۱ مقدمات گراف و گراف بازه‌ها

① **گراف:** عبارت است از تعدادی نقطه که بعضی یا همه‌ی آن‌ها توسط پاره‌خط‌ها (یا کمان‌هایی) به هم وصل شده‌اند. نقاط را رأس و خطوط را یال می‌نامند.

② **رأس و یال:** در گراف $G=(V,E)$، مجموعه‌ی V، مجموعه‌ی رأس‌های گراف و مجموعه‌ی E، مجموعه‌ی یال‌های گراف است.

③ **دو رأس مجاور:** دو رأس متمایز a و b را مجاور می‌نامند، هرگاه یالی بین آن‌ها موجود باشد.

④ **درجه‌ی رأس:** به تعداد یال هایی که به یک رأس از گراف متصل هستند درجه‌ی آن رأس گفته می‌شود و با $\deg v_i$ نشان می‌دهند.

⑤ **رأس زوج و رأس فرد:** اگر درجه‌ی یک رأس از گراف، عددی زوج باشد، آن رأس را، رأس زوج و اگر فرد باشد، رأس فرد می‌نامند.

⑥ **Δ ،δ:** بزرگ‌ترین عدد در بین درجه‌ی رأس‌های یک گراف را **ماکزیمم درجه** می‌نامند و با Δ نشان می‌دهند و هم‌چنین کوچک‌ترین درجه در بین تمام درجه‌ها را **مینیمم درجه** می‌نامند و با δ نشان می‌دهند.

⑦ **مرتبه:** به تعداد رأس‌های گراف، مرتبه‌ی گراف گفته می‌شود و با $\mathbf{p}$ نشان می‌دهند.

⑧ **اندازه:** به تعداد یال‌های یک گراف، اندازه‌ی گراف گفته می‌شود و با $\mathbf{q}$ نشان می‌دهند.

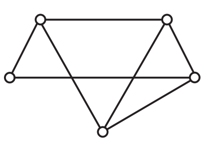
⑨ **قضیه:** در هر گراف ساده با اندازه‌ی q و مرتبه‌ی p داریم:

$$\boxed{۰ \le \mathbf{q} \le \frac{\mathbf{p(p-۱)}}{۲}}$$

⑩ **گراف بازه‌ها:** اگر بازه‌های باز و متمایز از اعداد حقیقی را به‌عنوان رأس‌های گراف در نظر بگیریم و دو رأس را با این شرط مجاور کنیم که بازه‌های آن‌ها دارای اشتراک باشند، گراف حاصل را گراف بازه‌ها می‌نامند.

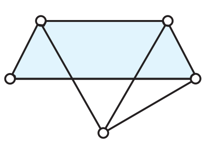
⑪ **تشخیص گراف بازه‌ها:** اگر در یک گراف، n ضلعی بدون قطر $(n \ge ۴)$ موجود باشد گراف، متناظر با بازه‌ها نیست.

۱ دو رأس متناظر با بازه‌های (a,b) و (c,d) از اعداد حقیقی مجاورند به شرط آن‌که اشتراک این دو بازه تهی نباشد، گراف مقابل به چند طریق متناظر با بازه‌هاست؟ *تمرین ۶ بند پ ص ۹ کتاب درسی*



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) نشدنی

داخل ۸۷ | پاسخ: ۴



در این گراف ۴ ضلعی بدون قطر دیده می‌شود، بنابراین متناظر با بازه‌ها نیست، یعنی بازه‌ای شدن این گراف **غیرممکن** است.

توجه کنید که وقتی یک گراف، متناظر با بازه‌ها است آن‌گاه بی‌شمار بازه یافت می‌شود که متناظر با رأس‌های آن باشد و اگر گراف، متناظر با بازه‌ها نباشد هیچ بازه‌هایی یافت نمی‌شود.

۲ قضیه‌ی اساسی گراف و نتایج

قضیه: در هر گراف ساده‌ی $G=(V,E)$، اگر $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ باشد آن‌گاه داریم:

$$\boxed{\sum \deg v_i = ۲q}$$

نتیجه‌ی ۱: تعداد رأس‌های فردِ هر گراف ساده، همواره عددی **زوج** است.

نتیجه‌ی ۲: تعداد رأس‌های زوج، بستگی به مرتبه‌ی گراف دارد و از نظر زوج و یا فرد بودن، هم‌جنس با مرتبه‌ی گراف است.

۲ در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس‌های زوج عددی .... و تعداد رأس‌های فرد عددی .... است. *تمرین ۱۱ ص ۱۶ کتاب درسی*

۱) فرد ـ فرد ۲) فرد ـ زوج
۳) زوج ـ فرد ۴) زوج ـ زوج

داخل ۸۶ | پاسخ: ۴

تعداد رأس‌های فرد، همواره عددی زوج است و تعداد رأس‌های زوج به خاطر زوج بودن ۱۶، عددی زوج است.

۳ تشخیص دنباله‌ی گرافی

برای تشخیص دنباله‌ی گرافی به نکات زیر توجه کنید:

۱ ابتدا جمله‌های **صفر** را از دنباله کنار می‌گذاریم.

۲ در گراف از مرتبه‌ی p، بزرگ‌ترین عدد دنباله حداکثر باید $p-1$ باشد.

نتیجه: حداقل دو جمله از دنباله‌ی گرافی باید یکسان باشد.

۳ تعداد اعداد فرد در دنباله باید **زوج** باشد.

۴ اگر در گرافی از مرتبه‌ی p، یک رأس درجه‌ی $p-1$ و یک رأس درجه‌ی $p-2$ وجود داشت آن‌گاه گراف، حداکثر یک رأس درجه‌ی ۱ می‌تواند داشته باشد.

۵ **الگوریتم هاول ـ حکیمی:** اگر با چهار نکته‌ی فوق هنوز گزینه‌ی درست مشخص نشده بود به شکل زیر عمل کنید:
درجات را به‌صورت نزولی مرتب می‌کنیم. بزرگ‌ترین درجه را حذف کرده و به اندازه‌ی عدد آن، از رأس‌های بعدی (مثلاً اگر ۵ را حذف می‌کنیم از ۵ رأس بعدی) یک واحد کم می‌کنیم و درجات را در صورت نیاز، مجدداً به صورت نزولی مرتب می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم. هر کجا به دنباله‌ای رسیدیم که شرایط گراف بودن را نداشت الگوریتم را تمام می‌کنیم و آن دنباله نمی‌تواند دنباله‌ی گرافی باشد، ولی اگر تا صفر شدن تمامی اعداد؛ الگوریتم ادامه پیدا کرد آن دنباله، گرافی است.

۳ **در یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۶؛ دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های آن، به کدام صورت می‌تواند باشد؟** *تمرین ۲ بند پ ص ۱۴ کتاب درسی*

داخل ۸۵ | پاسخ: ۴

۱) ۵،۴،۳،۲،۲،۰   ۲) ۵،۴،۳،۲،۲،۱   ۳) ۵،۴،۳،۲،۱،۱   ۴) ۵،۴،۳،۳،۲،۱

در این نوع تست‌ها باید ۳ گزینه را رد کرد تا گزینه‌ی درست مشخص شود:

در گزینه‌ی (۱) اگر رأس صفر را کنار بگذاریم، ۵ رأس باقی می‌ماند که نمی‌تواند رأس درجه‌ی ۵ داشته باشد.

در گزینه‌ی (۲) سه رأس فرد وجود دارد پس دنباله، گرافی نیست.

در گزینه‌ی (۳) چون مرتبه‌ی گراف برابر ۶ و یک رأس درجه‌ی ۵ و یک رأس درجه‌ی ۴ در گراف وجود دارد پس نمی‌تواند دو رأس درجه‌ی یک داشته باشد، بنابراین دنباله مربوط به گراف ساده نیست.

۴ پیدا کردن درجه‌ی رأس‌های مجهول

اگر درجه‌ی یک یا چند رأس مجهول بود بهترین راه استفاده از گزینه‌ها است. ابتدا با استفاده از زوج و فرد بودن گزینه‌ها، یکی دو گزینه را رد می‌کنیم، سپس گزینه‌های باقیمانده را کنترل می‌کنیم.

۴ **درجه‌ی رئوس گراف همبند G به‌صورت a،b،۵،۴،۳،۲ است. کم‌ترین عدد $a+b$ کدام است؟** *تمرین ۲ بند پ ص ۱۴ کتاب درسی*

داخل ۸۳ | پاسخ: ۴

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

تعداد رأس‌های فرد گراف باید زوج باشد، پس a و b یا هر دو فردند یا هر دو زوج که در هر صورت $a+b$ عددی زوج است. از طرفی چون ۶ رأس داریم و یک رأس درجه‌ی ۵ در گراف وجود دارد a و b صفر نیستند. بنابراین با توجه به گزینه‌ها داریم:

$$a+b=۲ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۱ \end{cases} \Rightarrow ۵،۴،۳،۲،۱،۱$$

دنباله‌ی ۵،۴،۳،۲،۱،۱ گرافی نیست چون ۶ رأس داریم و یک رأس درجه‌ی ۵ و یک رأس درجه‌ی ۴ در گراف وجود دارد در نتیجه گراف نمی‌تواند دو رأس درجه‌ی یک داشته باشد. بنابراین $a+b=۴$ است.

دقت کنید که چون گراف ۶ رأس دارد و رأس درجه‌ی ۵ در گراف وجود دارد پس G حتماً همبند است.

جمع‌بندی: مبحث دنباله‌ی درجات خیلی مورد توجه طراحان است. این بحث را با ماتریس مجاورت هم ترکیب می‌کنند. بنابراین تسلط روی این مبحث الزامی است.

۵ گراف کامل و منتظم

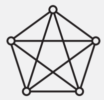
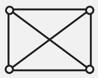
۱ گراف منتظم:

گراف $G=(V,E)$ را r- منتظم می‌نامند هرگاه درجه‌ی تمام رأس‌های آن برابر r باشد.

۲ قضیه‌ی گراف منتظم:

در هر گراف r- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داریم:

$$pr = ۲q$$

$K_۴$ $K_۵$

۳ گراف کامل: گراف $(p-۱)$- منتظم از مرتبه‌ی p را کامل می‌نامند و با K_p نشان می‌دهند.

۴ اندازه‌ی گراف کامل: تعداد یال‌های گراف K_p برابر است با:

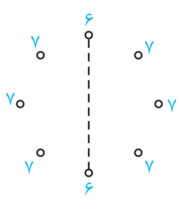
$$q = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

۵ اگر یک گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داشته باشیم و بخواهیم حداقل یا حداکثر δ یا Δ را بررسی کنیم یا بدانیم حداقل یا حداکثر چند رأس از درجه‌ی فلان داریم، باید ابتدا فرض کنیم که گراف کاملِ p رأسی چند یال دارد و گراف ما چند یال از گراف کامل کم‌تر دارد، سپس با توجه به آن‌چه مسأله خواسته است این چند یال را طوری بر می‌داریم که به خواسته‌ی مسأله برسیم.

۵ **مرتبه‌ی گراف G برابر ۸ و اندازه‌ی آن ۲۷ است. درجه‌ی چند رأس آن ماکزیمم است؟** مثال ۵ ص ۱۲ کتاب درسی

دهمی ۷۰ | پاسخ: ۲

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸



گراف کامل $K_۸$ دارای $\binom{۸}{۲} = ۲۸$ یال است و این گراف یک یال از گراف کامل کم‌تر دارد. با برداشتن این یک یال، دو رأس از درجه‌ی ۷ خارج شده و درجه‌ی ۶ می‌شوند.

۶ مسیر

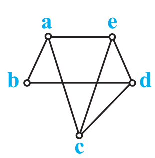
تعریف: منظور از مسیر بین دو رأس u و v، یک رشته یال غیر تکراری است که از رأس u آغاز و به رأس v ختم می‌شود.

طول مسیر: طول مسیر عبارت است از تعداد یال‌هایی که در مسیر طی می‌شود و همیشه یکی کم‌تر از تعداد رأس‌هایی است که برای معرفی مسیر می‌نویسیم.

نکته: برای پیدا کردن تعداد مسیرها در گراف غیر کامل، باید از روی نمودار گراف مسیرهای مطلوب را پیدا کنیم.

۶ **در گراف شکل مقابل چند مسیر به طول ۳ از a به e وجود دارد؟** شکل ۲ ص ۳ و مثال ۶ ص ۱۳ کتاب درسی

دهمی ۷۰ | پاسخ: ۳



۱) ۵ ۲) ۴
۳) ۲ ۴) ۳

مسیرهای مطلوب عبارتند از abde و acde. دقت کنید که بین a و e مسیرهای دیگری نیز وجود دارد که طول آن‌ها ۳ نیست. مسیر به طول یک ae، مسیر به طول دو ace و مسیر به طول چهار abdce، مسیرهای دیگر این گراف بین دو رأس a و e می‌باشند.

۷ مسیر در گراف کامل

۱ تعداد مسیرها در گراف کامل:

تعداد کل مسیرهای موجود بین دو رأس u و v از گراف K_p برابر است با:

$$[(p-۲)! \times e]$$
$$e \approx ۲/۷۲$$

۲ رسم گراف بازه‌ها:

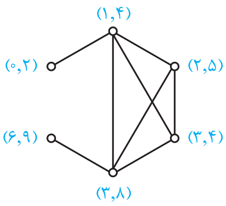
برای رسم گراف بازه‌ها به تعداد بازه‌های داده شده، رأس در صفحه قرار می‌دهیم و دو رأس را با این شرط به هم وصل می‌کنیم که بازه‌های آن‌ها دارای اشتراک باشد.

۷ **با شش بازه‌ی (۶،۹) ، (۳،۸) ، (۳،۴) ، (۲،۵) ، (۱،۴) ، (۰،۲) از اعداد حقیقی یک گراف بازه‌ها می‌سازیم. در گراف حاصل چند مسیر مختلف از رأس متناظر (۰،۲) به رأس متناظر (۳،۴) موجود است؟**

تمرین ۶ بند الف ص ۹ و تمرین ۹ ص ۱۵ کتاب درسی

داخل ۹۰ | پاسخ: ۱

۱) ۵　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۲



ابتدا گراف متناظر را رسم می‌کنیم. حال اگر به گراف، با دقت نگاه کنید یک گراف K_4 در آن می‌بینید. برای این‌که حداکثر استفاده را از K_4 ببریم مسیر خواسته شده را به دو مسیر کوچک‌تر تبدیل می‌کنیم. یکی از (۰،۲) به (۱،۴) و دیگری از (۱،۴) به (۳،۴) پس:

(۰،۲) ⟶ (۱،۴) ⟶ (۳،۴)

۱ × [(۴−۲)!×۲/۷۲]=۱×۵=۵

> **جمع‌بندی:** *از این به بعد هرگاه در گوشه‌ای از یک گراف، گراف کاملی وجود داشت از آن گراف کامل، نهایت بهره را ببرید. گراف کامل بی‌جهت جایی ظاهر نمی‌شود.*

۸ رسم گراف از روی درجه‌ی رأس‌ها

۱ رسم گراف از روی درجه‌ی رأس‌ها:

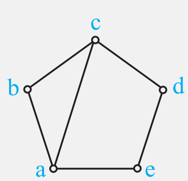
برای رسم گراف از روی درجه‌ی رأس‌های آن، بهتر است یک بار طبق الگوریتم هاول ـ حکیمی دنباله را کوچک کنیم و ابتدا دنباله‌ی کوچک شده را رسم کنیم، سپس رأس کنار گذاشته شده را در جای مناسب قرار دهیم و آن را به رأس‌هایی که یال از آن‌ها کنده شده، وصل کنیم.

۲ رسم گرافی که دو رأس با درجه‌ی بزرگ‌تر مجاور نیستند:

اگر قرار شد دو رأس با درجه‌ی بزرگ‌تر مجاور نباشد، یکی از بزرگ‌ترها را به انتهای دنباله می‌بریم و سپس الگوریتم را اجرا می‌کنیم.

۳ دور:

دور، مسیری است که رأس ابتدا و انتهای آن یکسان است.



⟸ دورها: abca به طول ۳ ، acdea به طول ۴ ، abcdea به طول ۵

۸ **درجه‌ی رأس‌های گراف G عبارتند از: ۴،۳،۲،۲،۱ به طوری که دو رأس با درجه‌ی بزرگ‌تر مجاور نیستند. تعداد دورهای به طول ۳ در این گراف کدام است؟**

تمرین ۱۰ بند الف ص ۱۵ کتاب درسی

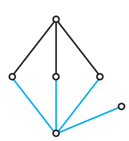
اواخر دهه‌ی ۷۰ | پاسخ: ۱

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

چون خواسته شده درجه‌های ۳ و ۴ مجاور نباشند درجه‌ی ۳ را به انتهای دنباله می‌بریم.

۴،۳،۲،۲،۱ ⟹ S: ~~۴~~،۲،۲،۲،۱،۳ (۴ قدم ⟶)

S′: ۱،۱،۱،۰،۳ ⟹



⟸ گراف سه دور به طول ۴ دارد ولی دور به طول ۳ ندارد.

۹ **دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های گراف G به‌صورت ۳،۳،۲،۲،۲ است. اگر دو رأس با درجه‌ی ماکزیمم مجاور نباشند، تعداد دورهای به طول ۳ یا ۵ کدام است؟**

تمرین ۱۰ بند الف ص ۱۵ کتاب درسی

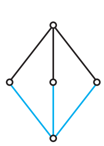
دهه‌ی ۷۰ | پاسخ: ۱

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

یکی از درجه ۳ها را به انتهای دنباله می‌بریم:

S: ~~۳~~،۲،۲،۲،۳ (۳ قدم ⟶)

S′: ۱،۱،۱،۳ ⟹



⟸ دور به طول ۳ یا ۵ ندارد

۱۰ در یک گراف ساده با درجه رأس‌های ۴،۴،۴،۳،۳،۲،۲ که دو رأس با درجه‌ی می‌نیمم مجاورند، تعداد دورهای با طول ۶ کدام است؟

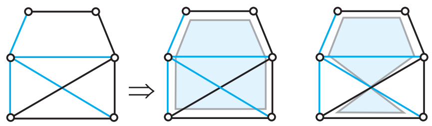
خارج ۹۰ | پاسخ: ۲

تمرین ۱۰ بند الف ص ۱۵ کتاب درسی

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

$S: \cancel{۴} \xrightarrow{\text{۴ قدم}} ۴،۴،۳،۳،۲،۲$

$S': ۳،۲،۲،۲،۱،۲ \Rightarrow$  $\Rightarrow$ ۲ دور به طول ۶ دارد

جمع‌بندی: *در رسم کردن گراف کاملاً حرفه‌ای شوید. در بسیاری از سؤالات گراف، نیاز به رسم آن دارید، از ما گفتن بود.*

۹ دور در گراف کامل

۱ تعداد دورهای به طول m در گراف K_p برابر است با: $\boxed{\binom{p}{m}\times\frac{(m-۱)!}{۲}}$

۲ هر گراف K_p به ازای $۳\le n\le p$ دوری به‌طول n دارد.

۱۱ در یک گراف کامل از مرتبه‌ی ۵، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

داخل ۸۷ | پاسخ: ۳

مثال ۸ ص ۱۴ کتاب درسی

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

در واقع باید ۴ رأس از ۵ رأس را انتخاب کنیم و با آن‌ها گردنبند بسازیم یعنی:

$$\binom{۵}{۴}\times\frac{(۴-۱)!}{۲}=۵\times۳=۱۵$$

۱۲ در یک گراف کامل حاصل‌ضرب اندازه و مرتبه‌ی آن ۵۰ است. در این گراف چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

خارج ۹۲ | پاسخ: ۳

مثال ۸ ص ۱۴ کتاب درسی

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

اندازه‌ی گراف کامل از رابطه‌ی $q=\binom{p}{۲}$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین باید $p\binom{p}{۲}=۵۰$ باشد پس:

$$p\binom{p}{۲}=۵۰\Rightarrow p\times\frac{p(p-۱)}{۲}=۵۰\Rightarrow p^۲(p-۱)=۱۰۰=۵^۲\times۴\Rightarrow p=۵$$

بنابراین تعداد دورهای به طول ۴ برابر است با:

$$\binom{۵}{۴}\times\frac{(۴-۱)!}{۲}=۱۵$$

جمع‌بندی: *ممکن است به جای گراف $K_۵$ بگویند، «گرافی با دنباله درجات ۴،۴،۴،۴،۴» یا «گراف کاملی که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن ۱۵ است.»*

۱۰ همبند و ناهمبند

گراف همبند: گرافی است که بین هر دو رأس دلخواه و متمایز آن، لااقل یک مسیر وجود داشته باشد. گرافی که همبند نباشد را ناهمبند گویند. (در واقع گراف همبند از یک بخش تشکیل شده است و بخش‌های جدا از هم ندارد.)

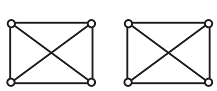
۱۳ در یک گراف ساده‌ی ناهمبند و ۳- منتظم که دارای ۸ رأس باشد، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

خارج ۸۷ | پاسخ: ۴

تمرین ۶ ص ۱۵ و مثال ۸ ص ۱۴ کتاب درسی

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۸ و ناهمبند به شکل روبه‌رو است. این گراف طبق قضیه‌ی $p.r=۲q$ دارای ۱۲ یال است که برای ناهمبند شدن باید دو بخش ۴ رأسی در نظر گرفت. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید این گراف از دو گراف کامل در کنار هم تشکیل شده است، بنابراین تعداد دورهای به طول ۴ آن برابر است با:



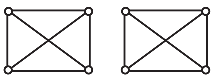
$$۲\times\left[\binom{۴}{۴}\times\frac{(۴-۱)!}{۲}\right]=۲\times۳=۶$$

۱۴ **گراف ناهمبند ۳- منتظم دارای ۱۲ یال است، این گراف چند دور با طول ۴ دارد؟** *تمرین ۶ ص ۱۵ و مثال ۸ ص ۱۴ کتاب درسی*

خارج ۷۶ | پاسخ: ۳

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

همان تست قبلی است. فقط این بار به جای تعداد رأس‌ها، تعداد یال‌ها را داده‌اند و ما در آزمون‌های پایانی مُدل‌های جالب‌تری هم برای شما از همین تمرین، سؤال داده‌ایم.

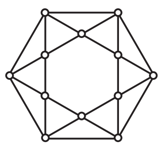
۶ دور به طول ۴ ⇐ 

۱۱ دور در گراف‌های متقارن

در گراف‌هایی که شکل‌های متقارن دارند یک نمونه از هر مُدل دور را پیدا می‌کنیم و با توجه به تقارن مسأله، تعداد دورهای شبیه بـه آن را پیدا کرده و هر مُدل را در تعداد تکرارش ضرب می‌کنیم.

۱۵ **در گراف شکل زیر چند دور با طول ۵ وجود دارد؟** *تمرین ۱ ص ۱۴ کتاب درسی*

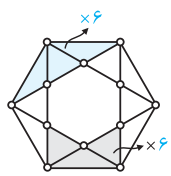
خارج ۸۴ | پاسخ: ۴



۱) ۴ ۲) ۶

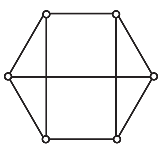
۳) ۸ ۴) ۱۲

به شکل با دقت نگاه کن:

۱۲ دور به طول ۵ ⇐ 

۱۶ **در گراف ۳- منتظم شکل مقابل، چند دور به طول ۵ وجود دارد؟** *تمرین ۱ ص ۱۴ کتاب درسی*

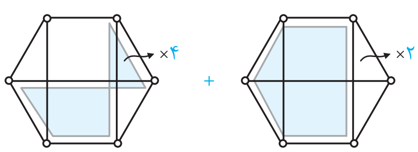
خارج ۷۹ | پاسخ: ۴



۱) ۳ ۲) ۴

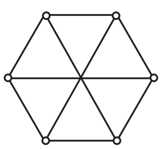
۳) ۵ ۴) ۶

دو دسته دور داریم نگاه کن:

۶ دور به طول ۵ = 

۱۷ **در گراف ۳- منتظم شکل مقابل، چند دور به طول ۴ دارد؟** *تمرین ۱ ص ۱۴ کتاب درسی*

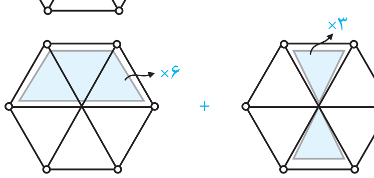
داخل ۷۹ | پاسخ: ۴



۱) ۶ ۲) ۷

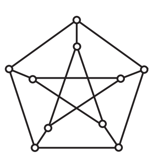
۳) ۸ ۴) ۹

دو مُدل دور دیده می‌شود یکی ذوزنقه‌ای و یکی پروانه‌ای نگاه کن:

۹ دور به طول ۴ = 

۱۸ **گراف شکل مقابل (گراف پترسن) چند دور با طول ۵ دارد؟** *تمرین ۱۲ ص ۲۳ کتاب درسی*

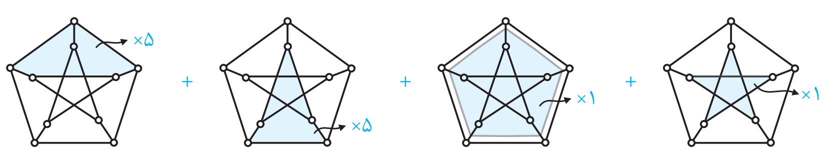
خارج ۹۱ | پاسخ: ۴



۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۲

این شکل در کتاب درسی و در صفحه‌ی ۲۳ آمده است، به دورها خوب نگاه کن:

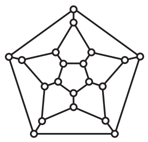
۱۲ دور با طول ۵ = 

جمع‌بندی: *پیدا کردن دور در گراف‌های متقارن راه و روش خاصی ندارد، فقط دو تا چشم تیزبین می‌خواهد و هم‌چنین توجه به تقارن شکل. در واقع طراح می‌خواهد ببیند ذهن شما قادر به شبیه‌سازی هست یا نه؟*

۱۲ همیلتنی و پترسن

گراف همیلتنی: گراف G از مرتبه‌ی p را همیلتنی می‌نامند هرگاه دوری به طول p داشته باشد، یعنی دوری که از همـه‌ی رأس‌هـای آن عبور کند (نه لزوماً از همه‌ی یال‌ها)

نکته: گراف پترسن، همیلتنی نیست چون دورهایی با طول **۵، ۶، ۸، ۹** دارد ولی دوری با طول ۱۰ ندارد. *(تمرین ۱۲ ص ۲۳ کتاب درسی گسسته)*

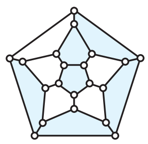


۱۹ **گراف شکل مقابل دوری با طول m دارد. بزرگ‌ترین عدد m کدام است؟** *تمرین ۱۲ ص ۱۶ کتاب درسی*

خارج ۸۸ | پاسخ: ۳

۱) ۱۸   ۲) ۱۹

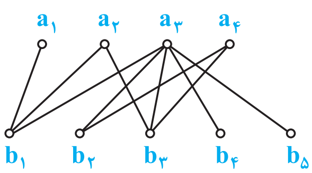
۳) ۲۰   ۴) ۲۱



گراف داده شده عکس روی جلد کتاب ریاضیات گسسته و هم‌چنین تمرین ۱۲ صفحه‌ی ۱۶ کتـاب درسی است و نشان‌دهنده‌ی یک گراف همیلتنی است که دوری به طول ۲۰ مطابق شکل دارد.

۲۰ **۵ نفر به نام‌های b_1 و b_2 و b_3 و b_4 و b_5 متقاضی شغل‌های a_1 و a_2 و a_3 و a_4 مطابق گراف مقابل هستند، شرکت به چند طریق می‌تواند آن‌ها را استخدام کند؟**

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲



۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

باید از شغلی که کم‌ترین متقاضی را دارد، شروع به واگذاری شغل‌ها کنیم و فردی که صاحب شغل می‌شود را از گراف حذف کنیم. مثلاً در این تست چون b_1 تنها متقاضی a_1 است پس a_1 را به b_1 می‌دهیم و ...

$$a_1 \to b_1 \,،\, a_2 \to b_3 \,،\, a_4 \to b_2 \,،\, a_3 \begin{cases} \nearrow b_4 \\ \text{یا} \\ \searrow b_5 \end{cases} \Rightarrow$$ شرکت به ۲ طریق می‌تواند افراد را استخدام کند.

جمع‌بندی: *البته از جای این تست تعجب نکنید. این تست به هیچ مطلبی از کل نظریه‌ی گراف مربوط نیست، ما هم یهو گذاشتیم این‌جا. یعنی آخر دور، که بگیم دور به طول فرد هم نداره. در ضمن راجع به دورهای این گراف در کتاب سؤال شده که در آزمون‌های جامع جاسازی کرده‌ایم.*

۱۳ اویلری و شبه اویلری

گراف اویلری: اگر در یک گراف بتوان با آغاز از یکی از رأس‌ها، از روی هر یال دقیقاً یک بار گذشت و به رأس **اولیه** بازگشت گـراف را **اویلری** می‌نامند.

قضیه: شرط لازم و کافی برای اویلری بودن یک گراف **همبند** آن است که **درجه‌ی تمام رأس‌ها زوج** باشد.

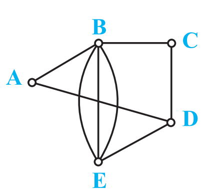
گراف شبه اویلری: اگر در یک گراف بتوان با آغاز از یکی از رأس‌ها از روی هر یال دقیقاً یک بار گذشـت و بـه رأس **دیگـری** از گـراف رسید آن را **شبه اویلری** می‌نامند.

قضیه: شرط لازم و کافی برای شبه اویلری بودن یک گراف **همبند** آن است که گراف **دقیقاً دو رأس فـرد** داشـته باشـد. در گـراف شـبه اویلری اگر از یک **رأس فرد** شروع کنیم و از تمام یال‌ها دقیقاً یک بار بگذریم، پایان حرکت، **رأس فرد** دیگر خواهد بود.

نکته: گراف پترسن، اویلری و شبه اویلری نیست، چون درجه‌ی تمام رئوس آن فرد است.

۲۱ **شکل مقابل ۵ منطقه‌ی A، B، C، D و E را با ۸ پل به هم وصل کرده است. اگر مجاز باشیم از هـر پـل دقیقاً یک بار عبور کنیم، با شروع از منطقه‌ی B، منطقه‌ی پایان کدام است؟** *تمرین ۸ ص ۱۵ بند پ کتاب درسی*

داخل ۸۲ | پاسخ: ۳



۱) نشدنی   ۲) B

۳) D   ۴) E

گراف داده شده فقط دو رأس فرد دارد بنابراین شبه اویلری است. با آغاز از رأس فرد B و عبور از تمام یال‌ها، به رأس فرد دیگر یعنی D می‌رسیم.

۱۴ تعداد گراف‌ها

منظور از تعداد گراف‌ها در کنکور سراسری تعداد گراف‌های متفاوت (نا هم‌ریخت) است و به قول معروف دو ایزومر متفاوت.

توجه: در دو گراف هم‌ریخت، همه‌ی خاصیت‌ها یکسان است از جمله:

۱ درجه‌ی رأس‌ها
۲ تعداد دورها
۳ نحوه‌ی مجاورت رأس‌ها
۴ طول دورها
۵ تعداد مسیرها و طول مسیرها و ... .

۲۲ **چند گراف ساده و همبند وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن‌ها ۸ باشد؟**

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

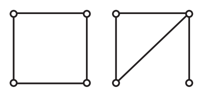
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

ابتدا حالاتی که $p+q$ برابر ۸ می‌شود را می‌نویسیم.

p	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

ناهمبند ← | → غیر ساده

با ۴ رأس و ۴ یال، دو گراف همبند می‌توان رسم کرد.



۲۳ **یک گراف همبند که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن ۸ باشد، با افزودن چند یال کامل می‌شود؟** تمرین ۱ ص ۲۱ کتاب درسی

داخل ۹۱ | پاسخ: ۲

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

تنها حالت ممکن $p=4$ و $q=4$ است. گراف K_4 دارای $\binom{4}{2}=6$ یال است پس باید به گراف مزبور ۲ یال اضافه کرد.

۲۴ **چند گراف ساده وجود دارد که همبند بوده و حاصل‌ضرب مرتبه و اندازه‌ی آن ۲۰ باشد؟**

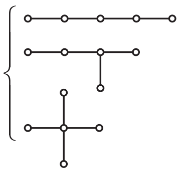
تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

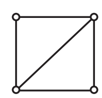
ابتدا حالاتی که pq برابر ۲۰ می‌شود را می‌نویسیم:

$$pq=20=\overbrace{1\times 20=2\times 10}^{\text{غیر ساده}}=4\times 5=5\times 4=\overbrace{10\times 2=20\times 1}^{\text{ناهمبند}}$$

(۱) $\begin{cases}p=5\\ q=4\end{cases}\Rightarrow$



(۲) $\begin{cases}p=4\\ q=5\end{cases}\Rightarrow$



۲۵ **چند گراف ساده، همبند و نامنتظم وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن‌ها ۱۰ باشد؟** تمرین ۱ ص ۲۱ کتاب درسی

داخل ۸۴ | پاسخ: ۲

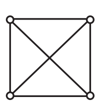
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حالاتی که $p+q$ برابر ۱۰ می‌شود را می‌نویسیم:

p	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
						II	I			

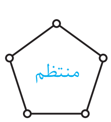
ناهمبند ← | → غیر ساده

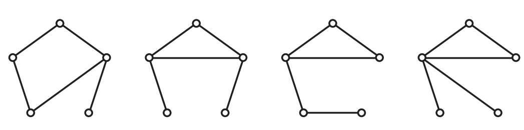
I $\begin{cases}p=4\\ q=6\end{cases}\Rightarrow$



$\Rightarrow$ منتظم

II $\begin{cases}p=5\\ q=5\end{cases}\Rightarrow$





۴ گراف وجود دارد

جمع‌بندی: *این سؤال به نظر ما سخت‌ترین سؤال گراف در تاریخ کنکور محسوب می‌شود. البته تمرینی مشابه این تست، در کتاب درسی وجود دارد.*

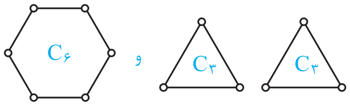
۲۶ **چند گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۶ وجود دارد؟**

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) ۱   ۲) ۲

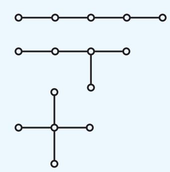
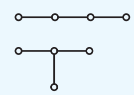
۳) ۳   ۴) ۴

دو گراف ۲- منتظم از مرتبه ۶ وجود دارد.



۱۵ درخت

تعریف: هر گراف همبند و بدون دور را درخت می‌نامند و درخت مرتبه‌ی p را با T_p نشان می‌دهند.

T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	مرتبه
					**انواع درخت‌ها**

توصیه: این جدول رو حفظ باش؛ به درد می‌خوره!!!

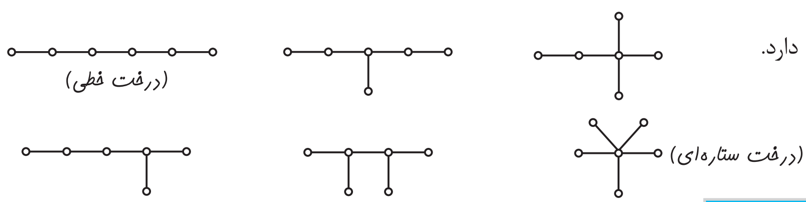
۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	**p**
۱۱	۶	۳	۲	۱	۱	۱	**تعداد درخت‌ها**

۲۷ **چند درخت از مرتبه‌ی ۶ وجود دارد؟** *تمرین ۵ ص ۲۲ کتاب درسی*

داخل ۸۲ | پاسخ: ۳

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

شش درخت مرتبه‌ی ۶ به شکل زیر وجود دارد.



۱۶ قضیه‌های درخت

قضیه‌ی ۱: اگر مرتبه و اندازه‌ی یک درخت به‌ترتیب p و q باشد داریم: $\boxed{p = q + 1}$

قضیه‌ی ۲: بین هر دو رأس متمایز درخت، **دقیقاً یک مسیر** وجود دارد و برعکس.

قضیه‌ی ۳: هر درخت با بیش از یک رأس، **حداقل ۲ رأس** از درجه‌ی یک دارد.

قضیه‌ی ٤: اگر در یک درخت $\Delta = k$ باشد، **حداقل k رأس** از درجه‌ی یک دارد.

۲۸ **بین هر دو رأس متمایز از گراف G، دقیقاً یک مسیر وجود دارد. اگر این گراف شامل ۷ رأس از درجه‌ی یک و ۵ رأس از درجه‌ی ۲ و k رأس از درجه‌ی ۳ باشد، k کدام است؟**

اواخر دهه‌ی ۷۰ | پاسخ: ۲

۱) ۶   ۲) ۵   ۳) ۴   ۴) ۳

گراف G درخت است. بنابراین $q = p - ۱$ می‌باشد در نتیجه:

$$\sum \deg v_i = ۲q \xrightarrow{q=p-۱} \sum \deg v_i = ۲(p-۱) \Rightarrow ۷\times۱ + ۵\times۲ + k\times۳ = ۲(۷+۵+k-۱) \Rightarrow ۱۷ + ۳k = ۲۲ + ۲k \Rightarrow k = ۵$$

۲۹ **کدام عدد می‌تواند مجموع مرتبه و اندازه‌ی یک گراف همبند و فاقد دور باشد؟**

دهه‌ی ۷۰ | پاسخ: ۲

۱) ۲۴   ۲) ۲۵   ۳) ۲۶   ۴) ۲۸

گراف همبند و فاقد دور یعنی درخت. بنابراین: $p + q = p + p - ۱ = ۲p - ۱ =$ فرد

۱۷ رسم درخت

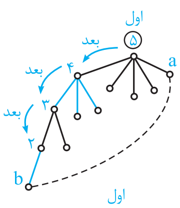
برای رسم یک درخت از روی درجه‌ی رأس‌های آن، کافی است رأس‌های غیر از یک را رسم کنیم. از بزرگ به کوچک و پشت سرهم...

توجه: اگر در تستی، تعداد رأس‌های درجه‌ی یک مجهول بود بهتر است درخت را رسم کنیم.

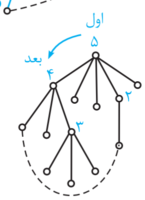
۳۰ به یکی از گراف‌های همبند فاقد دور، که درجه‌ی رأس‌های غیر مینیمم آن ۵۰۴۰۳۰۲ می‌باشد، فقط یک یال چنان اضافه می‌کنیم که دوری با بیش‌ترین طول ممکن، حاصل شود. طول این دور کدام است؟ *تمرین ۵ ص ۲۲ ترکیب با مفاهیم دور*

خارج ۷۵ | پاسخ: ۲

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸



با وصل کردن a و b دوری با طول ۶ ایجاد می‌شود. ⇐



توضیح: می‌دانیم با اضافه کردن یک یال به درخت، گراف حاصل حتماً دور دار می‌شود. حالا اگر درخت هر چه کشیده‌تر باشد طول دور بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین در رسم این درخت، سعی کردیم آن را کشیده رسم کنیم. مثلاً می‌توانستیم به صورت مقابل هم رسم کنیم اما با اضافه کردن یک یال به این درخت، دوری با طول کوچک‌تر از ۶ حاصل می‌شود.

۱۸ همسایه‌های درخت

نکته: هر گرافی که بیش از درخت یال دارد، **دوردار** و هر گرافی که کمتر از درخت یال دارد، **ناهمبند** است.

توجه: اگر در گزینه‌های یک تست واژه‌های **همبند**، **ناهمبند**، **دوردار**، **بدون دور** و **درخت** دیده شد بهترین کار مقایسه‌ی تعداد یال‌های گراف با یال‌های درخت هم مرتبه‌اش است.

۳۱ گرافی که دنباله‌ی درجه‌ی رئوس آن ۳۰۲۰۲۰۲۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱ می‌باشد، چگونه است؟ *تمرین ۳ بند الف و پ ص ۱۵ کتاب درسی*

داخل ۷۰ | پاسخ: ۴

۱) قطعاً دارای دور ۲) درخت ۳) همبند ۴) ناهمبند

$$\sum \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۳+۲+۲+۲+۱+۱+۱+۱+۱ = ۲q \Rightarrow q = ۶$$

گراف دارای ۸ رأس و ۶ یال است یعنی از درخت ۸ رأسی، کم‌تر یال دارد پس ناهمبند است.

۱۹ ماتریس مجاورت

ماتریس مجاورت: برای هر گراف ساده‌ی p رأسی، می‌توان یک ماتریس $p \times p$ تعریف کرد که نحوه‌ی مجاورت رأس‌ها را نشان دهد. ترتیب کار این است که رأس‌ها را در سمت چپ و بالای ماتریس می‌نویسیم و در صورتی که بین دو رأس، یالی وجود داشت در محل تقاطع آن سطر و ستون، ۱ و در غیر این صورت صفر می‌گذاریم.

۱ ***تعداد یک‌های هر سطر:*** تعداد یک‌های هر سطر (ستون) در ماتریس مجاورت، نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی رأس متناظر است.

۲ ***تعداد کل یک‌ها:*** تعداد کل یک‌های ماتریس مجاورت برابر است با: $\mathbf{2q}$.

۳ ***تعداد صفرها:*** تعداد صفرهای ماتریس مجاورت گراف G برابر است با: $\mathbf{p^2 - 2q}$.

۳۲ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت گراف G باشد، اندازه‌ی G کدام است؟ *شکل ۲ و ۳ صفحات ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی*

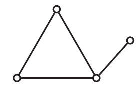
داخل ۹۱ | پاسخ: ۲

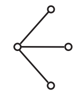
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

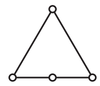
تعداد کل یک‌های ماتریس برابر است با $2q$ پس: $\text{تعداد یک‌ها} = ۴ = ۲q \Rightarrow q = ۲$

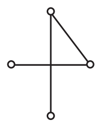
۳۳ **ماتریس** $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ **متناظر با کدام گراف است؟** *شکل ۲ ص ۲۰ کتاب درسی*

داخل ۸۴ | پاسخ: ۱

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

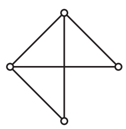
تعداد یک‌های هر سطر، درجه‌ی رأس متناظر با آن سطر است پس:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow ۲ \\ \Rightarrow ۱ \\ \Rightarrow ۳ \\ \Rightarrow ۲ \end{matrix} \Rightarrow$$

باید گرافی را انتخاب کنیم که درجات رئوس آن ۲ و ۱ و ۳ و ۲ باشد که گراف گزینه‌ی (۱) این چنین است.

۳۴ **در ماتریس مجاورت گراف مقابل، چند درایه‌ی صفر وجود دارد؟** *توضیحات ص ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی*

داخل ۷۹ | پاسخ: ۱



۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۳

مرتبه‌ی گراف $p=۴$ و اندازه‌ی گراف $q=۵$ است. بنابراین تعداد صفرهای ماتریس مجاورت آن برابر است با:

$$p^{۲}-۲q=۱۶-۱۰=۶$$

۲۰ ماتریس‌های بلوکی

اگر گراف G ناهمبند باشد، با یک نام‌گذاری مناسب برای رأس‌های آن، می‌توان ماتریس مجاورت آن را به شکل زیر که ماتریس بلوکی نامیده می‌شود نشان داد.

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_۱ & \bar{O} \\ \hline \bar{O} & A_۲ \end{array}\right] \Leftrightarrow G_۱ \quad G_۲$$

که $A_۱$ ماتریس مجاورت $G_۱$ و $A_۲$ ماتریس مجاورت $G_۲$ است.

۳۵ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & a & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & b & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، **ماتریس مربعی** $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ **به‌ازای مقادیری از a و b ماتریس مجاورت گراف G است. این گراف چگونه است؟** *تمرین ۹ ص ۲۲ کتاب درسی*

خارج ۹۱ | پاسخ: ۲

۱) کامل ۲) ناهمبند ۳) درخت ۴) همبند منتظم

اگر دو ماتریس را مطابق آن‌چه بیان شده، روی هم قرار دهیم یک ماتریس بلوکی حاصل می‌شود که مُعرف یک گراف ناهمبند است:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & a & ۰ & ۰ & ۰ \\ \hline ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & b & ۱ & ۰ \end{array}\right]$$

توجه کنید که **ماتریس مجاورت یک گراف ساده، متقارن است** یعنی درایه‌های به کار رفته در سطر i و ستون i فرقی با هم ندارند. در ضمن **درایه‌های قطر اصلی ماتریس مجاورت همگی صفرند.** پس اگر در این تست مقادیر a و b پرسیده می‌شد $a=۰$ و $b=۱$ به‌دست می‌آمد.

۲۱ مربع ماتریس مجاورت

قضیه: اگر $A=[a_{ij}]_{p\times p}$ ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد، آن‌گاه درایه‌های قطر اصلی $A^{۲}$ عبارتند از درجه‌ی رأس‌های گراف G.

دو نتیجه:

۱) جمع درایه‌های قطر اصلی $A^{۲}$ همواره برابر است با ۲q.

۲) اگر $A^{۲}$ مربع ماتریس مجاورت گراف K_p باشد درایه‌های قطر اصلی آن $p-۱$ و سایر درایه‌های آن $p-۲$ است.

(تمرین ۷ ص ۲۲ کتاب درسی گسسته)

۳۶ اگر A ماتریس مجاورت گراف همبند G باشد، کدام دنباله‌ی اعداد برای درایه‌های قطر اصلی $A^۲$ مورد قبول است؟

داخل ۸۷ | پاسخ: ۳

قضیه ۴ ص ۲۱ و تمرین ۲ بند پ ص ۱۵ کتاب درسی

۱) ۴،۳،۲،۱،۰،۰ ۲) ۴،۳،۲،۱،۱،۱

۳) ۴،۳،۲،۲،۱ ۴) ۵،۳،۲،۱،۱

بحثِ تشخیصِ دنباله‌ی گرافی است چون اعداد قطر اصلی $A^۲$، درجه‌ی رأس‌ها هستند. بنابراین گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا سه گزینه را رد کنیم. در گزینه‌ی (۱) اگر رأسِ درجه‌ی صفر را کنار بگذاریم، چهار رأس باقی می‌ماند که رأس درجه‌ی ۴ نمی‌توانیم داشته باشیم. پس این دنباله، گرافی نیست. در گزینه‌ی (۲) سه رأس درجه‌ی فرد وجود دارد پس مربوط به گراف ساده نیست. در گزینه‌ی (۴) هم، ۵ رأس داریم و رأس درجه‌ی ۵ نمی‌توانیم داشته باشیم. بنابراین گزینه‌ی (۳) مربوط به گراف ساده است. توجه کنید که همبند بودن گراف، تأثیری در انتخاب ما نداشت!!!

۳۷ اگر A ماتریس مجاورت یک درخت با مرتبه‌ی ۷ باشد، مجموع درایه‌های قطری ماتریس $A^۲$ کدام است؟

داخل ۸۹ | پاسخ: ۳

قضیه‌ی ص ۲۱ و قضیه‌ی ۱ ص ۱۱ کتاب درسی

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۲ ۴) ۱۴

مجموع درایه‌های قطری یعنی مجموع درجات. در درخت از مرتبه‌ی ۷، اندازه برابر ۶ است پس: $\sum \deg v_i = ۲q \Rightarrow \sum \deg v_i = ۲\times۶ = ۱۲$

۳۸ اگر A ماتریس مجاورت یک گراف کامل باشد؛ کدام عدد برای مجموع درایه‌های قطری ماتریس $A^۲$ مورد قبول است؟

خارج ۹۱ | پاسخ: ۲

تمرین ۷ ص ۲۲ کتاب درسی

۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۹۶

مجموع درایه‌های قطری $A^۲$ یعنی مجموع درجات که برابر $۲q$ می‌باشد. هم‌چنین می‌دانیم در گراف K_p رابطه‌ی $p(p-۱) = ۲q$ برقرار است پس:

$$\text{مجموع درایه‌های قطری} = ۲q \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های قطری} = \underbrace{p(p-۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}}$$

در گزینه‌ها فقط ۷۲ حاصل‌ضرب دو عدد متوالی است (۸×۹).

۲۲ تشخیص درجه‌ها از روی حاصل‌ضرب آن‌ها

اگر حاصل‌ضرب درجه‌ی رأس‌ها را دادند، آن عدد را به اعداد اول تجزیه می‌کنیم که ۳ حالت عمده رُخ می‌دهد:

۱. تعداد اعداد اول موجود در حاصل‌ضرب کم‌تر از مرتبه‌ی گراف است که در این حالت، بقیه‌ی درجه‌ها را ۱ در نظر می‌گیریم.
۲. تعداد اعداد اول موجود در حاصل‌ضرب بیش‌تر از مرتبه‌ی گراف است که در این حالت دو تا از کوچک‌ترها را در هم ضرب کرده و یک درجه در نظر می‌گیریم. (معمولاً دو تا از ۲ها را)
۳. تعداد اعداد اول موجود در حاصل‌ضرب برابر با مرتبه است که در این حالت احتمالاً همین اعداد درجه‌ی رأس‌ها هستند. اگر نبودند دو تا از ۲ها را ضرب کنید و ۴ فرض کنید و به‌جای آن ۱ قرار دهید.

۳۹ اگر A ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه‌ی ۴ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی $A^۲$ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

داخل ۸۰ | پاسخ: ۳

قضیه‌ی ۴ ص ۲۱ کتاب درسی

۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی $A^۲$ همان حاصل‌ضرب درجات گراف است. پس گزینه‌ها را به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه می‌کنیم:

۱) $۳ = ۳\times۱\times۱\times۱$ ۲) $۱۲ = ۳\times۲\times۲\times۱$

۳) $۱۸ = ۳\times۳\times۲\times۱ \xRightarrow{\text{۳ رأس فرد دارد}}$ گرافی نیست ۴) $۳۶ = ۳\times۳\times۲\times۲$

۴۰ اگر A ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه‌ی ۵ و حاصل‌ضرب درایه‌های قطری ماتریس $A^۲$ برابر ۷۲ باشد، با حذف چند یال آن، درخت تشکیل می‌شود؟

خارج ۸۷ | پاسخ: ۲

قضیه‌ی ۴ ص ۲۱ و قضیه‌ی ۳ ص ۱۸ کتاب درسی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۲ را تجزیه می‌کنیم تا درجات گراف به‌دست آید:

$$۷۲ = \underbrace{۳\times۳\times۲\times۲\times۲}_{\text{۵ رأس}} \Rightarrow p = ۵ \text{ ، } q = \frac{\overbrace{۳+۳+۲+۲+۲}^{\text{مجموع درجات}}}{۲} = ۶$$

اما درخت از مرتبه‌ی ۵ باید ۴ یال داشته باشد پس با حذف ۲ یال از این گراف، درخت حاصل می‌شود.

۲۳ تعداد یک‌های درخت

بهترین راه برای پیدا کردن تعداد رأس‌های درجه‌ی یک هر درختی رسم درجه‌های غیر یک آن است. به این ترتیب که ابتدا بزرگ‌ترین درجه را رسم می‌کنیم و سپس درجه‌های پایین‌تر را به زیرشاخه‌ها وصل می‌کنیم. ترتیب قرار دادن رأس‌های بعدی زیرشاخه‌ها مهم نیست و همه به یک جواب ختم می‌شود.

۴۱ **اگر A ماتریس مجاورت درخت T و حاصل‌ضرب درایه‌های قطری ماتریس $A^۲$ برابر ۱۲۰ باشد، آن‌گاه درخت T حداقل چند رأس از درجه‌ی ۱ دارد؟**

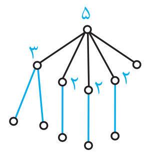
قضیه‌ی ۴ ص ۲۱ و شکل ۱ ص ۱۷ کتاب درسی

خارج ۸۴ | پاسخ: ۲

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

چون حداقل رئوس درجه‌ی یک را می‌خواهد، بهتر است ۱۲۰ تا جایی که ممکن است به اعداد کوچک‌تری شکسته شود:

$$۱۲۰ = ۵ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times \underbrace{۱ \times \cdots \times ۱}_{n} \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ حداقل ۶ رأس درجه‌ی یک

توجه کنید که حداکثر تعداد رأس‌های درجه یک در این حالت ۱۲۰ بود، یعنی درخت را به شکل ستاره‌ای رسم می‌کردیم.

۴۲ **اگر A ماتریس مجاورت گراف G و حاصل‌ضرب درایه‌های قطری ماتریس $A^۲$ برابر ۱۳۵ باشد، آن‌گاه گراف G با کم‌ترین مرتبه‌ی ممکن، چند دور با طول ۳ دارد؟**

قضیه‌ی ۴ ص ۲۱ و مثال ۸ ص ۱۴ کتاب درسی

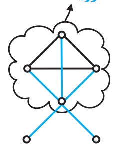
خارج ۸۶ | پاسخ: ۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حداقل ۶ رأس لازم است

$$۱۳۵ = ۵ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۱ \times ۱ \Rightarrow$$

$S' : ۲،۲،۲،۰،۰$



$\Rightarrow$ تعداد دورهای به طول ۳ $= \binom{۴}{۳} \times \frac{(۳-۱)!}{۲} = ۴$

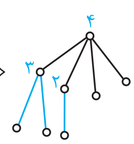
۴۳ **اگر A ماتریس مجاورت یک درخت و حاصل‌ضرب درایه‌های قطری ماتریس $A^۲$ برابر ۲۴ و ماکزیمم درجه‌ی آن ۴ باشد، تعداد یال‌های این درخت کدام است؟**

قضیه‌ی ۴ ص ۲۱ و شکل ۱ ص ۱۷ کتاب درسی

داخل ۸۶ | پاسخ: ۳

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

$$۲۴ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times \underbrace{۱ \times ۱ \times \cdots \times ۱}_{n} \Rightarrow$$



$\xrightarrow{\text{به شکل نگاه کن}}$ ۷ یال دارد

۴۴ **اگر A ماتریس مجاورت گراف G و درایه‌های واقع در سطر iاُم و ستون iاُم ماتریس $A^۲$ اعداد ۴،۴،۲،۲،۲ باشند، گراف G چند دور دارد؟**

قضیه‌ی ۴ ص ۲۱ و مثال ۸ ص ۱۴ کتاب درسی

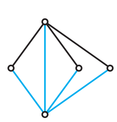
داخل ۹۲ | پاسخ: ۴

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

درایه‌های سطر iاُم و ستون iاُم، همان درایه‌های قطر اصلی هستند که مُعرف درجه‌ی رأس‌ها هستند. حالا باید گراف را رسم کنیم تا تعداد دورها را مشخص کنیم.

$S : \cancel{۴} \xrightarrow{\text{۴ قدم}} ۴،۲،۲،۲$

$S' : ۳،۱،۱،۱ \Rightarrow$



$\Rightarrow \begin{cases} \text{۳ دور به طول ۳} \\ \text{۳ دور به طول ۴} \end{cases}$

جمع‌بندی: *مربع ماتریس مجاورت را با همه چیز قاطی می‌کنند دور، درخت و ... . این مبحث بسیار مهم است. با دقت و وسواس بیشتری مربع ماتریس مجاورت را بررسی کنید. (در واقع مهم‌ترین بحث در گراف همین درایه‌های قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت است.)*

سؤالات | آزمون | دوره‌ای ۱ | فصل ۱

۱- گرافی شامل ۶ رأس است، کدام گزینه می‌تواند اعداد واقع بر قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف را نشان دهد؟ *مشابه داخل ۸۸*

۱) ۵،۴،۳،۲،۱،۰ ۲) ۵،۵،۳،۳،۱،۱ ۳) ۵،۵،۴،۴،۴،۲ ۴) ۵،۴،۳،۳،۳،۳

۲- مجموع مرتبه و اندازه‌ی گراف کاملی ۵۵ است، این گراف چند دور به طول ۳ دارد؟ *مشابه خارج ۹۲*

۱) ۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲۰

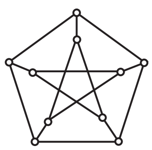
۳- حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گرافی از مرتبه‌ی ۵، برابر ۱۲۸ است، این گراف چند دور دارد؟ *مشابه داخل ۹۲*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴- چند گراف ساده، همبند و فاقد دور وجود دارد که حاصل‌ضرب مرتبه و اندازه‌ی آن‌ها ۳۰ باشد؟ *مشابه داخل ۸۴*

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۱ ۴) ۵

۵- گراف شکل مقابل دوری به طول m دارد، بزرگ‌ترین عدد m کدام است؟ *تمرین ۲۳ ص ۱۲ کتاب درسی گسسته و مشابه خارج ۸۸*



۱) ۱۰ ۲) ۹

۳) ۸ ۴) ۷

۶- در یک گراف اعداد واقع بر قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت، ۴،۴،۳،۳،۲،۲ است، اگر رأس‌های درجه‌ی ۲ مجاور باشند گراف چند دور با طول ۴ دارد؟ *مشابه داخل ۹۲*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷- با ۶ بازه‌ی (۸،۱۰)،(۵،۶)،(۴،۷)،(۳،۷)،(۲،۸)،(۱،۹) از اعداد حقیقی یک گراف بازه‌ها می‌سازیم. در گراف حاصل، چند مسیر مختلف از رأس متناظر (۸،۱۰) به رأس متناظر (۴،۷) وجود دارد؟ *مشابه داخل ۹۰*

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

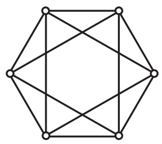
۸- در یک گراف ساده، همبند و نامنتظم مجموع مرتبه و اندازه برابر ۱۰ است، این گراف با افزودن چند یال کامل می‌شود؟ *مشابه داخل ۹۱*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۱ (۱)(۲)(۳)(۴)	۳ (۱)(۲)(۳)(۴)	۵ (۱)(۲)(۳)(۴)	۷ (۱)(۲)(۳)(۴)
۲ (۱)(۲)(۳)(۴)	۴ (۱)(۲)(۳)(۴)	۶ (۱)(۲)(۳)(۴)	۸ (۱)(۲)(۳)(۴)

محل انجام محاسبات

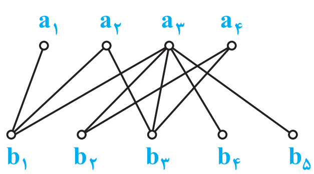
سؤالات آزمون دوره‌ای ۲ فصل ۱



۱- گراف شکل مقابل، چند دور با طول ۴ دارد؟ *مشابه خارج ۸۴ و داخل ۸۹*

۱) ۶ ۲) ۹

۳) ۱۲ ۴) ۱۵



۲- دو رأس متناظر با بازه‌های (a,b) و (c,d) از اعداد حقیقی مجاورند به شرط آن‌که اشتراک این دو بازه تهی نباشد. گراف مقابل به چند طریق می‌تواند گراف بازه‌ها باشد؟ *تمرین ۲ صفحه‌ی ۹ و مثال ۳ صفحه‌ی ۴ گسسته و مشابه داخل ۸۸*

۱) بی‌شمار ۲) ۲

۳) ۳ ۴) نشدنی

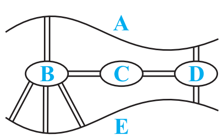
۳- در گرافی از مرتبه‌ی ۹ و اندازه‌ی ۳۳، حداکثر چند رأس از درجه‌ی ماکزیمم وجود دارد؟ *مشابه دهه‌ی ۷۰*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

۴- در گرافی با درجه‌ی رئوس ۵،۴،۲،۲،۲،۲،۱ دو رأس با درجه‌های بزرگ‌تر مجاور نیستند، بین این دو رأس چند مسیر وجود دارد؟ *مشابه دهه‌ی ۷۰*

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۵- فرض کنید طبق شکل شهری از یک رودخانه و پنج منطقه‌ی A، B، C، D و E تشکیل شده است و این منطقه با ۸ پل به هم راه دارند، اگر مجاز باشیم از هر پل دقیقاً یک بار عبور کنیم. به چند طریق ممکن است با آغاز از منطقه‌ی C، دوباره به همان نقطه برگردیم؟ *تمرین ۸ صفحه‌ی ۱۵ گسسته و مشابه داخل ۸۲*



۱) ۱

۲) بی‌شمار

۳) ۲

۴) نشدنی

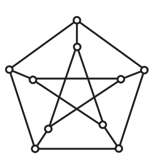
۶- هفده نفر به سفر می‌روند و قرار می‌گذارند هرکس به پنج نفر نامه بفرستد. به چند طریق ممکن است به آن پنج نفری نامه بفرستد که از آن‌ها نامه دریافت می‌کند؟ *تمرین ۱۱ صفحه‌ی ۱۶ گسسته و مشابه داخل ۸۶*

۱) $\binom{17}{5}$ ۲) ۸۵ ۳) $\binom{5}{2}$ ۴) نشدنی

۷- گرافی با درجه‌ی رئوس ۴،۴،۲،۲،۱،۱،۱،۱ همواره چگونه است؟ *مشابه داخل ۸۰*

۱) درخت ۲) دوردار

۳) همبند ۴) ناهمبند



۸- در ماتریس مجاورت گراف شکل مقابل، چند درایه‌ی صفر وجود دارد؟ *مشابه داخل ۷۹*

۱) ۸۵ ۲) ۷۵

۳) ۷۰ ۴) ۶۰

۷ ۱ ۲ ۳ ۴	۵ ۱ ۲ ۳ ۴	۳ ۱ ۲ ۳ ۴	۱ ۱ ۲ ۳ ۴
۸ ۱ ۲ ۳ ۴	۶ ۱ ۲ ۳ ۴	۴ ۱ ۲ ۳ ۴	۲ ۱ ۲ ۳ ۴

پاسخ آزمون دوره‌ای ۱ فصل ۱

۱ ۳ در گزینه‌ی (۱) درجه‌ی تکراری وجود ندارد و گزینه‌ی (۴) هم ۵ رأس فرد دارد. گزینه‌ی (۲) را به وسیله‌ی الگوریتم هاول حکیمی بررسی می‌کنیم:

$$S: \cancel{۵}, \overrightarrow{۵,۳,۳,۱,۱}^{\text{۵ قدم}}$$

$$S': \cancel{۴}, \overrightarrow{۲,۲,۰,۰}^{\text{۴ قدم}}$$

$S'': ۱,۱,-۱,-۱$ گرافی نیست $\Rightarrow$ دنباله‌ی گزینه‌ی ۲، دنباله‌ی گرافی نیست

۲ ۴

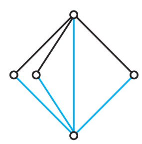
$$p+q=۵۵ \Rightarrow p+\frac{p(p-۱)}{۲}=۵۵ \Rightarrow p(p+۱)=۱۱۰=۱۰\times۱۱ \Rightarrow p=۱۰$$

$$\text{تعداد دورهای به طول ۳} = \binom{۱۰}{۳}\times\frac{(۳-۱)!}{۲}=۱۲۰$$

۳ ۳ ابتدا ۱۲۸ را تجزیه می‌کنیم و ...

$$۱۲۸=۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲ \xrightarrow{p=۵} ۴,\overrightarrow{۴,۲,۲,۲}^{\text{۴ قدم}}$$

$S': ۳,۱,۱,۱$



$\Rightarrow$ ۶ دور

۴ ۲ گراف همبند و بدون دور، همان درخت است. بنابراین:

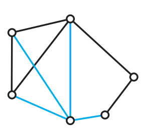
$pq=۳۰ \Rightarrow p(p-۱)=۳۰ \Rightarrow p=۶ \Rightarrow$ ۶ درخت مختلف از مرتبه‌ی ۶ وجود دارد

۵ ۲ گراف پترسن دارای دورهایی با طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ است، بنابراین بزرگ‌ترین عدد m برابر ۹ است.

۶ ۲ اعداد واقع بر قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت، همان درجات گراف می‌باشند. حالا گراف را رسم می‌کنیم:

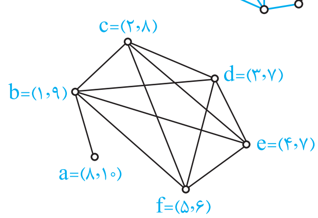
$$۴,\overrightarrow{۴,۳,۳,۲,۲}^{\text{۴ قدم}}$$

$S': ۳,۲,۲,۱,۲ \Rightarrow$



$\Rightarrow$ ۴ دور با طول ۴

۷ ۱ مسیر مطلوب را به دو مسیر کوچک‌تر می‌شکنیم:



$a \to b\ ,\ b \to e$

$۱\times[(۵-۲)!\times۲/۷۲]=۱۶$

۸ ۲ ابتدا حالاتی که $p+q=۱۰$ می‌شود را می‌نویسیم:

p	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰

ناهمبند — $k_۴$ و منتظم — غیرساده

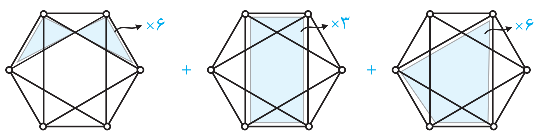
پس $p=۵$ و $q=۵$ قابل قبول است. همان‌طور که می‌دانید گراف $k_۵$ دارای $۱۰=\frac{۵\times۴}{۲}$ یال است. پس باید ۵ یال دیگر به این گراف اضافه کنیم.

یادداشت

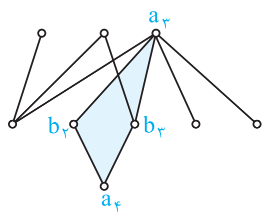
پاسخ | آزمون | دوره‌ای ۲ | فصل ۱

۱ ۴

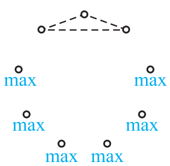
۱۵ دور به طول ۴=



۲ ۴ گراف مچاله شده را باز می‌کنیم تا ببینیم چه خبر است. همان‌طور که می‌بینید گراف دارای ۴ ضلعی بدون قطر است پس متناظر با بازه‌ها نیست.



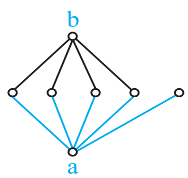
۳ ۲ گراف مورد نظر ۳ یال از گراف k_9 کم‌تر دارد و باید این سه یال را به شکل مقابل برداریم تا تعداد رأس‌های با درجه‌ی ماکزیمم به حداکثر برسد. بنابراین حداکثر ۶ رأس از درجه‌ی ماکزیمم دارد.



۴ ۱ باید گراف را رسم کنیم. چون گفته شده ۵ و ۴ مجاور نباشند ۴ را به انتهای دنباله می‌بریم و ...

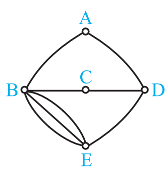
$\xrightarrow{\text{۵ قدم}}$
۵،۲،۲،۲،۲،۱،۴

S': ۱،۱،۱،۱،۰،۴ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ ۴ مسیر

۵ ۴ گراف متناظر با این نقشه به شکل زیر است که دارای دو رأس فرد است پس اویلری نیست که بتوان از یک رأس حرکت کرد و از روی هر یال دقیقاً یک بار عبور کرد و به رأس اولیه بازگشت.



۶ ۴ در گراف متناظر باید ۱۷ رأس از درجه‌ی ۵ به وجود بیاید که غیرممکن است یعنی **گراف فرد ـ منتظم از مرتبه‌ی فرد وجود ندارد.**

۷ ۲ با توجه به گزینه‌ها می‌فهمیم که باید p و q را به دست آوریم.

$$۲q = ۴ + ۴ + ۲ + ۲ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱۶ \Rightarrow q = ۸$$

از طرفی گراف دارای ۸ رأس است، بنابراین این گراف بیش از درخت، یال دارد پس حتماً دارای دور است.

۸ ۳ **گراف پترسن از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۱۵ است.** پس:

$$\text{تعداد صفرها} = p^2 - 2q = 10^2 - 2 \times 15 = 100 - 30 = 70$$

یادداشت