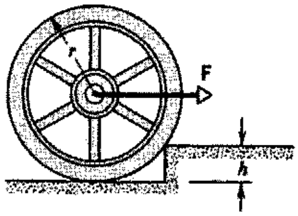


شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۷

۱۸. دو کرهٔ یکنواخت یکسان را که وزن هر کدام W است در نظر بگیرید. این کره‌ها در ته یک ظرف مکعب مستطیل شکل روی هم قرارگرفته‌اند (شکل ۲۶) و فرض کنید بین آنها اصطکاک وجود ندارد. خط واصل مراکز دو کره با امتداد افق زاویهٔ θ می‌سازد. نیروهایی را که به هر یک از دو کره از (الف) کف ظرف، (ب) دیواره‌های ظرف و (ج) کرهٔ دیگر وارد می‌شود، پیدا کنید.


شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۸

۱۹. برای اینکه چرخی از پله‌ای به ارتفاع h بالا برود، حداقل نیروی افقی، F، که باید به آن وارد شود چقدر است (شکل ۲۷)؟ شعاع چرخ را r و وزن آن‌را W بگیرید.

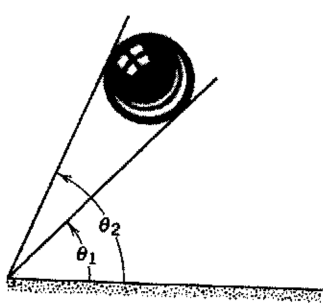


شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. ترازویی تشکیل شده است از میلهٔ صلبی که می‌تواند حول نقطه‌ای که در مرکز میله واقع نیست دوران کند. این ترازو با قراردادن وزنه‌های نابرابر در کفه‌هایی که به دو انتهای میله متصل شده‌اند به‌حالت تعادل درمی‌آید. وقتی جسمی به‌جرم مجهول m را در کفهٔ سمت چپ قرار می‌دهیم ترازو با وزنه‌ای به جرم m_1 در کفهٔ سمت راست متوازن می‌شود و اگر جرم m را در کفهٔ سمت راست قرار بدهیم ترازو با جرم m_2 در کفهٔ سمت چپ متوازن می‌شود. نشان بدهید که

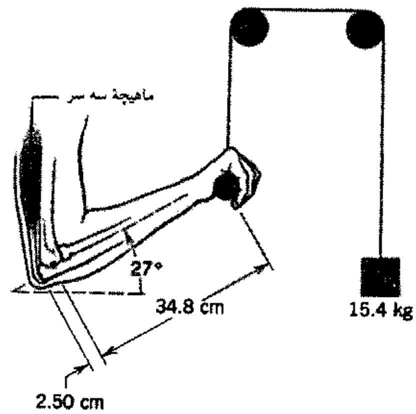
$$m = \sqrt{m_1 m_2}$$

۲۱. کرهٔ یکنواختی به وزن w بین دو سطح شیبدار با زوایای θ_1 و θ_2 (شکل ۲۸) در سکون است. (الف) فرض کنید هیچ اصطکاکی در کار نیست و اندازه و جهت نیروهایی را که سطوح شیبدار به کره وارد می‌کنند پیدا کنید. (ب) اگر اصطکاک را منظور می‌کردیم، چه تغییری حاصل می‌شد؟



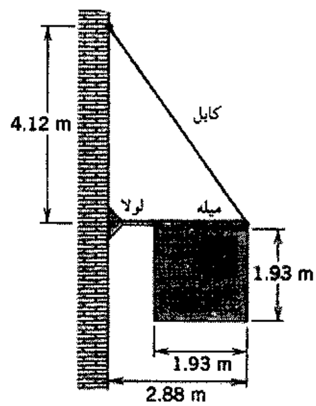
شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۱

۲۲. جسمی به جرم ۱۵٫۴kg به‌وسیلهٔ سیستم قرقره‌های شکل ۲۹ به‌سمت بالا کشیده می‌شود. بازو در حالت قائم است و ساعد با افق زاویهٔ ۲۷٫۰° می‌سازد. چه نیروهایی از طرف (الف) ماهیچه سه سر بازو و (ب) استخوان قلم بازو به ساعد وارد می‌شود؟ فرض کنید جرم ساعد و دست روی‌هم برابر با ۲٫۱۳kg است و مرکز جرم آن در فاصلهٔ ۱۴٫۷cm از نقطهٔ تماس دو استخوان در ساعد واقع شده است. ماهیچهٔ سه‌سر نیروی قائمی به طرف بالا در فاصلهٔ ۲٫۵۰cm از محل تماس دو استخوان (نگاه کنید به شکل) به‌ساعد وارد می‌کند.



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۲۲

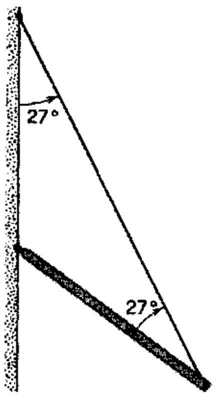
۲۳. در شکل ۳۰ یک تابلوی تبلیغاتی مربع شکل یکنواخت به جرم ۵۲٫۳kg و به ضلع ۱٫۹۳m، از میله‌ای به طول ۲٫۸۸m و با جرم قابل چشمپوشی آویخته شده است. کابلی انتهای میله را به‌نقطه روی دیوار در فاصلهٔ ۴٫۱۲m متر بالاتر از نقطهٔ اتصال میله به دیوار وصل کرده است. (الف) کشش کابل را حساب کنید. (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر میله از دیوار را حساب کنید.



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. دریچه‌ای به شکل مربع به ضلع ۳٫۰ft (مساوی با ۰٫۹۱m) در سقف کار گذاشته شده است. این دریچه که ۲۵lb وزن (۱۱kg جرم) دارد از یک طرف لولا شده است و در سمت مقابل دارای یک چفت است. اگر گرانیگاه این دریچه در فاصلهٔ ۴٫۰in (یعنی ۱۰cm) از مرکز دریچه و به لولا نزدیکتر باشد، در این‌صورت (الف) چفت و (ب) لولا چه نیروهایی را باید تحمل کنند؟

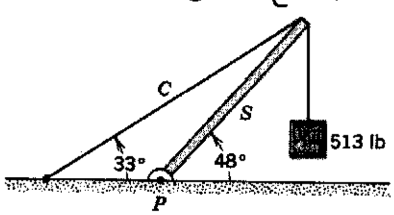
۲۵. یک سر یک تیرچهٔ یکنواخت به‌وزن ۵۲٫۷ lb و طول ۳٫۱۲ft به دیواری لولا شده است. سر دیگر این تیرچه توسط سیمی که هم با تیرچه و هم با دیوار زاویهٔ ۲۷٫۰° می‌سازد، نگه داشته شده است (شکل ۳۱). (الف) کشش سیم را تعیین کنید. (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر لولا را به‌دست بیاورید.



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۲۵

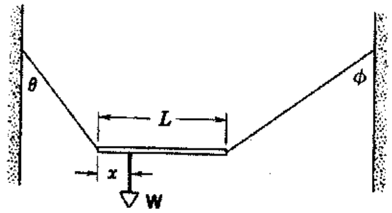
۲۶. جرم دری به ارتفاع ۲٫۱۲m و پهنای ۰٫۹۰۷m برابر با ۲۶٫۸kg است. این در به‌وسیلهٔ دو لولا که در فاصلهٔ ۰٫۲۹۴m از بالا و از پایین در نصب شده‌اند نگه داشته شده است. هر یک از لولاها نصف وزن در را تحمل می‌کند. فرض کنید که گرانیگاه در منطبق بر مرکز هندسی آن است. مؤلفه‌های افقی و قائم نیروهایی را که از در به هر یک از لولاها وارد می‌شود محاسبه کنید.

۲۷. سیستم شکل ۳۲ در حال تعادل است. وزن جسمی که از انتهای شمع S آویخته شده ۵۱۳ lb و وزن خود شمع ۱۰۷ lb است. (الف) کشش کابل C را پیدا کنید و (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیرویی را که از تکیه‌گاه P به شمع وارد می‌شود محاسبه کنید.



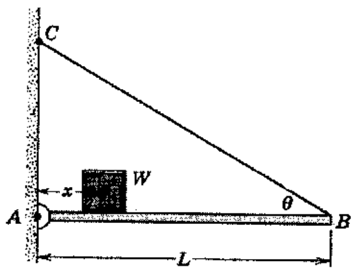
شکل ۳۲. مسئلهٔ ۲۷

۲۸. میلهٔ غیریکنواختی به وزن W توسط دو نخ بی‌وزن آویخته شده است؛ شکل ۳۳. میله در حالت افقی و در حال سکون است. زاویه‌ای که یکی از نخها با امتداد قائم می‌سازد برابر با θ و زاویهٔ نخ دیگر با امتداد قائم برابر با ϕ است. طول میله L است. فاصلهٔ گرانیگاه میله از انتهای سمت چپ آن، x، چقدر است؟



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۲۸

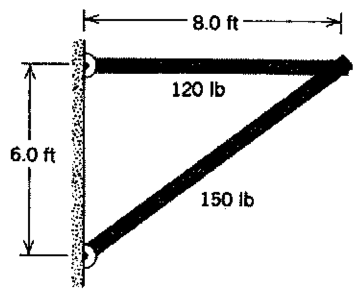
۲۹. میلهٔ نازک افقی AB به‌طول L از سر A به دیوار قائمی لولا شده و سر B آن توسط سیم نازک BC که با افق زاویهٔ θ می‌سازد به دیوار متصل شده است. وزن میله قابل چشمپوشی است. فرض کنید وزنهٔ W را می‌توان هر جایی روی این تسمه چسباند؛ مکان وزنه، با فاصلهٔ آن از دیوار، یعنی x، مشخص می‌شود (شکل ۳۴). (الف) کشش سیم، T، را به‌صورت تابعی از x پیدا کنید. مؤلفه‌های (ب) افقی و (ج) قائم نیروی وارد بر تسمه از لولا را محاسبه کنید.



شکل ۳۴. مسئله‌های ۲۹ و ۳۰

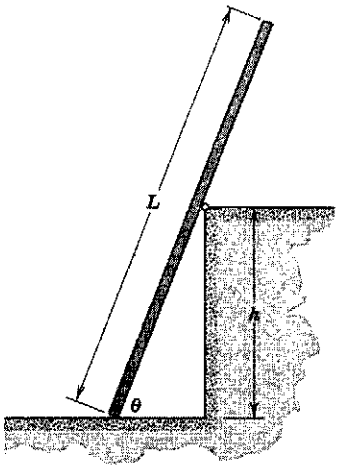
۳۰. در شکل ۳۴، طول میله (L) برابر با ۲٫۷۶m، و وزن آن w برابر با ۱۹۴N است. همچنین، $W =$ ۳۱۵N و $\theta =$ ۳۲٫۰° است. حداکثر کششی که سیم می‌تواند تحمل کند ۵۲۰N است. (الف) بیشترین فاصلهٔ وزنه از دیوار، x، قبل از اینکه سیم پاره شود، چقدر است؟ (ب) وقتی W در بیشترین فاصله قرار گرفت، مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر میله از لولا چقدر است؟

۳۱. در شکل ۳۵ دو تیرک یکنواخت هر کدام از یک سر به دیواری لولا شده‌اند. سرهای آزاد این دو تیرک با پیچ و مهره به هم وصل‌اند. مؤلفه‌های افقی و قائم (الف) نیروی وارد بر هر لولا. (ب) نیروی وارد بر هر تیرک از پیچ و مهره را حساب کنید.



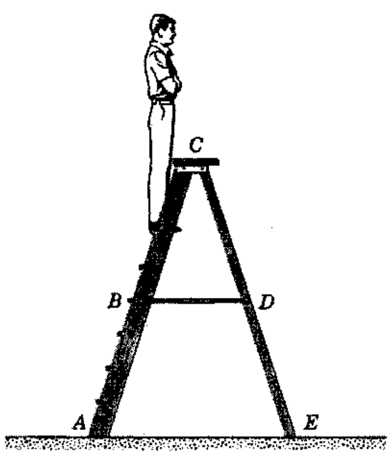
شکل ۳۵. مسئلهٔ ۳۱

۳۲. یک سر الواری به وزن ۲۷۴N و طول $L =$ ۶٫۲۳m روی زمین قرار گرفته است. این الوار را به غلتک بدون اصطکاکی که روی یک دیوار در ارتفاع $h =$ ۲٫۸۷m نصب شده است تکیه داده‌ایم (شکل ۳۶). گرانیگاه الوار در مرکز هندسی آن قرار دارد. این جسم به‌ازای تمام زوایای $\theta \geq$ ۶۸٫۰° متعادل باقی می‌ماند، ولی اگر $\theta <$ ۶۸٫۰° شود شروع به لغزیدن می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی بین تخته و زمین را تعیین کنید.



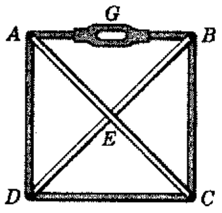
شکل ۳۶. مسئلهٔ ۳۲

۳۳. در نردبان دوطرفهٔ شکل ۳۷ طول هر یک از دو شاخهٔ AC و CE برابر با ۸٫۰ft است. این دو قسمت در نقطهٔ C به هم لولا شده‌اند. طول میلهٔ نگهدارنده BD که وسط دو شاخه را به‌هم وصل می‌کند برابر با ۲٫۵ft است. شخصی به وزن ۱۹۲lb روی نردبان ۶٫۰ft بالا می‌رود. با فرض اینکه زمین بدون اصطکاک باشد، و از وزن نردبان هم بتوانیم چشمپوشی کنیم، کمیتهای زیر را پیدا کنید: (الف) کشش در میلهٔ نگهدارنده و (ب) نیروهای وارد بر نردبان از طرف زمین. (راهنمایی: بهتر است هر یک از دو جزء نردبان را منزوی کنید و بعد شرایط تعادل را روی هر کدام اعمال کنید.)



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۳۳

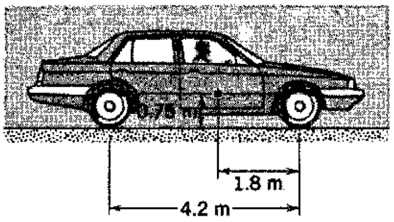
۳۴. به کمک سگک پیچشی G، در میلهٔ AB از کلاف مربعی $ABCD$ در شکل ۳۸، کشش T را ایجاد کرده‌ایم. نیروهای ایجاد شده در سایر شاخه‌های کلاف را تعیین کنید. قطرهای AC و BD، بدون درگیری با هم، در نقطهٔ E یکدیگر را قطع می‌کنند. ملاحظات مربوط به تقارن ممکن است این مسئله و مسائل مشابه را تا حد زیادی ساده‌تر کند.



شکل ۳۸. مسئلهٔ ۳۴

۳۵. یک جعبهٔ مکعب شکل که با ماسه پر شده است ۸۹۲N وزن دارد. می‌خواهیم این جعبه را با وارد کردن یک نیروی افقی به یکی از لبه‌های بالایی آن "بغلتانیم". (الف) کمترین نیروی لازم چقدر است؟ (ب) ضریب اصطکاک ایستایی دست‌کم باید چقدر باشد؟ (ج) آیا راه مؤثرتری برای غلتاندن جعبه وجود دارد؟ اگر وجود دارد، کمترین نیرویی که به این منظور باید مستقیماً به جعبه وارد شود چقدر است؟

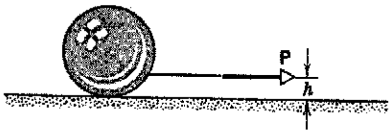
۳۶. اتومبیلی که در یک جادهٔ افقی در حرکت است ناگزیر از یک توقف اضطراری می‌شود. راننده طوری ترمز می‌گیرد که تمام چرخها قفل می‌شوند و اتومبیل می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی بین لاستیک و جاده ۰٫۴۰ است. فاصلهٔ بین محور جلو و محور عقب ۴٫۲۰m است. مرکز جرم اتومبیل در فاصلهٔ ۱٫۸۰m از محور جلو و ۰٫۷۵۰m بالاتر از سطح جاده است (شکل ۳۹). وزن اتومبیل با راننده‌اش مجموعاً ۱۱٫۰kN است. کمیتهای زیر را محاسبه کنید: (الف) شتاب کندکنندهٔ ناشی از ترمز، (ب) نیروی قائم وارد بر هر یک از چرخهای جلو و عقب و (ج) نیروی وارد از ترمز به هر کدام از چرخهای جلو و عقب. (راهنمایی: اتومبیل با آنکه در تعادل انتقالی نیست، در تعادل دورانی هست.)



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۳۶

۳۷. این مسئلهٔ یکی از مسائل مشهور تعادل است[1] می‌خواهیم آجرهای یکنواختی را چنان روی‌هم قرار بدهیم که (بدون فروریختن) بیشترین پیش‌آمدگی را داشته باشند. این خواسته به این ترتیب عملی می‌شود که گرانیگاه آجر بالایی درست روی لبهٔ آجر زیری‌اش قرار بگیرد، گرانیگاه مجموعهٔ دو آجر بالایی هم درست روی لبهٔ سومین آجر از بالا قرار بگیرد، و به همین ترتیب تا آخر. (الف) این معیار بیشترین پیش‌آمدگی را توجیه کنید؛ و بیشترین پیش‌آمدگی را برای یک مجموعهٔ چهار آجری تعیین کنید. (ب) نشان بدهید که با ادامهٔ این کار می‌توان به هر اندازهٔ دلخواهی پیش‌برآمدگی داشت. (مارتین گاردنر در مقاله‌ای دربارهٔ این موضوع می‌گوید: "با یک دسته کارت شامل ۵۲ برگ" که اولین آنها روی میزی درست مماس بر لبهٔ میز قرار داشته باشد، می‌توانید پیش‌آمدگی‌ای بسازید که به اندازهٔ کمی بیشتر از $۲\frac{۱}{۲}$ برابر طول یک کارت از لبهٔ میز جلو آمده باشد.) (ج) حالا، فرض کنید آجرهای یکنواخت را چنان روی‌هم می‌چینیم که انتهای هر یک به‌اندازهٔ کسر ثابت $۱/n$ طول آجر (L) از آجر زیری‌اش جلوتر آمده باشد. به‌این ترتیب، قبل از فروریختن ساختار، چه تعداد آجر (N) می‌توانیم روی هم بچینیم؟ معقول بودن پاسخی را که پیدا کرده‌اید در مورد $n = ۱$، $n = ۲$، $n = \infty$ بررسی کنید.

۳۸. در شکل ۴۰ کرهٔ همگنی به شعاع r و به وزن W، تحت تأثیر نیروی افقی ثابت $\mathbf{P}$ که به ریسمان متصل به کره وارد می‌شود می‌لغزد. (الف) نشان بدهید که اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین کره و زمین μ باشد، ارتفاع h از رابطهٔ $h = r(۱ - \mu W/P)$ به‌دست می‌آید. (ب) نشان بدهید که کره در چنین شرایطی در تعادل انتقالی نیست. آیا نقطه‌ای وجود دارد که حول آن کره در تعادل دورانی باشد؟ (ج) آیا می‌توان با انتخاب مقدار متفاوتی برای h کره را هم در تعادل دورانی و هم در تعادل انتقالی نگه داشت؟ با انتخاب جهت متفاوتی برای $\mathbf{P}$ چطور؟ پاسخهای خودتان را توضیح بدهید.



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۳۸

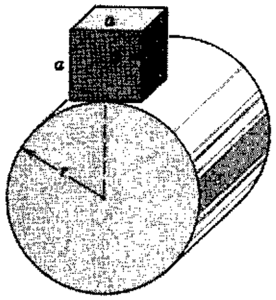
بخش ۱۲ـ۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثای اجسام صلب در میدان گرانشی

۳۹. جامی با شعاع انحنای r روی یک میز افقی قرار گرفته است. نشان بدهید که این جام فقط در صورتی در تعادل پایدار حول نقطهٔ مرکز انحنایش خواهد بود که ارتفاع مرکز جرم مادهٔ انباشته شده در جام نسبت به مرکز جام از r بیشتر نباشد.

---

۱. نگاه کنید به *Scientific American*, November 1964, p. 128.

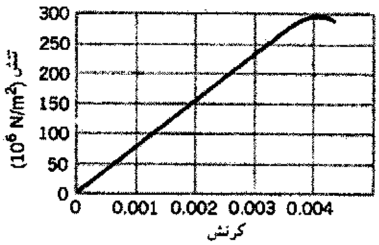
۴۰. مکعبی به ضلع a با چگالی یکنواخت روی یک سطح استوانه‌ای به شعاع r در حال تعادل است (شکل ۴۱). نشان بدهید که شرط تعادل پایدار برای مکعب، با فرض اینکه اصطکاک برای جلوگیری از لغزش کافی باشد، این است که $r > a/۲$ باشد.



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۴۰

بخش ۱۴ـ۵ کشسانی

۴۱. شکل ۴۲ منحنی تنش‌ـکرنش را برای سنگ شیشه نشان می‌دهد. مدول یانگ را برای این ماده محاسبه کنید.



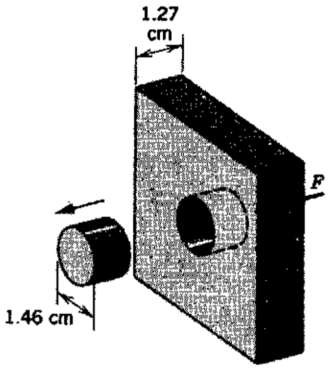
شکل ۴۲. مسئلهٔ ۴۱

۴۲. در یک حادثهٔ سقوط، صخره‌نوردی به جرم ۹۵kg از انتهای طنابی به‌طول ۱۵m و قطر ۹٫۶mm آویزان می‌ماند. اگر طناب به‌اندازهٔ ۲٫۸cm افزایش طول پیدا کند، مدول یانگ برای آن چقدر است؟

۴۳. یک اتاقک بالابر از یک کابل فولادی به قطر ۲٫۵۲cm آویزان است. جرم کل اتاقک و مسافرانش ۸۷۳kg است. وقتی اتاقک ۴۲٫۶m پایین‌تر از موتور بالابر واقع شده باشد، افزایش طول کابل چقدر است؟ (جرم کابل را (در مقایسه با اتاقک) ناچیز فرض کنید.)

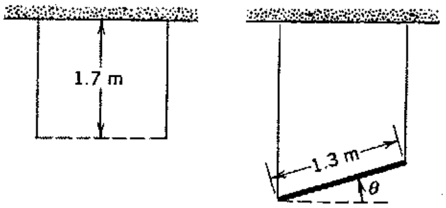
۴۴. یک دیرک آلومینیمی افقی به قطر ۴۸٫۰cm به‌اندازهٔ ۵٫۳۰cm از دیواری بیرون آمده است. وزنه‌ای به جرم ۱۲۰kg از انتهای این دیرک آویزان است. مدول برشی آلومینیم $۳٫۰۰ \times ۱۰^{۱۰}\,N/m^۲$ است. (الف) تنش برشی وارد بر دیرک را محاسبه کنید. (ب) انحراف قائم انتهای دیرک را تعیین کنید.

۴۵. برای ایجاد سوراخی به‌قطر ۱٫۴۶cm در یک ورق فولادی به ضخامت ۱٫۲۷cm چه نیرویی لازم است (شکل ۴۳)؟ استقامت برشی نهایی فولاد $۳۴۵MN/m^۲$ است.



شکل ۴۳. مسئلهٔ ۴۵

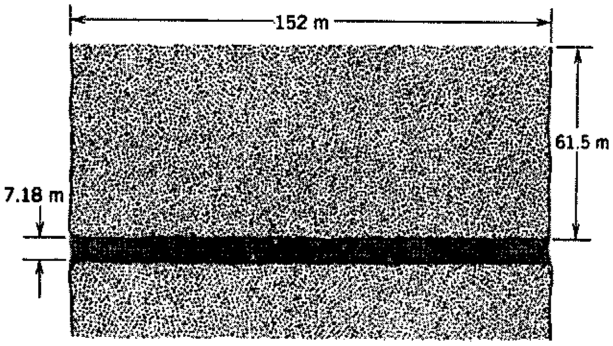
۴۶. در شکل ۴۴ میلهٔ یکنواختی به جرم ۴٫۷kg و طول ۱٫۳m توسط دو سیم از دو انتهایش آویزان شده است. یکی از سیمها فولادی و قطر آن ۱٫۲mm است؛ سیم دیگر آلومینیمی و قطر آن ۰٫۸۴mm است. قبل از آویختن میله، طول سیمها با هم یکی و برابر با ۱٫۷m است. زاویهٔ بین میله و امتداد افق، θ، را تعیین کنید. (از تغییر قطر سیمها چشم بپوشید، میله و سیمها در یک صفحه قرار دارند.)



شکل ۴۴. مسئلهٔ ۴۶

۴۷. پرهٔ چرخانه‌ای به طول ۵٫۲۷m از موادی به چگالی $۴٫۵۵g/cm^۳$ و استقامت کششی نهایی $۴۴۶MN/m^۲$ ساخته شده است. بیشترین سرعت دورانی ممکن برای این پره چقدر است؟ فرض کنید دوران حول محوری عمود بر پره که از یک انتهای آن می‌گذرد انجام می‌شود.

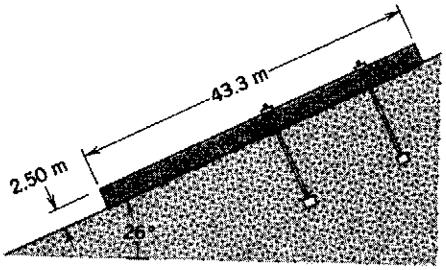
۴۸. می‌خواهیم تونلی به طول ۱۵۲m، ارتفاع ۷٫۱۸m، و عرض ۵٫۷۷m (با سقف تخت) در فاصلهٔ ۶۱٫۵m پایین‌تر از سطح زمین بسازیم (شکل ۴۵). سقف این تونل قرار است که روی ستونهای



شکل ۴۵. مسئلهٔ ۴۸

فولادی مربعی با سطح مقطع 962cm^2 تکیه کنید. چگالی مواد تشکیل‌دهندهٔ زمین $2{,}83\text{g/cm}^3$ است. (الف) حساب کنید که این ستونها باید چه وزنی را تحمل کنند. (ب) اگر بخواهیم ضریب ایمنی در برابر شکستگی برابر با ۲ باشد، به چه تعداد ستون نیاز داریم؟

۴۹. تخته‌سنگ مکعب مستطیل شکلی روی یک سطح شیبدار $26{,}0°$ قرارگرفته است (شکل ۴۶). ابعاد این تخته‌سنگ عبارت‌اند از $43{,}3\text{m}$ طول، $2{,}50\text{m}$ ضخامت و $12{,}2\text{m}$ عرض. چگالی سنگ $3{,}17\text{g/cm}^3$ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین تخته‌سنگ و سطح زیر آن $0{,}390$ است. (الف) مؤلفه وزن تخته‌سنگ در راستای سطح شیبدار چقدر است؟ (ب) نیروی اصطکاک ایستایی چقدر



شکل ۴۶. مسئلهٔ ۴۹

است؟ (ج) جوابهای قسمتهای (الف) و (ب) را مقایسه کنید تا ببینید که تخته‌سنگ بدجوری در معرض لغزش است. تنها همچسبی بین تخته‌سنگ و سطح شیبدار مانع لغزیدن می‌شود. می‌خواهیم تخته‌سنگ را با میخهایی که عمود بر سطح شیبدار در آن فرو می‌ورد "پابرجا" کنیم، طوری که بدون اتکا با به همچسبی نیز در تعادل پایدار باشد. اگر سطح مقطع هر کدام از پیچهای مخصوص سنگ $6{,}38\text{cm}^2$ واستقامت برشی آنها 362MN/m^2 باشد، دست‌کم به چند پیچ نیاز داریم؟ (پیچها سفت نمی‌شوند و بنابراین تأثیری بر نیروهای قائم نمی‌گذارند.)

۵۰. میله‌ای فلزی به طول L و سطح مقطع A را که فاصلهٔ اتمهایش در حالت تعادل x است و مدول یانگ برای آن E است در نظر بگیرید. وقتی نیروی کششی F به میله وارد می‌شود، طول میله به‌اندازهٔ ΔL زیاد می‌شود. برای محاسبهٔ ثابت نیروی اتمی (k)، عباراتی برای (الف) تعداد زنجیره‌های اتمی در هر سطح مقطع، (ب) تعداد اتمهای موجود در زنجیره‌ای به‌طول L، (ج) افزایش طول میکروسکوپی Δx بین اتمها و (د) نیروی کششی f بین اتمها، به‌دست بیاورید. (هـ) نیرو را به‌صورت $f = k\Delta x$ بنویسید و نشان بدهید که $k = Ex$ است. (و) مقدار k را برای یک فلز نوعی که برای آن $E = 1{,}2\text{GN/m}^2$ و $x = 0{,}16\text{nm}$ است، محاسبه کنید.

پیوست الف

سیستم بین‌المللی یکاها (SI)[1]

یکاهای اصلی SI

کمیت	یکا	نماد	تعریف
طول	متر	m	" ... طول مسیری که نور آن‌را در خلأ در $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه طی می‌کند." (۱۹۸۳)
جرم	کیلوگرم	kg	" ... این نمونه [استوانهٔ خاصی از جنس پلاتین-ایریدیم] از این پس به‌عنوان یکای جرم در نظر گرفته می‌شود." (۱۸۸۹)
زمان	ثانیه	s	" ... مدتی برابر با ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ دورهٔ تناوب تابش متناظر با گذار میان دو تراز فوق ریز حالت پایهٔ اتم سزیوم ۱۳۳." (۱۹۶۷)
جریان الکتریکی	آمپر	A	" ... جریان ثابتی که اگر در دو سیم راست به‌طول نامحدود و سطح مقطع دایره‌ای ناچیز که به‌فاصلهٔ یک متر موازی با یکدیگر در خلأ واقع شده‌اند برقرار باشد، نیرویی برابر با ۲×۱۰^{-۷} نیوتون به‌ازای هر متر از طول سیمها میان آنها ایجاد کند." (۱۹۴۶)
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K	" ... $\frac{۱}{۲۷۳٫۱۶}$ دمای مطلق نقطهٔ سه‌گانهٔ آب." (۱۹۶۷)
مقدار ماده	مول	mol	" ... مقدار مادهٔ موجود در هر سیستمی که تعداد اجزای بنیادی آن برابر با تعداد اتمهای موجود در ۰٫۰۱۲ کیلوگرم از کربن ۱۲ باشد." (۱۹۷۱)
شدت روشنایی	شمع	cd	" ... شدت روشنایی ناشی از تابش عمودی سطحی برابر با $\frac{۱}{۶۰۰۰۰۰}$ مترمربع از جسم سیاهی در دمای ذوب پلاتین و فشار ۱۰۱۳۲۵ نیوتون بر مترمربع." (۱۹۶۷)

۱) این تعریفها (در تاریخهای یاد شده) در "کنفرانس عمومی او[illegible] مقیاسها" [illegible] مجمع بین‌المللی [illegible] اختیار شده است. برگرفته از

"The International System of Units (SI)," National Bureau of Standards Special Publication 330, 1972 edition.

بعضی از یکاهای فرعی SI

کمیت	یکا	نماد	یکای معادل
سطح	مترمربع	m^2	
حجم	مترمکعب	m^3	
بسامد	هرتز	Hz	s^{-1}
چگالی (جرمی)	کیلوگرم بر مترمکعب	kg/m^3	
سرعت	متر بر ثانیه	m/s	
سرعت زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	rad/s	
شتاب	متر بر مجذور ثانیه	m/s^2	
شتاب زاویه‌ای	رادیان بر مجذور ثانیه	rad/s^2	
نیرو	نیوتون	N	$kg \cdot m/s^2$
فشار	پاسکال	Pa	N/m^2
کار، انرژی	ژول	J	$N \cdot m$
توان	وات	W	J/s
مقدار الکتریسیته	کولن	C	$A \cdot s$
اختلاف پتانسیل	ولت	V	$N \cdot m/C$
میدان الکتریکی	ولت بر متر	V/m	N/C
مقاومت الکتریکی	اهم	Ω	V/A
ظرفیت	فاراد	F	$A \cdot s/V$
شار مغناطیسی	وبر	Wb	$V \cdot s$
القا	هانری	H	$V \cdot s/A$
میدان مغناطیسی	تسلا	T	$Wb/m^2, N/A \cdot m$
آنتروپی	ژول بر کلوین	J/K	
ظرفیت گرمایی ویژه	ژول بر کیلوگرم کلوین	$J/(kg \cdot K)$	
رسانایی گرمایی	وات بر متر کلوین	$W/(m \cdot K)$	
شدت تابش	وات بر استرادیان	W/sr	

یکاهای مکمل SI

کمیت	یکا	نماد
زاویه	رادیان	rad
زاویهٔ فضایی	استرادیان	sr

پیوست ب

بعضی ثابتهای بنیادی فیزیک

ثابت	نماد	مقدار محاسباتی	بهترین مقدار (تا سال ۱۹۸۶)	
			مقدار[1]	عدم قطعیت[2]
سرعت نور در خلأ	c	۳٫۰۰ × $۱۰^{۸}$m/s	۲٫۹۹۷۹۲۴۵۸	تقریباً صفر
بار بنیادی	e	۱٫۶۰ × $۱۰^{-۱۹}$C	۱٫۶۰۲۱۷۷۳۳	۰٫۳۰
جرم سکون الکترون	m_e	۹٫۱۱ × $۱۰^{-۳۱}$kg	۹٫۱۰۹۳۸۹۷	۰٫۵۹
ثابت گذردهی	ε_0	۸٫۸۵ × $۱۰^{-۱۲}$F/m	۸٫۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲	تقریباً صفر
ثابت تراوایی	μ_0	۱٫۲۶ × $۱۰^{-۶}$H/m	۱٫۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳	تقریباً صفر
جرم سکون الکترون[3]	m_e	۵٫۴۹ × $۱۰^{-۴}$u	۵٫۴۸۵۷۹۹۰۲	۰٫۰۲۳
جرم سکون نوترون[3]	m_n	۱٫۰۰۸۷u	۱٫۰۰۸۶۶۴۹۰۴	۰٫۰۱۴
جرم سکون اتم هیدروژن[3]	$m(^{1}H)$	۱٫۰۰۷۸u	۱٫۰۰۷۸۲۵۰۳۵	۰٫۰۱۱
جرم سکون اتم دوتریم[3]	$m(^{2}H)$	۲٫۰۱۴۱u	۲٫۰۱۴۱۰۱۷۷۹	۰٫۰۱۲
جرم سکون اتم هلیم[3]	$m(^{4}He)$	۴٫۰۰۲۶u	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۴	۰٫۰۱۲
نسبت بار به جرم الکترون	e/m_e	۱٫۷۶ × $۱۰^{۱۱}$C/kg	۱٫۷۵۸۸۱۹۶۲	۰٫۳۰
جرم سکون پروتون	m_p	۱٫۶۷ × $۱۰^{-۲۷}$kg	۱٫۶۷۲۶۲۳۱	۰٫۵۹
نسبت جرم پروتون به جرم الکترون	m_p/m_e	۱۸۴۰	۱۸۳۶٫۱۵۲۷۰۱	۰٫۰۲۰
جرم سکون نوترون	m_n	۱٫۶۷ × $۱۰^{-۲۷}$kg	۱٫۶۷۴۹۲۸۶	۰٫۵۹
جرم سکون موئون	m_μ	۱٫۸۸ × $۱۰^{-۲۸}$kg	۱٫۸۸۳۵۳۲۷	۰٫۶۱
ثابت پلانک	h	۶٫۶۳ × $۱۰^{-۳۴}$J · s	۶٫۶۲۶۰۷۵۵	۰٫۶۰
طول موج کامپتونی الکترون	λ_e	۲٫۴۳ × $۱۰^{-۱۲}$m	۲٫۴۲۶۳۱۰۵۸	۰٫۰۸۹
ثابت عمومی گازها	R	۸٫۳۱J/mol.K	۸٫۳۱۴۵۱۰	۸٫۴
ثابت آووگادرو	N_A	۶٫۰۲ × $۱۰^{۲۳}$mol$^{-۱}$	۶٫۰۲۲۱۳۶۷	۰٫۵۹

ثابت	نماد	مقدار محاسباتی	بهترین مقدار (تا سال ۱۹۸۶)	
			مقدار	عدم قطعیت
ثابت بولتزمن	k	۱٫۳۸ × ۱۰$^{-۲۳}$J/K	۱٫۳۸۰۶۵۱۳	۱٫۸
حجم مولی گاز ایده‌آل در شرایط متعارفی	V_m	۲٫۲۴ × ۱۰$^{-۲}$m^{۳}/mol	۲٫۲۴۱۳۹۹۲	۱٫۷
ثابت فاراده	F	۹٫۶۵ × ۱۰^{۴}C/mol	۹٫۶۴۸۵۳۰۹	۰٫۳۰
ثابت استفان-بولتزمن	σ	۵٫۶۷ × ۱۰$^{-۸}$W/m^{۲}.K^{۴}	۵٫۶۷۰۳۹۹	۶٫۸
ثابت ریدبرگ	R	۱٫۱۰ × ۱۰^{۷}m$^{-۱}$	۱٫۰۹۷۳۷۳۱۵۷۱	۰٫۰۰۰۳۶
ثابت گرانش	G	۶٫۶۷ × ۱۰$^{-۱۱}$m^{۳}/s^{۲}.kg	۶٫۶۷۲۵۹	۱۲۸
شعاع بور	a_0	۵٫۲۹ × ۱۰$^{-۱۱}$m	۵٫۲۹۱۷۷۲۴۹	۰٫۰۴۵
گشتاور مغناطیسی الکترون	μ_e	۹٫۲۸ × ۱۰$^{-۲۴}$J/T	۹٫۲۸۴۷۷۰۰	۰٫۳۴
گشتاور مغناطیسی پروتون	μ_p	۱٫۴۱ × ۱۰$^{-۲۶}$J/T	۱٫۴۱۰۶۰۷۶۱	۰٫۳۴
مگنتون بور	μ_B	۹٫۲۷ × ۱۰$^{-۲۴}$J/T	۹٫۲۷۴۰۱۵۴	۰٫۳۴
مگنتون هسته	μ_N	۵٫۰۵ × ۱۰$^{-۲۷}$J/T	۵٫۰۵۰۷۸۶۵	۰٫۳۴
ثابت ساختار ریز	α	۱/۱۳۷	۱/۱۳۷٫۰۳۵۹۸۹۵	۰٫۰۴۵
کوانتوم شار مغناطیسی	Φ_0	۲٫۰۷ × ۱۰$^{-۱۵}$Wb	۲٫۰۶۷۸۳۴۶۱	۰٫۳۰
مقاومت هال کوانتیده	R_H	۲۵۸۰۰Ω	۲۵۸۱۲٫۸۰۵۶	۰٫۰۴۵

۱) با همان یکا و همان توان دهِ مقدار محاسباتی.

۲) قسمت در میلیون.

۳) جرم برحسب یکای اتمی جرم، ۱u = ۱٫۶۶۰۵۴۰۲ × ۱۰$^{-۲۷}$kg.

۴) شرایط متعارفی (دما و فشار استاندارد)=دمای صفر درجهٔ سلیسیوس و فشار ۱٫۰ بار.

پیوست ج

اطلاعات نجومی

خورشید و زمین و ماه

ویژگی	خورشید [1]	زمین	ماه
جرم (kg)	$۱٫۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$	$۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$	$۷٫۳۶ \times ۱۰^{۲۲}$
شعاع متوسط (m)	$۶٫۹۶ \times ۱۰^{۸}$	$۶٫۳۷ \times ۱۰^{۶}$	$۱٫۷۴ \times ۱۰^{۶}$
چگالی متوسط (kg/m^3)	۱۴۱۰	۵۵۲۰	۳۳۴۰
شتاب ثقل در سطح (m/s^2)	۲۷۴	۹٫۸۱	۱٫۶۷
سرعت گریز (km/s)	۶۱۸	۱۱٫۲	۲٫۳۸
دورهٔ تناوب[2] چرخش (d)	۲۶ تا ۳۷[3]	۰٫۹۹۷	۲۷٫۳
شعاع متوسط مدار (km)	$۲٫۶ \times ۱۰^{۱۷}$ [4]	$۱٫۵۰ \times ۱۰^{۸}$ [5]	$۳٫۸۲ \times ۱۰^{۵}$ [6]
دورهٔ تناوب مداری	$۲٫۴ \times ۱۰^{۸}$ سال[4]	۱٫۰۰ سال[5]	۲۷٫۳ روز[6]

۱) توان تابشی خورشید $۳٫۹۰ \times ۱۰^{۲۶} W$ است؛ با فرض تابش عمودی، انرژی خورشید با آهنگ $۱۳۸۰ W/m^2$ به بالای جو زمین می‌رسد.

۲) نسبت به ستاره‌های دور.

۳) خورشید ــ که کره‌ای از گاز است ــ مثل جسم صلب نمی‌چرخد؛ دورهٔ چرخش آن در استوایش ۲۶ روز و در قطبهایش ۳۷ روز است.

۴) حول مرکز کهکشان.

۵) حول خورشید.

۶) حول زمین.

خصوصیات سیاره‌های منظومهٔ شمسی

	عطارد	زهره	زمین	مریخ	مشتری	زحل	اورانوس	نپتون	پلوتون
فاصلهٔ متوسط از خورشید (10^6km)	۵۷٫۹	۱۰۸	۱۵۰	۲۲۸	۷۷۸	۱۴۳۰	۲۸۷۰	۴۵۰۰	۵۹۰۰
دورهٔ گردش به‌دور خورشید (سال)	۰٫۲۴۱	۰٫۶۱۵	۱٫۰۰	۱٫۸۸	۱۱٫۹	۲۹٫۵	۸۴٫۰	۱۶۵	۲۴۸
دورهٔ چرخش[1] (روز)	۵۸٫۷	۲۴۳	۰٫۹۹۷	۱٫۰۳	۰٫۴۰۹	۰٫۴۲۶	۰٫۴۵۱[2]	۰٫۶۵۸	۶٫۳۹
سرعت مداری (km/s)	۴۷٫۹	۳۵٫۰	۲۹٫۸	۲۴٫۱	۱۳٫۱	۹٫۶۴	۶٫۸۱	۵٫۴۳	۴٫۷۴
تمایل محور به مدار	۰٫۰°	۲٫۶°	۲۳٫۵°	۲۴٫۰°	۳٫۰۸°	۲۶٫۷°	۸۲٫۱°	۲۸٫۸°	۶۵°
تمایل مدار به مدار زمین	۷٫۰۰°	۳٫۳۹°	—	۱٫۸۵°	۱٫۳۰°	۲٫۴۹°	۰٫۷۷°	۱٫۷۷°	۱۷٫۲°
خروج از مرکز مدار	۰٫۲۰۶	۰٫۰۰۶۸	۰٫۰۱۶۷	۰٫۰۹۳۴	۰٫۰۴۸۵	۰٫۰۵۵۶	۰٫۰۴۷۲	۰٫۰۰۸۶	۰٫۲۵۰
قطر استوایی (km)	۴۸۸۰	۱۲۱۰۰	۱۲۸۰۰	۶۷۹۰	۱۴۳۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۵۱۸۰۰	۴۹۵۰۰	۳۴۰۰
جرم (نسبت به زمین = ۱)	۰٫۰۵۵۸	۰٫۸۱۵	۱٫۰۰۰	۰٫۱۰۷	۳۱۸	۹۵٫۱	۱۴٫۵	۱۷٫۲	۰٫۰۰۲
چگالی متوسط (g/cm^3)	۵٫۶۰	۵٫۲۰	۵٫۵۲	۳٫۹۵	۱٫۳۱	۰٫۷۰۴	۱٫۲۱	۱٫۶۷	۰٫۵(?)
شتاب ثقل در سطح[3] (m/s^2)	۳٫۷۸	۸٫۶۰	۹٫۷۸	۳٫۷۲	۲۲٫۹	۹٫۰۵	۷٫۷۷	۱۱٫۰	۰٫۰۳
سرعت گریز (km/s)	۴٫۳	۱۰٫۳	۱۱٫۲	۵٫۰	۵۹٫۵	۳۵٫۶	۲۱٫۲	۲۳٫۶	۱٫۳
تعداد قمرهای شناخته شده	۰	۰	۱	۲	۱۶+حلقه‌ها	۱۹+حلقه‌ها	۱۵+حلقه‌ها	۸+حلقه‌ها	۱

۱) نسبت به ستاره‌های دور.

۲) جهت چرخش در خلاف جهت گردش مداری است.

۳) در استوای سیاره.

پیوست د

خواص عناصر

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^3) در ۲۰°C	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g°C) در ۲۵°C
آکتینیم	Actinum	Ac	۸۹	(۲۲۷)	—	۱۰۵۰	۳۲۰۰	۰٫۰۹۲
آلومینیم	Aluminium	Al	۱۳	۲۶٫۹۸۱۵	۲٫۶۹۹	۶۶۰	۲۴۶۷	۰٫۹۰۰
آمریکیم	Americium	Am	۹۵	(۲۴۳)	۱۳٫۷	۹۹۴	۲۶۰۷	—
آنتیموان	Antimony	Sb	۵۱	۱۲۱٫۷۵	۶٫۶۹	۶۳۰٫۵	۱۷۵۰	۰٫۲۰۵
آرگون	Argon	Ar	۱۸	۳۹٫۹۴۸	$۱٫۶۶۲۶ \times ۱۰^{-۳}$	−۱۸۹٫۲	−۱۸۵٫۷	۰٫۵۲۳
آرسنیک	Arsenic	As	۳۳	۷۴٫۹۲۱۶	۵٫۷۲	۸۱۷(۲۸ جو)	۶۱۳	۰٫۳۳۱
استاتین	Astatine	At	۸۵	(۲۱۰)	—	۳۰۲	۳۳۷	—
باریم	Barium	Ba	۵۶	۱۳۷٫۳۳	۳٫۵	۷۲۵	۱۶۴۰	۰٫۲۰۵
برکلیم	Berkelium	Bk	۹۷	(۲۴۷)	—	—	—	—
بریلیم	Beryllium	Be	۴	۹٫۰۱۲۲	۱٫۸۴۸	۱۲٫۷۸	۲۹۷۰	۱٫۸۳
بیسموت	Bismuth	Bi	۸۳	۲۰۸٫۹۸۰	۹٫۷۵	۲۷۱٫۳	۱۵۶۰	۰٫۱۲۲
بور	Boron	B	۵	۱۰٫۸۱۱	۲٫۳۴	۲۰٫۷۹	۲۵۵۰	۱٫۱۱
برم	Bromine	Br	۳۵	۷۹٫۹۰۹	۳۱۲ (مایع)	−۷٫۲	۵۸	۰٫۲۹۳
کادمیم	Cadmium	Cd	۴۸	۱۱۲٫۴۱	۸٫۶۵	۳۲۰٫۹	۷۶۵	۰٫۲۲۶
کلسیم	Calcium	Ca	۲۰	۴۰٫۰۸	۱٫۵۵	۸۳۹	۱۴۸۴	۰٫۶۲۴
کالیفرنیم	Californium	Cf	۹۸	(۲۵۱)	—	—	—	—
کربن	Carbon	C	۶	۱۲٫۰۱۱	۲٫۲۵	۳۵۵۰	—	۰٫۶۹۱
سریم	Cerium	Ce	۵۸	۱۴۰٫۱۲	۶٫۷۶۸	۷۹۸	۳۴۴۳	۰٫۱۸۸
سزیم	Cesium	Cs	۵۵	۱۳۲٫۹۰۵	۱٫۸۷۳	۲۸٫۴۰	۶٫۶۹	۰٫۲۴۳
کلر	Chlorine	Cl	۱۷	۳۵٫۴۵۳	$۳٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۳}$(۰°C)	−۱۰۱	−۳۴٫۶	۰٫۴۸۶
کرم	Chromium	Cr	۲۴	۵۱٫۹۹۶	۷٫۱۹	۱۸۵۷	۲۶۷۲	۰٫۴۴۸
کبالت	Cobalt	Co	۲۷	۵۸٫۹۳۳۲	۸٫۸۵	۱۴۹۵	۲۸۷۰	۰٫۴۲۳
مس	Copper	Cu	۲۹	۶۳٫۵۴	۸٫۹۶	۱۰۸۳٫۴	۲۵۶۷	۰٫۳۸۵

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^{۳}) در ۲۰(°C)	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g° · C) در ۲۵(°C)
کوریم	Curium	Cm	۹۶	(۲۴۷)	—	۱۳۴۰	—	—
دیسپروزیم	Dysprosium	Dy	۶۶	۱۶۲٫۵۰	۸٫۵۵	۱۴۱۲	۲۵۶۷	۰٫۱۷۲
اینشتینیم	Einsteinium	Es	۹۹	(۲۵۲)	—	—	—	—
اربیم	Erbium	Er	۶۸	۱۶۷٫۲۶	۹٫۰۷	۱۵۲۹	۲۸۶۸	۰٫۱۶۷
اروپیم	Europium	Eu	۶۳	۱۵۱٫۹۶	۵٫۲۴۵	۸۲۲	۱۵۲۷	۰٫۱۶۳
فرمیم	Fermium	Fm	۱۰۰	(۲۵۷)	—	—	—	—
فلوئور	Fluorine	F	۹	۱۸٫۹۹۸۴	۱٫۶۹۶ × ۱۰$^{-۳}$(۰°C)	−۲۱۹٫۶	−۱۸۸٫۲	۰٫۷۵۳
فرانسیم	Francium	Fr	۸۷	(۲۲۳)	—	(۲۷)	(۶۷۷)	—
گادولینیم	Gadolinium	Gd	۶۴	۱۵۷٫۲۵	۷٫۹۰	۱۳۱۳	۳۲۷۳	۰٫۲۳۴
گالیم	Gallium	Ga	۳۱	۶۹٫۷۲	۵٫۹۰۷	۲۹٫۷۸	۲۴۰۳	۰٫۳۷۷
ژرمانیم	Germanium	Ge	۳۲	۷۲٫۶۱	۵٫۳۲۳	۹۳۷٫۴	۲۸۳۰	۰٫۳۲۲
طلا	Gold	Au	۷۹	۱۹۶٫۹۶۷	۱۹٫۳۲	۱۰۶۴٫۴۳	۲۸۰۸	۰٫۱۳۱
هافنیم	Hafnium	Hf	۷۲	۱۷۸٫۴۹	۱۳٫۳۱	۲۲۲۷	۴۶۰۲	۰٫۱۴۴
هلیم	Helium	He	۲	۴٫۰۰۲۶	۰٫۱۶۶۴ × ۱۰$^{-۳}$	−۲۷۲٫۲	−۲۶۸٫۹	۵٫۲۳
هولمیم	Holmium	Ho	۶۷	۱۶۴٫۹۳۰	۸٫۷۹	۱۴۷۴	۲۷۰۰	۰٫۱۶۵
هیدروژن	Hydrogen	H	۱	۱٫۰۰۷۹۷	۰٫۰۸۳۷۵ × ۱۰$^{-۳}$	−۲۵۹٫۳۴	−۲۵۲٫۸۷	۱۴٫۴
ایندیم	Indium	In	۴۹	۱۱۴٫۸۲	۷٫۳۱	۱۵۶٫۶	۲۰۸۰	۰٫۲۳۳
ید	Iodine	I	۵۳	۱۲۶٫۹۰۴۴	۴٫۹۴	۱۱۳٫۵	۱۸۴٫۳۵	۰٫۲۱۸
ایریدیم	Iridium	Ir	۷۷	۱۹۲٫۲	۲۲٫۵	۲۴۱۰	۴۱۳۰	۰٫۱۳۰
آهن	Iron	Fe	۲۶	۵۵٫۸۴۷	۷٫۸۷	۱۵۳۵	۲۷۵۰	۰٫۴۴۷
کریپتون	Krypton	Kr	۳۶	۸۳٫۸۰	۳٫۴۸۸ × ۱۰$^{-۳}$	−۱۵۶٫۶	−۱۵۲٫۳	۰٫۲۴۷
لانتان	Lanthanum	La	۵۷	۱۳۸٫۹۱	۶٫۱۴۵	۹۱۸	۳۴۶۴	۰٫۱۹۵
لورنسیم	Lawrencium	Lr	۱۰۳	(۲۶۰)	—	—	—	—
سرب	Lead	Pb	۸۲	۲۰۷٫۱۹	۱۱٫۳۶	۳۲۷٫۵۰	۱۷۴۰	۰٫۱۲۹
لیتیم	Lithium	Li	۳	۶٫۹۳۹	۰٫۵۳۴	۱۸۰٫۵۴	۱۳۴۲	۳٫۵۸
لوتتیم	Lutetium	Lu	۷۱	۱۷۴٫۹۷	۹٫۸۴	۱۶۶۳	۳۴۰۲	۰٫۱۵۵
منیزیم	Magnesium	Mg	۱۲	۲۴٫۳۰۵	۱٫۷۴	۶۴۹	۱۰۹۰	۱٫۰۳
منگنز	Manganese	Mn	۲۵	۵۴٫۹۳۸۰	۷٫۴۳	۱۲۴۴	۱۹۶۲	۰٫۴۸۱
مندلویم	Mendelevium	Md	۱۰۱	(۲۵۸)	—	—	—	—
جیوه	Mercury	Hg	۸۰	۲۰۰٫۵۹	۱۳٫۵۵	−۳۸٫۸۷	۳۵۷	۰٫۱۳۸
مولیبدن	Molybdenum	Mo	۴۲	۹۵٫۹۴	۱۰٫۲۲	۲۶۱۷	۴۶۱۲	۰٫۲۵۱
نئودیمیم	Neodymium	Nd	۶۰	۱۴۴٫۲۴	۷٫۰۰	۱۰۲۱	۳۰۷۴	۰٫۱۸۸
نئون	Neon	Ne	۱۰	۲۰٫۱۸۰	۰٫۸۳۸۷ × ۱۰$^{-۳}$	−۲۴۸٫۶۷	−۲۴۶٫۰	۱٫۰۳
نپتونیم	Neptunium	Np	۹۳	(۲۳۷)	۲۰٫۲۵	۶۴۰	۳۹۰۲	۱٫۲۶
نیکل	Nickel	Ni	۲۸	۵۸٫۶۹	۸٫۹۰۲	۱۴۵۳	۲۷۳۲	۰٫۴۴۴
نئوبیم	Niobium	Nb	۴۱	۹۲٫۹۰۶	۸٫۵۷	۲۴۶۸	۴۷۴۲	۰٫۲۶۴
نیتروژن	Nitrogen	N	۷	۱۴٫۰۰۶۷	۱٫۱۶۴۹ × ۱۰$^{-۳}$	−۲۱۰	−۱۹۵٫۸	۱٫۰۳
نوبلیم	Nobelium	No	۱۰۲	(۲۵۹)	—	—	—	—

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^3) در ۲۰°C	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g°C) در ۲۵°C
اسمیم	Osmium	Os	۷۶	۱۹۰٫۲	۲۲٫۵۷	۳۰۴۵	۵۰۲۷	۰٫۱۳۰
اکسیژن	Oxygen	O	۸	۱۵٫۹۹۹۴	۱٫۳۳۱۸ × ۱۰$^{-۳}$	−۲۱۸٫۴	−۱۸۳٫۰	۰٫۹۱۳
پالادیم	Palladium	Pb	۴۶	۱۰۶٫۴	۱۲٫۰۲	۱۵۵۴	۳۱۴۰	۰٫۲۴۳
فسفر	Phosphorus	P	۱۵	۳۰٫۹۷۳۸	۱٫۸۳	۴۴٫۲۵α	۲۸۰	۰٫۷۴۱
پلاتین	Platinum	Pt	۷۸	۱۹۵٫۰۹	۲۱٫۴۵	۱۷۷۲	۳۸۲۷	۰٫۱۳۴
پلوتونیم	Plutonium	Pu	۹۴	(۲۴۴)	۱۹٫۸۴	۶۴۱	۳۲۳۲	۰٫۱۳۰
پولونیم	Polonium	Po	۸۴	(۲۰۹)	۹٫۲۴	۲۵۴	۹۶۲	—
پتاسیم	Potassium	K	۱۹	۳۹٫۰۹۸	۰٫۸۶	۶۳٫۲۵	۷۶۰	۰٫۷۵۸
پرازئودیمیم	Praseodymium	Pr	۵۹	۱۴۰٫۹۰۷	۶٫۷۷۳	۹۳۱	۳۵۲۰	۰٫۱۹۷
پرومتیم	Promethium	Pm	۶۱	(۱۴۵)	۷٫۲۶۴	۱۰۴۲	(۳۰۰۰)	—
پروتاکتینیم	Protactinium	Pa	۹۱	(۲۳۱)	—	۱۶۰۰	—	—
رادیم	Radium	Ra	۸۸	(۲۲۶)	۵٫۰	۷۰۰	۱۱۴۰	—
رادون	Radon	Rn	۸۶	(۲۲۲)	۹٫۹۶ × ۱۰$^{-۳}$(۰°C)	−۷۱	−۶۱٫۸	۰٫۰۹۲
رنیم	Rhenium	Re	۷۵	۱۸۶٫۲	۲۱٫۰۴	۳۱۸۰	۵۶۲۷	۰٫۱۳۴
رودیم	Rhodium	Rh	۴۵	۱۰۲٫۹۰۵	۱۲٫۴۴	۱۹۶۵	۳۷۲۷	۰٫۲۴۳
روبیدیم	Rubidium	Rb	۳۷	۸۵٫۴۷	۱٫۵۳	۳۸٫۸۹	۶۸۶	۰٫۳۶۴
روتنیم	Ruthenium	Ru	۴۴	۱۰۱٫۱۰۷	۱۲٫۲	۲۳۱۰	۳۹۰۰	۰٫۲۳۹
ساماریم	Samarium	Sm	۶۲	۱۵۰٫۳۵	۷٫۴۹	۱۰۷۴	۱۷۹۴	۰٫۱۹۷
اسکاندیم	Scandium	Sc	۲۱	۴۴٫۹۵۶	۲٫۹۹	۱۵۴۱	۲۸۳۶	۰٫۵۶۹
سلنیم	Selenium	Se	۳۴	۷۸٫۹۶	۴٫۷۹	۲۱۷	۶۸۵	۰٫۳۱۸
سیلیسیوم	Silicon	Si	۱۴	۲۸٫۰۸۶	۲٫۳۳	۱۴۱۰	۲۳۵۵	۰٫۷۱۲
نقره	Silver	Ag	۴۷	۱۰۷٫۶۸	۱۰٫۴۹	۹۶۱٫۹	۲۲۱۲	۰٫۲۳۴
سدیم	Sodium	Na	۱۱	۲۲٫۹۸۹۸	۰٫۹۷۱۲	۹۷٫۸۱	۸۸۲٫۹	۱٫۲۳
استرونسیم	Strontium	Sr	۳۸	۸۷٫۶۲	۲٫۵۴	۷۶۹	۱۳۸۴	۰٫۷۳۷
گوگرد	Sulfur	S	۱۶	۳۲٫۰۶۶	۲٫۰۷	۱۱۲٫۸	۴۴۴٫۶	۰٫۷۰۷
تانتال	Tantalum	Ta	۷۳	۱۸۰٫۹۴۸	۱۶٫۶	۲۹۹۶	۵۴۲۵	۰٫۱۳۸
تکنسیم	Technetium	Tc	۴۳	(۹۸)	۱۱٫۴۶	۲۱۷۲	۴۸۷۷	۰٫۲۰۹
تلور	Tellurium	Te	۵۲	۱۲۷٫۶۰	۶٫۲۴	۴۴۹٫۵	۹۹۰	۰٫۲۰۱
تربیم	Terbium	Tb	۶۵	۱۵۸٫۹۲۴	۸٫۲۵	۱۳۵۷	۳۲۳۰	۰٫۱۸۰
تالیم	Thallium	Tl	۸۱	۲۰۴٫۳۸	۱۱٫۸۵	۳۰۴	۱۴۵۷	۰٫۱۳۰
توریم	Thorium	Th	۹۰	(۲۳۲)	۱۱٫۷۲	۱۷۵۰	(۳۸۵۰)	۰٫۱۱۷
تولیم	Thulium	Tm	۶۹	۱۶۸٫۹۳۴	۹٫۳۱	۱۵۴۵	۱۹۵۰	۰٫۱۵۹
قلع	Tin	Sn	۵۰	۱۱۸٫۷۱	۷٫۳۱	۲۳۱٫۹۷	۲۲۷۰	۰٫۲۲۶
تیتان	Titanium	Ti	۲۲	۴۷۸۸	۴٫۵۴	۱۶۶۰	۳۲۸۷	۰٫۵۲۳
تنگستن	Tungsten	W	۷۴	۱۸۳٫۸۵	۱۹٫۳	۳۴۱۰	۵۶۶۰	۰٫۱۳۴
اورانیم	Uranium	U	۹۲	(۲۳۸)	۱۹٫۰۷	۱۱۳۲	۳۸۱۸	۰٫۱۱۷
وانادیم	Vanadium	V	۲۳	۵۰٫۹۴۲	۶٫۱	۱۸۹۰	۳۳۸۰	۰٫۴۹۰
زنون	Xenon	Xe	۵۴	۱۳۱٫۳۰	۵٫۴۹۵ × ۱۰$^{-۳}$	−۱۱۱٫۷۹	−۱۰۸	۰٫۱۵۹

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^3) در $20°C$	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g°C) در $25°C$
ایتربیم	Ytterbium	Yb	۷۰	۱۷۳٫۰۴	۶٫۹۶۶	۸۱۹	۱۱۹۶	۰٫۱۵۵
ایتریم	Yttrium	Y	۳۹	۸۸٫۹۰۵	۴٫۴۶۹	۱۵۵۲	۵۳۳۸	۰٫۲۹۷
روی	Zinc	Zn	۳۰	۶۵٫۳۷	۷٫۱۳۳	۴۱۹٫۵۸	۹۰۷	۰٫۳۸۹
زیرکونیم	Zirconium	Zr	۴۰	۹۱٫۲۲	۶٫۵۰۶	۱۸۵۲	۴۳۷۷	۰٫۲۷۶

اعداد داخل پرانتز در ستون جرم مولی عبارت‌اند از اعداد جرمی طولانی عمرترین ایزوتوپهای عناصر رادیواکتیو.

همهٔ خواص فیزیکی مربوط به فشار یک اتمسفرند، مگر طور دیگری مشخص شده باشد.
اطلاعات مربوط به گازها فقط برای گازهایی معتبرند که در حالت مولکولی عادی خودشان —مثل H_2، He، O_2، Ne و غیره— باشند. مقادیر گرمای ویژهٔ گازها در فشار ثابت محاسبه شده‌اند.

منبع:

Handbook of Chemistry and Physics, 71st edition (CRC Press, 1990).

پیوست ه

جدول تناوبی عناصر

	فلزات قلیایی (شامل هیدروژن)																	گازهای بی اثر
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	57-71	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	89-103	104 Rf*	105 Ha*	106 **	107 **	108 **	109 **		...							

سری لانتانید	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
سری اکتینید	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

* نام این عناصر (رادرفوردیم و هاهنیم)، به‌علت ادعاهای متناقضی که در مورد کشف آنها در میان است، هنوز پذیرش عام نیافته است. گروهی در روسیه نامهای کورچاتوویم و نیلسبوریم را پیشنهاد کرده‌اند.

** کشف این عناصر گزارش شده ولی فعلاً هیچ اسمی برای آنها اختیار نشده است.

پیوست و

ذرات بنیادی

۱.ذرات بسیط

لپتون‌ها

ذره	نماد	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم سکون (MeV)	عمر متوسط (s)	محصولات نوعی واپاشی
الکترون	e^-	e^+	-۱	۱/۲	۰٫۵۱۱	∞	
نوترینوی الکترون	ν_e	$\overline{\nu}_e$	۰	۱/۲	$<$ ۰٫۰۰۰۰۲	∞	
موئون	μ^-	μ^+	-۱	۱/۲	۱۰۵٫۷	۲٫۲ × ۱—$^{-۶}$	$e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$
نوترینوی موئون	ν_μ	$\overline{\nu}_\mu$	۰	۱/۲	$<$ ۰٫۳	∞	
تاوء	τ^-	τ^+	-۱	۱/۲	۱۷۸۴	۳٫۰ × ۱۰$^{-۱۳}$	$\mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau$
نوترینوی تاوء	ν_τ	$\overline{\nu}_\tau$	۰	۱/۲	$<$ ۴۰	∞	

کوارک‌ها

طعم	نماد	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم سکون[1] (MeV)	خواص دیگر
بالا	u	$\overline{u}$	+۲/۳	۱/۲	۳۰۰	$C = S = T = B =$ ۰
پایین	d	$\overline{d}$	−۱/۳	۱/۲	۳۰۰	$C = S = T = B =$ ۰
افسون	c	$\overline{c}$	+۲/۳	۱/۲	۱۵۰۰	افسون$(C) = +$
شگفتی	s	$\overline{s}$	−۱/۳	۱/۲	۵۰۰	شگفتی$(S) = -$۱
سر[2]	t	$\overline{t}$	+۲/۳	۱/۲	$>$ ۴۰,۰۰۰	سر بورن$(T) = +$۱
ته	b	$\overline{b}$	−۱/۳	۱/۲	۴۷۰۰	ته بورن$(B) = -$۱

ذرات میدان

ذره	نماد	برهم‌کنش	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم‌سکون (GeV)
گراویتون[2]		گرانش	۰	۲	۰
بوزون ضعیف	W^+,W^-	ضعیف	±۱	۱	۸۰٫۶
بوزون ضعیف	Z°	ضعیف	۰	۱	۹۱٫۲
فوتون	γ	الکترومغناطیسی	۰	۱	۰
گلوئون	g	قوی (رنگ)	۰	۱	۰

Ramin.samad@yahoo.com

۲. بعضی ذرات مرکب

باریون‌ها

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم‌سکون (MeV)	عمرمتوسط (s)	واپاشی نوعی
پروتون	p	uud	$\overline{\mathrm{p}}$	+۱	۱/۲	۹۳۸	$> ۱۰^{۴۰}$	$\pi^\circ + e^+ (?)$
نوترون	n	udd	$\overline{\mathrm{n}}$	۰	۱/۲	۹۴۰	۸۸۹	$p + e^- + \overline{\nu}_e$
لامبادا	Λ°	uds	$\overline{\Lambda^\circ}$	۰	۱/۲	۱۱۱۶	$۲٫۶ \times ۱۰^{-۱۰}$	$p + \pi^-$
اومگا	Ω^-	sss	$\overline{\Omega^-}$	−۱	۳/۲	۱۶۷۳	$۸٫۲ \times ۱۰^{-۱۱}$	$\Lambda^\circ + K^-$
دلتا	Δ^{++}	uuu	$\overline{\Delta^{++}}$	+۲	۳/۲	۱۲۳۲	$۵٫۷ \times ۱۰^{-۲۴}$	$p + \pi^+$
لامبادا	Λ_c^+	udc	$\overline{\Lambda_c^+}$	+۱	۱/۲	۲۲۸۵	$۱٫۹ \times ۱۰^{-۱۳}$	$\Lambda^\circ + \pi^+$

مزون‌ها

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم‌سکون (MeV)	عمر متوسط (s)	واپاشی نوعی
پیون	π^+	$u\overline{d}$	π^-	+۱	۰	۱۴۰	$۲٫۶ \times ۱۰^{-۸}$	$\mu^+ + \nu_\mu$
پیون	π°	$u\overline{u} + d\overline{d}$	π°	۰	۰	۱۳۵	$۸٫۴ \times ۱۰^{-۱۷}$	$\gamma + \gamma$
کائون	K^+	$u\overline{s}$	K^-	+۱	۰	۴۹۴	$۱٫۲ \times ۱۰^{-۸}$	$\mu^+ + \nu_\mu$
کائون	K°	$d\overline{s}$	$\overline{K^\circ}$	۰	۰	۴۹۸	$۰٫۹ \times ۱۰^{-۱۰}$	$\pi^+ + \pi^-$
رو	ρ^+	$u\overline{d}$	ρ^-	+۱	۱	۷۶۸	$۴٫۵ \times ۱۰^{-۲۴}$	$\pi^+ + \pi^-$
مزون D	D^+	$c\overline{d}$	D^-	+۱	۰	۱۸۶۹	$۱٫۱ \times ۱۰^{-۱۲}$	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
پی‌سای	ψ	$c\overline{c}$	ψ	۰	−۱	۳۰۹۷	$۱٫۰ \times ۱۰^{-۲۰}$	$e^+ + e^-$
مزون B	B^+	$u\overline{b}$	B^-	+۱	۰	۵۲۷۸	$۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۲}$	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
اوپسیلون	Υ	$b\overline{b}$	Υ	۰	۱	۹۴۶۰	$۱٫۳ \times ۱۰^{-۲۰}$	$e^+ + e^-$

۱) چون تا به حال کوارک آزاد مشاهده نشده، اندازه‌گیری جرم سکون کوارکها در حالت آزاد هم ممکن نبوده است. جرمهای سکونی که در این جدول آمده‌اند، جرمهای مؤثرند و مربوط به کوارکهایی هستند که ذرات مرکب را می‌سازند و به آنها مقیدند.

۲) انتظار می‌رود چنین ذراتی وجود داشته باشند ولی هنوز مشاهده نشده‌اند.

منبع:

"Review of Particle Properties" *Plysics Letters B*, vol. 239 (April 1990).

Ramin.samad@yahoo.com

پیوست ز

ضرایب تبدیل

ضرایب تبدیل را می‌توان مستقیماً از جدولها خواند. به‌عنوان مثال، ۱ درجه = $۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$ دور، پس $۱۶٫۷° = ۱۶٫۷ \times ۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$ دور. کمیتهای SI با حروف سیاه نشان داده شده‌اند و بخشی از آنها از کتاب زیر گرفته شده است.

G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*, Prenice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

زاویه مسطحه

	°	′	″	**rad**	rev
یک درجه =	۱	۶۰	۳۶۰۰	$۱٫۷۴۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$
یک دقیقه =	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	$۲٫۹۰۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۶۳۰ \times ۱۰^{-۵}$
یک ثانیه =	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۴٫۸۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۷۱۶ \times ۱۰^{-۷}$
یک رادیان =	۵۷٫۳۰	۳۴۳۸	$۲٫۰۶۳ \times ۱۰^{۵}$	۱	۰٫۱۵۹۲
یک دور =	۳۶۰	$۲٫۱۶ \times ۱۰^{۴}$	$۱٫۲۹۶ \times ۱۰^{۶}$	۶٫۲۸۳	۱

زاویهٔ فضایی

۱ کره = ۴π استرادیان = ۱۲٫۵۷ رادیان

طول

	cm	**m**	km	in	ft	mil
یک سانتی‌متر =	۱	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۵}$	۰٫۳۹۳۷	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۶}$
یک متر =	۱۰۰	۱	$۱۰^{-۳}$	۳۹٫۳۷	۳٫۲۸۱	$۶٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۴}$
یک کیلومتر =	$۱۰^{۵}$	۱۰۰۰	۱	$۳٫۹۳۷ \times ۱۰^{۴}$	۳۲۸۱	۰٫۶۲۱۴
یک اینچ =	۲٫۵۴۰	$۲٫۵۴۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۵۴۰ \times ۱۰^{-۵}$	۱	$۸٫۳۳۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۵۷۸ \times ۱۰^{-۵}$
یک فوت =	۳۰٫۴۸	۰٫۳۰۴۸	$۳٫۰۴۸ \times ۱۰^{-۴}$	۱۲	۱	$۱٫۸۹۴ \times ۱۰^{-۴}$
یک مایل =	$۱٫۶۰۹ \times ۱۰^{۵}$	۱۶۰۹	۱٫۶۰۹	$۶٫۳۳۶ \times ۱۰^{۴}$	۵۲۸۰	۱

یک آنگستروم = $۱۰^{-۱۰}$ متر
یک مایل دریایی = ۱۸۵۲ متر = ۱٫۱۵۱ مایل = ۶۰۷۸ فوت
یک فرمی = $۱۰^{-۱۵}$ متر

یک سال نوری = $۹٫۴۶۰ \times ۱۰^{۱۲}$ کیلومتر
یک پارسک = $۳٫۰۸۴ \times ۱۰^{۱۳}$ کیلومتر
یک فاتوم = ۶ فوت
یک شعاع بور = $۵٫۲۹۲ \times ۱۰^{-۱۱}$ متر

یک یارد = ۳ فوت
یک راد = ۱۶٫۵ فوت
یک میل = $۱۰^{-۳}$ اینچ
۱ نانومتر = $۱۰^{-۹}$ متر

مساحت

	$m^۲$	$cm^۲$	$ft^۲$	$in^۲$
یک متر مربع =	۱	$۱۰^{۴}$	۱۰٫۷۶	۱۵۵۰
یک سانتی‌متر مربع=	$۱۰^{-۴}$	۱	۱٫۰۷۶ × $۱۰^{-۳}$	۰٫۱۵۵۰
یک فوت مربع=	۹٫۲۹۰ × $۱۰^{-۲}$	۹۲۹٫۰	۱	۱۴۴
یک اینچ مربع =	۶٫۴۵۲ × $۱۰^{-۴}$	۶٫۴۵۲	۶٫۹۴۴ × $۱۰^{-۳}$	۱

یک مایل مربع = ۲٫۷۸۸ × $۱۰^{۷}$ فوت مربع = ۶۴۰ ایکر ۱ ایکر = ۴۳۵۶۰ فوت مربع

یک بارن = $۱۰^{-۲۸}$ مترمربع ۱ هکتار = $۱۰^{۴}$ مترمربع = ۲٫۴۷۱ ایکر

حجم

	$m^۳$	$cm^۳$	li	$ft^۳$	$in^۳$
یک مترمکعب =	۱	$۱۰^{۶}$	۱۰۰۰	۳۵٫۳۱	۶٫۱۰۲ × $۱۰^{۴}$
یک سانتی‌مترمکعب =	$۱۰^{-۶}$	۱	۱٫۰۰۰ × $۱۰^{-۳}$	۳٫۵۳۱ × $۱۰^{-۵}$	۶٫۱۰۲ × $۱۰^{-۲}$
یک لیتر =	۱٫۰۰۰ × $۱۰^{-۳}$	۱۰۰۰	۱	۳٫۵۳۱ × $۱۰^{-۲}$	۶۱٫۰۲
یک فوت‌مکعب =	۲٫۸۳۲ × $۱۰^{-۲}$	۲٫۸۳۲ × $۱۰^{۴}$	۲۸٫۳۲	۱	۱۷۲۷
یک اینچ‌مکعب =	۱٫۶۳۹ × $۱۰^{-۵}$	۱۶٫۳۹	۱٫۶۳۹ × $۱۰^{-۲}$	۵٫۷۸۷ × $۱۰^{-۴}$	۱

یک گالن مایع امریکایی = ۴ کوارت مایع امریکایی = ۸ پینت امریکایی = ۱۲۸ اونس مایع امریکایی = ۲۳۱ اینچ مکعب

یک گالن امپریال انگلیسی = ۲۷۷٫۴ اینچ مکعب = ۱٫۲۰۱ گالن مایع امریکایی

جرم

	g	kg	slug	u	oz	lb	ton
یک گرم =	۱	۰٫۰۰۱	۶٫۸۵۲ × $۱۰^{-۵}$	۶٫۰۲۲ × $۱۰^{۲۳}$	۳٫۵۲۷ × $۱۰^{-۲}$	۲٫۲۰۵ × $۱۰^{-۳}$	۱٫۱۰۲ × $۱۰^{-۶}$
یک کیلوگرم =	۱۰۰۰	۱	۶٫۸۵۲ × $۱۰^{-۲}$	۶٫۰۲۲ × $۱۰^{۲۶}$	۳۵٫۲۷	۲٫۲۰۵	۱٫۱۰۲ × $۱۰^{-۳}$
یک اسلاگ =	۱٫۴۵۹ × $۱۰^{۴}$	۱۴٫۵۹	۱	۸٫۷۸۶ × $۱۰^{۲۷}$	۵۱۴٫۸	۳۲٫۱۷	۱٫۶۰۹ × $۱۰^{-۲}$
یک u =	۱٫۶۶۱ × $۱۰^{-۲۴}$	۱٫۶۶۰ × $۱۰^{-۲۷}$	۱٫۱۳۸ × $۱۰^{-۲۸}$	۱	۵٫۸۵۷ × $۱۰^{-۲۶}$	۳٫۶۶۲ × $۱۰^{-۲۷}$	۱٫۸۳۰ × $۱۰^{-۳۰}$
یک اونس =	۲۸٫۳۵	۲٫۸۳۵ × $۱۰^{-۲}$	۱٫۹۴۳ × $۱۰^{-۳}$	۱٫۷۱۸ × $۱۰^{۲۵}$	۱	۶٫۲۵۰ × $۱۰^{-۲}$	۳٫۱۲۵ × $۱۰^{-۵}$
یک پوند =	۴۵۳٫۶	۰٫۴۵۳۶	۳٫۱۰۸ × $۱۰^{-۲}$	۲٫۷۳۲ × $۱۰^{۲۶}$	۱۶	۱	۰٫۰۰۰۵
یک تن =	۹٫۰۷۲ × $۱۰^{۵}$	۹۰۷٫۲	۶۲٫۱۶	۵٫۴۶۳ × $۱۰^{۲۹}$	۳٫۲ × $۱۰^{۴}$	۲۰۰۰	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند یکای جرم نیستند، ولی غالباً به این عنوان به‌کار می‌روند. مثلاً وقتی می‌نویسیم ۱kg = ۲٫۲۰۵lb. به‌این معناست که در شرایط متعارف شتاب گرانی ($g = ۹٫۸۰۶۶۵ m/s^۲$)، یک کیلوگرم جرمی است که ۲٫۲۰۵ پوند وزن دارد.

چگالی

	$slug/ft^۳$	$kg/m^۳$	$g/cm^۳$	$lb/ft^۳$	$lb/in^۳$
یک اسلاگ بر فوت‌مکعب =	۱	۵۱۵٫۴	۰٫۵۱۵۴	۳۲٫۱۷	۱٫۸۶۲ × $۱۰^{-۲}$
یک کیلوگرم بر مترمکعب =	۱٫۹۴۰ × $۱۰^{-۳}$	۱	۰٫۰۰۱	۶٫۲۴۳ × $۱۰^{-۲}$	۳٫۶۱۳ × $۱۰^{-۵}$
یک گرم بر سانتی‌مترمکعب =	۱٫۹۴۰	۱۰۰۰	۱	۶۲٫۴۳	۳٫۶۱۳ × $۱۰^{-۲}$
یک پوند بر فوت‌مکعب =	۳٫۱۰۸ × $۱۰^{-۲}$	۱۶٫۰۲	۱٫۶۰۲ × $۱۰^{-۲}$	۱	۵٫۷۸۷ × $۱۰^{-۴}$
یک پوند بر اینچ‌مکعب =	۵۳٫۷۱	۲٫۷۶۸ × $۱۰^{۴}$	۲۷٫۶۸	۱۷۲۸	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند چگالی وزنی هستند و به‌این جهت، از نظر ابعادی با چگالیهای جرمی متفاوت‌اند. به جدول جرم رجوع کنید.

زمان

	y	d	h	min	s
یک سال =	۱	۳۶۵٫۲	$۸٫۷۶۶ \times ۱۰^{۳}$	$۵٫۲۵۹ \times ۱۰^{۵}$	$۳٫۱۵۶ \times ۱۰^{۷}$
یک روز =	$۲٫۷۳۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱	۲۴	۱۴۴۰	$۸٫۶۴۰ \times ۱۰^{۴}$
یک ساعت =	$۱٫۱۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۱۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	۳۶۰۰
یک دقیقه =	$۱٫۹۰۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰
یک ثانیه =	$۳٫۱۶۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۱٫۱۵۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

سرعت

	ft/s	km/h	m/s	mi/h	cm/s
یک فوت بر ثانیه =	۱	۱٫۰۹۷	۰٫۳۰۴۸	۰٫۶۸۱۸	۳۰٫۴۸
یک کیلومتر بر ثانیه =	۰٫۹۱۱۳	۱	۰٫۲۷۷۸	۰٫۶۲۱۴	۲۷٫۷۸
یک متر بر ثانیه =	۳٫۲۸۱	۳٫۶	۱	۲٫۲۳۷	۱۰۰
یک مایل بر ساعت =	۱٫۴۶۷	۱٫۶۰۹	۰٫۴۴۷۰	۱	۴۴٫۷۰
یک سانتی‌متر بر ثانیه =	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۱	$۲٫۲۳۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

یک نات = یک مایل دریایی بر ساعت = ۱٫۶۸۸ فوت بر ثانیه

یک مایل بر دقیقه = ۸۸٫۰۰ فوت بر ثانیه = ۶۰٫۰۰ مایل بر ساعت

نیرو

	dyn	N	lb	pdl	gf	kgf
یک دین =	۱	$۱۰^{-۵}$	$۲٫۲۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۲۳۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۰۲۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۲۰ \times ۱۰^{-۶}$
یک نیوتون =	$۱۰^{۵}$	۱	۰٫۲۲۴۸	۷٫۲۳۳	۱۰۲٫۰	۰٫۱۰۲۰
یک پوند =	$۴٫۴۴۸ \times ۱۰^{۵}$	۴٫۴۴۸	۱	۳۲٫۱۷	۴۵۳٫۶	۰٫۴۵۳۶
یک پوندال =	$۱٫۳۸۳ \times ۱۰^{۴}$	۰٫۱۳۸۳	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۱۴٫۱۰	$۱٫۴۱۰ \times ۱۰^{-۲}$
یک گرم نیرو =	۹۸۰٫۷	$۹٫۸۰۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۰۹۳ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۰٫۰۰۱
یک کیلوگرم نیرو =	$۹٫۸۰۷ \times ۱۰^{۵}$	۹٫۸۰۷	۲٫۲۰۵	۷۰٫۹۳	۱۰۰۰	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند، یکای نیرو نیستند ولی غالباً به‌این عنوان به‌کار می‌روند. برای نمونه، اگر بنویسیم یک گرم نیرو " = "۹۸۰٫۷ دین، منظورمان این است که در شرایط متعارف شتاب گرانی ($g = ۹٫۸۰۶۶۵ m/s^{۲}$)، یک گرم جرم تحت تأثیر یک نیروی ۹۸۰٫۷ دین قرار دارد.

فشار

	atm	$dyn/cm^{۲}$	inch of Water	cm − Hg	Pa	$lb/in^{۲}$	$lb/ft^{۲}$
یک اتمسفر =	۱	$۱٫۰۱۳ \times ۱۰^{۶}$	۴۰۶٫۸	۷۶	$۱٫۰۱۳ \times ۱۰^{۵}$	۱۴٫۷۰	۲۱۱۶
یک دین بر سانتی‌مترمربع =	$۹٫۸۶۹ \times ۱۰^{-۷}$	۱	$۴٫۰۱۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۷٫۵۰۱ \times ۱۰^{-۵}$	۰٫۱	$۱٫۴۰۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۰۸۹ \times ۱۰^{-۳}$
یک اینچ آب[1] در ۴ درجهٔ سلسیوس =	$۲٫۴۵۸ \times ۱۰^{-۳}$	۲۴۹۱	۱	۰٫۱۸۶۸	۲۴۹٫۱	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۲}$	۵٫۲۰۲
یک سانتی‌متر جیوه[1] در صفر درجهٔ سلسیوس =	$۱٫۳۱۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۳۳۳ \times ۱۰^{۴}$	۵٫۳۵۳	۱	۱۳۳۳	۰٫۱۹۳۴	۲۷٫۸۵
یک پاسکال =	$۹٫۸۶۹ \times ۱۰^{-۶}$	۱۰	$۴٫۰۱۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۵۰۱ \times ۱۰^{-۴}$	۱	$۱٫۴۵۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۰۸۹ \times ۱۰^{-۲}$
یک پوند بر اینچ مربع =	$۶٫۸۰۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۸۹۵ \times ۱۰^{۴}$	۲۷٫۶۸	۵٫۱۷۱	$۶٫۸۹۵ \times ۱۰^{۳}$	۱	۱۴۴
یک پوند بر فوت مربع =	$۴٫۷۲۵ \times ۱۰^{-۴}$	۴۷۸٫۸	۰٫۱۹۲۲	$۳٫۵۹۱ \times ۱۰^{-۲}$	۴۷٫۸۸	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	۱

۱. هر جا که شتاب گرانی دارای مقدار متعارف ۹٫۸۰۶۶۵ متر بر مجذور ثانیه است.

یک بار = $۱۰^{۶}$ دین بر سانتی‌مترمربع = ۰٫۱ میلی‌پاسکال   یک میلی‌بار = $۱۰^{۳}$ دین بر سانتی‌مترمربع = $۱۰^{۲}$ پاسکال

انرژی، کار، گرما

	Btu	erg	ft · lb	hp · h	J	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
یکای انگلیسی گرما =	۱	۱٫۰۵۵ $\times$ ۱۰^۱۰	۷۷۷٫۹	۳٫۹۲۹ $\times$ ۱۰^−۴	۱۰۵۵	۲۵۲٫۰	۲٫۹۳۰ $\times$ ۱۰^−۴	۶٫۵۸۵ $\times$ ۱۰^۲۱	۶٫۵۸۵ $\times$ ۱۰^۱۵	۱٫۱۷۴ $\times$ ۱۰^−۱۴	۷٫۰۷۰ $\times$ ۱۰^۱۲
یک ارگ =	۹٫۴۸۱ $\times$ ۱۰^−۱۱	۱	۷٫۳۷۶ $\times$ ۱۰^−۸	۳٫۷۲۵ $\times$ ۱۰^−۱۴	۱۰^−۷	۲٫۳۸۹ $\times$ ۱۰^−۸	۲٫۷۷۸ $\times$ ۱۰^−۱۴	۶٫۲۴۲ $\times$ ۱۰^۱۱	۶٫۲۴۲ $\times$ ۱۰^۵	۱٫۱۱۳ $\times$ ۱۰^−۲۴	۶۷۰٫۲
یک فوت پوند =	۱٫۲۸۵ $\times$ ۱۰^−۳	۱٫۳۵۶ $\times$ ۱۰^۷	۱	۵٫۰۵۱ $\times$ ۱۰^−۷	۱٫۳۵۶	۰٫۳۲۳۸	۳٫۷۶۶ $\times$ ۱۰^−۷	۸٫۴۶۴ $\times$ ۱۰^۱۸	۸٫۴۶۴ $\times$ ۱۰^۱۲	۱٫۵۰۹ $\times$ ۱۰^−۱۷	۹٫۰۳۷ $\times$ ۱۰^۹
یک اسب بخار ساعت =	۲۵۴۵	۲٫۶۸۵ $\times$ ۱۰^۱۳	۱٫۹۸۰ $\times$ ۱۰^۶	۱	۲٫۶۸۵ $\times$ ۱۰^۶	۶٫۴۱۳ $\times$ ۱۰^۵	۰٫۷۴۵۷	۱٫۶۷۶ $\times$ ۱۰^۲۵	۱٫۶۷۶ $\times$ ۱۰^۱۹	۲٫۹۸۸ $\times$ ۱۰^−۱۱	۱٫۷۹۹ $\times$ ۱۰^۱۶
یک ژول =	۹٫۴۸۱ $\times$ ۱۰^−۴	۱۰^۷	۰٫۷۳۷۶	۳٫۷۲۵ $\times$ ۱۰^−۷	۱	۰٫۲۳۸۹	۲٫۷۷۸ $\times$ ۱۰^−۷	۶٫۲۴۲ $\times$ ۱۰^۱۸	۶٫۲۴۲ $\times$ ۱۰^۱۲	۱٫۱۱۳ $\times$ ۱۰^−۱۷	۶٫۷۰۲ $\times$ ۱۰^۹
یک کالری =	۳٫۹۶۹ $\times$ ۱۰^−۳	۴٫۱۸۶ $\times$ ۱۰^۷	۳٫۰۸۸	۱٫۵۶۰ $\times$ ۱۰^−۶	۴٫۱۸۶	۱	۱٫۱۶۳ $\times$ ۱۰^−۶	۲٫۶۱۳ $\times$ ۱۰^۱۹	۲٫۶۱۳ $\times$ ۱۰^۱۳	۴٫۶۶۰ $\times$ ۱۰^−۱۷	۲٫۸۰۶ $\times$ ۱۰^۱۰
یک کیلووات ساعت =	۳۴۱۳	۳٫۶ $\times$ ۱۰^۱۳	۲٫۶۵۵ $\times$ ۱۰^۶	۱٫۳۴۱	۳٫۶ $\times$ ۱۰^۶	۸٫۶۰۰ $\times$ ۱۰^۵	۱	۲٫۲۴۷ $\times$ ۱۰^۲۵	۲٫۲۴۷ $\times$ ۱۰^۱۹	۴٫۰۰۷ $\times$ ۱۰^−۱۱	۲٫۴۱۳ $\times$ ۱۰^۱۶
یک الکترون ولت =	۱٫۵۱۹ $\times$ ۱۰^−۲۲	۱٫۶۰۲ $\times$ ۱۰^−۱۲	۱٫۱۸۲ $\times$ ۱۰^−۱۹	۵٫۹۶۷ $\times$ ۱۰^−۲۶	۱٫۶۰۲ $\times$ ۱۰^−۱۹	۳٫۸۲۷ $\times$ ۱۰^−۲۰	۴٫۴۵۰ $\times$ ۱۰^−۲۶	۱	۱۰^−۶	۱٫۷۸۳ $\times$ ۱۰^−۳۶	۱٫۰۷۴ $\times$ ۱۰^−۹
یک مگا الکترون ولت =	۱٫۵۱۹ $\times$ ۱۰^−۱۶	۱٫۶۰۲ $\times$ ۱۰^−۶	۱٫۱۸۲ $\times$ ۱۰^−۱۳	۵٫۹۶۷ $\times$ ۱۰^−۲۰	۱٫۶۰۲ $\times$ ۱۰^−۱۳	۳٫۸۲۷ $\times$ ۱۰^−۱۴	۴٫۴۵۰ $\times$ ۱۰^−۲۰	۱۰^۶	۱	۱٫۷۸۳ $\times$ ۱۰^−۳۰	۱٫۰۷۴ $\times$ ۱۰^−۳
یک کیلوگرم =	۸٫۵۲۱ $\times$ ۱۰^۱۳	۸٫۹۸۷ $\times$ ۱۰^۲۳	۶٫۶۲۹ $\times$ ۱۰^۱۶	۳٫۳۴۸ $\times$ ۱۰^۱۰	۸٫۹۸۷ $\times$ ۱۰^۱۶	۲٫۱۴۶ $\times$ ۱۰^۱۶	۲٫۴۹۷ $\times$ ۱۰^۱۰	۵٫۶۱۰ $\times$ ۱۰^۳۵	۵٫۶۱۰ $\times$ ۱۰^۲۹	۱	۶٫۰۲۲ $\times$ ۱۰^۲۶
یکای جرم اتمی =	۱٫۴۱۵ $\times$ ۱۰^−۱۳	۱٫۴۹۲ $\times$ ۱۰^−۳	۱٫۱۰۱ $\times$ ۱۰^−۱۰	۵٫۵۵۹ $\times$ ۱۰^−۱۷	۱٫۴۹۲ $\times$ ۱۰^−۱۰	۳٫۵۶۴ $\times$ ۱۰^−۱۱	۴٫۱۴۶ $\times$ ۱۰^−۱۷	۹٫۳۲ $\times$ ۱۰^۸	۹۳۲٫۰	۱٫۶۶۱ $\times$ ۱۰^−۲۷	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند یکاهای خاص انرژی نیستند ولی به مناسبت در اینجا ذکر شده‌اند. این کمیتها از فرمول هم‌ارزی نسبیتی جرم-انرژی $E = mc^2$ به‌دست می‌آیند و انرژی آزاد شده را هنگام تبدیل کامل یک کیلوگرم یا یک یکای جرم اتمی (u) به‌انرژی، به‌دست می‌دهند.

توان

	Btu/h	ft · lb/s	hp	cal/s	kW	W
یک یکای انگلیسی گرما بر ساعت =	۱	۰٫۲۱۶۱	۳٫۹۲۹ $\times$ ۱۰^−۴	۶٫۹۹۸ $\times$ ۱۰^−۲	۲٫۹۳۰ $\times$ ۱۰^−۴	۰٫۲۹۳۰
یک فوت-پوند بر ثانیه =	۴٫۶۲۸	۱	۱٫۸۱۸ $\times$ ۱۰^−۳	۰٫۳۲۳۹	۱٫۳۵۶ $\times$ ۱۰^−۳	۱٫۳۵۶
یک اسب بخار =	۲۵۴۵	۵۵۰	۱	۱۷۸٫۱	۰٫۷۴۵۷	۷۴۵٫۷
یک کالری بر ثانیه =	۱۴٫۲۹	۳٫۰۸۸	۵٫۶۱۵ $\times$ ۱۰^−۳	۱	۴٫۱۸۶ $\times$ ۱۰^−۳	۴٫۱۸۶
یک کیلووات ساعت =	۳۴۱۳	۷۳۷٫۶	۱٫۳۴۱	۲۳۸٫۹	۱	۱۰۰۰
یک وات =	۳٫۴۱۳	۰٫۷۳۷۶	۱٫۳۴۱ $\times$ ۱۰^−۳	۰٫۲۳۸۹	۰٫۰۰۱	۱

شار مغناطیسی

	maxwell	WEBER
۱ ماکسول =	۱	۱۰^−۸
۱ وبر =	۱۰^۸	۱

میدان مغناطیسی

	gauss	TESLA	milligauss
۱ گاوس =	۱	۱۰^−۴	۱۰۰۰
۱ تسلا =	۱۰^۴	۱	۱۰^۷
۱ میلی گاوس =	۰٫۰۰۱	۱۰^−۷	۱

پیوست ح

فرمولهای ریاضی

هندسه

دایره‌ای به شعاع r: محیط $= ۲\pi r$؛ مساحت $= \pi r^۲$

کره‌ای به شعاع r: مساحت $= ۴\pi r^۲$؛ حجم $= \frac{۴}{۳}\pi r^۳$

استوانهٔ قائمی به شعاع r و ارتفاع h:

مساحت $= ۲\pi r^۲ + ۲\pi r h$؛ حجم $= \pi r^۲ h$

مثلثی با قاعدهٔ a و ارتفاع h: مساحت $= \frac{۱}{۲} a h$

معادلهٔ درجهٔ دو

$$ax^۲ + bx + c = ۰$$

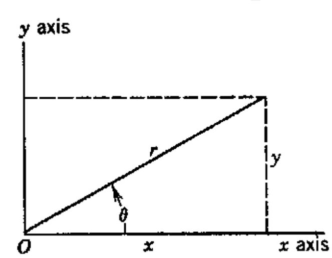
$$\Rightarrow \; x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

توابع مثلثاتی زاویهٔ θ

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

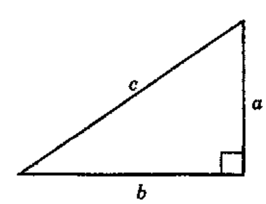
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$



قضیهٔ فیثاغورس

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$



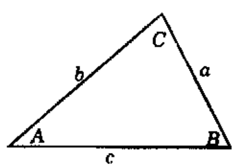
در مثلث

زاویه‌های A، B، C مقابل اضلاعی a، b، c هستند.

$$A + B + C = ۱۸۰^\circ$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\,\cos C$$



نشانه‌ها و نمادهای ریاضی

$=$ مساوی است با

$\approx$ تقریباً مساوی است با

$\sim$ از مرتبهٔ بزرگی است

$\neq$ مساوی نیست با (متفاوت است با)

$\equiv$ یکسان است با، طبق تعریف عبارت است از

$>$ بزرگتر است از ($\gg$ خیلی بزرگتر است از)

$<$ کوچکتر است از ($\ll$ خیلی کوچکتر است از)

$\geq$ بزرگتر است یا مساوی است با (یا کوچکتر نیست از)

$\leq$ کوچکتر است یا مساوی است با (یا بزرگتر نیست از)

$\pm$ به‌اضافه یا منهای ($\sqrt{۴} = \pm ۲$)

$\propto$ متناسب است با

$\sum$ علامت جمع

$\overline{x}$ مقدار متوسط x

ضرب بردارها

اگر $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بردارهای یکه در راستای x و y و z باشند:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = ۱,\; \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = ۰$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = ۰$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},\; \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},\; \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$$

هر بردار $\mathbf{a}$ برحسب مؤلفه‌هایش به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بردارهایی به‌ترتیب به‌طول a و b و c باشند و s یک کمیت اسکالر باشد:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$
$$(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

اگر θ زاویهٔ کوچکتر (از دو زاویهٔ) میان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشد

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\ \cos\theta$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$
$$= (a_y b_z - b_y a_z)\mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\mathbf{j}$$
$$+ (a_x b_y - b_x a_y)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab\ \sin\theta$$
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(۹۰^\circ - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(۹۰^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$$
$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \quad \sec^۲\theta - \tan^۲\theta = ۱$$
$$\csc^۲\theta - \cot^۲\theta = ۱$$
$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos ۲\theta = \cos^۲\theta - \sin^۲\theta = ۲\cos^۲\theta - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\theta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{۱ \mp \tan\alpha\ \tan\beta}$$
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = ۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha \mp \beta)$$

قضیهٔ دوجمله‌ای

$$(۱ \pm x)^n = ۱ \pm \frac{nx}{۱!} + \frac{n(n-۱)x^۲}{۲!} + \cdots (x^۲ < ۱)$$
$$(۱ \pm x)^{-n} = ۱ \mp \frac{nx}{۱!} + \frac{n(n+۱)x^۲}{۲!} + \cdots (x^۲ < ۱)$$

بسط نمایی

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots$$

بسط لگاریتمی

$$\ln(۱ + x) = x - \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۳}x^۳ - \cdots (|x| < ۱)$$

بسط مثلثاتی (θ برحسب رادیان)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^۳}{۳!} + \frac{\theta^۵}{۵!} - \cdots$$
$$\cos\theta = ۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۴!} - \cdots$$
$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^۳}{۳} + \frac{۲\theta^۵}{۱۵} + \cdots$$

مشتقها و انتگرالها

در آنچه می‌آید، u و v توابعی از x و a و m مقادیر ثابت‌اند. به هر یک از انتگرالهای نامعین باید یک ثابت (اختیاری) انتگرال‌گیری اضافه کرد.

۱. $\dfrac{dx}{dx} = 1$

۲. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$

۳. $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

۴. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$

۵. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$

۶. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

۷. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

۸. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

۹. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

۱۰. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

۱۱. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

۱۲. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$

۱۳. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$

۱۴. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

۱۵. $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u\dfrac{du}{dx}$

۱۶. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u\dfrac{du}{dx}$

۱. $\int dx = x$

۲. $\int au\,dx = a\int u\,dx$

۳. $\int (u+v)dx = \int u\,dx + \int v\,dx$

۴. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$

۵. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|$

۶. $\int u\dfrac{dv}{dx}dx = uv - \int v\dfrac{du}{dx}dx$

۷. $\int e^x dx = e^x$

۸. $\int \sin x\,dx = -\cos x$

۹. $\int \cos x\,dx = \sin x$

۱۰. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$

۱۱. $\int \sin^2 x\,dx = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x$

۱۲. $\int e^{-ax}dx = -\dfrac{1}{a}e^{-ax}$

۱۳. $\int xe^{-ax}dx = -\dfrac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$

۱۴. $\int x^2e^{-ax}dx = -\dfrac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)e^{-ax}$

۱۵. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$

۱۶. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

پیوست ط

برنامه‌های کامپیوتری

در این پیوست سه مثال از برنامه‌های کامپیوتری‌ای که در متن کتاب از آنها برای محاسبات سینماتیکی شامل نیروهای متغیر وارد بر ذره استفاده شده است ارائه می‌شود. این برنامه‌ها به زبان BASIC نوشته شده‌اند و به‌راحتی می‌شود آنها را با اغلب کامپیوترهای شخصی سازگار کرد. در هر مورد، سرعت اولیه و مکان اولیه ذره را باید به‌ترتیب در سطرهای ۴۰ و ۵۰ وارد برنامه کرد.

۱. نیروهای وابسته به زمان

از این برنامه در بخش ۶ـ۶ برای پیدا کردن مکان و سرعت اتومبیلی که شتابش وابسته به زمان است استفاده شد. این برنامه را می‌شود برای هر شتاب وابسته به زمانی به‌کار برد؛ کافی است سطر ۱۸۰ را طوری تغییر بدهیم که $a(t)$ مورد نظر را نشان بدهد. در این مورد از مثال بخش ۶ـ۶، یعنی $a(t) = -2{,}67t$، استفاده می‌کنیم.

فهرست برنامه

```
10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- TIME DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN A(T), V0, X0;  COMPUTES V(T), X(T)
30 ' SPECIFY INITIAL VALUES
40 VO = 29.2
50 X0 = 0
60 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80 TMAX = 10
90 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '      EXAMPLE: 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU = .5
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 100
160 DT = TU/NT
170 'INSERT A(T) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
180 DEF FNA(T)=-2.67*T
190 V=V0
200 X=X0
210 PRINT "TIME           VELOCITY       POSITION"
220 LPRINT  "TIME           VELOCITY       POSITION"
230 'BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT
260 T = (TIME-1)*TU + N*DT
270 AI=FNA(T)
280 AI1=FNA(T-DT)
290 AV=.5*(AI+AI1
```

```
300 DV=AV*DT
310 V = V + DV
320 DX = .5*(V + V - DV)*DT
330 X = X+DX
340 NEXT N
350 PRINT TIME*TU,V,X
360 LPRINT TIME*TU,V,X
370 NEXT TIME
400 END
```

نمونهٔ خروجی

TIME	VELOCITY	POSITION
.5	28.86625	14.54437
1	27.86499	28.75499
1.5	26.19618	42.2981
2	23.85994	54.83993
2.5	20.85615	66.04676
3	17.18486	75.5848
3.5	12.84612	83.1203
4	7.839843	88.31959
4.5	2.166084	90.84886
5	-4.175166	90.37431

۲. نیروهای وابسته به سرعت

این برنامه را می‌شود، طبق آنچه در بخش ۶ـ۷ گفته شد، برای بررسی حرکت پرتابه‌ای که تحت تأثیر نیروی مقاومت هواست به‌کار برد. در این مورد نیرو را در سطر ۲۰۰ به‌صورت $F(x) = g - bv^2$ می‌نویسیم، که در آن $g =$ ۹٫۸ و $b =$ ۰٫۳۳ است. در سطر ۲۰۰ هر نیروی وابسته به سرعت دیگری هم می‌شود قرار داد. خروجی نشان می‌دهد که ذره، در مدت ۱٫۵s و پس از طی ۶m، به سرعت حدی ۵٫۴m/s می‌رسد.

فهرست برنامه

```
10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- VELOCITY DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN A(V), V0, X0;   COMPUTES V(T), X(T)
30 'SPECIFY INITIAL VALUES
40 VO = 0
50 XO = 0
60 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80 TMAX = 10
90 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '      EXAMPLE: 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU=.25
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT=100
160 DT=TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 'INSERT A(V) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FNA(V)=9.8 - .33*V*V
210 PRINT "TIME           VELOCITY        POSITION"
220 LPRINT "TIME          VELOCITY        POSITION"
230 'BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT
```

(ادامه)

```
260 AV=FNA(V)
270 DV=AV*DT
280 V = V + DV
290 DX = .5*(V + V - DV)*DT
300 X = X+DX
310 NEXT N
320 PRINT TIME*TU,V,X
330 LPRINT TIME*TU,V,X
340 NEXT TIME
400 END
```

نمونهٔ خروجی

TIME	VELOCITY	POSITION
.25	2.299237	.2966358
.5	3.905542	1.08959
.75	4.765719	2.18636
1	5.161553	3.434
1.25	5.330923	4.748592
1.5	5.401125	6.091382
1.75	5.42984	7.445783
2	5.441519	8.804918
2.25	5.446261	10.16598
2.5	5.448183	11.52782

۳. نیروهای وابسته به مکان

این برنامه در بخش ۸ـ۴ برای بررسی حرکت ذره‌ای که تحت‌تأثیر نیروی $F = -kx$ نوسان می‌کند به‌کار برده شد. نیرو را به‌صورت $F(x) = -۹٫۶x$، یعنی وقتی $k = ۹٫۶$ است، در سطر ۲۰۰ وارد می‌کنیم. خروجی نشان می‌دهد که این ذره با دورهٔ ۲s‌ر۳ نوسان می‌کند، درست همان‌طور که برای ذره‌ای با چنین جرمی (سطر ۶۰) انتظار می‌رود.

فهرست برنامه

```
10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- POSITION DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN F(X), V0, X0, M;   COMPUTES V(T), X(T)
30 'SPECIFY INITIAL VALUES AND MASS OF PARTICLE
40 V0 = 0      'METERS PER SECOND
50 X0 = .05        'METERS
60 M = 2.5 'KILOGRAMS'
70 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
80 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
90 TMAX = 40
100 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
110 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
120 TU=.1
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 10
160 DT = TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 'INSERT F(X) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FNF(X)=-9.600001*X
210 PRINT " TIME       VELOCITY       POSITION"
220 PRINT "   (S)        (M/S)          (M)  "
230 LPRINT " TIME       VELOCITY       POSITION"
240 LPRINT "   (S)        (M/S)          (M)  "
250 LPRINT USING "###.##";TIME;:PRINT USING "+#########.###";V0,X0
260 PRINT USING "###.##";TIME;:PRINT USING "+#########.###";V0,X0
```

(ادامه)

```
270 'BEGIN ITERATION
280 FOR TIME = 1 TO TMAX
290 FOR N = 1 TO NT
300 A=FNF(X)/M 'ACCELERATION IN INTERVAL
310 X = X + V*DT + .5*A*DT*DT 'POSITION AT END OF INTERVAL
320 V = V + A*DT 'VELOCITY AT END OF INTERVAL
330 NEXT N
340 PRINT USING "###.##";TIME*TU;:PRINT USING "+#########.###";V,X
350 LPRINT USING "###.##";TIME*TU;:LPRINT USING "+#########.###";V,:
360 NEXT TIME
400 END
```

نمونة خروجي

TIME (S)	VELOCITY (M/S)	POSITION (M)
0.00	+0.000	+0.050
0.10	-0.019	+0.049
0.20	-0.037	+0.046
0.30	-0.054	+0.042
0.40	-0.069	+0.035
0.50	-0.082	+0.028
0.60	-0.091	+0.019
0.70	-0.097	+0.010
0.80	-0.099	-0.000
0.90	-0.097	-0.010
1.00	-0.092	-0.019
1.10	-0.083	-0.028
1.20	-0.070	-0.036
1.30	-0.056	-0.042
1.40	-0.039	-0.047
1.50	-0.020	-0.050
1.60	-0.001	-0.051
1.70	+0.019	-0.050
1.80	+0.037	-0.047
1.90	+0.055	-0.042
2.00	+0.070	-0.036
2.10	+0.083	-0.028
2.20	+0.092	-0.020
2.30	+0.098	-0.010
2.40	+0.100	-0.000
2.50	+0.099	+0.010
2.60	+0.093	+0.019
2.70	+0.084	+0.028
2.80	+0.072	+0.036
2.90	+0.057	+0.043
3.00	+0.040	+0.047
3.10	+0.021	+0.050
3.20	+0.001	+0.052
3.30	-0.018	+0.051
3.40	-0.037	+0.048
3.50	-0.055	+0.043
3.60	-0.071	+0.037
3.70	-0.084	+0.029
3.80	-0.093	+0.020
3.90	-0.099	+0.011
4.00	-0.102	+0.001

پیوست ی

برندگان جایزه نوبل

۱۹۰۱	ویلهلم کنراد رونتگن Wilhelm Konrad Röntgen	(۱۹۲۳ – ۱۸۴۵)	به‌خاطر کشف پرتوهای x
۱۹۰۲	هندریک آنتون لورنتز Hendrik Antoon Lorentz	(۱۹۲۸ – ۱۸۵۳)	به‌خاطر پژوهشهایشان دربارهٔ اثر میدان مغناطیسی بر پدیده‌های تابشی.
	پیتر زیمان Pieter Zeeman	(۱۹۴۳ – ۱۸۶۵)	
۱۹۰۳	آنتوان هانری بکرل Antoine Henri Becquerel	(۱۹۰۸ – ۱۸۵۲)	به‌خاطر کشف پرتوزایی طبیعی.
	پیر کوری Pierre Curie	(۱۹۰۶ – ۱۸۵۹)	به‌خاطر پژوهشهای مشترکشان دربارهٔ پدیده‌های تابشی‌ای که توسط بکرل کشف شده بود.
	ماری اسکودوسکا-کوری Marie Sklowdowska-Curie	(۱۹۳۴ – ۱۸۶۷)	
۱۹۰۴	لرد ریلی (جان ویلیام استرات) Lord Rayleigh (John William Strutt)	(۱۹۱۹ – ۱۸۴۲)	به‌خاطر پژوهشهایش در مورد چگالی گازهای مهم و همچنین به‌خاطر کشف آرگون.
۱۹۰۵	فیلیپ ادوارد آنتون فون‌لنارد Philipp Eduard Anton von Lenard	(۱۹۴۷ – ۱۸۶۲)	به‌خاطر کارهایش در مورد پرتوهای کاتودی.
۱۹۰۶	جوزف جان تامسون Joseph John Thomson	(۱۹۴۰ – ۱۸۵۶)	به‌خاطر پژوهشهای نظری و تجربی‌اش در مورد رسانایی الکتریکی گازها.
۱۹۰۷	آلبرت آبراهام مایکلسون Albert Abraham Michelson	(۱۹۳۱ – ۱۸۵۲)	به‌خاطر طراحی اسبابهای اندازه‌گیری دقیق اپتیکی و پژوهشهایی که به کمک آنها انجام داد.
۱۹۰۸	گابریل لیپمان Gabriel Lippmann	(۱۹۲۱ – ۱۸۴۵)	به‌خاطر ابداع روش باز تولید رنگها با نورنگاری بر پایهٔ پدیده‌های تداخلی.
۱۹۰۹	گولیلمو مارکونی Guglielmo Marconi	(۱۹۳۷ – ۱۸۷۴)	به‌خاطر سهمی که در تکمیل تلگراف بی‌سیم داشتند.
	کارل فردیناند براون Carl Ferdinand Braun	(۱۹۱۸ – ۱۸۵۰)	
۱۹۱۰	یوهانس دیدریک وان‌دروالس Johannes Diderik van der Waals	(۱۹۲۳ – ۱۸۳۷)	به‌خاطر کارش در مورد معادلهٔ حالت گازها و مایعات.
۱۹۱۱	ویلهلم وین Wilhelm Wien	(۱۹۲۸ – ۱۸۶۴)	به‌خاطر تحقیقاتش دربارهٔ قوانین حاکم بر تابش گرمایی.
۱۹۱۲	نیلس گوستاو دالن Nils Gustaf Dalen	(۱۹۳۷ – ۱۸۶۹)	به‌خاطر اختراع تنظیم‌کننده‌های خودکار، که در فانوسهای دریایی و راهنماهای شناور بکار می‌رود.

۱۹۱۳	هایک کامرلینگ اونس (۱۸۵۳ – ۱۹۲۶) Heike Kamerlingh Onnes		به‌خاطر پژوهشهایش در مورد خواص ماده در دماهای پایین، که منجر به تولید هلیم مایع هم شد.
۱۹۱۴	ماکس فون لاوئه (۱۸۷۹ – ۱۹۶۰) Max von Laue		به‌خاطر کشف پراش پرتوهای x از بلورها.
۱۹۱۵	ویلیام هنری براگ (۱۸۶۲ – ۱۹۴۲) William Henry Bragg		به‌خاطر خدماتشان در تحلیل ساختارهای بلوری به‌وسیلهٔ پرتوهای x.
	ویلیام لارنس براگ (۱۸۹۰ – ۱۹۷۱) William Lawrence Bragg		
۱۹۱۷	چارلز گلوور بارکلا (۱۸۷۷ – ۱۹۴۴) Charles Glover Barkla		به‌خاطر کشف پرتوهای x مشخصهٔ عناصر.
۱۹۱۸	ماکس پلانک (۱۸۵۸ – ۱۹۴۷) Max Planck		به‌خاطر کشف کوانتومهای انرژی.
۱۹۱۹	یوهانس اشتارک (۱۸۷۴ – ۱۹۵۷) Johannes Stark		به‌خاطر کشف اثر دوپلر در پرتوهای مثبت و شکافتگی خطوط طیفی در میدانهای الکتریکی.
۱۹۲۰	شارل ادوارد گیوم (۱۸۶۱ – ۱۹۳۸) Charles Edouard Guillaume		به‌خاطر کشف نابهنجاریها در آلیاژهای فولادی نیکل، که امکان اندازه‌گیریهای دقیقی را در فیزیک فراهم کرد.
۱۹۲۱	آلبرت اینشتین (۱۸۷۹ – ۱۹۵۵) Albert Einstein		به‌خاطر خدماتش به فیزیک نظری، و به‌ویژه به‌خاطر کشف اثر فوتوالکتریک.
۱۹۲۲	نیلس بور (۱۸۸۵ – ۱۹۶۲) Niels Bohr		به‌خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار اتمها و تابشهای ناشی از آنها.
۱۹۲۳	رابرت اندروز میلیکان (۱۸۶۸ – ۱۹۵۳) Robert Andrews Millikan		به‌خاطر تحقیقاتش در مورد بار الکتریکی بنیادی و اثر فوتوالکتریک.
۱۹۲۴	کارل مانگئورگ زیگبان (۱۸۸۶ – ۱۹۵۴) Karl Manne George Siegbahn		به‌خاطر کشفها و پژوهشهایش در زمینهٔ طیف‌نمایی پرتو ایکسی.
۱۹۲۵	جیمز فرانک (۱۸۸۲ – ۱۹۶۴) James Franck		به‌خاطر کشف قوانین حاکم بر برخورد الکترون با اتم.
	گوستاو هرتز (۱۸۸۷ – ۱۹۷۵) Gustav Hertz		
۱۹۲۶	ژان باتیست پرن (۱۸۷۰ – ۱۹۴۲) Jean Baptiste perrin		به‌خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار ناپیوستهٔ ماده و به‌خصوص کشف تعادل ته‌نشینی.
۱۹۲۷	آرتور هالی کامپتون (۱۸۹۲ – ۱۹۶۲) Arthur Holly Compton		به‌خاطر کشف اثری که به نام خودش معروف شد.
	چارلز تامسون ریز ویلسون (۱۸۶۹ – ۱۹۵۹) Charles Thomson Rees Wilson		به‌خاطر ابداع روش مرئی کردن مسیر ذرات باردار با چگالیدن بخار.
۱۹۲۸	اوئن ویلانز ریچاردسون (۱۸۷۹ – ۱۹۵۹) Owen Willans Richardson		به‌خاطر تحقیق در بارهٔ پدیدهٔ گرمایونی و به‌خصوص به‌خاطر کشف قانونی که به نام خودش معروف شد.
۱۹۲۹	لویی-ویکتور دوبروی (۱۸۹۲ – ۱۹۸۷) (Prince) Louis-Victor de Broglie		به‌خاطر کشف خصلت موجی الکترون.
۱۹۳۰	چاندراسکارا ونکاتا رامان (۱۸۸۸ – ۱۹۷۰) (Sir) Chandrasekhara Venkata Raman		به‌خاطر کارهایش در مورد پراکنش نور و کشف اثری که به نام خود او معروف شد.
۱۹۳۲	ورنر هایزنبرگ (۱۹۰۱ – ۱۹۷۶) Werner Heisenberg		به‌خاطر سهم مهمی که در ابداع مکانیک کوانتومی داشته است.

۱۹۳۳	اروین شرودینگر Erwin Schrodinger	(۱۸۸۷ – ۱۹۶۱)	به‌خاطر کشف و ابداع شکلهای جدید و پربار نظریهٔ اتمی.
	پاؤل آدرین موریس دیراک Paul Adrien Maurice Dirac	(۱۹۰۲ – ۱۹۸۴)	
۱۹۳۵	جیمز چادویک James Chadwick	(۱۸۹۱ – ۱۹۷۴)	به‌خاطر کشف نوترون.
۱۹۳۶	ویکتور فرانتس هس Victor Franz Hess	(۱۸۸۳ – ۱۹۶۴)	به‌خاطر کشف تابش کیهانی.
	کارل دیوید آندرسون Carl David Anderson	(۱۹۰۵ – ۱۹۹۱)	به‌خاطر کشف پوزیترون.
۱۹۳۷	کلینتون جوزف دیویسون Clinton Joseph Davisson	(۱۸۸۱ – ۱۹۵۸)	به‌خاطر کشف تجربی پراش الکترونها توسط بلورها.
	جورج پاگت تامسون George Paget Thomson	(۱۸۹۲ – ۱۹۷۵)	
۱۹۳۸	انریکو فرمی Enrico Fermi	(۱۹۰۱ – ۱۹۵۴)	به‌خاطر نشان دادن پرتوزایی مصنوعی بعضی عناصر در اثر دریافت تابش نوترون، و کشف بعضی واکنشهای هسته‌ای که با تاباندن نوترونهای کند ایجاد می‌شود.
۱۹۳۹	ارنست اورلاندو لارنس Ernest Orlndo Lawrence	(۱۹۰۱ – ۱۹۵۸)	به‌خاطر اختراع و تکمیل سیکلوترون و نتایج حاصل از آن، به‌خصوص در بارهٔ عناصر پرتوزای مصنوعی.
۱۹۴۳	اوتو اشترن Otto Stern	(۱۸۸۸ – ۱۹۶۹)	به‌خاطر سهمش در ابداع روش پرتو مولکولی و به خاطر کشف گشتاور مغناطیسی پروتون.
۱۹۴۴	ایزیدور ایزاک رابی Isidor Isaac Rabi	(۱۸۹۸ – ۱۹۸۸)	به‌خاطر ابداع روش تشدید برای ثبت خواص مغناطیسی هسته‌های اتمی.
۱۹۴۵	ولفگانگ پائولی Wolfgang Pauli	(۱۹۰۰ – ۱۹۵۸)	به‌خاطر کشف اصل طرد، که به اصل پائولی هم معروف است.
۱۹۴۶	پرسی ویلیامز بریجمن Percy Williams Bridgman	(۱۸۸۲ – ۱۹۶۱)	به‌خاطر اختراع وسیله‌ای برای تولید فشارهای فوق‌العاده زیاد و کشفهایی که از این طریق در زمینهٔ فیزیک فشارهای بالا داشته است.
۱۹۴۶	سر ادوارد ویکتور اپلتون Sir Edward Victor Appleton	(۱۸۹۲ – ۱۹۶۵)	به‌خاطر پژوهشهایش در مورد فیزیک جو بالایی، به‌خصوص به‌خاطر کشف لایهٔ معروف به اپلتون.
۱۹۴۸	پاتریک مینارد استوارت بلاکت Patrick Maynard Stuart Blackett	(۱۸۹۷ – ۱۹۷۴)	به‌خاطر تکمیل روش اتاقک ابری ویلسون، و واقعیتهایی که به وسیلهٔ این روش در زمینه‌های فیزیک هسته‌ای و تابش کیهانی کشف کرد.
۱۹۴۹	هیدکی یوکاوا Hideki Yukawa	(۱۹۰۷ – ۱۹۸۱)	به‌خاطر پیشگویی وجود مزونها بر پایهٔ تحقیقات نظری‌اش در بارهٔ نیروهای هسته‌ای.
۱۹۵۰	سیسل فرانک پاول Cecil Frank Powell	(۱۹۰۳ – ۱۹۶۹)	به‌خاطر تکمیل روش نورنگاشتی مطالعهٔ فرایندهای هسته‌ای و کشفهایش در مورد مزونها با استفاده از این روش.
۱۹۵۱	جان داگلاس کاکرافت (Sir) John Douglas Cockcroft	(۱۸۹۷ – ۱۹۶۷)	به‌خاطر کار پیشگامانه‌شان در مورد استحالهٔ هسته‌های اتمی به‌وسیلهٔ ذرات اتمی شتابدار.
	ارنست توماس سینتون والتون Ernest Thomas Sinton Walton	(۱۹۰۳–)	
۱۹۵۲	فلیکس بلوخ Felix Bloch	(۱۹۰۵ – ۱۹۸۳)	به‌خاطر طرح روشهای نو برای آزمایشهای دقیق مغناطیسی هسته‌ای و کشفهای مربوط به آن.

	ادوارد میلز پورسل Edward Mills Purcell	(–۱۹۱۲)	
۱۹۵۳	فریتس زرنیکه Frits Zernike	(۱۹۶۶ – ۱۸۸۸)	به‌خاطر ارائه روش تباین فاز، به‌خصوص به‌خاطر اختراع میکروسکوپ تباین فاز.
۱۹۵۴	ماکس بورن Max Born	(۱۹۷۰ – ۱۸۸۲)	به‌خاطر پژوهشهای بنیادی‌اش در مکانیک کوانتومی، به‌خصوص به‌خاطر تعبیر آماری تابع موج.
	والتر بوث Walther Bothe	(۱۹۵۷ – ۱۸۹۱)	به‌خاطر ابداع روش تطابق و کشفهایش با استفاده از این روش.
۱۹۵۵	ویلیز اوژن لمب Willis Eugne Lamb	(–۱۹۱۳)	به‌خاطر کشفهایش در مورد ساختار ریز طیف هیدروژن.
	پولی کارپ کوش Polykarp Kusch	(–۱۹۱۱)	به‌خاطر تعیین دقیق گشتاور مغناطیسی الکترون.
۱۹۵۶	ویلیام شاکلی William Shockley	(۱۹۸۹ – ۱۹۱۰)	به‌خاطر پژوهشهایشان در بارهٔ نیمرساناها و کشف اثر ترانزیستور.
	جان باردین John Bardeen	(۱۹۹۱ – ۱۹۰۸)	
	والتر هاوزر براتین Walter Houser Brattain	(۱۹۸۷ – ۱۹۰۲)	
۱۹۵۷	چن نینگ یانگ Chen Ning Yang	(–۱۹۲۲)	به‌خاطر پژوهش بنیادی‌شان در مورد قوانین پاریته که منجر به کشفهای مهمی در مورد ذرات بنیادی شد.
	تسونگ دائولی Tsung Dao Lee	(–۱۹۲۶)	
۱۹۵۸	پاول آلکسیویچ چرنکوف Pavel Aleksejevic Cerenkov	(–۱۹۰۴)	به‌خاطر کشف و تعبیر اثر چرنکوف.
	ایلیا میخائیلویچ فرانک Il'ja Michajlovic Frank	(۱۹۹۰ – ۱۹۰۸)	
	ایگور ایوانویچ تام Igor Evgen'evic Tamm	(۱۹۷۱ – ۱۸۹۵)	
۱۹۵۹	امیلیو جینو سگری Emilio Gino Segre	(۱۹۸۹ – ۱۹۰۵)	به‌خاطر کشف پادپروتون.
	اوئن چمبرلین Owen chamberlian	(–۱۹۲۰)	
۱۹۶۰	دونالد آرتور گلیزر Donald Arthur Glaser	(–۱۹۲۶)	به‌خاطر اختراع اتاقک حباب.
۱۹۶۱	روبرت هوفشتاتر Robert Hofstadter	(۱۹۹۰ – ۱۹۱۵)	به‌خاطر مطالعات بدیع‌اش در مورد پراکنش الکترون در هسته‌های اتمی و کشفهایش در بارهٔ ساختار نوکلئونها.
	رودولف لودویگ موسباثر Rudolf Ludwig Mössbauer	(–۱۹۲۹)	به‌خاطر تحقیقاتش در مورد جذب تشدیدی پرتوهای گاما و کشف اثری در همین زمینه که به نام خود او معروف شده است.
۱۹۶۲	لف داویدویچ لانداؤ Lev Davidovic Landau	(۱۹۶۸ – ۱۹۰۸)	به‌خاطر نظریه‌های بدیع‌اش در بارهٔ مادهٔ چگال، به‌خصوص در مورد هلیوم مایع.
۱۹۶۳	یوجین پال ویگنر Eugene Paul Wigner	(–۱۹۰۲)	به‌خاطر سهمش در تدوین نظریهٔ هستهٔ اتم و ذرات بنیادی، به‌خصوص از طریق کشف و کاربرد اصول بنیادی تقارن.

	ماریا جو پرت مایر Maria Goeppert Mayer	(۱۹۰۶ – ۱۹۷۲)	به‌خاطر کشفهایشان در مورد ساختار پوسته‌ای هسته.
	جی. هانس. دی. ینسن J. Hans D. Jensen	(۱۹۰۷ – ۱۹۷۳)	
۱۹۶۴	چارلز تاونز Charles H. Townes	(۱۹۱۵–)	به‌خاطر کارهای اساسی‌اش در زمینهٔ الکترونیک کوانتومی، که منجر به ساخت نوسانگرها و تقویت‌کننده‌ها بر پایه اصل میزر_لیزر شد.
	نیکولای باسوف Nikolai G. Basov	(۱۹۲۲–)	
	الکساندر پرو خوروف Alexander M. Prochorov	(۱۹۱۶–)	
۱۹۶۵	سن_ایتیر و توماناگا Sin- Itiro Tomonaga	(۱۹۰۶ – ۱۹۷۹)	به‌خاطر تحقیقات بنیادی‌شان در زمینهٔ الکترودینامیک کوانتومی که پیامدهای مهمی در فیزیک ذرات بنیادی داشت.
	جولیان شوینگر Julian Schwinger	(۱۹۱۸–)	
	ریچارد فاینمن Richard P. Feynman	(۱۹۱۸ – ۱۹۸۸)	
۱۹۶۶	آلفرد کاستلر Alfred Kastler	(۱۹۰۲ – ۱۹۸۴)	به‌خاطر کشف و توسعهٔ روشهای اپتیکی برای مطالعهٔ تشدید هرتزی در اتمها.
۲۹۶۷	هانس آلبرشت بته Hans Albrecht Bethe	(۱۹۰۶–)	به‌خاطر مشارکتهایش در نظریهٔ واکنشهای هسته‌ای، به‌خصوص کشفهایش در مورد تولید انرژی در ستاره‌ها.
۱۹۶۸	لوئیس آلوارز Luise W. Alvarez	(۱۹۱۱ – ۱۹۸۸)	به‌خاطر سهم تعیین‌کننده‌اش در توسعهٔ فیزیک ذرات بنیادی، به‌خصوص با کشف تعداد زیادی از حالتهای تشدیدی.
۱۹۶۹	موری گل_مان Murray Gell-Mann	(۱۹۲۹–)	به‌خاطر مشارکتش در طبقه‌بندی ذرات بنیادی و برهم‌کنشهای آنها، و کشفهایش در این مورد.
۱۹۷۰	هانس آلون Hannes Alven	(۱۹۰۸–)	به‌خاطر کار اساسی و کشفهایش در زمینهٔ مغناطوهیدرودینامیک، با کاربردهای مفید در فیزیک پلاسما.
	لویی نل Louis Neel	(۱۹۰۴–)	به‌خاطر پژوهش بنیادی و کشفهایش در بارهٔ پادفرومغناطیس و فری‌مغناطیس، با کاربردهای مهمی در فیزیک حالت جامد.
۱۹۷۱	دنیس گابور Dennis Gabor	(۱۹۰۰ – ۱۹۷۹)	به‌خاطر کشف اصول تمام‌نگاری (هولوگرافی).
۱۹۷۲	جان باردین John Bardeen	(۱۹۰۸ – ۱۹۹۱)	به‌خاطر پرداختن نظریه‌ای برای ابررسانایی
	لئون کوپر Leon N. Cooper	(۱۹۳۰–)	
	رابرت شریفر J. Robert Schrieffer	(۱۹۳۱–)	
۱۹۷۳	لئو ایزاکی Leo Esaki	(۱۹۲۵–)	به‌خاطر کشف پدیدهٔ تونل‌زنی در نیمرساناها.
	ایوار جیاور Ivar Giaever	(۱۹۲۹–)	به‌خاطر کشف پدیدهٔ تونل‌زنی در ابررساناها.
	برایان جوزفسون Brian D. Josephson	(۱۹۴۰–)	به‌خاطر پیشگویی نظری خصوصیات عبور ابر جریان از سد تونلی.

۱۹۷۴	آنتونی هیویش	(۱۹۲۴–) Antony Hewish	به‌خاطر کشف تپ‌اخترها.
	مارتین رایل	(۱۹۱۸ – ۱۹۸۴) (Sir) Martin Ryle	به‌خاطر کار پیشگامانه‌اش در زمینهٔ نجوم رادیویی.
۱۹۷۵	آگه بور	(۱۹۲۲–) Aage Bohr	به‌خاطر کشف ارتباط میان حرکت جمعی و حرکت ذره، و تدوین نظریه‌ای در مورد ساختار هستهٔ اتم بر این اساس.
	بن ماتلسون	(۱۹۲۶–) Ben Mottelson	
	جیمز رینواتر	(۱۹۱۷ – ۱۹۸۶) James Rainwater	
۱۹۷۶	برتون ریشتر	(۱۹۳۱–) Burton Richter	به‌خاطر کشف یک ذرهٔ بنیادی مهم (به‌طور مستقل).
	ساموئل چائوچونگ تینگ	(۱۹۳۶–) Samuel Chao Chung Ting	
۱۹۷۷	فیلیپ وارن اندرسون	(۱۹۲۳–) Philip Warren Anderson	به‌خاطر تحقیقات نظری بنیادی‌شان دربارهٔ سیستمهای مغناطیسی و سیستمهای نامنظم.
	نویل فرانسیس موت	(۱۹۰۵–) Nevil Francis Mott	
	جان هاسبروگ وان ولک	(۱۸۹۹ – ۱۹۸۰)	
۱۹۷۸	پیتر کاپیتزا	(۱۸۹۴ – ۱۹۸۴) Peter L. Kapitza	به‌خاطر ابداعات و کشفهای اساسی در فیزیک دماهای پایین.
	آرنو پنزیاس	(۱۹۲۶–) Arno N. Penzias	به‌خاطر کشف تابش میکروموجی زمینهٔ کیهانی.
	رابرت وودرو ویلسون	(۱۹۳۶–) Robert Woodrow Wilson	
۱۹۷۹	شلدون لی گلاشو	(۱۹۳۲–) Sheldon lee Glashow	به‌خاطر تدوین مدل وحدت‌یافتهٔ نیروهای ضعیف و الکترومغناطیسی، و به‌خاطر پیشگویی وجود جریانهای خنثی.
	عبدالسلام	(۱۹۲۶–) Abdus Salam	
	استیون واینبرگ	(۱۹۳۳–) Steven Weinberg	
۱۹۸۰	جیمز کرونین	(۱۹۳۱–) James W. Cronin	به‌خاطر کشف موارد نقض اصول تقارن بنیادی در واپاشی مزونهای Kی خنثی.
	وال فیچ	(۱۹۲۳–) Val L. Fitch	
۱۹۸۱	نیکولاس بلومبرگن	(۱۹۲۰–) Nicolaas Bloembergen	به‌خاطر سهمشان در تکمیل طیف‌نمایی لیزری.
	آرتور لئونارد شاؤلو	(۱۹۲۱–) Arthur Leonard Schawlow	
	کای زیگبان	(۱۹۱۸–) Kai M. Siegbahn	به‌خاطر کارهایش در پیشبرد طیف‌نمایی الکترونی با تفکیک زیاد.
۱۹۸۲	کنت ویلسون	(۱۹۳۶–) Kenneth Geddes Wilson	به‌خاطر ابداع روشی برای تحلیل پدیده‌های بحرانی.

۱۹۸۳	سوبرامانیان چاندراسکار	(۱۹۱۰–) Subrehmanyan Chandrasekhar	به‌خاطر مطالعات نظری‌اش دربارهٔ ساختار و تحول ستاره‌ها.
	ویلیام فاوْلر	(۱۹۱۱–) William A. Fowler	به‌خاطر مطالعاتش در مورد تشکیل عناصر شیمیایی در عالم.
۱۹۸۴	کارلو روبیا	(۱۹۳۴–) Carlo Rubbia	به‌خاطر سهم تعیین‌کننده‌شان در "پروژهٔ بزرگ "که به کشف ذرات میدانی W و Z منجر شد.
	سایمون وان درمیر	(۱۹۲۵–) Simon Van Der Meer	
۱۹۸۵	کلاؤس فون کلیتسینگ	(۱۹۴۳–) Klaus von Klizing	به‌خاطر کشف اثر کوانتومی هال.
۱۹۸۶	ارنست روسکا	(۱۹۰۶–) Ernst Ruska	به‌خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی.
	گرد بینیگ	(۱۹۴۷–) Gerd Binnig	به‌خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی تونلی روبشی.
	هاینریش روهرر	(۱۹۳۳–) Heinrich Rohrer	
۱۹۸۷	کارل آلکس مولر	(۱۹۲۷–) Karl Alex Müller	به‌خاطر کشف ابررسانایی گرم.
	گئورگ بدنورز	(۱۹۵۰–) J. Georg Bednorz	
۱۹۸۸	لیون لدرمن	(۱۹۲۲–) Leon M. Lederman	به‌خاطر آزمایشهایشان با باریکه‌های نوترینو و کشف نوترینوی موئون.
	ملوین شوارتز	(۱۹۳۲–) Melvin Schwartz	
	جک استینبرگر	(۱۹۲۱–) Jack Steinberger	
۱۹۸۹	هانس دهملت	(۱۹۲۲–) Hans G. Dehmelt	به‌خاطر ابداع فنی برای دام‌اندازی اتمهای منفرد
	ولفگانگ پاؤل	(۱۹۱۳–) Wolfgang Paul	
	نورمن رمزی	(۱۹۱۵–) Norman F. Ramsey	به‌خاطر کشفهایش در زمینهٔ طیف‌نمایی تشدیدی اتمی، که به‌ساخت میرزهیدروژن و ساعت اتمی منجر شد.
۱۹۹۰	ریچارد تیلور	(۱۹۲۹–) Richard E. Taplor	به‌خاطر آزمایشهایشان دربارهٔ پراکنش الکترونها از هسته‌ها، که حاکی از حضور کوارک در نوکلئونهاست.
	جرومی فریدمن	(۱۹۳۰–) Jerome I. Friedman	
	هنری کندال	(۱۹۲۶–) Henry W. Kendall	
۱۹۹۱	پی‌یر ژیل دژن	(۱۹۳۲–) Pierre-Gilles de Gennes	به‌خاطر کشفهایی در مورد آرایش مولکولها در موادی مثل بلورهای مایع، ابررساناها، و پولیمرها.
۱۹۹۲	ژرژ شارپاک	(۱۹۳۳–) Georges Charpak	به‌خاطر موفقیتهایش در طراحی آشکارسازهای الکترونیکی سریع برای ذرات پرانرژی

پاسخ مسائل شماره فرد

فصل ۱

۳. ۵۲٫۶min؛ ۲٫۵درصد
۵. −۴۴٪ درصد
۷. (الف) بله. (ب)۸٫۶s
۹. ۷۲۰ روز.
۱۱. ۵۵s؛ تقریباً یک دقیقه.
۱۳. ۲ روز و ۵ ساعت.
۱۵. (الف) ۱۰۰m؛ ۸٫۵۶m؛ ۲۸٫۱ft
(ب) ۱mi؛ ۱۰۹m؛ ۳۵۸ft
۱۷. $۱٫۸۸ \times ۱۰^{۲۲}\mathrm{cm}^{۳}$
۱۹. (الف) $۴٫۰۰ \times ۱۰^{۴}\mathrm{km}$
(ب) $۵٫۱۰ \times ۱۰^{۸}\mathrm{km}^{۲}$
(ج) $۱٫۰۸ \times ۱۰^{۱۲}\mathrm{km}^{۳}$
۲۱. $۲٫۸۶ \times ۱۰^{-۳}$ سال نوری بر قرن
۲۳. (الف) $۴٫۸۵ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{pc}$؛ $۱٫۵۸ \times ۱۰^{-۵}\mathrm{ly}$
(ب) $۹٫۴۸ \times ۱۰^{۱۲}\mathrm{km}$؛ $۳٫۰۸ \times ۱۰^{۱۳}\mathrm{km}$
۲۵. (الف) ۳۹۰
(ب) $۵٫۹ \times ۱۰^{۷}$
(ج) ۳۵۰۰km
۲۷. $۵٫۹۷ \times ۱۰^{۲۶}$
۲۹. نیویورک
۳۱. ۸۴۰km
۳۳. ۱۳۲kg/s
۳۷. ۶۰۵٫۷۸۰۲۱۱nm
۳۹. (الف) $۴۳٫۲\mathrm{cm}^{۲}$
(ب) $۴۳\mathrm{cm}^{۲}$
۴۱. $\sqrt{Gh/c^{۳}} = ۴٫۰۵ \times ۱۰^{-۳۵}\mathrm{m}$

فصل ۲

۱. ۸۱ft(۲۴m)
۳. ۲cm/y
۵. ۴۸mi/h (این شخص علاوه بر سفر هفتگی راههای دیگری هم رفته است.)
۷. (الف) ۴۵٫۰mi/h(۷۲٫۴km/h)
(ب) ۴۲٫۸mi/h(۶۸٫۸km/h)
(ج) ۴۳٫۹mi/h(۷۰٫۶km/h)
۹. (الف) ۰، ۰، −۲، ۰، ۱۲m
(ب) −۲، ۱۲m
(ج) ۷، ۰m/s
۱۱. (الف) ۵٫۷ft/s
(ب) ۷٫۰ft/s
۱۳. (الف) ۲۸٫۵cm/s
(ب) ۱۸٫۰cm/s
(ج) ۴۰٫۵cm/s
(د) ۲۸٫۱cm/s
(ه) ۳۰٫۴cm/s
۱۵. $-۲\mathrm{m/s}^{۲}$
۱۹. (الف) $OA : +,-$؛ $AB : ۰,۰$
$BC : +,+$؛ $CD : +,۰$
(ب) خیر.
۲۱. (ه) وضعیتهای الف، ب، و د
۲۳. (الف) ۸۰m/s
(ب) ۱۱۰m/s
(ج) $۲۰\mathrm{m/s}^{۲}$
۲۵. (ب) −۳۰٫۰، −۲۰٫۰، −۱۰٫۰، ۰٫۰m/s
(ج) −۴۰٫۰، −۲۰٫۰، ۰٫۰، ۲۰٫۰، ۴۰٫۰، ۶۰٫۰m/s
(ه) $۲۰٫۰\mathrm{m/s}^{۲}$، $۲۰٫۰\mathrm{m/s}^{۲}$، $۲۰٫۰\mathrm{m/s}^{۲}$
۲۷. (ب) ۱۹m/s
(ج) ۳۱m
۲۹. $۲٫۸\mathrm{m/s}^{۲}(۹٫۴\mathrm{ft/s}^{۲})$
۳۱. ۵۶۰ms
۳۳. $۱٫۴ \times ۱۰^{۱۵}\mathrm{m/s}^{۲}$
۳۵. ۲٫۶s
۳۷. (الف) $۴٫۵ \times ۱۰^{۴}\mathrm{ft/s}^{۲}$
(ب) ۵٫۸ms
۳۹. (الف) $۵٫۷۱\mathrm{m/s}^{۲}$
(ب) ۳٫۶۸s
(ج) ۵٫۷۸s
(د) ۹۵٫۴m
۴۱. (الف) ۶۰٫۶s
(ب) ۳۶٫۴m/s
۴۳. (الف) ۰٫۷۵s
(ب) ۵۰m

۴۵. (الف) ۸۲m
(ب) ۱۹m/s
۴۷. (الف) ۱۲ft/s^۲(۳٫۶m/s^۲)
(ب) ۳٫۷ft/s(۱٫۴m/s)
۴۹. (الف) ۰٫۷۴s
(ب) −۲۰ft/s^۲
۵۱. (الف) ۴۸٫۵m/s
(ب) ۴٫۹۵s
(ج) ۳۴٫۳m/s
(د) ۳٫۵۰s
۵۳. (الف) ۳۲٫۴m/s
(ب) ۶٫۶۲s
۵۵. عطارد
۵۷. ۱٫۲۳cm، ۴٫۹۰cm، ۱۱٫۰cm، ۱۹٫۶cm، ۳۰٫۶cm
۵۹. ۳٫۰m(۹٫۸ft)
۶۱. (الف) ۳۵۰ms
(ب) ۸۲ms
۶۳. ۲۲٫۲cm و ۸۸٫۹cm زیر دهانه.
۶۵. ۱۳۰m/s^۲، بالا
۶۷. (الف) ۳٫۴۱s
(ب) ۵۷٫۰m
۶۹. تقریباً ۰٫۳s
۷۱. (الف) ۱۷٫۱s
(ب) ۲۹۳m
۷۵. ۶٫۸cm

فصل ۳

۱. جابه‌جاییها باید (الف) موازی، (ب) پادموازی، و (ج) عمود بر هم باشند.
۳. (الف) ۳۷۰m، ۵۷° شرق شمال.
(ب) اندازهٔ جابه‌جایی= ۳۷۰ متر؛ مساحت طی‌شده= ۷۲۰ متر.
۷. (الف) ۴٫۵ واحد، ۵۲° شمال شرق.
(ب) ۸٫۴ واحد، ۲۵° جنوب شرق
۹. والپول (زندان ایالتی)
۱۱. (الف) ۴٫۹m، (ب) ۱۲m
۱۳. ۴٫۷۶km
۱۵. (الف) ۲۸m، و (ب) ۱۳m
۱۷. (الف) ۱۰**i** + ۱۲**j** + ۱۴**k**
(ب) ۲۱ft
(ج) می‌تواند مساوی یا بزرگتر باشد، ولی نه کوچکتر
(د) ۲۶ft
۱۹. (الف) ۳**i** − ۲**j** + ۵**k**
(ب) ۵**i** − ۴**j** − ۳**k**
(ج) −۵**i** + ۴**j** + ۳**k**
۲۱. (الف) ۱۴۰۰**i** + ۲۱۰۰**j** − ۴۸**k**
(ب) صفر
۲۳. (الف) r_x = ۲٫۵۰، r_y = ۱۵٫۳
(ب) ۱۵٫۵ (ج) ۸۰٫۷°
۲۷. (الف) a**i** + a**j** + a**k**، a**i** + a**j** − a**k**، a**i** − a**j** − a**k**، a**i** − a**j** + a**k**
(ب) ۵۴٫۷° (ج) $a\sqrt{۳}$
۳۳. (الف) −۱۹ (ب) ۲۷، جهت $+z$
۳۹. (الف) −۲۱ (ب) −۹
(ج) ۵**i** − ۱۱**j** − ۹**k**
۴۱. (الف) صفر (ب) −۱۶ (ج) −۹
۴۳. (الف) ۲٫۹۷ (ب) ۱٫۵۱**i** − ۲٫۶۷**j** − ۱٫۳۶**k**
(ج) ۴۸٫۵°
۴۹. ۷۰٫۵°

فصل ۴

۱. (الف) ۹۲۰mi، ۶۳° جنوب شرق.
(ب) ۴۱۰mi/h، ۶۳° جنوب شرق.
(ج) ۵۵۰mi/h
۳. (الف) ۳٫۹km/h (ب) ۱۳°
۵. (الف) ۲۴ns (ب) ۲٫۷mm
(ج) ۹٫۶ × ۱۰^{۸}cm/s؛ ۲٫۳ × ۱۰^{۸}cm/s
۷. (الف) ۸t**j** + **k** (ب) ۸**j** (ج) سهمی
۹. ۶۰۰
۱۱. (الف) ۵۱۴ms (ب) ۹٫۹۴ft/s
۱۳. (الف) ۱۸cm (ب) ۱٫۹m
۱۵. (الف) ۳٫۰۳s (ب) ۷۵۸m (ج) ۲۹٫۷m/s
۱۷. خیر
۱۹. (الف) ۱٫۱۶s (ب) ۱۳٫۰m
(ج) ۱۸٫۸m/s؛ ۵٫۵۶m/s (د) خیر
۲۱. ۷۶٫۰°
۲۳. (الف) ۹۹ft (ب) ۹۰ft/s (ج) ۱۸۰ft
۲۵. (الف) ۲۸۵km/h (ب) ۳۳°
۲۷. (الف) ۳۱۰ms (ب) ۱٫۹m و ۲٫۹m بالاتر از دستها.
۲۹. سومی
۳۱. بله
. (الف) ۲۶۰m/s (ب) ۴۵s
۳۵. ۲۳ft/s
۳۷. (الف) ۹٫۸s (ب) ۲۷۰۰ft
۳۹. تقریباً ۴۰m(۱۳۰ft)

۴۱. (الف) ۲۰cm (ب) خیر؛ توپ ۴٫۴cm بالاتر از زمین به تور می‌خورد.

۴۳. بین زوایای °۳۱ و °۶۳ بالای افق.

۴۵. ۱۱۵ft/s

۴۷. (الف) $D = v\sqrt{(۲L/g)\sin\theta} - L\cos\theta$

(ب) پرتابه در صورتی که D مثبت باشد از بالای سر ناظر می‌گذرد و اگر D منفی باشد، به ناظر نمی‌رسد.

۴۹. ۵٫۶۶s

۵۱. $۸٫۹۸ \times ۱۰^{۲۲}\mathrm{m/s^۲}$

۵۳. (الف) ۷٫۴۹km/s (ب) $۸٫۰۰\mathrm{m/s^۲}$

۵۵. (الف) ۹۴cm (ب) ۱۹m/s (ج) $۲۴۰۰\mathrm{m/s^۲}$

۵۷. (الف) ۱۳۰km/s (ب) $۸۵۰\mathrm{km/s^۲}$

۶۱. (الف) ۹۲ (ب) ۹٫۶ (ج) $(۹٫۶)^۲ = ۹۲$

۶۳. $۲٫۶\mathrm{cm/s^۲}$

۶۵. (الف) $۳۳٫۶\mathrm{m/s^۲}$ (ب) $۸۹٫۷\mathrm{m/s^۲}$

۶۷. ۳۶s ثانیه؛ خیر

۶۹. باد از سمت غرب با سرعت ۵۵mi/h می‌وزد.

۷۱. ۳۱m/s

۷۵. (الف) ۵٫۸m/s (ب) ۱۷m (ج) °۶۷ (د) °۴۹

۷۷. ۱۷۰km/h؛ °۷٫۳ جنوب غرب

۷۹. (الف) °۳۰۰ برخلاف جریان (ب) ۶۹min

(ج) ۸۰min (د) ۸۰min

(ه) عمود بر جریان؛ ۶۰min

۸۱. (الف) سر قایق باید °۲۵ به‌طرف بالای رودخانه گرفته شود.

(ب) ۰٫۲۱h

۸۳. $۰٫۸۳c$

۸۵. (ب) $t = ۲٫۱۶\mathrm{s}$، $x = ۹۷٫۷\mathrm{m}$، $y = ۲۲٫۸\mathrm{m}$

(ج) $t = ۴٫۳۱\mathrm{s}$، $x = ۱۹۵\mathrm{m}$، $v_x = ۴۵٫۳\mathrm{m/s}$، $v_y = -۲۱٫۱\mathrm{m/s}$

فصل ۵

۱. ۶٫۳y

۳. (الف) $۱٫۰ \times ۱۰^{-۱۵}\mathrm{N}$ (ب) $۸٫۹ \times ۱۰^{-۳۰}\mathrm{N}$

۵. $۸۰\mathrm{cm/s^۲}$

۷. ۶۵۰۰N

۹. (الف) $۳٫۱\mathrm{cm/s^۲}$ (ب) $۱٫۲ \times ۱۰^{۵}\mathrm{km}$

(ج) ۲٫۷km/s

۱۱. (الف) $۴۲\hat{i} + ۳۴\hat{j}, \mathrm{ms}$ (ب) $۶۳۰\hat{i} + ۲۵۰\hat{j}, \mathrm{m}$

۱۳. (الف) $۱٫۳۹ \times ۱۰^{۸}\mathrm{N}$؛ $۶٫۹۴ \times ۱۰^{۶}\mathrm{N}$

(ب) ۴٫۱۱y؛ ۴٫۱۹y

۱۵. (الف) $۰٫۶۲\mathrm{m/s^۲}$ (ب) $۰٫۱۳\mathrm{m/s^۲}$ (ج) ۲٫۶m

۱۷. (الف) ۴۴٫۴slug؛ ۱۴۲۰lb

(ب) ۴۱۲kg؛ ۴۰۴۰N

۱۹. (الف) ۱۲٫۲N؛ ۲٫۶۵kg (ب) صفر؛ ۲٫۶۵kg

۲۱. ۱۶۰۰lb

۲۳. $۱٫۱۹ \times ۱۰^{۶}\mathrm{N}$ (۱۳۳ تن)

۲۵. (الف) ۱٫۸mN (ب) ۳٫۳mN

۲۷. ۰٫۱۵N

۲۹. (الف) $۲۱۰\mathrm{m/s^۲}(۷۱۰\mathrm{ft/s^۲})$

(ب) ۱۷kN(۴۰۰۰lb)

۳۱. (الف) ۷٫۳kg(۰٫۵۰slug)

(ب) ۸۹N(۲۰lb)

۳۳. (الف) $۲٫۱\mathrm{m/s^۲}$ (ب) ۱۲۰N (ج) $۲۱\mathrm{m/s^۲}$

۳۵. (الف) $۱٫۸\mathrm{m/s^۲}$ (ب) ۳٫۸m/s

(ج) ۴٫۰m (د) °۱۱

۳۷. ۱۸٫۴kN

۳۹. (ب) $۱۲\mathrm{ft/s^۲}$ (ج) °۸٫۹

۴۱. ۳۳m/s

۴۳. (الف) ۷۳۰N (ب) ۱۳۰۰N

۴۵. (الف) ۳۲۶۰N (ب) ۲۷۲۰kg (ج) $۱٫۲۰\mathrm{m/s^۲}$

۴۷. (الف) $۵٫۰ \times ۱۰^{۵}\mathrm{N}$ (ب) $۱٫۴ \times ۱۰^{۶}\mathrm{N}$

۴۹. $۲M\left(\frac{a}{a+g}\right)$

۵۱. (الف) $g\sin\theta$، به‌طرف پایین شیب

(ب) $g\sin\theta$، به طرف پایین شیب

(ج) $(g-a)\sin\theta$، به‌طرف پایین شیب

(د) $(g+a)\sin\theta$، به‌طرف پایین شیب

(ه) صفر (و) $m(g-a)\cos\theta$

۵۳. (الف) ۶٫۸m/s (ب) بله، می‌تواند در حین سقوط، از طناب بالا برود.

۵۵. (الف) $۰٫۹۷\mathrm{m/s^۲}$

(ب) $T_۱ = ۱٫۲\mathrm{N}$؛ $T_۲ = ۳٫۵\mathrm{N}$

۵۷. (الف) ۱۳۵N (ب) ۴۵٫۳N (ج) ۷۵٫۴N

۵۹. (الف) $۰٫۲۱۷\mathrm{m/s^۲}$ (ب) ۱۷٫۸N

۶۱. (الف) ۱۲٫۱kN (ب) ۱۰٫۵kN

(ج) ۱٫۶۰kN به‌طرف وزنهٔ تعادل

۶۳. (الف) ۳۷N (ب) ۵۵N

(ج) $۳۶\mathrm{m/s^۲}$، به‌طرف بالا

۶۵. (ب) $P/(m+M)$ (ج) $PM/(m+M)$

(د) $P(m+۲M)/۲(m+M)$

۶۷. ۱۳۰lb

فصل ۶

۱. °۲٫۳۰

۳. $۹٫۳\mathrm{m/s^۲}$

۵. ۹۰۰N

۷. (الف) ۹٫۱kN (ب) ۹٫۰kN

۹. (الف) خیر (ب) نیروی ۱۲ پوندی به‌طرف چپ و نیروی ۵ پوندی به‌طرف بالا

۱۱. (الف) ۱۱٫۱N (ب) ۴۷٫۳N (ج) ۴۰٫۱N

۱۵. (الف) $v_\circ^2/4g\sin\theta$ (ب) خیر

۱۷. (الف) ۱۰kg (ب) ۲٫۷m/s^2

۱۹. (الف) ۶۱N (ب) ۶۶N (ج) ۵٫۹kN

۲۱. (الف) ۷۰lb (ب) ۴٫۶ft/s^2

۲۳. (ب) ۳۰MN

۲۵. (الف) ۱٫۲۴m/s^2 (ب) ۱۳٫۴N

۲۷. $g(\sin\theta - \sqrt{2}\mu_k\cos\theta)$

۲۹. (الف) ۳٫۴۶m/s^2 (ب) ۰٫۹۱۰N در کشش
(ج) ۳٫۴۶m/s^2؛ ۰٫۹۱۰N در تراکم

۳۱. (الف) ۷٫۶m/s^2 (ب) ۰٫۸۶m/s^2

۳۳. (الف) (۳۲۰۰N)۷۳۰lb (ب) ۰٫۳۰

۳۵. (الف) ۰٫۴۶ (ب) ۰٫۹۲

۳۷. ۸۷۰N؛ ۱۷°

۳۹. ۰٫۰۳۲

۴۱. (الف) ۰٫۴۳ (ب) ۴۲m

۴۳. (الف) ۱۷۵lb (ب) ۵۰٫۵lb

۴۵. (الف) ۳۰cm/s
(ب) ۱۷۰cm/s^2، در امتداد شعاع به طرف مرکز
(ج) ۲٫۹mN
(د) ۰٫۴۰

۴۷. ۲٫۳۲km

۴۹. (الف) در پایین دایره (ب) ۳۱ft/s

۵۱. (الف) ۰٫۰۳۷N (ب) ۹٫۷۷N

۵۳. (الف) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\tan\theta+\mu_s)}{r(1-\mu_s\tan\theta)}}$
(ب) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\tan\theta-\mu_s)}{r(1+\mu_s\tan\theta)}}$

۵۵. (الف) ۲۳۵m/s (ب) ۱۰۷m/s^2 (ج) ۲۳۲N

۵۷. (الف) ۰٫۶۳۲$F_\circ T/m$ (ب) ۰٫۳۶۸$F_\circ T^2/m$

۵۹. $\sqrt{mg/b}$

۶۱. ۲٫۰ × ۱۰$^{-۵}$N.s/m

۶۳. ۱٫۳۰m/s

۶۵. (الف) $\left(\frac{m}{b}\right)\ln(v_i/v_f)$
(ب) ۱۹s

۶۷. ۳۷۰m

۶۹. (الف) ۱۱٫۷s (ب) ۵۹٫۸m/s (ج) ۰٫۶۱۰

۷۱. ۸۱۹m، ۸۳۸m، ۸۳۳m، ۸۰۵m، ۷۶۲m، ۳۰۰

۷۳. (الف) $t =$ ۱٫۹۵s، $x =$ ۸۰٫۴m، $y =$ ۲۰٫۰m
$v_x =$ ۳۷٫۳m/s، $v_y =$ ۰، $a_x = -$۳٫۷۳m/s^2،
$a_y = -$۹٫۸۰m/s^2
(ب) $t =$ ۱٫۷۹s، $x =$ ۶۸٫۳m، $y =$ ۱۷٫۸m
$v_x =$ ۳۱٫۷m/s، $v_y =$ ۰، $a_x = -$۶٫۳۳m/s^2،
$a_y = -$۹٫۸۰m/s^2؛
(ج) ۱۵۱m، ۱۲۱m
(د) برای $b =$ ۰٫۱۰s^{-1}: $v_x =$ ۳۰٫۳m/s،
$v_y = -$۱۸٫۵m/s
برای $b =$ ۰٫۲۰s^{-1}: $v_x =$ ۲۱٫۱m/s، $v_y = -$۱۶٫۴m/s

فصل ۷

۱. (الف) ۵۸۰J (ب) صفر (ج) صفر

۳. (الف) ۴۳۰J (ب) −۴۰۰J (ج) صفر

۵. (الف) $-\frac{3}{4}Mgd$ (ب) Mgd

۷. (الف) ۲۱۶۰J (ب) −۱۴۳۰J

۹. (الف) ۲۱۵lb (ب) ۱٫۰۱ × ۱۰^{4}ft.lb
(ج) ۴۸٫۰ft (د) ۱٫۰۳ × ۱۰^{4}ft.lb

۱۱. ۸۰۰J

۱۳. $\frac{3}{2}F_\circ x_\circ$

۱۵. (الف) ۲۳mm (ب) ۴۵N

۱۷. (الف) ۱۳۵N (ب) ۶۰٫۰J

۱۹. ۱۲۰۰km/s

۲۱. $Ab: +$؛ $Bc: 0$؛ $CD: -$؛ $DE: +$

۲۳. ۱۰۰ft، خیر

۲۵. (۲۴٫۴J)۲۰٫۲ft.lb

۲۷. ۲٫۴۱ (پدر)، ۴٫۸۲m/s (پسر)

۲۹. (الف) ۹٫۰ × ۱۰^4 مگاتن TNT (ب) ۴۵km

۳۱. ۶٫۵۵m/s

۳۳. (الف) ۳۰۴mJ (ب) −۱٫۷۵J (ج) ۳٫۳۲m/s
(د) ۲۲٫۵cm

۳۵. (۰٫۹۷hp)۷۲۰W

۳۷. ۲۴W

۳۹. (الف) ۲٫۴۵ × ۱۰^{5}ft.lb (ب) ۰٫۶۱۹hp

۴۱. ۹۰٫۳kN

۴۳. ۲۵hp

۴۵. (الف) ۰٫۷۷mi (ب) ۷۱kW

۴۷. ۱۶٫۶kW

۴۹. (ب) mtv_f^2/t_f^2

۵۱. ۲٫۶۶hp

۵۳. (ب) ۱٫۹۵

۵۵. (الف) ۱۰٫۰kW (ب) ۲٫۹۷kJ

۵۷. ۶۹hp

۶۱. (الف) ۰٫۱۳c (ب) ۴٫۶keV (ج) کمتر از ۱٫۳ درصد
۶۳. (الف) ۷۹٫۱keV (ب) ۳٫۱۱MeV (ج) ۱۰٫۹MeV

فصل ۸

۱. ۱۱۰MN/m
۳. (الف) ۷٫۸MJ (ب) ۶٫۲
۵. ۲٫۱۵m/s
۷. (الف) ۲۷٫۰kJ (ب) ۲٫۹۴kJ
(ج) ۱۵۸m/s؛ a و b
۹. (الف) ۲٫۵۶J (ب) ۱۱٫۱m/s
۱۱. ۸۳۰ft
۱۳. ۲٫۷۵m/s
۱۵. (الف) ۱۳۰۰MW (ب) ۱۳۷M$
۱۹. ۴٫۲۴m
۲۱. (الف) ۳۴٫۲ft/s (ب) ۴٫۳۲m
۲۳. $mgL/32$
۲۵. ۱۱٫۱cm
۲۷. (الف) ۸٫۰۶mg، ۸۲٫۹° به‌طرف چپ خط قائم
(ب) $5R/2$
۲۹. (الف) $U(x) = -Gm_1m_2/x$
(ب) $Gm_1m_2d/x_1(x_1+d)$
۳۱. (الف) ۶۹٫۲J (ب) ۷٫۹۹m/s (ج) پایستار
۳۵. (الف) ۴۴٫۶cm (ب) ۳٫۴۷cm
۳۷. (الف) $\sqrt{5gR}$ (ب) $\theta = \sin^{-1}(1/3)$
۴۱. (ج) -1.2×10^{-19}J (د) 2.2×10^{-19}J
(ه) $\approx 1 \times 10^{-9}$N، به‌طرف M
۴۵. (الف) $-U_0(r_0 r^{-2} + r^{-1})e^{-r/r_0}$
(ب) ۰٫۱۴، ۰٫۰۰۷۸، 6.8×10^{-6}
۴۷. (الف) ۳٫۰۲kJ (ب) ۳۹۱J
(ج) −۲٫۶۳kJ
۴۹. ۳۹kW
۵۱. ۴۷۲kJ
۵۳. ۴٫۱۹m
۵۵. ۶۵٫۱cm/s
۵۷. (الف) ۴۸٫۷m/s (ب) ۶۴٫۵kJ
۵۹. (الف) ۲۴٫۰ft/s (ب) ۳٫۰۰ft/s
(ج) ۹٫۰۰ft (د) ۴۸٫۸ft
۶۱. (الف) ۱۰٫۸ PJ (ب) ۲۶۳۰۰۰y
۶۳. ۱٫۱۰kg کم می‌شود
۶۵. ۲۶۶ برابر محیط استوای زمین
۶۷. ۱۹۱
۶۹. ۲٫۲۱eV
۷۱. (الف) −۱۲٫۵kJ (ب) ۲٫۷۰kJ
(ج) −۹٫۸۰kJ (د) ۱٫۷۰kJ (ه) ۱۰۰J
(و) $x = 2.95$m، $y = -2.95$m
۷۳. (الف) ۰٫۵۴۱J، ۰٫۵۴۱J، ۰٫۵۴۱J
(ب) ۰٫۵۴۱J، ۱٫۰۸J، ۰٫۳۸۳J

فصل ۹

۱. (ج)

$$x_1 = x_{cm} - (m_2/M)(L + a_i\cos\omega t)$$
$$x_2 = x_{cm} + (m_1/M)(L + d_i\cos\omega t)$$
$$v_1 = (m_2/M)d_i\omega\sin\omega t$$
$$v_2 = -(m_1/M)d_i\omega\sin\omega t$$

۳. ۴۶۴۰km (۱۷۳۰km زیر سطح زمین)
۵. ۷۵٫۲km/h
۷. (الف) پایین؛ $mv/(m+M)$
(ب) بالون دوباره ساکن می‌شود
۹. (الف) L (ب) صفر
۱۱. (الف) در وسط فاصلهٔ دو جسم
(ب) ۱٫۲mm به‌طرف جسم سنگین‌تر حرکت می‌کند.
(ج) ۰٫۰۰۱۶۰g، پایین
۱۳. $g(1 - 2x/L)$
۱۵. ۵۵٫۲kg
۱۷. $L/5$ از میلهٔ سنگینی، در راستای محور تقارن
۱۹. $x_{cm} = y_{cm} = 20$cm؛ $z_{cm} = 16$cm
۲۱. در فاصلهٔ $4R/3\pi$ از قاعدهٔ تخت، روی محور تقارن
۲۳. (الف) 6.94×10^2J
(ب) 3.56×10^2kg.m/s؛ ۳۸٫۷° جنوب شرق
۲۵. (الف) ۶٫۹۶J (ب) $P_i = 0.854$kgm/s، ۲۷٫۴° بالای افق؛ $P_f = 0.854$kgm/s، ۲۷٫۴° در راستای قائم؛ ۰٫۷۸۶kgm/s،
(ج) ۱٫۵۳s
۲۹. ۰٫۱۰۳ft/s، به‌طرف عقب
۳۱. $wv_{rel}/(W+w)$
۳۳. ۲۷
۳۵. (الف) محفظهٔ موشک: ۷۲۹۰m/s؛ مواد منفجره: ۸۲۰۰m/s
(ب) قبل: ۱۲٫۷۱GJ؛ بعد: ۱۲٫۷۵GJ
۳۷. (الف) 1.4×10^{-22}kg.m/s؛ ۱۵۰° از مسیر الکترون و ۱۲۰° از مسیر نوترون (ب) ۱٫۰eV
۳۹. (الف) ۷۴۶m/s (ب) ۹۶۳m/s
۴۱. بله
۴۳. $\sqrt{2gh}\left(\frac{u\cos\alpha}{\sqrt{1 - u\cos^2\alpha}}\right)$، $u = \frac{m}{m+M}$

۴۵. ۲٫۶۶m/s
۴۷. (الف) ۱۷۹۰N، (ب) ۶۰۹J
۵۱. (الف) ۲٫۷۲ (ب) ۷٫۳۹
۵۳. ۱٫۳۳km/s
۵۵. ۶۰N
۵۷. (الف) ۴۹٫۱kg (ب) ۱۴۱kg
۵۹. (الف) ۲۳٫۴kN(۵۲۶۰lb) (ب) ۴٫۳۱MW(۵۷۸۰hp)

فصل ۱۰

۱. ۶۴kN
۳. ۲μu
۵. (الف) ۲٫۴۰N.s (ب) ۲٫۴۰N.s
(ج) ۲٫۰۰kN (د) ۶۲٫۷J
۷. ۳٫۲۹kN(۷۴۴lb)
۹. (الف) ۲٫۲۰N.s، به‌طرف چپ
(ب) ۲۱۲N، به‌طرف راست
۱۱. (الف) ۱٫۹۵ $\times 10^{5}$kg.m/s، برای هر جهت پیشروی
(ب) به‌طرف عقب: ۶۶٫۱MJ+
به‌طرف جلو: ۵۰٫۹MJ−
در جهت عرضی: ۷٫۶۱MJ+
۱۳. ۴۱٫۷cm/s
۱۷. (الف) ۱٫۰۳kg.m/s (ب) ۲۵۰J
(ج) ۱۰٫۳N (د) ۸۲۴N
۱۹. ۱۲۴kW
۲۱. (الف) ۱٫۹m/s، به‌طرف راست (ب) بله
۲۳. ۴٫۲m/s
۲۵. (الف) ۲٫۷۴m/s (ب) ۱٫۴۶km/s
۲۷. $\approx$ ۲mm/g
۲۹. ۱٫۲kg
۳۱. (الف) ۷۴٫۴m/s (ب) ۸۱٫۵m/s، ۸۴٫۱m/s
۳۳. (الف) A: ۴٫۵۷m/s؛ B: ۳٫۹۴m/s (ب) ۷٫۵۳m/s
۳۵. ۱۲٫۹ تن
۳۷. (الف) ۴٫۲۱ft/s؛ ۲۲۱۰ft.lb
(ب) ۳٫۲۱ft/s؛ ۵٫۵۱ft/s
۳۹. ۴۱٫۰N
۴۱. ۳۵٫۹cm
۴۳. $\sqrt{2E\left(\frac{M+m}{Mm}\right)}$
۴۷. (الف) ۴٫۰i + ۵٫۰j, m/s
(ب) ۷۰۰J به‌دست می‌آید
۵۱. (الف) ۲۶۰° از جهت پروتون فرودی
(ب) ۲۲۷m/s؛ ۴۶۶m/s
۵۳. $v = V/4$

۵۵. (الف) ۳٫۴۳m/s، ۱۷٫۳۰° به‌طرف راست
(ب) ۹۵۴kJ
۵۷. (الف) ۲۸٫۰۰° (ب) ۷٫۴۴m/s
۶۱. ۲٫۴۴m/s به‌طرف چپ
۶۳. (الف) ۱۱۷MeV (ب) $K_n = 102$MeV؛
$K_n = 15.0$MeV
۶۵. (الف) $(-1.04\hat{i} + 0.655\hat{j}) \times 10^{-19}$kg.m/s
(ب) ۷٫۶۶MeV

فصل ۱۱

۳. (الف) ۵٫۵ $\times 10^{15}$s (ب) ۲۶
۵. (الف) ۰٫۱۰۵rad/s (ب) ۱٫۷۵ $\times 10^{-3}$rad/s
(ج) ۱٫۴۵ $\times 10^{-4}$rad/s
۷. ۱۱ rad/s
۹. (الف) ۴٫۸m/s (ب) خیر
۱۱. ۲۳h۵۶min
۱۳. (الف) ۸۱۴۰rev/min^2 (ب) ۴۲۵rev
۱۵. (الف) −۱٫۲۸rad/s^2 (ب) ۲۴۸rad
(ج) ۳۹٫۵rev
۱۷. (الف) ۲٫۰rev/s (ب) ۳٫۸s
۱۹. (الف) ۳۶۹s (ب) −۳٫۹۰ $\times 10^{-3}$rad/s^2
(ج) ۱۰۸s
۲۱. (ب) −۲٫۳۰ $\times 10^{-9}$rad/s^2
(ج) $\approx$ ۴۶۱۰ (د) ۲۴ms
۲۳. (الف) ۳٫۴۹rad/s (ب) ۲۰٫۶in/s
(ج) ۱۰٫۱in/s (د) ۷۱٫۹in/s^2؛ ۳۵٫۳in/s^2
۲۵. ۵٫۶rad/s^2
۲۷. (الف) ۳٫۶۵rad/s (ب) ۳۸٫۰m/s
(ج) ۶٫۷۸m/s^2 (د) ۱۳۹m/s^2
۲۹. ۴٫۵۶s
۳۱. (الف) −۱٫۱۸rev/min^2 (ب) ۱۰۳۰۰
(ج) ۱٫۰۸mm/s^2 (د) ۳۰٫۲m/s^2
۳۳. (الف) ۶٫۳ $\times 10^{4}$ft/min(۱٫۹ $\times 10^{4}$m/min)
(ب) ۶٫۸ $\times 10^{4}$ft/min(۲٫۱ $\times 10^{4}$m/min)
۳۵. ۱۶٫۴s
۳۷. (الف) $r\alpha^2t^2$ (ب) $r\alpha$ (ج) ۴۴٫۱°
۳۹. (الف) ۷۱rad/s (ب) −۱۳rad/s^2
(ج) ۷۲m
۴۱. (الف) $x^2 + y^2 = R^2$؛ دایره‌ای به شعاع R؛ ω سرعت زاویه‌ای جسم است.
(ب) $v_x = -\omega y$؛ $v_y = \omega x$؛ v مماس بر دایره است؛ $v = \omega R$
(ج) $a = \omega^2 R$؛ a در راستای شعاع به طرف مرکز دایره است.

فصل ۱۲

۱. (الف) ۱۳۰۵g.cm^{۲} (ب) ۵۴۵g.cm^{۲} (ج) ۱۸۵۰cm^{۲}

۳. ۶٫۷۵ × ۱۰^{۱۲}rad/s

۵. (الف) ۶۴۹۰kg.m^{۲}
(ب) ۴٫۳۶MJ

۷. ۰٫۰۹۷kg.m^{۲}

۹. (ب) $MR^{۲}/۴$

۱۳. (الف) $dm/M = ۲rdr/R^{۲}$
(ب) $dI = ۲Mr^{۳}dr/R^{۲}$
(ج) $I = \frac{۱}{۲}MR^{۲}$

۱۵. ۳٫۶۶N.m، عمود بر صفحه به طرف داخل

۱۷. ۱۲N.m، عمود بر صفحه به طرف خارج

۱۹. ۷٫۶۳rad/s^{۲}، به طرف خارج صفحه

۲۱. (الف) ۲۸٫۲rad/s^{۲} (ب) ۳۳۸ N.m

۲۳. ۱٫۳۶kW

۲۵. (الف) ۲٫۵۷ × ۱۰^{۲۹}J (ب) ۱٫۴۹Gy

۲۷. ۶۹۰rad/s

۲۹. (الف) $۲\theta/t^{۲}$ (ب) $۲R\theta/T^{۲}$
(ج) $T_۱ = M(g - ۲R\theta/t^{۲})$؛
$T_۲ = Mg - (۲\theta/t^{۲})(MR + I/R)$

۳۱. ۱٫۷۳ × ۱۰^{۵}g.cm^{۲}

۳۳. ۶٫۱۱m/s

۳۵. (الف) −۷٫۶۷rad/s^{۲} (ب) −۱۱٫۷N.m
(ج) ۴۵٫۸kJ (د) ۶۲۴rev
(هـ) انرژی اتلاف شده در اثر اصطکاک برابر با ۴۵٫۸kJ است.

۳۷. (الف) ۴٫۸۲ × ۱۰^{۵}N (ب) ۱٫۱۲ × ۱۰^{۴}N.m

۳۹. (الف) ۱٫۸۸ × ۱۰^{۱۲}J/s
(ب) −۲٫۶۷ × ۱۰$^{-۲۲}$rad/s^{۲}
(ج) ۴٫۰۶ × ۱۰^{۹}N

۴۱. (الف) ۴۷٫۹km/h (ب) ۳٫۶۵rad/s^{۲}
(ج) ۸٫۶۸kW

۴۵. (الف) ۵۶٫۵rad/s (ب) −۸٫۸۸rad/s^{۲}
(ج) ۶۹٫۲m

۴۷. (الف) ۱۲٫۵cm/s^{۲} (ب) ۴٫۶۳s
(ج) ۲۸٫۸rev/s (د) ۷۰٫۸rev/s

۴۹. ۴۸m

۵۱. (الف) $W/۶$ (ب) $۲g/۳$

۵۵. $\alpha = ۲F/MR$؛ $a = F/M$

۵۷. (الف) ۵۷٫۹rad/s (ب) ۴٫۲۱m

فصل ۱۳

۵. mvd

۱۱. (الف) −۴٫۱۷m/s^{۲} (ب) −۱۶٫۹rad/s^{۲}
(ج) −۲٫۶۲N.m

۱۵. (الف) ۱٫۴۹N.m (ب) ۲۰٫۸rad
(ج) −۳۱٫۰J (د) ۲۰٫۳W

۱۷. مرکز جرم در جهت نیروی ضربه‌ای با سرعت ۲٫۹۰m/s حرکت می‌کند؛ چوب با سرعت زاویه‌ای ۱۰٫۷rad/s حول مرکز جرم دوران می‌کند.

۲۱. (ب) $ML^{۲}/(L^{۲} + ۱۲d^{۲})$

۲۵. (الف) ۱٫۱۸s (ب) ۸٫۶۰m
(ج) ۵٫۱۸rev (د) ۶٫۰۷m/s

۲۷. ۳٫۰min

۲۹. $mv/(m+M)R$

۳۱. (الف) ۱۷۱ دور بر دقیقه (ب) ۰٫۷۹۲

۳۳. (الف) ۵٫۱۲mrad/s (ب) ۱٫۹۰cm/s

۳۵. (الف) $MR^{۲}\omega_۰^{۲}/۴$؛ $MR^{۲}\omega_۰/۲$
(ب) $R^{۲}\omega_۰^{۲}/۲g$ (ج) $\omega_۰$

۳۷. $\sqrt{۲gr\sec\theta_۰}$

۳۹. (الف) هر یک در دایره‌ای به شعاع ۱٫۴۶m با سرعت زاویه‌ای ۰٫۹۴۵rad/s دوران می‌کند.
(ب) ۹٫۱۲rad/s (ج) $K_a = ۹۷٫۵J$؛ $K_b = ۹۴۱J$

۴۱. −۰٫۱۲۷

۴۳. ۱٫۹۰ دقیقه

فصل ۱۴

۱. (الف) دو (ب) هفت

۵. (الف) ۲٫۵m (ب) ۷٫۳۰°

۷. (الف) می‌لغزد؛ ۳۱° (ب) واژگون می‌شود؛ ۳۴°

۹. ۱۲۰۰lb

۱۱. (الف) ۲٫۷۸kN (ب) ۳٫۸۹kN

۱۳. پایهٔ چپ: ۱٫۱۷kN (کشش)
پایهٔ راست: ۱٫۸۹kN (تراکم)

۱۵. سه چهارم طول تیر از کارگری که انتهای آن را گرفته است.

۱۷. ۱٫۹۱kN = نیروی عضله، به‌طرف بالا، ۳W
۲٫۵۵kN = نیروی استخوان، به‌طرف پایین، ۴W

۱۹. $W\sqrt{h(۲r-h)}/(r-h)$

۲۱. (الف) $F_۱ = w\sin\theta_۲/\sin(\theta_۲-\theta_۱)$؛
(ب) $F_۲ = w\sin\theta_۱/\sin(\theta_۲-\theta_۱)$، عمود بر صفحه‌ها

۲۳. (الف) ۴۱۶N (ب) ۲۳۸N؛ ۱۷۲N

۲۵. (الف) ۴۷٫۰lb (ب) ۲۱٫۳lb؛ ۱۰٫۹lb

۲۷. (الف) ۱۴۶۰lb (ب) ۱۲۲۰lb؛ ۱۴۲۰lb

۲۹. (الف) $Wx/L\sin\theta$ (ب) $Wx/L\tan\theta$
(ج) $W(۱-x/L)$

۳۱. (الف) لولای پایین: $F_h = ۱۸۰lb$، $F_v = ۲۱۰lb$؛
لولای بالا: $F_h = ۱۸۰lb$، $F_v = ۶۰lb$

(ب) $F_h = ۱۸۰\text{lb}$، $F_v = ۶۰\text{lb}$ وارد بر هر تیر، در جهتهای مخالف

۳۳. (الف) ۴۷lb (ب) $F_A = ۱۲۰\text{lb}$؛ $F_E = ۷۲\text{lb}$

۳۵. (الف) ۴۴۶N (ب) ۰٫۵۰۰

(ج) بله، °۴۵ به‌طرف بالا، ۳۱۵N

۳۷. (الف) $L/۲$، $L/۴$، $L/۶$ (ج) $N = n$

۴۱. ۷۵GN/m²

۴۳. ۳٫۶۵mm

۴۵. ۲۰۱kN

۴۷. ۲۰۸ دور بر دقیقه

۴۹. (الف) ۱۸٫۰MN (ب) ۱۴٫۴MN (ج) ۱۶

نمایه