فصل دوم

روابط فازی

Fuzzy Relations

۱-۳- مقدمه

فرض کنید X و Y دو مجموعه کلاسیک باشند. ضرب کارتزین دو مجموعه X و Y مجموعه ای از زوجهای مرتب (x_i , y_j) هستند بطوریکه:

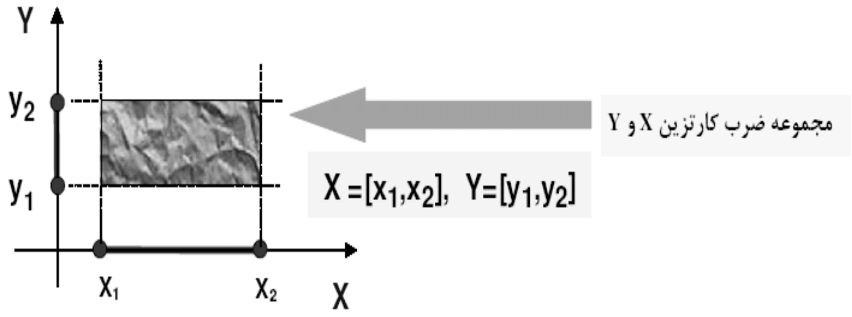
$$X \times Y = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in X, Y_j \in Y, i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m\}$$

به عنوان مثال اگر $X = \{ x_1,x_2,x_3,x_4\}$ و $Y = \{ y_1,y_2,y_3,\}$ باشند آنگاه ضرب کارتزینی $X \times Y$ یک مجموعه، ۱۲ عنصری خواهد بود که هر عنصر آن یک زوج مرتب از عناصر X و Y خواهند بود. در نتیجه اگر کاردینالیتی مجموعه x را n(x) و کاردینالیتی مجموعه y را n(y) در نظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت:

$$n(X \times Y) = n(X) \times n(Y)$$

$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$

که فضای $X \times Y$ بصورت شماتیک در شکل (۱-۳) به تصویر کشیده شده است.



شکل (۱-۳) فضای مجموعه ضرب کارتزین دو مجموعه دوبعدی X و Y

تعریف رابطه Relation

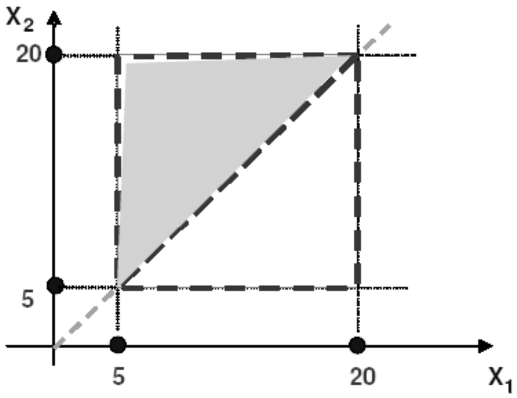
حال اگر برای فضای یک مجموعه ضرب کارتزینی، یک زیر مجموعه با شرایط خاصی تعریف می‌شود به آن یک رابطه (Relation) گفته می شود و با نماد λ نشان داده می شود. بطور عمومی یک رابطه در فضای دو بعدی بصورت ذیل تعریف می شود.

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) | \mathrm{p}(x_1, x_2), x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} \qquad (۳-۱)$$

جاییکه $p(x_1, x_2)$ یک خاصیت یا مشخصه ای است که برای زوج‌های مرتب (x_1, x_2) تعریف می شود و در صورتیکه شرط را ارضاء نمایند عضوی از مجموعه رابطه λ خواهند شد.

مثال (۲-۳):

$$\lambda = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \langle x_2, \quad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$



یک رابطه باینری همچنین می تواند توسط تابع مشخصه نمایش داده شود:

$$\mu_\lambda = \mu_\lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & if \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \lambda \\ 0 & if \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \notin \lambda \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \rightarrow \{0,1\}$$

اگر مجموعه X_1 , X_2 متناهی باشند آنگاه مقادیر تابع مشخصه (μ_λ) می توانند در یک ماتریس رابطه ای به تصویر کشیده شود.

روابط، کاربردهای بسیار زیادی در "منطق" ، "دلایل تقریبی "، "سیستمهای پایگاه قوانین" و ... دارند.

قانون (IF x is A Then Y is B) در واقع یک رابطه بین مجموعه هـای X و Y را بیان می کند. لذا با این مقدمه کوتاه از روابط در مجموعه های کلاسـیک و کاربردهـای آن، روابـط فازی در این فصل مطرح می گردند تا مقدمه ای برای ورود به منطق فازی و ایجـاد پایگـاه قـوانین فازی در سیستم های فازی باشد.

۲-۳- روابط فازی (Fuzzy Relations)

یک رابطه فازی، عمومی شده یک رابطه کلاسـیک اسـت بطوریکـه بـرای هـر زوج مرتـب $(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ یک درجه عضویت تعریف می شود.

یک رابطه فازی باینری، زیر مجموعه فازی از $X \times Y$ می باشد بطوریکه یک انتقـال از X به Y می باشد. کاربردهای روابط فازی بسیار گسترده و مهم هستند لذا جهـت آشـنایی بـا روابـط فازی و کاربردهای آن در این فصل فقط روابط باینری مورد بررسی قرار می گیرند.

تعریف (۱-۳)- فرض کنید X و Y زیر مجموعه ای از مجموعه جهانی R باشند،

آنگاه:

$$\tilde{R} = \left\{ \left[(x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y) \right] \middle| \ (x, y) \in X \times Y \right\} \qquad (۳-۴)$$

یک رابطه فازی روی X × Y نامیده می شود.

مثال (۳-۳) فرض کنید $X = \{ x_1 , x_2 , x_3\}$ و $Y = \{y_1, y_2 , y_3 , y_4\}$ باشند و

روابط $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ بصورت زیر تعریف شود.

$\tilde{R}_1$ = x بطور قابل ملاحظه ای از y بزرگتر باشد

$\tilde{R}_2$ = y خیلی نزدیک به x باشد

که رابطه $\tilde{R}_1$ بصورت ماتریس ذیل می تواند تعریف شود.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.8	1	0.1	0.7
x_2	0	0.8	0	0
x_3	0.9	1	0.7	0.8

و رابطه $\tilde{R}_2$ نیز می تواند بصورت ماتریس ذیل تعریف شود.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.4	0	0.9	0.6
x_2	0.9	0.4	0.5	0.7
x_3	0.3	0	0.8	0.5

در برخی موارد مانند نظریه گراف، لازم است روابط فازی روی مجموعه های فازی تعریـف گردند. لذا به تعریف (۲-۳) توجه نمایید.

تعریف (۲-۳) : فرض کنید $X,Y \subseteq \Re$ و

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X)\}$$

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y) \mid y \in Y)\}$$

دو مجموعه فازی هستند آنگاه:

$$\tilde{R} = \tilde{R}(x,y) = \{((x,y), \mu_{\tilde{R}}(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\} \quad (۳-۵)$$

یک رابطه فازی روی دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ خواهد بود اگر داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) \le \mu_{\tilde{A}}(x), \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

و

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) \le \mu_{\tilde{B}}(y), \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

مثال (۴-۳) : فرض کنیـد X_1 و X_2 بخـش هـایی از خـط بـین [0,50] و [20,40] باشند. رابطه فازی $\tilde{R}$ بصورت " x_1 تقریباً مساوی x_2 باشد" تعریف می‌شود. لذا تـابع عضـویت آن می تواند توسط رابطه ذیل تعریف شود.

$$\mu_{\tilde{R}(x_1,x_2)} = e^{-(x_1-x_2)^2} \qquad , \ x_1 \in X_1 \ , \ x_2 \in X_2$$

و اگر رابطه فازی بصورت "x_1 خیلـی بزرگتـر از x_2 باشـد" تعریـف شـود آنگـاه تـابع عضویت آن بصورت ذیل قابل تعریف است.

$$\mu_{\tilde{R}(x_1,x_2)} = \frac{1}{1+e^{-0.5(x_1-x_2)}}$$

از آنجا که یک رابطه فازی خود یک مجموعه فازی است لذا تمام خواص گفته شـده بـرای مجموعه های فازی برای روابط فازی نیز برقرار اسـت. یعنـی حتـی عملیـات فـازی ماننـد مکمـل، اشتراک، اجتماع و ... گفته شده برای مجموعه های فازی برای روابط فازی نیز صادق می باشند.

۳-۳- تخصیص مقادیر تابع عضویت در روابط فازی

راههای مختلفی برای تعیین درجه های عضویت در روابط فازی وجود دارد، ماننـد تعیـین یک تابع برای آن (مانند مثال ۴-۳)، استفاده از مقادیر کلامی با استفاده از دانش، تجربه و احساس انسانها و یا روابط ریاضی که یکی از راههای ساده و کاربردی به شرح ذیل می باشد.

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \tilde{R} \subseteq X \times Y$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{A}\times\tilde{B}}(x, y) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)) \qquad (۳-۶)$$

مثال (۵-۳) : فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ بیانگر درجـه حـرارت مناسـب محـیط و

مجموعه فازی $\tilde{B}$ بیانگر "فشار نزدیک به بهینه" در یک مبدل حرارتی باشند.

$$\tilde{A} = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

$$\tilde{B} = \frac{0.3}{y_1} + \frac{0.9}{y_2}$$

ضرب کارتزین این دو مجموعه فازی می تواند بیـانگر شـرایط زوج فشـار و درجـه حـرارت

مبدل حرارتی که با عملیات بهینه و کارا همراه است باشد. بطوریکه:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \tilde{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array}$$

که درجه های عضویت رابطه $\tilde{R}$ طبق رابطه (۶-۳) بدست می آیند کـه بـه عنـوان نمـونـه درجـه عضویت زوج مرتب (x_1, y_2) بصورت ذیل محاسبه می شود.

$$\mu_{\tilde{R}(x_1,y_2)} = \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{B}}(y_2)] = \min\{0.2, 0.9\} = 0.2$$

در نتیجه امکان عملیات بهینه در شرایط (x_3, y_2) بیشتر است.

۴-۳- عملیات در روابط فازی

تعریف (۳-۳): فرض کنید $\tilde{R}$ و $\tilde{Z}$ دو رابطه فازی در فضای دو بعدی باشـند. آنگـاه اجتماع و اشتراک این دو رابطه فازی بصورت زیر تعریف می شوند.

$$\mu_{\tilde{R}\vee\tilde{Z}}(x, y) = \max\{\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{Z}}(x, y)\}, (x, y) \in X \times Y \qquad (۳-۷)$$

$$\mu_{\tilde{R}\wedge\tilde{Z}}(x, y) = \min\{\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{Z}}(x, y)\}, (x, y) \in X \times Y \qquad (۳-۸)$$

مثال (۶-۳) - دو رابط فازی $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ در مثال (۵-۳) را در نظر بگیرید. آنگاه اجتماع این دو رابطه که بیانگر خیلی بزرگتر بودن x نسبت به y و یا نزدیک بودن y به x است بصورت ذیل بدست می آید.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.8	1	0.9	0.7
x_2	0.9	0.8	0.5	0.7
x_3	0.3	0.9	0.8	0.8

تعریف (۴-۳)- فرض کنید

$$\tilde{R} = \{[(x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y)] \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

یک رابطه فازی باینری باشد آنگاه تصویرهای اول، دوم و تصویر کل آن که به مجموعه های فازی سایه (Shadow) معروف هستند بصورت ذیل بدست می آیند.

الف) اولین تصویر $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}^{(1)} = \left\{\left[x,\ \max_y \mu_{\tilde{R}}(x, y)\right] \mid (x, y) \in X \times Y\right\} \qquad (۳-۹)$$

ب) دومین تصویر $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}^{(2)} = \left\{ \left[y,\ \max_x, \mu_{\tilde{R}}(x,y) \right] \middle|\ (x,y) \in X \times Y \right\} \qquad (۳-۱۰)$$

ج) تصویر کلی $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}^{(T)} = \max_x \max_y \left\{ \mu_{\tilde{R}}(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y \right\} \qquad (۳-۱۱)$$

مثال (۷-۳) ـ فرض کنید رابطه $\tilde{R}$ یک رابطه فازی است کـه توسـط مـاتریس ذیـل تعریف می شود. آنگاه تصویر اول، تصویر دوم و تصویر کلی این رابطه به شرح ذیل خواهد بود.

y \ x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x)$ تصویر اول
x_1	0.1	0.2	0.4	0.8	1	0.8	1
x_2	0.2	0.4	0.8	1	0.8	0.6	1
x_3	0.4	0.8	1	0.8	0.4	0.2	1
$\mu_{\tilde{R}^{(2)}}(y)$ تصویر دوم	0.4	0.8	1	1	1	0.8	1 تصویر کل $\mu_{\tilde{R}^{(T)}}$

تعریف (۵-۳)- برش α برای روابط فازی

برش α برای روابط فازی مشابه مجموعه های فازی انجام می شود . روابط فازی که بصـورت یـک ماتریس بیان می شود . برای یک برش α ، عناصری که درجه عضویت آنها در رابطه فازی بزرگتـر یا مساوی α هستند با ارزش یک و سایر عناصر با ارزش صفر در ماتریس برش α ظاهر می شوند .

$$R_\alpha = \{(x, y) \mid \mu_{\tilde{R}}(x, y) \geq \alpha\}$$

مثال (۸-۳)- فرض کنید رابطه فازی ذیل وجود دارد :

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه برای ۱= α و 0.9 = α به عنوان مثال داریم :

$$\alpha = 1 \qquad : \qquad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 0.9 \quad : \quad R_{0.9} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خواص گفته شده برای برش α در مجموعه های فازی ، در برش α روابط فازی نیز حاکم هستند.

۵-۳- ترکیب روابط فازی

Composition of Fuzzy Relations

روابط فازی از فضاهای مختلف می توانند بوسیله عملگر "ترکیب" با همدیگر ترکیب شوند.

انواع مختلف عملگرهای ترکیب با ساختار ریاضی متفاوت تعریف شده اند که عملگر ترکیب max – min بهترین آنها و پرکاربردترین آنها می باشد.

تعریف (۶-۳)- عملگر ترکیب max – min

قرار دهید $\tilde{R}_1(x,y),(x,y)\in X\times Y$ و $\tilde{R}_2(y,z),(y,z)\in Y\times Z$ دو رابطه فازی باشند آنگاه ترکیب max–min $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ که یک مجموعه فازی است بصورت زیر تعریف می شود.

$$\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2 = \left\{\left[(x,z), \max{}_y\left\{\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\}\right\}\right] \mid x\in X, y\in Y, z\in Z\right\} \quad (۳-۱۲)$$

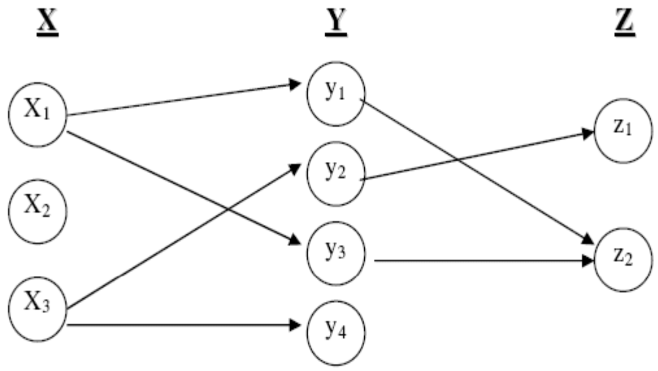
تعریف (۷-۳)- ترکیب ماکزیمم ـ ضرب و ترکیب ماکزیمم ـ میانگین.

فرض کنید $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ همچون تعریف (۵- ۳) روابط فازی باشند آنگاه ترکیب ماکزیمم ضرب (max-prod) $(\tilde{R}_1 \underset{\bullet}{O} \tilde{R}_2)$ و ترکیب ماکزیمم میانگین (max-ave) $(\tilde{R}_1 \underset{av}{O} \tilde{R}_2)$ بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\tilde{R}_1 \underset{\bullet}{\circ} \tilde{R}_2(x,z) = \left\{\left[(x,z), \max{}_y\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y).\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\}\right] \mid x\in X, y\in Y, z\in Z\right\}$$

$$\tilde{R}_1 \underset{av}{\circ} \tilde{R}_2(x,z) = \left\{\left[(x,z), \frac{1}{2}\max{}_y\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)+\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\}\right] \mid x\in X, y\in Y, z\in Z\right\}$$

مثال (۱۱-۳) : شبکه ذیل راههای ارتباطی ممکن بین مبدا X و مقصد Z را نشان می دهد.



$$R_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$R_2 = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

حال با ترکیب R_1 و R_2 می توان راههای رسیدن از X به Z را بدست آورد.

$$T = R_1 \, O \, R_2 : \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

از x_1 فقط می توان به z_2 رفت ، از x_2، به هیچ یک از نقاط z_1 , z_2 نمـی تـوان رفـت و از گره x_3 فقط می توان به گره z_1 رفت.

حال فرض کنید روابط $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ بصورت فازی مطرح گردند. آنگاه با استفاده از عملگـر max-min ترکیب دو رابطه فازی برای تعیین راههای ممکـن بـین X و Z بصـورت ذیـل بدسـت می آید.

$$\tilde{R}_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\tilde{R}_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.9 & 0.1 \\ 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\tilde{T} = \tilde{R}_1 O \tilde{R}_2 : \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

به عنوان نمونه درجه عضویت (x_1, z_1) طبق عملگر max-min بصورت ذیل محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{T}}(x_1, z_1) &= \max\{\min(0.3,0.2), \min(0.5,0.9), \min(1,1), \min(0.2,0.7)\} \\ &= \max\{0.2, 0.5, 1, 0.2\} = 1 \end{aligned}$$

درجه عضویت اینکه بتوان از نقطه x_1 به نقطه z_1 رفت برابر ۱ و درجه عضویت اینکه بتوان

از گره x_2 به گره z_2 رفت برابر 0.8 است.

Extension of Fuzzy Set

Extension by Relation

Definition (Extension of fuzzy set) Let A and B be fuzzy sets and R denote the relation from A to B. This relation can be expressed by a function f,

$$x \in A, y \in B$$

$$y = f(x) \quad \text{or} \quad x = f^{-1}(y)$$

Here we used the term "function" without considering the strict condition for being a function. Then we can obtain make fuzzy set B' in B by R and A.

for $y \in B$,

$$\mu_{B'}(y) = \underset{x \in f^{-1}(y)}{Max}[\mu_A(x)] \quad \text{if} \quad f^{-1}(y) \neq \varnothing \quad \square$$

Example 3.11 Let fuzzy set A be "the set of people with an infectious disease" and the crisp set B be "the set of people having been in contact with the infected people". The contact relation is given by R in Fig 3.18

$$A = \{(a_1, 0.4), (a_2, 0.5), (a_3, 0.9), (a_4, 0.6)\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

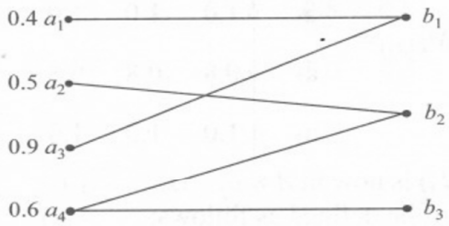


Fig. 3.18. Extension of a fuzzy relation

For example, by A, the possibility of person a_1 is 0.4, and by relation R, a_1 has been in contact with b. With such a set A and relation R, the infectious set B' in B can be obtained as follows :

First for b_1,

$$f^{-1}\ (b1) = \{(a1, 0.4), (a3, 0.9)\}, \quad \text{Max } [0.4, 0.9] = 0.9$$
$$\Rightarrow \mu_{B'}(b_1) = 0.9$$

Now for b_1,

$$f^{-1}\ (b2) = \{(a2, 0.5), (a4, 0.6)\}, \quad \text{Max } [0.5, 0.6] = 0.6$$
$$\Rightarrow \mu_{B'}(b_2) = 0.6$$

Similarly for b_2,

$$f^{-1}\ (b_3) = \{(a_4, 0.6)\}$$
$$\Rightarrow \mu_{B'}(b_3) = 0.6$$

Arranging all,

$B' = \{(b_1, 0.9), (b_2, 0.6), (b_3, 0.6)\}$, It is the result of inference. □

3.4.2 Extension Principle

Definition (Extension principle) We can generalize the pre-explained extension of fuzzy set. Let X be Cartesian product of universal set $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r$ and $A_1, A_2, \ldots, A_r$ be r fuzzy sets in the universal set.

Cartesian product of fuzzy sets $A_1, A_2, \ldots, A_r$ yields a fuzzy set $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$ defined as

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r}(x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_r) = \text{Min}[\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r)]$$

Let function f be from space X to Y,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \quad : \quad X \to Y$$

Then fuzzy set B in Y can be obtained by function f and fuzzy sets $A_1, A_2, \ldots, A_r$ as follows:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 0, \text{if } f^{-1}(y) = \varnothing \\ \underset{y=f(x_1,x_2,\ldots,x_r)}{Max} \left[Min\left(\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r)\right)\right], \text{otherwise} \end{cases}$$

Here, $f^1(y)$ is the inverse image of y. $\mu_B(y)$ is the membership of y = $(x_1, \ldots, x_r)$ whose membership function is $\mu_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r}(x_1, \ldots, x_r)$. □

If f is a one-to-one correspondence function, $\mu_B(y) = \mu_A(f^1(y))$, when $f^1(y) \neq \varnothing$.

3.4.3 Extension by Fuzzy Relation

Definition (Extension of fuzzy relation) For given fuzzy set A, crisp set B and fuzzy relation $R \subseteq A \times B$, there might be a mapping function expressing the fuzzy relation R. Membership function of fuzzy set B' in B is defined as follows :

For $x \in A$, $y \in B$, and $B' \subseteq B$

$$\mu_{B'}(y) = \underset{x \in f^1(y)}{\text{Max}}[\text{Min}(\mu_A(x), \mu_R(x, y))] \quad \square$$

Example 3.12 Fig 3.19 shows a further generalization of the example in the previous section. The fuzzy set A stands for the infectious patients, and the set B for the people who have been in contact with those patients. The contact degree is given by the relation R. To determine the fuzzy set B', we need a process of inference. In this inference, note that Max-Min operation is used just as in the composition of two fuzzy relations.

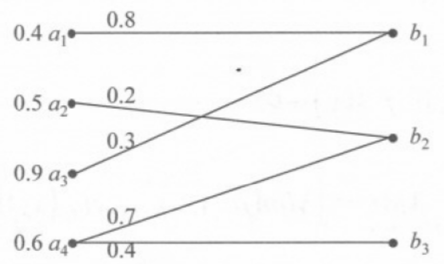


Fig. 3.19. Extension by fuzzy relation

The following shows examples of calculation for the membership of B'.

For b_1,

$\text{Min}\ [\mu_A(a_1), \mu_R(a_1, b_1)] = \text{Min}\ [0.4, 0.8] = 0.4$
$\text{Min}\ [\mu_A(a_3), \mu_R(a_3, b_1)] = \text{Min}\ [0.9, 0.3] = 0.3$
$\text{Max}\ [0.4, 0.3] = 0.4$

$\Rightarrow \mu_{B'}(b_1) = 0.4$

For b_2,

$\text{Min}\ [\mu_A(a_2), \mu_R(a_2, b_2)] = \text{Min}\ [0.5, 0.2] = 0.2$
$\text{Min}\ [\mu_A(a_4), \mu_R(a_4, b_2)] = \text{Min}\ [0.6, 0.7] = 0.6$
$\text{Max}\ [0.2, 0.6] = 0.6$

$\Rightarrow \mu_{B'}(b_2) = 0.6$

For b_3,

$\text{Max Min}\ [\mu_A(a_4), \mu_R(a_4, b_3)] = \text{Max Min}\ [0.6, 0.4] = 0.4$

$\Rightarrow \mu_{B'}(b_3) = 0.4$

So fuzzy set B' obtained by fuzzy set A and fuzzy relation R is,
$B' = \{(b_1, 0.4), (b_2, 0.6), (b_3, 0.4)\}$ □

3.4.4 Fuzzy Distance between Fuzzy Sets

Definition (pseudo-metric distance) If d is a mapping function from space X^2 to $\Re^+$ (positive real numbers) and holds the following properties, it is called pseudo-metric distance

i) $d(x, x) = 0, \forall x \in X$

ii) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1), \forall x_1, x_2 \in X$

iii) $d(x_1, x_3) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3), \forall x_1, x_2, x_3 \in X$ □

If the following condition (4) is added to the pseudo-metric distance, it becomes a metric distance.

iv) if $d(x_1, x_2)=0$, then $x_1 = x_2$.

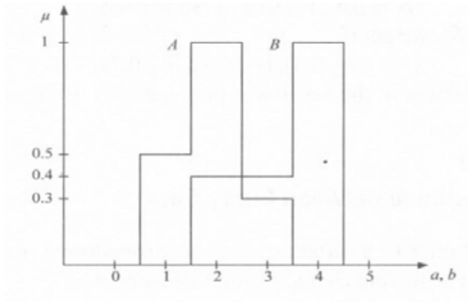
Definition (Distance between fuzzy sets) In space X, pseudo-metric distance $d(A, B)$ between fuzzy sets A and B can be defined by extension principle. The distance $d(A, B)$ is given as a fuzzy set.

$$\forall \delta \in \Re^+, \mu_{d(A,B)}(\delta) = \underset{\delta = d(a,b)}{\mathrm{Max}}[\mathrm{Min}(\mu_A(a), \mu_B(b))] \quad □$$

Example 3.14 (Fig 3.20) shows the fuzzy distance between the fuzzy sets A = {(1, 0.5), (2, 1), (3, 0.3)} and B = {(2, 0.4), (3, 0.4), (4, 1)}. (Table 3.2) shows the calculation procedure for $d(A,B)$ from A and B.

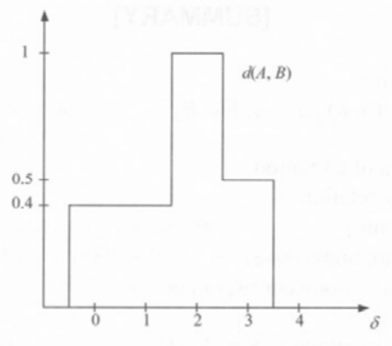
Table 3.2. Calculation of fuzzy set d(A,B)

δ∈ d(A, B)	a ∈ A	b ∈ B	$\mu_A(a)$	$\mu_B(b)$	Min	Max, μ(δ), d(A, B)
0	2	2	1.0	0.4	0.4	0.4
	3	3	0.3	0.4	0.3	
1	1	2	0.5	0.4	0.4	0.4
	2	3	1.0	0.4	0.4	
	3	2	0.3	0.4	0.3	
	3	4	0.3	1.0	0.3	
2	1	3	0.5	0.4	0.4	1.0
	2	4	1.0	1.0	1.0	
3	1	4	0.5	1.0	0.5	0.5



(a) Fuzzy sets A and B

Fig. 3.20. Fuzzy distance set



(b) Fuzzy set $d(A, B)$