CHAPTER 11

FUZZY MATHEMATICAL PROGRAMMING

Hassan Shavandi
Industrial Engineering dept.
Sharif University of Technology

رئوس مطالب

- برنامه ریزی خطی فازی
- برنامه ریزی پویای فازی

برنامه ریزی خطی فازی

- مدل برنامه ریزی خطی کلاسیک

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = C^T X \\
&\quad \text{s.t.} \\
&\qquad AX \le b \\
&\qquad X \ge 0 \\
&A \in R^{m\times n}, \quad b \in R^m, \qquad C, X \in R^n
\end{aligned}
$$

در حالت کلاسیک، فرض بر این است که ضرایب ماتریس A و بردارهای B و C اعداد قطعی و دقیق بوده، نامعادله "$\le$" در حالت قطعی و حداکثر کردن تابع هدف نیز در حالت قطعی تعریف می شود.

Fuzzy Sets and Applications
shavandi@sharif.edu

برنامه ریزی خطی فازی

مواردی که می توان مدل برنامه ریزی خطی را در حالت فازی توسعه داد عبارتند از :

- حداکثر یا حداقل کردن تابع هدف به طور قطعی مطرح نشود بلکه بهینه کردن تابع هدف به طور تقریبی در نظر گرفته شود.
- محدودیت های مدل می توانند در حالت فازی مطرح شوند. علامت $\le$ با معنی قطعی مطرح نشود بلکه به صورت تقریبی بیان شود ($\lesssim$).
- ضرایب مدل نیز می توانند اعداد فازی فرض شوند.

Sharif University of Technology
Industrial Engineering Dept.

برنامه ریزی خطی فازی متقارن

مدل برنامه ریزی خطی فازی متقارن

در اینجا یکی از مدل های پایه برنامه ریزی خطی فازی ارائه می شود. در این مدل، تصمیم گیرنده می تواند یک حد پایین کلامی برای مقدار تابع هدف در نظر بگیرد. در نتیجه مدل به شرح ذیل در نظر است :

$C^T X \tilde{\geqq} Z$

$AX \tilde{\leqq} b$ علامت "$\tilde{\leqq}$" حالت فازی "$\leq$" است.

$X \geq 0$

اگر فرض کنیم $\begin{pmatrix} -c \\ A \end{pmatrix} = B$ و $\begin{pmatrix} -z \\ b \end{pmatrix} = d$ آن گاه خواهیم داشت :

$BX \tilde{\leqq} d$

$X \geq 0$

برنامه ریزی خطی فازی متقارن

هر سطر از $(m+1)$ سطر مدل، در واقع یک مجموعه فازی است که دارای یک تابع عضویت $(\mu_i(x))$ نیز است. تابع عضویت مجموعه فازی «تصمیم» به صورت ذیل به دست می آید :

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_i \{\mu_i(x)\}$$

از آنجا که تصمیم گیرنده به دنبال حداکثر کردن تابع هدف در فضای جواب مسئله است، در نتیجه جواب بهینه مدل برنامه ریزی خطی فازی به صورت ذیل به دست می‌آید :

$$\underset{X\geq 0}{Max} \quad \min_i \{\mu_i(x)\} = \max_{X\geq 0} \quad \mu_{\tilde{D}}(x)$$

برنامه ریزی خطی فازی متقارن

حال باید تابع عضویت ($\mu_i(x)$) را مشخص نماییم که به صورت ذیل تعیین می شود :

$$\mu_i(x)=\begin{cases}1 & B_i x\le d_i\\ [0,1] & d_i<B_i x\le d_i+p_i\\ 0 & B_i x>d_i+p_i\end{cases}$$

که با در نظر گرفتن یک تابع ساده، تابع عضویت به صورت ذیل به دست می آید :

$$\mu_i(x)=\begin{cases}1 & B_i x\le d_i\\ 1-\dfrac{B_i x-d_i}{p_i} & d_i<B_i x\le d_i+p_i\\ 0 & B_i x>d_i+p_i\end{cases}$$

برنامه ریزی خطی فازی متقارن

p_i ، یک مقدار ثابت است که به عنوان حد مجاز انحراف از حد بالای محدودیت است. در نهایت با اعمال یکسری عملیات ریاضی و تبدیل های لازم،مدل برنامه ریزی خطی فازی، تبدیل به مدل برنامه ریزی خطی قطعی ذیل می شود :

$$\begin{aligned}&\max \quad \lambda\\ &\lambda\, p_i+B_i X\le d_i+p_i \qquad i=1,\dots m+1\\ &X\ge 0\end{aligned}$$

اگر جواب بهینه مساله فوق را بردار (λ, X_o) فرض کنیم، آن گاه X_o ، جواب حداکثر مدل برنامه ریزی خطی فازی است. در ادامه با فرض فازی بودن پارامترهای مدل برنامه ریزی خطی، مدل های جدید برنامه ریزی خطی فازی توسعه می یابند.

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

مدل برنامه ریزی خطی فازی در حالی که فقط مقادیر سمت راست محدودیت ها اعداد فازی هستند ($\tilde{b}_i$)، به صورت ذیل است :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i \qquad i = 1,\dots,m$$

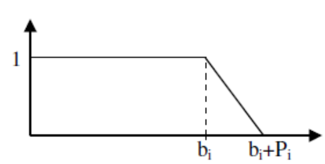
$$X_j \ge 0 \qquad \forall j$$

- در حالت کلی، مسئله برنامه ریزی خطی فازی ابتدا می بایست به یک مسئله معادل قطعی تبدیل شود و سپس با روش های استاندارد حل شده و جواب بهینه آن به دست آید.
- در نتیجه جواب نهایی مسئله قطعی خواهد بود که با توجه به ساختار فازی مسئله به دست آمده است

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

- جهت تبدیل مدل برنامه ریزی خطی فازی به مدل قطعی فرض کنید تابع عضویت اعداد فازی سمت راست محدودیت ها به فرم ذیل باشد :

$$\mu_{\tilde{b}_i}(y) = \begin{cases} 1 & y \le b_i \\ \dfrac{b_i + p_i - y}{p_i} & b_i \le y \le b_i + p_i \\ 0 & y \ge b_i + p_i \end{cases}$$



برای هر بردار X ($X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$)، ابتدا درجه عضویت $D_i(X)$ که بیانگر درجه عضویت تامین محدودیت i توسط بردار X است، طبق رابطه ذیل محاسبه می شود :

$$D_i(X) = \mu_{\tilde{b}_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

هر $D_i(X)$ تشکیل یک مجموعه فازی در R^n می دهد که اشتراک آن ها ($\bigcap_{i=1}^{m} D_i$) منطقه موجه[۳] یا فضای جواب مسئله است. به دلیل فازی بودن فضای جواب مسئله، تابع هدف نیز فازی می شود. لذا لازم است مجموعه فازی تابع هدف به دست آید. این کار با محاسبه حد پایین و حد بالا برای مقدار تابع هدف انجام می شود. حد پایین مقدار تابع هدف (Z_l) با حل مسئله برنامه ریزی خطی ذیل به دست می آید :

$$\max Z = CX$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$
$$x_j \ge 0$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

و حد بالای مقدار تابع هدف (Z_u) به وسیله حل مسئله برنامه ریزی خطی ذیل به دست خواهد آمد :

$$\max Z = CX$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + p_i$$
$$x_j \ge 0$$

تابع عضویت مجموعه فازی مقادیر تابع هدف به صورت ذیل تعریف می شود :

$$G(X) = \begin{cases} 1 & CX \ge Z_u \\ \dfrac{CX - Z_l}{Z_u - Z_l} & Z_l \le CX \le Z_u \\ 0 & CX \le Z_l \end{cases}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

حال جواب بهینه مسئله، با اشتراک تابع هدف و منطقه موجه و حداکثر کـردن آن بـه دسـت مـی آید. برای اشتراک مجموعه های فازی تابع هدف و منطقه موجه از عملگر حداقل استفاده می شود.

در نتیجه داریم :

$$\max\ \min\left[\bigcap_{i=1}^{m} D_i(X),\ G(X)\right]$$

با تغییر متغیر $\lambda = \min\left[\bigcap_{i=1}^{m} D_i(X),\ G(X)\right]$، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}&\max \lambda\\&s.t.\\&\lambda = \min_{X\geq 0}(G(X), \underset{\forall i}{D_i(X)})\end{aligned}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

- در نتیجه مدل به صورت ذیل تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}&\max \lambda\\&s.t.\\&\lambda \leq G(X)\\&\lambda \leq \underset{\forall i}{D_i(X)}\\&\lambda, X \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max \lambda\\&s.t.\\&\lambda(Z_u - Z_l) - CX \leq -Z_l\\&\lambda p_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i + p_i \qquad \forall i\\&\lambda \geq 0,\quad x_j \geq 0 \qquad \forall j\end{aligned}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

مثال (۱-۹) – فرض کنید یک شرکت تولیدی دو محصول p_1 و p_2 تولید می کند. سود هر واحد از محصول p_1 برابر ۴۰ دلار و سود هر واحد از محصول p_2 برابر ۳۰ دلار است. تولید هر واحد محصول p_1 دو برابر نفر ساعت مورد نیاز تولید هر واحد محصول p_2 ، نیاز دارد. کل نفر ساعت در دسترس در هر روز ۵۰۰ نفر ساعت و این امکان وجود دارد که ۱۰۰ نفر ساعت نیز به صورت اضافه کاری استفاده شود. میزان مواد اولیه در دسترس در هر روز حداقل برای تولید ۴۰۰ واحد از محصولات p_1 و p_2 کافی است و طبق تجربه امکان افزایش مواد اولیه تا سقف ۵۰۰ واحد در روز نیز وجود دارد. حال مسئله به دنبال تعیین میزان تولید از محصولات p_1 و p_2 است به گونه ای که کل سود حداکثر شود.

متغیرهای x_1 و x_2 برای میزان تولید محصول p_1 و p_2 در هر روز تعریف می شوند و مسئله به فرم یک مدل برنامه ریزی خطی فازی به صورت ذیل فرموله می شود :

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

$$\max Z = 40x_1 + 30x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + x_2 \le \tilde{b}_1$$
$$2x_1 + x_2 \le \tilde{b}_2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

تابع عضویت اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ به صورت ذیل تعریف می شوند:

$$\mu_{b_1}(y) = \begin{cases} 1 & y \le 400 \\ \dfrac{500-y}{100} & 400 < y \le 500 \\ 0 & y > 500 \end{cases}$$

$$\mu_{b_2}(y) = \begin{cases} 1 & y \le 500 \\ \dfrac{600-y}{100} & 500 < y \le 600 \\ 0 & y > 600 \end{cases}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

در ابتدا لازم است Z_l و Z_u محاسبه شوند. با حل دو مسئه برنامه ریزی خطی ذیل مقادیر $Z_l = 13000$ و $Z_u = 16000$ به دست می آیند.

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \max Z = 40x_1 + 30x_2 \\
& s.t. \\
& x_1 + x_2 \le 400 \\
& 2x_1 + x_2 \le 500 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & \max Z = 40x_1 + 30x_2 \\
& s.t. \\
& x_1 + x_2 \le 500 \\
& 2x_1 + x_2 \le 600 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

در نهایت مسئله برنامه ریزی خطی فازی به صورت ذیل به دست می آید :

برنامه ریزی خطی با ضرایب سمت راست فازی

$$
\begin{aligned}
& \max \lambda \\
& s.t. \\
& 3000\lambda - (40x_1 + 30x_2) \le -13000 \\
& 100\lambda + x_1 + x_2 \le 500 \\
& 100\lambda + 2x_1 + x_2 \le 600 \\
& x_1, x_2, \lambda \ge 0
\end{aligned}
$$

پس از حل مسئله فوق، مقدار بهینه λ برابر با ۰/۵ به دست می آید که مقادیر بهینه متغیرها نیز برابر $x_1^* = 100$ و $x_2^* = 350$ به دست می آیند. در نتیجه مقدار بهینه تابع هدف برابر ۱۴۵۰۰ است که به صورت ذیل به دست می آید :

$$Z^* = 40x_1^* + 30x_2^* = 14500$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی فازی

$$\begin{aligned} &\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{subject to } \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a_{ij}} x_j \le b_i, \qquad 1 \le i \le m \\ &x_j \ge 0, \qquad 1 \le j \le n \end{aligned}$$

Assumption 1. $\widetilde{a_{ij}}$ is a fuzzy number with the following linear membership function:

$$\mu_{a_{ij}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < a_{ij}, \\ (a_{ij} + d_{ij} - x)/d_{ij} & \text{if } a_{ij} \le x < a_{ij} + d_{ij}, \\ 0 & \text{if } x \ge a_{ij} + d_{ij}, \end{cases}$$

where $x \in R$ and $d_{ij} > 0$ for all $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی فازی

- For defuzzication of this problem, we first fuzzify the objective function.
- This is done by calculating the lower and upper bounds of the optimal values first.
- The bounds of the optimal values, z_l *and* z_u are obtained by solving the standard linear programming problems:

$$\begin{aligned} &z_1 = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{subject to } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = 1, \ldots, m, \\ &x_j \ge 0, \; j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &z_2 = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}) x_j \le b_i \\ &x_j \ge 0. \end{aligned}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی فازی

The objective function takes values between z_1 and z_2 while technological coefficients vary between a_{ij} and $a_{ij}+d_{ij}$. Let $z_l = \min(z_1, z_2)$ and $z_u = \max(z_1, z_2)$. Then, z_l and z_u are called the lower and upper bounds of the optimal values, respectively.

In this case the fuzzy set of optimal values, G, which is a subset of R^n, is defined as (see Klir and Yuan [6]);

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & if \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < z_l, \\ (\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - z_l)/(z_u - z_l) & if \quad z_l \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < z_u, \\ 1 & if \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge z_u. \end{cases} \tag{2.4}$$

Fuzzy Sets and Applications
shavandi@sharif.edu

برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی فازی

The fuzzy set of the i th constraint, C_i, which is a subset of R^m, is defined by

$$\mu_{C_i}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad b_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)/\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j & , \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i < \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}) x_j \\ 1 & , \quad b_i \ge \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}) x_j. \end{cases} \tag{2.5}$$

By using the definition of the fuzzy decision proposed by Bellman and Zadeh [2] (see also Lai and Hwang [7]), we have

$$\mu_D(x) = \min(\mu_G(x), \min_i(\mu_{C_i}(x))). \tag{2.6}$$

In this case the *optimal fuzzy decision* is a solution of the problem

$$\max_{x \ge 0}(\mu_D(x)) = \max_{x \ge 0} \min(\mu_G(x), \min_i(\mu_{C_i}(x))). \tag{2.7}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی فازی

Consequently, the problem (2.1) becomes to the following optimization problem

$$\begin{array}{ll} \max \lambda & \\ \mu_G(x) \geq \lambda & \\ \mu_{C_i}(x) \geq \lambda, & 1 \leq i \leq m \\ x \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. & \end{array} \tag{2.8}$$

By using (2.4) and (2.5), the problem (2.8) can be written as

$$\begin{array}{ll} \max \lambda & \\ \lambda(z_1 - z_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z_2 \leq 0, & \\ \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \lambda d_{ij}) x_j - b_i \leq 0, & 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. & \end{array} \tag{2.9}$$

Notice that, the constraints in problem (2.9) containing the cross product terms λx_j are not convex. Therefore the solution of this problem requires the special approach adopted for solving general nonconvex optimization problems.

برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی و ضرایب سمت راست فازی

$$\begin{array}{ll} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a_{ij}} x_j \leq \widetilde{b_i}, & 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0, & \end{array}$$

Assumption 3. $\widetilde{a_{ij}}$ and $\widetilde{b_i}$ are fuzzy numbers with the following linear membership functions:

$$\mu_{a_{ij}}(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x < a_{ij}, \\ (a_{ij} + d_{ij} - x)/d_{ij} & if \quad a_{ij} \leq x < a_{ij} + d_{ij}, \\ 0 & if \quad x \geq a_{ij} + d_{ij}, \end{cases}$$

and

$$\mu_{b_i}(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x < b_i, \\ (b_i + p_i - x)/p_i & if \quad b_i \leq x < b_i + p_i, \\ 0 & if \quad x \geq b_i + p_i, \end{cases}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی و ضرایب سمت راست فازی

- We first calculate the lower and upper bounds of the optimal values. The optimal values z_l *and* z_u *can be defined by* solving the following standard linear programming problems:

$$z_1 = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}) x_j \le b_i, \quad 1 \le i \le m$$
$$x_j \ge 0,$$

$$z_2 = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + p_i, \quad 1 \le i \le m$$
$$x_j \ge 0,$$

$$z_3 = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}) x_j \le b_i + p_i, \quad 1 \le i \le m$$
$$x_j \ge 0$$

$$z_4 = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad 1 \le i \le m$$
$$x_j \ge 0.$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی و ضرایب سمت راست فازی

Let $z_l = \min(z_1, z_2, z_3, z_4)$ and $z_u = \max(z_1, z_2, z_3, z_4)$. The objective function takes values between z_l and z_u while technological coefficients take values between a_{ij} and $a_{ij} + d_{ij}$ and the right-hand side numbers take values between b_i and $b_i + p_i$.

Then, the fuzzy set of optimal values, G, which is a subset of R^n, is defined by

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & if \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < z_l, \\ (\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - z_l)/(z_u - z_l) & if \quad z_l \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < z_u, \\ 1 & if \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge z_u. \end{cases} \tag{3.6}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی و ضرایب سمت راست فازی

The fuzzy set of the ith constraint, C_i, which is a subset of R^n is defined by

$$\mu_{C_i}(x) = \begin{cases} 0 & if \quad b_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \\ (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)/(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j + p_i) & if \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i < \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij})x_j + p_i, \\ 1 & if \quad b_i \ge \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij})x_j + p_i. \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \lambda(z_2 - z_1) - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z_1 \le 0 \\ & \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \lambda d_{ij})x_j + \lambda p_i - b_i \le 0, \qquad 1 \le i \le m \\ & x \ge 0, \qquad 0 \le \lambda \le 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Notice that, the problem (3.8) is also a nonconvex programming problem, similiar to the problem (2.9).

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

۴-۲-۹- مدل برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

در مدل برنامه ریزی خطی ضرایب متغیرها در تابع هدف می توانند به صورت اعداد فازی مطرح شوند که در این صورت مدل به شرح ذیل خواهد بود :

$$\begin{aligned} & \max \ Z = \tilde{C}X \\ & \quad \text{s.t.} \\ & \qquad AX \le b \\ & \qquad X \ge 0 \end{aligned}$$

فرض کنید اعداد فازی ضرایب تابع هدف به صورت اعداد فازی مثلثی تعریف شوند. یعنی بردار فازی $\tilde{C}$، به صورت ذیل تعریف می شود :

$$\tilde{C} = (C^p, C^m, C^o)$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

مدل برنامه ریزی خطی فازی نیز به فرم ذیل تبدیل می شود :

$$\max\ Z=\sum_{j=1}^{n}(c_j^p,c_j^m,c_j^o)x_j$$
$$\text{s.t.}$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i \qquad i=1,2,\ldots,m$$
$$x_j\ge 0 \qquad \forall j$$

رویکرد های مختلفی برای حل مسئله فوق وجود دارد. رویکرد اول ترکیب پارامترهای اعداد فازی و رسیدن به یک ضریب برای هر متغیر در تابع هدف است که در این صورت مسئله تبدیل به یک مسئله برنامه ریزی خطی قطعی می شود. یکی از روش های ترکیب پارامترهای اعداد فازی استفاده از فرمول ذیل است :

$$c_j=\frac{c_j^p+4c_j^m+c_j^o}{6} \qquad \forall j$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

رویکرد دیگر این است که به جای حداکثر کردن مقادیر فازی مثلثی ($(C^p,C^m,C^o)X$)، می توان مقدار مرکز (C^mX) را حداکثر نمود، مقدار سمت چپ ($(C^m-C^p)X$) را حداقل نمود و مقدار سمت راست ($(C^o-C^m)X$) را حداکثر کرد. در نتیجه با این رویکرد مسئله تبدیل به یک مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفه در حالت قطعی به شرح ذیل می شود :

$$\min\ Z_1=(C^m-C^p)X$$
$$\max\ Z_2=C^mX$$
$$\max\ Z_3=(C^o-C^m)X$$
$$\text{s.t.}$$
$$AX\le b$$
$$X\ge 0$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

- در علم تحقیق در عملیات روش های مختلفی برای حل مسایل بهینه سازی چند هدفه در حالت قطعی وجود دارد.
- یکی از روش های مناسب استفاده از رویکرد فازی است که پس از توسعه کاربردهای مجموعه های فازی ایجاد شده است. در این روش با ایجاد تابع عضویت بهینه شدن هر هدف سعی بر این است که درجه بهینه شدن اهداف حداکثر گردد. لذا در ابتدا لازم است تابع عضویت بهینه شدن هر هدف به دست آید.
- برای تعیین تابع عضویت هر یک از توابع هدف، ابتدا برای هر تابع هدف به طور مستقل مسئله برای بهترین و بدترین مقدار تابع هدف حل شده و سپس بر اساس آن ها و به طور خطی تابع عضویت به دست می آید.
- در ادامه فرایند تعیین تابع عضویت هر یک از توابع هدف تشریح شده است.

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

$$
\begin{aligned}
Z_1^l = \min\ & (C^m - C^p)X \\
& AX \le b \\
& X \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_1^u = \max\ & (C^m - C^p)X \\
& AX \le b \\
& X \ge 0
\end{aligned}
$$

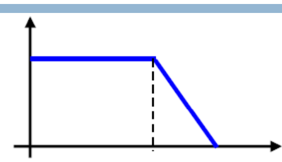
$$
\mu_{z_1}(z_1) = \begin{cases} 1 & Z_1 \le Z_1^l \\ \dfrac{Z_1^u - Z_1}{Z_1^u - Z_1^l} & Z_1^l \le Z_1 \le Z_1^u \\ 0 & Z_1 \ge Z_1^u \end{cases}
$$

به طوری که داریم :

$$Z_1 = (C^m - C^p)X$$

تابع عضویت به دست آمده برای تابع هدف Z_1 ، در شکل (۲-۹) به تصویر کشیده شده است.

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی



شکل (۲-۹)- تابع عضویت بهینه شدن هدف Z_1

به روش مشابه تابع عضویت بهینه شدن اهداف Z_2 و Z_3 به شرح ذیل به دست می آیند :

$$\mu_{Z_2}(X)=\begin{cases}1 & C^m X > Z_2^u\\ \dfrac{C^m X - Z_2^l}{Z_2^u - Z_2^l} & Z_2^l \le C^m X \le Z_2^u\\ 0 & C^m X < Z_2^l\end{cases}$$

$$\mu_{Z_3}(X)=\begin{cases}1 & (C^p - C^m)X > Z_3^u\\ \dfrac{(C^p - C^m)X - Z_3^l}{Z_3^u - Z_3^l} & Z_3^l \le (C^p - C^m)X \le Z_3^u\\ 0 & (C^p - C^m)X < Z_3^l\end{cases}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

در نهایت مسئله تبدیل به یک مسئله برنامه ریزی خطی تک هدفی قطعی به شرح ذیل می شود :

$$\begin{aligned}&\max \quad \lambda\\ &\text{s.t.}\\ &\quad \lambda(Z_1^u - Z_1^l) \le Z_1^u - (C^m - C^p)X\\ &\quad \lambda(Z_2^u - Z_2^l) \le C^m X - Z_2^l\\ &\quad \lambda(Z_3^u - Z_3^l) \le (C^p - C^m)X - Z_3^l\\ &\quad AX \le b\\ &\quad X \ge 0\end{aligned}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

مثال (۲-۹)- مسئله برنامه ریزی خطی دو هدفی ذیل را در نظر بگیرید :

$$\max \quad Z = (-x_1 - 3x_2 \,,\, 1.5x_1 + 2.5x_2)$$
$$\text{s.t.}$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 18$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 40$$
$$3x_1 + x_2 \le 25$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

ابتدا مسئله به ازای هر یک از اهداف، به طور مستقل حل شده و بهترین و بدترین مقادیر تابع هدف به شرح ذیل به دست می آیند :

$$Z_1^u = 0,\quad Z_1^l = -24.4$$
$$Z_2^u = 23.8,\quad Z_2^l = 0$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

لذا تابع عضویت بهینه شدن اهداف به صورت ذیل به دست می آیند :

$$\mu_{z_1}(x) = \begin{cases} 1 & -x_1 - 3x_2 \ge 0 \\ \dfrac{-x_1 - 3x_2 + 24.4}{24.4} & -24.4 \le -x_1 - 3x_2 \le 0 \\ 0 & -x_1 - 3x_2 \le -24.4 \end{cases}$$

$$\mu_{z_2}(x) = \begin{cases} 1 & 1.5x_1 + 2.5x_2 \ge 23.8 \\ \dfrac{1.5x_1 + 2.5x_2}{23.8} & 0 \le 1.5x_1 + 2.5x_2 \le 23.8 \\ 0 & 1.5x_1 + 2.5x_2 \le 0 \end{cases}$$

برنامه ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی

در نهایت مسئله برنامه ریزی خطی دو هدفه تبدیل به مسئله برنامه ریزی خطی تـک هدفـه ذیـل می شود :

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \lambda \\
\text{s.t.} \quad & 24.4\,\lambda \le -x_1 - 3x_2 + 24.4 \\
& 23.8\,\lambda \le 1.5x_1 + 2.5x_2 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 18 \\
& 4x_1 + 3x_2 \le 40 \\
& 3x_1 + x_2 \le 25 \\
& x_1, x_2, \lambda \ge 0
\end{aligned}
$$

برنامه ریزی پویای فازی

۱-۳-۹- مقدمه ای بر برنامه ریزی پویا

برنامه ریزی پویای سنتی و کلاسیک که توسط بلمن[۴] در سـال ۱۹۵۷ ارایـه شـد یکـی از تکنیـک های بهینه سازی معروف و مشهور در تحقیق در عملیات است. ایده برنامه ریزی پویا در واقع همان دیدگاه فرایند تصمیم گیری چند مرحله ای است کـه سیاسـت بهینـه در هـر مرحلـه، بـه صـورت بازگشتی تعیین می شود. به صورت عمومی یک مـدل برنامـه ریـزی پویـا ، بـا تعریـف پارامترهـا و متغیرهای ذیل فرموله می شود :

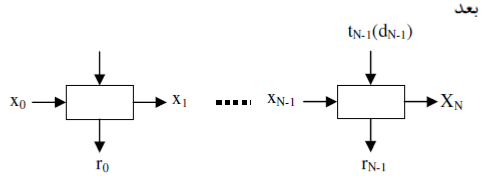
x_i: متغیر حالت در مرحله i ام

d_i : متغیر تصمیم در مرحله i ام

$r_i(x_i, d_i)$: میزان مطلوبیت مرحله i ام

$R_i(d_N, \ldots, d_{N-i}, x_N)$: تابع مطلوبیت

$t_i(d_i, x_i)$: تابع انتقال از مرحله i ام به مرحله بعد



برنامه ریزی پویای فازی

فرایند حل مسئله با حل بازگشتی روابط ذیل انجام می شود :

$$\max_{d_i} R_i(x_i d_i) = \max_{d_i} r_i(x_i, d_i) o R_{i+1}(x_i + 1) \qquad (۹-۱)$$

به طوری که :

$$x_{i+1} = t_i(x_i, d_i)$$
$$i = 1,2,\dots N-1$$

رابطه (۱-۹) می تواند به صورت ذیل نیز بیان شود :

$$\max_{d_i} R_i(x_i, d_i) = \max_{d_i} \{ r_i(x_i, d_i) o R_{i+1}(t_i(x_i, d_i)) \}$$

کلیه متغیرها، تابع مطلوبیت و تابع انتقال به صورت قطعی مطرح هستند.

برنامه ریزی پویای فازی

۲-۳-۹- برنامه ریزی پویای فازی با تابع انتقال حالت قطعی

پروفسور زاده و بلمن[۵] در مقاله مشهور خود در سال ۱۹۷۰ ، برای اولین بـار رویکـرد برنامـه ریـزی پویای فازی[۶] را با در نظر گرفتن تابع انتقال حالت قطعی مطرح کردند. تعاریف ذیل جهـت فرمولـه کردن مدل برنامه ریزی پویای فازی تعریف می شوند :

– **متغیر حالت :**

$$\tilde{X}_i \in \tilde{X}$$
$$i = 0, \dots, N$$

تعداد مراحل به طور قطعی مشخص می شود. $\tilde{X}_i$ متغیـر حالـت سیسـتم اسـت. مجموعـه فـازی حالت های سیستم به صورت مجموعه حالت های ممکن سیستم تعریف می شود :

$$\tilde{X} = \{\tau_1, \tau_2 \dots, \tau_N\}$$

برنامه ریزی پویای فازی

– متغیر تصمیم :

$d_i \in \tilde{D}$

$i = 1,\dots,N$

d_i متغیر تصمیم از فضای تصمیم $\tilde{D}$، است. $\tilde{D}$ مجموعه تصمیم های ممکن است :

$\tilde{D} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$

– تابع انتقال حالت :

$x_{i+1} = t(x_i, d_i)$

تابع انتقال حالت به طور قطعی تعریف می شود.

حال برای هر مرحله t، $(t=0,\dots, N\text{-}1)$ موارد ذیل تعریف می شوند :

۱- محدودیت فازی $\tilde{C}_t$، که فضای تصمیم در مرحله t ام را محدود می کند توسط تابع عضویت آن تعریف می شود.

$\mu_{\tilde{C}_t}(d_t)$

برنامه ریزی پویای فازی

۲- هدف فازی $\tilde{G}_N$، که به وسیله تابع عضویت آن تعریف می شود :

$\mu_{\tilde{G}_N}(x_N)$

۳- مسئله به دنبال تعیین تصمیم بهینه ای است که تابع مطلوبیت را حداکثر می کند و به ازای مقدار اولیه x_0 داریم:

$\tilde{D}^o = \{d_i^o\}, i = 0,\dots,N$

به طوری که $\tilde{D}^o$، مجموعه فازی تصمیم بهینه است.

با توجه به تعاریف فوق، مجموعه فازی تصمیم براساس تعریف (۱-۸) از اشتراک محدودیت ها و اهداف به دست می آید :

$$\tilde{D} = \bigcap_{t=0}^{N-1} \tilde{C}_t \cap \tilde{G}_N \qquad (۹-۲)$$

برنامه ریزی پویای فازی

با استفاده از عملگر حداقل در اشتراک محدودیت ها و اهداف فازی، تابع عضویت مجموعه فازی تصمیم به صورت ذیل به دست می آید :

$$\mu_{\tilde{D}}(d_0,\dots,d_{N-1}) = \min\{\mu_{\tilde{C}_0}(d_0),\dots,\mu_{\tilde{C}_{N-1}}(d_{N-1}),\mu_{\tilde{G}_N}(x_N)\} \qquad (۹-۳)$$

تابع عضویت مجموعه فازی تصمیم بهینه نیز به صورت ذیل به دست می آید :

$$\mu_{\tilde{D}^o}(d_0{}^o,\dots,d^o{}_{N-1}) = \max_{d_0,\dots,d_{N-2}} \max_{d_{N-1}}[\min\{\mu_{\tilde{C}_0}(d_0),\dots, \mu_{\tilde{G}_N}(t_N(x_{N-1},d_{N-1}))\}] \qquad (۹-۴)$$

به طوری که d_i^o، تصمیم بهینه در مرحله iام است.

برنامه ریزی پویای فازی

اگر k یک عدد ثابت و g تابعی از d_{N-1} باشد آن گاه رابطه ذیل برقرار است :

$$\max_{d_{N-1}} \min\{g(d_{N-1}),K\} = \min\{k,\max_{d_{N-1}} g(d_{N-1})\}$$

لذا با استفاده از این رابطه ، رابطه (۹-۴) می تواند به صورت ذیل نوشته شود :

$$\mu_{\tilde{D}^o} = (d_0{}^o,\dots,d^o{}_{N-1}) = \max_{d_0,\dots,d_{N-1}} \min\{\mu_{\tilde{C}_0}(d_0),\dots\mu_{G_{N-1}}(x_{N-1})\} \qquad (۹-۵)$$

به طوری که داریم :

$$\mu_{\tilde{G}_{N-1}}(x_{N-1}) = \max_{d_{N-1}} \min\{\mu_{\tilde{C}_{N-1}}(d_{N-1}),\dots,\mu_{G_N}(t_N(x_{N-1},d_{N-1}))\} \qquad (۹-۶)$$

لذا با حل به صورت بازگشتی از مرحله آخر به مرحله اول، مجموعه تصمیم بهینه $\tilde{D}^o$ به دست می آید.

برنامه ریزی پویای فازی

مثال (۳-۹)- (پروفسور زاده و بلمن، ۱۹۷۳)- فرض کنید d_1 و d_2 دو متغیر تصمیم گیری و مقادیر ممکن تصمیم گیری α_1 و α_2 باشند. متغیرهای حالت x_t $(t=0,1,2)$ با دامنه متناهی $x=\{\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$ هستند. محدودیت فازی برای t=1 و t=0 به شرح ذیل است :

$$\tilde{C}_0(\alpha_i)=\{(\alpha_1,0.7),(\alpha_2,1)\}$$
$$\tilde{C}_1(\alpha_i)=\{(\alpha_1,1),(\alpha_2,0.6)\}$$

هدف فازی مدل نیز به صورت ذیل تعریف می شود :

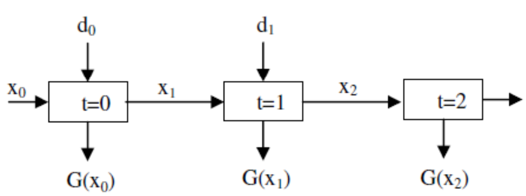
$$\tilde{G}(x_2)=\{(\tau_1,0.3),(\tau_2,1),(\tau_3,0.8)\}$$

تابع انتقال حالت به صورت قطعی و به شرح جدول (۱-۹) تعریف می شود :

جدول (۱-۹)- تابع انتقال حالت

d_t	x_t		
	τ_1	τ_2	τ_3
α_1	τ_1	τ_3	τ_1
α_2	τ_2	τ_1	τ_3

برنامه ریزی پویای فازی



شکل (۴-۹)- ساختار مسئله

طبق رابطه (۶-۹) می توانیم هدف فازی در مرحله t=1 را محاسبه نماییم. برای حالت های مختلف ممکن در مرحله ۱ و انتقال حالت به مرحله دوم، میزان هدف فازی به شرح ذیل محاسبه می شود :

برنامه ریزی پویای فازی

مرحله یک :

$$\mu_{\tilde{G}}(\tau_1) = \max_{d_1}\{\min[\mu_{\tilde{C}_1}(\alpha_1), \mu_{\tilde{G}_2}(t(\tau_1,\alpha_1))],\ \min[\mu_{\tilde{C}_1}(\alpha_2), \mu_{\tilde{G}_2}(t(\tau_1,\alpha_2))]\}$$

$$= \max\{\min[1,0.3]\ , \min[0.6,1]\}$$

$$= \max\{0.3,0.6\} = 0.6$$

در نتیجه تصمیم بهینه در مرحله اول در صورتی که وضعیت τ_1 برقرار باشد، α_2 است :

$$d_1^0 = \alpha_2$$

$$\mu_{\tilde{G}_1}(\tau_2) = \max\{\min[1,0.8], \min[0.6,0.3]\}$$

$$= \max\{0.8,0.3\} = 0.8$$

تصمیم بهینه در مرحله اول در صورتی که در وضعیت τ_2 باشیم α_1 است .

$$d_1^0 = \alpha_1$$

$$\mu_{\tilde{G}_1}(\tau_3) = \max\{\min[1,0.3], \min[0.6,0.8]\}$$

$$= \max\{0.3,0.6\} = 0.6$$

$$d_1^0 = \alpha_2$$

تصمیم بهینه در مرحله اول در صورتی که در وضعیت τ_3 باشیم α_2 است .

برنامه ریزی پویای فازی

مرحله صفر :

$$\mu_{\tilde{G}_0}(\tau_1) = \max\{\min[0.7,0.6], \min[1,0.8]\}$$

$$= 0.8$$

$$d_0^0 = \alpha_2$$

$$\mu_{\tilde{G}_0}(\tau_2) = \max\{\min[0.7,0.6], \min[1,0.6]\}$$

$$= 0.6$$

$d_0^0 = \alpha_2$ یا α_1

$$\mu_{\tilde{G}_0}(\tau_3) = \max\{\min[0.7,0.6], \min[1,0.6]\}$$

$$= 0.6$$

$d_0^0 = \alpha_2$ یا α_1

بنابراین به ازای حالت های مختلف برای x_0 تصمیم های بهینه به شرح جدول(۲-۹) خواهد بود.

برنامه ریزی پویای فازی

جدول (۲-۹)- تصمیم بهینه به ازای مقادیر ممکن x_0

x_0	تصمیم بهینه		درجه عضویت
	مرحله صفر	مرحله یک	
τ_1	$d_0^0 = \alpha_2$	$d_1^0 = \alpha_1$	$\mu_{\tilde{G}_2^0} = 0.8$
τ_2	$d_0^0 = \alpha_1$ $d_0^0 = \alpha_2$	$d_1^0 = \alpha_2$ $d_1^0 = \alpha_2$	$\mu_{\tilde{G}_2^0} = 0.6$
τ_3	$d_0^0 = \alpha_1$ $d_0^0 = \alpha_2$	$d_1^0 = \alpha_2$ $d_1^0 = \alpha_2$	$\mu_{\tilde{G}_2^0} = 0.6$