بسمه تعالی

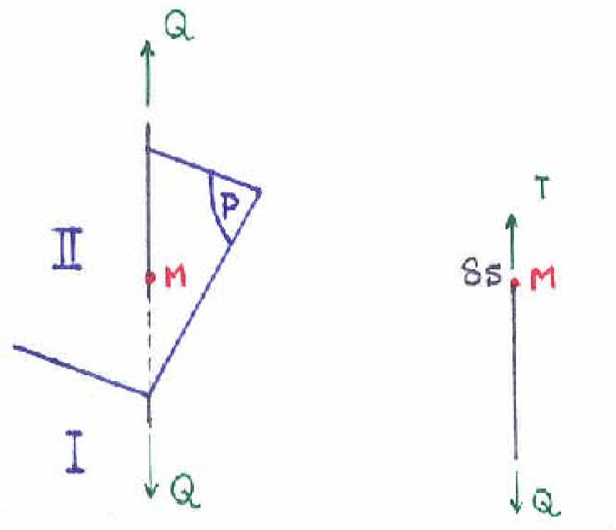
تئوري
الاستيسيته و پلاستيسيته

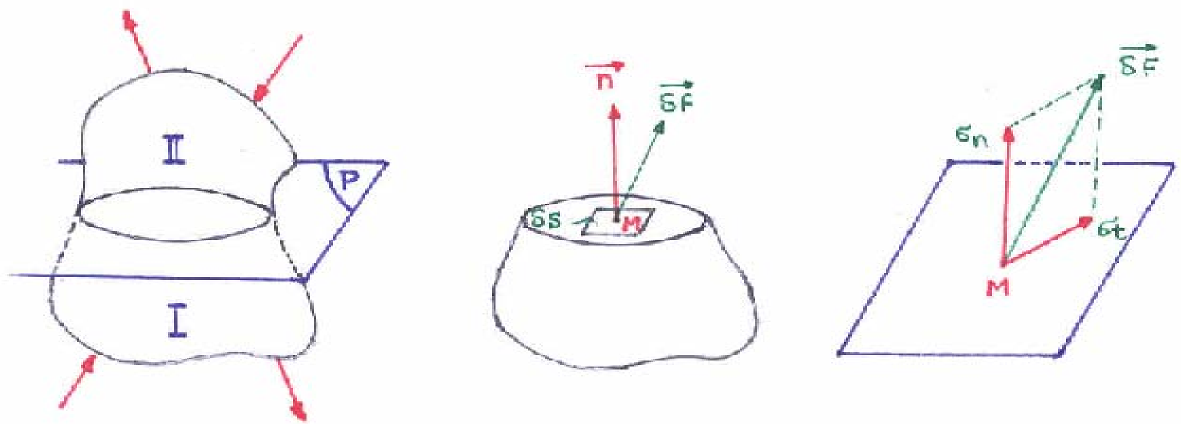
مهر ۱۳۸۳

فهرست عناوین

تــنـــش

مفهوم تنش: مفهوم تنش براي يك جسم مفهومي مجازي است. مشابه مفهوم شناخته شده كشش براي تار





بردار F وارد بر جز سطح ss را تنش در نقطه M مي نامند

بردار تنش $\vec{\sigma} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta s}$ و یا $\vec{F} = \frac{\vec{\delta F}}{\delta s}$

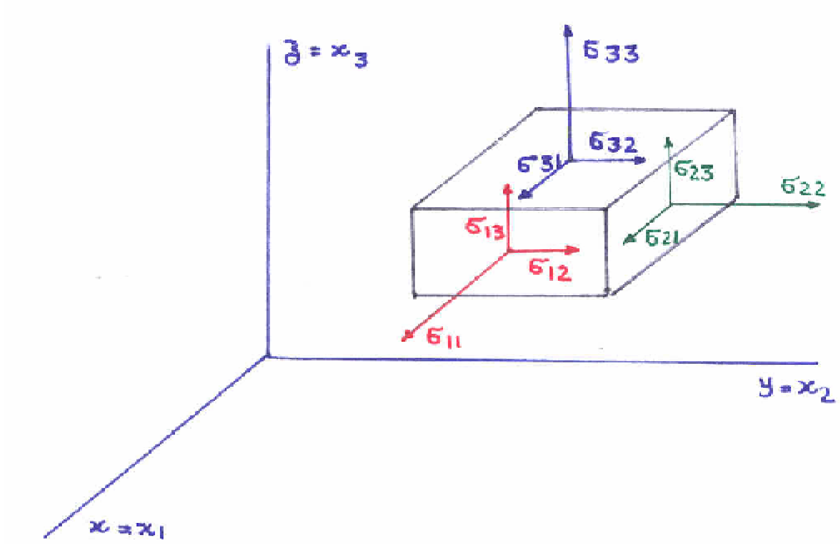
تنش تابعي است از نقطه در نظر گرفته شده و امتداد جز سطحي كه از آن نقطه مي گذرد. تنش σ_n به دو مولفه σ_t در امتدا قائم بر جز سطح و $\vec{F}$ در امتداد مماس به جز سطح تجزيه مي شود.

$$\vec{F} \begin{cases} \sigma_n & \text{تنش قائم} \\ \sigma_t & \text{تنش مماسی} \end{cases}$$

$$(\sigma_t)^2 = (|\vec{\sigma}|)^2 - (\sigma_n)^2$$

مفهوم تنش در فضا

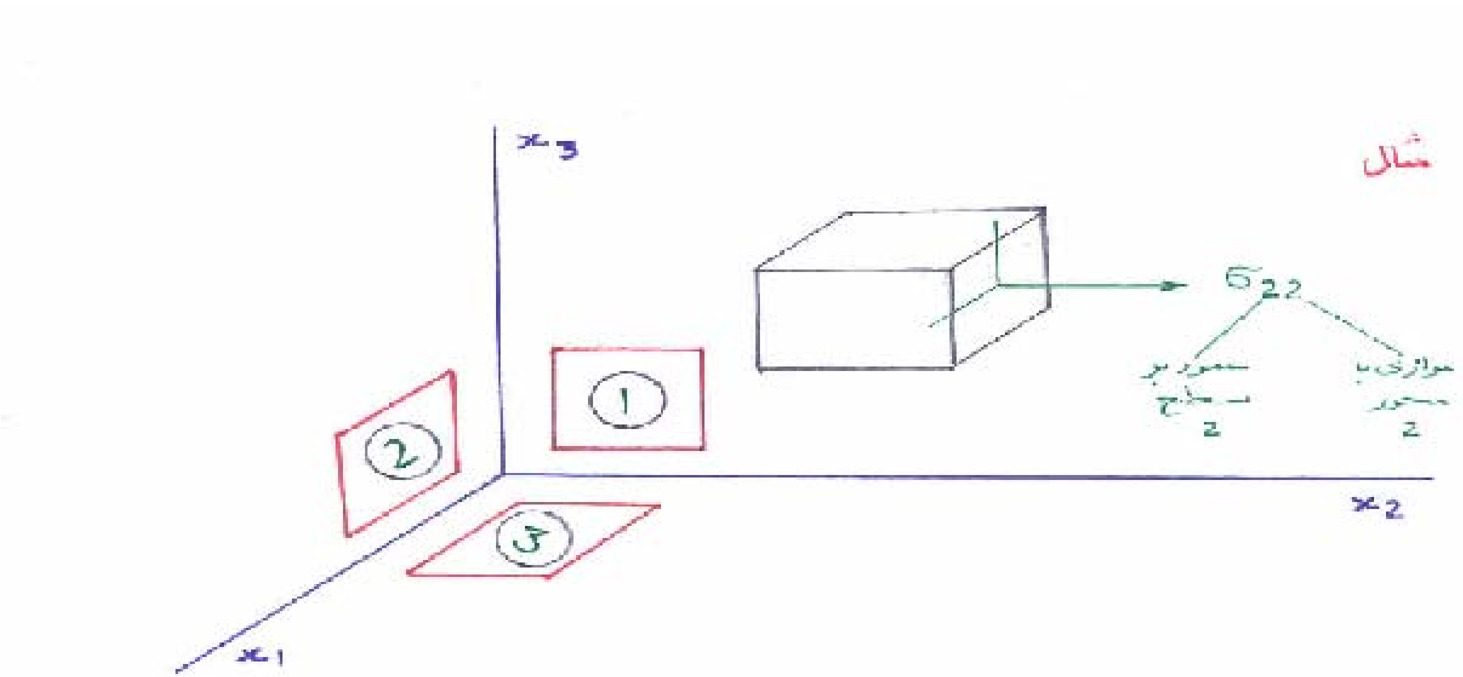
نظريه مربوطه نشان مي دهد که براي تعيين، تنشهاي وارد بر تمامي جزء سطوح مختلف گذرا از نقطه M کافيست که در نقطه A مکعبي درنظر بگيريم و ببينيم بر کليه سطوح آن چه نيروهايي و بالطبع چه تنشهايي وارد مي شود



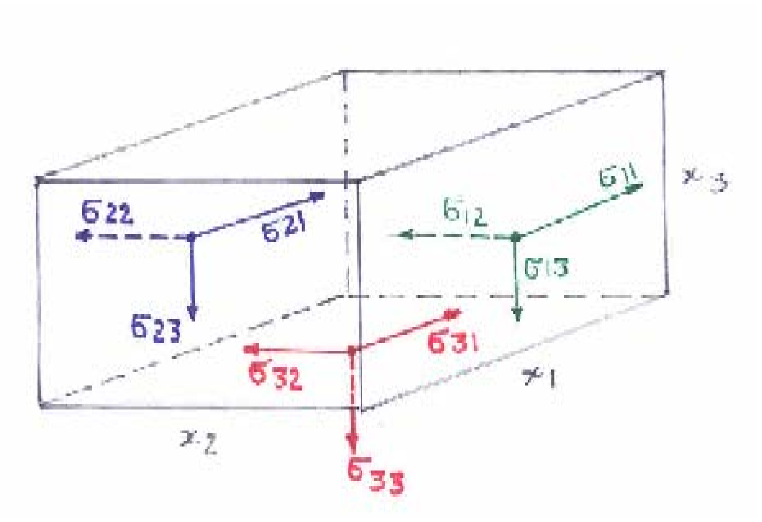
قرارداد تعيين علامت تنش

(علامت تعيين سطح) سطوحي از مكعب فوق كه بردار يكه عمود   بر آن ، در جهت مثبت محورها باشد، سطح مثبت مي باشد و در غير اينصورت سطح منفي است

(**تعيين شماره انديسها**) اگر مولفه هاي بردار تنش را روي سطح مثبت   در نظر بگيريم و در صورتيكه صفحه مثبت مذكور عمود بر سطح باشد، انديس اولي مولفه توسط اين صفحه مشخص مي گردد و در صورتيكه موازي هر عددي باشد، انديس دوم مولفه تشكيل مي شود



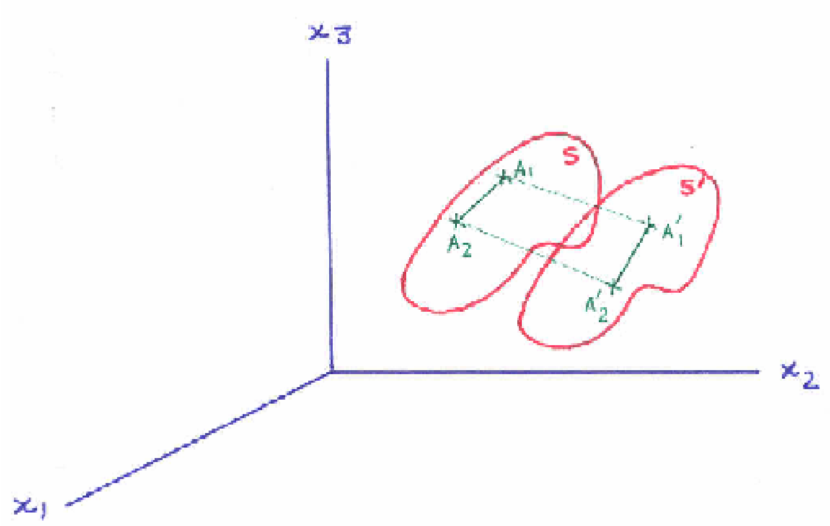
مولفه هاي مثبت مولفه هايي مي باشند كه بر روي سطوح مثبت همجهت محورها هستند و در روي سطوح منفي خلاف مطلب فوق صادق است



کرنـــش

مفهوم تغيير شكل

هنگاميكه جامدي تحت پوشش اثر نيروهايي قرار گرفته باشد، تغيير شكل مي دهد. به همان ترتيب كه حالت تنشهاي مدل يك نقطه بررسي شد، در اينجا به تعريف و بررسي حالت تغيير شكلها پيرامون، يك نقطه پرداخته مي شود



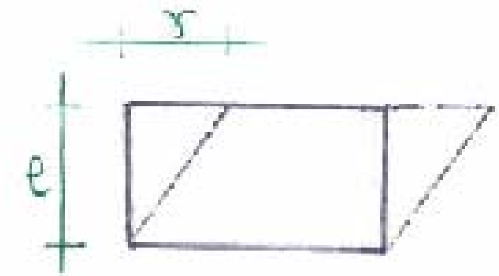
جامد s را قبل و بعد از تغيير شكل در نظر مي‌گيريم. جزء كوچك خطي A_1A_2 پس از تغيير شكل به $A'_1A'_2$ تبديل مي‌شود

$$A_1 \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \qquad A_2 \left| \begin{array}{l} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{array} \right. \qquad A'_1 \left| \begin{array}{l} x + u \\ y + v \\ z + w \end{array} \right. \qquad A'_2 \left| \begin{array}{l} x + dx + u + du \\ y + dy + v + dv \\ z + dz + w + dw \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} du = \dfrac{\partial u}{\partial x} dx + \dfrac{\partial u}{\partial y} dy + \dfrac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv = \dfrac{\partial v}{\partial x} dx + \dfrac{\partial v}{\partial y} dy + \dfrac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw = \dfrac{\partial w}{\partial x} dx + \dfrac{\partial w}{\partial y} dy + \dfrac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases}$$

تغيير شكلهاي جزء A_1A_2 از دو قسمت تشكيل شده اند، كه قبلاً در مقاومت مصالح با آن آشنا شده ايم

تغيير شـكل زاويه أي　　　　　تغيير شـكل خطي



۱) تغيير شـكل خطي يا تغيير طول **A_1A_2** و بصورت زير تعريف مي شـود

$$e = \frac{dr' - dr}{dr}$$

2)يك تغيير شـكل زاويه أي يعني تغيير امتداد A_1A_2 كه بوسـيله زاويه γ تعريف مي شـود

$$\gamma = (\widehat{A_1A_2 \,,\, A_1'A_2'})$$

خواص مكانيكي اجسام ساده

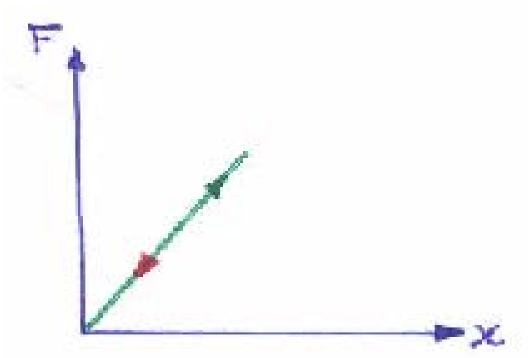
۱)اجسام ارتجاعي

اجسام ارتجاعي اجسامي هستند كه تحت اثر نيرو رفتارهاي خطي از خود نشان مي دهند. (مانند فلزات و ...) اين اجسام بر دو نوعند:

اجسام ارتجاعي خطي معمولي

مثال: فنر

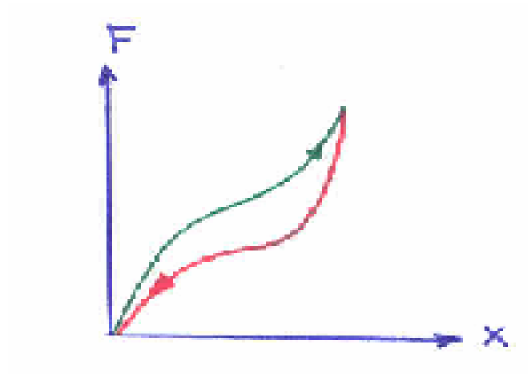
$F = K.x$ يا $\sigma = E.\varepsilon$ $\varepsilon = \frac{\Delta l}{L}$



اجسام ارتجاعي غير خطي

در اين اجسام $\sigma = E_i \cdot \varepsilon$ كه E_i متغير است

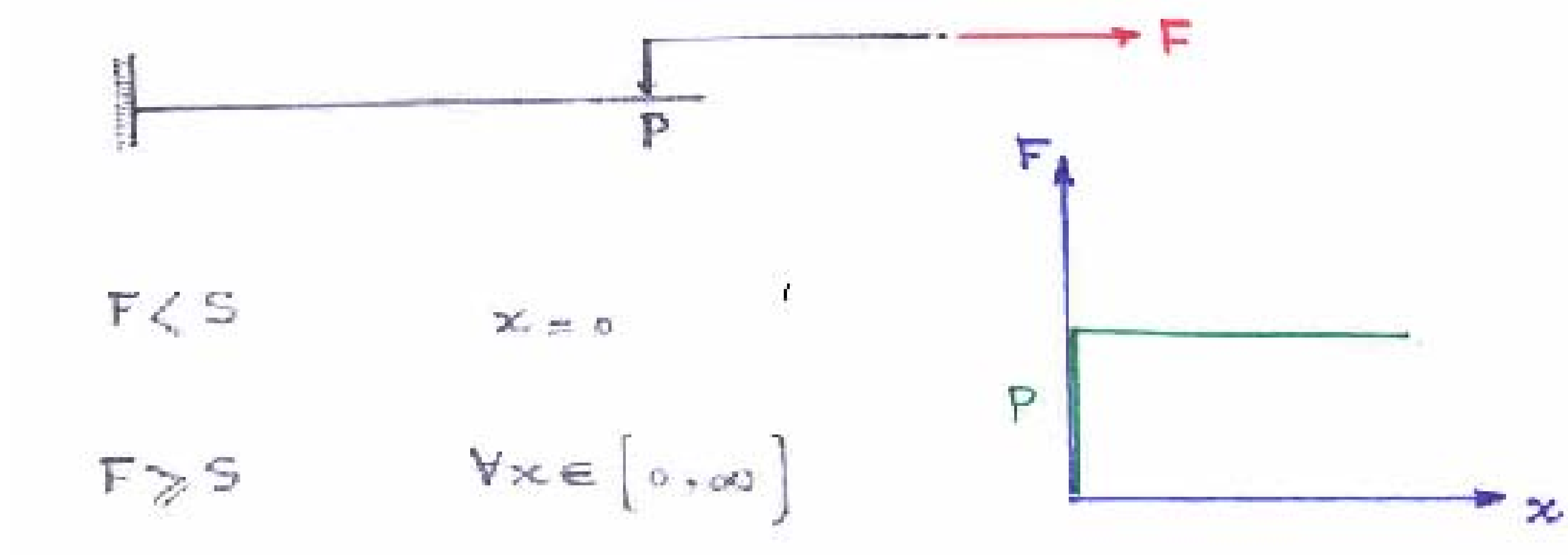
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



۲) اجسام پلاستيك

اين اجسام داراي تغيير شكل صفر هستند تا يك نيروي حدي $|F| < S$ و اين تغيير شكل براي نيروي، **F** معادل **S**، بي نهايت مي شود و نيرو از **S** تجاوز نخواهد نمود

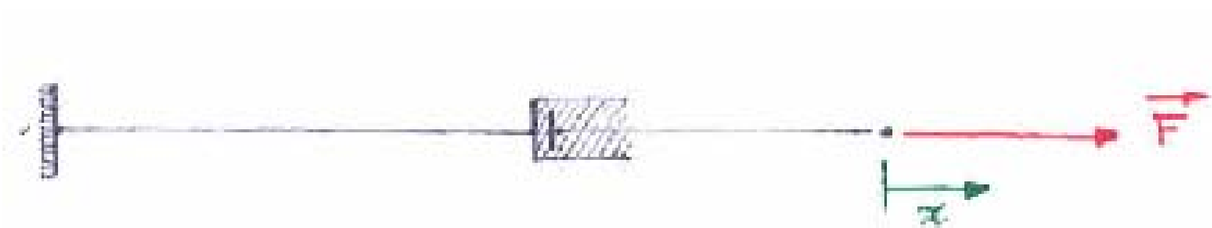
مثال: مانند جسمي كه بر روي زمين قرار گرفته است ونيروى اصطكاك مانع حركت آن مي شود، تا زمانيكه نيروي وارده از نيروى اصطكاك تجاوز نمايد

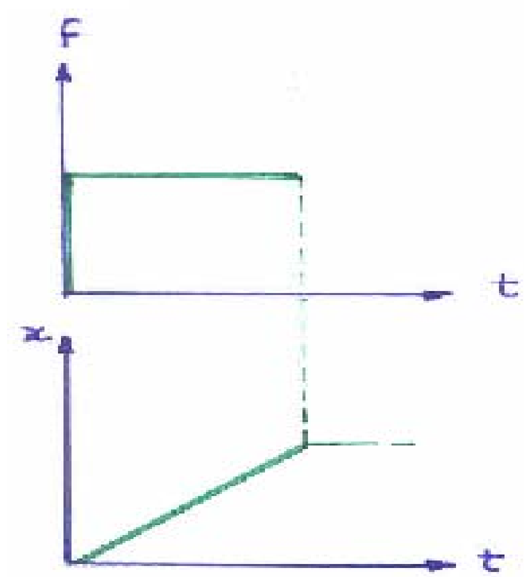


۳)اجسام ويسكوز

مثال : كمك فنر

در اين اجسام نيروي وارده با سرعت تغيير شكل مرتبط مي باشد، اين اجسام توسط مدل زير بيان مي شوند





$\dot{x}$: مشتق نسبت به زمانx

$$\dot{x} = \frac{F}{\mu} \Longrightarrow x = \frac{F}{\mu} t$$

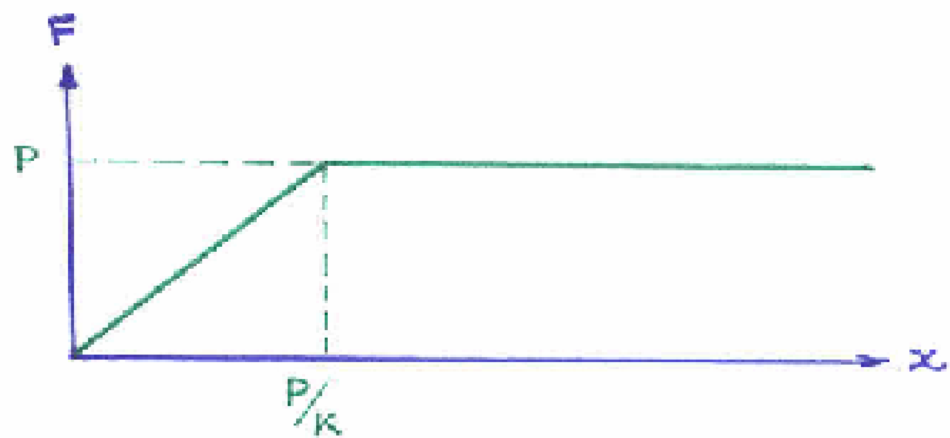
μ : ضريب ويسكوزيته يا ضريب كمك فنري

۱)اجسام الاستوپلاستیک

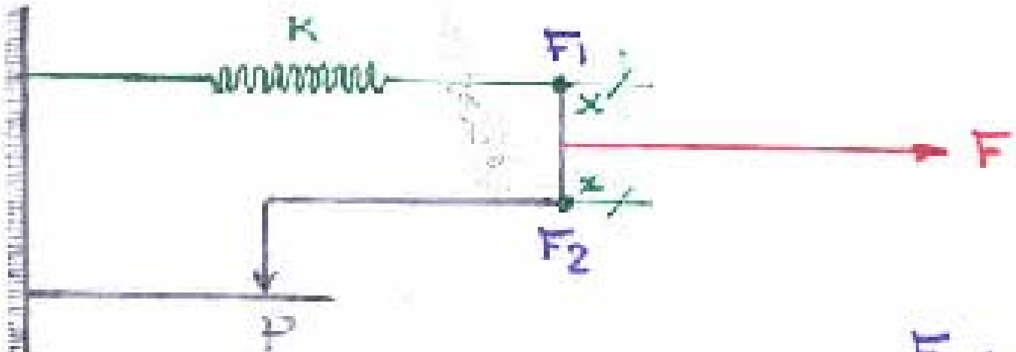
۱-۱) اتصال سری

$$F < P \qquad x = \frac{F}{K}$$

$$F \geqslant P \qquad \forall x \in \left[\, 0 + \frac{F}{K} \,,\, \infty \right]$$



۱-۲) اتصال موازی



$$F_1 + F_2 = F$$

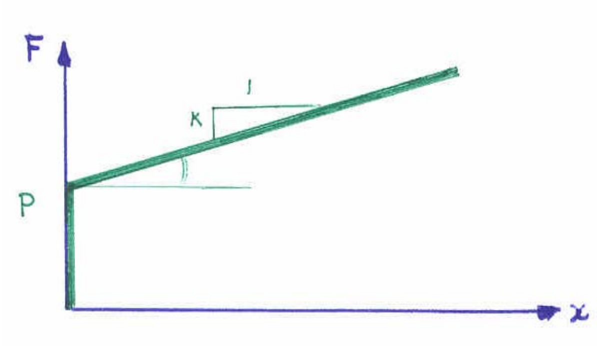
— if $F_2 \geqslant P \Rightarrow F_2 = P$; $F_1 = F - P$ & $F_1 = K.x$

$\therefore F \geqslant P$

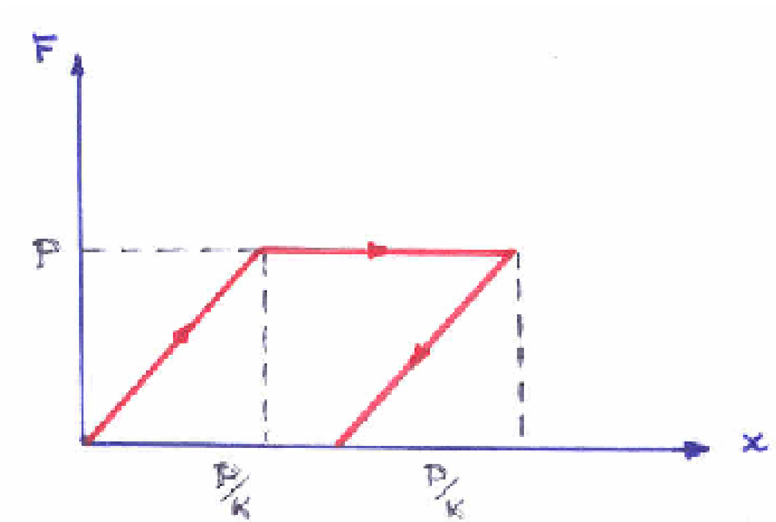
$\Rightarrow F - P = Kx \Rightarrow F = P + Kx$

— if $F_2 < P \Rightarrow x = 0 \Rightarrow F_1 = 0 \Rightarrow F_2 = F$

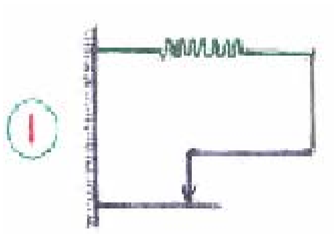
$\therefore F < P$ & $x = 0$



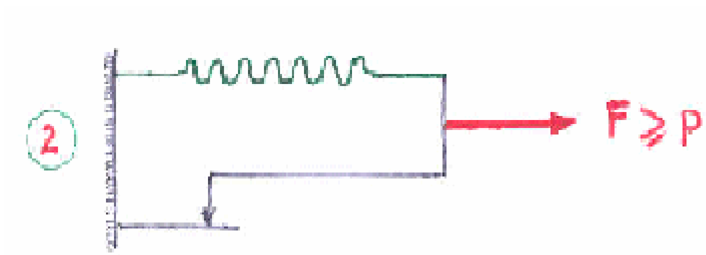
١)منحني باربرداري جسم الاستوپلاستيك در حالت اتصال سري



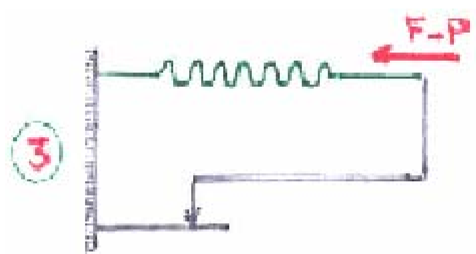
۲)منحني باربرداري جسم الاستوپلاستيك در حالت اتصال موازي



حالت بدون بار



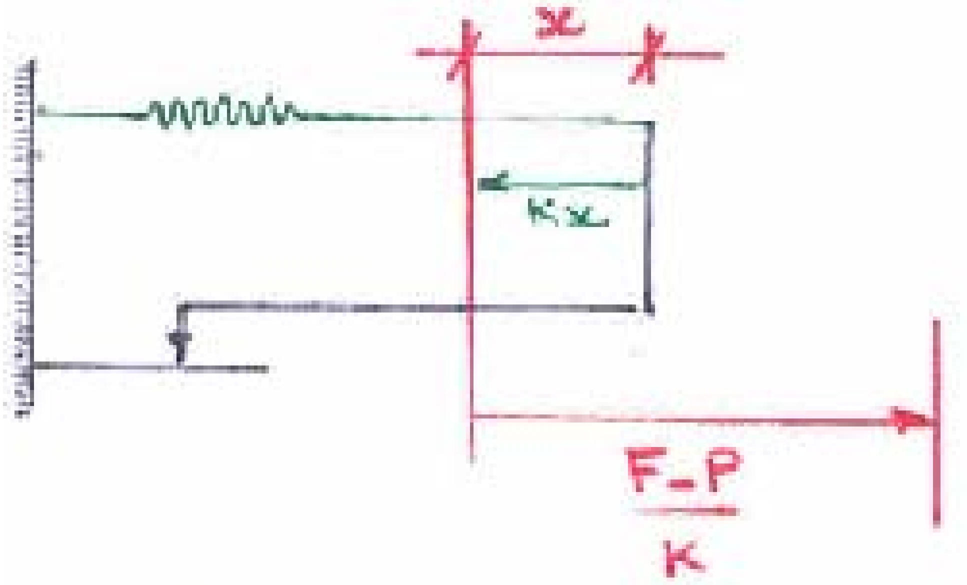
حالت بارگذاري



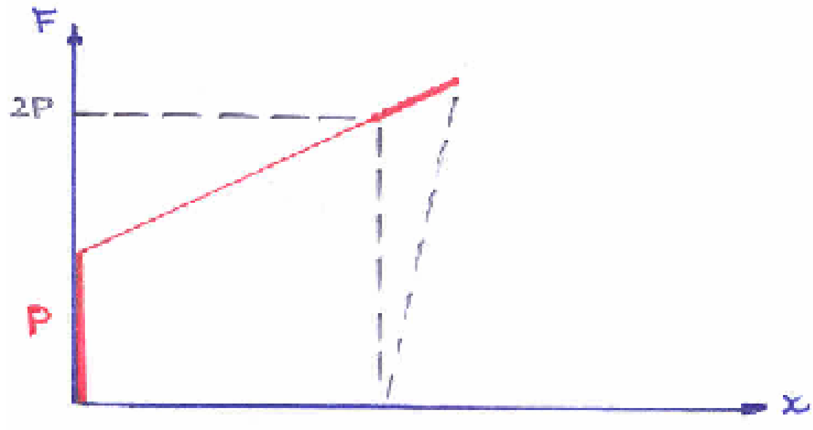
حالت باربرداري

در حالت باربرداري، دو حالت خواهيم داشت:

$$\begin{cases} F-P<P & \quad x = x_{\text{سابق}} = \dfrac{F-P}{k} \\ F-P \geqslant P & \longrightarrow \quad F \geqslant 2P \end{cases}$$

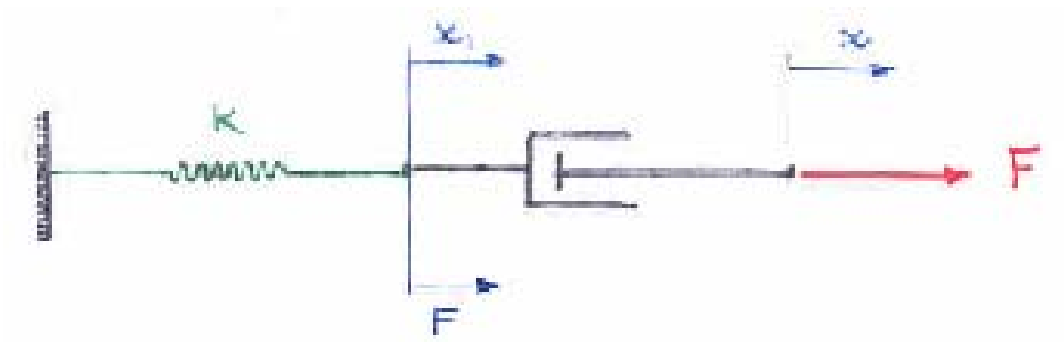


فنر حرکت ميکند تا به
وضعيت تعادل برسد



۲)اجسام ویسکوالاستیک

۲-۱)درحالت سری



معادله تغيير مكان نسبي در انتهاي فترويسكوز به صورت زير خواهد بود :

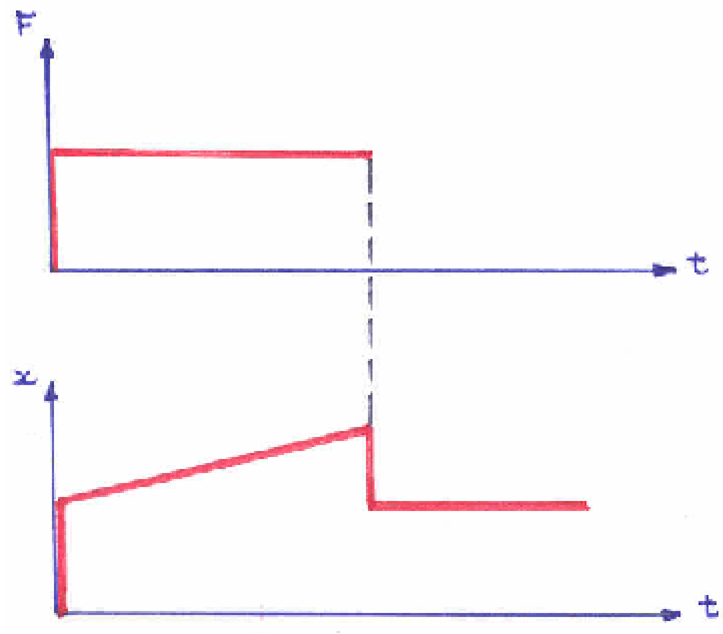
$$\frac{d(x-x_1)}{dt}=\frac{F}{\mu} \quad \text{یا} \quad (x-x_1)^{\cdot}\mu=F \quad \text{یا} \quad x_1=\frac{F}{K}$$

$$\therefore \quad x-x_1=\frac{F}{\mu}.t+C_1 \Rightarrow$$

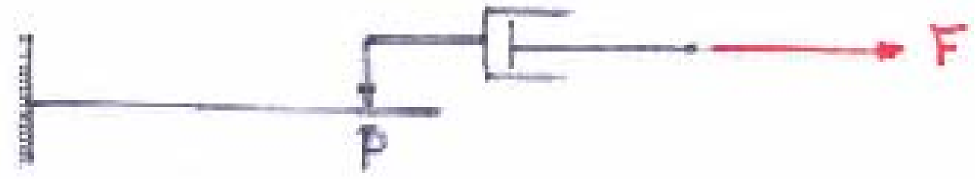
$$x=x_1+\frac{F}{\mu}\cdot t+C_1 \Rightarrow \qquad \boxed{x=\frac{F}{k}+\frac{F}{\mu}t+C_1}$$

در صورتیکه **x=0** در **t = 0** باشد

$$C_1=-\frac{F}{K} \Rightarrow \qquad \boxed{x=\frac{F}{\mu}t}$$



۳) اجسام ویسکوپلاستیک

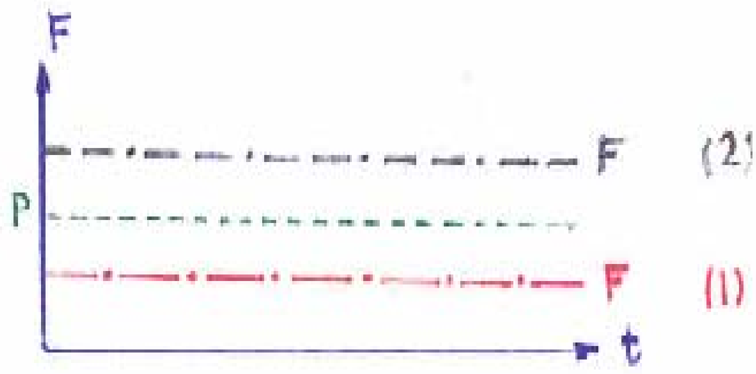


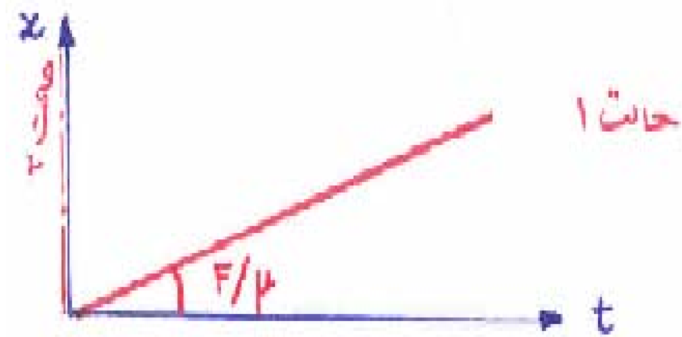
$$F \geq P \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

$$F < P \qquad F = \mu \dot{x} \Rightarrow x = \frac{F}{\mu} t + C_1$$

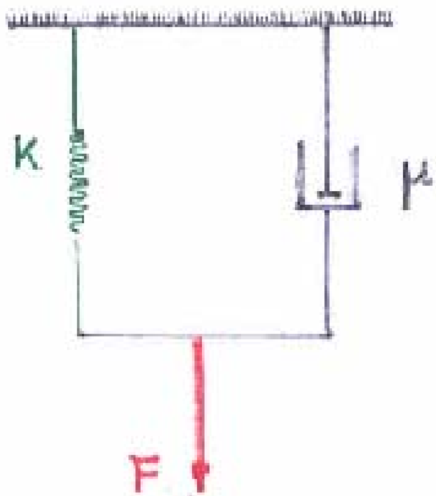
با شرایط $x=0$ & $t = 0$ خواهیم

داشت $C_1=0$





Kelvin-Voigt   جامد کلوین وآت :



$$F = Kx$$

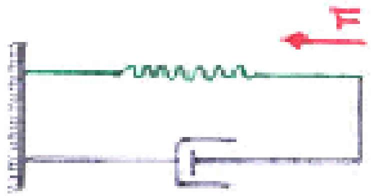
$$F = \mu \cdot \dot{x} \qquad Kx = \mu \dot{x} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = \frac{K}{\mu}$$

$$\therefore \ \ln x = \frac{K}{\mu} t + C$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow F = 0$$

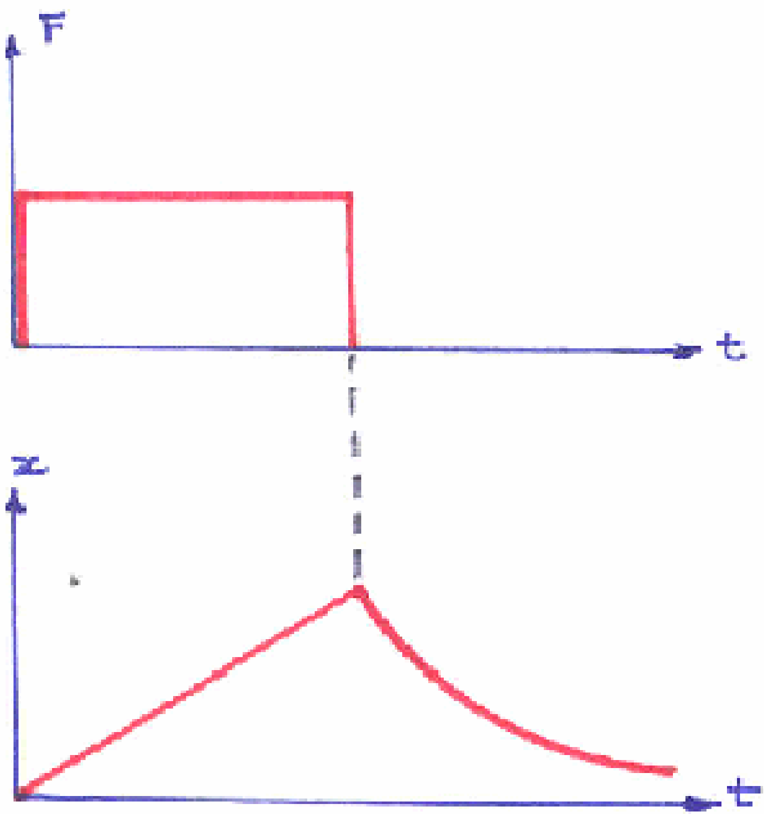
$$x' = 0 \Rightarrow x = C \,,\, C = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = \frac{K}{\mu} t \quad \& \quad x = e^{K/\mu\, t}$$

در حالت باربرداری خواهیم داشت:

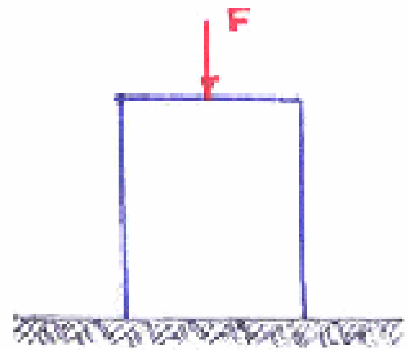


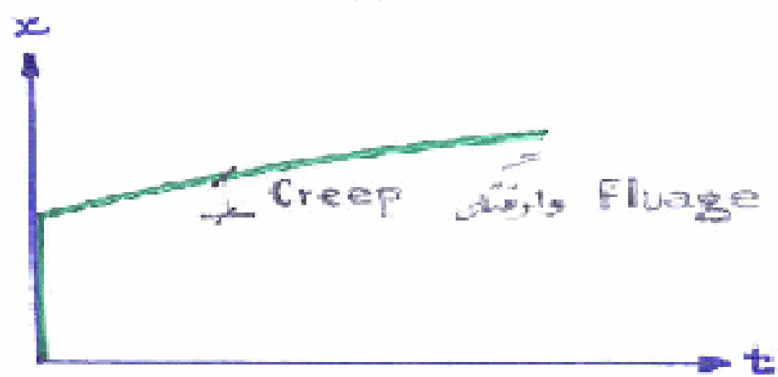
$$F = kx \qquad -F = \mu\dot{x} \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{k}{\mu} \Rightarrow \ln x = -\frac{k}{\mu}t + c \Rightarrow x = e^{c}e^{-\frac{k}{\mu}t}$$

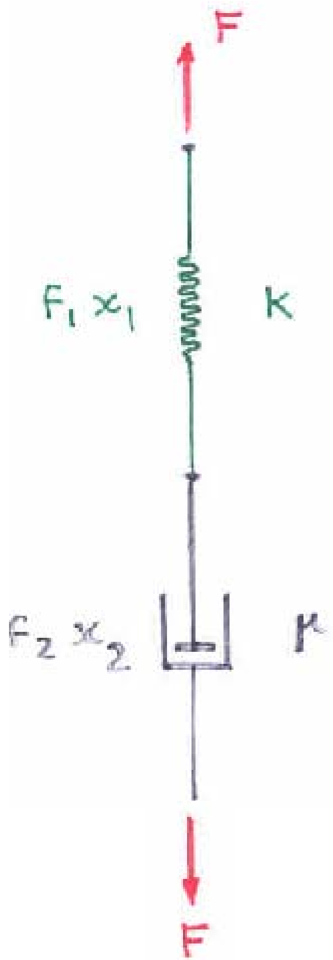


مانند بتن که به صورت زیر خواهد بود





(Maxwell) مایع ماکسول



$$F_1 = \frac{1}{k}\,\varepsilon_1 \qquad F_2 = \mu\,\frac{dx}{dt}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$F = F_1 = F_2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = K\,\frac{dF_1}{dt} + \frac{1}{\mu}\cdot F_2$$

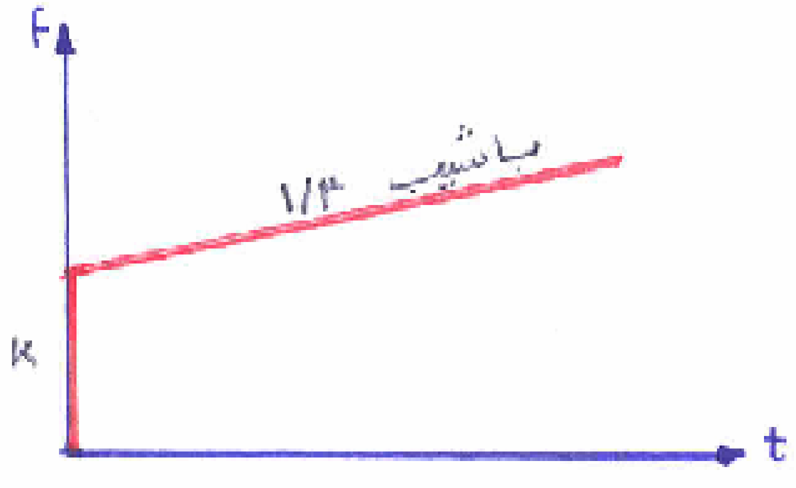
$$\frac{dx}{dt} = K\,\frac{dF}{dt} + \frac{1}{\mu}F$$

$t < 0 \quad : \quad F = 0 \quad$ و $\quad x = 0$

$$\int_0^x dx = K\int_0^F dF + \frac{1}{\mu}\int_0^t F(t)\,dt$$

$$x(t) = KF(t) + \frac{1}{\mu}\int_0^t F(t)\,dt$$

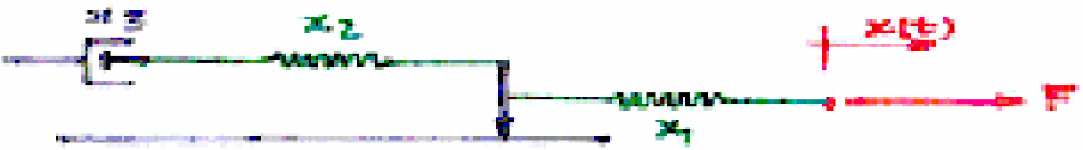
$$F(t) = K + \frac{t}{\mu}$$



حال به مثال دیگری از اجسام دو بعدی می پردازیم

پتن حرکتی ندارد $\quad F < P \longrightarrow F = Kx_1 = Kx$

پتن حرکت دارد $\quad F > P \longrightarrow$

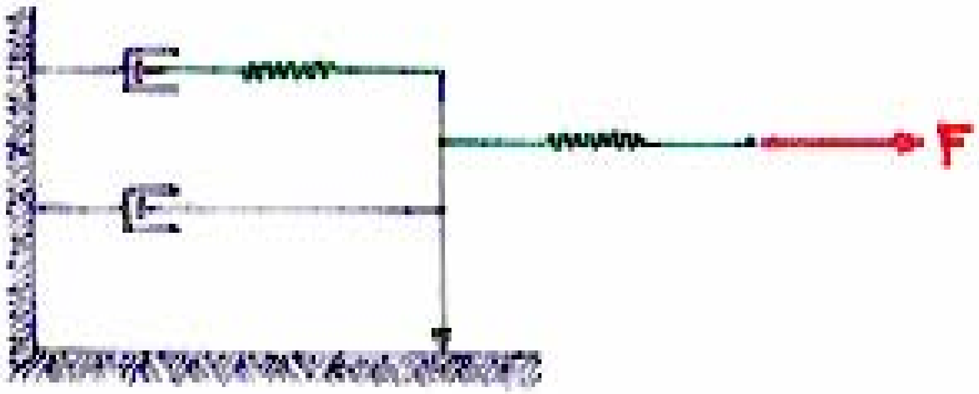


$$x(t) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 = \frac{F}{K_1} \quad , \quad x_2 = \frac{F-P}{K_2} \quad , \quad x_3 = \frac{F-P}{\mu} t \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{F}{K_1} + (F-P)\left(\frac{1}{K_2} + \frac{t}{\mu}\right)$$

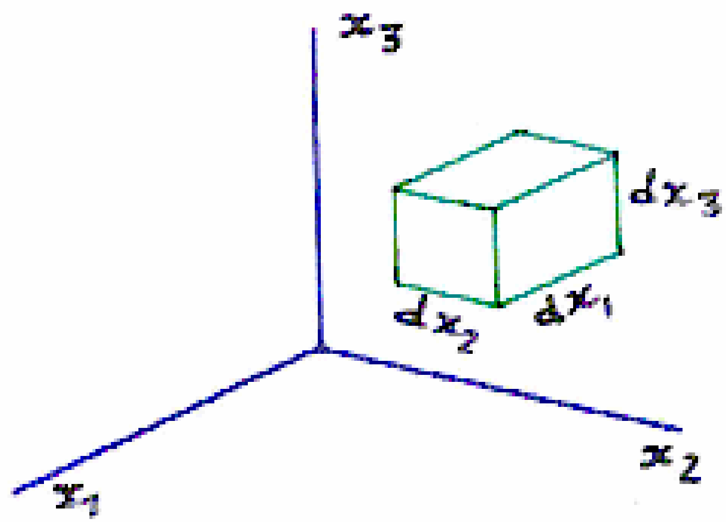
• معادله حرکت مدل زیر را بنویسید



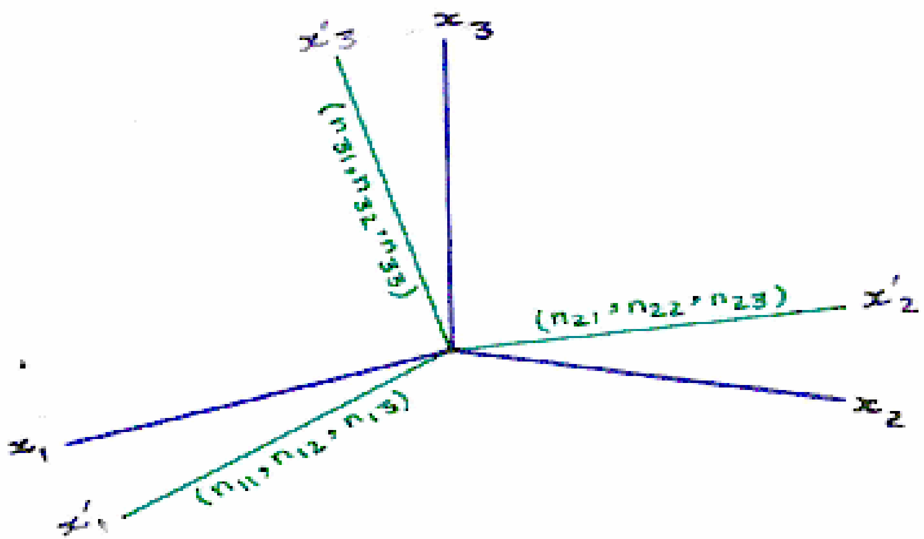
تانسور تنش

تانسور تنش در فضا بصورت زير تعريف مي گردد :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



اگر در مختصات فوق محورها را دوران، بدهیم



تانسور تنش جدید در مختصات

$$[\sigma'] = [T]^t [\sigma][T]$$

$[T]^t$ یا ترانسپوزه ماتریس تبدیل

$$[T]^t = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} & n_{31} \\ n_{12} & n_{22} & n_{32} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix}$$

تانسور تنش نسبت به قطر اصلي متقارن است $\quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall i,j = 1 \to 3$

براي اثبات اين موضوع، كافي است تعادل مكعب قبليمان را كنترل كنيم:

تعادل لنگر نسبت به محور x_1

$$\sum M/_{x_1} = 2\sigma_{23}\, dx_1\, dx_3 \frac{dx_2}{2} - 2\sigma_{32}\, dx_2\, dx_1 \cdot \frac{dx_3}{2} = 0$$

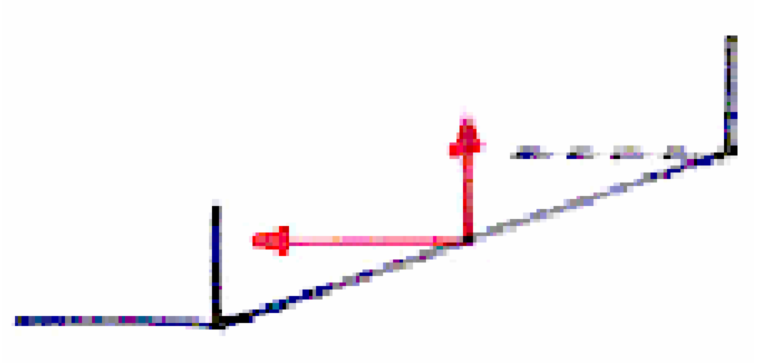
$$\therefore \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

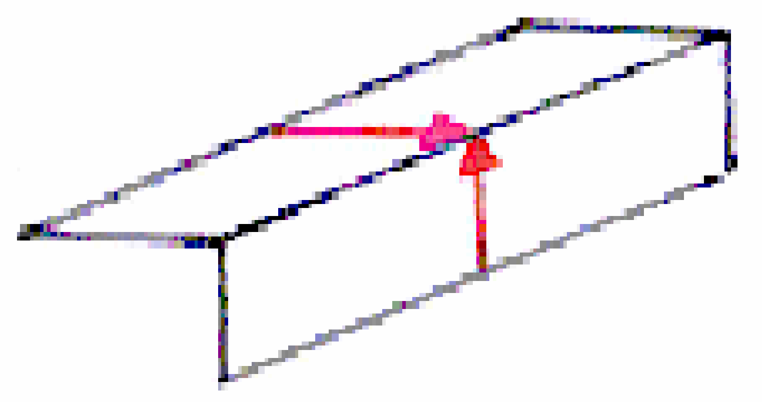
$$\Sigma M/_{x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\Sigma M/_{x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{12} = \sigma_{21}$$

تنش برشي در دو صفحه بي نهايت كوچك عمود بر يك يال مشترك برابرند (قضيه كوشي)

اين تنشهاي برشي يا از فصل مشترك دور مي شوند و يا به هم نزديك مي شوند





زيرنويسهاي اينشتين

پس از اين در صورتيكه انديسهاي حرفي يكسان باشند، مفهوم مجموع عناصري با انديسهاي يكسان را مي دهند

$$\underset{i=1\ \text{تا}\ 10}{a_{ii}} = \sum_{i=1}^{10} a_{ii}$$

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots$$

مثال در مورد ضرب دو ماتريس

$$[C]_{m\times l} = [A]_{m\times n}\,[B]_{n\times l}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \longrightarrow \quad c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

دلتای کرونکر

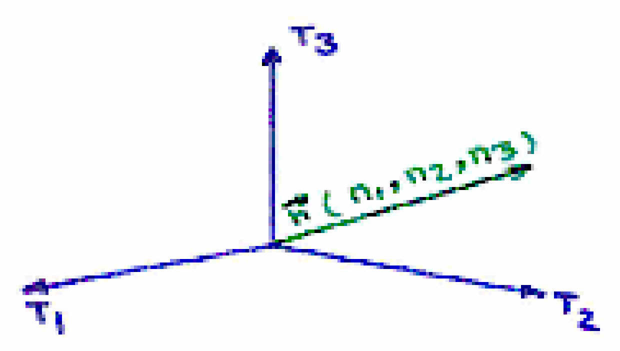
تعریف

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

مثال:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\,\delta_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ij}\,\delta_{ij}$$

مثال: تعریف قضایای تنشها با استفاده از تعاریف فوق



$$\sigma_{ij} n_j = T_i$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 + \sigma_{i3} n_3$$

$$\begin{array}{ll} i=1 & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = T_1 \\ \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 = T_2 \\ \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 = T_3 \end{array} \right. \\ i=2 & \\ i=3 & \end{array}$$

تانسور تنش معمولاً به دو تانسور زیر تجزیه مي شود:

1) تانسور فشار هیدروستاتیکي.

2) تانسور انحراف آور تانسور تنش. **(Deviator)**

تعريف پارامتر فشار هيدروستاتيكي(P)

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$$

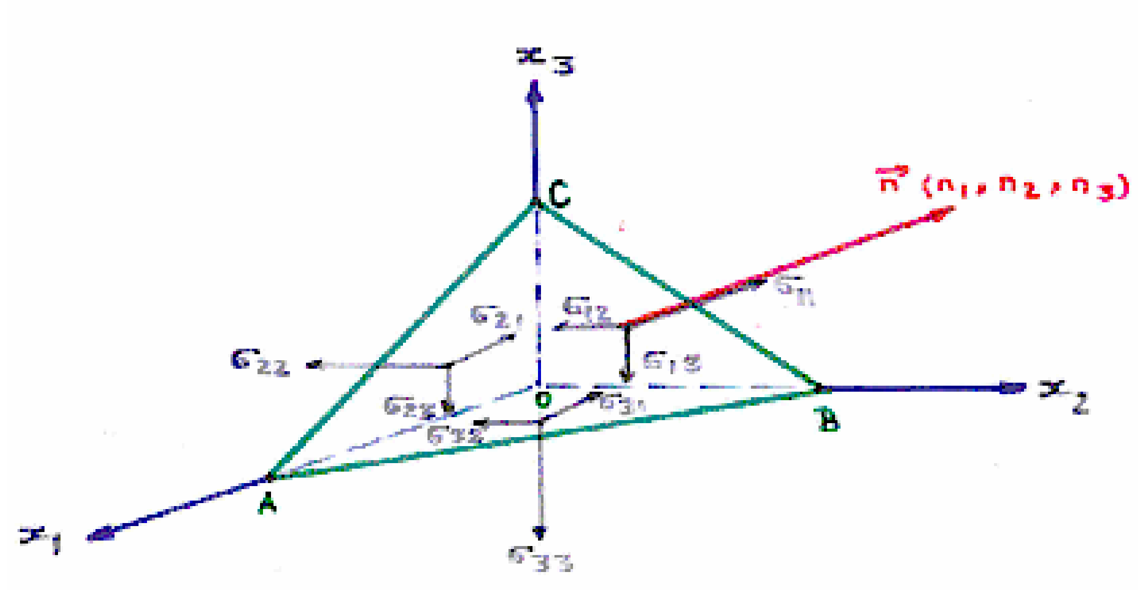
$$\sigma = \underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}}_{\text{تانسورفشار هيدروستاتيكي}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11}-P & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-P & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-P \end{bmatrix}}_{\text{تانسور انحراف آور تانسور تنش}}$$

$[S_{ij}]$ تانسور انحراف آور تانسورتنش

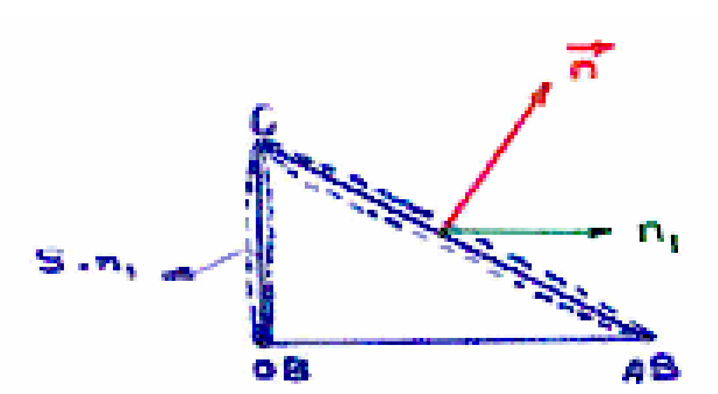
$$S_{ij} = \sigma_{ij} - P\delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

عناصر تانسور انحراف آور تانسور تنش هستند كه در خواص مكانيكي اجسام وارد مي شوند

مولفه هاي بردار تنش وارده بر يك سطح دلخواه



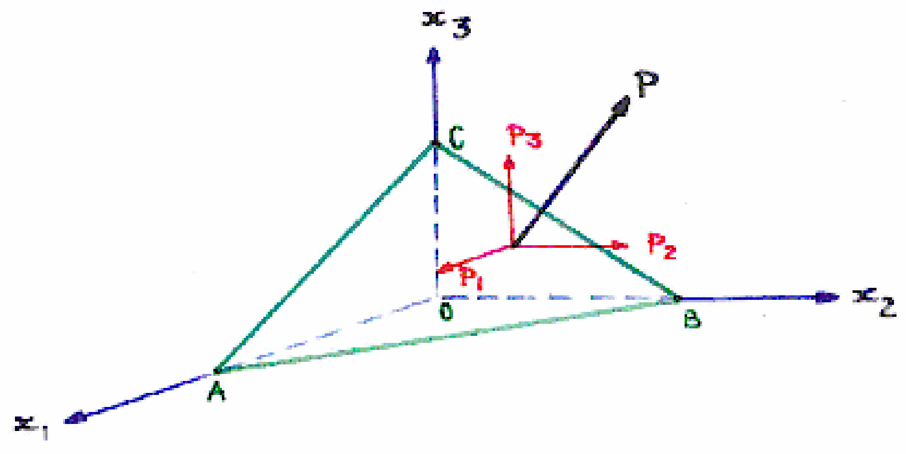
سطح دلخواه ABC را در فضا درنظر ميگيريم



$S = S_{ABC}$

$S_{OBC} = S \cdot n_1$

نیروی P را که بر سطح ABC وارد می شود مؤلفه های آن درامتداد محور های x_1,x_2,x_3 به ترتیب با p_1,p_2,p_3 نشان داده می شوند



تعادل هرم 0ABC $\longrightarrow$ $\sum F_{x_1} = 0$

$$-\sigma_{11}\underbrace{n_1 S}_{S_{oBC}} - \sigma_{21}\underbrace{n_2 S}_{S_{oAC}} - \sigma_{31}\underbrace{n_3 S}_{S_{oAB}} + P_1 = 0$$

ویا به عبارت دیگر:

$$\boxed{P_1 = \sigma_{i1}\, n_i\, S}$$

$$\Sigma F_{x_2} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{P_2 = \sigma_{i2}\, n_i\, s}$$

$$\Sigma F_{x_3} = 0 \qquad \qquad \qquad \boxed{P_3 = \sigma_{i3}\, n_i\, s}$$

$$\boxed{P_j = \sigma_{ij}\, n_i\, s}$$

$$P_n = P_i\, n_i = n_i\, \sigma_{ij}\, n_j\, s = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} n_i\, \sigma_{ij}\, n_j\, s \longleftarrow \vec{P}$$ مؤلفه عمودی نیروی

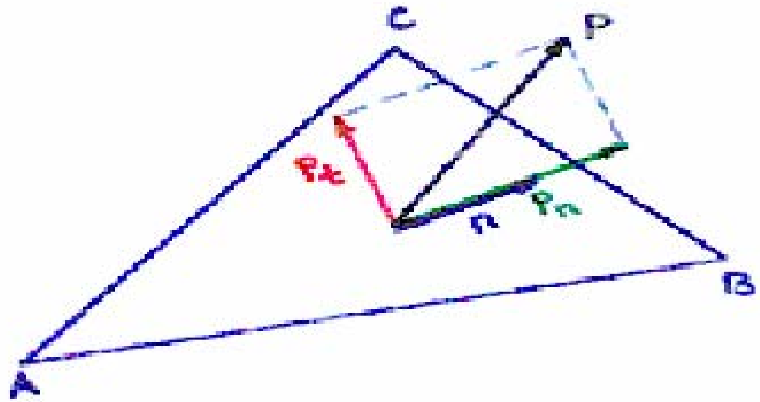
$$\sigma_n = \frac{P_n}{s} = n_i\, \sigma_{ij}\, n_j$$

مطلوبست بسط رابطه فوق و یا نشان داده روابط زیـر:

1) $$\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{13} n_1 n_3 + 2\sigma_{23} n_2 n_3$$

$$|\vec{P}| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$$

2) محاسبه مولفه برشی نیروی P



$$|\vec{P_t}|^2 = |\vec{P}|^2 - |\vec{P_n}|^2$$

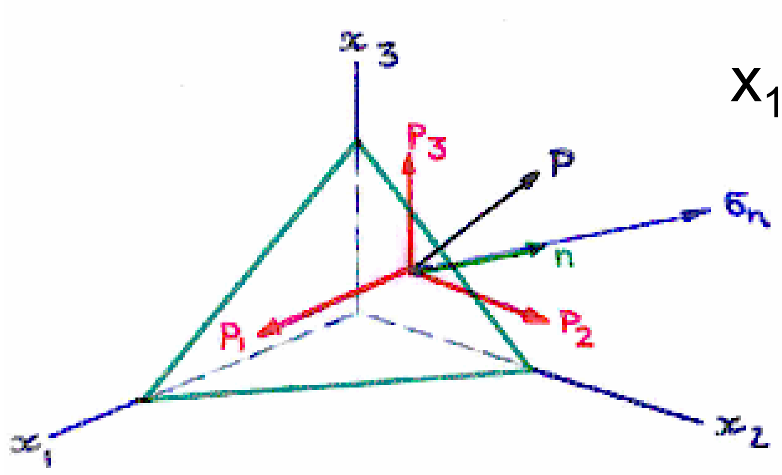
و محاسبه مولفه مماسی تنش برشی

$$\sigma = \frac{|\vec{P}|}{S}$$

$$(\sigma_t)^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2$$

تعريف تنشهاي اصلي و صفحه هاي اصلي

اگر تانسور تنس را به این صورت تعریف نماییم: $\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + S_{ij}$



سطح sدر مختصات فضایی x_1,x_2,x_3

$$P_i = \sigma_{ij} n_j S$$

$$|\vec{\sigma}| = \frac{\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}}{S}$$

$$\sigma_n = \frac{P_i n_i}{S} = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_n^2 + |\vec{\sigma}|^2$$

اگر $(S=1)$ ←

(1)

$$P_1 = \sigma_{1j} n_j = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$

$$P_2 = \sigma_{2j} n_j = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3$$

$$P_3 = \sigma_{3j} n_j = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

در صورتيكه بر روي سطح فقط تنش عمودي σ_n را داشته باشيم، مولفه هاي P_1، P_2 ، P_3 در موقعيت تصاوير σ_n بر روي محورهاي مختصات خواهند بود

$$
2 \quad \left|\begin{array}{l} P_1 = \sigma_n \cdot n_1 \\ P_2 = \sigma_n \cdot n_2 \\ P_3 = \sigma_n \cdot n_3 \end{array}\right.
$$

$$
1 \; \& \; 2 \longrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

یکی از پاسخها $n_1=n_2=n_3=0$ است که بی معناست چون $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$

لذا باید دترمینان ماتریس
ضرایب مساوی صفر باشد

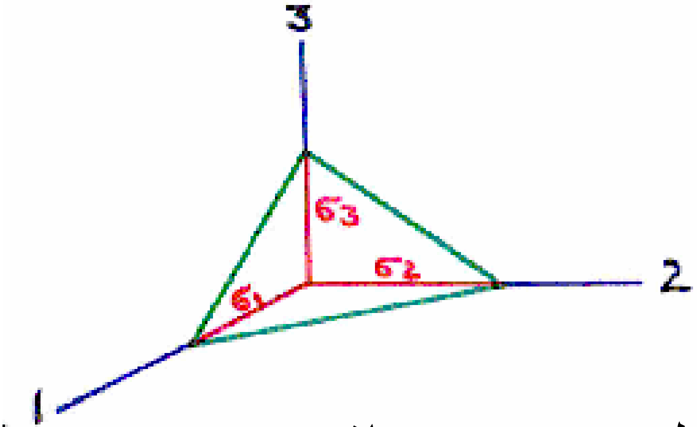
$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{bmatrix}=0$$

واین درحقیقت همان معادله مشخصه یک ماتریس است و یا به عبارت دیگر بردار

$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ بردار ویژه تانسور تنش می باشد

$$\underline{\sigma_n}^3-(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\,\underline{\sigma_n}^2+(\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\sigma_{12}^2-\sigma_{23}^2-\sigma_{31}^2)\,\underline{\sigma_n}-(\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}+2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}-\sigma_{11}\sigma_{23}^2-\sigma_{22}\sigma_{31}^2-\sigma_{33}\sigma_{12}^2)=0$$

حل این معادله برای σ_n مقادیر خاص $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ را به ما خواهد داد



به ازاء هر تنش اصلی یک بردار خاص وجوددارد صفحه ای که از دو بردار خاص تشکیل گردد را صفحه اصلی می نامند

و اما در معادله ارائه شده، سه پارامتر ذیل قابل تعریف مي باشند:

1) $J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \mathrm{Trace}[\sigma] = \text{اثر}[\sigma]$

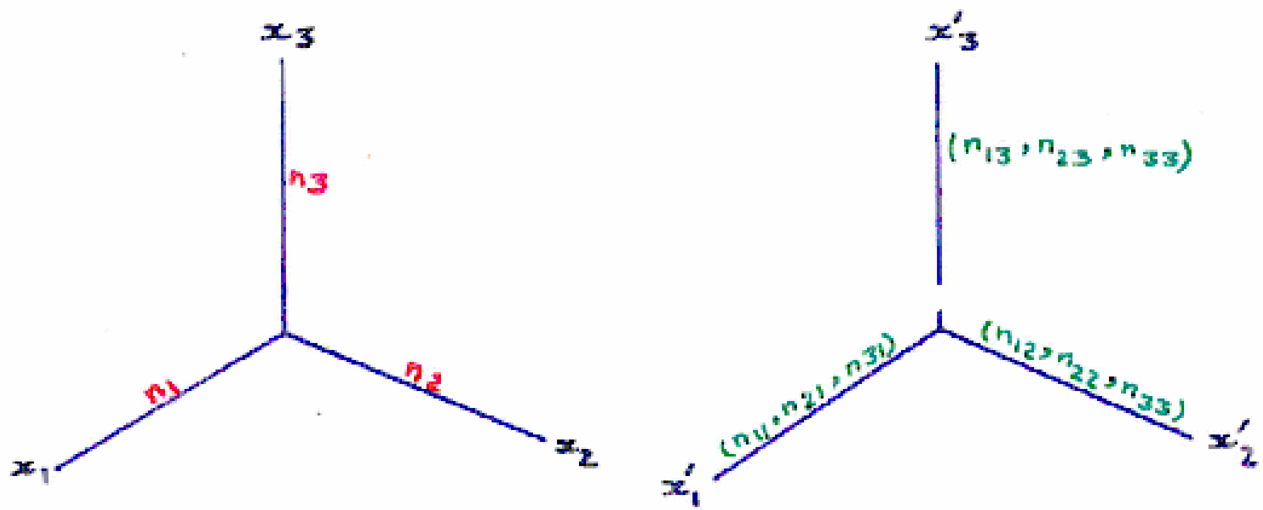
2) $J_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2$ مجموع دترمينان كوفاكتورهاي قطر اصلي تانسور تنش

3) $J_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \det[\sigma]$

$$\boxed{\sigma_n^3 - J_1\sigma_n^2 + J_2\sigma_n - J_3 = 0}$$

مقادير $\mathbf{J}_1$ ، $\mathbf{J}_2$ ،$\mathbf{J}_3$ مستقل از دستگاه محورهاي مختصات بوده و به تغيير ناپذيرهاي تانسور تنش موسومند

تاثیر تغییر دستگاه محورهاي مختصات بر روي تانسور تنش



$$\cos(x'_1 \,\hat{,}\, x_1) = n_{11}$$

$$\cos(x'_1 \,\hat{,}\, x_2) = n_{21}$$

$$\cos(x'_1 \,\hat{,}\, x_3) = n_{31}$$

$$\cos(x'_2 \,\hat{,}\, x_1) = n_{12}$$

$$\cos(x'_2 \,\hat{,}\, x_2) = n_{22}$$

$$\cos(x'_2 \,\hat{,}\, x_3) = n_{23}$$

$$\cos(x'_3 \,\hat{,}\, x_1) = n_{31}$$

$$\cos(x'_3 \,\hat{,}\, x_2) = n_{32}$$

$$\cos(x'_3 \,\hat{,}\, x_3) = n_{33}$$

از يکه بودن بردارها نتيجه مي گيريم:

$$n_{11}^2 + n_{21}^2 + n_{31}^2 = 1$$

و از تعامد بردارها نتيجه مي گيريم:

$$n_{11} n_{12} + n_{21} n_{22} + n_{31} n_{32} = 0$$

حال اگر مجدداً S=1 را فرض نمائيم، داريم:

$$\begin{cases} P_1 = \sigma_{1j} n_j = \sigma_{11} n_{11} + \sigma_{12} n_{21} + \sigma_{13} n_{31} \\ P_2 = \sigma_{2j} n_j = \sigma_{21} n_{11} + \sigma_{22} n_{21} + \sigma_{23} n_{31} \\ P_3 = \sigma_{3j} n_j = \sigma_{31} n_{11} + \sigma_{32} n_{21} + \sigma_{33} n_{31} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{bmatrix} = [\sigma] \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{bmatrix}$$

همانطور كه مي دانيم تصوير P بر روي x_1' معادل مجموع تصاوير مولفه هايش مي باشد، لذا:

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= P_1 n_{11} + P_2 n_{21} + P_3 n_{31} \\
\sigma'_{12} &= P_1 n_{12} + P_2 n_{22} + P_3 n_{32} \\
\sigma'_{13} &= P_1 n_{13} + P_2 n_{23} + P_3 n_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= \\
\sigma'_{12} &= \\
\sigma'_{13} &=
\end{aligned}\right.
\left[\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} & n_{31} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} n_{12} & n_{22} & n_{32} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix}
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

ماتریس تبدیل

$$T=\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

تنش در مختصات جدید از رابطه زیر حاصل مي شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} & n_{31} \\ n_{12} & n_{22} & n_{32} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma'] = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{21} & \sigma'_{31} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{32} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{pmatrix} = [T]^t [\sigma] [T]$$

دو خاصيت زير جهت تانسور تنش تحقيق مي گردد:

1. $[\sigma] = [\sigma]^t$

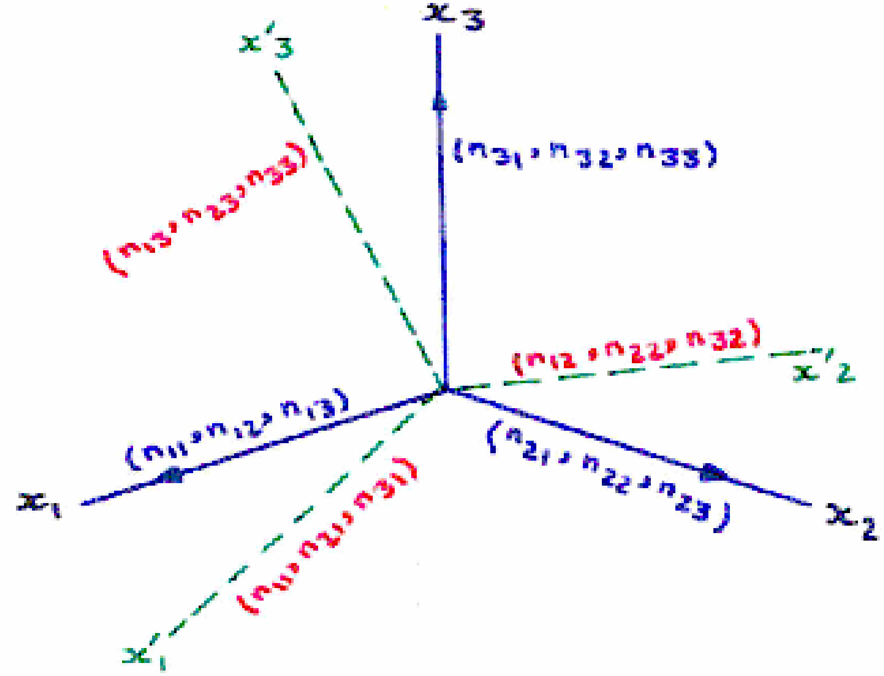
2. $[\sigma']^t = [T]^t \; [\sigma]^t \; [T] = [\sigma']$

تانسور تنش ، در كليه مختصات ، تانسوريست متقارن

بررسي تغيير ناپذيري تغيير ناپذيرهاي تانسور تنش

$$[\sigma'] = [T]^t \, [\sigma] \, [T] \rightarrow$$

1. $\sigma'_{11} = \sigma_{11} n_{11}^2 + \sigma_{22} n_{21}^2 + \sigma_{33} n_{31}^2 + 2\sigma_{12} n_{11} n_{21} + 2\sigma_{13} n_{11} n_{31} + 2\sigma_{23} n_{21} n_{31}$
2. $\sigma'_{22} = \sigma_{11} n_{12}^2 + \sigma_{22} n_{22}^2 + \sigma_{33} n_{32}^2 + 2\sigma_{12} n_{12} n_{22} + 2\sigma_{13} n_{12} n_{32} + 2\sigma_{23} n_{22} n_{32}$
3. $\sigma'_{33} = \sigma_{11} n_{13}^2 + \sigma_{22} n_{23}^2 + \sigma_{33} n_{33}^2 + 2\sigma_{12} n_{13} n_{23} + 2\sigma_{13} n_{13} n_{33} + 2\sigma_{23} n_{23} n_{33}$



با توجه به يكه بودن بردارها ←

$$
\begin{cases}
n_{11}^2 + n_{12}^2 + n_{13}^2 = 1 \\
n_{21}^2 + n_{22}^2 + n_{23}^2 = 1 \\
n_{31}^2 + n_{32}^2 + n_{33}^2 = 1
\end{cases}
$$

و با توجه به عمود بودن دو به دوي بردارهاي يكه، ضرب داخلي بايد صفر باشد:

$$
\begin{cases}
n_{11} n_{21} + n_{11} n_{31} + n_{21} n_{31} = 0 \\
n_{12} n_{22} + n_{12} n_{32} + n_{22} n_{32} = 0
\end{cases}
$$

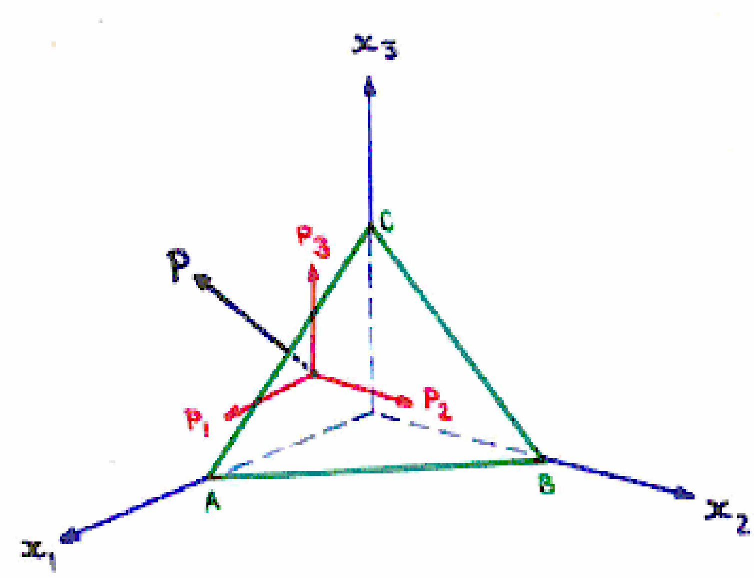
$$J_1' = \sigma_{11}' + \sigma_{22}' + \sigma_{33}' = \sigma_{11} \times 1 + \sigma_{33} \times 1 + 2\sigma_{12} \times 0 + 2\sigma_{13} \times 0 + 2\sigma_{23} \times 0 + \sigma_{22} \times 1$$

$$J_1' = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = J_1$$

وبه همين ترتيب:

$$J_2 = J_2' \quad \& \quad J_3 = J_3'$$

تنشهاي برشي ماكزيمم و مينيمم



اگر مثلث ABC داراي مساحت S=1 باشد وتنشهاي عمود بر سه وجه تصوير شده بر سه صفحه دستگاه مختصات و همچنين نيروي متعادل با اين تنشها P باشد كه داراي مولفه هاي P_1 ، P_2 و P_3 است خواهيم داشت:

$$P_1 = \sigma_{1j} n_j = \sigma_1 n_1 \quad \& \quad P_2 = \sigma_2 n_2 \quad \& \quad P_3 = \sigma_3 n_3$$

$$|\vec{P}|^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

$$P_n = \sigma_n = P_1 n_1 + P_2 n_2 + P_3 n_3 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\sigma_t^2 = |\vec{\sigma}|^2 - \sigma_n^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

$$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 (1 - n_1^2 - n_2^2) - \left[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 (1 - n_1^2 - n_2^2)\right]^2$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial n_1} = 2n_1\sigma_1^2 - 2n_1\sigma_3^2 - 4n_1(\sigma_1 - \sigma_3)\left[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3\right] = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial n_2} = 2n_2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2) - 4n_2(\sigma_2 - \sigma_3)\left[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3\right] = 0$$

حذف n_3

$$(1) \quad n_1\left[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\right] = 0$$

$$(2) \quad n_2\left[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\right] = 0$$

حذف n_2

$$(3) \quad n_1\left[(\sigma_1 - \sigma_2)n_1^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)n_3^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right] = 0$$

$$(4) \quad n_3\left[(\sigma_1 - \sigma_2)n_1^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)n_3^2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2)\right] = 0$$

حذف n_1

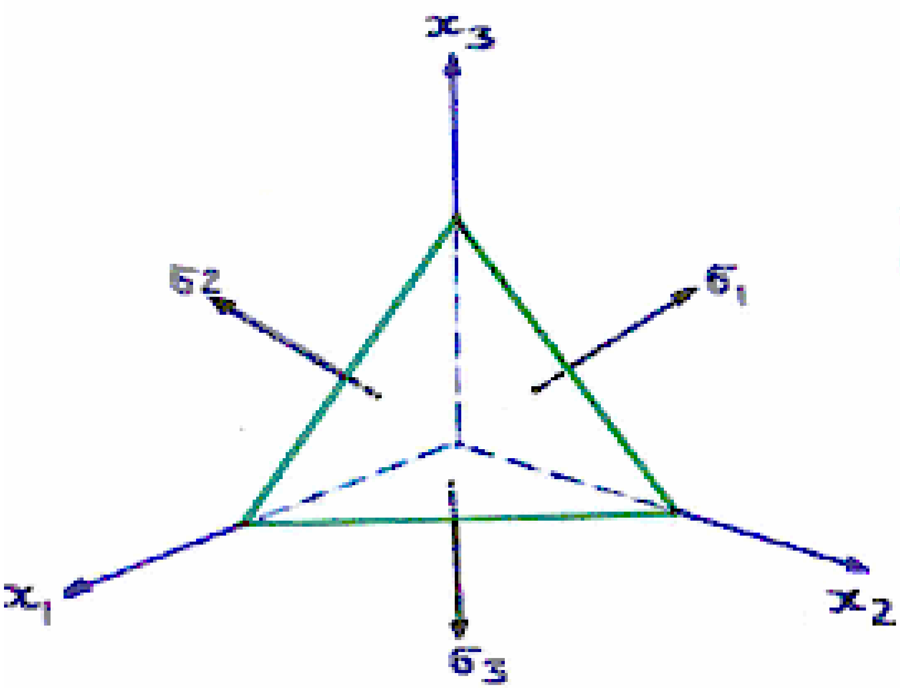
$$(5) \quad n_2\left[(\sigma_2 - \sigma_1)n_2^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n_3^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\right] = 0$$

$$(6) \quad n_3\left[(\sigma_2 - \sigma_1)n_2^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n_3^2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\right] = 0$$

n_1	0	0	1	0	$\pm\sqrt{2}/2$	$\pm\sqrt{2}/2$
n_2	0	1	0	$\pm\sqrt{2}/2$	0	$\pm\sqrt{2}/2$
n_3	1	0	0	$\pm\sqrt{2}/2$	$\pm\sqrt{2}/2$	0
	$\sigma_t = 0$ $\sigma_n = \sigma_3$	$\sigma_t = 0$ $\sigma_n = \sigma_2$	$\sigma_t = 0$ $\sigma_n = \sigma_1$	$\sigma_t = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ $\sigma_n \neq 0$	$\sigma_t = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ $\sigma_n \neq 0$	$\sigma_t = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ $\sigma_n \neq 0$

لذا نتيجه مي گيريم كه در سطوحيكه نيمساز سطوح اصلي هستند، تنشهاي برشي حداكثر و حداقل هستند

دوایر موهر



$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_n^2$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

اگر n_1 ، n_2 و n_3 را به عنوان مجهولات در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$n_1^2 = \frac{\sigma_t^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)} \geqslant 0$$

$$n_2^2 = \frac{\sigma_t^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \geqslant 0$$

$$n_3^2 = \frac{\sigma_t^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geqslant 0$$

در صورتیکه فرض کنیم $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \sigma_3$ باشد ، خواهیم داشت:

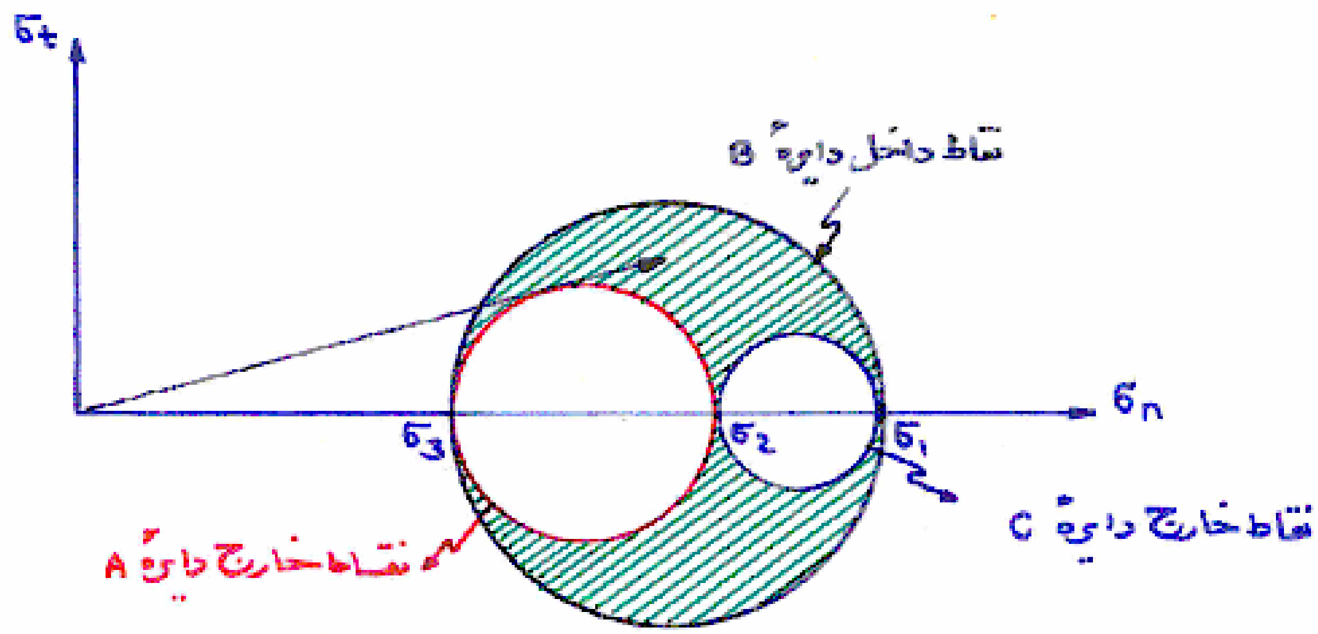
$$\sigma_t^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geqslant 0$$

دایره A

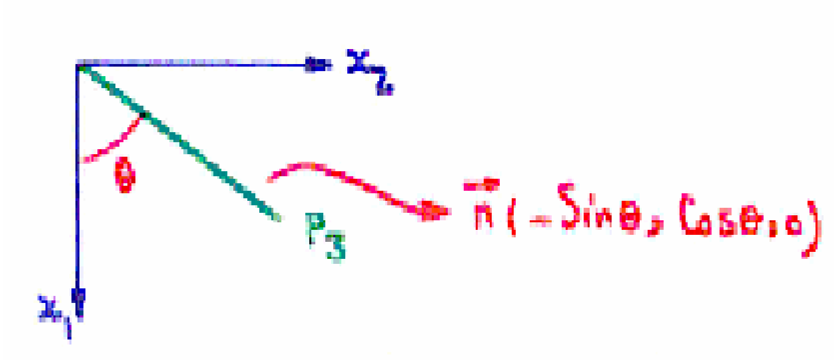
چراکه $\sigma_t^2+\sigma_n^2-(\sigma_2+\sigma_3)\sigma_n+\sigma_2\sigma_3=0$ معادله یك دایره است

دایرهB $\sigma_t^2+(\sigma_n-\sigma_3)(\sigma_n-\sigma_1)\leq 0$

دایرهC $\sigma_t^2+(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)\geq 0$



حال اگر به بررسي اين تنشها و و ترسيم دواير موهر در صفحه بپردازيم، مي توانيم موضوع را به صورت زير تشريح كنيم:



در صفحه، صفحه أي كه بر روي آن تنشها اصلي مي باشند با خط P_3 معرفي

مي گردد، كه زاويهθ با محور x_1 مي‌سازد. بردار نرمال اين خط

مختصات $\vec{n}(-Sin\,\theta, Cos\,\theta, 0)$ را دارا مي باشد، لذا:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \mathrm{Sin}^2\theta + \sigma_2 \mathrm{Cos}^2\theta + 0$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_n^2$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 \mathrm{Sin}^2\theta + \sigma_2^2 \mathrm{Cos}^2\theta + 0 - (\sigma_1^2 \mathrm{Sin}^2\theta + \sigma_2^2 \mathrm{Cos}^2\theta)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 \mathrm{Sin}^2\theta + \sigma_2^2 \mathrm{Cos}^2\theta - \sigma_1^2 \mathrm{Sin}^4\theta - \sigma_2^2 \mathrm{Cos}^4\theta - 2\sigma_1\sigma_2 \mathrm{Sin}^2\theta \mathrm{Cos}^2\theta \Rightarrow$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 \mathrm{Sin}^2\theta (1 - \mathrm{Sin}^2\theta) + \sigma_2^2 \mathrm{Cos}^2\theta (1 - \mathrm{Cos}^2\theta) - 2\sigma_1\sigma_2 \mathrm{Sin}^2\theta \mathrm{Cos}^2\theta \Rightarrow$$

وبه همین ترتیب:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \mathrm{Cos}2\theta$$

ملاحظه مي شود كه $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ مركز دايره ايست به قطر $\sigma_1-\sigma_2$ كه شعاع آن از $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$ محاسبه مي گردد و يا ضرب شعاع و $Sin2\theta$ دو نقطه تحت زاويه 2θ روي اين دايره مشخص مي شود كه همان تنشهاي برشي حداكثر و حداقل هستند.

بايد اضافه نمود كه افزودن ميزان تنش ثابتي به مقادير تنشهاي اصلي دايره موهر به اندازه يك $\sigma_\circ$ به سمت راست انتقال مي يابد و در تنش برشي ماكزيمم و مينيمم تغييري حاصل نمي شود. $\sigma_3+\sigma_\circ$ ، $\sigma_2+\sigma_\circ$ ، $\sigma_1+\sigma_\circ$.

زيرا فقط فشار هيدروستاتيكي اضافه شده است.

$$P=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$$

لذا نتيجه مي گيريم كه : فشار هيدروستاتيكي تاثيري روي مقدار حداكثر و حداقل تنش برشي ندارد

بررسی تغییر ناپذیرها

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + S_{ij}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

تغییر ناپذیرهاي
تانسور تنش

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \Sigma\sigma_{ii}$$

$$J_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{23}\sigma_{33} + \sigma_{31}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$$

$$J_3 = \det[\sigma]$$

تغيير ناپذيرهاي تانسور فشار هيدروستاتيکی

$$\theta_1 = 3P = \sigma_{kk} = J_1$$

$$\theta_2 = \text{مجموع دترمينان کوفاکتورهاي قطر اصلي} = 3P^2 = \frac{1}{3}(3P)^2 = \frac{1}{3}J_1^2$$

$$\theta_3 = P^3 = \frac{1}{27}(3P)^3 = \frac{1}{27}J_1^3$$

و چون J_1، J_2 و J_3 تغيير ناپذيرند،

θ_1 ، θ_2 و θ_3 هم تغيير ناپذير مي باشند

تغيير ناپذيرهاي تانسور انحراف آور تانسور تنش

$$I_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$$

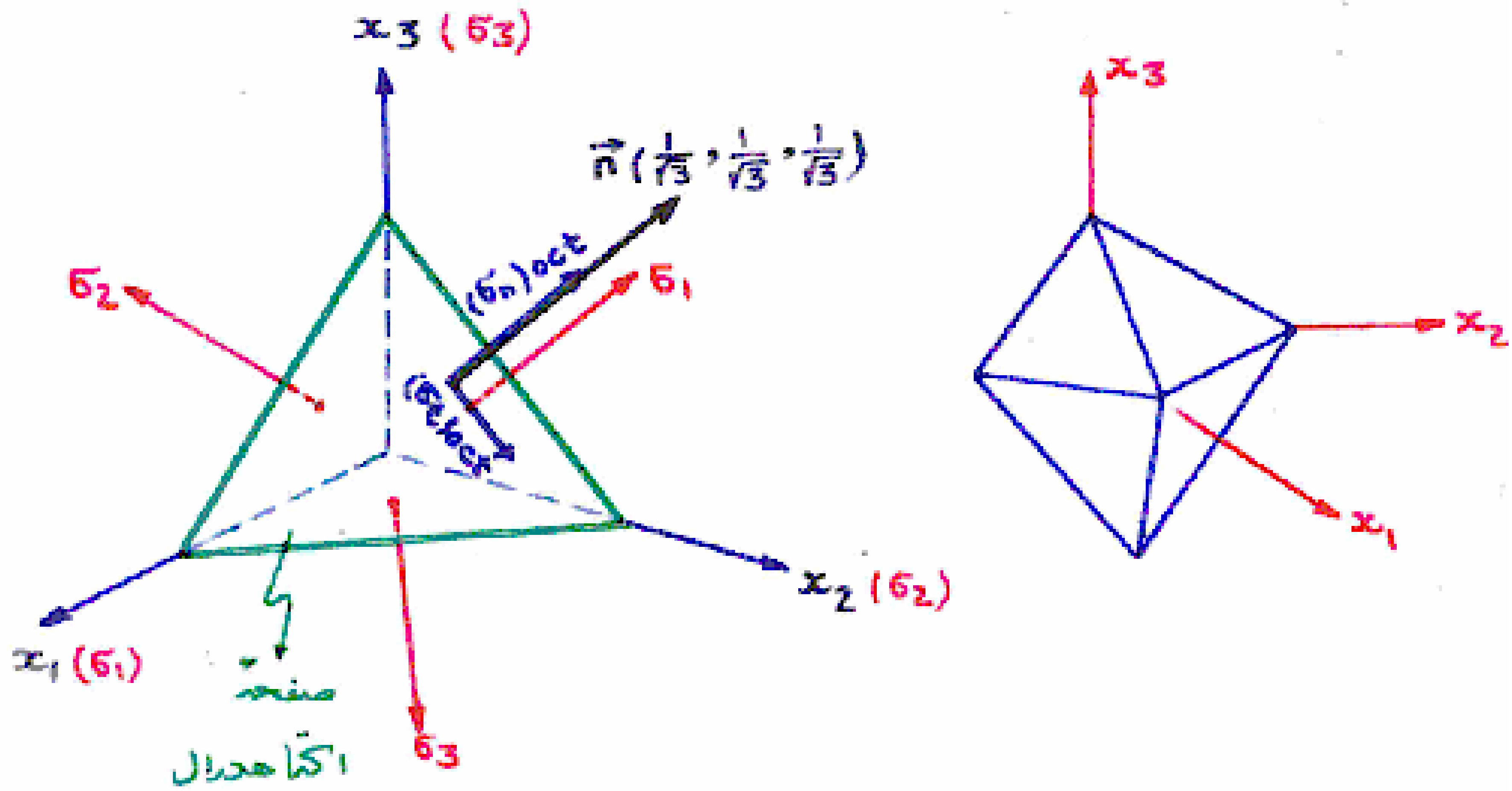
$$I_2 = S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32} + S_{11}S_{33} - S_{13}S_{31} + S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12} = J_2 - \frac{1}{3}J_1^2$$

$$I_3 = \det[S] = J_3 - \frac{1}{3}J_1J_2 + \frac{2}{27}J_1^3$$

تنشهاي اكتاهدرال (8 وجهي)

اگر محورهاي مختصات در امتداد عمود بر صفحات اصلي باشند، (دستگاه اصلي $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$)
در اينصورت در بين سطوحيكه در اين دستگاه تعريف مي شوند، سطوحي وجود دارد كه
كسينوسهاي هادي آنها برابر است با $\vec{n}(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ يا برداريكه صفحه اصلي ، مقدار اين سطوح
هشت عدد است كه نسبت به يكديگر مورب بوده و يك هشت وجهي منتظم را تشكيل مي دهند

تنش در روي اين سطوح به تنش هشت وجهي (اكتا هدرال) موسوم است



تنشهاي قائم و مماسي بر روي اين صفحه «تنشهاي اكتاهدرال» نام دارند

براي سطح واحد (S=1) داريم : $(|\vec{\sigma}|_{oct})^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$

$$P_i = \sigma_{ij} n_j : \quad \begin{cases} P_1 = \sigma_1 n_1 = \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{3}} \\ P_2 = \sigma_2 n_2 = \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{3}} \\ P_3 = \sigma_3 n_3 = \dfrac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

مولفه عمودي تنش اكتاهدرال: $|\sigma_n|_{oct} = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_1 n_1 + P_2 n_2 + P_3 n_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} J_1 = P$

مولفه مماسى تنش اكتاهدرال: $|\sigma_t|_{oct} = \pm\sqrt{(|\vec{\sigma}_{oct}|)^2 - (\sigma_{n\,oct})^2}$

$$|\sigma_t|_{oct} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \Rightarrow |\sigma_t|_{oct} = \pm\sqrt{\frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{2}{9}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$$

$$|\sigma_t|_{oct} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2J_1^2 - 6J_2}$$

$$J_2 = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2$$

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \qquad \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

• ثابت کنید:

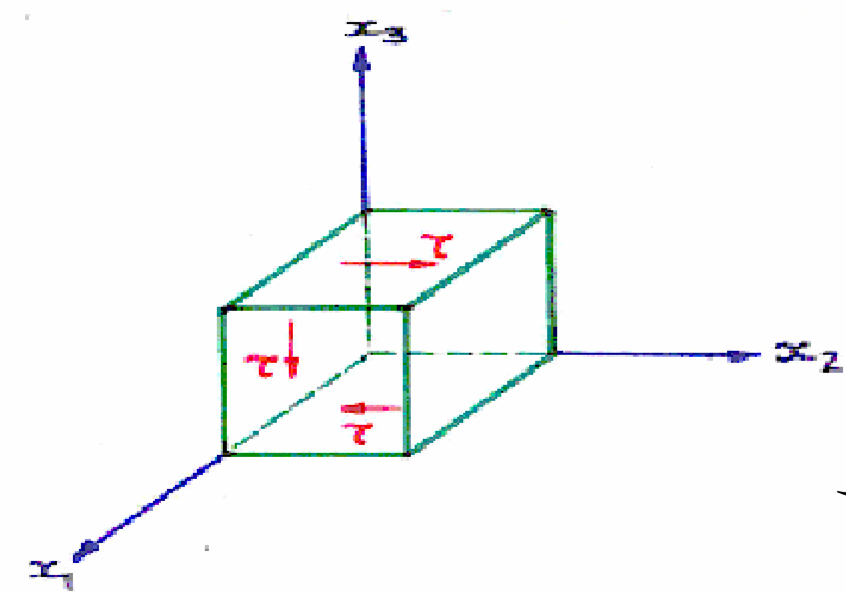
$$(\sigma_t)_{oct} = F(S_{ij}S_{ij})$$

$$(\sigma_t)_{oct} = \pm\sqrt{C_1 S_{ij}S_{ij}}$$

در مورد فولاد نرم و خاك چسبنده و پلاستيكها داريم:

$$S_{ij}S_{ij} \leq 2k^2$$

كه در آن ، K مقاومت برشي ماده در آزمايش برش مستقيم است



تانسور تنش

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

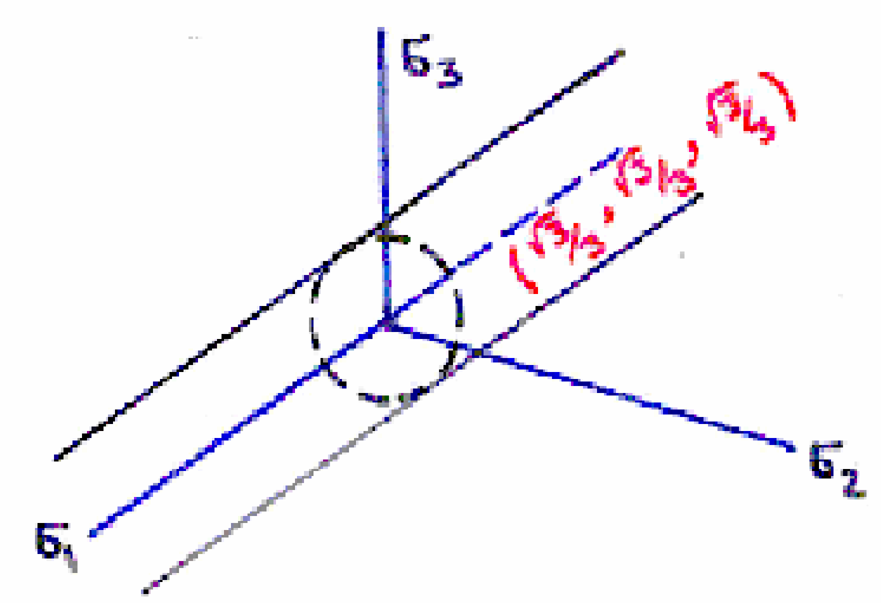
تانسور انحراف آور

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

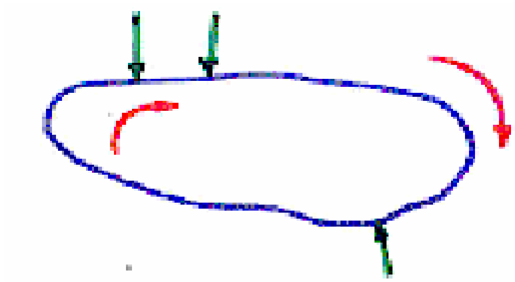
$$S_{ij}S_{ij} = S_{11}^2 + S_{13}^2 + S_{12}^2 + S_{22}^2 + S_{31}^2 + S_{32}^2 + S_{33}^2 \Rightarrow$$

$$S_{ij}S_{ij} = \tau^2 + \tau^2 = 2\tau^2 \leq 2K^2$$

این نامعادله سطح استوانه أي به مرکز خط $(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ را مشخص کنید ، که از مرکز مختصات عبور کرده و مشخص کننده قطر K^2 است.



معادلات تعادل بر حسب تنشها



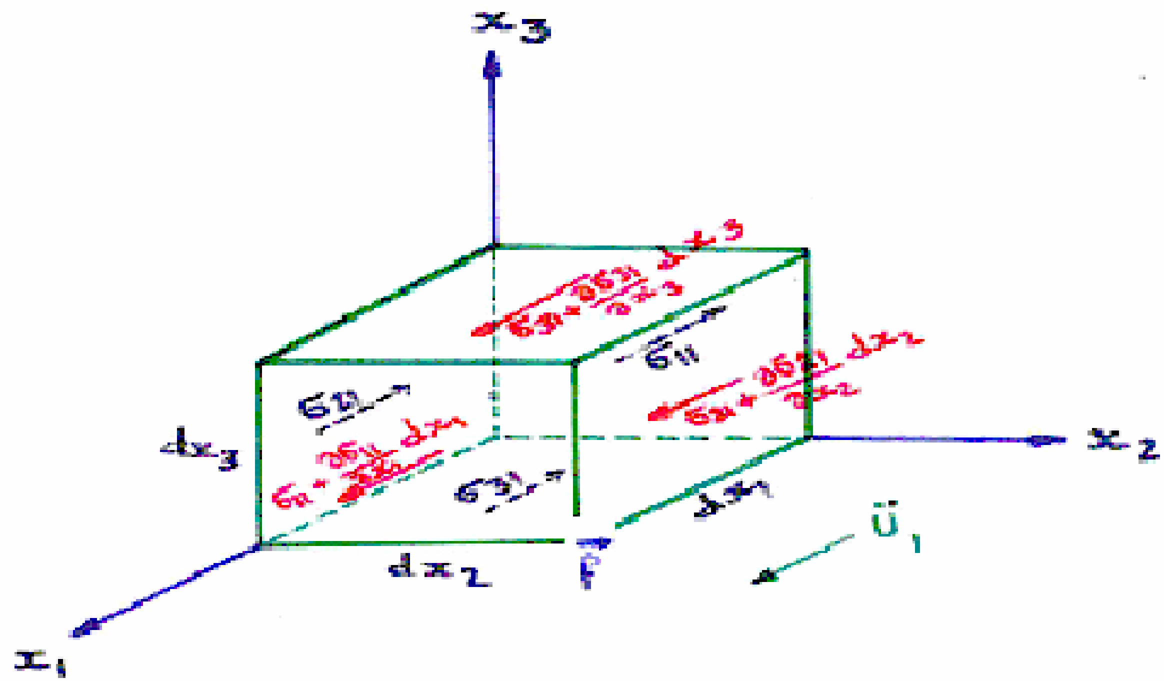
براي اينكه جسمي در حال تعادل باشد، بايد

داشته باشيم: $\Sigma F = 0 \& \Sigma M = 0$

به عبارت ديگر بايد كليه ذرات جسم در حال تعادل باشند، مي توان نوشت:

$$\Sigma \vec{F} - M\vec{\gamma} = 0$$ يا $$\Sigma \vec{F} = M.\vec{\gamma}$$ (فرمول دالامبر)

فرض می کنیم که جسمی با شتاب $\ddot{u}$ حرکت می کند:



در اینصورت تغییرات تنشها بر سطوح مکعب در جهت ۱ به صورت شکل بالا تصویر می شوند اگر حجم مخصوص مصالح را ρ فرض نماییم ونیروی وارده بر واحد جرم جسم $\vec{F}$ باشد:

نیروی وارده بر واحد جرم جسم $=\vec{F}=(F_1, F_2, F_3)$

معادله تعادل در جهت x_1 به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3+\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3$$

$$-\sigma_{21}dx_1dx_3+\left(\sigma_{31}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2-\sigma_{31}dx_1dx_2+$$

$$\rho\,dx_1dx_2dx_3F_1=\rho\,dx_1dx_2dx_3\,.\ddot{u}_1$$

لذا خواهیم داشت:

$$dx_1dx_2dx_3\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+\rho F_1\right)=dx_1dx_2dx_3\,\rho\,\ddot{u}_1$$

معادلات تعادل بر حسب تنشها

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+\rho F_1=\rho\ddot{u}_1$$

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+\rho F_2=\rho\ddot{u}_2$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\rho F_3=\rho\ddot{u}_3$$

سه رابطه فوق به صورت اندیس چنین نوشته می شوند: $\sigma_{ij,j}+\rho f_i=\rho \ddot{u}_i$

$\sigma_{ij,j}$ نشانگر مشتق σ_{ij} نسبت به x_j می باشد

مثال: $i=1 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}+\rho F_1=\rho \ddot{u}_1$

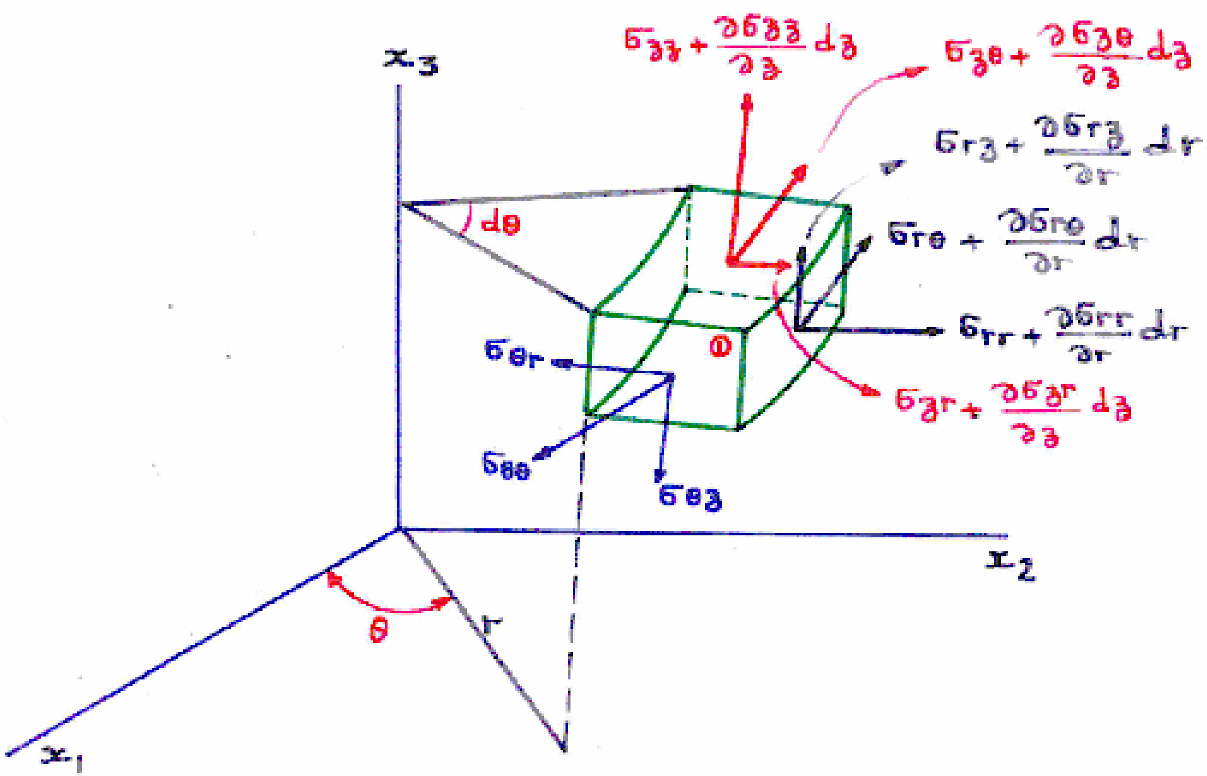
حال اگر جسم ما در حال سکون باشد، (یعنی $\ddot{u}=0$) خواهیم داشت:

$$\sigma_{ij,j}+\rho f_i=0$$

$$\rho \vec{F}=\vec{g} \Rightarrow \sigma_{ij,j}+g_i=\rho \ddot{u}_i$$

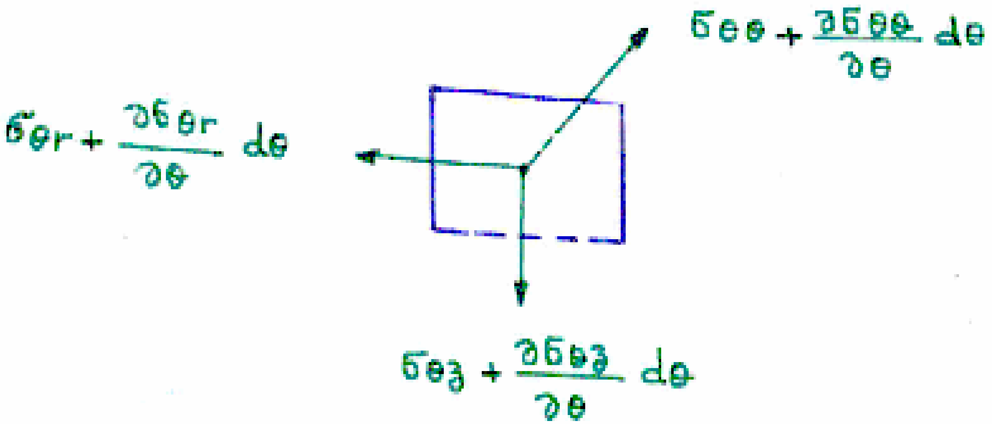
معادلات تعادل در مختصات استوانه ای بر حسب تنشها

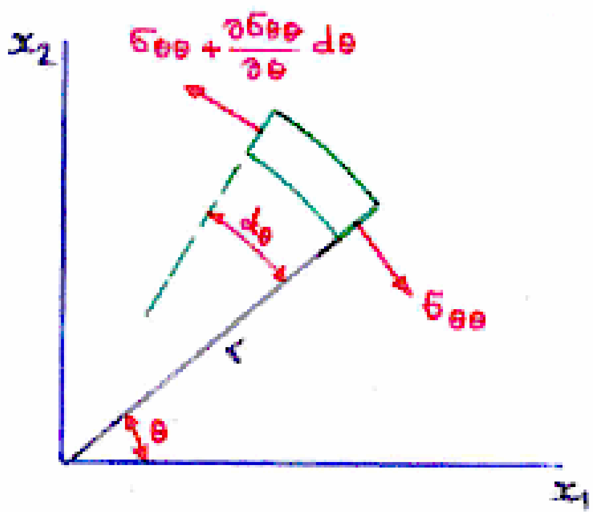
تنشهای زیر در مختصات استوانه ای وارد می شود:



$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

وضعیت تنشها در صفحه موازی با صفحه (۱)





در حالتیکه در صفحه این مکعب را تصویر نماییم، (بصورت روبرو) می توان به سادگی تنشها را تصویر نمود

$$\Sigma F_r = 0$$

تعادل نیرو برصفحه rدرجهت r

$$\left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr\right)(r+dr)\,d\theta\,dz - \sigma_{rr}\, r\, d\theta\, dz$$

تعادل نیروبرصفحه θ در جهت r

$$-\sigma_{\theta r}\, dr\, dz + \left(\sigma_{\theta r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta\right) dr\, dz$$

اثرجزیی تنش $\sigma_{\theta\theta}$ درجهت r

$$-\left(\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta\right) d\theta\, dr\, dz$$

تعادل نیروبرصفحه z در جهت r

$$\sigma_{zr}(r\,d\theta\,dr) + \left(\sigma_{zr} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} dz\right) r\, d\theta\, dr$$

اثرنیروی حجمی

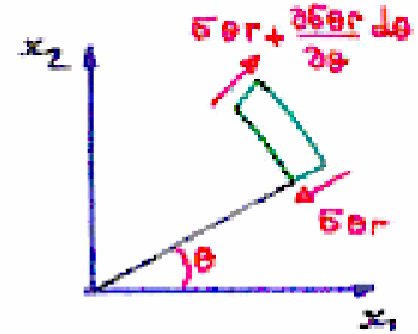
$$+ \rho\, r\, d\theta\, dr\, dz\, f_r =$$

اثرحرکت

$$\rho \ddot{u}_r\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$\therefore \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho F_r = \rho \ddot{u}_r$$

* : $(r+dr)\,d\theta\,dz$ بیانگر سطح است که آن $(r+dr)\,d\theta$ طول و dz عرض است.



$$\sum F_\theta = 0$$

$$\left(\sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}dr\right)(r+dr)\,d\theta\,dz - \sigma_{r\theta}\,r\,d\theta\,dz + \left(\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}d\theta\right)dr\,dz$$
$$- \sigma_{\theta\theta}\,dr\,dz + \left(\sigma_{\theta r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta}d\theta\right)d\theta\,dr\,dz + \left(\sigma_{z\theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z}dz\right)r\,d\theta\,dr$$
$$- \sigma_{z\theta}\,r\,d\theta\,dr + \rho f_\theta\,r\,dr\,d\theta\,dz = \rho \ddot{u}_\theta\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

مانند حالت قبل از بي نهايت كوچكهاي مرتبه بالا صرفنظر كرده ، معادله ساده زير نتيجه مي شود:

$$\therefore\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \rho f_\theta = \rho \ddot{u}_\theta$$

و از تعادل در امتداد محور z ها نتيجه مي شود:

$$\Sigma F_z = 0$$

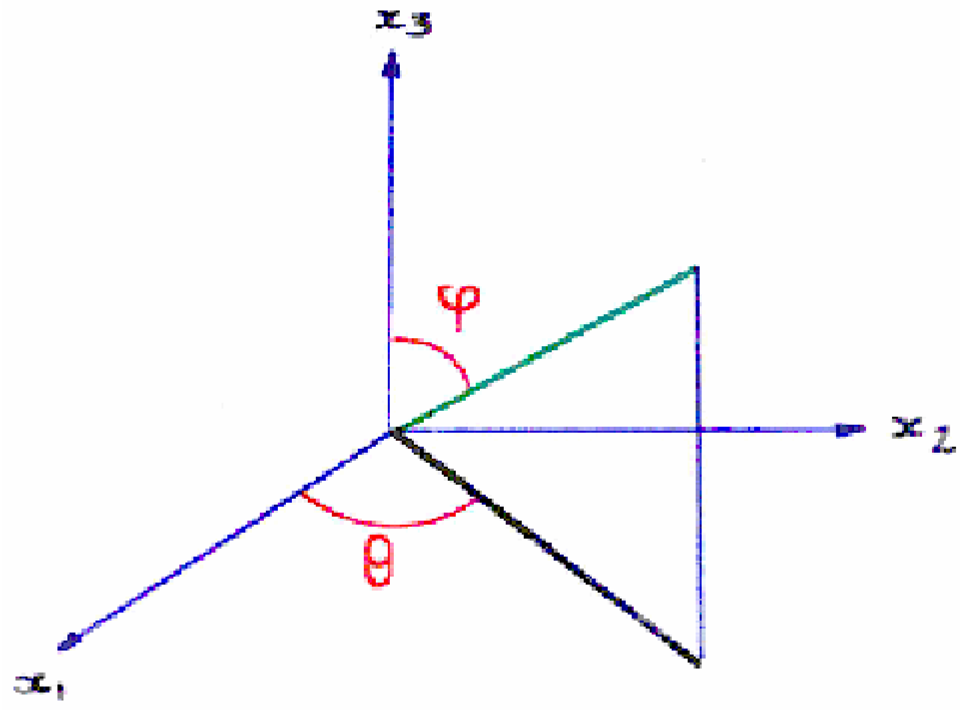
$$\left(\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} dr\right)(r+dr)\,d\theta\,dz - \sigma_{rz}\, r\,d\theta\,dz + \left(\sigma_{\theta z} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} d\theta\right) dr\,dz$$

$$- \sigma_{\theta z}\,dr\,dz + \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz\right) r\,d\theta\,dr - \sigma_{zz}\, r\,d\theta\,dr +$$

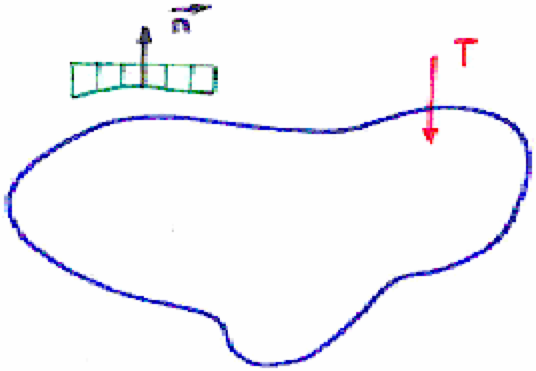
$$\rho\, r\,d\theta\,dr\,dz\, F_z = \rho\, r\,d\theta\,dr\,dz \cdot \ddot{u}_z$$

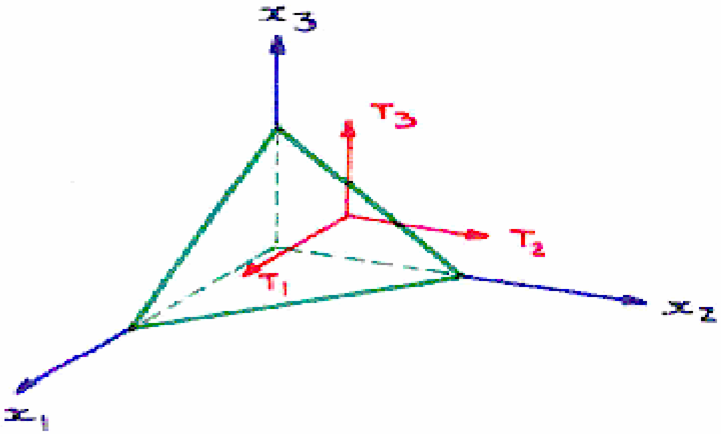
$$\therefore \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \rho F_z = \rho \ddot{u}_z$$

- معادلات تعادل را در دستگاه مختصات كروي بنويسيد.



تعادل تنشها با نيروهاي سطحي





در اين شكل:

نيروهاي وارده بر واحد سطح =T

$\vec{T}(T_1, T_2, T_3)$

و $\vec{n}$ برداريكه عمود بر سطح به سمت خارج جسم است.

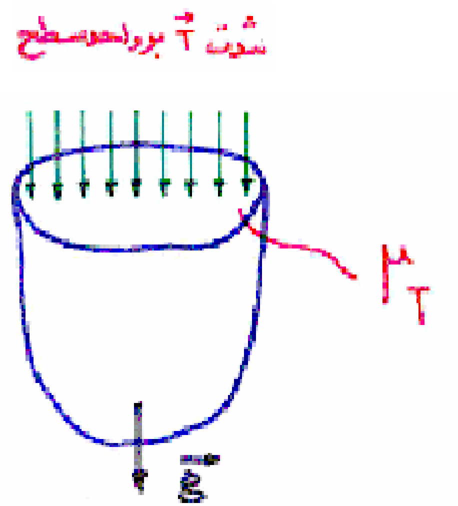
هرم كوچك مطابق شكل روبرو از جسم جدا مي كنيم.

از تعادل هرم نتيجه مي شود: $T_i = \sigma_{ij} n_j$

اين جسم به شرطي در حال تعادل است كه داشته باشيم:

(در كليه نقاط متعلق به سطح) $\sigma_{ij} n_j = T_i$

در اينصورت جسم تعادل دارد.

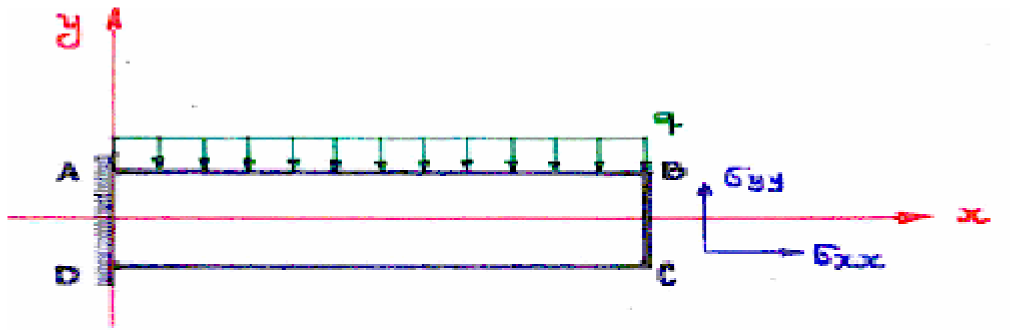


شدت نيروي حجمي (نيروي وارد بر واحد حجم)

در كليه نقاط μ داريم :

$$\sigma_{ij,j} + g_i = 0$$

مثالي در اين مورد بيان مي كنيم، يك تير كنسول را تحت باريكنواخت **q** در نظر مي گيريم، خواهيم داشت:



AB سطح : $T_x = 0$ & $T_y = -q$

$\vec{n}\,(n_x = 0 \;,\; n_y = 1)$ $\quad \sigma_{ij} n_j = T_i \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = T_x \Rightarrow \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y = T_y \Rightarrow \sigma_{yy} = -q \end{cases}$$

BC سطح : $T_x = 0$ & $T_y = 0$

$\vec{n}\,(n_x = 1 \;,\; n_y = 0)$ $\quad \sigma_{ij} n_j = T_i \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = T_x \Rightarrow \sigma_{xx} = 0 \\ \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y = T_y \Rightarrow \sigma_{yx} = 0 \end{cases}$$

DC سطح : $T_x=0$ & $T_y=0$

$\vec{n}\,(n_x=0 \;,\; n_y=-1)$

به روش مشابه نتیجه مي شود:

$\sigma_{xy}=0$ & $\sigma_{yy}=0$

در داخل نيز خواهيم داشت:

$\forall (x,y)\in ABCD \;:\; \sigma_{ij,j}+f_i=0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+0=0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}-\gamma=0 \end{cases}$$

اين معادلات بي نهايت جواب دارند و هر جواب كه از اين معادلات حاصل مي شود، قابل قبول است. (بطور استاتيكي)

- **در جسمي توزيع تنش زير وجود دارد:**

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} C_1 x + C_2 y & C_0 x - C_1 y & 0 \\ C_5 x - C_1 y & C_5 x + C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر نيرو هاي حجمي قابل صرفنظر كردن باشند، آيا جسم در حال تعادل است؟

$$\sigma_{ij,j} + g_i = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_1 - C_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_5 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

لذا اگر $C_s = 0$ باشد جسم در حال تعادلست و گرنه جسم در حال تعادل نمي باشد.

●آیا جسمي با توزیع تنش زیر، در حال تعادل است؟

$$[\sigma] = \begin{array}{cc} (xx) & (xy) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}x^2y^2 & xy^3 \\ xy^3 & -\frac{1}{4}y^4 \end{bmatrix}} \\ (yx) & (yy) \end{array}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}(2xy^2) + 3xy^2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \Rightarrow y^3 - \frac{1}{4}(4y^3) = 0$$

چون معادلات فوق صحیح مي باشند، لذا جسم در حال تعادل است.

• **پخش تنش در جسمي به صورت زير است:**

$$\sigma_{xx} = ax^2 + by^2 \quad (kg/cm^2)$$

$$\sigma_{xy} = 4xy$$

$$\sigma_{yy} = -2by^2$$

الف) a و b را حساب كنيد تا جسم در حال تعادل باشد. (از نيروي حجي صرفنظر كنيم)

ب) در اينحالت تنشهاي اصلي را در كليه نقاط جسم بدست آوريد.

ج) اگر حداكثر تنش برشي اكتاهدرال را به $1250 \ {}^{kg}\!/_{cm^2}$ محدود كنيم، تعيين نمائيد چه نقاطي از جسم اين محدوديت را اقناع مي كند:

حل الف:

$$2ax + 4x = 0 \Rightarrow a = -2 \qquad 4x - 2b \times 2y = 0 \Rightarrow b = 1$$

• تانسور تنش در نقطه از جسم بصورت زیر است:

$$[\sigma] = 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \ Kg/cm^2$$

الف: تنشهاي اصلي و جهات آنها را تعيين نمائيد.

ب: تنشهاي اكتاهدرال را تعيين و آنرا نيروي مختصات مربوطه به دواير موهر نشان دهيد.

ج: تغيير ناپذيري هاي تانسور تنش، انحراف آور تانسور تنش و تانسور فشار هيدروستاتيكي را بدست آوريد.

د: تانسور تنش را در دستگاه مختصات جدید

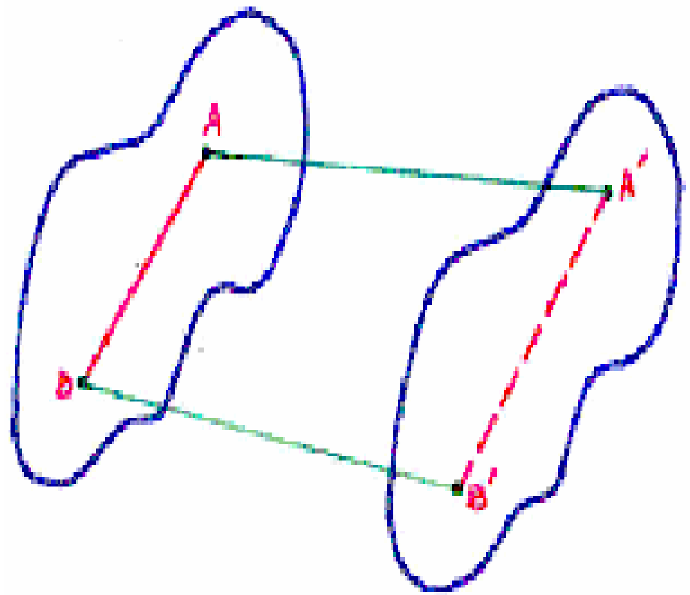
$$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}.0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0).(0,0,1)$$ بنویسید.

• با استفاده از داوير موهر در حالت تنشهاي در بعدي ، نشان دهيد كه :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} \quad \text{و} \quad \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma^2_{xy} \text{ ،}$$

دو تغيير ناپذير تانسور تنش هستند.

كرنش



در مقاومت مصالح كرنش
در تغيير شكلهاي بسيار كوچك
مفهوم دارد لذا به تعريف اين كرنش
تحت دو عنوان مهندسي و تئوري
ارتجاعي مي پردازيم

۱)كرنش مهندسي (مقاومت مصالح)

اين كرنش وقتي معني دارد كه |AA'| و |BB'| بسيار كوچك باشند.

كرنش در امتداد AB به صورت زير تعريف مي گردد:

$$e_{AB} = \lim_{A \to B} \frac{|\overrightarrow{A'B'}| - |\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

۲)كرنش تئوري ارتجاعي

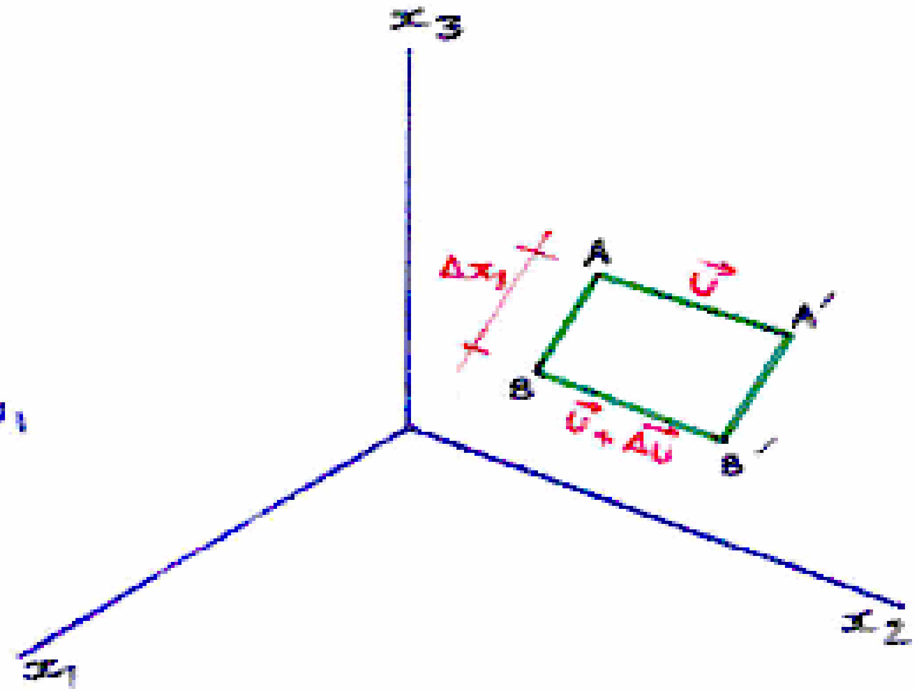
در كليه موقعيتها مفهوم دارد،حتي زمانيكه تغيير شكلها بزرگ باشند

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{A \to B} \frac{\left|\overrightarrow{A'B'}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}$$

بیان کرنش در مختصات سه بعدی

$$A\left|\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l} x_1+\Delta x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right.$$

$$A'\left|\begin{array}{l} x_1+u_1 \\ x_2+u_2 \\ x_3+u_3 \end{array}\right. \qquad B'\left|\begin{array}{l} x_1+\Delta x_1+u_1+\Delta u_1 \\ x_2+u_2+\Delta u_2 \\ x_3+u_3+\Delta u_3 \end{array}\right.$$



$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \Delta x_1$$

$$\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \left[(\Delta x_1+\Delta u_1)^2+(\Delta u_2)^2+(\Delta u_3)^2\right]^{1/2}$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{11} = \lim \frac{(\Delta x_1+\Delta u_1)^2+(\Delta u_2)^2+(\Delta u_3)^2-\Delta x_1^2}{2(\Delta x_1)^2}$$

در حد ، ε_{11} به صورت زیر ساده مي گردد:

$$e_{11} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right]$$

و در حالتي كه تغيير شكلها كوچك باشند:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$$

$$e_{AB} = e_{11} = \lim_{A \to B} \frac{|\overrightarrow{A'B'}| - |\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\left[(\Delta x_1 + \Delta u_1)^2 + (\Delta u_2)^2 + (\Delta u_3)^2\right]^{1/2} - \Delta x_1}{\Delta x_1}$$

و با استفاده از بسط تيلور :

$$e_{11} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$$

پس ملاحظه مي گردد كه در تغيير شكلهاي كوچك، كرنش مهندسي و تئوري ارتجاعي برابرند

کرنشها در دیگر امتدادها

در امتداد محور x_2 :

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

در امتداد محور x_3 :

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \& \quad e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

فرمول کلي

$$e_{ij} = u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{i,j}\, u_{i,j}$$

$$e_{ij}\big|_{i=j} = u_{i,j}$$

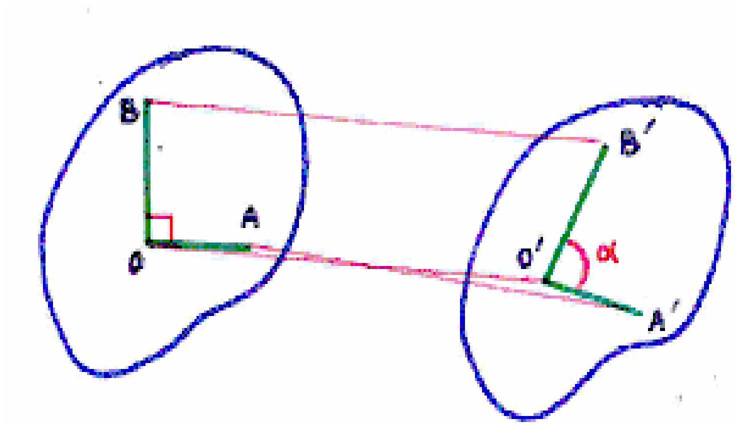
رابطه بین دونوع کرنش

$$e_{AB} = \frac{|\overrightarrow{A'B'}| - |\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|\overrightarrow{A'B'}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2|\overrightarrow{AB}|^2} = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{AB}|}\right]^2 - 1\right) \Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{1}{2}\left[(e_{AB}+1)^2 - 1\right]$$

$$\boxed{2\varepsilon_{AB} = e_{AB}^2 + 2e_{AB}}$$

کرنشهاي برشي



نصف اختلاف اين دو
زاويه را كرنش برشي
مهندسي تعريف مي كنيم

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'}}{|\overrightarrow{O'A'}| \cdot |\overrightarrow{O'B'}|}$$

۱)کرنش مهندسي

$$e_{OA/OB} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\gamma_{OA/OB} = 2 e_{OA/OB} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

۲) كرنش برشي در تئوري ارتجاعي

$$e_{OA/OB} = \lim_{AB \to 0} \frac{\overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'}}{2 |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$$

محاسبه کرنش برشي تئوري ارتجاعي بر حسب کرنش مهندسي

$$\frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}}{|\overrightarrow{O'A'}|\cdot|\overrightarrow{O'B'}|}\times\frac{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}}{2\,|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}\times\frac{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{O'A'}|\cdot|\overrightarrow{O'B'}|} = \varepsilon_{OA/OB}\cdot\frac{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{O'A'}|\cdot|\overrightarrow{O'B'}|}$$

اما از طرف ديگر داريم :

$$e_{OA} = \frac{|\overrightarrow{O'A'}| - |\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|}$$

$$\therefore\ \frac{|\overrightarrow{O'A'}|}{|\overrightarrow{OA}|} = e_{OA} + 1$$

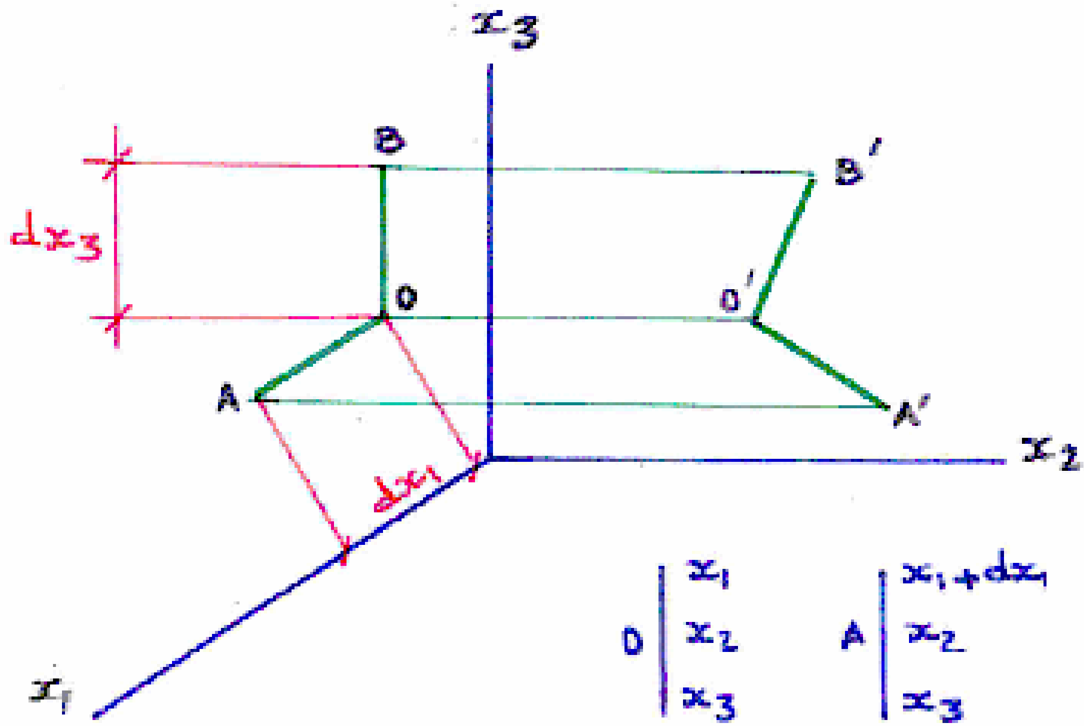
و به همين ترتيب :

$$\frac{|\overrightarrow{O'B'}|}{|\overrightarrow{OB}|} = e_{OB} + 1$$

لذا خواهيم داشت:

$$\boxed{2\,\varepsilon_{OA/OB} = (1+e_{OA})(1+e_{OB})\cos\alpha}$$

محاسبه كرنشهاي برشي بر حسب تغيير مكانها



$$O\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \qquad A\left|\begin{matrix} x_1+dx_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3+dx_3 \end{matrix}\right.$$

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \vec{U_0}$$

$$\varepsilon\, {x_1}/{x_3} = \varepsilon_{13}$$

$$\overrightarrow{U_A} = \left| \begin{array}{l} u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\, dx_1 \\[2ex] u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\, dx_1 \\[2ex] u_3 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\, dx_1 \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{U_B} = \left| \begin{array}{l} u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\, dx_3 \\[2ex] u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\, dx_3 \\[2ex] u_3 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\, dx_3 \end{array} \right.$$

$$O' \left| \begin{array}{l} x_1 + u_1 \\[2ex] x_2 + u_2 \\[2ex] x_3 + u_3 \end{array} \right. \qquad A' \left| \begin{array}{l} x_1 + dx_1 + u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\, dx_1 \\[2ex] x_2 + u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\, dx_1 \\[2ex] x_3 + u_3 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\, dx_1 \end{array} \right. \qquad B' \left| \begin{array}{l} x_1 + u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\, dx_3 \\[2ex] x_2 + u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\, dx_3 \\[2ex] x_3 + u_3 + dx_3 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\, dx_3 \end{array} \right.$$

$$O'A' \left| \begin{array}{l} dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\, dx_1 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\, dx_1 \\[2ex] \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\, dx_1 \end{array} \right. \qquad O'B' \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\, dx_3 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\, dx_3 \\[2ex] dx_3 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\, dx_3 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \left|\overrightarrow{OA}\right| = dx_1 \\ \quad \& \\ \left|\overrightarrow{OB}\right| = dx_3 \end{array} \right.$$

كرنش برشي محور يك نسبت به محور سه

$$e_{13} = \lim \frac{\overrightarrow{o'A'} \cdot \overrightarrow{o'B'}}{2\,|\overrightarrow{oA}| \cdot |\overrightarrow{oB}|} \Rightarrow$$

$$e_{13} = \frac{\cancel{dx_1}\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\cancel{dx_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\cancel{dx_1}\cancel{dx_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\left(1+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\cancel{dx_1}\cancel{dx_3}}{2\,\cancel{dx_1}\cancel{dx_3}}$$

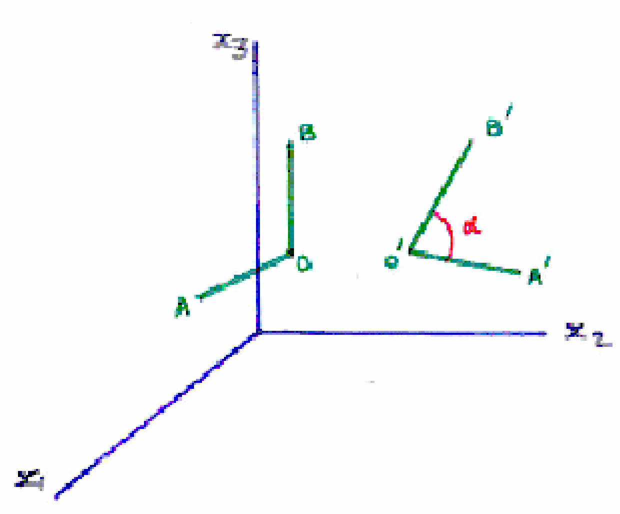
$$e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right]$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]$$

و در حالت كلي :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \frac{1}{2}\,u_{k,i}\,u_{k,j} \Rightarrow \varepsilon_{ii} = u_{i,i} + \frac{1}{2}\,u^2_{k,i}$$



در مورد کرنش مهندسي داريم:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'}}{\left|\overrightarrow{O'A'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{O'B'}\right|}$$

$$e\,x_1/x_3 = e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

$$e\,x_1/x_2 = e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$e\,x_2/x_3 = e_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$[\varepsilon'_{ij}] = [T]^t [\varepsilon_{ij}][T] \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad \& \quad e_{ij} = e_{ji}$$

[T] تانسور تبدیل دستگاه مختصات باشد، خواهیم داشت:

$$[e'_{ij}] = [T]^t [e_{ij}][T]$$

چون كليه عناصري كه خواص فوق را دارند، تانسور ناميده مي شوند، لذا ماتريس آنها هر يك تانسور بوده و از خواص تانسور بهره مي برد.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right]$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]$$

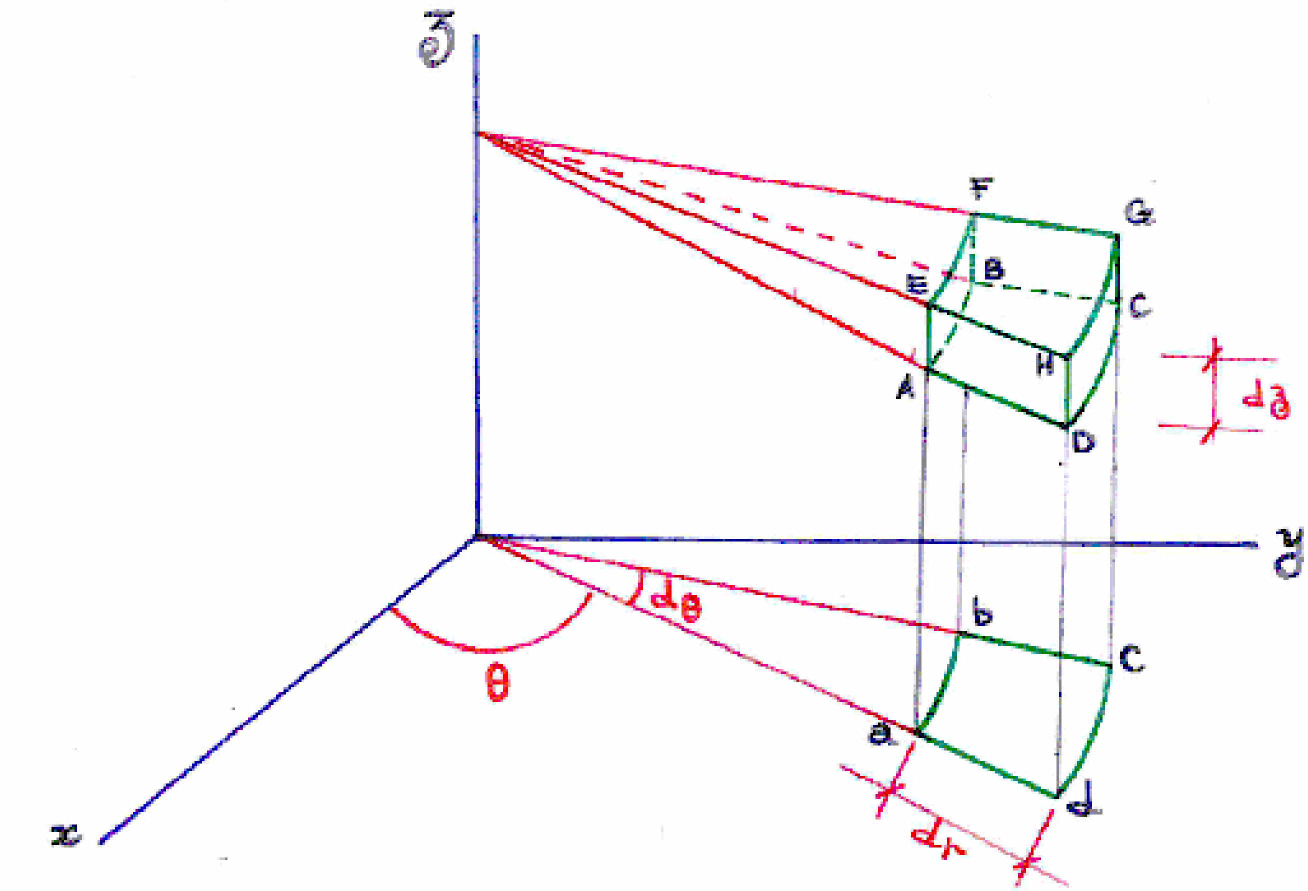
$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \frac{1}{2} u_{k,i}\, u_{k,j}$$

که قسمت اول آن مربوط به کرنش مهندسي است، يعني

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \quad \&$$

$$\gamma_{ij} = 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \qquad i \neq j$$

روابط بین کرنشها و تغییر مکانها در مختصات استوانه ای



الف) كرنش محوري در امتداد z ها:

$$|\overrightarrow{AE}| = dz$$

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{EE'} = \vec{u} + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \begin{vmatrix} u_r + \dfrac{\partial u_r}{\partial z} dz \\ u_\theta + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} dz \\ u_z + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} dz \end{vmatrix}$$

$$|\overrightarrow{A'E'}| = \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} dz \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} dz \right)^2 + \left(dz + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \right)^2 \right] \approx dz + \frac{\partial u_z}{dz} dz$$

$$e_{zz} = \frac{|\overrightarrow{A'E'}| - |\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{\dfrac{\partial u_z}{\partial z} dz}{dz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

ب) كرنش محوري در امتداد محور r ها :

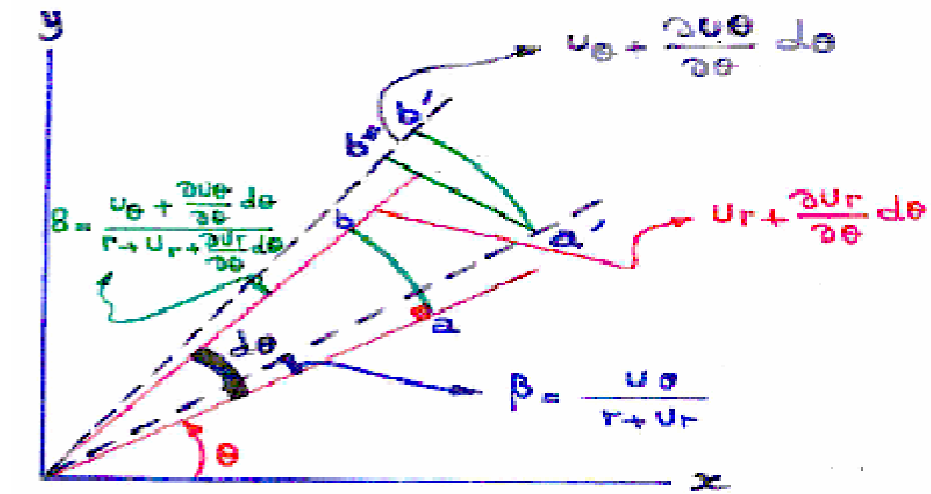
$$|\vec{AD}| = dr \qquad \& \qquad |\vec{A'D'}| = dr + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

ج) كرنش محوري در امتداد محور θ ها:

$a'b'$ به موازات ab مي باشد يعني $a'b' \approx a'b''$

Ab=rdθ



$$e_{\theta\theta} = \frac{|\vec{a'b'}| - |\vec{ab}|}{|\vec{ab}|}$$

$$a'b'' = (d\theta - \beta + \delta)(r + u_r) \Rightarrow a'b'' = \left(d\theta - \frac{u_\theta}{r + u_r} + \frac{u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta}{r + u_r}\right)(r + u_r)$$

$$a'b'' = (r+U_r)\,d\theta - U_\theta + U_\theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\,d\theta$$

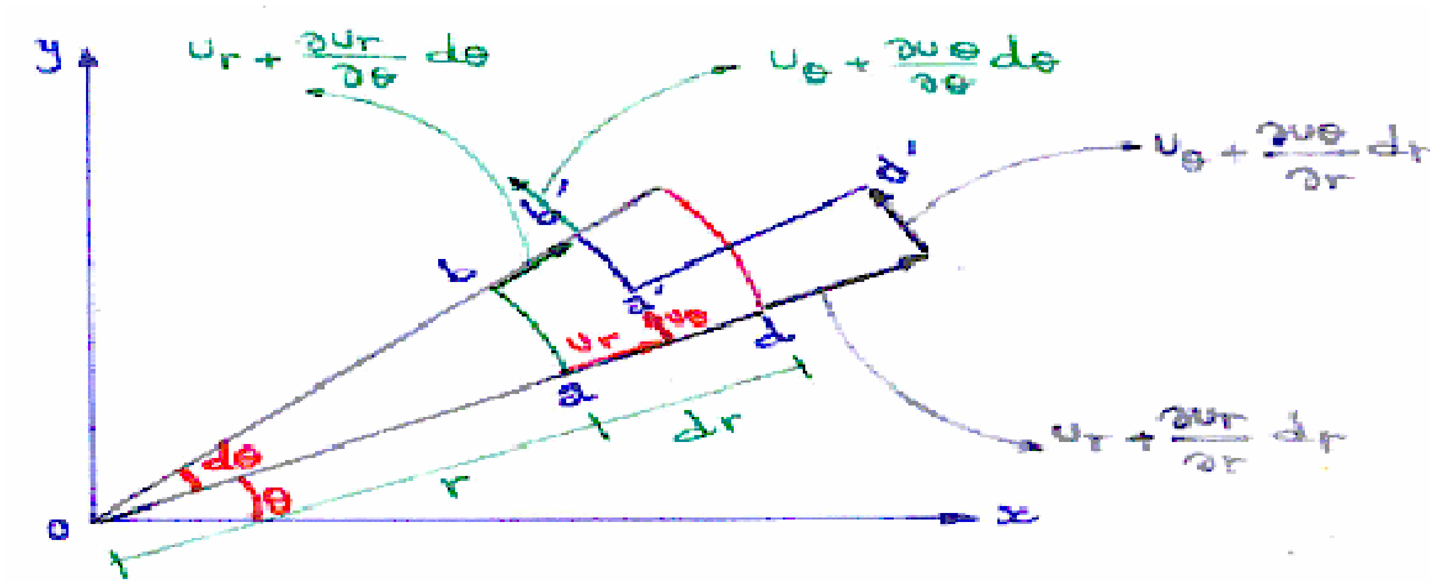
$$a'b'' = (r+U_r)\,d\theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\,d\theta$$

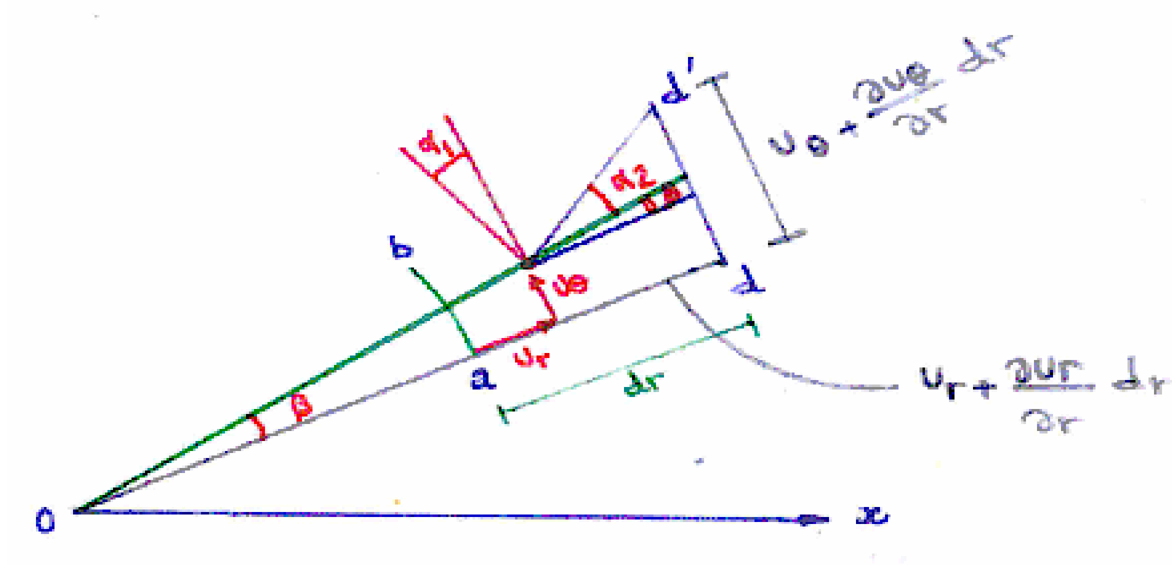
$$a'b' \simeq a'b'' = \left(r + U_r + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right) d\theta$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{\left(r + U_r + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right) d\theta - r\,d\theta}{r\,d\theta} \Rightarrow$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}$$

د) کرنش برشي موازي صفحه $r\theta$:





$$\alpha_1 = \frac{\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\, d\theta}{r\, d\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

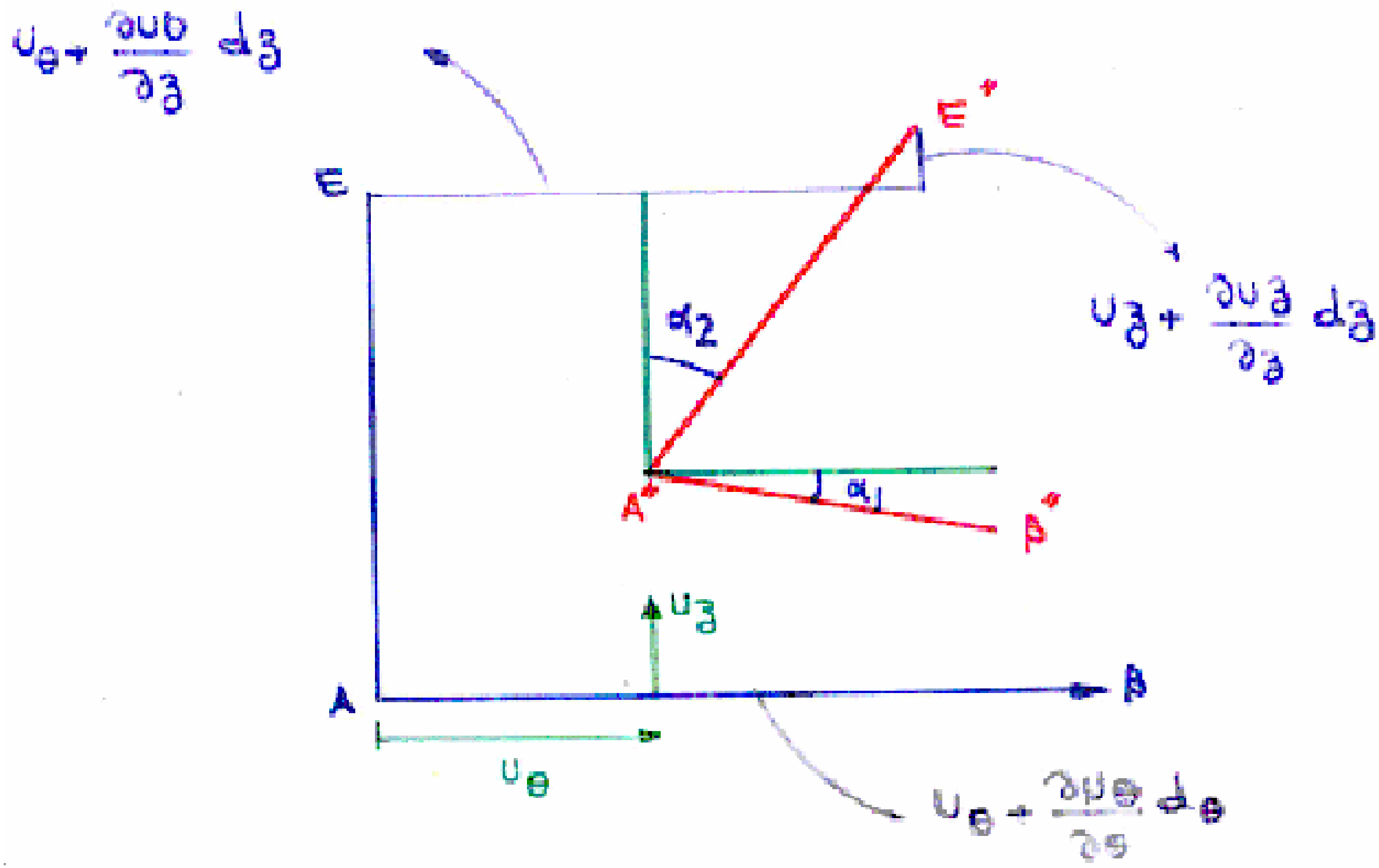
$$\alpha_2 + \beta = \frac{\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\, dr}{dr} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \qquad \& \qquad \beta = \frac{u_\theta}{r + u_r} \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r + u_r} \qquad e_{r\theta} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \Rightarrow$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r + dr}\right] \qquad \& \qquad r \gg dr \Rightarrow$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right]$$

هـ) کرنش برشي موازي صفحهzθها:



مبحث تانسور کرنش

تانسور کرنش نیز مانند تانسور کرنش به دو تانسور تجزیه مي شود:

۱)تانسور ازدياد حجم

۲) تانسور برش

کرنش حجمی

$$e_v = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

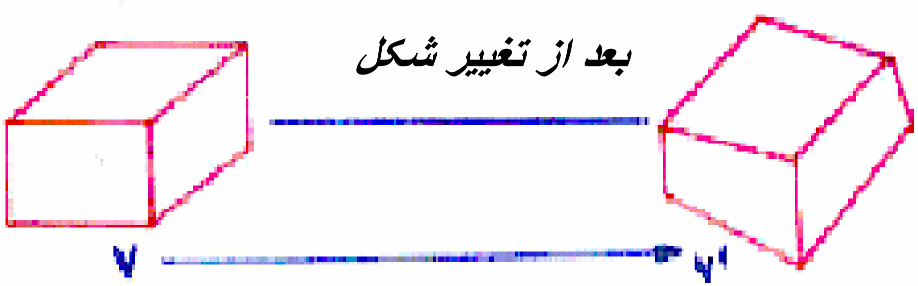
:خواهیم داشت

$$[e_{ij}] = \underbrace{e_v[I]}_{\text{تانسور ازدیاد حجم}} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_{11}-e_v & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22}-e_v & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33}-e_v \end{bmatrix}}_{\text{تانسور برش}}$$

اولین تغییر ناپذیر تانسور کرنش

$$e_v = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$



$$e_v = \frac{V - V'}{V}$$

در مختصات كروي روابط زير حاصل مي شوند:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\phi}{r}\,\mathrm{Cotg}\,\phi$$

$$e_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\,\mathrm{Sin}\,\phi}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\,\mathrm{Cotg}\,\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}\right)$$

$$e_{\phi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r}\right)$$

$$e_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{Sin}\,\phi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)$$

روابط سازگاري كرنشها

$$e_{11} = u_{1,1}$$

$$e_{22} = u_{2,2}$$

$$e_{33} = u_{3,3}$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left[u_{1,2} + u_{2,1}\right]$$

$$e_{13} = \frac{1}{2}\left[u_{1,3} + u_{3,1}\right]$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}\left[u_{2,3} + u_{3,2}\right]$$

$$e_{11,2,2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[u_{1,1}\right]$$

$$e_{22,1,1} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[u_{2,2}\right]$$

$$e_{11,2,2} + e_{22,1,1} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot 2e_{12}$$

1 $$\boxed{\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}}$$

2 $$\boxed{\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} = 2\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}}$$

3 $$\boxed{\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} = 2\frac{\partial^2 e_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}}$$

همینطور اگر از e_{23} دوبار نسبت به x_1 مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right] \quad a$$

$$\frac{\partial^2 e_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right] \quad b$$

$$\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3}\right] \quad c$$

با جمع ۳ رابطه c, b, a و حذف عوامل مثبت و منفي يكسان از طرف راست، داريم:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right]=\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right]=\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}e_{11}} \tag{4}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right]\quad\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1 \partial x_3}} \tag{5}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^3}\left[\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2}-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right]=\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}} \tag{6}$$

روابط سازگاري بين كرنشها فقط در محيطهاي پيوسته برقرارند، در صورتكيه محيط غير پيوسته باشد،به معناي ايجاد ترك است، كه نتيجتاً روابط توابع پيوسته براي آنها صادق نخواهد بود، لذا مي توانيم بگوئيم كه اگر رابطه سازگاري برقرار باشد محيط پيوسته است.

- مولفه هاي بردار تغيير مكان در يك جسم پيوسته به شرح زير داده شده اند:

$$U_x = (x^2 + 10)\times 10^{-2}$$

$$U_y = (2yz)\times 10^{-2} \quad \& \quad U_z = (z^2 - xy)\times 10^{-2}$$

-مطلوبست محاسبه تانسور كرنش در نقطه أي به مختصات **(0,2,1)**

- كرنشهاي اصلي و صفحات اصلي را در اين نقطه بدست آوريد

• آیا توزیع کرنش زیر امکانپذیر است:

$$e_{11} = c(x_1^2 + x_2^2)$$

$$e_{22} = cx_2^2$$

$$e_{13} = e_{23} = e_{33} = 0$$

$$e_{12} = 2cx_1x_2$$

معادلات سازگاري در مختصات استوانه اي

$$① \quad \frac{\partial^2 e_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial e_{rr}}{\partial r} = 2\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 e_{r\theta}}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial e_{r\theta}}{\partial\theta}\right)$$

$$② \quad \frac{\partial^2 e_{\theta\theta}}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial e_{zz}}{\partial r} = 2\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 e_{\theta z}}{\partial z\,\partial\theta} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial e_{zr}}{\partial z}\right)$$

$$③ \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial z^2} = 2\,\frac{\partial^2 e_{rz}}{\partial r\,\partial z}$$

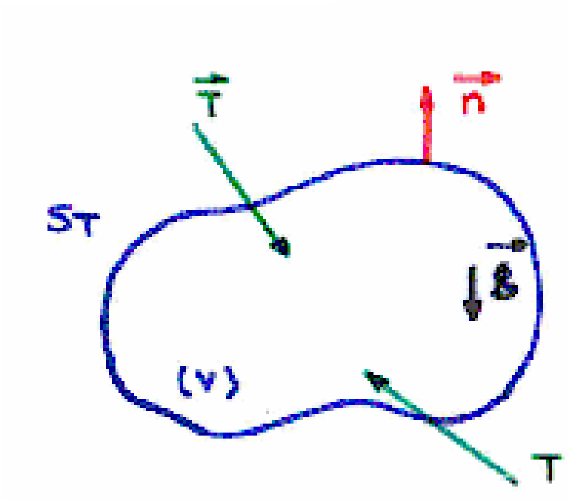
$$④ \quad \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial e_{zz}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial e_{zr}}{\partial\theta} + \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r} - \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z} - \frac{e_{\theta z}}{r}\right)$$

$$⑤ \quad \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial\theta\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial e_{zr}}{\partial\theta} - \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z} - \frac{e_{\theta z}}{r}\right) + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z}$$

$$⑥ \quad \frac{\partial^2 e_{\theta\theta}}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial e_{rr}}{\partial z} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial z} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial e_{zr}}{\partial\theta} + \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z} + \frac{e_{\theta z}}{r}\right)$$

روابط بين تنشها و كرنشها

به كمك اين مطلب كه كاري كه نيروهاي خارجي انجام مي دهند مساوي انرژي ذخيره شده در جسم است، اثبات مي كنيم كه رابطه أي بين كرنش و تنش وجود دارد



$(x, y, z) \in S_T \; : \vec{T}\,(x, y, z)$

$(x, y, z) \in V \; : \vec{g}\,(x, y, z)$

فرض مي كنيم هيچ انرژي تلف شده اي نداشته باشيم

همانطور كه مي دانيم، كار نيروهاي خارجي به صورت انرژي داخلي در جسم ذخيره مي گردد

اگر **U** : چگالي انرژي داخلي و يا انرژي داخلي واحد حجم جسم باشد، مي توانيم بگوئيم:

قضيه كار مجازي

$$\int_V U\,dV$$ = كل انرژي داخلي ساختمان

بردار تغيير مكان:

$$d\vec{U} = \begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{Bmatrix}$$

كاري كه نيروهاي سطحي T انجام مي دهند عبارتند از :

$$dW_T = \int_{S_T} \vec{T} \cdot d\vec{U} \cdot dS$$

كار نيروهاي حجمي همه عبارتست از :

$$dW_V = \int_V \vec{g} \cdot d\vec{U} \cdot dV$$

$$d\left(\int_V U\,dV\right) = \int_V dU \cdot dV = dW_T + dW_V$$

$$dW_T = \int_{ST} \left(T_1 du_1 + T_2 du_2 + T_3 du_3 \right) ds$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i$$

$$dW_T = \int_{ST} \left(\sigma_{1j} n_j du_1 + \sigma_{2j} n_j du_2 + \sigma_{3j} n_j du_3 \right) ds$$

كار انجام شده توسط نيروهاي حجمي:

$$dW_V = \int_V \left(g_1 du_1 + g_2 du_2 + g_3 du_3 \right) dV$$

اتحاد گرين در رياضي

در يك جسم به حجم **V** و سطح **S** كه برداريكه نرمال آن $\vec{n}\,(n_x, n_y, n_z)$

باشد، داريم:

$$① \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x}\psi_1\,dv = \int_S \phi\,\psi_1\,n_x\,ds - \int_V \phi\,\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\,dv$$

$$② \int_V \frac{\partial \phi}{\partial y}\psi_2\,dv = \int_S \phi\,\psi_2\,n_y\,ds - \int_V \phi\,\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\,dv$$

$$③ \int_V \frac{\partial \phi}{\partial z}\psi_3\,dv = \int_S \phi\,\psi_3\,n_z\,ds - \int_V \phi\,\frac{\partial \psi_3}{dz}\,dv$$

)

$$\int_V \phi_{,i}\,\psi_i\,dv = \int_S \phi\,\psi_i\,n_i\,ds - \int_V \phi\,\psi_{i,i}\,dv \qquad i=1\rightarrow 3$$

و ϕ و φ توابعي از اجزاء اين جسم هستند

dw_T ، مشابه اتحاد گرین است اگر فرض کنیم که :

$$\emptyset = 1 \quad \& \quad \psi_1 = \sigma_{1j}\, du_j \quad \& \quad \psi_2 = \sigma_{2j}\, du_j \quad \& \quad \psi_3 = \sigma_{3j}\, du_j$$

لذا خواهیم داشت

$$dw_T = \int_s \left(n_1 \underbrace{\left[\sigma_{11}\, du_1 + \sigma_{12}\, du_2 + \sigma_{13}\, du_3\right]}_{\psi_1} + n_2 \underbrace{\left[\sigma_{2i}\, du_i\right]}_{\psi_2} + n_3 \underbrace{\left[\sigma_{3i}\, du_i\right]}_{\psi_3} \right) ds$$

$$\int_s \emptyset\, \psi_i\, n_i\, ds = \int_v \emptyset\, \psi_{i,i}\, dv \quad \Rightarrow$$

$$\int_v \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sigma_{11}\, du_1 + \sigma_{12}\, du_2 + \sigma_{13}\, du_3\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sigma_{21}\, du_1 + \sigma_{22}\, du_2 + \sigma_{23}\, du_3\right] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\sigma_{31}\, du_1 + \sigma_{32}\, du_2 + \sigma_{33}\, du_3\right] \right)$$

$$dw_T = \int_V \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \right] du_1 + \left[\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \right] du_2 + \left[\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right] du_3 \right.$$

$$\left. + \sigma_{11} \frac{\partial du_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left[\frac{\partial du_2}{\partial x_1} + \frac{\partial du_1}{\partial x_2} \right] + \sigma_{13} \left[\frac{\partial du_3}{\partial x_1} + \frac{\partial du_1}{\partial x_3} \right] + \sigma_{22} \frac{\partial du_2}{\partial x_2} + \sigma_{23} \left[\frac{\partial du_3}{\partial x_2} + \frac{\partial du_2}{\partial x_3} \right] + \sigma_{33} \frac{\partial du_3}{\partial x_3} \right\} dv$$

از طرفي چون :

$$\frac{\partial du_1}{\partial x_1} = d\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = de_{11}$$

$$\frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i} = d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 2de_{ij}$$

بنابراين داريم:

$$dw_T = \int_V \left\{ (\sigma_{ij,j}) du_i + \sigma_{11} de_{11} + 2\sigma_{12} de_{12} + 2\sigma_{13} de_{13} + \sigma_{22} de_{22} + 2\sigma_{23} de_{23} + \sigma_{33} de_{33} \right\} dv$$

$$dw_T = \int_V \left[(\sigma_{ij,j}) du_i + \sigma_{ij} de_{ij} \right] dv$$

$$dw_V = \int_V \left[g_1 du_1 + g_2 du_2 + g_3 du_3 \right] dv$$

$$\int_V (du)\,dv = dw_T + dw_V = \int_V \left[(\sigma_{ij,j} + g_i)\,du_i + \sigma_{ij}\,de_{ij} \right] dv$$

لذا در حجم V روابط تعادلمان به صورت زیر است،
اگر حجم ساكن باشد:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + g_i = 0 \\ \int_V du\,dv = \int_V \sigma_{ij}\,de_{ij}\,dv \end{cases}$$

ويا

$$du = \sigma_{ij}\,de_{ij}$$

ديفرانسيل كرنش × تنش = مشتق انرژي داخلي

$$du = \frac{\partial u}{\partial e_{11}} de_{11} + \frac{\partial u}{\partial e_{22}} de_{22} + \frac{\partial u}{\partial e_{12}} de_{12} + \cdots$$

$$\frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij}$$

از مقايسه دو رابطه فوق داريم :

و از طرفي **U** تابعي از كرنش مي باشد، لذا داريم :

$$U = C_0 + C_{ij} e_{ij} + C_{ijhk} e_{ij} e_{hk} + C_{ijkhmn} e_{ij} e_{hk} e_{mn} + \cdots$$

و تعداد ضرايب C

C_0 تعداد = ۱

C_{ij} تعداد = ۹

C_{ijhk} تعداد = ۸۱

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = C_{ij} + C_{ijhk} e_{hk} + C_{ijhkmn} e_{hk} e_{mn} + \cdots$$

جسمي كه هيچ نوع كرنشي در آن وجود ندارد، تنش در آن وجود نخواهد داشت $\Leftarrow$ $C_{ij} = 0$

هنگاميكه كرنشها صفر باشند، U هم صفرمي باشد $\Leftarrow$ $C_0 = 0$

به ازاء $e_{ij} = 0$ بايد $\sigma_{ij} = 0$ باشد $\Leftarrow$ $C_{ij} = 0$

جسم ارتجاعی خطی $\sigma_{ij} = C_{ijhk} e_{hk}$

بنابراين 81 ضريب بايد شناخته شود تا رابطه تنشها و كرنشها تعيين گردد

حال، در صورتيكه بخواهيم جسمي ارتجاعي خطي را در حالت اول معادله اش رابدست آوريم، بايد 81 آزمايش انجام دهيم و 81 ضريب از 81 معادله و مجهول آن بدست آوريم اما قابل مشاهده است كه اين 81 ضريب به را حتي به 27 ضريب قابل كاهش مي باشند

بعلت تقارن تانسور تنش $\qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$\forall e_{hk} : \quad C_{ijhk}\, e_{hk} = C_{jihk}\, e_{hk} \Longrightarrow C_{ijhk} = C_{jihk}$$

$$e_{12} = e_{21} \neq 0 \rightarrow \sigma_{ij} = C_{ij12}\, e_{12} + C_{ij21}\, e_{21} = 2\left(C_{ij12} + C_{ij21}\right) e_{12} \Rightarrow \sigma_{ij} = c'_{ij12}\, e_{12} + c'_{ij21}\, e_{21}$$

اگر فرض کنیم : $\quad c'_{ij12} = c'_{ij21} = \frac{1}{2}\left(C_{ij21} + C_{ij12}\right)$

$$\Downarrow$$

$\sigma_{ij} = 2c'_{ij12}\, e_{12}$ یا $= 2c'_{ij21}\, e_{12} \Longrightarrow C_{ijhk} = C_{ijkh}$

از تساوي $e_{klmn} = e_{lkmn}$ ، نتيجه مي شود كه : $3 \times 9 = 27$ ضريب به صورت متقارن پيدا مي شوند و از 81 ضريب مورد نياز 27 ضريب كاسته مي شود. از تساوي $c_{klmn} = c_{k\ln m}$ ، $6 \times 3 = 18$ ضريب داراي قرينه شده و لزومي به مشخص كردن آن نيست، لذا از $81 - 27$ ضريب ، 18 ضريب ديگر نيز كاسته خواهد شد

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} & C_{1121} & C_{1131} & C_{1132} \\
C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} & C_{2221} & C_{2231} & C_{2232} \\
C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} & C_{3321} & C_{3331} & C_{3332} \\
C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} & C_{1221} & C_{1231} & C_{1232} \\
C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} & C_{1321} & C_{1331} & C_{1332} \\
C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} & C_{2321} & C_{2331} & C_{2332} \\
C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2123} & C_{2121} & C_{2131} & C_{2132} \\
C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3123} & C_{3121} & C_{3131} & C_{3132} \\
C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3223} & C_{3221} & C_{3231} & C_{3232}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ e_{32} \end{Bmatrix}
$$

روابط زیر بین تغییر مکانها و کرنشها برقرارند:

$$U = \frac{1}{2} e_{ij} C_{ijkl} e_{kl}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = C_{ijkl} e_{kl}$$

لذا داریم:

$$U = \frac{1}{2} e_{ij} C_{ijkl} e_{kl} \qquad U = \frac{1}{2} e_{kl} C_{klij} e_{ij}$$

$$\frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = C_{ijkl} e_{kl} \qquad \frac{\partial U}{\partial e_{kl}} = C_{klij} e_{ij}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} e_{kl}} = C_{ijkl} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial e_{kl} e_{ij}} = C_{klij}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} e_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial e_{kl} e_{ij}} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{klij}$$

اين رابطه نشان مي دهد كه ضرايب نسبت به قطر قرينه اند، لذا تعداد 15 ضريب ديگر نيز از اين طريق حذف مي شوند و تعداد ضرايب مورد نياز عبارت خواهد بود از :

$$81-27-18-15=21$$ ضريب

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix}$$

این تعداد ضرایب نیز در حالات زیر مجدداً تقلیل خواهند نمود :

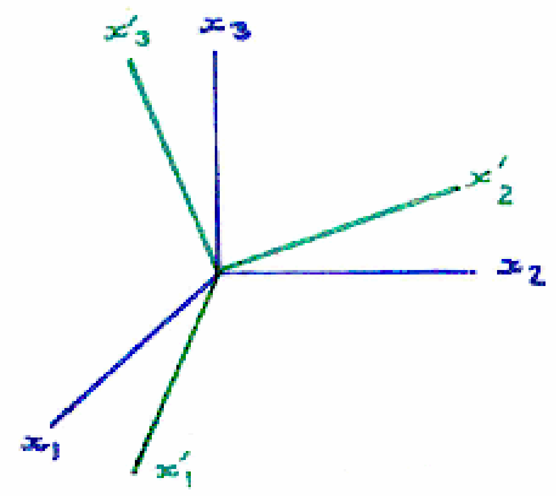
- در مورد اجسام مونوکلینیك (اجسامي كه نسبت به يك صفحه داراي تقارن مي باشند، مانند : خاك ، چوب) تعداد ضرايب به 13 ضريب

- در مورد اجسام ارتوتروپیك كه نسبت به دو سطح عمود بر هم متقارنند، تعداد ضرايب به 9ضريب

- در مورد اجسام ایزوتروپ محوري كه نسبت به يك محور متقارنند، تعداد ضرايب به 5 ضريب

- در مورد اجسام ایزوتروپ كه نسبت به دو محور عمود بر هم تقارن دارند، تقليل به دو ضريب، كه همان ضرايب پوآسون و یانگ هستند

تغییر دستگاه مختصات



$$[\sigma'] = [T]^t [\sigma][T]$$

$$[e'] = [T]^t [e][T]$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, e_{kl}$$

$$\sigma'_{ij} = C'_{ijkl}\, e'_{kl}$$

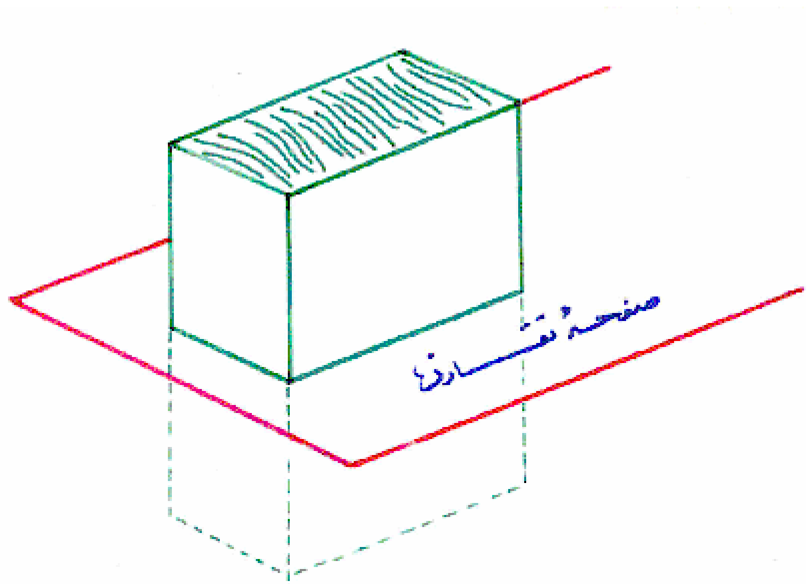
مشاهده مي شود كه در مختصات جديد ضرايب ۲۱گانه همان ضرايب قبلي نخواهند بود، يعني اينكه:

$$\boxed{C'_{prst} = n_{pi}\, n_{rj}\, n_{sk}\, n_{tl}\, C_{ijkl}}$$

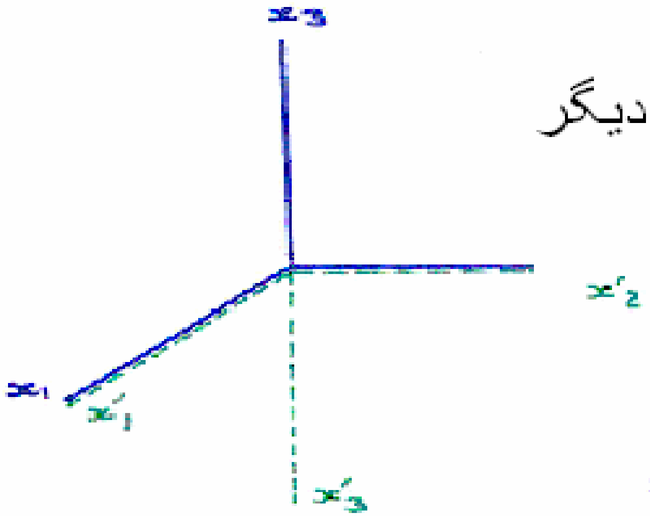
$\overrightarrow{ox'_1}$ بردار یکه $= \begin{Bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{Bmatrix}$ & $\overrightarrow{ox'_2}$ بردار یکه $= \begin{Bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \end{Bmatrix}$ & $\overrightarrow{ox'_3}$ بردار یکه $= \begin{Bmatrix} n_{31} \\ n_{32} \\ n_{33} \end{Bmatrix}$

اجسام مونوكلينيك

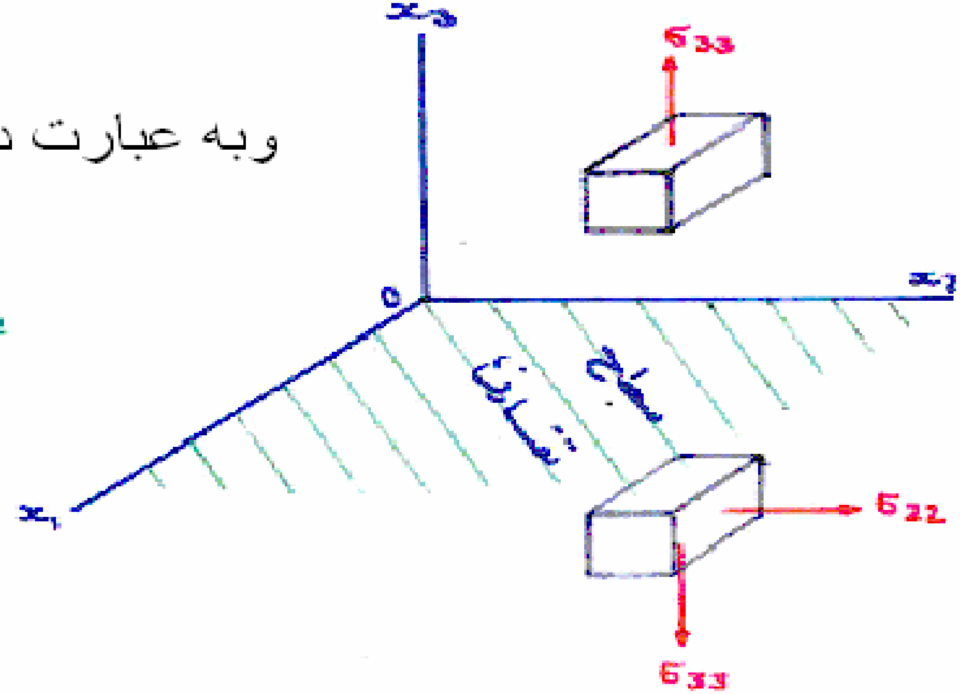
تقارن نسبت به كليه سطوح موازي با سطحي مشخص



به طور مثال اگر يك قطعه چوب را در نظر بگيريم، نسبت به سطوحي كه عمود بر امتداد الياف ها مي باشد، تقارن كامل در چوب وجود دارد



وبه عبارت دیگر



$$[\sigma'] = [T]^t [\sigma][T]$$

x'_1 برداریکه $= \begin{Bmatrix} n_{11} = 1 \\ n_{12} = 0 \\ n_{13} = 0 \end{Bmatrix}$ & x'_2 برداریکه $= \begin{Bmatrix} n_{21} = 0 \\ n_{22} = 1 \\ n_{23} = 0 \end{Bmatrix}$ & x'_3 برداریکه $= \begin{Bmatrix} n_{31} = 0 \\ n_{32} = 0 \\ n_{33} = 1 \end{Bmatrix}$

$$C'_{1111} = n_{11} n_{11} n_{11} n_{11} C_{1111} + 0 \times C_{ijkl} \Rightarrow C'_{1111} = C_{1111}$$

$$C'_{1123} = n_{11} n_{11} n_{22} n_{33} C_{1123} = -C_{1123} \rightarrow C_{1123} = 0$$

و همینطور : $C'_{1113} = -C_{1113} \Rightarrow C_{1113} = 0$ $\qquad C'_{1122} = C_{1122}$

رابطه بین کرنش و تنش را در اجسام مونوکلینیك درتقارن نسبت به سطوحی که موازی سطح ox_1x_2 باشد

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0 \\ & \text{متقارن} & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313} & C_{1323} \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{Bmatrix}$$

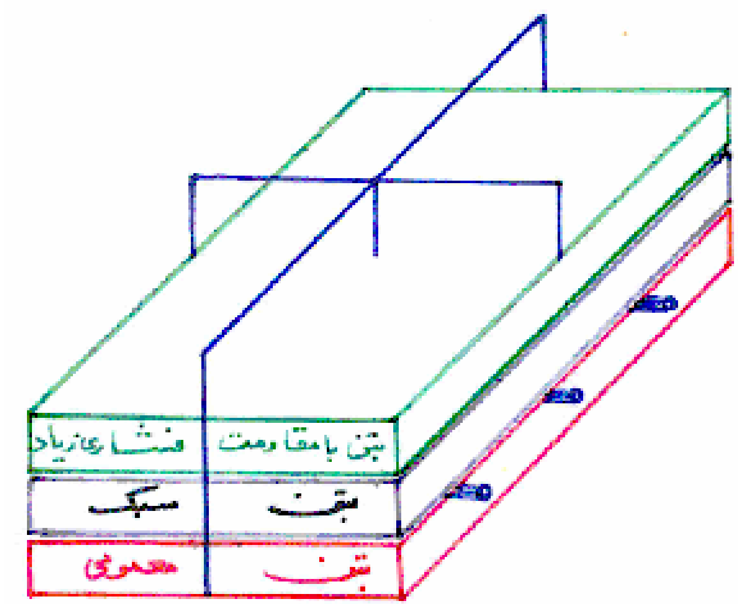
تقارن خواص مكانيكي نسبت به سطوح به موازات سطح ox_2x_3 ،

$$
\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1123} \\
 & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2223} \\
 & & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3323} \\
 & & \text{متقارن} & C_{1212} & C_{1213} & 0 \\
 & & & & C_{1313} & 0 \\
 & & & & & C_{2323}
\end{bmatrix}
$$

فلذا به ۱۳ضريب براي تشريح رابطه كرنش ، تنش در اجسام مونوكلينيك، نياز است

اجسام ارتوتروپ

داراي دو صفحه تقارن عمود بر هم مي باشند



مثلاً يك دال بتني به شكل روبرو كه دال ساندويچي خوانده مي شود، داراي دو سطح تقارن مي باشد

فرضاً اگر جسم ما نسبت به سطوح به موازات ox_1x_2 و سطوح به موازات ox_2x_3 خواص مكانيكي مشابه داشته باشند ماتريس سختي به صورت زير خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{متقارن} & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix}$$

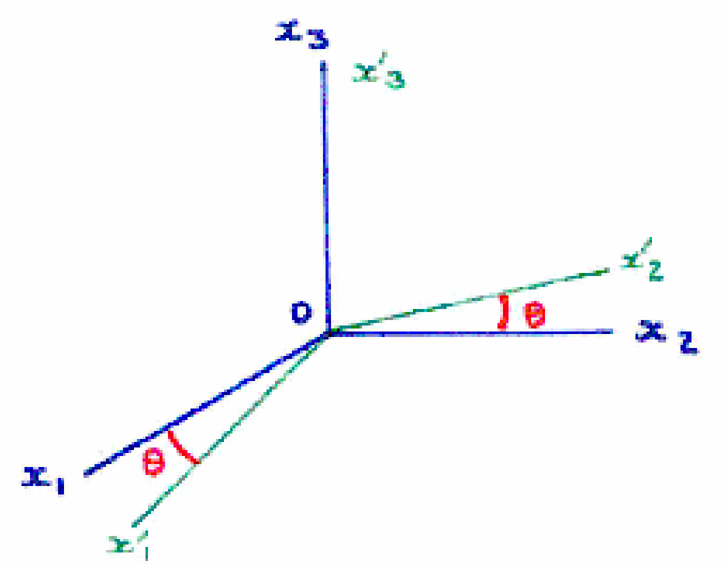
بنابراين ضرايب رابطه بين تنش و كرنش در چنين اجسامي به 9 تا كاهش پيدا مي كند

اجسام ايزوتروپ محوري

خواص مكانيكي اين اجسام نسبت به يك سري محورهاي موازي داراي تقارن محوري (Axisymetric) مي باشد.

به عنوان مثال لايه هاي رسوبي، لاستيك و يا چوب پنبه و يا بتن كه لايه لايه ريخته مي شود، نسبت به هر محور عمود بر لايه ها داراي تقارن مي باشند

محور تقارن ox_3



$$ox'_1 = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad ox'_2 = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad ox'_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$[e'] = [T]^t [e] [T]$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e'_{11} = \cos^2\theta \, e_{11} + 2\cos\theta\sin\theta \, e_{12} + \sin^2\theta \, e_{22}$$

$$e'_{22} = \sin^2\theta \, e_{11} - 2\cos\theta\sin\theta \, e_{12} + \cos^2\theta \, e_{22}$$

$$e'_{33} = e_{33}$$

$$e'_{12} = (e_{22} - e_{11}) \cos\theta \sin\theta + e_{12} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$e'_{13} = \cos\theta \, e_{13} + \sin\theta \, e_{23}$$

$$e'_{23} = -\sin\theta \, e_{13} + \cos\theta \, e_{23}$$

اگر رابطه بین تنش و کرنش عبارت باشد از :

$$\sigma_{kl} = C_{klmn} e_{mn} \qquad \& \qquad \sigma'_{kl} = C_{prst} e'_{st}$$

در مختصات جدید درست مشابه روابط کرنشها را داریم:

$$\sigma'_{11} = \cos^2\theta\, \sigma_{11} + 2\cos\theta \sin\theta\, \sigma_{12} + \sin^2\theta\, \sigma_{22}$$

$$\sigma'_{33} = \sigma_{33}$$

$$\sigma'_{33} = C_{3311} e'_{11} + C_{3322} e'_{22} + C_{3333} e'_{33} + 2\left[C_{3312} e'_{12} + C_{3313} e'_{13} + C_{3323} e'_{23}\right]$$

$$\sigma_{33} = C_{3311} e_{11} + C_{3322} e_{22} + C_{3333} e_{33} + 2\left[C_{3312} e_{12} + C_{3313} e_{13} + C_{3323} e_{23}\right]$$

$$\Rightarrow C_{3311}\left(\cos^2\theta\, e_{11} + 2\cos\theta \sin\theta\, e_{12} + \sin^2\theta\, e_{22}\right) + C_{3322}\left(\sin^2\theta\, e_{11}\right.$$

$$\left. - 2\cos\theta \sin\theta\, e_{12} + \cos^2\theta\, e_{22}\right) + \cdots =$$ طرف دوم

که این رابطه مي بايست به ازاء کليه مقادير θ و همچنين کرنشها صادق باشد.

$$\forall e_{ij} : \quad (C_{3311} - C_{3322})\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\, C_{3312} = 0$$

$$C_{3311} = C_{3322} \quad \& \quad C_{3312} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1313} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix}$$

بنابراین در این حالت پنج ضریب باید تعیین شود

اجسام ايزوتروپ

اينگونه اجسام نسبت به كليه جهات داراي رفتار يكسان مي باشند و به عبارت ديگر نسبت به هر سه محور تقارن دارند.

اگر ماتريس بدست آمده اخير كه مربوط به حالتي بود كه تقارن محوري نسبت به x_3 به داشتيم، علاوه بر آن داراي تقارن محوري نسبت به x_1 باشد، خواهيم داشت:

$$C_{1313} = \frac{1}{2}\left(C_{1111} - C_{1122}\right)$$

$$C_{3333} = C_{1111}$$

$$C_{1133} = C_{1122}$$

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{bmatrix}$$

بنابراين جسمي كه نسبت به هر سه محور دستگاه محورهاي مختصات رفتار تغيير ناپذير از خود نشان مي دهد، ايزوتروپ ناميده مي شودو ماتريس ضرايب در آن (ماتريس ۸۱ عضوي) به صورت ماتريسی تنها با دو مجهول c_{1111} و c_{1122} تعريف مي گردد

شخصي بنام لامه دو ضريب فوق را بصورت زير نمايش داد:

$$c_{1122} = \lambda \qquad c_{1212} = \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) = \mu$$

$$c_{1111} = 2\mu + \lambda$$

كه از آن پس به نام وي به ضرايب لامه مشهور شدند

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{Bmatrix}
$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix}$$

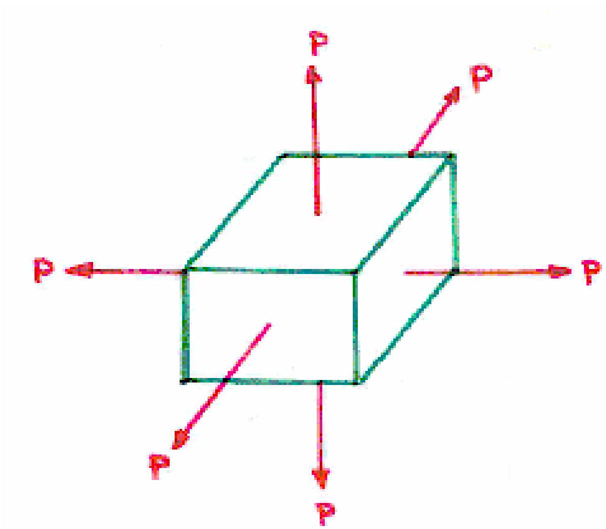
روابط لامه

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{mm}$$

$$e_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{mm} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}$$

اگر آزمايشي را در نظر بگيريم كه كليه وجوه يك مكعب تحت تنش p قرار گرفته است، (تحت اثر فشار هيدروستاتيكي است به عبارت ديگر تانسور انحراف آور تانسور تنش يك تانسور صفر است) خواهيم داشت:

$$\sigma_{mm} = 3p$$



$$\begin{cases} e_{11} = \dfrac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \times 3p + \dfrac{1}{2\mu} p \\ e_{22} = \dfrac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \times 3p + \dfrac{1}{2\mu} p \\ e_{33} = \dfrac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \times 3p + \dfrac{1}{2\mu} p \end{cases}$$

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_v \ (\text{کرنش حجمی}) = \frac{-9\lambda p}{2\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{3p}{2\mu} \rightarrow e_v = p\left[\frac{-9\lambda + 9\lambda + 6\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right] = \frac{3p}{3\lambda+2\mu}$$

$$\boxed{e_v = \frac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}}$$

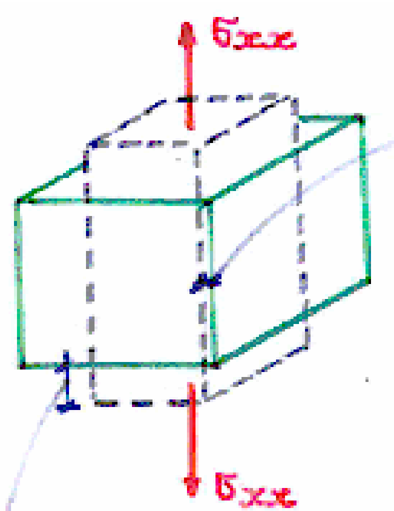
کرنش حجمي متناسب با فشارهيدروستاتيکي مي باشد، اگر $e_v = \frac{1}{K} p$ فرض نمائيم

$$\boxed{K = \lambda + \frac{2}{3}\mu}$$

K را ضريب تغيير شکل حجمي

رابطه بين ضرايب لامه و هوك

در این جهت e_{zz} و e_{yy} کم می‌شوند



در این جهت e_{xx} زیاد می‌شود

ضرايب هوک

$E = \frac{\sigma_{xx}}{e_{xx}}$ (ضریب یانگ)

$\nu = -\frac{e_{yy}}{e_{xx}}$ (ضریب پواسون)

اگر فرض کنیم جسم تنها تحت اثر تنش σ_{xx} قرار گرفته است، روابط ذیل را خواهیم داشت:

$$e_{xx} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(\sigma_{xx}) + \frac{1}{2\mu}\sigma_{xx} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{xx}$$

$$E = \frac{\mu(3\mu+2\lambda)}{\lambda+\mu}$$

$$e_{yy} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{xx}$$

$$\upsilon = -\frac{e_{yy}}{e_{xx}} = -\frac{\frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{xx}}{\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{xx}} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad \& \quad \boxed{\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \dfrac{E}{1+\nu} e_{ij} + \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} e_{mm} \\[2ex] e_{ij} = \dfrac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{mm}\right] \end{cases}$$

روابط تنش و کرنش
بر حسب ضرایب هوک

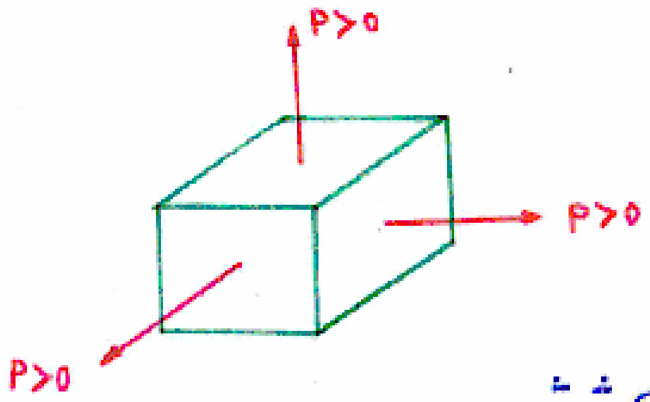
$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)e_{11} + \nu e_{22} + \nu e_{33}\right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu e_{11} + (1-\nu)e_{22} + \nu e_{33}\right]$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} e_{12} = \left[\frac{E}{2(1+\nu)}\right] e_{12} = \mu e_{12}$$

	$\lambda,\ \mu = G$	$E,\ \nu$	$K,\ \mu = G$
λ	λ	$\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\dfrac{3K-2\mu}{3}$
$\mu = G$	$\mu = G$	$\dfrac{E}{2(1+\nu)}$	$\mu = G$
K	$\dfrac{3\lambda+2\mu}{3}$	$\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$	K
E	$\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	$\dfrac{9K\mu}{3K+\mu}$
ν	$\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	$\dfrac{3K-2\mu}{9K+2\mu}$

تعیین حدود kو ν



اگر p>0باشد:

$$\sigma_{mm} = 3K e_{mm}$$

$$3P = 3K e_{mm}$$

کششی $P > 0 \Rightarrow e_{mm} = e_v > 0 \Rightarrow K > 0$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad K>0 \ \& \ E>0 \Longrightarrow 1-2\nu > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

اگرقرارباشد تغییرحجم پیدانشود، لازمست ضریب kبی نهایت باشد چراکه

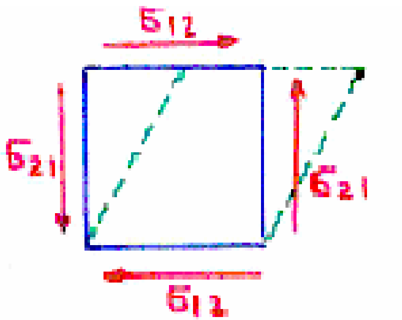
لذااگرمصالح ارتجاعی باشند ولی تراکم ناپذیر، در اینصورت داریم: $e_v = \dfrac{p}{k}$

$$\forall p : e_v = 0 \Rightarrow k = \infty$$

لذامعمولاً k مقادیری بین 0 و ∞ را دارا میباشد وقتیکه مصالح تراکم پذیر وارتجاعی باشند: $0 \leq \mathbf{k} \leq \infty$

درمصالح تراکم ناپذیر(مانندمایعات): $1-2\upsilon=0$ $\Leftarrow$ $\upsilon = \dfrac{1}{2}$

درصورتیکه $\sigma_{12}>0$ باشد، آنگاه کرنش برشی e_{12} همه مثبت خواهد بود



$$\sigma_{12} = 2\mu e_{12}$$

$$\sigma_{12} > 0 \longrightarrow e_{12} > 0$$

چون e_{12} و σ_{12} هم علامتند، بالنتیجه $\mu>0$ شده ولذا ضریب برشی همیشه مثبت است

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \xrightarrow{\text{E و μ هردو مثبت}} 1+\nu>0 \longrightarrow \nu>-1$$

پس در حالت کلی ضریب پواسون دارای محدودیت زیر می باشد:

$$-1 \leq \upsilon \leq \frac{1}{2}$$

وچون تا کنون در طبیعت مصالحی پیدا نشده اند که ضریب پواسون منفی داشته باشند،

فلذا حدود υ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$0 \leq \upsilon \leq \frac{1}{2}$$

تذکر: برای نوشتن روابط بین تنش و کرنش درمختصات استوانه ای یا مختصات کروی
کافیست اندیسهای x،y،z را با x،θ،z یا ρ،θ،ϕ جانشین کنیم

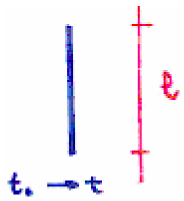
مصالح ارتجاعی خطی ایزوتروپ

از این پس مباحثی که مطرح می گردند، درمورد این اجسام می باشد

روابط ترموالاستیک بین تنش و کرنش

فرض نمایید میله ای به طول l از دمای T0 به T1 برسد

ازدیاد طول میله بر اثر حرارت عبارت خواهد بوداز

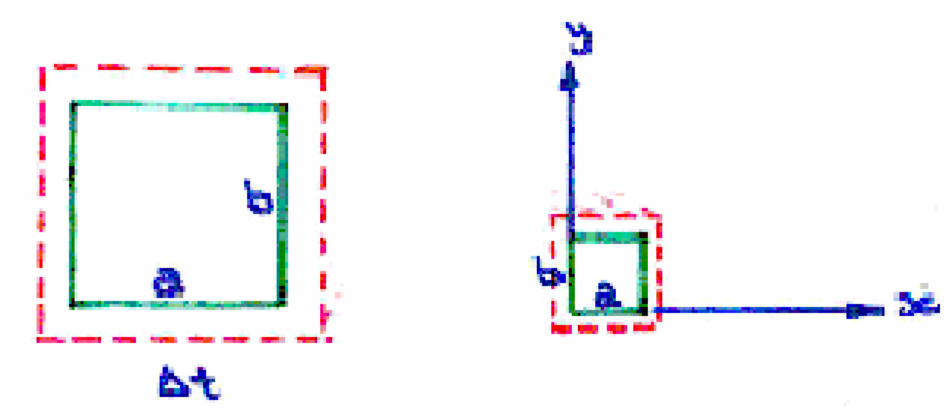


ازدیاد طول میله $\Delta\ell = \alpha\ell(\Delta t)$

کرنش حرارتی میله $\dfrac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha(\Delta t)$

α، ضریب انبساط حرارتی جسم است

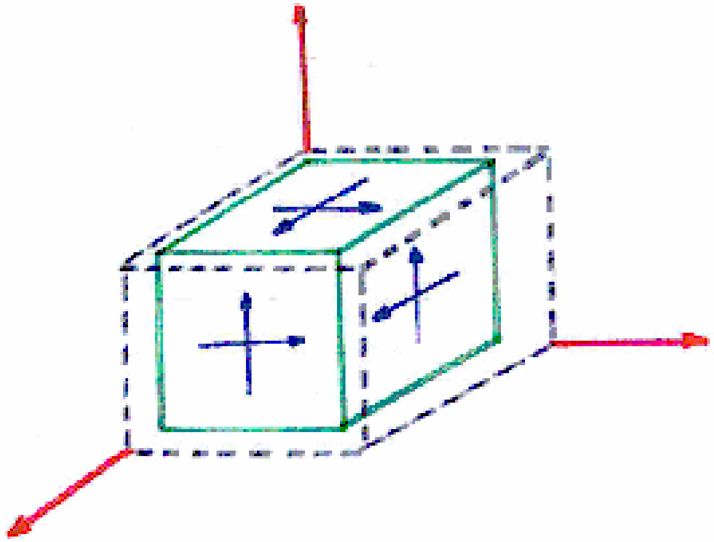
حال اگر جسم دوبعدی مانند صفحه ای به ابعاد bوa داشته باشیم، کرنش ایجاد شده در صفحه در هر دو جهت یکسان باشد، به عبارت دیگر پس از تغییر شکل زوایای داخلی صفحه ثابت باقی بمانند،(کرنش برشی در صفحه ایجاد نشود)، خواهیم داشت:



$$e_{xx}^{\Delta t} = \alpha(\Delta t)$$

$$e_{yy}^{\Delta t} = \alpha(\Delta t)$$

در موردمکعبی که تحت تأثیر کرنش حرارتی قرار گرفته باشد، خواهیم داشت:



$$e_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}\right) + \alpha\Delta t$$

$$e_{22} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}\right) + \alpha\Delta t$$

$$e_{33} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right) + \alpha\Delta t$$

$$e_{12} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{12}$$

$$e_{13} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{13}$$

$$e_{23} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{23}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{mm}\right] + \alpha\delta_{ij}\Delta t$$

رابطه معکوس به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)e_{11} + \nu e_{22} + \nu e_{33}\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha.\Delta t$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)e_{22} + \nu e_{33} + \nu e_{11}\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha.\Delta t$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)e_{33} + \nu e_{11} + \nu e_{22}\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha.\Delta t$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}e_{12}$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1+\nu}e_{13}$$

$$\sigma_{23} = \frac{E}{1+\nu}e_{23}$$

یا به صورت کلی : (رابطه Duhamel-Nuemann)

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}e_{nn} - (3\lambda + 2\mu)\delta_{ij}.\alpha.\Delta t$$

این روابط جهت مختصات کروی واستوانه ای نیز با جایگذاری علامت متناسب بجای i و j صادق خواهد بود

چگالی انرژی

چگالی انرژی یاانرژی واحد حجم جسم ارتجاعی عبارتست از: $U = C_0 + C_{mn} e_{mn} + \frac{1}{2} C_{pqrs} e_{pq} e_{rs} + \cdots$

درمورداجسام ارتجاعی خطی دیدیم که بقیه جملات صفر خواهند بود ودرصورتیکه درمورداجسام ارتجاعی خطی، ضریب **c0** صفرمیباشدوبرای اینکه رابطه کرنش و تنش هم خطی باشد

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = C_{ij} + C_{ijrs} e_{rs}$$

فرض نماییم که جسم تحت تأثیرهیچ تنشی نباشد،($\sigma_{ij}=0$باشد) $c_{ij}=0$ خواهد بود لذاخواهیم داشت

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} e_{rs} \xrightarrow{\text{اگر رابطه را عکس نماییم}} e_{ij} = S_{ijpq} \sigma_{pq}$$

چگالی انرژی در جسم ارتجاعی خطی مساویست با نصف حاصلضرب کلیه تنشها در کرنشهای آن تنشها

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij}}$$

$$U = \frac{1}{2} S_{ijpq} \sigma_{pq} \sigma_{ij}$$

رابطه کاستیگلیانو

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ijpq} \sigma_{pq} = e_{ij}}$$

این رابطه به رابطه کاستیگلیانو معروف بوده و می گوید که مشتق هر چگالی انرژی نسبت به تنش، مساوی کرنش ناشی از همان تنش می باشد

$$e_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{nn}\right]$$

$$U = \frac{1}{2} e_{ij}\sigma_{ij} = \frac{1}{2E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\,\overbrace{\delta_{ij}\sigma_{ij}}^{\sigma_{nn}}\,\sigma_{nn}\right]$$

$$U = \frac{1}{2E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu(\sigma_{nn})^2\right]$$

$$U = \frac{1}{2E}\left[(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2) - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}) + 2(1+\nu)(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)\right]$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{nn}\right) + \frac{1}{9K}\delta_{ij}\sigma_{nn}$$

$$U = \frac{1}{2} e_{ij}\sigma_{ij} = \frac{1}{4\mu}\left[\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{nn})^2\right] + \frac{1}{18K}(\sigma_{nn})^2$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}e_{nn}$$

چگالی انرژی بر حسب
کرنشها و ضرایب لامه

$$U = \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} \lambda (e_{nn})^2 = \frac{1}{2} \lambda (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 +$$

$$\mu (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2\mu (e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{13}^2)$$

وچون $k>0$ است و $k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$ لذا $3\lambda + 2\mu > 0$ وچون

$$k > 0 \quad \& \quad 3\lambda + 2\mu > 0$$

برقرار است، مشاهده می شود که جمله فوق یعنی U
همیشه مثبت است وتنها درصورتی صفراست که داشته باشیم:

$$U = 0 \longleftrightarrow e_{ij} = 0 \longleftrightarrow \sigma_{ij} = 0$$

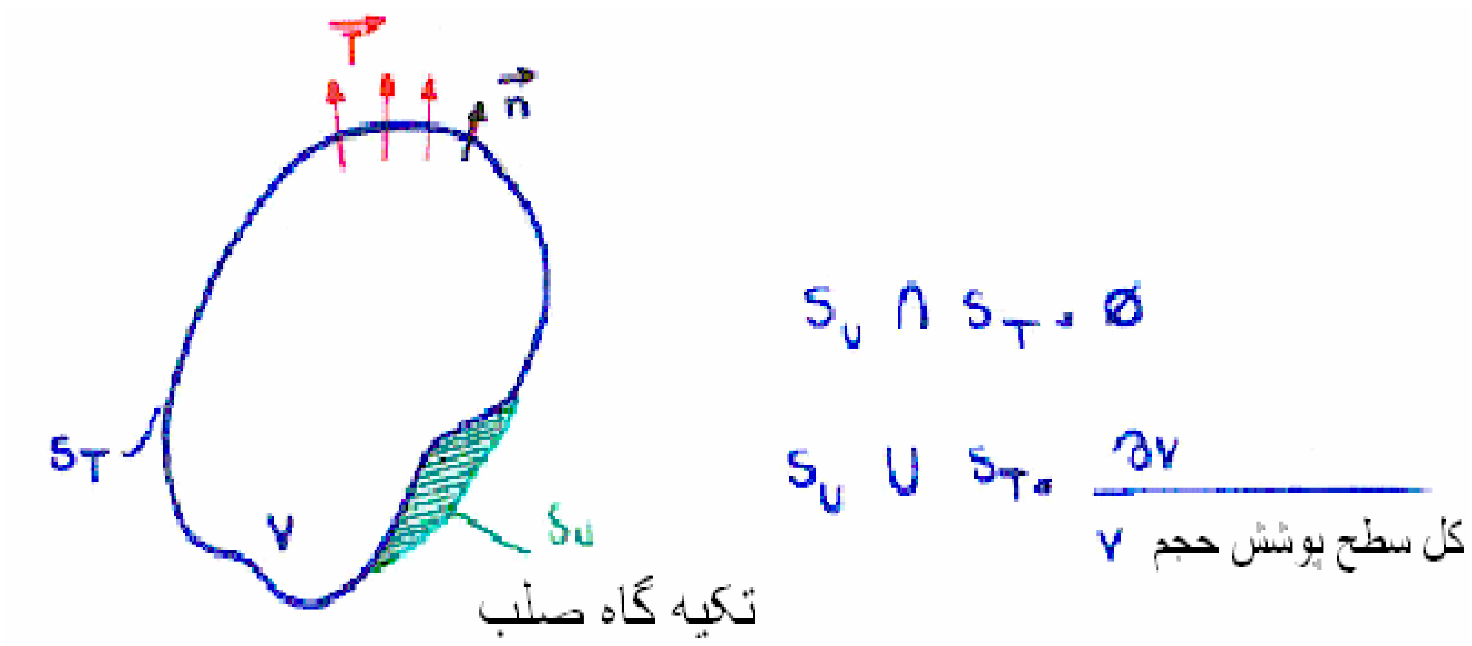
ودرحالت کلی:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} e_{ij} \sigma_{ij} = \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} \lambda (e_{nn})^2 - (3\lambda + 2\mu) \alpha . \Delta t . e_{nn}}$$

مسائل تئوری ارتجاعی

مسائل تئوری ارتجاعی

جهت تعیین توزیع تنشهای داخل ساختمان باید ازروابط تنش و کرنش استفاده کنیم، فرض می کنیم ساختمانی داریم که حجم v رااشغال کرده است و نیروهای سطحی T بر آن وارد می شود:



برای کلیه نقاط داخلی این جسم مجهولاتی داریم که عبارتند از:

$$\forall (x, y, z) \in V$$

$\sigma_{ij}(x, y, z)$ ۶ مؤلفه

$e_{ij}(x, y, z)$ ۶ مؤلفه

U_i تغییر مکان ۳مؤلفه

---

۱۵ مجهول برای هر نقطه متعلق به حجم V

تعداد معادلات عبارتند از:

$$1)\ \sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij} e_{nn}$$ ۶ معادله

$$2)\ e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$ ۶ معادله

$$3)\ \sigma_{ij,j} + g_i = 0$$ ۳معادله

بنابراین جمعاً ۱۵ معادله داریم که بااستفاده از این ۱۵ معادله در هر نقطه باید بتوانیم ۱۵ مجهول را بدست آوریم چون معادلات شامل معادلات دیفرانسیل هم میباشند، باید ثابتهای حاصله را (ثابتهای انتگرال گیری) بااستفاده از شرایط حدی روی δ_v بدست آورد

اگر $u_i(x,y,z)$ را مجهول اصلی مسأله فرض نماییم؟، می توانیم e_{ij} وبعد σ_{ij} راازروی آن بدست آوریم

واگر σ_{ij} ها بعنوان مجهول اصلی مسئله فرض شود واز روابط کرنش برحسب تنش e_{ij} ها رابدست آوریم وپس از آن u_i ها محاسبه می شوند که این u_i ها باید معادلات سازگاری را اقناع کنند

حال ببینیم که چه جور این 15 معادله حاکم برحسب u_i ها نوشته می‌شوند

$$④\quad \sigma_{ij} = 2\mu\,\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)+\lambda\,\delta_{ij}\left(u_{n,n}\right) \longleftarrow$$ از دو دسته معادله ① , ③

$$e_{nn} = e_{11}+e_{22}+e_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = u_{n,n}$$

$$\boxed{\mu\nabla^2 u_i + (\lambda+\mu)\,u_{k,k,i} + B_i = 0}\qquad \mathrm{I} \longleftarrow$$ از دو دسته معادله ② و ④

رابطهٔ فوق درحقیقت رابطهٔ تعادل است که برحسب مؤلفه‌های تغییرمکان نوشته شده است:

$$u_{k,k} = e_{nn} = e_v$$ کرنش حجمی

$$\mu\nabla^2 u_i + (\lambda+\mu)\,e_{v,i} + B_i = 0$$

معادلات ناویر که در حقیقت همان معادلات تعادل هستند، برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان عبارتند از :

معادلات ناویر

$$
\begin{cases}
\mu \nabla^2 u_1 + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial e_v}{\partial x_1} + g_1 = 0 \\[2ex]
\mu \nabla^2 u_2 + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial e_v}{\partial x_2} + g_2 = 0 \\[2ex]
\mu \nabla^2 u_3 + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial e_v}{\partial x_3} + g_3 = 0
\end{cases}
$$

شرایط مرزی روی S_T : $\sigma_{ij} n_j = T_i$

$$\boxed{T_i = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda e_v n_i}$$

معادلهٔ تعادل نیروهای سطحی برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان

$$e_v = u_{k,k} = \operatorname{div} \vec{u}$$

دیورژانس ، ضرب داخلی بردار نابلا $(\vec{\nabla})$ در بردار $\vec{u}$ میباشد

$$\operatorname{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

درحالت وجود تغییرات دمای رابطهٔ I که پیش از این اشاره شد بصورت زیر در حجم ها نوشته می‌شود

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e_v}{\partial x_i} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta t) + S_i = 0$$

درسطح S_T : $T_i + (3\lambda+2\mu)\alpha\Delta t\, n_i = \mu(u_{i,j}+u_{j,i})n_j + \lambda e_v n_i$

دو رابطه فوق را میتوان با یک رابطه نمایش داد :

$$\boxed{\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{u}) - (3\lambda+2\mu)\alpha\,\mathrm{grad}(\Delta t) + \vec{g} = 0}$$

$\vec{u}$ بردار تغییر مکان

اگر تنشها را مجهولات اصلی مسئله در نظر بگیریم

$\sigma_{ij} \longrightarrow e_{ij} \longrightarrow u_i \longrightarrow$ معادلات سازگاری را اشباع میکند

(1) $$\frac{2\,\partial^2 e_{23}}{\partial x_2\, \partial x_3} = \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2}$$

اگر سه برابر فشار هیدروستاتیکی را با θ نمایش دهیم داریم

(2) $$\theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$ اولین تغییرناپذیر تانسور تنش

(3) $$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} \longleftarrow \left|\begin{array}{l} e_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) \\ e_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}) \\ e_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \end{array}\right.$$

$$① , ③ \Longrightarrow 2\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left[\frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}\right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left[\frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33})\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[\frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})\right]$$

با فرض اینکه E و ν مستقل از x_2 و x_3 باشند یا به عبارت دیگر مصالح همگن (ایزوتروپ) باشند، خواهیم داشت :

$$④ \quad (1+\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_2^2}\right) - \nu\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}\right) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

حال معادلات تعادل را مورد بررسی قرار میدهیم

$$\sigma_{ij,j} + g_i = 0$$

$$⑤ \quad \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = -\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} \quad : (1) \quad i=2 \Rightarrow \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$

$$⑥ \quad \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} = -\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} \quad : (2) \quad i=3 \Rightarrow \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

درصورتیکه از رابطه (5) نسبت به x_2 مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_3 \partial x_2} = -\frac{\partial \sigma_{22}^{2}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}$$

و اگر از رابطه (6) نسبت به x_3 مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2}$$

مجموع دو رابطه فوق، رابطه جدیدی را ارائه میدهد

$$(7) \quad \frac{2\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{21}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

از مقایسه معادله (7) با طرف دوم معادله (4) می‌توان نوشت:

$$(8) \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_1}$$

$$2\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x_2\partial x_3} = -\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \tag{10}$$

$\longleftarrow$ 7, 9

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\theta - \nabla^2\sigma_{11} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}\right) - \nu\left(\nabla^2\theta - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}\right) = (1+\nu)\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\right) \tag{11}$$

$\longleftarrow$ 4, 10

بنابراین معادله سازگاری (1) تبدیل به معادله سازگاری (11) می شود و به همین ترتیب برای سایر معادلات سازگاری خواهیم داشت:

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\theta - \nabla^2\sigma_{22} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}\right) - \nu\left(\nabla^2\theta - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}\right) = (1+\nu)\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\right) \tag{12}$$

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\theta - \nabla^2\sigma_{33} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2}\right) - \nu\left(\nabla^2\theta - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2}\right) = (1+\nu)\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right) \tag{13}$$

$$(11), (12), (13) \Rightarrow \nabla^2\theta = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\right) \tag{14}$$

و اگر رابطهٔ (14) را در رابطهٔ 11 ، 12 و 13 قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$(11),(14) \Rightarrow \nabla^2\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}\right) - 2\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} \quad (15)$$

$$(12),(14) \Rightarrow \nabla^2\sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}\right) - 2\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} \quad (16)$$

$$(13),(14) \Rightarrow \nabla^2\sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}\right) - 2\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3} \quad (17)$$

$$\nabla^2\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_2} = -\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\right] \quad (18)$$

$$\nabla^2\sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2\partial x_3} = -\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\right] \quad (19)$$

$$\nabla^2\sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_3} = -\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\right] \quad (20)$$

روابط (15) الی (20) با یک رابطه نوشته می‌شوند . اینها معادلات سازگاری هستند که برحسب تنشها نوشته شده اند و برای بدست آوردن آنها از روابط بین تنشها و کرنشها استفاده شده است :

$$\boxed{\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\vec{g} - \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right]}$$

و در صورت وجود تغییرات دما ، شش رابطه فوق به صورت زیر نوشته می‌شوند :

رابطه Beltrani — Michell

$$\boxed{\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2(\theta + E\alpha.\Delta t)}{\partial x_i\partial x_j} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\vec{g} - \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right] - \delta_{ij}\frac{\nabla^2(E\alpha.\Delta t)}{1-\nu}}$$

چون تعداد معادلات و مجهولات برای تغییر مکانها ، 3 ، و برای کرنشها ، 6 ، است ، بنابراین روش تغییر مکان بعنوان مجهول ارجح است

با استفاده از روابط بلترامی میشل و معادلات تعادل نشان دهید که توزیع تنشهای زیر در چه شرایطی امکانپذیر است

(1)
$$\begin{cases} \sigma_{11} = a x_1^2 x_2^2 + b x_1 \\ \sigma_{22} = c x_2^2 \\ \sigma_{12} = a x_1 x_2 \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \sigma_{11} = a x_1 + b x_2 \\ \sigma_{22} = c x_1 + d x_2 \\ \sigma_{12} = f x_1 + g x_2 \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} \sigma_{11} = a\left[x_2^2 + b(x_1^2 - x_2^2) \right] \\ \sigma_{22} = a\left[x_1^2 + b(x_2^2 - x_1^2) \right] \\ \sigma_{33} = ab(x_1^2 + x_2^2) \\ \sigma_{12} = 2ab x_1 x_2 \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

حتی المقدور ثابتها را محاسبه نمائید

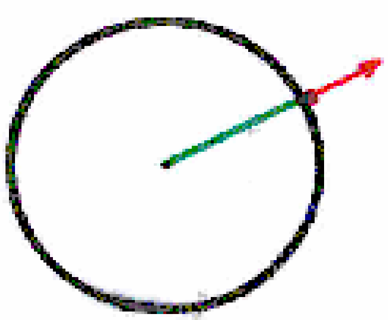
دیسک نازکی به شعاع b حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بثانیه دوران میکند. تنشهای آن عبارتند از:

$$\sigma_{rr} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right) \qquad \sigma_{zj}=0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2\left(1-\frac{1+3\nu r^2}{3+\nu b^2}\right)$$

ρ جرم مخصوص مصالح دیسک است.

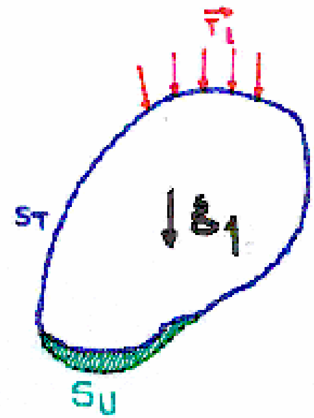
r فاصله نقطه تا مرکز دیسک میباشد و از وزن دیسک صرفنظر میشود. نشان دهید که تنشهای فوق معادلات تعادل سازگاری (بلترامی میشل) و شرایط مرزی مربوط به تنشها را اقناع میکند.



$$\left|\begin{array}{l}\sigma_{rr}=0\\ \sigma_{r\theta}=0\end{array}\right.$$

هیچ باری بر لبه
دیسک عمل نمیکند

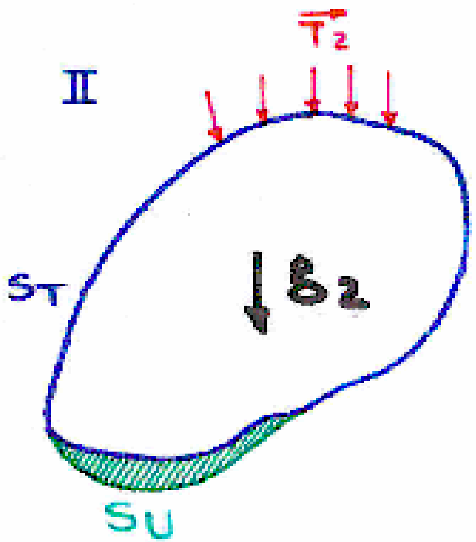
قضـیه اجتماع اثـرها



I

طبق این قضیه اگر ساختمانی از مصالح ارتجاعی خطی تحت اثر مجموعه نیروهای سطحی T_1 روی سطح S_T وسطح تکیه گاهی S_u صلب باشد وتحت تأثیر نیروهای حجمی با شدت δ_1 باشد، وبازاء همین سازه تحت تأثیر نیروهای سطحی T_2 روی تمامی سطح S_T وسطح S_u تکیه گاه صلب واقع شود، ونیروهای حجمی δ_2 باشد، درساختمان مذکور دردوحالت اول ودوم تنشهای زیر حاصل می شود

II



$$(1)\left|\begin{array}{l}\sigma^1_{ij}\\ e^1_{ij}\\ u^1_i\end{array}\right. \qquad (2)\left|\begin{array}{l}\sigma^2_{ij}\\ e^2_{ij}\\ u^2_i.\end{array}\right.$$

مطابق رابطه تعادل و سازگاری باید در حالات اول و دوم روابط زیر برقرار باشد

$$\text{I}\quad\begin{cases}\sigma^1_{ij,j}+g^1_i=0\\ e^1_{ij}=\sigma^1_{ij} \quad \text{تابع خطی} \quad =f(\sigma^1_{ij})\\ e^1_{ij}=\frac{1}{2}(u^1_{i,j}+u^1_{j,i})\end{cases}$$

S_T روی سطح : $\sigma^1_{ij}n_{ij}=T^1_i$

S_u روی سطح : $u^1=0$

$$\text{II}\quad\begin{cases}\sigma^2_{ij,j}+g^2_i=0\\ e^2_{ij}=\sigma^2_{ij} \quad \text{تابع خطی} \quad =f(\sigma^2_{ij})\\ e^2_{ij}=\frac{1}{2}(u^2_{i,j}+u^2_{j,i})\end{cases}$$

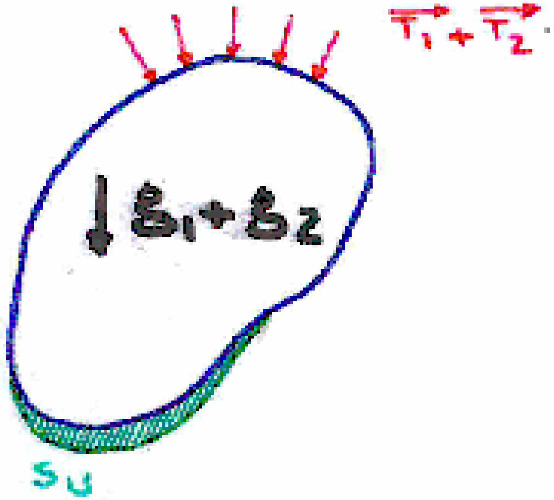
S_T روی سطح : $\sigma^2_{ij}n_{ij}=T^2_i$

S_u روی سطح : $U^2=0$

حال اگر همین جسم روی تکیه گاه صلب S_u تحت اثر نیروهای سطحی $\vec{T_1}+\vec{T_2}$ قرار گیرد

و نیروهای حجمی داخلی نیز $\vec{g_1}+\vec{g_2}$ باشد، در اینصورت $\vec{T_1}+\vec{T_2}$ باعث ایجاد

تنشهای زیر میگردد:



تنش : $\sigma^1_{ij}+\sigma^2_{ij}$

کرنش : $e^1_{ij}+e^2_{ij}$

جابجایی : $u^1_i+u^2_i$

حال روابط تعادل را برای این جسم می نویسیم:

$$(\sigma^1_{ij,j}+\sigma^2_{ij,j})+(g^1_i+g^2_i)=0$$

$$(e^1_{ij}+e^2_{ij})=f(\sigma^1_{ij}+\sigma^2_{ij})$$

$$e^1_{ij}+e^2_{ij}=\frac{1}{2}(u^1_{i,j}+u^1_{j,i}+u^2_{i,j}+u^2_{j,i})=\frac{1}{2}(u^1_i+u^2_i)_{,j}+\frac{1}{2}(u^1_j+u^2_j)_{,i}$$

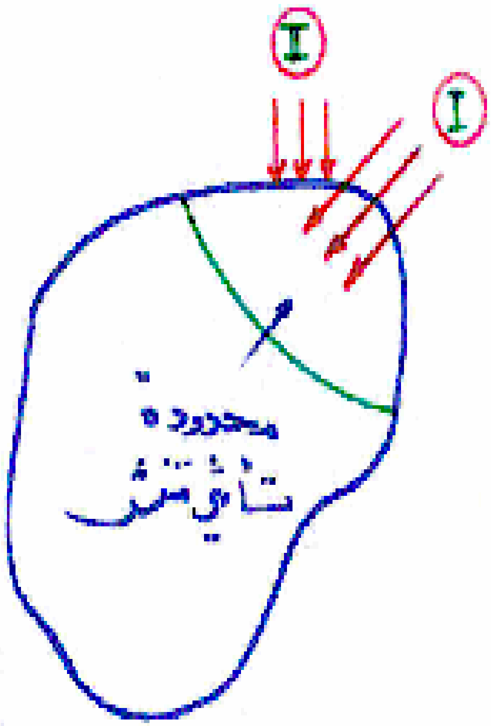
روی سطح S_T : $(\sigma^1_{ij} + \sigma^2_{ij}) \cdot n_j = T^1_i + T^2_i$

روی سطح S_u : $u^1 + u^2 = 0$

بنابراین 15 رابطه تعادل سازگاری به صورت مجموع نیروها برقرار می‌باشد

* لذا در یک ساختمان تحت تاثیر دو سری نیروها، اثر مجموع نیروها برابر است با مجموع نتایج اثر هر کدام از نیروها به تنهایی، چون مصالح ارتجاعی خطی است یعنی رابطه تنش و کرنش خطی می‌باشد.

اصل سن ونان



این یک اصل بوده و اثبات نمی‌شود. طبق این اصل اگر ساختمانی را در نظر بگیریم که جزئی قسمتی آن مجموعه نیروئی اثر کنند، چنانچه بجای این مجموعه نیرو، مجموعه نیروی جدیدی در نظر بگیریم، بگونه‌ایکه برآیند این دو مجموعه نیرو یکسان باشد، در اینصورت تنش موضعی روی تنشهای جسم زایل شده و روی نقاط دور جسم تأثیری ندارد.

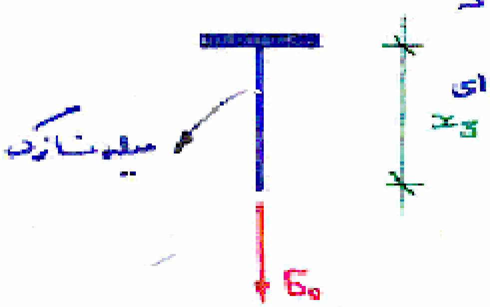
تمرین: نشان دهید که در اجسام ارتجاعی خطی ایزوتروپ سطوح اصلی تنشها و کرنشها در هر نقطه از جسم بر هم منطبق میباشند.

حل مسائل تئوری ارتجاعی در حالتهای خاص

حالت اجسام یک بعدی (مسائل یک بعدی تئوری ارتجاعی)

— تنش یک بعدی   — کرنش یک بعدی

فرض میکنیم جسمی دارای تنش یک بعدی مانند یک میله نازک که تحت تاثیر تنش σ_0 قرار گرفته است باشد و این میله از نقطه‌ای آویزان است



γ : وزن واحد طول میله

$$\sigma_{33} = \sigma_0 - \gamma x_3$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$$

$$e_{11} = \frac{1}{E}\left[-\nu \sigma_{33}\right] = -\frac{\nu}{E}(\sigma_0 - \gamma x_3)$$

تنشهای برشی صفر میباشند، بنابراین کرنشهای برشی نیز صفر خواهند بود

$$e_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_0 - \gamma x_3\right] \qquad e_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_0 - \gamma x_3\right]$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad e_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - \gamma = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \gamma x_3 + c$$

طول میله $\quad x_3 = \ell \Rightarrow \sigma_{33} = \gamma \ell + c = \sigma_0 \Rightarrow c = -\gamma \ell + \sigma_0$

$$\boxed{\sigma_{33} = \gamma (x_3 - \ell) + \sigma_0}$$

از روابط تعادل نقطه‌ای معادلات مورد استفاده قرار میگیرد، چون کرنشهای بجز کرنشهای

اصلی صفر هستند، بنابراین سه کرنش اصلی داریم:

$$e_{11} = -\frac{\nu}{E}\left[\sigma_0 + \gamma(x_3 - \ell)\right] = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Rightarrow u_1 = -\frac{\nu}{E}\left[\sigma_0 x_1 + \gamma x_1 x_3 - \gamma x_1 \ell\right] + \overbrace{f_1(x_2, x_3)}^{\text{مقدار ثابت}}$$

$$e_{22} = -\frac{\nu}{E}\left[\sigma_0 + \gamma(x_3 - \ell)\right] = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Rightarrow u_2 = -\frac{\nu}{E}\left[\sigma_0 + \gamma(x_3 - \ell)\right] x_2 + \overbrace{f_2(x_1, x_3)}^{\text{مقدار ثابت}}$$

$$e_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_0 + \gamma(x_3 - \ell)\right] = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Rightarrow u_3 = \frac{\sigma_0}{E} x_3 + \frac{\gamma}{2E} x_3^2 - \frac{\gamma}{E} \ell x_3 + \overbrace{f_3(x_1, x_2)}^{\text{مقدار ثابت}}$$

$$e_{12}=0 \Rightarrow e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1(x_2,x_3)}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2(x_1,x_3)}{\partial x_3}\right]=0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=C_1+g_1(x_3) \Rightarrow f_1=C_1x_2+x_2 g_1(x_3)+C_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=-C_1-g_1(x_3) \Rightarrow f_2=C_1x_1+x_1 g_2(x_3)$$

$$e_{13}=\frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1})=0 \Rightarrow \gamma x_1+\frac{\partial f_1(x_2,x_3)}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0$$

$$\Rightarrow f_3=-\frac{1}{2}\gamma x_1^2-x_1x_2\frac{\partial g_1(x_3)}{\partial x_3}+C_4 \qquad e_{23}=0 \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=0$$

اگر مسئله را ادامه دهیم، در نهایت یک مقدار ثابت بدست خواهد آمد که با توجه به شرایط

مرزی $x_1=x_2=x_3=0$ ، $u_1=u_2=u_3=0$ برای e_i مقدار ثابتی بدست خواهد

آنچه باید ذکر کرد که در سیستم تک بعدی مجهولات عبارتند از: e_{33} و e_{22} و e_{11} و σ_{33}

و u_3 و u_2 و u_1 که هفت تا هستند. اما معادلات موجود شامل یک معادلهٔ تعادل است،

چرا که تنها یک تنش داریم، که عبارتست از: $\sigma_{ij} + f_i = 0$.

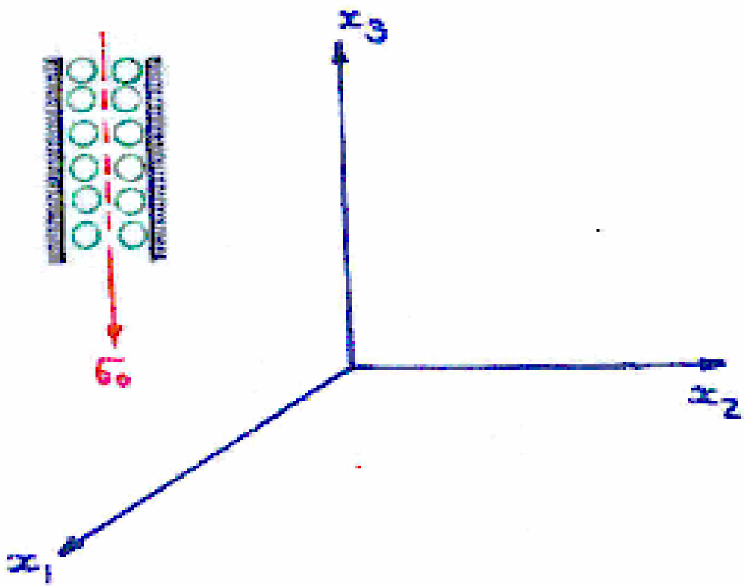
از معادلات بین کرنشها و تنشها نیز فقط سه رابطه مورد استفاده قرار میگیرد

$$e_{ij} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{kk} - (1+\nu)\sigma_{ij}\right]$$

از طرف دیگر چون $e_{ij} = 0$ ، $i \neq j$ لذا از روابط میان کرنش و تغییر مکان $\left(e_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i}\right]\right)$

نیز فقط سه رابطه استفاده می‌شود. جهت تعیین ثابتهای انتگرالگیری از شرایط مرزی نیز استفاده می‌شود

مسائل کرنش یک بعدی



کرنشها بصورت حالتی که در زیر آمده است در خواهد آمد و فرض می‌شود که در مسئله سازی کرنش در سطح مقطع میله صفر است و غلطکهای مانع کرنشهای جانبی میله می‌شوند و تنها کرنش e_{33} سایر کرنشها صفر است.

$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0$

$u_3 \neq 0 \longrightarrow u_3(x_3)$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

سایر کرنشها $= 0$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{33}(x_3) \end{bmatrix}$$

و تنش‌ها به صورت زیر نوشته می‌شوند :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, e_{33} \qquad \Bigg| \qquad \sigma_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, e_{33} = \sigma_0$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{33} = 0$$

با صرفنظر کردن از وزن میله خواهیم داشت :

$$\sigma_{33} = \sigma_0 = cte \implies e_{33} = \frac{\sigma_0(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$$

از معادلهٔ فوق می‌توان کرنش را که فقط e_{33} می‌باشد، بدست آورد :

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\sigma_0(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \implies u_3 = \frac{\sigma_0(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\, x_3 + C$$

در مبدا : $u_3 = 0 \implies C = 0 \implies u_3 = \dfrac{\sigma_0(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\, x_3$

بنابراین در کرنش یک بعدی مجهولات بصورت زیر هستند:

1) یک مؤلفه کرنش   2) سه مؤلفه تنش   3) یک بردار تغییر مکان

یعنی جمعاً 5 مجهول داریم و معادلات ذیل جهت پاسخ به مجهولات موجودند:

1) یک رابطه کرنش و مؤلفه های تغییر مکان   2) سه رابطه تنش و کرنش

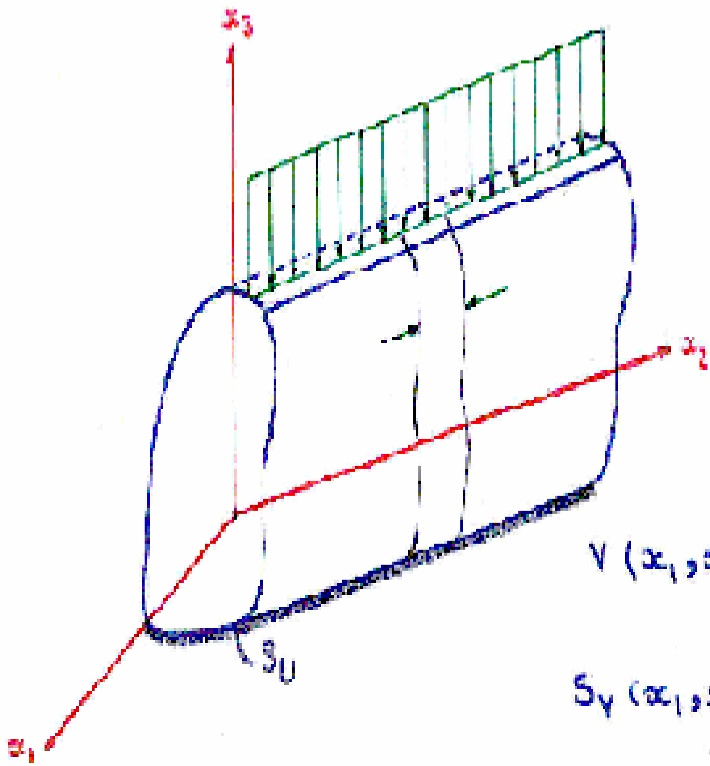
3) یک رابطه تعادل، که جمعاً 5 معادله داریم و با توجه به این 5 معادله می توان مجهولات را مشخص نمود.

ثابت های انتگرال گیری را با توجه به شرایط مرزی مربوط به کرنش ها و تغییر مکانها می توان بدست آورد. در صورت لزوم از روابط سازگاری سود جست.

مسائل دو بعدی تئوری ارتجاعی

۱) کرنش مسطح

۲) تنش مسطح

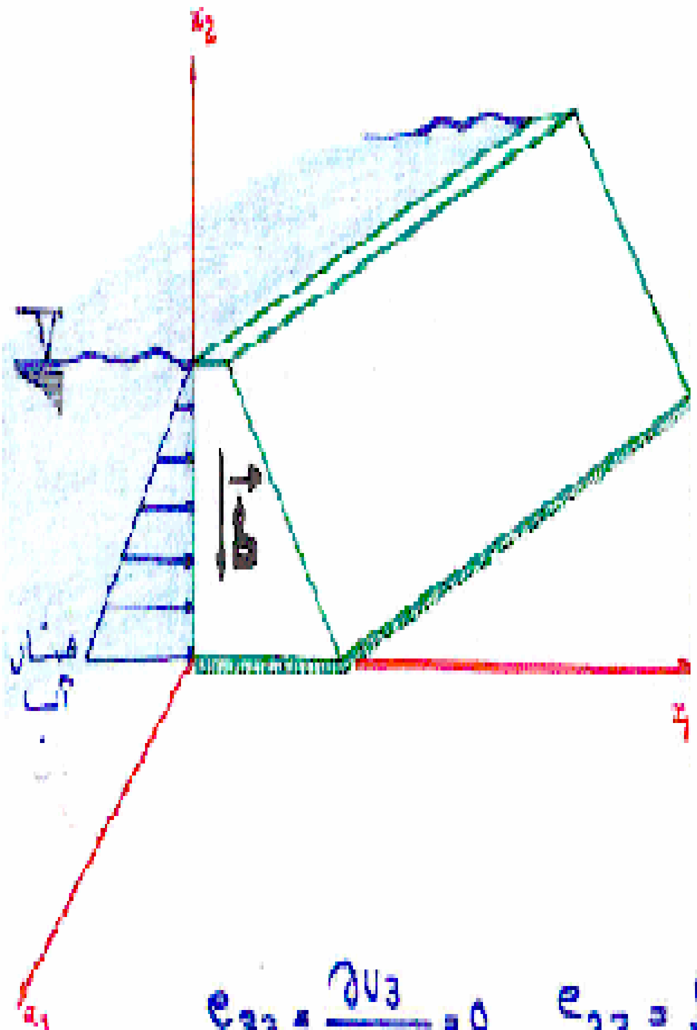


برای کرنش مسطح، جسمی طویل با سطح مقطع معینی که در طول آن ثابت است (سطح تکیه‌گاه آن در طول جسم ثابت است) در نظر بگیرید، که در آن نیروهای سطحی در طول جسم بطور ثابت اثر میکنند و هیچ مؤلفه‌ای در امتداد طول جسم ندارد.

$V(x_1, x_2)$ مؤلفه x_3 ندارد

$S_V(x_1, x_2)$ سطح تکیه‌گاه $S_T(x_1, x_2)$

$\vec{T}(x_1, x_2)$ & $T_3 = 0$ نیروی حجمی $\vec{g}(x_1, x_2)$ & $g_3 = 0$



واین تصویری از کرنش مسطح است ؛ اگر یک قطعه به طول واحد
در دو صفحه عمود بر امتداد x_3 در نظر بگیریم و تنشها و کرنشها و تغییر
مکانها را برای این قطعه بدست آوریم ، از آنجا که فرض کرده ایم
جسم طول بی نهایت دارد ، هر مقطع جسم را می توان مقطع تقارن جسم
فرض نمود. مثال عملی این جسم را می توان یک سد طولانی فرض کرد

حال ببینیم که معادلات این مسئله کدامند ؟

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad e_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = 0 \qquad e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0$$

بنابراین فقط کرنشهای e_{12} ، e_{22} و e_{11} می‌توانند مخالف صفر باشند

این سه کرنش می‌توانند مؤلفه‌های x_1 و x_2 باشند بنابراین سه کرنش مجهول

داریم .

در مورد تنشها نیز داریم : $\quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

$$e_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right] = 0 \Longrightarrow \sigma_{33} = \nu\left[\sigma_{11} + \sigma_{22}\right]$$

3 مجهول : $\sigma_{11}(x_1, x_2)$ و $\sigma_{22}(x_1, x_2)$ و $\sigma_{12}(x_1, x_2) \neq 0$

2 مجهول : $u_1(x_1, x_2)$ و $u_2(x_1, x_2)$

لذا جمعاً 8 مجهول وجود دارد

اما معادلات کنترلی، شامل معادلات تعادل بشرح زیر است:

$$\sigma_{ij,j} + g_i = 0$$

معادله 2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + g_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + g_2 = 0 \end{cases}$$

روابط بین تنشها و کرنشها نیز بصورت زیر است:

معادله 3

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \end{Bmatrix}$$

روابط بین کرنش و تغییرمکان نیز بصورت زیر خواهد بود: $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

3 معادله

$$
\begin{cases}
e_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
e_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)
\end{cases}
$$

لذا مشاهده می‌شود که تعداد معادلات نیز 8 عدد است

با نوشتن معادلات تعادل مسئله را شروع میکنیم، سپس تنشها و کرنشها را نوشته و روابط بین کرنشها و تغییرمکان را می‌نویسیم. بنابراین نباید از روابط سازگاری استفاده شود. اما روابط سازگاری مستقل از روابط فوق نمی‌باشند، تنها رابطهٔ سازگاری که برای وحدت جواب از آن استفاده می‌شود، عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad *$$

بوسیله روش حل را مشابه همه می‌کنیم که چگونه روابط را ساده نموده و روابط کرنش مسطح را خواهیم نوشت:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\begin{cases} e_{11} = \dfrac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22}\right] \\ e_{22} = \dfrac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_{22} - \nu(1+\nu)\sigma_{11}\right] \\ e_{12} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{cases}$$

سپس رابطهٔ فوق را در معادلهٔ سازگاری میگذاریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} = \dfrac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu(1+\nu)\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right] \\ \dfrac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = \dfrac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu(1+\nu)\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}\right] \\ \dfrac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{1+\nu}{E}\dfrac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادلهٔ سازگاری * خواهیم داشت:

$$\frac{1}{E}(1-\nu^2)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{1}{E}(1-\nu^2)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} = 2\,\frac{1+\nu}{E}\,\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

پس از ساده کردن رابطهٔ فوق، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(1-\nu)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2} \quad \text{I}$$

از معادلهٔ تعادل (1) داریم

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\mathcal{F}_1=0$$

درصورتیکه از معادلهٔ فوق نسبت به x_1 مشتق بگیریم رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial x_1}=0$$

و به همین ترتیب در مورد معادلهٔ تعادل دوم خواهیم داشت (با مشتق‌گیری نسبت به x_2)

$$\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial x_2}=0$$

از مجموع دو رابطه فوق رابطه زیر حاصل می شود :

$$\frac{2\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}.$$

درصورتیکه بجای مقدار $\frac{2\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$ در رابطه I قرار دهیم خواهیم داشت :

$$(1-\nu)\frac{\partial \sigma_{11}^2}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2}$$

$$= -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}$$

از ساده کردن رابطه فوق رابطه زیر بدست می آید :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)$$

رابطه فوق به صورت برداری به شکل ذیل خواهد بود :

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\nu}\,\mathrm{div}\,\vec{g}$$

حال در صورتیکه V را طوری فرض نمائید که $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ شود به عبارت دیگر داشته باشیم

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \& \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

و در صورتیکه ϕ را تابعی از تنش (موسوم به تابع تنش ایری) محسوب نمائیم که در آن تنشها از مشتقگیری دوم آن نسبت به هر جهت محاسبه گردند؛ یعنی:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + V \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + V \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} + V$$

از حل معادله دیفرانسیل فوق با فرض شرایط بالا خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{1-\nu}\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \phi + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) V = \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) V$$

نتیجه اینکه:

$$\boxed{\nabla^4 \phi = \frac{2\nu - 1}{1-\nu} \nabla^2 V}$$

ϕ تابع تنش ایری از حل این معادله دیفرانسیل بدست می‌آید

اگر نیروهای حجمی ، $\xi_1 = \xi_2 = 0$ باشد ، در اینصورت :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \& \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \& \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

درنتیجه معادلات تعادل خودبخود اقناع می‌شوند : $\left[\begin{matrix} \sigma_{ij,j} = 0 \\ i,j = x,y \end{matrix}\right]$

و معادله سازگاری بصورت زیر نوشته می‌شود :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y}\right) \rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \cdot \phi = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^4 \phi = 0}$$

برای حل معادله دیفرانسیل مرتبهٔ چهارم به صورت زیر عمل می‌کنیم :

1) درحالتیکه g_x و g_y صفر نمی‌باشند، تعیین تابع V بطوریکه :

$$g_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \& \quad g_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

2) در نظر گرفتن چندجمله‌ای دلخواه برای Φ، مثلاً :

$$\Phi(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + \dots + a_n y^n$$

که ضرایب این چندجمله‌ای مجهولات است.

3) قرار دادن Φ و V در رابطهٔ : $\nabla^4 \Phi = \frac{2\nu - 1}{1-\nu} \nabla^2 V$ و تعیین بعضی از پارامترها

4) محاسبهٔ تنش‌ها از روابط :

$$\sigma_{xx} = V + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \& \quad \sigma_{yy} = V + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \& \quad \sigma_{xy} = V + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

5) ارضاء شرایط مربوط به تنشها، یعنی: (روی سطح $\sigma_{ij} \cdot n_j = T_i / S_T$)

و تعیین مقدار دیگری از پارامترهای Φ.

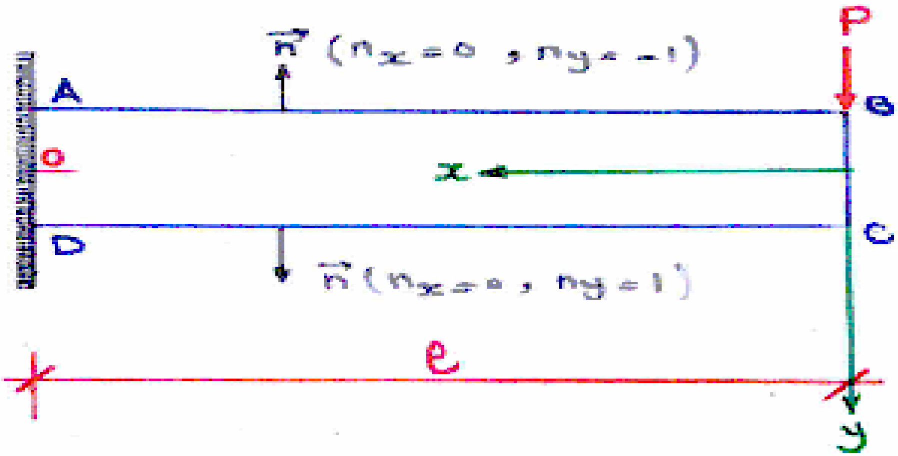
6) محاسبهٔ کرنشها با استفاده از رابطه های کرنش و تنش.

7) محاسبهٔ تغییر مکانها.

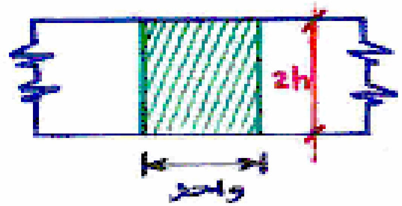
8) اقناع شرایط مرزی مربوط به سطح S_u. (توجه: اگر اقناع نشد

میبایست Φ را اصلاح نمود و مراحل را تکرار کرد)

مثال فرض می شود که دال کنسولی داریم که دارای طول بی نهایت است



روی لبه دال بار $\frac{P}{m}$ اثر میکند.



مقطعی به عرض واحد در طول دال انتخاب نموده و از عرض دال صرفنظر میکنیم.

$$\phi = ax^4 + bx^3y + 2cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 + \dots + fxy$$

$$\nabla^4\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$24a + 2\times 4c + 24e = 0$$

$$3a + c + 3e = 0 \Rightarrow c = -3(a+e)$$

حال مقدار تنشها را حساب میکنیم :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -6(a+e)x^2 + 6dxy + 12ey^2 \\[2ex] \sigma_{yy} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 12ax^2 + 6bxy - 6(a+e)y^2 \\[2ex] \sigma_{xy} = \dfrac{-\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -3bx^2 + 12(a+e)xy - 3dy^2 - f \end{cases}$$

— شرایط مرزی مربوط به تنشها را می نویسیم :

روی سطح موقتا فی دال، $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر سطح موقتا فی دال است.

روی سطح AB : $\sigma_{ij} n_j = T_i$; $T_i = (0, 0)$

مختصات سطح AB : $\begin{cases} y = -h \\ \forall x \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_{xx} \times 0 + \sigma_{xy}(-1) = 0 & \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{yx} \times 0 + \sigma_{yy}(-1) = 0 & \sigma_{yy} = 0 \\ \text{مختصات سطح DC : } \begin{cases} y = h \\ \forall x \end{cases} \Rightarrow & \begin{array}{l} \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} y = \pm h & \forall x \\ \sigma_{yy} = 0 & \sigma_{xy} = 0 \end{array}$$

$$\sigma_{yy}\Big]_{y=\pm h} = 12ax^2 \pm 6bh - 6(a+e)h^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \quad (a=0 \ ,\ b=0 \ ,\ a+e=0 \Rightarrow e=0)$$

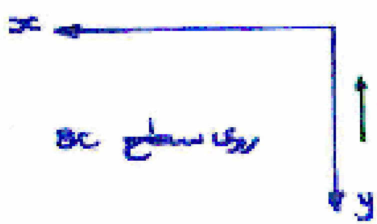
$$\sigma_{xy}\Big]_{y=\pm h} = -3bx^2 + 12(a+e)hx - 3dh^2 - f = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \quad (b=0 \ ,\ a+e=0 \ ,\ f+3dh^2=0).$$

حال اگر مقادیر بدست آمده را در روابط تنشها قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 6dxy \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = -3dy^2 + 3dh^2 = 3d(h^2-y^2) \end{cases}$$

برای تعیین توزیع تنش تنها پارامتر d نامشخص است. حال از شرط تساوی مقدار نیروی P با تنش برشی در مقطع استفاده می کنیم:



$\sigma_{xy}>0$ تعادل تنش برشی روی سطح با P $\rightarrow \int_{-h}^{h} \sigma_{xy}\,dy = -P$

$$3d\int_{-h}^{h}(h^2-y^2)\,dy = -P \rightarrow 3d\left[h^2/_{2h}\right] - \frac{1}{3}\left[h^3+h^3\right] = -P \Rightarrow d = -P/_{4h^3}$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{3}{2}\,\frac{P}{h^3}\,xy$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{3}{4}\,\frac{P}{h^3}\left(h^2 - y^2\right) = \frac{3}{4}\,\frac{P}{h^3}\left(y^2 - h^2\right)$$

اگر فرض را مورد این مسئله را به طرق مقاومت مصالح حل کنیم، داشتیم :

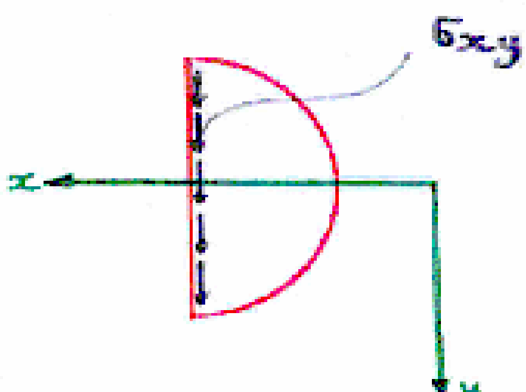
$$M = -Px$$

$$\sigma_{xx} = \frac{My}{I} = -\frac{Pxy}{I} \qquad I = \frac{1\times(2h)^3}{12} = \frac{2}{3}h^3 \qquad h^3 = \frac{3}{2}I$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{3}{2}\frac{P}{h^3}xy$$

و برای توزیع تنش برشی در هر مقطع یعنی σ_{xy} به ازاء کلیه مقادیر y مقدار آن

منفی است و به ازاء مقادیر $y = h$ مقدار آن صفر است.



$$\sigma_{xy} = \frac{T}{I} = \frac{-P(h-y)\left(\frac{h+y}{2}\right)}{\frac{2}{3}h^3\times 1} = \frac{3P(y^2-h^2)}{4h^3}$$

مسئله بعدی تعیین کرنشهاست

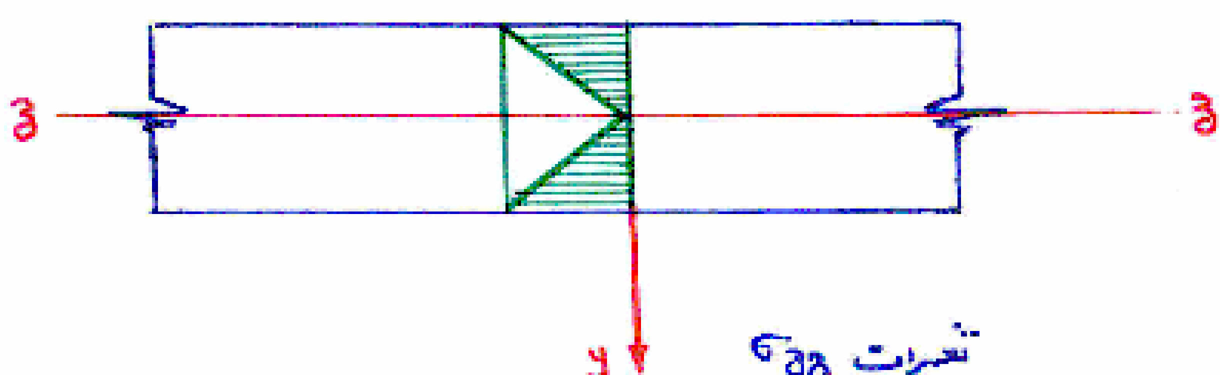
چون صفحه دال در هر دو جهت x و y است بنابراین : $e_{zz} = 0$ کرنش

$$e_{zz} = 0 \qquad \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xy} + \sigma_{yy})\right] = 0$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \nu\left(\frac{-Pxy}{I}\right) = -\nu P\frac{xy}{I}$$

این موضوع نشان دهندهٔ این است که σ_{zz} به ازاء y های مثبت منفی است

یعنی فشاری است و به ازاء y های منفی کششی است و این رابطه خطی است



تغییرات σ_{zz}

$$
\left\{\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\,\sigma_{xx} - \nu(1+\nu)\,\sigma_{yy}\right] \\
e_{yy} &= \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\,\sigma_{yy} - \nu(1+\nu)\,\sigma_{xx}\right] \\
e_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{xy}
\end{aligned}\right.
\quad\Rightarrow\quad
\left\{\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\left(-\frac{Pxy}{I}\right)\right] \\
e_{yy} &= -\frac{\nu(1+\nu)}{E}\left[\frac{-Pxy}{I}\right] \\
e_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\left[\frac{P(y^2-h^2)}{2I}\right]
\end{aligned}\right.
$$

و بقیه کرنشها با توجه به اینکه سایر تنشها صفرند، صفر خواهند بود.

بعد از بدست آوردن کرنشها، مؤلفه‌های بردار تغییر مکان را محاسبه می‌کنیم:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{(1-\nu^2)}{EI}Pxy \Longrightarrow u_x = -\frac{(1-\nu^2)}{2EI}Px^2y + f_1(y)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\nu(1+\nu)}{EI}Pxy \Longrightarrow u_y = \frac{\nu(1+\nu)}{EI}Pxy^2 + f_2(x)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left[-\frac{(1-\nu^2)}{2EI}Px^2 + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\nu(1+\nu)}{2EI}Py^2 + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{1+\nu}{2EI}P(y^2-h^2)$$

توابعی که تابع x هستند از دو طرف مساوی و توابع y را نیز مساوی قرار میدهیم :

$$-\frac{(1-\nu^2)}{4EI}px^2+\frac{1}{2}\frac{\partial f_2(x)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial f_1(y)}{\partial y}+\frac{\nu(1+\nu)p}{4EI}y^2-\frac{1+\nu}{2EI}py^2$$

$$-\frac{1+\nu}{2EI}py^2+\frac{1+\nu}{2EI}ph^2+A-A=0$$

حال دو رابطه را تفکیک میکنیم :

$$-\frac{(1-\nu^2)}{4EI}px^2+\frac{1}{2}\frac{\partial f_2(x)}{\partial x}+\frac{1+\nu}{2EI}ph^2+A=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f_1(y)}{\partial y}+\frac{\nu(1+\nu)}{4EI}py^2-\frac{1}{2}\frac{1+\nu}{EI}py^2-A=0$$

لذا خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x}=\dfrac{(1-\nu^2)}{2EI}px^2-\dfrac{(1+\nu)}{EI}ph^2-2A\\[2ex]\dfrac{\partial f_1(y)}{\partial y}=\dfrac{(-\nu+2)(1+\nu)}{2EI}py^2+2A=\dfrac{2+\nu-\nu^2}{2EI}py^2+2A\end{cases}$$

پس از انتگراسیون خواهیم داشت:

$$F_2(x) = \frac{1-\nu^2}{6EI} Px^3 - \frac{1+\nu}{EI} Ph^2 x - 2Ax + B$$

$$F_1(y) = \frac{2+\nu-\nu^2}{6EI} Py^3 + 2Ay + C$$

پس از جایگذاری:

$$u_x = \frac{-(1-\nu^2)}{2EI} x^2 y + \frac{2+\nu-\nu^2}{6EI} Py^3 + 2Ay + C$$

$$u_y = \frac{\nu(1+\nu)}{2EI} xy^2 + \frac{(1-\nu^2)}{6EI} Px^3 - \frac{1+\nu}{EI} Ph^3 x - 2Ax + B$$

به کمک شرایط مرزی مناسب به A ، B و C می‌پردازیم:

میدانیم که تغییر مکان نقطه $\left\{\begin{array}{l} x=l \\ y=0 \end{array}\right.$ ، صفر است ولذا:

$$\left\{\begin{array}{l} x=l \\ y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_x=0 \\ u_y=0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} u_x = 0 \Big]_{\text{نقطه } o} = C = 0 \\ u_y = 0 \Big]_{\text{نقطه } o} \Longrightarrow \end{array}$$

$$\frac{1-\nu^2}{6EI}pl^3-\frac{1+\nu}{EI}ph^2l-2Al+B=0$$

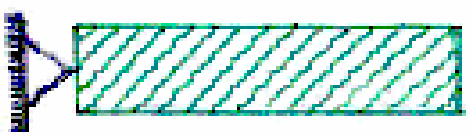
$$\therefore\quad B=\frac{\nu^2-1}{6EI}pl^3+\frac{1+\nu}{EI}ph^2l+2Al$$

وحال معادلات تغییر مکان بدست می آیند

$$\begin{cases} u_x=-\dfrac{1-\nu^2}{2EI}px^2y+\dfrac{2+\nu-\nu^2}{6EI}py^3+2Ay \\ u_y=\dfrac{\nu(1+\nu)}{2EI}py^2x+\dfrac{(1-\nu^2)}{6EI}p(x^3-l^3)-\dfrac{1+\nu}{EI}ph^2(x-l)+2A(l-x) \end{cases}$$

محاسبه ثابت A : دو حالت وجود دارد

حالت اول : اگر فرض نمائید که تیر حول نقطه O می تواند دوران کند، به عبارت دیگر



ثابت A دوران تیر حول نقطه O را نشان میدهد.

حالت دوم : اگر فرض نمائیم که تیر در دیوار گیردار است یعنی تماس بسته میباشد

وحال پس از تغییر شکل افقی است.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \ell \\ \\ y = 0 \end{array}\right. \qquad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{6EI} p\left[3\ell^2 y - \frac{1+\nu}{EI} ph^2 - 2A\right] = 0$$

$$\therefore \quad A = \frac{1-\nu^2}{4EI} p\ell^2 - \frac{1+\nu}{2EI} ph^2$$

ولذا توابع تغییر مکان در نهایت به شکل زیر خواهند بود :

$$U_x = \frac{1-\nu^2}{2EI} py(\ell^2 - x^2) + \frac{1+\nu}{6EI} py\left[(2-\nu)y^2 - 6h^2\right]$$

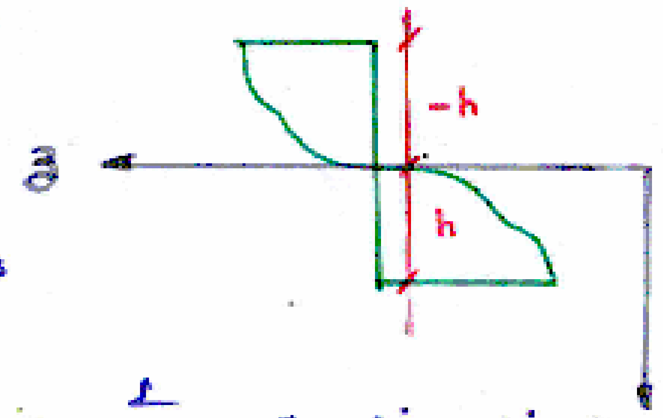
$$U_y = \frac{\nu(1+\nu)}{2EI} px^2 y + \frac{(1-\nu^2)}{6EI} p\left[x^3 - 3x\ell + 2\ell^3\right]$$

لذا برای مقادیر x ثابت :

$U_x \Big|_{x = cte}$ = تابع درجه 3 از y $\neq$ تابع خطی از y

> لذا متوجه می شویم که در حالت کلی فرض برنولی مبنی بر اینکه سطوح عمود بر تار میانی مسطح باقی می مانند، صادق نمی باشد. <

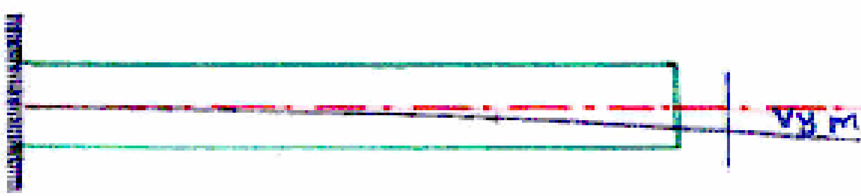
$$U_x\Big]_{x=-h} = \frac{(1+\nu)(4+\nu)}{6EI} Ph^3$$



$$U_x\Big]_{x=h} = -\frac{(1+\nu)(4+\nu)}{6EI} Ph^3$$

لذا فرض برنولی در تیرها با مقطع کوتاه صادق است ولی در تیرهای بلند سطوح خصوصیت مسطح باقی نمی مانند.

$$V_y\Big]_{y=0} = \frac{1-\nu^2}{6EI} P\left[x^3 - 3x\ell^2 + 2\ell^3\right]$$



$$V_{y\,max} = V_y\Big]_{y=0}$$

اگر خیز تیر را از مقاومت مصالح محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$x = l \Rightarrow v'_y = 0 \longrightarrow v'_y = \frac{Px^2}{2EI} \pm C_1$$

$$-EI v''_y = -Px$$

$$C_1 = -\frac{Pl^2}{2EI} \Rightarrow \begin{cases} v_y = \dfrac{Px^3}{6EI} - \dfrac{Pl^2}{2EI}x + C_2 \\ v_y = 0 \quad x = l \end{cases} \Rightarrow v_y = \frac{P}{6EI}\left(x^3 - 3l^2 + x + 2l^3\right)$$

اختلاف در ضریب $1-\nu^2$، در دو روش مقاومت مصالح و تئوری ارتجاعی به علت

در نظر گرفتن ضخامت دال است.

اگر در تئوری ارتجاعی ضخامت دال را ناچیز فرض نمائیم و فقط کرنش مسطح دو بعدی

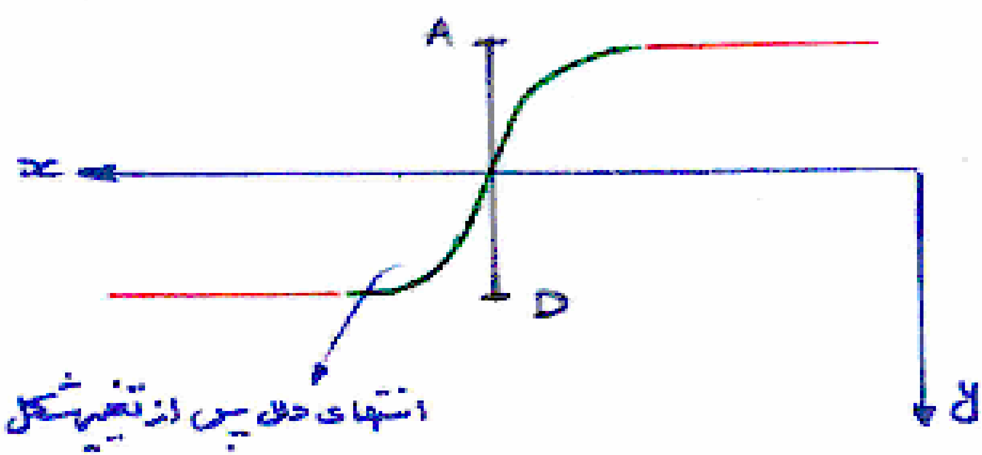
را در نظر بگیریم (دال تبدیل به تیر می شود) و در نتیجه عبارات v_y برای هر دو روش یکسان

خواهد شد.

حال اگر فرض کنیم که قطعه دوران بنماید ولی در اینحالت بعد از تغییر شکل دال،

(که دیگر تار میانی دال مماس با افق نمی‌باشد) تار راستهای دال بر تکیه‌گاه مماس

بماند، خواهیم داشت :



$$\text{در نقطه } O : \begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

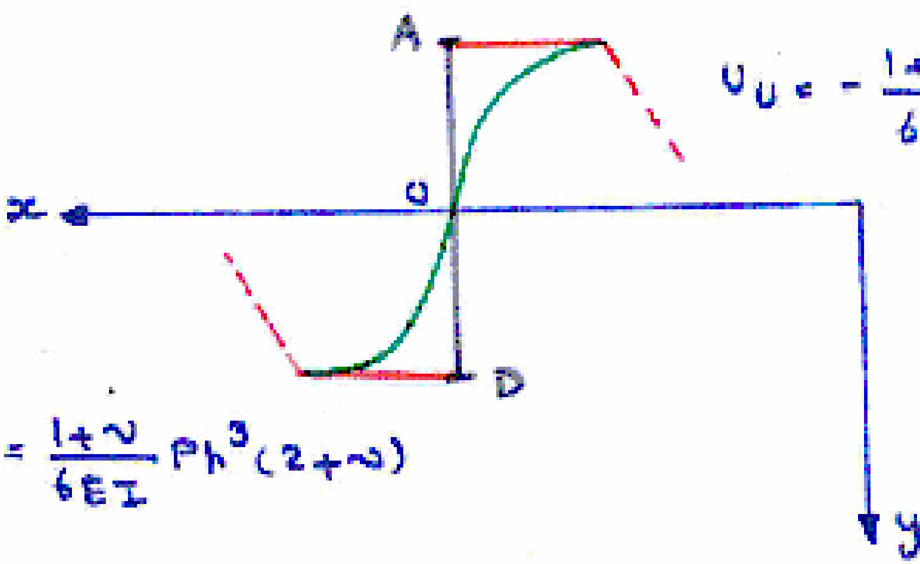
$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_{\text{در نقطه } O} = -\frac{(1-\nu^2)}{2EI} P l^2 + 2A = 0$$

$$\therefore \quad A = \frac{(1-\nu^2)}{4EI} P l^2$$

و حال اگر مقدار A را در دو رابطه قرار دهیم:

$$u_x = -\frac{1-\nu^2}{2EI} P x^2 y + \frac{2+\nu-\nu^2}{6EI} P y^3 + \frac{(1-\nu^2)}{4EI} P \ell^2 y$$

$$u_y = \frac{\nu(1+\nu)}{2EI} P x y^2 + \frac{1-\nu^2}{6EI} P (x^3 - 3x\ell^2 + 2\ell^3) - \frac{(1-\nu^2)}{2EI} P \ell^2 (x-\ell)$$

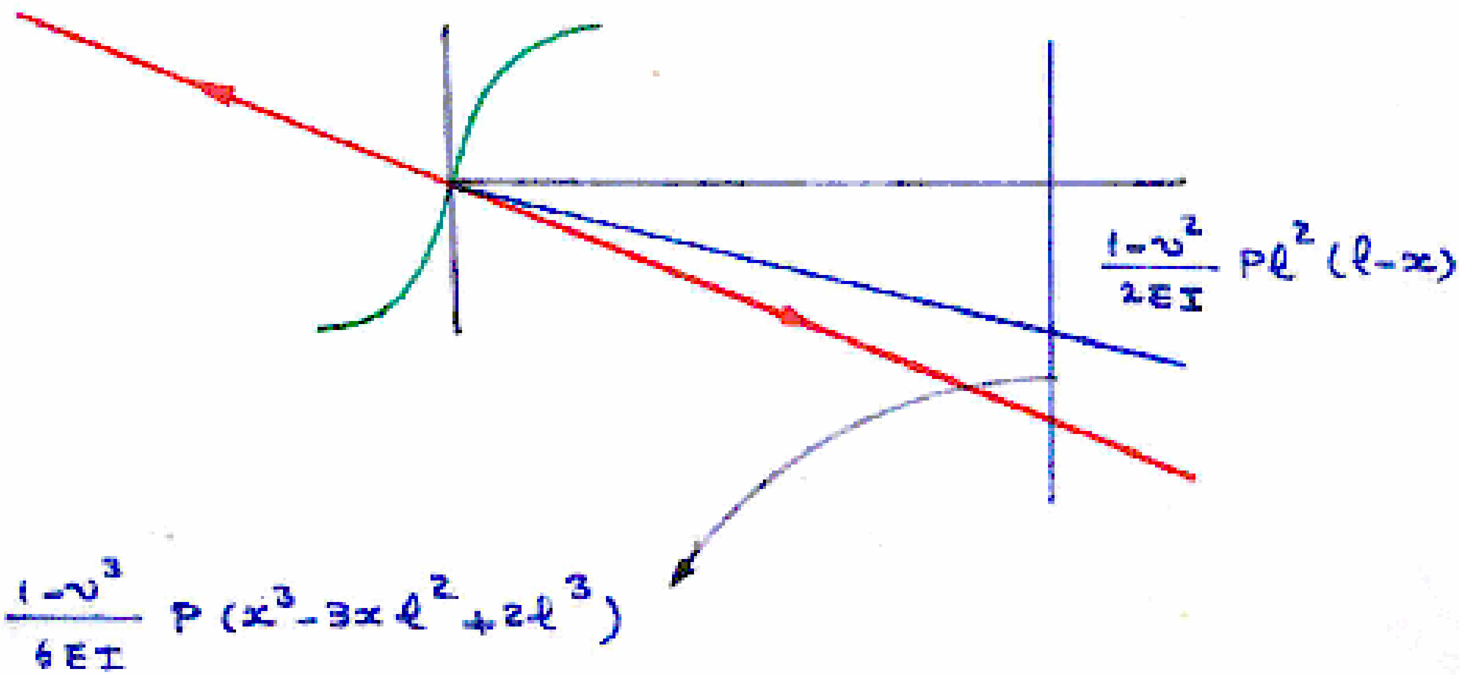


$$u_u = -\frac{1+\nu}{6EI} P h^3 (2+\nu)$$

$$u_u = \frac{1+\nu}{6EI} P h^3 (2+\nu)$$

$$v_y\Big]_{y=0} = \frac{1-\nu^3}{6EI}\,P(x^3-3x\ell^2+2\ell^3) + \underbrace{\frac{1-\nu^2}{2EI}\,P\ell^2(\ell-x)}$$

این بخش نسبت به حالت قبل اضافه شده است که ناشی از دوران قطعه است :

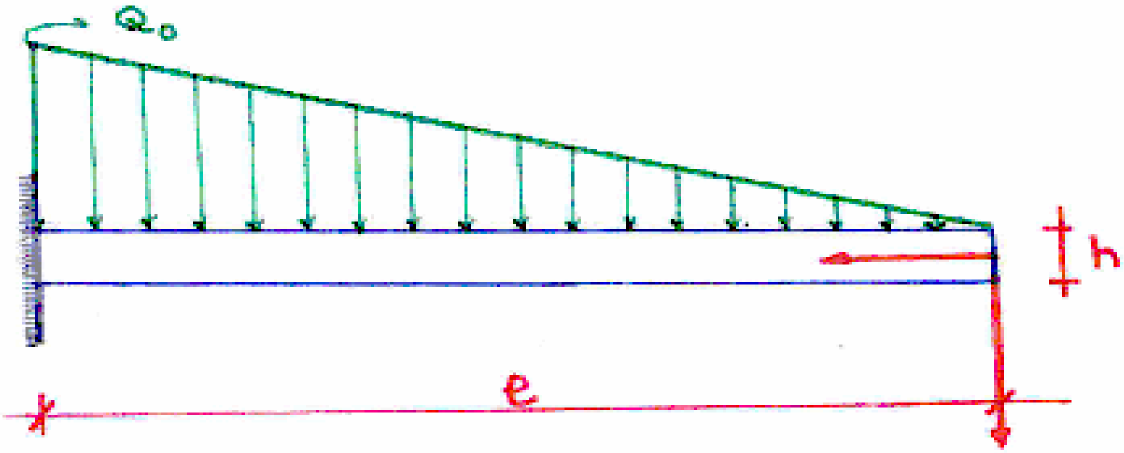


$$\left.\frac{\partial v_y}{\partial x}\right]_{\substack{x=l\\ y=0}} = -\frac{1-\nu^2}{2EI} P l^2$$

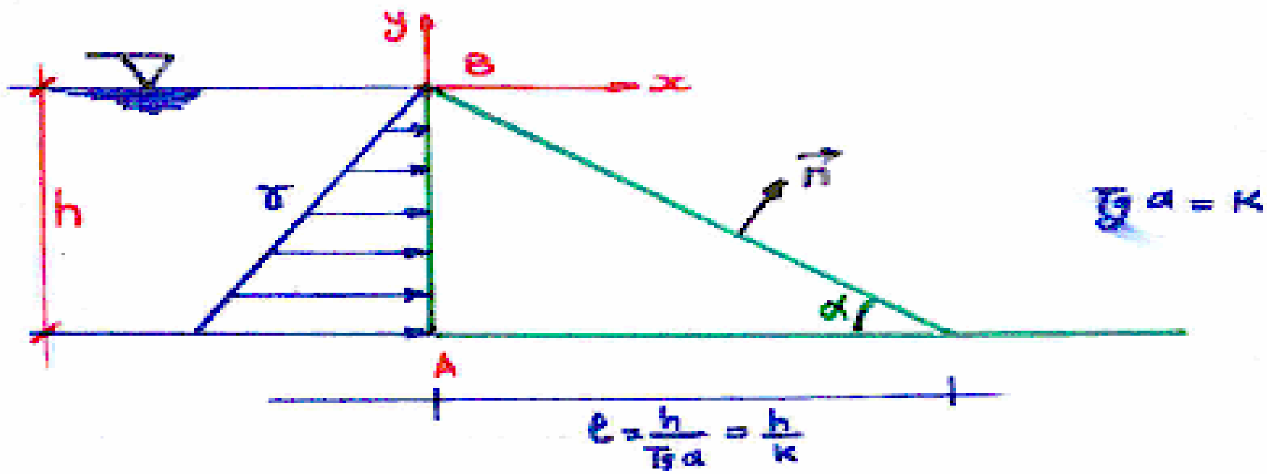
$$v_y \Big]_{x=y=0} = \frac{1-\nu^2}{3EI} P l^3 + \frac{1-\nu^2}{2EI} P l^3 = \frac{5}{6} \frac{1-\nu^2}{EI} P l^3$$

بنابراین، ملاحظه میگردد که شرایط گیرداری قطعه به شدت روی خیز نقطه دور از محل گیرداری مؤثر است و تغییرات آن، یعنی مثلاً اگر یک جزء کوچک گیردار باشد یا تمام سطح گیردار باشد، در میزان خیز نقطه دور خیلی مؤثر است.

● خیز و تغییر شکل و توزیع تنش و حرکتهای دال زیر را پیدا نمائید .



مثال : در سد وزنی شکل زیر از نیروهای حجمی صرف نظر می شود



$\phi = ax^3 + byx^2 + cxy^2 + dy^3$ با قراردادن کشش (+) γy = فشاری $p = -\gamma y$

$$\nabla^4 \phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

لذا :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2cx + 6dy \\ \sigma_{yy} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2ax + 2by \\ \sigma_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2bx - 2cy \end{cases}$$

اقناع شرایط حدی مربوط به تنشها :

روی سطح AB $\quad \vec{n}\,(n_x = -1,\ n_y = 0) \quad \sigma_{ij} n_j = T_i$

$$T_x = -\gamma y \quad \& \quad T_y = 0$$

مختصات نقاط : $x = 0$, $\forall y \in [-h, 0]$

$$\sigma_{xx}(-1) + \sigma_{xy}(0) = -\gamma y \longrightarrow \sigma_{xx} = \gamma y$$

$$\sigma_{yx}(-1) + \sigma_{yy}(0) = 0 \longrightarrow \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{xx}\Big]_{x=0} = 6dy = \gamma y \quad \forall y \Longleftrightarrow d = \frac{\gamma}{6}$$

$$\gamma_{xy}\Big]_{x=0} \Rightarrow -2cy - f = 0 \quad \forall y \rightarrow \quad f = 0 \ , \ c = 0$$

BC معادلهٔ خط (رابطهٔ R) $\quad \tan\alpha = -\dfrac{y}{x} = K \rightarrow y = -Kx$ BC نقاط روی

BC بردار عمود بر $\vec{n} = (n_x = \sin\alpha \ , \ n_y = \cos\alpha)$

چون هیچ نیرویی بر سطح اثر نمی‌کند $\quad \sigma_{ij} n_j = T_i = (0, 0)$

$$\sigma_{xx}(\sin\alpha) + \sigma_{xy}(\cos\alpha) = 0 \qquad \forall x, y \in R$$

طرفین تساوی فوق را به $\cos\alpha$ تقسیم میکنیم لذا خواهیم داشت

$$\text{I}\begin{cases} \sigma_{xx} \times K + \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{xy} \times K + \sigma_{yy} = 0 \end{cases}$$

روی سطح BC

$$\sigma_{xx}\Big]_{\text{سطح } BC} = 6dy = -6dkx$$

$$\sigma_{xy}\Big]_{\text{سطح } BC} = -2bx$$

$$\sigma_{yy}\Big]_{\text{سطح } BC} = 6dx - 2bkx$$

اگر روابط فوق را در رابطه 1 جایگذاری نمائیم، خواهیم داشت:

$$-6dk^2x - 2bx = 0$$

$$\forall x \in [0, \ell] \Downarrow b + 3dk^2 = 0$$

$$-2bkx + 6ax - 2bkx = 0$$

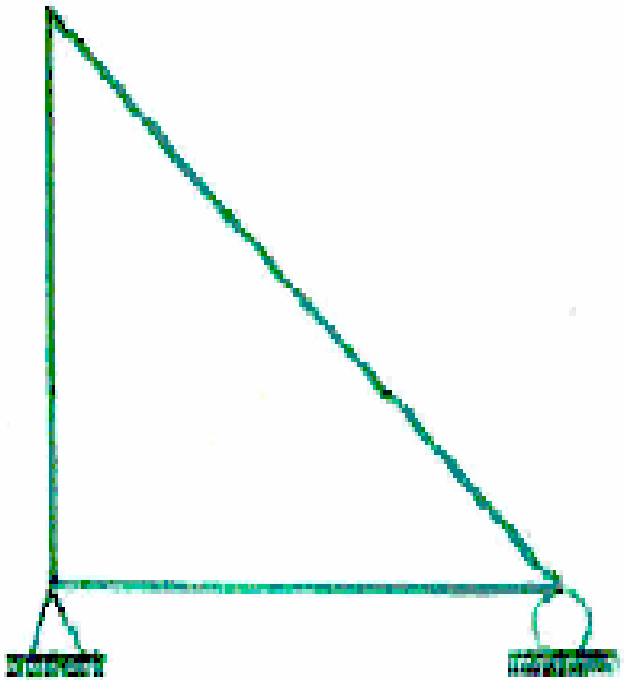
$$-2bk + 3a = 0$$

از طرفی داشتیم $d = \frac{\gamma}{6}$ لذا می‌توانیم بنویسیم

$$b = -\frac{\gamma}{2}k^2 \qquad a = -\frac{\gamma}{3}k^3$$

حال اگر این مقادیر را در رابطه تنش قرار دهیم:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 6dy = \gamma y \\ \sigma_{yy} = 6ax - 2bkx = -\gamma k^2(2kx + y) \\ \sigma_{xy} = -2bx - f = \gamma k^2 x \end{cases}$$



واکنش‌ها می‌توان کرنشها را بدست آورد

و ادامه مسأله را با فرض اینکه نقطه C روی

غلتک و نقطه A در دو نقطه گیردار است

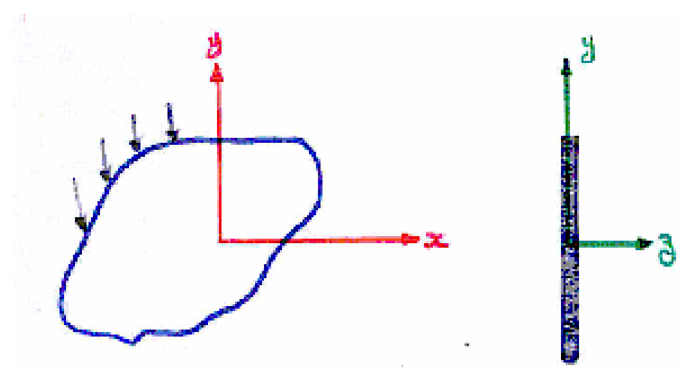
می‌توان تغییر مکانهای کل سازه را بدست آورد

مسایل تنش مسطح

فرض می کنیم که سطح نازکی تحت تأثیر نیروهایی در سطح صفحه قرار گرفته باشد و نیروهای حجمی مؤلفه های در امتداد zها ندارند، لذا:

چون ضخامت صفحه ناچیز است، از اینرو تغییرات تنشها در امتداد محور zها صفر است

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_{zz}=0 \\ \sigma_{xy}=0 \\ \sigma_{yz}=0 \end{array}\right. \Longrightarrow [\sigma]=\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



تنشها تابع x,y می باشند:

$$\sigma_{xx}(x,y) \quad \sigma_{yy}(x,y) \quad \sigma_{xy}(x,y)$$

نیروهای حجمی نیز به همین ترتیب عبارت خواهند بود از:

$$\left[\, g_x(x,y)\ ,\ g_y(x,y)\ ,\ 0 \,\right]$$

۱) روابط تعادل به صورت ذیل نوشته می شوند:

$$\sigma_{ij,j} + g_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + g_x = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + g_y = 0 \end{cases}$$

۲) روابط بین تنش و کرنش:

$$e_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right] \qquad e_{xx} + e_{yy} = \frac{1-\nu}{E}\left[\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right]$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right] \qquad e_{zz} = \frac{-\nu}{1-\nu}\left[e_{xx} + e_{yy}\right]$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E}\left[-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right] \qquad e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \qquad e_{xz} = 0 \ \& \ e_{yz} = 0$$

لذا مجهولات مسأله عبارت خواهند بود از:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{xx} & e_{xx} & u_x \\ \sigma_{yy} & e_{yy} & u_y \\ \sigma_{xy} & e_{xy} & \end{array}$$

۸ مجهول داریم و تعداد معادلات بیان شده تا کنون ۵ بودند

تنش مسطح

$$\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix}$$

سه رابطه دیگر که به روابط بین تغییر مکانها و کرنشها موسومند، به شرح زیرند:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right]$$

همه روابط فوق مشابه روابط کرنش مسطح است، به جز رابطه تنش-کرنش که در کرنش مسطح به صورت زیر است:

کرنش مسطح

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{E}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \begin{bmatrix} 1-\bar{\nu} & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1-\bar{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\bar{\nu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix}$$

($\bar{E}$ و $\bar{\nu}$ ضرایب ارتجاعی کرنش مسطح می باشند)

اگر بتوان رابطه بین تنش و کرنش در حالت کرنش مسطح را به گونه ای نوشت که مشابه حالت تنش مسطح باشد، مسأله را می توان در حالت تنش مسطح طل نمود

$\bar{E}$ و $\bar{\nu}$ ضرایب ارتجاعی کرنش مسطح عبارتند از:

$$\frac{\bar{E}(1-\bar{\nu})}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$\frac{\bar{E}\,\bar{\nu}}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} = \frac{E\,\nu}{1-\nu^2}$$

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$$

$$\bar{E} = E\,\frac{1+2\nu}{1+\nu^2}$$

لذا هرگاه ν و E را مطابق روابط فوق به $\bar{\nu}$ و $\bar{E}$ تبدیل نماییم و مسئله را در حالت کرنش مسطح حل کنیم، جوابها برای تنش مسطح خواهند بود

در تنش مسطح 6 رابطه‌ای که بین تغییر مکانها و کرنشها وجود دارند عبارتند از:

$$
\begin{cases}
e_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\[2mm]
e_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \\[2mm]
e_{xy} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right]
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
e_{xz} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right] \\[2mm]
e_{yz} = 0 \\[2mm]
e_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = \dfrac{1}{E}\left[\cancelto{0}{\sigma_{zz}} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right] \rightarrow e_{zz} = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})
\end{cases}
$$

اما از طرفی داریم:

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx} = \dfrac{E}{1-\nu^2}(e_{xx} + \nu e_{yy}) \\[2mm]
\sigma_{yy} = \dfrac{E}{1-\nu^2}(e_{yy} + \nu e_{xx})
\end{cases}
$$

$$
\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu}(e_{xx}+e_{yy}) \longrightarrow e_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu}(e_{xx}+e_{yy})
$$

رابطهٔ سازگاری را بصورت زیر داشتیم :

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}$$

$$\begin{cases} e_{xx} = \dfrac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu\,\dfrac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}\right) \\ e_{yy} = \dfrac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu\,\dfrac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}\right) \\ e_{xy} = \dfrac{1+\nu}{E}\,\sigma_{xy} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{1+\nu}{E}\,\dfrac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x\,\partial y} \end{cases}$$

با استفاده از روابط حاصله فوق، رابطهٔ سازگاری برای تنش :

$$\frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu\,\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu\,\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}\right] = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x\,\partial y}$$

$$* \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \xi_x = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial \xi_x}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \xi_y = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial \xi_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

و از مجموع دو رابطه بدست آمده فوق داریم :

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{\partial \xi_y}{\partial y} .$$

و با جایگذاری در رابطه سازگاری بدست آمده در مرحله قبل خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + (1+\nu)\left[\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}\right]$$

$$= -(1+\nu)\left[\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y}\right] .$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\nu)\left[\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y}\right]$$

و با توجه به اینکه :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \& \quad \vec{g} = \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} \quad \& \quad \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} = \operatorname{div} \vec{g}$$

خواهیم داشت :

$$\therefore \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\nu) \operatorname{div} \vec{g}$$

در مختصات قطبی رابطهٔ فوق بصورت زیر نوشته می‌شود :

$$\nabla^2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -(1+\nu) \operatorname{div} \vec{g}$$

در اینجا جهت کاهش دولت مجهولات ، از معادلات تعادل * و معادلهٔ فوق استفاده میکنیم.

$$g_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad g_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V \\ \sigma_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \sigma_{yy} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V \end{cases}$$

ϕ : تابع تنش ایری است

بنابراین با استفاده از توابع تنش ایری رابطهٔ فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+V+\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+V\right)=-(1+\nu)\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \phi=(\nu-1)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) V$$

$$\therefore \quad \nabla^4 \phi=(\nu-1)\,\nabla^2 V$$

در غیاب نیروهای حجمی، V را می‌توان صفر گرفت و داریم :

$\nabla^4 \phi = 0$ که معادلهٔ بی‌هارمونیک نام دارد.

مراحل حل یک مسئله تئوری ارتجاعی عبارتند از :

1) قرار دادن $V=0$

2) حدس زدن ϕ

3) ارضاء معادله $\nabla^4\phi=0$

4) محاسبه σ_{ij}

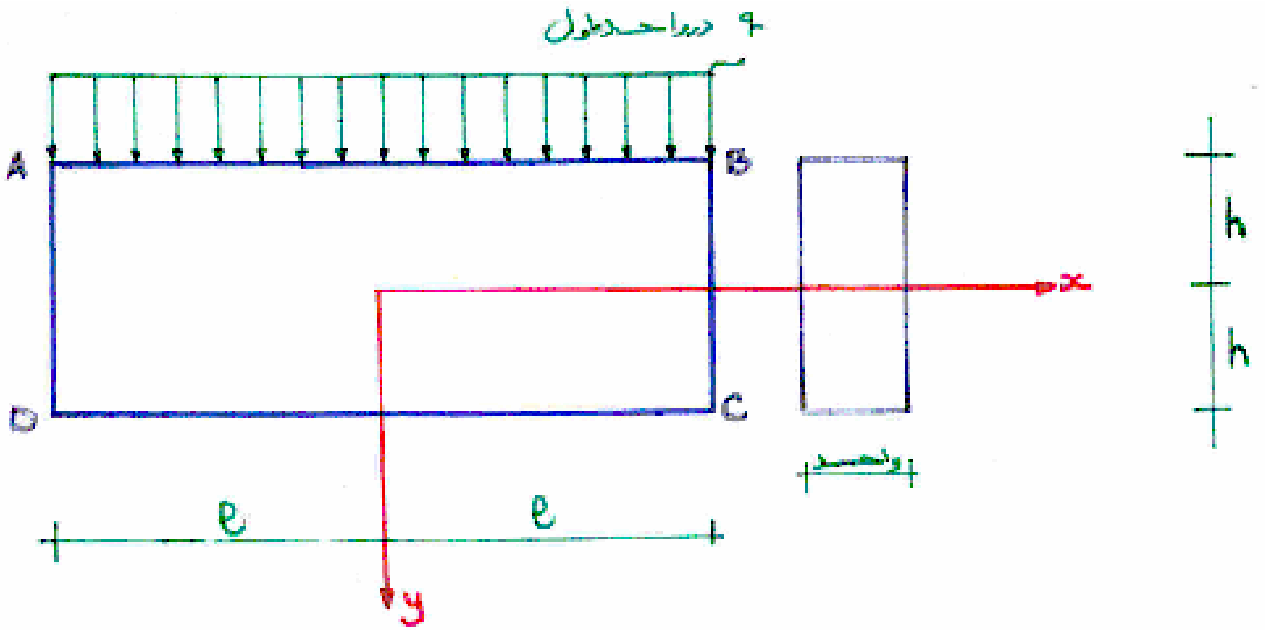
5) ارضاء شرایط مرزی $\sigma_{ij}n_j=T_i$

6) محاسبه کرنش e_{ij}

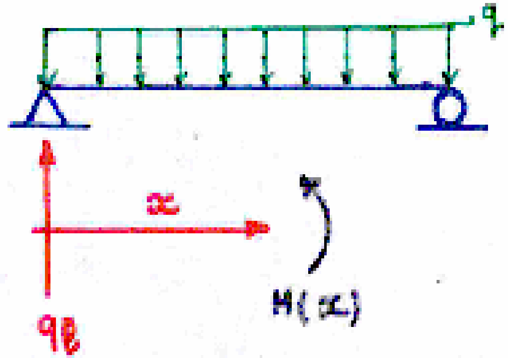
7) محاسبه تغییر مکانها u_i

8) ارضاء شرایط مرزی مربوط به تغییر مکانها

مثال



تیری به عرض واحد با شکل و بارگذاری فوق و با طول $2l$ و ارتفاع $2h$ روی تکیه‌گاهها طوری قرار دارد که ql برش وارده از تکیه‌گاهها می‌باشد به دو صورتی



با توجه به مقاومت مصالح اگر تیر روی دو تکیه‌گاه ساده فرض شود :

$$M(x) = ql(l+x) - q\frac{(l+x)^2}{2}$$

و همینطور :

$$\sigma_{xx} = \frac{My}{I}$$

Φ: تابع درجهٔ 2 از x و تابع درجهٔ 3 از y میباشد

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

$$T(x) = -q\ell + q(\ell + x) = qx$$

$$\sigma_{xy} = \frac{T(x) \times \text{تابع درجهٔ 2 از } y}{I \cdot b}$$

بنابراین:

σ_{xy} تابع درجهٔ 2 از y و تابع درجهٔ یک از x

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Φ = تابع درجهٔ 3 از y و تابع درجهٔ 2 از x

$$\Phi = (ax^2 + bx + c)(dy^3 + ey^2 + fy + g)$$

حال Φ رابطهٔ فوق را حدس میزنیم:

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \implies 0 + 2(2a)(6dy + 2e) + 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a\left(dy^3 + ey^2 + fy + g\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 2a\left(3dy^2 + 2ey + f\right) \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ e = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ تابع انتخابش صحیح نبوده است

بنابراین φ زیر انتخاب میگردد :

$$\begin{aligned}\varphi = {} & a_1x^6 + b_1x^5y + c_1x^4y^2 + d_1x^3y^3 + e_1x^2y^4 + f_1xy^5 + g_1y^6 \\ & + a_2x^5 + b_2x^4y + c_2x^3y^2 + d_2x^2y^3 + e_2xy^4 + f_2y^5 \\ & + a_3x^4 + b_3x^3y + c_3x^2y^2 + d_3xy^3 + e_3y^4 \\ & + a_4x^3 + b_4x^2y + c_4xy^2 + d_4y^3 \\ & + a_5x^2 + b_5xy + c_5y^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla^4 \varphi = 0} \Rightarrow \begin{cases} 15a_1 + e_1 + 2c_1 = 0 \\ 5b_1 + 5f_1 + 3d_1 = 0 \\ c_1 + 15g_1 + 2e_1 = 0 \\ 5a_2 + e_2 + c_2 = 0 \\ b_2 + 5f_2 + d_2 = 0 \\ 3a_3 + 3e_3 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 30a_1x^4 + 20b_1x^3y + 12c_1x^2y^2 + 6d_1xy^3 + 2e_1y^4 + 20a_2x^3 +$$

$$12b_2x^2y + 6c_2xy^2 + 2d_2y^3 + 12a_3x^2 + 6b_3xy + 2c_3y^2 + 6a_4x + 2b_4y + 2a_5$$

روی AB :

$\sigma_{yy} = -q \qquad y = -h$

$$\sigma_{yy}\Big]_{\substack{y=-h \\ \forall x}} = -q$$

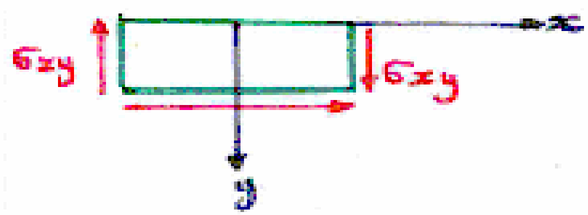
روی DC :

$$\sigma_{yy}\Big]_{\substack{y=+h \\ \forall x}} = 0$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \qquad \sigma_{xy}\Big]_{\substack{y=h \\ \forall x}} = 0$$

روی AB :

$$\sigma_{xy}\Big]_{\substack{y=-h \\ \forall x}} = 0$$



روی AD :

$$\int_{-h}^{h} \sigma_{xy}\Big]_{x=-\ell} dy = q\ell$$

روی BC :

$$\int_{-h}^{h} \sigma_{xy}\Big]_{x=\ell} dy = -q\ell$$

روی لبه BC :

$$M = \int_{-h}^{h} \sigma_{xx}\Big]_{x=\ell} y\,dy = 0$$

روی AD :

$$M = \int_{-h}^{h} \sigma_{xx}\Big]_{x=-\ell} y\,dy = 0 \qquad N = \int_{-h}^{h} \sigma_{xx}\Big]_{x=-\ell} dy = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{q}{2I}(\ell^2 - x^2)y + \dfrac{q}{2I}\left(\dfrac{2}{3}y^3 - \dfrac{2}{5}h^2 y\right) \\ \sigma_{yy} = \dfrac{q}{2I}\left(h^2 y - \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{2}{3}h^3\right) \\ \sigma_{xy} = -\dfrac{q}{2I}(h^2 - y^2)x \end{cases}$$

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) = \frac{q}{2EI}\left[(\ell^2 - x^2)y + \left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{5}h^2 y\right) - \nu\left(hy^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{2}{3}h^3\right)\right]$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \longrightarrow u_x = e_{xx}(y)\,x + c_1$$

$$\therefore\ u_x = \frac{q}{2EI}\left[\left(\ell^2 x - \frac{x^3}{3}\right)y + \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}h^2 y\right)x - \nu x\left(h^2 y - \frac{y^3}{3} - \frac{2}{3}h^2\right)\right] + c_1(y)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = \frac{q}{2EI}\left[\left(h^2 y - \frac{y^3}{3} - \frac{2}{3}h^3\right) - \nu(\ell^2 - x^2)y - \nu\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}h^2 y\right)\right]$$

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \Longrightarrow$$

$$\therefore\ u_y = \frac{q}{2EI}\left[\left(\frac{h^2}{2}y^2 - \frac{y^4}{12} - \frac{2}{3}h^3 y\right) - \nu(\ell^2 - x^2)\frac{y^2}{2} - \nu\left(\frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{5}h^2 y^2\right)\right] + c_2(x)$$

$$e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = -\frac{(1+\nu)q}{2EI}(h^2 - y^2)x$$

$$\therefore\ e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{4EI}\left[\left(\ell^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + \left(2y^2 - \frac{2}{5}h^2\right)x - \nu x(h^2 - y^2)\right] + \frac{1}{2}\frac{dc_1(y)}{dy} +$$

$$\frac{q}{4EI}\left[(-\nu)(-2x)\frac{y^2}{2}\right] + \frac{dc_2(x)}{dx} = \frac{-(1+\nu)q}{2EI}(h^2 - y^2)x$$

ضرایب x و y را در دو طرف مساوی قرار میدهیم :

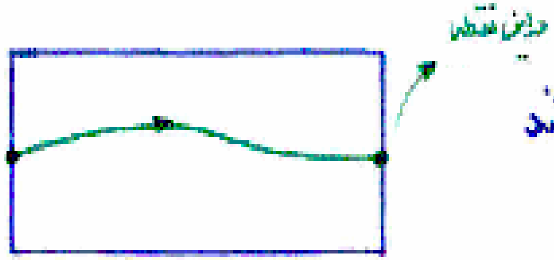
$$\frac{1}{4EI}\left[\ell^2 x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}h^2 x - \nu h^2 x\right] + \frac{1}{2}\frac{dc_2(x)}{dx} + \frac{(1+\nu)q}{2EI}h^2 x = 0$$

ولذا :

$$\ell^2 x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}h^2 x - \nu h^2 x + \frac{2EI}{q}\cdot\frac{dC_2(x)}{dx} + 2h^2 x + 2\nu h^2 x = 0$$

$$-\frac{q}{2EI}\left[\left(\ell^2 + \frac{8}{5}h^2 + \nu h^2\right)x - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{dC_2(x)}{dx} \qquad C_2(x) = \dots$$

با در نظر گرفتن اینکه جهت تیر شرایط زیر را داریم :



تیر روی دو تکیه گاه ساده واقع شده و U_x و U_y این نقاط صفر هستند

و به همین ترتیب ثابتهای انتگرالگیری محاسبه میشوند.

$$U_y = \frac{5}{24}\frac{q\ell^4}{EI}\left[1 + \frac{12}{5}\frac{h^2}{\ell^2}\left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right)\right] - \frac{q}{2EI}\left[\frac{\ell^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{h^2 x^2}{5} + \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)h^2 x^2\right]$$

در مقایسه رابطه بدست آمده فوق با رابطه‌ای که از مقاومت مصالح بدست می‌آید داریم

$$\rho = \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} = \frac{1}{EI}M(x) = \frac{1}{EI}q\left(\frac{\ell^2 - x^2}{2}\right) \qquad \text{یا} \qquad M = EI\rho$$

و از رابطه فوق داشتیم :

$$\rho = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \frac{q}{EI}\left[\frac{\ell^2 - x^2}{2} + h^2\left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right)\right]$$

اختلاف موجود بخاطر تغییر شکل ناشی از برش میباشد منظور شود؛ آن بخاطر ارتفاع زیاد h است

بنابراین دستورهای ارتجاعی تصحیح میشود

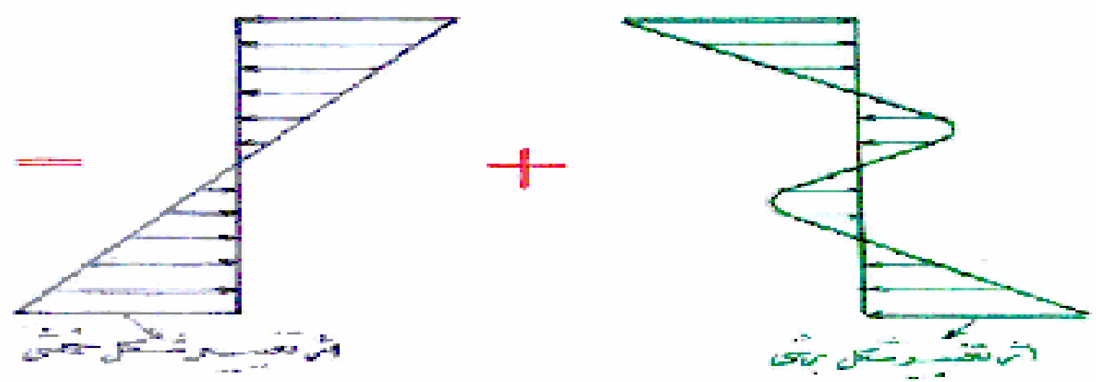
$$M = EI(\rho - \bar{\rho})$$

$$\rho - \frac{qh^2}{EI}\left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right) = \frac{M(x)}{EI}$$

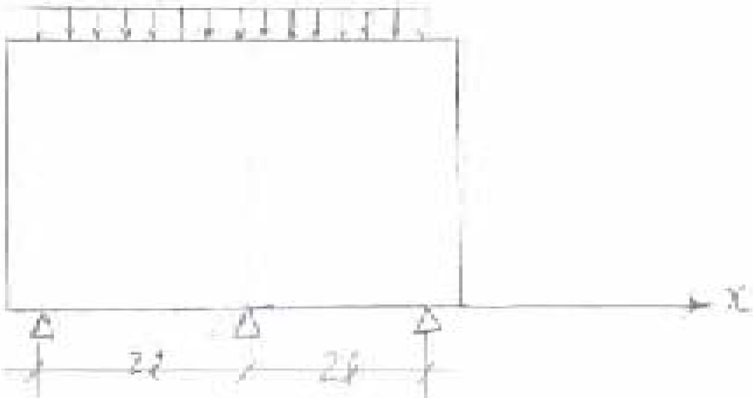
$$M(x) = EI\Big[\rho - \underbrace{\frac{qh^2}{EI}\left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right)}_{\bar{\rho}}\Big]$$

انحنای ناشی از برش − انحنای کل = انحنای ناشی از خمش

$\sigma_{xx} =$



مسئله :



تیر تیغه ای بطول نامحدود داریم که در فواصل $2l$ روی تکیه گاه قرار دارد . محور x و y را

مطابق شکل در نظر می گیریم

تابع تنش را بصورت زیر در نظر می گیریم :

$$\phi(x,y) = A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} \operatorname{Sh}\frac{n\pi y}{l} + C_{2n} \operatorname{Ch}\frac{n\pi y}{l} \right.$$

$$\left. + C_{3n} y \operatorname{Sh}\frac{n\pi y}{l} + C_{4n} y \operatorname{Ch}\frac{n\pi y}{l} \right) \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2A_3 + \sum_{n=1}^{\infty} k\Big[k\left(C_{1n}\,\mathrm{sh}\,ky + C_{2n}\,\mathrm{ch}\,ky + C_{3n}\,y\,\mathrm{sh}\,ky\right.$$

$$\left. + C_{4n}\,y\,\mathrm{ch}\,ky\right) + 2\left(C_{3n}\,\mathrm{ch}\,ky + C_{4n}\,\mathrm{sh}\,ky\right)\Big]\cos kx$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2A_1 - \sum_{n=1}^{\infty} k^2\left(C_{1n}\,\mathrm{sh}\,ky + C_{2n}\,\mathrm{ch}\,ky + C_{3n}\,y\,\mathrm{sh}\,ky\right.$$

$$\left. + C_{4n}\,y\,\mathrm{ch}\,ky\right)\cos kx$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -A_2 + \sum_{n=1}^{\infty} k\Big[k\left(C_{1n}\,\mathrm{ch}\,ky + C_{2n}\,\mathrm{sh}\,ky + C_{3n}\,y\,\mathrm{ch}\,ky\right.$$

$$\left. + C_{4n}\,y\,\mathrm{sh}\,ky\right) + C_{3n}\,\mathrm{sh}\,ky + C_{4n}\,\mathrm{ch}\,ky\Big]\sin kx$$

فرض می کنیم تکیه گاه ها بدون اصطکاک هستند و به صورت عکس العمل نسبت به تیر عمل می کنند واین عکس العمل $2ql$ خواهد بود.

شرایط حدی عبارتند از:

۱- ساختمان نسبت به محور y قرینه می باشد.

۲- در لبه تحتانی تیر تنشهای σ_{yy} و τ_{xy} صفر می باشد

۳- در مقطعی که در شکل مشخص می باشد داریم:

1) $\forall y \quad \int_0^l \sigma_{yy}\, dx = -ql$

$$2A_1 l - \sum_{n=1}^{\infty} k\left(C_{1n}\,\mathrm{sh}\,ky + C_{2n}\,\mathrm{ch}\,ky + C_{3n}\, y\,\mathrm{sh}\,ky + C_{4n}\, y\,\mathrm{ch}\,ky\right)$$

$$\times\left[\sin kl - \sin 0\right] = -ql$$

$$\sin kl = \sin \frac{n\pi l}{l} = \sin n\pi = 0$$

$$\therefore \quad 2A_1 l = -ql \Longrightarrow \boxed{A_1 = -\frac{q}{2}}$$

2) $x=0 \quad \forall y \quad \sigma_{xy}=0$

$$\sigma_{xy}\Big]_{x=0} = -A_2+\sum_{n=1}^{\infty} k\left[k\,(C_{1n}\,Ch\,ky + C_{2n}\,Sh\,ky + \cdots\right]_{x_0} = 0$$

$\therefore A_2 = 0$

رابطهٔ دیگری از شرایط مرزی عبارت است از :

3) $y=0 \;,\; \forall x \neq 0 \;;\; \neq 2l \qquad \sigma_{yy}=0$

$\sigma_{xy}=0$

$$\sigma_{xy}\Big]_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} k(kC_{1n}+C_{4n})\sin k\pi = 0$$

چون $\sin k\pi = 0 \implies kC_{1n}+C_{4n}=0 \implies C_{4n}=-kC_{1n}$

رابطه بعدی جهت شرایط مرزی (قسمتی از شرایط مرزی 2 می باشد)

4) $y=0 \quad \forall x \neq 0 \ , \mp 2l \qquad \sigma_{yy}=0$

$$2A_1 - \sum_{n=1}^{\infty} k^2 (C_{2n}) \cos kx = 0 \qquad \implies A_1 = \frac{-q}{2}$$

$$q + \sum_{n=1}^{\infty} k^2 C_{2n} \cos kx = 0 \qquad \implies q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos kx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$q = q_1 \cos\frac{\pi x}{l} + q_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \dots + q_m \cos\frac{m\pi x}{l} + \dots + q_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \dots$$

$$q \cos\frac{m\pi x}{l} = q_1 \cos\frac{\pi x}{l} \cos\frac{m\pi x}{l} + \dots + q_m \cos^2\frac{m\pi x}{l} + \dots + q_n \cos\frac{m\pi x}{l}$$

از طرفین انتگرال می گیریم :

$$\int_0^{2l} q \cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0 + \dots + \int_0^{2l} q_m \cos^2\frac{m\pi x}{l}\,dx + \dots + 0$$

$$q \int_0^{2l} \cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = q_m \int_0^{2l} \cos^2\frac{m\pi x}{l}\,dx \Rightarrow q_m = -2q$$

$$q = -2q \sum_{n=1}^{\infty} \cos Kx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-2q + K^2 C_{2n}) \cos Kx = 0$$

$$K^2 C_{2n} = 2q \Rightarrow \boxed{C_{2n} = \frac{2q}{K2}}$$

شرط مرزی بعدی : برش اولیه فوقانی تیر وجود ندارد یعنی :

$\sigma_{xy}=0$ می باشد $\quad$ 5) $y=h \;,\; \forall x \quad \sigma_{xy}=0$

$$\sigma_{xy}\Big]_{y=h}=\sum_{n=1}^{\infty} k\Big[k\,(C_{1n}\, ch\,kh + C_{2n}\, sh\,kh + C_{3n} h\, ch\,kh + C_{4n} h\, sh\,kh) + (C_{3n}\, sh\,kh + C_{4n}\, ch\,kh)\Big] \times \sin kx = 0$$

قبلاً داشتیم :

$$C_{4n}=-k\,C_{1n}$$

$$C_{2n}=\frac{2q}{k^2}$$

$$k\,(C_{1n}\, ch\,kh + \frac{2q}{k^2}\, sh\,kh + C_{3n} h\, ch\,kh - k\,C_{1n}\, sh\,kh + C_{3n}\, sh\,kh - k\,C_{1n}\, ch\,kh = 0$$

$$-k^2 C_{1n} h\, sh\,kh + C_{3n}(kh\, ch\,kh + sh\,kh) = -\frac{2q}{k}\, sh\,kh \qquad \mathrm{I}$$

تنش‌های σ_{yy} در سطح فوقانی به ازای کلیه نقاط برابر $-q$ باید باشد

b) $y=h;\ \forall x \quad \sigma_{yy} = -q$

$$\sigma_{yy}\Big]_{y=h} = q + \sum_{n=1}^{\infty} k^2 \cos kx\,(C_{1n}\, sh\,kh + C_{2n}\, ch\,kh$$

$$+ C_{3n} h\, sh\,kh + C_{4n} h\, ch\,kh) = -q$$

چون $k^2 \cos kx$ مخالف صفر می‌باشد مقدار داخل پرانتز باید صفر باشد:

$$C_{1n}(sh\,kh - kh\, ch\,kh) + C_{3n} h\, sh\,kh = -\frac{2q}{k^2}\, ch\,kh \qquad \mathrm{II}$$

از حل دو معادله I و II که دارای دو مجهول می‌باشند جوابهای صفحه بعد حاصل

می‌گردد:

پلاستیسیته

اگر مؤلفه های تنش از مقادیر معین تجاوز نمایند ، اغلب مواد دچار تغییر شکل دائمی و یا تغییر شکل غیر قابل برگشت و یا پلاستیک می شوند. همانطور که در تئوری الاستیسیته ملاحظه شد تانسور تنش به دو بخش تنش هیدروستاتیک و انحراف آور تانسور تنش تقسیم گردید ، منطقی است اگر فرض شود که حالت تنش هیدروستاتیک صرفاً موجب کاهش درجه یک جامد ارتجاعی میگردد و این کاهش درجه بعد از باربرداری کاملاً حذف می شود ، این لغزش بخشهای مختلف جامد نسبت به یکدیگر (یا به عبارتی اثر انحراف آور تانسور تنش) است که موجب تغییر شکل دائمی می شود.

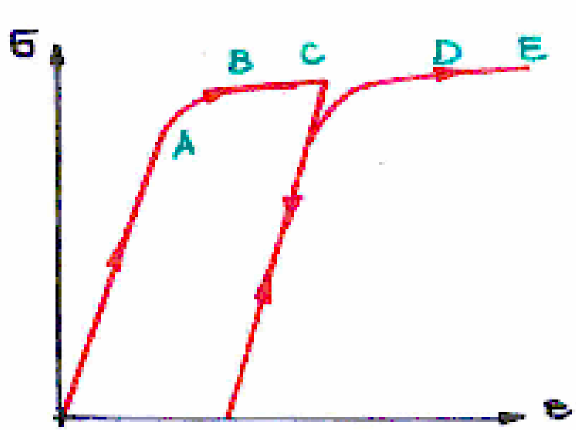
بنابراین پلاستیسیته اصولاً بررسی اثر تنشهای برشی بر مواد می باشد

فرضیات : برای حل مسائل در پلاستیسیته قبول فرضهای ساده کننده ضرورت دارد :

- اولاً فرض می شود که ماده همگن است (دارای خواص مکانیکی یکسان در کلیه جهات) و در طی تغییر شکل پلاستیک همگن باقی می ماند. هر چند واضح است که تغییر شکل ناهمگن ایجاد می کند

- ثانیاً فرض می شود که قبل از جریان پلاستیک، ماده دقیقاً از قانون هوک پیروی نماید و سپس در یک تنش حدی کاملاً مشخص دچار تغییر شکل پلاستیک گردد

نمودار تنش - تغییر شکل نسبی (کرنش)



برای ترسیم نمودار تنش - کرنش، معمولاً یک نمونه از ماده که دارای سطح مقطع یکنواخت می باشد بطور محوری کشیده یا فشرده می شود و منحنی بارگذاری و باربرداری به شکل زیر ترسیم می گردد :

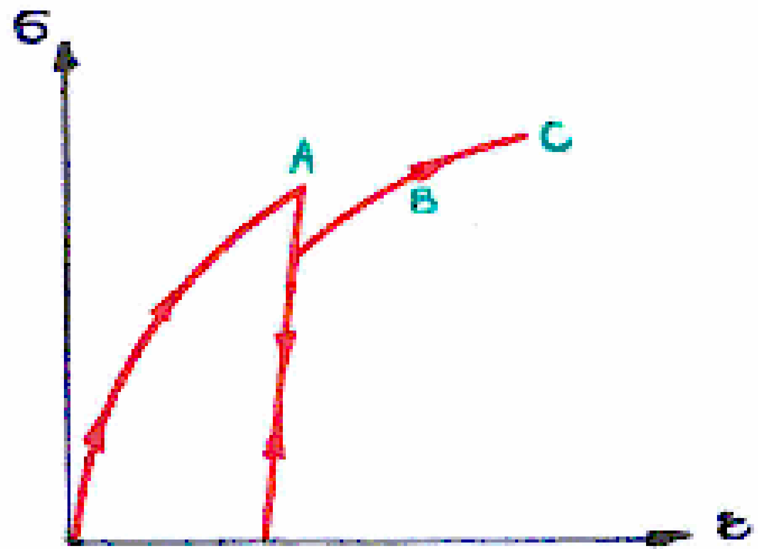
اگر طول نمونه تحت بارگذاری تغییر یابد مقادیر کرنش مهندسی و تئوری ارتجاعی به ترتیب e و ε خواهند بود

همانطور که در شکل ملاحظه می شود تا نقطه A تغییر شکلها ارتجاعی اند ولی بعد از نقطه A که تنش حدی می باشد، تغییر شکل ارتجاعی نیست. چرا که انرژی شکل در صورت باربرداری در نقطه C تنش حدی افزایش می یابد. برای مهندسین تنشهای حدی حائز اهمیت می باشند. معمولاً آنها تنش ها را در جسم به درصدی از این تنش محدود می سازند (با استفاده از ضرایب اطمینان).

البته باید گفت که درباره ای از مواد نظیر آلومینیم، مس، تا اندازه و ... منحنی دارای بخشهای افقی نمی باشد و لذا نمی توان یک تنش حدی مشخص برای این مواد معین نمود در این دسته از مواد تغییر شکل دائمی تحت بارگذاری ناچیز آغاز می شود (ناحیه ارتجاعی عملاً وجود ندارد). اگر در یک مرحله از بارگذاری از نمونه باربرداری شود، ملاحظه می شود

که باربرداری خطی مستقیم با شیب زیاد و بار است و در بارگذاری مجدد نمونه رفتار

ارتجاعی قابل ملاحظه مشاهده می‌شود .



مقدار نقطه تنش حدی معین در

این مواد برای مهندسین مشکل ساز است ؛

لذا جهت یافتن یک مبنای منطقی تنش گواه

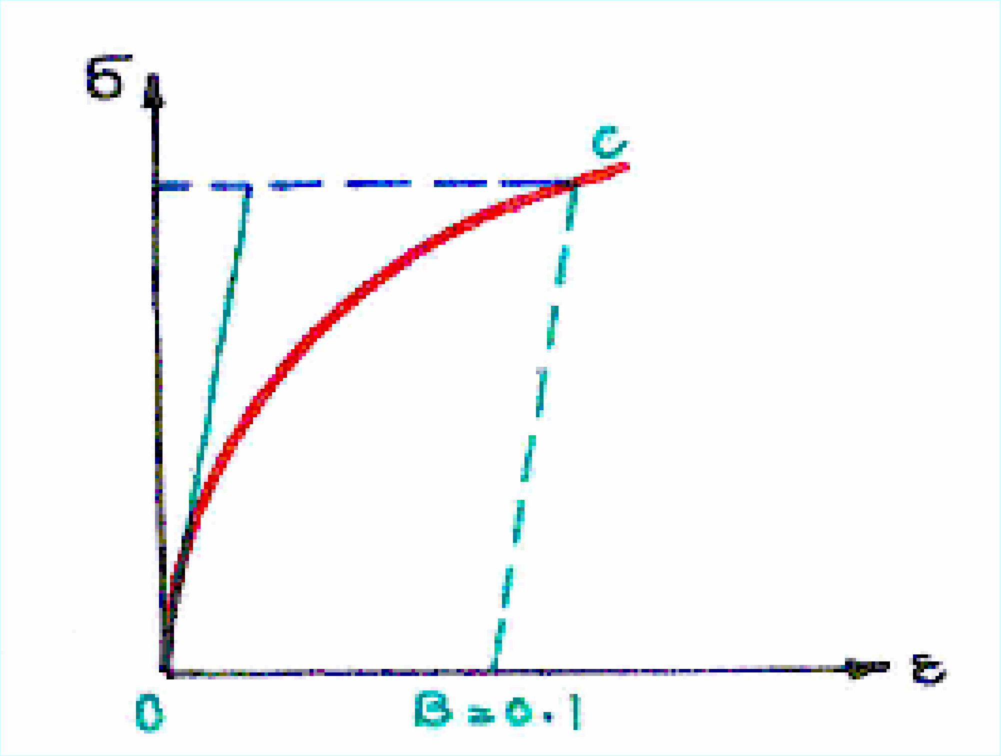
تعریف می گردد .

بدین صورت که مماس در مرکز منحنی رسم می گردد و سپس خط BC به موازات مماس

رسم می گردد ؛ بطوریکه OB برابر 0.1 باشد . مقدار تنش که در نقطه C موجب

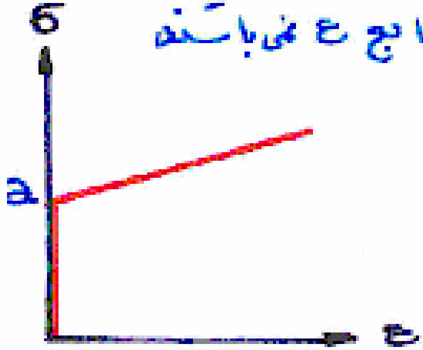
ایجاد تغییر شکل غیر پلاستیک به میزان 0.1 میگردد تنش گواه 0.1 نامیده می‌شود

تنش گواه



معادلات تقریبی برای منحنی تنش - کرنش

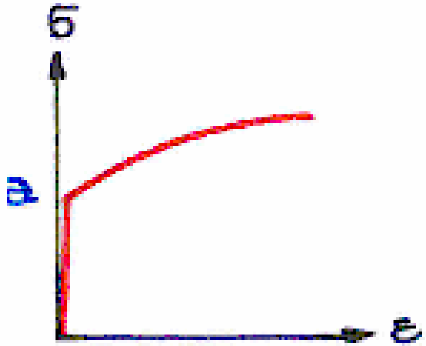
دو معادله مشهور در این زمینه وجود دارد که یکی فرمول Ludwik ($\sigma = a + b\varepsilon^n$) و دیگری تعریض منحنی پیوسته تجربی با دو خط مستقیم می‌باشد. در فرمول لودویک a، b و n ثابت تابع ε نمی‌باشند.



در این فرمول:

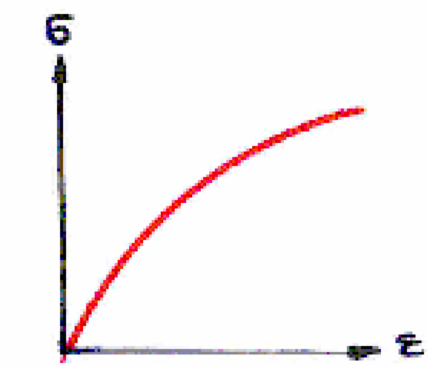
الف) اگر $n=1$ باشد، فرمول معرف یک جسم صلب پلاستیک با تنش حدی a است.

$n=1$



ب) اگر $n>1$ باشد، قسمت دوم منحنی خطی نبوده یک منحنی می‌باشد ولی a همان تنش حدی است.

$n>1$

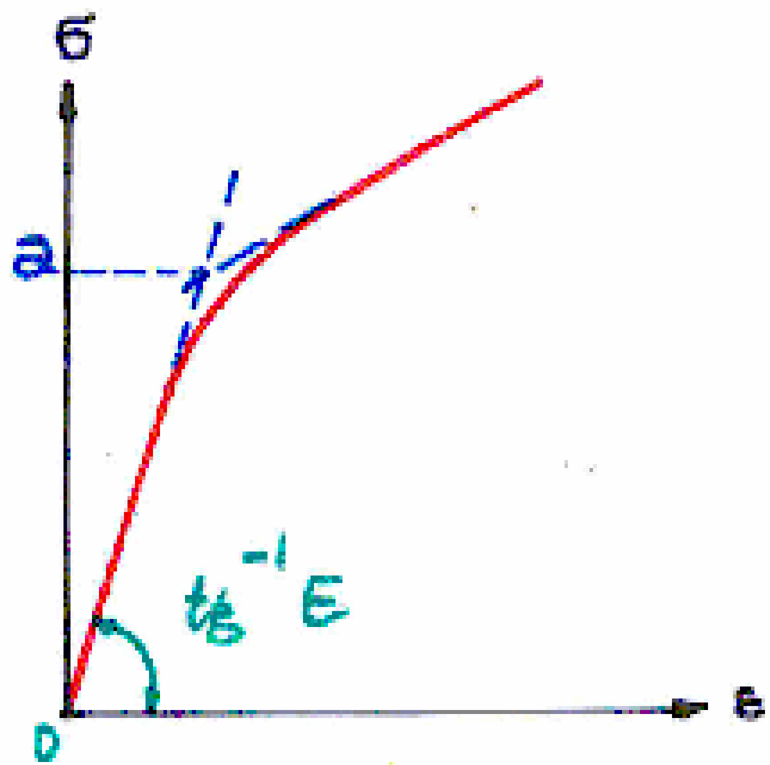


ج) اگر $n<1$ ، $a=0$ باشد، ماده معرفی شده توسط فرمول فاقد رفتار ارتجاعی است و نقطه تنش حدی مشخصی را نیز ندارد.

$n<1$
$a=0$

در روش تعویض منحنی پیوسته تجربی با دو خط مستقیم یک خط $\sigma = E\epsilon$ از مرکز تا $\sigma = a$

و خط $\sigma = P\epsilon$ برای مقادیر σ بیشتر از a معتبر تشخیص داده می‌شود.



دو ضریب E و P در این روابط،

ضریب ارتجاعی و ضریب پلاستیک

نامگذاری می‌شوند.

پدیده پلاستیسیته در ساختمان اتمی مواد

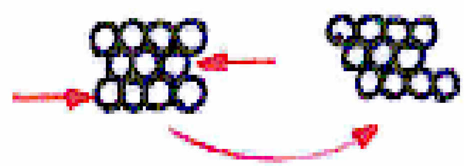
از نظر مهندسین دو مساله حائز اهمیت در بحث پلاستیسیته وجود دارد

اول اینکه تا چه حد ممکن است در عملیات تولیدی مختلف ماده بدون گسیختگی دچار تغییر شکل پلاستیک گردد

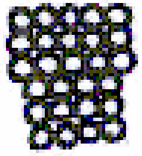
دیگر اینکه با چه دقت نیرو برای اجرا و یک عمل مشخص تولیدی اعمال گردد

نسبت به تئوریهای جدید، تغییر شکل پلاستیک به علت حرکت پیچیده و غیر قابل بازگشت گروههایی از اتمها می باشد

اگر گروهی از اتمها مطابق شکل روبرو بارگذاری گردند، ممکن است که فرض شود تحت



اثر نیروی وارده یک ردیف از این اتمها بر روی ردیف دیگر لغزیده و مکان پایدار جدیدی را اشغال می نمایند. واضح است که لغزش اتمها بطریقی که در شکل بالا تصویر گردیده، مستلزم غلبه نمودن بر نیروهای متقابل اتصالی تعداد بسیار زیادی اتمها می باشد. نیروی لازم جهت حرکت اتمها بطرز مذکور مابین صد تا هزار برابر نیروی لازم جهت تغییر شکل پلاستیک است و لذا چگونگی تغییر شکل پلاستیک بایستی با چگونگی مزبور متفاوت باشد

بمنظور توجیه پدیده تغییر شکل پلاستیک وجود نواقص بنام جابجائی را در ساختمان بلوری مورد قبول قرار گرفته و فرض گردیده که حرکت این نواقص بلوری موجب  تغییر شکل پلاستیک می شود

تئوری جریان پلاستیک

برای تئوری جریان پلاستیک در مواد باید شرایطی را جستجو نمود که در آن روابط تنش-کرنش ارتجاعی معتبر نگردد البته باید گفت بعضی از مواد بدون تغییر شکل پلاستیک قابل ملاحظه دچار شکستگی و یا انقطاع می شود، تئوری پلاستیسیته به تشریح رفتار مکانیکی چنین موادی کمکی نمی کند. سایر مواد قبل از گسیختگی دچار تغییر شکل پلاستیک فراوانی می گردند، تئوری پلاستیسیته می تواند رفتار این مواد را بیان نماید

تئوری تنش برشی حداکثر ترسکا

تئوری پلاستیک فون میزز

این دو تئوری علی الخصوص در رابطه با فلزات کاربردی ترین تئوریها می باشند

البته باید گفت قبل از این دو تئوری می توان از تئوریهای منسوخ تنش حدی نام برد

---

۱) تئوری تنش حداکثر : بنابراین تئوری تنش اصلی حداکثر صرف نظر از مقادیر دو تنش اصلی دیگر حاکم بر شکست می باشد. بر طبق این تئوری ماده بایستی تحت تنش هیدروستاتیک بیبار هر نوع تسلیم گردد و این پیش بینی برخلاف مشاهدات تجربی است

۲) تئوری تنش اصلی حداکثر : برطبق این تئوری تغییر شکل نسبی اصلی ارتجاعی کششی حداکثر حد اکثر شکست ماده است. مطابق این تئوری نمونه در کشش و در فشار هر دو تسلیم می گردد. بعبارت دیگر تنش تسلیم در فشار محوری سه و یا چهار برابر تنش تسلیم در کشش محوری میباشد $\frac{\sigma_t}{E} = \frac{\nu \sigma_c}{E}$ و یا $\nu = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}$ و این نتیجه خلاف مشاهدات تجربی است

۳) تئوری انرژی تغییر شکل حداکثر : در حالت تنش ساده، انرژی تغییر شکل واحد حجم از رابطه ... ، $V = \frac{1}{2}\sigma e$ محاسبه میگردد. ملاحظه می شود که با تقویت حالت تنش هیدرواستاتیک مقدار انرژی تغییر شکل ذخیره شده در جسم را می توان افزایش داد، لذا مقدار لا مینیمم تعیین کننده آغاز تسلیم در ماده باشد

تئوری ترسکا

ترسکا در طی آزمایشهایی فلزات را تحت فشار از حدیده عبور داد و مشاهده کرد که در کلیه موارد در آغاز تسلیم تنش برشی حداکثر مقدار معینی را کسب می کند

اگر $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ باشد تنش برشی حداکثر از فرمول $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ بدست می آید و لذا مطابق مشاهدات ترسکا شرط آغاز تسلیم برقراری رابطه $cte = \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ می باشد

اگر ملاک تسلیم ترسکا برای کلیه حالات تنش معتبر باشد ثابت ترسکا را از این اصل می توان محاسبه نمود

اگر فرض شود که Y تنش تسلیم در کشش ساده و یک بعدی و K تنش تسلیم در برش خالص باشد داریم:

در کشش یک بعدی $\sigma_1 = Y$ $\quad \sigma_2 = 0$ $\quad \sigma_3 = 0$

و در برش خالص $\sigma_1 = K$ $\quad \sigma_3 = -K$ $\quad \sigma_2 = 0$

لذا خواهیم داشت:

$$2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_3 = Y = 2K$$

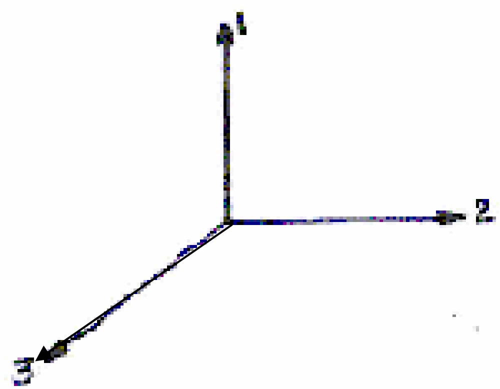
تئوری فون میسز

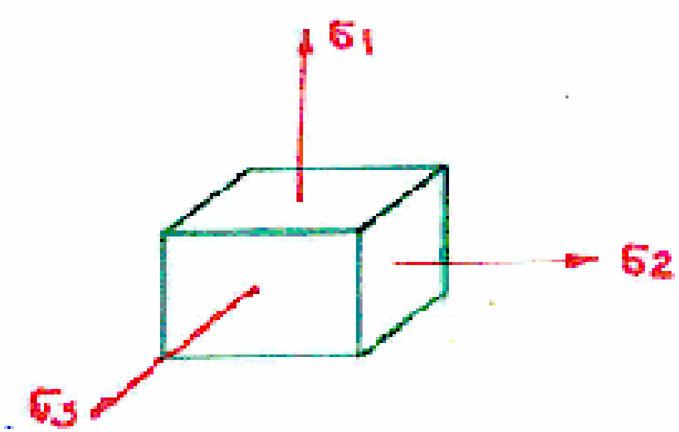
بنا براین تئوری اگر مقدار انرژی تغییر شکل برشی ذخیره شده در جسم به مقدار معینی برسد، تسلیم آغاز می‌شود و در حالت تنش سه بعدی می‌توان تنش‌های اصلی را بصورت زیر نوشت :

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) + \frac{1}{3}(\sigma_1-\sigma_2) + \frac{1}{3}(\sigma_1-\sigma_3)$$

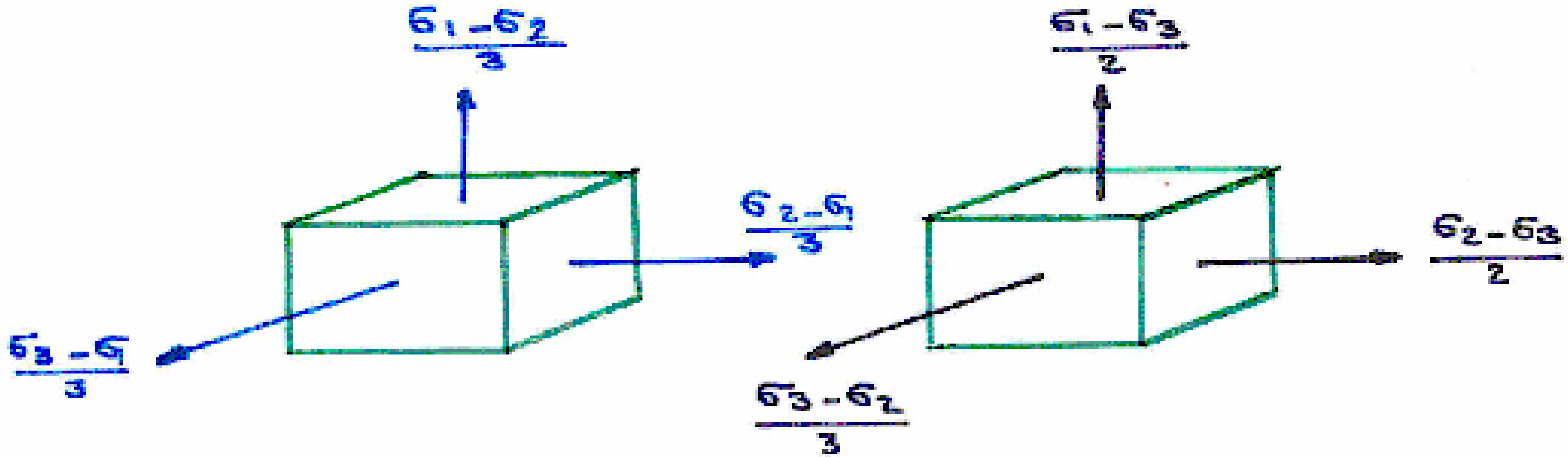
$$\sigma_2 = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) + \frac{1}{3}(\sigma_2-\sigma_3) + \frac{1}{3}(\sigma_2-\sigma_1)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) + \frac{1}{3}(\sigma_3-\sigma_1) + \frac{1}{3}(\sigma_3-\sigma_2)$$





جمله اول دیگر یکی از روابط فوق تنش هیدرواستاتیک σ_m می باشد. این تنش مدل صرفاً موجب تغییر حجم میگردد ولی جملات دوم و سوم متناسب با تنش برشی حداکثر بوده و موجب تغییر شکل و ذخیره شدن انرژی تغییر شکل برشی می شوند.



تغییر حجم نسبی از رابطه $e_V = e_1 + e_2 + e_3$ بدست می آید، لذا داریم:

$$e_V = \left[\frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2+\sigma_3)\right] + \left[\frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_3)\right] + \left[\frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\right]$$

$$e_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

ولی میدانیم که انرژی تغییر شکل که توأم با تغییر حجم خالص می باشد : از رابطه :

$$U_v = \frac{1}{2} \quad (\text{تنش متوسط}) \times (\text{تغییر شکل نسبی حجمی})$$

بدست می آید لذا :

$$U_v = \frac{1}{6} \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \right) \times e_v$$

$$U_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{6} \times \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{E} (1 - 2\nu)$$

$$U_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \right)^2$$

و همینطور می دانیم که تغییر شکل نسبی (کرنش مهندسی) سه بعدی از روابط زیر بدست می آید :

$$e_1 = \frac{1}{E} \left[\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3) \right]$$

$$e_2 = \frac{1}{E} \left[\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3) \right]$$

$$e_3 = \frac{1}{E} \left[\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2) \right]$$

وانرژی تغییر شکل کل از رابطه زیر بدست خواهد آمد :

$$\text{انرژی تغییر شکل کل} \quad E_t = \frac{1}{2}(\text{تغییر شکل نسبی}) \times (\text{تنش})$$

$$E_t = \frac{1}{2}(\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3)$$

$$E_t = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right)$$

بنابراین انرژی کرنش برشی برابر اختلاف دو انرژی فوق است :

$$\text{انرژی تغییر شکل برشی} \quad E_V = E_t - E_U = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

اگر از رابطه $\frac{E}{2G} = (1+\nu)$ استفاده نمائیم :

$$E_V = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 = Cte \quad \text{مقداری معین است}$$

لذا اگر Y و K به ترتیب تنش تسلیم در کشش و تنش تسلیم در برش باشند و باز حالات کشش ساده و برش خالص را در نظر بگیریم:

کشش ساده $\qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \qquad \sigma_1 = Y$

برش خالص $\qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_1 = -\sigma_3 = K$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2Y^2 = 6K^2$$

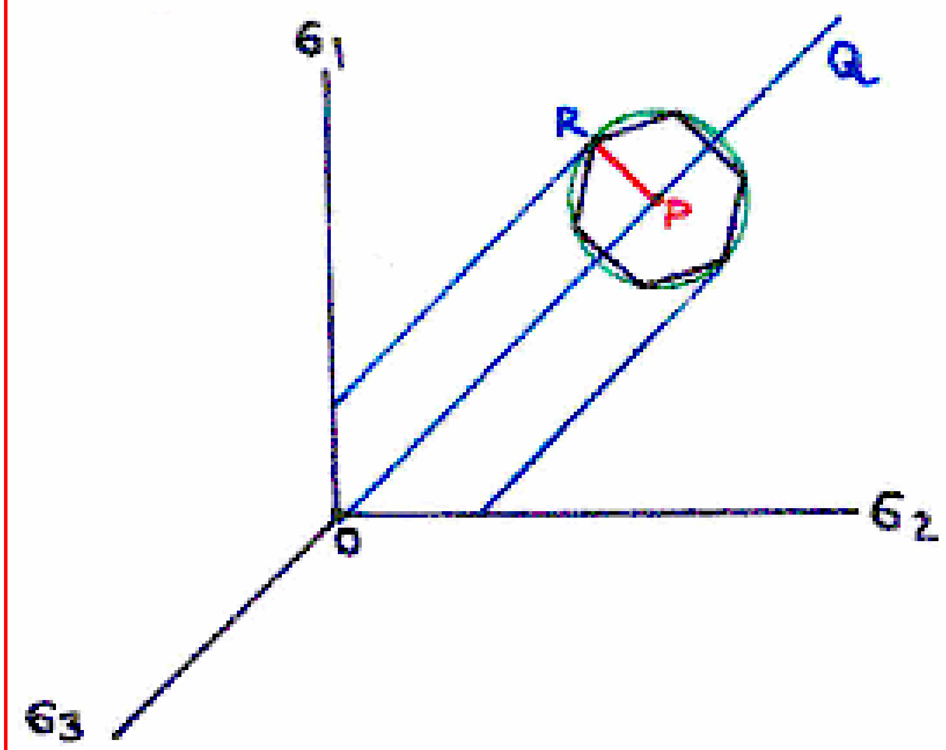
لذا:

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{Y}{2}\right)$$

که ثابت میکند که تنش تسلیم در برش خالص بر طبق تئوری فون میزز از تنش برشی حداکثر در کشش ساده می باشد، که بنا به تئوری ترسکا این دو کمیت برابر میبودند.

تئوری ترسکا $\quad \frac{Y}{2} = K \qquad$ تئوری فون میزز $\quad \frac{Y}{2} = 1.155K$

نمایش هندسی تئوری‌های ترسکا و ون میزز



اگر مختصات کارتزین تنشهای اصلی را در نظر بگیریم و خط OQ که با محورهای مختصات زوایای مساوی می سازد محل تحلیل حالات تنش هیدروستاتیک باشد که این تنش موجب تسلیم نمیشود و اگر یک حالت تنش معین با نقطه R در فضای تنشهای اصلی مشخص گردد و RP میزان انحراف تنش هیدروستاتیک باشد در تئوری ارتعاشی نشان دادیم که :

$$(RP)^2 = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]$$

و بر طبق تئوری فون میزز داریم :

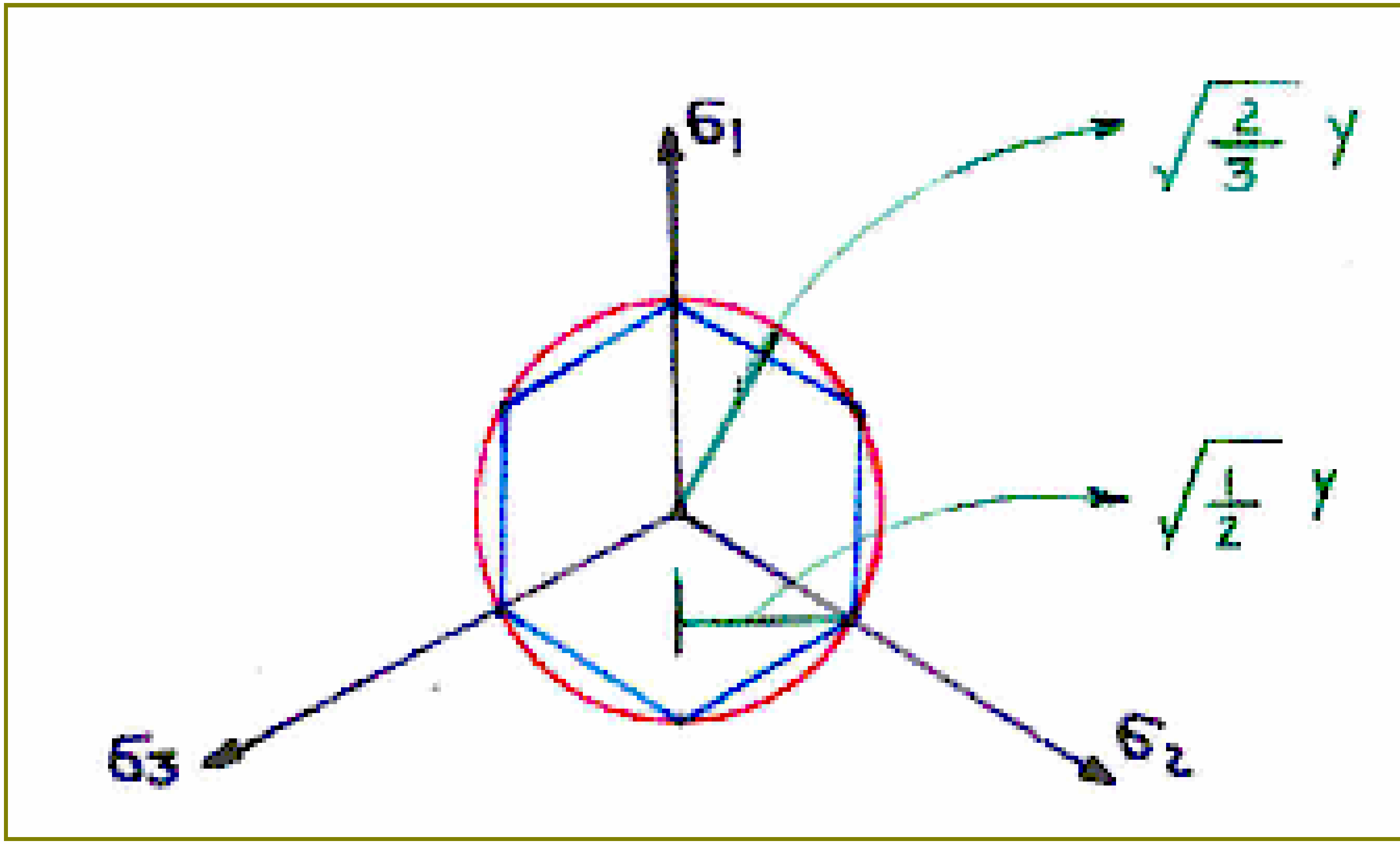
$$2Y^2 = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]$$

لذا در نقطهٔ گسیختگی داریم : $RP = Y\sqrt{\frac{2}{3}}$

بنابراین معیار فون میزز بصورت یک استوانه به شعاع $\sqrt{\frac{2}{3}}\,Y$ که در آن با محورهای مختصات اصلی زوایای برابری می‌سازد نشان داده می‌شود.

لذا مقدار تنش در داخل این استوانه موجب گسیختگی نمی‌گردد.

و تئوری ترسکا . $\sigma_1 - \sigma_3 = Y$ معرف یک استوانهٔ شش ضلعی می‌باشد که محور آن با محور استوانهٔ فون میزز یکسان است و در داخل آن مطابق شکل صفحهٔ بعد قرار دارد.



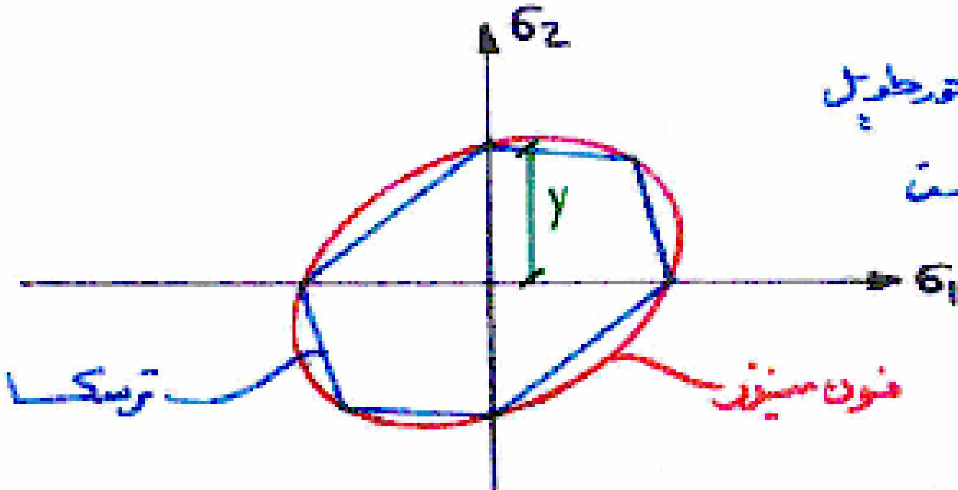
درحالت برش خالص اختلاف دوتئوری مقدار زیر است : $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\gamma$

تئوری ترسکا و فون میزز در حالت تنش مسطح

در حالت تنش مسطح $\sigma_3=0$ است . اگر علامت σ_1 و σ_2 یکسان باشد (هر دو کششی و یا هر دو فشاری باشند) شرط تسلیم ترسکا $\sigma_1 - 0 = Y$ خواهد بود، ولی اگر علامت σ_1 و σ_2 متضاد باشد، شرط تسلیم ترسکا $\sigma_1 - \sigma_2 = Y$ خواهد بود و معیار تسلیم فون میزز در صورت صفر بودن σ_3 به صورت زیر ساده می شود :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = Y^2$$

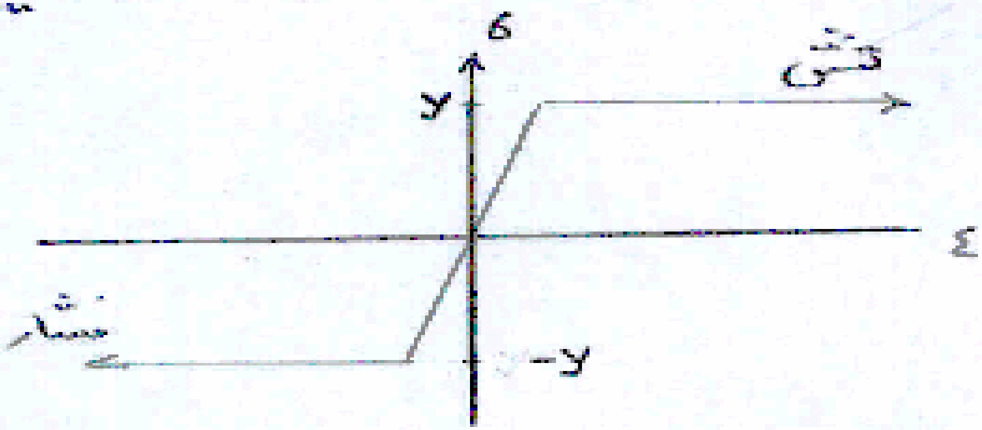
که این رابطه بیانگر یک بیضی است که محور طویل آن $2Y\sqrt{2}$ و محور کوچک آن $2Y\sqrt{\frac{2}{3}}$ است



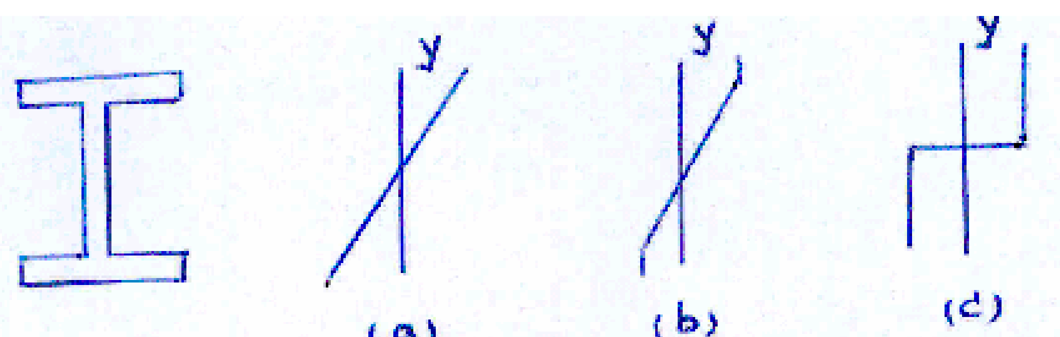
بعضی از کاربردهای تئوری پلاستیسیته

- لنگر مقاوم تیرها :

بمنظور ساده کردن محاسبات معمولاً روابط تنش به کرنش بصورت ایده آل شکل زیر نشان داده میشود.



اگر یک تیر I (تابع تئوری برمول تئوری ارتجاعی) لنگر افزایش یا بنحوی وارد شود توزیع تنش در تیر وقتی تنش خمشی در دورترین رشته ها از محور خنثی برابر با تنش تسلیم باشد بصورت زیر ترسیم می گردد.



تغییرات تنش و کرنش در عمق تیر خطی است و در لحظه ای که تسلیم در محیط
دور تیر آغاز می شود . لنگر تمام تیر از رابطه

$$M_E = \frac{\sigma_Y I}{y_{max}}$$

بدست می آید که در آن y_{max} فاصله دورترین رشته از محور وقتی باشد (شکل a)

اگر توزیع تنش در تیر را بعد از افزایش بیشتر لنگر خمشی بخواهید شکل (b) نمایانگر آن می باشد که نشان دهنده این است که تنش پلاستیک بطرف محور خنثی حرکت نموده . در این حالت لنگر تمام خمشی از دو بخش تشکیل می گردد .

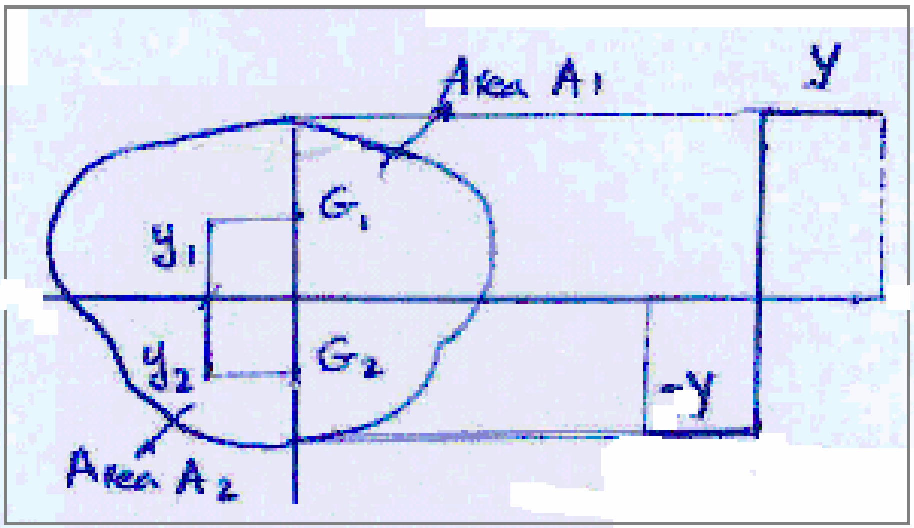
بخش اول بعلت مقاومت ارتجاعی قسمت درون تیر می باشد و بخش دوم بعلت توزیع تنش یکنواخت به شدت σ_Y در محیط بیرونی است .

افزایش بیشتر لنگر خمشی وارده موجب نفوذ بیشتر پلاستیسیته در طرف کوژ خمشی گردیده و بالاخره ناحیه پلاستیک بطوریکه در شکل (ب) دیده می شود بیکدیگر ملحق می شوند. در این لحظه تیر تماماً پلاستیک بوده و افزایش بسیار ناچیز لنگر وارده موجب افزایش بسیار زیاد در انحنای تیر می گردد.

مقدار لنگر تماماً پلاستیک مقاوم صرفاً بستگی بشکل مقطع تیر و تنش تسلیم ماده آن y دارد. در محاسبه لنگر تماماً پلاستیک بایستی بخاطر داشت که نیروی محوری بر تیر عمل نمی نماید. بعبارت دیگر برآیند توزیع تنش کشش و فشاری روی مقطع تیر یکسان است.

بنابراین در حالت تماماً پلاستیک محور خنثی سطح مقطع تیر را به دو ناحیه با مساحت مساوی تقسیم می نماید .

- تیر متقارن در حالت تماماً پلاستیک



مطابق شکل روبرو لنگر تماماً پلاستیک M_p از رابطه زیر محاسبه می شود

$$M_p = Y A_1 y_1 + Y A_1 y_2$$

ولی طبق فرض $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$ لذا $M_p = \frac{1}{2} A Y (y_1 + y_2)$

ضریب شکل

کسر $\frac{M_P}{M_E}$ ضریب شکل نام دارد. این ضریب صرفاً به شکل مقطع تیر بستگی دارد. مثلاً تیر مستطیلی $b \times d$

دارای M_E :
$$M_E = \frac{y I}{y} = y\left(bd^3/12\right)\left(\frac{2}{d}\right)$$

لنگر تمام پلاستیک M_P ،
$$M_P = \frac{bd}{2}\left(\frac{d}{4}+\frac{d}{4}\right)y = \frac{bd^2}{4}y$$

می‌باشد. لذا ضریب شکل عبارت است از:

$$\frac{M_P}{M_E} = \left(\frac{bd^2}{4}y\right)\times\left(\frac{6}{bd^2 y}\right) = 1.5$$

ضریب شکل جهت اشکال مختلف مقاطع محوری بین 1.15 برای تیرهای I شکل تا 1.7 برای تیرهای مدور می‌باشد.

لولای پلاستیک :

دیدیم که اگر دو ناحیه پلاستیک به یکدیگر متصل گردند یک افزایش بینهایت کوچک در مقدار لنگر خمشی وارده موجب افزایش بسیار زیاد در مقدار انحناء می‌گردد و در این لحظه مقطع تیر کلاً پلاستیک گردیده و لنگر مقاوم لنگر تماماً پلاستیک می‌باشد.

اگر در مقطعی از تیر لنگر مقاوم برابر لنگر پلاستیک گردد گفته میشود که در آن مقطع از تیر لولای پلاستیک ایجاد گردیده است.

میزان دوران در لولای پلاستیک بستگی به میزان گیرداری تیر دارد. مثلاً یک تیر ساده که در مرکز بطور نقطه‌ای بارگذاری گردیده است به محض ایجاد لولای پلاستیک در محل بارگذاری فرو می‌ریزد در حالیکه اگر همین تیر دو سر گیردار باشد لولای پلاستیک ایجاد شده موجب فروریختگی نخواهد شد.

چنین تیری در اثر ایجاد سه لولای پلاستیک (یکی در وسط و دو تا در انتها)
فرو خواهد ریخت.

– مثال :

یک تیرساره I (استاندارد انگلستان) بطور یکنواخت بارگذاری گردیده است
تنش تسلیم و تنش مجاز فولاد تیر به ترتیب $16 \; ton/in^2$ و
$10.5 \; ton/in^2$ می باشد. بنابراین باری که گسیختگی را آغاز می کند،
1.52 برابر بار مجاز است. از طرفی ضریب شکل $\frac{MP}{ME}$ برای تیرهای
I شکل انگلیسی در حدود 1.15 می باشد.
(نسبت بار گسیختگی به بار مجاز را ضریب بار می نامیم)

بدین ترتیب ضریب بار این تیر برابر است با $1.75 = 1.5 \times 1.15$

اگر تیر I شکلی با خصوصیات مشابه به طول l در دو انتها درگیر

گردیده و با بار گسترده بارگذاری گردد لنگر خمشی در مرکز $\frac{wl}{24}$ و در دو انتها

$\frac{wl}{12}$ می باشد. اگر w بتدریج افزایش یابد اول لنگر خمشی در دو انتها

به مقدار تمام پلاستیک خواهد رسید. چون افزایش در لنگر خمشی بطور خطی با

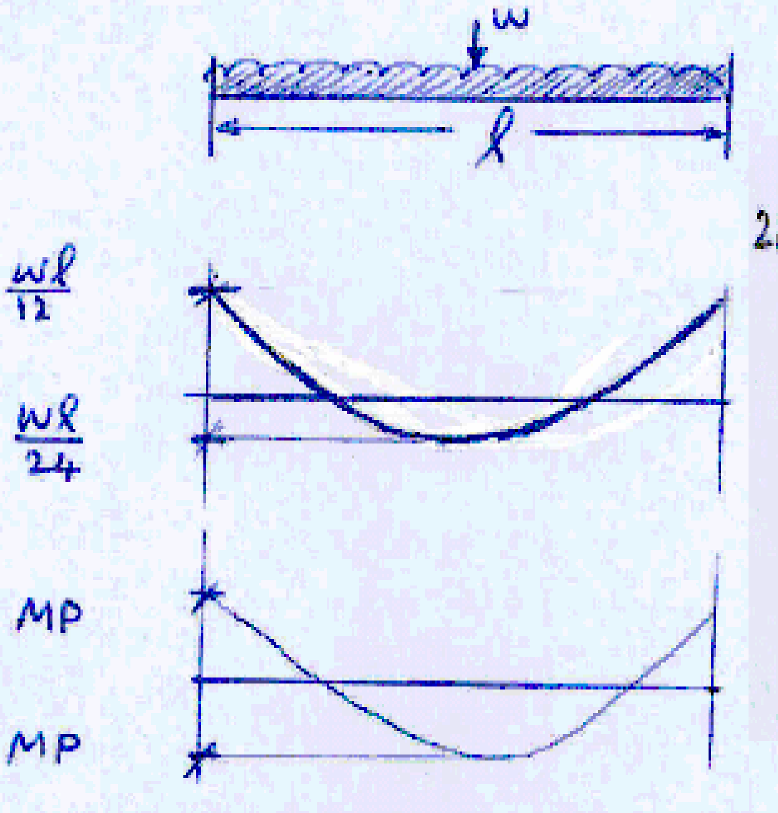
افزایش در بار مربوط است:

$$M_p = 1.75\,\frac{wl}{12}$$

ظهور لولای پلاستیک در دو انتها موجب فروریختگی تیر نخواهد شد

بلکه افزایش بیشتر بار وارده موجب ایجاد لولای پلاستیک در مرکز تیر

گردیده و فروریختگی رخ می دهد.



ملاحظه می شود که در لحظه ای که تیر فرو می ریزد کل ارتفاع دیاگرام لنگر خمشی 2Mp می باشد. درحالیکه ارتفاع دیاگرام لنگر خمشی وقتی تیر ارتجاعی میباشد برابر $\frac{wl}{8}$ است لذا:

$$M_p = 1.75\,\frac{wl}{12} \qquad 2M_P = (\text{ضریب بار}) \times \frac{wl}{8}$$

لذا:

$$\text{ضریب بار} = (1.75) \times \frac{16}{12} = 2.33$$

بنابراین اگر گیرداری در دو انتها به نحوی باشد که لنگر تماماً پلاستیک در دو سر تیر قبلی از فرو ریختن ایجاد گردد، ضریب فوق معتبر است.

ملاحظه می شود که اگر تنش مجاز برای هر دو تیر یکسان انتخاب گردد ضریب بار

تیر دو سر گیردار از ضریب بار تیر ساده بسیار بزرگتر است و ضرورتی برای

انتخاب ضریب بار بیشتر برای تیر دو سر گیردار مجوز نیست.

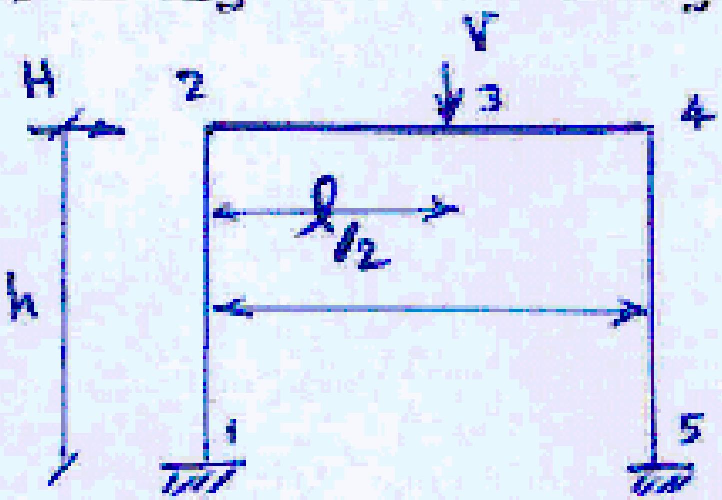
بایستی در نظر داشت که ضریب بار واقعی حاصله دستگاه از سقوط در مورد تحلیل

پلاستیک می باشد. چون، اگر بار مجاز در ضریب بار ضرب شود بار

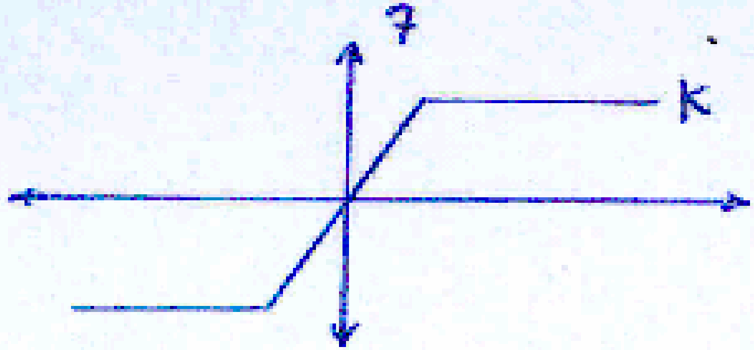
فروریختگی بدست می آید.

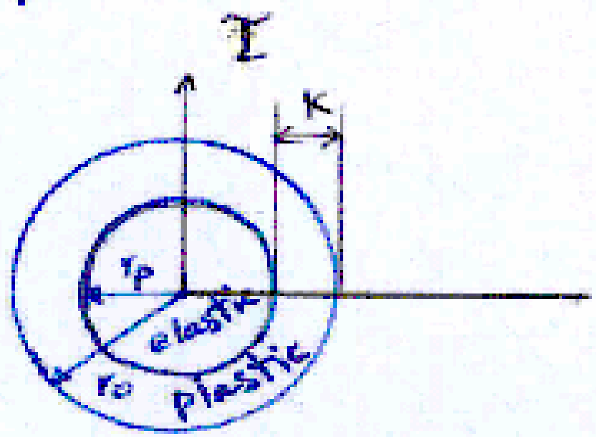
• مسئله ۱: ضریب بار را برای قاب شکل زیر محاسبه کنید.

فرض را براین بگیرید که مفاصل پلاستیک در نقاط ۱ و ۵ تشکیل می گردد.



● مسئله ۲ : اگر یک میله تیر فولادی فنری (تنش کرنش برشی) به صورت زیر فرض گردد و فرض گردد که تحت اثر بار وارده (پیچش تیر دوار) قسمت بیرونی تیر پلاستیک گردد.





شرایط پلاستیک شدن کل مقطع را تحقیق نمائید.

پلاستیسیته دو بعدي

تئوري پلاستيسيته دو بعدي كه اينجا به آن اشاره خواهد شد در حالت كرنش مسطح به صورت ذيل است.
(تئوري ميدان خط – افزايش حركت يك ماده صلب – مطلقاَ پلاستيك)

فرضيه هاي زير جهت اين تئوري مدنظر قرار مي گيرند:

الف – كرنش ارتجاعي كه قبل از آغاز تسليم رخ مي دهد ناچيز فرض شده و از آن صرف نظر مي گردد.
ب- ماده بدون لخت شدن تغيير شكل پلاستيك مي دهد.

علاوه بر اين در كاربرد تئوري در مسائل صنعتي از دو اثر ديگر نيزصرفنظر شده است:

۱-اثرات ميدان زماني تغيير شكل نسبي: از اثرات احتمالي يكسان نبودن ميزان زماني تغير شكل در نواحي مختلف جسم صرفنظر مي شود.

۲-اثرات تغيير درجه حرارت: بخشي از كار نيروهاي خارجي موجب تغيير شكل شده و بخشي ديگر مبدل به حرارت گرديده و موجب تغيير دماي جسم مي شود از اثرات احتمالي تغيير درجه حرارت بر خواص مكانيكي ماده صرفنظر مي شود.

صفحه x-y در نظر گرفته مي شود و چون پلاستيسته مسطح مورد بحث است بنابراين مولفه هاي V_x و V_y سرعت مستقل از z بوده و مولفه V_z ، صفر است.

میزان زماني كرنش عمودي با $\dot{e}_x$ ، $\dot{e}_y$ ، $\dot{e}_z$ و كرنش برشي با $\dot{\gamma}_{xy}$ ، $\dot{\gamma}_{yz}$ ، $\dot{\gamma}_{yx}$ مشخص مي شوند

با توجه به اينكه ماده مورد نظر صلب كاملاً پلاستيك فرض گرديده است

روابط زير (Levy-Von mises) معادلات قواعد جريان پلاستيك خواهد بود

$$\dot{e}_x = d\lambda^\circ \sigma'_x \qquad \dot{\gamma}_{yz} = d\lambda^\circ \tau_{yz}$$

$$\dot{e}_z = d\lambda^\circ \sigma'_z \qquad \dot{\gamma}_{xy} = d\lambda^\circ \tau_{xy}$$

$$\dot{e}_y = d\lambda^\circ \sigma'_y \qquad \dot{\gamma}_{xz} = d\lambda^\circ \tau_{xz}$$

كه در آن $d\lambda^\circ$ يك ضريب متناسب است كه مقدار آن بطور كلي از نقطه أي به نقطه ديگر تغيير مي كند

چون $V_z=0$ و V_x و V_y مستقل از z فرض گرديده لذا :

$$\dot{e}_z = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0$$

ولذا:

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

بدين ترتيب بنا به تعريف σ_z يك تنش اصلي، مثلاً $\sigma_y=\sigma_z$ مي باشد علاوه بر اين بر مبناي فرض تراكم ناپذيري ماده خواهيم داشت:

$$\dot{e}_x+\dot{e}_y+\dot{e}_z=0$$

ولذا $\dot{e}_x=-\dot{e}_y$ است

وخواهيد داشت

$$\dot{e}_z = \frac{2}{3} d\lambda^\circ \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right.$$

$$\dot{e}_z = 0 \longrightarrow \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

و مقدار دو تنش اصلي ديگرعبارت خواهد بود:

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \mp \left[\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]$$

و اگر از رابطه $\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ استفاده نمائيم روابط بالا به صورت

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \tau_{max}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 - \tau_{max}$$

در مي آيند و حالا مقادير تنش هاي اصلي در تئوري فوق نيز وارد مي شوند.

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2Y^2$$

لذا:

$$6\tau_{max}^2 = 2Y^2 = 6K^2$$

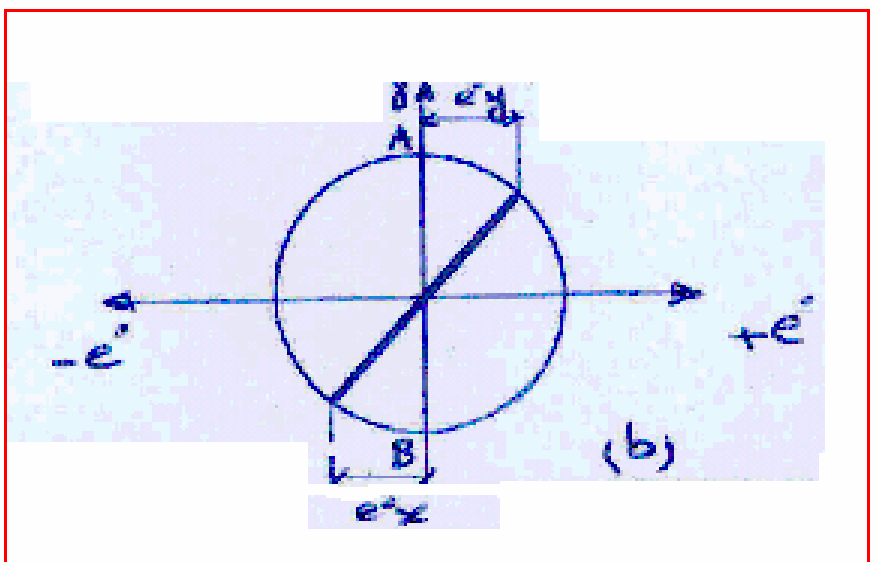
یا:

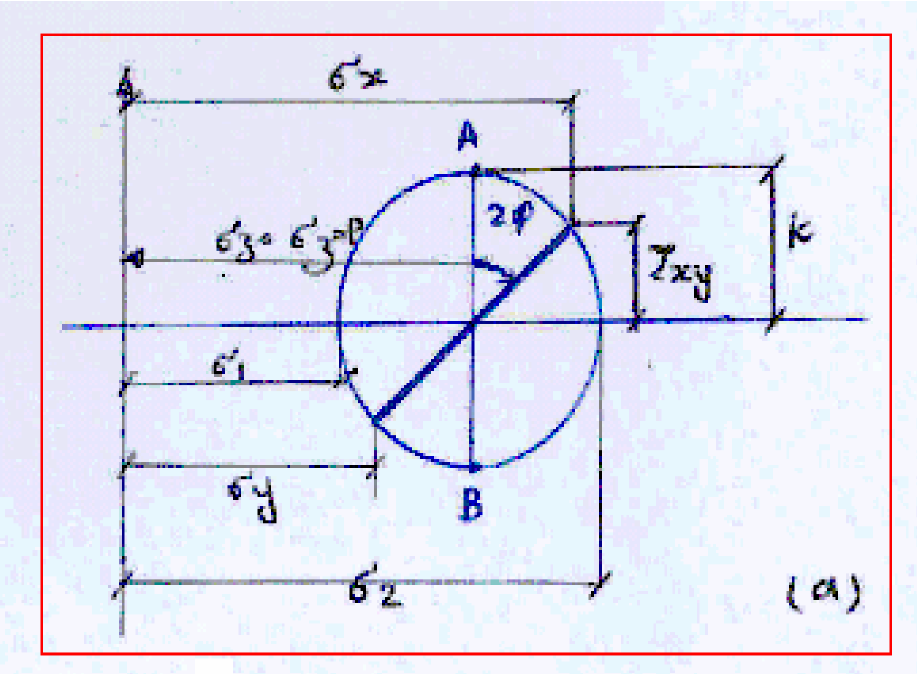
$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{1}{3}Y^2 = K^2$$

ملاحظه مي شود كه كرنش پلاستيك، برش خالص در تنش برش **K** مي باشد

$$k^2 = \frac{y^2}{z}$$

حالت تنش مزبور را مي توان با دايره موهر تنش تصوير نمود.

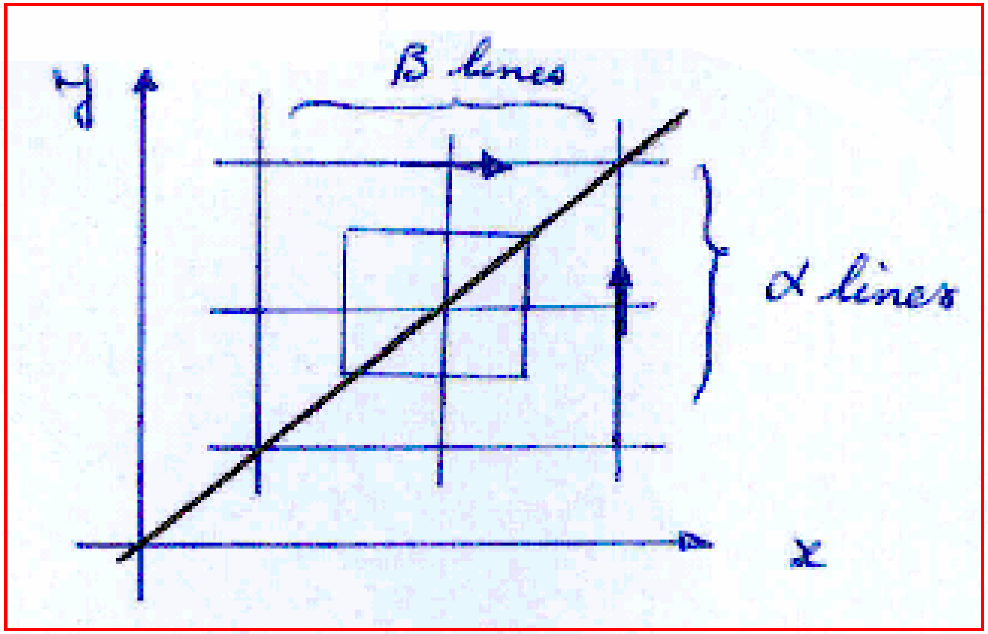




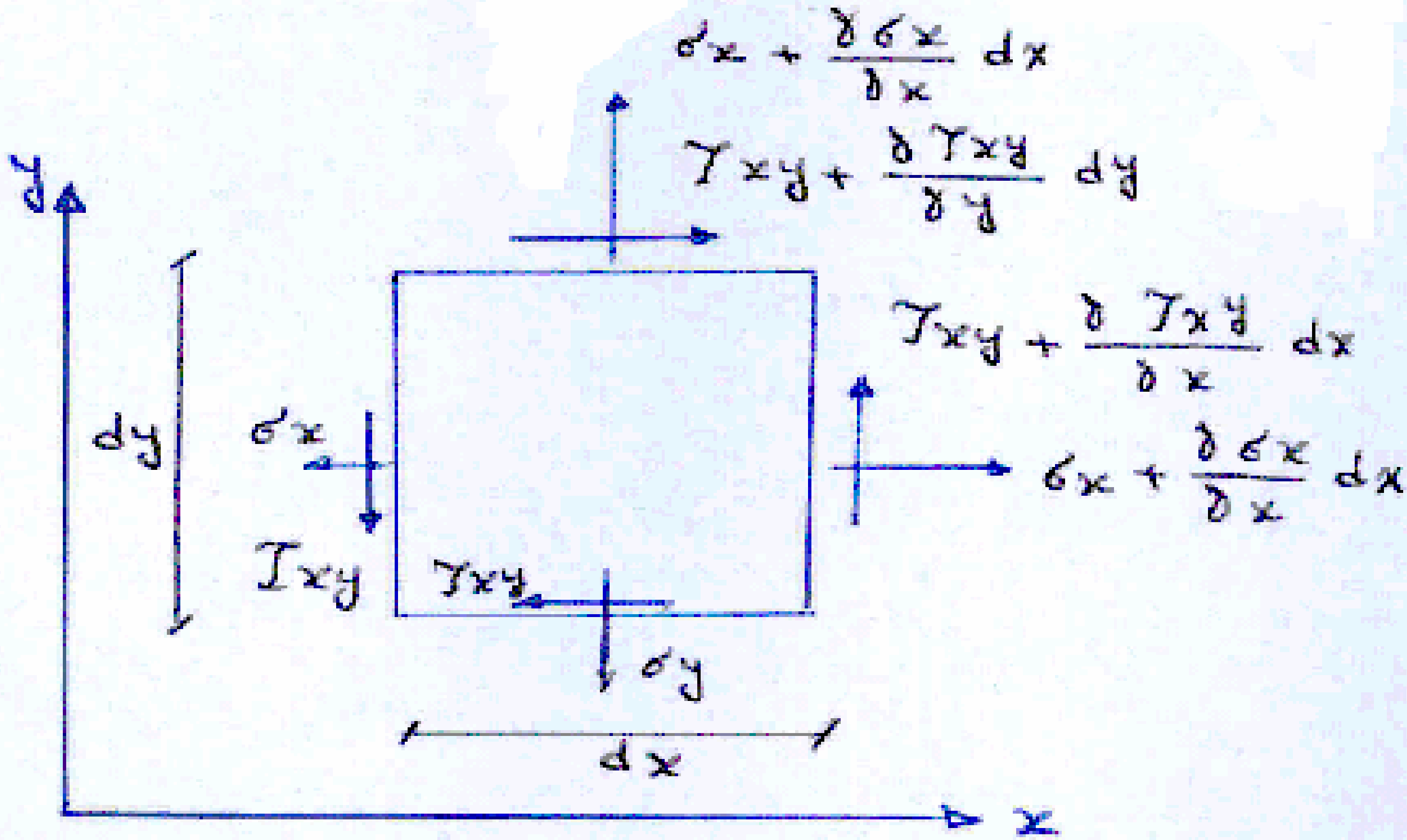
در فاصله A و B (شکل (a)) تنش برشي حداكثر مي باشد. بديهي است Kبرابر با تنش تسليم در برش كه ميزان زماني تغيير شكل نسبي در اين نقاط حداكثر بوده و كشيدگي و فشردگي رخ نمي دهد. با توجه به اين نكات دايره موهر ميزان زماني تغيير شكل نسبي رامي توان رسم كرد، صرفنظر از منطبق بودن مركز دايره با مركز مختصات دايره موهر ميزان زماني تغيير شكل نسبي مشابه با دايره موثر تنش مي باشد جهات

خطوط تنش برشي حداكثر، خطوط – افزايش نامگذاري شده است نماهاي A و B در دايره موهر با زاويه ۱۸۰ از يك ديگر جدا شده اند بنابراين در صفحه فيزيكي زاويه هاي مذكور ۹۰ مي باشد بعبارت ديگر خطوط لغزش شامل دو فايل مجزا مى باشد

اگر جهت تنش اصلي بزرگتر مطابق شكل زير انتخاب شوند (در اين شكل با توجه به دايره موهرترسيمي ، تنش اصلي بزرگتر همان σ_2 است) خطوط لغزش α و خطوط لغزش β ، به ترتيبي كه در آن شكل نمايش داده شده است، نام گذاري شده اند.



معادلات اساسی



اگر جسمي تحت اثر تنش دو بعدي بصورت فوق باشد و از نيروهاي حجمي صرفنظر كنيم تعادل در جهت x خواهد بود:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{xy} dy = 0$$

در حد (Limit) داريم :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

و بطور مشابه در جهت y داريم :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

با استفاده از دايره موهر ترسيمي قبلي داريم:

اگر $\sigma_3=\sigma_z=p$ باشد

$$\sigma_x = P + K \sin 2\varphi \qquad \sigma_y = P - K \sin 2\varphi$$

$$\tau_{xy} = K \cos 2\varphi$$

و در صورت جايگذاري روابط فوق در معادلات بدست آمده

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} + 2k\cos 2\varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - 2k\sin 2\varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ 2k\sin 2\varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y} - 2k\cos 2\varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

حال اگر محورهاي مختصات به مقدار ϕدوران داده شدند خطوط α و β به ترتيب با خطوط **x** و **y** منطبق مي گردند و لذا ϕ در روابط فوق صفر مي شود و خواهيم داشت :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + 2k\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - 2k\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

كه از انتگرال گيري از دو رابطه فوق دو رابطه زير بدست مي آيد:

$$P + 2k\varphi = C_1 - \alpha$$ يك ثابت در امتداد خط

$$P - 2k\varphi = C_2 = \beta$$ يك ثابت در امتداد خط

این معادلات به معادلات Hencky مشهورند ثابتهای C_1 و C_2 از یك خط لغزش به خط لغزش دیگر تغییر مي كنند:

با استفاده از تئوري ترسكا و معادلات مقابل در بعضي موارد مي توان مولفه هاي تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} را از شرايط مرزي محاسبه نمود كه در اين صورت مسئله معين ناميده مي شود.

ملاحظه مي شود كه در اين مسائل معين اطلاع از مقدار سرعتها ضرورت دارد. ولی در غالب مسایل مهندسی شرایط مرزی فقط بر حسب تنشها تعریف نشده بلکه بر حسب کرنشها و تنشها بیان می گردد لذا بررسی سرعت ضرورت دارد. در این صورت مسائل فامين نام گذاري مي شوند.

*** از قضيه Hencky و با توجه به اينكه خطوط لغزش تشكيل يك شبكه مي دهند مي توان نتيجه گرفت كه ساده ترين ميدان خط لغزش ميداني است كه در آن كليه خطوط α و β مستقيم و متعامد باشند.**

چنين ميداني ، ميدان يكنواخت ناميده مي شود. *