# فصل سوم

## اعداد فازی

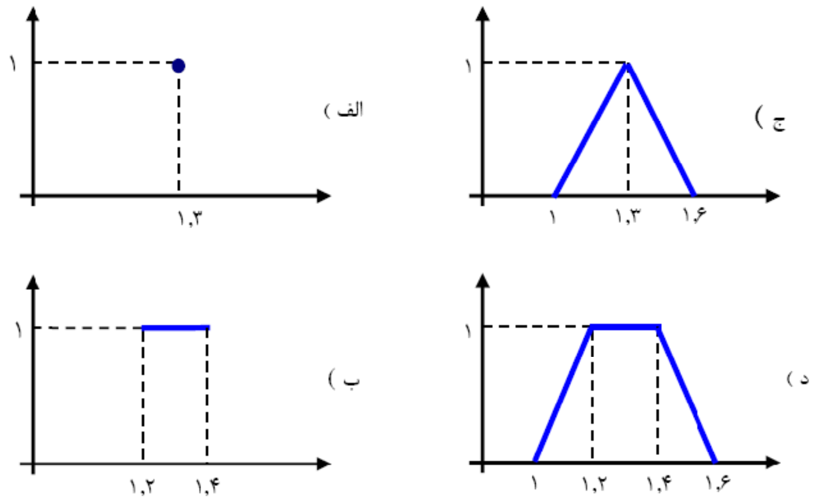
## Fuzzy Numbers

### ۱-۶- اعداد فازی

تعریف (۱-۶)- عدد فازی، یک مجموعه فازی ( $\tilde{A}$ ) روی $R$ ( اعداد حقیقی ) است که حداقل سه شرط زیر را ارضا نماید .

- $\tilde{A}$ باید یک مجموعه فازی نرمال باشد .
- $A\alpha$ باید یک بازه بسته روی هر مقدار ($\alpha \in (0,1]$) باشد .
- مجموعه پشتیبان ( $\text{supp}(\tilde{A})$ ) باید محدود باشد .

از آنجایی که هر برش $\alpha$ از هر عدد فازی باید یک بازه بسته باشد در نتیجه هر عدد فازی یک مجموعه فازی محدب می باشد . البته عکس این مطلب لزوماً صادق نیست.



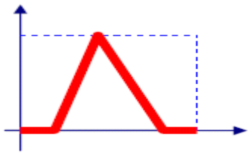

شکل( ۱-۶)- مقایسه عدد و بازه حقیقی معمولی با عدد و بازه حقیقی فازی

اشکال معروف و پرکاربرد اعداد فازی عبارتند از : عدد فازی مثلثی ، عدد فازی ذوزنقه ای ، عدد فازی گوسی ، عدد فازی زنگوله ای (bell shape) و عدد فازی سیگمویدال افزایشی یا کاهشی که در فصل دوم، زیرفصل (۶-۲) تابع عضویت آنها تعریف و شکل آنها نیز به تصویر کشیده شد.

- تابع عضویت مثلثی: **Triangular MF**

تابع عضویت مثلثی توسط سه پارامتر $\{\, a,b,c \,\}$ تعریف می شود که به شرح ذیل می باشد.

$$trn(x:a,b,c)=\begin{cases} 0 & ,x<a \\ (x-a)/(b-a) & ,a\le x\le b \\ (c-x)/(c-b) & ,b\le x\le c \\ 0 & ,x>c \end{cases}$$

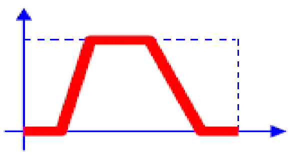


شکل (۲-۲۱) تابع عضویت مثلثی

- تابع عضویت ذوزنقه ای: **Trapezoidal MF**

تابع عضویت ذوزنقه ای توسط چهار پارامتر $\{\, a,b,c,d \,\}$ به شرح ذیل تعریف می شود:

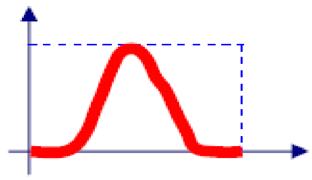
$$trn(x:a,b,c,d)=\begin{cases} 0 & ,x<a \\ (x-a)/(b-a) & ,a\le x<b \\ 1 & ,b\le x<c \\ (d-x)/(d-c) & ,c\le x<d \\ 0 & ,x>d \end{cases}$$



- تابع عضویت گوسی: **Gaussian MF**

تابع عضویت گوسی با دو پارامتر $\{\ a, \sigma\ \}$ به شرح ذیل تعریف می شود:

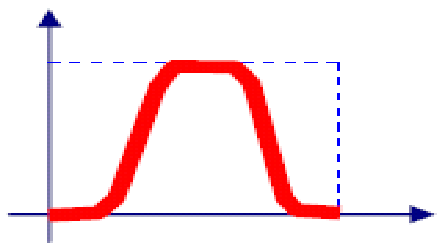
$$gsn(x: a, \sigma) = \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{\sigma^2}\right)$$



- تابع عضویت زنگوله ای: **Bell-Shape MF**

تابع عضویت زنگوله ای با سه پارامتر $\{\ a, b, \sigma\ \}$ به شرح ذیل تعریف می شود:

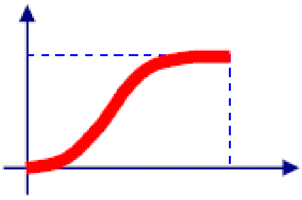
$$bll(x: a, b, \sigma) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-\sigma}{a}\right|^{2b}}$$



- تابع عضویت **Sigmoidal**:

تابع عضویت سیگمویدال با دو پارامتر $\{\ a,b\ \}$ به شرح ذیل تعریف می شود:

$$Sgm\ (x : a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}$$



**تعریف (۲-۶)**- عدد فازی $\tilde{A}$، نوع $L\text{-}R$ نامیده می شود اگر تابع عضویت آن به صورت ذیل باشد :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ L(\frac{a-x}{\alpha_A}) & x \le a \\ R(\frac{x-b}{\beta_A}) & x \ge b \end{cases}$$

$L$ و $R$ توابع پیوسته غیر افزایشی روی دامنه $[0, +\infty)$ و کاهشی مستقیم به سمت صفر در بازه هایی از $[0, +\infty)$ هستند. این توابع، مثبت بوده و شرایط $(L(0) = R(0) = 1)$ را تامین می کنند. پارامترهای $\alpha_A$ و $\beta_A$ نیز اعداد حقیقی غیر منفی هستند.

توابع L و R توابع شکل نامیده می شوند که معمولا یکی از اشکال ذیل را اختیار می کنند :

- **خطی** :

$$S(y) = \max(0, 1-y)$$

- **نمایی** :

$$S(y) = e^{\;py} \quad , p \geq 1$$

- **توان دار** :

$$S(y) = \max(0, 1-y^{p}) \quad , p \geq 1$$

- **کسری** :

$$S(y) = \frac{1}{1+y^{p}} \quad , p \geq 1$$

- **نمایی توان دار** :

$$S(y) = e^{-y^{p}} \quad , p \geq 1$$

برای نمایش اعداد فازی $L$-$R$ از نماد ذیل استفاده می شود :

$$\tilde{A} = (a, b, \alpha_A, \beta_A)_{L-R}$$

به طوری که توابع $L$ و $R$ می توانند طبق فرم های تعریف شده در فوق، تعریف شوند.

**مثال (۱-۶)**- عدد فازی $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A} = (1, 1.5, 1, 1)_{L_A - R_A}$ تعریف می شود که توابع $L_A$ و $R_A$ نیز به شرح ذیل تعریف شده اند :

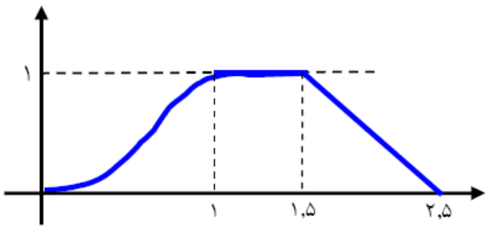
$$L_A = \max(1-x^2, 0)$$
$$R_A = \max(0, 1-x)$$

در این صورت تابع عضویت $\tilde{A}$ به شرح ذیل به دست می آید :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1, 1.5] \\ \max(1-(\frac{1-x}{1})^2, 0) & x \leq 1 \\ \max(0, 1-(\frac{x-1.5}{1})) & x \geq 1.5 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1 & x\in[1,1.5]\\ \max(2x-x^2,0) & x\le 1\\ \max(0,2.5-x) & x\ge 1.5\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1 & x\in[1,1.5]\\ 2x-x^2 & 0\le x\le 1\\ 2.5-x & 1.5\le x\le 2.5\end{cases}$$

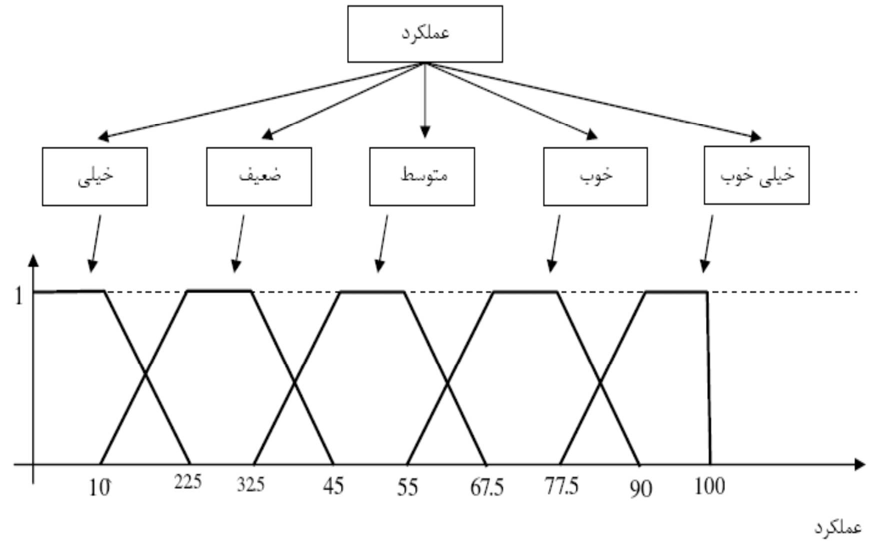



شکل (۳-۶)- تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ در مثال (۱-۶)

## ۲-۶- متغیرهای کلامی (Linguistic Variables)

اعداد فازی نقش مهمی در فرموله کردن کمی متغیرهای فازی دارند. متغیرهای فازی می توانند متغیرهای کلامی و اعداد فازی بیانگر متغیرهای کلامی باشند. متغیرهای کلامی به مفاهیم کلامی مانند ، خیلی کوچک ، متوسط ، بزرگ و ... گفته می شود. به عنوان یک مثال از متغیرهای کلامی به شکل ( ۱-۶ ) توجه نمائید .

شکل (۱-۶) - نمونه ای از متغیرهای کلامی در بیان عملکرد




در تعیین تابع عضویت متغیرهای کلامی ، یکی از متغیرها به عنوان متغیر پایه فرض شـده و تـابع عضـویت برای آن متغیر تعیین می شود. سپس تابع عضویت سایر مقادیر کلامی با استفاده از فرمولهایی بدسـت مـی آید . به عنوان مثال فرض کنید مقدار کلامی $\tilde{A}$ به عنوان متغیر پایه در نظر گرفته شود . آنگاه سایر مقـادیر کلامی می توانند بصورت ذیل بدست آیند .

مقدار کلامی " کوچک " : متغیر پایه = $\tilde{A}$

( خیلی کوچک ) = $\tilde{A}^2 = \int \frac{(\mu_A(x))^2}{x}$

$$( \text{خیلی خیلی کوچک} ) = \tilde{A}^4 = \int \frac{(\mu_{\tilde{A}}(x))^4}{x}$$

$$( \text{کمی بیشتر کوچک} ) = \tilde{A}^{1.25} = \int \frac{(\mu_{\tilde{A}}(x))^{1.25}}{x}$$

$$( \text{کمی کم کوچک} ) = \tilde{A}^{0.75} = \int \frac{(\mu_{\tilde{A}}(x))^{0.75}}{x}$$

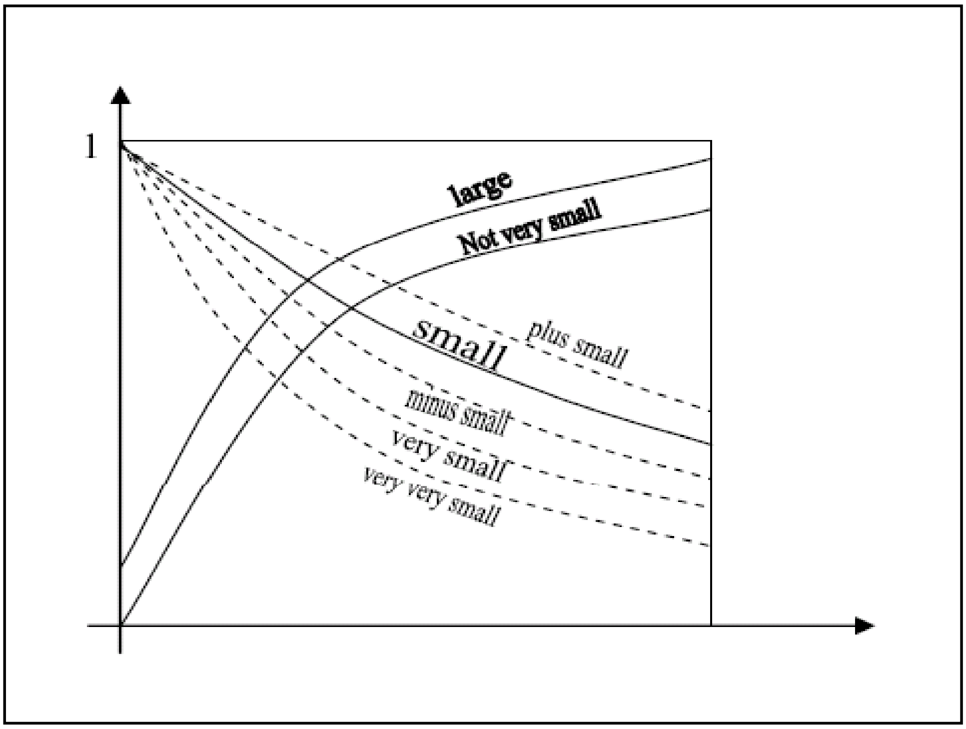
$$( \text{نه خیلی کوچک} ) = 1 - \tilde{A}^2 = \int \frac{1 - (\mu_{\tilde{A}}(x))^2}{x}$$

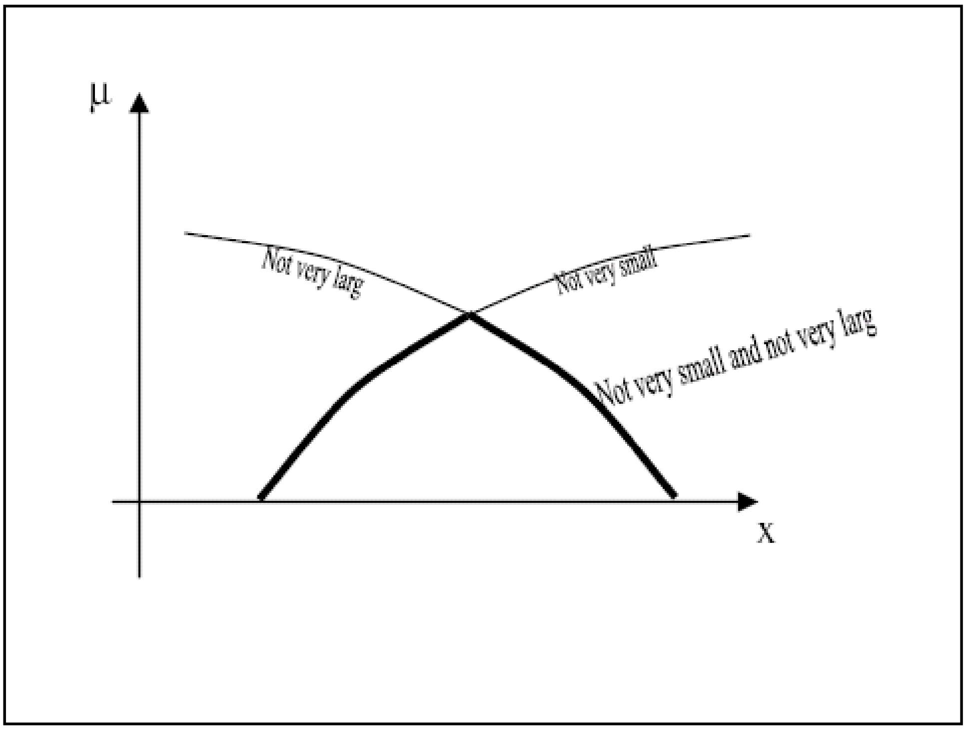
$$( \text{حدوداً کوچک} ) = \sqrt{\tilde{A}} = \int \frac{\sqrt{\mu_{\tilde{A}}(x)}}{x}$$

$$( \text{بزرگ} ) = 1 - \tilde{A} = \int \frac{1 - \mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

$$( \text{متوسط} ) = (1 - \tilde{A})^{0.5} = \int \frac{(1 - \mu_{\tilde{A}}(x))^{0.5}}{x}$$

$$( \text{خیلی بزرگ} ) = (1 - \tilde{A})^2 = \int \frac{(1 - \mu_{\tilde{A}}(x))^2}{x}$$


1
large
Not very small
small
plus small
minus small
very small
very very small


μ
Not very larg
Not very small
Not very small and not very larg
x

## ۳-۶- عملیات ریاضی بر روی اعداد فازی

فرض کنید علامت * بیانگر هر یک از چهار عمل اصلی ریاضی باشد و دو عـدد فـازی $\tilde{B},\tilde{A}$ روی مجموعـه اعداد حقیقی تعریف شده است. آنگاه معادله $\tilde{A}*\tilde{B}$ بصورت ذیل تعریف می شود.

$$(\tilde{A}*\tilde{B})(Z)=\sup_{z=x*y}\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\} \qquad \forall z\in R$$

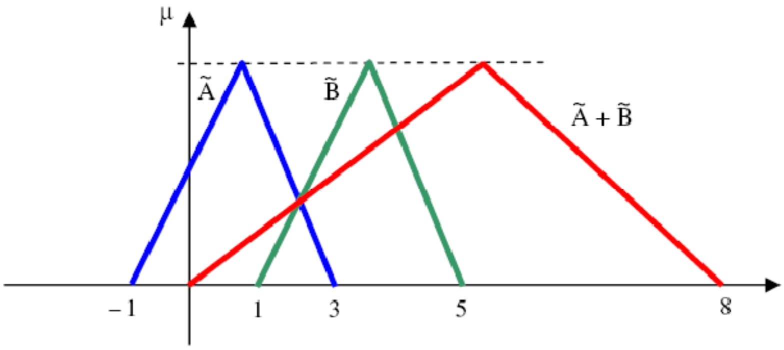
در نتیجه برای چهار عمل اصلی ریاضی در اعداد فازی خواهیم داشت.

$$(\tilde{A}+\tilde{B})(z)=\sup_{z=x+y}\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

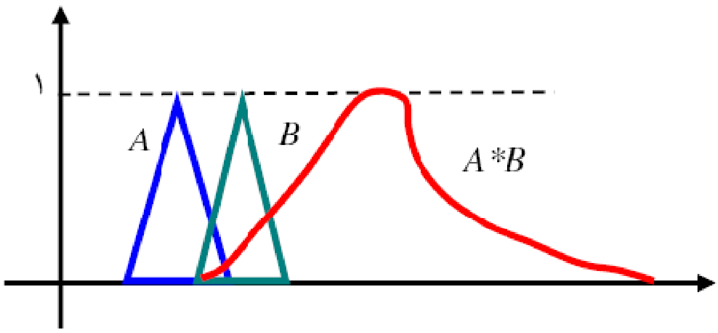
$$(\tilde{A}-\tilde{B})(z)=\sup_{z=x-y}\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

$$(\tilde{A}\times\tilde{B})(z)=\sup_{z=x\times y}\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

$$(\tilde{A}/\tilde{B})(z)=\sup_{z=x/y}\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\}$$




شکل (۶-۶ الف) – جمع دو عدد فازی مثلثی




شکل (۶-۶ ب )- ضرب دو عدد فازی مثلثی

قرینه یک عدد فازی مثلثی بصورت ذیل می باشد.

$$(-)\tilde{B} = (-b_3, -b_2, -b_1)$$

در نتیجه تفاضل دو عدد فازی مثلثی بصورت ذیل خواهد بود.

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$$

حاصل ضرب و تقسیم دو عدد فازی مثلثی دیگر یک عدد فازی مثلثی نیست (مانند شکل ۳-۶ ب ) ولیکن به عنوان یک تقریب می توان فرض نمود که حاصل یک عدد فازی مثلثی است و مؤلفه های آن بصورت ذیل بدست می آیند.

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, a_3 \times b_3)$$

$$\tilde{A} / \tilde{B} = (a_1 / b_3, a_2 / b_2, a_3 / b_1)$$

### 5.4.1 Trapezoidal Fuzzy Number

Another shape of fuzzy number is trapezoidal fuzzy number. This shape is originated from the fact that there are several points whose membership degree is maximum ($\alpha = 1$).

**Definition (Trapezoidal fuzzy number)** We can define trapezoidal fuzzy number $A$ as

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

the membership function of this fuzzy number will be interpreted as follows(Fig 5.10).

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \le x \le a_2 \\ 1, & a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4}, & a_3 \le x \le a_4 \\ 0, & x > a_4 \end{cases}$$

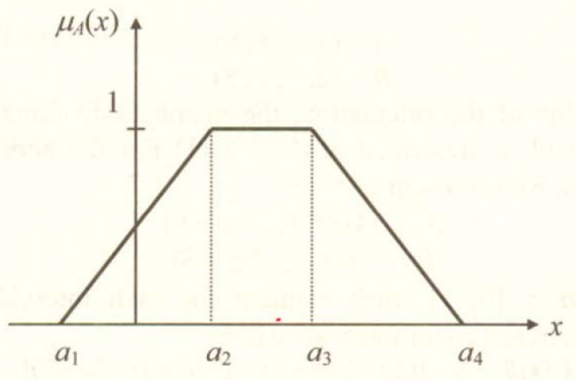



**Fig. 5.10.** Trapezoidal fuzzy number $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

$\alpha$-cut interval for this shape is written below.
$\forall \alpha \in [0, 1]$

$$A_\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, \quad -(a_4 - a_3)\alpha + a_4]$$

when $a_2 = a_3$, the trapezoidal fuzzy number coincides with triangular one.

### 5.4.2 Operations of Trapezoidal Fuzzy Number

Let's talk about the operations of trapezoidal fuzzy number as in the triangular fuzzy number,

(1) Addition and subtraction between fuzzy numbers become trapezoidal fuzzy number.
(2) Multiplication, division, and inverse need not be trapezoidal fuzzy number.
(3) Max and Min of fuzzy number is not always in the form of trapezoidal fuzzy number.

But in many cases, the operation results from multiplication or division are approximated trapezoidal shape. As in triangular fuzzy number, addition and subtraction are simply defined, and multiplication and division operations should be done by using membership functions.

(1) Addition

$$\begin{aligned} A(+)B &= (a_1, a_2, a_3, a_4)(+)(b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \end{aligned}$$

(2) Subtraction

$$A(-)B = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1)$$

**Example 5.14** Multiplication

Multiply two trapezoidal fuzzy numbers as following:

$$A = (1, 5, 6, 9)$$
$$B = (2, 3, 5, 8)$$

For exact value of the calculation, the membership functions shall be used and the result is described in (Fig. 5.11) For the approximation of operation results, we use $\alpha$-cut interval

$$A_\alpha = [4\alpha + 1, -3\alpha + 9]$$
$$B_\alpha = [\alpha + 2, -3\alpha + 8]$$

since, for all $\alpha \in [0, 1]$, each element for each interval is positive, multiplication between $\alpha$-cut intervals will be

$$\begin{aligned} A_\alpha(\bullet)B_\alpha &= [(4\alpha+1)(\alpha+2),\ \ (-3\alpha+9)(-3\alpha+8)] \\ &= [4\alpha^2 + 9\alpha + 2,\ \ 9\alpha^2 - 51\alpha + 72] \end{aligned}$$

if $\alpha = 0$,

$$A_0(\bullet)B_0 = [2,\ \ 72]$$

if $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} A_1(\bullet)B_1 &= [4 + 9 + 2,\ \ 9 - 51 + 72] \\ &= [15,\ \ 30] \end{aligned}$$

so using four points in $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$, we can visualize the approximated value as trapezoidal fuzzy number as (Fig. 5.11)

$A(\bullet)B \;\cong\; [2,\; 15,\; 30,\; 72]$ □

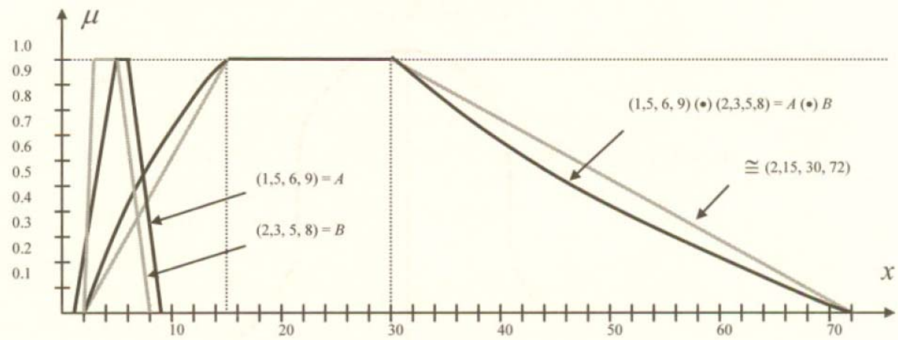



**Fig. 5.11.** Multiplication of trapezoidal fuzzy number $A\ (\bullet)\ B$

**مثال (۲-۶)**- فرض کنید دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت ذیل تعریف شوند :

$$\tilde{A} = \frac{0.2}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.7}{4}$$

$$\tilde{B} = \frac{0.5}{1} + \frac{1}{2}$$

عدد فازی حاصل از ضرب $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت ذیل به دست می آید :

$$\tilde{C} = \tilde{A} \times \tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \frac{\min(0.2,0.5)}{1} + \frac{\max\{\min(0.2,1), \min(0.5,1)}{2} + \frac{\max\{\min(0.1,0.5), \min(1,1)\}}{4}$$

$$+\frac{\min(0.7,1)}{8} \quad = \frac{0.2}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0.7}{8}$$

**مثال (۳-۶)** - فرض کنید عدد فازی ، با یک تابع عضویت محدب و نرمال به صورت ذیل تعریف شود :

$$\tilde{1} = \frac{0.2}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.2}{0}$$

حال فرض کنید می خواهیم عدد فازی $\tilde{1}$ را با خودش جمع کنیم. عدد فازی حاصل که عدد فازی $\tilde{2}$ خواهد بود به شرح ذیل به دست می آید :

$$\begin{aligned}\tilde{1} + \tilde{1} = \tilde{2} &= \{\frac{0.2}{2} + \frac{1}{1} + \frac{0.2}{2}\} + \{\frac{0.2}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.2}{2}\} \\ &= \frac{\min(0.2,0.2)}{0} + \frac{\max\{\min(0.2,1), \min(1,0.2)\}}{1} + \\ &\quad \frac{\max\{\min(0.2,0.2), \min(1,1), \min(0.2,0.2)\}}{2} + \\ &\quad \frac{\max\{\min(1,0.2), \min(0.2,1)\}}{3} + \frac{\min(0.2,0.2)}{4} \\ &= \frac{0.2}{0} + \frac{0.2}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.2}{4}\end{aligned}$$

**تعریف (۵-۶)** - درکل هر گونه محاسبات ریاضی بر روی دو عدد فازی ( مجموعه فازی ) توسط رابطه ذیل می تواند انجام شود :

$$\mu_{\tilde{V}}(v) = \sup_{v-f(u_1,u_2)}\{\min(\mu_1(u_1), \mu_2(u_2))\}$$

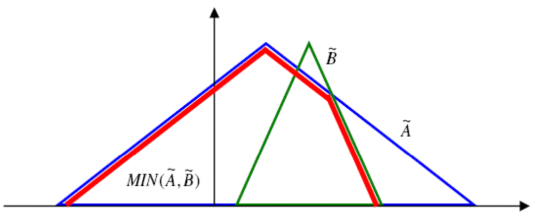
به طوری که $v$ می تواند هر تابعی بر روی متغیرهای $u_2$ , $u_1$ باشد.

سایر عملیات مفید در اعدادفازی به شرح ذیل می باشد .

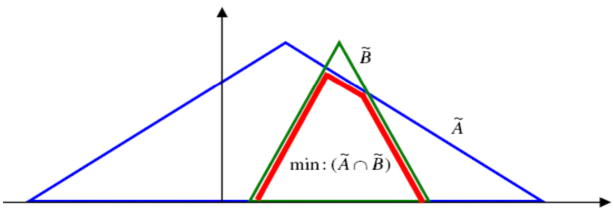
$$MIN(\tilde{A},\tilde{B})(z)=\sup_{z=\min(x,y)}\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

$$MAX(\tilde{A},\tilde{B})(z)=\sup_{z=\max(x,y)}\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

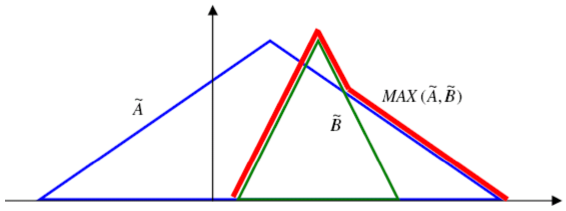
توجه داشته باشید کـه عملگرهـای min , max روی اعـداد حقیقـی و عملگرهـای MIN , MAX روی اعداد فازی تعریف می شوند . و همینطور اثبات شده است که حاصل $MAX(\tilde{A},\tilde{B}), MIN(\tilde{A},\tilde{B})$ ، نیز یک عدد فازی خواهد بود . جهت درک بهتر به شکل ( ۴-۶ ) توجه نمائید .



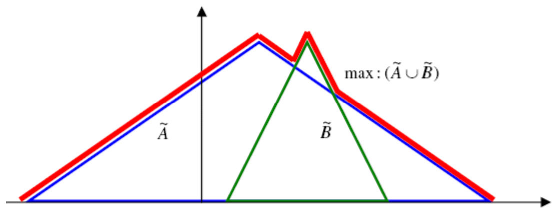

شکل (۴-۶ الف)- عملگر MIN دو عدد فازی




شکل (۴-۶ ب)- عملگر min که اشتراک دو عدد فازی می باشد




شکل (۴-۶ ج )- عملگر MAX دو عدد فازی




شکل (۴-۶ د)- عملگر max (اجتماع) دو عدد فازی

خواص عملگرهای حداقل و حداکثر فازی در جدول (۱-۶) خلاصه شده است.

با استفاده از عملگرهای حداقل و حداکثر فازی می توان اعداد فازی را مرتب نمود. اگر نماد ($\prec$) را برای مرتب بودن تقریبی اعداد فازی فرض کنیم آن گاه مرتب بودن دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت ذیل تعریف می شود :

$\tilde{A}\prec\tilde{B}\Leftrightarrow MIN(\tilde{A},\tilde{B})=\tilde{A}$ یا $\tilde{A}\prec\tilde{B}\Leftrightarrow MAX(\tilde{A},\tilde{B})=\tilde{B}$

جدول (۱-۶)- خواص عملگرهای حداقل و حداکثر فازی

| عملگر حداکثر فازی | عملگر حداقل فازی |
|---|---|
| $MAX(\tilde{A},\tilde{B})=MAX(\tilde{B},\tilde{A})$ | $MIN(\tilde{A},\tilde{B})=MIN(\tilde{B},\tilde{A})$ |
| $MAX[MAX(\tilde{A},\tilde{B}),\tilde{C}]=$ $MAX[\tilde{A},MAX(\tilde{B},\tilde{C})]$ | $MIN[MIN(\tilde{A},\tilde{B}),\tilde{C}]=$ $MIN[\tilde{A},MIN(\tilde{B},\tilde{C})]$ |
| $MAX(\tilde{A},\tilde{A})=\tilde{A}$ | $MIN(\tilde{A},\tilde{A})=\tilde{A}$ |
| $MAX[\tilde{A},MIN(\tilde{A},\tilde{B})]=\tilde{A}$ | $MIN[\tilde{A},MAX(\tilde{A},\tilde{B})]=\tilde{A}$ |
| $MAX\left[\tilde{A},MIN(\tilde{B},\tilde{C})\right]=$ $MIN\left[MAX(\tilde{A},\tilde{B}),MAX(\tilde{A},\tilde{C})\right]$ | $MIN\left[\tilde{A},MAX(\tilde{B},\tilde{C})\right]=$ $MAX\left[MIN(\tilde{A},\tilde{B}),MIN(\tilde{A},\tilde{C})\right]$ |

همین طور می توان با استفاده از برش $\alpha$ اعداد فازی و سپس استفاده از عملگرهای حداقل و حداکثر اعداد حقیقی معمولی، اعداد فازی را مرتب نمود. یعنی داریم :

$$\tilde{A} \prec \tilde{B} \Leftrightarrow \max(A_\alpha, B_\alpha) = B_\alpha \quad \text{یا} \quad \tilde{A} \prec \tilde{B} \Leftrightarrow \min(A_\alpha, B_\alpha) = A_\alpha$$

حداقل و حداکثر بازه های اعداد حقیقی که از برش $\alpha$ اعداد فازی حاصل شده اند نیز به صورت ذیل به دست
می آید :

$$A_\alpha = [a_1, a_2]$$
$$B_\alpha = [b_1, b_2]$$
$$\min(A_\alpha, B_\alpha) = [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)]$$
$$\max(A_\alpha, B_\alpha) = [\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)]$$

همین طور مرتب کردن دو بازه حقیقی به شرح ذیل انجام می شود :

$$[a_1, a_2] \le [b_1, b_2] \Leftrightarrow a_1 \le b_1 ,\ a_2 \le b_2$$

در نتیجه می توان چنین نتیجه گرفت :

$$\tilde{A} \prec \tilde{B} \Leftrightarrow A_\alpha \le B_\alpha$$

متغیرهای کلامی نیز می توانند به صورت ذیل مرتب شوند :

خیلی بزرگ $\succ$ بزرگ $\succ$ متوسط $\succ$ کوچک $\succ$ خیلی کوچک

**مثال (۴-۶)**- فرض کنید دو عدد فازی گسسته $\tilde{I}$ و $\tilde{J}$ به صورت ذیل تعریف شوند :

$$\tilde{I} = \frac{0.2}{0} + \frac{0.5}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.1}{5}$$

$$\tilde{J} = \frac{0}{0} + \frac{0.4}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.1}{6}$$

می خواهیم حداکثر دو عدد فازی $\tilde{I}$ و $\tilde{J}$ را به دست آوریم. برای این منظور فرض کنید $x$ معرف عناصر $\tilde{I}$ و $y$ معرف عناصر $\tilde{J}$ و $z$ بیانگر حداکثر $x$ و $y$ باشند. برای محاسبه حداکثر دو عدد فازی $\tilde{I}$ و $\tilde{J}$ ابتدا مقادیر ممکن $z$ محاسبه می شوند که به صورت یک ماتریس نمایش داده شده است.

$$Z = \max(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

سپس $\min(\mu_{\tilde{I}}(x), \mu_{\tilde{J}}(y))$ برای هر یک از مقادیر $z$ به دست می آید :

$$\min = (\mu_{\tilde{I}}(x), \mu_{\tilde{J}}(y)) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.8 & 1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.7 & 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

همان طور که ملاحظه می شود مقدار $z = 0$ یک بار، مقدار $z = 1$ سه بار، مقدار $z = 2$ پنج بار و ... تکرار شده اند که حداکثر مقدار $\min(\mu_{\tilde{I}}(x), \mu_{\tilde{J}}(y))$ آن ها را گرفته و عدد فازی $\max(\tilde{I}, \tilde{J})$ به صورت ذیل شکل می گیرد :

$$\mu_{\max(\tilde{I}, \tilde{J})}(z) = \frac{0}{0} + \frac{0.4}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.1}{6}$$

## ۵-۶- معادلات فازی

معادلات فازی[۸] یکی از زمینه های بسیار مهم و کاربردی در عملیات ریاضی مجموعه های فازی است. در معادلات فازی، ضرایب و متغیرها اعداد فازی فرض شده و عملیات ریاضی نیز به طور فازی تعریف می شوند. در این بخش دو نوع ساده از معادلات فازی که کاربردهای بسیاری نیز داشته اند معرفی و شیوه حل آنها شرح داده می شود. دو نوع معادله فازی ساده که در این بخش مورد بررسی قرار می گیرند به شرح ذیل است :

$\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$

$\tilde{A} \cdot \tilde{X} = \tilde{B}$

$\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ پارامترهای معادله و اعداد فازی هستند و $\tilde{X}$ نیز متغیر (مجهول) معادله است که یک عدد فازی فرض می شود. ابتدا معادله اول ( $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ ) مورد بررسی قرار می گیرد.

**معادله فازی** $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$

مشکل حل این معادله فازی از آنجایی ناشی می شود که $\tilde{X} = \tilde{B} - \tilde{A}$ ، جواب معادله نیست. برای درک بهتر فرض کنید دو عدد بازه ای $A = [a_1, a_2]$ و $B = [b_1, b_2]$ که می توانند نوع خاصی از اعداد فازی باشند را در نظر بگیریم در این صورت برای جواب معادله خواهیم داشت :

$B - A = [b_1 - a_2, b_2 - a_1]$

لذا اگر $B - A$، جواب معادله باشد باید داشته باشیم :

$A + (B - A) = B$

در حالی که داریم :

$$\begin{aligned} A + (B - A) &= [a_1, a_2] + [b_1 - a_2, b_2 - a_1] \\ &= [a_1 + b_1 - a_2, a_2 + b_2 - a_1] \\ &\neq [b_1, b_2] = B \end{aligned}$$

در نتیجه $B - A$ جواب معادله نیست. حال فرض کنید $X = [x_1, x_2]$ باشد و پارامترهای معادله نیز به همین صورت بازه های حقیقی معمولی باشند، آن گاه خواهیم داشت :

$[a_1 + x_1, a_2 + x_2] = [b_1, b_2]$

که به دو معادله معمولی تبدیل می شود و جواب معادله نیز به صورت ذیل به دست می آید :

$x_1 = b_1 - a_1$

$x_2 = b_2 - a_2$

از آنجا که $X$ باید یک بازه باشد لذا رابطه $x_1 \leq x_2$، باید برقرار باشد. در نتیجه دستگاه معادلات جواب خواهد داشت اگر داشته باشیم :

$b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2$

روش فوق رویکرد حل معادلات فازی را تشریح می کند. از آنجاکه برش $\alpha$، هر مجموعه فازی را به یک بازه بسته تبدیل می کند می توان از روش فوق برای حل معادلات بازه ای حاصل از برش $\alpha$ پارامترها و متغیر معادله استفاده کرد.

برای هر مقدار $\alpha \in (0,1]$ فرض کنید $A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ ، $B_\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$ و $X_\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha]$ بازه های حقیقی حاصل از برش $\alpha$ پارامترها و متغیر معادله باشند. آن گاه معادله $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$، جواب خواهد داشت اگر و فقط اگر داشته باشیم :

الف) برای هر $\alpha \in (0,1]$ : $b_1^\alpha - a_1^\alpha \leq b_2^\alpha - a_2^\alpha$

ب) مقدار $\alpha \leq \beta$، نتیجه دهد : $b_1^\alpha - a_1^\alpha \leq b_1^\beta - a_1^\beta \leq b_2^\beta - a_2^\beta \leq b_2^\alpha - a_2^\alpha$

در نتیجه با ایجاد برش های $\alpha$ به ازای مقادیر مختلف و حل معادله $A_\alpha + X_\alpha = B_\alpha$، می توان جواب معادله $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ را توسط رابطه ذیل به دست آورد :

$$\tilde{X} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha X_\alpha$$

رابطه فوق، اصل تجزیه مجموعه های فازی است که در فصل دوم کتاب (تعریف ۵-۲) معرفی شده است.

**مثال (۵-۶)**- فرض کنید اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت ذیل تعریف شده اند. جواب معادله فازی $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$، را به دست آورید.

$$\tilde{A}=\frac{0.2}{[0,1)}+\frac{0.6}{[1,2)}+\frac{0.8}{[2,3)}+\frac{0.9}{[3,4)}+\frac{1}{4}+\frac{0.5}{(4,5]}+\frac{0.1}{(5,6]}$$

$$\tilde{B}=\frac{0.1}{[0,1)}+\frac{0.2}{[1,2)}+\frac{0.6}{[2,3)}+\frac{0.7}{[3,4)}+\frac{0.8}{[4,5)}+\frac{0.9}{[5,6)}+\frac{1}{6}+\frac{0.5}{(6,7]}+\frac{0.4}{(7,8]}+\frac{0.2}{(8,9]}+\frac{0.1}{(9,10]}$$

تمام برش های $\alpha$، اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و جواب حاصل $X_\alpha$ در جدول (۲-۶) خلاصه شده است.

جدول (۲-۶)- برش های $\alpha$، پارامترها و متغیر فازی معادله

| $\alpha$ | $A_\alpha$ | $B_\alpha$ | $X_\alpha$ |
|---|---|---|---|
| ۱ | [4,4] | [6,6] | [2,2] |
| ۰.۹ | [3,4] | [5,6] | [2,2] |
| ۰.۸ | [2,4] | [4,6] | [2,2] |
| ۰.۷ | [2,4] | [3,6] | [1,2] |
| ۰.۶ | [1,4] | [2,6] | [1,2] |
| ۰.۵ | [1,5] | [2,7] | [1,2] |
| ۰.۴ | [1,5] | [2,8] | [1,3] |
| ۰.۳ | [1,5] | [2,8] | [1,3] |
| ۰.۲ | [0,5] | [1,9] | [1,4] |
| ۰.۱ | [0,6] | [0,10] | [0,4] |

در نتیجه جواب معادله، $\tilde{X}$، با اجتماع بازه های $X_\alpha$، به صورت ذیل به دست می آید :

$$\tilde{X} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha X_\alpha = \frac{0.1}{[0,1)} + \frac{0.7}{[1,2)} + \frac{1}{2} + \frac{0.4}{(2,3]} + \frac{0.2}{(3,4]}$$

**معادله** $\tilde{A} \cdot \tilde{X} = \tilde{B}$

در این معادله نیز به دلیل مشابه، $\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}}$ ، جواب معادله نیست. لذا طبق روش گفته شده برای معادله $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ ، برش های $\alpha$ ، پارامترها و متغیر به دست آمده و جواب معادله ذیل تعیین می شود :

$$A_\alpha \cdot X_\alpha = B_\alpha$$

برای هر مقدار $\alpha \in (0,1]$ فرض کنید $A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ ، $B_\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$ و $X_\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha]$ بازه های حقیقی حاصل از برش $\alpha$ پارامترها و متغیر معادله باشند. آن گاه معادله $\tilde{A} \cdot \tilde{X} = \tilde{B}$، جواب خواهد داشت اگر و فقط اگر داشته باشیم :

الف) برای هر $\alpha \in (0,1]$ : $\frac{b_1^\alpha}{a_1^\alpha} \le \frac{b_2^\alpha}{a_2^\alpha}$

ب) مقدار $\alpha \le \beta$، نتیجه دهد : $\frac{b_1^\alpha}{a_1^\alpha} \le \frac{b_1^\beta}{a_1^\beta} \le \frac{b_2^\beta}{a_2^\beta} \le \frac{b_2^\alpha}{a_2^\alpha}$

در نتیجه با ایجاد برش های $\alpha$ به ازای مقادیر مختلف و حل معادله $A_\alpha \cdot X_\alpha = B_\alpha$، می توان جواب معادله $\tilde{A} \cdot \tilde{X} = \tilde{B}$ را توسط رابطه ذیل به دست آورد :

$$\tilde{X} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha X_\alpha$$

## ۴-۶- تبدیل فازی به کلاسیک (Fuzzy to crisp conversion)

### روش برش $\alpha$

برای یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، مجموعه برش $\alpha$ که با $A_\alpha$ نشان داده می شود $(0 \le \alpha \le 1)$ یک مجموعه کلاسیک است و اعضاء آن ، اعضایی هستند که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، بزرگتر یا مساوی $\alpha$ می باشد.

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \ge \alpha\}$$

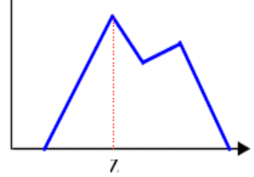
توجه داشته باشید که مجموعه برش $\alpha$ ، یک مجموعه با درجه پایین نیست ، بلکه آن یک مجموعه کلاسیک است که از مجموعه فازی والد $\tilde{A}$ مشتق می شود .

### روش درجه عضویت حداکثر

به این روش ، روش ارتفاع نیز گفته می شود . در این روش یک مجموعه ( عدد ) فازی تبدیل به یک عدد کلاسیک که بیشترین درجه عضویت را در مجموعه ( عدد ) فازی دارد می شود .

$$\mu_{\tilde{A}}(z^*) \ge \mu_{\tilde{A}}(z) \qquad \forall_z \in Z$$

که در شکل ( ۵-۶) نیز به تصویر کشیده شده است.

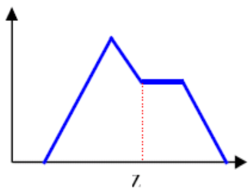


## روش مرکز ثقل (Centroid Method)

این روش که روش مرکز ناحیه نیز نام دارد بیشترین کاربرد را نسبت به سایر روشها دارد . و به شرح ذیل می باشد :

$$Z^* = \frac{\int \mu_{\tilde{A}}(z).z\, d_z}{\int \mu_{\tilde{A}}(z)\, d_z}$$

جاییکه نماد $\int$ انتگرال جبری می باشد و در شکل (۶-۶) به تصویر کشیده شده است.

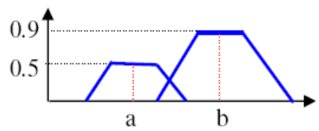



## روش میانگین موزون (Weighted average Method)

این روش صرفاً برای مجموعه (عدد) فازی با تابع عضویت متقارن معتبر است و به شرح ذیل می باشد.

$$Z^* = \frac{\sum \mu_{\tilde{A}}(\bar{z}).\bar{z}}{\sum \mu_{\tilde{A}}(\bar{z})}$$

نماد $\sum$ ، جمع جبری می باشد . مفهوم این روش در شکل (۷-۶) به تصویر کشیده شده است.




شکل (۷-۶) روش میانگین موزون

که براساس شکل فوق عدد کلاسیک قطعی طبق روش میانگین موزون بصورت ذیل بدست می آید.

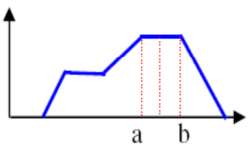
$$Z^* = \frac{a(0.5) + b(0.9)}{0.5 + 0.9}$$

**روش درجه عضویت حداکثر – میانگین (Mean-Max membership)**

این روش که به نام " میانه حداکثر " نیز معروف است خیلی نزدیک به روش اول می باشد . البته به غیر از حالتی که ناحیه حداکثر محدود به یک نقطه نیست . این روش بصورت ذیل است :

$$Z^* = \frac{a+b}{2}$$

جائیکه b,a در شکل ( ۸-۶ ) نشان داده شده اند.




شکل (۸-۶)- روش درجه عضویت حداکثر- میانگین