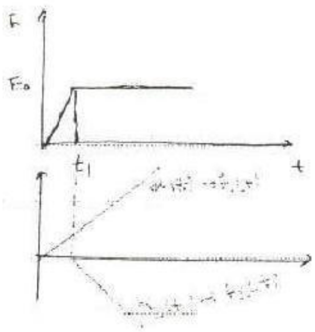
$t_1/\pi = 1,2,3$ > همان دامنه است و تغییری نکرده

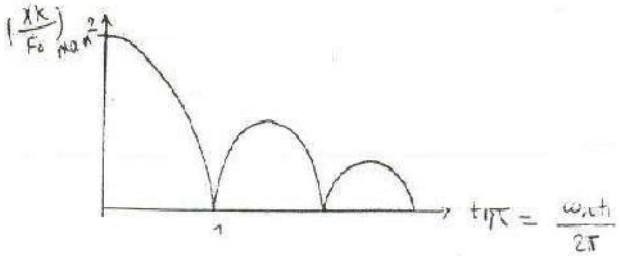
$t_1/\pi = 0.5, 1.5, 2.5 \to \max$ دامنه

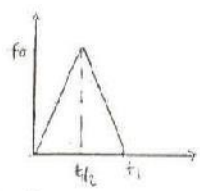
$x \max \leftarrow$ عکس العمل طبیعی

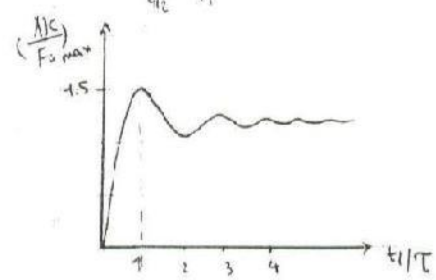
π > سیستم

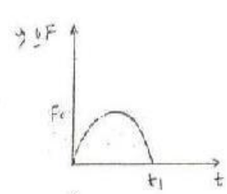
t_1, F_0 > تحریک

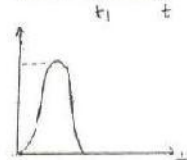


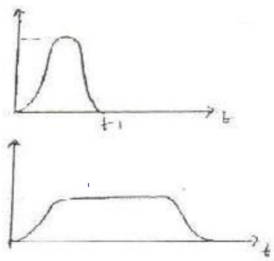


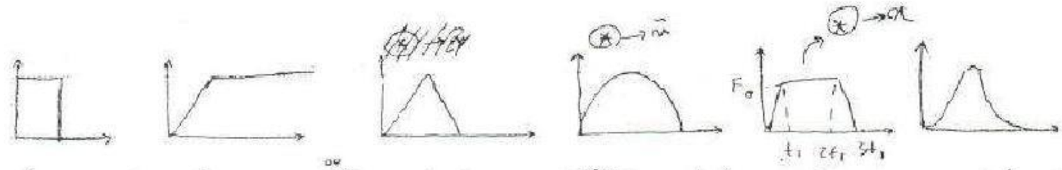












برای نمودارهای بالا، نمودار t_1/T — $\left(\frac{X_K}{F_0}\right)_{max}$ و t_1/T — $\left(\frac{\ddot{x}_k}{F_0}\right)$ را بدون مقیاس رسم نمایید.

$$\int_0^{t} \sin w\lambda(\sin w_n t \cos w_n\lambda - \sin w_n\lambda \cos w_n)d\lambda$$

$$\sin w_n t \int_0^t \sin w\lambda \cos w\lambda d\lambda - \cos w_n t \int_0^t \sin w\lambda \sin w_n$$

$$\int_0^t \sin w\lambda \cos w_n\lambda d\lambda - \frac{1}{w_n}\sin w\lambda \sin w_n\lambda\Big|_0^t - \int \frac{w}{w_n}\cos w\lambda \sin w_n\lambda d\lambda$$

$$u - \sin w\lambda \to du - w\cos w\lambda$$

$$= \frac{1}{w_n}\sin wt \sin w_n t - \frac{w}{w_n^2}\sin wt \sin w_n t$$

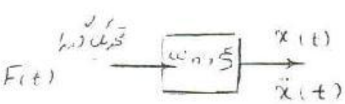
$$du = \cos w_n\lambda d\lambda \to u = \frac{1}{w_n}\sin w_n\lambda$$

$$u = \sin w_n\lambda \to du = w_n \cos w_n\lambda$$

$$du - \cos w\lambda d\lambda \to r - \frac{1}{w}\sin w\lambda$$

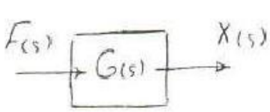
$$+\int \cos w_n\lambda \sin w\lambda d\lambda$$

روش کلاسیک:



$$x(t) - \int_0^t f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda$$

در این فضا نمی توان رابطه بین g,f,x نوشت. ولی در فضای مختلط می شود.



$$x(s)=F(s)G(s)$$
$$x(t)-h^{-1}\left[x(s)\right]-\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$
$$F(t)=F_{\circ}u(t)$$
$$F(s)=\frac{F_{\circ}}{s}$$
$$\rightarrow x(s)=\frac{F_{\circ}}{s}G(s)$$
$$G(s)?$$

برای پیدا کردن $G(s)$ ، از معادله دیفرانسیل لاپلاس می گیریم. (و به قسمت همگن کاری نداریم!) یعنی به شرایط اولیه و گذرا کاری نداریم. فقط قسمت ماندگار را بررسی می کنیم.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)$$
$$h\left[x(t)\right]-x(s)$$
$$h\left[\dot{x}(t)\right]-sx(s)-\mathrm{x}(0)$$
$$\mathrm{h}\left[\ddot{x}(t)\right]-s^2x(s)\quad s\dot{x}(0)-x(0)$$

چون $G(s)$ رابطه ورودی به خروجی در حالت ماندگار است. به شرایط اولیه کاری نداریم و $\Leftarrow$

$$ms^2x(s)+csx(s)+kx(s)=F(s)$$

$G(s)$ $\leftarrow$ تابع تبدیل سیستم (برای سیستم های درجه اول، $G(s)$ حالت روبرو است)

$$G(s)-\frac{x(s)}{F(s)}-\frac{1}{ms^2+cs+k}$$

تابع پله:

$$f(t)=F_{\circ}u(t)$$
$$F(s)-\frac{F_{\circ}}{s}$$
$$x(s)=\frac{F_{\circ}}{s}\left[\frac{1}{ms^2-cs+k}\right]$$

برای لاپلاس معکوس گروتن، یا در جدول مقدار لاپلاس معکوس را می بینیم یا آن را به فرم استاندارد ساده در می آوریم و از حقطیات استفاده می کنیم. چون این تابع در جدول وجود ندارد.

$$x(t) - h^{1}[x(s)] - h^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{A_2 + B_2 s}{ms^2 - cs + k}\right]$$

$$- h^{1}\left[\frac{A_1 ms^2 + A_1 cs + A_1 k + A_2 s - B_2 s^2}{s(ms^2 + cs + k)}\right]$$

$$(A_1 m - B_2)s^2 + (A_1 c - A_2)s + A_1 k = F_o$$

$$A_1 - \frac{F_o}{k}$$

$$A_2 = \frac{-F_o}{ek} c$$

$$B_2 = \frac{-F_o}{mk} m$$

$$x(s) = \frac{-F_o}{ks} + \frac{\frac{-F_o c}{k} - \frac{F_o m}{k} s}{ms^2 - cs + k} = \frac{F_o}{k}\left[\frac{1}{s} - \frac{c + ms}{ms^2 - cs + k}\right]$$

$$x(t) - \frac{F_o}{k}[1 - \cos\ldots + \sin\ldots]$$

$$h[1] - \frac{1}{s}$$

$$h[t] = \frac{1}{s^2}$$

$$h\left[e^{-at}\right] - \frac{1}{s+a}$$

$$h\left[te^{-at}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$h[\cos wt] - \frac{s}{s^2 + w^2}$$

$$h[\sin wt] - \frac{w}{s^2 - w^2}$$

سیستم بی بعد شده ساده مرتبه ۲: $$h^{1}\left[\frac{1}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}\right] - \frac{1}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin w_n \sqrt{1-\xi^2}\, t$$

$$h^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}\right] - \frac{1}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \cos w_n \sqrt{1-\xi^2}\, t$$

تابع ramp:

$$f(t)=\propto tu(t)$$

$$F(s)=\frac{\propto}{s^2}$$

$$x(s)=\frac{\propto}{s^2}\left[\frac{1}{ms^2+cs+k}\right]=\frac{A_1}{S}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3-B_3s}{ms^2+cs+k}$$

چون تابع لاپلاس معکوس از صفر شروع می شود برای تحریک های گذرا مناسب است (قبل از صفر تعریف نشده)

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)$$

روش مدرن: (فضای حالت)

وقتی سیستم ها چند درجه آزادی می شوند، روش مدرن بهتر است. د راین روش یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ را به ۲ معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می کنیم. برای این کار

باید ۲ متغیر تعریف کنیم.

$$\begin{cases} x_1=x \\ x_2=\dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-\frac{c}{m}x_2-\frac{k}{m}x_1-\frac{1}{m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k/m & -c/m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}f(t)$$

$\dot{x}=Ax+Bf$ یک معادله دیفرانسیل درجه اول ماتریسی

$$\dot{x}=Ax+Bf\rightarrow sx_{(s)}=Ax_{(s)}+Bf_{(s)}\rightarrow x_{(s)}=\left[sI-A\right]^{-1}BF_{(s)}$$

$x(t)=h^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}BF_{(s)}\right\}$ لا پلاس معکوس دو تابع وقتی به فضای زمان می اید، می شود انتگرال کانولوشن

$h^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=\varphi(t)$

$x(t)=\int_0^t \varphi(\lambda - t)Bf(\lambda)\,d\lambda$

$\varphi.B=g$

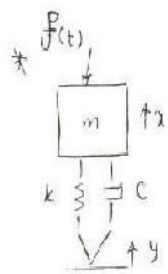
$sx_{(s)}-x_{(0)}=Ax_{(s)}+BF_{(s)}$

$(sI-A)x_{(s)}=x_{(0)}+BF_{(s)}$

$x_{(s)}=(SI-A)^{-1}x(0)+(SI-A)^{-1}BF(s)$

$x(t)=h^{-1}\left[(SI-A)^{-1}\right]X_{(0)}+h^{-1}\left[(SI-A)^{-1}BF_{(S)}\right]$

$X(t)=\varphi(t)X_{(0)}+\int_0^t \varphi(\lambda - t)Bf(\lambda)\,d\lambda$



$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ky+c\dot{y}$

$x_1=x$
$\dot{x}_1=x_2$
$x_2=\dot{x}$
$\dot{x}_2=-\frac{c}{m}x_2-\frac{k}{m}x_1+\frac{k}{m}y+\frac{c}{m}\dot{y}$

چون این دستگاه دارای $\dot{y}$ است حل مسئله را مشکل می کند. چون نمی توان مشتق ورودی یعنی $\dot{y}$ را به دست آورد.

اگر مشتق ورودی داشته باشیم بالاترین مشتق ها را یک طرف تساوی می بریم.

$x_1=x$
$x_2=?=m\dot{x}-cy$

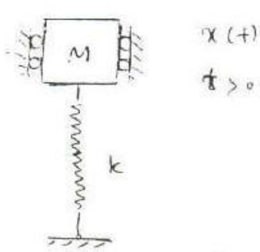
$m\ddot{x}-c\dot{y}=-c\dot{x}-kx+ky+f(t)$ > انتگرال طرف چپ را برای برابر با متغیر دوم میگیریم.

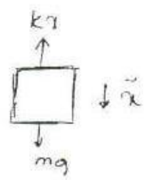
$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m}x_2 + \frac{c}{m}y$$

$$\dot{x}_2 = -c\left(\frac{1}{m}x_2 + \frac{c}{m}y\right) - kx_1 + ky - f(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c/m \\ k - c^2/m \end{bmatrix} y$$

$$B \Rightarrow \begin{bmatrix} c/m & 0 \\ k - c^2/m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ f(t) \end{bmatrix}$$

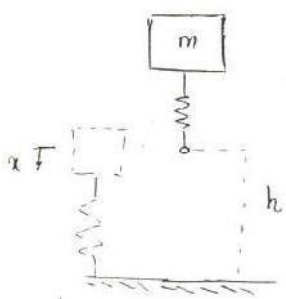




$$m\ddot{x} + kx = mgu(t)$$
$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = 0$$

$x(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos w_n t)$ جواب همان حل پله است.

$$m\ddot{x} + kx = mgu(t)$$
$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = \sqrt{2gh}$$

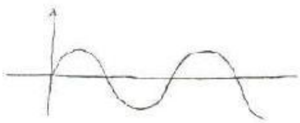


$: m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow x_1(t) = A\sin w_n t + B\cos w_n t \rightarrow x_1(t) = \frac{\sqrt{2gh}}{w_n}\sin w_n t$

معادله بدون شرایط اولیه ← $x_2(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos w_n t)$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2gh}{w_n}\sin w_n t + \frac{mg}{k}}(1 - \cos w_n t)$$

اگر x_1 رابرای قسمت همگن بدست می آوریم و بعد $\frac{mg}{k}$ را به عنوان $x_2(t)$ انتخاب می کردیم اشتباه بود چون جواب خصوصی $\frac{mg}{k}$ نیست چون تحریک ثابت نبوده (mg) بلکه گذرا بوده $(mgu(t))$

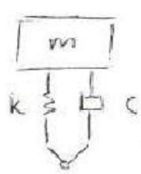


$$m\ddot{x}+kx=F_0 \sin w_n t \quad u(t)$$

مسئله بالا برای حالتی مطرح می شود که جسمی از ارتفاع می افتد. برای این کار باید شتاب max را پیدا کنیم و از روی آن نیروی max را پیدا می کنیم که ببینیم (مقاومت مصالح) جسم می شکند یا نه. اگر بخواهیم جسمی که به زمینی می خورد نشکند باید فنری به آن وصل کنیم که وقتی زمین خورد max شتابی که ایجاد می کند کمتر از شتاب max باشد که خود جسم به تنهایی می تواند تحمل کند .(طراحی بسته بندی)

مبحث طراحی بسته بندی دارای سه بخش است: ارتعاشات مقاومت طراحی

وقتی متری برای جسم طراحی می کنیم دمپر هم حتما خواهد داشتو



$$a\max \le a\max$$

برای پیدا کردن max شتاب باید از $x(t)$ سه بار مشتق بگیریم. زمانی که $jerk$ صفر است (نقطه $pick$) را پیدا می کنیم و درون رابطه $\ddot{x}$ قرار می دهیم.

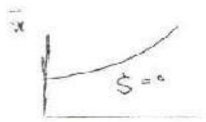
$$a - f(m,k,h)$$

$$\ddot{x} - g\sqrt{\frac{2h}{\delta st}+1}$$

$$\delta st - \frac{mg}{k}$$

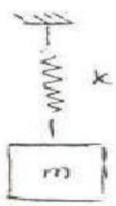
k □ › وقتی فنر خیلی ضعیف شود

δst □ › $\ddot{x} - g$ شتاب min

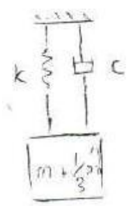


ضریب $damping$ هم موثر است ولی برای اینکه مساله سخت نشود در اینجا نیاوردیم.

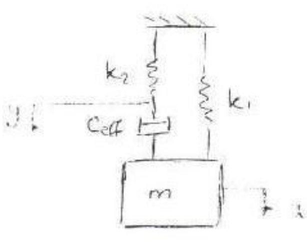
تکلیف: منحنی شتاب را برای ξ های مختلف رسم کنید.



فنر واقعی به جرم m' و دارای دمپر است.

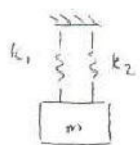


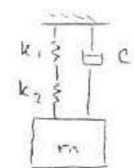
معمولا این سیستم سیستم معادل تیست.

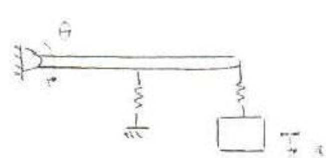


سیستم دو درجه ازادی

سیستم دو درجه ازادی



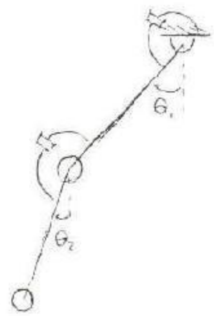


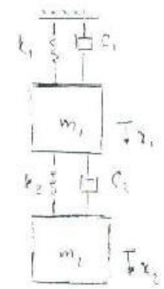


هردو یک درجه آزادی اند

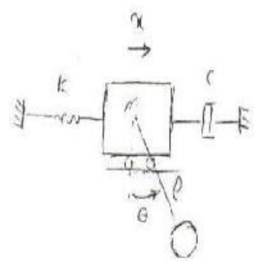
سیستم ساده دو درجه آزادی:

سیستم استاندارد دو درجه آزادی:

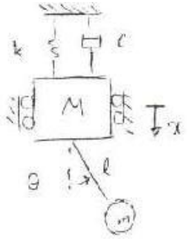


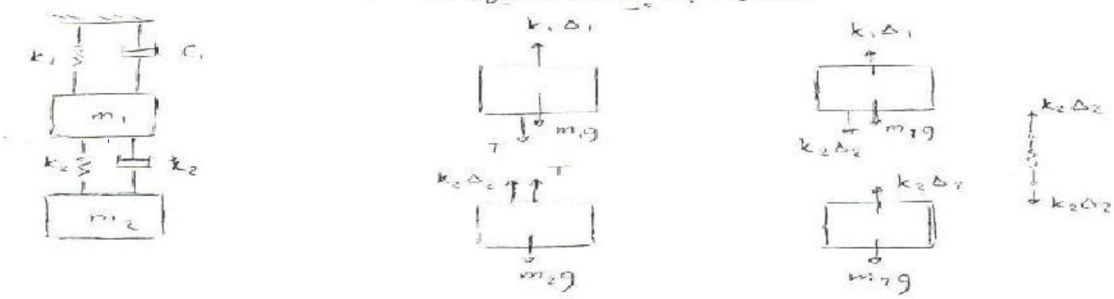


این حرکت قطعا دو درجه آزادی است:



ولی این سیستم ممکن است دو یا یک درجه ازادی باشد(یعنی میله به حالت قائم قرار گیرد) وجسم نوسان کند.

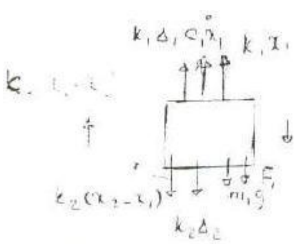




$$\begin{cases} k_1\Delta_1 - k_2\Delta_2 - m_1 g = 0 \\ k_2\Delta_2 \quad m_2 g = 0 \end{cases}$$

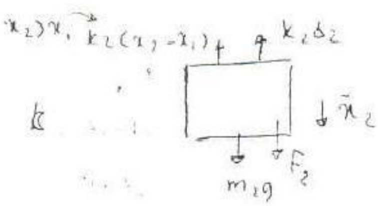
$$\Delta_2 - \frac{m_2 g}{k_2}$$

$$\Delta_1 - \frac{m_1 g \mid m_2 g}{k_1}$$



$$\ddot{x} + F - k_1\Delta_1 - k_1 x_1 + m_2 g - c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_2\Delta_2 = m_1\ddot{x}_1$$

دمپر ها هم مثل نیروی فنر در حالت دینامیکی وارد مسئله می شوند.



$$k_2\Delta_2 \mid m_2 g \quad k_2(x_2 \quad x_1) \quad c_2(\dot{x}_2 \quad \dot{x}_1) = m_2\ddot{x}_2$$

پس وزن وارد مسئله نمی شود

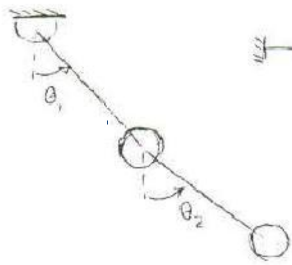
$$\to m_1\ddot{x}_1 \mid k_1 x_1 \mid c_1\dot{x}_1 \quad k_2 x_2 \quad c_2\dot{x}_2 \mid k_2 x_1 \cdot c_2\dot{x}_1 = 0$$

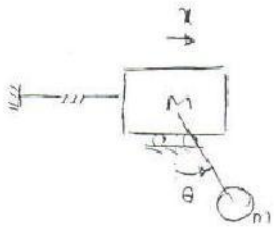
$$\to m_2\ddot{x}_2 \mid c_2\dot{x}_2 \mid k_2 x_2 \quad c_2\dot{x}_1 \quad k_2 x_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \mid c_2 & c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \mid k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$m\ddot{x} \mid c\dot{x} \mid kx = 0$$

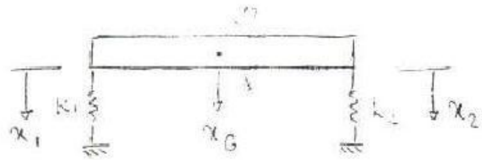
تمرین:.....





$m\ddot{x} + kx = 0$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \\ 0 & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix}$$



$\left.\begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right\}$ در این نقطه هیچ کوپل استاتیکی وجود ندارد

بی نهایت دستگاه مختصات عمومی داریم.

$\left.\begin{matrix} \theta \\ x_G \end{matrix}\right\}$ طبیعی natural

$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_G \end{matrix}\right\}$ عمومی

$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\}$ عمومی

$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_G \end{matrix}\right\}$ عمومی

$\left.\begin{matrix} x_1 \\ \theta \end{matrix}\right\}$ عمومی

$\left.\begin{matrix} x_B \\ x_C \end{matrix}\right\}$ عمومی

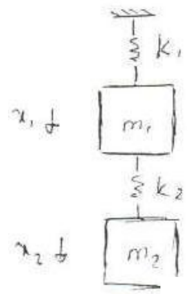
$\left.\begin{matrix} x_2 \\ \theta \end{matrix}\right\}$ عمومی

$\left.\begin{matrix} x_C \\ \theta \end{matrix}\right\}$ عمومی

اگر محور مختصات نقلی را پیدا کنیم کار بسیار ساده می شود ولی پیدا کردن آن ها گاهی ساده نیست.

مثلا اگر $k_2 = k_1$ باشد، محورهای نقلی در مرکز جرم می شود.

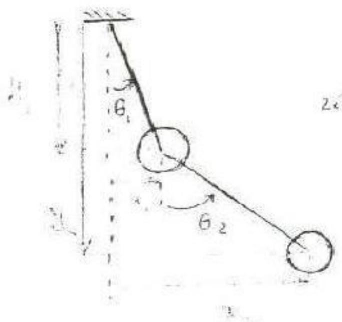
$$x^* = x^*(x_c, x_B)$$
$$y^* = y^*(x_c, x_B)$$



نرمال $\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 - x_1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{array}\right\}$

نقلی $\Big\{$ یکی از حالت های $\begin{array}{l} x = cx_1 + dx_2 \\ y = ax_1 + bx_2 \end{array}$

$$\underset{2\times2}{M}\,\underset{2\times1}{\ddot{X}} + \underset{2\times2}{C}\,\underset{2\times1}{\dot{X}} + \underset{2\times2}{K}\,\underset{2\times1}{X} = \underset{2\times1}{F}$$



در قدم اول F و $c\dot{x}$ را کنار می گذاریم و *Undamped Natoual Frequencies* را پیدا می کنیم.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

w_{n1}
w_{n2}

سیستم ما در این حالت بسته به شرایط اولیه با مخلوطی از این دو فرکانس نوسان می کند.

$$x_1(t) = x_{11}\sin(w_{n1}t + \varphi_{11}) + x_{12}\sin(w_{n2}t + \varphi_{12})$$
$$x_2(t) = x_{21}\sin(w_{n1}t + \varphi_{21}) + x_{22}\sin(w_{n2}t + \varphi_{22})$$

ما می توانیم شرایط اولیه ای به سیستم بدهیم که فقط با یکی از دو w_n نوسان کند.

$$\begin{cases} x_1(t) - x_1 \sin w_{n1} t \\ x_2(t) - x_2 \sin w_{n1} t \end{cases}$$ مثلا:

به صورت طبیعی سیستم ها با w طبیعی نوسان می کنند مگر اینکه ما به حالت دیگری مجبورشان کنیم.

$$\begin{cases} x_1(t) = x_3 \sin w_{n2} t \\ x_2(t) = x_4 \sin w_{n2} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1 \sin w_n t \\ x_2(t) - x_2 \sin w_n t \end{cases}$$

برای پیدا کردن فرکانس طبیعی، باید ابتدا ماتریس m,k را پیدا کنیم، سپس در معادله های دیفرانسیلی که داریم، x_2, x_1 را به صورت مد نرمال قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} m_1 w_n^2 x_1 \sin w_n t + (k_1 + k_2) x_1 \sin w_n t \quad k_2 x_2 \sin w_n t = 0 \\ m_2 w_n^2 x_2 \sin w_n t \quad (k_2 + x_2) \sin w_n t \quad k_2 x_1 \sin w_n t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 - k_2 - m_1 w_n^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 w_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sin w_n t - 0$$

سه حالت وجود دارد:

یا ماتریس اولی صفر باشد که غیر ممکن است (چون k هیچگاه صفر نمی شود)

یا ماتریس دوم صفر است که اصلا حرکت نخواهیم داشت

یا $\sin w_n t$ صفر باشد که در واقع w_n های خاصی به ما خواهد داد که ما حالت خاص نمی خواهیم.

پس حالت چهارم درست است که دترمینان صفر باشد.

$$\Rightarrow ad - bc - 0 \rightarrow (k_1 + k_2) k_2 - m_1 m_2 w_n^4 + w_n^2 \left[-m_1 k_2 - m_2 k_1 - m_2 k_2 \right] - k_2 - 0$$

$$w_n^2 - \frac{m_1 k_2 \quad m_2 k_1 + m_2 k_2}{2 m_1 m_2} \pm \frac{\sqrt{(m_1 k_2 + m_2 k_1 m_2 k_2)^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2}$$

$$m_1 = 2m \qquad k_1 = 2k$$

$$m_2 = m \qquad k_2 = k$$

$$w_n^2 - \frac{2mk \quad 2mk \mid mk}{4m^2} \perp \frac{\sqrt{(5mk)^2 - 16m^2k^2}}{4m^2} - \frac{5}{4}\frac{k}{m} \perp \frac{3}{4}\frac{k}{m} \;\; \begin{matrix} 2\frac{k}{m} \\ \mid \; \frac{k}{2m} \end{matrix}$$

$$w_{n1} = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$w_{n2} - \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

آن چیزی که کوچکتر است همیشه ۱ است و به ترتیب بزرگ می شود. در واقع w_{n2} دو برابر w_{n1} است.

$$\left\{(k_1 - k_2 - mw_n^2)x_1 - k_2x_2\right\}\sin w_n t = 0$$

$$\frac{x_1}{x_2} - \frac{k_2}{k_1 - k_2 - mw_n^2} - \frac{k}{2k + k - 2mw_n^2} - \frac{k}{3k - 2mw_n^2}$$

$$(\frac{x_1}{x_2}) = \frac{k}{3k - k} = \frac{1}{2}$$

$$(\frac{x_1}{x_2})_2 = \frac{k}{3k - 4k} = \quad 1$$

می خواهیم از نظر ریاضی اثبات کنیم که چه شرایط اولیه ای به سیستم بدهیم تا با مد اول و چه شرایطی بدهیم تا با مد دوم نوسان کند.

$$x_1 = x_{11}\sin(w_{n1}t - \varphi_{11}) - x_{12}\sin(w_{n2}t - \varphi_{12})$$

$$x_2 - x_{21}\sin(w_{n1}t - \varphi_{21}) + x_{22}\sin(w_{n2}t - \varphi_{22})$$

$$(\frac{x_{11}}{x_{21}}) = (\frac{x_1}{x_2})_{w_{n1}} (\frac{x_{12}}{x_{22}}) = (\frac{x_1}{x_2})_{w_{n2}}$$

$x_1(0) \quad \dot{x}_1(0)$

$x_2(0) \quad \dot{x}_2(0)$

2مجهول ‹ $\begin{matrix} x_1(0), x_2(0) \\ \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0) \end{matrix}$ 6مجهول ‹ $\begin{matrix} w_{n1}\, w_{n2} \\ (\frac{x_1}{x_2})_1, (\frac{x_1}{x_2})_2 \end{matrix}$ 10مجهول

در سیستمی که میرایی ندارد، باید حالت مد اول و دوم بر قرار شود. برای این کار، باید:

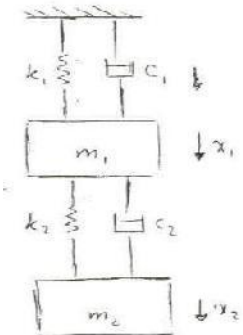
$\varphi_{11} - \varphi_{21}$

$\varphi_{12} - \varphi_{22}$

میرایی همیشه باعث می شود دو سیستم غیر هم باز شوند ولی اگر میرایی نباشد در سیستم با ترکیبی از w_n ها نوسان می کنند.

$$w_{n1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_1 \quad w_{n2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \leftarrow undamped\,(\xi=0)\begin{cases} w_{n1},\xi_1 \\ w_{n2},\xi_2 \end{cases}$$

$$0<\xi<1\begin{cases} wd_1 = w_{n1}\sqrt{1-\xi_1^2} \\ wd_2 = w_{n2}\sqrt{1-\xi_2^2} \end{cases}$$



$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1-c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$w_{n1} = w_{n1}(m_1,m_2,k_1,k_2) \qquad w_{n2} = w_{n2}(m_1,m_2,k_1,k_2)$$

$$\xi_1 = \xi_1(m_1,m_2,k_1,k_2,c_1,c_2) \qquad \xi_2 = \xi_2(m_1,m_2,k_1,k_2,c_1,c_2)$$

اگر جواب را به طور کلی $x(t)=xe^{rt}$ در نظر بگیریم، بسته به مقدار r، همه حالت های جواب xرا دربر می گیرد. در این جا فرض می کنیم هر دو مد بایک فرکانس نوسان می کنند و یک ξ پس هر دو با یک مد نوسان می کنند.

$$x_1(t) = x_1 e^{\xi w_n t}\sin w_{d1} t \qquad x_2(t) = x_2 e^{\xi w_n t}\sin w_{d1} t$$

r حقیقی $\xi>1$

r حقیقی خاص $\xi=1$

r مختلط $0<\xi<1$

r موهومی $\xi=0$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$
$$mD^2+cD+k=0$$
$$D=-\frac{c}{2m}\pm\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

$x=xe^{rt} \Rightarrow mxr^2e^{rt}+cxre^{rt}+kxe^{rt}=0 \Rightarrow mr^2+cr+k=0$ به این روش حل، روش حل نمایی می گویند

$$x_1=x_1e^{rt}$$
$$x_2=x_2e^{rt}$$

$$m_1x_1r^2e^{rt}+(c_1+c_2)x_1re^{rt}+(k_1+k_2)x_1e^{rt}-c_2x_2re^{rt}-k_2x_2e^{rt}=0$$
$$m_2x_2r^2e^{rt}+(-c_2)x_1re^{rt}+c_2x_2re^{rt}-k_2x_1e^{rt}+k_2x_2e^{rt}=0$$

$\begin{bmatrix} m_1r^2+(c_1+c_2)r+k_1+k_2 & -c_2r-k_2 \\ -c_2r-k_2 & m_2r^2+c_2r+k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}e^{rt}=0 \Rightarrow$ دترمینان برابر با صفر

$$a_4r^4+a_3r^3+a_2r^2+a_1r+a_0=0$$
$$r_1=\alpha_1=-\xi_1w_{n1}+w_{n1}\sqrt{\xi_1^2-1}$$
$$r_2=\alpha_2=-\xi_1w_{n1}-w_{n1}\sqrt{\xi_1^2-1}$$
$$r_3=\alpha_3=-\xi_2w_{n2}-w_{n2}\sqrt{\xi_2^2-1}$$
$$r_4=\alpha_4=-\xi_2w_{n2}-w_{n2}\sqrt{\xi_2^2-1}$$
$$r_1=\alpha_1+jB_1$$
$$r_2=\alpha_1-jB_1$$
$$r_3=\alpha_2+jB_2$$
$$r_4=\alpha_2-jB_2$$

برای پیدا کردن ξ ها و w_n ها، ابتدا باید جفت هر کدام از α ها را پیدا کنیم، سپس از جمع و تفریق آن ها معادله های قابل حل به دست می آید.

چون باید همه جفت باشد: یا هر ۴ تا مختلط اند یا هر ۴ تا حقیقی اند یا ۲ تا حقیقی و ۴ تا مختلط اند.

برای پیدا کردن ریشه های r در معادله درجه ۴، می توان در جدولی مقادیر تغییر علامت جواب r را پیدا کرد، و بعد ریشه های موهولی را یافت.

ولی قسمت سخت کار وقتی است که هر ۴ جواب معادله مختلط باشد.

گر برای پیدا کردن جواب ماشین حساب نداشتیم، اول چک می کنیم که حقیقی است یا نه، بعد معادله را به صورت $(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)=0$ می نویسیم و مقادیر r_1 تا r_4 را می یابیم.

$$k_1 = 2k_2 = 2k$$
$$c_1 = 2c_2 = 2c$$
$$m_1 = 2m_2 = 2m$$
$$\Rightarrow 2m^2 r^4 + (5mc)r^3 + (7mk - 2c^2)r^2 + (4kc)r - 2k^2 = 0$$

$$m = 2kg$$
$$k = 10 N/m \qquad\qquad 8r^4 + 100r^3 + 340r^2 + 400r + 200 = 0$$
$$c = 10\frac{Ns}{m}$$

چون $\frac{c}{2\sqrt{km}}$ تقریبا بزرگتر از ۱ است، حداقل دو ریشه حقیقی اند.

$$\begin{cases} r_1 = -3.04 \\ r_2 = -7.85 \end{cases}$$ معادله را به $(r-r_1)(r-r_2)$ تقسیم می کنیم

$$8r^2 + 12.9r + 8.4 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_3 = -0.8 - j\,0.63 \\ r_4 = -0.8 + j\,0.63 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} -\xi_1 w_{n1} - w_{n1}\sqrt{\xi_1^2 - 1} &= -7.85 \\ -\xi_1 w_{n1} + w_{n1}\sqrt{\xi_1^2 - 1} &= -3.04 \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} \rightarrow -2\xi_1 w_{n1} &= -10.89 \\ -2w_{n1}\sqrt{\xi_1^2 - 1} &= -4.81 \end{aligned}\right\} \to D$$

$$-\xi_2 w_{n2} \pm j w_{n2}\sqrt{-\xi_2^2 - 1} = -0.8 \mp j\,0.63$$

$$x_1(t) = x_{11}e^{r_1 t} + x_{12}e^{r_2 t} + x_{13}e^{-\xi_2 w_{n2} t}\sin(w_{n2}\sqrt{1-\xi_2^2}\,t)$$
$$x_2(t) = x_{21}e^{r_1 t} + x_{22}e^{r_2 t} + x_{23}e^{-\xi_2 w_{n2} t}\sin(w_{n2}\sqrt{1-\xi_2^2}\,t)$$

$$(\frac{x_{11}}{x_{21}})_{r1}$$

$$(\frac{x_{12}}{x_{23}})_{r2} \qquad (4r^2+30r+30)x_1-(10r+10)x_2=0 \qquad \frac{x_1}{x_2}=\frac{10r+10}{4r^2+30r+30}$$

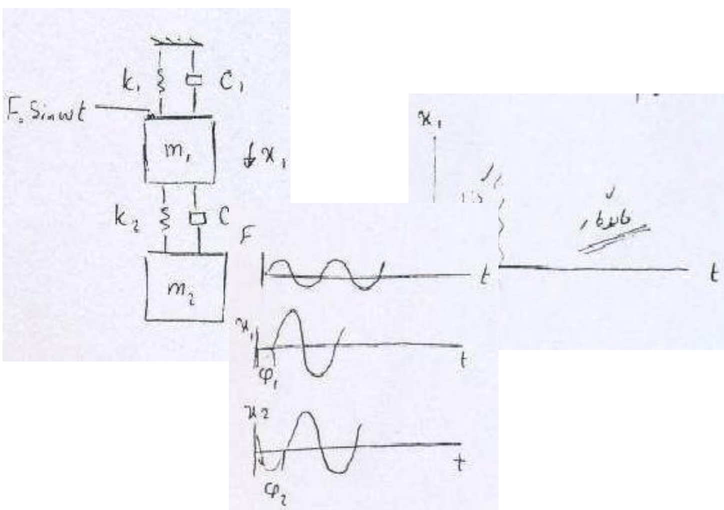
$$(\frac{x_{13}}{x_{23}})_{r3,r4}$$

$$(\frac{x_1}{x_2})_{r1}=\frac{1}{1.187}=0.9 \qquad (\frac{x_1}{x_2})_{r2}=\frac{1}{-0.6}=-1.6 \qquad (\frac{x_1}{x_2})_{r3,r4}=0.2$$

$$x_{1(t)}=A_1e^{-3.04t}+B_1e^{-7.8t}+e^{-0.8t0}(c_1\cos 0.63t-c_2\sin 0.63t)$$

$$x_{2(t)}=A_1\times 1.18e^{-3.04t}-0.6B_1e^{-7.95}-5.0e^{-0.8t}(c_1\cos 0.63t-c_2\sin 0.63t)$$

بررسی سیستم ماندگار:



$$F=F_0\sin wt$$
$$x_1=x_1\sin(wt-\varphi_1)$$
$$x_2=x_2\sin(wt-\varphi_2)$$

چون حل این مسئله دشوار است، در مرحله اول برای سیستم بدون میرایی مسئله را حل می کنیم.

$$c_1=c_2=0$$

سیستمی که میرایی ندارد، عکس العمل با تحریک هم فازند.

$$\Rightarrow$$
$$x_1=x_1\sin wt$$
$$x_2=x_2\sin wt$$
$$M\ddot{x}+kx=F$$

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_1w^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-m_2w^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\sin wt=\begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin wt$$

$\Delta = (k_1 + k_2 - m_1 w^2)(k_2 - m_2 w^2) - k_2^2$ کافی است معکوس ماتریس ولی را در طرف دوم تساوی ضرب کنیم

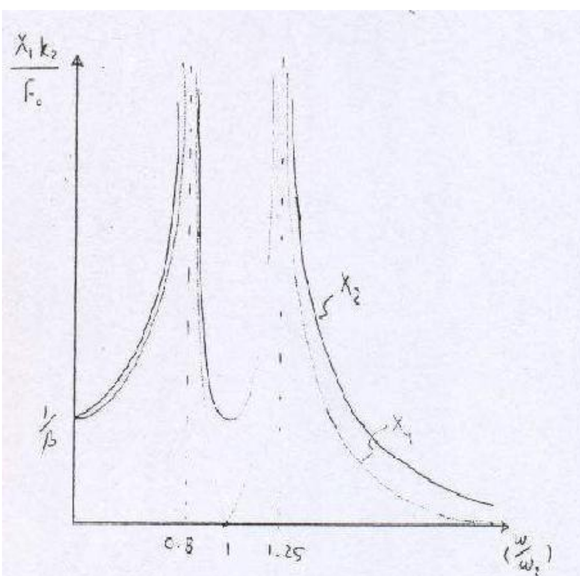
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_2 - m_2 w^2}{\Delta} & \frac{k_2}{\Delta} \\ \frac{k_2}{\Delta} & \frac{k_1 + k_2 - m_1 w^2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{F_0 (k_2 - m_2 w^2)}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{k_2 F_0}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\frac{1}{k_2}(1 - \frac{m_2}{k_2} w^2) F_0}{(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_2} - \frac{m_1}{k_2} w^2)(1 - \frac{m_2}{k_2} w^2) - 1}$$

$$\frac{x_1 k_2}{F_0} = \frac{(1 - (\frac{w}{w_2})^2)}{(B + 1 - \mu(\frac{w}{w_2})^2)(1 - (\frac{w}{w_2})^2) - 1}$$

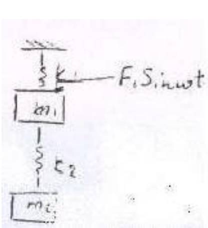
$$\frac{x_2 k_2}{F_0} = \frac{1}{(B + 1 - \mu(\frac{w}{w_2})^2)(1 - (\frac{w}{w_2})^2) - 1}$$



چون در این دو نقطه تشدید اتفاق افتاد $w_{n1} = 0.8 w_2$ ، $w_{n2} = 1.25 w_2$

$w^* = w_2 \quad \rightarrow zero\ frequency$

در این نوسان جرم m_1 نوسان نمی کند ولی جرم m_2 نوسان خواهد داشت. پس اگر جرمی داشته باشیم که نیروی هارمونیکی به آن وارد شود و بخواهیم آن جسم ساکن باقی بماند و نوسان نکند جرمی همراه فنری به آن متصل می کنیم به طوری که رابطه زیر برای جرم دوم و فنرش بر قرار باشد: $\sqrt{k_2 / m_2}$

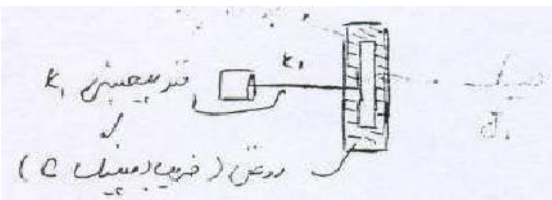


چنین جسمی را جاذب ارتعاش یا حبس کننده ارتعاش می گویند.

ولی اگر نسبت $\sqrt{k_2/m_2}$ فقط کمی از wبیشتر یا کمتر شود، ممکن است به تشدید برسد(پس خطرناک است)

برای سیستم های خطی نمی توان به جای فنر k_2، دمپر گذاشت چون در صورت پایین رفتن به بالا بر نمی گردد.

ولی در سیستم های دوار، می توان از دمپر و جرم m_2 استفاده کرد.



برای حل چنین مسئله ای، مسئله کلی زیر را حل می کنیم و k_2و c_2 را صفر قرار می دهیم.

برای حل چنین مسئله ای، روش عادی قابل استفاده نیست و باید از روش نمایی استفاده کرد.

$$F = F_0 e^{jwt}$$

$$x_1 - x_1 e^{j(wt-\varphi_1)} - x_1 e^{-j\varphi_1} e^{jwt} - \bar{x}_1 e^{jwt} \quad |\bar{x}_1| - x_1 \quad \angle\bar{x}_1 - \varphi_1$$

$$x_2 = x_2 e^{j(wt-\varphi_2)} = x_2 e^{-j\varphi_2} e^{jwt} = \bar{x}_2 e^{jwt} \quad |\bar{x}_2| = x_2 \quad \angle\bar{x}_2 = \varphi_2$$

$$M\ddot{x} - c\dot{x} + kx = F_0 e^{jwt}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 w^2 + jw(c_1 + c_2) + k_1 + k_2 & -c_2 jw - k_2 \\ -c_2 jw - k_2 & -m_2 w^2 + jc_2 w + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 - \frac{F_0(k_2 - m_2 w^2 - jwc_2)}{k_1 k_2 - m_2 k_1 w^2 - k_2 m_2 w^2 - k_2 m_1 w^2 - m_1 m_2 w^4 - w^2 c_1 c_2}$$

$$\bar{x}_2 - \frac{F_0(k_2 - jwc_2)}{k_1 k_2 - m_2 k_1 w^2 - k_2 m_2 w^2 - k_2 m_1 w^2 + m_1 m_2 w^4 - w^2 c_1 c_2}$$

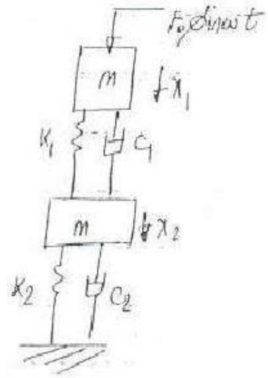
$$x_1 = |\bar{x}_1| = \frac{F_0 \sqrt{(-m_2 w^2 + k_2)^2 + (c_2 w)^2}}{D} \quad x_2 = |\bar{x}_2| = \frac{F_0 \sqrt{k_2^2 + (c_2 w^2)^2}}{D}$$

$$\frac{x_1}{F_0/k_2} - \frac{1}{A} \sqrt{(\Omega_r^2 - \Omega^2)^2 + a(\xi_2 \Omega \Omega r)^2}$$

$$\frac{x_2}{F_0/k_2} - \frac{1}{A} \sqrt{(\Omega_r^4 - 4(\xi_2 \Omega \Omega r)^2}$$

سیستم های دو درجه ازادی:

روابطش را به صورت کامل به دست آوردیم:

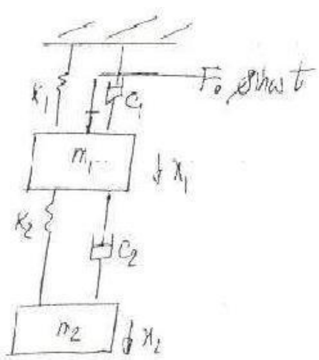


$$|\bar{x}_1| - x_1 - \frac{F_0\sqrt{(-m_2w^2+k_2)-(c_2w)^2}}{D}$$

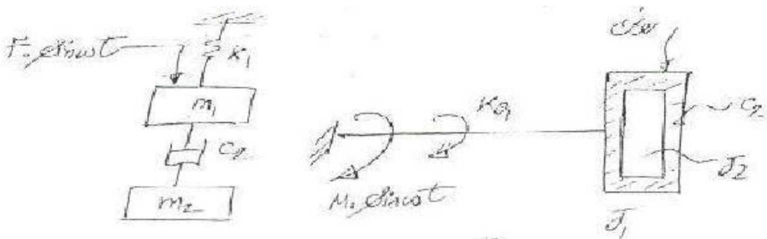
$$|\bar{x}_2| - x_2 - \frac{F_0\sqrt{k_2^2-(c_2w)^2}}{D}$$

$$D^2=\left[m_1m_2w^4-(m_1k_2^2+m_2k_1+c_1c_2+m_2k_2)w^2+k_1k_2\right]^2+\left[(m_1c_2-m_2c_1-m_2c_2)w^3-(k_1c_2-k_2c_1)w\right]^2$$

در حالت خاص جای قبلی قرار می گیرد...



این سیستم خطی نمی تواند ارتعاش کند ولی سیستم دورانی می تواند.



در این حالت ممکن است.

$$\begin{cases} k_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$ حالت خاص این مسئله

$$x_1 = \frac{F_0\sqrt{(m_2 w^2)^2 + (cw)^2}}{\sqrt{\left[m_2 w^2 (k_1 - m_1 w^2)\right]^2 + (cw)^2 \left[m_2 w^2 - (k_1 - m_1 w^2)\right]^2}}$$

$$x_2 = \frac{+F_0 c w}{\sqrt{\left[m_2 w^2 (k_1 - m_1 w^2)\right]^2 + (cw)^2 \left[m_2 w^2 - (k_1 - m_1 w^2)\right]^2}}$$

بی بعد کردن:

$$x_1 = \frac{x_0\sqrt{\mu^2 r^2 - 4\xi^2}}{\sqrt{\mu^2 r^2 (1-r^2)^2 + 4\xi^2 \left[\mu r^2 - (1-r^2)\right]^2}}$$

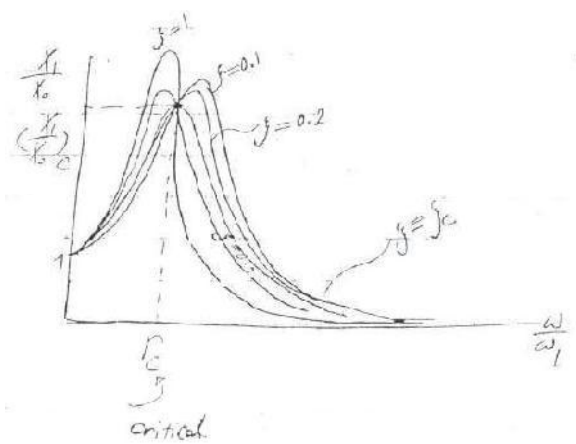
$$x_0 = \frac{F_0}{K_1} \qquad \xi = \frac{c}{2 m_1 w_1} \qquad r = \frac{w}{w_1}$$

$$w_1^2 = \frac{k_1}{m_1} \qquad \mu = \frac{m_2}{m_1}$$

x_1 را در حالت خاص بدست می آوریم:

نمودار ها را در ξ مختلف رسم می کنیم.

فرض $\mu = 1$



در نمودار های بالا سیستم به صورت ۲درجه آزادی تحمل نمی کند(نمودار ۲تا $pick$ نباشد) چون در ستاست ۲تا جرم داریم ولی فقط یک فنر داریم

تمام منحنی ها از یک نقطه ی ثابت می گذرند:

$$\left(\frac{x_1}{x_0 c}\right), r_r$$

نموداری (به ازای یک مقدار ξ خاص) وجود دارد که این نقطه $pick$ نمودارش باشد(جاذب ارتعاشی برای جذب ارتعاش جرم m_1 قرار داده شده است) (جاذب ها اگر دمپر نداشته باشد هر جایی به بی نهایت می رسد)

مقادیر $ceritical$ فقط به μ بستگی دارند:

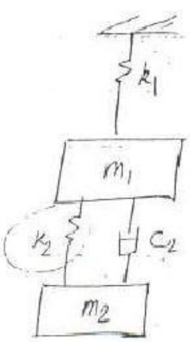
$$\xi_c = \frac{\mu}{\sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{2}{2-\mu}}$$

این جاذب ارتعاشی برای سیستم های دوار قابل استفاده است. برای سیستم های خطی، یک فنر هم کنار c_2 باید باشد.

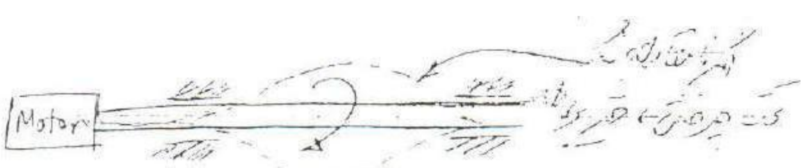
تمرین:

این حالت را نمودارهایش بر ۱ رسم کنیم. (با توجه به همان معادلات ماشین)



این مطالب تا الان سیستم ۲ درجه آزادی نوع اول (تحت تحریک $F_0 \sin wt$) بود.

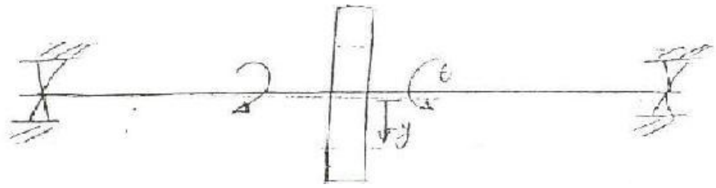
نوع دوم، سیستم ۲ درجه آزادی با جرم نا متعادل است. کاربرد آن در نمودار های دورانی است:



مدل کردن این مسئله ی واقعی به سیستم شده قابل تحلیل ریاضی مهم است.

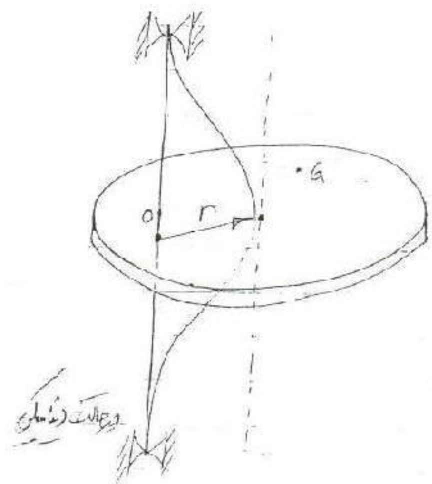
جرم را در مرکز متمرکز می کنیم و آن را با یک دیسک نشان می دهیم:

این دیسک وسط یک جرم نا متعادل می شود و.....

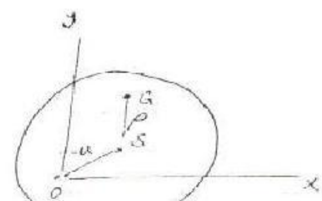


برای مدل کردن: به دو صورت می توان مدل کرد:۱ . ساده ۲ . کامل

در حالتی مقداری از دیگ خم شده:



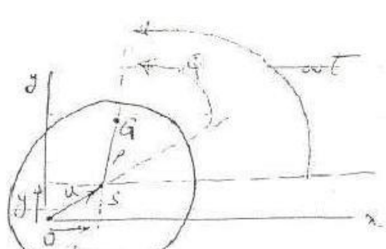
تصویر از بالا:



مرکز هندسی:S

مرکز جرم:G

فاصله مرکز جرم تا مرکز هندسی:



$$\sum Fx - max$$
$$\sum Fy = may$$

φدر اثر چرخش دیسک در ایجاد شده است.

در حالت معمولی G و S و O هم خط هستند.

$$\sum Fx = \max$$

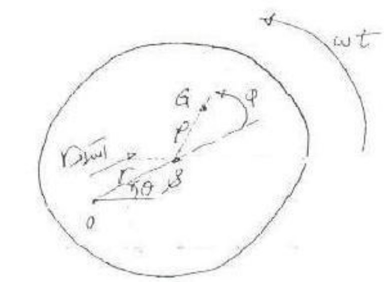
$$\rightarrow -kx - c\dot{x} = m\frac{d^2}{dt^2}(x - p\cos wt)$$

$$\sum fy = may \rightarrow -ky - c\dot{y} = m\frac{d^2}{dt^2}(y + p\cos t)$$

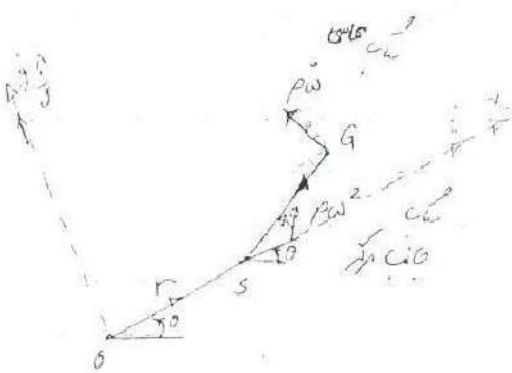
$$\rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mpw^2\sin wt \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = mpw^2\sin wt \end{cases}$$ سیستم ۲ درجه آزادی با جرم نا متعادل

۲ معادله با هم کوپل نیستند ما تاثیر x و y روی هم را در نظر نگرفتیم این مدل سازی ساده است.

مدل سازی کامل:



$$\vec{a}_G = \vec{a}_S + \vec{a}_{G/S}$$



$$a\vec{s} = (\ddot{r} - r\dot{\theta})\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$a\vec{G} = \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - pw^2\sin(wt - \theta)\right]\hat{i} + \left[(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) - pw^2\sin(wt - \varphi)\right]\hat{j}$$

$(+p\ddot{\theta}\sin(wt-\theta)\hat{j} + p\ddot{\theta}\cos(wt-\theta)\hat{j})$.این ها را هم داریم ولی $\ddot{\theta}$ را در نظر نمی گیریم در این مسئله تقریب زده ایم

$$\begin{cases} kr \quad c\dot{r} = ma r \\ -cr\dot{\theta} = ma\theta \end{cases}$$ میله در جهتی که خم می شود، جهت r است (x و y دیگر اینجا نداریم)

Ar همان شتاب در جهت $\hat{j}$ و $a\theta$ همان شتاب در جهت $\hat{j}$ است.

معادلات دیفرانسیل در مدل سازی کامل: (معادلات دیفرانسیل کامل جفت های دورانی در حالت نا متعادل)

$$\begin{cases} \Rightarrow \quad kr \quad c\dot{r} = m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - pw^2\cos(wt \quad \theta) \quad p\ddot{\theta}\sin(wt \quad \theta)\right] \\ \Rightarrow -k_\theta\theta - cr\dot{\theta} = m\left[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - pw^2\sin(wt \quad \theta) \quad p\ddot{\theta}\cos(wt - \theta)\right] \end{cases}$$

۲ درجه آزادی r و θ است.

$$\rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} \quad c\dot{r} + kr \quad mp\ddot{\theta}\sin(wt - \theta) - mp\dot{\theta}^2\cos(wt - \theta) - mr\dot{\theta}^2 = 0 \\ mr\ddot{\theta} + cr\dot{\theta} + k_\theta\theta + 2m\dot{r}\dot{\theta} - mp\dot{\theta}^2\sin(wt - \theta) + mp\ddot{\theta}\cos(wt - \theta) = 0 \end{cases}$$

۲ معادله دیفرانسیل در هم کوپل هستند. معادلات دیفرانسیل درجه ۲ هستند. دستگاه معادله غیر خطی است. Sin و cos ها $\dot{\theta}^2$ یا $\dot{r}\dot{\theta}$ ، $r\ddot{\theta}$ و... عوامل غیر خطی هستند. از روش های عددی و تقریبی حل می شود.

سنکرون حالتی است که دیسک یکنواخت بچرخد، در شرایط *steady* ، $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ نداریم، $\ddot{\theta}$ نداریم. (دوران یکنواخت است، r کم و زیاد نمی شود)

$$\dot{r} = 0$$
$$\ddot{r} = 0$$
$$\ddot{\theta} = 0$$

ساده کردن معادلات در این حالت:

$$\begin{cases} kr \quad mrw^2 \quad mpw^2\cos(wt \quad \theta) = 0 \\ cr\dot{\theta} - k_\theta\theta - mpw^2\sin(wt - \theta) = 0 \end{cases}$$

برای خطی کردن معادله دیفرانسیل غیر خطی:

در روش های عددی:

$$\dot{x} = \frac{x(k-1)-x(k)}{t}$$

$$\dot{r} = \frac{r(k+1)-r(k)}{t}$$

$$\ddot{r} = \frac{\dot{r}(k-1)-\dot{r}(k)}{t} = \frac{\frac{r(k+2)-(r(k+1)}{t} - \frac{r(k-1)-r(k)}{t}}{t}$$

$$\ddot{r} = \frac{r(k\quad 2)\quad 2r(k\quad 1)\quad r(k)}{t^2}$$

$\dot{r}$ و $\ddot{r}$ و $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ را در معادله جایگذاری می کنیم.

step هایی که بر می داریم تا تابع پیوسته را *descrete* کنیم.

$$m\left(\frac{r(k-2)-2r(k-1)+r(k)}{T^2}\right)-c\left[\frac{r(kH)-r(k)}{T}\right]$$
$$+k(r(k))+mp\left[\frac{\theta(k+2)\quad 2\theta(kH)+\theta(k)}{T^2}\right]\sin(wt-\theta)$$

با شرایط اولیه، r_1 و θ_1 و بعد r_2 و θ_2 و ... را حساب می کنیم.

سیستم های n درجه آزادی:

N فرکانس طبیعی *Damping Ratio* داریم.

$$M\ddot{x}+kx=0$$

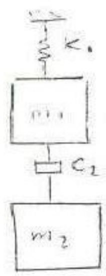
فرض *Normal* mode *vibration*: ضربی المان ها با یکی از فرکانس های طبیعی ارتعاش می کند.

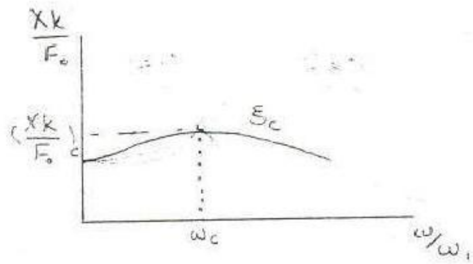
$$x_i = X_i \sin w_n t$$

$$\begin{bmatrix} \text{`````````} \\ \text{`````````} \\ \text{`````````} \\ \text{`````````} \\ \text{`````````} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sin wt = 0$$

$$\det(\text{``````````}) = 0 \rightarrow \left[w_n^2\right]^n \quad \left[w_n^2\right]^{n-1} + \ldots$$

N ۲ ریشه دارد که n تایش مهم است.

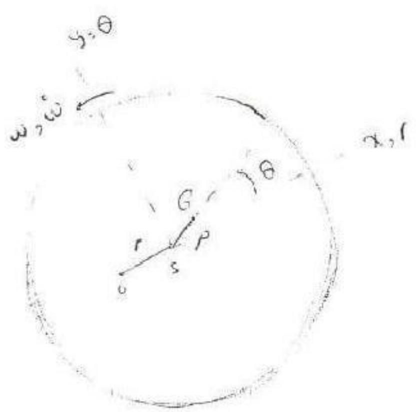


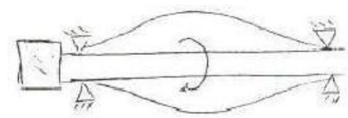


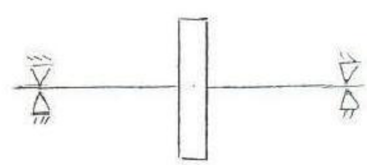
این سیستم حداقل تشدید ندارد.

برای سیستم های خطی رفت و برگشتی ممکن است قابل استفاده نباشد. بیشتر در سیستم های دورانی کاربرد دارد.

دوران سنکرون: سقف مدام خم می شود تا به جایی می رسد که نیروی گریز از مرکز با فنریت میله به تعادل می رسد.







$$a_G = a_s + a_{G/S}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_r = m a_r \\ \sum F_\theta = m a_\theta\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_g \\ m \\ p \\ k_e \end{array}\right| \begin{array}{l} r(t) \\ \theta(t) \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}\dot\theta = c \\ \ddot\theta = 0 \\ \dot r = 0 \\ \ddot r = 0\end{array}\right\}$$ دوران سنکرون

۱ درجه ازادی $w_{n1}, w_{n2}, \left(\frac{x_1}{x_2}\right)_1, \left(\frac{x_1}{x_2}\right)_2$

۲ درجه ازادی $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

N درجه آزادی $w_{n1}, \dots, w_{n_n}$

∞ درجه آزادی

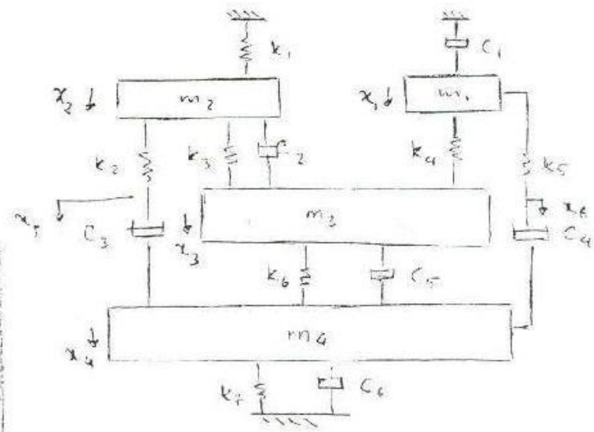
سیستم n درجه آزادی: $\bar{n}$ ، w دارد. ولی دیگر مثل حالت دو درجه آزادی نمی توان نسبت بین دامنه ها نوشت چون دو تا نیست که بشود مقایسه کرد.

چون تعداد درجه آزادی زیاد شده، دیگر n تا پیکره آزاد نمی کشیم!

N درجه آزادی نه به تعداد فنر هاست نه به تعداد جرم ها چون هر جسم به طور آزاد ۶ درجه آزادی دارد.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & 0 \\ & m_2 & & & & \\ & & m_3 & & & \\ & & & m_4 & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

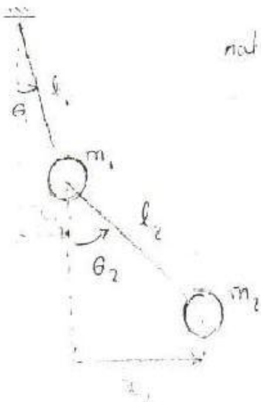
$$K = \begin{bmatrix} k_4+k_5 & 0 & -k_4 & 0 & 0 & -k_5 \\ 0 & (k_1+k_2+k_3) & -k_3 & 0 & -k_2 & 0 \\ -k_4 & -k_5 & (k_3+k_4+k_6) & -k_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_6 & (k_7+k_6) & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 \end{bmatrix}$$



برای پیدا کردن ماتریس ها، روش خاصی به نام جمع آثار هم وجود دارد. این روش خصوصا برای سیستم های چندین جرمه ی خطی مناسب است. ماتریس M ماتریس قطری است. که المان های روی قطرش جرم های موجود اند.

برای ماتریس k، ابتدا درجه آزادی اول را حرکت می دهیم و بسته درجه آزادی ها را ساکن نگه می داریم، فنرهایی که تحریک می شوند را در آرایه k_{11} می نویسیم و به همین ترتیب همه ی آرایه های قطری آن را می نویسیم. برای آرایه k_{12} ←فنر بین درجه ازادی ۱ و ۲ را می نویسیم (و به همین ترتیب....)(با علامت منفی)

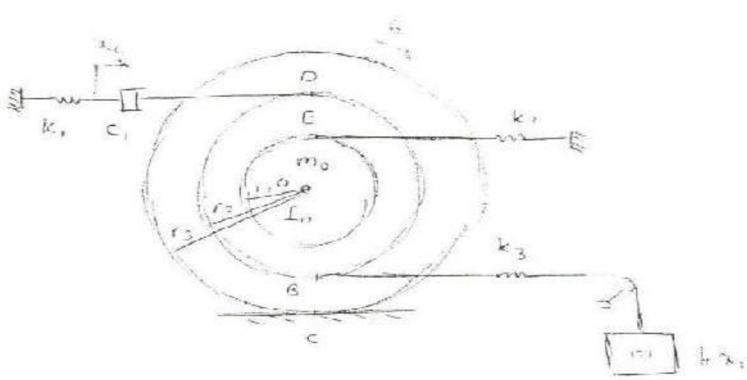
$$C=\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & C_2+C_5 & -C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_5 & (C_3+C_4+C_5+C_6) & -C_3 & -C_4 \\ 0 & 0 & 0 & -C_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_4 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$



$$natwral \rightarrow \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{vmatrix} \quad I=[\text{```}] \quad K_\theta=[\text{``}]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad M=\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \qquad k=\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$$

در این روش اگر مثلا m_2 را نگه داریم، نمی توان m_1 را حرکت داد! پس روش جمع آثار برای چنین مسائلی قابل استفاده نیست.



چون درجه های آزادی به هم کوپل نشده اند، اینرمی بین درجه های آزادی ۰ است.

$$\begin{bmatrix} \theta \\ x \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_c & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المان های k نمی تواند فقط k باشد، باید المان های k وقتی در θ ضرب می شوند، ممان بدهند. پس باید k در فاصله به توان ۲ ضرب شود.

$$k = \begin{bmatrix} k_3(r_3 - r_2)^2 + k_2(r_3 + r_1)^2 & -k_3(r_3 - r_2) & 0 \\ -k_3(r_3 - r_2) & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

چون معادله اولی معان است، مولفه های سطر اول k باید در θ که ضرب می شوند ممان شود ولی سطر دومی و سوم نیرو شدند.

$$c = \begin{bmatrix} c_1(r_3 + r_2)^2 & 0 & c_1(r_3 + r_2)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_1(r_3 \quad r_2) & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$T + U = W$$

انرژی تابعی موقعیت هم هست (در مسائل ویژه)

$$U = U(x_1, x_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots)$$
$$T - T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, x_1, x_2, \theta_1, \theta_2, \ldots)$$
$$W - w(x_1, x_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots)$$

واریانس= تغییرات جزئی δ

$$\delta T - \delta U = \delta W$$

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} d\dot{x}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} d\dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} d\dot{\theta}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} d\dot{\theta}_2 + \dots$$

$$+ \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial T}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \dots$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \dots$$

$$\delta W = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial w}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \dots$$

$$(\text{````````````})dx_1 + (\text{`````````````})dx_2 + \dots + (\text{``````````})d\theta_1 + (\text{```````})d\theta_2 + \dots = 0$$

شرط اینکه جمع جملات بالا صفر شوند این است که تک تک آن ها صفر باشند(چون ترم های dx_1، dx_2 ... به هم ارتباطی ندارند)

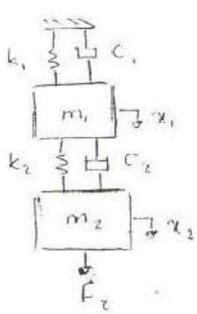
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} d\dot{x}_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} d\left[\frac{dx_1}{dt}\right] = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \frac{d}{dt}(dx_1) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} dx_1\right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) dx_1$$

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots\dots = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial w}{\partial q_i}$$

مثال:



$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$$

کار دمپر همیشه منفی است نسبت به کار F

$$W = F_2 x_2 - c_1\dot{x}_1 x_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = -k_2(x_1 - x_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2$$

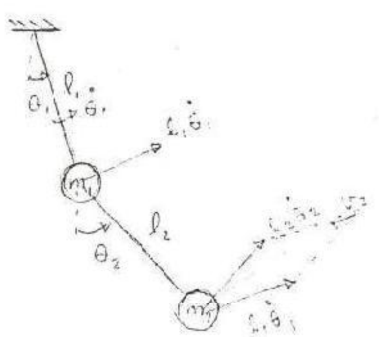
$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2} = F_2 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c_1\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 + c_2\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 = F_2 \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

مثال (اونگ):



$$T = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + \ldots = \frac{1}{2}m_1(L_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(u_2^2)$$

در این مسئله انرژی جنبشی تابعی از موقعیت هم هست! پس اگر شرط زاویه کوچک را اعمال نکنیم، باید مشتق T نسبت به θ_1,θ_2 را هم بگیریم!!

$$v_2^2=(L_1\dot{\theta}_1)^2+(L_2\dot{\theta}_2)^2+2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\underbrace{\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

$$U=m_1gl_1(1-\cos\theta_1)+m_2g\left[l_1(1-\cos\theta_1)+l_2(1-\cos\theta_2)\right]$$ مبدا انرژی پتانسیل را حالت استاتیکی در نظر می گیریم

چون mg را در انرژی پتانسیل لحاظ کرده ایم پس در کار نمی آوریمش. برای جلوگیری از غیر خطی شدن، شرط زوایای کوچک را قبل از ورود به معادله لاگرانژ اعمال می کنیم. (در انرژی جنبشی)

ولی در انرژی پتانسیل، شرط زاویه کوچک را بعد از ورود به معادله لاگرانژ اعمال می کنیم.

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}=m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1+m_2\ell_1^2\dot{\theta}_1+\ell_1\ell_2m_2\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_1}=m_1g\ell_1\underset{\approx}{\sin}\,\theta_1+m_2g\ell_1\underset{\approx}{\sin}\,\theta_1$$

$$m_1\ell_1^2\ddot{\theta}_1+m_2\ell_1^2\ddot{\theta}_1+\ell_1\ell_2m_2\ddot{\theta}_2+m_1g\ell_1\theta_1+m_2g\ell_1\theta_1=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}=m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2+\ell_1\ell_1\dot{\theta}_1m_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_2}=m_2g\ell_2\sin_{\theta_2}^{\theta_2}$$

$$m_2\ell_2^2\ddot{\theta}_2+\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2+\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_1m_2+m_2g\ell_2\theta_2=0$$

کوپل در اینجا از نوع دینامیکی است.

$$\begin{bmatrix}m_1\ell_1^2+m_2\ell_1^2 & \ell_1\ell_2m_2\\ \ell_1\ell_2m_2 & m_2\ell_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m_1g\ell_1+m_2g\ell_1 & 0\\ 0 & m_2g\ell_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=0$$

برای آونگ سه گانه، فقط کافی است به انرژی پتانسیل ، جنبشی، یک ترم اضافه شود.

$$\underset{n\times n}{M}\underset{n\times 1}{\ddot{X}}+\overset{n\times n}{C}\overset{n\times 1}{\dot{X}}+\overset{n\times n}{K}\underset{n\times 1}{X}=\underset{n\times 1}{F}$$

این معادله در حالتی برقرار است که m و k ماتریس معکوس داشته باشد.

$$M\ddot{x} - kx - 0$$

$$M^{-1}M\ddot{x} + M^{-1}kx = 0$$

$$I\ddot{x} + Ax = 0$$

$$x = x\ \sin wt$$

$$\ddot{x} = -xw_n^2 \sin w_n t$$

$$\ddot{x} = -w_n^2 x$$

$$w_n^2 - \lambda$$

مقادیر ویژه (Eigen value)

$$\ddot{x} = \lambda x$$

$$\ddot{x} = -\lambda X$$

معادله مسئله ویژه:

$$-\lambda Ix + Ax - 0 \rightarrow (A - \lambda I)x - 0$$

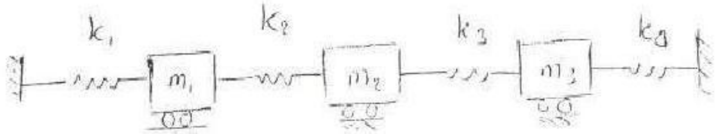
$$\rightarrow |A - \lambda I| = 0 \rightarrow \lambda_i$$

$$i = 1 t \circ n$$

$$\rightarrow (A - \lambda I)\varphi = 0$$

$$\varphi_i = Adj\,[A - \lambda I]_{\lambda_i}$$

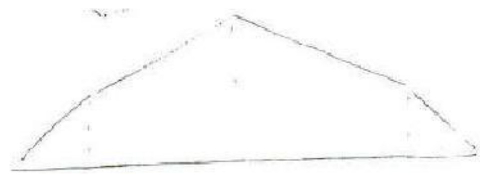
چون چند درجه آزادی داریم، شکل مد ها در واقع نسبت دامنه ها نیستند.



ما انواع و اقسام شکل مد ها را می توانیم داشته باشیم (در هر فرکانسی)ولی ما در واقع شکل مد ها را در فرکانس های طبیعی می خواهیم پیدا کردن شکل مد ها به ما اسکان می دهد تا مسئله را در فضای modal حل کنیم. در این فضا مختصات ما همواره نرمال است (نقلی) ماتریس M ، k قطری (decuple) است.

$$\varphi_1 - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi - \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$



هر ستون از ماتریس $Adj\left[A-\lambda I\right]_{n\times n}$ را که برای پیدا کردن φ_i انتخاب کنیم باید برای (از ۱ تا n) مقتدیر λ را در همان ستون قرار دهیم.

فرمول لاکرانژ:

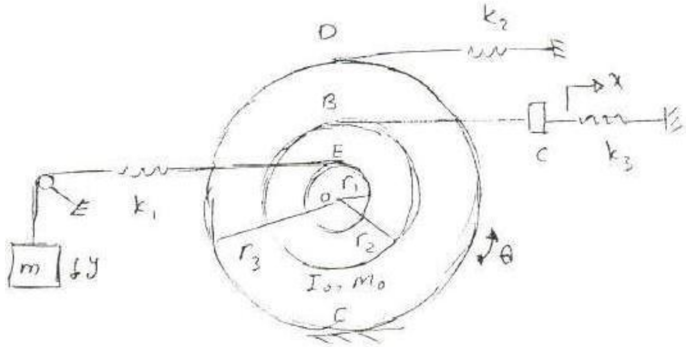
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial w}{\partial q_i}$$

$$q_i \begin{cases} x, y, z \\ \varphi, \theta, \psi \end{cases}$$

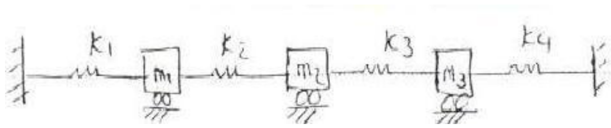
$$\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 - \ldots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\delta \dot{q}_1 + \ldots$$

$$\delta\left[\frac{d}{dt}[\ ]\right] - \frac{d}{dt}\left[\delta[\ ]\right]$$

$$\partial\left[\frac{d}{dt}(\ )\right] = \frac{d}{dt}\left[\partial(\ )\right]$$

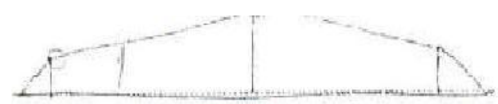


$$\theta = q_1$$
$$x = q_2$$
$$y = q_3$$
$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{q}_1^2$$
$$U = \frac{1}{2}k_3x^2 + \frac{1}{2}k_2(2r_3\theta)^2 + \frac{1}{2}k_1(y-(r_1-r_3)\theta)^2$$
$$w = m\theta - c(\dot{x} - (r_2+r_3)\dot{\theta})(x-(r_2+r_3)\theta)$$



$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



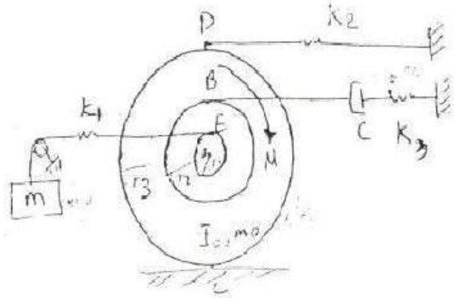
هر کدام از ستون های ماتریس $n \times n$ را برای φ_i انتخاب کردیم، برای همه φ ها همان را انتخاب می کنیم.

در هر فرکانسی انواع و اقسام شکل مد ها را می توانیم داشته باشیم، ولی در واقع شکل مد ها را در فرکانس های طبیعی می خواهیم. پیدا کردن شکل مد ها به ما امکان می دهد تا مسئله را در فضای modal حل کنیم. در این فضا مختصات ما همواره نرمال است. (نقلی)

یعنی ماتریس M ، k قطری (decouple) است.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=\frac{\partial w}{\partial q_i}$$

$$q_i\begin{cases} m, y, z \\ \varphi, \theta, \psi, \ldots \end{cases}$$



$$\theta=q_1$$
$$n=q_2$$
$$y=q_3$$

$$T=\tfrac{1}{2}m\dot{y}^2+\tfrac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2=\tfrac{1}{2}m\dot{q}_3^2+\tfrac{1}{2}I_c\dot{q}_1^2$$
$$U=\tfrac{1}{2}k_3x^2+\tfrac{1}{2}k_2(2r_3\theta)^2+\tfrac{1}{2}k_1(y-(r_1-r_3)\theta)^2$$

در معادلات لاکرانژ بر خلاف نیوتن-اویلر جهت مطرح نیست.

$$w=M\theta-c(\dot{x}-(r_2+r_3)\dot{\theta})(x-(r_2+r_3)\theta)$$

در سیستم n درجه آزادی به جای نسبت دامنه ها، n شکل مد خواهیم داشت. هر شکل مد که ماتریس $n\times 1$ است که نشان می دهد در آن فرکانس، شکل سیستم چگونه است.

$\lambda=w_n^2$ مقدار ویژه

φ بردار ویژه Eigen veeton

$\lambda_i \rightarrow \varphi_i$

اگر مختصات طبیعی انتخاب کرده باشیم، ماتریس های M, K قرینه هستند و $M^T=M$

$K^T=k$

معادله مشخصه سیستم $I\ddot{x}+Ax=0$

$$\varphi_i = \alpha \quad column\left\{Adj\left[A-\lambda I\right]_{\lambda i}\right\}$$

$$p = \left[\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\right]_{n\times n} \to Modal \quad Matrix$$

دو بردار ویژه همواره بر هم عمودند ← اورتاگونال

البته از طریق ماتریس جرم یا سختی بر هم عمودند و نه به صورت مستقیم

$$\begin{matrix}\varphi_i^T M\,\varphi_j \\ \varphi_i^T k\,\varphi_j\end{matrix} = \begin{cases}0 \quad i \neq j \\ M_i \\ k_i \quad i = j\end{cases}$$

$$p^T M p = \begin{bmatrix}\varphi_1^T M\,\varphi_1 & \varphi_1^T M\,\varphi_2 \ldots \\ \varphi_2^T M\,\varphi_1 & \varphi_2^T M\,\varphi_2 \ldots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M_1 & & & \\ & M_2 & & 0 \\ & & M_3 & \\ 0 & & & \ddots & M_n\end{bmatrix}$$

$$p^T k p = \begin{bmatrix}k_1 & & \\ & k_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & k_n\end{bmatrix}$$

$$M\ddot{x} + kx = 0$$

$$x = p\Psi \qquad \Psi = p^{-1}x$$

$$Mp\ddot{\Psi} + kp\Psi$$

$$p^T Mp\ddot{\Psi} + p^T kp\Psi = 0$$

$M_G\ddot{\Psi} + k_G\Psi = 0$ (نرمال) چون ماتریس M_G, K_G قطری هستند، پس y مختصات نقلی است.

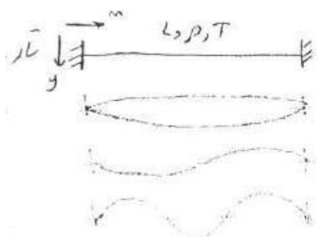
$$I\ddot{\Psi} + M_G^{-1}k_G\Psi = 0$$

$$I\ddot{\Psi} + \Lambda\Psi = 0$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \ddots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

در سیستم های n درجه آزادی n_e باید $finite$ باشد.

در سیستم های بی نهایت درجه آزادی n $in\ finite$ است. > سیستم های پیوسته سیستم های پیوسته:



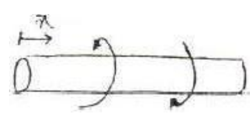
صدای بم ← فرکانس پایین ←طول بیشتر

صدای زیر ←فرکانس بالا ←طول کمتر

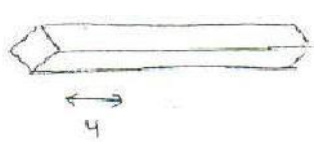
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

معادله دیفرانسیل جزئی تار $c - c(T, p)$

$$B.C.\begin{cases} y(0,t) - 0 \\ y(\ell,t) = 0 \end{cases}$$



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$



ارتعاش طولی در میله به صورتی است که با حرکات موج،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

هر قسمت فشرده و سپس باز می شود، موج می رود و بر می گردد.

ارتعاشات خمشی تیر: (Beam)

۶ نوع شرط مرزی: ۱.دو سر آزاد ۲.دو سر گیر دار ۳.دو سر ساده

۴.یکسر گیردار ۵.یکسر گیردار یکسرساده ۶. یکسر آزاد یکسر ساده (نمی تواند وجود داشته باشد)

قیر نازک اویلر

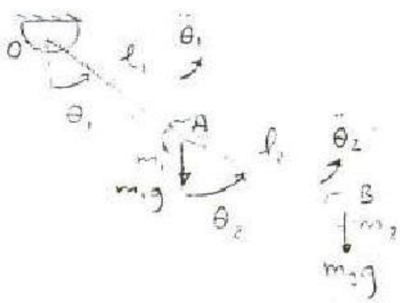
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 1/c^2 \, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$*\frac{d}{dx^2}\left[EI\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = p\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

یک سوال ۲۰ نمره ای در مورد تیر با شرایط مرزی، فرکانس های طبیعی و شکل مد ها را به دست آورید.

$$f_{(t)} - F_o \sin wt$$

$$\succ x_{(t)} = \int_0^t f(\lambda) h(t-\lambda)\,d\lambda - \int_0^t \frac{F_o \sin w\lambda}{m w_n} \sin w_n (t-\lambda)\,d\lambda - \frac{F_o}{m w_n}\int_0^t \sin w\lambda \sin w_n (t \quad \lambda)\,d\lambda$$



$$\sum M_A = I_A \ddot{\theta}_2 \rightarrow -m_{2g}\,\ell_2 \sin\theta_2 - I_A \ddot{\theta}_2$$

$$I_A - m_2 \ell_2^2$$

$$\sin\theta_2 - \theta_2$$

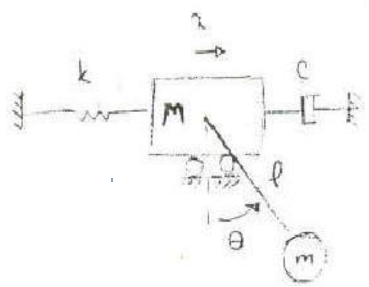
$$\ell_2 \ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0$$

$$\sum M_o - I_o \ddot{\theta}_1$$

$$-m_1 g\,\ell_1 \sin\theta_1 - m_2 g\,\ell_2 \sin\theta_2 = I_o \ddot{\theta}_1$$

$$I_o - m_1 \ell_1^2$$

$$\ell_1 \ddot{\theta}_1 + g\theta_1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\ell_2}{\ell_1}\theta_2 - 0$$



k
M
C
ℓ
θ
m