دانشکده مکانیک

دینامیک

شاهرخ حسینی هاشمی

اهداف

فراگیری مفاهیم بنیادی دینامیک مهندسی و فرموله کردن ریاضی پدیده های فیزیکی با ماهیت سینماتیکی و سینتیکی، ایجاد توانایی جهت تحلیل دینامیکی ذره، ذرات مادی و اجسام صلب، واعمال قوانین حاکم، همراه با پرورش دید کاربردی.

فهرست مطالب

بخش اول سینماتیک ذره مادی

۱- حرکات راست خط، زاویه ای و منحنی الخط صفحه ای

۲- حرکت نسبی

۳- حرکت منحنی الخط در فضا

بخش دوم سینتیک ذرات مادی

۴- معادلات دینامیکی حرکت

۵- کار و انرژی

۶-اندازه حرکت وضربه

۷- حرکت تحت تاثیر نیروی مرکزی

بخش سوم حرکت جسم صلب

۸- سینماتیک جسم صلب

بخش چهارم سینتیک جسم صلب

۹- سینتیک و دینامیک

۱- حرکات راست خط، زاویه ای و منحنی الخط صفحه ای

سینماتیک ذره مادی Kinematics of particle

در سینماتیک انتقالی ذره مادی چهارکمیت اساسی داریم:

۱) جابجایی $\underline{S}$ ۲) سرعت $\underline{V}$ ۳) شتاب $\underline{a}$ ۴) زمان t

به هر معادله ای که بتوان میان این چهارکمیت نوشت معادله سینماتیکی می گویند.

۱-۱ حرکت راست خط ذره مادی Rectlinear motion of particle

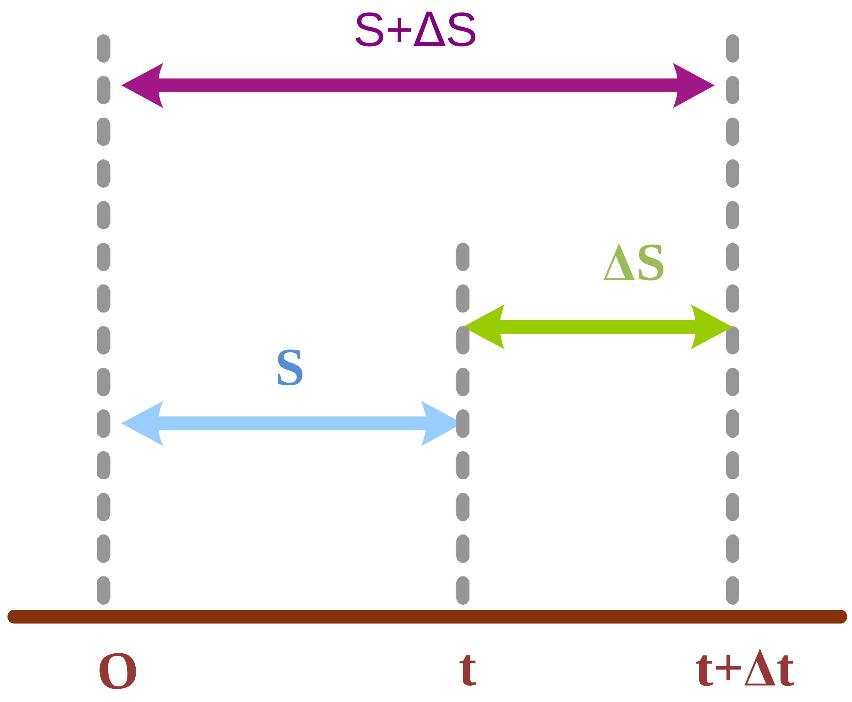
مسیر حرکت یک خط مستقیم می باشد.

نکته

وقتی حرکت صورت می گیرد؛ زمان سپری می شود و از مبدا فاصله می گیریم.

تندی متوسط

$$V = \Delta S / \Delta t$$



سرعت (برداری)
Velocity

تندی (اسکالر)
speed

تندی لحظه ای

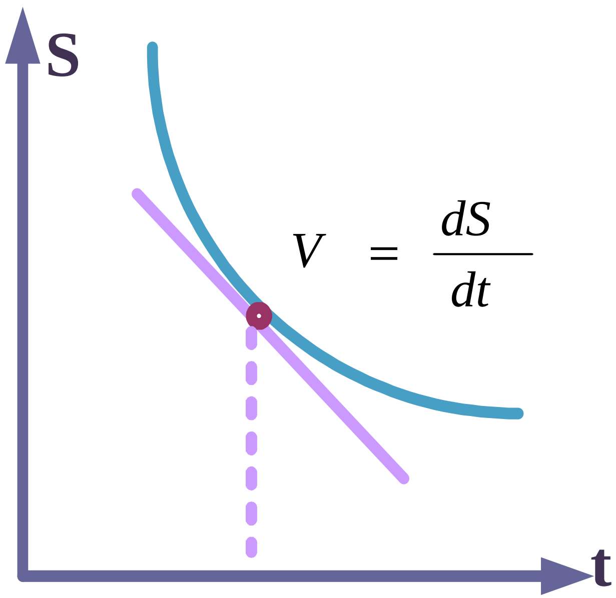
$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta S / \Delta t = dS/dt = \dot{S}$$

شتاب متوسط $a = \Delta V/\Delta t$

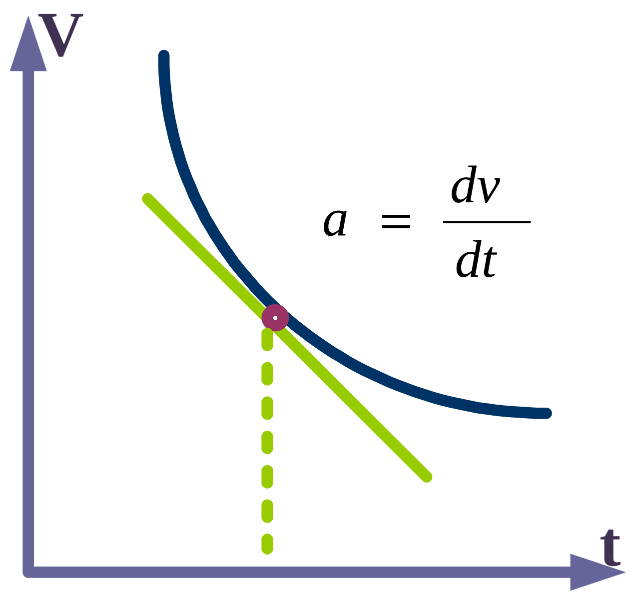
شتاب لحظه ای

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta V/\Delta t = dV/dt = \dot{V} = \ddot{S}$$

تعبیر هندسی سرعت لحظه ای



تعبیر هندسی شتاب لحظه ای



معادلات دیفرانسیلی حاکم برسینماتیک ذره مادی:

$$\begin{cases} V = \dfrac{ds}{dt} = \dot{S} & (I) \\ a = \dfrac{dv}{dt} = \dot{V} = \ddot{S} & (II) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dt = \dfrac{ds}{V} \\ dt = \dfrac{dv}{a} \end{cases} \rightarrow \frac{ds}{V} = \frac{dV}{a}$$

رابطه مستقل از زمان :

$$\boxed{VdV = adS}$$

$$\dot{S}d\dot{S} = \ddot{S}dS$$

حالت های مختلفی که برای شتاب داریم:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = cte \\ a = \text{متغیر} \rightarrow t, V, S \end{cases}$$ برحسب متغیرهای

$$\begin{cases} a = f(t) \\ a = f(V) \\ a = f(s) \end{cases}$$

$I)\ a = 0$

$$a = \frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow dV = 0 \rightarrow V = cte$$

$$V = \frac{ds}{dt} = cte \rightarrow ds = vdt \xrightarrow{\int} \int_{s_0}^{s} ds = V\int_0^t dt$$

شرایط اولیه کلی $\begin{cases} t = 0 \\ S = S_\circ \\ V = V_\circ \end{cases} \rightarrow$ $\boxed{S = Vt + S_\circ}$

$II)\ a = cte$

$$a = \frac{dv}{dt} = cte = a \rightarrow dv = adt \rightarrow \int_{V_\circ}^{V} dv = a\int_0^t dt$$

$$V - V_\circ = at \quad \rightarrow \boxed{V = at + V_0}$$

$$V = \frac{ds}{dt} = at + V_o \rightarrow ds = (at + V_o)dt \xrightarrow{\int}$$

$$\int_{S_o}^{S} ds = \int_0^t (at + V_0)dt \rightarrow \quad \boxed{S = \tfrac{1}{2}at^2 + V_o t + S_o}$$

$III)\ a = f(t)$

$$a = f(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = f(t)dt \xrightarrow{\int} \int_{V_0}^{V} dv = \int_0^t f(t)dt$$

$$\boxed{V = \int_0^t f(t)dt + V_o}$$

$$V = g(t) = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = g(t)dt \xrightarrow{\int} \int_{S_o}^{S} ds = \int_0^t g(t)dt$$

$$\boxed{S = S_o + \int_0^t g(t)dt}$$

$IV)\ a = f(v)$

$$a = f(v) = \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \frac{dv}{f(v)} = dt \quad \xrightarrow{\int} \int_{V_0}^{V} \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt$$

$$\boxed{t = \int_{V_0}^{V} \frac{dv}{f(v)}} \quad \rightarrow V = g(t)$$

مثال:

$$a = \frac{dv}{dt} = f(v) = -Kv \quad \rightarrow \frac{dv}{v} = -kdt \quad \int_{V_o}^{V} \frac{dv}{V} = \ln \frac{V}{V_0} = -kt$$

$$\frac{V}{V_o} = e^{-Kt} \quad \rightarrow V = V_o e^{-Kt}$$

$$V = g(t) = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow ds = g(t)dt \quad \rightarrow \int_{S_o}^{S} ds = \int_0^t g(t)dt$$

$$\boxed{S = S_0 + \int_0^t g(t)dt}$$

$V)\ a = f(s)$

$$a = f(s) \qquad \rightarrow VdV = a\,ds = f(s)\,ds \xrightarrow{\int}$$ روش اول:

$$\int_{V_0}^{V} VdV = \int_{S_o}^{S} f(s)ds \rightarrow \tfrac{1}{2}\left(V^2 - V_0^2\right) = \int_{S_o}^{S} f(s)ds$$

$$\boxed{\rightarrow V^2 = V_0^2 + 2\int_{S_o}^{S} f(s)ds} \qquad \rightarrow V = g(s)$$

$$V = \frac{ds}{dt} = g(s) \qquad \rightarrow \frac{ds}{g(s)} = dt \rightarrow \int_{S_o}^{S} \frac{ds}{g(s)} = \int_0^t dt$$

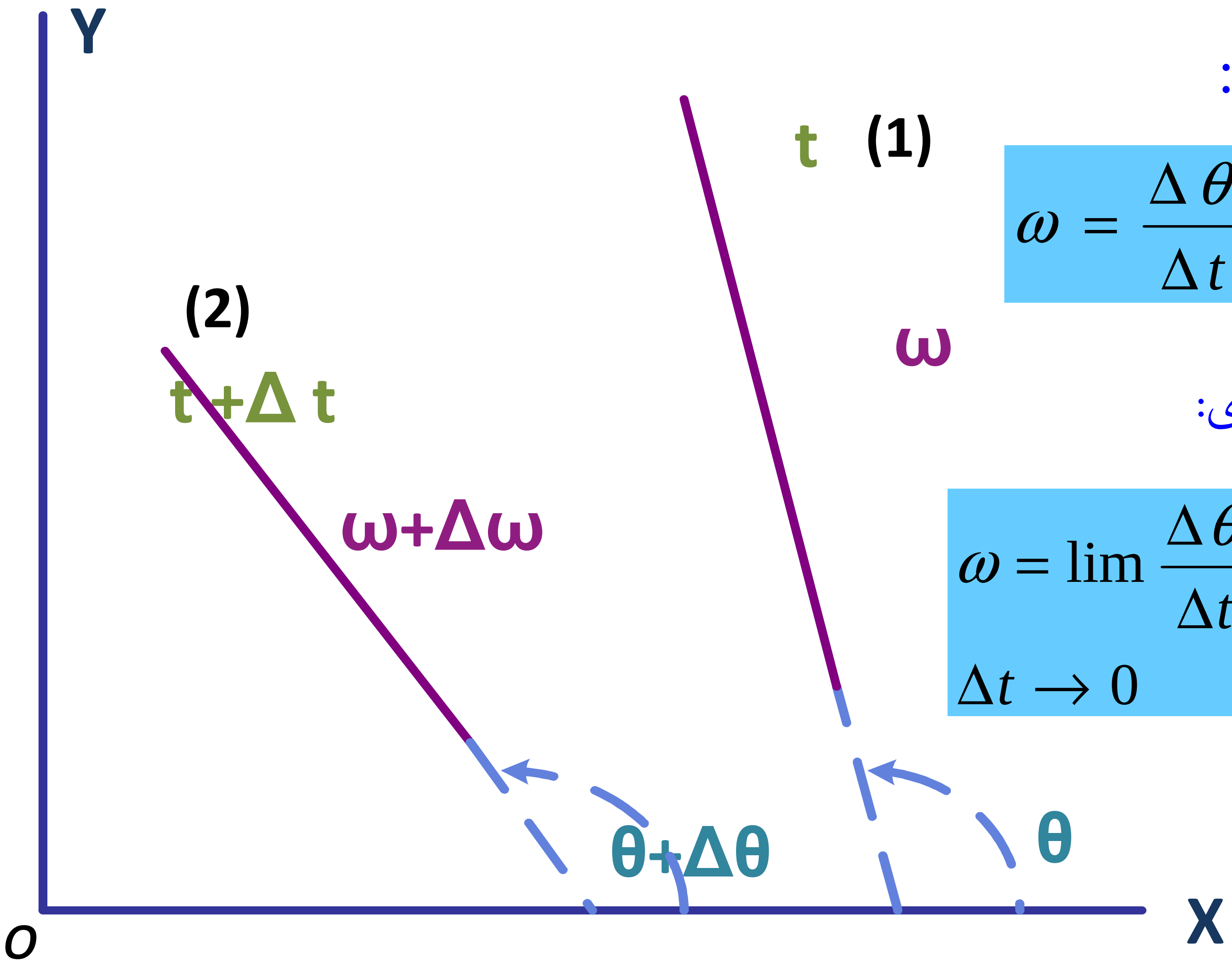
$$t = \int_{S_0}^{S} \frac{ds}{g(s)} \rightarrow \qquad \boxed{S = p(t)} \quad , \quad \boxed{V = \dot{S} = \frac{d}{dt}p(t)}$$

روش دوم:

$$a = \ddot{S} = f\left(s\right) \rightarrow \ddot{S} - f\left(s\right) = 0$$

نکته این معادله باید خطی باشد.

۱–۲ حرکت زاویه ای خط Angular Motion

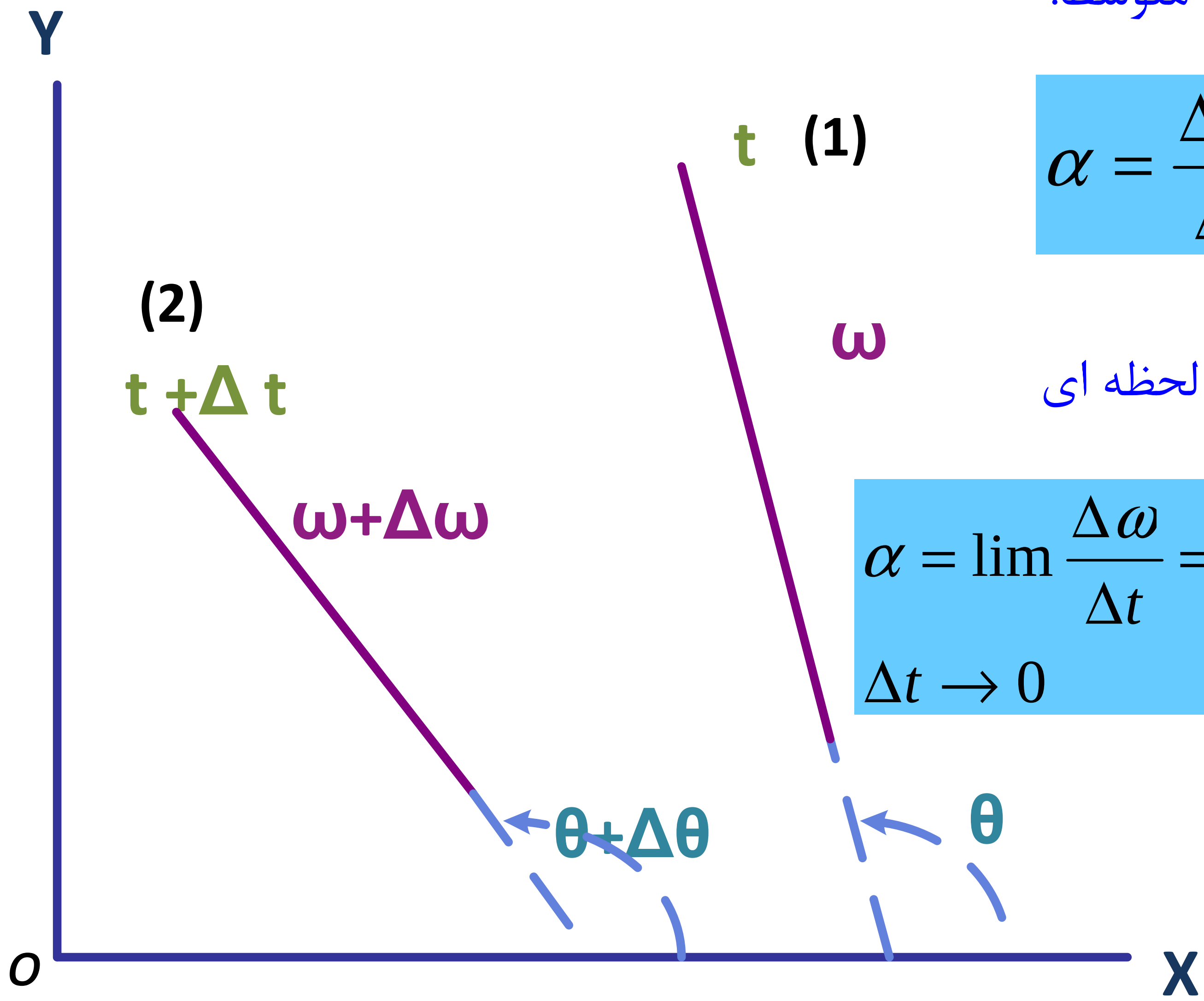


تندی زاویه ای متوسط:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

تندی زاویه ای لحظه ای:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$



شتاب زاویه ای متوسط:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

شتاب زاویه ای لحظه ای

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} & (I) \\ \alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \omega = \ddot{\theta} & (II) \end{cases}$$

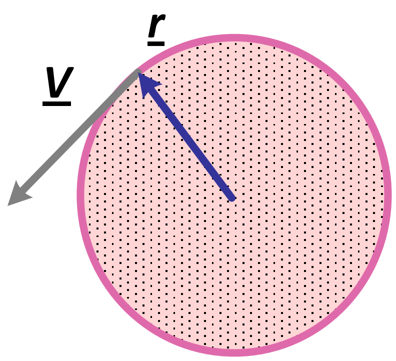
با حذف پارامتر زمان بین این دو رابطه داریم:

$$\boxed{\omega d\omega = \alpha d\theta}$$

$$\boxed{\dot{\theta} d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta}$$

θ: جابجایی زاویه ای ω: سرعت زاویه ای α: شتاب زاویه ای

نکته: بردار سرعت زاویه ای برصفحه دوران عمود است و تغییرات سرعت زاویه ای علامت α را تعیین می کند.



$$\underline{V} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

حالات مختلف برای α:

$$I)\alpha = 0$$

$$II)\alpha = cte$$

$$III)\alpha = \text{متغیر} \rightarrow \begin{cases} \alpha = f(t) \\ \alpha = f(\omega) \\ \alpha = f(\theta) \end{cases}$$

شرایط اولیه

$$t = 0 \begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = \omega_o \end{cases}$$

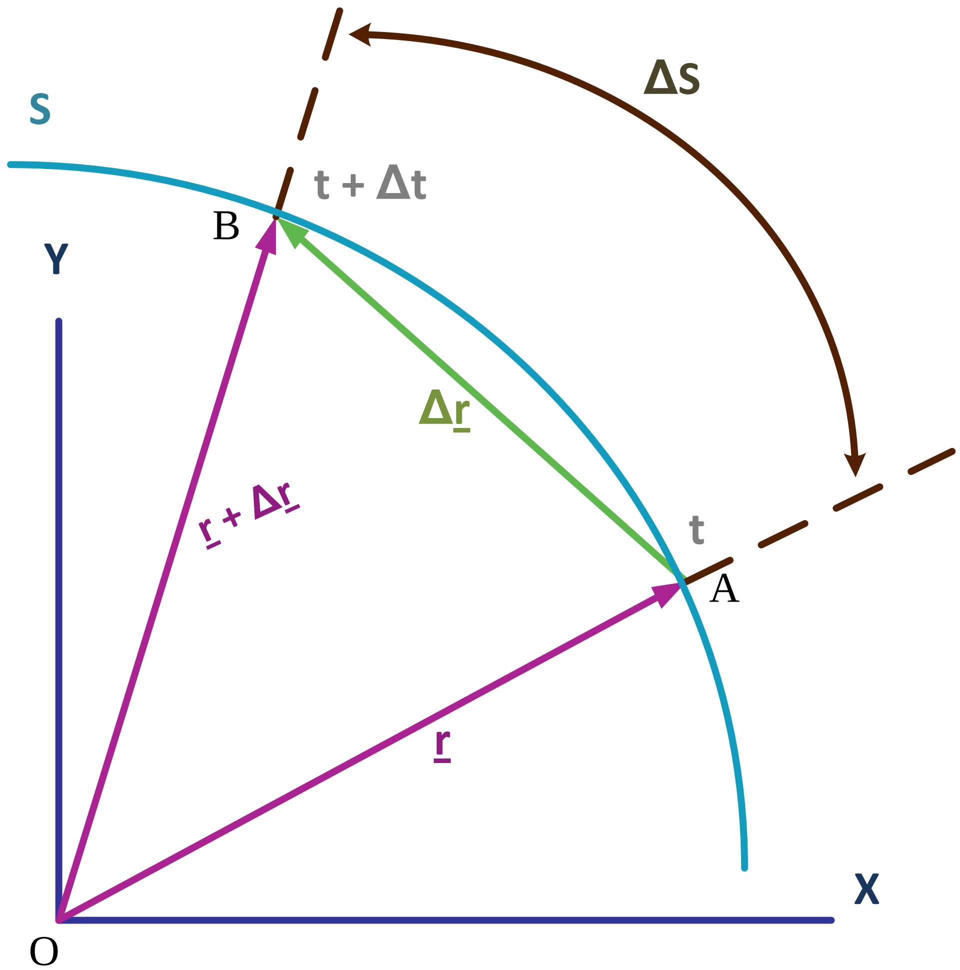
$$I)\alpha = 0 = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow d\omega = 0 \rightarrow \omega = cte$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = cte \rightarrow d\theta = \omega dt \xrightarrow{\int} \int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \omega \int_0^t dt$$

$$\boxed{\rightarrow \theta = \omega t + \theta_o}$$

$$\boxed{s = v\,t + s_0 \quad \text{مشابه رابطه}}$$

۳-۱ حرکت منحنی الخط در صفحه Curvilinear Motion

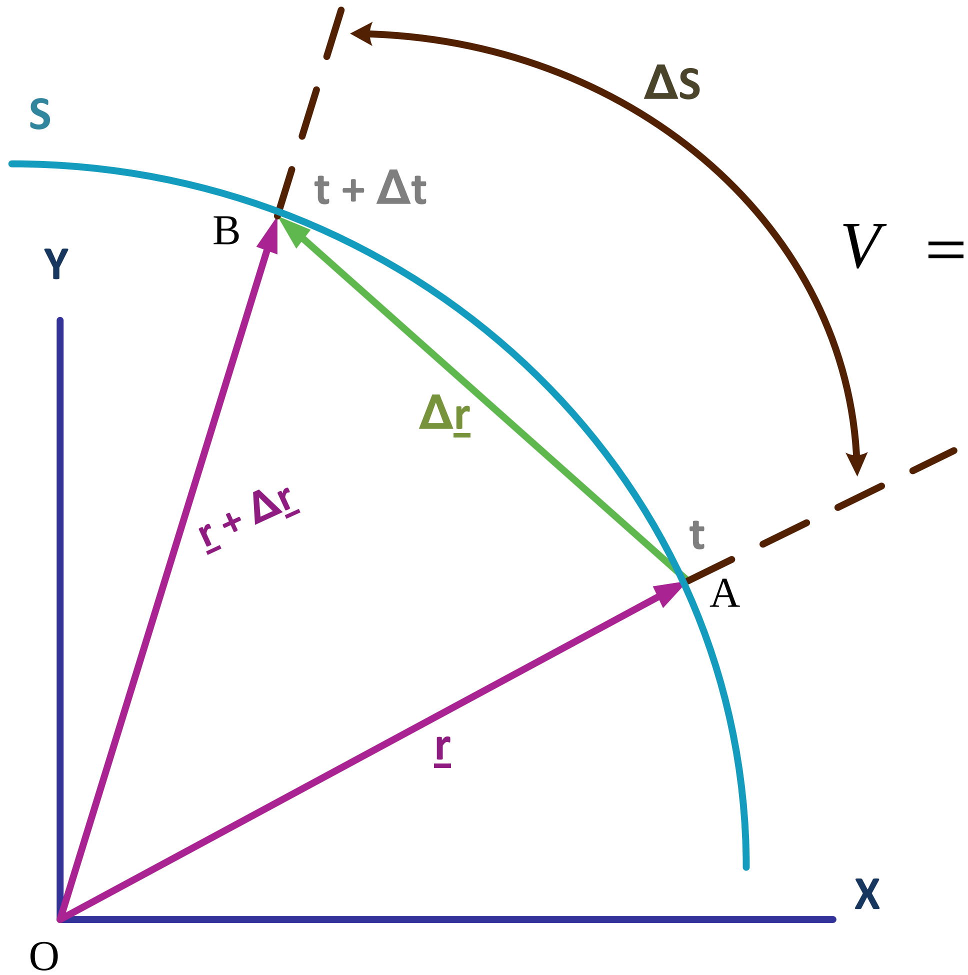


کلیات:

مسیر حرکت منحنی است

اگر منحنی مسیر در صفحه باشد، حرکت دو بعدی و اگر در فضا باشد، حرکت سه بعدی است .

$\underline{r}$: بردار وضعیت در زمان t



تندی متوسط:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (\Delta S \neq \Delta r)$$

تندی لحظه ای:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \xrightarrow{dr = ds} = \frac{dr}{dt}$$

بردار سرعت لحظه ای:

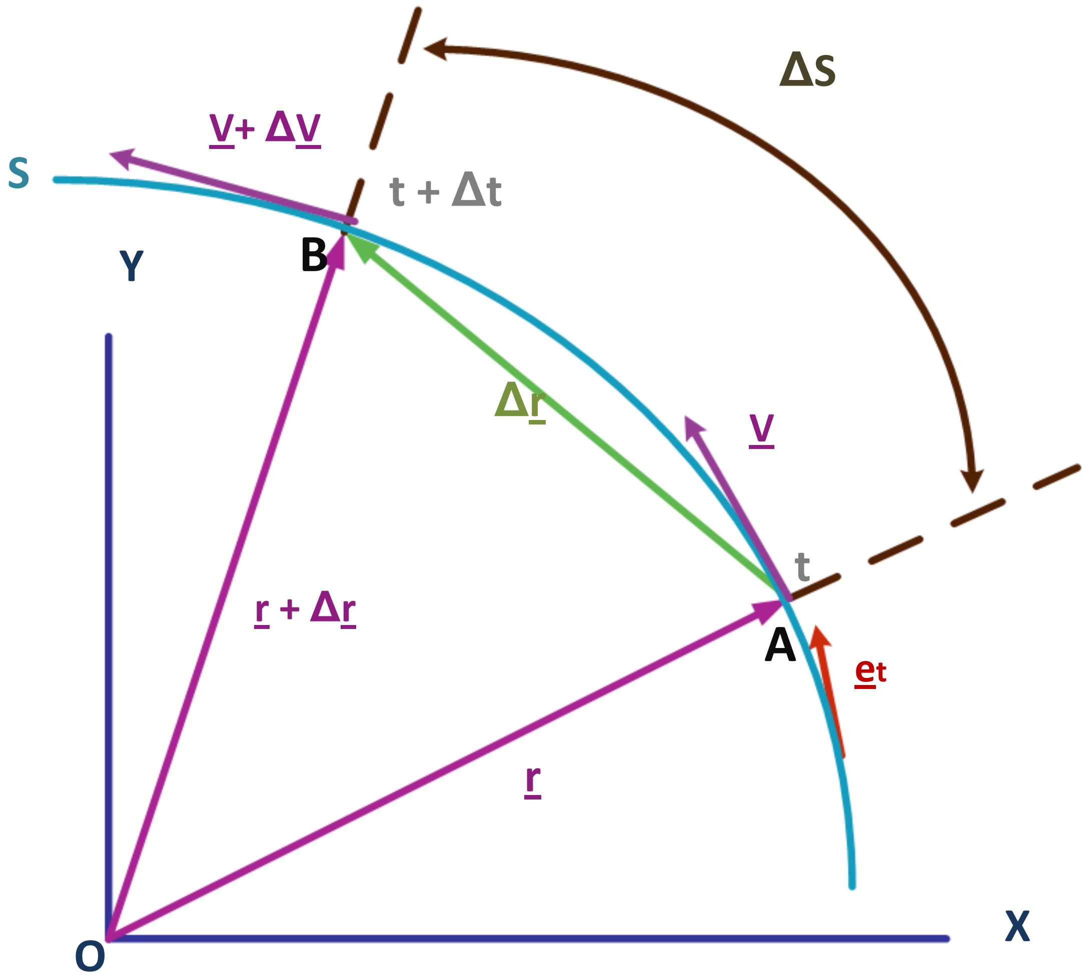
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\,\underline{r}}{dt} = \underline{V}$$

بردار سرعت در حرکت منحنی الخط همواره مماس برمسیر حرکت می باشد.

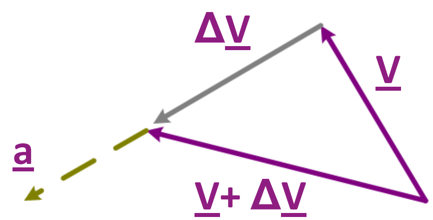
$\underline{e}_t$ بردار یکه مماس برمسیر حرکت

$$\boxed{\underline{V} = V\underline{e}_t}$$

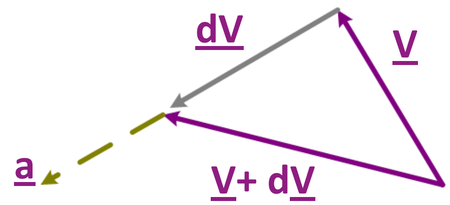
بردار شتاب



$$\underline{a} = \frac{\Delta \underline{V}}{\Delta t}$$



$$\boxed{\underline{a} = \frac{d\,\underline{V}}{dt}}$$



بردار شتاب در حرکت منحنی الخط همواره بطرف داخل منحنی مسیر متوجه میباشد

نکات مهم

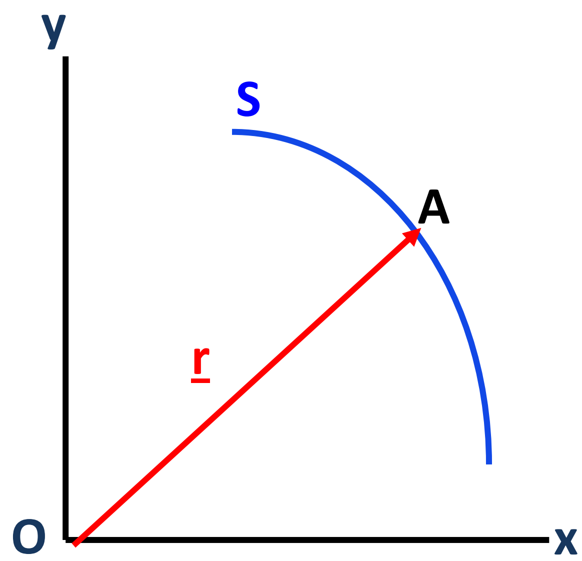
- بردار سرعت در حرکت منحنی الخط همواره مماس برمسیر حرکت می باشد.

- هیچ حرکت منحنی الخط بدون شتابی وجود ندارد . (شتاب به مفهوم کلی نمی تواند صفر باشد.)

- شتاب در حرکت منحنی الخط در جهت بردار تغییرات سرعت است.

۱-۴ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات دکارتی

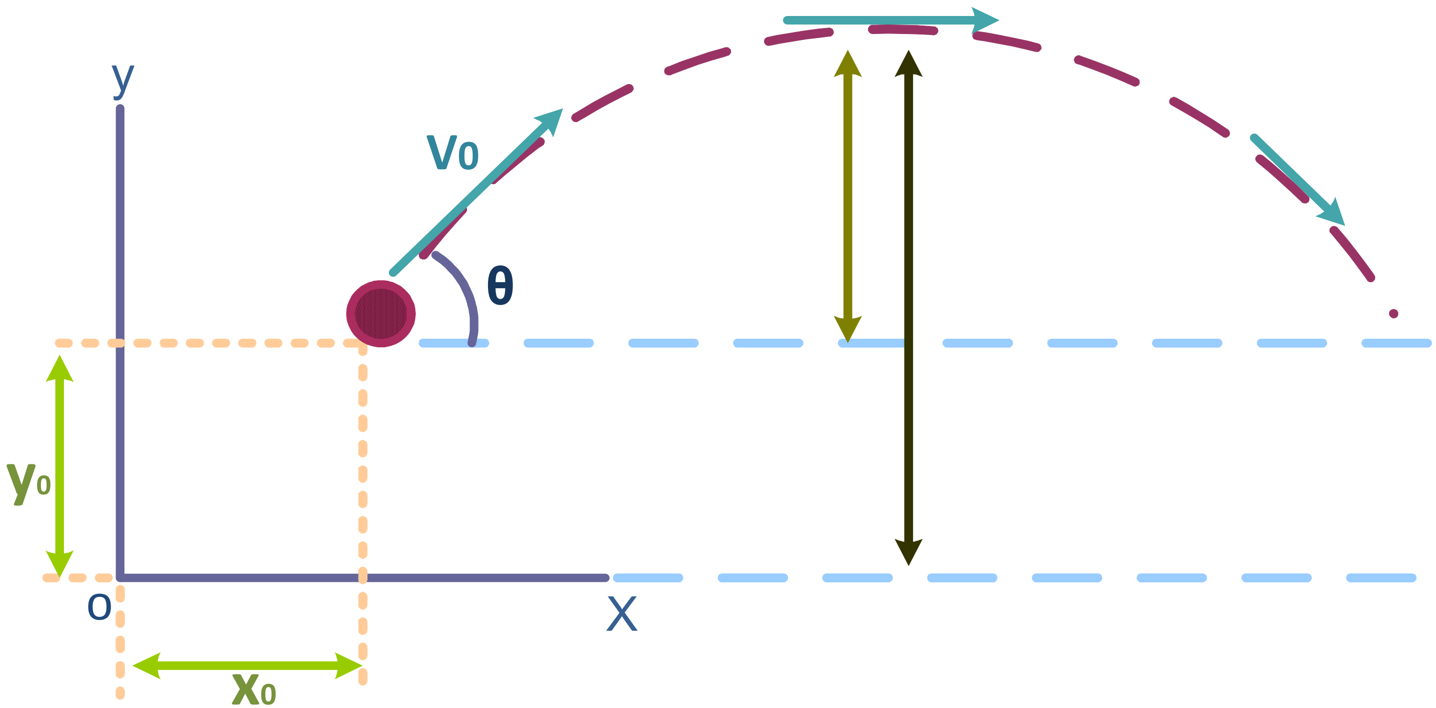
$$\mapsto \underline{r} = x\underline{i} + y\,\underline{j} \qquad \mapsto \underline{V} = \frac{d\,\underline{r}}{dt} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j} = V_x\,\underline{i} + V_y\,\underline{j} \longrightarrow \begin{matrix} V_x = \dot{x} \\ V_y = \dot{y} \end{matrix}$$



$$\mapsto \underline{a} = \frac{d\,\underline{v}}{dt} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\,\underline{j} = a_x\,\underline{i} + a_y\,\underline{j} \longrightarrow \begin{matrix} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{matrix}$$

تعیین معادلات اساسی در حرکت پرتابی

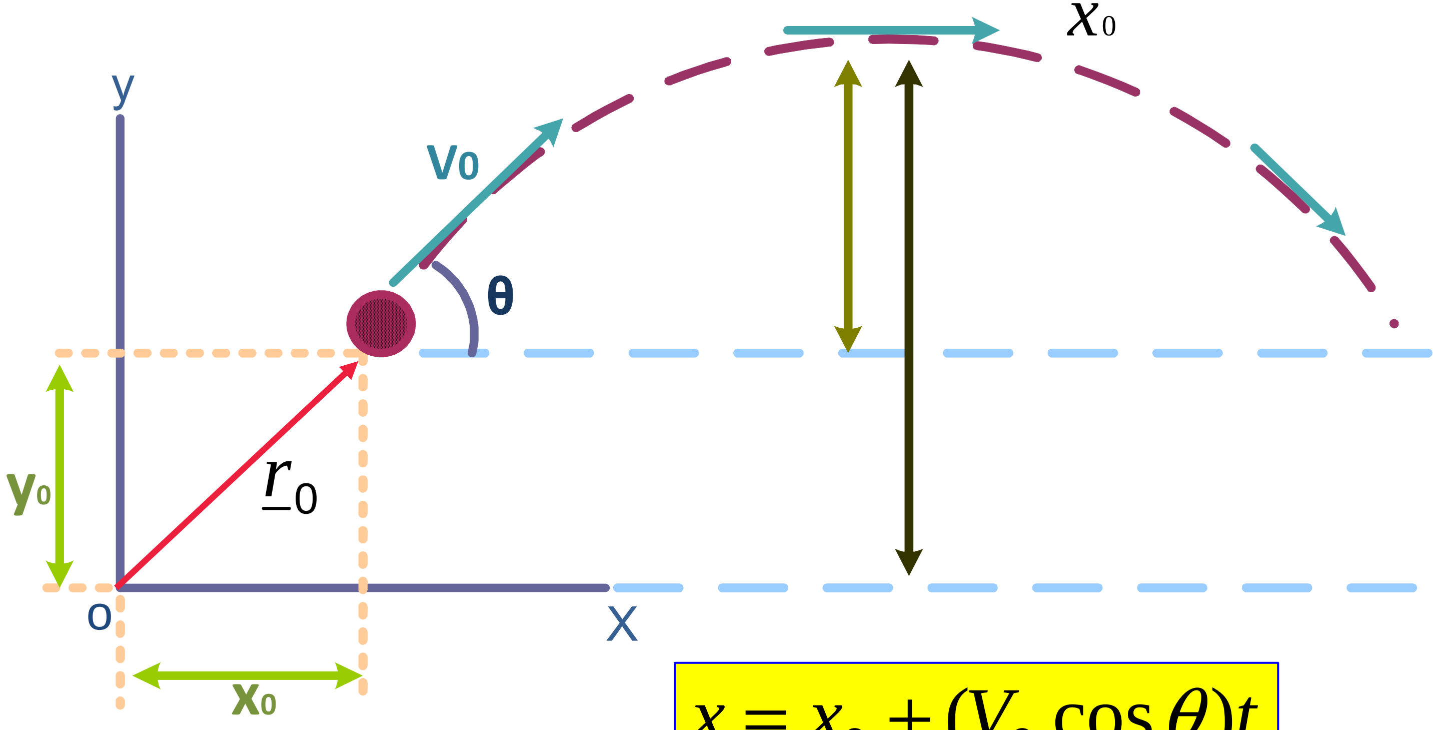
(یک حرکت منحنی الخط دو بعدی در دستگاه مختصات دکارتی داریم)



$$\underline{r}_0 = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j}$$

$$(I)\, a_x = 0 \qquad \frac{dV_x}{dt} = 0 \Rightarrow dV_x = 0 \Rightarrow \boxed{V_x = V_0 \cos\theta}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cos\theta \Rightarrow dx = (V_0 \cos\theta)dt \qquad \int_{x_0}^{x} dx = V_0 \cos\theta \int_0^t dt$$



$$\boxed{x = x_0 + (V_0 \cos\theta)t}$$

$$(II)\, a_y = -g = cte$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -g$$

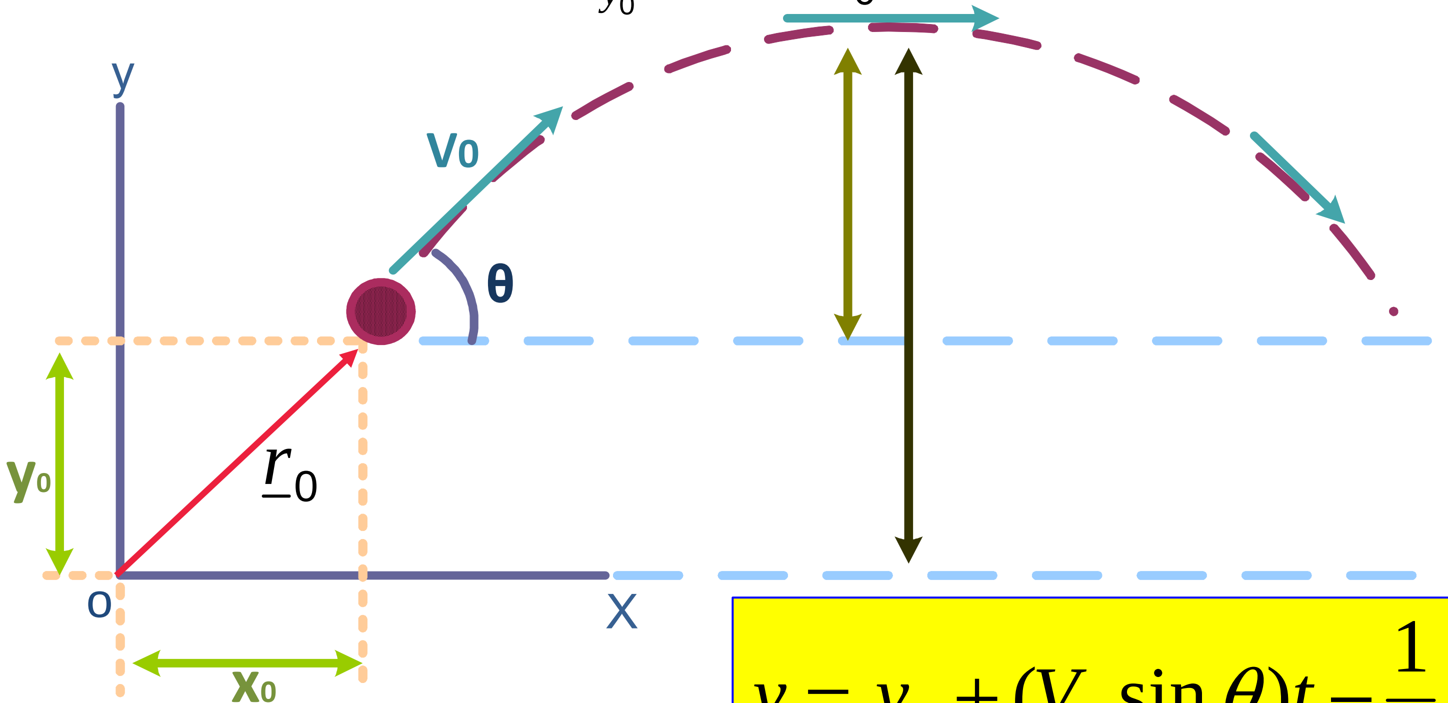
$$\int_{V_0 \sin\theta}^{V_y} dV_y = -g \int_0^t dt$$

$$\boxed{V_y = -gt + V_0 \sin\theta}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin\theta$$

$$dy = (-gt + V_0 \sin\theta)dt$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = -\int_0^t (gt - V_0 \sin\theta)dt$$

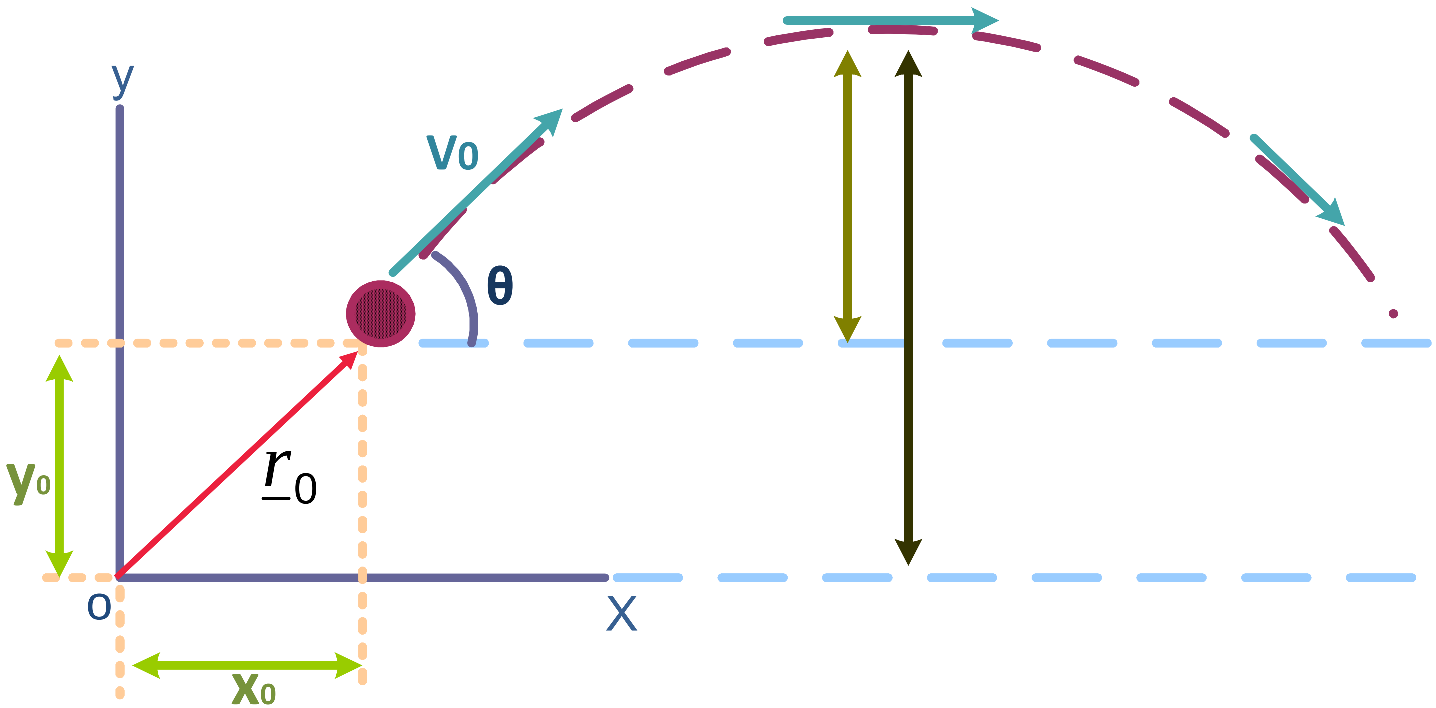


$$\boxed{y = y_0 + (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2} g t^2}$$

مدت زمان رسیدن به نقطه اوج

$$V_y = -gt + V_0 \sin\theta \Rightarrow 0 = -gt + V_0 \sin\theta$$

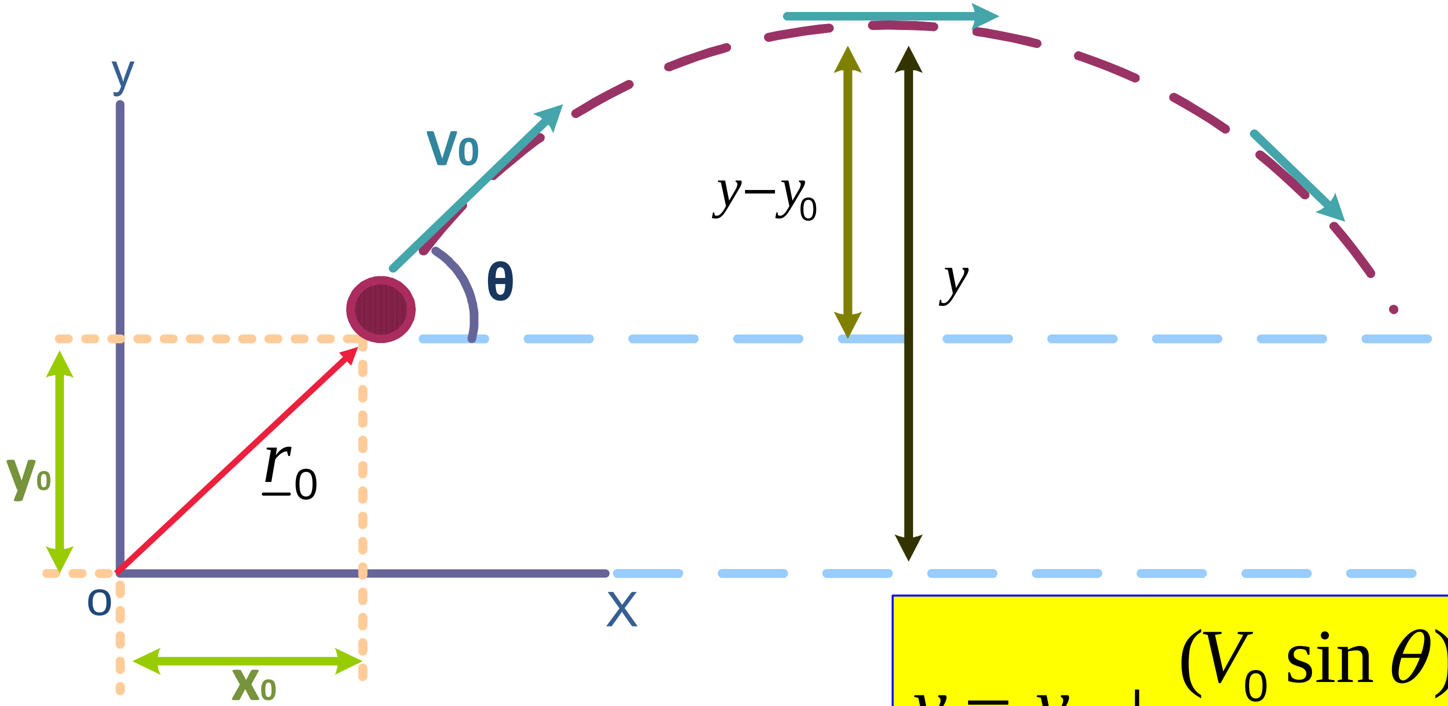
$$\boxed{t = \frac{V_0 \sin\theta}{g}}$$



مختصات نقطه اوج

$$y = y_0 + (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad t = \frac{V_0 \sin\theta}{g}$$

$$y = y_0 + (V_0 \sin\theta)\left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right)^2$$



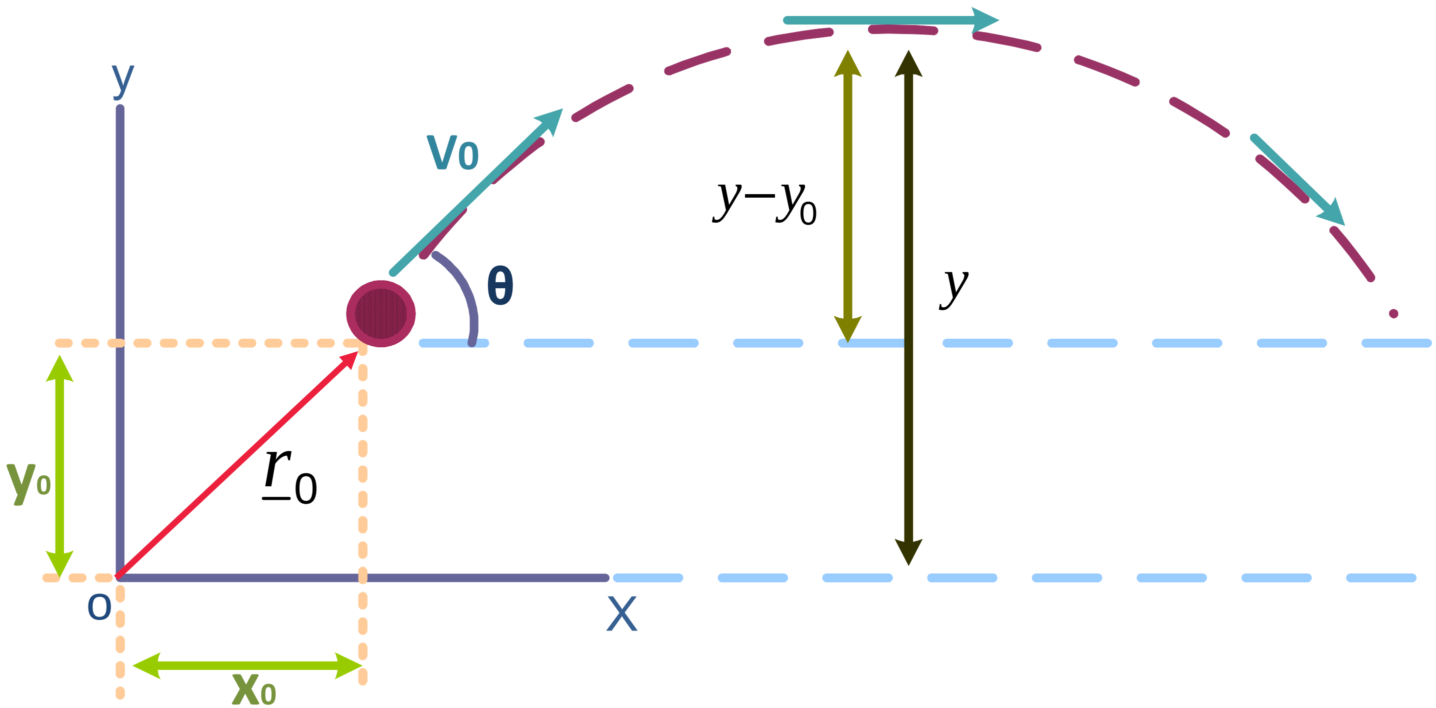
$$y = y_0 + \frac{(V_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

معادله مسیر

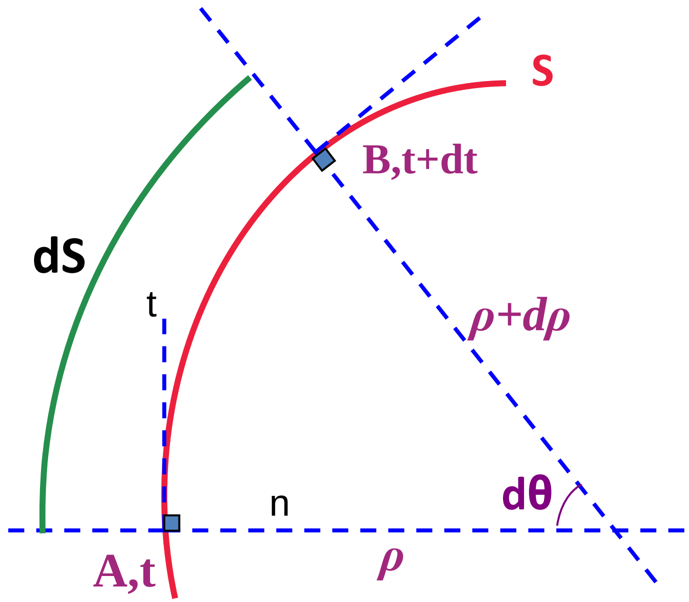
$$x = x_0 + (V_0 \cos\theta)t \qquad y = y_0 + (V_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \frac{x - x_0}{V_0 \cos\theta}$$

$$\boxed{y = y_0 + (x - x_0)\tan\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{V_0 \cos\theta}\right)^2}$$



۱-۵ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه قائم و مماسی



ρ : شعاع انحنای مسیر

$$ds = \rho \; d\theta$$

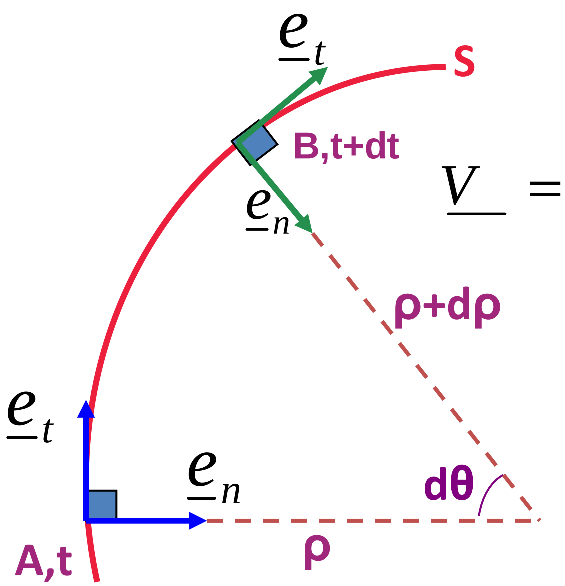
$$ds = (\rho + d\rho)d\theta = \rho d\theta + d\rho d\theta = \rho d\theta$$

$$V=\frac{ds}{dt}=\rho\frac{d\theta}{dt}=\rho\dot{\theta}=\rho\omega$$

$\underline{e}_t$ بردار یَکه مماس بر مسیر

$\underline{e}_n$ بردار یَکه قایم بر مسیر

$$\boxed{\underline{V}=V\underline{e}_t=\rho\dot{\theta}\underline{e}_t=\rho\omega\underline{e}_t}$$

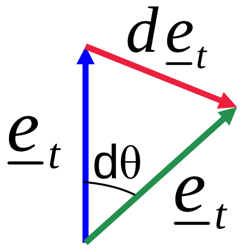


$$\underline{V}=V\underline{e}_t \Rightarrow \underline{a}=\frac{d\underline{V}}{dt}=\dot{V}\underline{e}_t+V\dot{\underline{e}}_t$$

$\dot{\underline{e}}_t$ مشتق بردار یکه $\underline{e}_t$ بر حسب زمان

$$\dot{\underline{e}}_t=\frac{d\underline{e}_t}{dt}$$

$\dot{\underline{e}}_t$ در جهت $d\underline{e}_t$ است



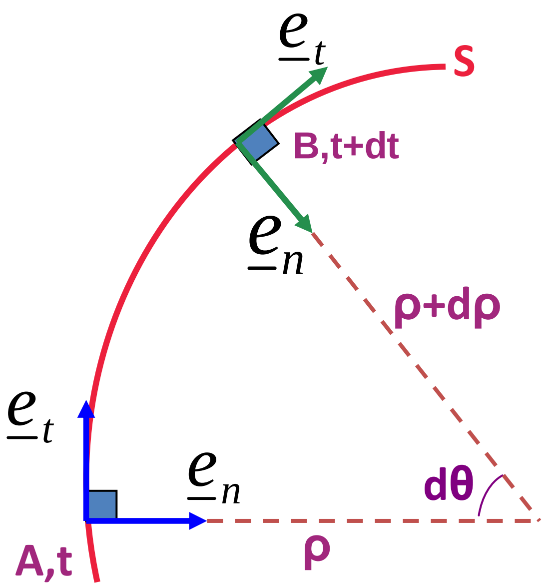
مثلث متساوی الساقین

$$de_t=e_t d\theta=(1)d\theta=d\theta \qquad d\underline{e}_t=de_t.\underline{e}_n=d\theta\underline{e}_n$$

$$\dot{\underline{e}}_t=\frac{d\underline{e}_t}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\underline{e}_n=\dot{\theta}\underline{e}_n=\omega\underline{e}_n$$

$$\underline{a} = \dot{V}\,\underline{e}_t + V\,\dot{\underline{e}}_t \qquad V = \rho\dot{\theta} = \rho\omega \qquad \dot{\underline{e}}_t = \dot{\theta}\underline{e}_n = \omega\underline{e}_n$$

$$\boxed{\underline{a} = \dot{V}\,\underline{e}_t + V\dot{\theta}\underline{e}_n = \dot{V}\,\underline{e}_t + V\omega\underline{e}_n}$$



$$\underline{a} = a_t\,\underline{e}_t + a_n\,\underline{e}_n$$

$$\boxed{\begin{cases} a_t = \dot{V} = \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = \dot{\rho}\omega + \rho\alpha \\ a_n = V\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \rho\omega^2 = \dfrac{V^2}{\rho} \end{cases}}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

نکات مهم

$$\begin{cases} a_t = \dot{V} = \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = \dot{\rho}\omega + \rho\alpha \\ a_n = V\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \rho\omega^2 = \dfrac{V^2}{\rho} \end{cases}$$

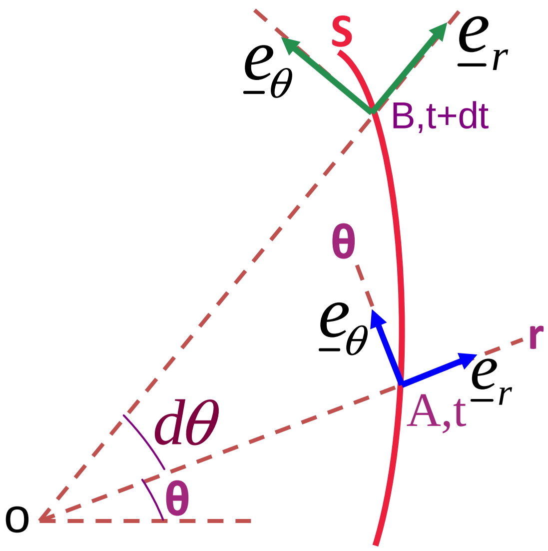
در صورتی که در حرکت منحنی الخط تندی یعنی اندازه بردار سرعت ثابت باشد داریم:

$$V = cte \rightarrow \dot{V} = 0 \Rightarrow a_t = 0 \quad But : a_n \neq 0 \rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_n$$

و در صورتی که مسیر دایره باشد:

$$\rho = R = cte \rightarrow \dot{\rho} = 0 \rightarrow \begin{cases} a_t = \rho\alpha = \rho\ddot{\theta} = R\alpha \\ a_n = \dfrac{V^2}{\rho} = \dfrac{V^2}{R} \end{cases}$$

۱-۶ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات قطبی



$\underline{e}_r$ بردار یکه در امتداد r

$\underline{e}_\theta$ بردار یکه در امتداد θ

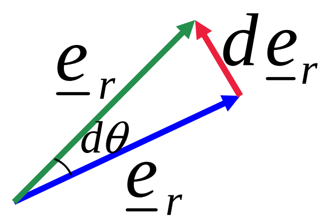
$$\underline{r} = r\underline{e}_r$$

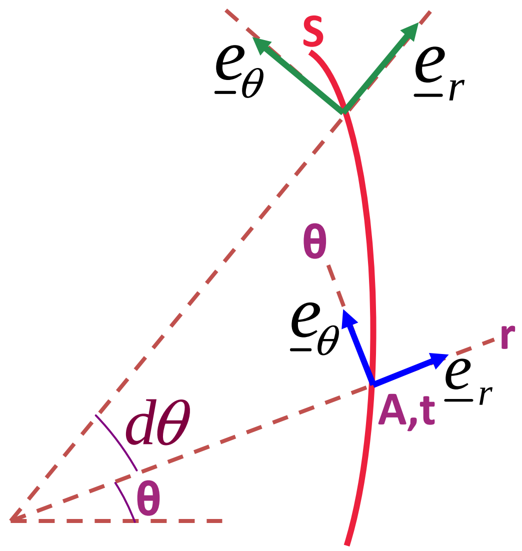
$$\underline{V} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r \qquad \dot{\underline{e}}_r = \frac{d\underline{e}_r}{dt} = ?$$

$$de_r = e_r d\theta = (1)d\theta = d\theta$$

$$d\underline{e}_r = de_r \underline{e}_\theta = d\theta \underline{e}_\theta$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \frac{d\underline{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\underline{e}_\theta = \dot{\theta}\underline{e}_\theta = \omega\underline{e}_\theta$$





$$\underline{V} = \dot{r}\underline{e}_r + r\underline{\dot{e}}_r \qquad \underline{\dot{e}}_r = \dot{\theta}\underline{e}_\theta = \omega\underline{e}_\theta$$

$$\boxed{\underline{V} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta}$$

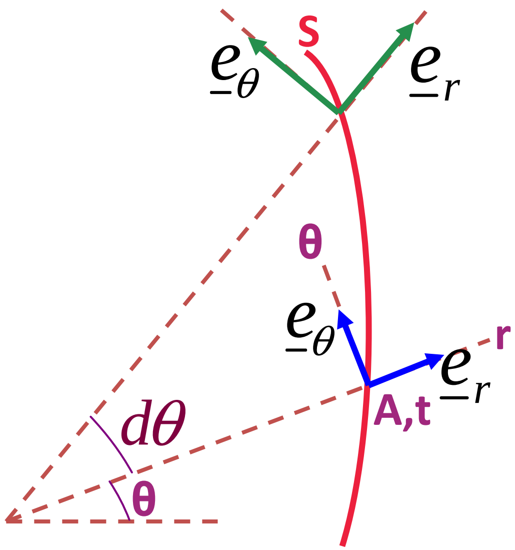
$$\underline{V} = V_r\underline{e}_r + V_\theta\underline{e}_\theta$$

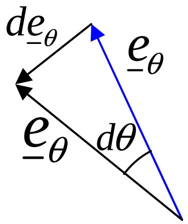
$$\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} = r\omega \end{cases}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{V}}{dt} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\underline{\dot{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta + r\dot{\theta}\underline{\dot{e}}_\theta$$

$$\underline{a} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\underline{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\underline{e}}_\theta \qquad \dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta}\underline{e}_\theta = \omega\underline{e}_\theta$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = ?$$





$$de_\theta = e_\theta d\theta = (1)d\theta = d\theta$$

$$d\underline{e}_\theta = -de_\theta\underline{e}_r = -d\theta\underline{e}_r$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = \frac{d\underline{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\underline{e}_r = -\dot{\theta}\underline{e}_r$$

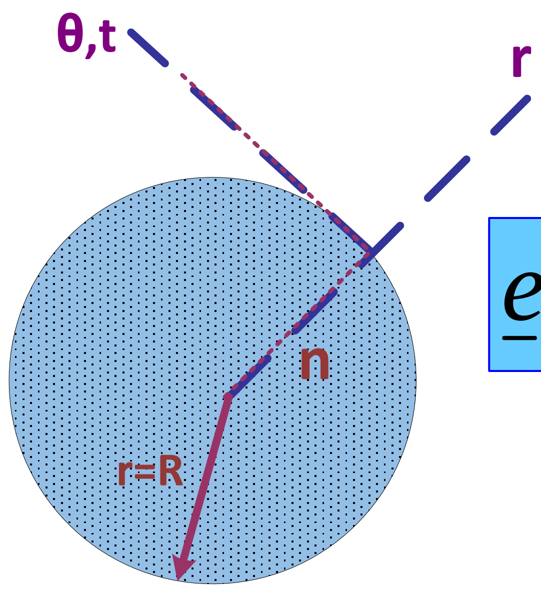
$$\underline{a} = \ddot{r}\underline{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\underline{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_\theta$$

$$\boxed{\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_\theta}$$

$$\underline{a} = a_r\underline{e}_r + a_\theta\underline{e}_\theta \rightarrow \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

حالت خاص: اگر مسیر حرکت دایره باشد

امتداد r, θ همان امتداد n, t است.



$$\boxed{\underline{e}_\theta = \underline{e}_t} \qquad \boxed{\underline{e}_r = -\underline{e}_n}$$

$$r = R = cte \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\underline{V} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta$$

$$\underline{V} = r\dot{\theta}\underline{e}_\theta = R\dot{\theta}\underline{e}_\theta = R\omega\underline{e}_\theta = R\omega\underline{e}_t = R\dot{\theta}\underline{e}_t$$

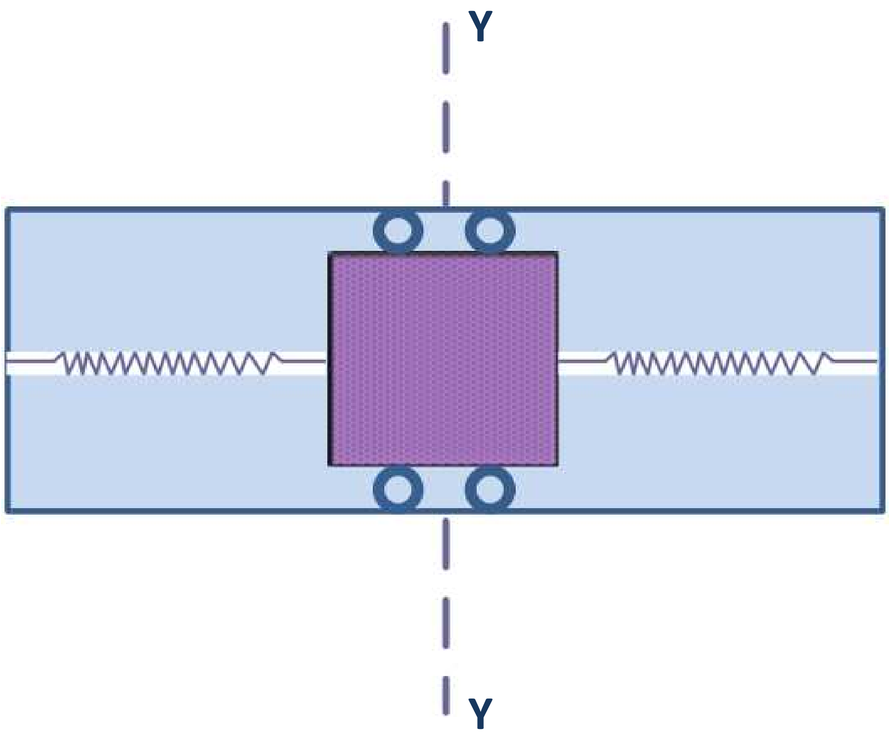
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -R\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} = R\alpha$$

$$\underline{a} = a_r\underline{e}_r + a_\theta\underline{e}_\theta = -R\dot{\theta}^2\underline{e}_r + R\alpha\underline{e}_\theta = R\dot{\theta}^2\underline{e}_n + R\alpha\underline{e}_t$$

مسایل

مثال: یک لغزنده مطابق شکل به وسیله دو فنر مهار شده است می تواند حول محور yy نوسان کند. به هنگام عبور از حالت تعادل s, t برابر صفر و $V=V_0$ می باشد. مطلوب است تعیین روابطی برای جابجایی S و سرعت V بر حسب زمان . و همچنین دوره تناوب لغزنده در صورتی که شتاب حرکت به صورت $a=-K^2S$ داده شود (K مقدار ثابت است)



روش اول: روش معادله دیفرانسیل

معادله همگن خطی مرتبه دوم

$$\ddot{S} + K^2 S = 0$$

$$S = e^{\lambda t} \quad \rightarrow \qquad \dot{S} = \lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot{S} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + K^2 e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \left(\lambda^2 + K^2\right) e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t} \neq 0 \rightarrow \lambda^2 = -k^2 \qquad \lambda = \pm ik$$

$$S = A e^{ikt} + B e^{-ikt}$$

$$S = A\left(coskt + isinKt\right) + B\left(coskt - isinKt\right)$$

$$S = \left(A + B\right)coskt + i\left(A - B\right)sinkt$$

$$\boxed{S = C_1 coskt + C_2 sinkt \qquad \dot{S} = -C_1 K_1 sinkt + C_2 K cosKt}$$

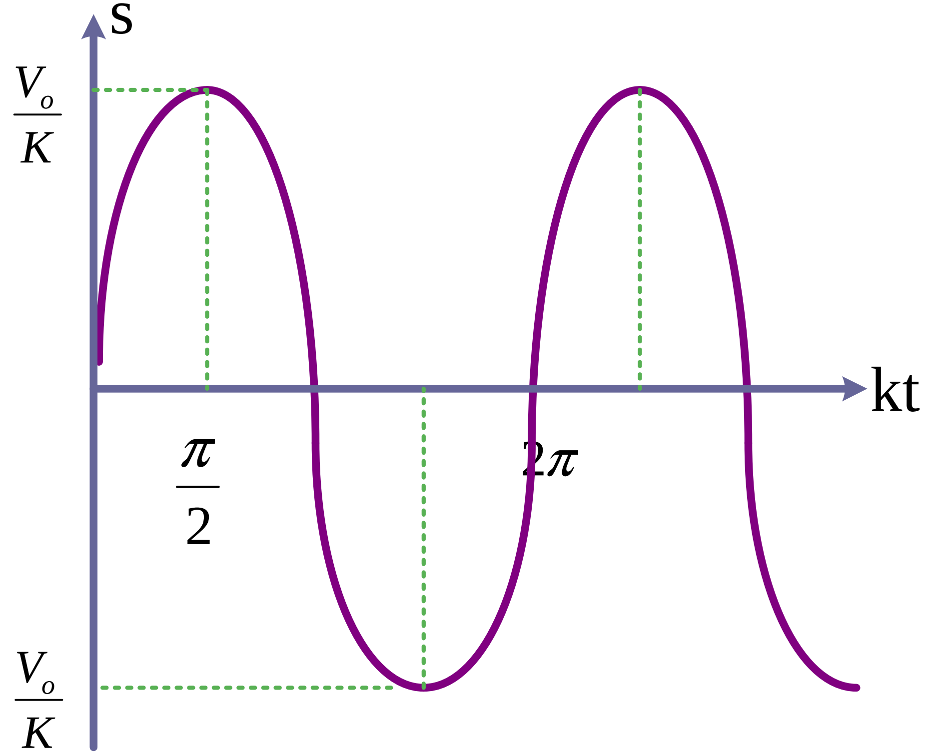
با اعمال شرایط اولیه

$$\begin{cases} t=0 \\ S=0 \\ V=V_o \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\rightarrow \quad C_1 = 0 \\ V_o = C_2 K &\rightarrow C_2 = \frac{V_0}{K} \end{aligned}$$

$$\boxed{\rightarrow \quad S = \frac{V_o}{K} Sinkt}$$

$$Kt = 2\pi$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{K}}$$



روش دوم: روش انتگرالی

$$V=\frac{ds}{dt}=\dot{S} \quad , \quad a=\frac{dv}{dt}=\dot{V}=\ddot{S}$$

$$Vdv = ads = -K^{2}Sds$$

$$\xrightarrow{\int} \int_{V_o}^{V} VdV = -K^{2}\int_{0}^{S} Sds \quad \frac{1}{2}\left(V^{2}-V_{0}^{2}\right)=-\frac{1}{2}K^{2}S^{2} \rightarrow V^{2}-V_{0}^{2}=-K^{2}S^{2}$$

$$V^{2}=V_{0}^{2}\left(1-\frac{k^{2}S^{2}}{V_{0}^{2}}\right) \rightarrow \boxed{V=V_{0}\sqrt{1-\frac{k^{2}S^{2}}{V_{0}^{2}}}}$$

$$V=\frac{ds}{dt}=V_{0}\sqrt{1-\frac{k^{2}S^{2}}{V_{0}^{2}}} \rightarrow \frac{ds}{\sqrt{1-\frac{k^{2}S^{2}}{V_{0}^{2}}}}=V_{0}dt$$

$$V_0\int_0^t dt=\int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1-\frac{k^2S^2}{V_0^2}}}=V_o t \qquad S=\frac{V_o}{K}sin\alpha \qquad \frac{Ks}{V_o}=sin\alpha$$

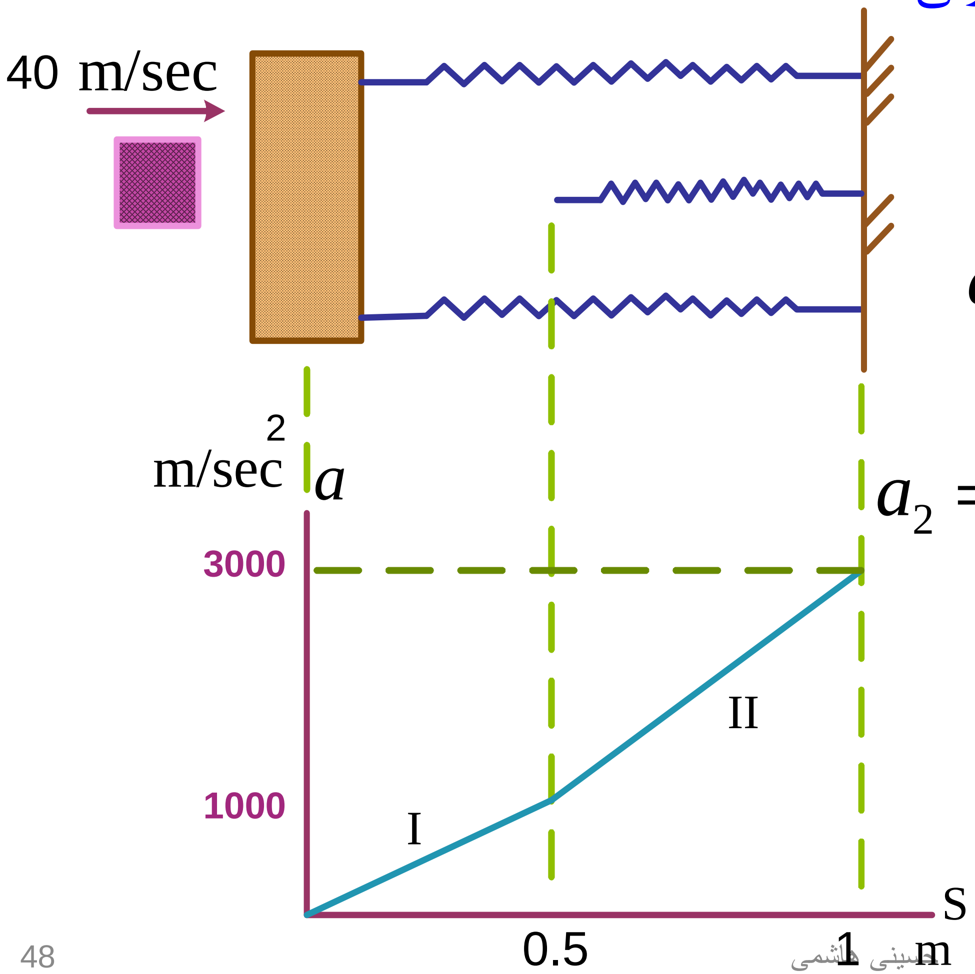
$$ds=\frac{V_o}{K}cos\alpha d\alpha \qquad \rightarrow \frac{ds}{\sqrt{1-\frac{k^2S^2}{V_0^2}}}=\frac{V_o cos\alpha\, d\alpha}{K\ \ cos\alpha}=\frac{V_o}{K}d\alpha$$

$$\begin{cases} S=0 & \alpha=0 \\ S=S & \alpha=sin^{-1}\frac{KS}{V_0} \end{cases} \qquad \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1-\frac{k^2S^2}{V_0^2}}}=\frac{V_o}{K}\int_0^{sin^{-1}\frac{ks}{V_0}} d\alpha$$

$$=\frac{V_o}{K}sin^{-1}\frac{Ks}{V_o}=V_o t \ \rightarrow \frac{Ks}{V_o}=sinKt$$

$$\boxed{S=\frac{V_o}{K}sinKt}$$

مثال: دستگاهی متشکل از سه فنر برای جلوگیری از حرکت افقی جرم بزرگی مطابق شکل به کار می رود.در هنگام تماس جرم با دستگاه سرعت جرم برابر با 40 m/s می باشد. دو فنر بیرونی یک شتاب منفی متناسب با فشردگی فنر به وجود می آورند. فنر وسطی موجب افزایش این شتاب منفی به هنگامی که فشردگی فنر بیشتر از 0.5m است، می شود. مطلوب است تعیین حداکثر فشردگی فنرهای بیرونی؟



$$a_1 = 2000S \qquad 0 \le S \le 0.5$$

$$a_2 = 4000S - 1000 \qquad 0.5 \le S \le 1$$

روش انتگرالی:

$$VdV = ads = -2000\,Sds$$

هر دو شتاب ها کاهنده هستند، پس علامت منفی دارند.

$$\int_{40}^{V} VdV = -2000\int_{0}^{0.5} Sds$$

$$\tfrac{1}{2}\left(V^2 - 1600\right) = -1000(0.25) \qquad V = 10\sqrt{11}\,m/s$$

$$VdV = ads = \left(-4000\,S + 1000\right)ds$$

$$\int_{10\sqrt{11}}^{0} VdV = -4000\int_{0.5}^{S} Sds + 1000\int_{0.5}^{S} ds$$

$$200S^2 - 100S - 55 = 0$$

$$\boxed{S = 0.83m}$$

مثال: ذره ای که روی یک خط راست حرکت می کند، تحت تاثیر نیرویی متناسب با زمان و نیروی کاهنده متناسب با جابجایی قرار گرفته است. شتاب ذره به وسیله رابطه $a=\overline{K}t-K^2S$ داده می شود؛ که در آن $\overline{K}, K$ مقادیر ثابت اند. مطلوب است تعیین S به صورت تابعی از t در صورتی که $\dot{S}, S$ در لحظه ی $t=0$ برابر صفر باشند.

حل معادله دیفرانسیل تنها راه حل می باشد.

$$\ddot{S}=\overline{K}t-K^2S \qquad \ddot{S}+K^2S=\overline{K}t \qquad S=S_h+S_p$$

$$\ddot{S}+K^2S=0 \quad S_h=C_1SinKt+C_2CosKt \qquad S_p=C_3t$$

$$S=C_1Sinkt+C_2Coskt+C_3t$$

$$\dot{S}=C_1KCosKt-C_2k\,SinKt+C_3$$

$$\ddot{S}=-C_1K^2SinKt-C_2K^2Coskt$$

$$S=0\xrightarrow{t=0} \qquad 0=C_2 \rightarrow S=C_1Sinkt+C_3t$$

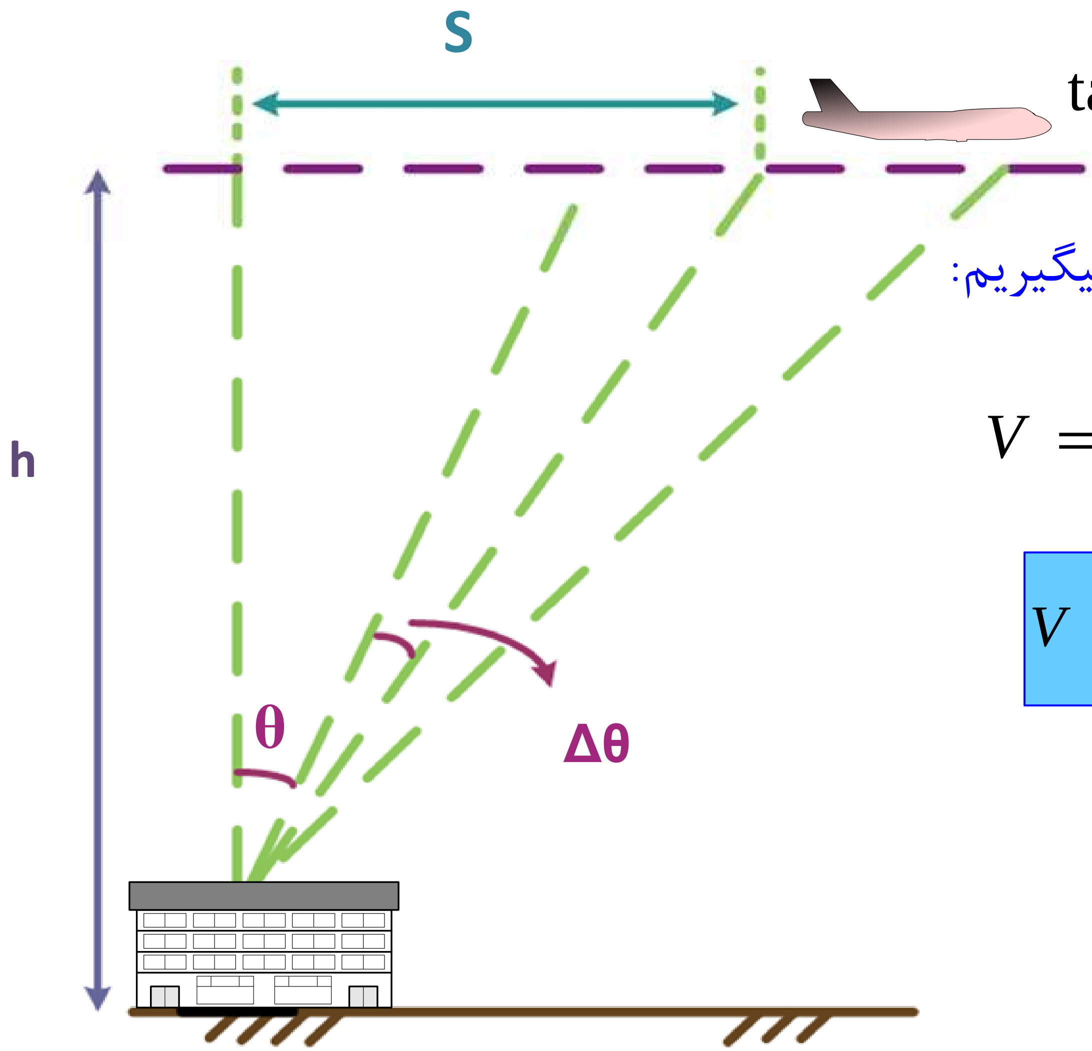
$$\dot{S}=0\xrightarrow{t=0} \qquad 0=C_1K+C_3 \qquad C_3=-C_1K \qquad \rightarrow S=C_1(Sinkt-kt)$$

با جاگذاری $S = C_1(Sinkt - kt)$ در معادله غیر همگن:

$$\ddot{S} + K^2 S = \overline{K}t \quad \rightarrow C_1 = -\frac{\overline{K}}{K^3}$$

$$\boxed{S = \frac{\overline{K}}{K^3}\left(Kt - Sinkt\right)}$$

مثال: هواپیمایی که در ارتفاع h از زمین در حال حرکت است از ایستگاهی زمینی مشاهده می شود. مطلوبست سرعت و شتاب خطی هواپیما؟



$$\tan\theta = \frac{S}{h} \rightarrow S = h\tan\theta$$

از طرفین نسبت به زمان مشتق میگیریم:

$$V = \frac{ds}{dt} = h\dot{\theta}\left(1 + \tan^2\theta\right)$$

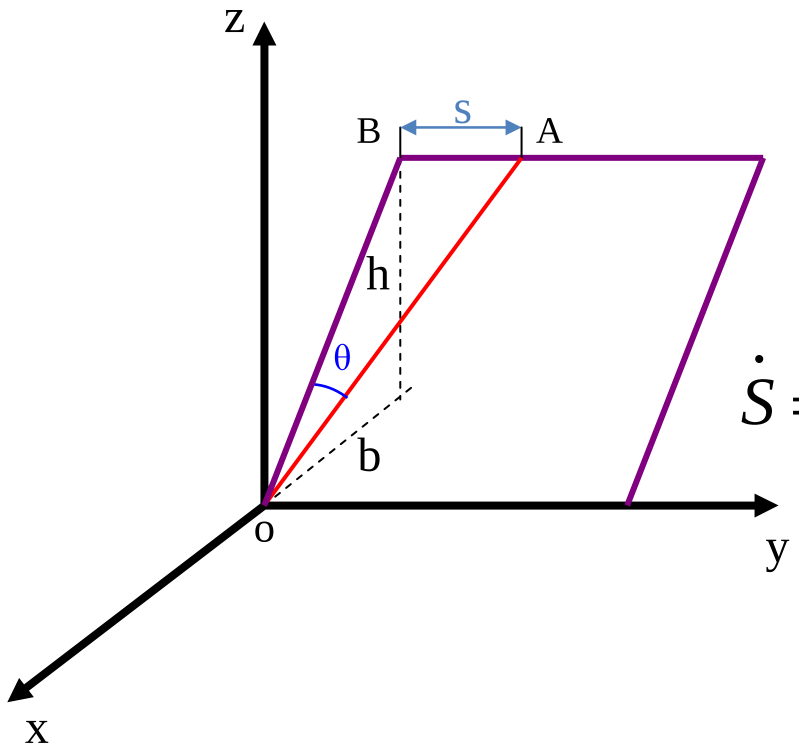
$$\boxed{V = \frac{h}{\cos^2\theta}\omega}$$

$$\boxed{V = \frac{h}{\cos^2\theta}\omega}$$

$$\dot{V} = a = h\left(\frac{\dot{\omega}Cos^2\theta + 2\dot{\theta}\omega Cos\,\theta Sin\,\theta}{Cos^4\theta}\right)$$

$$\boxed{a = h\left(\frac{\alpha Cos^2\theta + \omega^2 Sin2\theta}{Cos^4\theta}\right)}$$

مثال: هواپیمایی که با سرعت V در جهت افقی در پرواز است از ایستگاه زمینی O ردیابی می شود. شعاع OA در صفحه ای که با خط پرواز و نقطه O مشخص می شود، می چرخد. با استفاده از دستگاه مختصات (xyz) سرعت زاویه ای شعاع OA را به صورت برداری بر حسب θ بدست آورید. (محور y موازی با جهت پرواز انتخاب شده و از O می گذرد. محور Z نیز قائم است.)



$$\tan\theta = \frac{S}{\sqrt{b^2+h^2}}$$

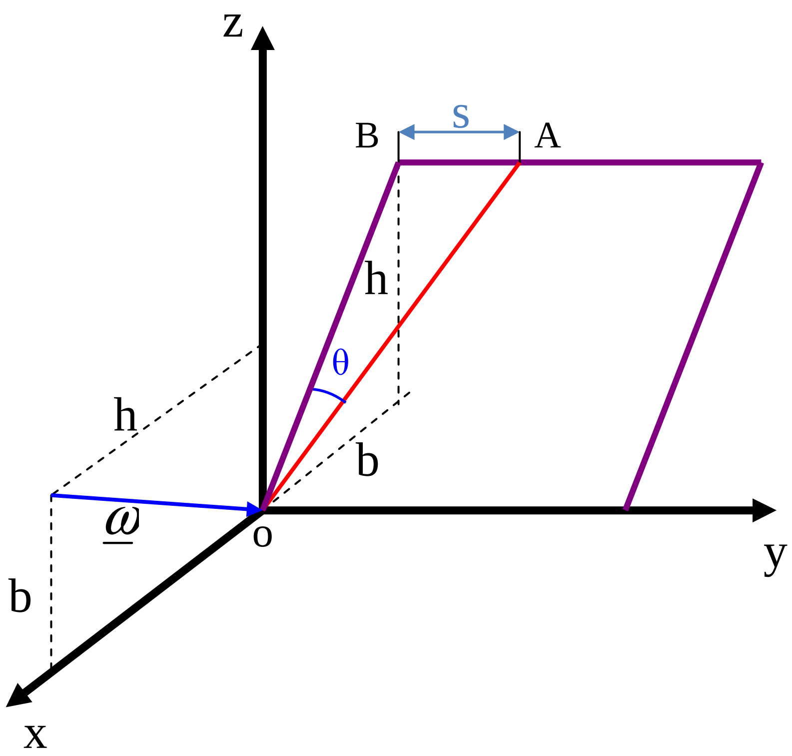
$$\rightarrow S = \tan\theta\sqrt{b^2+h^2}$$

$$\dot{S} = V = \dot{\theta}\sqrt{b^2+h^2}(1+\tan^2\theta) = \frac{\dot{\theta}\sqrt{b^2+h^2}}{\cos^2\theta}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \omega = \frac{V\cos^2\theta}{\sqrt{b^2+h^2}}}$$

$$\underline{\omega} = -(\omega_x \underline{i} + \omega_z \underline{k})$$

$$\frac{\omega_x}{\omega_z} = \frac{h}{b}$$



$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_z^2 = (\frac{h^2}{b^2} + 1)\omega_z^2$$

$$\omega_z = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}}\omega$$

$$\omega_z = \frac{Vb\cos^2\theta}{b^2 + h^2} \qquad \omega_x = \frac{Vh\cos^2\theta}{b^2 + h^2}$$

$$\underline{\omega} = -\frac{V\cos^2\theta}{b^2 + h^2}(h\underline{i} + b\underline{k})$$

مثال: ذره ای با تندی ثابت V در روی یک مسیر منحنی به معادله $y=3x^2$ حرکت می کند. بردار شتاب ذره را در دستگاه قائم و مماس بر حسب V و X ارائه کرده و با استفاده از آن بردار شتاب را در دستگاه مختصات دکارتی بیابید.

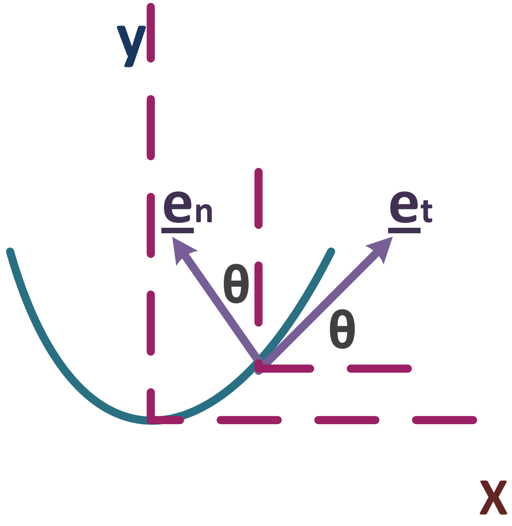
$$\underline{a}=a_t\underline{e}_t+a_n\underline{e}_n=\dot{v}\underline{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\underline{e}_n \qquad v=cte\rightarrow\dot{v}=0$$

$$\underline{a}=\frac{v^2}{\rho}\underline{e}_n \qquad \frac{1}{\rho}=\frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \qquad \frac{dy}{dx}=6x \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=6$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{6}{(1+36x^2)^{3/2}} \qquad \rightarrow\ \rho=\frac{(1+36x^2)^{3/2}}{6}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{6v^2}{(1+36x^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\underline{a}=\frac{6v^2}{(1+36x^2)^{3/2}}\underline{e}_n}$$



$$\underline{e}_n = \cos\theta\,\underline{j} - \sin\theta\,\underline{i}$$

$$\underline{a} = \frac{6v^2}{(1+36x^2)^{3/2}}(\cos\theta\,\underline{j} - \sin\theta\,\underline{i})$$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = 6x$$

$$1+tg^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{1+36x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+36x^2}} \qquad \sin\theta = \frac{6x}{\sqrt{1+36x^2}}$$

$$\boxed{\underline{a} = \frac{6v^2}{(1+36x^2)^2}(\underline{i} + 6x\,\underline{j})}$$

مثال ذره ای بترتیبی حرکت می کند که مولفه Y سرعت آن برحسب متر برثانیه توسط رابطه $V_y = 8\,t$ و شتاب آن در جهت X برحسب متر برمجذور ثانیه با رابطه $a_x = 4t$ داده شده است. بهنگامیکه t=0 هست Y=2m و x=0 و $V_x = 0$ می باشد. معادله مسیر ذره را پیدا کرده و اندازه بردار سرعت ذره را برای لحظه ای که مختص X آن به 18 متر برسد محاسبه کنید.

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 8t \qquad dy = 8t\,dt$$

$$\int_2^y dy = 8\int_0^t t\,dt \qquad \boxed{y - 2 = 4t^2}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 4t \quad \Rightarrow dv_x = 4t\,dt \qquad t = 0 \quad V_x = 0$$

$$\int_0^{V_x} dv_x = 4\int_0^t t\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_x = 2t^2}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 2t^2 \quad \Rightarrow dx = 2t^2 dt \qquad t = 0,\ x = 0$$

$$\int_0^x dx = 2\int_0^t t^2\, dt \qquad \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3} t^3} \qquad y - 2 = 4t^2$$

با حذف t بین y,x داریم:

$$t^2 = \frac{y-2}{4} \Rightarrow t = \frac{(y-2)^{1/2}}{2} \qquad x = \frac{2}{3}\frac{(y-2)^{3/2}}{8} = \frac{(y-2)^{3/2}}{12}$$

$$\boxed{(y-2)^3 = 144\, x^2}$$

از رابطه:

$$x = \frac{2}{3}t^3 \Rightarrow 18 = \frac{2}{3}t^3 \qquad t^3 = 27 \quad \Rightarrow t = 3Sec$$

$$V_x = 2t^2 \Rightarrow V_x = 18m/s$$

$$V_y = 8t \Rightarrow V_y = 24m/s$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 30\,{}^{m}\!/_{\sec}$$

مثال) بردار جابجایی ذره ای در روی یک مسیر منحنی الخط واقع در صفحه xy بوسیله رابطه

$$\underline{r} = (4t + 2)\,\underline{i} + \left(4t^2 - 16t + 15\right)\underline{j}$$

داده شده است مطلوبست:

a) بردارهای سرعت و شتاب ذره

b) زمانی که بردار سرعت بر بردار جابجایی عمود است

c) معادله مسیر ذره

$$\underline{r} = (4t + 2)\,\underline{i} + \left(4t^2 - 16t + 15\right)\underline{j}$$

$$\underline{V} = \dot{\underline{r}} = 4\underline{i} + (8t - 16)\,\underline{j} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{V}} = \ddot{\underline{r}} = 8\underline{j}$$

$$\underline{V}.\underline{r} = 4(4t+2) + (8t-16)\ (4t-16t+15) = 0$$

$$4t^3 - 24t^2 + 69t - 29 = (t-1)\ (4t^2 - 20t + 29) = 0$$

t=1 sec تنها ریشه حقیقی

$$\underline{r} = (4t+2)\underline{i} + (4t^2 - 16t + 15)\underline{j}$$

$$x = 4t + 2 \qquad y = 4t^2 - 16t + 15 \qquad t = \frac{x-2}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4(x-2) + 15 = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 24$$

مسیر حرکت یک سهمی است.

مثال نشان دهید که شعاع انحنای مسیر در یک حرکت منحنی الخط بوسیله رابطه زیر داده می شود

$$\rho = \frac{V^3}{\left|\underline{V}\times\underline{a}\right|}$$

همچنین در صورتیکه بردار وضعیت ذره ای بوسیله رابطه

$$\underline{r} = b(t+\sin\ t)\underline{i} + b(1-\cos\ t)\underline{j}$$

داده شود شعاع انحنای مسیر و بردار یکه مماس بر مسیر را محاسبه کنید.

$$\boxed{\underline{V} = V\,\underline{e}_t}$$

$$\boxed{\underline{a} = \dot{V}\,\underline{e}_t + \frac{V^2}{\rho}\underline{e}_n}$$

$$\underline{V}\times\underline{a} = \left(V\underline{e}_t\right)\times\left(\dot{V}\underline{e}_t + \frac{V^2}{\rho}\underline{e}_n\right) = \frac{V^3}{\rho}\underline{e}_p$$

$$\left|\underline{V}\times\underline{a}\right| = \frac{V^3}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^3}{\left|\underline{V}\times\underline{a}\right|}$$

$$\rho = \frac{V^3}{\left|\underline{V} \times \underline{a}\right|}$$

$$\underline{r} = b\left(t + \sin t\right)\ \underline{i} + b\left(1 - \cos t\right)\underline{j}$$

$$\underline{V} = \underline{\dot{r}} = b\left(1 + \cos t\right)\ \underline{i} + b\sin t\ \underline{j} \qquad \underline{a} = \underline{\dot{V}} = \underline{\ddot{r}} = -b\sin t\underline{i} + b\cos t\ \underline{j}$$

$$\underline{V} \times \underline{a} = b^2\left(1 + \cos t\right)\cos t\,\underline{k} + b^2 \sin^2 t\underline{k} = b^2\left(1 + \cos t\right)\underline{k}$$

$$\left|\underline{V} \times \underline{a}\right| = b^2\left(1 + \cos t\right)$$

$$V = \left[b^2\left(1 + \cos t\right)^2 + b^2 \sin^2 t\right]^{1/2} = b\sqrt{2\left(1 + \cos t\right)} = 2b\cos\frac{t}{2}$$

$$\rho = \frac{8b^3\cos^3\frac{t}{2}}{2b^2\cos^2\frac{t}{2}} = 4b\cos\frac{t}{2} \qquad \boxed{\rho = 4b\cos\frac{t}{2}}$$

$$\underline{e}_t = \frac{\underline{V}}{V} = \frac{b(1+\cos t)}{2b\cos\frac{t}{2}}\underline{i} + \frac{b\sin t}{2b\cos\frac{t}{2}}\underline{j} = \cos\frac{t}{2}\underline{i} + \sin\frac{t}{2}\underline{j}$$

$$\boxed{\underline{e}_t = \cos\frac{t}{2}\underline{i} + \sin\frac{t}{2}\underline{j}}$$

مثال) نشان دهید که شعاع انحنای مسیر در یک حرکت منحنی الخط بوسیله رابطه

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{V^2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{dV}{dt}\right)^2}$$

داده می شود که در آن a,V بترتیب بزرگی های بردار سرعت و شتاب هستد همچنین نشان دهید:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1+(dy/dx)^2\right]^{3/2}}$$

$$\underline{a} = a_n \underline{e_n} + a_t \underline{e_t}$$

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2 = \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2 + \dot{V}^2$$

$$\frac{V^2}{\rho} = \sqrt{a^2 - \dot{V}^2} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{V^2}\sqrt{a^2 - \dot{V}^2} = \frac{1}{V^2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{dV}{dt}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{1}{V^2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{dV}{dt}\right)^2}}$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} \qquad \underline{\dot{r}} = \underline{V} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} \qquad \underline{\ddot{r}} = \underline{a} = \underline{\dot{V}} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}$$

$$\underline{V} \times \underline{a} = \dot{x}\ddot{y}\underline{k} - \dot{y}\ddot{x}\underline{k} \quad \Rightarrow \left|\underline{V} \times \underline{a}\right| = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$$

$$V = (\dot{x} + \dot{y})^{1/2} \qquad But \quad \rho = \frac{V^3}{\left|\underline{V} \times \underline{a}\right|}$$

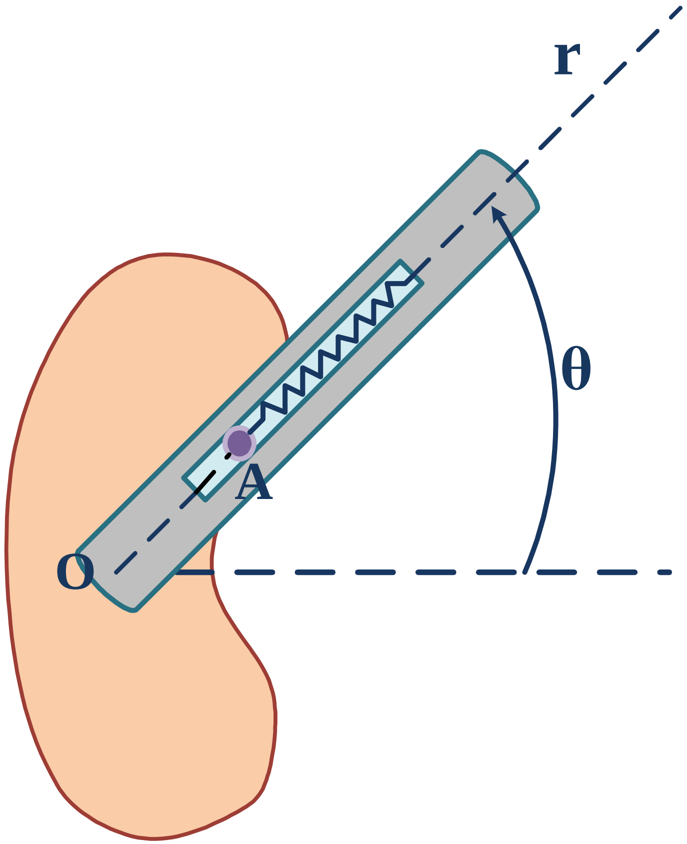
$$\frac{1}{\rho}=\frac{|\underline{V}\times\underline{a}|}{V^3}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}} \qquad But:\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\frac{1}{\dot{x}}\left(\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\right)=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{x}^2+\dot{x}^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\dot{x}^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}=\frac{\dot{x}^3 d^2y/dx^2}{\dot{x}^3\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad \boxed{\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}}$$

مثال) یک بادامک مطابق شکل سبب می شود سا چمه A روی یک منحنی بنام لیماسون حرکت کند معادله منحنی بصورت $r = b - c\ \cos\theta$ است که در آن b>c می باشد. اگر بازوی شیار دار با سرعت زاویه ای ثابت $\dot{\theta} = \omega$ دوران کند ولی بادامک نچرخد a شتاب ساچمه را بر حسب θ تعیین کنید.



$$a=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\underline{e_r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\underline{e_\theta}$$

$$\dot{\theta}=\omega=cte\rightarrow\ddot{\theta}=0$$

$$r=b-c\ \cos\theta$$

$$\dot{r}=c\dot{\theta}sin\theta$$

$$\ddot{r}=c\ddot{\theta}sin\theta+c\dot{\theta}^2cos\ \theta$$

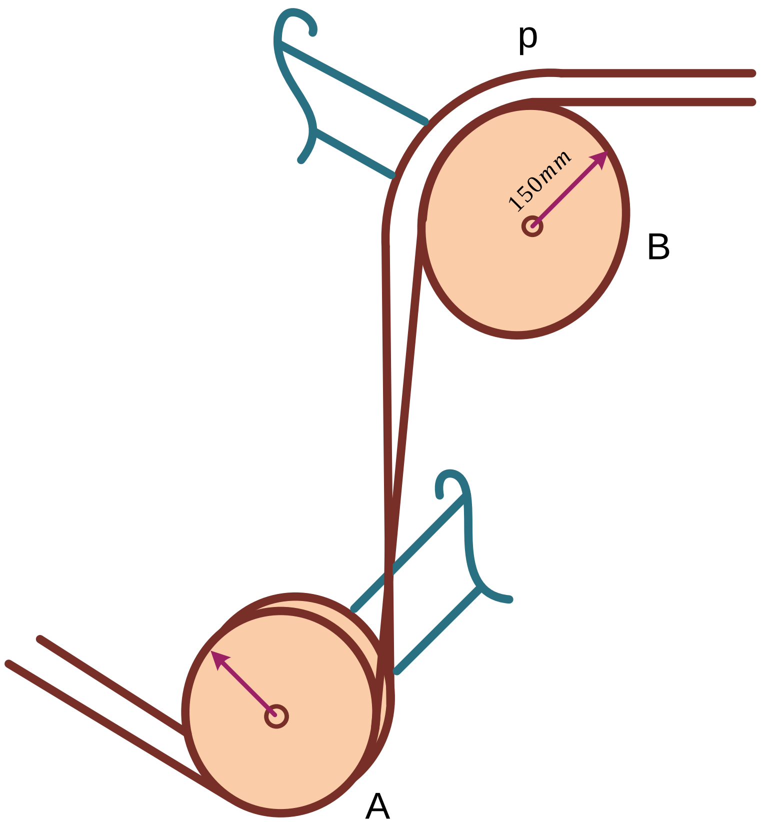
$$\underline{a}=\left(c\dot{\theta}^2\cos\theta-b\dot{\theta}^2+c\dot{\theta}^2cos\theta\right)\ \underline{e_r}+2c\dot{\theta}^2\sin\theta\underline{e_\theta}$$

$$\underline{a}=\left(2c\,cos\theta-b\right)\ \dot{\theta}^2\underline{e_r}+2c\ \ sin\ \ \theta\ \ \dot{\theta}^2\underline{e_\theta}$$

$$a=\dot{\theta}^2\sqrt{4c^2cos^2\theta+b^2-4bc\cos\theta+4c^2\sin^2\theta}$$

$$\boxed{a=\omega^2\sqrt{4c^2-4bc\cos\theta+b^2}}$$

مثال) جهت حرکت یک نوار پهن در دستگاه کنترل عددی بوسیله دو قرقره B,A مطابق شکل تغییر می کند اگر سرعت نوار بطور یکنواخت با زمان از 2m/s به 18m/s مادامیکه 8m از نوار از روی قرقره ها عبور می کند افزایش یابد بزرگی شتاب را در نقطه P یعنی نقطه تماس قرقره B و نوار در لحظه ای که سرعت نوار برابر 3m/s هست پیدا کنید.



از رابطه VdV=adS می توانیم شتاب مماسی یعنی a_t را محاسبه کنیم پس

$$VdV = a_t dS \Rightarrow \int_2^{18} VdV = a_t \int_0^8 dS \qquad \left[\frac{1}{2}V^2\right]_2^{18} = a_t [S]_0^8$$

$$\frac{1}{2}(324-4) = 8a_t \qquad 160 = 8a_t \qquad \boxed{a_t = 20\, m/\sec^2}$$

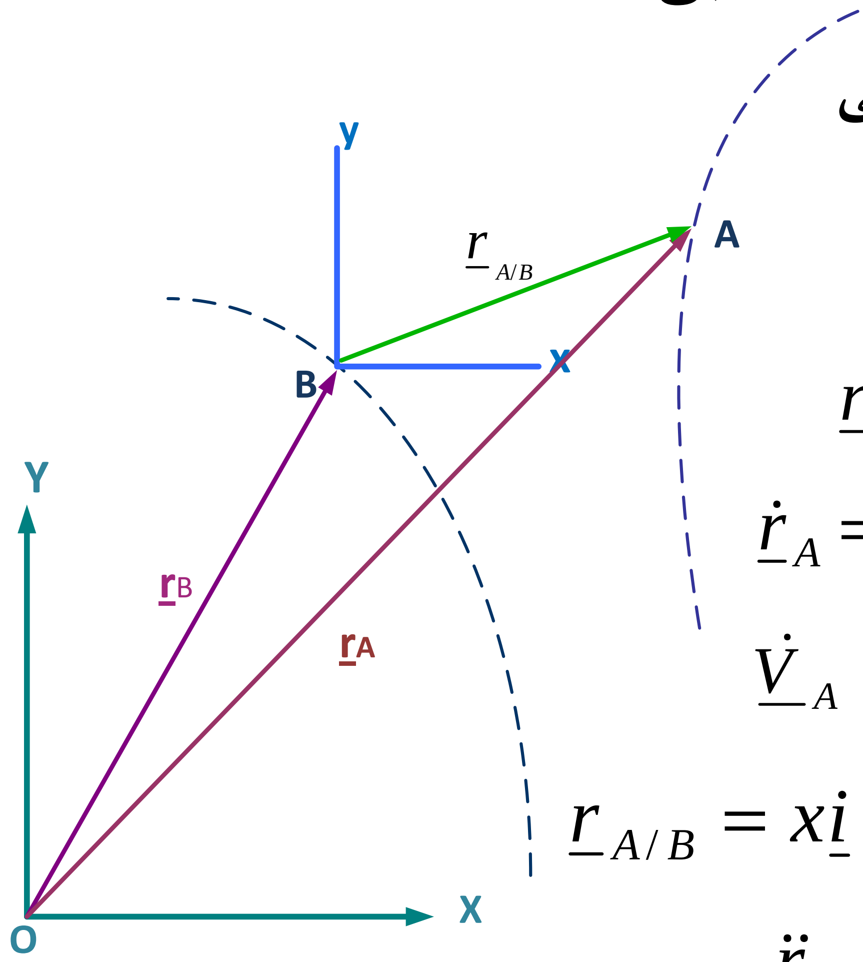
$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{9\times1000}{150} = 60\, {}^{m}\!/\!{}_{\sec^2} \qquad \boxed{a_n = 60\, {}^{m}\!/\!{}_{\sec^2}}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{3600+400} = \sqrt{4000} = 63.02\, {}^{m}\!/\!{}_{\sec^2}$$

$$\boxed{a = 63.02\, {}^{m}\!/\!{}_{\sec^2}}$$

۲- حرکت نسبی

۲-۱حرکت نسبی محورهای مقایسه انتقالی



بردارهای وضعیت مطلق ذرات $\underline{r}_A , \underline{r}_B$

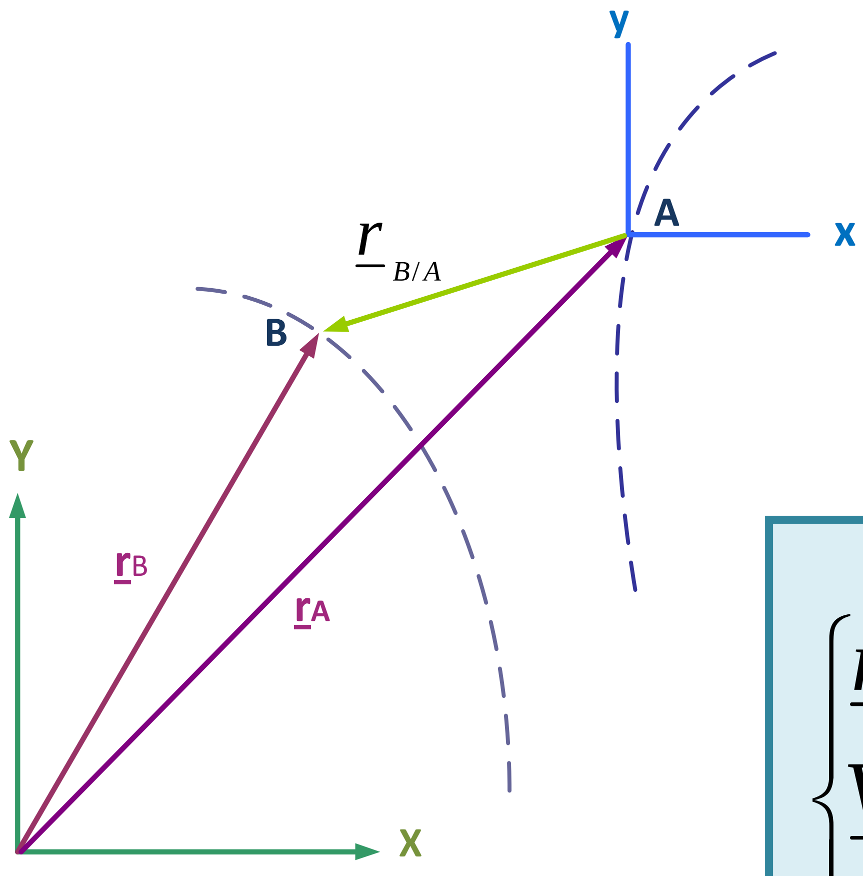
$$\underline{r}_A = \underline{r}_B + \underline{r}_{A/B}$$

$$\dot{\underline{r}}_A = \dot{\underline{r}}_B + \dot{\underline{r}}_{A/B} \rightarrow \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$

$$\dot{\underline{V}}_A = \dot{\underline{V}}_B + \dot{\underline{V}}_{A/B} \rightarrow \underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B}$$

$$\underline{r}_{A/B} = x\underline{i} + y\underline{j} \Rightarrow \dot{\underline{r}}_{A/B} = \underline{V}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j}$$

$$\ddot{\underline{r}}_{A/B} = \underline{a}_{A/B} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}$$



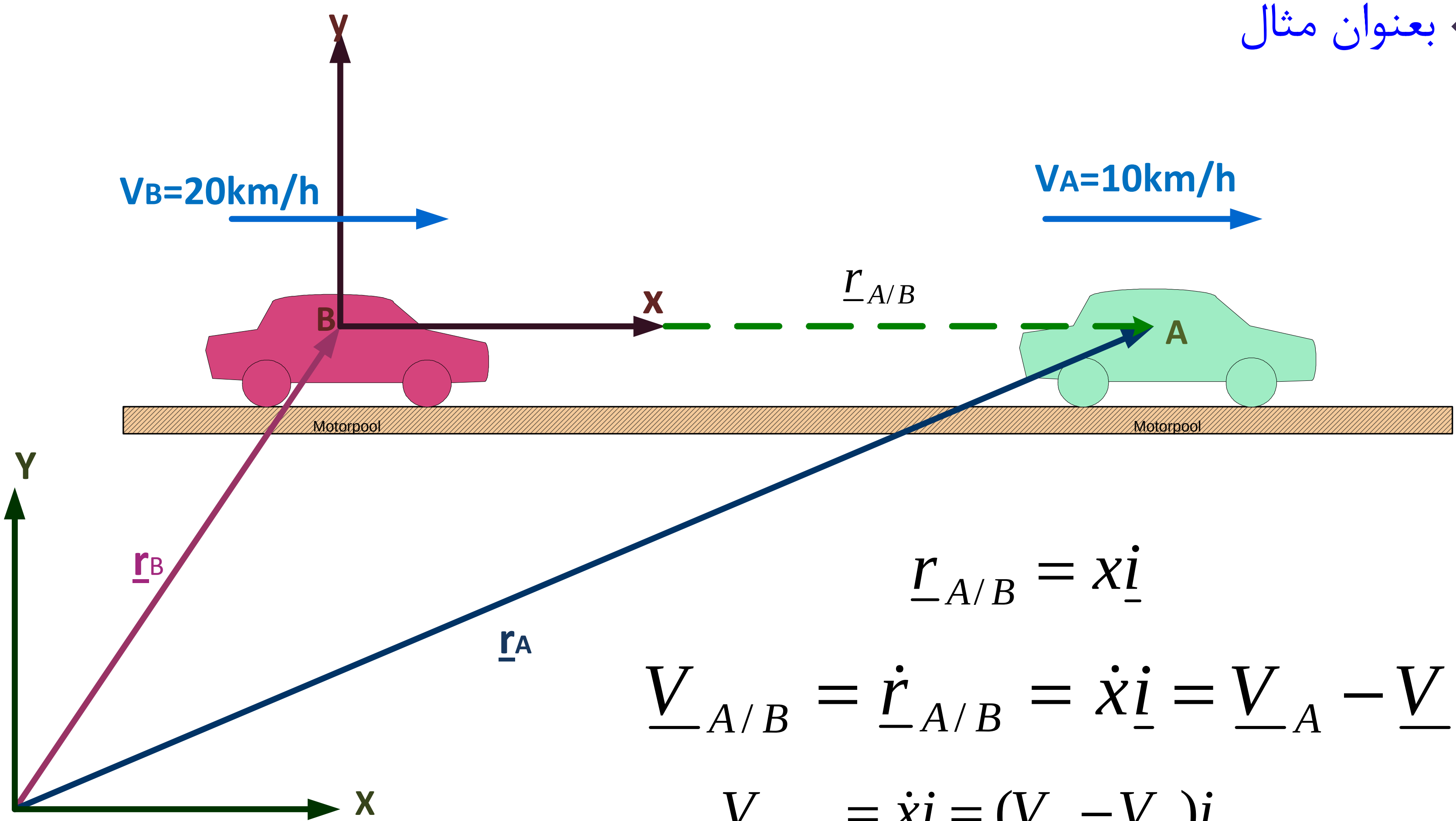
$$\underline{r}_B = \underline{r}_A + \underline{r}_{B/A} \quad \rightarrow \dot{\underline{r}}_B = \dot{\underline{r}}_A + \dot{\underline{r}}_{B/A}$$

$$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{V}_{B/A} \quad \rightarrow \dot{\underline{V}}_B = \dot{\underline{V}}_A + \dot{\underline{V}}_{B/A}$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{B/A}$$

$$\boxed{\begin{cases} \underline{r}_{A/B} = -\underline{r}_{B/A} \\ \underline{V}_{A/B} = -\underline{V}_{B/A} \\ \underline{a}_{A/B} = -\underline{a}_{B/A} \end{cases}}$$

بعنوان مثال



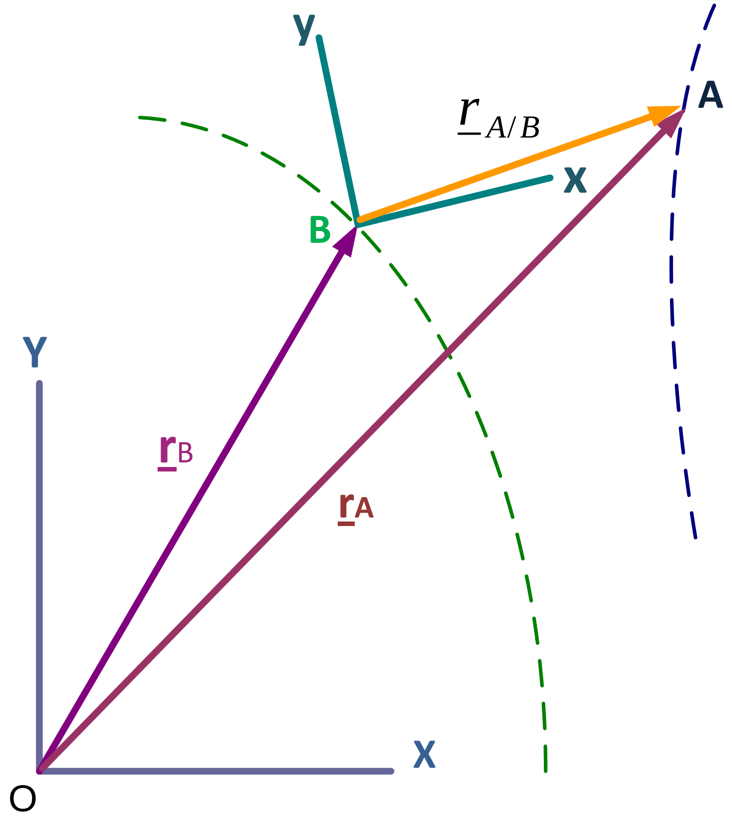
$$\underline{r}_{A/B} = x\underline{i}$$

$$\underline{V}_{A/B} = \dot{\underline{r}}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} = \underline{V}_A - \underline{V}_B$$

$$\underline{V}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} = (V_A - V_B)\underline{i}$$

$$\dot{x} = V_{A/B} = V_A - V_B = 10 - 20 = -10\frac{km}{h}$$

۲-۲حرکت نسبی محورهای مقایسه چرخان



$$\underline{r}_A = \underline{r}_B + \underline{r}_{A/B}$$

$$\dot{\underline{r}}_A = \dot{\underline{r}}_B + \dot{\underline{r}}_{A/B} \rightarrow \underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{v}_{A/B}$$

$$\ddot{\underline{r}}_A = \ddot{\underline{r}}_B + \ddot{\underline{r}}_{A/B} \rightarrow \underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B}$$

$$\underline{r}_{A/B} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j}$$

$$\rightarrow \underline{v}_{A/B} = \dot{\underline{r}}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + x\dot{\underline{i}} + \dot{y}\underline{j} + y\dot{\underline{j}}$$

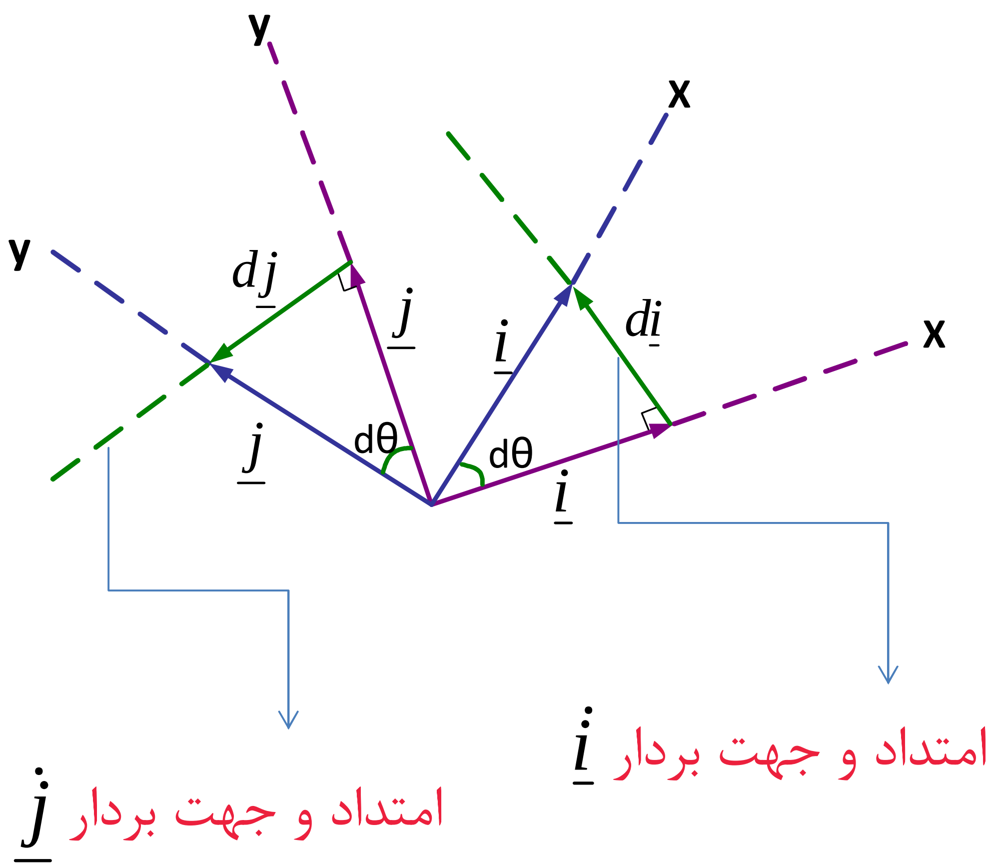
$$di = (1)d\theta = d\theta$$

$$dj = (1)d\theta = d\theta$$

$$\dot{\underline{i}} = \frac{d\underline{i}}{dt} = \dot{\theta}\,\underline{j}$$

$$\dot{\underline{j}} = \frac{d\underline{j}}{dt} = -\dot{\theta}\underline{i}$$

$$\underline{\omega} = \omega\underline{k} = \dot{\theta}\underline{k}$$



$$\underline{\omega}\times\underline{i} = (\dot{\theta}\underline{k})\times\underline{i} = \dot{\theta}(\underline{k}\times\underline{i}) = \dot{\theta}\,\underline{j} = \dot{\underline{i}}$$

$$\underline{\omega}\times\underline{j} = (\dot{\theta}\underline{k})\times\underline{j} = \dot{\theta}(\underline{k}\times\underline{j}) = -\dot{\theta}\underline{i} = \dot{\underline{j}}$$

$$\underline{v}_{A/B}=\dot{x}\underline{i}+\dot{y}\underline{j}+x\dot{\underline{i}}+y\dot{\underline{j}}=\dot{x}\underline{i}+\dot{y}\underline{j}+x(\underline{\omega}\times\underline{i})+y(\underline{\omega}\times\underline{j})$$

$$=\dot{x}\underline{i}+\dot{y}\underline{j}+\underline{\omega}\times(x\underline{i}+y\underline{j})$$

$$\boxed{v_{\mathrm{Rel}}=\dot{x}\underline{i}+\dot{y}\underline{j}}$$

مفهوم: سرعتی است که ناظر متصل بـه B مـی توانست برای A اندازه گیری کنـد اگـر محورهـا چرخان نبودند!

$$\boxed{\underline{v}_{A/B}=\dot{\underline{r}}_{A/B}=\underline{v}_{\mathrm{Rel}}+\underline{\omega}\times\underline{r}_{A/B}}\qquad \underline{a}_{A/B}=\dot{\underline{v}}_{\mathrm{Rel}}+\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}_{A/B}+\omega\times\dot{\underline{r}}_{A/B}$$

$$\dot{\underline{v}}_{\mathrm{Rel}}=\ddot{x}\underline{i}+\ddot{y}\underline{i}+\dot{x}\dot{\underline{i}}+\dot{y}\dot{\underline{j}}\;=\ddot{x}\underline{i}+\ddot{y}\underline{j}+\underline{\omega}\times(\dot{x}\underline{i}+\dot{y}\underline{j})$$

$$\boxed{\underline{a}_{\mathrm{Rel}}=\ddot{x}\underline{i}+\ddot{y}\underline{j}}$$

مفهوم: شتابی که ناظر متصل به B می توانست برای A اندازه گیری کند در صورتیکه محور ها چرخان بودند.

$$\boxed{\dot{\underline{v}}_{\mathrm{Rel}}=\underline{a}_{\mathrm{Rel}}+\underline{\omega}\times\underline{v}_{\mathrm{Rel}}}$$

$$\underline{a}_{A/B} = \dot{\underline{v}}_{\mathrm{Rel}} + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}_{A/B} + \omega \times \dot{\underline{r}}_{A/B} \qquad \dot{\underline{v}}_{\mathrm{Rel}} = \underline{a}_{\mathrm{Rel}} + \underline{\omega} \times \underline{v}_{\mathrm{Rel}}$$

$$\underline{v}_{A/B} = \dot{\underline{r}}_{A/B} = \underline{v}_{\mathrm{Rel}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{a}_{A/B} = \underline{a}_{\mathrm{Rel}} + \underline{\omega} \times \underline{v}_{\mathrm{Rel}} + \dot{\omega} \times \underline{r}_{A/B} + \underline{\omega} \times (\underline{v}_{\mathrm{Rel}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B})$$

$$= \underline{a}_{\mathrm{Rel}} + 2\underline{\omega} \times \underline{v}_{\mathrm{Rel}} + \dot{\omega} \times \underline{r}_{A/B} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B})$$

$$\underline{a}_{A} = \underline{a}_{B} + \underline{a}_{A/B}$$

$$\underline{a}_{A} = \underline{a}_{B} + \underline{a}_{\mathrm{Rel}} + 2\underline{\omega} \times \underline{v}_{\mathrm{Rel}} + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}_{A/B} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B})$$

شتاب کریولیس: $2\underline{\omega} \times \underline{v}_{\mathrm{Rel}}$

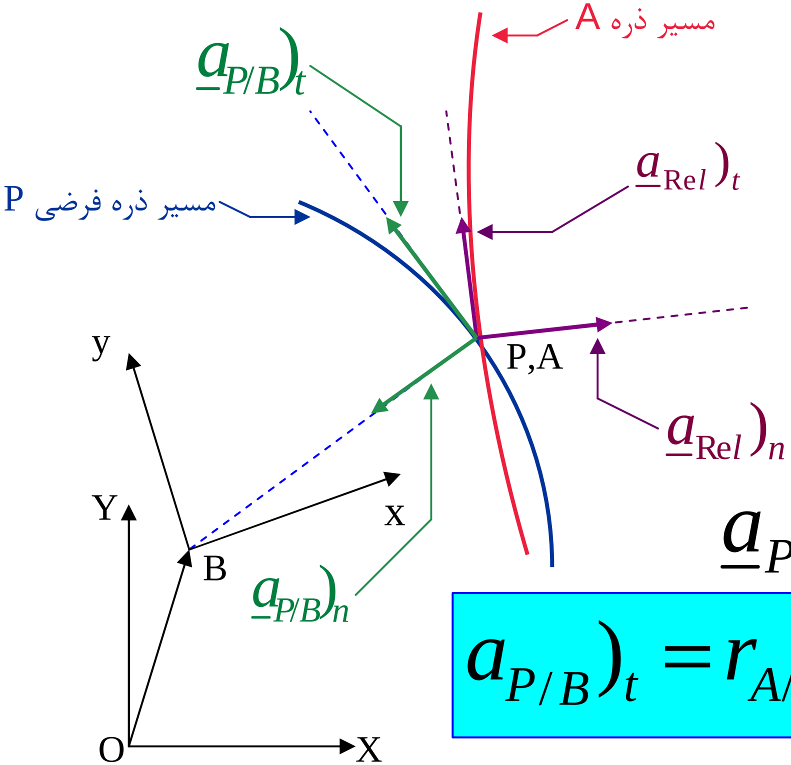
۲-۳ تشریح شتاب ها

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{\text{Rel}} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{\text{Rel}} + \underline{\dot{\omega}}\times\underline{r}_{A/B} + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}_{A/B})$$

$$\underline{a}_{\text{Rel}} = \underline{a}_{\text{Rel}})_t + \underline{a}_{\text{Rel}})_n$$

$$\boxed{a_{\text{Rel}})_t = \ddot{s}}$$

$$\boxed{a_{\text{Rel}})_n = v_{\text{Rel}}^2/\rho}$$



$$\underline{a}_{P/B} = \underline{a}_{P/B})_t + \underline{a}_{P/B})_n$$

$$\underline{a}_{P/B})_t = \underline{\dot{\omega}}\times\underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{a}_{P/B})_n = \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}_{A/B})$$

$$\boxed{a_{P/B})_t = r_{A/B}\ \dot{\omega}} \qquad \boxed{a_{P/B})_n = r_{A/B}\ \omega^2}$$

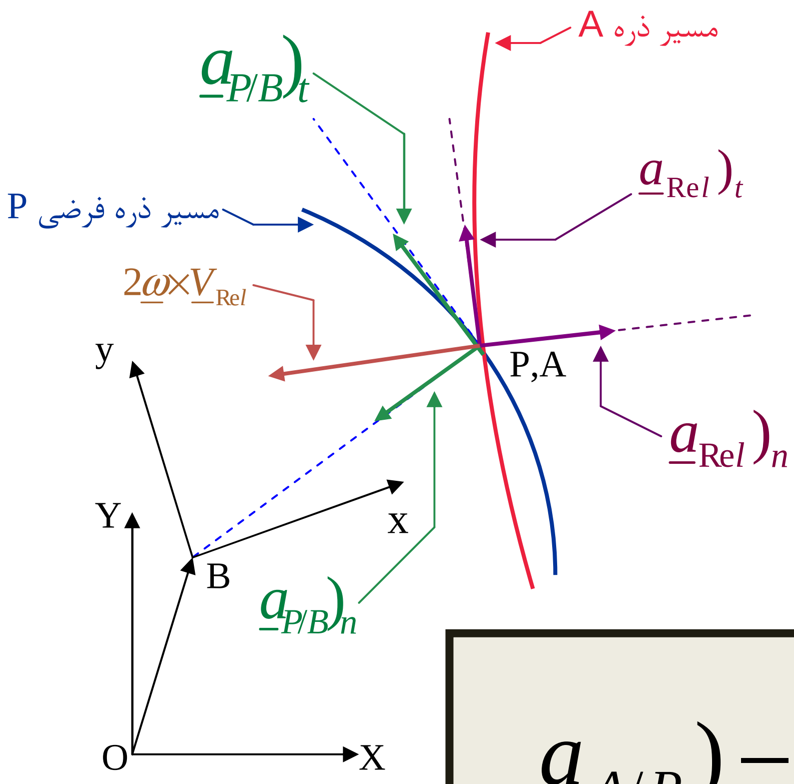
$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{\text{Rel}} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{\text{Rel}} + \underline{a}_{P/B}$$

$$= \underline{a}_B + \underline{a}_{\text{Rel}} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{\text{Rel}} + \underline{a}_P - \underline{a}_B = \underline{a}_{\text{Rel}} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{\text{Rel}} + \underline{a}_P$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel} + \underline{a}_P$$

$$\underline{a}_{A/P} = \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel}$$

$$\underline{a}_{A/P} = \underline{a}_{Rel} + 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel}$$



برای محورهای چرخان:

$$\underline{a}_{A/P} = \underline{a}_{Rel}$$

برای محورهای غیر چرخان:

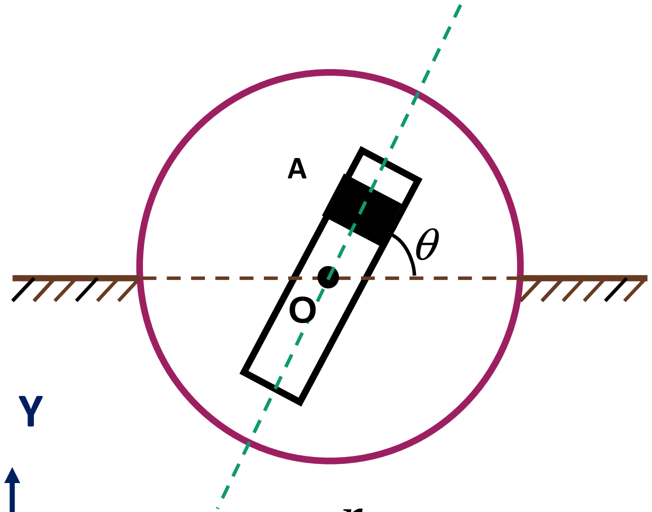
$$\underline{a}_{A/P}) - \underline{a}_{A/P}) = 2\underline{\omega}\times\underline{V}_{Rel}$$

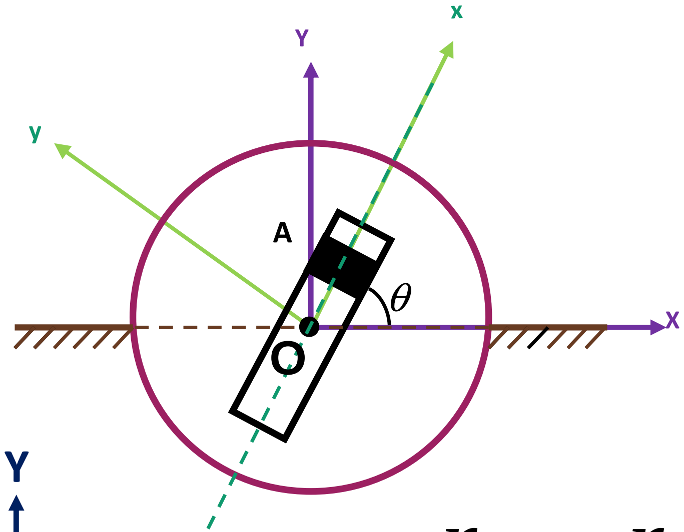
چرخان   غیر چرخان

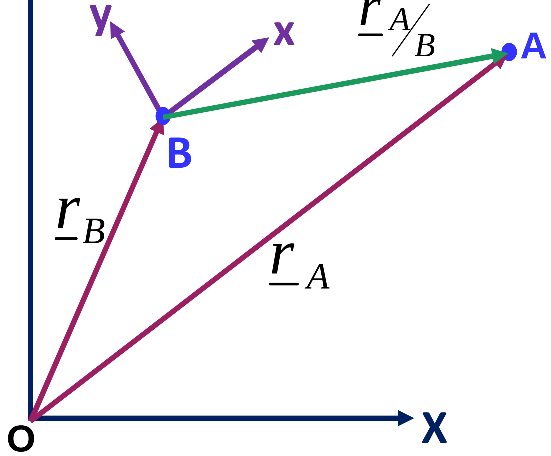
شتاب کریولیس عبارتست از اختلاف شتاب ذره A نسبت به ذره تصوری P به هنگامی که از محورهای چرخان و غیر چرخان اندازه گیری می شود.

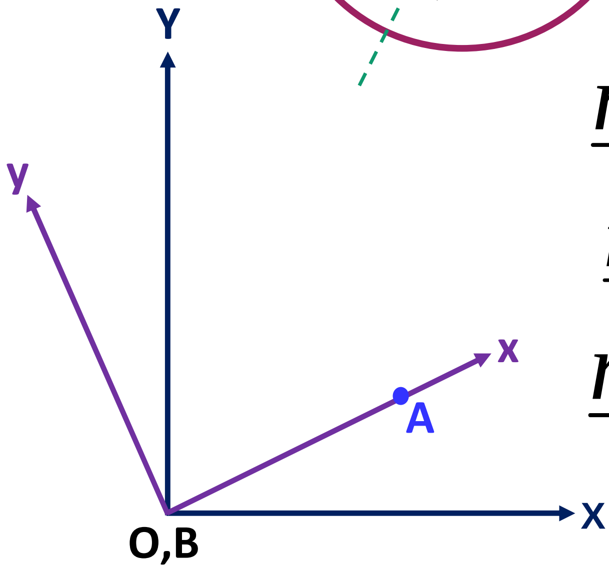
مسایل

مثال: لغزنده A در یک شیار حول نقطه ی ساکن O نوسان می کند در صورتی که جا به جایی زاویه ای دیسکی که این شیار بر روی آن تعبیه شده است θ باشد، شتاب لغزنده را پیدا کنید.





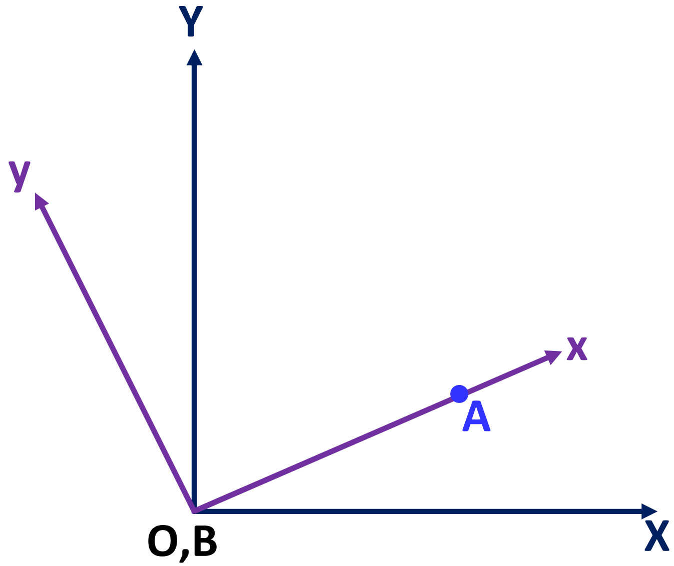




$$\underline{r}_A = \underline{r}_B + \underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{r}_B = 0$$

$$\underline{r}_A = \underline{r}_{A/B} = x\,\underline{i}$$



$$\underline{r}_A = \underline{r}_{A/B} = x\,\underline{i}$$

$$\frac{d}{dt}\underline{r}_A = \underline{V}_A = \underline{\dot{r}}_{A/B}$$

$$\underline{V}_A = \dot{x}\underline{i} + x\underline{\dot{i}} \qquad \underline{\dot{i}} = \underline{\omega}\times\underline{i}$$

$$\underline{V}_A = \dot{x}\underline{i} + \underline{\omega}\times(x\underline{i}) \qquad \underline{\omega} = \omega\underline{k}$$

$$\boxed{\underline{V}_A = \dot{x}\underline{i} + \omega x(\underline{k}\times\underline{i}) = \dot{x}\underline{i} + \omega x\,\underline{j}}$$

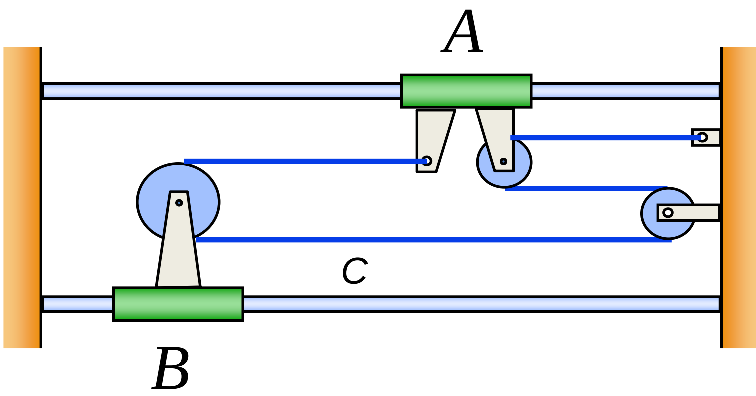
$$\frac{d}{dt}\underline{V}_A = \underline{a}_A = \ddot{x}\underline{i} + \dot{x}\underline{\dot{i}} + \dot{\omega}x\,\underline{j} + \omega\dot{x}\,\underline{j} + \omega x\,\underline{\dot{j}} \qquad \underline{\dot{j}} = \underline{\omega}\times\underline{j}$$

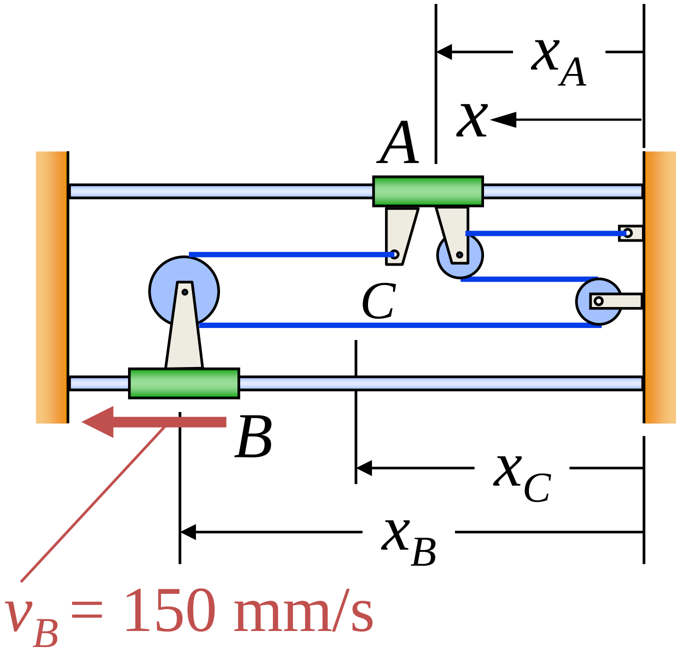
$$\underline{a}_A = \ddot{x}\underline{i} + \omega\dot{x}\,\underline{j} + \dot{\omega}x\,\underline{j} + \omega\dot{x}\,\underline{j} - \omega^2 x\underline{i} = (\ddot{x} - \omega^2 x)\underline{i} + (2\omega\dot{x} + \dot{\omega}x)\,\underline{j}$$

$$\boxed{\underline{a}_A = (\ddot{x} - x\dot{\theta}^2)\underline{i} + (2\dot{x}\dot{\theta} + \ddot{\theta}x)\,\underline{j}}$$

شتاب کریولیس $2\,\dot{x}\,\dot{\theta}$

مثال: در موقعیت نشانداده شده در شکل لغزنده B با سرعت 150 mm/s بطرف چپ حرکت میکند مطلوبست ۱- سرعت لغزنده A ۲- سرعت قسمت C از کابل ۳- سرعت قسمت C از کابل نسبت به لغزنده B





طول ریسمان ثابت است بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$2x_A + x_B + (x_B - x_A) = cte \qquad x_A + 2x_B = cte$$

$$\dot{x}_A + 2\dot{x}_B = 0 \qquad v_A + 2v_B = 0$$

$$v_B = 150\ mm/s \qquad v_A = -2\ v_B$$

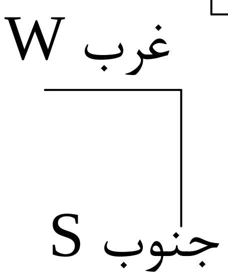
$$v_A = -300\ mm/s \qquad v_A = 300\ mm/s$$ بطرف راست

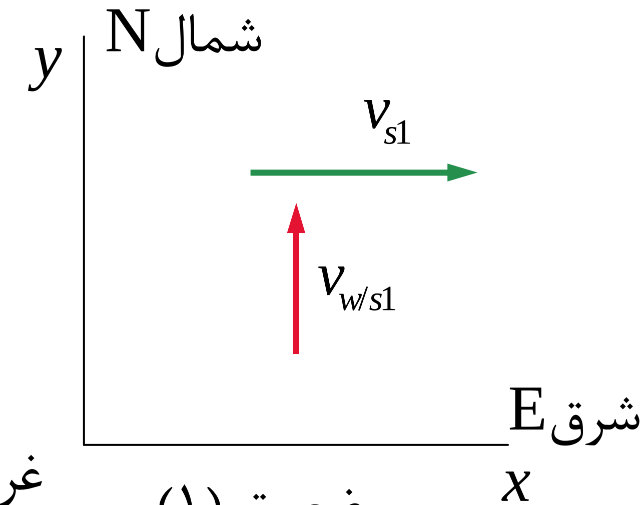
$$2x_A + x_C = cte \Rightarrow 2\dot{x}_A + \dot{x}_C = 0 \Rightarrow v_C = -2\ v_A = 600\ mm/s$$ بطرف چپ

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \underline{v}_{C/B} \Rightarrow 600\ \underline{i} = 150\ \underline{i} + \underline{V}_{C/B} \Rightarrow \underline{V}_{C/B} = 450\,\underline{i}$$

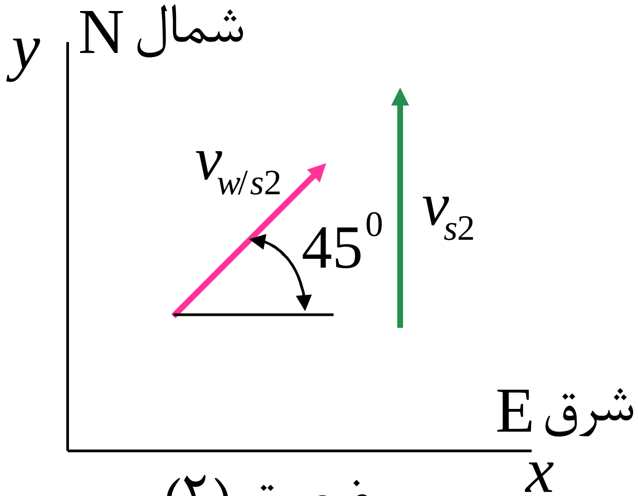
$$V_{C/B} = 450\,mm/s$$ بطرف چپ

مثال: برای کشتی که با سرعت 8km/h بطرف شرق حرکت میکند بنظر میرسد که باد از طرف جنوب میوزد. بعد از اینکه کشتی مسیر خود را تغیر داده وبا سرعت 8km/h بطرف شمال رهسپارمشود بنظر میرسد که باد از طرف جنوب غربی میوزد.فرض کنید که سرعت باد در مدت زمان مشاهده ثابت باشد در این صورت بزرگی وجهت سرعت واقعی باد را تعیین کنید.





وضعیت (۱)



وضعیت (۲)

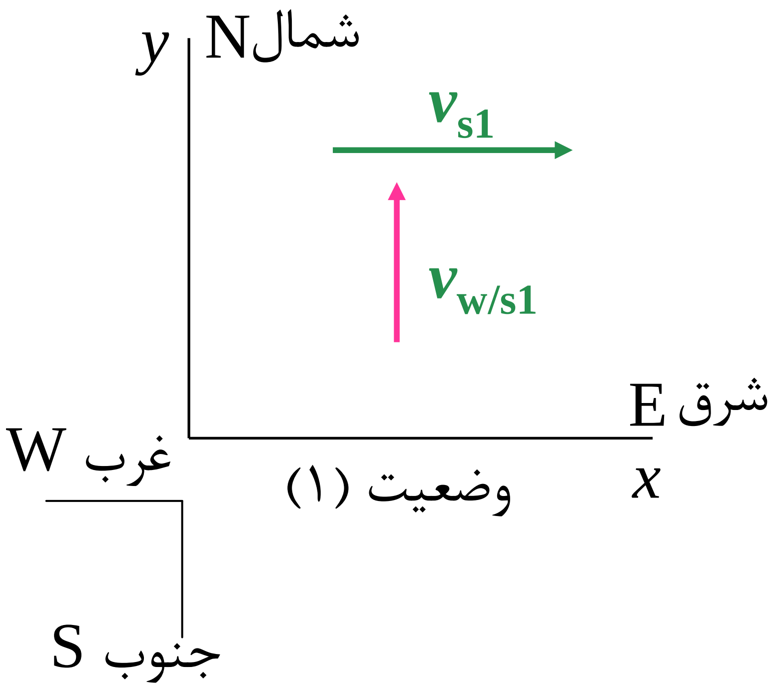
$\underline{v}_{s1}$ سرعت مطلق کشتی در وضعیت (۱) $\underline{v}_{s2}$ سرعت مطلق کشتی در وضعیت (۲)

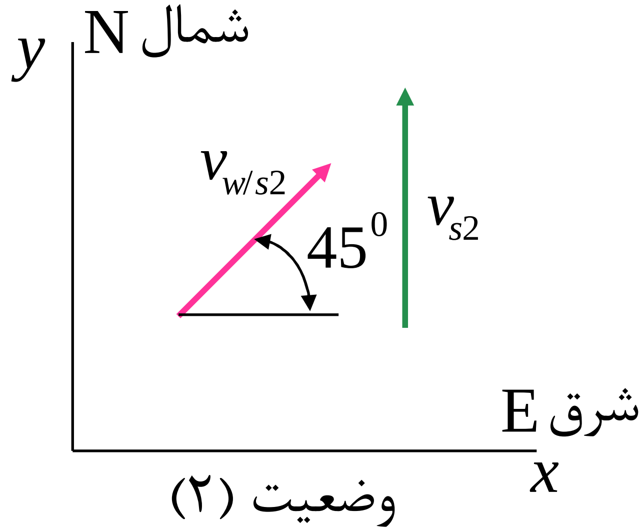
$\underline{v}_{w/s1}$ سرعت باد نسبت به کشتی در وضعیت (۱) $\underline{v}_{w/s2}$ سرعت باد نسبت به کشتی در وضعیت (۲)

$$\underline{v}_w = \underline{v}_{s1} + \underline{v}_{w/s1} \qquad \underline{v}_{s1} = 8\underline{i} \qquad \underline{v}_{w/s1} = v_{w/s1}\,\underline{j} \qquad \boxed{\underline{v}_w = 8\underline{i} + v_{w/s1}\,\underline{j}}$$

$$\underline{v}_w = \underline{v}_{s2} + \underline{v}_{w/s2} \qquad \underline{v}_{s2} = 8\underline{j} \qquad \underline{v}_{w/s2} = v_{w/s2}(\cos 45\underline{i} + \sin 45\underline{j})$$

$$\underline{v}_w = 8\underline{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} + \underline{j})v_{w/s2} \qquad \boxed{\underline{v}_w = \frac{\sqrt{2}}{2}v_{w/s2}\underline{i} + (8 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_{w/s2})\underline{j}}$$





$$\underline{v}_w = 8\underline{i} + v_{w/s1}\underline{j}$$

$$\underline{v}_w = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{w/s2}\underline{i} + \left(8 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_{w/s2}\right)\underline{j}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} v_{w/s2} &= 8 \\ v_{w/s1} &= 8 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_{w/s2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} v_{w/s1} &= 16 \\ v_{w/s2} &= 8\sqrt{2} \end{aligned}\right.$$

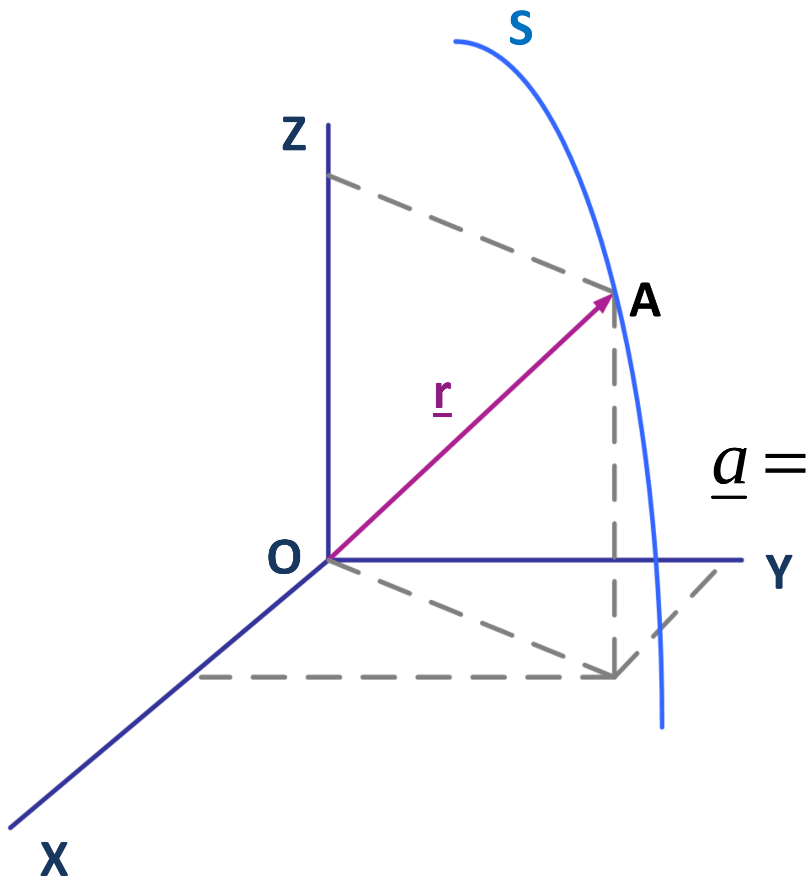
$$\underline{v}_w = 8\underline{i} + 16\underline{j}$$

$$v_w = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}$$

$$\tan\theta = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta = 63.44^o$$

۳-حرکت منحنی الخط در فضا

۱-۳ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات کارتزین



$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + \dot{z}\underline{k} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$$

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} + \ddot{z}\underline{k} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z}$$

۲-۳ تعیین مشتقات زمانی بردارهای یکه

$$\underline{r}_{A/B} = x\underline{i} + y\underline{j} \qquad \frac{d}{dt}\underline{r}_{A/B} = \underline{\dot{r}}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + x\underline{\dot{i}} + y\underline{\dot{j}}$$

$$\begin{cases} \underline{\dot{i}} = \underline{\omega} \times \underline{i} \\ \underline{\dot{j}} = \underline{\omega} \times \underline{j} \end{cases} \rightarrow \underline{\dot{r}}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{A/B}$$

این رابطه می تواند برای هر بردار دلخواهی مثل $\underline{A}$ برقرار باشد.

$$\underline{\dot{A}}\big)_{XY} = \underline{\dot{A}}\big)_{xy} + \underline{\omega} \times \underline{A}$$

مشتق زمانی بردار $\underline{A}$ نسبت به دستگاه مختصات مرجع ثابت

مشتق زمانی بردار $\underline{A}$ نسبت به دستگاه مختصات مرجع چرخان

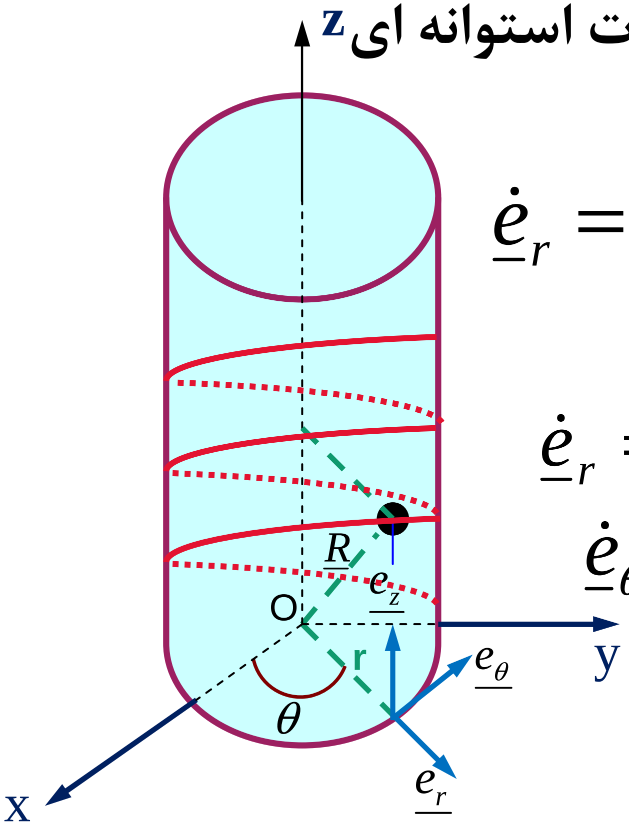
$$\underline{\dot{A}}\Big)_{XYZ} = \underline{\dot{A}}\Big)_{xyz} + \underline{\omega} \times \underline{A}$$

اگر بردار $\underline{A}$ یک بردار یکه باشد در این صورت:

$$\boxed{\underline{\dot{A}} = \underline{\omega} \times \underline{A}}$$

از این رابطه میتوان جهت تعیین مشتقات زمانی بردارهای یکه استفاده کرد.

۳-۳ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات استوانه ای



$$\dot{\underline{A}} = \underline{\omega} \times \underline{A}$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \underline{\omega} \times \underline{e}_r \qquad \dot{\underline{e}}_\theta = \underline{\omega} \times \underline{e}_\theta \qquad \dot{\underline{e}}_z = \underline{\omega} \times \underline{e}_z$$

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z = \dot{\theta} \underline{e}_z$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta} \underline{e}_z \times \underline{e}_r = \dot{\theta} \underline{e}_\theta \qquad \boxed{\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta} \underline{e}_\theta}$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = \dot{\theta} \underline{e}_z \times \underline{e}_\theta = -\dot{\theta} \underline{e}_r \qquad \boxed{\dot{\underline{e}}_\theta = -\dot{\theta} \underline{e}_r}$$

$$\dot{\underline{e}}_z = \dot{\theta} \underline{e}_z \times \underline{e}_z = 0 \qquad \boxed{\dot{\underline{e}}_z = 0}$$

$$\underline{R} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$$ بردار وضعیت

$$\underline{v} = \dot{\underline{R}} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\underline{e}}_r + \dot{z} \underline{e}_z + z \dot{\underline{e}}_z$$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z}$$

$$\underline{v} = v_r \underline{e}_r + v_\theta \underline{e}_\theta + v_z \underline{e}_z \qquad v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad v_z = \dot{z}$$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + \dot{z}\,\underline{e}_z}$$

$$\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\underline{\dot{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta + r\dot{\theta}\underline{\dot{e}}_\theta + \ddot{z}\underline{e}_z + \dot{z}\underline{\dot{e}}_z$$

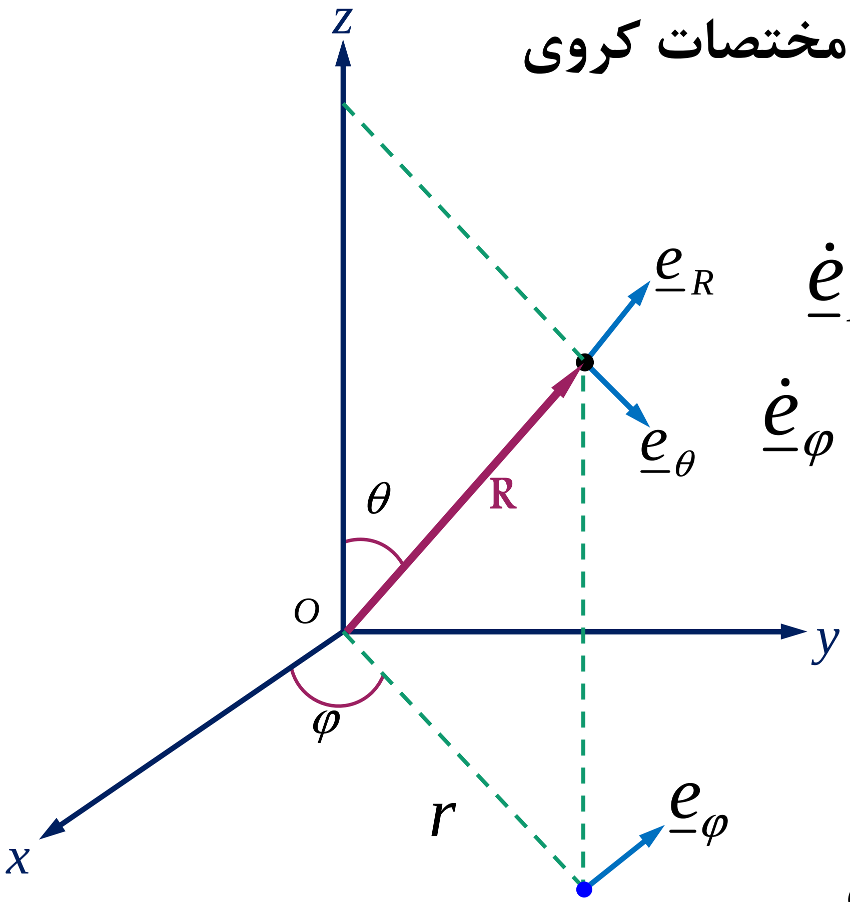
$$= \ddot{r}\underline{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\underline{e}_r + \ddot{z}\underline{e}_z$$

$$\boxed{\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_\theta + \ddot{z}\underline{e}_z}$$

$$\underline{a} = a_r\,\underline{e}_r + a_\theta\,\underline{e}_\theta + a_z\,\underline{e}_z$$

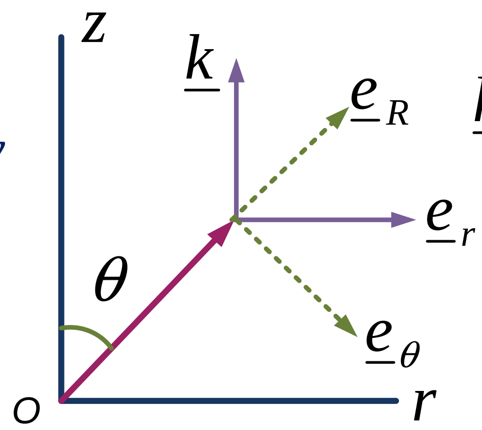
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

۴-۳ تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاه مختصات کروی



$$\dot{\underline{e}}_R=\underline{\omega}\times\underline{e}_R \qquad \dot{\underline{e}}_\theta=\underline{\omega}\times\underline{e}_\theta$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi=\underline{\omega}\times\underline{e}_\varphi \qquad \underline{\omega}=\dot{\theta}\underline{e}_\varphi+\dot{\varphi}\underline{k}$$



$$\underline{k}=\cos\theta\underline{e}_R-\sin\theta\underline{e}_\theta$$

$$\boxed{\underline{\omega}=\dot{\phi}\cos\theta\underline{e}_R-\dot{\phi}\sin\theta\underline{e}_\theta+\dot{\theta}\underline{e}_\phi}$$

$$\dot{\underline{e}}_R = \underline{\omega}\times\underline{e}_R = \begin{vmatrix} \underline{e}_r & \underline{e}_\theta & \underline{e}_\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\theta & -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = \underline{\omega}\times\underline{e}_\theta = \begin{vmatrix} \underline{e}_R & \underline{e}_\theta & \underline{e}_\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\theta & -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\dot{\theta}\underline{e}_R + \dot{\varphi}\cos\theta\underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = \underline{\omega}\times\underline{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \underline{e}_R & \underline{e}_\theta & \underline{e}_\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\theta & -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\dot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_R - \dot{\varphi}\cos\theta\underline{e}_\theta$$

$$\dot{\underline{e}}_R = \dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = -\dot{\theta}\underline{e}_R + \dot{\varphi}\cos\theta\underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_R - \dot{\varphi}\cos\theta\underline{e}_\theta$$

$$\underline{R} = R\underline{e}_R \qquad \underline{v} = \dot{\underline{R}} = \dot{R}\underline{e}_R + R\dot{\underline{e}}_R = \dot{R}\underline{e}_R + R(\dot{\theta}\underline{e}_\theta + \phi\sin\underline{e}_\phi)$$

$$\underline{v} = \dot{R}\underline{e}_R + R\dot{\theta}\underline{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{v} = \underline{v}_R\underline{e}_R + \underline{v}_\theta\underline{e}_\theta + \underline{v}_\varphi\underline{e}_\varphi$$

$$v_R = \dot{R} \qquad v_\theta = R\dot{\theta} \qquad v_\varphi = R\dot{\phi}\sin\theta$$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{R}\,\underline{e}_R + R\,\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + R\,\dot{\varphi}\sin\,\theta\,\underline{e}_\varphi}$$

$$\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \ddot{R}\underline{e}_R + \dot{R}\underline{\dot{e}}_R + \dot{R}\,\dot{\theta}\underline{e}_\theta + R\,\ddot{\theta}\underline{e}_\theta + R\,\dot{\theta}\underline{\dot{e}}_\theta$$

$$+\dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_\varphi + R\ddot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\underline{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\sin\theta\underline{\dot{e}}_\varphi$$

$$\underline{a} \;\; = \ddot{R}\underline{e}_R + 2\dot{R}\,\dot{\theta}\underline{e}_\theta + 2\dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_\varphi + R\,\ddot{\theta}\underline{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\underline{e}_R$$

$$+R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\underline{e}_\varphi + R\ddot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\underline{e}_R - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\underline{e}_\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\underline{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\underline{e}_R + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\underline{e}_\theta\\ &+(2\dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + R\ddot{\varphi}\sin\theta)\underline{e}_\varphi\end{aligned}}$$

$$\underline{a} = a_R\underline{e}_R + a_\theta\underline{e}_\theta + a_\varphi\underline{e}_\varphi$$

$$\boxed{a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}$$

$$\boxed{a_\theta = 2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta}$$

$$\boxed{a_\varphi = 2\dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + R\ddot{\varphi}\sin\theta}$$

۴- معادلات دینامیکی حرکت

۴-۱ رابطه ما بین نیرو، جرم و شتاب

اینرسی: مقاومت در مقابل تغییر حرکت

$$\frac{F_1}{a_1} = c \qquad \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots\dots\dots = c$$

اندازه کمی لختی یااینرسی ذره

$$m = c$$

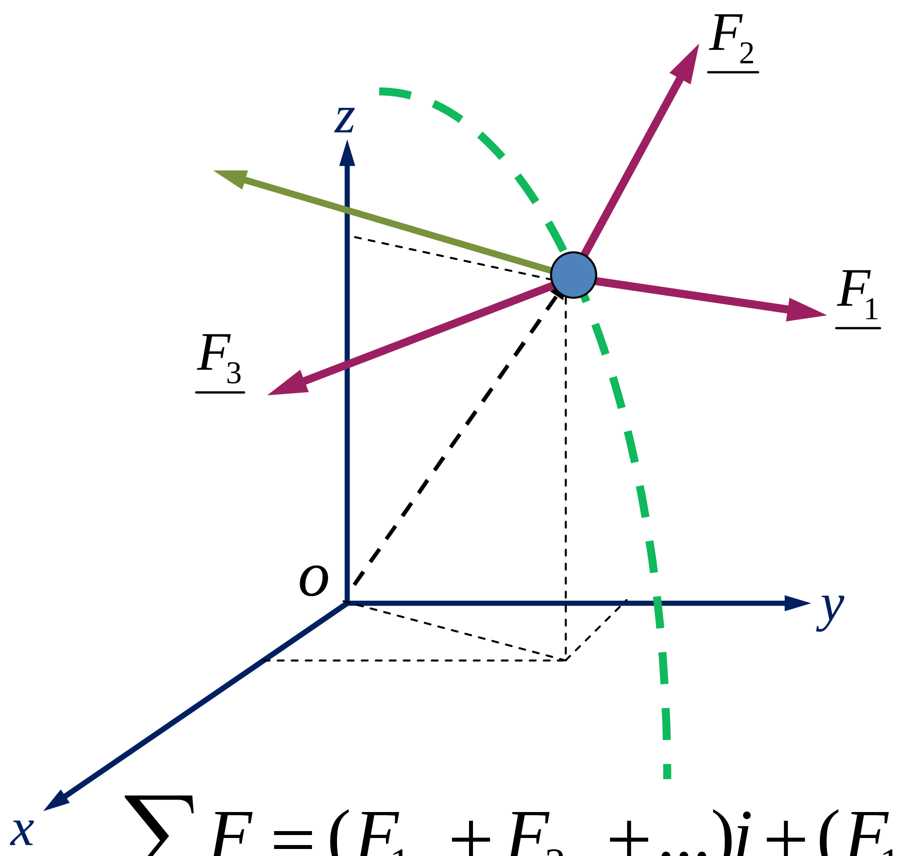
رابطه دینامیک برای حرکت انتقالی:

$$\frac{F}{a} = m \rightarrow F = ma \rightarrow \sum \underline{F} = m\underline{a}$$

واحد $F = kg.m/s^2 = N \qquad (mks)$

واحد $F = gr.cm/s^2 = dyne \qquad (cgs)$

۴-۲معادلات دینامیکی حرکت در دستگاه مختصات کارتزین و دکارتی



$$\underline{F}_1 = F_{1x}\underline{i} + F_{1y}\underline{j} + F_{1z}\underline{k}$$

$$\underline{F}_2 = F_{2x}\underline{i} + F_{2y}\underline{j} + F_{2z}\underline{k}$$

$$. = . \quad . \quad .$$

$$. = . \quad . \quad .$$

$$. = . \quad . \quad .$$

$$\sum \underline{F} = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots)\underline{i} + (F_{1y} + F_{2y} + \ldots)\underline{j} + (F_{1z} + F_{2z} + \ldots)\underline{k}$$

$$\sum \underline{F} = \sum F_x \underline{i} + \sum F_y \underline{j} + \sum F_z \underline{k}$$

$\underline{a}$: بردار شتاب حاصل از عملکرد نیروها

$$\underline{a}=a_x\underline{i}+a_y\underline{j}+a_z\underline{k}$$

$$\sum \underline{F}=m\underline{a} \rightarrow \sum F_x\underline{i}+\sum F_y\underline{j}+\sum F_z\underline{k}=m(a_x\underline{i}+a_y\underline{j}+a_z\underline{k})$$

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z$$

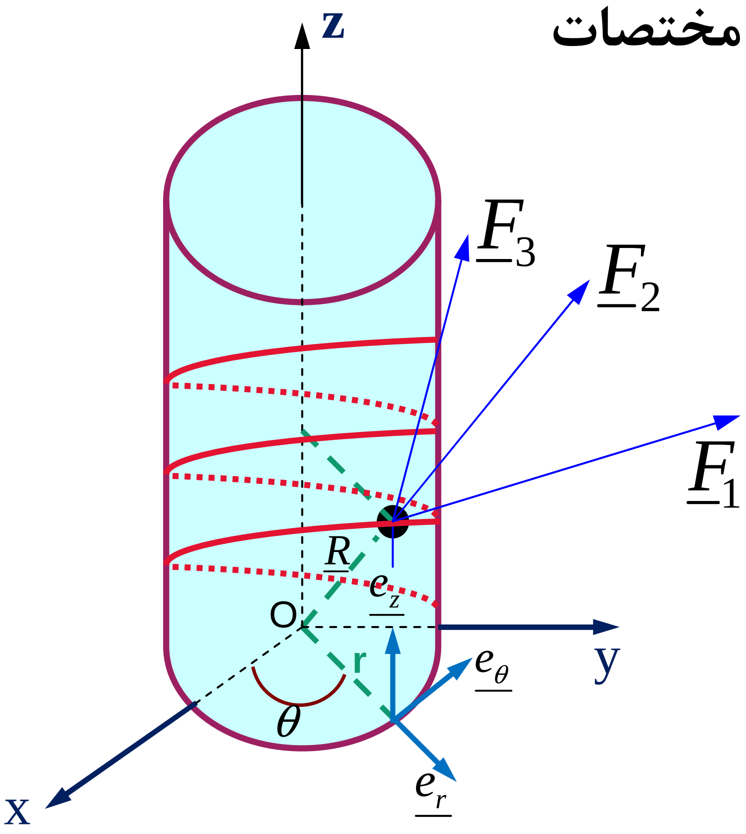
$$\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k} \qquad \underline{v}=\dot{x}\underline{i}+\dot{y}\underline{j}+\dot{z}\underline{k} \qquad \underline{a}=\ddot{x}\underline{i}+\ddot{y}\underline{j}+\ddot{z}\underline{k}$$

$$\boxed{\sum F_x = ma_x = m\ddot{x} \qquad \sum F_y = ma_y = m\ddot{y} \qquad \sum F_z = ma_z = m\ddot{z}}$$

معادلات دینامیکی حرکت ذره مادی در دستگاه مختصات دکارتی (x,y)

$$\boxed{\sum F_x = ma_x = m\ddot{x}} \qquad \boxed{\sum F_y = ma_y = m\ddot{y}}$$

۴-۳ معادلات دینامیکی حرکت در دستگاه مختصات استوانه ای و قطبی



$$\underline{F}_1 = F_{1r}\underline{e}_r + F_{1\theta}\underline{e}_\theta + F_{1z}\underline{e}_z$$
$$\underline{F}_2 = F_{2r}\underline{e}_r + F_{2\theta}\underline{e}_\theta + F_{2z}\underline{e}_z$$
$$. \quad = \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad = \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad = \quad . \quad . \quad .$$

$$\sum \underline{F} = (F_{1r} + F_{2r} + \ldots)\underline{e}_r + (F_{1\theta} + F_{2\theta} + \ldots)\underline{e}_\theta + (F_{1z} + F_{2z} + \ldots)\underline{e}_z$$
$$\sum \underline{F} = \sum F_r \underline{e}_r + \sum F_\theta \underline{e}_\theta + \sum F_z \underline{e}_z$$

$$\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z$$ $\underline{a}$: بردار شتاب حاصل از عملکرد نیروها

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \rightarrow \sum F_r \underline{e}_r + \sum F_\theta \underline{e}_\theta + \sum F_z \underline{e}_z = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z)$$

$$\sum F_r = ma_r \qquad \sum F_\theta = ma_\theta \qquad \sum F_z = ma_z$$

$$\boxed{\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_\theta + \ddot{z}\underline{e}_z}$$

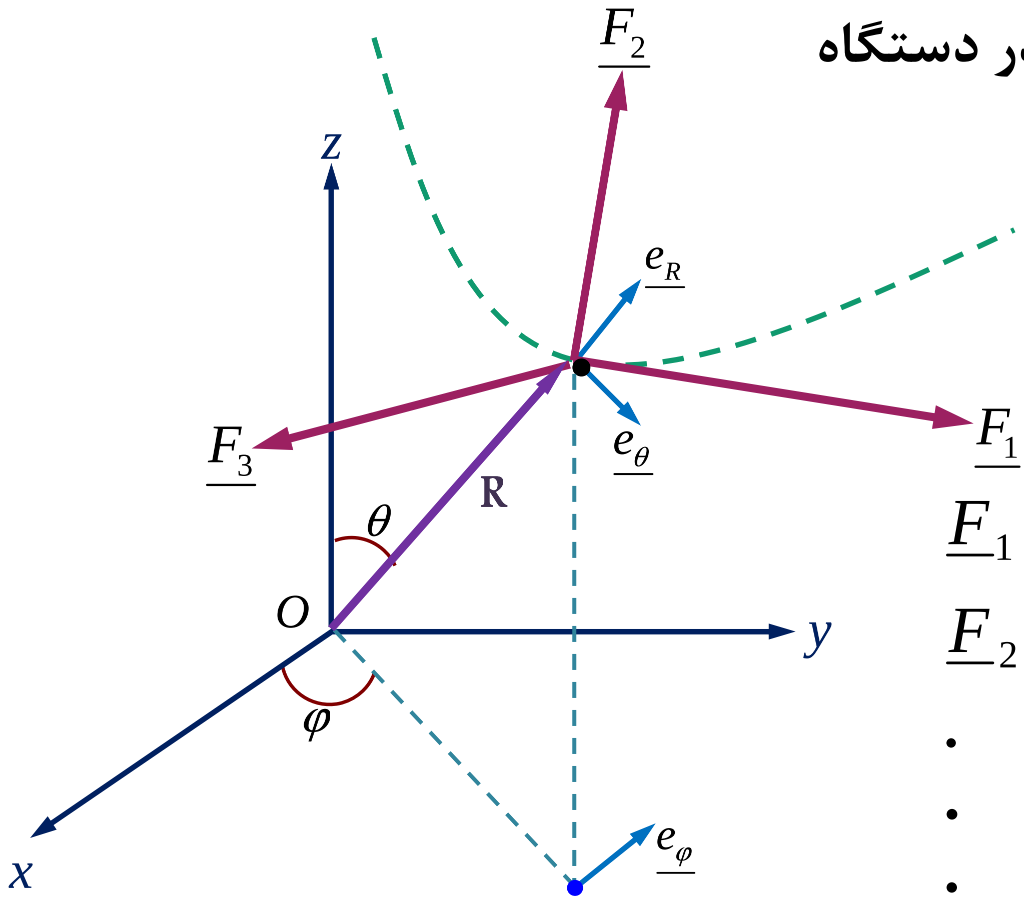
$$\boxed{\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)} \qquad \boxed{\sum F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}$$

$$\boxed{\sum F_z = ma_z = m\ddot{z}}$$

معادلات دینامیکی حرکت ذره مادی در دستگاه قطبی:

$$\boxed{\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)} \qquad \boxed{\sum F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}$$

۴-۴ معادلات دینامیکی حرکت در دستگاه مختصات کروی



$$\underline{F}_1 = F_{1R}\underline{e}_R + F_{1\theta}\underline{e}_\theta + F_{1\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{F}_2 = F_{2R}\underline{e}_R + F_{2\theta}\underline{e}_\theta + F_{2\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$\cdot \quad = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum \underline{F} = (F_{1R} + F_{2R} + \ldots)\underline{e}_R + (F_{1\theta} + F_{2\theta} + \ldots)\underline{e}_\theta + (F_{1\varphi} + F_{2\varphi} + \ldots)\underline{e}_\varphi$$

$$\sum \underline{F} = \sum F_R \underline{e}_R + \sum F_\theta \underline{e}_\theta + \sum F_\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{a} = a_R \underline{e}_R + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\varphi \underline{e}_\varphi$$

a: بردار شتاب حاصل از عملکرد نیروها

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \to \sum F_R \underline{e}_r + \sum F_\theta \underline{e}_\theta + \sum F_\varphi \underline{e}_\varphi = m(a_r \underline{e}_R + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\varphi \underline{e}_\varphi)$$

$$\sum F_R = ma_R \qquad \sum F_\theta = ma_\theta \qquad \sum F_\varphi = ma_\varphi$$

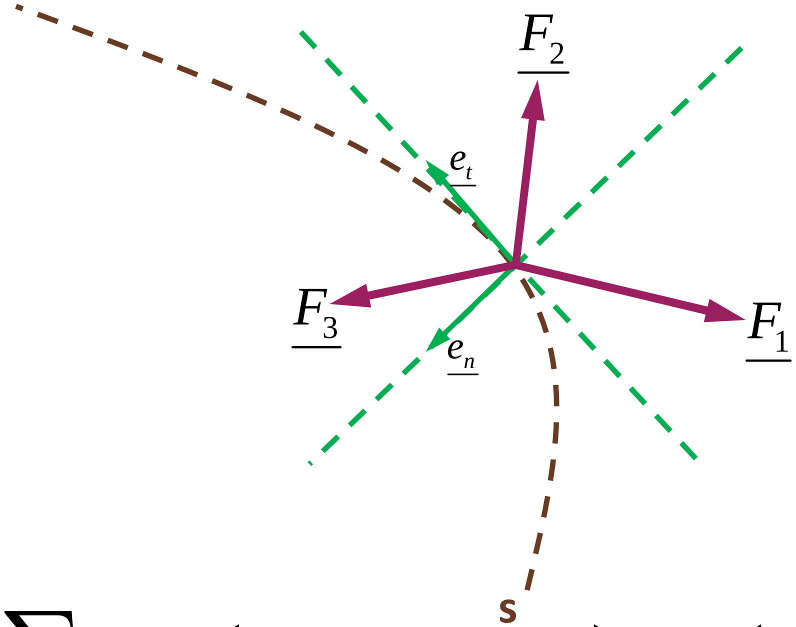
$$\underline{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)\underline{e}_R + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta)\underline{e}_\theta + (2\dot{R}\dot{\varphi}\sin\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + R\ddot{\varphi}\sin\theta)\underline{e}_\varphi$$

$$\sum F_R = m(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)$$

$$\sum F_\theta = m(2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta)$$

$$\sum F_\phi = m(2\dot{R}\dot{\phi}\sin\theta + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + R\ddot{\phi}\sin\theta)$$

۴-۵ معادلات دینامیکی حرکت در دستگاه قائم و مماسی



$$\underline{F}_1 = F_{1t}\underline{e}_t + F_{1n}\underline{e}_n$$

$$\underline{F}_2 = F_{2t}\underline{e}_t + F_{2n}\underline{e}_n$$

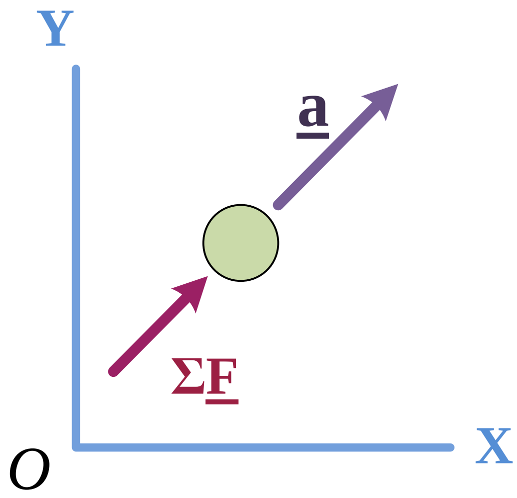
$$\begin{array}{cccc} . & = & . & . \\ . & = & . & . \\ . & = & . & . \end{array}$$

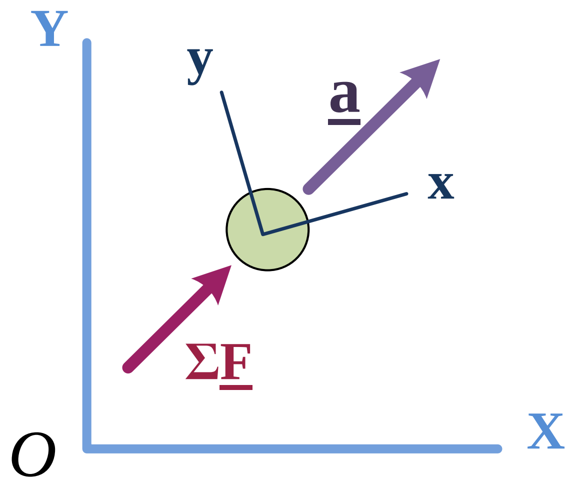
$$\sum \underline{F} = (F_{1t} + F_{2t} + \ldots)\underline{e}_t + (F_{1n} + F_{2n} + \ldots)\underline{e}_n = \sum F_t\underline{e}_t + \sum F_n\underline{e}_n$$

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \rightarrow \sum F_t\underline{e}_t + \sum F_n\underline{e}_n = m(a_t\underline{e}_t + a_n\underline{e}_n)$$

$$\boxed{\sum F_t = ma_t = m\dot{v} = m\ddot{s}} \qquad \boxed{\sum F_n = ma_n = mv^2/\rho}$$

۴-۶ اصل دالامبر



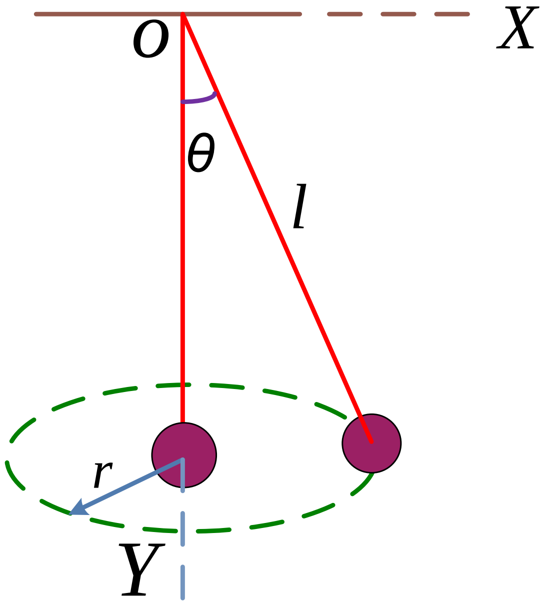


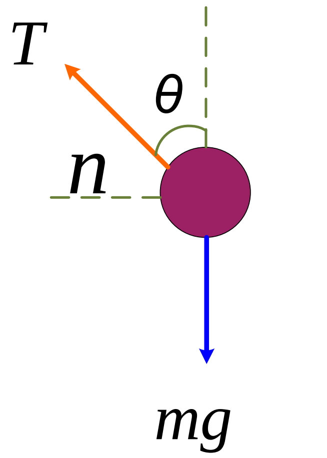
$$\sum \underline{F} = m\underline{a}$$

تحلیل استاتیکی:

$$\sum \underline{F} - m\underline{a} = 0$$

برای مثال:



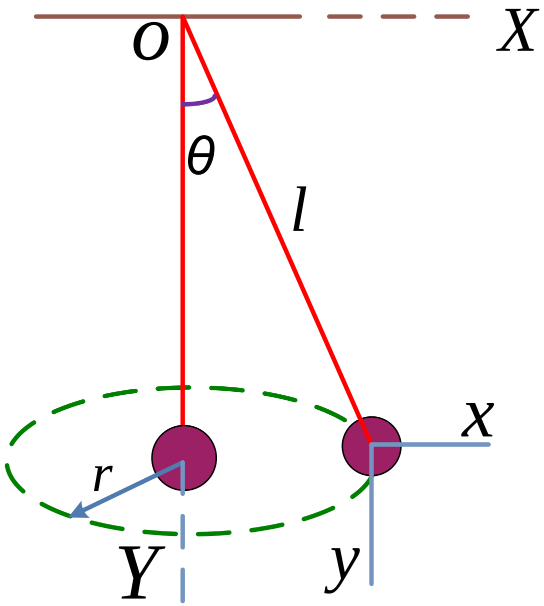


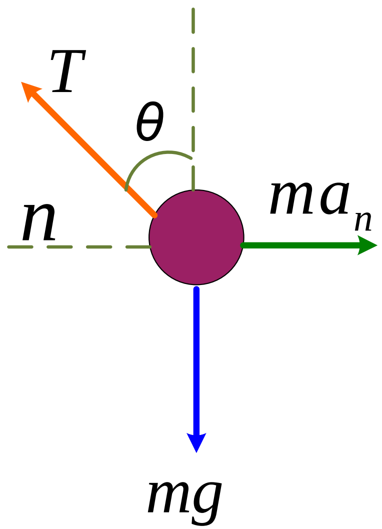
$$T\cos\theta - mg = 0$$

$$\sum F_n = ma_n$$

$$T\sin\theta = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

با استفاده از اصل دالامبر :





$$T\cos\theta - mg = 0$$

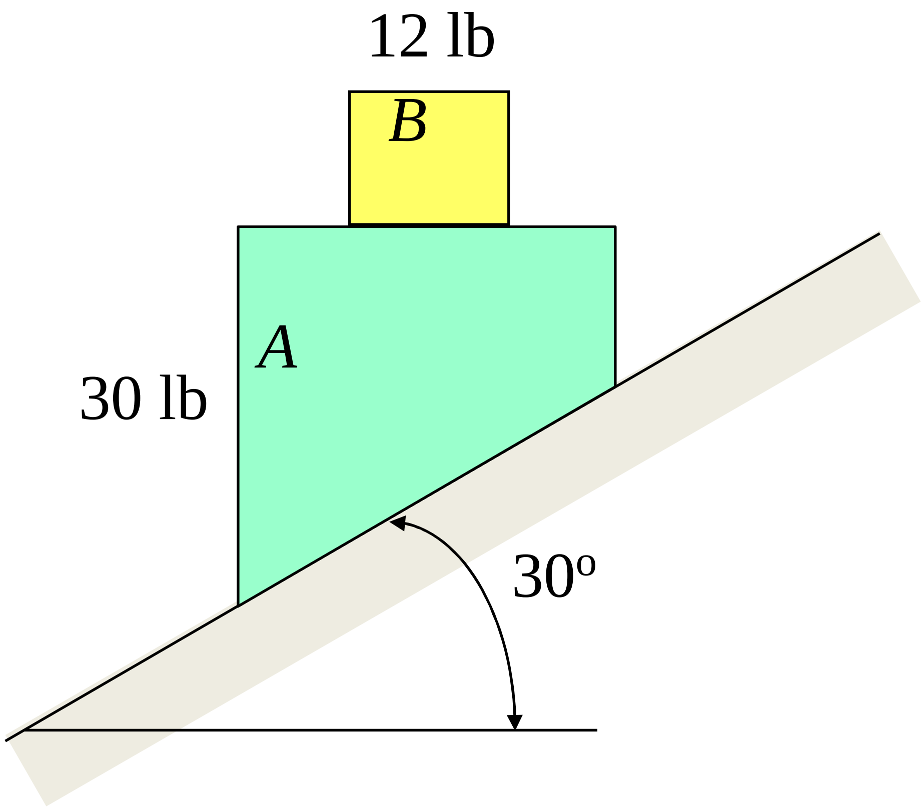
$$\sum F_n - ma_n = 0$$

$$T\sin\theta - ma_n = 0$$

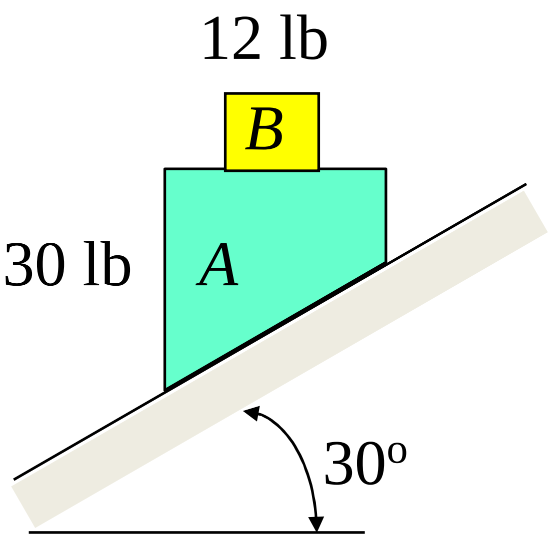
$$T\sin\theta - m\frac{V^2}{r} = 0$$

مسایل

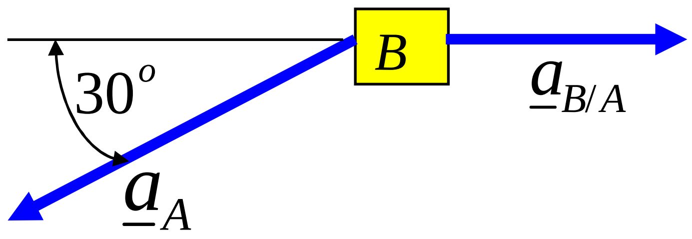
مثال: جسم B به جرم 12-Ib مطابق شکل بروی گوه A به جرم 30-Ib قرار دارد.چنانچه از اصطکاک صرفنظر شود مطلوبست: (a) شتاب B نسبت به A   (b) شتاب مطلق A بلافاصله بعد از اینکه سیستم از حالت سکون رها گردد.

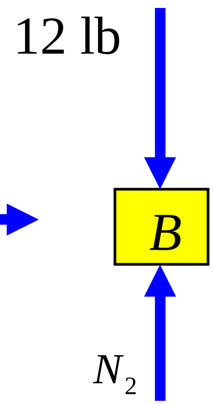


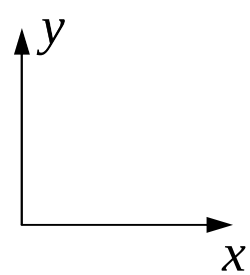
بهنگامیکه قطعه A روی سطح شیبدار پایین میآید
قطعه B نسبت به قطعه A شتاب $\underline{a}_{B/A}$ را پیدا میکند
در اینصورت داریم:



$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{B/A}$$

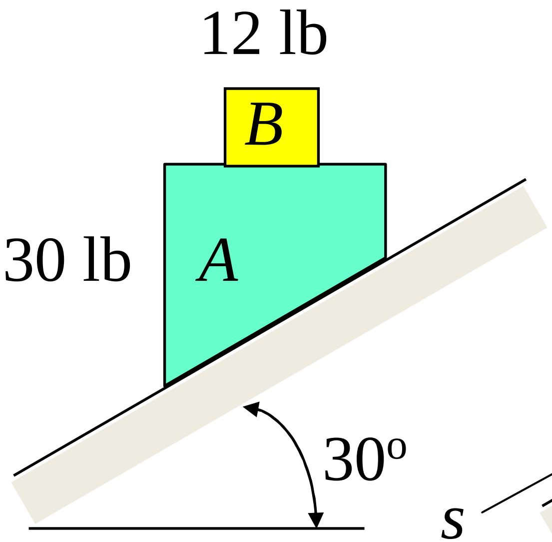


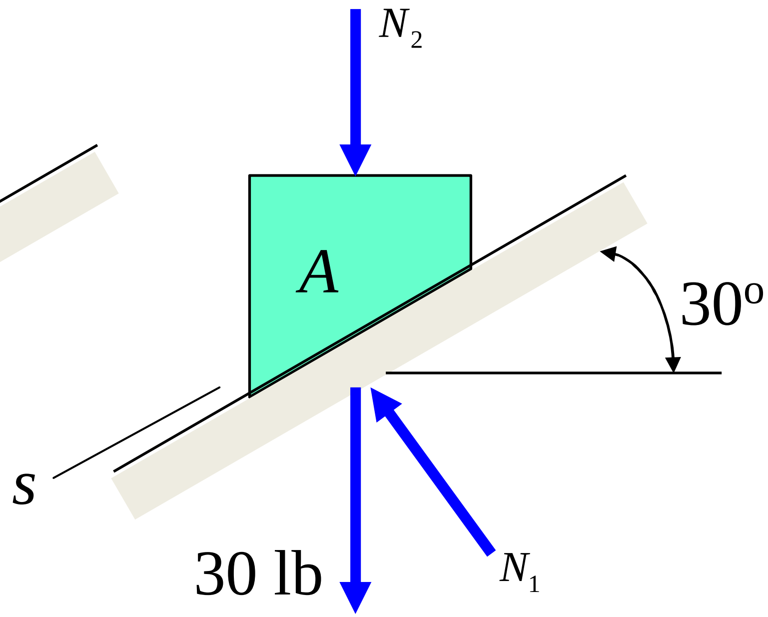




$$\sum F_x = m_B(a_{B/A} - a_A \cos 30^o) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{B/A} = a_A \cos 30^o \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = m_B a_A \sin 30^o = 12 - N_2 \quad \Rightarrow \quad 12 - N_2 = \frac{12}{32.2} a_A \sin 30^o \qquad (۲)$$



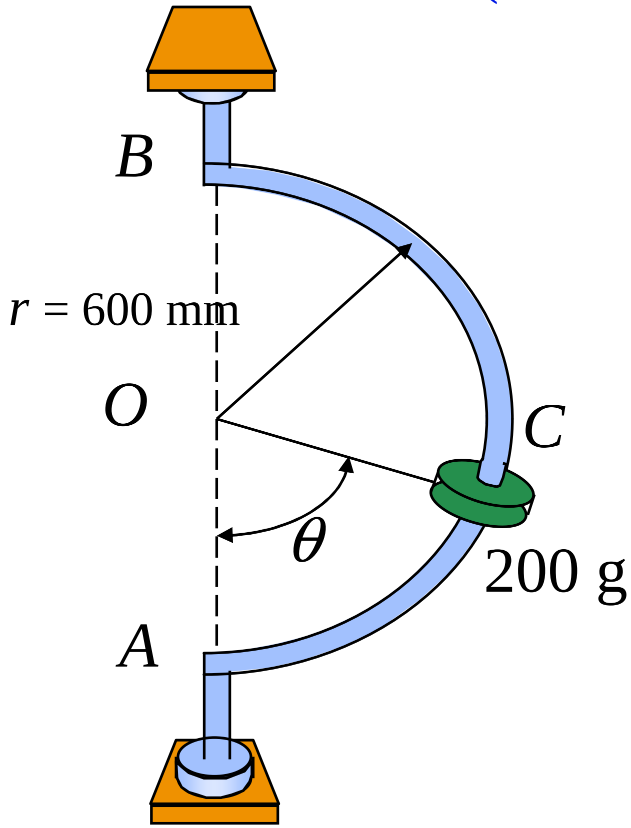


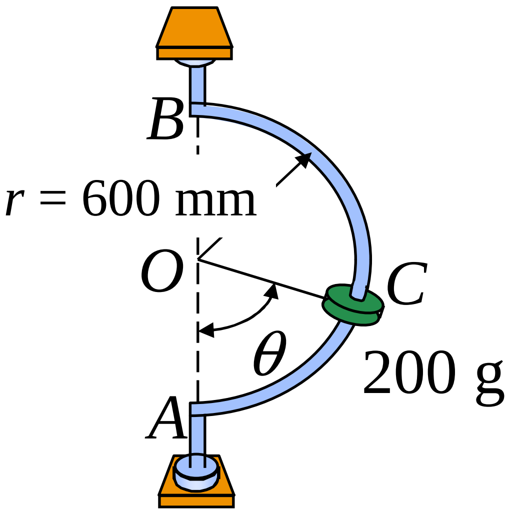
$$\sum F_s = m_A a_A \quad \Longrightarrow \quad (N_2 + 30)\sin 30^o = \frac{30}{32.2} a_A \quad (۳)$$

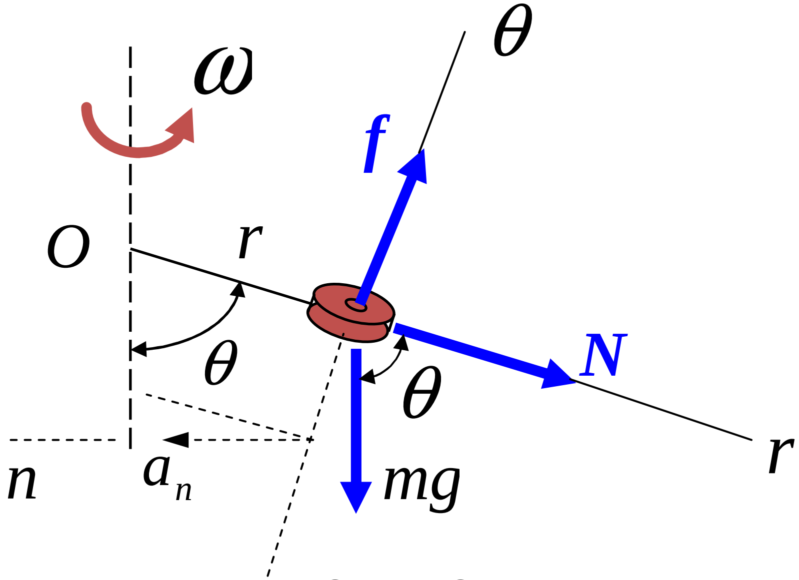
از حل معادلات (۱) و(۲) و (۳)

$$a_A = 20.5\, ft/s^2 \qquad a_{B/A} = 17.75\, ft/s^2$$

مثال: قطعه 200 گرمی C روی یک میله نیمدایره ای که با سرعت ثابت 6 rad/s حول قایم AB می چرخد میتواند بلغزد. مطلوبست تعیین کمترین ضریب اصطکاک استاتیکی مابین قطعه C و میله نیمدایره ای جهت عدم لغزش قطعه برای حالات $(\theta = 90^0, \theta = 75^0, \theta = 45^0)$.







$$a_n = (r\sin\theta)\omega^2 \quad a_r = a_n \sin\theta = r\omega^2 \sin^2\theta$$

$$a_\theta = a_n \cos\theta = r\omega^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -N - mg\cos\theta = mr\omega^2 \sin^2\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{N = -m(g\cos\theta + r\omega^2 \sin^2\theta)}$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow mg\sin\theta - f = mr\omega^2 \sin\theta\cos\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{f = m(g - r\omega^2\cos\theta)\sin\theta}$$

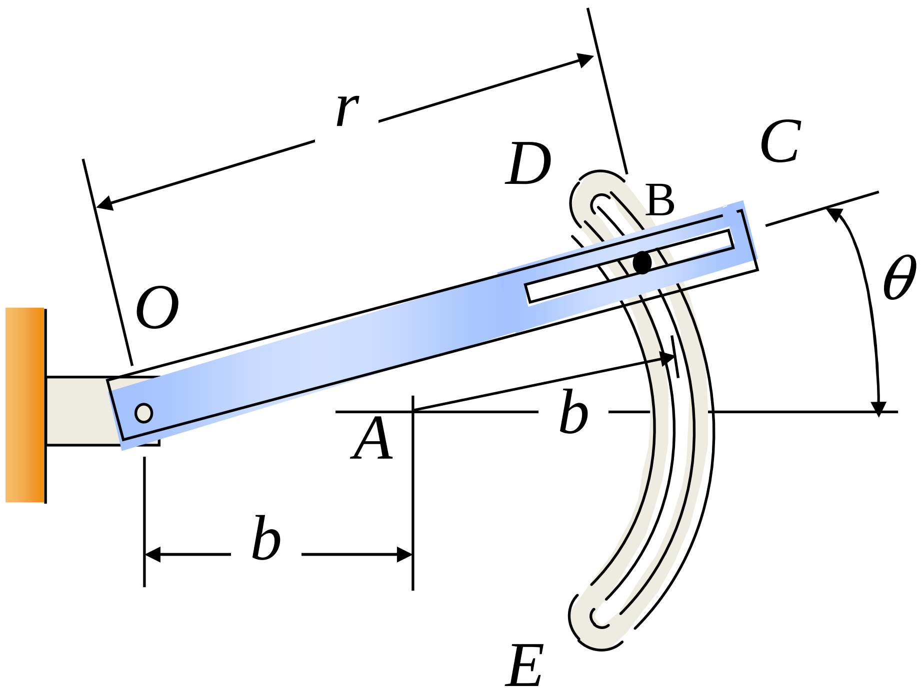
$$\boxed{\mu = f / N}$$

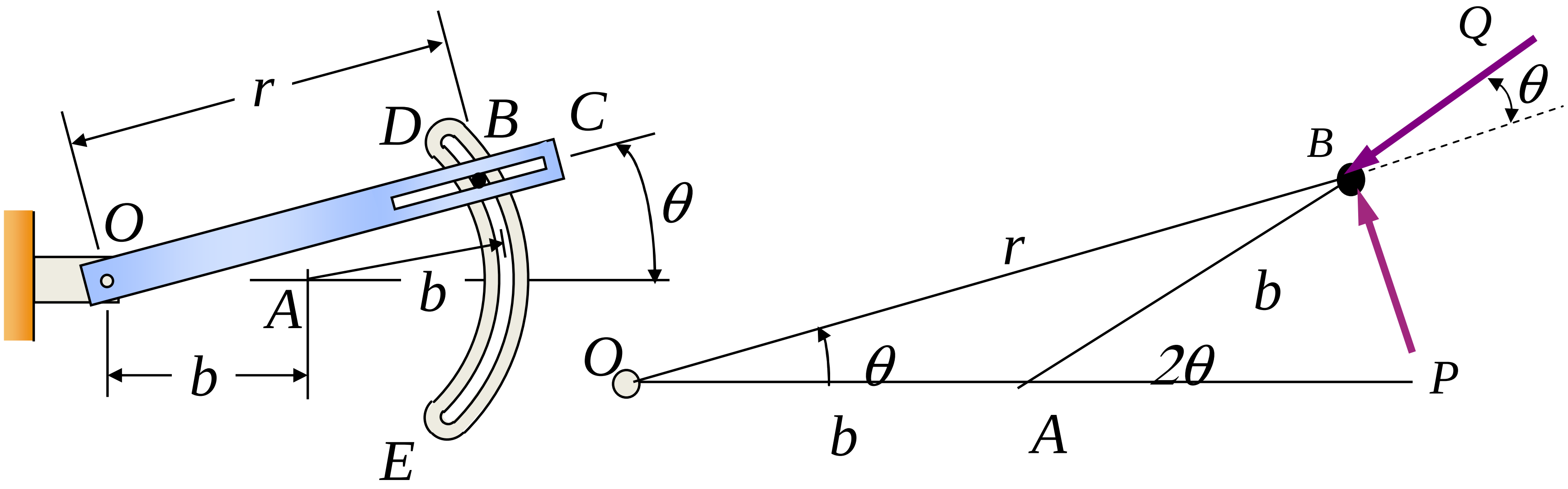
$$\theta = 90^o \quad f = 1.962\,N \quad N = -4.32\,N \quad \mu = 0.454$$

$$\theta = 75^o \quad f = 0.815\,N \quad N = -4.54\,N \quad \mu = 0.1796$$

$$\theta = 45^o \quad f = -0.773\,N \quad N = -3.55\,N \quad \mu = 0.218$$

مثال: پین B بجرم m میتواند در صفحه افقی بطور آزاد در امتداد بازوی گردنده OC و امتداد کشوی دایره ای DE بشعاع bبلغزد. مطلوبست تعیین مولفه های نیروهای وارده بر پین از طرف بازوی OC وکشوی دایره ای DE در امتداد شعاع b و جهت θ.





$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -Q\cos\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad r = 2b\cos\theta$$

$$\dot{r} = -2b\dot{\theta}\sin\theta \qquad \ddot{r} = -2b\ddot{\theta}\sin\theta - 2b\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\boxed{\sum F_r = Q\cos\theta = 2mb(\ddot{\theta}\sin\theta + 2\dot{\theta}^2\cos\theta)}$$

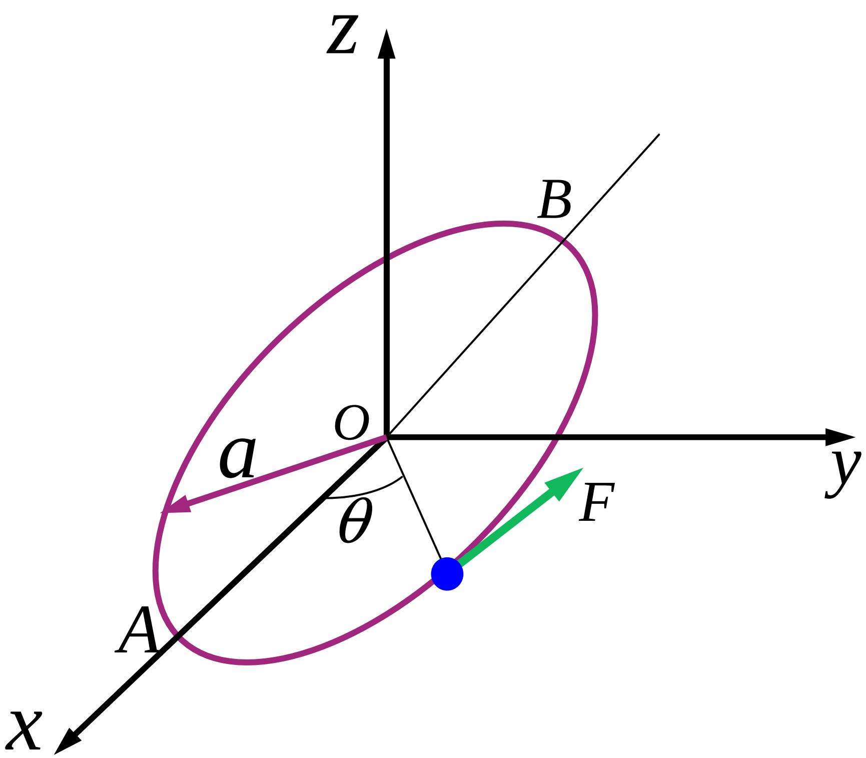
$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow P - Q\sin\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

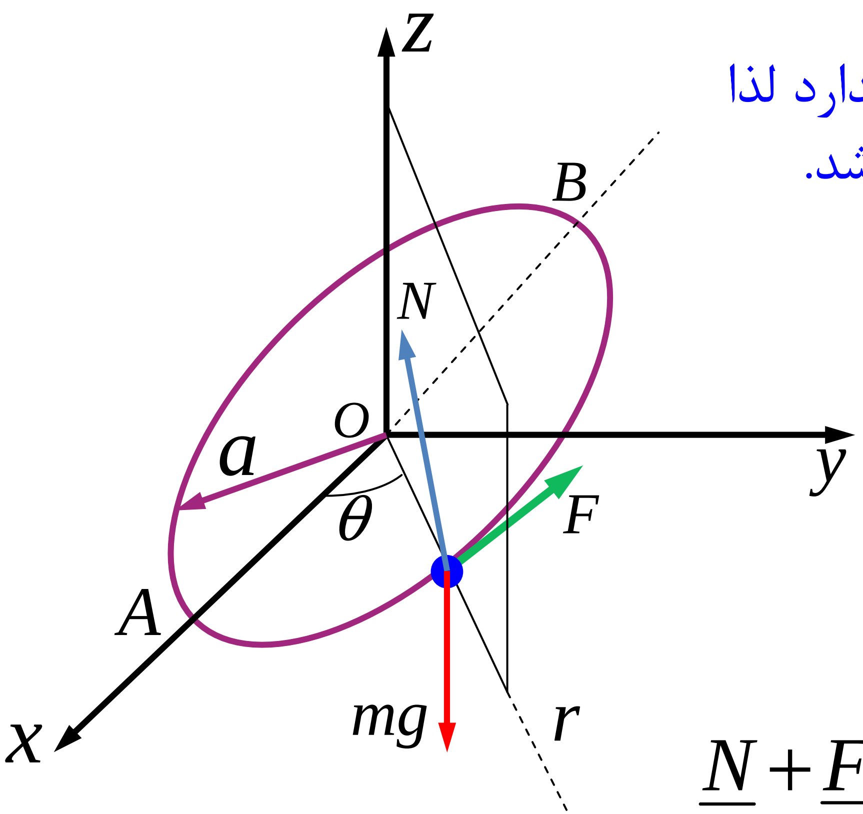
$$\boxed{\sum F_\theta = P - Q\sin\theta = 2mb(\ddot{\theta}\cos\theta - 2\dot{\theta}^2\sin\theta)}$$

$$\boxed{Q = 2mb(\ddot{\theta}\tan\theta + 2\dot{\theta}^2)}$$

$$\boxed{P = 2mb\ddot{\theta} / \cos\theta}$$

مثال: مهره ای به جرم m روی مفتول دایره ای شکل و بدون اصطکاک به شعاع a که در صفحه افقی قرار دارد از حالت سکون و از نقطه ی A تحت تأثیر نیروی مماسی ثابت F شروع به حرکت می کند. مطلوبست تعیین نیروی عکس العمل بین مهره و مفتول در نقطه B .





از آنجاییکه درامتداد θ اصطکاک وجود ندارد لذا
نیروی عکس العمل در صفحه (r,z) میباشد.

$$\underline{N} = N_r \underline{e}_r + N_z \underline{e}_z$$

$$\underline{F} = F\underline{e}_\theta \qquad \underline{w} = -mg\,\underline{e}_z$$

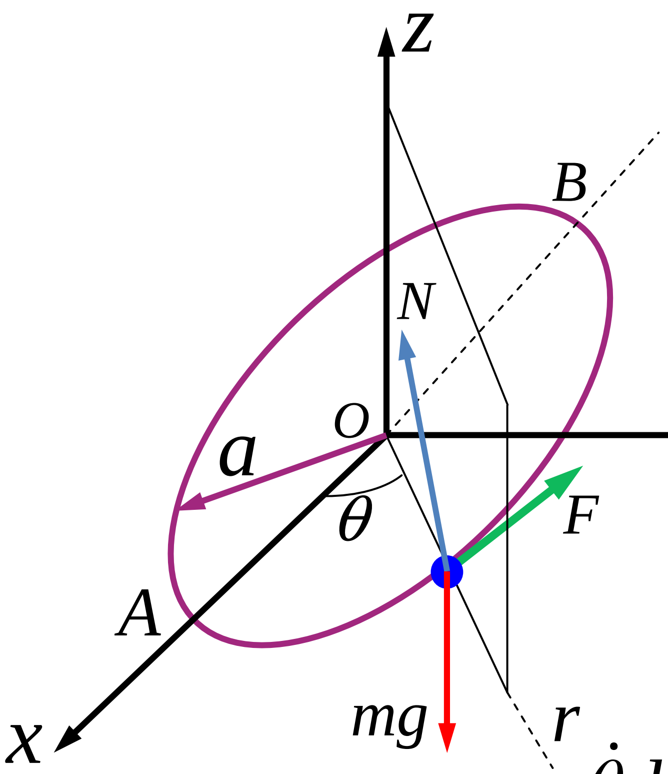
$$\sum \underline{F} = m\underline{a}$$

$$\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z$$

$$\underline{N} + \underline{F} + \underline{w} = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z)$$

$$N_r \underline{e}_r + F\,\underline{e}_\theta + (N_z - mg)\underline{e}_z = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z)$$

$$\begin{cases} N_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -ma\dot{\theta}^2 & (I) \\ F = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = ma\ddot{\theta} & (II) \\ N_z - mg = ma_z = m(\ddot{z}) & (III) \end{cases} \qquad \begin{cases} r = a \\ \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} N_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -ma\dot{\theta}^2 & (I) \\ F = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = ma\ddot{\theta} & (II) \\ N_z - mg = ma_z = m(\ddot{z}) & (III) \end{cases}$$

$$\ddot{z} = 0 \rightarrow N_z = mg$$

$$I) \rightarrow N_r = -ma\dot{\theta}^2$$

$$II) \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{F}{ma}$$

$$\dot{\theta}d\dot{\theta} = \ddot{\theta}d\theta = \frac{F}{ma}d\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{F}{ma}\int_0^{\theta} d\theta \qquad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{F}{ma}\theta \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2F}{ma}\theta \qquad N_r = -2F\theta$$

$$\boxed{\underline{N} = -2F\,\theta \underline{e}_r + mg\underline{e}_z}$$

B در نقطه $\theta = \pi$

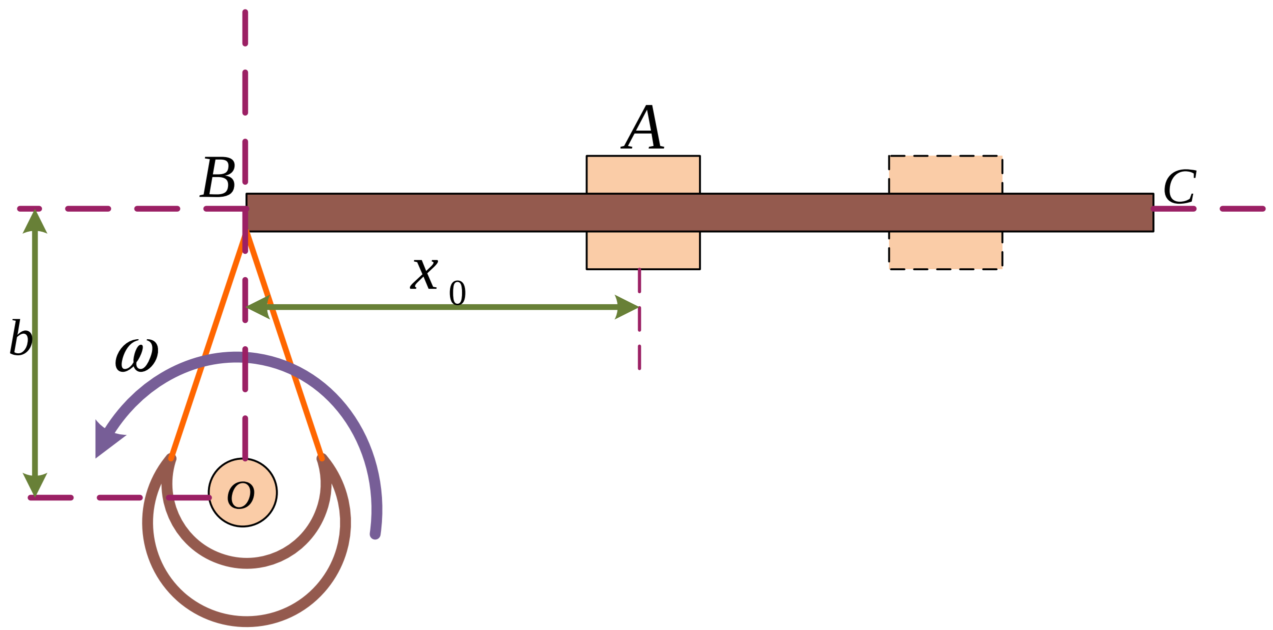
$$\boxed{\underline{N} = -2\pi F\ \underline{e}_r + mg\underline{e}_z}$$

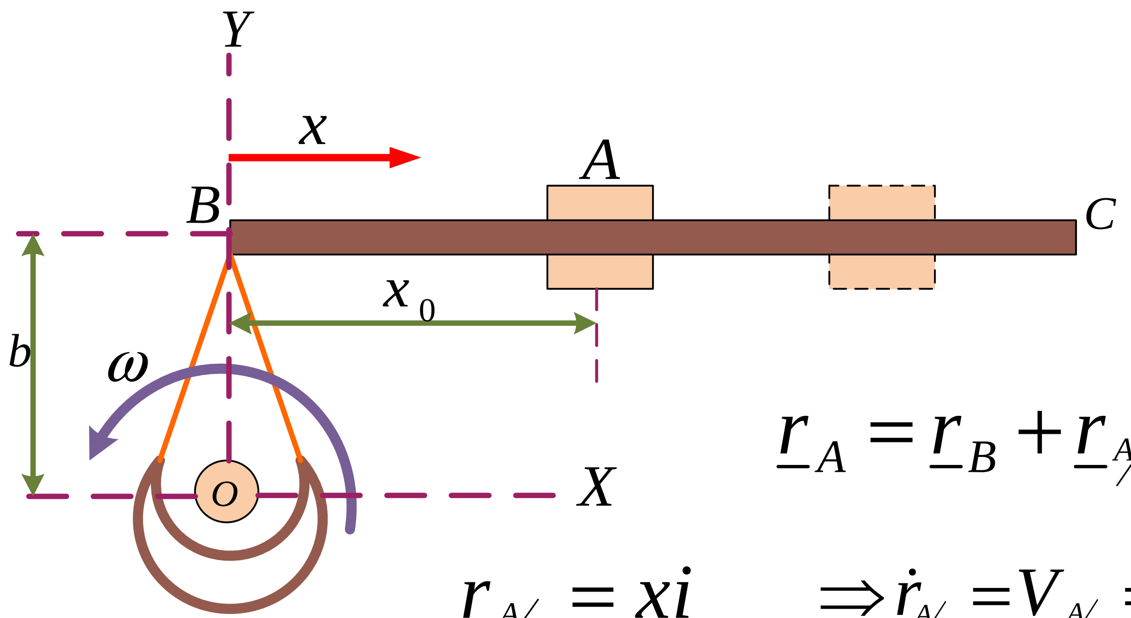
$$\boxed{N = \sqrt{4\pi^2 F^2 + m^2 g^2}}$$

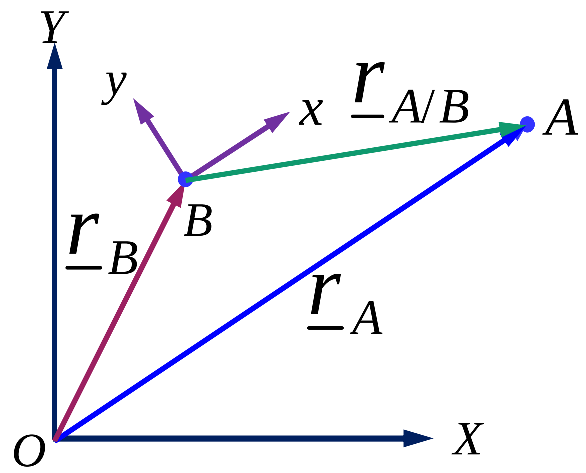
مثال: لغزنده A از حالت سکون از وضعیت $x = x_0$ در طول میله BC شروع به حرکت می کند. بازوی OB در نقطه B به میله BC متصل بوده و با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور قائمی که از یاتاقان ثابتی در O می گذرد دوران می کند. حرکت را در صفحه افقی فرض کرده و از اصطکاک مابین میله و لغزنده صرف نظر می کنیم. مطلوب است

الف) نیروی اعمال شده توسط میله بر لغزنده

ب) مسافت x به صورت تابعی از زمان.







$$\underline{r}_A = \underline{r}_B + \underline{r}_{A/B}$$

$$\underline{r}_{A/B} = x\underline{i} \qquad \Rightarrow \dot{\underline{r}}_{A/B} = \underline{V}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + x\dot{\underline{i}} \qquad \underline{\omega} = \omega\underline{k}$$

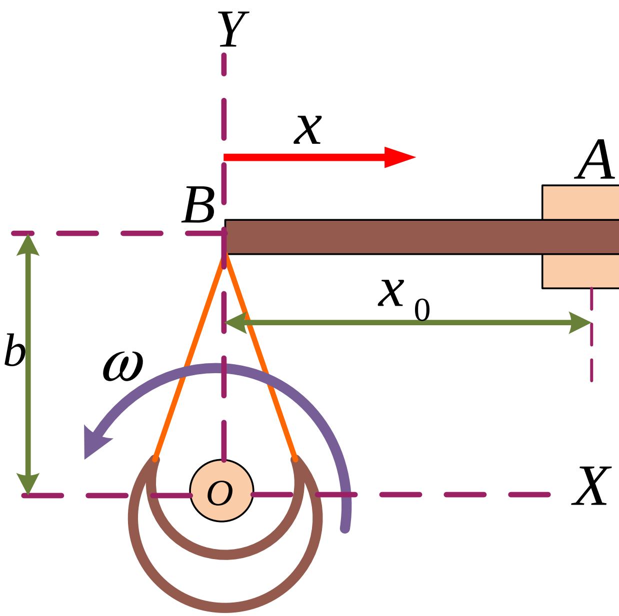
$$\dot{\underline{i}} = \underline{\omega}\times\underline{i} = \omega(\underline{k}\times\underline{i}) = \omega\underline{j} \qquad \underline{V}_{A/B} = \dot{x}\underline{i} + x\dot{\underline{i}} = \dot{x}\underline{i} + x\omega\,\underline{j}$$

$$\underline{a}_{A/B} = \dot{\underline{V}}_{A/B} = \ddot{x}\underline{i} + \dot{x}\dot{\underline{i}} + \dot{x}\omega\,\underline{j} + x\dot{\omega}\,\underline{j} + x\omega\,\dot{\underline{j}}$$

$$\boxed{\underline{a}_{A/B} = \left(\ddot{x} - x\omega^2\right)\underline{i} + 2\dot{x}\omega\,\underline{j}}$$

$$\underline{r}_B = b\,\underline{j} \qquad \Rightarrow \underline{V}_B = \dot{\underline{r}}_B = b\,\dot{\underline{j}} = \text{-}b\omega\underline{i}$$

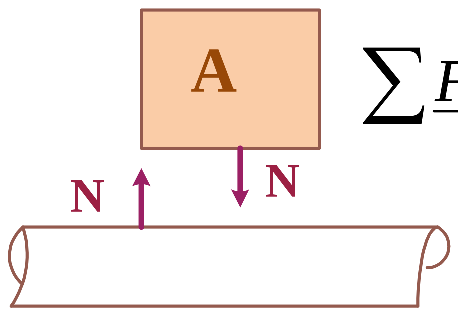
$$\underline{a}_B = \dot{\underline{V}}_B = \text{-}b\dot{\omega}\underline{i} - b\omega\dot{\underline{i}} = -b\omega^2\,\underline{j} \qquad \boxed{\underline{a}_B = -b\omega^2\,\underline{j}}$$



$$\underline{a}_{A/B} = \left(\ddot{x} - x\omega^2\right)\underline{i} + 2\dot{x}\omega\,\underline{j}$$

$$\underline{a}_B = -b\omega^2\,\underline{j}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{a}_A = \left(\ddot{x} - x\omega^2\right)\underline{i} + \left(2\dot{x}\omega - b\omega^2\right)\underline{j}}$$



$$\sum \underline{F} = m\underline{a}_A \quad \rightarrow \quad -N\,\underline{j} = m(\ddot{x} - x\omega^2)\underline{i} + m(2\dot{x}\omega - b\omega^2)\underline{j}$$

$$\begin{cases} 0 = \ddot{x} - x\omega^2 \\ -N = m\left(2\dot{x}\omega - b\omega^2\right) \end{cases} \qquad x = A\sinh\omega t + B\cosh\omega t$$

$$x = A\sinh\omega t + B\cosh\omega t$$

$$\dot{x} = A\omega\cosh\omega t + B\omega\sinh\omega t$$

$$t=0 \qquad \left(x=x_0 \quad , \quad \dot{x}=0\right) \qquad \Rightarrow \quad A=0 \quad , \quad B=x_0$$

$$\boxed{x = x_0\cosh\omega t}$$

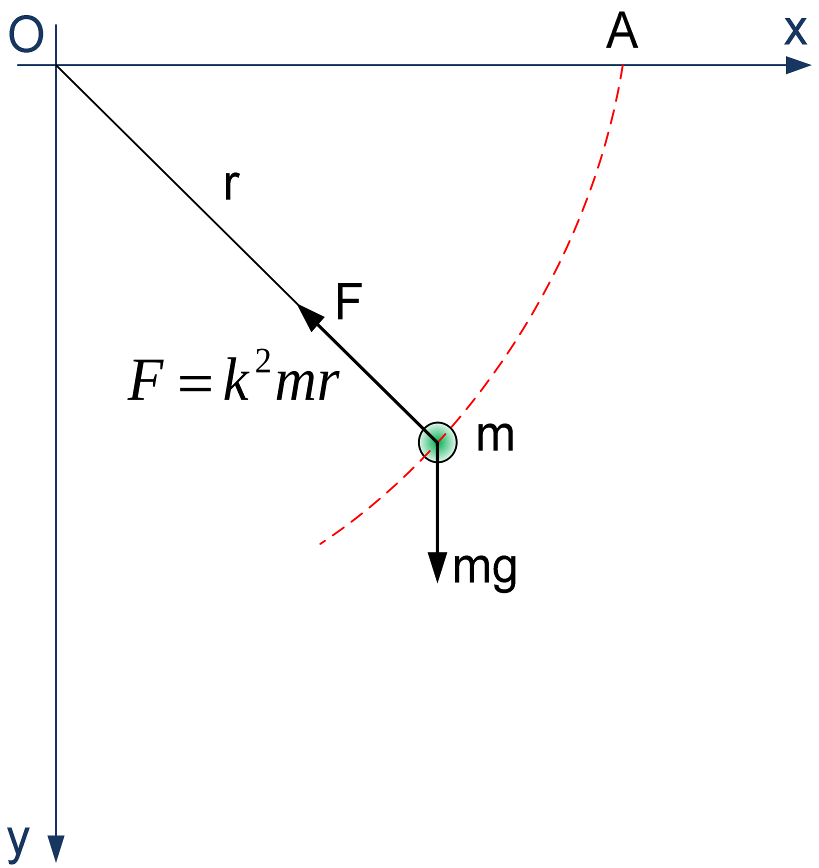
$$-N = m\left(2\dot{x}\omega - b\omega^2\right)$$

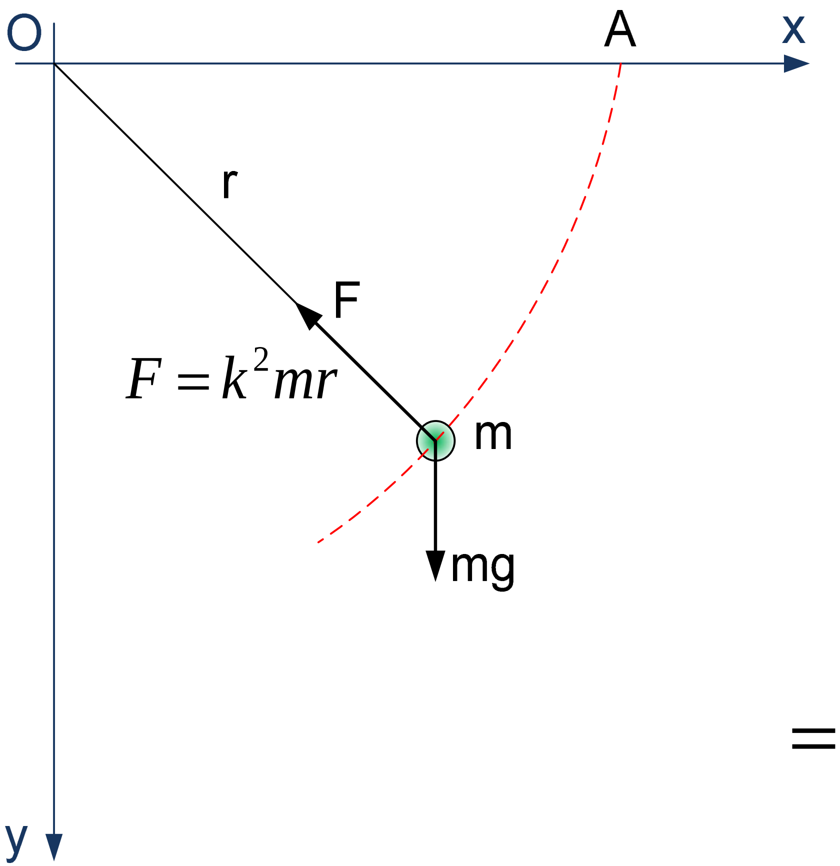
$$N = -m\left(2x_0\omega^2\sinh\omega t - b\omega^2\right) = -m\omega^2\left(2x_0\sinh\omega t - b\right)$$

$$\cosh\omega t = \frac{x}{x_0} \qquad \cosh^2\omega t - \sinh^2\omega t = 1 \qquad \sinh\omega t = \sqrt{\left(-1+\frac{x^2}{{x_0}^2}\right)}$$

$$\boxed{N = -m\omega^2\left[\left(2\sqrt{x^2 - {x_0}^2}\right) - b\right]}$$

مثال: ذره‌ای به جرم m از موقعیت A به فاصله‌ی OA=b از حالت سکون در صفحه قائم تحت تاثیر نیروی مرکزی با بزرگی $F=K^2mr$ و نیروی وزنش یک حرکت سقوطی انجام می‌دهد، معادله مسیر ذره را تعین کنید.





$$\sum \underline{F} = -F\underline{e}_r + mg\underline{j}$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} = r\underline{e}_r$$

$$\sum \underline{F} = -k^2 mr\underline{e}_r + mg\underline{j}$$

$$= -k^2 m(x\underline{i} + y\underline{j}) + mg\underline{j}$$

$$= -k^2 mx\underline{i} + (mg\underline{j} - k^2 my\underline{j})$$

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}$$

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \quad \Rightarrow -k^2 mx\underline{i} + (mg\underline{j} - k^2 my\underline{j}) = m(\ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j})$$

$$\ddot{x} = -k^2 x \qquad \ddot{y} = g - k^2 y$$

$$\ddot{x}+k^2x=0 \qquad x=c_1\sin kt+c_2\cos kt$$

$$\ddot{y}+k^2y=g \qquad y=c_3\sin kt+c_4\cos kt+\frac{g}{k^2}$$

$$t=0\ ; \quad \begin{cases} x=b & \dot{x}=0 \\ y=0 & \dot{y}=0 \end{cases}$$

$$\dot{x}=c_1k\ \cos kt-c_2k\ \sin kt \qquad b=c_2 \qquad 0=c_1k \Rightarrow c_1=0$$

$$\Rightarrow x=b\cos kt$$

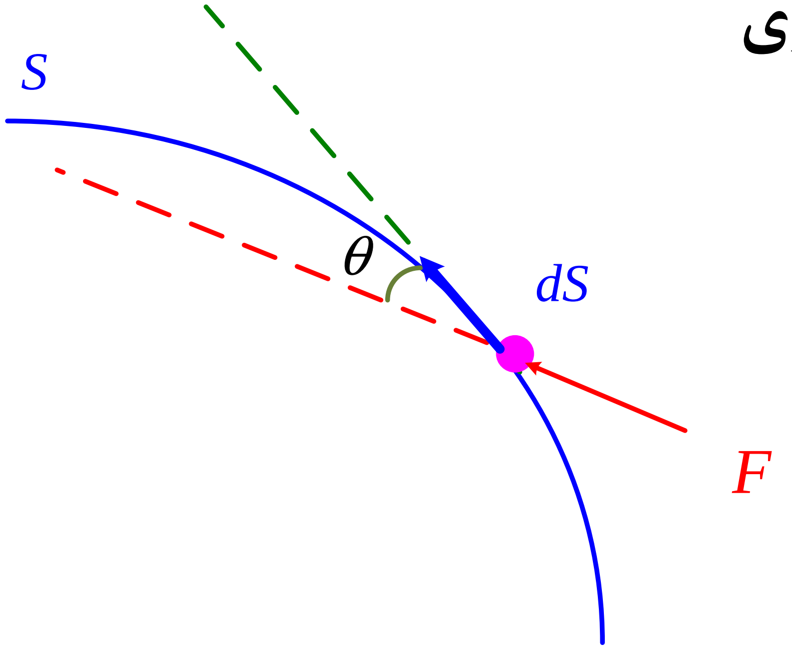
$$\dot{y}=c_3k\ \cos kt-c_4k\ \sin kt \qquad 0=c_4+\frac{g}{k^2}\Rightarrow c_4=-\frac{g}{k^2}$$

$$0=c_3k \Rightarrow c_3=0 \qquad \Rightarrow y=\frac{g}{k^2}(1-\frac{x}{b})$$

$$\Rightarrow y=\frac{g}{k^2}(1-\cos kt)$$

۵-کار و انرژی

۵-۱ مقدمه

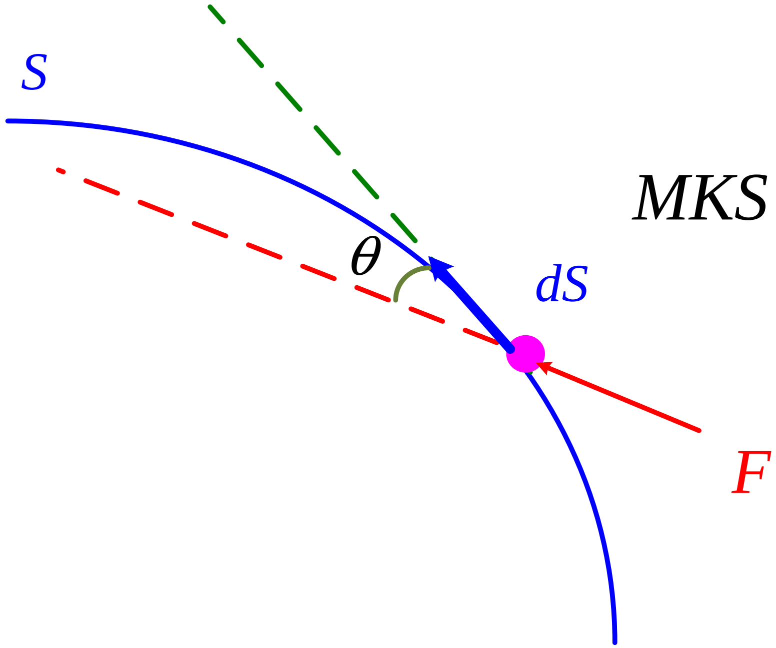


کار انجام شده برابر است با حاصلضرب نیرو در تصویر جابجایی در راستای نیرو

$$dW = \underline{F}.d\,\underline{s} = Fds\cos\theta = F(ds\cos\theta) = (F\cos\theta)ds$$

کار انجام شده برابر است با حاصلضرب جابجایی در تصویر نیرو در راستای جابجایی

واحدها:



$$MKS \rightarrow \begin{cases} F : N \\ dS : m \\ N.m = J \end{cases} \qquad CGS \rightarrow \begin{cases} F : dyne \\ dS : cm \\ dyne.cm = erg \end{cases}$$

$$dW = \underline{F}.d\,\underline{s}$$

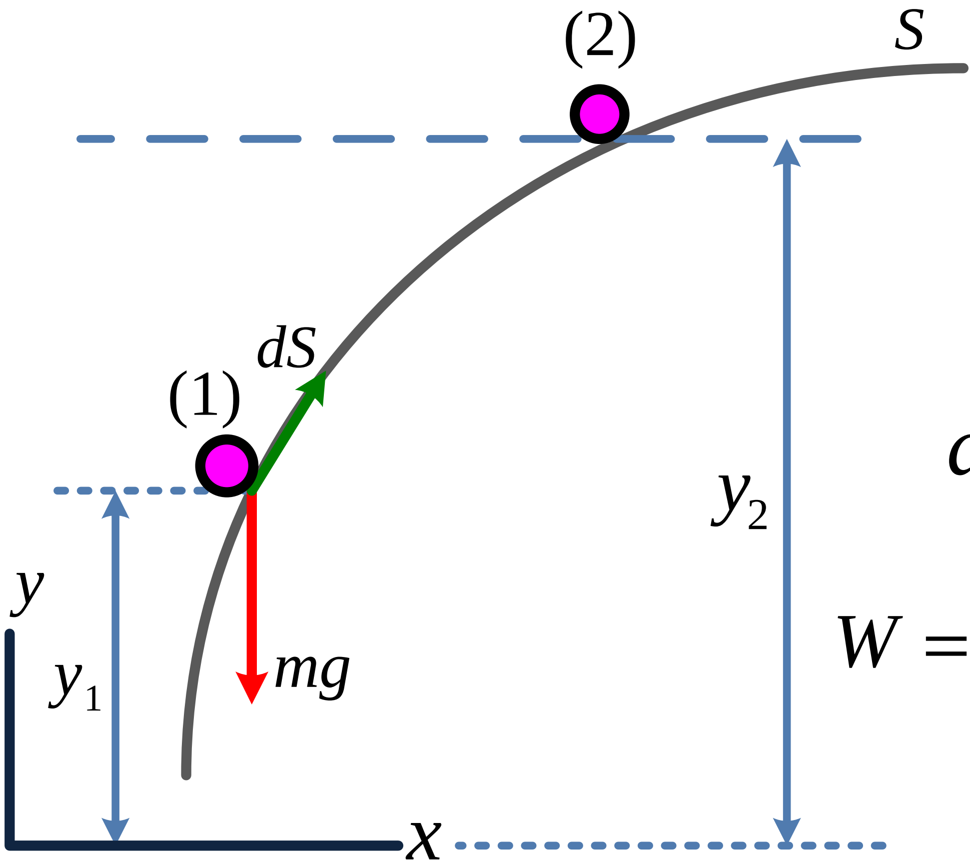
$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$$

$$d\,\underline{s} = dx\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}$$

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \underline{F}.d\,\underline{s}$$

$$\boxed{W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz}$$

۵-۲ کار نیروی ثقلی ثابت



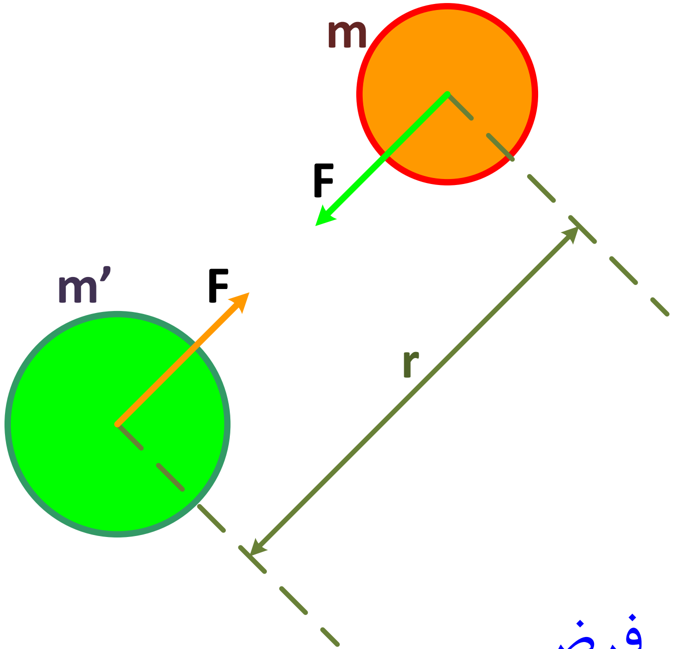
$$\underline{F} = -mg\,\underline{j}$$

$$d\,\underline{s} = dx\underline{i} + dy\,\underline{j}$$

$$dW = \underline{F}.d\,\underline{s} = -mgdy$$

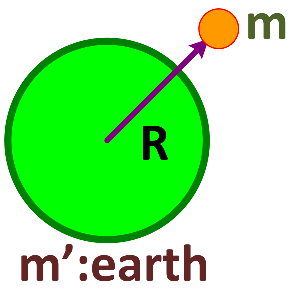
$$W = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1)$$

۵-۳ نیروی ثقلی متغیر



$$F = K\frac{mm'}{r^2}$$

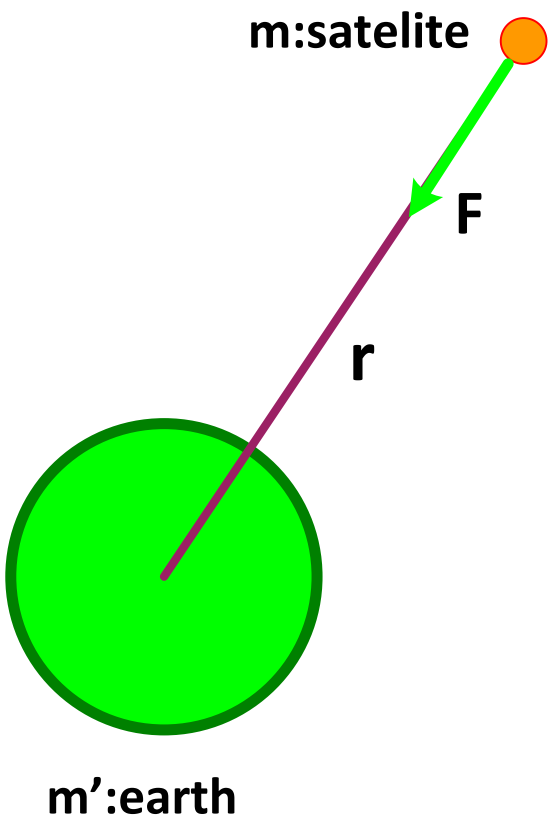
K: ثابت جاذبه عمومی نیوتون



اگر 'm را زمین و m را جرمی در نزدیکی سطح آن فرض کنیم، به علت زیاد بودن شعاع زمین می توان از فاصله جسم نسبت به زمین صرف نظر کرد.

$$F = k\frac{mm'}{R^2} = mg \qquad g = 9.8 \approx 10 \, {}^{m}\!/_{\sec^2}$$

$$\boxed{km' = gR^2}$$



$$F = K\frac{mm'}{r^2} = mg_r$$

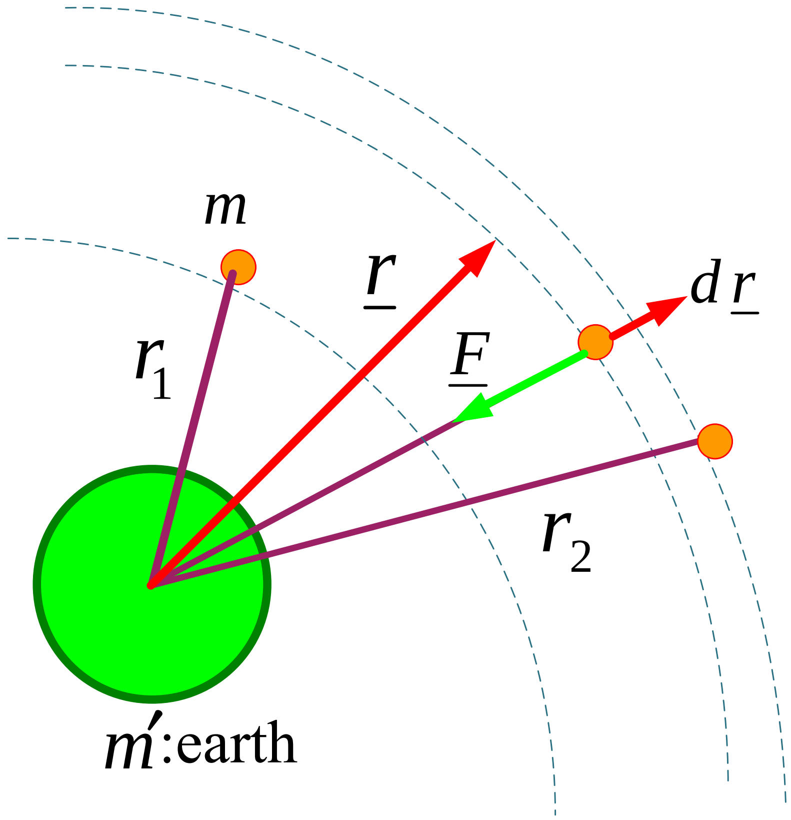
$$g_r = \frac{km'}{r^2} = \frac{gR^2}{r^2} \qquad g_r = f(r)$$

$$F = mg_r = \frac{mgR^2}{r^2}$$

نیروی ثقلی متغیر

$$\boxed{\underline{F} = -mg\frac{R^2}{r^2}\underline{e}_r}$$

۵-۴ کار نیروی ثقلی متغیر



$$\underline{F} = -mg\,\frac{R^2}{r^2}\,\underline{e}_r$$

$$d\,\underline{r} = dr\,\underline{e}_r$$

$$dW = \underline{F}.d\,\underline{r} = -mg\,\frac{R^2}{r^2}\,dr$$

$$W = -mgR^2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -mgR^2\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = mgR^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

۵-۵ سیستم های ابقایی و غیر ابقایی

چنانچه کار نیرویی مستقل از مسیر بوده و فقط تابع وضعیت ابتدایی و انتهایی مسیر باشد، آن نیرو را ابقایی یا conservative می نامند. (مثل نیروی ثقل ثابت و متغیر) . همچنین واژه ی پایستار نیز به کار گرفته می شود..

بالعکس، چنانچه کار نیرویی تابع مسیر باشد آن نیرو را نیروی غیر ابقایی و یا غیر پایستار می خوانند. (non-conservative) مثل نیروی اصطکاک که کارش مستقل از مسیر نیست.

نیروهای پایستار، نیروهای ذخیره کننده ی انرژی هستند و در هر سیستمی که موجود باشند انرژی را ذخیره می کنند. اگر نیروهای وارده بر سیستمی همه از نوع ذخیره کننده انرژی باشند آن سیستم را ابقایی یا conservative میخوانند.

بالعکس نیروهای غیر پایستار مثل نیروی اصطکاک تلف کننده انرژی هستند و در هر سیستمی که باشند انرژی را تلف می کنند. نتیجتاً چنانچه در سیستمی یک یا چند از این نیروها موجود باشد، آن سیستم یک سیستم غیر ابقایی خواهد بود.

۶-۵ انرژی پتانسیل

برای کار نیروهای ابقایی می توان تابع پتانسیل تعریف کرد. بدین معنا که کار نیروی ابقایی را می توان برابر با تغییرات یک تابع پتانسیل مثل U با علامت منفی اختیار کرد.

$$W)_{\text{ابقایی}} = -\Delta U$$

کار نیروی ثقلی ثابت: $W = -mg\,(y_2 - y_1)$

$$W = -mg(y_2 - y_1) = -\Delta U = -(U_2 - U_1)$$

$$mgy_2 - mgy_1 = U_2 - U_1 \rightarrow \begin{cases} U_2 = mgy_2 \\ U_1 = mgy_1 \end{cases} \rightarrow \boxed{U = mgy}$$

کار نیروی ثقلی متغیر: $W = mgR^2(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$

$$mgR^2(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) = -\Delta U = -(U_2 - U_1)$$

$$mg\frac{R^2}{r_2} - mg\frac{R^2}{r_1} = -U_2 + U_1 \rightarrow U_1 = -mg\frac{R^2}{r_1} \quad U_2 = -mg\frac{R^2}{r_2} \quad \boxed{U = -mg\frac{R^2}{r}}$$

علامت منفی در تابع پتانسیل نیروی ثقلی متغیر با توجه بانتخاب سطح مبنا در بی نهایت قابل توجیه است.

$$r \rightarrow \infty \qquad U \rightarrow 0$$

$$dW = -dU$$ به صورت دیفرانسیلی

$$U = f(x, y, z)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad dW = \underline{F}.d\underline{s} \qquad \underline{F} = F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k}$$

$$d\,\underline{s} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k} \qquad dW = \underline{F}.d\,\underline{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$dW = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

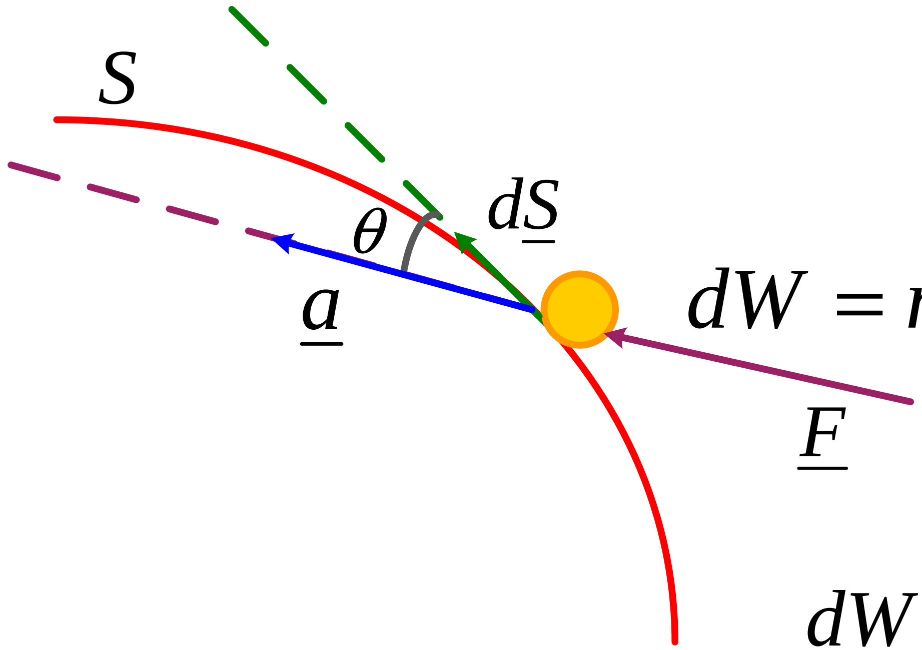
$$\boxed{\underline{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\underline{k}\right) = -\underline{\nabla}U}$$

(grad U) U گرادیان $\underline{\nabla}U$

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

labella (Del)بردار $\underline{\nabla}$

۵-۷ انرژی جنبشی



$$dW = \underline{F}.d\underline{s} = m\underline{a}.d\underline{s}$$

$$dW = mads\cos\theta = m(a\cos\theta)ds$$

مؤلفه شتاب در راستای مماسی

$$dW = ma_t ds = mvdv$$

$$W = m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = T$$ انرژی جنبشی

$$\boxed{W = T_2 - T_1 = \Delta T}$$ معادله ی کار و انرژی

۵-۸ اصل بقای انرژی کل مکانیکی

برای سیستم ابقایی همواره داریم $W = -\Delta U$

برای سیستم خواه ابقایی و خواه غیر ابقایی $W = \Delta T$

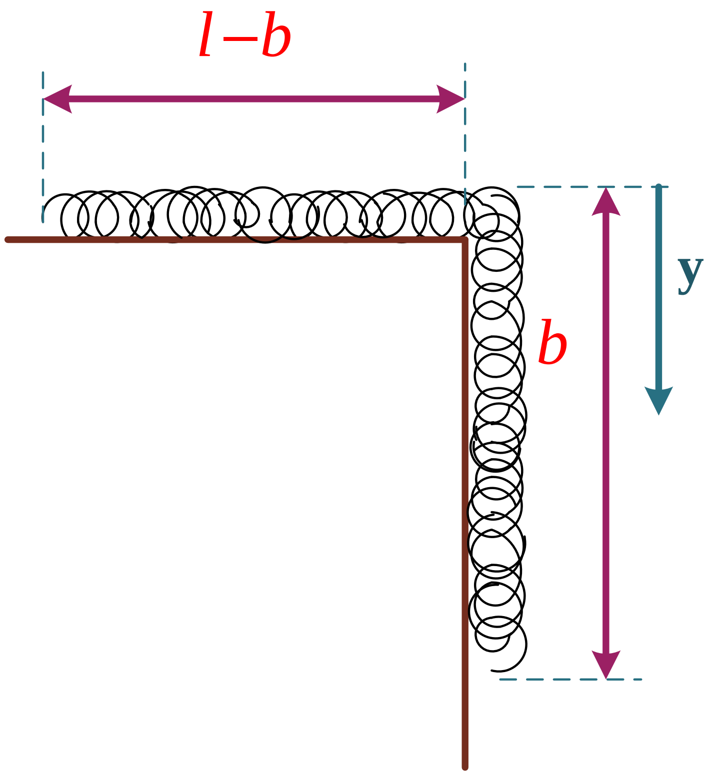
پس اگر سیستم ابقایی باشد $W = -\Delta U = \Delta T$

در این سیستم انرژی تلف نمی شود

$$W = -(U_2 - U_1) = (T_2 - T_1) \to T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \to T + U = cte$$

انرژی کل مکانیکی $\boxed{E_M = T + U}$

مثال: زنجیری در حالت نشان داده شده در شکل از حالت سکون رها می شود. سرعت زنجیر را در لحظه ای که آخرین حلقه لبه را ترک می کند بدست آورید.



جرم کل زنجیر = m

جرم واحد طول زنجیر = m/l

طول آویز زنجیر در هر لحظه = y

جرم طول آویز زنجیر = ym/l

وزن طول آویز زنجیر (یعنی نیرو) = $y\frac{m}{l}g$

روش اول: معادله ی کار و انرژی

$$dw = \underline{F}.d\underline{s} = (y\frac{m}{l}g\,\underline{j}).(dy\,\underline{j}) = \frac{m}{l}gydy$$

$$w = \frac{m}{l}g\int_b^l ydy = \frac{m}{2l}g(l^2 - b^2)$$

$$w = \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{m}{2l}g(l^2 - b^2)$$

$$V^2 = \frac{g}{l}(l^2 - b^2) \rightarrow V = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - b^2)}$$

روش دوم: روش سینماتیکی

$$\sum F = ma \rightarrow \frac{m}{l} gy = ma$$

$$a = \frac{g}{l} y$$

$$VdV = ads = \frac{g}{l} ydy \rightarrow \int_0^v VdV = \frac{g}{l} \int_b^l ydy$$

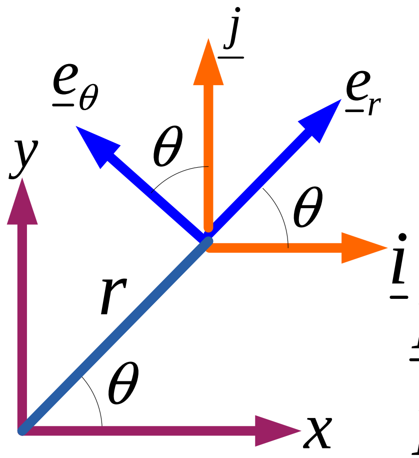
$$\frac{1}{2} V^2 = \frac{g}{2l} (l^2 - b^2) \rightarrow V = \sqrt{\frac{g}{l} (l^2 - b^2)}$$

مثال: انرژی پتانسیل متناظر با یک میدان نیروی دو بعدی از رابطه $U(x,y)=\dfrac{k(x^2+y^2)}{2}$ بدست می آید. که در آن k مقدار ثابت است.

الف) مؤلفه های نیرو را در امتداد y,x بدست آورده آن را به صورت برداری ارائه کنید.

ب) مؤلفه های نیرو را در دستگاه مختصات قطبی تعیین کنید.

$$\underline{F}=-\underline{\nabla}u=-(\frac{\partial U}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\underline{j})=-k(x\underline{i}+y\underline{j})\rightarrow F_x=-kx, F_y=-ky$$



$$\begin{cases}\underline{i}=\cos\theta\underline{e}_r-\sin\theta\underline{e}_\theta\\ \underline{j}=\cos\theta\underline{e}_\theta+\sin\theta\underline{e}_r\end{cases}$$

$$\underline{F}=-kx(\cos\theta\underline{e}_r-\sin\theta\underline{e}_\theta)-ky(\cos\theta\underline{e}_\theta+\sin\theta\underline{e}_r)$$

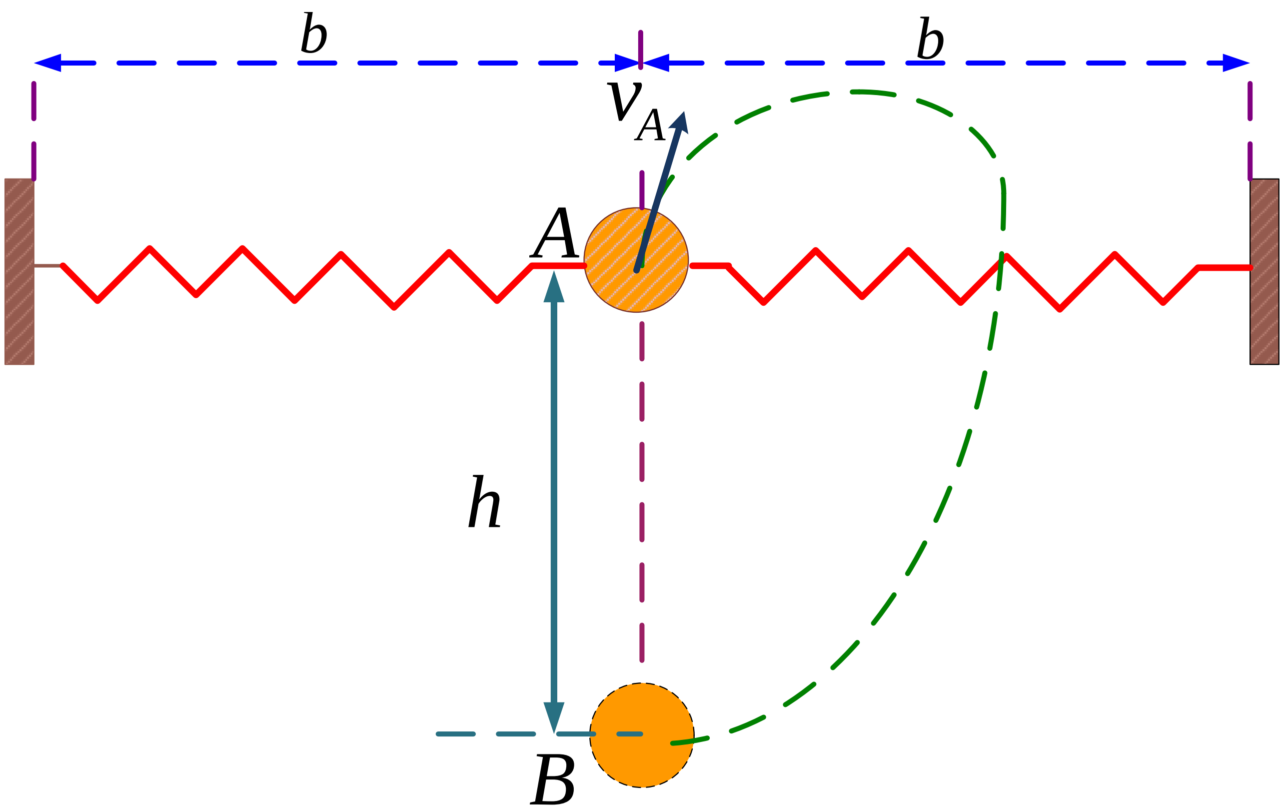
$$\underline{F}=-k[(x\cos\theta+y\sin\theta)\underline{e}_r+(-x\sin\theta+y\cos\theta)\underline{e}_\theta]$$

$$\begin{cases}F_r=-k(x\cos\theta+y\sin\theta)\\ F_\theta=-k(y\cos\theta-x\sin\theta)\end{cases}$$

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned}F_r&=-kr\\ F_\theta&=0\end{aligned}}$$

مثال: گلوله ای به جرم 1.5kg مطابق شکل به دو فنر هر یک با ضریب الاستیکی (سفتی) 150 N/m متصل هست در وضعیت نشان داده شده در شکل فنرها فاقد کشش بوده و به صورت افقی قرار دارند. در صورتی که گلوله در این وضعیت تحت سرعت اولیه 2.5 m/s قرار گرفته و تحت تأثیر این سرعت اولیه مسیر خط چین مطابق شکل را طی کند، مطلوبست تعیین سرعت گلوله در نقطه B که به فاصله 125 mm در زیر نقطه A قرار دارد.

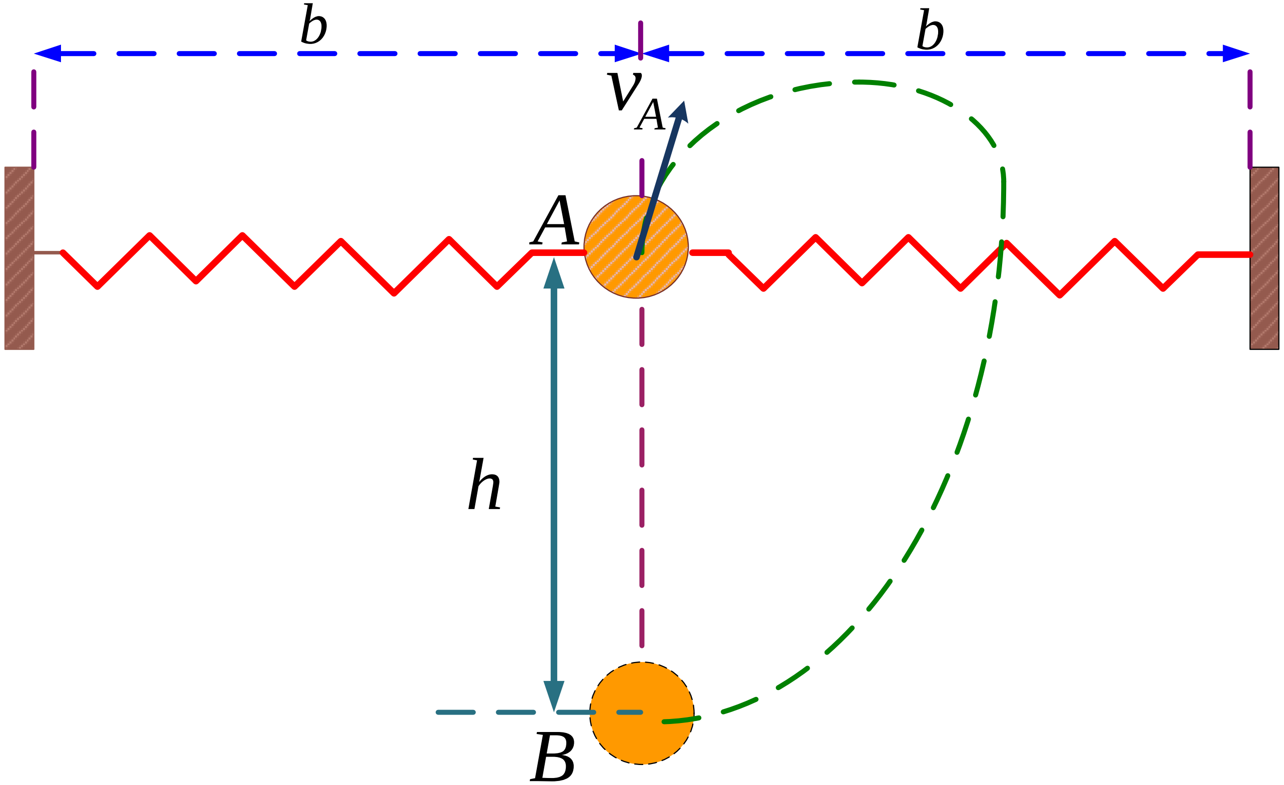


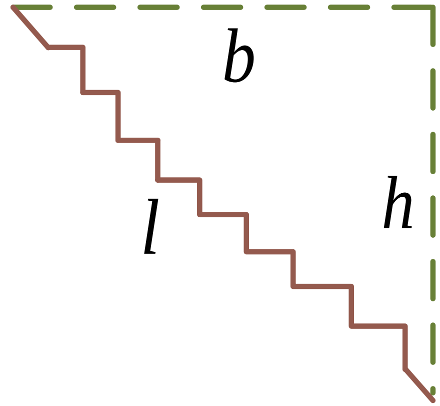
$k = 150\, N/m$

$v_A = 2.5\, m/s$

$h = 125mm$

$b = 300mm$



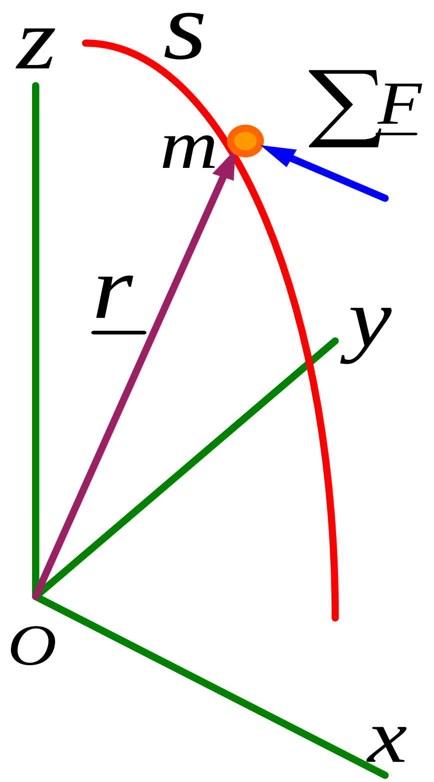


$$T+U=cte \rightarrow T_A+U_A=T_B+U_B$$ سیستم ابقایی است

$$\frac{1}{2}mv_A^2+mgh=\frac{1}{2}mv_B^2+mg(0)+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$v_B=\sqrt{v_A^2+2gh+kx^2/m} \qquad x=l-b=\sqrt{300^2+125^2}-300=25mm$$

۶-اندازه حرکت و ضربه



۶-۱ اندازه حرکت خطی

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} = m\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\underline{v})$$

$$\underline{G} = m\underline{v}$$ بردار اندازه حرکت خطی

واحدها:

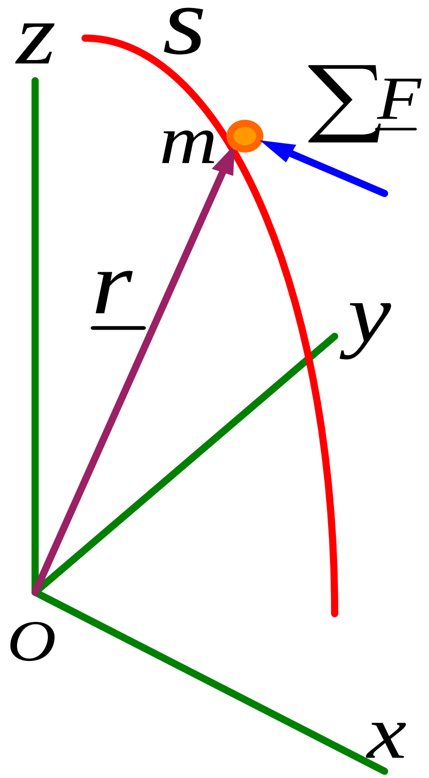
واحد $G = kg\frac{m}{s} = kg.\frac{m}{s^2}.s = N.s \quad MKS$

واحد $G = g\frac{cm}{s} = g\frac{cm}{s^2}.s = dyne.s \quad CGS$

$$\sum \underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = \frac{d}{dt}\underline{G} = \underline{\dot{G}} \qquad \sum \underline{F} = \sum F_x \underline{i} + \sum F_y \underline{j} + \sum F_z \underline{k}$$

$$\underline{v} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k} \qquad \underline{G} = G_x\underline{i} + G_y\underline{j} + G_z\underline{k}$$

$$\boxed{\sum F_x = m\dot{v}_x = \dot{G}_x} \qquad \boxed{\sum F_y = m\dot{v}_y = \dot{G}_y} \qquad \boxed{\sum F_z = m\dot{v}_z = \dot{G}_z}$$



۶-۲ اصل ضربه و اندازه حرکت خطی

$$\sum \underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = \frac{d}{dt}\underline{G} \Rightarrow \sum \underline{F}dt = d(m\underline{v}) = d\underline{G}$$

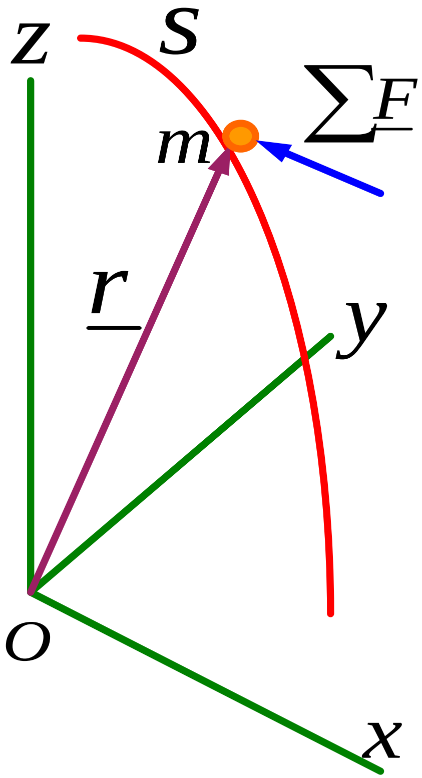
$$\int_0^t \sum \underline{F}dt = m\int_{\underline{v}_1}^{\underline{v}_2} d\underline{v} = \int_{\underline{G}_1}^{\underline{G}_2} d\underline{G}$$

$$\boxed{\int_0^t \sum \underline{F}dt = m(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = \underline{G}_2 - \underline{G}_1}$$

$\int_0^t \sum \underline{F}dt$ ضربه خطی نیروی F در فاصله زمانی 0 تا t

$m(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = \underline{G}_2 - \underline{G}_1$ تغییرات اندازه حرکت خطی

۶-۳ اندازه حرکت زاویه ای



$$\sum \underline{M} = \underline{r} \times \sum \underline{F} = \underline{r} \times (m\underline{a}) = \underline{r} \times (m\frac{d\underline{v}}{dt}) = m\underline{r} \times \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[\underline{r} \times (m\underline{v})] = (\frac{d\underline{r}}{dt}) \times (m\underline{v}) + \underline{r} \times \frac{d}{dt}(m\underline{v})$$

$$\frac{d}{dt}[\underline{r} \times (m\underline{v})] = \underline{v} \times m\underline{v} + m\underline{r} \times \frac{d}{dt}\underline{v} = m\underline{r} \times \frac{d}{dt}\underline{v}$$

$$\sum \underline{M} = m\underline{r} \times \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\underline{r} \times (m\underline{v})] = \frac{d}{dt}[\underline{r} \times \underline{G}]$$

$$\boxed{\underline{H} = \underline{r} \times (m\underline{v}) = \underline{r} \times \underline{G}}$$

بردار اندازه حرکت زاویه ای

واحدها:

واحد $H = N.s.m = J.s \quad MKS$

واحد $H = dyne.s.cm = erg.s \quad CGS$

$$\sum \underline{M} = \frac{d}{dt}\underline{r}\times(m\underline{v}) = \frac{d}{dt}\underline{r}\times\underline{G} = \frac{d}{dt}\underline{H}$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \qquad \underline{v} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$$

$$\underline{H} = \underline{r}\times(m\underline{v}) = \underline{r}\times\underline{G} = (m)\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$m(yv_z - zv_y)\underline{i} - m(xv_z - zv_x)\underline{j} + (xv_y - yv_x)\underline{k} = H_x\underline{i} + H_y\underline{j} + H_z\underline{k}$$

$$\begin{cases} H_x = m(yv_z - zv_y) \\ H_y = m(zv_x - xv_z) \\ H_z = m(xv_y - yv_x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_x = \dot{H}_x \\ \sum M_y = \dot{H}_y \\ \sum M_z = \dot{H}_z \end{cases}$$

۴-۶ اصل ضربه و اندازه حرکت زاویه ای

$$\sum \underline{M} = \frac{d}{dt}\underline{H} \rightarrow \sum \underline{M} dt = d\underline{H} \rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^t \sum \underline{M} dt = \int_{\underline{H}_1}^{\underline{H}_2} d\underline{H} = \underline{H}_2 - \underline{H}_1}$$

$$\boxed{\int_0^t \sum \underline{M} dt}$$

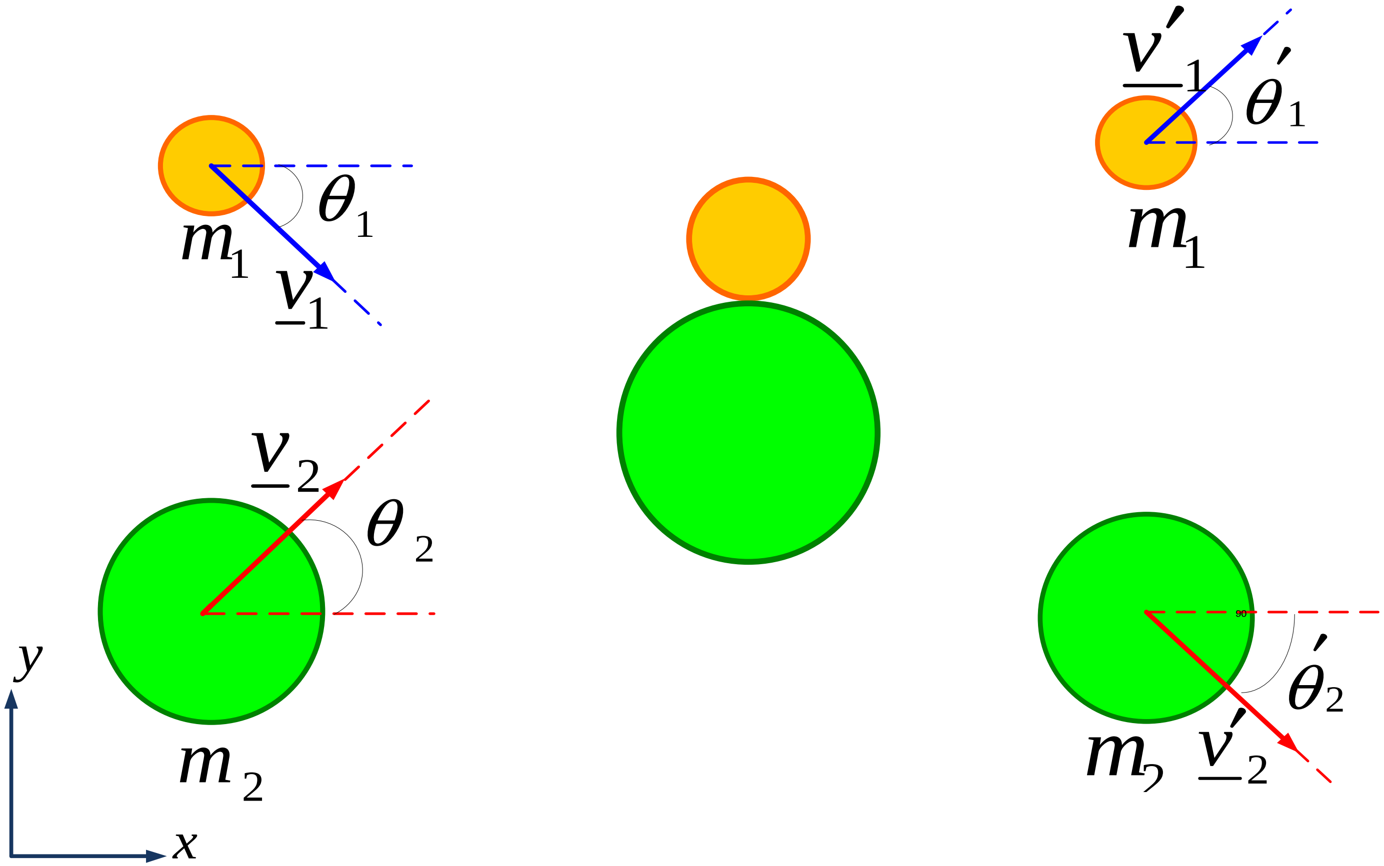
ضربه زاویه ای گشتاور برآیند نیروهای وارد بر جسم در فاصله زمانی صفر تا t

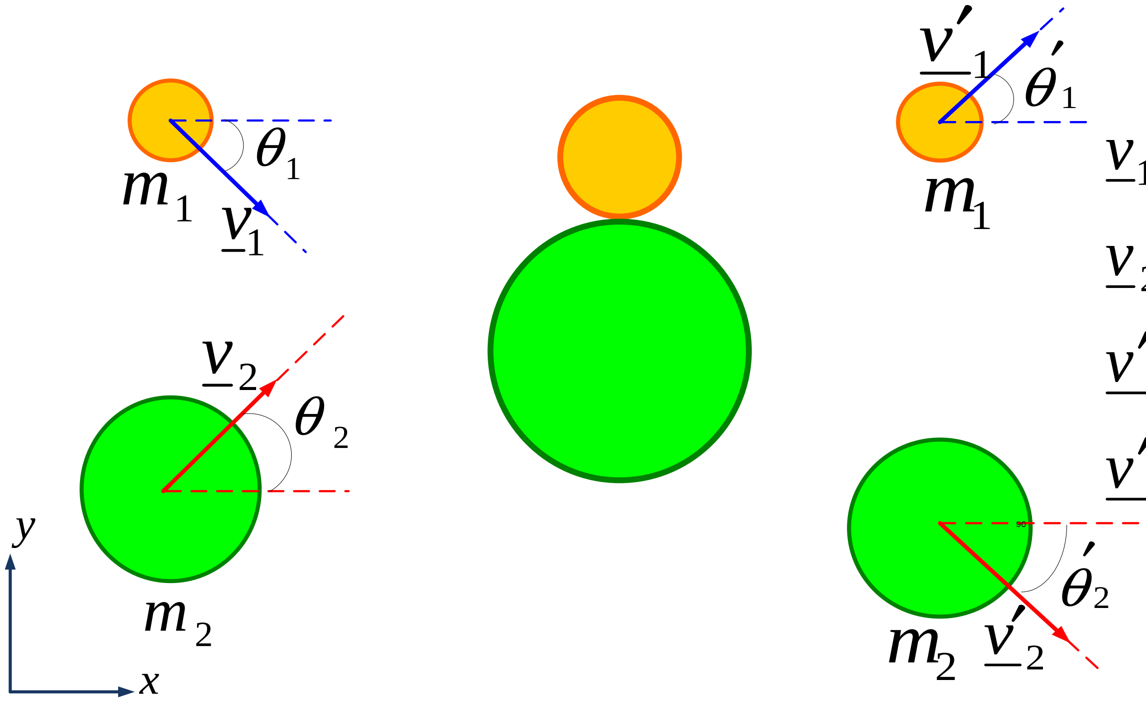
$$\boxed{\underline{H}_2 - \underline{H}_1}$$

تغییر اندازه حرکت زاویه ای

۶-۵ برخورد

دو جرم m_1 و m_2 با بردارهای سرعت $\underline{V}_1$ و $\underline{V}_2$ به طرف هم حرکت می کنند در نقطه ای برخورد صورت می گیرد و سپس جرم m_1 با سرعت $\underline{V}'_1$ و جرم m_2 با سرعت $\underline{V}'_2$ از هم دور می شوند.





$$\underline{v}_1 = v_1 \cos\theta_1 \underline{i} - v_1 \sin\theta_1 \underline{j}$$

$$\underline{v}_2 = v_2 \cos\theta_2 \underline{i} + v_2 \sin\theta_2 \underline{j}$$

$$\underline{v}'_1 = v'_1 \cos\theta'_1 \underline{i} + v'_1 \sin\theta'_1 \underline{j}$$

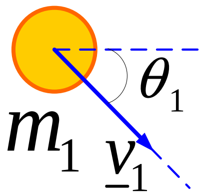
$$\underline{v}'_2 = v'_2 \cos\theta'_2 \underline{i} - v'_2 \sin\theta'_2 \underline{j}$$

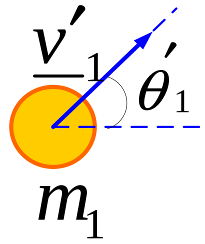
اصل بقای اندازه حرکت:

اندازه حرکت سیستم بعد از برخورد = اندازه حرکت سیستم قبل از برخورد

$$m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2 = m_1\underline{v}'_1 + m_2\underline{v}'_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 = m_1 v'_1 \cos\theta'_1 + m_2 v'_2 \cos\theta'_2 \\ -m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 = m_1 v'_1 \sin\theta'_1 - m_2 v'_2 \sin\theta'_2 \end{cases}$$



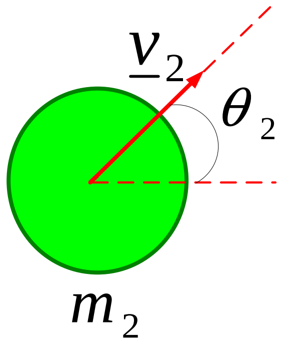


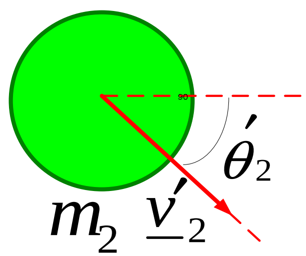
برای جرم m_1

$$\underline{v}'_1 = v'_1 \cos\theta'_1 \underline{i} + v'_1 \sin\theta'_1 \underline{j}$$

$$\underline{v}_1 = v_1 \cos\theta_1 \underline{i} - v_1 \sin\theta_1 \underline{j}$$

$$\int_0^t \underline{F} dt = m_1(\underline{v}'_1 - \underline{v}_1) \quad \begin{cases} \int_0^t F_x dt = m_1(v'_1 \cos\theta'_1 - v_1 \cos\theta_1) \\ \int_0^t F_y dt = m_1(v'_1 \sin\theta'_1 + v_1 \sin\theta_1) \end{cases}$$





برای جرم m_2

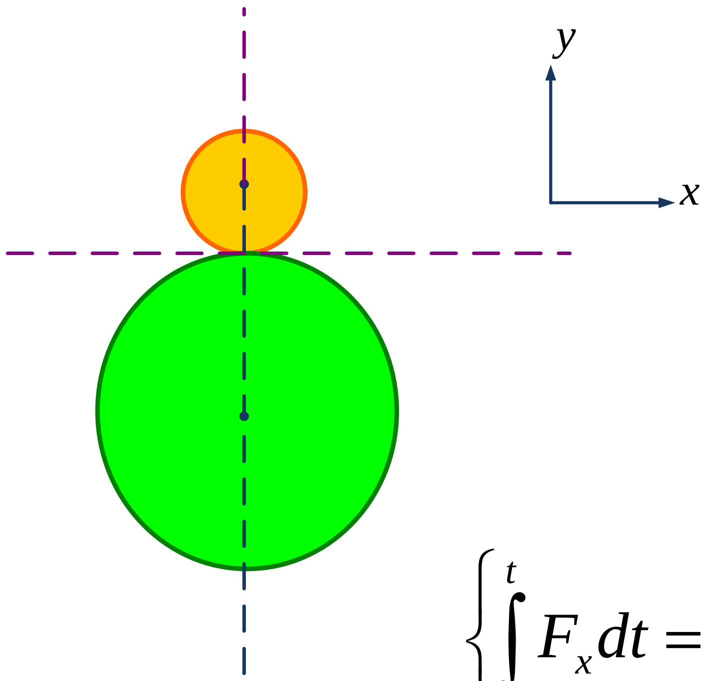
$$\underline{v}'_2 = v'_2 \cos\theta'_2 \underline{i} - v'_2 \sin\theta'_2 \underline{j}$$

$$\underline{v}_2 = v_2 \cos\theta_2 \underline{i} + v_2 \sin\theta_2 \underline{j}$$

$$\int_0^t \underline{F} dt = m_2(\underline{v}'_2 - \underline{v}_2) \quad \begin{cases} \int_0^t F_x dt = m_2(v'_2 \cos\theta'_2 - v_2 \cos\theta_2) \\ \int_0^t F_y dt = -m_2(v'_2 \sin\theta'_2 + v_2 \sin\theta_2) \end{cases}$$

نکته: معمولاً برای سادگی کار دستگاه مختصات را به گونه ای انتخاب می کنیم که یک راستای آن در راستای ضربه و دیگری در امتداد راستایی است که ضربه نداریم.

اگر به عنوان مثال ضربه در امتداد محور y اتفاق بیفتد یعنی در امتداد x ضربه نداریم.



برای جرم m_1

$$\left\{\int_0^t F_x dt = 0 \rightarrow v_1' \cos\theta_1' - v_1 \cos\theta_1 = 0\right.$$

برای جرم m_2

$$\left\{\int_0^t F_x dt = 0 \rightarrow v_2' \cos\theta_2' - v_2 \cos\theta_2 = 0\right.$$

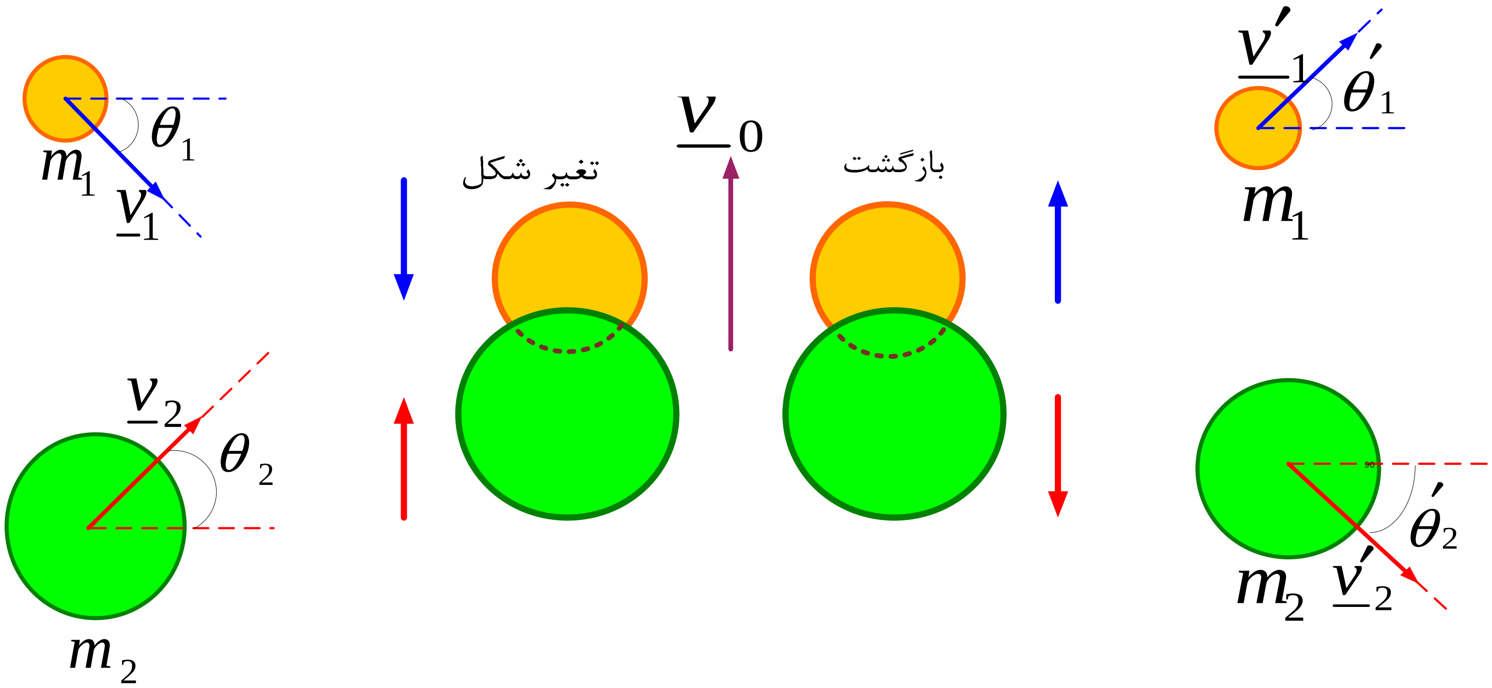
۶-۶ ضریب بازگشت

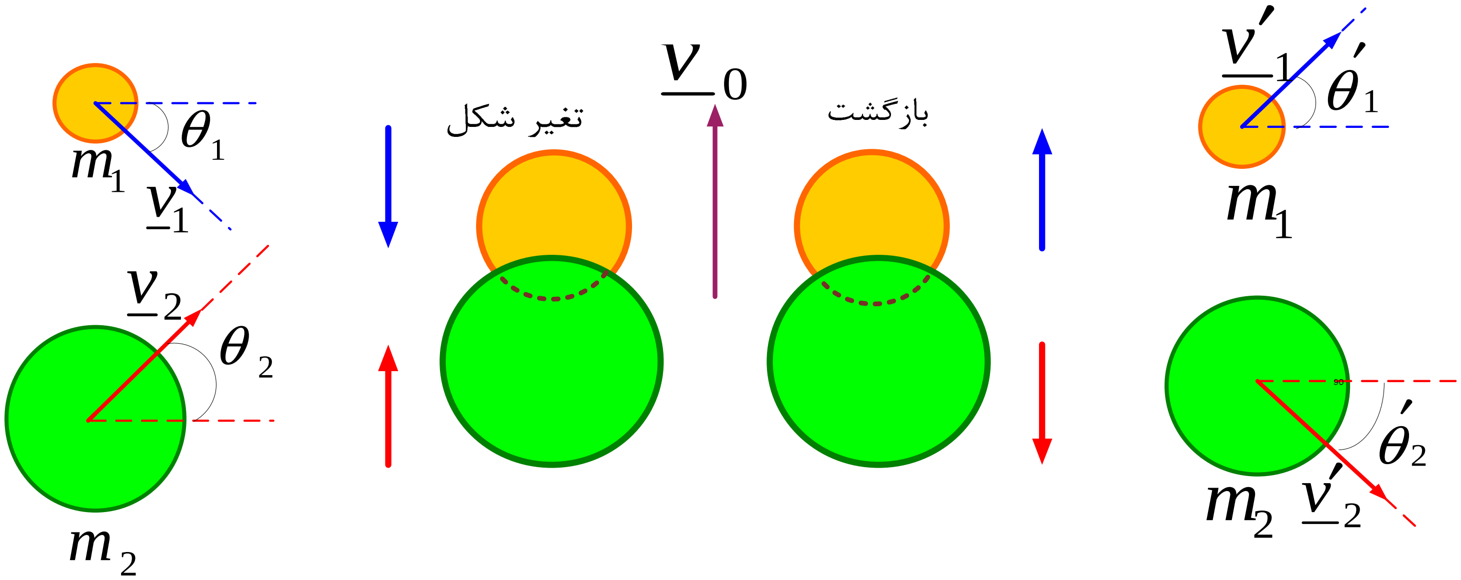
نسبت ضربه در مدت زمان بازگشت به ضربه در مدت زمان تغیرشکل در راستای ضربه

$$e = \frac{\int F_r dt}{\int F_d dt}$$

تغییر اندازه حرکت در مدت زمان بازگشت $\int F_r dt$

تغییر اندازه حرکت در مدت زمان تغییر شکل $\int F_d dt$





:

$$m_1 : \; e = \frac{\int F_r dt}{\int F_d dt} = \frac{m_1(v_1' \sin\theta_1' - v_0)}{m_1(v_0 + v_1 \sin\theta_1)}$$

$$m_2 : \; e = \frac{\int F_r dt}{\int F_d dt} = \frac{m_2(-v_2' \sin\theta_2' - v_0)}{m_2(v_0 - v_2 \sin\theta_2)}$$

• v_0 را بین این دو رابطه حذف می کنیم

$$e = \frac{v_1' \sin\theta_1' + v_2' \sin\theta_2')}{v_1 \sin\theta_1 + v_2 \sin\theta_2} = \frac{\text{سرعت نسبی مجموعه بعد از برخورد در امتداد ضربه}}{\text{سرعت نسبی مجموعه قبل از برخورد در امتداد ضربه}}$$

$$0 \ \langle \ e \ \langle \ 1$$ مقادیر واقعی

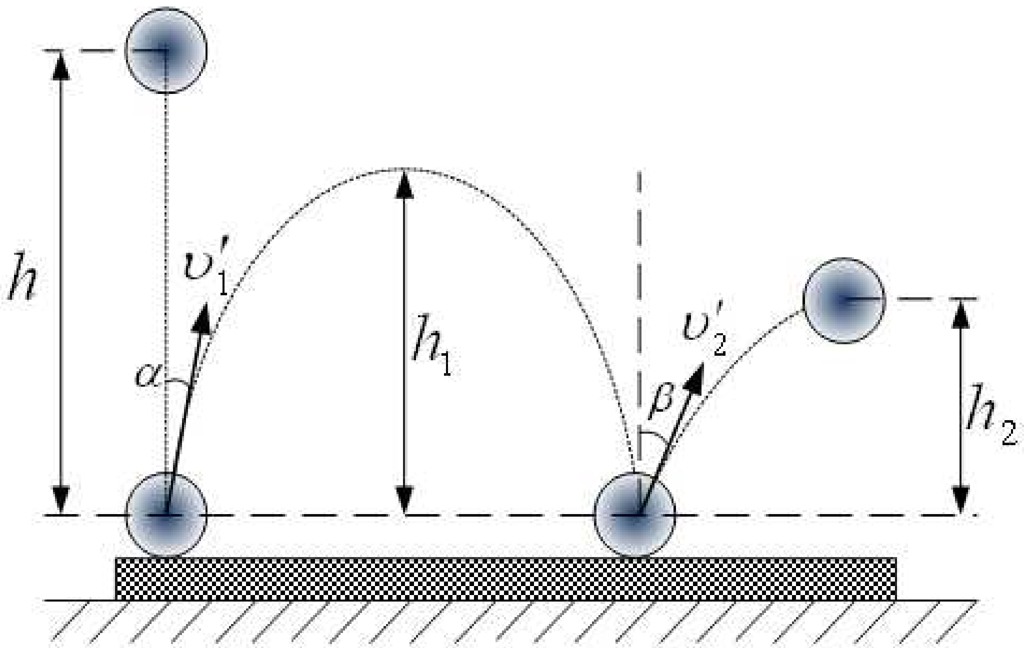
مقادیر ایده آل

$e = 0$, $e = 1$

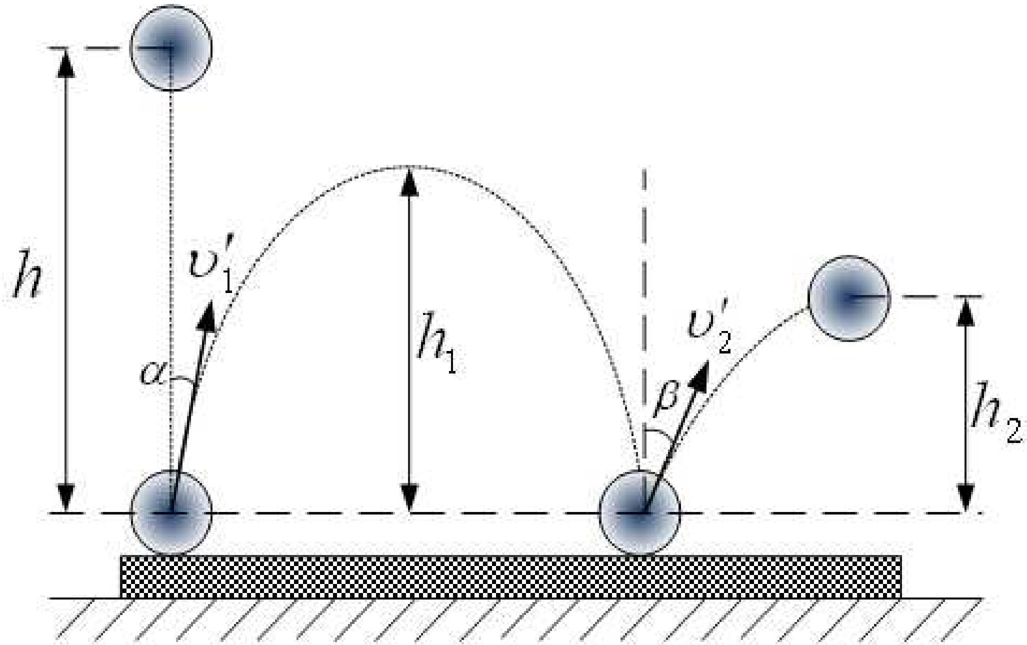
برخورد کاملا پلاستیک (خمیری)

برخورد کاملا الاستیک (کشسان)

مثال: مطلوب است تعیین ضریب برگشت برای یک توپ فولادی که از حالت سکون از ارتفاع h بالای یک صفحه سنگین فولادی می‌افتد و ارتفاع دومین بازگشت آن h_2 است.



$$e = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$



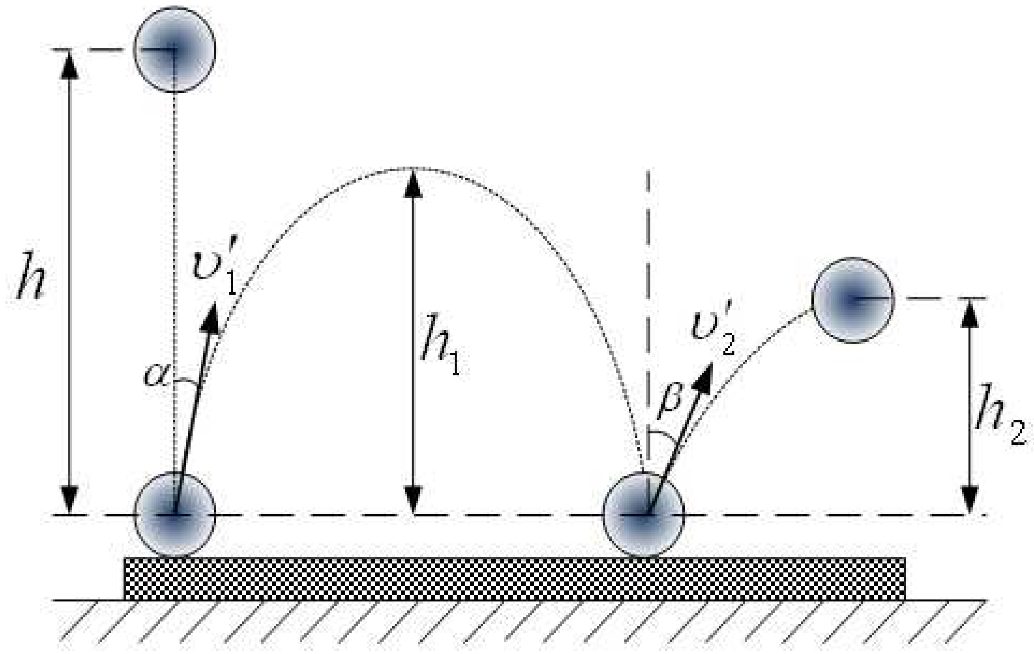
$$e = \frac{v_1' \cos\alpha}{v_1} \qquad v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$e = \frac{v_1' \cos\alpha}{\sqrt{2gh}}$$

حال اگر گلوله با سرعت اولیه v_1' بعد از برخورد اول به ارتفاع h_1 برگردد می بایست سرعت گلوله در امتداد قائم از $v_1' \cos\alpha$ بعد از طی مسافت قائم h_1 به صفر برسد در نتیجه:

$$v_1' \cos\alpha = \sqrt{2gh_1}$$

$$e = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh}} \qquad e^2 2gh = 2gh_1 \qquad \Rightarrow h_1 = e^2 h$$



حال اگر گلوله از ارتفاع h_1 سقوط کند
سرعت آن قبل از برخورد در امتداد
قائم برابر است با:

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2ge^2h}$$

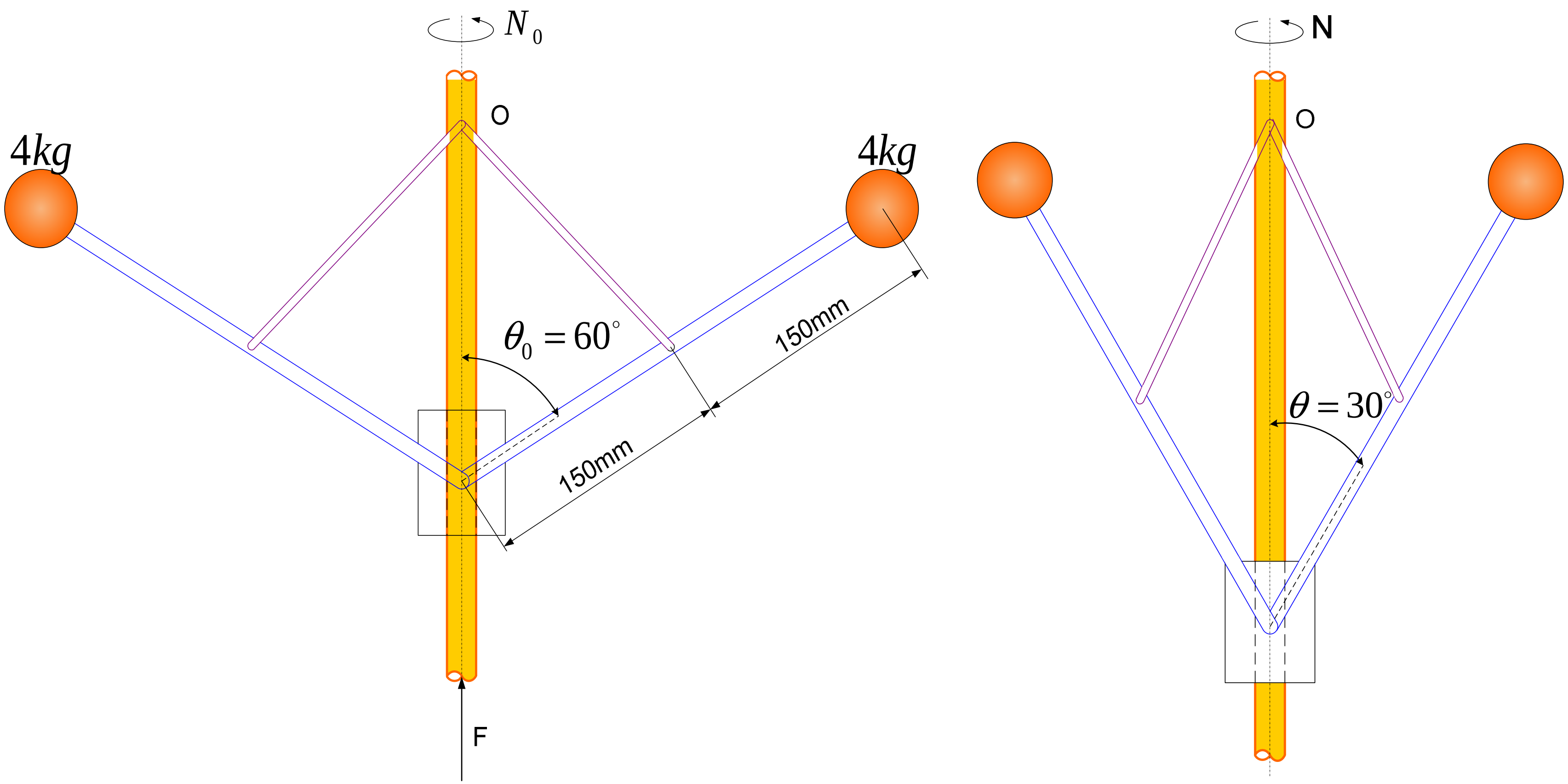
$$e = \frac{\upsilon_2' \cos\beta}{\bar{\upsilon}} = \frac{\upsilon_2' \cos\beta}{\sqrt{2ge^2h}}$$

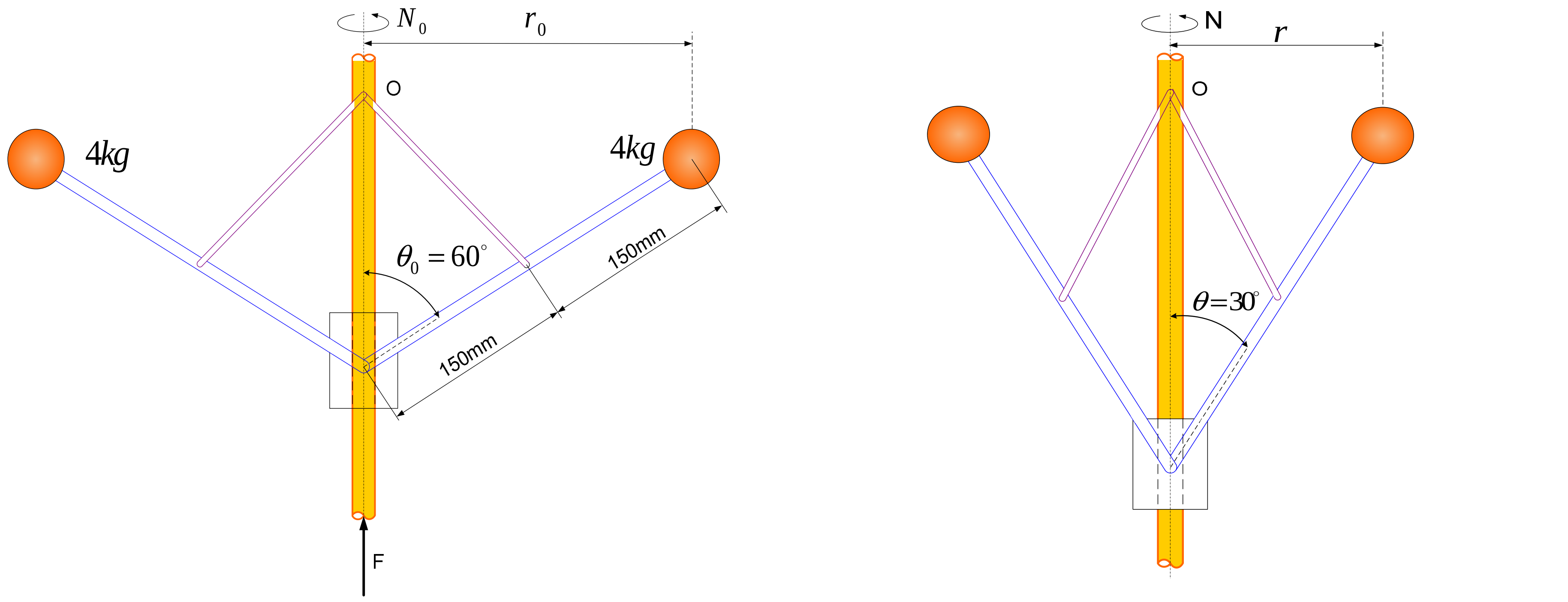
اما سرعت $\upsilon_2' \cos\beta$ می‌بایست گلوله را به ارتفاع h_2 بازگرداند، در نتیجه

$$\upsilon_2' \cos\beta = \sqrt{2gh_2}$$

$$e = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2ge^2h}} \Rightarrow 2ge^4h = 2gh_2 \qquad e = \left(\frac{h_2}{h}\right)^{\frac{1}{4}}$$

مثال: هر یک از گلوله‌های ۴ کیلو گرمی روی چهار چوبی که جرم ناچیزی دارد نصب شده‌اند و آزادانه با سرعت $90rev/Min$ حول امتداد قائم با زاویه $\theta_0=60^\circ$ می‌چرخند. اگر F نیروی وارد بر میله کنترل قائم زیاد شود، بطوری که چهار چوب با زاویه $\theta_0=30^\circ$ بچرخد، N سرعت چرخشی و تغیرات انرژی جنبشی را معین کنید. (نقطه O روی گیره در حال دوران ثابت است.)



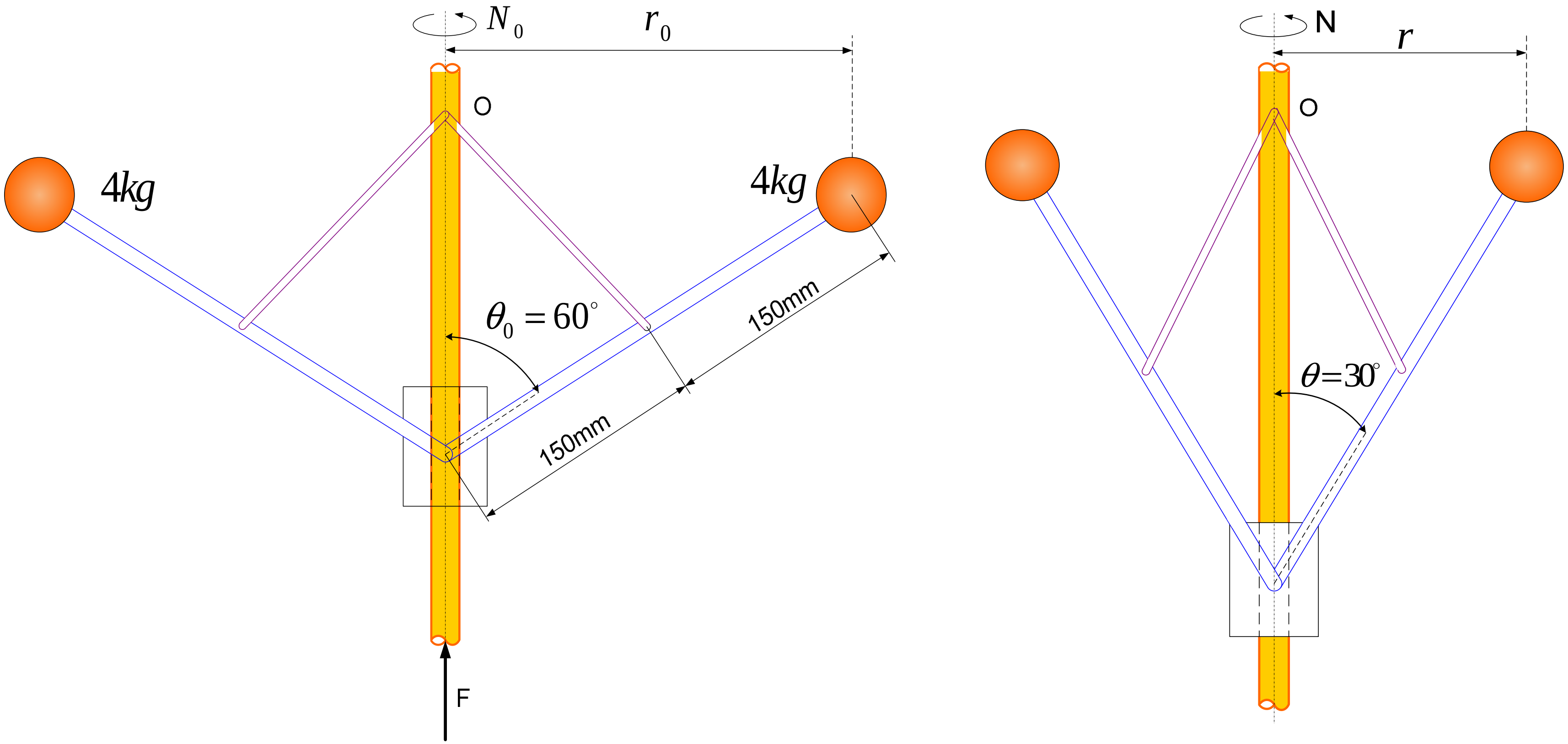


اندازه حرکت زاویه‌ای انتهایی = اندازه حرکت زاویه‌ای ابتدایی

$$m r_0 \upsilon_0 + m r_0 \upsilon_0 = m r \upsilon + m r \upsilon \qquad \Rightarrow r_0 \upsilon_0 = r \upsilon$$

$$v_0 = r_0 \omega_0 \qquad v = r\omega \quad \Rightarrow r_0^{\,2} \omega_0 = r^{\,2} \omega \quad \omega_0 = 2\pi N_0 \quad \omega = 2\pi N$$

$$\Rightarrow r_0^2 \times 2\pi N_0 = r^2 \times 2\pi N \quad \Rightarrow N = \frac{r_0^2 N_0}{r^2} \qquad N = \frac{(300\sin 60^\circ)^2}{(300\sin 30^\circ)^2} \times 90 = 270 \frac{rev}{Min}$$

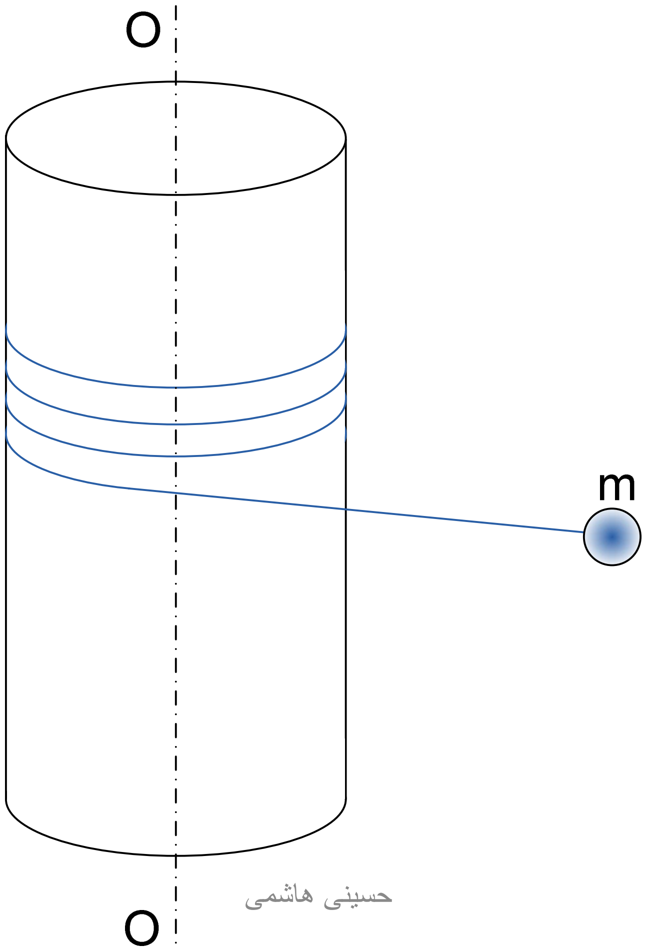


انرژی جنبشی زاویه‌ای اولیه $= \frac{1}{2} I\omega_0^2 + \frac{1}{2} I\omega_0^2 = I\omega_0^2 = mr_0^2\omega_0^2 = mr_0^2 \times 4\pi^2 N_0^2$

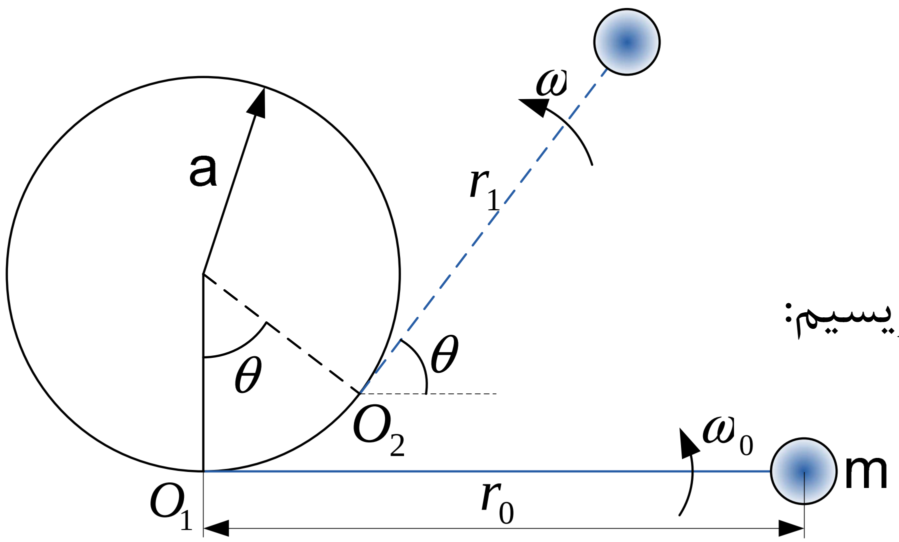
انرژی جنبشی زاویه‌ای ثانویه $= \frac{1}{2}\tilde{I}\omega^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}\omega^2 = \tilde{I}\omega^2 = mr^2\omega^2 = mr^2 \times 4\pi^2 N^2$

$$\Delta T = 4m\pi^2(r^2N^2 - r_0^2N_0^2) = 47.92\ J$$

مثال به ذره کوچکی به جرم m سرعت اولیه زیادی در صفحه افقی داده میشود و نخ متصل به آن دور محور قائم و ثابتی به شعاع a میپیچد. تمام حرکات در صفحه افقی صورت میگیرد. در صورتی که به هنگامی که فاصله ذره از نقطه تماس r_0 است سرعت زاویه ای نخ برابر ω_0 باشد، سرعت زاویه ای ω و کشش نخ را T پس از آنکه به اندازه زاویه θ بچرخد معین کنید.



در صورتی که r_1 فاصله ذره از نقطه تماس در وضعیت θ باشد از روی دیاگرام داریم



$$r_1 = r_0 - a\theta$$

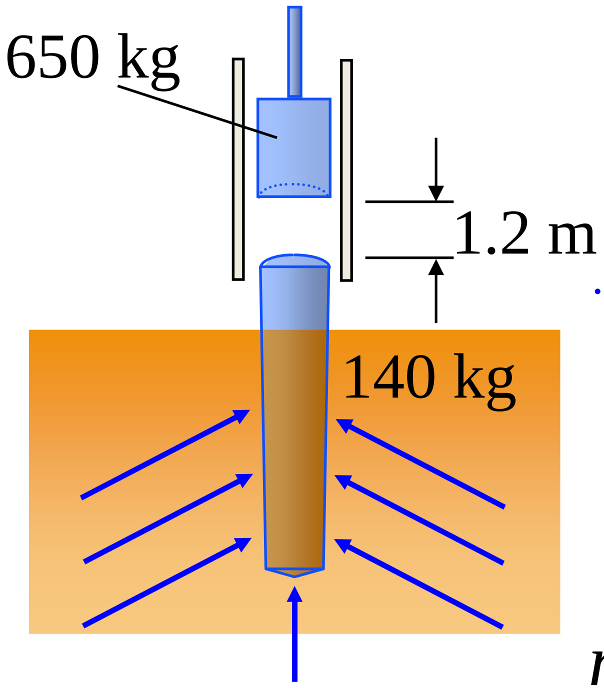
حال با استفاده از اصل بقای انرژی می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon_0 = \upsilon$$

$$\upsilon = r_1\omega \qquad \upsilon_0 = r_0\omega_0 \qquad r_1\omega = r_0\omega_0 \Rightarrow \omega = \frac{r_0\omega_0}{r_1}$$

$$\omega = \frac{r_0\omega_0}{r_0 - a\theta} \qquad T = ma_n = m\frac{\upsilon^2}{r_1} = m\frac{r_1^2\omega^2}{r_1} = m\omega^2 r_1$$

$$T = m\omega^2(r_0 - a\theta) = \frac{m\omega_0^2 r_0^2}{r_0 - a\theta}$$



مثال: یک ضربه زن 650 kg از ارتفاع 1.2 m برروی یک قطعه 140 kg سقوط میکند میزان فرو رفتگی قطعه در زمین بر اثر این سقوط 110 mm است. مطلوبست متوسط مقاومت زمین در مقابل این نفوذ. برخورد را کاملا پلاستیک فرض کنید.

m_h جرم ضربه زن m_p جرم قطعه y میزان نفوذ

سرعت ضربه زن قبل از برخورد $\upsilon_h = \sqrt{2gh}$

$$m_h v_h + m_p v_p = (m_h + m_p)v' \quad \upsilon_p = 0$$

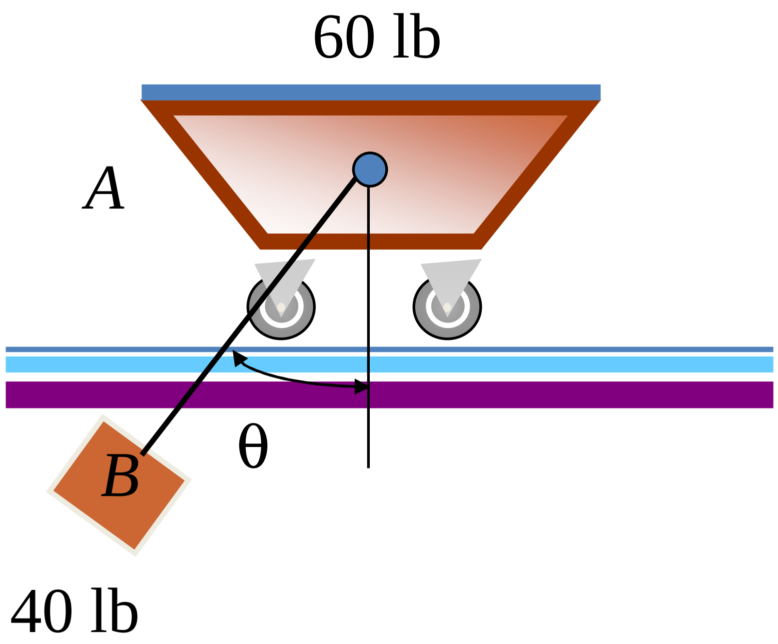
سرعت مجموعه بعد از برخورد

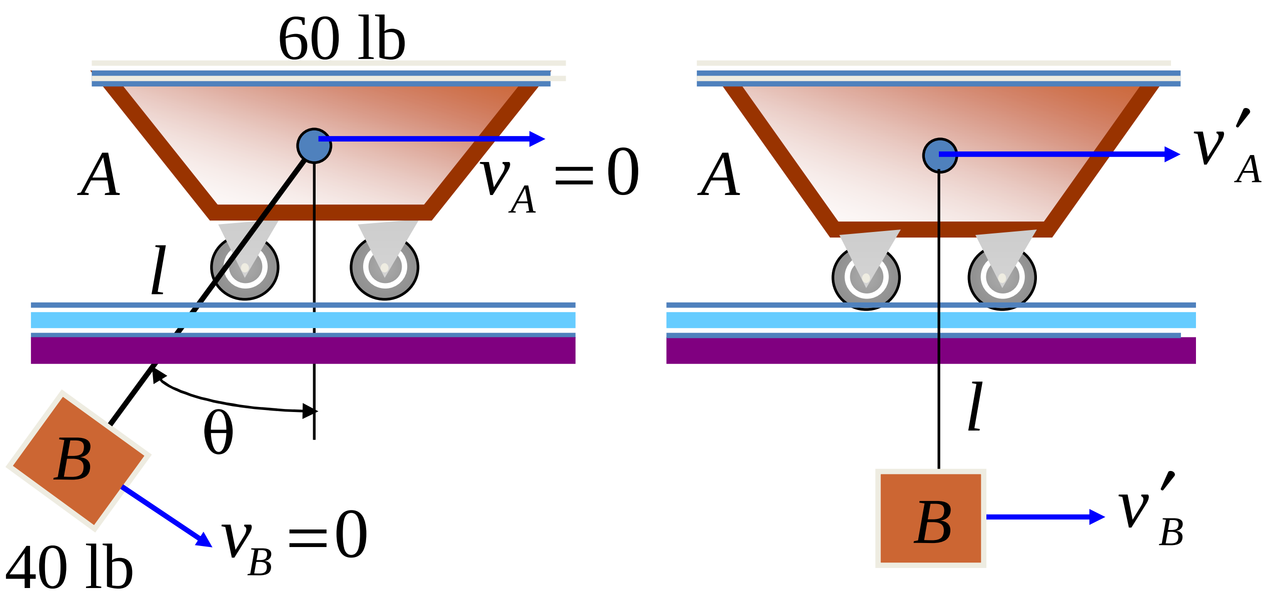
$$v' = \frac{m_h v_h}{(m_h + m_p)} = \frac{m_h}{(m_h + m_p)}\sqrt{2gh}$$

$$\Delta T = W \Rightarrow T_2 - T_1 = \left[(m_h + m_p)g - R\right]y \qquad T_2 = 0$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_h + m_p)v'^2 \quad R = \frac{(m_h + m_p)(v'^2 + 2gy)}{2y} = 66243N$$

مثال: یک وزنه 40-lb مطابق شکل از نخی بطول 6-ft که به ارابه 60-lb متصل است آویزان شده است. چنانچه وزنه از وضعیت $\theta = 35^o$ از حالت سکون رها شود سرعت ارابه و وزنه را در موقعیت $\theta = 0$ پیدا کنید.





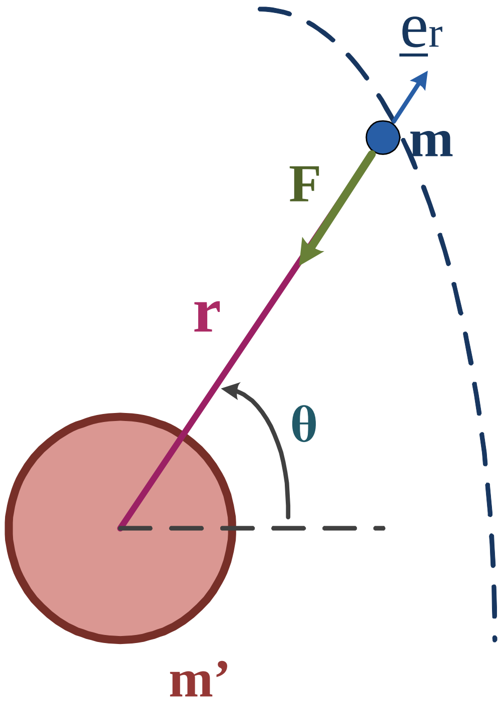
$$m_A \underline{v}_A + m_B \underline{v}_B = m_A \underline{v}'_A + m_B \underline{v}'_B = 0 \qquad v'_B = -\frac{m_A}{m_B} v'_A$$

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \qquad T_1 = 0 \qquad U_2 = 0 \qquad \Rightarrow U_1 = T_2$$

$$m_B g l (1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = \frac{1}{2} m_A \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) v_A'^2$$

$$v_A'^2 = \frac{2 m_B g l (1 - \cos\theta)}{m_A \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right)} \qquad v'_A = 4.32\, ft/s \qquad v'_B = 6.48\, ft/s$$

۷- حرکت تحت تاثیر نیروی مرکزی



۷-۱ معادله مسیر

$$F = k\frac{mm'}{r^2}$$

$$\underline{F} = -F\underline{e}_r = -k\frac{mm'}{r^2}\underline{e}_r$$

$$\sum \underline{F} = m\underline{a} \rightarrow \quad \sum F_r\underline{e}_r + \sum F_\theta \underline{e}_\theta = m(a_r\underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta)$$

در امتداد θ هیچ نیرویی به ذره وارد نمی شود.

$$F_\theta = 0$$

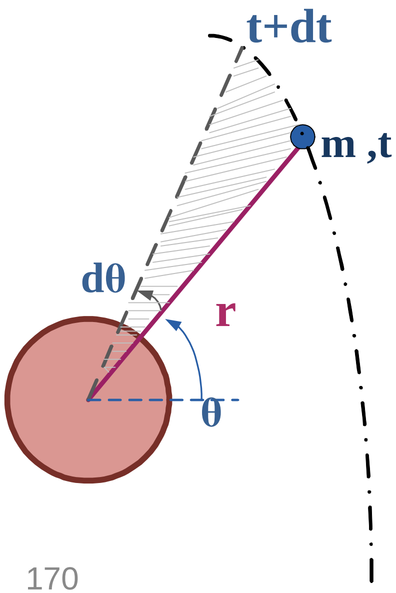
$$-k\frac{mm'}{r^2}\underline{e}_r + 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_\theta$$

$$\begin{cases} -\dfrac{kmm'}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \to \\ 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \to \end{cases} \begin{cases} -\dfrac{km'}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \to$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \to r^2\dot{\theta} = cte = h$$

نتیجه: در حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی همواره حاصلضرب $r^2\dot{\theta}$ مقدار ثابتی است .



$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = cte = \frac{1}{2}h$$

$\dot{A} =$ سرعت سطحی یا سرعتی که با آن سرعت سطح جاروب می شود. (نرخ زمانی جاروب شدن سطح به وسیله ی بردار شعاعی)

نتیجه: در حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی نرخ زمانی جاروب شدن سطح به وسیله ی بردار شعاعی (یعنی سرعتی که با آن سرعت بردار شعاعی سطح را جاروب می کند) همواره ثابت است.

$$-\frac{km'}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$r = \frac{1}{u} \rightarrow \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} \qquad (r^2\dot{\theta} = h \rightarrow \frac{\dot{\theta}}{u^2} = h)$$

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{h\dot{u}}{\dot{\theta}} = -h\frac{du/dt}{d\theta/dt} = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\boxed{\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = -h\frac{d}{dt}(\frac{du}{d\theta}) = -h\frac{d}{dt}(\frac{du}{d\theta}) \times \frac{d\theta}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}(\frac{du}{d\theta})\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -h\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\boxed{\ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}}$$

$$-\frac{km'}{r^2}=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \qquad r=\frac{1}{u} \qquad \ddot{r}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$-km'u^2=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{1}{u}h^2u^4 \quad \to km'=h^2\frac{d^2u}{d\theta^2}+h^2u$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{km'}{h^2} \qquad u=c\cos(\theta+\delta)+\frac{km'}{h^2}$$

به هنگامی که $\theta=0$ فرض می کنیم r کمترین مقدار خود را داشته باشد.

$$r_{\min}\to u_{\max}\to \cos(\theta+\delta)\Big|_{\theta=0}=1$$

$$\cos\delta=1\to\delta=0$$

$$\boxed{u=\frac{1}{r}=c\cos\theta+\frac{km'}{h^2}}$$

معادله مسیر ماهواره به هنگامی که تحت تأثیر نیروی مرکزی قرار گرفته است در دستگاه مختصات قطبی (r,θ)

$$\boxed{u=\frac{1}{r}=c\cos\theta+\frac{km'}{h^2}}$$

$$e=\frac{ch^2}{km'}=\frac{ch^2}{gR^2}\qquad d=\frac{1}{c}$$

$$\frac{km'}{h^2}=\frac{1}{ed}$$

$$\boxed{u=\frac{1}{r}=\frac{\cos\theta}{d}+\frac{1}{ed}}$$

If $e=0$ مسیر دایره

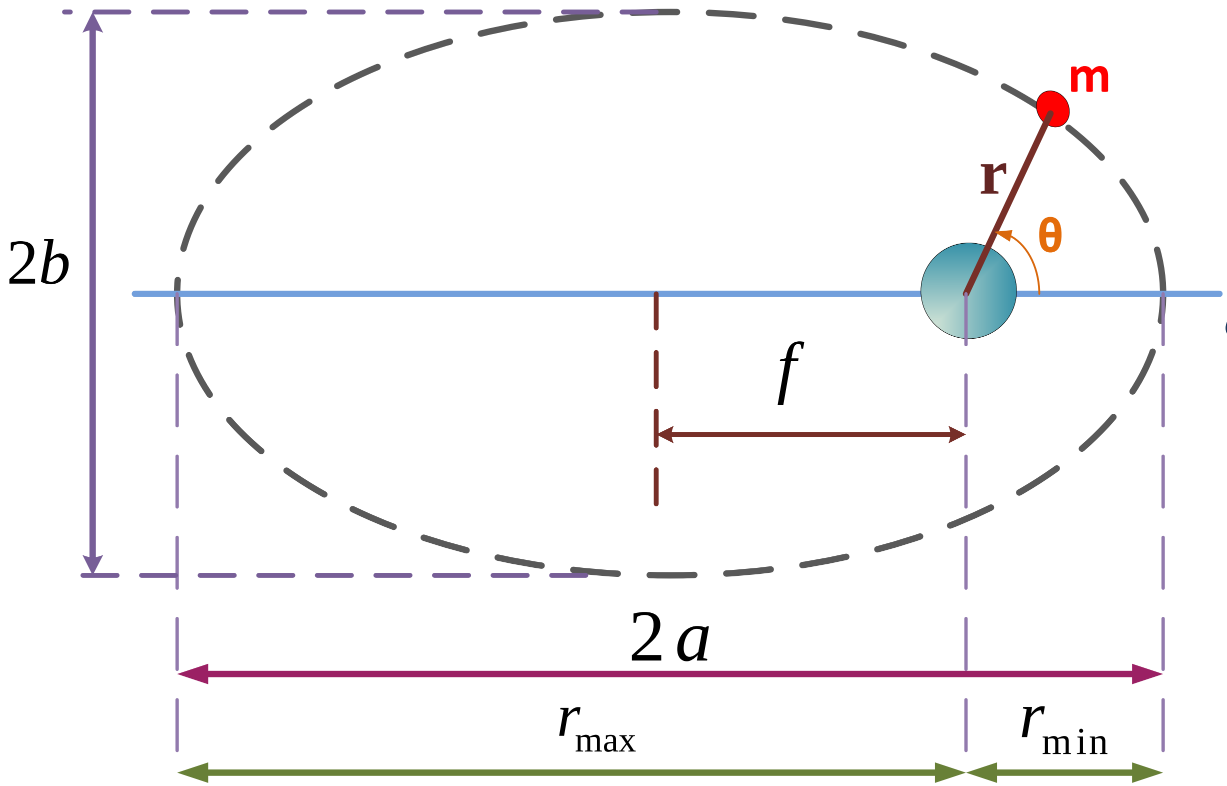
$e<1$ مسیر بیضی

$e=1$ مسیر سهمی

$e>1$ مسیر هذلولی

$$If\ e=0\ \rightarrow\ c=0\ \rightarrow\ u=\frac{1}{r}=\frac{km'}{h^2}\ \rightarrow\ r=cte$$

۲-۷ مدار بیضی



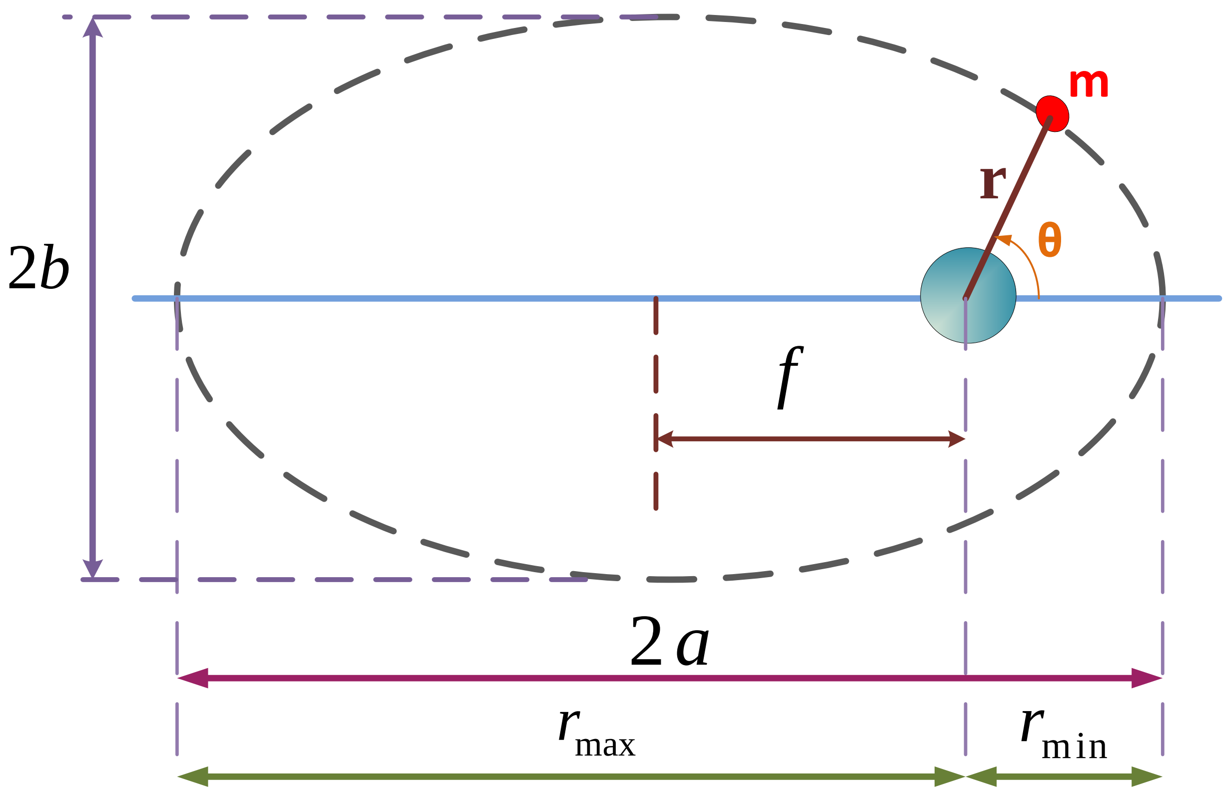
a: نصف قطر بزرگتر مدار بیضی
b: نصف قطر کوچکتر مدار بیضی

$$e = \frac{f}{a} \langle 1$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{d} + \frac{1}{ed}$$

$$\theta = 0 \rightarrow \frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{ed} = \frac{1+e}{ed} \rightarrow r_{\min} = \frac{ed}{1+e}$$

$$\theta = \pi \rightarrow \frac{1}{r_{\max}} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{ed} = \frac{1-e}{ed} \rightarrow r_{\max} = \frac{ed}{1-e}$$

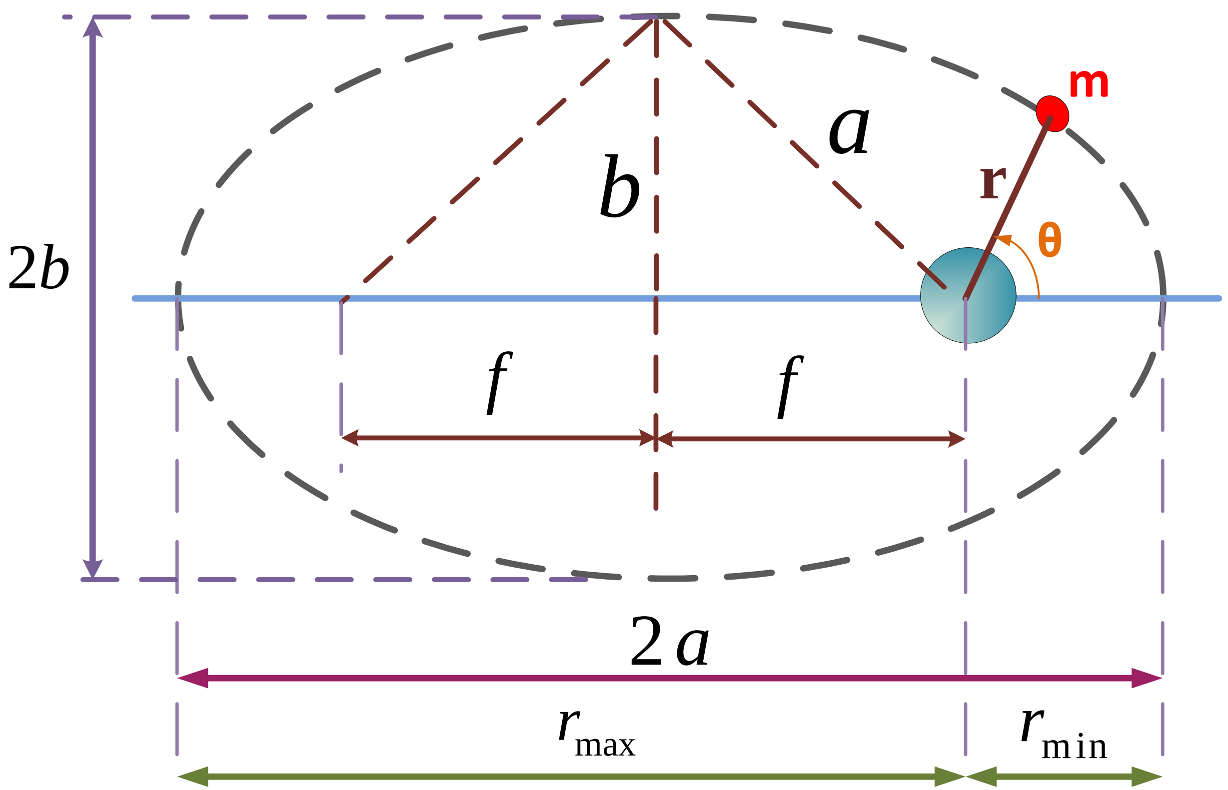


$$r_{\min} = \frac{ed}{1+e}$$

$$r_{\max} = \frac{ed}{1-e}$$

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} = \frac{2ed}{1-e^2} \qquad a = \frac{ed}{1-e^2}$$

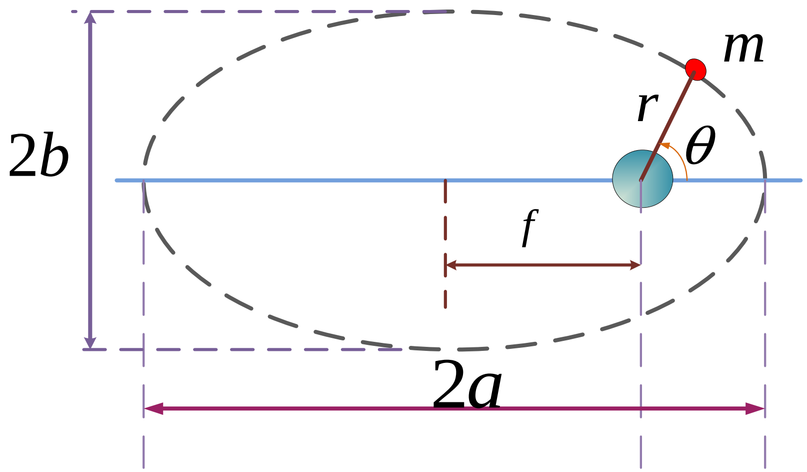
$$a = \frac{ed}{1-e^2} = \frac{ed}{(1-e)(1+e)} \rightarrow \begin{cases} r_{\min} = a(1-e) \\ r_{\max} = a(1+e) \end{cases}$$



$$e = \frac{f}{a}$$

$$a^2 = b^2 + f^2 = b^2 + a^2 e^2 \quad \rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2}$$

۳-۷ دوره تناوب درمدار بیضی



$$\tau = \frac{\pi ab}{\dot{A}} \qquad \dot{A} = \frac{1}{2}h \qquad \tau = \frac{2\pi ab}{h}$$

$$a = \frac{ed}{1-e^2} \qquad b = a\sqrt{1-e^2} \qquad e = \frac{ch^2}{km'} = \frac{ch^2}{gR^2}$$

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1-e^2)}{h^2} = \frac{4\pi^2 a^4 c(1-e^2)}{egR^2} \qquad c = \frac{1}{d}$$

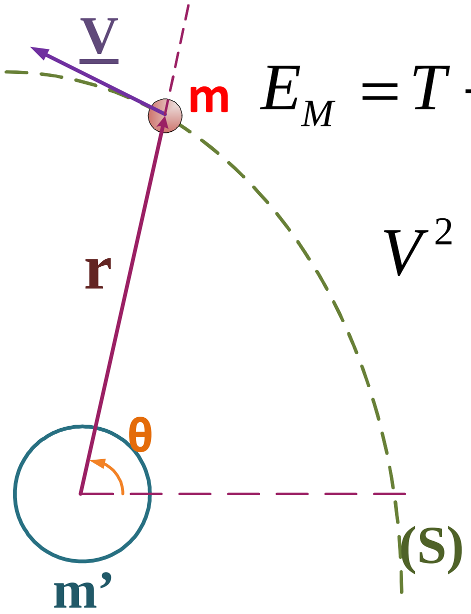
$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-e^2)}{edgR^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{gR^2} \rightarrow \qquad \boxed{\tau = \frac{2\pi a}{R}\sqrt{\frac{a}{g}}}$$

در حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی به هنگامی که مدار بیضی است مجذور دوره تناوب مدار با توان سوم نصف قطر بزرگ تر بیضی متناسب است.

m

مسایل

مثال: رابطه ای برای انرژی کل مکانیکی بر حسب خروج از مرکز بیابید.



$$E_M = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} \qquad \underline{V} = V_r \underline{e}_r + V_\theta \underline{e}_\theta = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta$$

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \qquad E_M = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{mgR^2}{r} \rightarrow$$

$$\frac{2E_M}{m} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - \frac{2gR^2}{r} = cte$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{d} + \frac{1}{ed} = \frac{e\cos\theta + 1}{ed} \rightarrow r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{-(-\dot{\theta}e\sin\theta)ed}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{ed(e\sin\theta)\dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}$$

انرژی کل مکانیکی بازای هر مقداردلخواه θ ثابت است

$$\theta = 0 \qquad \dot{r} = 0 \quad , \quad r = \frac{ed}{1+e} \qquad \frac{2E_M}{m} = r^2\dot{\theta}^2 - \frac{2gR^2}{r}$$

$$\frac{2E_M}{m}=r^2\dot{\theta}^2-\frac{2gR^2}{r} \qquad r^2\dot{\theta}=cte=h$$

$$\frac{2E_M}{m}=r^2\frac{h^2}{r^4}-\frac{2gR^2}{r}=\frac{h^2}{r^2}-\frac{2gR^2}{r} \qquad e=\frac{ch^2}{gR^2}=\frac{h^2}{dgR^2}$$

$$\frac{2E_M}{m}=\frac{edgR^2}{r^2}-\frac{2gR^2}{r} \qquad r=\frac{ed}{1+e}$$

$$\frac{2E_M}{m}=\frac{gR^2(1+e)^2}{ed}-\frac{2gR^2(1+e)}{ed}=\frac{gR^2(e^2-1)}{ed}$$

$$\frac{2E_M}{m}=\frac{g^2R^4(e^2-1)}{h^2}\rightarrow \boxed{E_M=\frac{mg^2R^4(e^2-1)}{2h^2}}$$

$a=\dfrac{ed}{1-e^2}$ برای مدار بیضی $E_M=-\dfrac{mg^2R^4ed}{2ah^2}=-\dfrac{mg^2R^4ed}{2aedgR^2}\rightarrow$

$$\boxed{E_M=-\frac{mg\ R^2}{2a}}$$

علامت منفی نشان دهنده این است که مقدار انرژی پتانسیل در مدار بیضی از مقدار انرژی جنبشی بزرگتر است.

$$\boxed{E_M = \frac{mg^2R^4(e^2-1)}{2h^2}}$$

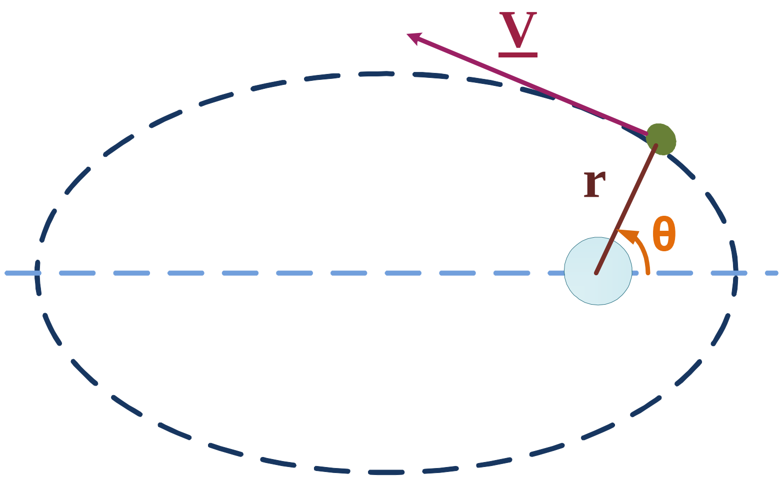
$e = 0 \quad \rightarrow E_M < 0$ مدار دایره

$e < 1 \quad \rightarrow E_M < 0$ مدار بیضی

$e = 1 \quad \rightarrow E_M = 0$ مدار سهمی

$e > 1 \quad \rightarrow E_M > 0$ مدار هذلولی

مثال: رابطه ای برای سرعت ماهواره در مدار بیضی تعیین کرده مقادیر سرعت ماهواره را در r_{max}, r_{min} بیابید.



$$E_M = T + U = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{mgR^2}{r}$$

$$\frac{1}{2}mV^2 - mg\frac{R^2}{r} = -\frac{mgR^2}{2a}$$

$$V^2 = \frac{2gR^2}{r} - \frac{gR^2}{a} = gR^2(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}) = 2gR^2(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a})$$

$$V^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) \qquad r_{\min} = a(1-e) \qquad r_{\max} = a(1+e)$$

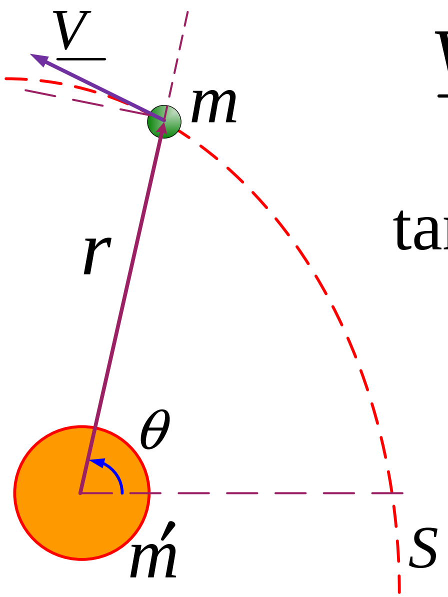
$$V^2\Big|_{r=r_{\min}} = 2gR^2\left[\frac{1}{a(1-e)} - \frac{1}{2a}\right] = \frac{2gR^2}{a}\times\frac{1+e}{2(1-e)} = \frac{gR^2}{a}\times\frac{1+e}{1-e}$$

$$V\Big|_{r=r_{\min}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{\max}}{r_{\min}}}$$

$$V^2\Big|_{r=r_{\max}} = 2gR^2\left[\frac{1}{a(1+e)} - \frac{1}{2a}\right] = \frac{2gR^2}{a}\times\frac{1-e}{2(1+e)} = \frac{gR^2}{a}\times\frac{1-e}{1+e}$$

$$V\Big|_{r=r_{\max}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}}$$

مثال: برای یک ماهواره که روی مداری با خروج از مرکز e حرکت می کند زاویه بـردار سرعت را نسبت به جهت θ بدست آورید.



$$\underline{V} = V_r \underline{e}_r + V_\theta \underline{e}_\theta \qquad V_r = \dot{r} \qquad V_\theta = r\dot{\theta}$$

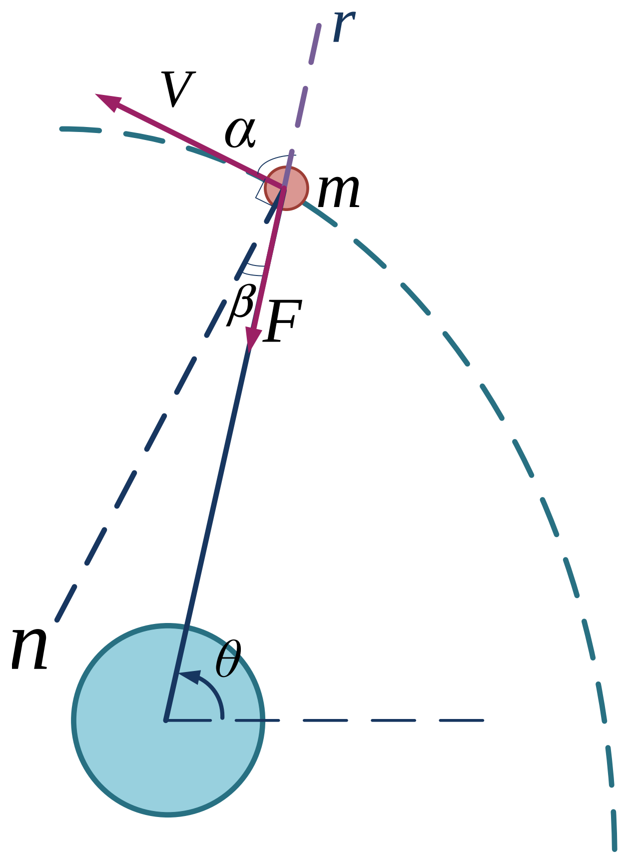
$$\tan\beta = \frac{V_r}{V_\theta} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} \qquad \frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{d} + \frac{1}{ed} = \frac{e\cos\theta + 1}{ed}$$

$$r = \frac{ed}{e\cos\theta + 1} \qquad \dot{r} = \frac{e\dot{\theta}\sin\theta \times ed}{(e\cos\theta + 1)^2}$$

$$\tan\beta = \frac{e\dot{\theta}\sin\theta(ed)}{(1 + e\cos\theta)^2} \times \frac{(1 + e\cos\theta)}{ed \times \dot{\theta}} = \frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta}$$

$$\boxed{\beta = \tan^{-1}\left(\frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta}\right)}$$

مثال: بردار سرعت ماهواره ای که به دور زمین در مداری در حال گردش است در یـک لحظه معین با جهت بردار شعاعی r زوایه ی α می سازد مطلوبست شعاع انحنـای مـسیر برای این موقعیت ماهواره.



$$\beta = \pi / 2 - \alpha$$

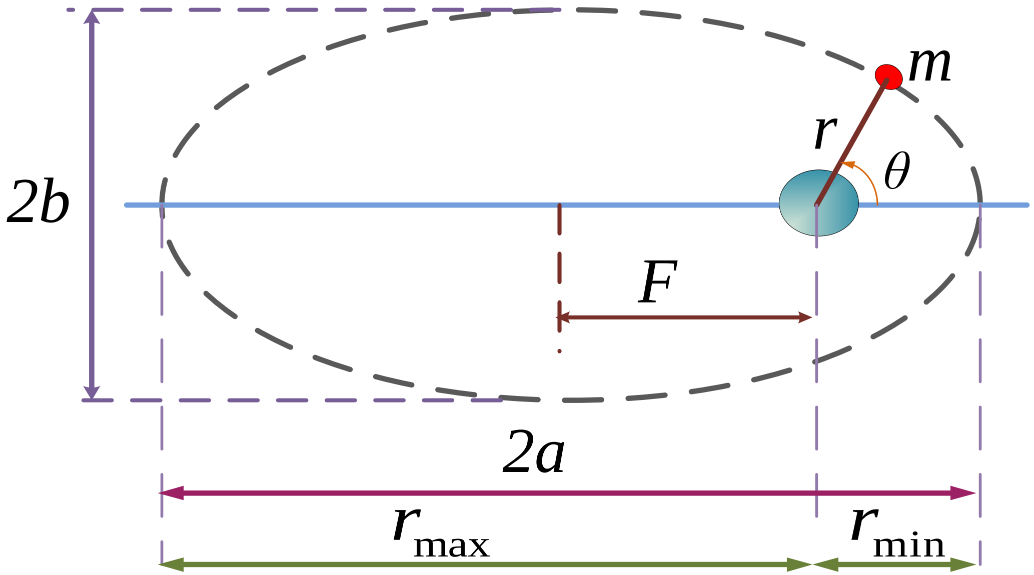
$$F = \frac{mgR^2}{r^2}$$

$$\sum F_n = F\cos\beta = \frac{mgR^2}{r^2}\sin\alpha$$

$$\sum F_n = ma_n \quad \Rightarrow \quad \frac{mgR^2}{r^2}\sin\alpha = m\frac{V^2}{\rho}$$

$$\boxed{\rho = \frac{V^2 R^2}{gR^2 \sin\alpha}}$$

مثال: برای یک ماهواره که در مدار بیضی شکل حرکت می کند فاصله ی شعاعی r را (فاصله ی مرکز زمین تا ماهواره) برای وقتی که جابجایی زاویه ای برابر 90درجه است بر حسب r_{min}, r_{max} و نصف قطر بزرگتر مدار بیضی ارائه کنید



$$\frac{1}{r}=\frac{\cos\theta}{d}+\frac{1}{ed}$$

$$\theta=\pi/2 \quad\rightarrow\quad \left.\frac{1}{r}\right|_{\theta=\pi/2}=\frac{1}{ed}$$

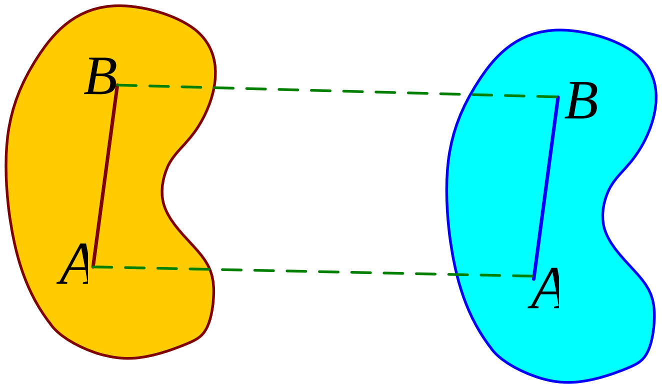
$$a=\frac{ed}{1-e^2} \quad\rightarrow\quad ed=a\left(1-e^2\right)$$

$$\left.r\right|_{\theta=\pi/2}=a\left(1-e^2\right) \qquad r_{max}=a\left(1+e\right) \qquad r_{min}=a\left(1-e\right)$$

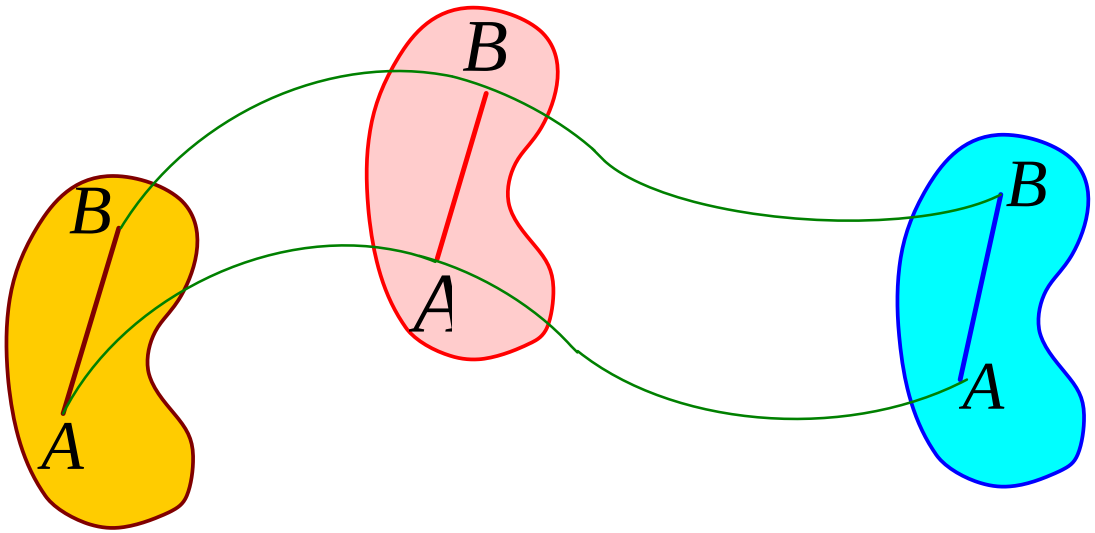
$$\boxed{r=\frac{r_{min}\times r_{max}}{a}}$$

۸- سینماتیک جسم صلب

۸-۱ حرکت انتقالی، دورانی و ترکیبی

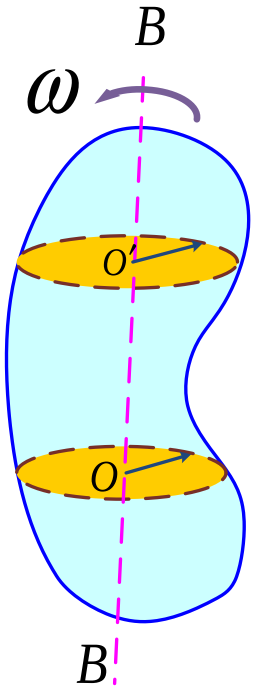


انتقالی مستقیم الخط



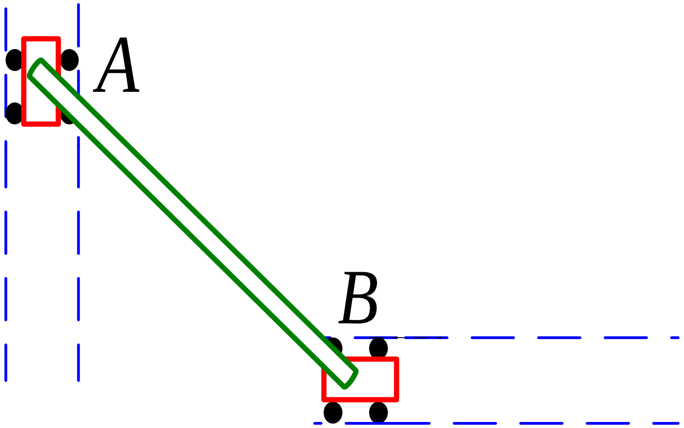
انتقالی منحنی الخط

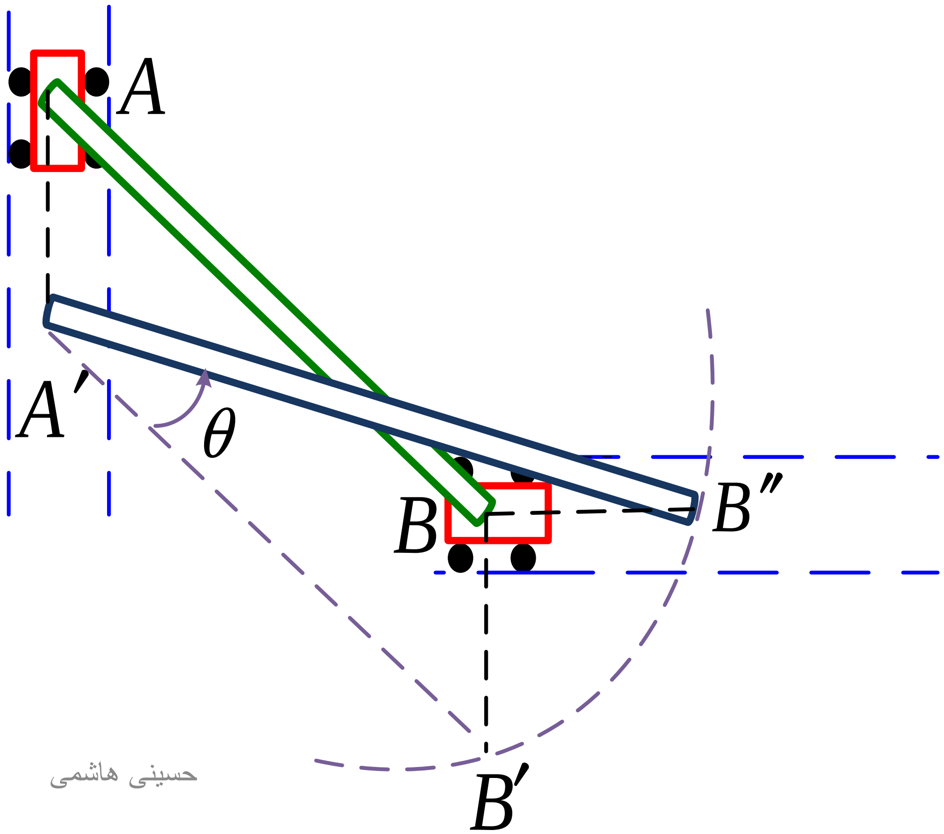
۲- حرکت دورانی حول محور ثابت



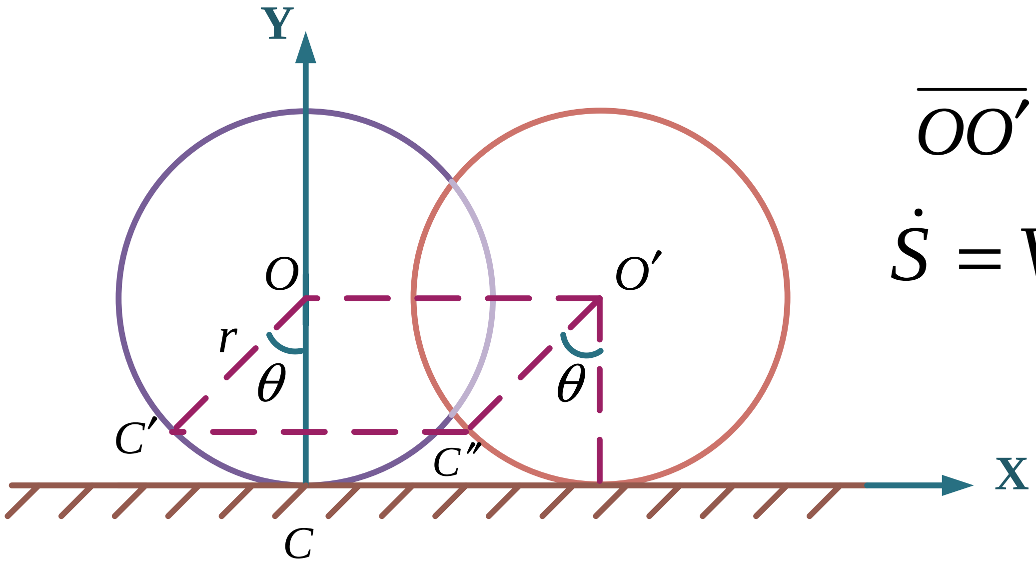
نقاطی از جسم که روی صفحات موازی قرار دارند دوایر هم محور با محور ثابت ایجاد می کنند.

۳- حرکت توام (انتقالی و دورانی) یا حرکت ترکیبی





دیسکی را به شعاع r در نظر می گیریم که حرکت غلتش بدون لغزش دارد.



$$\overline{OO'} = S = r\theta$$

$$\dot{S} = V = r\dot{\theta} = r\omega$$

$$\ddot{S} = \dot{V} = a = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} = r\alpha$$

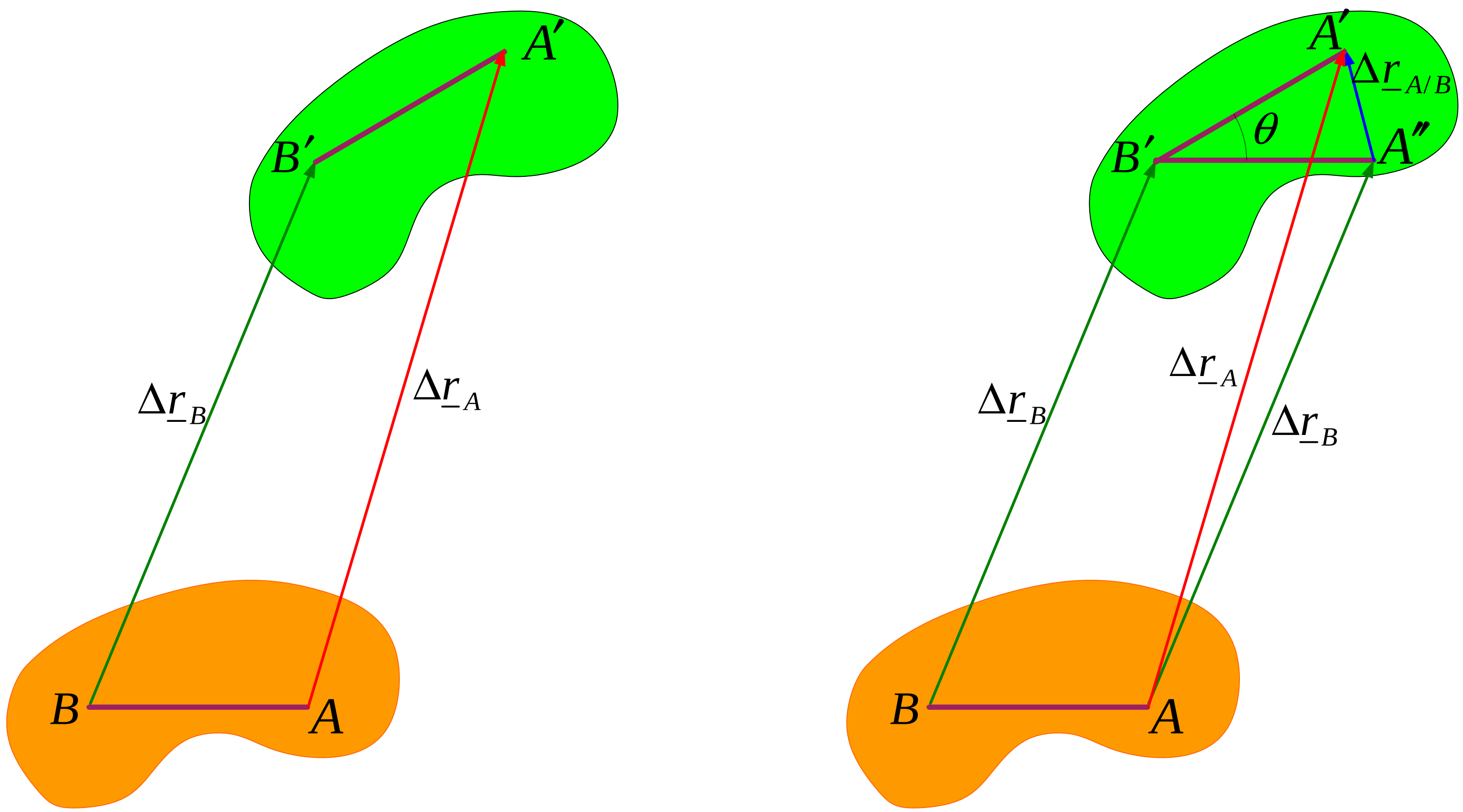
$$x = S - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta)$$

$$\dot{x} = r\left(\dot{\theta} - \dot{\theta}\cos\theta\right) = r\dot{\theta}\left(1 - \cos\theta\right) = r\omega\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta = r\omega\sin\theta$$

$$\underline{V} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j} = r\omega\left(1 - \cos\theta\right)\underline{i} + r\omega\sin\theta\,\underline{j}$$

۲-۸ حرکت نسبی محورهای مقایسه انتقالی

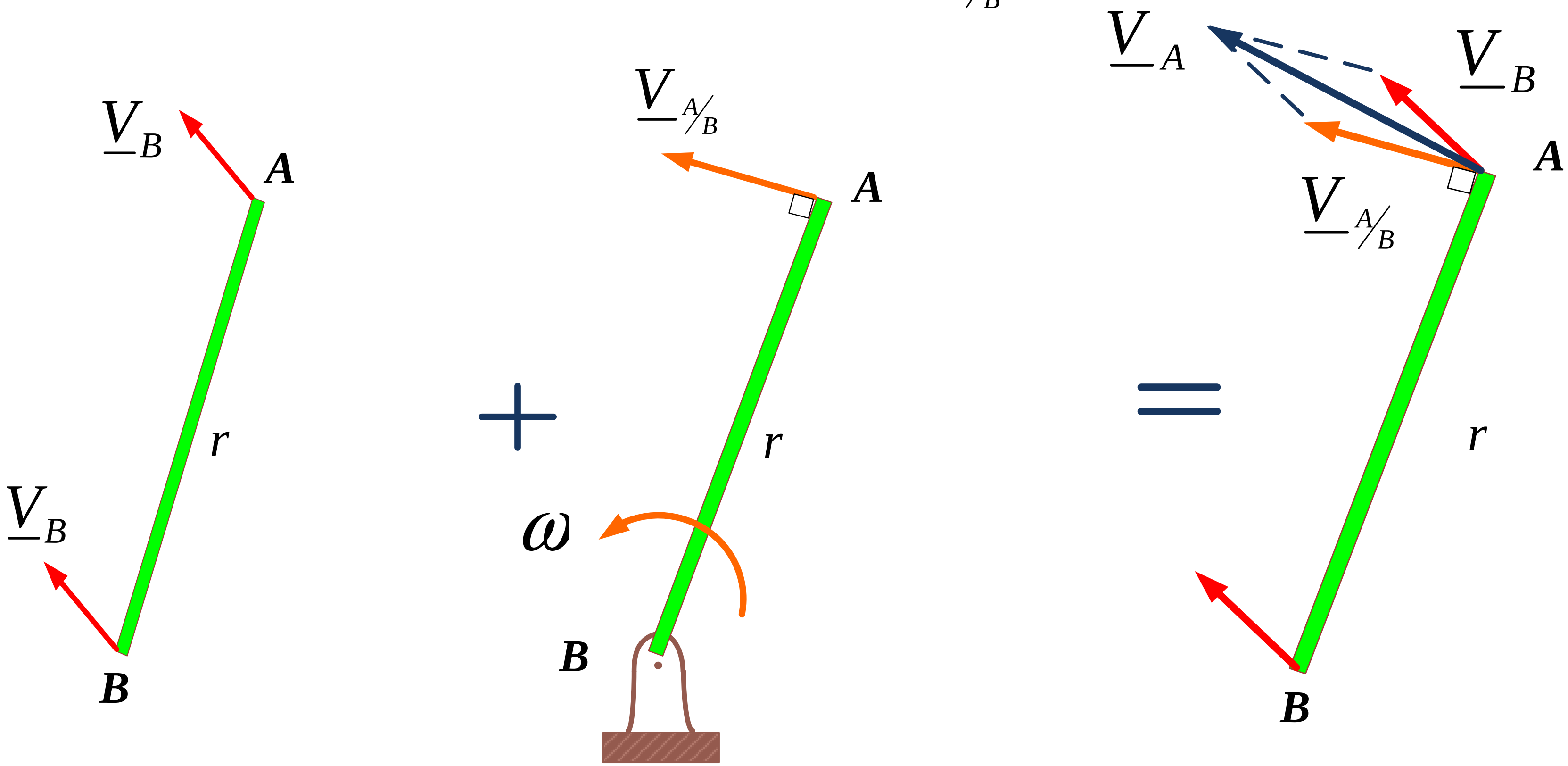


$$\Delta \underline{r}_A = \Delta \underline{r}_B + \Delta \underline{r}_{A/B}$$

$$\frac{\Delta \underline{r}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta \underline{r}_B}{\Delta t} + \frac{\Delta \underline{r}_{A/B}}{\Delta t} \qquad \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B} \qquad \frac{d\underline{V}_A}{dt} = \frac{d\underline{V}_B}{dt} + \frac{d\underline{V}_{A/B}}{dt}$$

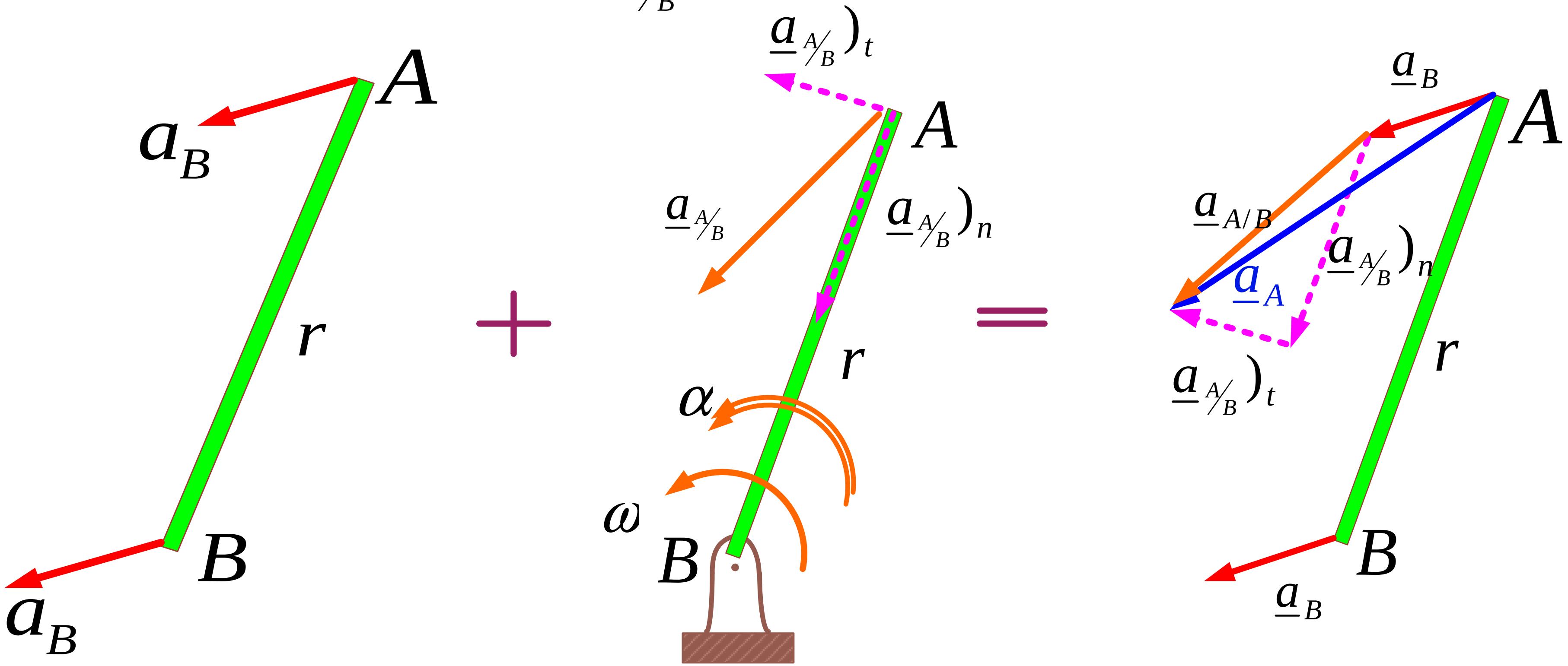
$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B}$$

$$\underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$



$$V_{A/B} = r\omega \qquad \underline{V}_{A/B} = \underline{\omega} \times \underline{r} \qquad \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B} = \underline{V}_B + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B}$$



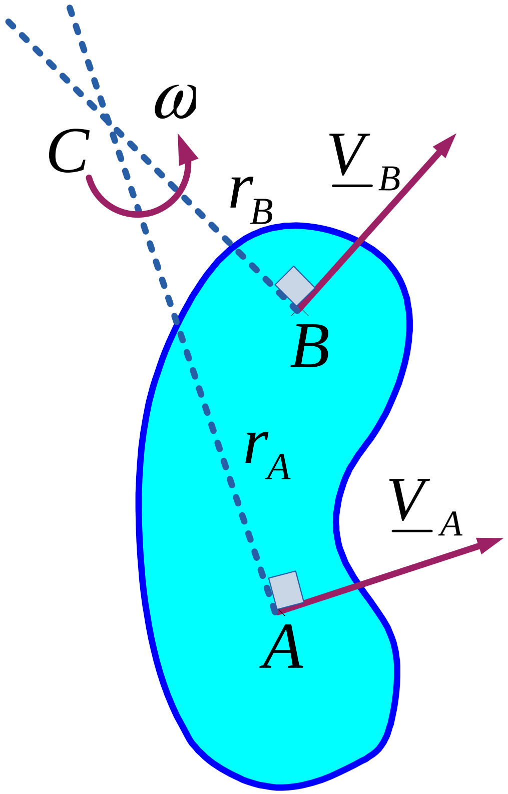
$$\underline{a}_{A/B} = \underline{a}_{A/B}\big)_n + \underline{a}_{A/B}\big)_t \qquad a_{A/B}\big)_t = r\alpha \qquad \underline{a}_{A/B}\big)_t = \underline{\alpha} \times \underline{r}$$

$$a_{A/B}\big)_n = r\omega^2 \qquad \underline{a}_{A/B}\big)_n = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \qquad \underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B} = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B}\big)_n + \underline{a}_{A/B}\big)_t$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \underline{\alpha} \times \underline{r}$$

۸-۳ مرکز آنی دوران

یک نقطه آنی که جسم در هر لحظـه حـول آن دوران می کند به نام مرکز آنی دوران نامیده می شود.



نقطه C مرکز آنی دوران است

$$V_A = r_A\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{V_A}{r_A}$$

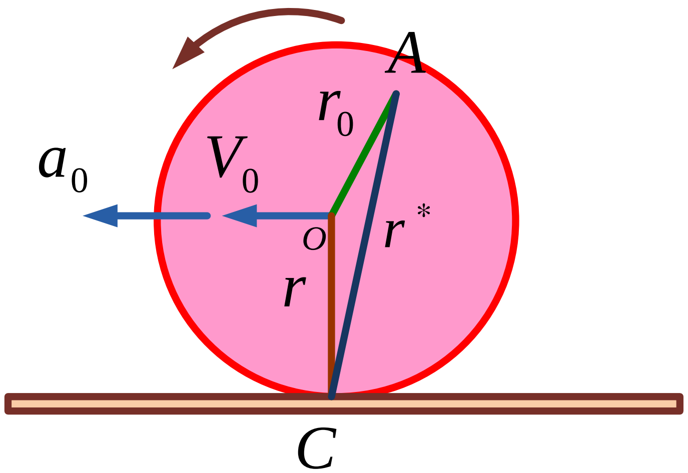
$$V_B = r_B\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{V_B}{r_B}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{r_A}{r_B}$$

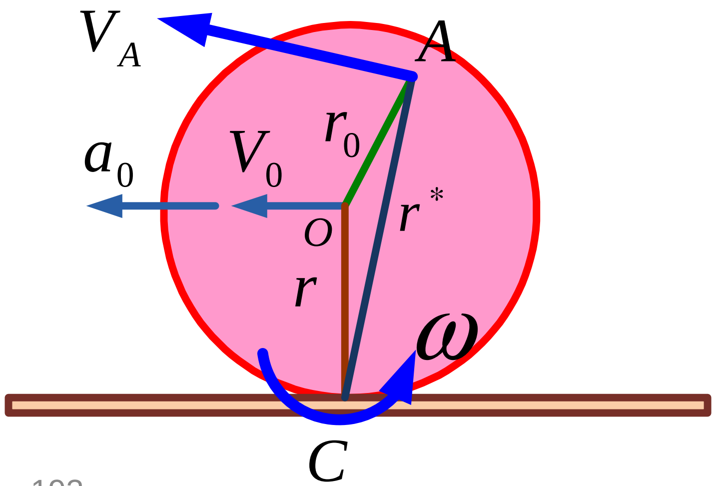
سرعت خطی مرکز آنی دوران همواره برابر صفر است.

$$V_C = 0$$

دیسکی را در نظر بگیرید که روی سطح صافی غلتش بدون لغزش داشته باشد.
دو نقطه A,C را روی محیط و پیشانی دیسک در نظر می گیریم. می خواهیم سـرعت و شتاب این نقاط را به دست آوریم.



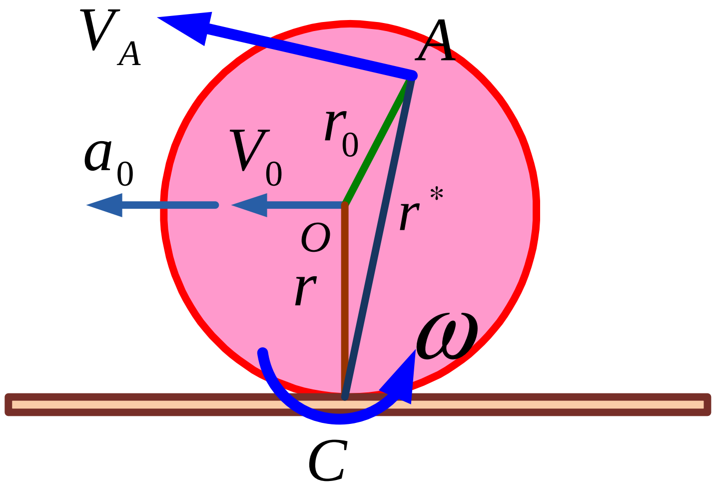
نقطه C در این لحظه نقطه ایست که جسم می خواهد حـول آن بچرخـد پس مرکـز آنـی دوران است



$$V_C = 0$$

$$V_0 = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{V_0}{r}$$

$$V_A = r^*\omega = r^*\frac{V_0}{r}$$

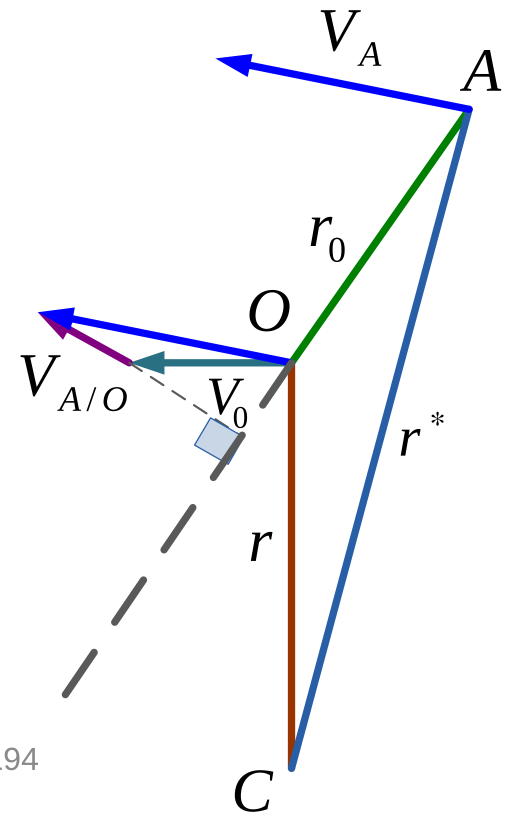


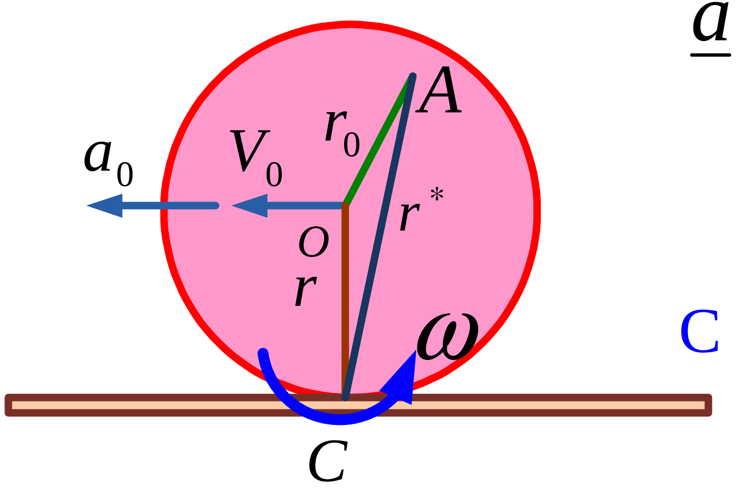
روش ترسیمی: (Oرا مرجع قرار می دهیم)

$$\underline{V}_A = \underline{V}_0 + \underline{V}_{A/O}$$

$$\underline{V}_{A/O} = \underline{\omega} \times \underline{r}_0 \qquad V_{A/O} = r_0 \omega$$

$$\underline{V}_A = \underline{V}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_0$$

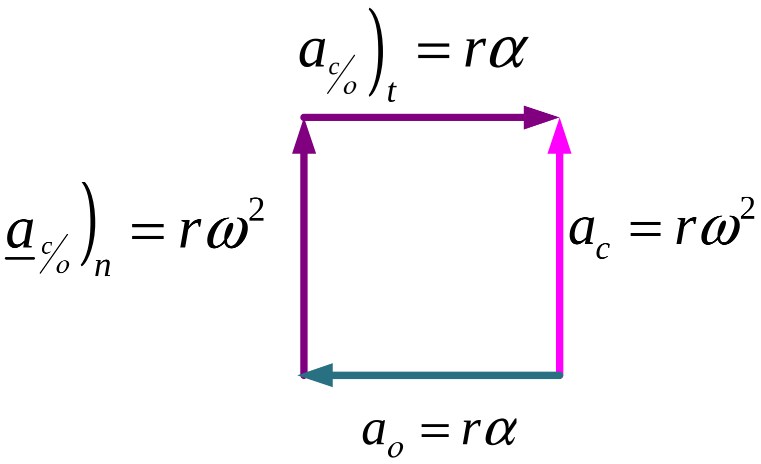




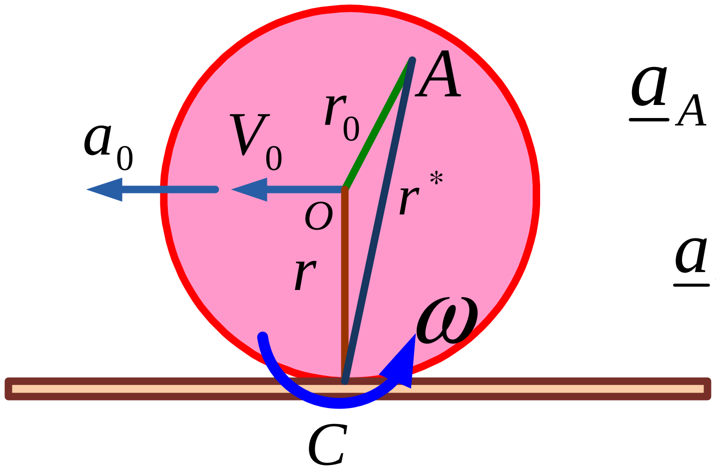
$$\underline{a}_C = \underline{a}_o + \underline{a}_{C/O} = \underline{a}_o + \underline{a}_{C/O}\big)_n + \underline{a}_{C/O}\big)_t$$

$$a_O = r\alpha \qquad a_{C/O}\big)_n = r\omega^2$$

مسیر نقطه C یک دایره است به شعاع r . تمایل حرکت C نیز به سمت راست است.



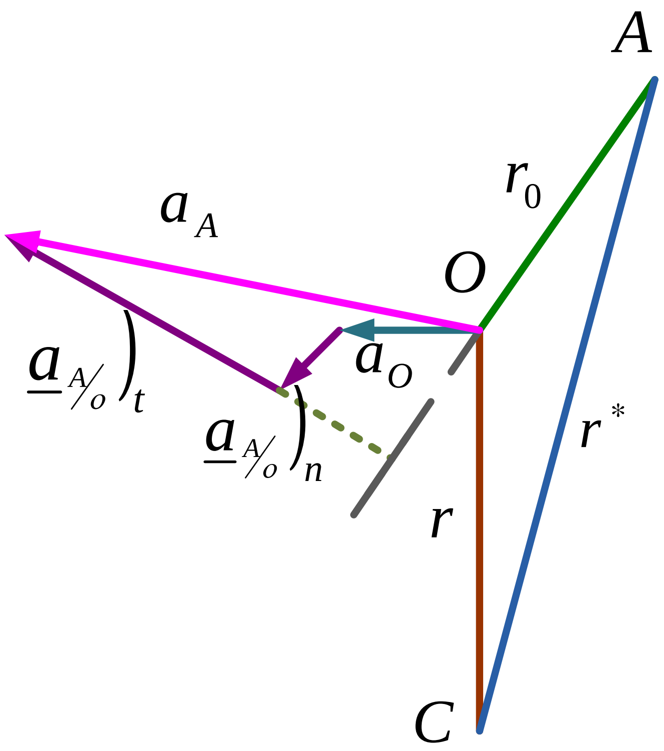
$$\boxed{a_C = r\omega^2}$$



$$\underline{a}_A = \underline{a}_o + \underline{a}_{A/o} = \underline{a}_o + \underline{a}_{A/o}\Big)_t + \underline{a}_{A/o}\Big)_n$$

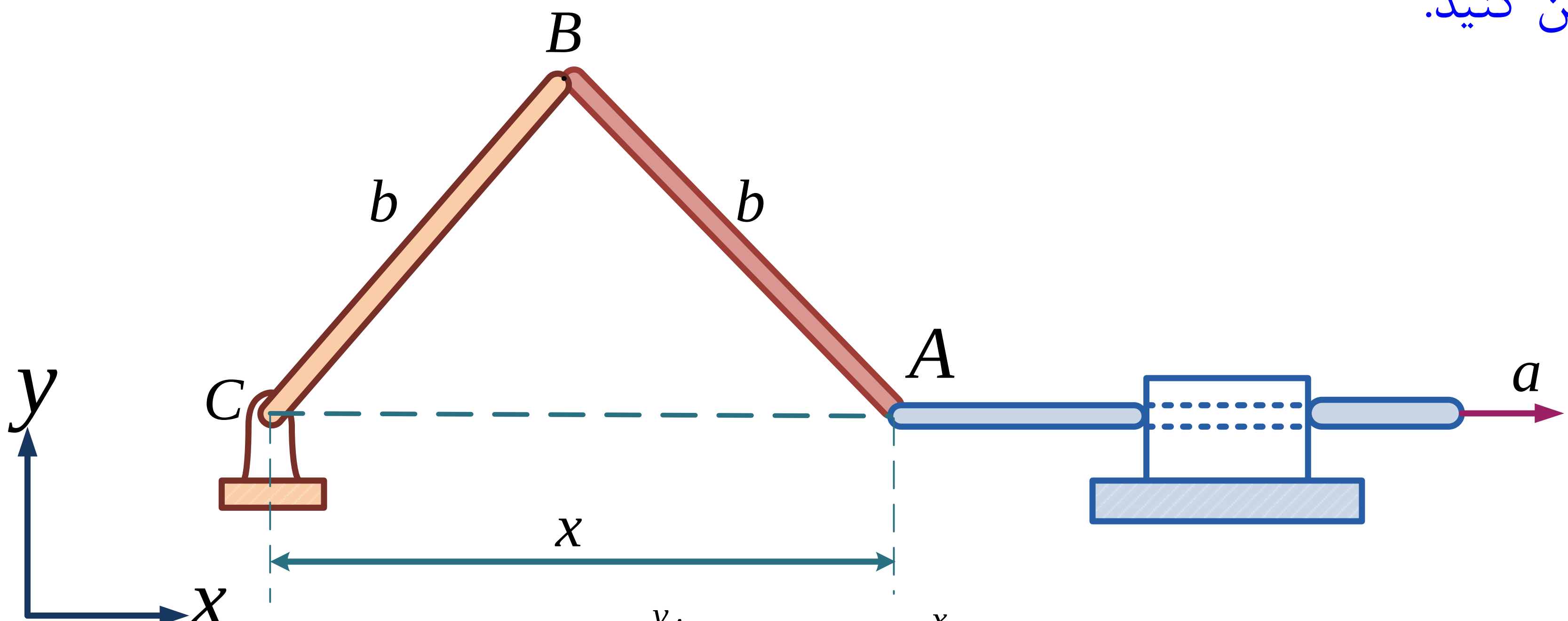
$$\underline{a}_{A/o}\Big)_n = \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}_o) \qquad \underline{a}_{A/o}\Big)_t = \underline{\alpha}\times\underline{r}_o$$

$$a_{A/o}\Big)_n = r_o\omega^2 \qquad a_{A/o}\Big)_t = r_o\alpha$$



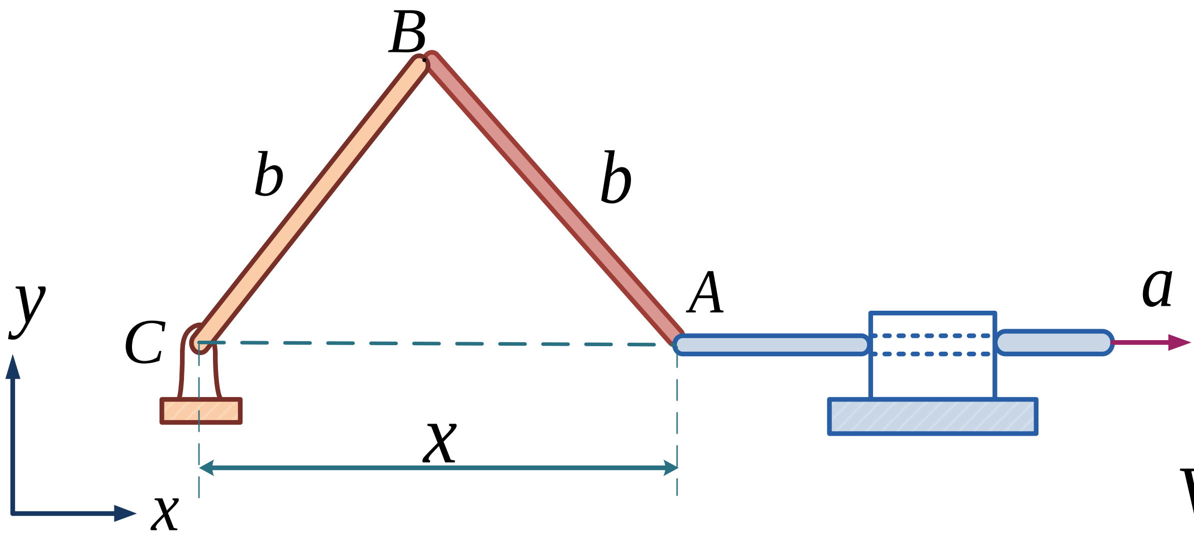
مسایل

مثال: به نقطه A شتابی ثابت برابر a به سمت راست داده می شود این نقطـه از حالـت سکون در S=0 به راه می افتد سرعت زاویه ای ω مربوط به میله AB را بر حسب a , x تعیین کنید.



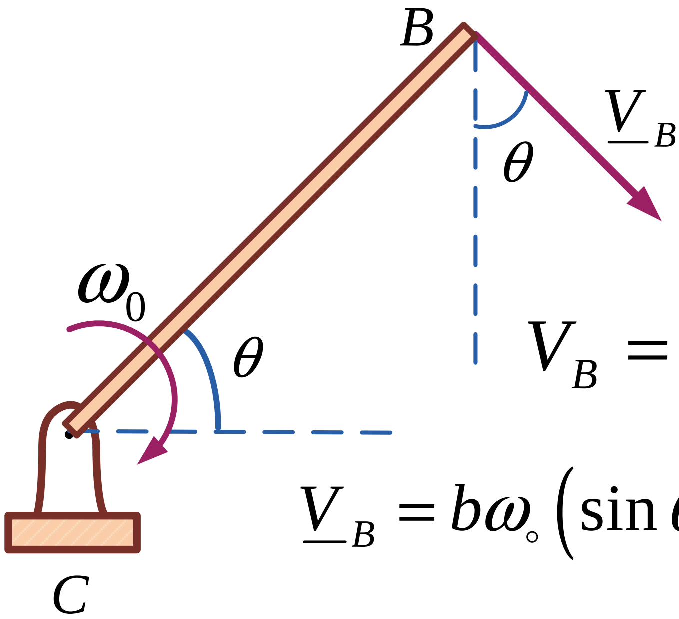
$$VdV = adS \quad \Rightarrow \quad \int_0^{v_A} VdV = a\int_0^x dS$$

$$\tfrac{1}{2} V_A^2 = ax \;\rightarrow\; V_A = \sqrt{2ax} \;\rightarrow\; \underline{V}_A = \sqrt{2ax}\ \underline{i}$$



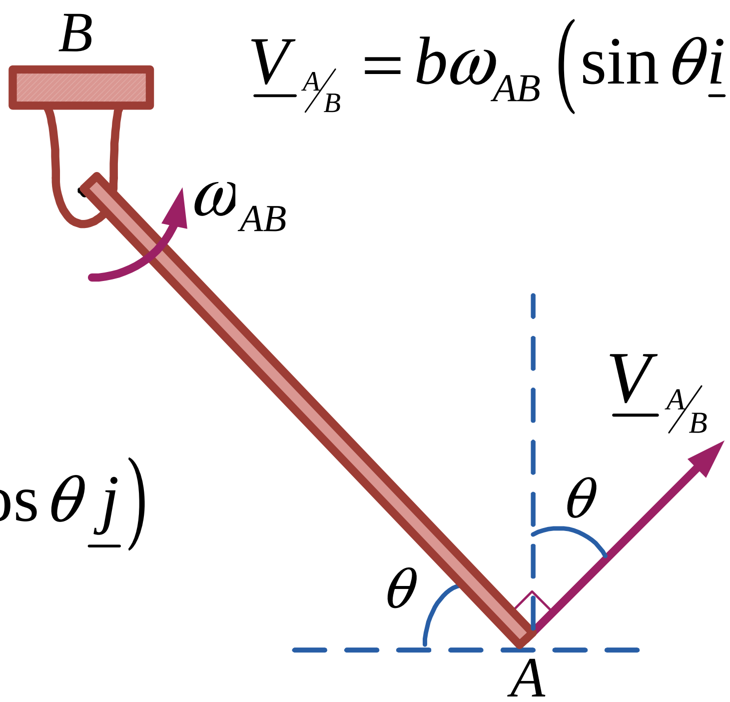
$$V_{A/B} = b\omega_{AB}$$

$$\underline{V}_{A/B} = b\omega_{AB}\left(\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}\right)$$



$$V_B = b\omega_\circ$$

$$\underline{V}_B = b\omega_\circ\left(\sin\theta\,\underline{i} - \cos\theta\,\underline{j}\right)$$



$$\underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$

$$\underline{V}_A = \sqrt{2ax}\ \underline{i} \qquad \underline{V}_B = b\omega_\circ\left(\sin\theta\underline{i} - \cos\theta\,\underline{j}\right)$$

$$\underline{V}_{A/B} = b\omega_{AB}\left(\sin\theta\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}\right) \qquad \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$

$$\sqrt{2ax}\ \underline{i} \ = \ \left(b\omega_\circ + b\omega_{AB}\right)\sin\theta\underline{i} + \left(-b\omega_\circ + b\omega_{AB}\right)\cos\theta\,\underline{j}$$

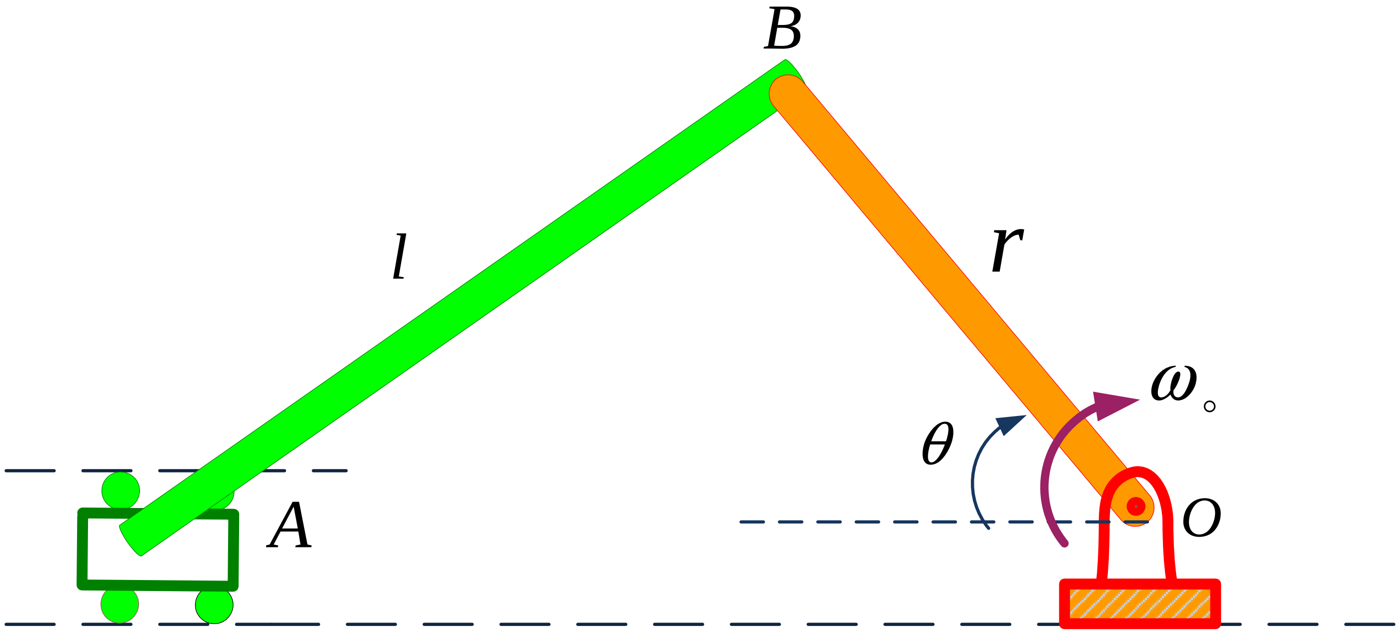
$$\begin{cases} \sqrt{2ax} \ = \ b\left(\omega_\circ + \omega_{AB}\right)\sin\theta \\ 0 \ = \ b\left(\omega_{AB} - \omega_\circ\right) \ \Rightarrow \ \omega_{AB} = \omega_\circ \end{cases}$$

$$\sqrt{2ax} \ = 2b\omega_{AB}\sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{b^2 - x^2/4}}{b}$$

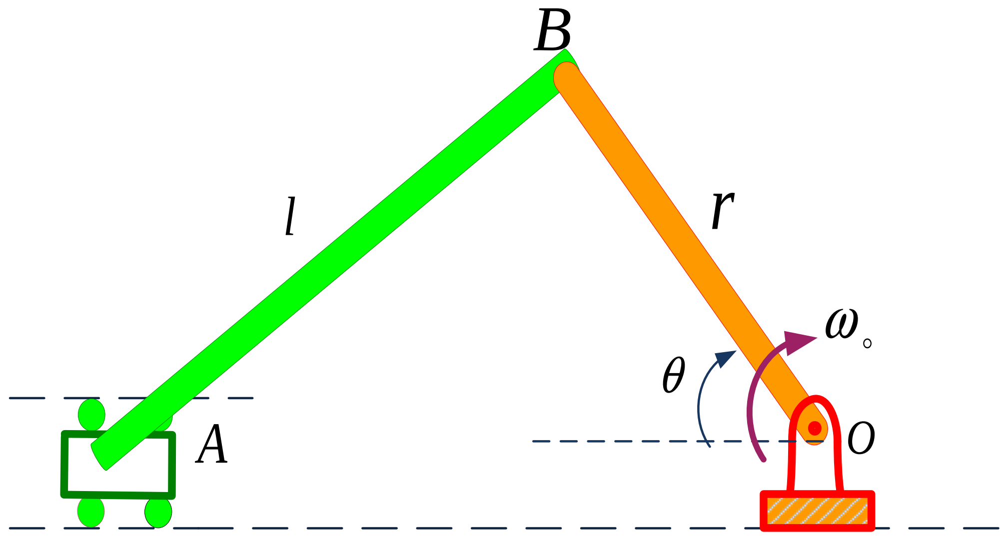
$$\sqrt{2ax} \ = 2\mathrm{b}\omega_{AB} \times \frac{\sqrt{4\mathrm{b}^2 - x^2}}{2\mathrm{b}}$$

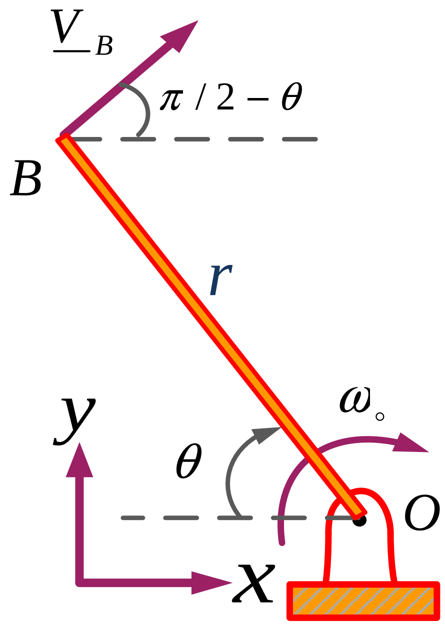
$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{\sqrt{2\mathrm{ax}}}{\sqrt{4\mathrm{b}^2 - x^2}}}$$

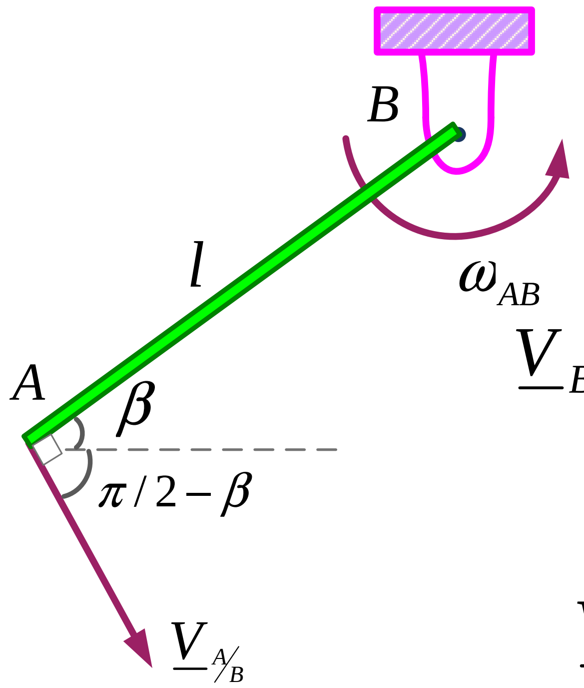
مثال) برای سیستم نشان داده شده در شکل سـرعت زاویـه ای ω و شـتـاب زاویـه ای α
مربوط به میله ی AB را بر حسب θ (زاویه میل لنگ) پیدا کنید سرعت ثابت میل لنگ
برابر ω_0 است.



میله OB چون مفصل شده فقط دوران می کند اما AB هم حرکت دورانی دارد
هم حرکت انتقالی







$$V_B = r\omega_\circ$$

$$\underline{V}_B = V_B \sin\theta\,\underline{i} + V_B \cos\theta\,\underline{j} = r\omega_\circ\left(\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}\right)$$

$$V_{A/B} = l\omega_{AB}$$

$$\underline{V}_{A/B} = l\omega_{AB}(\sin\beta\,\underline{i} - \cos\beta\,\underline{j}) \qquad \underline{V}_A = V_A\,\underline{i}$$

$$\underline{V}_A = V_A \underline{i} \qquad \underline{V}_B = r\omega_\circ \left(\sin\theta \underline{i} + \cos\theta \underline{j}\right)$$

$$\underline{V}_{A/B} = l\omega_{AB}(\sin\beta \underline{i} - \cos\beta \underline{j}) \qquad \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B}$$

$$V_A \underline{i} = r\omega_\circ \left(\sin\theta \underline{i} + \cos\theta \underline{j}\right) + l\omega_{AB}\left(\sin\beta \underline{i} - \cos\beta \underline{j}\right)$$

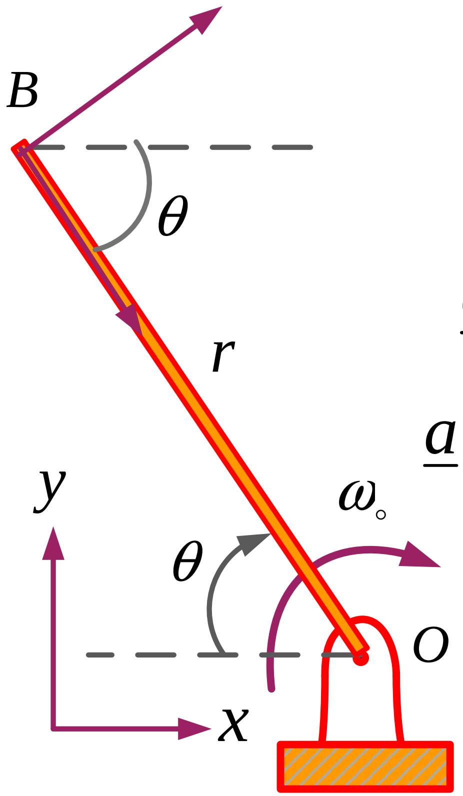
$$= \left(r\omega_\circ \sin\theta + l\omega_{AB}\sin\beta\right)\underline{i} + \left(r\omega_\circ \cos\theta - l\omega_{AB}\cos\beta\right)\underline{j}$$

$$V_A = r\omega_0 \sin\theta + l\omega_{AB}\sin\beta \qquad 0 = r\omega_0 \cos\theta - l\omega_{AB}\cos\beta$$

$$\frac{l}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin\beta}$$ قضیه سینوسها: $$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\theta \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta}$$

$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{r\omega_\circ \cos\theta}{l\cos\beta} = \frac{r\omega_\circ \cos\theta}{l\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta}}}$$

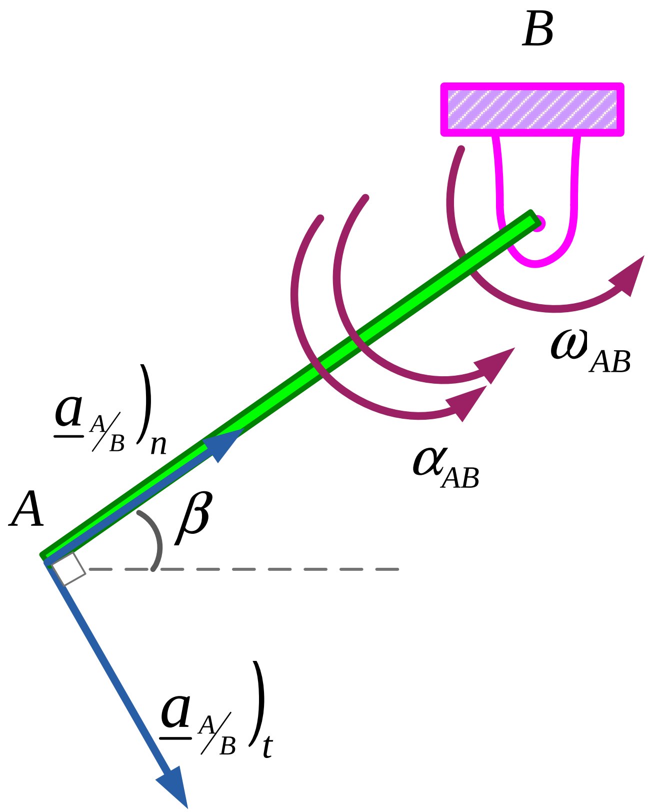
$$V_A = r\omega_\circ \sin\theta + \frac{r\omega_\circ \cos\theta}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta}}\left(\frac{r}{l}\sin\theta\right)$$



$$\underline{a}_B = \underline{a}_B)_n + \underline{a}_B)_t \qquad a_B)_t = r\alpha = r\dot{\omega}_0 = 0$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_B)_n = \underline{\omega}_\circ \times (\underline{\omega}_\circ \times \underline{r}) \qquad a_B = r\omega_\circ^2$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_B)_n \cos\theta \underline{i} - \underline{a}_B)_n \sin\theta \underline{j} = r\omega_\circ^2 \left(\cos\theta \underline{i} - \sin\theta \underline{j}\right)$$



$$\underline{a}_{A/B} = \underline{a}_{A/B}\big)_n + \underline{a}_{A/B}\big)_t$$

$$a_{A/B}\big)_n = l\left(\omega_{AB}\right)^2 \qquad a_{A/B}\big)_t = l\alpha_{AB}$$

$$\underline{a}_{A/B})_n = l\omega_{AB}^2\left(\cos\beta\underline{i} + \sin\beta\,\underline{j}\right)$$

$$\underline{a}_{A/B})_t = l\alpha_{AB}\left(\sin\beta - \cos\beta\right)\underline{j}$$

$$\underline{a}_{A/B} = \left(l\omega_{AB}^2\cos\beta + l\alpha_{AB}\sin\beta\right)\underline{i} + \left(l\omega_{AB}^2\sin\beta - l\alpha_{AB}\cos\beta\right)\underline{j}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \underline{a}_{A/B} \qquad \underline{a}_A = a_A \underline{i} \qquad \underline{a}_B = r\omega_\circ^2 \left(\cos\theta \underline{i} - \sin\theta\, \underline{j}\right)$$

$$\underline{a}_{A/B} = \left(l\omega_{AB}^2 \cos\beta + l\alpha_{AB} \sin\beta\right)\underline{i} \;+\; \left(l\omega_{AB}^2 \sin\beta - l\alpha_{AB}\cos\beta\right)\underline{j}$$

$$a_A \underline{i} = r\omega_\circ^2 \left(\cos\theta \underline{i} - \sin\theta\, \underline{j}\right) + \left(l\omega_{AB}^2 \cos\beta + l\alpha_{AB}\sin\beta\right)\underline{i} +$$

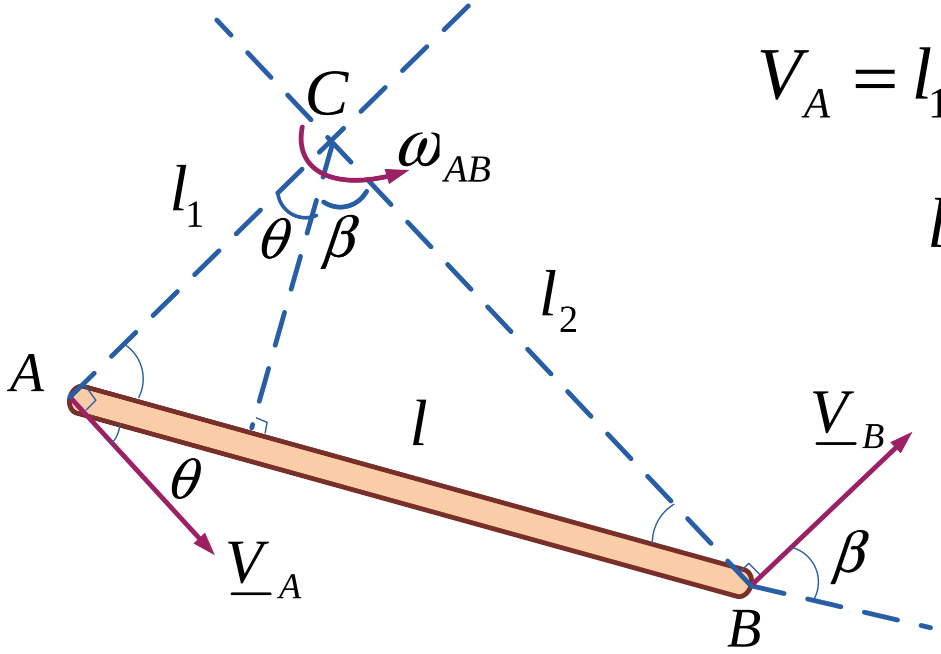
$$\left(l\omega_{AB}^2 \sin\beta - l\alpha_{AB}\cos\beta\right)\underline{j} = \left(r\omega_\circ^2 \cos\theta + l\omega_{AB}^2\cos\beta + l\alpha_{AB}\sin\beta\right)\underline{i}$$

$$-\left(r\omega_\circ^2 \sin\theta - l\omega_{AB}^2 \sin\beta + l\alpha_{AB}\cos\beta\right)\underline{j}$$

$$\begin{cases} a_A = r\omega_\circ^2 \cos\theta + l\omega_{AB}^2 \cos\beta + l\alpha_{AB}\sin\beta \\ 0 = r\omega_\circ^2 \sin\theta - l\omega_{AB}^2\sin\beta + l\alpha_{AB}\cos\beta \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha_{AB} = \frac{l\omega_{AB}^2 \sin\beta - r\omega_\circ^2 \sin\theta}{l\cos\beta} = \frac{r\omega_\circ^2}{l}\sin\theta \frac{\dfrac{r^2}{l^2} - 1}{\left(1 - \dfrac{r^2}{l^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}}$$

مثال: اگر سرعت های دو انتهای A , B یک میله صلب رابط برابر v_B , v_A باشند سرعت زاویه ای میله رابط را تعیین کنید.



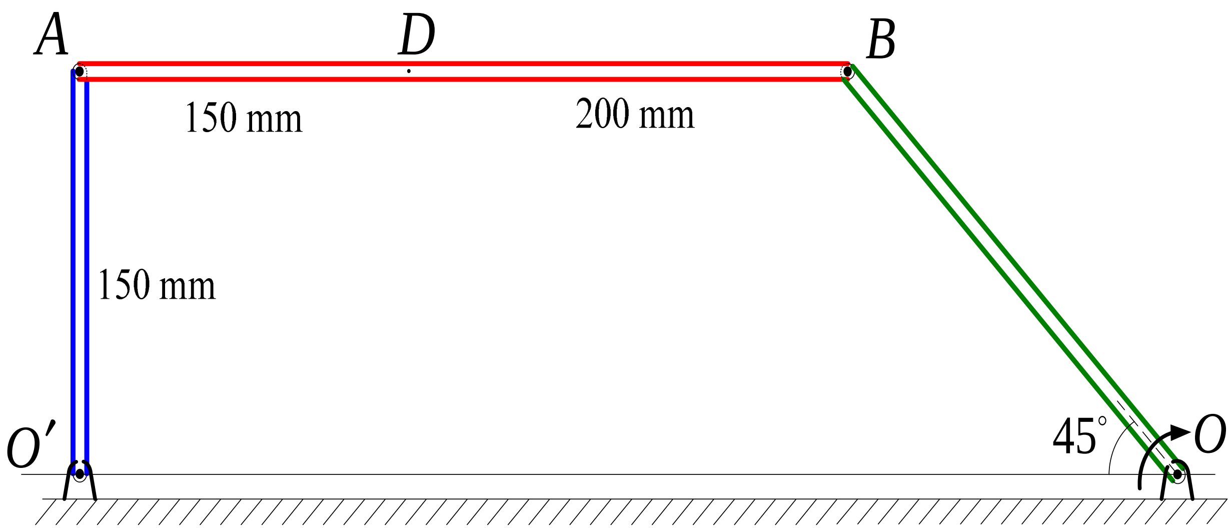
$$V_A = l_1 \omega_{AB} \qquad V_B = l_2 \omega_{AB}$$

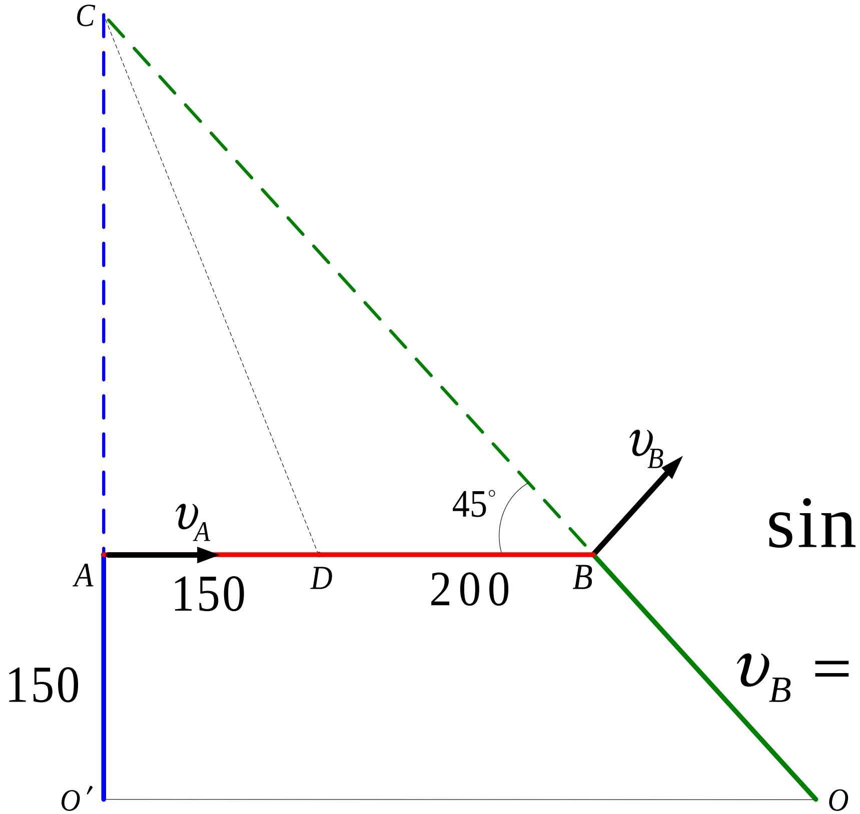
$$l_1 \sin\theta + l_2 \sin\beta = l$$

$$\frac{V_A}{\omega_{AB}} \sin\theta + \frac{V_B}{\omega_{AB}} \sin\beta = l$$

$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{V_A \sin\theta + V_B \sin\beta}{l}}$$

مثال: بازوی OB از سیستم نشان‌داده شده در شکل با سرعت زاویه‌ای 10 rad/sec در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. مطلوب است سرعت نقاط A و D و سرعت زاویه‌ای میله اتصال AB برای وضعیت نشان‌داده شده در شکل.





از آنجائی که جهات سرعت‌های نقاط A و B مشخص‌اند می‌توانیم مر کز آنی دوران را با رسم بردارهای شعاعی که بر امتداد سرعت‌های v_A و v_B در نقاط A و B عمودند بدست آوریم.

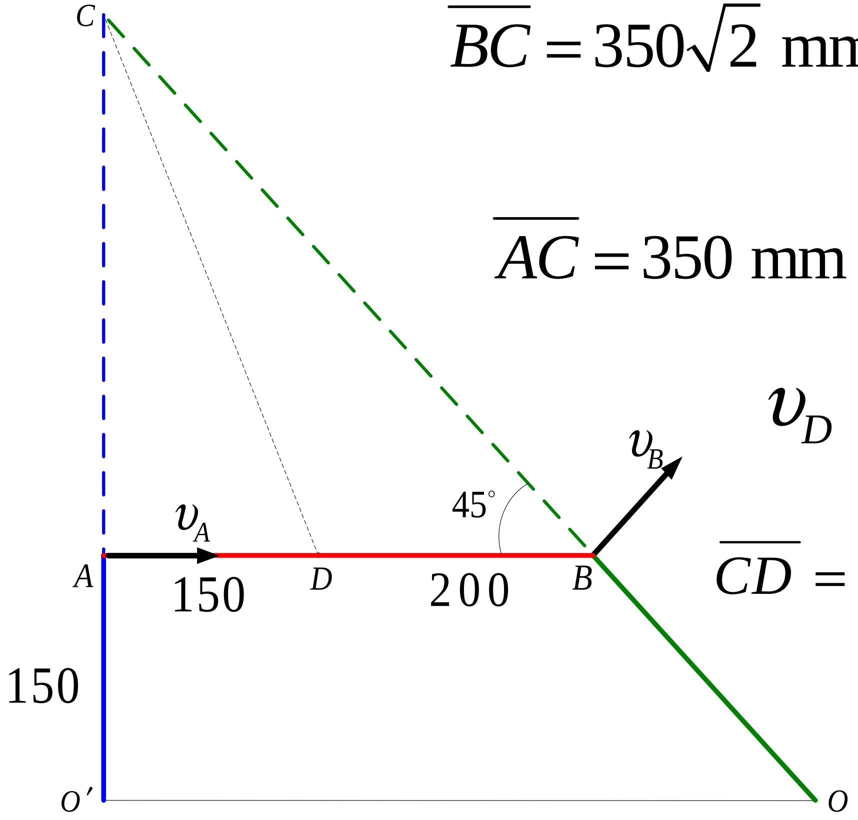
$$\sin 45^\circ = \frac{150}{\overline{OB}} \quad \Rightarrow \overline{OB} = 150\sqrt{2}\ \mathrm{mm}$$

$$v_B = \overline{OB}\ \omega_{OB} = 150\sqrt{2} \times 10 = 1500\sqrt{2}\ \mathrm{mm/s}$$

از طرف دیگر اگر سرعت زاویه‌ای مرکز آنی دوران را ω فرض کنیم داریم:

$$v_B = \overline{BC}\ \omega \qquad \cos 45^\circ = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{350}{\overline{BC}} \qquad \Rightarrow \overline{BC} = 350\sqrt{2}\ \mathrm{mm}$$

$$1500\sqrt{2} = 350\sqrt{2}\ \omega \qquad \omega = \frac{150}{35}\ \mathrm{rad/s}$$



$$\overline{BC} = 350\sqrt{2}\ \text{mm} \qquad \omega = \frac{150}{35}\ \text{rad/s}$$

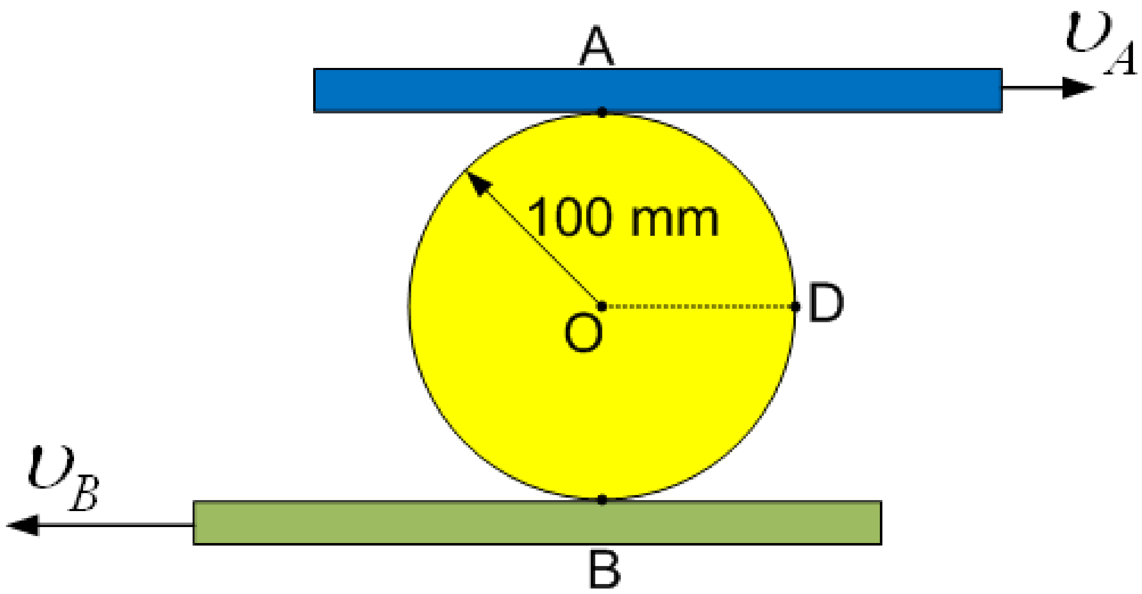
$$\overline{AC} = 350\ \text{mm} \quad v_A = \overline{AC}\ \omega = 350 \times \frac{150}{35} = 1500\ \text{mm/s}$$

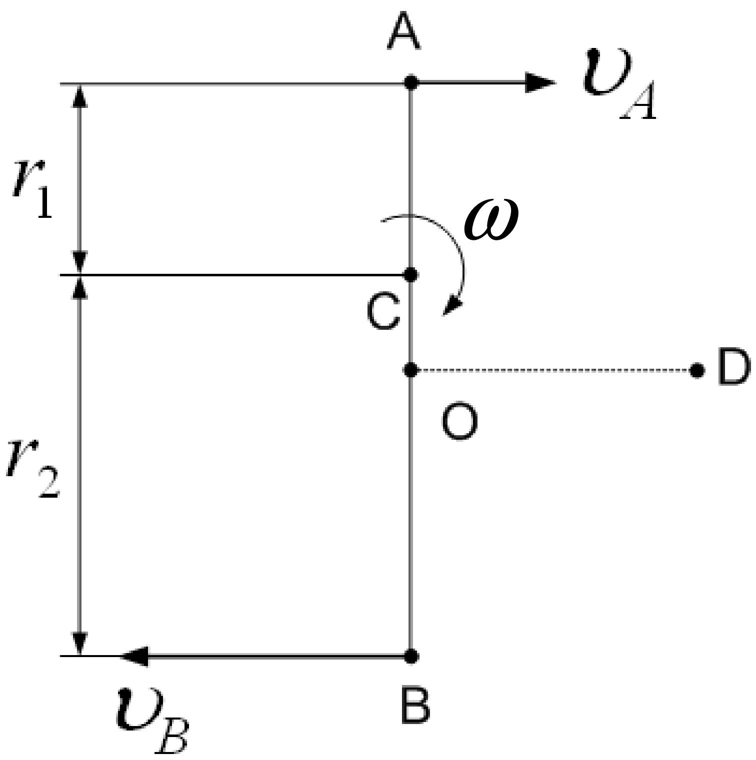
$$v_D = \overline{CD}\ \omega$$

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{350^2 + 150^2} = 380.8\ \text{mm}$$

$$v_D = 380.8 \times \frac{150}{35} = 1632\ \text{mm/s}$$

مثال:دو صفحه B و A بموازات یکدیگر و در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند و صفحه مدور نیز بدون لغزش بین آنها می‌چرخد اگر $\upsilon_A = 2 \text{ m/s}$ و $\upsilon_B = 4 \text{ m/s}$ باشد،مرکزآنی دوران را برای صفحه مشخص کنید و سرعت نقطه D را در لحظه نشان داده شده بدست آورید.





برای پیدا کردن مرکز آنی دوران بردارهای شعاعی را که عمود بر امتدادهای سرعت‌های v_A و v_B در نقاط A و B هستند رسم می‌کنیم، واضح است که مرکز آنی دوران روی خط AB قرار دارد. اگر نقطه C مرکز آنی دوران باشد و فواصل آن از نقاط A و B بترتیب برابر r_1 و r_2 فرض شود داریم:

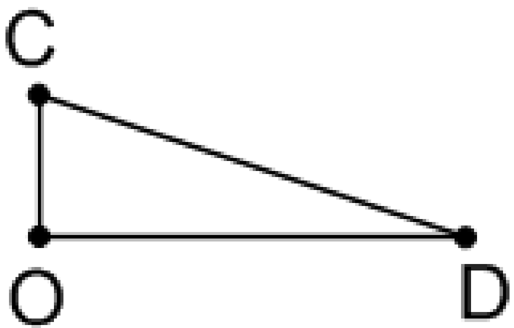
$$v_A = r_1\omega \qquad v_B = r_2\omega$$

$$v_A + v_B = (r_1 + r_2)\omega$$

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{r_1 + r_2} = \frac{6}{0.2} = 30 \text{ rad/s} \qquad r_1 = \frac{v_A}{\omega} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \text{ m}$$

$$r_2 = \frac{v_B}{\omega} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \text{ m} \qquad OC = 0.1 - r_1 = \frac{1}{30} m$$

حال برای پیدا کردن سرعت در نقطه D از مثلث OCD داریم:



$$CD = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{900}} = 0.105 \text{ m}$$

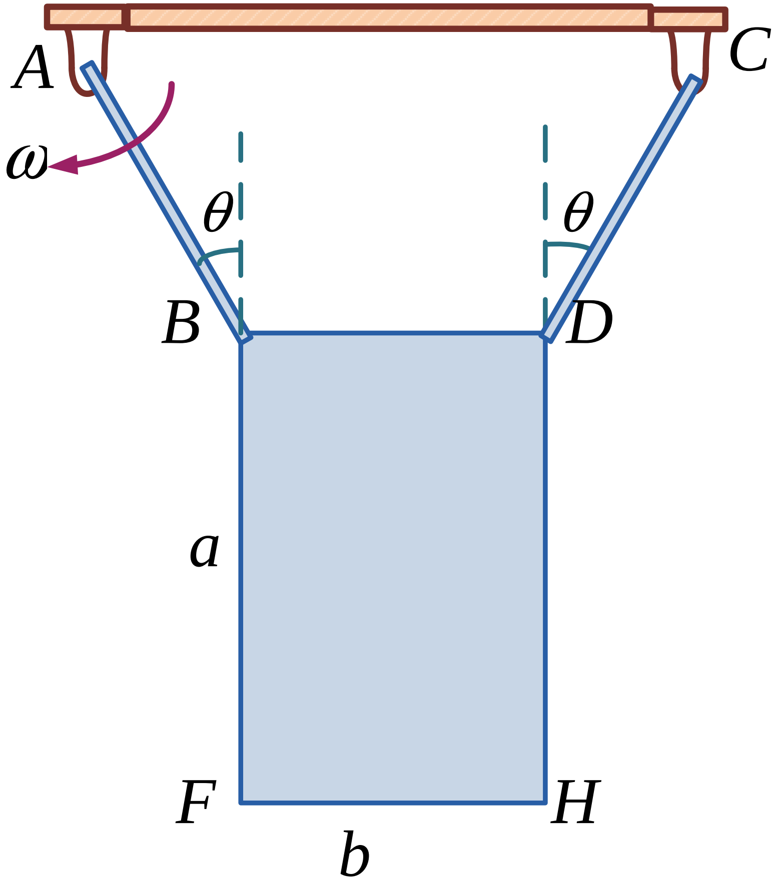
$$\upsilon_D = CD \times \omega = 0.105 \times 30 = 3.15 \text{ m/s}$$

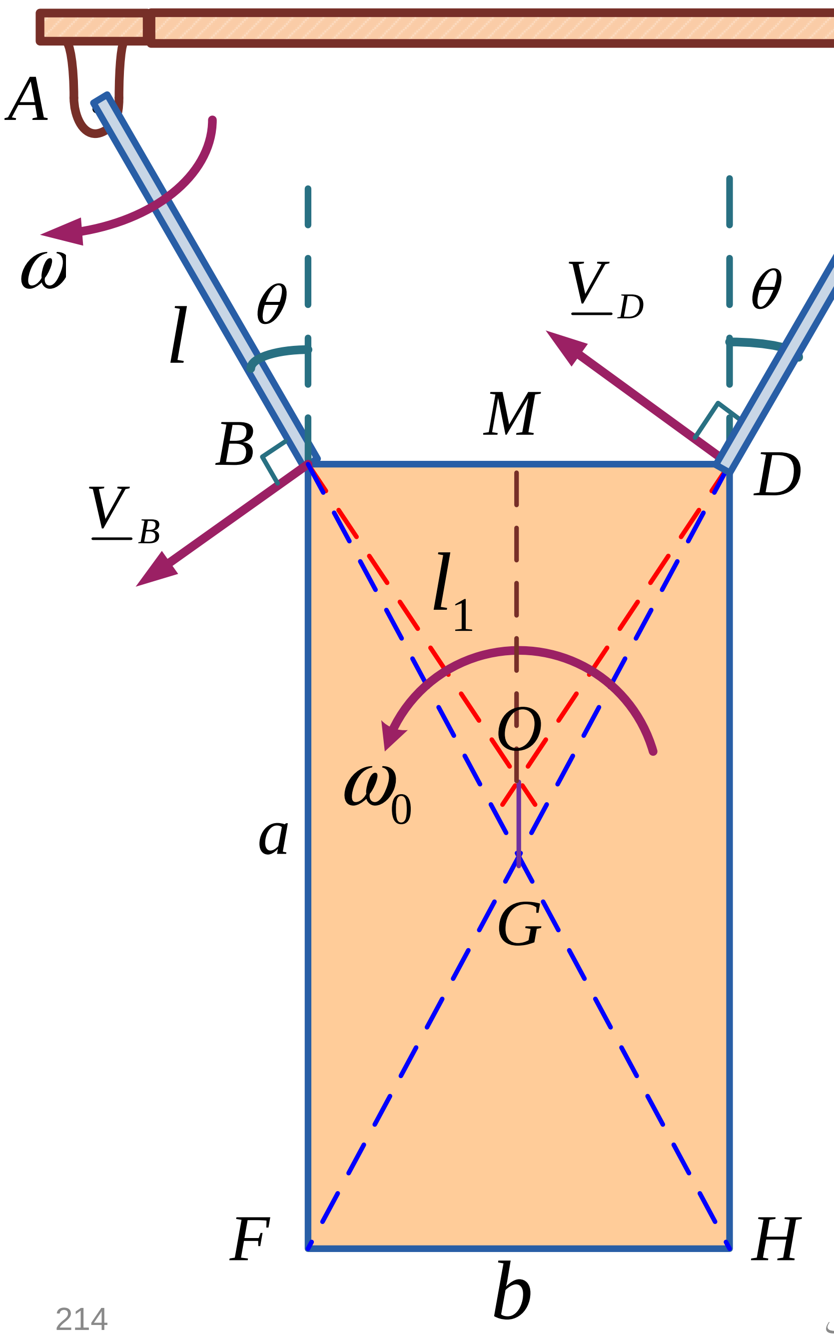
مثال: صفحه مستطیلی شکل را بوسیله دو میله به طول l مطابق شکل آویزان کرده ایـم در صورتیکه سرعت زاویه ای میلـه ی AB در لحظـه نـشان داده شـده در شـکل ω و در جهت حرکت عقربه های ساعت باشد. مطلوبست:

a) سرعت زاویه ای صفحه

b) سرعت نقطه ی G مرکز صفحه

c) سرعت نقطه ی F





O: مرکز آنی دوران است.

$$V_B = l\omega$$

$$\sin\theta = \frac{b}{2l_1} \quad \Rightarrow \quad l_1 = \frac{b}{2\sin\theta}$$

$$V_B = l_1\omega_0$$

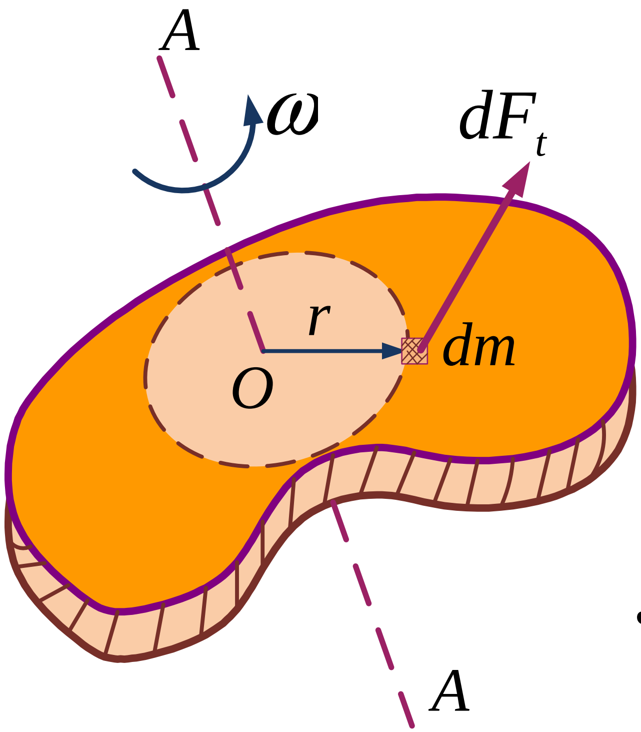
$$\omega_o = \frac{l\omega}{l_1} = \frac{2l\omega\sin\theta}{b}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OM}}{b/2} \quad \Rightarrow \quad \overline{OM} = \frac{b\cot\theta}{2}$$

$$\overline{OG} = \overline{MG} - \overline{OM} = \frac{a - b\cot\theta}{2}$$

$$\overline{OP} = a/2 + \overline{OG} = a - \frac{b\cot\theta}{2}$$

۹- سینتیک و دینامیک



۹-۱ گشتاور لختی

$$a_t = r\alpha = r\dot{\omega} \qquad dF_t = a_t dm = r\dot{\omega} dm$$

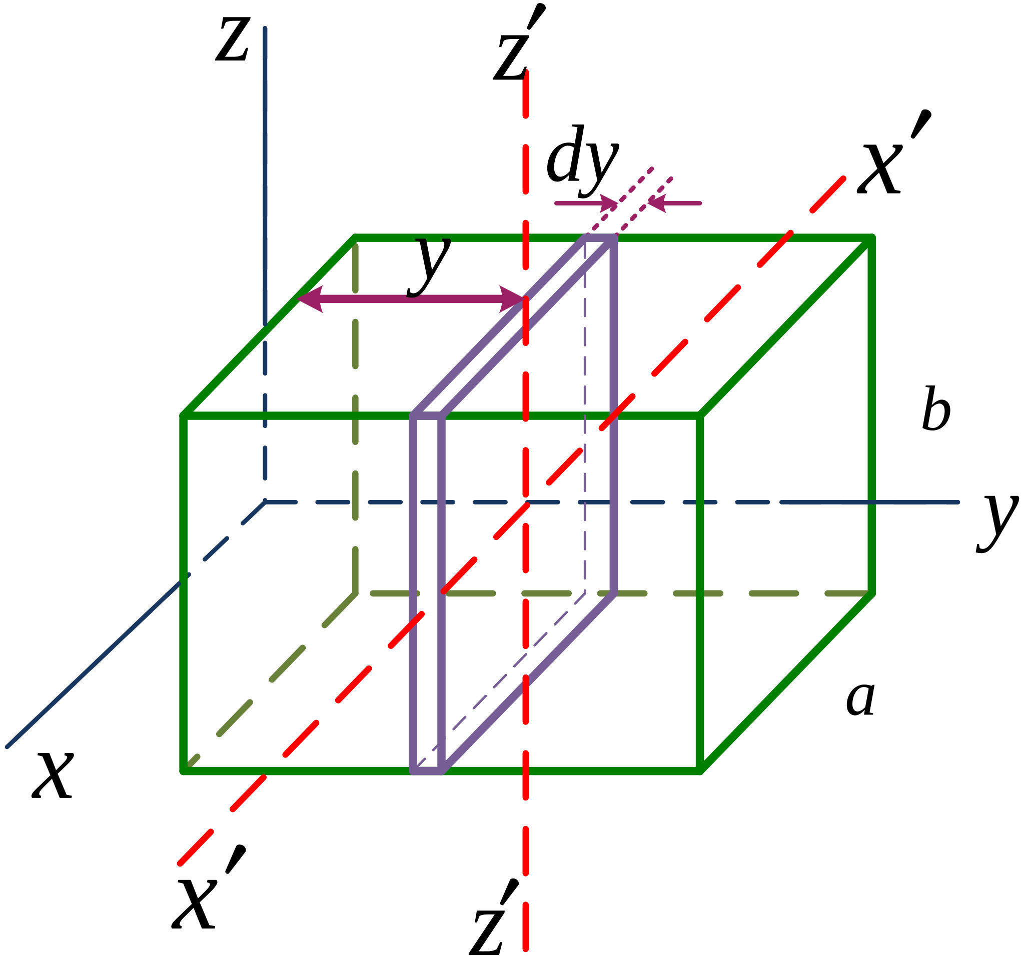
$$dM = rdF_t = r^2 \dot{\omega} dm$$

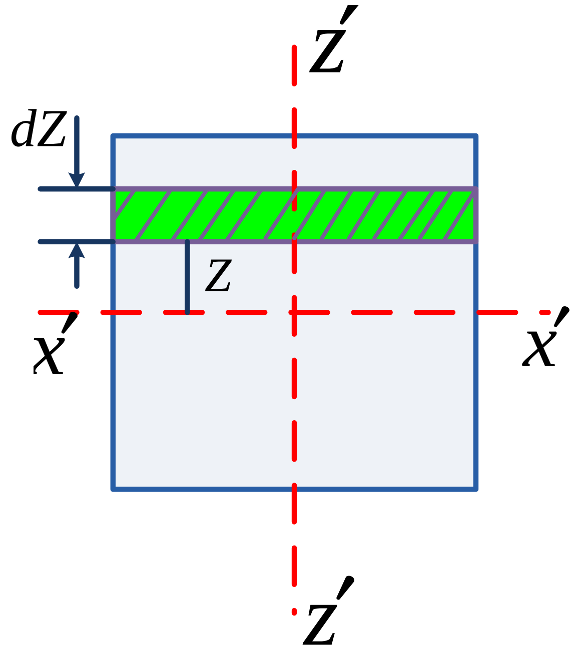
$$\int dM = \dot{\omega}\int r^2 dm \qquad M = \dot{\omega}\int r^2 dm$$

$$I = \int r^2 dm$$

m در دینامیک انتقالی به منزله مقاوت در برابر شتاب خطی یعنی a است

I در دینامیک دورانی به منزله مقاوت در برابر شتاب زاویه ای α است.

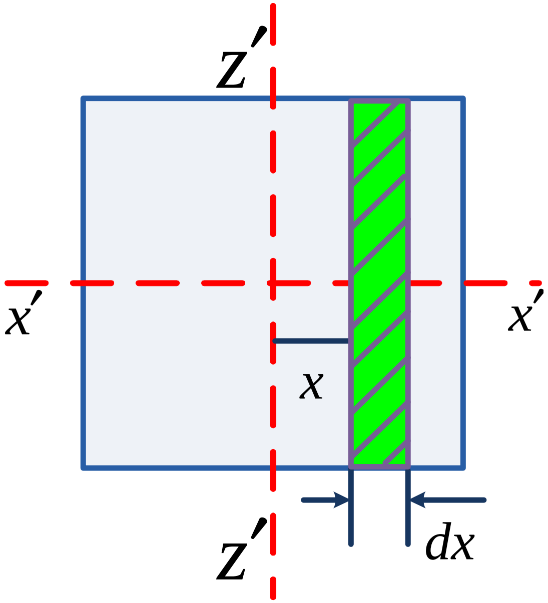




$$dm = \rho dV = \rho adydz$$

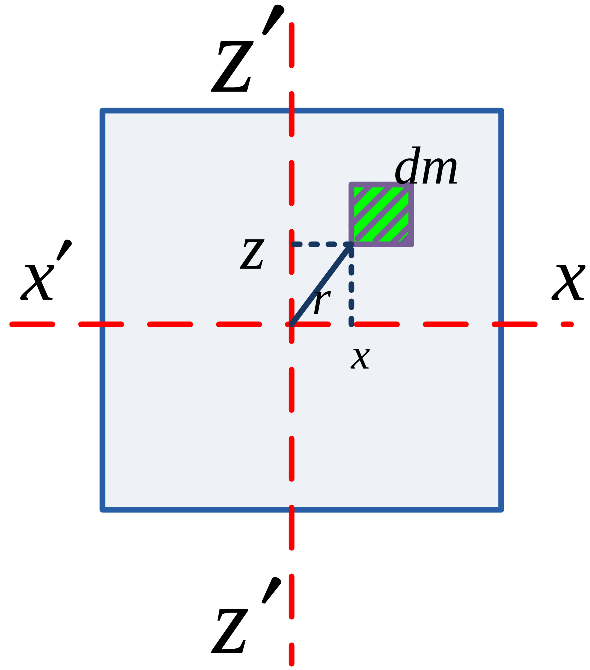
$$I_{x'x'} = \int z^2 dm = \int z^2 \rho adydz = \rho ady \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dz$$

$$= \rho \frac{a}{3} dy \left[z^3 \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{\rho a}{12} b^3 dy$$



$$I_{z'z'} = \int x^2 dm \qquad \mathrm{dm} = \rho dV = \rho bdydx$$

$$I_{z'z'} = \int x^2 dm = \rho bdy \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \frac{\rho ba^3}{12} dy$$



قطعه از مکعب به ضخامت dy

$$I_{yy} = \int r^2 dm \qquad \mathrm{r}^2 = x^2 + z^2$$

$$I_{yy} = \int \left(x^2 + z^2\right) dm = \int x^2 dm + \int z^2 dm$$
$$= I_{x'x'} + I_{z'z'}$$

$$I_{yy} = \frac{\rho ab}{12}\left(a^2 + b^2\right) dy$$

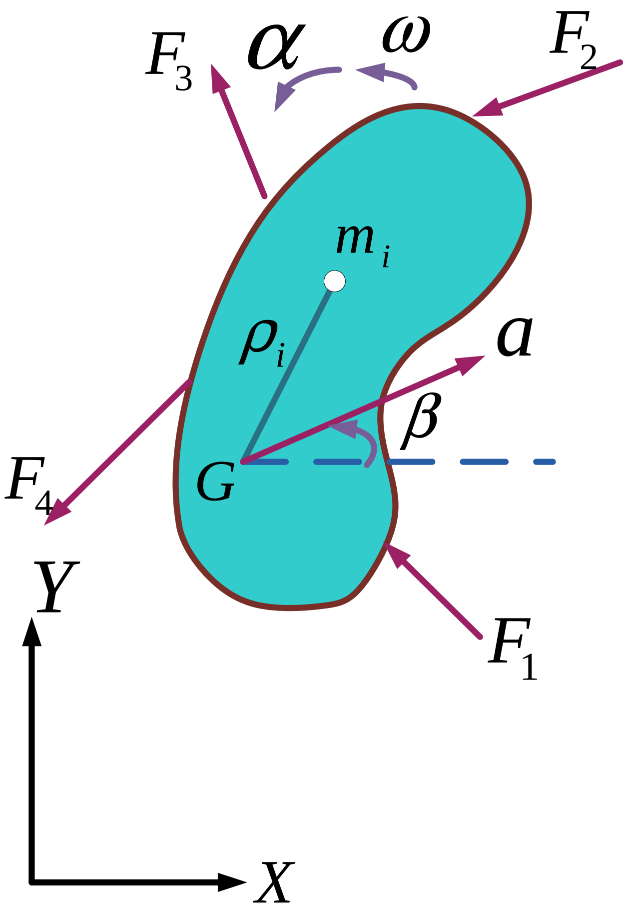
مکعب

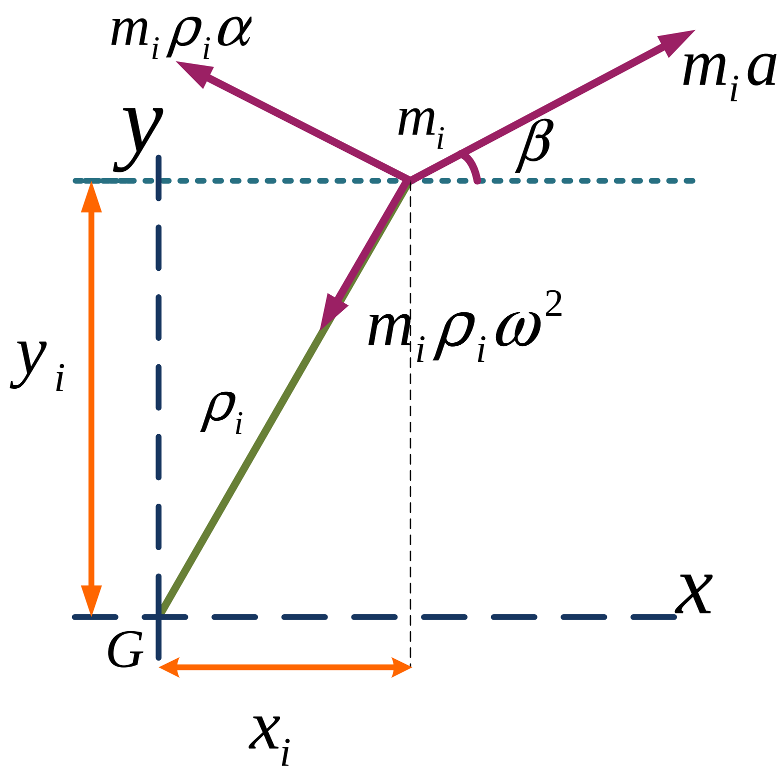
$$I_{yy} = \frac{\rho ab}{12}\left(a^2 + b^2\right)\int_{\circ}^{l} dy$$

$$I_{yy} = \frac{\rho abl}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

$$\boxed{I_{yy} = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right)}$$

۹-۲معادلات دینامیکی حرکت جسم صلب در صفحه





$$M_i = m_i\rho_i\alpha(\rho_i) - m_i a\cos\beta(y_i) + m_i a\sin\beta(x_i)$$

$$M_i = m_i \rho_i \alpha(\rho_i) - m_i a \cos\beta(y_i) + m_i a \sin\beta(x_i)$$

گشتاور کل جسم صلب حول نقطه G (مرکز جرم) جسم صلب

$$\sum M_i = \sum M = \alpha \sum m_i \rho_i^2 - a\cos\beta \sum m_i y_i + a\sin\beta \sum m_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = 0 \qquad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = 0$$

$$\sum m_i x_i = 0 \quad , \quad \sum m_i y_i = 0$$

$$\sum M = \alpha \sum m_i \rho_i^2 = \alpha \int \rho^2 dm = I\alpha$$

سه معادله دینامیکی

$$\sum F_y = m a_y$$

$$\sum F_x = m a_x$$

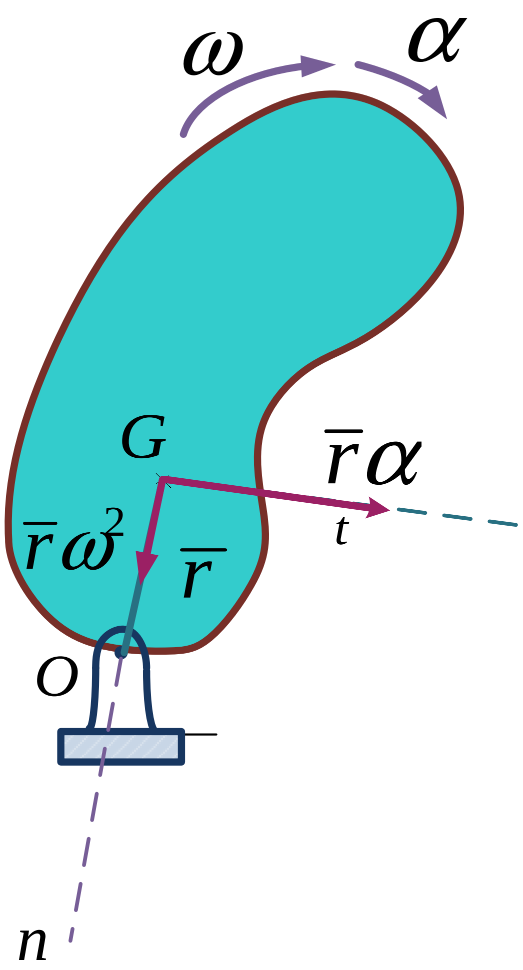
ناشی از انتقال

$$\sum \mathrm{M} = \mathrm{I}\alpha$$

ناشی از دوران

۹-۳ مرکز تصادم

جسم صلب دوران خالص دارد حول نقطه ای مانند O که بر مرکز جرم جسم صلب منطبق نیست.



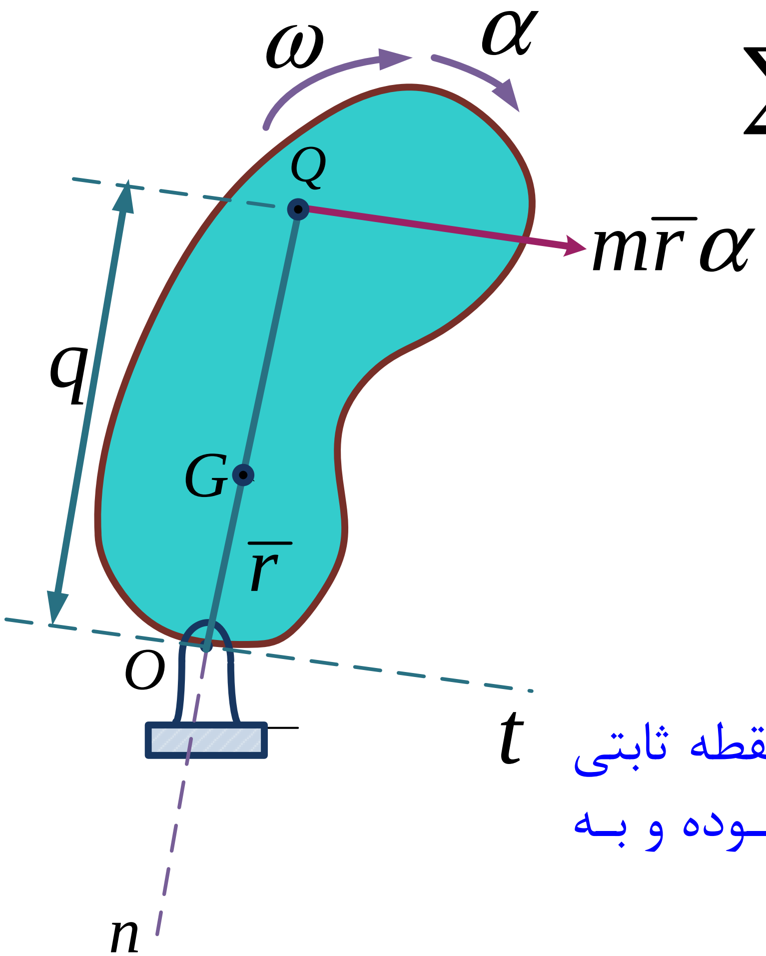
$$\sum F_t = ma_t = m\bar{r}\alpha$$

$$\sum F_n = ma_n = m\bar{r}\omega^2$$

$$\sum M = I_O\alpha = \left(I_G + m\bar{r}^2\right)\alpha$$

$I_G = mk^2$ شعاع ژیراسیون k

$$\sum M = m\left(k^2 + \bar{r}^2\right)\alpha$$

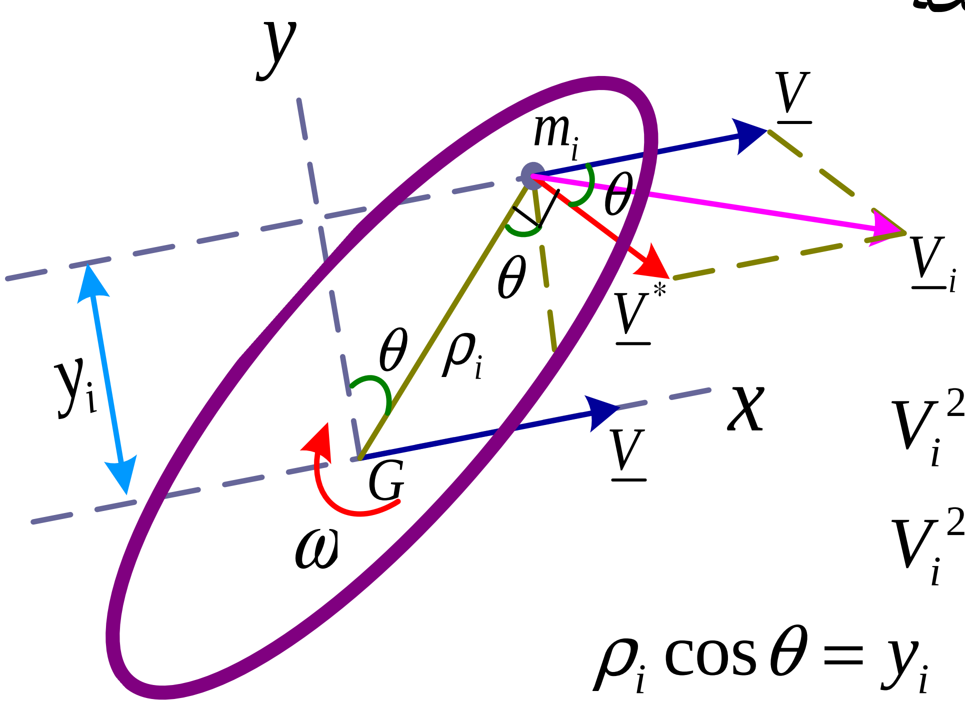


$$\sum M = m\bar{r}\alpha q = m\left(k^2+\bar{r}^2\right)\alpha$$

$$\boxed{q=\frac{k^2+\bar{r}^2}{\bar{r}}}$$

Q : این نقطه برای هر جسم مفروضی که حول نقطه ثابتی مثل O دوران می کند نقطه ی منحصر به فرد بوده و به نام مرکز تصادم نامیده می شود.

۴-۹ انرژی جنبشی جسم صلب در صفحه



$$\underline{V}^* = \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i \qquad V^* = \rho_i \omega$$

$$\underline{V}_i = \underline{V} + \underline{V}^* = \underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i$$

$$V_i^2 = V^{*2} + V^2 + 2VV^* \cos\theta$$

$$V_i^2 = V^2 + \rho_i^2 \omega^2 + 2\rho_i \omega V \cos\theta$$

$$\rho_i \cos\theta = y_i \qquad V_i^2 = V^2 + \omega^2 \rho_i^2 + 2\omega V y_i$$

$$T_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \frac{1}{2} m_i V^2 + \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2 + \omega V m_i y_i$$

$$\sum T_i = T = \frac{1}{2} V^2 \sum m_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i \rho_i^2 + V\omega \sum m_i y_i$$

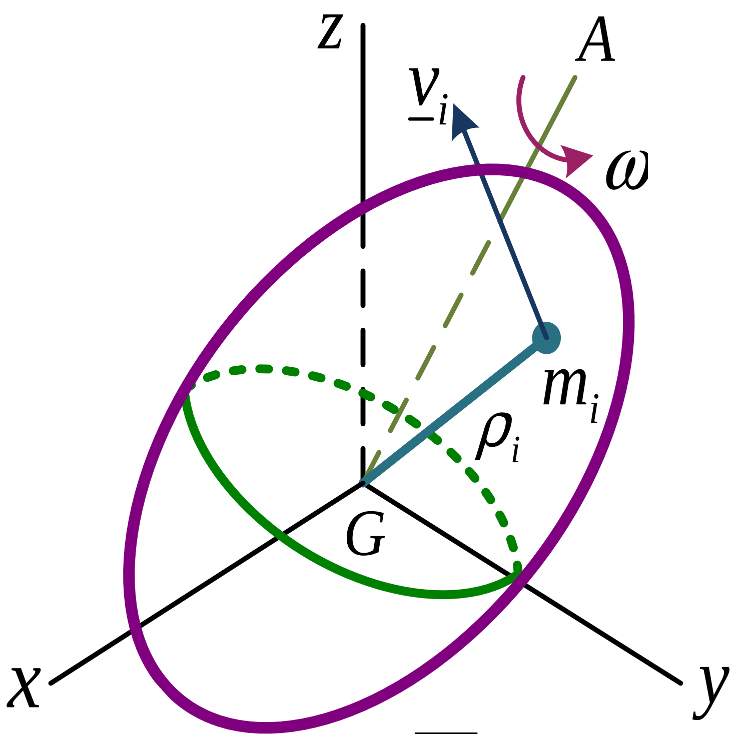
$$\bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = 0 \rightarrow \sum m_i y_i = 0 \qquad \sum m_i \rho_i^2 = \int \rho^2 dm = I$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}I\omega^2}$$

انرژی جنبشی انتقالی

انرژی جنبشی دورانی

۹-۵ اندازه حرکت زاویه ای جسم صلب در فضا



$$\underline{H}_i)_G = \underline{\rho}_i \times (m_i \underline{V}_i)$$

$$\underline{V}_i = \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i$$

$$\underline{H}_i)_G = m_i \underline{\rho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i)$$

$$\sum \underline{H}_i)_G = \underline{H})_G = \sum m_i \underline{\rho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) = \int \underline{\rho} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) dm$$

$$\underline{H})_G = \int \underline{\rho} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) dm$$

$$\underline{\rho} = x\underline{i} + y\,\underline{j} + z\underline{k} \qquad \underline{\omega} = \omega_x \underline{i} + \omega_y\,\underline{j} + \omega_z\,\underline{k}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\rho} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$(z\omega_y - y\omega_z)\underline{i} - (z\omega_x - x\omega_z)\,\underline{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\underline{k} = \alpha\underline{i} + \beta\,\underline{j} + \gamma\underline{k}$$

$$\alpha = z\omega_y - y\omega_z \qquad \beta = x\omega_z - z\omega_x \qquad \gamma = y\omega_x - x\omega_y$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\rho} = \alpha\,\underline{i} + \beta\,\underline{j} + \gamma\underline{k}$$

$$\alpha = z\omega_y - y\omega_z \qquad \beta = x\omega_z - z\omega_x \qquad \gamma = y\omega_x - x\omega_y$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\rho} = \alpha \underline{i} + \beta \underline{j} + \gamma \underline{k}$$

$$\underline{\rho} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} =$$

$$(y\gamma - \beta z)\underline{i} - (\gamma x - \alpha z)\underline{j} + (\beta x - \alpha y)\underline{k} =$$

$$\left[(y\omega_x - x\omega_y)y - (x\omega_z - z\omega_x)z\right]\underline{i} + \left[(z\omega_y - y\omega_z)z - (y\omega_x - x\omega_y)x\right]\underline{j}$$

$$+\left[(x\omega_z - z\omega_x)x - (z\omega_y - \omega_z y)y\right]\underline{k} =$$

$$\left[(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z\right]\underline{i} +$$

$$\left[-\omega_x yx + (x^2 + z^2)\omega_y - yz\omega_z\right]\underline{j} + \left[-zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z\right]\underline{k}$$

$$\underline{H})_G = \int \underline{\rho}\times(\underline{\omega}\times\underline{\rho})dm =$$

$$\left[\omega_x\int(y^2+z^2)dm-\omega_y\int xydm-\omega_z\int xzdm\right]\underline{i}$$

$$+\left[-\omega_x\int yxdm+\omega_y\int(x^2+z^2)dm-\omega_z\int yzdm\right]\underline{j}+$$

$$\left[-\omega_x\int zxdm-\omega_y\int zydm+\omega_z\int(x^2+y^2)dm\right]\underline{k}$$

$$\underline{H})_G=(I_{xx}\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z)\underline{i}+(-I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y-I_{yz}\omega_z)\underline{j}$$

$$+(-I_{zx}\omega_x-I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z)\underline{k}=H_x\underline{i}+H_y\underline{j}+H_z\underline{k}$$

$$\begin{cases} H_x=I_{xx}\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z \\ H_y=-I_{xy}\omega_x+I_{yy}\omega_y-I_{yz}\omega_z \\ H_z=-I_{zx}\omega_x-I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_{xy} = I_{yx} \\ I_{xz} = I_{zx} \\ I_{yz} = I_{zy} \end{cases}$$

به ماتریس های ستونی، vectorمی گویند.
با دانستن ۶ مؤلفه می توان تمام مؤلفه های ماتریس اینرسی را به دست آورد.

$$\boxed{\{H\} = [I]\{\omega\}}$$

اگر هندسه جسم متقارن باشد،
مشروط بر این که دستگاه مختصات بر مرکزجرم جسم یعنی نقطه G منطبق باشد

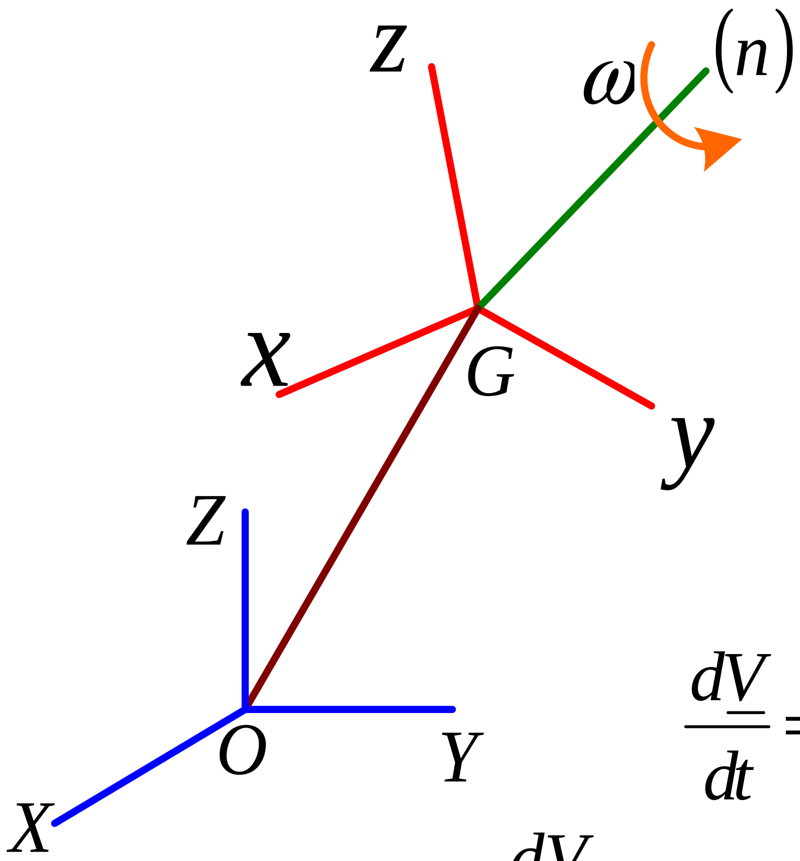
$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

در چنین حالتی تانسور اینرسی به صورت قطری درخواهد آمد.

$$\underline{H} = H_x \underline{i} + H_y \underline{j} + H_z \underline{k} = I_{xx}\omega_x \underline{i} + I_{yy}\omega_y \underline{j} + I_{zz}\omega_z \underline{k}$$

$$H_x = I_{xx}\omega_x \qquad H_y = I_{yy}\omega_y \qquad H_z = I_{zz}\omega_z$$

۹-۶ معادلات اویلر



$$\dot{\underline{i}} = \underline{\omega} \times \underline{i}$$

$$\dot{\underline{j}} = \underline{\omega} \times \underline{j}$$

$$\dot{\underline{k}} = \underline{\omega} \times \underline{k}$$

$$\underline{V} = V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k}$$

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \dot{V}_x \underline{i} + \dot{V}_y \underline{j} + \dot{V}_z \underline{k} + V_x \dot{\underline{i}} + V_y \dot{\underline{j}} + V_z \dot{\underline{k}}$$

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \dot{V}_x \underline{i} + \dot{V}_y \underline{j} + \dot{V}_z \underline{k} + \underline{\omega} \times (V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k})$$

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \dot{V}_x \underline{i} + \dot{V}_y \underline{j} + \dot{V}_z \underline{k} + \underline{\omega} \times \underline{V}$$

$$\underline{H} = H_x \underline{i} + H_y \underline{j} + H_z \underline{k} \qquad \frac{d\underline{H}}{dt} = \dot{H}_x \underline{i} + \dot{H}_y \underline{j} + \dot{H}_z \underline{k} + \underline{\omega} \times \underline{H}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{H} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} =$$

$$(\omega_y H_z - \omega_z H_y)\underline{i} - (\omega_x H_z - \omega_z H_x)\underline{j} + (\omega_x H_y - \omega_y H_x)\underline{k}$$

$$\frac{d\underline{H}}{dt} = \dot{H}_x \underline{i} + \dot{H}_y \underline{j} + \dot{H}_z \underline{k} + (\omega_y H_z - \omega_z H_y)\underline{i} + (\omega_z H_x - \omega_x H_z)\underline{j}$$

$$+(\omega_x H_y - \omega_y H_x)\underline{k} \quad = (\dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y)\underline{i} + (\dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z)\underline{j}$$

$$+(\dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x)\underline{k}$$

$$\frac{d\underline{\underline{H}}}{dt}=(\dot{H}_x+\omega_y H_z-\omega_z H_y)\underline{i}+(\dot{H}_y+\omega_z H_x-\omega_x H_z)\underline{j}$$
$$+(\dot{H}_z+\omega_x H_y-\omega_y H_x)\underline{k}$$

$$\sum \underline{M}=\sum M_x\underline{i}+\sum M_y\underline{j}+\sum M_z\underline{k}=\frac{d\underline{\underline{H}}}{dt}$$

$$\sum \underline{M}=(\dot{H}_x+\omega_y H_z-\omega_z H_y)i+(\dot{H}_y+\omega_z H_x-\omega_x H_z)\underline{j}$$
$$+(\dot{H}_z+\omega_x H_y-\omega_y H_x)\underline{k}$$

$$\boxed{\begin{cases}\sum M_x=\dot{H}_x+\omega_y H_z-\omega_z H_y\\ \sum M_y=\dot{H}_y+\omega_z H_x-\omega_x H_z\\ \sum M_z=\dot{H}_z+\omega_x H_y-\omega_y H_x\end{cases}}$$

$$\{H\} = [I]\{\omega\}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \qquad \begin{cases} H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{H}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z \\ \dot{H}_y = -I_{yx}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y - I_{yz}\dot{\omega}_z \\ \dot{H}_z = -I_{zx}\dot{\omega}_x - I_{zy}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} \sum M_x = \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \\ \sum M_y = \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \\ \sum M_z = \dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x \end{cases}}$$

$$\sum M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z + \omega_y(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)$$
$$-\omega_z(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)$$

معادلات اویلر

$$\sum M_y = \ldots \qquad \sum M_z = \ldots.$$

اگر هندسه جسم متقارن باشد ودستگاه مختصات بر مرکز جرم جسم منطبق باشد

$$H_x = I_{xx}\omega_x \quad H_y = I_{yy}\omega_y \quad H_z = I_{zz}\omega_z$$

$$\dot{H}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x \ , \ \dot{H}_y = I_{yy}\dot{\omega}_y \quad , \quad \dot{H}_z = I_{zz}\dot{\omega}_z$$

$$\boxed{\begin{cases} \sum M_x = \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \\ \sum M_y = \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \\ \sum M_z = \dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x \end{cases}}$$

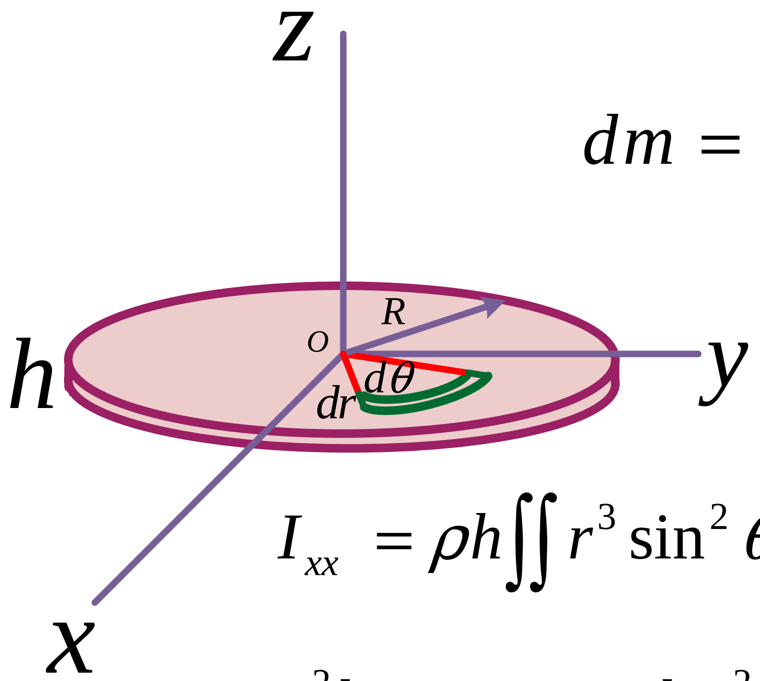
$$\sum M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y I_{zz}\omega_z - \omega_z I_{yy}\omega_y = I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z$$

$$\sum M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z I_{xx}\omega_x - \omega_x I_{zz}\omega_z = I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z$$

$$\sum M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x I_{yy}\omega_y - \omega_y I_{xx}\omega_x = I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y$$

مسایل

مثال: ممان اینرسی جرمی دیسکی به شعاع R و جرم m را نسبت به محورهای xx, yy, zz تعیین کنید.



$$dm = \rho dV \qquad dV = hrd\theta dr$$

$$dm = \rho hrdrd\theta \qquad I_{xx} = \int r^2 \sin^2\theta dm$$

$$I_{xx} = \rho h \iint r^3 \sin^2\theta drd\theta = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{\rho h \pi}{4} R^4$$

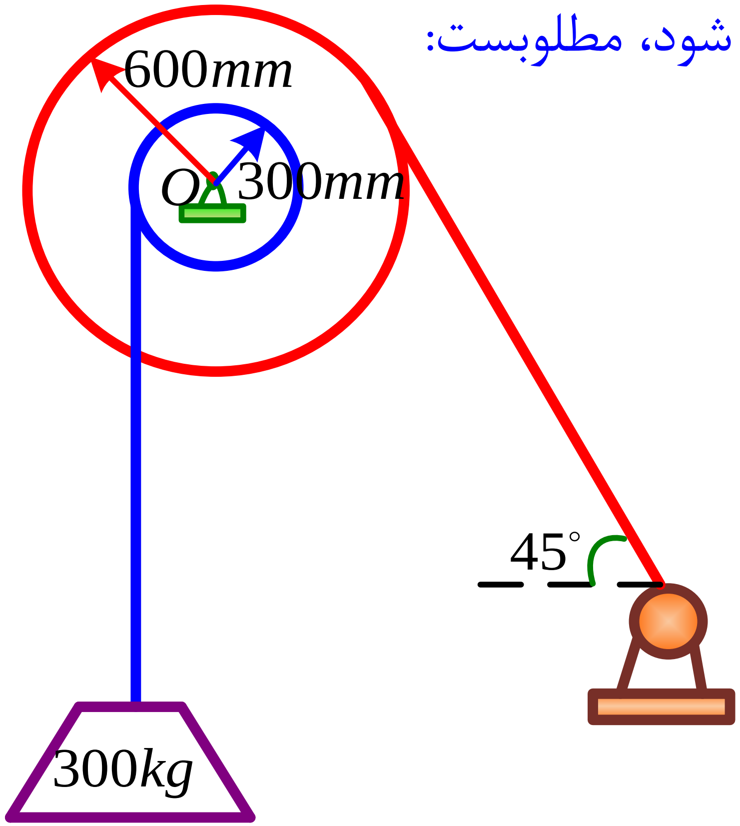
$$V = \pi R^2 h \Rightarrow m = \rho \pi h R^2 \rightarrow I_{xx} = \frac{mR^2}{4}$$

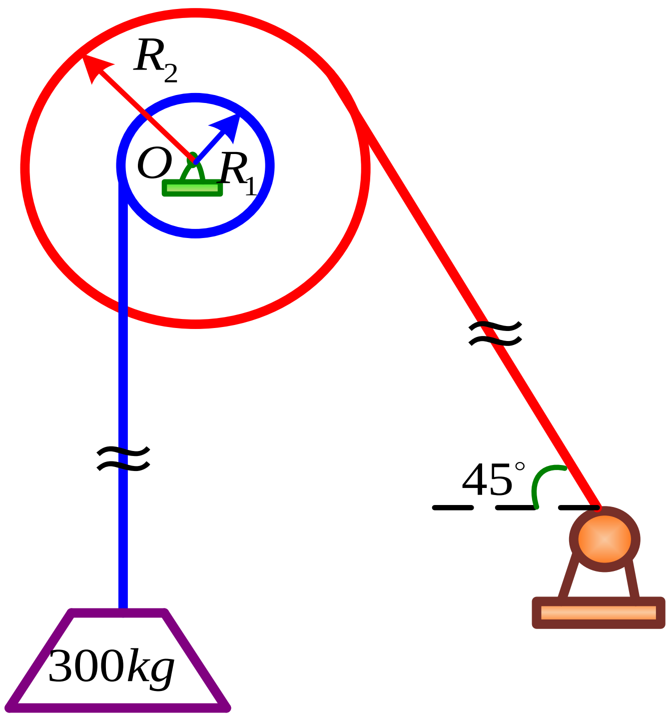
$$I_{yy} = \int r^2 \cos^2\theta dm = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{\rho h \pi}{4} R^4 = \frac{mR^2}{4}$$

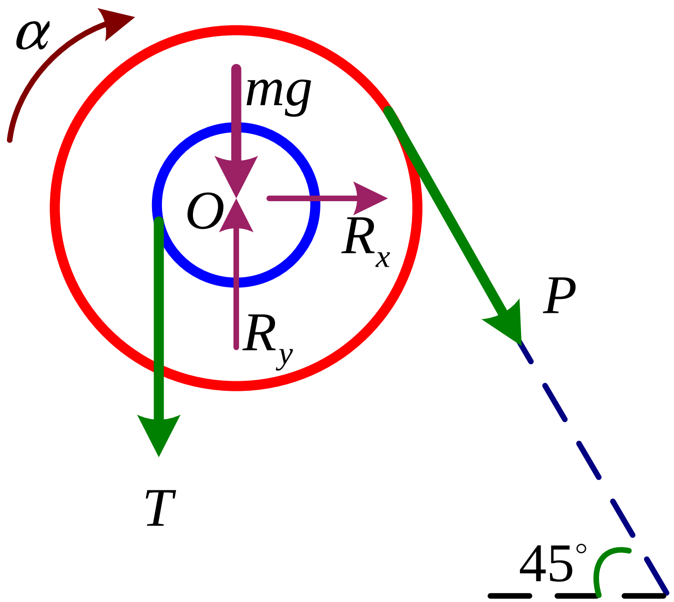
$$I_{zz} = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm = I_{xx} + I_{yy} = \frac{mR^2}{2}$$

مثال: برای بالا کشیدن یک جسم 300 kg از مکانیزم نشان داده شده استفاده می شود.
قرقره ها به هم چسبیده مانند جسم یکپارچه حول مرکز جرمشان (O) می چرخند.
مجموع وزن قرقره ها 150 kg است.
و شعاع چرخش حول O، 450 mm می باشد.
اگر کشش ثابت 1.8KN به وسیله موتور اعمال شود، مطلوبست:

- شتاب قائم جرم 300 kg؟
- نیرو های عکس العمل در O؟

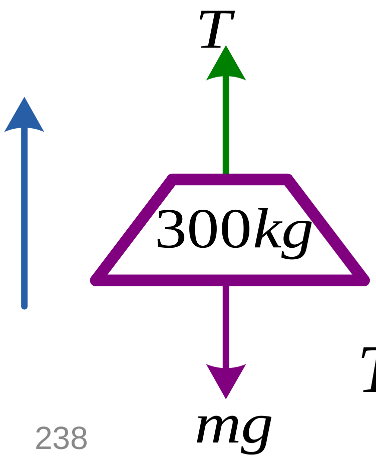






$$\sum M_0 = I_0\alpha \qquad I_0 = m\,k^2$$

$$PR_2 - TR_1 = I_o\alpha = m\,k^2\alpha \qquad 0.6(1800) - 0.3T = 150(0.45)^2\alpha$$

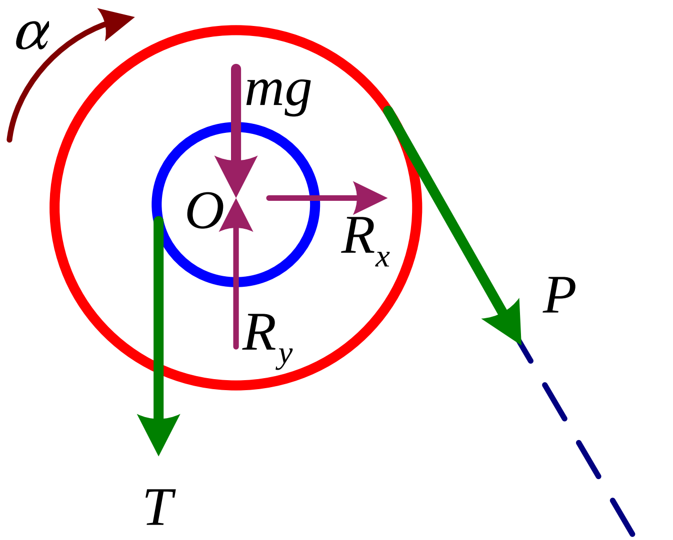


$$\sum F_y = ma_y \rightarrow T - mg = ma_y \quad T - 300(10) = 300a_y$$

$$a_y = R_1\alpha \rightarrow a_y = 0.3\alpha$$

$$T - 3000 = 300(0.3\alpha) \rightarrow T - 3000 = 90\alpha$$

$$T = 3282.3\ \ N \qquad a_y = 0.94\ \ m/s^2 \quad \alpha = 3.14 rad/s^2$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \quad R_x + P\cos 45^\circ = 0$$

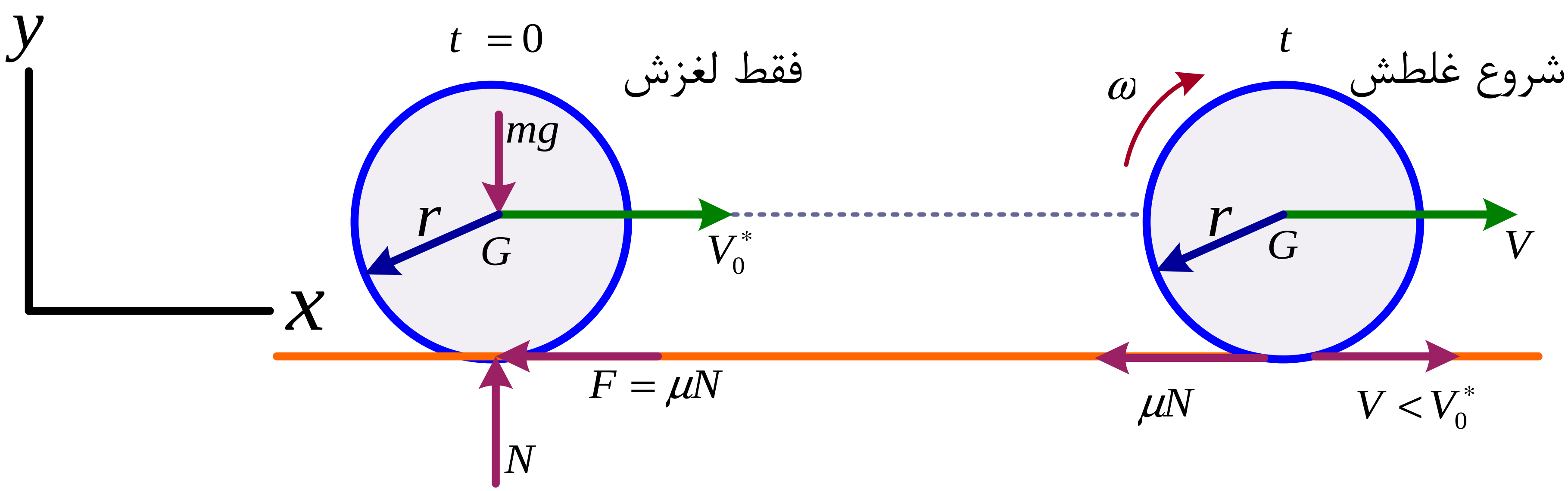
$$R_x = -900\sqrt{2} = -1272.8$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \quad R_y - T - mg - P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$R_y = 3282.3 + 1500 + 1800\frac{\sqrt{2}}{2} = 6055N$$

مثال: کره ای به جرم m و شعاع r روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک μ پرتاب می شود. در صورتی که سرعت خطی پرتاب برای مرکز کره برابر V_0^* و سرعت زاویه ای پرتاب $\omega_0=0$ باشد و کره ابتدا شتاب کند شونده به خود گرفته و سپس به حرکت یکنواخت برسد، مطلوب است:

- شتاب خطی و زاویه ای کره؟
- زمان لازم برای آن که به حرکت یکنواخت برسد؟
- فاصله ای که قبل از حرکت یکنواخت طی می کند؟



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \; N - mg = 0 \rightarrow N = mg \qquad \sum F_x = ma_x \rightarrow \; -\mu N = ma_x$$

$$\boxed{a_x = -\mu g} \qquad \sum M = I_G \alpha \qquad \mu N r = \frac{2}{5} m r^2 \alpha = \mu m g r \qquad \boxed{\alpha = \frac{5}{2} \mu \frac{g}{r}}$$

$$V = V_0 + a_x t \qquad V = V_0^* - \mu g t \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \omega_0 = 0$$

$$V = r\omega = r\alpha t \rightarrow \qquad V = r\alpha t = \frac{5}{2} \mu g t \qquad V_0^* = \frac{7}{2} \mu g t$$

$$\boxed{t = \frac{2}{7} \frac{V_0^*}{\mu g}}$$

$$\boxed{t = \frac{2}{7}\frac{V_0^*}{\mu g}}$$

$$\boxed{a_x = -\mu g}$$

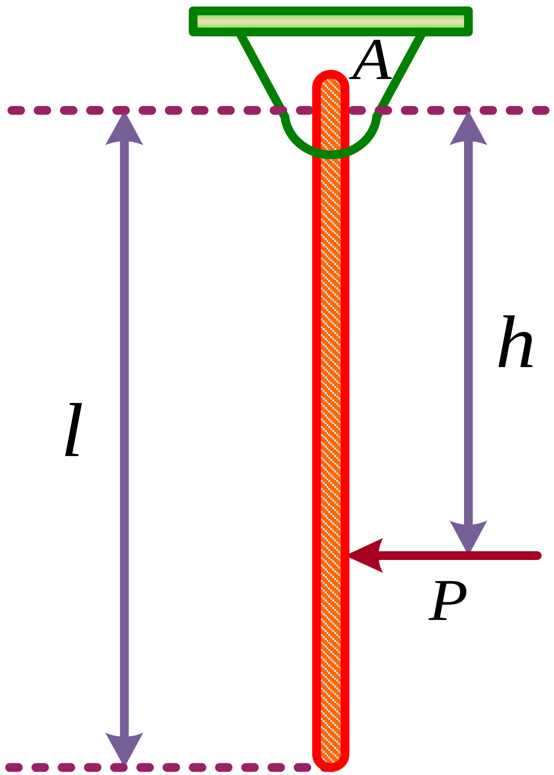
$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + V_0^* t$$

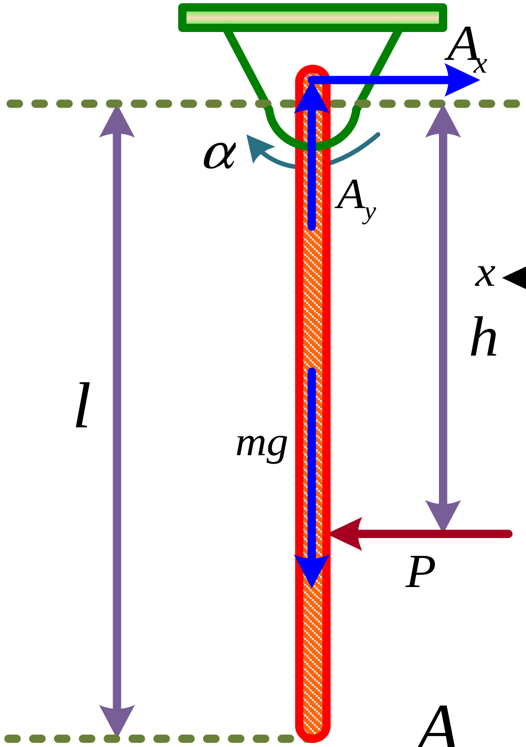
$$x = \frac{-1}{2}\mu g\left(\frac{4}{49}\frac{V_0^{*2}}{\mu^2 g^2}\right) + V_0^*\left(\frac{2}{7}\frac{V_0^*}{\mu g}\right)$$

$$\boxed{x = \frac{12}{49}\frac{V_0^{*2}}{\mu g}}$$

مثال: میله ای نازک به طول l و وزن w به طور آزاد از نقطه A آویزان شده اسـت. هرگـاه نیروی افقی p مطابق شکل بر آن اعمال شود معین کنید:

- فاصله ی h را برای آنکه مؤلفه ی افقی عکس العمل در نقطه A برابر صفر شود.
- شتاب زاویه ای در این حالت.
- موقعیت مرکز تصادم.





$$\sum M_A = I_A\alpha \rightarrow \quad ph = I_A\alpha$$

$$I_A = I_G + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

$$ph = \frac{1}{3}ml^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3ph}{ml^2}$$

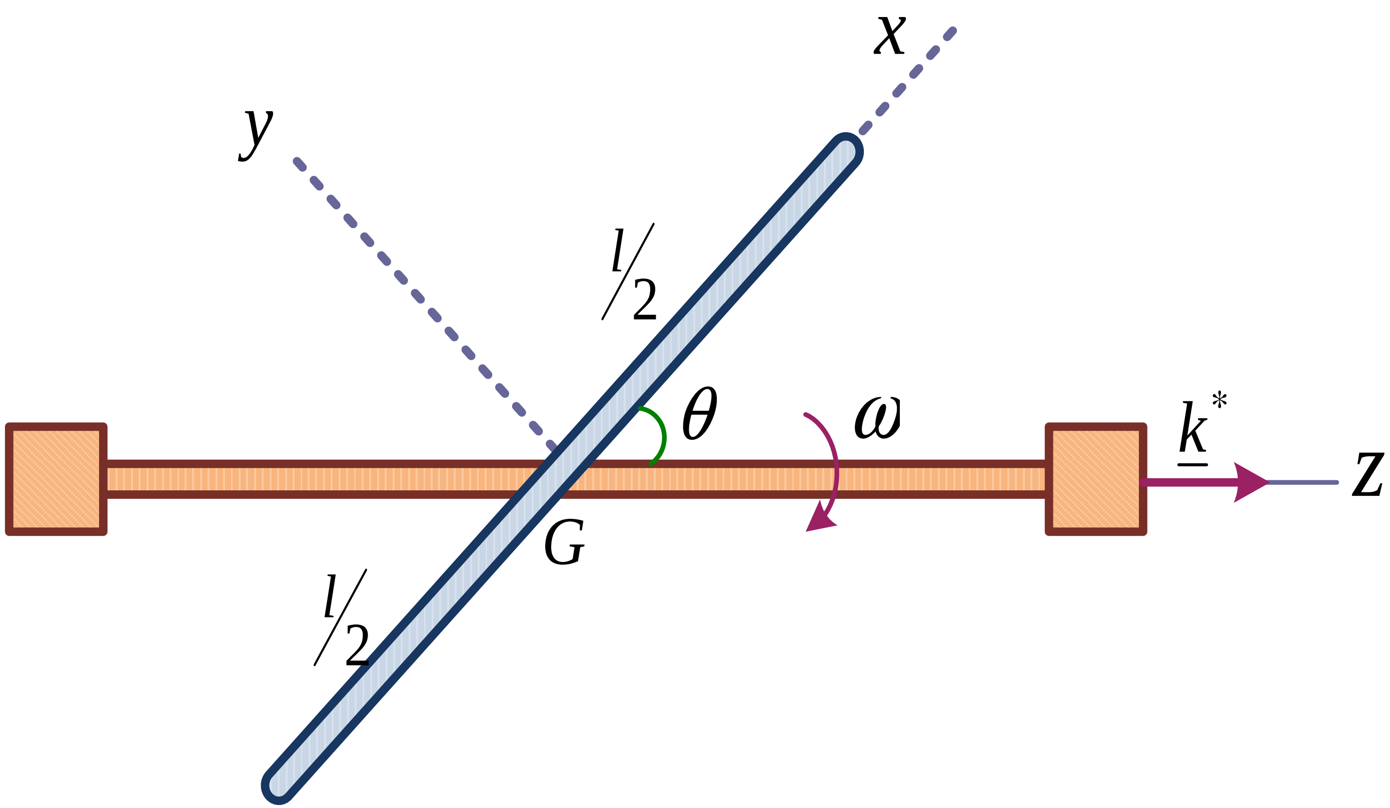
$$\sum F_x = ma_x \rightarrow p - A_x = ma_x = m\frac{l}{2}\alpha = \frac{3}{2}\frac{ph}{l}$$

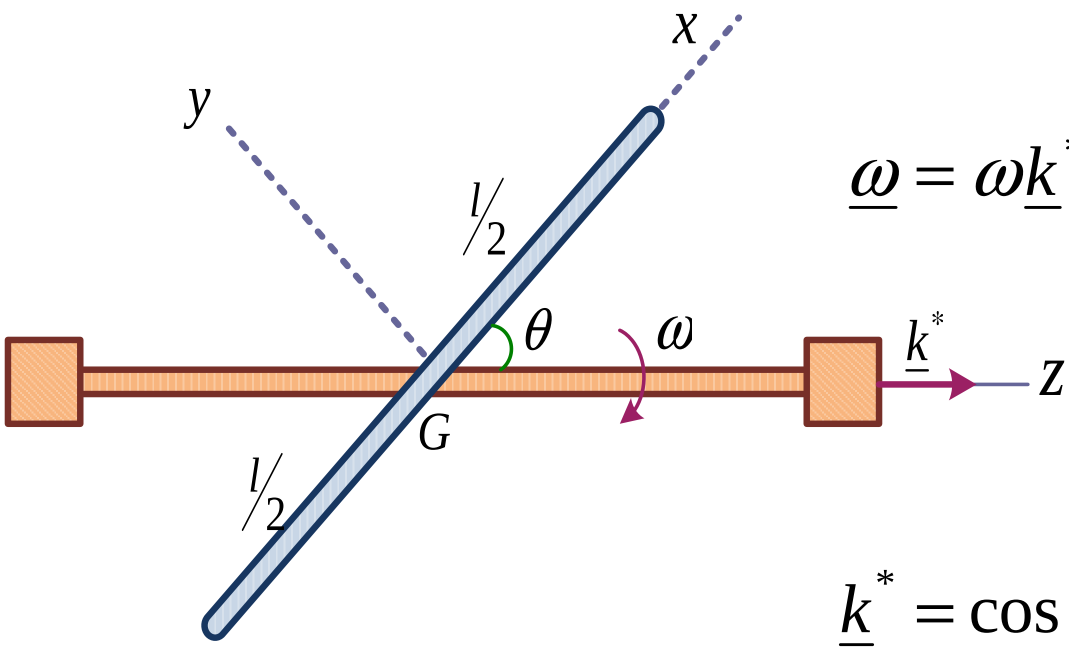
$$A_x = 0 \quad h = \frac{2}{3}l \quad \alpha = \frac{3ph}{ml^2} = \frac{3p}{ml^2}(\frac{2}{3}l) = \frac{2p}{ml}$$

$$q = \frac{k_G^2 + \bar{r}^2}{\bar{r}} \qquad I_G = \frac{1}{12}ml^2 \rightarrow mk_G^2 = \frac{1}{12}ml^2 \qquad k_G = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

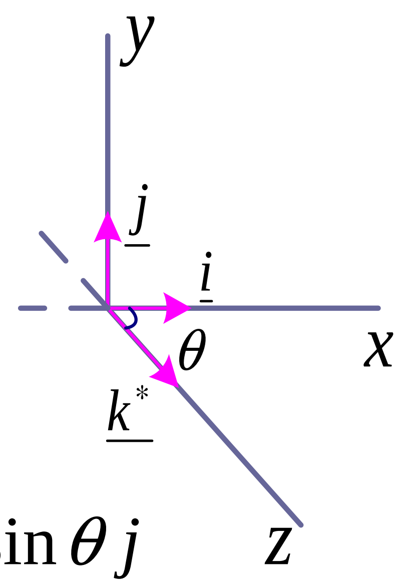
$$\bar{r} = \frac{l}{2} \qquad q = \frac{\frac{1}{12}l^2 + \frac{l^2}{4}}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{3}l$$

مثال: میله ای به جرم m و طول l مطابق شکل روی محوری نصب شده است. در صورتیکه سرعت زاویه ای محور ω و ثابت و در جهت موافق عقربه های ساعت باشد بردار اندازه حرکت زاویه ای حول نقطه G وبردار گشتاور راتعیین کنید (محور z بر محور Z عمود است)





$$\underline{\omega} = \omega \underline{k}^*$$



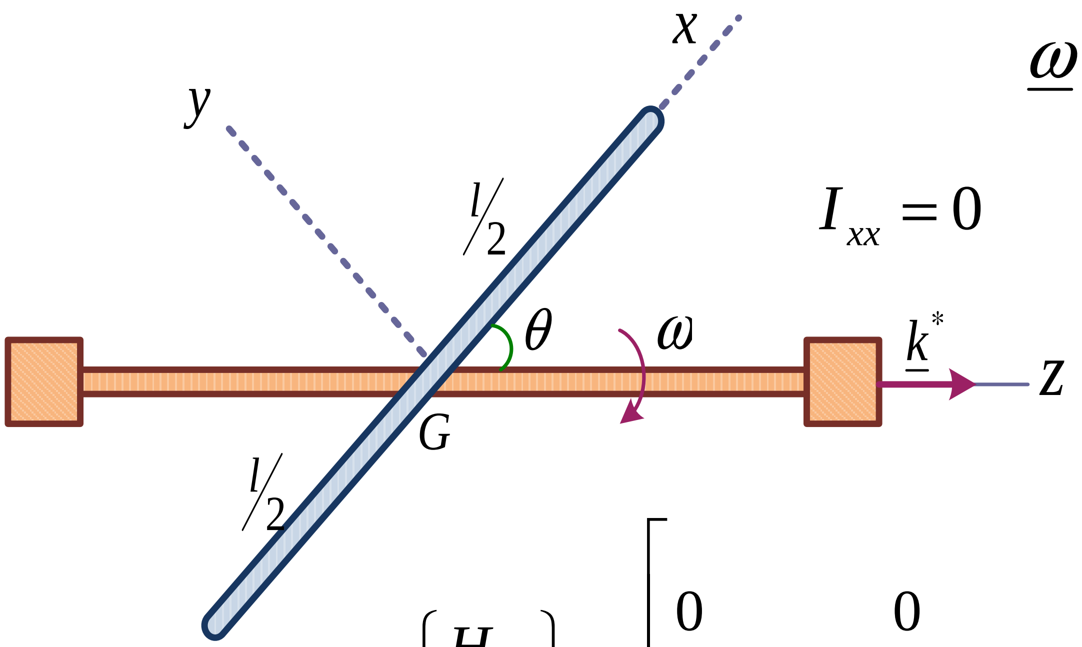
$$\underline{k}^* = \cos\theta \underline{i} - \sin\theta \underline{j}$$

$$\underline{\omega} = \omega\cos\theta \underline{i} - \omega\sin\theta \underline{j}$$

$$\{H\} = [I]\{\omega\}$$

هندسه جسم متقارن ودستگاه مختصات
هم بر مر کز جرم جسم منطبق است

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$



$$\underline{\omega} = \omega\cos\theta \underline{i} - \omega\sin\theta \underline{j}$$

$$I_{xx} = 0 \qquad I_{yy} = \frac{1}{12} mL^2 \qquad I_{zz} = \frac{1}{12} mL^2$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega\cos\theta \\ -\omega\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = -\frac{1}{12} ml^2 \omega \sin\theta \\ H_z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\underline{H} = H_x \underline{i} + H_y \underline{j} + H_z \underline{k} = -\frac{1}{12} ml^2 \omega \sin\theta \, \underline{j}}$$

$$\boxed{\underline{H} = H_x \underline{i} + H_y \underline{j} + H_z \underline{k} = -\frac{1}{12} m l^2 \omega \sin\theta \underline{j}}$$

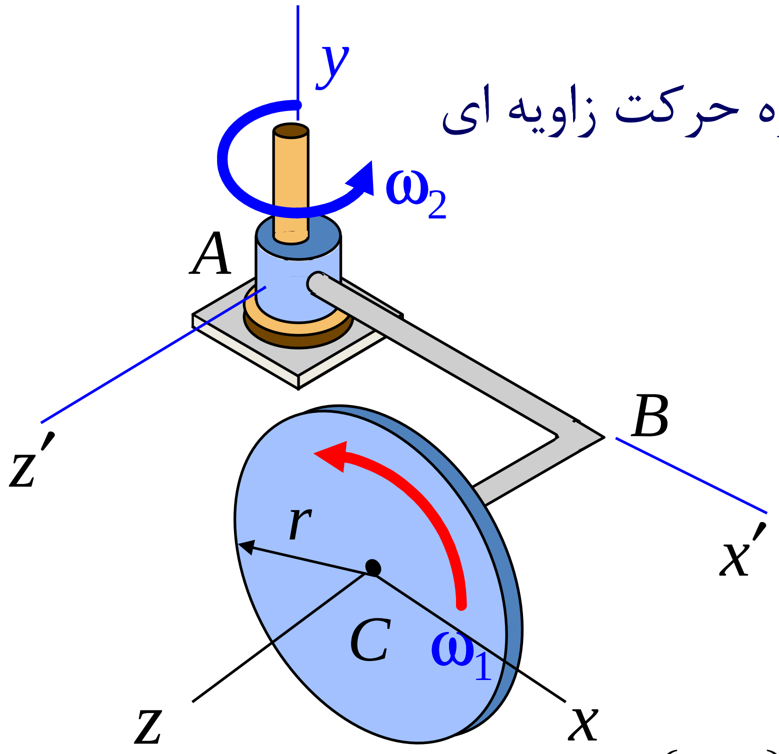
$$\underline{\omega} = \omega\cos\theta \underline{i} - \omega\sin\theta \underline{j}$$

$$\sum \underline{M} = \frac{d\underline{H}}{dt} = -\frac{1}{12} m l^2 \dot{\omega} \sin\theta \underline{j} - \frac{1}{12} m l^2 \omega\dot{\theta} \cos\theta \underline{j} - \frac{1}{12} m l^2 \omega \sin\theta \underline{\dot{j}}$$

$$\sum \underline{M} = -\frac{1}{12} m l^2 \omega (\dot{\theta} \cos\theta \underline{j} + \sin\theta \underline{\dot{j}})$$

$$\underline{\dot{j}} = \underline{\omega} \times \underline{j} = (\omega\cos\theta \underline{i} - \omega\sin\theta \underline{j}) \times \underline{j} = \omega\cos\theta \underline{k}$$

$$\boxed{\sum \underline{M} = -\frac{1}{12} m l^2 \omega\cos\theta (\dot{\theta} \underline{j} + \omega\sin\theta \underline{k})}$$



مثال: برای سیستم نشانداده شده در شکل بردار اندازه حرکت زاویه ای دیسک را حول مرکز جرمش بدست آورید.

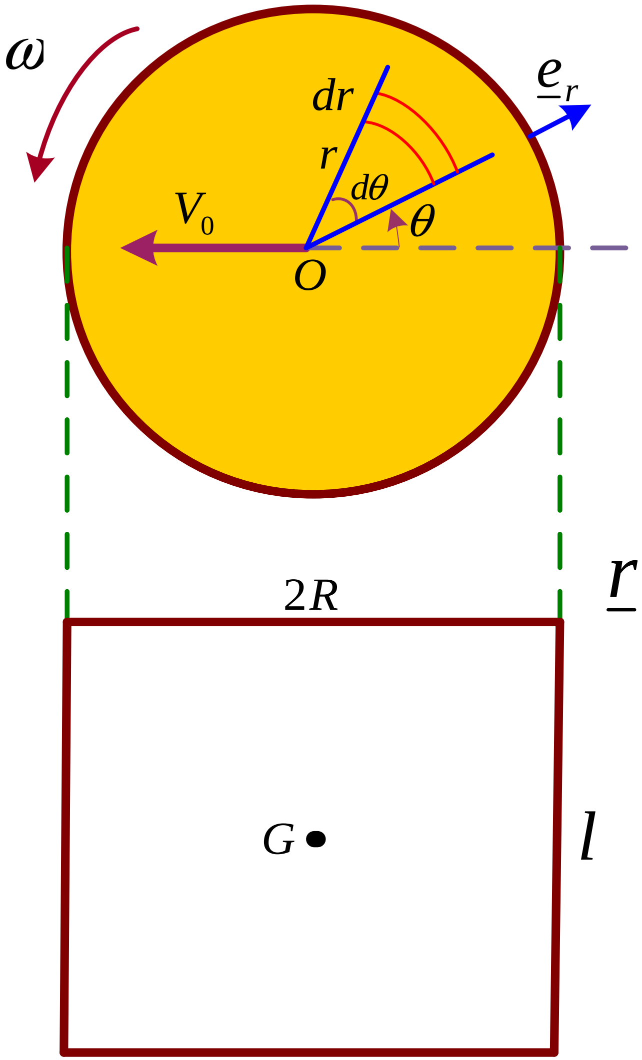
$$\underline{\omega} = \omega_2\, \underline{j} + \omega_1 \underline{k}$$

$$\boxed{\{H\} = [I]\{\omega\}}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_1 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{H} = H_x \underline{i} + H_y \underline{j} + H_z \underline{k} = \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{1}{2}\omega_2 \underline{j} + \omega_1 \underline{k}\right)$$

مثال: استوانه ای به طول l و شعاع R و جرم مخصوص ρ مطابق شکل به سمت چپ می غلتد. به ترتیبی که سرعت مرکز جرم آن برابر V_0 است. بردار اندازه حرکت زاویه ای استوانه را حول مرکز جرمش تعیین کنید.



$$dm = \rho dv$$

$$dm = \rho l r dr d\theta$$

$$d\underline{H}_0 = \underline{r} \times (\underline{V} dm)$$

$$\underline{r} = r\underline{e}_r \qquad \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{V} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta$$

$$\underline{r} \times \underline{V} = (r\underline{e}_r) \times (\dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta) = r^2\dot{\theta}\underline{e}_z$$

$$d\underline{H}_0 = r^2\dot{\theta} dm \underline{e}_z = \rho l r^3 \dot{\theta} dr d\theta \underline{e}_z$$

$$d\underline{H}_0 = \rho l r^3 \dot{\theta} dr d\theta \underline{e}_z$$

$$\underline{H}_0 = \rho l \dot{\theta} \underline{e}_z \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \rho l \dot{\theta} \underline{e}_z \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho l R^4 \dot{\theta} \underline{e}_z$$

$$m = \pi \rho l R^2$$

$$\underline{H}_0 = \frac{1}{2} \pi \rho l R^4 \dot{\theta} \underline{e}_z = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta} \underline{e}_z = I \omega \underline{e}_z$$

مراجع

1-Engineering Mechanics: Dynamics, SI 6th Edition
by J. L. Meriam, L. G. Kraige
April 2008, Wiley

2-Vector Mechanics for Engineers: Dynamics,
by Ferdinand Beer, Jr., E. Russell Johnston,
Elliot Eisenberg and Phillip Cornwell
(Jan 26, 2009), Amazon

3-Engineering Mechanics: Dynamics
by Irving N. Shames.