

عبارات جبری و معادلات و نامعادلات

۱-۱: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال قبل، در درس ریاضی (۲) شما با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شده‌اید. در این بخش ما ابتدا مفهومی می‌کنیم بر آموخته‌های قبلی شما و سپس به بحث مجموع جملات این دنباله‌ها می‌پردازیم.

پادآوری: دنباله‌های حسابی و هندسی

۱- دنباله‌ی $\{a_n\}$ با تعریف $a_n = a + (n-1)d$ یک دنباله‌ی حسابی (یا تصاعد حسابی) نامیده می‌شود. a جمله‌ی اول و d قدرنسبت تصاعد است ($d \neq 0$). این دنباله را می‌توانیم به صورت بازگشتی نیز تعریف کنیم:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d$$

۲- دنباله‌ی $\{a_n\}$ با تعریف $a_n = aq^{n-1}$ یک دنباله‌ی هندسی (یا تصاعد هندسی) نامیده می‌شود. a جمله‌ی اول و q قدرنسبت تصاعد است ($q \neq 1, a \neq 0$). این دنباله را می‌توانیم به صورت بازگشتی نیز تعریف کنیم:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n q$$

در واقع در دنباله‌ی حسابی، هر جمله از افزودن مقدار قدرنسبت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. در دنباله‌ی هندسی نیز هر جمله از ضرب مقدار ثابت قدرنسبت در جمله‌ی قبلی به دست می‌آید.

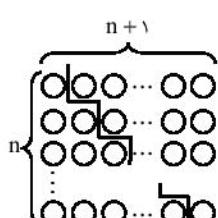
◀ مثال: ۱- دنباله‌های $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = 3 + 4n$ ، دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۴ و جمله‌ی اول $a_1 = 7$ است.

۲- دنباله‌ی $\{b_n\}$ با جمله‌ی عمومی $b_n = 3 \times 2^{n+2}$ ، دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت ۲ و جمله‌ی اول $a_1 = 24$ است.

مجموع اعداد طبیعی متولی

اعداد طبیعی متولی، نمونه‌ای از یک دنباله‌ی حسابی هستند. در اینجا ما ابتدا مجموع اعداد طبیعی متولی از ۱ تا n را پیدا می‌کنیم و سپس در حالت کلی، مجموع جملات یک دنباله‌ی حسابی را بررسی می‌کنیم.

دنباله‌ی $\{n\}$ (اعداد طبیعی) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم $S_n = 1 + 2 + \dots + n$ را بیابیم، به شکل رو به رو دقت کنید.



در شکل n ردیف و هر ردیف شامل n گوی وجود دارد. پس در شکل $n(n+1)$ گوی داریم.

حال به خط شکسته‌ای دقت کنید که با تقارن شکل را به دو نیمه تقسیم کرده است. پس تعداد گوی‌های هر نیمه

برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است. از طرفی به وضوح تعداد گوی‌های یک نیمه (مثالاً نیمه‌ی چپ) در سطرها برابر است با

$1, 2, \dots, n$ ، پس مجموع $S_n = 1 + 2 + \dots + n$ به دست آمده است.

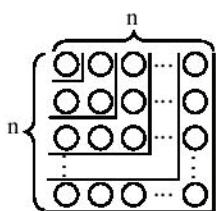
◀ نکته: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با: $S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

◀ نکته: این روش منسوب به گاووس، ریاضی‌دان بزرگ قرن هجدهم میلادی است. این روش را به صورت زیر نیز می‌توانیم با زبان ریاضی بیان کنیم:

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n \Rightarrow 2S_n = 1 + 2 + \dots + n + n + (n-1) + \dots + 1 = (1+n) + (2+(n-1)) + \dots + (n+1)$$

$$\Rightarrow 2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ بار}} = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع اعداد طبیعی فرد متواالی



اعداد فرد طبیعی متوالی نمونه‌ای دیگر از یک دنباله‌ی حسابی‌اند. در اینجا مجموع این اعداد را با روشی هندسی پیدا می‌کنیم. دنباله‌ی $\{1, 3, \dots, 2n-1\}$ شامل اعداد فرد طبیعی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم $S_n = 1 + 3 + \dots + (2n-1)$ را به دست آوریم. به شکل روبرو دقت کنید.

در این شکل n ردیف و هر ردیف شامل n گوی وجود دارد. پس در شکل $n \times n = n^2$ گوی داریم. حال به خطوط شکسته دقت کنید که گوی‌های شکل را دسته‌بندی کرده‌اند. در دسته‌ی اول ۱ گوی داریم، در دسته‌ی دوم ۳ گوی، بعدی ۵ گوی و ... به این ترتیب در دسته‌ی آخر $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$ گوی داریم و اعداد دسته‌ها، همان اعداد فرد هستند.

نکته: مجموع اعداد طبیعی فرد از ۱ تا $2n-1$ برابر است با: $S_n = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$

مثال: چون $1 + 3 + \dots + 9 = 2 \times 9 = 18$ ، پس مجموع ۹ عدد فرد متواالی ۱، ۳، ... و ۱۷ برابر است با $18 = 9^2$.

نکته: به جز روش بالا، این مجموع را به صورت زیر نیز می‌توانیم به دست آوریم:

$$\begin{aligned} S_n &= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + \dots + (2n - 1) = (2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times n) - (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ بار}}) \\ &= 2(1 + \dots + n) - n = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2 \end{aligned}$$

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

در تذکری که پس از نکته‌ی قبل، در یافتن مجموع اعداد فرد ارائه کرده‌ایم، روشی آمده است که آن را برای هر دنباله‌ی حسابی می‌توانیم ارائه کنیم. فرض کنید می‌خواهیم مجموع n جمله از دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = a + (n-1)d$ را پیدا کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d) \\ &= \underbrace{(a+a+\dots+a)}_{n \text{ بار}} + d(1+2+\dots+(n-1)) = na + d \times \frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2} \quad \text{به این ترتیب}$$

نکته: مجموع جملات دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = a + (n-1)d$ از جمله‌ی اول تا n ام برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

در واقع برای محاسبه‌ی مجموع تعدادی جمله‌ی متوالی یک تصاعد حسابی، کافی است جمله‌ی اول و آخر را با هم جمع کنیم و حاصل را در نصف تعداد جملات ضرب کنیم.

نکته: با استفاده از روش گاوس نیز می‌توانیم این مجموع را به دست آوریم:

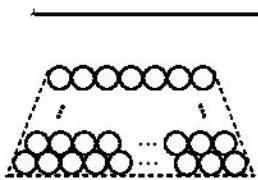
$$\left. \begin{aligned} S_n &= a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d) \\ S_n &= (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \dots + a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2S_n = (2a + (n-1)d) + (2a + (n-2)d) + \dots + (2a + (n-1)d)$$

پس $2S_n$ برابر مجموع n عدد است که هر کدام برابر $(2a + (n-1)d)$ هستند، بنابراین:

$$2S_n = n(2a + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \xrightarrow{\substack{a_1=a \\ a_n=a+(n-1)d}} S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: اعداد طبیعی فرد از ۱ تا $2n$ دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت ۲ را تشکیل می‌دهند. پس داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(1 + (2n-1)) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$



مسئله (۱): تعدادی الوار چوب با آرایشی مطابق شکل رو به رو روی هم قرار گرفته است. در بالاترین ردیف ۷ چوب قرار دارد.

(الف) اگر تعداد چوبهای پایین ترین ردیف ۲۰ باشد، روی هم چند چوب در این شکل وجود دارد؟
ب) اگر روی هم ۱۱۵ چوب در شکل موجود باشد، تعداد ردیفهای چوب چند تا است؟

حل: (الف) راه اول: به راحتی مشخص می شود که تعداد چوبهای ردیفها، در واقع دنبالهای حسابی را تشکیل می دهند. دنبالهای با قدرنسبت ۱، یعنی دنبالهای ۷، ۶، ۵، ... و ۲۰. بنابراین تعداد کل چوبها برابر است با:

$$S = 7 + 6 + 5 + \dots + 20 = \frac{14}{2}(7 + 20) = 189$$

دقت کنید که در شمارش تعداد اعداد مجموع بالا از تساوی $14 - 7 + 1 = 20 - 7 + 1 = 14$ استفاده کردیم.

راه دوم: برای محاسبه مجموع به این روش نیز می توانیم عمل کنیم:

$$S = (1 + 2 + \dots + 20) - (1 + 2 + \dots + 6) = \frac{20 \times 21}{2} - \frac{6 \times 7}{2} = 189$$

(ب) تعداد ردیفها را n می گیریم. پس تعداد چوبهای پایین ترین ردیف برابر است با:

$$7 + (n - 1) \times 1 = 6 + n$$

پس مجموع اعضای دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(7 + (6 + n)) = \frac{n}{2}(13 + n) \xrightarrow{S_n = 115} n(13 + n) = 115 \Rightarrow n^2 + 13n - 115 = 0$$

$$\Rightarrow n_1 = 10, n_2 = -13$$

پاسخ $n = 10$ قابل قبول است.

مسئله (۱): در دنبالهای حسابی $\{a_n\}$ می دانیم $a_7 + a_{16} = 42$. مجموع ۲۲ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۵۲۴ (۴)

۵۴۲ (۳)

۴۵۶ (۲)

۴۶۲ (۱)

حل: می دانیم $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ، بنابراین:

$$a_7 + a_{16} = a_1 + 6d + a_1 + 15d = 2a_1 + 21d \Rightarrow 2a_1 + 21d = 42$$

از طرفی طبق فرمول مجموع جملات یک دنباله‌ی حسابی داریم:

$$S_{22} = \frac{22}{2}(2a_1 + 21d) \Rightarrow S_{22} = 11 \times 42 = 462$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

مسئله (۲): مجموع اعدادی بین ۱۰۰ و ۳۰۰ را بباید که باقی مانده‌ی آنها در تقسیم بر ۶ برابر ۲ باشد.

حل: اگر عدد a در تقسیم بر ۶، خارج قسمت k و باقی مانده‌ی ۲ داشته باشد، آن‌گاه $a = 6k + 2$. بین اعداد ۱۰۰ و ۳۰۰، کوچک‌ترین عددی که در تقسیم بر ۶ باقی مانده‌ی ۲ داشته باشد، ۱۰۴ است و بزرگ‌ترین عدد ۲۹۶، پس مجموع زیر را می خواهیم:

$$S = 104 + 110 + 116 + \dots + 296$$

راه اول: با دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۶ مواجهیم. تعداد اعداد مجموع بالا را n می گیریم. داریم:

$$296 = 104 + (n - 1) \times 6 \Rightarrow n - 1 = 32 \Rightarrow n = 33$$

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{33}{2}(104 + 296) = 6600$$

راه دوم: چون هر عدد در مجموع به شکل $6k + 2$ است، داریم:

$$S = (6 \times 17 + 2) + (6 \times 18 + 2) + \dots + (6 \times 49 + 2) = 6(17 + 18 + \dots + 49) + (\underbrace{2 + \dots + 2}_{39 \text{ بار}})$$

$$= 6\left(\frac{49 \times 50}{2} - \frac{16 \times 17}{2}\right) - 39 \times 2 = 6600$$

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

فرض کنید می‌خواهیم مجموع n جمله‌ی اول از دنباله‌ی هندسی $\{aq^{n-1}, aq^n, \dots, aq^1, a\}$ را بیابیم، یعنی مجموع زیر را می‌خواهیم:

$$S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

اگر مجموع S را در q ضرب کنیم و S را از آن کم کنیم، به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$qS - S = (aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}) - (a + aq + \dots + aq^{n-1}) = aq^n - a \Rightarrow (q - 1)S = aq^n - a \Rightarrow S = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

نکته:

◀ **مثال:** در دنباله‌ی هندسی ...، $1, 2, 4, \dots$ قدرنسبت ۲ و جمله‌ی اول $\frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) = \frac{2^n - 1}{2}$$

○ **مسئله‌ی (۱۳):** حاصل مجموع زیر را بیابید (مجموع از جملات یک دنباله‌ی هندسی تشکیل شده است).

$$S = -\sqrt{6} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{2}}{81}$$

حل: قدرنسبت مجموع برابر $\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ است. تعداد جملات آن را n می‌گیریم، داریم:

$$a_n = a, q^{n-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{81} = -\sqrt{6} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} \Rightarrow 3^{-4} = -\sqrt{3} \times (-1)^{n-1} \times (\sqrt{2})^{1-n} \Rightarrow (\sqrt{3})^{-4} = (-1)^n \times (\sqrt{3})^{1-n} \Rightarrow n = 10.$$

بنابراین طبق فرمول محاسبه‌ی مجموع داریم:

$$S_{10} = -\sqrt{6} \times \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1} = -\sqrt{6} \times \frac{1 - \frac{1}{243}}{1 + \sqrt{3}} = -3\sqrt{2} \times \frac{\frac{242}{243}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{121}{81}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

◀ **مسئله‌ی (۱۴):** در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع شش جمله‌ی اول، $\frac{19}{27}$ برابر مجموع سه جمله‌ی اول آن است. قدرنسبت کدام است؟

$$\frac{3}{4} (4) \quad \frac{2}{3} (3) \quad -\frac{2}{3} (2) \quad -\frac{4}{3} (1)$$

حل: طبق فرض $\frac{19}{27} = S_6$. حال طبق فرمول داریم:

$$a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} = \frac{19}{27} \times a_1 \frac{q^3 - 1}{q - 1} \xrightarrow{a_1 \neq 0, q \neq 1} q^5 - 1 = \frac{19}{27}(q^3 - 1) \xrightarrow{q^3 = x} 27x^2 - 27 = 19x - 19$$

$$\Rightarrow 27x^2 - 19x - 8 = 0 \Rightarrow (27x + 8)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{8}{27}, x_2 = 1$$

پاسخ $x = -\frac{8}{27}$ قابل قبول است، در نتیجه $q^5 = -\frac{8}{27}$ ، پس $q^3 = -\frac{2}{3}$. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

○ **مسئله‌ی (۱۵):** در یک بانک، سالیانه ۱۰٪ سود به حساب سپرده‌ی بلندمدت تعلق می‌گیرد. اگر حسابی با دو میلیون تومان در این بانک باز کنیم، پس از ۱۰ سال مقدار موجودی حساب چقدر خواهد بود؟

حل: اگر موجودی اولیه را a نشان دهیم، در پایان سال اول موجودی برابر $(1 + \frac{1}{10})a$ است. در پایان سال دوم موجودی برابر است با:

$$x_2 = x_1 \left(1 + \frac{1}{10}\right) = a \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2$$

به این ترتیب مقدار موجودی حساب در واقع یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{11}{10}$ است در پایان سال دهم، مقدار موجودی برابر است با:

$$x_{10} = a \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2 \times 10^6 \times \frac{11^{10}}{10^{10}} \square 5187500$$

مسئله‌ی (۵): فرض کنید دولت حدود ۳ هزار میلیارد تومان را برای هدیه بین مردم کشور پخش می‌کند! هر شخصی که پولی به دست می‌آورد، ۲۵٪ آن را خرچ نماید. بر اثر این تصمیم دولت چه مقدار پول در سطح کشور خرچ می‌شود؟ آیا تصمیم دولت از نظر اقتصادی درست است؟

حل: فرض کنید پول اولیه‌ی پخش شده بین مردم a باشد. در نتیجه $x_1 = \frac{3}{4}a$ توسط مردم خرچ و $x_2 = \frac{3}{4}x_1$ پس انداز می‌شود. ولی آن x_1 واحد خرچ شده، دوباره به دست مردم رسیده است! پس $x_2 = \frac{3}{4}x_1$ نیز دوباره توسط مردم خرچ می‌شود. به همین ترتیب در مرحله‌ی بعد $x_3 = \frac{3}{4}x_2$ نیز توسط مردم خرچ می‌شود و ... به این ترتیب مقدار پول خرچ شده توسط مردم در هر مرحله یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{3}{4}$ تشکیل می‌دهد. پس پول خرچ شده توسط مردم پس از n مرحله برابر است با:

$$S_n = x_1 + \dots + x_n = \frac{3}{4}a + (\frac{3}{4})^2a + \dots + (\frac{3}{4})^n a = \frac{3}{4}a \times \frac{1 - (\frac{3}{4})^n}{1 - \frac{3}{4}}$$

در دراز مدت با افزایش n ، مقدار $(\frac{3}{4})^n$ مرتبأ کوچک و کوچکتر می‌شود، تا جایی که تقریباً برابر صفر می‌شود. بنابراین می‌توانیم کل پول خرچ شده توسط مردم را عدد زیر در نظر بگیریم:

$$\frac{3}{4}a \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 3a$$

عنی بر اثر این تصمیم دولت ۹ هزار میلیارد تومان توسط مردم خرچ می‌شود. مطمئناً این تصمیم دولت از نظر اقتصادی کاری اشتباه است. زیرا ۳ هزار میلیارد تومان در سطح کشور پخش شده است، و بدون کار اقتصادی خاصی برای تولید پول، ۹ هزار میلیارد تومان خرچ شده است. عنی مردم ۶ میلیارد تومان پول را بدون پشتونه‌ی اقتصادی مناسب تنها به شکل صوری خرچ کرده‌اند و همین امر موجب تورم می‌شود.

حد مجموع

در مسئله‌ی (۵) دیدیم که چگونه با بزرگ شدن مقدار n ، مجموع S_n تقریباً برابر $3a$ شد. در حالت کلی اگر دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$ با شرط $1 < q < 1$ را در نظر بگیریم، در مجموع $S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ وقتی n بسیار بزرگ می‌شود، به جای q^n می‌توانیم عدد صفر را قرار دهیم. به این ترتیب مجموع همه‌ی جملات دنباله به دست می‌آید.

قضیه: مجموع همه‌ی جملات دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$ با تعریف $a_n = a_1 q^{n-1}$ ، به شرط آن که $1 < q < 1$ برابر است با:

مسئله‌ی (۶): توبی از ارتفاع ۱۰ متر رها می‌شود. توب هر بار پس از برخورد با زمین، به اندازه‌ی ۸۰٪ ارتفاع قبل بالا می‌رود.

الف) کل مسافتی که توب پس از ۲۰ بار برخورد با زمین طی می‌کند چقدر است؟

ب) نشان بدهید که مسافت طی شده توسط توب هیچ‌گاه بیشتر از ۹۰ متر نمی‌شود.

حل: الف) توب پس از رها شدن به اندازه‌ی ارتفاع $10 = h = a_1$ مسافت طی می‌کند. پس از برخورد با زمین در بار اول، به بالا به اندازه‌ی $0.8h$ بازمی‌گردد و دوباره به پایین می‌آید. عنی بین بار اول و بار دوم برخورد، توب به اندازه‌ی $a_2 = 2 \times 0.8h$ مسافت طی می‌کند. به همین ترتیب بین بار دوم و بار سوم برخورد توب به اندازه‌ی $a_3 = 2 \times (0.8)^2h$ مسافت طی می‌کند.

به این ترتیب باید مجموع زیر را برای به دست آوردن مسافت طی شده در ۲۰ برخورد به دست آوریم:

$$S = h + 2 \times 0.8h + 2 \times (0.8)^2h + \dots + 2 \times (0.8)^{19}h$$

اگر h اول را در نظر نگیریم، بقیه‌ی جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت 0.8 و جمله‌ی اول $0.8h$ را تشکیل می‌دهند:

$$S = h + 2 \times 0.8h + 2 \times 0.8^2h + \dots + 2 \times 0.8^{19}h = h + 2 \times 0.8h \times \frac{1 - (0.8)^{19}}{1 - 0.8} \quad \square \quad \text{متر } 88/85$$

ب) راه حل: در حالت کلی بعد از n برخورد مسافت طی شده توسط توب برابر است با:

$$S_n = h + 2 \times 0.8h + 2 \times (0.8)^2h + \dots + 2 \times (0.8)^{n-1}h = h + 2 \times 0.8h \times \frac{1 - (0.8)^{n-1}}{1 - 0.8} = 10 + 16 \times \frac{1 - (0.8)^{n-1}}{0.2}$$

می‌دانیم همواره $1 - \frac{1}{8}^{n-1}$ ، پس همواره داریم:

$$\frac{1 - (\frac{1}{8})^{n-1}}{1 - \frac{1}{8}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} \Rightarrow 16 \times \frac{1 - (\frac{1}{8})^{n-1}}{1 - \frac{1}{8}} < 16 \times 5 \Rightarrow S_n < 10 + 8 \cdot 5 \Rightarrow S_n < 90.$$

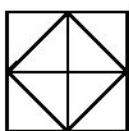
$$(۱۵) \text{ دوست:} \text{ مجموع همهٔ جملات دنباله برابر است با: } S = 10 + \frac{16}{1 - \frac{1}{8}} = 90, \text{ پس همواره } S_n < 90.$$

مسئلهٔ (۷): مربعی به طول ضلع ۴ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. وسطهای اضلاع این مربع را مطابق شکل به هم وصل می‌کنیم و باز دو قسمت ایجاد شده را رنگ می‌زنیم. حال دوباره در مرحلهٔ دوم، وسطهای اضلاع مربع جدید داخل مربع اولیه را به هم وصل می‌کنیم و باز دو قسمت ایجاد شده را رنگ می‌زنیم. این کار را همین‌طور تکرار می‌کنیم.



(الف) پس از ۱۰ مرحله چه سطحی رنگ شده است؟

(ب) سطح رنگ شده پس از تعداد زیادی از مراحل به چه عددی نزدیک می‌شود؟



حل: (الف) طبق شکل رو به رو، در هر مرحله ما در واقع یک مربع را به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و دو قسمت از آن‌ها را رنگ می‌کنیم. یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت مربع را رنگ می‌کنیم.

در مرحلهٔ اول در مربع به مساحت S ، $a_1 = \frac{1}{4}S$ را رنگ کردایم و مربع جدیدی به مساحت $\frac{S}{2}$ داخل آن ایجاد کردایم. در مرحلهٔ دوم، از

مربع به مساحت $\frac{S}{2}$ ، مقدار $\frac{1}{4} \times \frac{S}{2} = \frac{1}{8}S$ رنگ کردایم و مربعی به مساحت $\frac{S}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}S$ را داخل آن ایجاد کردایم. در مرحلهٔ دوم از مربع به

مساحت $\frac{S}{4}$ ، مقدار $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{S}{4} = \frac{1}{16}S$ را رنگ کردایم. به این ترتیب بخش‌های رنگ شده یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل می‌دهند و ما مجموع زیر را می‌خواهیم:

$$S_{1..} = a_1 + a_2 + \dots + a_{1..} = \frac{S}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{S}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{S}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \times \frac{S}{4}$$

$$\frac{S=16}{\rightarrow S_{1..}} = 4 + \frac{1}{2} \times 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \times 4 = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}}$$

پس تقریباً $7/98$ سانتی‌متر مربع پس از ۱۰ مرحله رنگ شده است.

(ب) مجموع همهٔ جملات دنباله برابر است با: $S = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$ ، پس سطح رنگ شده تقریباً برابر ۸ می‌شود.

مسئلهٔ (۸): عدد گویای بسط اعشاری ...۰۶۶۶... را به شکل $\frac{p}{q}$ بنویسید که p و q دو عدد طبیعی نسبت به هم اول‌اند.

حل: بسط را می‌توانیم به این صورت به شکل مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی بنویسیم.

$$a = 0.\overline{06} = 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots$$

یعنی دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $\frac{6}{10}$ و قدر نسبت $\frac{1}{10}$. پس مجموع همهٔ جملات برابر است با:

$$a = \frac{0.6}{1 - 0.1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow p = 2, q = 3$$

مجموع اعداد مربع کامل متوالی

هرچند اعداد مربع کامل متوالی، یعنی $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ دنباله‌ای حسابی یا هندسی تشکیل نمی‌دهند، ولی لازم است فرمول مجموع آن‌ها را بدانیم که در بعضی از مسائل ظاهر می‌شوند. با توجه به این که $k^2 = k + k + \dots + k$ ، می‌توانیم مجموع اعداد مربع کامل متوالی از ۱ تا n^2 را

به تعدادی مجموع دنبالهٔ حسابی تبدیل کنیم:

$$\begin{aligned} S_n &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 1 + (2+2) + (3+3+3) + \dots + (\underbrace{n+n+\dots+n}_{n \text{ بار}}) \\ &= (1+2+\dots+n) + (2+3+\dots+n) + (3+\dots+n) + \dots + ((n-1)+n) + n \end{aligned}$$

مجموعهای داخل پرانتز در عبارت آخر، همگی جمع جملات دنباله‌ی حسابی هستند. حال می‌توانیم با جایگذاری فرمول‌ها، فرمول کلی S_n را به دست آوریم.

در اینجا ما روش ابتکاری دیگری نیز ارائه می‌دهیم.

به جای به دست آوردن مستقیم S_n ، حاصل $3S_n = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$ را با شکل به دست می‌آوریم. با توجه به $k^2 = k + k + \dots + k$ بار

می‌توانیم شکل زیر را برای $3S_n$ بسازیم:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} n & n & \cdots & n & n & n & n-1 & \cdots & 2 & 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 2 & 2 & & & n & n-1 & & & n-1 & n & & & & & \\ 1 & & & & n & & & & & & & & & & \end{array}$$

در آرایه‌ی سمت چپ، مجموع اعداد هر ردیف همان n^2 , $(n-1)^2$, ..., 2^2 و 1^2 است. در آرایه‌ی وسط مجموع اعداد هر ستون، همان مربع‌های کامل است و در آرایه‌ی سمت راست، مجموع اعداد روی خطاهای مورب موازی وتر مثلث، اعداد مربع کامل را ایجاد می‌کند. حال با کمی دقت متوجه می‌شویم که جمع اعداد متناظر در سه مثلث برابر $1 + 2n + 1$ است، یعنی با جمع اعداد بالا به شکل زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 2n+1 & 2n+1 & & & & \\ 2n+1 & & & & & \end{array}$$

در مثلثنهای $\frac{n(n+1)}{2}$ عدد وجود دارد (چرا؟) که همگی برابر ۱ هستند، پس مجموع آنها $(1 + 2n + 1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ می‌شود. می‌دانیم این مجموع ۳ برابر S_n است. پس نکته‌ی زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

نکته: مجموع اعداد مربع کامل از ۱ تا n^2 برابر است با:

◀ **مثال:** مجموع اعداد مربع کامل متولی از ۱ تا ۲۵ برابر است با:

$$1^2 + 2^2 + \dots + 5^2 = \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55$$

○ **مسئله‌ی (۹):** حاصل مجموع زیر را به دست آورید.

$$S = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(1^2 + 2^2) + \frac{1}{12}(1^2 + 2^2 + 3^2) + \frac{1}{20}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \dots + \frac{1}{360}(1^2 + 2^2 + \dots + 60^2)$$

حل: اگر قرار دهیم $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ است. داریم:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{6}$$

$$\begin{aligned} S_{60} &= a_1 + a_2 + \dots + a_{60} = \frac{2 \times 1 + 1}{6} + \frac{2 \times 2 + 1}{6} + \dots + \frac{2 \times 60 + 1}{6} = \frac{1}{6} (2(1 + \dots + 60) + \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{60}) \\ &= \frac{1}{6} (2 \times \frac{60 \times 61}{2} + 60) = \frac{1}{6} \times 60 \times 62 = 620. \end{aligned}$$

○ **مسئله‌ی (۱۰):** معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$1 \times 1987 + 2 \times 1986 + 3 \times 1985 + \dots + 1986 \times 2 + 1987 \times 1 = 1987 \times 994 \times x$$

حل: اگر قرار دهیم $a_n = n(1988 - n)$ ، عبارت سمت چپ تساوی همان S_{1987} است.

با توجه به $a_n = 1988n - n^2$ داریم:

$$\begin{aligned} S_{1987} &= 1988 \times 1 - 1^2 + 1988 \times 2 - 2^2 + \dots + 1988 \times 1987 - 1987^2 = 1988(1 + 2 + \dots + 1987) - (1^2 + 2^2 + \dots + 1987^2) \\ &= 1988 \times \frac{1987 \times 1988}{2} - \frac{1987 \times 1988 \times 3975}{6} = 1987 \times 994(1988 - 1325) \end{aligned}$$

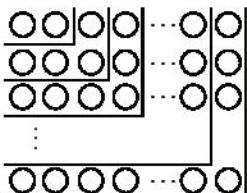
با توجه به آن که $x = 1987 \times 994 = 1987$ ، از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم:

$$x = 1988 - 1325 \Rightarrow x = 663$$

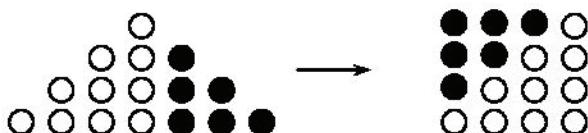
تمرین‌های بخش ۱-۱

-۱) الف) مجموع اعداد طبیعی زوج متولی از ۲ تا ۲۱ را با استفاده از شکل زیر به دست آورید (ابعاد شکل را خودتان به دست آورید).

ب) این مجموع را با دو روش دیگر نیز به دست آورید.



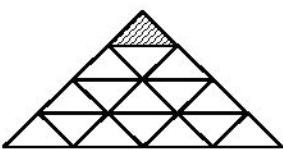
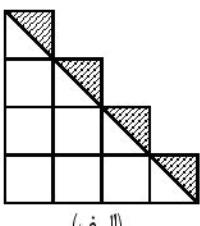
با استفاده از دو شکل زیر، مجموع اعداد طبیعی فرد متولی را با روشی دیگر به دست آورید.



با استفاده از دو شکل زیر، و در تظری گرفتن مساحت‌ها، روشی جدید پرای یافتن مجموع‌های زیر ارائه کنید.

$$\text{الف) } S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\text{ب) } S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$



(الف)

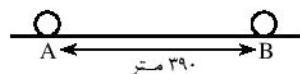
(ب)

مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌های زیر را به دست آورید.

$$a_n = \frac{3 - 2n}{4} \quad \text{ب)$$

$$a_n = \frac{n-1}{3} \quad \text{ب)$$

$$a_n = 2n + 1 \quad \text{ب)$$



در هر حرکت شتابدار با شتاب ثابت، می‌توانیم مسافتی را که متحرک در مدت ۱ ثانیه می‌پیماییم، با یک دنباله‌ی حسابی مدل کنیم.

الف) فرض کنید متحرکی از نقطه‌ی A شروع به حرکت کند، در ثانیه‌ی اول ۵ متر و در ثانیه‌ی دوم ۸ متر را طی کند. این متحرک در چه زمانی به نقطه‌ی B می‌رسد؟

ب) ادعای فرض مسأله را با قوانین فیزیکی اثبات کنید. یعنی نشان دهید که اگر با شتاب ثابت a و سرعت اولیه‌ی V_0 شروع به حرکت کنیم، مسافت طی شده در ثانیه‌های ۱، ۲، ... یک دنباله‌ی حسابی را تشکیل می‌دهد.

مجموع اعداد طبیعی سه‌رقمی با شرایط زیر را بیابید.

الف) مضرب ۵ باشد.

هر یک از مجموع‌های زیر شامل جملات یک دنباله‌ی هندسی است. حاصل مجموع را بیابید.

$$2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \dots + \frac{1}{16} \quad \text{ب)$$

$$54 - 18 + 6 - 2 + \dots + \frac{2}{243} \quad \text{الف)$$

در یک دنباله‌ی هندسی می‌دانیم مجموع ۱۲ جمله‌ی اول، ۱۷ برابر مجموع ۶ جمله‌ی اول است. قدرتیست تصاعد را به دست آورید.

در یک تصاعد هندسی با قدرتیست $\frac{1}{3}$ و جمله‌ی اول $\frac{4}{2187}$ ، مجموع جملات ابتدایی آن برابر $\frac{43772}{2187}$ شده است. چند جمله‌ی تصاعد جمع شده است؟

در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دهم ۹ برابر جمله‌ی ششم است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۱۲ باشد، مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله را به دست آورید.

یک قرص دارویی، در هر بار مصرف ۵۰ میلی‌گرم ماده‌ی دارویی وارد بدن می‌کند. پس از هر ۸ ساعت، به طور متوسط هنسوز ۲۳٪ از داروی ۸ ساعت قبل در بدن باقی مانده است.

الف) اگر فقط یک بار قرص را مصرف کنیم، پس از ۸۰ ساعت چقدر دارو در بدن باقی مانده است؟

ب) اگر هر ۸ ساعت یکبار، یک عدد از قرص را مصرف کنیم، پس از ۸۰ ساعت چقدر دارو در بدن باقی مانده است؟

- ۱۲ فرض کنید بانکی برای حساب سپرده‌ی کوتاه مدت 10% سود سالیانه در نظر گرفته است. شخصی با یک میلیون تومان موجودی، حسابی کوتاه مدت باز می‌کند و در ابتدای هر سال، یک میلیون تومان دیگر به حساب واریز می‌کند. پس از ۶ سال موجودی حساب او چقدر است؟
- ۱۳ بانکی برای یک حساب سپرده، سود 8% سالیانه در نظر گرفته است. طی ۲۰ سال، هر سال مبلغ 10 میلیون تومان از این حساب برداشت شده است تا حساب خالی و بسته شده است. موجودی اولیه‌ی این حساب چقدر بوده است؟
- ۱۴ یک شرکت تولیدی سالانه 13 هزار کالا تولید می‌کند و هر سال 10% از محصولات تولیدی آن شرکت در آن سال، از چرخه‌ی مصرف خارج می‌شوند. 20 سال از شروع به کار این شرکت می‌گذرد. حدوداً چند هزار واحد کالا از این شرکت در چرخه‌ی مصرف است؟
- ۱۵ در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC داریم $\hat{C} = 90^\circ$ و $AB = 2$. ارتفاع وارد پر وتر BA_1 رارسم می‌کنیم، سپس در مثلث قائم الزاویه‌ی BA_1C ، ارتفاع وارد پر وتر A_1B_1 رارسم می‌کنیم و این روند را ادامه می‌دهیم.
- (الف) طول پاره خط B_1A_1 چقدر است؟
- (ب) طول پاره خط BB_2 چه کسری از طول BC است؟
- (پ) مجموع طول همه‌ی پاره خط‌های $BB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$ چه می‌شود؟ آیا نتیجه با دید هندسی شما سازگار است؟
- ۱۶ هر یک از بسط‌های اعشاری زیر را به شکل یک کسر $\frac{p}{q}$ بنویسید که در آن p و q دو عدد طبیعی نسبت به هم اول آند.
- (ب) $b = 2/123232323\dots$
- (الف) $a = 0/67676767\dots$
- ۱۷ اگر $x = 2$ باشد، $f(x) = 3x^3 - 7x + 2$ ، آن‌گاه حاصل $(f(1) + f(2) + \dots + f(20))$ را به دست آورید.
- ۱۸ حاصل مجموع $(2n-1)(2n+2)S = 1 \times 4 + 3 \times 6 + 5 \times 8 + \dots + (2n-1)2n$ را به دست آورید.
- ۱۹ (الف) اتحاد $1 + (k+1)^3 = 2k + k^3$ را در نظر بگیرید. با توجه این تساوی به ازای $k = 1, 2, \dots, n$ به n تساوی برسید و با جمع دو طرف آن‌ها نتیجه بگیرید:
- $$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
- (ب) با در نظر گرفتن اتحاد $1 + (k+1)^3 = 3k^2 + 3k + 1$ و با دوشی شبیه روش قسمت (الف)، مجموع $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ را به دست آورید.
- (پ) مجموع $n^3 + \dots + 1^3$ را به دست آورید.
- ۲۰ شبکه‌های هرمی (مانند شبکه‌ی غیر قانونی گلدکونیست) از ساختاری استفاده می‌کنند که با استفاده از دنباله‌های هندسی می‌توانند آن‌ها را مدل کنند. در این تمرین حالت ساده‌ای از این نوع شبکه‌ها را برسی می‌کنیم. فرض کنید در شبکه‌ی «هرم طلایی»، هر کسی برای ورود به شبکه باید 500 هزار تومان پول پدهد. این شخص در عوض هدیه‌ای 300 هزار تومانی از شبکه دریافت می‌کند. اگر یک نفر بتواتسد فرد دیگری را برای ورود به شبکه راضی کند، آن فرد زیرشاخه‌ی نفر اول محسوب می‌شود. همچنین تمام زیرشاخه‌های فرد جدید در آینده نیز زیرشاخه‌ی فرد اولیه هستند.
- (الف) اگر یک نفر در طول 2 ماه بتواند دو نفر را زیرشاخه‌ی خود بکند و یک شهر یک میلیون نفر جمعیت داشته باشد، طی چه مدتی همه‌ی افراد شهر عضو شبکه خواهند بود؟
- (ب) اگر جمعیت شهر با نرخ 2% درصد در ماه زیاد شود، قسمت (الف) را دوباره حل کنید.
- (پ) فرض کنید هر فرد به ازای هر زیرشاخه‌ای که جذب می‌کند، 50 هزار تومان جایزه بگیرد. با فرض قسمت (الف) یک نفر طی چند ماه می‌تواند به سود برسد؟
- (ت) با در نظر گرفتن یک جمع 100 نفره و فرض‌های قسمت (الف) و (پ) تعیین کنید که چند درصد افراد در این شبکه ضرر خواهند کرد و هیچ‌گاه به پول اولیه‌ی خود نخواهند رسید.

فصل ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۱ در یک تصاعد عددی، جمله‌ی $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟
- (۱) ۱۲۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۰۵ (۴) ۱۳۵
- ۲ حاصل جمع $S = ۱۶۹ + ۱۷۱ + ۱۷۳ + \dots + ۲۰۹$ برابر کدام یک از اعداد زیر است؟
- (۱) ۴۱۲ (۲) ۴۰۲ (۳) ۵۲۳ (۴) ۸۱۳
- ۳ مقدار X از معادله $۲۳۱ = ۱ + ۵ + ۹ + \dots + X$ کدام است؟
- (۱) ۴۳ (۲) ۳۹ (۳) ۴۱ (۴) ۳۷
- ۴ در تصاعد حسابی $\dots, -۲۱, -۲۷, X, -۳۳$ ، مجموع جملات منفی کدام است؟ (ازاد-۸۷)
- (۱) -۱۳۵ (۲) -۱۵۰ (۳) -۷۵ (۴) -۲۷۰
- ۵ در یک دنباله‌ی حسابی داریم: $S_4 = a_1 + \dots + a_4 = ۵۴$ و $S_5 = a_1 + \dots + a_5 = ۶۰$. قدرتسبت دنباله کدام است؟
- (۱) -۳ (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) ۶
- ۶ جواب معادله $۸^{۵x} = ۴^{۳+۶+۹+\dots+۳x}$ کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۷ در یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول a ، اگر یک واحد به قدرتسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چقدر افزوده خواهد شد؟ (سراسری-۸۳)
- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰
- ۸ اگر مجموع هشت جمله‌ی اول از تصاعد حسابی با جملات $p + ۱, a_1, p - ۱, a_2, \dots, p - ۵$ برابر باشد، قدرتسبت این تصاعد چقدر است؟ (ازاد-۸۸)
- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) -۹ (۴) -۷
- ۹ مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی $S_n = \frac{n(9n - 5)}{12}$ است. قدرتسبت این دنباله کدام است؟
- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$
- ۱۰ مجموع اعداد دورقمه‌ی که باقی‌مانده‌ی آن‌ها بر ۵ برابر ۲ باشد، کدام است؟
- (۱) ۹۸۱ (۲) ۹۹۳ (۳) ۸۹۱ (۴) ۹۰۱
- ۱۱ مجموع n جمله‌ی اولیه‌ی یک دنباله‌ی حسابی از رابطه $S_n = n^2 + n$ به‌دست می‌آید. اگر جملات این دنباله را a_1, a_2, \dots نشان پذهیم، حاصل مجموع $A = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{۹۹}$ چقدر است؟
- (۱) ۲۵۰۰ (۲) ۲۵۵۰ (۳) ۴۹۰۰ (۴) ۵۰۰۰
- ۱۲ حاصل مجموع $S = ۷ + ۸ + ۱۷ + ۱۸ + ۲۷ + ۲۸ + \dots + ۱۹۷ + ۱۹۸$ کدام است؟
- (۱) ۴۵۰۰ (۲) ۳۸۰۰ (۳) ۴۰۰۰ (۴) ۴۱۰۰
- ۱۳ مجموع n جمله‌ی اولیه از دنباله‌ی هندسی زیر برابر ۱۰۲۶ است. n کدام است؟
- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) هیچ‌گاه جمع جملات برابر ۱۰۲۶ نمی‌شود.

- ۱۴ اگر جملات اول و پنجم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب $\frac{7}{3}$ و 189 باشند، مجموع شش جمله‌ی اول آن چقدر است؟ (در دنباله جملات منفی نیز حضور دارند)
- $\frac{1247}{3} \quad (4) \quad -\frac{2548}{3} \quad (3) \quad \frac{2548}{2} \quad (2) \quad -\frac{1247}{3} \quad (1)$
- ۱۵ در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول آن 136 و مجموع شش جمله‌ی اول آن 153 است. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟ (سراسری-۸۹)
- $16 \quad (4) \quad 8 \quad (3) \quad 9 \quad (2) \quad \frac{81}{16} \quad (1)$
- ۱۶ در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر 1 و مجموع چهار جمله‌ی اول آن 3 است. مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟ (سراسری-۸۸)
- $10/8 \quad (4) \quad 12/6 \quad (3) \quad 11/2 \quad (2) \quad 13/4 \quad (1)$
- ۱۷ اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی باشد و $S_n = \frac{2^n - 1}{5}$ ، آن‌گاه جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟
- $\frac{128}{5} \quad (4) \quad \frac{63}{5} \quad (3) \quad \frac{64}{5} \quad (2) \quad \frac{127}{5} \quad (1)$
- ۱۸ حاصل $(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1 - x + x^2 - \dots + x^n)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟ (سراسری-۸۲)
- $516 \quad (4) \quad 512 \quad (3) \quad 511 \quad (2) \quad 507 \quad (1)$
- ۱۹ در دنباله‌ی $\{a_n\}$ می‌دانیم $a_1 = 2$ و $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. مقدار $128a_7 - a_n$ کدام است؟
- $382 \quad (4) \quad 126 \quad (3) \quad 383 \quad (2) \quad 511 \quad (1)$
- ۲۰ دنباله‌ای از شکل‌ها طبق روند زیر می‌سازیم. اختلاف تعداد دایره‌های سیاه در شکل‌های پانزدهم و هفدهم کدام است؟
- <img alt="A sequence of shapes showing a pattern of dots. Shape (1) has 1 dot. Shape (2) has 2 dots. Shape (3) has 4 dots. Shape (4) has 8 dots. Shape (5) has 16 dots. Shape (6) has 32 dots. Shape (7) has 64 dots. Shape (8) has 128 dots. Shape (9) has 256 dots. Shape (10) has 512 dots. Shape (11) has 1024 dots. Shape (12) has 2048 dots. Shape (13) has 4096 dots. Shape (14) has 8192 dots. Shape (15) has 16384 dots. Shape (16) has 32768 dots. Shape (17) has 65536 dots. Shape (18) has 131072 dots. Shape (19) has 262144 dots. Shape (20) has 524288 dots. Shape (21) has 1048576 dots. Shape (22) has 2097152 dots. Shape (23) has 4194304 dots. Shape (24) has 8388608 dots. Shape (25) has 16777216 dots. Shape (26) has 33554432 dots. Shape (27) has 67108864 dots. Shape (28) has 134217728 dots. Shape (29) has 268435456 dots. Shape (30) has 536870912 dots. Shape (31) has 107374184 dots. Shape (32) has 214748368 dots. Shape (33) has 429496736 dots. Shape (34) has 858993472 dots. Shape (35) has 1717986944 dots. Shape (36) has 3435973888 dots. Shape (37) has 6871947776 dots. Shape (38) has 13743895552 dots. Shape (39) has 27487791104 dots. Shape (40) has 54975582208 dots. Shape (41) has 109951164416 dots. Shape (42) has 219902328832 dots. Shape (43) has 439804657664 dots. Shape (44) has 879609315328 dots. Shape (45) has 1759218630656 dots. Shape (46) has 3518437261312 dots. Shape (47) has 7036874522624 dots. Shape (48) has 14073749045248 dots. Shape (49) has 28147498090496 dots. Shape (50) has 56294996180992 dots. Shape (51) has 112589992361984 dots. Shape (52) has 225179984723968 dots. Shape (53) has 450359969447936 dots. Shape (54) has 900719938895872 dots. Shape (55) has 1801439877791744 dots. Shape (56) has 3602879755583488 dots. Shape (57) has 7205759511166976 dots. Shape (58) has 14411519022333952 dots. Shape (59) has 28823038044667904 dots. Shape (60) has 57646076089335808 dots. Shape (61) has 115292152178671616 dots. Shape (62) has 230584304357343232 dots. Shape (63) has 461168608714686464 dots. Shape (64) has 922337217429372928 dots. Shape (65) has 1844674434858745856 dots. Shape (66) has 3689348869717491712 dots. Shape (67) has 7378697739434983424 dots. Shape (68) has 14757395478869966848 dots. Shape (69) has 29514790957739933696 dots. Shape (70) has 59029581915479867392 dots. Shape (71) has 118059163830959734784 dots. Shape (72) has 236118327661919469568 dots. Shape (73) has 472236655323838939136 dots. Shape (74) has 944473310647677878272 dots. Shape (75) has 1888946621295355756544 dots. Shape (76) has 3777893242585711513088 dots. Shape (77) has 7555786485171423026176 dots. Shape (78) has 15111572970342846052352 dots. Shape (79) has 30223145940685692104704 dots. Shape (80) has 60446291881371384209408 dots. Shape (81) has 120892583762742768418816 dots. Shape (82) has 241785167525485536837632 dots. Shape (83) has 483570335050971073675264 dots. Shape (84) has 967140670101942147350528 dots. Shape (85) has 1934281340203884294701056 dots. Shape (86) has 3868562680407768589402112 dots. Shape (87) has 7737125360815537178804224 dots. Shape (88) has 1547425072163107435760848 dots. Shape (89) has 3094850144326214871521696 dots. Shape (90) has 6189700288652429743043392 dots. Shape (91) has 1237940057730485948608672 dots. Shape (92) has 2475880115460971897217344 dots. Shape (93) has 4951760230921943794434688 dots. Shape (94) has 9903520461843887588869376 dots. Shape (95) has 19807040923687775177738752 dots. Shape (96) has 39614081847375550355477504 dots. Shape (97) has 79228163694751100710955008 dots. Shape (98) has 15845632738950220142190016 dots. Shape (99) has 31691265477900440284380032 dots. Shape (100) has 63382530955800880568760064 dots. Shape (101) has 126765061911601761137520128 dots. Shape (102) has 253530123823203522275040256 dots. Shape (103) has 507060247646407044550080512 dots. Shape (104) has 1014120495292814089100160256 dots. Shape (105) has 2028240990585628178200320512 dots. Shape (106) has 4056481981171256356400641024 dots. Shape (107) has 8112963962342512712801282048 dots. Shape (108) has 16225927924685025425602564096 dots. Shape (109) has 32451855849370050851205128192 dots. Shape (110) has 64903711698740101702402561632 dots. Shape (111) has 129807423397480203404805123264 dots. Shape (112) has 259614846794960406809610246528 dots. Shape (113) has 519229693589920813619220493056 dots. Shape (114) has 1038459387179816167238440986112 dots. Shape (115) has 2076918774359632334476881972224 dots. Shape (116) has 4153837548719264668953763944448 dots. Shape (117) has 8307675097438529337907527888896 dots. Shape (118) has 16615350194877058675815055777792 dots. Shape (119) has 33230700389754117351630111555584 dots. Shape (120) has 66461400779508234703260223111168 dots. Shape (121) has 132922801559016469406520446222336 dots. Shape (122) has 265845603118032938813040892444672 dots. Shape (123) has 531691206236065877626081784889344 dots. Shape (124) has 1063382412472131755252163569778688 dots. Shape (125) has 2126764824944263510504327139557376 dots. Shape (126) has 4253529649888527021008654279114752 dots. Shape (127) has 8507059299777054042017308558229504 dots. Shape (128) has 17014118599554108084034617116459008 dots. Shape (129) has 34028237199108216168069234232918016 dots. Shape (130) has 68056474398216432336138468465836032 dots. Shape (131) has 136112948796432864672276936931672664 dots. Shape (132) has 272225897592865729344553873863345328 dots. Shape (133) has 544451795185731458689107747726685656 dots. Shape (134) has 1088903590371462917378215495453371312 dots. Shape (135) has 2177807180742925834756430985906742624 dots. Shape (136) has 4355614361485851669512861971813485248 dots. Shape (137) has 8711228722971703339025723943626970496 dots. Shape (138) has 1742245744594340667805144788725394096 dots. Shape (139) has 3484491489188681335610289577450788192 dots. Shape (140) has 6968982978377362671220579154901576384 dots. Shape (141) has 13937965956754725342441158309803532688 dots. Shape (142) has 27875931913509450684882316619607065376 dots. Shape (143) has 55751863827018901369764633239214130752 dots. Shape (144) has 111503727654037802739529266478428261504 dots. Shape (145) has 223007455308075605479058532956856523008 dots. Shape (146) has 446014910616151210958117065913713046016 dots. Shape (147) has 892029821232302421916234131827426092032 dots. Shape (148) has 1784059642464604843832468263654852184064 dots. Shape (149) has 3568119284929209687664936527309704368128 dots. Shape (150) has 7136238569858419375329873054619408736256 dots. Shape (151) has 1427247713971683875065974610923881752512 dots. Shape (152) has 2854495427943367750131949221847763505024 dots. Shape (153) has 5708990855886735500263898443695527010048 dots. Shape (154) has 11417981711773471005327796887390544020096 dots. Shape (155) has 22835963423546942010655593774781088040192 dots. Shape (156) has 45671926847093884021311187549562176080384 dots. Shape (157) has 91343853694187768042622375098124352160768 dots. Shape (158) has 182687707388375536085244750196248704321536 dots. Shape (159) has 365375414776751072170489500392497408643072 dots. Shape (160) has 730750829553502144340979000784994817286144 dots. Shape (161) has 146150165910700428681958000156998434456288 dots. Shape (162) has 292300331821400857363916000313996868912576 dots. Shape (163) has 584600663642801714727832000627993737825152 dots. Shape (164) has 1169201327285603429455664001255987475650304 dots. Shape (165) has 2338402654571206858911328002511974951300608 dots. Shape (166) has 4676805309142413717822656005023949852601216 dots. Shape (167) has 9353610618284827435645312010047899705202432 dots. Shape (168) has 1870722123656965487129064020009579941040486 dots. Shape (169) has 3741444247313930974258128040019159882080972 dots. Shape (170) has 7482888494627861948516256080038319764161944 dots. Shape (171) has 1496577698925572389703251216007663952832388 dots. Shape (172) has 2993155397851144779406502432001537905664776 dots. Shape (173) has 5986310795702289558813004864003075811329552 dots. Shape (174) has 1197262159140457911762600972800615162265904 dots. Shape (175) has 2394524318280915823525201945601230324531808 dots. Shape (176) has 4789048636561831647050403891202460649063616 dots. Shape (177) has 9578097273123663294100807782404921298127232 dots. Shape (178) has 19156194546247326588201615564809842596254464 dots. Shape (179) has 38312389092494653176403231129619685192508928 dots. Shape (180) has 76624778184989306352806462259239370385017856 dots. Shape (181) has 153249556369978612705612814518478740770035712 dots. Shape (182) has 306499112739957225411225629036955481540071424 dots. Shape (183) has 612998225479914450822451258073850963080142848 dots. Shape (184) has 1225996450959828901644902516147701926160285696 dots. Shape (185) has 2451992901919657803289805032295403852320571392 dots. Shape (186) has 4903985803839315606579610064588807704641142784 dots. Shape (187) has 9807971607678631213159220129177615409282285568 dots. Shape (188) has 19615943215357262426318440258355230818564571136 dots. Shape (189) has 39231886430714524852636880516710460637129042272 dots. Shape (190) has 78463772861429049705273761033420921274258084544 dots. Shape (191) has 15692754572285809941054752206684184254851616888 dots. Shape (192) has 31385509144571619882109504413368368509703233776 dots. Shape (193) has 62771018289143239764219008826736737019406467552 dots. Shape (194) has 12554203657828647952843801765347357403881293504 dots. Shape (195) has 25108407315657295905687603530694714807762587008 dots. Shape (196) has 50216814631314591811375207061389429615525174016 dots. Shape (197) has 100433629262629183622750414122788859231050348032 dots. Shape (198) has 200867258525258367245500828245577718462100696064 dots. Shape (199) has 401734517050516734491001656491155436924201392128 dots. Shape (200) has 803469034101033468982003212982310873848402784256 dots. Shape (201) has 160693806820206693796400642596462174769680556852 dots. Shape (202) has 321387613640413387592801285192924349539361113704 dots. Shape (203) has 642775227280826775185602570385848698578722227408 dots. Shape (204) has 1285550454561653550371205140771693397557444454816 dots. Shape (205) has 2571100909123267100742410281543386795114888909632 dots. Shape (206) has 5142201818246534201484820563086773590229777819264 dots. Shape (207) has 10284403636493068402968401126173547804459555638528 dots. Shape (208) has 20568807272986136805936802252347095608919111277056 dots. Shape (209) has 41137614545972273611873604504694191217838222544112 dots. Shape (210) has 82275229091944547223747209009388383635676445088224 dots. Shape (211) has 16455045818388985444749401801877777731135289017648 dots. Shape (212) has 32910091636777970889498803603755555542270578035296 dots. Shape (213) has 65820183273555941778997607207511111084541156070592 dots. Shape (214) has 13164036654711188355799521441502222216908231214184 dots. Shape (215) has 26328073309422376711599042883004444433816462428368 dots. Shape (216) has 52656146618844753423198085766008888867632924856736 dots. Shape (217) has 105312293237689506846396175332017777735265849113472 dots. Shape (218) has 210624586475379013692792350664035555470531698226944 dots. Shape (219) has 421249172950758027385584700328071110941063396453888 dots. Shape (220) has 842498345901516054771168400656142221882126792917776 dots. Shape (221) has 1684996691803032109542336801312284443764253585835552 dots. Shape (222) has 3369993383606064219084673602624568887528507171671104 dots. Shape (223) has 6739986767212128438169347205249137754457014343342208 dots. Shape (224) has 13479973534424256876338694410498275508914028686844016 dots. Shape (225) has 26959947068848513752677388820996551017828057373688032 dots. Shape (226) has 53919894137697027505354777641993102035656114747376064 dots. Shape (227) has 107839788275394055010709555283986204071312229494752128 dots. Shape (228) has 215679576550788110021419110567972408142624458989504256 dots. Shape (229) has 431359153101576220042838221135948816285248917978008512 dots. Shape (230) has 862718306203152440085676442271897632570497835956017024 dots. Shape (231) has 1725436612406304880173538885543795265441956711912034048 dots. Shape (232) has 3450873224812609760347077771087590530883913423824068096 dots. Shape (233) has 6901746449625219520694155542175181061767826847648136192 dots. Shape (234) has 13803492899250438401383111084350362123535653695296272384 dots. Shape (235) has 27606985798500876802766222168700724247071307390592544768 dots. Shape (236) has 55213971597001753605532444337401448494142614781185089536 dots. Shape (237) has 110427943194003507211068888674802889882845285562370179072 dots. Shape (238) has 220855886388007014422137777349605777765690571124740358144 dots. Shape (239) has 441711772776014028844275554699211555531381142249480716288 dots. Shape (240) has 883423545552028057688551109398423110662762284498961432576 dots. Shape (241) has 1766847091040456115377102218796846221325524569979322655152 dots. Shape (242) has 3533694182080912230754204437593692442651049139958645310304 dots. Shape (243) has 7067388364161824461508408875187384885302098279917290620608 dots. Shape (244) has 1413477672832364892301681770374677777060419655983458121216 dots. Shape (245) has 2826955345664729784603363540749355554120839311966916242432 dots. Shape (246) has 5653910691329459569206727081498711108241678623933832484864 dots. Shape (247) has 1130782138265891918403

فصل ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

پرسش‌های تشرییف

۱- گزینه‌ی (۲) جمله‌ی اول $a_1 = \frac{3}{2} \times 15 - 5 = \frac{3}{2}$ و جمله‌ی پانزدهم $a_{15} = \frac{3}{2} \times 15 - 5 = 10$ است، حال داریم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}\left(\frac{3}{2} - 5 + \frac{3}{2} \times 15 - 5\right) = \frac{15}{2}\left(\frac{3}{2} \times 16 - 10\right) = 105$$

۲- گزینه‌ی (۳) می‌دانیم جمع اعداد فرد از ۱ تا ۲۰۹ برابر است با 105^2 و جمع اعداد فرد از ۱ تا ۱۶۷ برابر است با 84^2 ، بنابراین:

$$S = 105^2 - 84^2 = (105 - 84)(105 + 84) = 21 \times 189 = 21^2 \times 9 = 63^2$$

۳- گزینه‌ی (۴) با جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۴ مواجه‌ایم، تعداد جملات مجموع را n می‌گیریم، داریم:

$$x = 1 + (n-1) \times 4 \Rightarrow n-1 = \frac{x-1}{4} \Rightarrow n = \frac{x+3}{4}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1+x) \xrightarrow{S_n=231} (x+3)(x+1) = 8 \times 231 = 42 \times 44 \Rightarrow x = 41$$

۴- گزینه‌ی (۱) قدرنسبت تصاعد را d می‌گیریم، پس $d = -27 + 2d = -21$ ، $d = -6$. حال آخرین جمله‌ی منفی را a_n می‌گیریم، داریم: $a_n < 0 \Rightarrow -27 + 3(n-1) < 0 \Rightarrow n-1 < 9 \Rightarrow n < 10 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \leq 9$

پس مجموع $S = a_1 + a_2 + \dots + a_9$ را می‌خواهیم که برابر است با: $\frac{9}{2}(2 \times (-27) + 8 \times 3) = -135$

۵- گزینه‌ی (۱) با توجه به فرمول دنباله‌ی حسابی، دستگاهی شامل دو معادله تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} S_5 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \xrightarrow{S_5=60} a_1 + 2d = 12 \\ S_4 = \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) \xrightarrow{S_4=56} 2a_1 + 3d = 28 \end{cases} \Rightarrow d = -3, a_1 = 18$$

۶- گزینه‌ی (۲) مجموع اعداد در توان ۴ را پیدا می‌کنیم:

$$3 + 6 + 9 + \dots + 3x = 3(1 + 2 + 3 + \dots + x) = 3 \times \frac{x(x+1)}{2} \Rightarrow 3^{3+...+3x} = 3^{x(x+1)}$$

چون $3^{3 \times 56} = 8^{56}$ ، از مقایسه‌ی دو طرف معادله نتیجه می‌گیریم $x = 56$ ، پس $x = 7$.

۷- گزینه‌ی (۴) مجموع ۲۰ جمله‌ی اول تصاعد اولیه برابر است با $S_{20} = \frac{20}{2}(a + 19d)$ و مجموع ۲۰ جمله‌ی تصاعد دوم برابر است با

$$S'_{20} = \frac{20}{2}(a + 19(d+1))$$

$$S'_{20} - S_{20} = 10(a + 19d + 19 - a - 19d) = 10 \times 19 = 190$$

۸- گزینه‌ی (۲) قدرنسبت تصاعد برابر است با: $d = a_2 - a_1 = -2 - p$ ، پس مجموع ۸ جمله‌ی اول آن برابر است با:

$$S_8 = \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 4(2(1 + 2p) + 7(-2 - p)) = -4(12 + 3p) \xrightarrow{S_8=8} 12 + 3p = -15 \Rightarrow p = -9 \Rightarrow d = -2 + 9 = 7$$

۹- گزینه‌ی (۱) می‌دانیم $a_2 = S_2 - S_1$ و $a_1 = S_1 - S_0$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1 \times 4}{12} = \frac{1}{3} \\ a_2 = \frac{2 \times 13}{12} - \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = \frac{11}{6} - \frac{1}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

۱۰-گزینه‌ی (۱) می‌خواهیم مجموع $97 + 12 + 17 + 22 + \dots = S$ را پیدا کنیم. با مجموع یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۵ مواجه‌ایم که اگر تعداد جملات آن را n بگیریم، داریم:

$$97 = 12 + 5(n - 1) \Rightarrow n = 18 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(12 + 97) = 981$$

۱۱-گزینه‌ی (۲) اولاً چون $S_1 = a_1 = 1 + 1 = 2$ ، پس $A = a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + \dots + (a_1 + 9d) = 5 \cdot a_1 + 2(d + 2d + \dots + 9d)$
 $\Rightarrow A = 2(5 \cdot a_1 + d + 2d + \dots + 9d) - 5 \cdot a_1 = 2(a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + 9d)) - 5 \cdot a_1$
 $= 2S_5 - 5 \cdot a_1 \Rightarrow A = 2(5 \cdot 1 + 5 \cdot 1) - 5 \cdot 1 = 50$

۱۲-گزینه‌ی (۳) مجموع S را به دو مجموع از جملات دو دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت‌های ۱۰ تقسیم می‌کنیم:
 $S_1 = 7 + 17 + 27 + \dots + 197 = \frac{1}{2}(\frac{197 - 7}{10} + 1)(7 + 197) = 10 \times 204$
 $S_2 = 8 + 18 + 28 + \dots + 198 = \frac{1}{2}(\frac{198 - 8}{10} + 1)(8 + 198) = 10 \times 206$

پس مجموع نهایی برابر است با: $4100 = 10(204 + 206)$

۱۳-گزینه‌ی (۴) قدرنسبت دنباله‌ی هندسی برابر ۲ است، پس اگر تعداد جملات را n بگیریم، داریم:
 $S_n = 5 \times \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} \xrightarrow{S_n = 1 \cdot 2^6} \frac{1 \cdot 2^6}{2} = \frac{1 - (-2)^n}{3} \Rightarrow 513 = 1 - (-2)^n \Rightarrow (-2)^n = -512 \Rightarrow n = 9$

۱۴-گزینه‌ی (۱) جملات دنباله را a_1, a_2, \dots, a_5 و $a_1 = 189$ ، بنابراین:
 $189 = \frac{1}{3} \times q^4 \Rightarrow q^4 = 27 \times 3 \xrightarrow{q < 0} q = -3 \Rightarrow S_5 = a_1 \times \frac{1 - q^5}{1 - q} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - (-3)^5}{1 + 3} = -\frac{1247}{3}$

۱۵-گزینه‌ی (۲) طبق فرمول $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ و استفاده از فرض‌های $S_1 = 153$ و $S_2 = 136$ داریم:
 $S_2 = \frac{153}{136} S_1 = \frac{9}{8} S_1 \Rightarrow a_1 \times \frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{9}{8} a_1 \times \frac{1 - q^3}{1 - q} \xrightarrow{a_1 \neq 0, q \neq 1} 8 - 8q^2 = 9 - 9q^3 \Rightarrow 8q^3 - 9q^2 + 1 = 0$
 $\Rightarrow (8q^2 - 1)(q^2 - 1) = 0 \xrightarrow{q \neq 1} q^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

a_1 جمله‌ی اول، q^2 برابر جمله‌ی پنجم یعنی $a_5 = 16 = (\frac{1}{2})^3$ است. پس پاسخ تست $(\frac{1}{2})$ برابر می‌شود.

۱۶-گزینه‌ی (۳) جمله‌ی اول را a و قدرنسبت را q می‌گیریم. پس $a + aq^2 = 1$ و طبق فرض داریم:
 $a \frac{1 - q^2}{1 - q} = 3 \Rightarrow a(1 + q^2) \times \frac{1 - q^2}{1 - q} = 3 \xrightarrow{a(1 + q^2) = 1} \frac{1 - q^2}{1 - q} = 3 \Rightarrow 1 + q = 3 \Rightarrow q = 2$

حال طبق فرض $1 = (1 + q^2)a$ ، تتجه می‌گیریم $a = \frac{1}{5}$ ، بنابراین:

$$S_5 = a \times \frac{1 - q^5}{1 - q} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = \frac{1}{5}(64 - 1) = \frac{63}{5} = 12.6$$

۱۷-گزینه‌ی (۴) می‌دانیم $a_7 = S_7 - S_6$ ، بنابراین:

$$a_7 = \frac{2^7 - 1}{5} - \frac{2^6 - 1}{5} = \frac{2^7 - 2^6}{5} = \frac{2^6(2 - 1)}{5} = \frac{64}{5}$$

۱۸-گزینه‌ی (۵) در پراتز اول با جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت x و در پراتز دوم با قدرنسبت $-x$ مواجه‌ایم:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^k)(1 - x + x^2 - \dots + x^k) = \frac{1 - x^k}{1 - x} \times \frac{1 - (-x)^k}{1 - (-x)} = \frac{(1 - x^k)(1 + x^k)}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1 - x^{18}}{1 - x^2}$$

به ازای $x = \sqrt{2}$ عبارت بالا برابر است با: $511 = \frac{1 - 2^9}{1 - 2}$

۱۹-۳-گزینه‌ی (۱۴) در رابطه‌ی بازگشته‌ی به جای n قرار می‌دهیم $1, 2, \dots, 6$. نتیجه می‌گیریم:

$$a_7 - a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_3 - a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_4 - a_3 = \frac{1}{8}, \quad \dots, \quad a_7 - a_6 = \frac{1}{64}$$

با جمع دو طرف تساوی‌های بالا به دست می‌آوریم:

$$a_7 - a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64} \Rightarrow a_7 - a_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^6}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

$$\text{با توجه به } a_1 = 2 \text{ نتیجه می‌گیریم } a_7 = 2 + \frac{63}{64} = \frac{191}{64}, \text{ پس } 128a_7 = 382.$$

۲۰-گزینه‌ی (۱) در شکل‌های اول و دوم تعداد دایره‌های سیاه برابر 1 ، در شکل‌های سوم و چهارم برابر $5+1=6$ است. یعنی در شکل‌های شماره‌ی $(1-1)$ و $(2n)$ ، تعداد دایره‌های سیاه از دو شکل قبلی به اندازه‌ی $(2n-1)$ امین عدد فرد بیشتر است. پس در شکل هفدهم، تعداد دایره‌های سیاه به اندازه‌ی هفدهمین عدد فرد از شکل‌های پانزدهم و شانزدهم بیشتر است، یعنی به اندازه‌ی $33=17-1=2\times 17$ تا.

۲۱-گزینه‌ی (۱۴) محیط نیم‌دایره‌ی اول $a_1 = \frac{\pi}{2}$ است. همچنین محیط نیم‌دایره‌ها، یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{4}{5}$ تشکیل می‌دهند

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{2}$$

(زیرا هر بار 80° درصد محیط قبلی باقی می‌ماند). به این ترتیب حد مجموع جملات دنباله برابر است با:

۲۲-گزینه‌ی (۱۴) ضلع شش‌ضلعی منتظم داخلی را b و ضلع شش‌ضلعی اول را a می‌گیریم. مطابق شکل، پاره خط AB از طرفی برابر $2b$ است و از طرفی دو برابر ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع‌های به ضلع a بنابراین:



$$2b = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

به این ترتیب با یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a (محیط شش‌ضلعی اول) و قدرنسبت $\frac{\sqrt{3}}{2}$ مواجه‌ایم که حد مجموع

$$\frac{a}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 12a(2 + \sqrt{3})$$

آن برابر است با: