بسمه تعالی

جزوه

ارتعاشات

دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر بختیاری نژاد

ارتعاشات:

- تقسیم بندی روی سیستم ها
  - درجه آزادی - ۱،۲،n،∞
  - با میرایی
  - بدون میرایی
- نوع ارتعاش
  - تعریف ارتعاش
  - ارتعاش آزاد
    - طبیعی
    - نرمال
  - ارتعاش با تحریک
- نوع تحریک
  - هارمونیک
  - متناوب غیر هارمونیک
  - گذرا

ارتعاش یک نوع حرکت ویژه است.

Conoeruatuie ← انرژی را خودش نگه می دارد← **غیر میرا**

Nonconoertuie← انرژی را تلف کرده و به حرارت تبدیل می کند← **میرا**

میرایی خود چندین نوع دارد؟ میرایی یعنی آنچه که انرژی را به حرارت تبدیل می کند.

حرکت انواع مختلف دارد:

حرکت در پدیده استاتیکی ← سرعت ثابت یا ساکن ← سیالاتی که ما بررسی می کنیم در واقع استاتیکی است.

حرکت در پدیده دینامیکی← حرکت شتابدار

حرکت ارتعاشی در واقع زیر مجموعه حرکت دینامیکی است.

ارتعاش آزاد: سیستم به صورت طبیعی ارتعاش می کند.

در سیستم های دو درجه آزادی به بالا ، ارتعاش آزاد دارای تقسیم بندی خواهد بود.

تحریک : نیرویی که از خارج به سیستم وارد می شود.

تحریک هارمونیک: ساده ترین تحریک ← به صورت sin و cos یا ترکیبی از این دو است. (همگی متناوب اند)

1. ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزادی بدون میرایی
2. رتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزادی با میرایی ساده
3. ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزادی با میرایی غیرخطی
4. ارتعاش با تحریک هارمونیک و متناوب با میرایی سیستم های یک درجه آزادی
5. ارتعاش با تحریک گذرایی سیستم های با میرایی یک درجه آزادی
6. ارتعاش ازاد سیستم های دو درجه ازادی با میرایی
7. ارتعاش با تحریک هارمونیک سیستم های دو درجه آزادی با میرایی
8. ارتعاش با تحریک گذرایی سیستم های دو درجه آزادی
9. ارتعاش آزاد سیستم های با میرایی n درجه آزادی
10. ارتعاش با تحریک هارمونیک سیستم های n درجه آزادی ساده
11. ارتعاش آزاد سیستم های ∞ درجه ازادی ساده

درجه ازادی: حداقل تعداد محورهای مختصاتی که برای تحلیل یک سیستم نیاز داریم.

گاهی تعداد درجه آزادی های یک سیستم خیلی بیشتر از تعدادی است که ما برای تحلیل سیستم نیاز داریم . مثلا یک خودرو دارای ۱۷ یا بیشتر درجه ازادی است.

برای بررسی آرامش در یک خودرو ۲ درجه آزادی در نظر می گیریم.

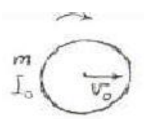
برای بررسی امنیت در یک خودرو ۸درجه آزادی در نظر می گیریم.

برای بررسی آرامش و امنیت در یک خودرو ۱۲ درجه آزادی در نظر می گیریم.

مثال هایی برای سیستم های یک درجه آزادی:

چرخ درحال حرکت(سیستم دینامیکی)

اگر چرخ بدون لغزش (علتش خالصی) حرکت کند، W و V_0 به هم وابسته اند پس سیستم یک درجه آزادی است.



$$S_0 = r\theta \qquad V_0 = r\omega$$

ارتعاشات: حرکت تکراری

ولی بعضی از ارتعاشات تکرار نمی شوندا در حرکت اتعاشی باید عوامل ارتعاشی وجود داشته باشد

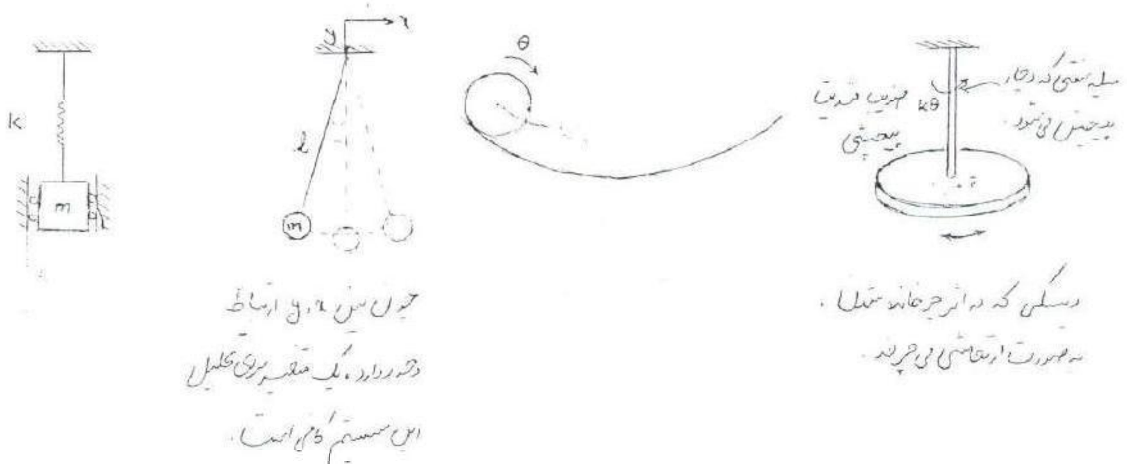
سیستم های یک درجه آزادی ارتعاشی:

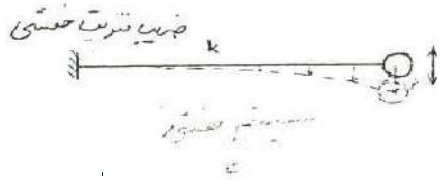
دو عامل باعث حرکت ارتعاشی (تکراری) می شوند.

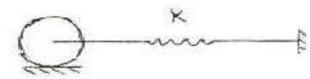
۱- سیستم هایی که دارای سر ، جرم **باشد.**

۲- سیستم هایی که دارای جرم + تغییر **ارتفاع اند.**

اگر در سیستمی عامل انرژی جنبشی و عامل انرژی پتانسیل وجود داشته باشد آن سیستم ارتعاشی است.







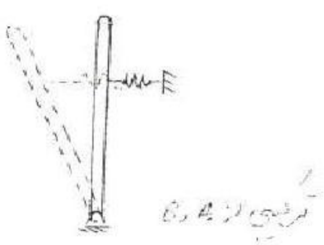
A: انرژی پتانسیل وزنی

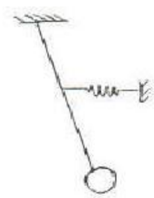
B: انرژی پتانسیل الاستیک

انرژی استاتیکی: فشرده و کشیده شدن فنر و تغییر فنر

حرکت ارتعاشی: داد و ستد بین انرژی جنبشی (T) و پتانسیل (U) وجود داشته باشد.

اگر سیستم comervation باشد و انرژی در آن ذخیره شود و به حرارت تبدیل نشود سیستم تا ابد ارتعاش می کند ولی در واقعیت بخشی در انرژی به دلایلی تبدیل به حرارت می شود و پس از مدتی سیستم از ارتعاش باز می ایستد.سیستم های ارتعاشی از یکی از خانواده A و B یا ترکیبی از هر دو اند.

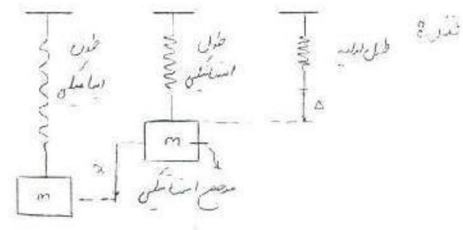


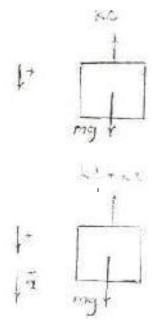


تئوری های ارتعاشات، روی دو حالت ساده A و B بررسی می شود.

پارامتر : مشخصات فیزیکی سیستم که معمولا ثابت اند.

متغیر: این سه متغیر به هم وابسته اند.





$$\Sigma F = 0 \rightarrow mg - k\Delta = 0$$

$$\Sigma F = ma$$

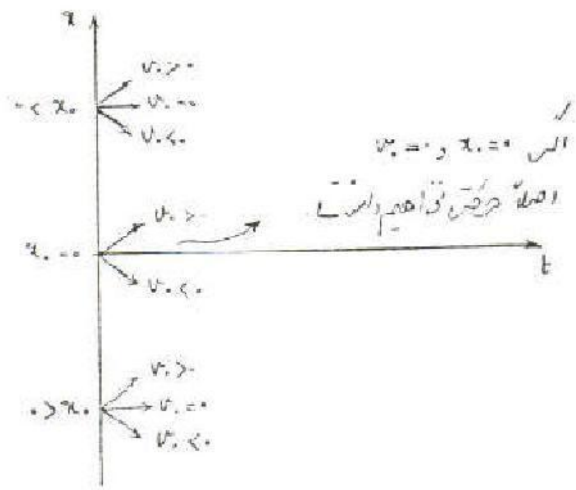
$$\underbrace{mg - k\Delta}_{0} - kx = m\ddot{x}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن ضرایب ثابت

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

حل هر معادله دیفرانسیل به شرایط اولیه نیاز دارد.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$



حل: شرایط اولیه را اعمال می کنیم تا ببینیم در هر لحظه x چه مقداری می گیرد.

$$x_{(t)} = ?$$

$$\frac{d}{dt} = D$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D^2$$

$$\rightarrow m D^2 x + kx = 0 \Rightarrow (mD^2 + k)x = 0 \Rightarrow mD^2 + k = 0$$

هرگاه ریشه معادله مشخصه موهومی باشد، جواب تابعی هارمونیک است.

$$\Rightarrow D^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow D_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\rightarrow x_{(t)} = x_1 e^{j\sqrt{k/m}\, t} + x_2 e^{-j\sqrt{k/m}\, t}$$

$$x_{(t)} = A \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + B \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

در سیستم های ارتعاشی ضریب kx باید مثبت باشد تا اوپراتور به صورت موهومی درآید و تابع هارمونیک باشد. اگر ضریب kx منفی باشد حاصل دیگر تابعی هارمونیک نیست.

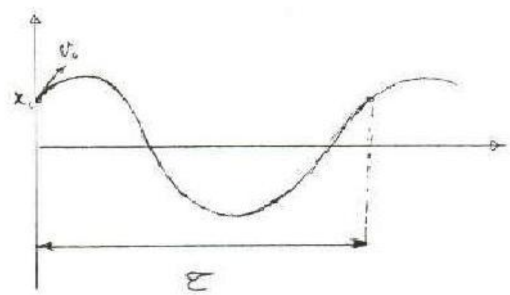
شرایط اولیه
$$\begin{cases} x_{(0)} = x_0 \\ \dot{x}_{(0)} = \dot{x}_0 = V_0 \end{cases}$$

$$\rightarrow B = x_0$$

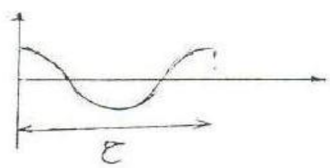
$$\rightarrow \dot{x}_{(0)} = V_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}} - B\sqrt{\frac{k}{m}}\, \underbrace{\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times 0\right)}_{0}$$

$B - x_0$

$$A = \frac{u_0}{\sqrt{x/m}} \qquad \Rightarrow x(t) = \frac{u_0}{\sqrt{k/m}} \sin\sqrt{k/m}\, t + x_0 \cos\sqrt{k/m}\, t$$



حرکت ساده $\rightarrow$ $v_0 = 0$, $x_{(0)} = x_0$ $\qquad x(t) = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$



$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{N/m}{kg}} = \frac{1}{sec} \rightarrow \frac{rad}{sec}$ [illegible]

τ_n مدت زمان یک دور $\frac{sec}{rev}$ $\qquad \frac{\tau_n}{2\pi}$ مدت زمان یک رادیان چرخش $\frac{sec}{rad}$ $\rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{\tau_n}$

$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$

XaufG : رابطه بین W_n و F_n – کاربرد هر کدام (اگر به هم ارتباطی دارند) (ht , rpm) f_n

یعنی اگر هر دو یک ماهیت را نشان می دهند، کاربرد هر یک در کجاست؟ $w_n \left(rad/sec \right)$

(T^{-1}) واحد f_n ، neu/sec

(T^{-1}) واحد $w_n \leftarrow rad/sec$

کیفیت t_n، یک کیفیت قابل اندازه گیری در آزمایشگاه است (با وسایل ندازه گیری موجود) مثل درجه سانتیگراد یا فشار gage ، ولی w_n مثل فشار مطلق یا درجه کلوین، کمیتی است که در روابط مورد استفاده قرار می گیرد در واقع ما f_n را اندازه گیری می کنیم و با تبدیل آن به w_n ، از آن در روابط استفاده می کنیم.

$$f_n = \frac{1}{\tau_n} \rightarrow \omega_n = 2\pi f_n$$

برای سیستم هایی که نوسان و یا قوران می کنند:

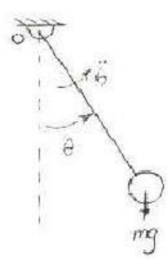
$$w_n = \sqrt{k/m} \quad rad/\sec$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad sec/rev$$

$$f_n = 2\pi \omega_n \quad rev/sec \quad (Hz, rpm)$$

آونگ: چون گلوله را جدا نکردیم، به جز وزن، فقط باید شتاب را روی شکل نشان دهیم.

همیشه جهت مثبت شتاب را در جهت θ می گیریم



[illegible] : $\Sigma M_0 = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow -mg\ell \sin\theta = I_0 \ddot{\theta}$

$\Rightarrow I_0 \ddot{\theta} + mg\ell \sin\theta =$ معادله دیفرانسیل غیرخطی- همگن- مرتبه دو

[illegible]

چون انرژی پتانسیل در اثر تغیر ارتفاع وزن ایجاد شده، وزن وارد معادله می شود.

چون انرژی پتانسیل از فنر می آید نه از جرم، وزن وارد معادله نمی شود.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad x(t) = \frac{u_0}{\sqrt{k/m}} \sin w_n t + x_0 \cos w_n t$$

در حالتی که شتاب تابعی از مکان بود، a=f (s) ، داشتیم: vdv=ads پس:

$$\ddot{\theta}=\frac{mgl}{I_o}\sin\theta \Rightarrow wdw=\ddot{\theta}d\theta$$

$$wdw=\frac{mgl}{I_0}\sin\theta d\theta \Rightarrow \left.\frac{w^2}{2}\right|_{w_o}^{w} = \frac{mgl}{I_o}\int_{\theta_o}^{\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$w^2/2 = w_o^2/2 + \frac{mgc}{I_o}(\cos\theta \quad \cos\theta_o)$$

$$w = \sqrt{w_o^2 - \frac{2mgl}{I_o}\cos\theta - \frac{2mgl}{I_o}\cos\theta_o}$$

ولی ما θ را بر حسب t می خواهیم. پس:

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{a+b\cos\theta}$$

$$\rightarrow \int_o^t dt = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{a+b\cos\theta}}$$

این انتگرال nosolvable است و این معادله دیفرانسیل هم غیر قابل حل است.

Hauf GI : با نرم افزار mathematica یا mapple می توان این انتگرال را حل کرد. ولی در واقع این نرم افزار با استفاده از حل عددی نمودار جواب را می کشد و با قرار دادن یک منحنی معادل (fitting curve) معادله منحنی را با خطای کمتر از ۱٪ می دهد.

برای زوایای کوچک:

$$if\ \theta| \quad \theta_0 \Rightarrow \begin{matrix}\sin\theta - \theta \\ \cos\theta - 1\end{matrix}$$

$$I\ddot{\theta} + mgl\theta = \cdot \qquad w_n = \sqrt{\frac{mgl}{I_o}}$$

برای آونگ ساده : جرم در گلوله کوچک بدون بعد (ابعاد خیلی کم) متمرکز است.

$$I_o = I_G + ml^2 \rightarrow I_o = ml^2,\ w_n = \sqrt{g/l}$$

آونگ ساده برای اندازه گیری شتاب ثقل استفاده می شود. (ابزار اندازه گیری شتاب ثقل در جاهای مختلف)

Hauf G: به صورت بالا شتاب ثقل را در خانه بدست آوردیم.

خطای مجازی در مهندسی: 7% تا 2%

زیر 2% ⟵ غیر عملی و غیر عقلانی و غیر اقتصادی

2تا 5% ⟵ رنج معمولی خطا (مخصوصا 5%)

2% ⟵ مسائلی که اهمیت جانی و حیاتی دارند

7% ⟵ مسائلی که دارای اهمیت کمتری هستند (برای حفظ هزینه)

θ های کوچک یعنی تا 30° که 4% خطا دارد.

$$\theta = \pi/6 = 52 \qquad \frac{\theta - \sin\theta}{\theta} - \frac{0.02}{0.52} \times 100 -$$

$$\sin\theta - 0.5$$

هواپیما های جنگی چون نیاز به قدرت مانور بالا دارند روی 4% خطا ساخته می شوند، ولی هواپیما های مسافر بری با 2% خطا ساخته می شوند.

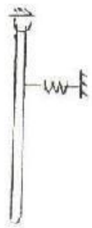
a) گاهی mg درون معادله، روی فرکانس طبیعی تاثیر می گذارد مثل $mx \quad {}^{mg}/_{l}\, x \quad kx \mid 0$

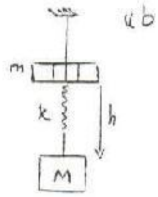
b) گاهی mg درون معادله وارد می شود ولی فرکانس طبیعی تاثیر می گذارد مثل $m\ddot{x} \quad kx = mg$

c) گاهی اصلا mg درون معادله دیفرانسیل وارد نمی شود. $m\ddot{x} + kx + 0$

در لحظه t=۰ از ارتفاع h رها می شود و روی m قرار می گیرد و با آن ارتعاش می کند.

$$(M+m)g - k\Delta - kx = (M+m)\ddot{x}$$



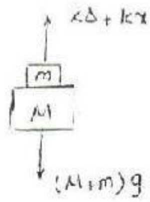


$$mg = kx + (M + m)\ddot{x}$$

$$w_n = \sqrt{k/_{m+M}}$$

a

$k\Delta = Mg$



$X(0) = 0$

سقوط جرم m، یک سرعت اولیه به M برای ارتعاش می دهد

← اندازه حرکت قبل از برخورد- اندازه حرکت بعد از برخورد

$$(M+m)\dot{x}(0) = m\sqrt{2gh} \rightarrow \dot{X}(0) = \frac{M\sqrt{2gh}}{M+m}$$

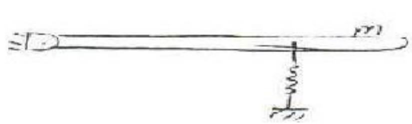
چون معادله غیر همگن است ، در جواب حاصل باید یک قسمت غیر همگن هم داشته باشیم.

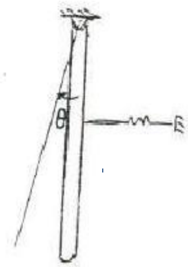
$$x(t) = A\ Sin\ Wnt + B\ \cos\ wnt + {}^{mg}/_{x}$$

برای پیدا کردن قسمت غیر ممکن ، خصوصا وقتی معادله عدد صحیح است، قسمت دینامیکی مساله (ضریب $\ddot{x}$ و...) را صفر می کنیم و x حاصل، جواب غیر همگن یا خصوصی مساله است.

$$0 = A(0) + B\ {}^{mg}/_{k} \rightarrow B = {}^{-mg}/_{k}$$

$$\dot{X}(t) = A\ wn\ \cos\ wnt - (-Bwnt\ \sin wnt) \rightarrow \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m} = awn - 0 \rightarrow A = \frac{m\sqrt{2gh}}{W_n(M+m)}$$

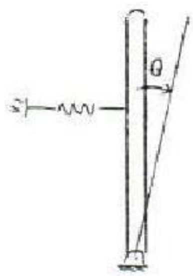




$$I_\circ \ddot{\theta} + k\,\frac{\ell}{2}\theta - mg\ell\theta = 0$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k\,\frac{\ell}{2} + mg\ell}{I_\circ}}$$

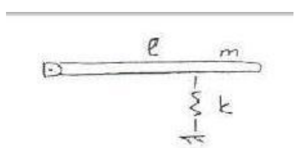
سیستم ناپایدار، اگر $k\,\frac{L}{2}$>mgl ارتعاش داریم وگرنه سیستم فقط به تعادل می رسد.



$$I_\circ \ddot{\theta} - K\,\frac{\ell}{2}\theta - mg\ell\theta = 0$$

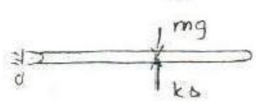
$$w_n = \sqrt{\frac{k\,\frac{\ell}{2} - mg\ell}{I_\circ}}$$

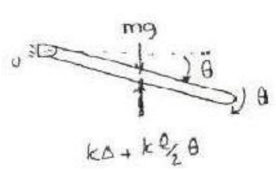
چون وزن فنر و میله در ابتدا توسط فشردگی فنر خنثی شده پس نیروی متغیری نیست و عمدا وارد مساله نمی شود و نیروی ارتعاشی نیست.



$$\sum m_\circ = 0$$

$$k\,\frac{\ell}{2} = mg\,\frac{\ell}{2}$$





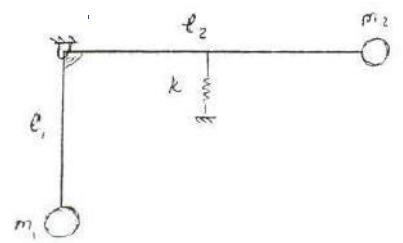
$$\sum m_\circ = I_\circ \ddot{\theta}$$

$$mg\,\frac{\ell}{2} - k\Delta\,\frac{\ell}{2} - k\,\frac{\ell}{2}\theta\,\frac{\ell}{2} = I_\circ\ddot{\theta}$$

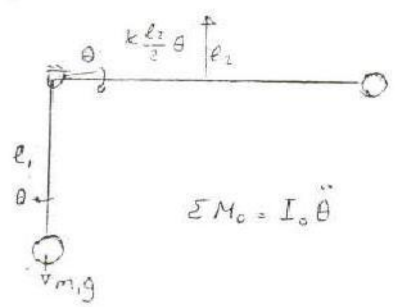
$$I_\circ\ddot{\theta} + k\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\theta = 0$$

اگر با تغییر وزن، میزان فشردگی یا کشیدگی اولیه فنر تغیر کند وزن وارد مساله نمی شود ولی اگر وزن ارتباطی به فنر نداشته باشد وارد معادله دیفرانسیل می شود.

مثلا در این مثال، چون در حالت استاتیکی L_2 افقی و L_1 عددی است، m_2روی Δ تاثیر می گذارئ ولی m_1 نه! پس m_1g وارد معادله دیفرانسیل می شود.

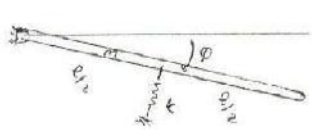


$$\sum m_\circ - I_\circ \ddot{\theta}$$

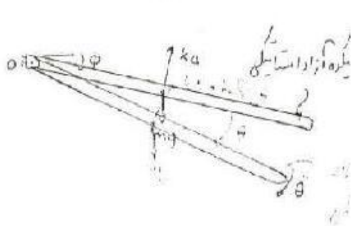


$$k \frac{\ell_2}{2}\theta\frac{\ell_2}{2} \quad m_1 g \ell_1 \theta - I.\ddot{\theta}$$

$$W_n = \sqrt{\frac{k(\ell_2/2)^2 + m_1 g \ell_1}{I_\circ}}$$



$$\sum m_\circ = I_\circ$$
$$mg \frac{\ell}{2}\cos - k\Delta \frac{\ell}{2} = 0$$



$$\sum m_\circ - I_\circ \ddot{\theta}$$

$$mg\frac{\ell}{2}\cos(\theta-\varnothing) - k[\frac{\ell}{2} - k\frac{\ell}{2}\theta\frac{\ell}{2} = I_\circ \ddot{\theta}$$

$\ddot{\theta}$ زاویه کوچکی است:

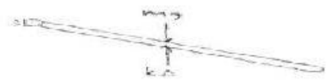
$a)\quad \cos(\theta+\varphi) - \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \mid \cos\varphi$

$$\Rightarrow \quad I_\circ \ddot{\theta} \qquad -k(\ell/2)^2\theta - 0$$

$b)\ \cos(\theta+\varphi)-\cos\varphi-\theta\sin\varphi$

$$\Rightarrow\ I_{\circ}\ddot{\theta}\ \ k(\ell/2)^2\theta\ \ mg\ \ell/2\sin\varphi\theta-0 \Rightarrow w_n\sqrt{\frac{k(\ell/2)^2+mg\ \ell/2\sin\varphi}{I_{\circ}}}$$

به شرطی که فنر بر میله عمود باشد این حالت کامل ترین حالت است چون با توجه به مقدار φ میله حالت افقی و عمودی را هم در برمی گیرد.



$\sum M_{\circ}=0$
$mg=k||$

$$I_{\circ}\ \ddot{\theta}\ \begin{matrix}-mg\ \ell/2\cos(\varphi+\theta)-k^{-}\ \ell/2\cos(\varphi+\theta)\\ -k\ \ell/2\,\theta\,\ell/2\cos(\varphi+\theta)\end{matrix}$$

$$I_{\circ}\ \ddot{\theta}\ \ +k(\ell/2)^2\theta\cos(\varphi+\theta)=0$$

$a)\cos(\varphi+\theta)=1$

$b)\cos(\varphi+\theta)=\cos\varphi$

$c)\cos(\varphi+\theta)=\cos\varphi-\theta\sin\varphi \rightarrow \sin\varphi\theta^2=0$

$$I_{\circ}\ \ddot{\theta}+k(\ell/2)^2\theta\cos\varphi=0$$

در ارتعاشات سه عامل وجود دارد: انرژی، پتانسیل و کاری که به حرارت تبدیل می شود.

در سیستم های که conoervative عامل damping و نیروی خارجی وجود ندارد. T+U=C که C مقدرا ثابت است.

- عامل اصلی انرژی جنبشی سرعت است. (متغیر $\dot{x}$) و پارامتری که در انرژی جنبشی اثر دارد m (در حرکت خطی) و ممان اینرسی (در حرکت زاویه ای) است.

$T = T(\dot{x}, m, x) = T(\dot{\theta}, I, \theta)$

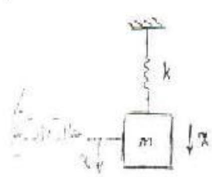
انرژی پتانسیل به صورت استاتیکی است که دو حالت دارد:

انرژی پتانسیل کشسانی یا استیک (در اجسام انعطاف پذیر) $U = U(K, X)$

انرژی پتانسیل گرانشی که تابعی از شتاب ثقل و جرم است و متغیر تاثیر گذار در آن ارتفاع است. (تغیرات انرژی پتانسیل برای محدوده ای که g ثابت است) $\Delta U = U(mg, \Delta h)$

خود انرژی پتانسیل در اثر وزن تعریف نمی شود یعنی به صورت مطلق وجود ندارد و در واقع تغیرات آن را می توانیم به صورت مطمئن بررسی کنیم، **ولی در فنر می توان انرژی پتانسیل** کشسانی **مطلق تعریف کرد چون x** نسبت به طول آزاد فنر اندازه گیری می شود.

شتاب ثقل در محدوده جو زمین حتی اگر ارتفاع تا ۱۰۰۰ کیلومتر بالاتر از سطح زمین باشد هم چندان تغییری نمی کند چون مقایسه ما با شعاع زمین (۶۰۰km) به توان ۲ است که مقدار ناچیزی می شود. به همین خاطر در اطراف زمین g را تقریباً ثابت مب گوییم.



در برخی مسائل انرژی جنبشی تابعی از موقعیت هم هست؟

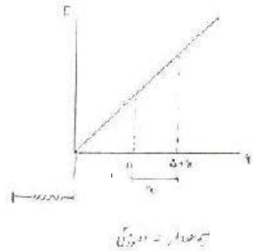
نکته:

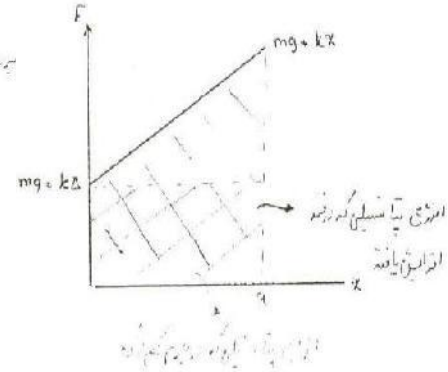
□=دلتا

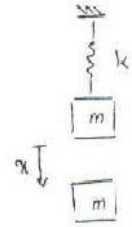
$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k(x+\Delta)^2 - mgx = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta^2 + kx\Delta - mgx = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta^2$$

$$U = \frac{1}{2}k(x+\Delta)^2 - mg(x+\Delta) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta^2 + kx\Delta - mgx - mg\Delta = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k\Delta^2$$







حالت اولیه جسم ثبت است

$$\Delta T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}kx^2$$

تغییرات انرژی پتانسیل کل سیستم برابر انرژی پتانسیل است که در فنر افزایش یافته منهای انرژی پتانسیلی که در جرم کم شده.

برای اینکه مشکلاتی که در قسمت قبل مشاهده شد پیش نیاید، ما تغییرات انرژی ها را محاسبه می کنیم چون برای پتانسیل گرانشی نمی توان مبدا ثابتی در نظر گرفت و مقدار مطلق آن را محاسبه کرد.

$$T + U = C \rightarrow \Delta(T + U) = 0 \rightarrow \Delta T + \Delta U = 0$$

چون در انرژی پتانسیل دیگر پتانسیل گرانشی نداریم

می توان آن را به صورت مطلق نوشت و نیازی به تغییرات

نداریم.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$\dot{x}$ نمی تواند صفر باشد در این صورت ارتعاش نداریم.

$$\Delta T + \Delta U = 0$$

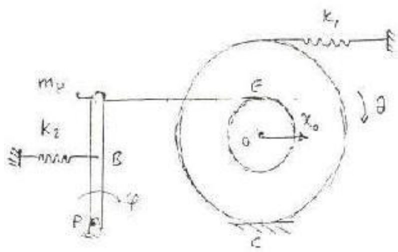
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

این روش طولانی تر است اما برای مسائل پیچیده استفاده می شود.



$$T = \frac{1}{2}I_p\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}K_2\left(\frac{\ell}{2}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}K_1(2r_2\theta)^2 - m_p g\frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$\ell\psi = (r_1 + r_2)\theta \rightarrow \varphi = \frac{(r_1 - r_2)\theta}{\ell}$$

$$T = \frac{1}{2}I_p\left(\frac{r_1 - r_2}{\ell}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}K_2\left(\frac{\ell}{2}\frac{(r_1+r_2)\theta}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{2}K_1(2r_2\theta)^2 - m_p g\frac{\ell}{2}\left(1-\cos\left(\frac{r_1+r_2}{\ell}\theta\right)\right)$$

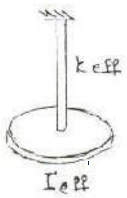
$$\Delta T = I_p\left(\frac{r_1+r_2}{\ell}\right)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - I_c\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\Delta U = k_2\left(\frac{r_1+r_2}{\ell}\right)^2\theta\dot{\theta} - k_1(2r_2)^2\theta\dot{\theta} - \left(\frac{r_1+r_2}{\ell}\right)mg\frac{\ell}{2}g\sin\left[\frac{r_1+r_2}{\ell}\theta\right]\dot{\theta}$$

$$\underbrace{\left[I_p\left(\frac{r_1+r_2}{\ell}\right)^2 - I_c\right]}_{left}\ddot{\theta} - \underbrace{\left[k_2\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2 + k_1(2r_2)^2 - \frac{r_1+r_2}{2}m_p g\left(\frac{r_1+r_2}{\ell}\right)\right]}_{k_{eff}}\theta = 0$$

$$I_{eff}\ddot{\theta} - k_{eff}\theta = 0$$

سیستم فوق معادله سیستم روبه رو است.



$$T + U = c$$

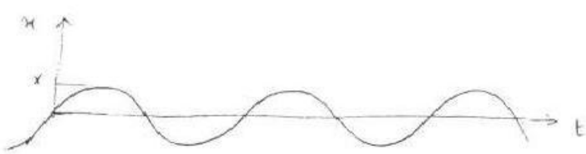
معادله دیفرانسیل استخراج می شود. ← $\frac{d}{dt}(T - U) = 0$

$$T = 0 \rightarrow U_{max} = C$$

نقطه حالت تعادل یا مرجع استاتیکی ← $U = 0 \rightarrow T_{max} = C \rightarrow U_{max} = T_{max}$

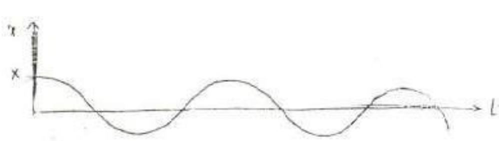
بدون نیاز به معادله دیفرانسیل، فرکانس طبیعی w_n استخراج می شود. ←

برای پیدا کردن T_{max} نقطه ای را پیدا کنیم که $\dot{x}$ در آن max است.



x(t) = X Sin wn t

محور مختصات یک ابزار و هر جایی بخواهیم می توانیم بگذاریم. موج یک موج هارمونیک است.



x(t) = X Cos wn t

$$x(t) = X\sin w_n t \rightarrow \dot{x}_{(t)} = X w_n \cos w_n t \rightarrow \dot{x}(t)_{max} = X w_n$$

$$\rightarrow T_{max} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2_{max} = \frac{1}{2} m (X w_n)^2$$

$$\rightarrow U_{max} = \frac{1}{2} k x^2_{max} = \frac{1}{2} k (X)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m (X w_n)^2 = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow w_n^2 = \frac{k}{m}$$

چون بین جابجایی نقاط مختلف میله، رابطه خاصی وجود دارد، سیستم یک درجه ازادی است.

برای پیدا کردن k میله برق در حالت استاتیکی یک به یک سمت ان وصل می کنیم. (جرم m) $\leftarrow k=\frac{mg}{x}$

و تغییر x تغییر مکان نوک آن میله است.

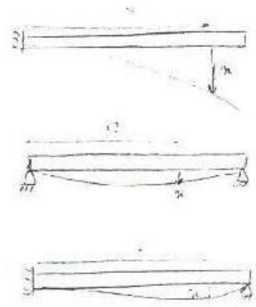
سیستم رو برو هم یک درجه آزادی است ولی یک سیستم مقید است.(جرم آن نقطه ای نیست) چون جرم گسترده دارد ضریب سختی آن هم گسترده است که تابع y است.

چون این طور جرم ها را نمی توان به سادگی حل کرد، از روش رامیلی (همان U_{max}=T+max) استفاده می کنیم.

این روش به صورت تقریبی است با ۲تا ۵ درصد خطا.

برای حل هر مسئله باید ان را از جهات مختلف بررسی کنیم. کثلا در سوال قبل، میله مثل فنر ریز است.

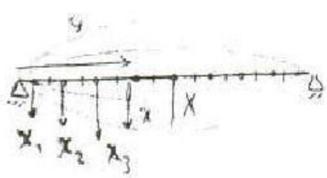
چون می توانیم تابع x بر حسب y را حدس بزنیم.(چون جواب تقریبی است)



$x = x(y)$

$\mathbf{x = x(y)}$

$\mathbf{x, x(y)}$



$$x = \frac{4x}{\ell}\left(1 - \frac{y}{\ell}\right)y$$

$$x = x\sin\left(\frac{\pi y}{\ell}\right)$$

برای پیدا کردن x در موقعیت های مختلف، تیر را به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم.(هرچه تعداد قسمت ها بیشتر باشد، متغیر است) و جرم را در وسط هر قسمت قرار می دهیم.

برای x_iهای مختلف، m_i ها را پیدا کردیم. حال اگر k_i های مختلف را هم پیدا کنیم، می توان از آن فرکانس طبیعی را به دست آورد. **در حالت استاتیکی** $k_i = \frac{m_i g}{x_i}$ (x_i تغییر مکان در اثر جرم خود میله در حالت استاتیکی)

$$X_i = x_i \sin w_n t$$

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \qquad U_i = \frac{1}{2} k_i x_i^2$$

$$T_{i_{max}} = \frac{1}{2} m_i (x_i w_n)^2 \qquad U_{i_{max}} = \frac{1}{2} k_i x_i^2$$

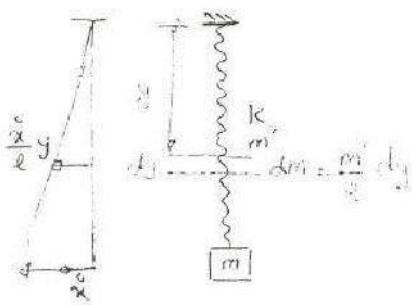
$$T_{max} = \frac{w_n^2}{2} \sum m_i x_i^2 \qquad U_{max} = \frac{1}{2} \sum k_i x_i^2$$

برای اینکه یک مرحله تقریب را کمتر کنیم، $\sum$ را به $\int$ تبدیل می کنیم.

$$\rightarrow w_n^2 = \frac{g\sum m_i x_i}{\sum m_i x_i^2}$$

$$w_n^2 = \frac{\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)dy}{\int_m x^2 dm}$$

در این فنر k متغیر است. در قسمت های بالاتر k بیشتر است رابطه سرعت را هم خطی می گیریم.



$$dT' = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\ell}dy\right)\left(\frac{\dot{x}}{\ell}y\right)^2$$

$$x = x\sin w_n t$$

$$\dot{x} = xw_n\cos w_n t$$

$$dT'_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{m'}{\ell}dy\right)\left(\frac{xw_n}{\ell}y\right)$$

$$T'_{\max} = \int_0^\ell \frac{1}{2}\left(\frac{m'}{\ell}dy\right)\left(\frac{xw_n}{\ell}y\right)^2$$

$$T'_{\max} = \frac{1}{2}\frac{m'}{\ell^3}x^2w_n^2\frac{\ell^3}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{m'}{3}\right)(xw_n)^2$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{m'}{\ell^3}\right)(xw_n)^2 + \frac{1}{2}m(xw_n)^2$$

$$\rightarrow T_{\max} = \frac{1}{2}\left[\frac{m'}{3} + m\right](xw_n)^2$$

در فنر هایی که جرم دارند می توان به جای بررسی آن ها، فنری را بررسی کنیم که جرم ندارد و $\frac{1}{3}$ جرم فنر به صورت یک جرم نقطه ای در انتهای آن در نظر بگیریم.

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m + m'/3}}$$

ارتعاشات با میرایی

در ٪۳۰ موارد، میرایی در سیستم ناخواسته است.

ولی در ٪۷۰ موارد، میرایی را در سیستم ها می خواهیم

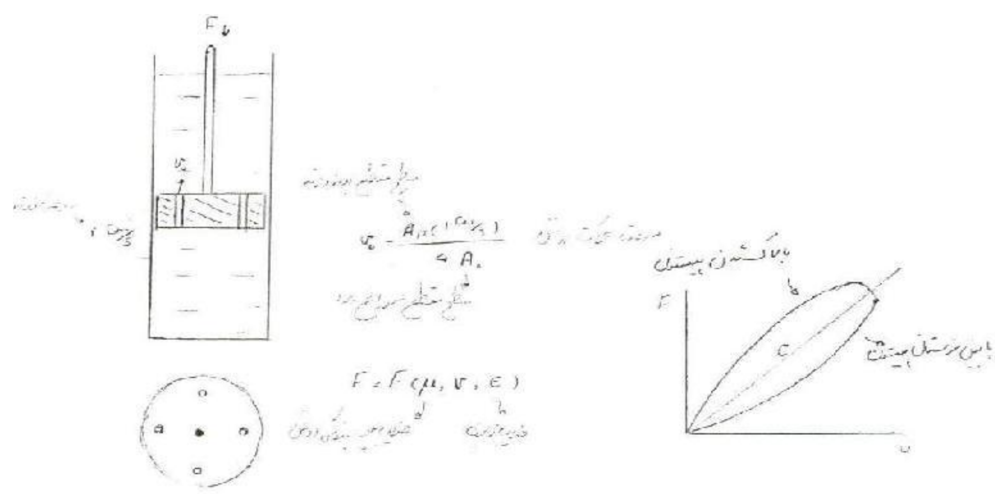
میرایی یعنی انرژی پتانسیل و جنبشی که به هم تبدیل می شوند. به حرارت تبدیل شوند و از محیط خارج شوند.

ساده ترین نوع میرایی از نظر تحلیلی میرایی ویسکوز یا چسبنده است ولی از نظر ساخت، سخت ترین میرایی است.

میرایی سازه ای نوع دیگری است که هر سیستم دارد.

میرایی خشک یا کلعب هم نوع دیگری است ولی این دو نوع میرایی، تحلیلشان سخت است.

میرایی ویسکوز:

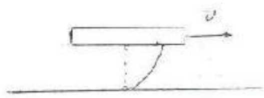


چون ما ایده آل را در نظر می گیریم، منحنی بالا به صورت خط در نظر می گیریم.(رابطه F وV را خطی می گیریم).

ولی ما c را ثابت در نظر می گیریم.

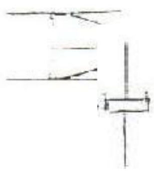
C=شیب خط(ضریب ویسکوزیته)

$$C = C(A_p/A_s, M, P, v, T, \ldots)$$
$$F = cv \rightarrow F = c\dot{x}$$



چون برای حرکت صفحه، باید مولکول های روغن روی هم بلغزند، ایجاد نیرو می کند.

در مثال بالا هم درون سوراخ ها باید روغن حرکت کند ولی به دیواره های سوراخ میچرخد.



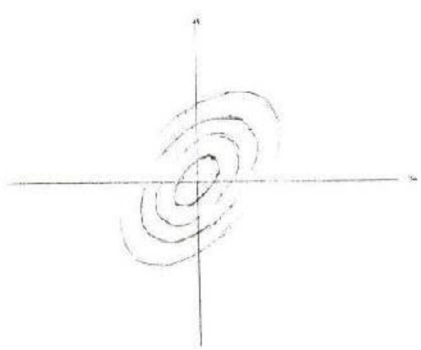
در جاهایی که میرایی نیاز داریم از میرایی ویسکوز استفاده می کنیم.

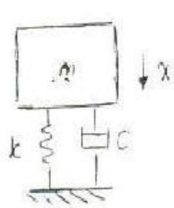
مثلا در جاهایی که به دمپر نیاز داریم.

کمک فنرهای ارون اتومبیل در واقع همان دمپر (چند فنر) اند.

منحنی های هیسترویس در فرکانس های مختلف

(درون دمپر ها)



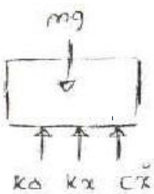


حالت استاتیکی.↓

$\dot{x} = 0$

$Fd = 0$

$mg = k\Box$



$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$
$$\to m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\begin{cases} x(0) = X_0 \\ \dot{x}(0) = V_0 \end{cases}$$

معادله مضر:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}x = dx$$
$$\ddot{X} = \frac{d^2}{dt^2}x = D^2x$$
$$\to (mD^2 \quad cD \quad K)X - 0 \to D = \frac{c = \sqrt{c^2 \quad gmk}}{2m}$$
$$x(t) = x_1 e^{D_1 t} - x_2 e^{D_2 t}$$

۱- اگر C=۰ ← ریشه ها موهمی اند← حل معادله دیفرانسیل هارمونیک خالص

$$\ell(t) = A \sin W_n t - B \sin W_n t$$

۲- اگر c در برابر k,m بزرگ باشد $c^2 > mk$ ← ریشه ها حقیقی

$$c > c_c$$

$$D_2 = \sigma_2, D_1 = \sigma_1$$
$$x(t) = x_1 e^{\sigma_1 t} + x_2 e^{\sigma_2 t}$$
$$D_1 = D = \frac{-c}{2m}$$
$$x(t) = x_1 e^{-\frac{c}{2m}} + x_2 t e^{\frac{c}{2m}}$$

اگر c صفر نباشد ولی $c = 2\sqrt{km}$

$c = c_c$ ریشه مضاعف

$c \leftarrow c_c$ بحرانی یا مرزی (مرز بین هارمونیک و غیر هارمونیک) $c_c = 2\sqrt{km}$

۴ میرایی هوا بسته یعنی c صفر نیست ولی از $2\sqrt{km}$ کوچکتر است.

$$0 < c < c_c$$

$0 < \zeta < 1$ Under damped

$\zeta = 0$ بدون میرایی Undamped

$\zeta = 1$ Critically damped

$\zeta > 1$ Over damped

$$\frac{c}{c_c} = \zeta$$

$$D_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}$$

اگر میرایی خیلی بزرگ باشد کل نیرو را به انتهای خودش وارد می کند(مثلا در اتومبیل کل نیرو را به سرنشین وارد می کند.)

اگر میرایی نباشد فنر اتومبیل در دست انداز ها زیاد نوسان می کند.

میرایی باید باشد ولی زیاد بزرگ نباشد.

Damping ایده آل به صورت کلی (البته بسته به هدف و سیستم تغییر می کند)

$\zeta = 0.707 \; , \; 0.5 < \zeta < 0.8$

w_d از $\zeta = 0$ تا $\zeta = 1$ خواهیم داشت

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{2m} \cdot \frac{c_c}{c_c} = \zeta \sqrt{\frac{k}{m}} = \zeta w_n$$

$$D_{1,2} = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

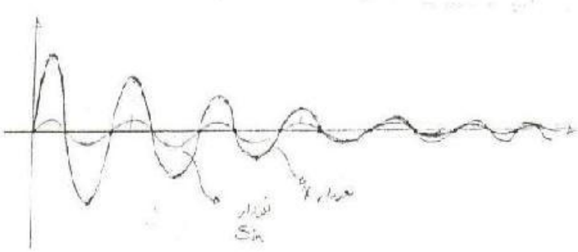
$$0 < \zeta < 1 \rightarrow D_{1,2} = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

وقتی $\zeta \geq 1$ شود دیگر نوسان نداریم

$$w_n \sqrt{1 - \zeta^2} = w_d$$

$$0 < \varepsilon < 1$$

$$x(t) = e^{-\zeta w_n t}(A \sin w_d t + B \cos w_d t) = x e^{-\zeta w_n t} \sin(w_n t - \varphi) = x(t)$$

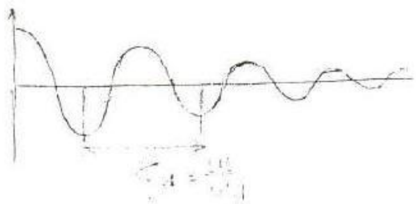


هر جسم flexible دارای خصوصیت طبیعی w_n و ζ است.

همان (c و k)

اگر در یک منحنی میرایی وقتی نقاط max را به هم وصل می کنیم، منحنی exp می شود و می توان ویسکوز را در نظر گرفت.

باید با داشتن یک نمودار بتوان ζ, w_n ان را به دست اورد.



w_nبه شیوه رو به رو به دست می اید.

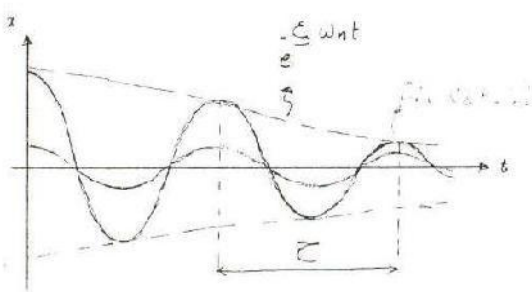
تمرین تحویلی:

۱ راهی برای یافتن ζ پیدا کنید.

۲ پیشنهاد های عملی برای پیدا کردن ζو w_n (نمودار) یک خط کش بیابید.

پروژه:

نمودار نوسانات یک خط کش ۲۵ سانتیمتری را با استفاده از روش نوری یا الکتریکی به دست آورید. سپس نوع میرایی و ضرایب میرایی را تعیین کنید.



$$x_1 = e^{-\zeta w_n t_i} \sin(w_n t_i - \varphi)$$
$$x_2 - e^{-\zeta w_n (t_i + G)} \sin(w_d t_2 - \varphi)$$
$$\rightarrow \frac{x_1}{x_2} - \frac{e^{\zeta w_n t_i}}{e^{-\zeta w_n t_i}\, e^{-\zeta w_n G}}$$
$$\frac{X_1}{X_2} e^{\xi w_n G}$$

نسبت متوالی فقط به ξبستگی دارد.

$$G = \frac{2\pi}{wd} = \frac{2\pi}{w_n\sqrt{1 \quad \xi^2}}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\xi \frac{wnG_2\pi}{wn\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

پس در میرایی ویسکاز نسبت دو دامنه متوالی برابراند.

$$\frac{x_1}{x_1} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_2}{x_9}$$

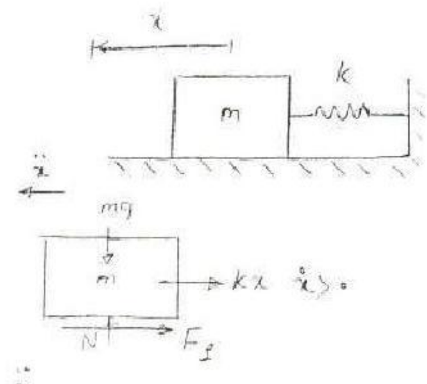
اگر نسبت دامنه ها تغییر کند باید درصد تغییرات آن را مشخص کنیم تا بفهمیم چه نوع میرایی دیگری در سیستم وجود دارد.

معمول ترین نوع میرایی درصنعت میرایی خشک است

جهت شتاب را در ارتعاشات همواره X مثبت می گیریم.

جهت نیروی اصطحکاک وابسته به $\dot{x}$ است

در حالت اول $\dot{x} > 0$ در نظر می گیریم.



$\dot{x} > 0$

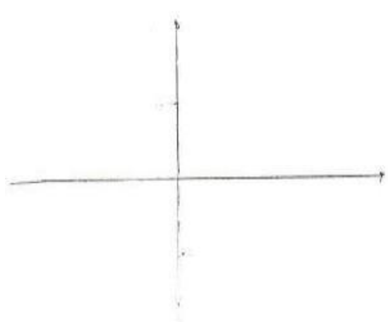
$-k_x - F_f - mX$

$mX - kx = -F_f$

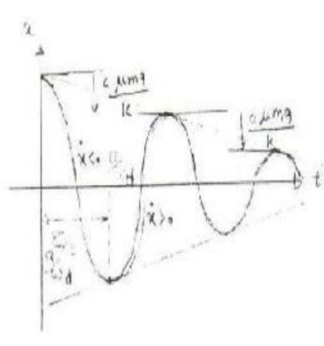
$\dot{x} < 0$

$-kx + F_f = mX$

$mX - kx - F_f$



در این نوع میرایی، نا پیوستگی وجود دارد. یعنی در حایی که $\dot{x}$ برابر صفر می شود، معادله از حالت اول به حالت دوم تبدیل می شود. به همین خاطر این معادله دیفرانسیل بسیار دشوار است.



$mX + kx - \perp F_f$

$m\ddot{x} + kx = Mmg$

$x(0) = x_0$

$\dot{X}(0) = 0$

$x(t) = A\sin w_n t + B\cos W_n t - \frac{Mmg}{k}$

$x(0) = x_0 = B + \frac{Mmg}{k} \rightarrow B = x_0 \frac{-Mmg}{k}$

$\dot{X}(0) = 0 = A w_n \rightarrow A = 0$

$x(t) = (x_0 - \frac{Mmg}{k})\cos W_n t - \frac{Mmg}{k}$

$m\ddot{x} + kx = -F_f$

$\dot{X}(\frac{\pi}{w_n}) = (x_0 - \frac{Mmg}{k})(-1) + \frac{Mmg}{k}$

$x(\frac{\pi}{w_n}) = (x_0 - \frac{2Mmg}{k}) \Rightarrow$

$x(t) = A_2\sin W_n t + B_2\cos W_n t - \frac{Mmg}{k}$

$\dot{X}(\frac{\pi}{w_n}) = 0 = A_2 w_n + 0 + 0 \rightarrow A_2 = 0$

$x(\frac{\pi}{w_n}) B_2\cos\pi - \frac{Mmg}{k} = -(x_0 - \frac{2Mmg}{k})$

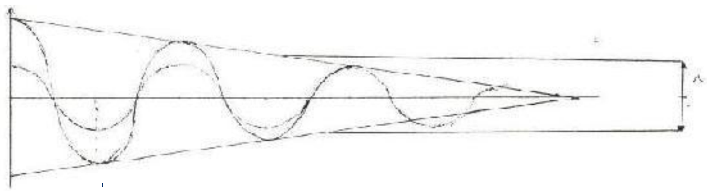
$B_2 = x_0 \quad \frac{3Mmg}{k}$

$x(t) = (x_0 - \frac{3Mmg}{k})\cos W_n t - \frac{Mmg}{k}$

–

در میرایی خطی، دامنه نوسان یا ارتعاش به صورت خطی کم می شود با شیب $\frac{4Mmg}{kGd}$

$x(\frac{2\pi}{w_n}) = (x_0 \quad \frac{3Mmg}{k}) \quad \frac{Mmg}{k} = x_0 \quad \frac{4Mmg}{k}$



وقتی فنر می ایستد حتما جسم به x=۰ باز نمی گردد.

Δ مینیمم جابجایی جسم است برای این که نیروی فنر بتواند اصطحکاک را خنثی کند. اگر دامنه ارتعاشات از Δ کوچکتر باشد و سرعت صفر شود.(نقطه min یا max) دیگر جسم نمی تواند حرکت کند و می ایستد.

$\mu mg = k\llcorner$

اگر نموداری داشته باشیم باید با دو تست: ۱. وصل کرتن نقاط max یا ۲. اندازه گیری اختلاف دامنه ها، مشخص کنیم نوع میرایی چیست نوع پوش منحنی اگر به خط نزدیکتر بود بیشتر میرایی خشک است و اگر به منحنی exp نزدیکتر بود بیشتر میرایی ویسکاز است.

گاهی هم مجموع چند میرایی داریم ، کافی است x هر کدامرا بیابیم و جمع کنیم ولی ما در اینجا نمی توانیم معادلات غیر خطی را حل کنیم.

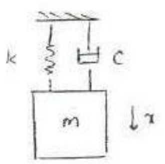
$$m\ddot{X} - kx + c\dot{X} = 0$$

$$m\ddot{X} \quad kx \pm \mu mg = 0$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{X} - kx + c_1\dot{X}^2 &= 0 \\ m\ddot{X} - kx + c_2\dot{X}^2 &- 0 \\ m\ddot{X} - kx + c_3 x\dot{X} &- 0 \end{aligned}\right\}$$

میرایی در واقع انرژی را به حرارت تبدیل می کند ما می توانیم حرارتی که در یک سیکل تولید می شود، (انرژی از دست می دهیم) را پیدا می کنیم.(کار)

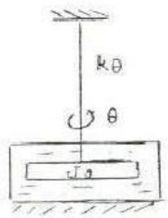
می توانیم همین مقدار کار را محاسبه کنیم که تحت چه میرایی ویسکازی از دست داده می شود. به این ترتیب این ceq معادل را می یابیم و در معادله قرار می دهیم.



$$\left.\begin{matrix} k_{eff} \\ C_{eff} \\ m_{eff} \end{matrix}\right\} X$$

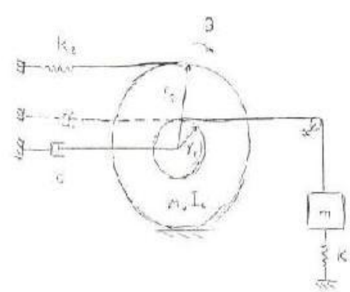
$$T = \frac{1}{2} m_{eff} \dot{X}^2$$

$$U = \frac{1}{2} m_{eff} X^2$$



$$\left.\begin{matrix} k_{eff\,\theta} \\ C_{eff\,\theta} \\ I_{eff} \end{matrix}\right\} \theta$$

برای معادل سازی، ابتدا باید مشخص کنیم که سیستم معادل را خطی در نظر گرفته ایم یا زاویه ای



$$m_{eff} \ddot{x} + k_{eff} x + c_{eff} \dot{X} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

$$(r_1 + r_2)\theta = x$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} I_c \left(\frac{\dot{X}}{r_1 + r_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[m + \frac{I_c}{(r_1 + r_2)^2}\right]\dot{X}^2 \to m_{eff} = m + \frac{I_c}{(r_1 + r_2)^2}$$

$$U = \frac{1}{2} k_2 (x_B)^2 + \frac{1}{2} k_1 x^2 = \frac{1}{2}\left[k_2\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right) + k_1\right]x^2 \to k_{eff} = k_1 + k_3\left(\frac{2r2}{r_1 + r_2}\right)^2$$

$$x_B = 2r_2\theta = 2r_2\left(\frac{x}{r_1 - r_2}\right)$$

برای پیدا کردن C_{eff} باید کار روی فنر را پیدا کنیم حال می خواهیم انتگرال مکان را به انتگرال زمان تبدیل

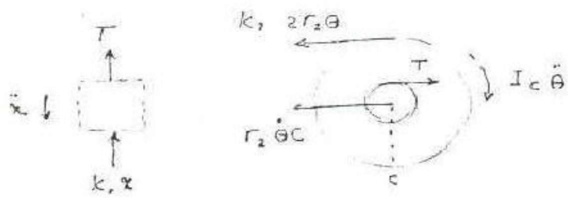
کنیم. چون دامنه همواره در ارتعاش آزاد تغییر می کند، نمی توان در کار و انتگرال قرار داد،پس نمی توان از راه ارژی کار کرد باید از راه نسبیت کار کنیم. یعنی اگر دمپر به جایی که هست در نقطهA به دیسک وصل بود، X آن با X برابر می شد و الان فقط نسبتی از آن است.

$$W = \int F dx - \int c\dot{x} dx$$

$$x - x \sin w_n t$$

$$\frac{dx}{dt} - \dot{x} - x w_n \cos w_n t$$

روش دیگر این است که از روش نیوتن-اویلر، معادله دیفرانسیل خود سیستم را پیدا کنیم.



$$-k_1 x - T - m\ddot{x}$$

$$\sum \mu_c = I_c \ddot{\theta}$$

$$-r_2^2 \dot{\theta} c - k_2 (2r_2)\theta + T(r_1 + r_2) - I_c \ddot{\theta}$$

$$r_2^2 c\dot{\theta} + k_2 (2r_2)^2 \theta - (r_1 + r_2)(-k_1 x - m\ddot{x}) + I_c \ddot{\theta} = 0$$

$$I_c \ddot{\theta} - r_2^2 c\dot{\theta} + \left[k_2 (2r_2)^2\right]\theta - (r_1 + r_2) k_1 x + (r_1 + r_2) m\ddot{x} = 0$$

$$\theta \frac{x}{r_1 - r_2}$$

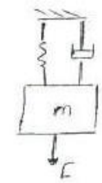
$$I_c \frac{\ddot{x}}{r_1 - r_2} - (r_1 - r_2) m\ddot{x} + r_2^2 c \frac{\dot{x}}{r_1 - r_2} + k_2 (2r_2)^2 \frac{x}{r_1 - r_2} + (r_1 - r_2) k_1 x = 0$$

از معادله دیفرانسیل نمی توان معادل سازی کرد چون معادله دیفرانسیل ممکن است در یک عددی ضرب یا بر یک عددی تقسیم شود. پس w_n درست در می آید ولی سایر معادل ها نه!

بنابراین باید از انرژی جنبشی و پتانسیل m_{eff} و k_{eff} را پیدا کنیم. بعد از معادله اویلر، m_{eff} و k_{eff} را با مقادیر بدست آمده مقایسه می کنیم. مجموعه را یک عدد ضرب یا تقسیم می کنیم تا ضرایب x و $\ddot{x}$ همان mو k معادل شوند. در این جا ضریب $\dot{x}$ ما همان C_{eff} خواهد شد.

$$\rightarrow C_{eff} = (\frac{r_2}{r_1 - r_2})^2 c$$

ارتعاشات با تحریک خارجی



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

در این مرحله به حل همگن کاری نداریم چون شرایط اولیه مربوط به مدت ها قبل است و لحظه ای که ما بررسی می کنیم از آن زمان گذشته است.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{\circ} \sin wt$$

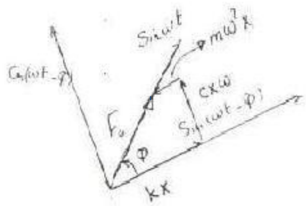
سیستم های خطی اگر تحت تحریک هارمونیک قرار بگیرند عکس العمل باید هارمونیک باشد با همان فرکانس ولی دارای دامنه ای غیر از دامنه آن نیرو باید باشد و اختلاف بازی هم باید داشته باشد. پس جواب خصوصی ما خواهد بود.

$$x = x \sin(wt - \varphi)$$
$$\dot{x} = xw \cos(wt - \varphi)$$
$$\ddot{x} = -xw^2 \sin(wt - \varphi)$$

ین جواب خصوصی باید در معادله اصلی صدق کند. معادله دیفرانسیل یک معادله برداری است که می توان دو مجهول را از آن پیدا کرد. در معادله دیفرانسیل $\dot{x}$و x دو متغیر عددی هم اند.

$$-mw^2 x \sin(wt - \varphi) + cxw \cos(wt - \varphi) + kx \sin(wt - \varphi) = F_{\circ} \sin wt$$

یک روش بسط دادن sin و cos است و مساوی قرار دادن ضرایب sin و.cos

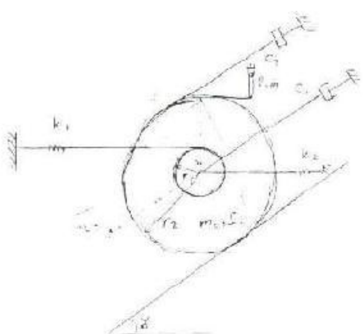


$$\tan\varphi=\frac{cxw}{kx-mw^2x}\ \rightarrow\ \tan\varphi=\frac{cw}{k-mw^2}$$

$$(k-mw^2)^2x^2+(cw)^2x^2=F_o^2$$

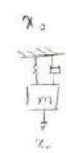
دامنه ± ندارد چون فقط مقدار است.

$$x=\frac{F_o}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}}$$

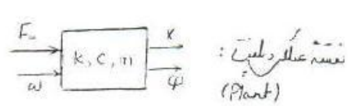


برای نوسان کوچک:

I_{eff}	m_{eff}
k_{eff}	k_{eff}
c_{eff}	c_{eff}
θ	



تاثیر پارامتر های ورودی با توجه به پارامتر های تعریف کننده سیستم:



مثلا نرم افزاری که m, c, k, w, F_o را به آن می دهیم و x و φ را به ما می دهد.

باید تعداد این متغیر ها را کم کنیم یا ان ها را بی بعد کنیم. و یک ترکیب بین پارامتر های سیستم ورودی ها ایجاد کنیم تا تعداد ورودی ها کم شود.

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = w_n$$

$$\frac{c}{\sqrt[2]{km}} - \xi$$

$$x - \frac{F_o}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}} \rightarrow \div \frac{x}{F_o} - \frac{1/k}{1/k\,\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}}$$

$$x = \frac{xk}{F_o} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{m}{k}w^2)^2+(\frac{cw}{k})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{m}{w_n}w^2)^2+(2\xi\frac{w}{w_n})^2}}$$

$$\frac{w}{w_n} - r$$

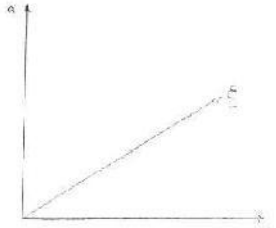
نسبت فرکانسی که سیستم با آن تحریک شده به فرکانس طبیعی سیستم.

$$\frac{cw}{k} - \frac{cw}{k}.\frac{C_c}{C_c} - \xi\frac{\sqrt[2]{km}}{k}w = 2\xi\frac{w}{w_n}$$

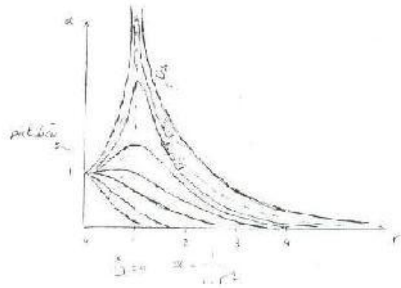
$$x - \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2-(2\xi r)^2}}$$

معادله بی بعد که هر دستگاه را مدتی قابل استفاده می کند.

توسط matlab می توان منحنی سه بعدی معادله بالا را رسم کرد. ولی با دست، عملا برای ξهای مختلف، منحنی $\propto$-r را رسم می کنیم.



$$\propto = \frac{xk}{F_o}$$

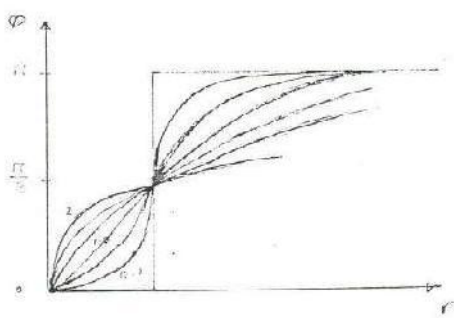


وقتی میرایی نداشته باشیم $(0 - \xi)$و سیستم با فرکانس طبیعی سیستم نوسان کند $(w - w_n)$، دامنه به سمت بی نهایت می رود⇐ تشدید رخ می دهد.

(حتی اگر میرایی کم هم باشد، دامنه باز زیاد می شود.)

منظور از اینکه دامنه بی نهایت می شود،یعنی سیستم تخریب می شود مثل کسی که می میرد، روحش به سمت بی نهایت می رود.

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{cw}{k-mw^2} = \tan^{-1}\frac{\frac{cw}{k}}{1-\frac{m}{k}w^2} = \tan^{-1}\frac{2\xi r}{1-r^2}$$



$\xi = 0$

$\tan\varphi - \frac{0}{r-r^2}$

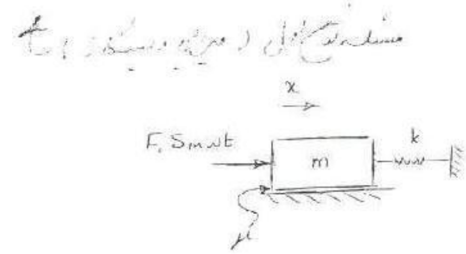
$r - 1$

$\tan^{-1}\frac{2\iota}{0} - \varphi$

$r < 1 \varphi = 0^+$

$r = 1 \varphi = ?$

$r > 1 \varphi - 0$



$$m\ddot{x} + kx = \pm\mu mg + F_0 \sin wt$$

چون مسئله ناپیوسته است، شرایط اولیه هم در مقدار جواب خصوصی تاثیر گذارند.پس:

$$x(t) = X \sin(wt - \varphi) + \frac{\mu mg}{k} + x_1 \sin w_n t - x_2 \cos w_n t$$

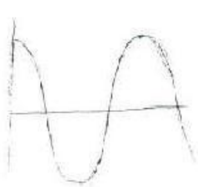
$\dot{x} < 0$
$x(0) = x_0$
$\dot{x}(0) = u_0$

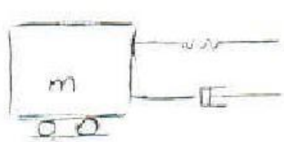
$$x(t) = X \sin(\mathrm{wt} - \varphi) - \frac{\mu mg}{k} + x_3 \sin w_n t + x_q \cos w_n t$$
$\dot{x} > 0$
$x(\pi)$
$\dot{x}(\pi)$

این تحریک، میرایی را جبران می کند و دامنه ثابت می ماند.(ممکن است از دامنه 'اولیه کمتر شود، ولی در نهایت وقتی به صورتsteady شده دامنه ثابت می ماند)

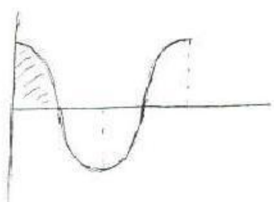
بهترین راه برای حل چنین معادله هایی، جاگزین کردن میرایی خشک با یک میرایی ویسکاز است.

(یک بار از روش قبلی هم سعی کنیم معادله را حل کنیم.)





$$F_c = c\dot{x}$$
$$w_c = \int F_c dx = \int c\dot{x} dx$$
$$x = x \sin wt$$
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = xw \cos wt$$
$$w_c = \int c(xw \cos wt)(xw \cos wt)dt$$
$$w_c = cx^2w^2 \int_0^{2\pi/w} \cos^2 wtdt$$
$$w_c = cx^2w^2 \int_0^{2\pi/w} (\frac{1}{2} - \frac{\cos 2wt}{2})dt$$
$$w_u = \int F_\mu dx = \int \mu mg dx$$
$$dx = xw \cos wtdt$$
$$w_u = \int_0^{2\pi/w} \mu mgxw \cos wtdt = \mu mgxw \int_0^{2\pi/w} \pm \cos wtcdt$$



ما مقداری انرژی را می خواهیم پس در جایی که cos مثبت است، cos+ را در نظر می گیریم. و در جایی که cos منفی است، cos را در نظر می گیریم.

$$w_\mu = 4\mu mgxw \int_0^{\pi/2w} \cos wtdt = 4\mu mgxw \frac{1}{w} = q\mu mgx$$
$$w_c = ceqx^2w\pi$$
$$w_\mu = w_c \quad > ceq = \frac{4\mu mg}{xw\pi}$$

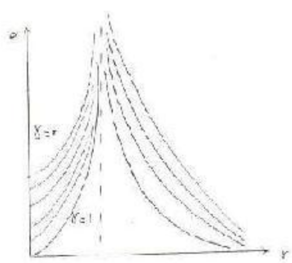
دیگر لازم نیست مسئله را دوباره حل کنیم، کافی است در حل مسئله قبلی به جای c، ceq را به دست آوریم.

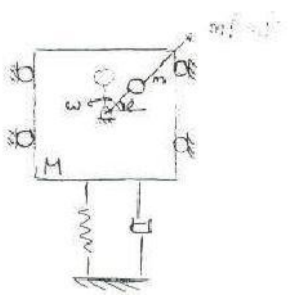
$$x = \frac{F_o}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (\frac{4\mu mg}{xw\pi}w)^2}} \rightarrow x^2(k - mw^2)^2 + (\frac{4\mu mg}{\pi})^2 = F_0^2$$

$$x = \sqrt{\frac{F_0^2 - (\frac{4\mu mg}{\pi})^2}{(k - mw^2)^2}}$$

$$x = \frac{4\mu mg}{\pi F_0}$$

میرایی خشک به ازای کلیه مقادیر X دامنه را بی نهایت می کند پس در رفع رزوناس به ما کمکی نمی کند.X تا جایی می تواند بزرگ شود که برابر ۱ شود. اگر Xبیشتر از ۱ شود، $4\mu mg > \pi F_0$می شود یعنی نیروی اصطحکاک بیشتر از نیروی وارده است و اصلا حرکتی نداریم.





مولفه عددی نیروی گریز از مرکز به جرم m وارد می شود.$\rightarrow mpw^2 \sin wt$

$$M\ddot{X} + c\dot{X} + kx = mpw^2 \sin wt$$

$$x(t) = x \sin(wt - \varphi)$$

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 - (cw^2)^2}} = \frac{mpw^2}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{cw}{k - mw^2}$$

مرحله اول: حل معادله دیفرانسیل و بدست اوردن دامنه و اختلاف فاز

در قسمتی دامنه تابعی از w است و با افزایش w دامنه هم زیاد می شود، حالت قبلی Fo ثابت بود!

مرحله دوم: بی بعد کردن

نمی توان صورت کسر را به طرف دیگر برد چون W متغیر است و نمی توان هر دو طرف تساوی w داشت.

$$x = \frac{mpw^2 / k}{\sqrt{(1 - (\frac{w}{w_n})^2)^2 + (2\xi \frac{w}{w_n})^2}}$$

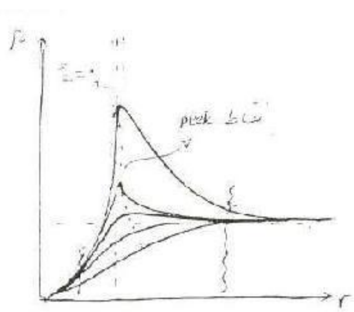
$$x = \frac{\dot{M} mpw^2 / km}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{\frac{mp}{m}(\frac{w}{w_n})^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 - (2\xi r)^2}}$$

حال قسمت ثابت صورت را به طرف دیگر تساوی می بریم.

$$B - \frac{xM}{mp} - \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\varphi - \tan^{-1} \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

$$\ddot{x}M = F$$
$$\dot{X}M - \vec{g}$$
$$xM = \llcorner$$



$$\xi = 0$$
$$p - \frac{r^2}{1-r^2}$$

Peek بیشتر از r=۱ است

در فرکانس پایین جرم اگر کوچک باشد دامنه هیچ تغییر نمی کند، در تشدید بیشترین دامنه را داریم.

اگر w از تشدید بیشتر شود، یعنی در wهای خیلی بزرگ (نیروی وارد به جرم زیاد می شود و دمپر هم زیاد تر کار می کند) نیرو و دمپر با هم به تعادل می رسند و دامنه ثابت می ماند.(B=۱)

مثلا برای طراحی یک ماشین لباسشویی که نلرزد (موقع آب گیری) باید kو c را طوری طراحی کنیم که یا r خیلی بزرگ باشد یا خیلی کوچک. چون w دست ما نیست، باید w_n را خیلی بزرگتر از w در نظر بگیریم پس باید k و c خیلی بزرگ باشند با این کار عملا ماشین لباس شویی نوسان نمی کند ولی در عوض کل

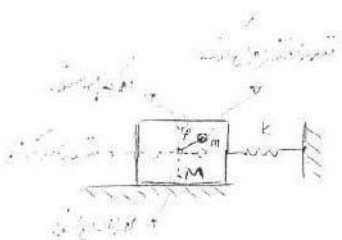
نیرو به پایه ماشین منتقل می شود و کل ساختمان می لرزد. پس این کار اصولی نیست، پس باید در قسمت بعد از r=1 از منحنی در نظر بگیریم.

$$w = 500rpM$$
$$w_n > 500rpm$$
$$w_n = \sqrt{k/m}$$

پروژه مطالعات ویژه:

تحلیل یک ماشین لباسشویی ← طراحی یک ماشین لباسشویی با مواد مختلف و بهینه سازی

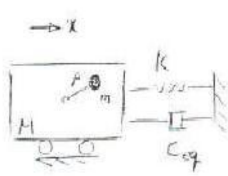
مسئله نوع برای میرایی خشک:



M وقتی در جهت افقی قرار می گیرد، به صورت یک نیروی محرک خارجی عمل می کند. وقتی m عمودی قرار می گیرد روی مقدارN تاثیر می گذارد، قبلا همین معادله را داشتیم ولی N ثابت بود و F_O هم ثابت بود.

$$M\ddot{x} + kx \pm \mu N - mpw^2 \sin wt$$

چون مستقیما نمی توان این مسئله را حل کرد، از معادل سازی استفاده می کنیم.



$$ceq = \frac{4\mu mg}{\pi xw}$$

$$x = \frac{mpw^2}{\sqrt{(k - Mw^2)^2 + (ceqw)^2}}$$

$$w_\mu - \int F_f dx - \int \mu(mg - mpw^2 \sin wt)dx - \int \mu mg dx - \int mfw^2 \sin wt dx$$

$$w_\mu - \int_0^{2\pi/w} \mu mg(xw \cos wt)dx \quad \int_0^{2\pi/w} mpw^2 \sin wt xw \cos wt dt$$

اگر فرض کنیم کار قسمت دوم ناچیز است، ceq مثل حالت قبلی همان $\frac{4\mu mg}{\pi xw}$ بدست می آید.

$$x = \frac{mpw^2}{\sqrt{(k - \mu w^2)^2 + (ceqw)^2}}$$

$$x^2\left[(k - \mu w^2)^2 + \left(\frac{4\mu mgw}{\pi xw}\right)^2\right] = (mpw^2)^2$$

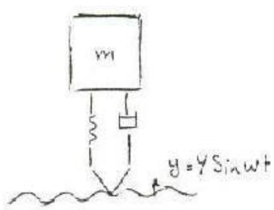
$$x^2\left[(k - \mu w^2)^2\right] = -\left(\frac{4\mu mg}{\pi}\right)^2 + (mpw^2)^2$$

$$x = \frac{\sqrt{(mpw^2)^2 - \left(\frac{4\mu mg}{\pi}\right)^2}}{k - \mu w^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{\frac{(mpw^2)^2\mu^2}{k^2\mu^2} - \left(\frac{4\mu mg}{\pi k}\right)^2}}{1 - r^2}$$

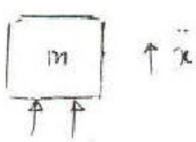
$$\frac{xM}{mp} = \frac{\sqrt{\left(\frac{w}{w_n}\right)^4 - \left(\frac{4\mu M^2 g}{\pi kmp}\right)^2}}{1 - r^2}$$

یک حرکت مواج به سیستم وارد می شود.



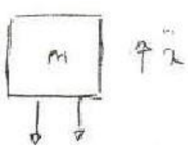
چند حالت برای جابجایی x و y داریم: اگر $y > x$ باشد فنر فشرده می شود.

فرض $\dot{y} > \dot{X}$



$$c(\dot{y} - \dot{X})$$
$$k(y - x)$$
$$\sum F_x = m a_x$$
$$k(y - x) + c(\dot{y} - \dot{X}) = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx + c\dot{X} = ky + c\dot{y}$$

اگر $y < x$ باشد فنر کشیده می شود.



$k(x-y)$

$c(\dot{X}-\dot{y})$

$\sum F_x = ma_x$

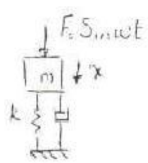
$k(x \quad y) \quad c(\dot{X}-\dot{y}) - m\ddot{x}$

$m\ddot{x} \mid kx \mid c\dot{x} = ky \quad c\dot{y}$

مسئله نوع سوم که دو نوع تحریک هارمونیک برای ان داریم:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx \quad ky \sin wt + cyw \cos wt$

مسئله نوع اول که یک تحریک هارمونیک دارد:



$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(\mathrm{k} \quad \mathrm{mw}^2)^2 \mid (cw)^2}}$$

$$x = x \sin(wt - \varphi)$$

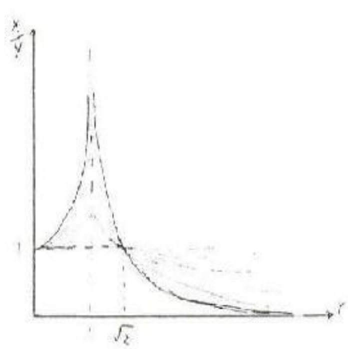
$$mx + c\dot{x} + kx = F_0 \sin wt$$

برای حل مسئله نوع سوم sin و cos را با هم ترکیب می کنیم تا تحریک sin خالص بدست آید، تابع حاصل دارای یک دامنه و یک اختلاف باز است.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} \mid kx \quad \sqrt{(ky)^2 + (cyw)^2} \sin(wt \quad x)$$

$$x = \frac{\sqrt{(ky)^2 \quad (cyw)^2}}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} \to x = \frac{\sqrt{y^2(1 \mid (\frac{cw}{k})^2)}}{\sqrt{(1-(\frac{w}{w_n})^2)^2 + (\frac{cw}{k})^2}}$$

$$\frac{x}{y} - \sqrt{\frac{1 \mid (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 - (2\xi r)^2}}$$



در ξکوچک منحنی در $\infty \leftarrow r$ به سمت صفر می رود

در ξبزرگ منحنی در $\infty \leftarrow r$ به سمت یک می رود.

منحنی قبل از $\sqrt{2}$ هیچ وقت کمتر از یک نمی شود.

اگر بخواهیم سیستمی برای یک خودرو طراحی کنیم که حرکت

پایه به جرم منتقل نشود، ξ باید کوچک باشد $\xi \square 1$ (مثلا در حد ۰,۱ و ...)

R بزرگتر از یک باشد $r \urcorner 1$ (مثلا ۳، ۴ یا ۵)

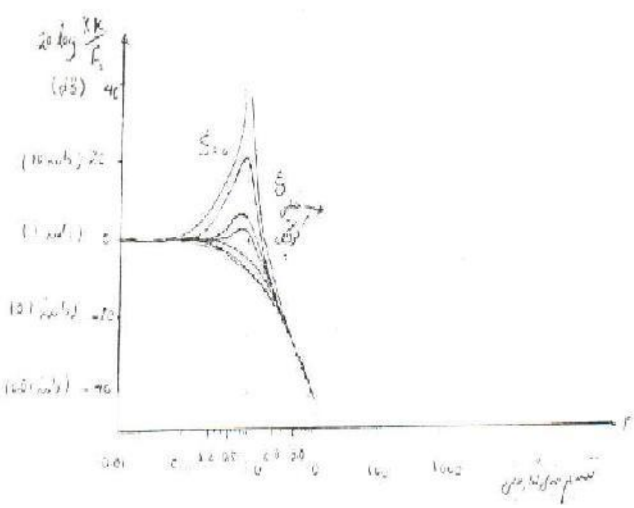
$$w = 5w_n \rightarrow w_n = {}^{w}\!/_{5}$$

اگر بخواهیم به ازای یک حرکت کوچک پایه، جرم، تغییرات زیادی پیدا کند(مثل مخلوط کن)

r باید بین ۰ تا $\sqrt{2}$ باشد (نزدیک به یک)

ξ باید کوچک باشد.

نوع اول:



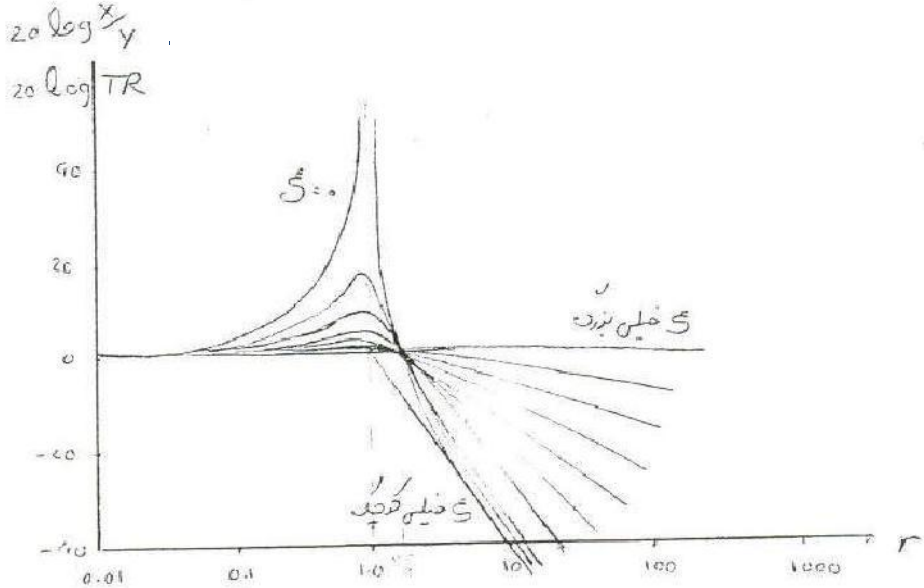
$$20\log\frac{kx}{F_0} = -20\log\left\lfloor(1-r^2)^2+(2\xi r)^2\right\rfloor^{1/2}$$
$$= -10\log\left[(1-r^2)^2+(2\xi r)^2\right]$$
$$= 10\log r^{q}$$
$$dB = -40\log r$$

$$\frac{xk}{F_0} = \infty = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

صفر در حد ∞ است.

برای اینکه دامنه هم رنج زیادی را پوشش دهد آن را لگاریتمی نمی کنیم بلکه از واحد دسی بل استفاده می کنیم.

$$dB = 20\log\frac{xk}{F_0}$$



$$20\log\frac{x}{y} - 20\log\left\lfloor 1+(2\xi r)^2 \right\rfloor^{1/2} - 20\log\left\lfloor (1-r^2)^2 - (2\xi r)^2 \right\rfloor^{1/2}$$
$$= 10\log\left[1+(2\xi r)^2\right] - 10\log\left[(1-r^2)^2+(2\xi r)^2\right]$$

برای ξ خیلی کوچک

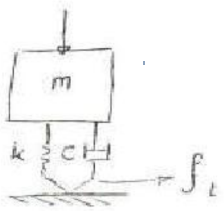
در r خیلی بزرگ قسمت اول صفر می شود (نسبت به قسمت دوم) و بقیه قضیه مثل مسئله حالت اول می شود. (شیب بجانب $40^{dB}/$ **برای ξ خیلی بزرگ**

R خیلی بزرگ حاصل صفر می شود یعنی شیب خط صفر است.

مسئله نوع چهارم:

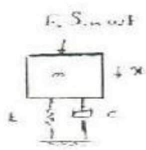
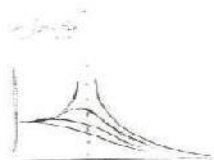
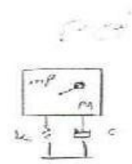
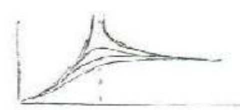
وسیله ای مثل پیکور ها که با آن آسفالت خیابان را سوراخ می کنند وسیله ای است که یک نیروی ارتعاشی خیلی کم را به یک نیروی ارتعاشی خیلی زیاد تبدیل می کند.

$F = F = \sin wt$

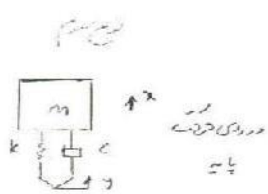
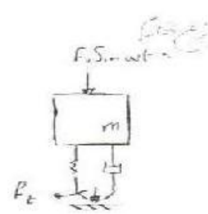
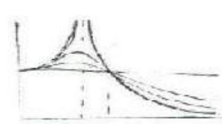


$$f_t = kx - c\dot{x}$$
$$x = x\ \sin(wt - \varphi)$$
$$f_t - xk\ \sin(wt - \varphi) - cxw\ \cos(wt - \varphi)$$
$$f_{t_0} = \sqrt{(kx)^2 + (cwx)^2} = x\sqrt{k^2 + (cw)^2}$$
$$\frac{F_{0c}}{F_0} = \frac{x\sqrt{k^2 + (cw)^2}}{F_0} \quad , \quad \frac{F_{0t}}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 - (cw^2)}}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} = \frac{x}{y} = TR$$

نسبت انتقال در مسئله نوع سوم و چهارم یکی است و نمودار های مسئله نوع چهارم مثل نوع سوم است.

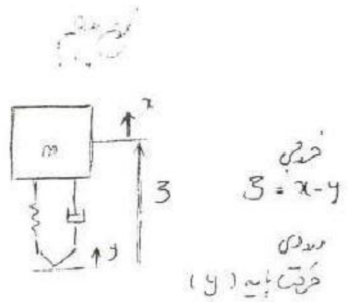
$$\frac{kx}{F_0} - \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin wt$$
$$\frac{Mx}{mp} - \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$
$$M\ddot{x} \quad c\dot{x} \quad kx = mpw^2 \sin wt$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky$$

$$\frac{F_t}{F_0}=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$



$$k(x-y)+c(\dot{x}-\dot{y})=-m\ddot{x}$$

$$x-y=\Im$$

$$k\Im+c\dot{\Im}+m(\ddot{\Im}+\ddot{y})=0$$

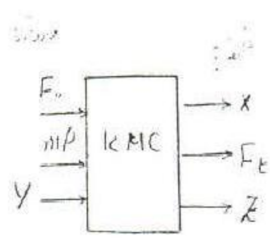
$$m\ddot{\Im}+c\dot{\Im}+k\Im=-m\ddot{y}$$

$$m\ddot{\Im}+c\dot{\Im}+k\Im=myw^2\sin wt$$

$$\Im=z\sin(wt-\varphi)$$

$$z=\frac{myw^2}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}}=\frac{ry^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$\frac{z}{y}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$



$$F_0\xrightarrow{1}x$$

$$F_0\xrightarrow{4}F_t$$

$$mp\xrightarrow{2}x$$

$$mp\xrightarrow{6}F_t$$

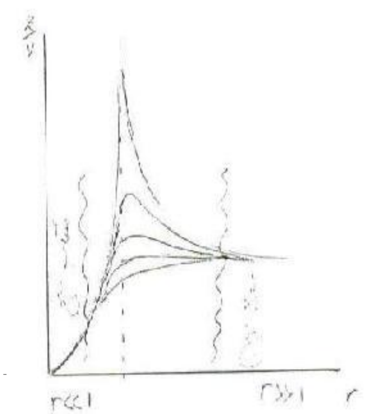
$$y\xrightarrow{3}x$$

$$y\xrightarrow{7}F_t$$

$$y\xrightarrow{5}z$$

در فرهنگ قدیم 7 به معنای بی نهایت است.

به صورت پایه فقط همین 7 حالت وجود دارد. ولی می توان تعداد ورودی ها را افزایش داد و سایر خررجی ها را بدست آورد.



در دو محدوده $r \ll 1$ و $r \gg 1$ ξ بی تاثیر است و نمودار

ها رو هم می افتند.

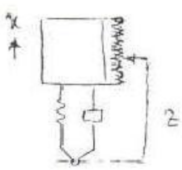
ξ معمولا بین ۰ و ۰,۱ یعنی کوچک است.

$$r \ll 1 \rightarrow \frac{z}{y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{1+o}}$$

$$\frac{z}{y} \approx r^2 = \frac{w^2}{w_n^2} \rightarrow y w^2 = z \quad w_n^2$$

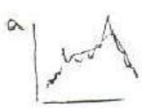
مثلا نسبت یک رئوست روی جسم و اندازه گیری جریان و...

$$e = 1-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2-(2\xi r)^2}}}$$



با یافتن z و نصب آن در w_n^2 شتاب پایه بدست می اید. پس دستگاه بالا یک شتاب میخ است.

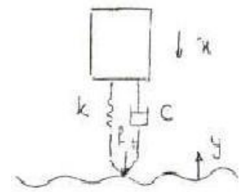
اگر ما یک منحنی شتاب نوسانی با noise داشته باشیم، برای انتگرال گیری آن و یافتن منحنی w ، عملا از یک منحنی صاف انتگرال گرفته می شود. ولی اگر v دارای noise باشد منحنی a که مشتق آن است یک صفحه سیاه می شود.



در $r \gg 1$ عملا $\frac{z}{y} = 1$ یعنی $x = 0$ یعنی جرم حرکت نمی کند.

در این حالت ممکن است به چنین جرمی نیروی بسیار زیادی وارد شود. در هنگام زلزله خود زمین می لرزد پس ما به نقطه ثابتی نیاز داریم که لرزش زمین را نسبت به آن بسنجیم و مقدار این لرزش را محاسبه کنیم در $r \gg 1$ عملا ما این نقطه ثابت (جسم m) را داریم.

چیزی که باید پیدا کنیم: $\frac{F_{t0}}{ky}$

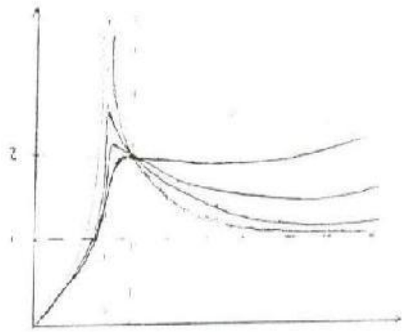


$$y = Y\sin wt$$
$$x = x\sin(wt-\varphi)$$
$$f_t = F_{t0}\sin(wt-\theta)$$

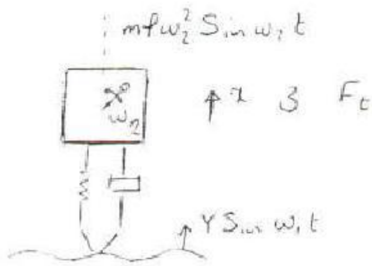
$$f_t = k(x-y)+c(\dot{x}-\dot{y})$$
$$(x-y)k - c(\dot{y}-\dot{x}) = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} = (x-y)k + (\dot{x}-\dot{y})c = f_t$$
$$m\ddot{x} = F_{t0}\sin(wt-\theta)$$
$$mxw^2\sin(wt-\varphi) = F_{t0}\sin(wt-\theta)$$
$$x = Y\frac{\sqrt{k+(cw)^2}}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}}$$
$$mYw^2\frac{\sqrt{k+(cw)^2}}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}} = F_{t0}$$
$$\to \frac{F_{t0}}{kY} = \frac{r^2\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

دامنه FRF (تابع Fnequency response function) به ازای فرکانس های مختلف با ξ های مختلف را می یابیم.

–



عمومی: چون هر کدام با یک دامنه حرکت می کنند و



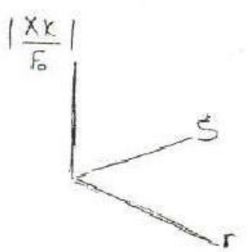
یک W نمی توان دامنه را تعریف کرد، می توان nenponse

را تعیین کرد ولی دامنه ا !

حامی: اگر به صورت ساده تر. دو فرکانس را برابر کنیم می توان دو معادله

را ترکیب کرد و یک دامنه پیدا کرد در این نوع مسئله ها نمی توان FRF را رسم کرد.

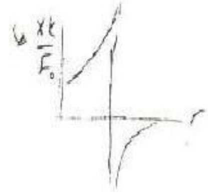
اگر w_1 و w_0 ضریبی از هم باشند. هرچند سیکل یک بار، شکل تکرار می شود و عملا نقطه pick خواهد داشت.



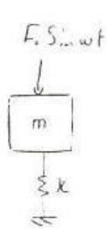
تمرین: ۱-مسئله نوع ششم و هفتم را کامل حل کنید و نمودار FRF آن را رسم کنید.

۲-با matlab هر ۷ نوع را به صورت سه بعدی رسم کنید.

اگر برای رسم نمودار قدر مطلق قرار بدهیم نمودار را منفی هم می کشد که غلط است.

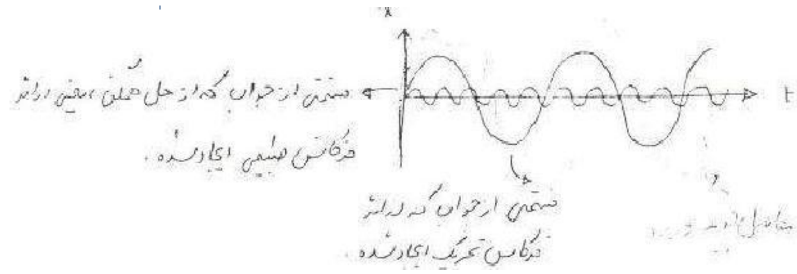


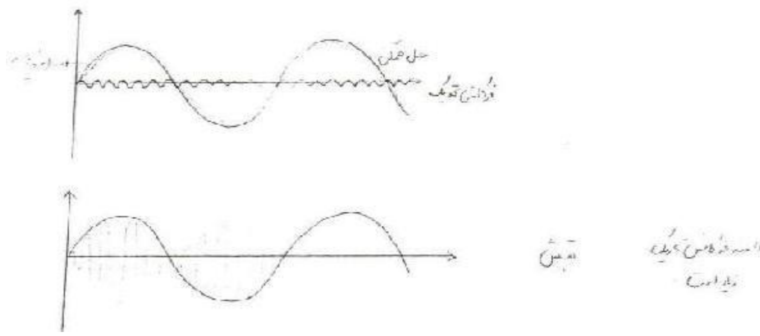
چون میرایی داخل سیستم نیست اثر شرایط اولیه و حل همگن حذف نمی شود.



پس $x(t) - x(w, w_n, F_0)$

اگر w و w_n ضریب صحیحی از هم باشند، منحنی تکرار می شود.





$$G \rightarrow w = \frac{l\pi}{G}$$

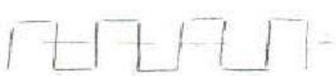
$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos wt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nwt$$

$$a_n = \frac{1}{G}\int_{-G/2}^{G/2} f(t) \cos nwt\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{G}\int_{-G/2}^{G/2} f(t) \sin nwt\, dt$$

$$f(t) \rightarrow \text{زوج} \begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_n = 0 \end{cases} \qquad f(t) \rightarrow \text{فرد} \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases}$$

محور های مختصات را می توان چنان انتخاب کرد که تابع زوج یا فرد یا نه زوج فرد شود.



$F = F_0 \sin wt$ $\qquad$ $F = F_0 \cos wt$

$x = x \sin(\mathrm{wt} - \varphi)$ $\qquad$ $x = x \cos(\mathrm{wt}\ \ \varphi)$

برخی توابع هم متناوب اند ولی هارمونیک نیستند (نه زوج نه فرد)

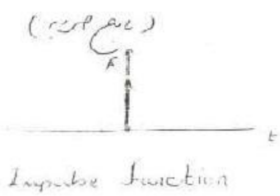
توابع گذرا توابعی هستند که نمی توان یک دوره برای آن ها تعریف کرد

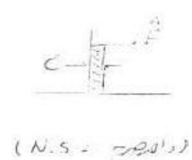
توابع گذرا زمانی شروع شده و متوقف می شود که نسبت به مدت مطالعه یا آزمایش زیاد نیست. (بی نهایت محسوب نمی شود)

توابع متناوب از ∞ (مدت طولانی نسبت به مطالعه) شروع شده و تا $+\infty$ادامه می یابد.

توابع گذرا تا لحظه صفر، صفر اند و از $t = 0$ شروع می شوند.

نوع اول: ساده ترین نوع تابع گذرا، تابعی است که قبل و بعد از صفر، صفر باشد و فقط در $t = 0$ مقدار داشته باشد.



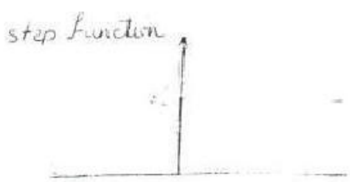


چون ضربه کمیت دارد باید بتوان مقدار آن را نشان داد. این مقدار همان سطح زیر منحنی فوق است.

وقتی $\varepsilon \to$ رود، دامنه به سمت بی نهایت می رود.

$F_{(t)} = F\delta(\mathrm{t})$ $\qquad$ $F_{(t)} = Fdt$

نوع دوم: تابع پله ای



در $t = 0$ تابع غیر تحلیلی است چون بی نهایت مقدار دارد.

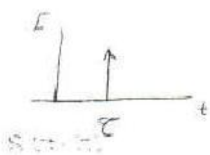
$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ F_0 & t>0\end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$ تابع پله واحد $\rightarrow F(t)=F_0u(t)$

نوع سوم، توابع شیب دار

$$F(t)=\begin{cases}\propto t & t\geq 0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}\qquad F(\mathrm{t})=\propto \mathrm{tu(t)}$$

گاهی مثلا در تابع ضربه، ضربه در $t=0$ نخواهد بود.



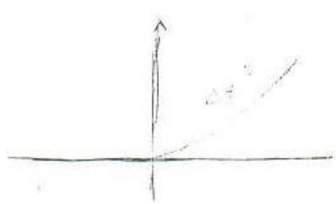
$$F_{(t)}=\hat{F}\delta(\mathrm{t}-G)$$

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t>0\\ 1 & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$$ تابع ضربه واحد

$$F_{(\mathrm{t})}=F_0u(t-G)$$

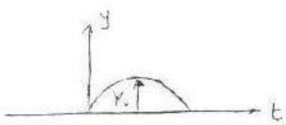
$$F_{(\mathrm{t})}=\propto(t-G)\,\mathrm{u(t}-G)$$

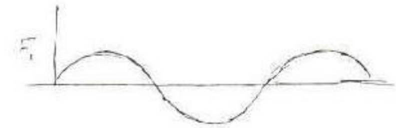
نوع چهارم:



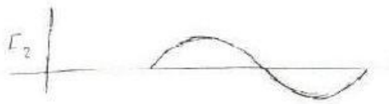
نوع پنجم:

$F = F_0 \sin wt \quad U(t)$

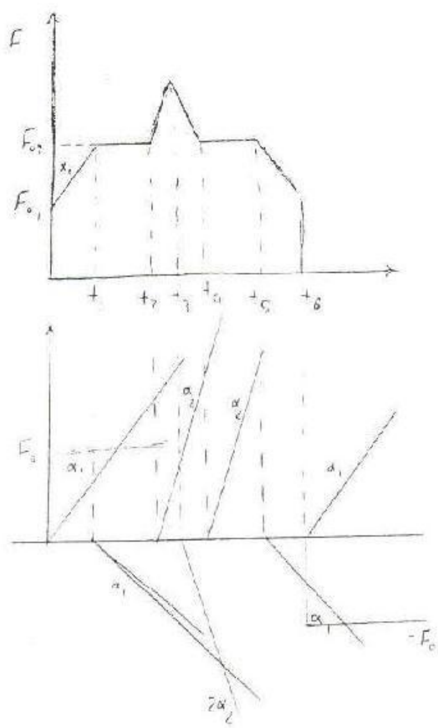




$U(t)\, F_1 = F_0 \sin wt$



$F_2 = F_0 \sin\left\lfloor w\,(t - {}^{G}\!/_{2} \right\rfloor U(t - {}^{G}\!/_{2})$



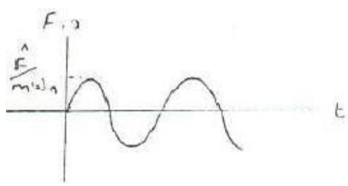
$\hat{F}$ فقط در $t=0$ وجود دارد.

درست بعد از ضربه، باید سرعت را داشته باشیم تا اندازه حرکت خطی بعد از ضربه را پیدا کنیم.

$$t>0$$
$$m\ddot{x}+kx=0$$
$$x(0)=0$$
$$\dot{x}(0)=\frac{\hat{F}}{m}$$

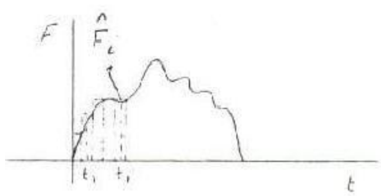
$$x(t)=A\sin w_n t \quad B\cos w_n t$$
$$x(t)=\frac{\hat{F}}{mw_n}\sin w_n t$$

$w=w_n$ فرکانس طبیعی



$$\hat{F}=1 \rightarrow$$
$$h(t)=\frac{1}{mw_n}\sin w_n t$$

عکس العمل در برابر ضربه واحد



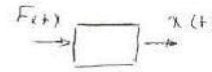
$$F_{(t)}=\sum_{1}\hat{F}_i$$

تابع رو به رو مجموعه ای از چند تابع مستطیلی است که وقتی عرض این ها به سمت صفر رود، هر کدام یک تابع ضربه اند.

فلسفه استفاده از توابع ضربه ای در پیدا کردن تحریک های گذرا

۱ Xولین تحریک ضربه ای

۲ X دومین تحریک ضربه ای



$$x_1 = \frac{\hat{F}_1}{mw_n}\sin w_n t$$

$$x_2 = \frac{\hat{F}_2}{mw_n}\sin w_n (t - t_2)$$

$$x_3 = \frac{\hat{F}_3}{mw_n}\sin w_n \sin w_n (t - t_3)$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{F}}{mw_n}\sin w_n (t - t_i)$$

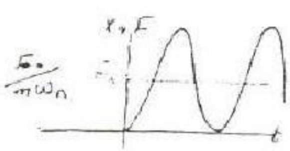
$$x(t) = \int_0^t \hat{F}_i \sin w_n (t - ti) d\lambda$$

$$x(t) = \int_0^t f(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

$$h(t) = \frac{1}{mw_n}\sin w_n t$$

هر تابع گذرایی که تا قبل از صفر،صفر باشد $= f(\lambda)$

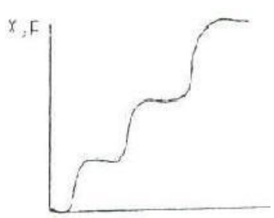
تابع پله ای:



$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{mw_n}\sin w_n (t - \lambda) d\lambda$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{mw_n} \left. \frac{\cos w_n (t - \lambda)}{w_n} \right|_0^t \rightarrow x(t) = \frac{F_0}{mw_n^{\,2}}[1 - \cos w_n t]$$

تابع شیب:

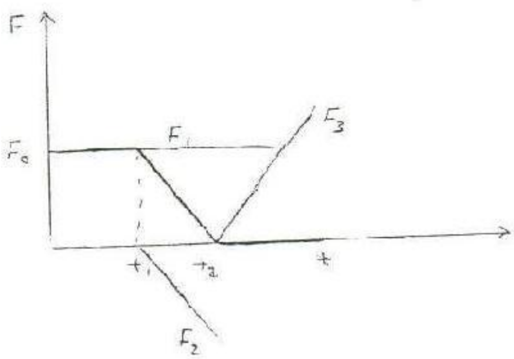


$$F_{(t)} = \begin{cases} at & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{\alpha \lambda}{mw_n}\sin w_n (t - \lambda) d\lambda = \frac{\alpha}{mw_n}\int \lambda \sin w_n (t - \lambda) d\lambda$$

$$h_{(t)} = \frac{\alpha}{mw_n^{\,2}}\left[t - \frac{\sin w_n t}{w_n} \right]$$

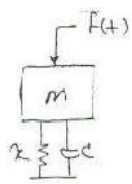
$$F_{(t)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \qquad x(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \alpha \lambda^2 \frac{\sin w_n (t-\lambda)}{m w_n} d\lambda$$



$$x(t) = x_1 u(t) + x_2 u(t-t_1) + x_3 u(t-t_2)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m w_n^2}(1-\cos w_n t) u(t) - \frac{F_0}{(t_2 - t_1) m w_n^2}\left[(t-t_1) - \frac{\sin w_n (t-t_1)}{w_n}\right] H(t-t_1) +$$

$$\frac{F_0}{(t_2 - t_1) m w_n^2}\left[(t-t_2) - \frac{\sin w_n (t-t_2)}{w_n}\right] u(t-t_2)$$



$$f(t) = \hat{F} \Lambda \delta(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\dot{x}(0) = \frac{\hat{F}}{m}$$

$$x(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\xi w_n \dot{x} + w_n^2 x = 0$$

$$D^2 + 2\xi w_n D + w_n^2 = 0$$

$$D_{1,2} = -\xi w_n \pm w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

حل نمایی $\xi > 1$

حل نمایی خاص $\xi = 1$

حل هارمونیک $\xi < 1$

$\xi > 1$ برای $: x(t) = \frac{\hat{F}}{2mw_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[e^{(-\xi+\sqrt{\xi^2-1})w_n t} - e^{(-\xi-\sqrt{\xi^2-1})w_n t} \right] g(t)$

$\xi = 1$ برای $: x(t) = \frac{\hat{F}t}{m} e^{-w_n t} g(t)$

$0 < \xi < 1$ برای $x(t) = \frac{\hat{F}}{mw_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin w_n \sqrt{1-\xi^2}\, t \quad g(t)$

عکس العمل سیستم در برابر ضربه واحد:

$\hat{F} = 1$

$x(t) = g(t)$

$x(t) = \int_0^t f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda$

$\xi = 1 \quad f(t) = F_0 u(t)$ تحریک پله ای

$$x(t) = \frac{F_0 t}{mw_n^2} \left[1 - e^{-w_n t}(1 + w_n t) \right]$$

$0 < \xi < 1 \qquad f(t) = \propto t u(t) \rightarrow$ تحریک شیب

$$x(t) = \frac{\propto}{mw_n^2} \left[t - \frac{2\xi}{w_n} - e^{-\xi w_n t} \left(-\frac{2\xi}{w_n} \cos\sqrt{1-\xi^2} w_n t + \frac{2\xi^2 - 1}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \sin\sqrt{1-\xi^2} w_n t \right) \right]$$

یا

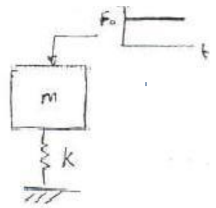
$$x(t) = \frac{\propto}{mw_n^2} \left[t - \frac{2\xi}{w_n} + \frac{e^{-\xi w_n t}}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2} - B) w_n t e^{-w_n t}(1 + w_n t) \right]$$

$B = \tan^{-1}\left[(2\xi\sqrt{1-\xi 2}) / 2\xi^2 - 1 \right]$

$$f(t) = \frac{1}{2} \propto t^2 u(t)$$

$$\begin{cases} x(t) \rightarrow \xi > 1 \\ x(t) \rightarrow 0 < \xi < 1 \\ x(t) \rightarrow \xi = 1 \end{cases}$$

$\xi = 0$



$$x(t) = \frac{F_0}{m w_n^2}(1 - \cos w_n t)$$

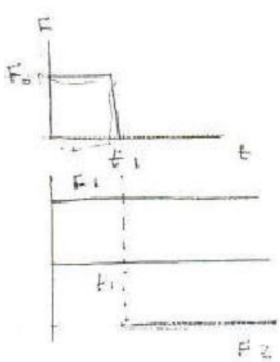
$$x_{max} = \frac{2F_0}{m w_n^2}$$

$$t_p = \frac{\pi}{w_n}$$

$$\ddot{x}(t) = +\frac{F_0 w_n^2}{m w_n^2}\cos w_n t$$

$$\ddot{x}_{max} = \frac{F_0}{m}$$

ولی گاهی پیدا کردن max آسان نیست



$$0 < t < t_1 \qquad x(t) = \frac{F_0}{m w_n^2}(1 - \cos w_n t)$$

$$t_1 < t \qquad x(t) = \frac{F_0}{m w_n^2}(1 - \cos w_n t) - \frac{F_0}{m w_n^2} \times x\,(1 - \cos w_n (t - t_1))$$

برای $0 < t < t_1$ ← پیک همان مقدار حالت قبلی است.

برای $t_1 < t$ ← باید با مشتق گیری، پیک را به دست آوریم.

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0 w_n}{m w_n^{2}} \sin w_n t - \frac{F_0 w_n}{m w_n^{2}} \sin w_n (t - t_1) = 0$$

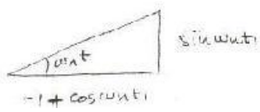
$$\Rightarrow \sin w_n t = \sin w_n (t - t_1)$$

$$\sin w_n t = \sin w_n t \cos w_n t_1 - \cos w_n t \sin w_n t_1$$

$$\sin w_n t (1 - \cos w_n t_1) = -\cos w_n t \sin w_n t_1 \rightarrow \div \cos w_n t$$

$$\tan w_n t = \frac{-\sin w_n t_1}{1 - \cos w_n t_1}$$

$\cos w_n t$? و $\sin w_n t$?



$$\sin w_n t = \frac{\sin w_n t_1}{\sqrt{(\sin w_n t_1)^2 + (-1 + \cos w_n t_1)^2}}$$

$$\cos w_n t = \frac{1 \neq \cos w_n t_1}{\sqrt{(\sin w_n t_1)^2 + (-1 + \cos w_n t_1)^2}}$$

$$!?(\frac{xk}{F_0}) = \frac{1}{\pi/2 + 1 - 2t_1/G} \left[\sin \frac{2at}{\tau} - \frac{2t}{\tau} \sin \frac{at}{t_1} \right] t < t_1$$

$$(\frac{xk}{F_0}) = \frac{1}{\pi/2 - 1 - 2t_1/G} \left[\sin \frac{2\bar{a}t}{\tau} + \sin 2\pi(t/\tau - \frac{t_1}{\tau}) \right] t > t_1$$

$$\tau = \frac{2\bar{a}}{w_n}$$

$$(\frac{xk}{F_0})_{max} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{\tau}$$

$t > t_1$