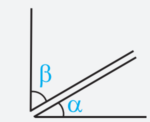
۱ آشنایی با زاویه

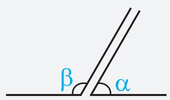
۱ زوایای متمم: دو زاویه‌ی α و β را متمم یک‌دیگر می‌نامند، هرگاه مجموع آن‌ها برابر ۹۰° باشد.

$$\boxed{\alpha + \beta = ۹۰^\circ}$$



۲ زوایای مکمل: دو زاویه‌ی α و β را مکمل یک‌دیگر می‌نامند، هرگاه مجموع آن‌ها برابر ۱۸۰° باشد.

$$\boxed{\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ}$$



تذکر: اگر دو زاویه برابر باشند، متمم‌ها و مکمل‌هایشان نیز برابر است.

۱ دو زاویه‌ی A و B متمم هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر $\frac{۴}{۹}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است، زاویه‌ی A چند درجه است؟

داخل ریاضی قدیم | پاسخ: ۴

۱) ۲۷ ۲) ۳۶ ۳) ۶۳ ۴) ۷۲

گام ۱: چون زوایای A و B متمم هستند، پس مجموع آن‌ها ۹۰° است:

$$\hat{A} + \hat{B} = ۹۰^\circ$$

گام ۲: منظور از مکمل زاویه‌ی B یعنی $۱۸۰^\circ - \hat{B}$، بنابراین داریم:

$$\hat{A} = \frac{۴}{۹}(۱۸۰^\circ - \hat{B})$$

گام ۳: چون $\hat{A}$ را می‌خواهیم، از **گام ۱** داریم $\hat{B} = ۹۰ - \hat{A}$ و آن را در **گام ۲** جای‌گذاری می‌کنیم:

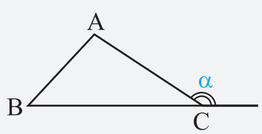
$$\hat{A} = \frac{۴}{۹}(۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \hat{A})) \Rightarrow ۹\hat{A} = ۴(۹۰^\circ + \hat{A}) \Rightarrow ۵\hat{A} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۷۲^\circ$$

۲ زاویه در مثلث

۱ مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر است با: ۱۸۰°

۲ مجموع زوایای خارجی هر مثلث (به‌طور کلی تمام چندضلعی‌ها) برابر است با: ۳۶۰°

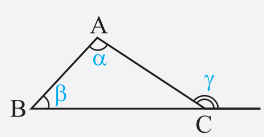
توجه: هر زاویه‌ی خارجی از امتداد یک ضلع و ضلع مجاور آن به‌دست می‌آید:



α زاویه‌ی خارجی رأس C

۳ هر زاویه‌ی خارجی برابر با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش است:

$$\boxed{\gamma = \alpha + \beta}$$



۲ زاویه‌های یک مثلث با اعداد ۸، ۵ و ۲ متناسب است. اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی این مثلث چند درجه است؟

داخل ریاضی ۸۰ | پاسخ: ۳

۱) ۲۰۰ ۲) ۸۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

گام ۱: فرض می‌کنیم زاویه‌ها ۵x، ۲x و ۸x باشند.

گام ۲: مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث برابر است با ۱۸۰°، بنابراین:

$$۲x + ۵x + ۸x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۲^\circ$$

گام ۳: کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی برابر مجموع کوچک‌ترین زاویه‌های داخلی است، یعنی:

$$\alpha = ۲x + ۵x = ۷x = ۷ \times ۱۲^\circ = ۸۴^\circ$$

۳ اندازه‌های سه زاویه‌ی مثلثی با اعداد ۵، ۴ و ۱ متناسب است. این مثلث کدام است؟

داخل ریاضی قدیم | پاسخ: ۳

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) متساوی‌الساقین ۳) قائم‌الزاویه ۴) منفرجه‌الزاویه

گام ۱: فرض می‌کنیم زاویه‌ها ۵x، ۴x و x باشند.

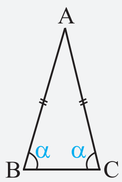
گام ۲: مجموع زوایای مثلث برابر است با ۱۸۰°، بنابراین:

$$۵x + ۴x + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۸^\circ$$

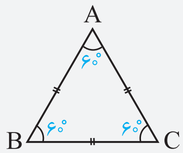
گام ۳: هرکدام از زاویه‌ها به‌ترتیب برابر است با ۹۰°، ۷۲° و ۱۸° یعنی مثلث قائم‌الزاویه است.

یک گام بلند: هر مثلثی که یک زاویه‌ی آن برابر مجموع دو زاویه‌ی دیگر باشد، قائم‌الزاویه است $(۵ = ۴ + ۱)$ و اگر یک زاویه بزرگ‌تر از مجموع دو زاویه باشد، منفرجه‌الزاویه و در غیر این‌صورت، حاده‌الزاویه است.)

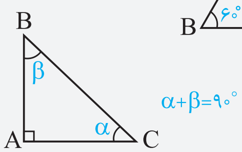
۳ انواع مثلث



۱ مثلث متساوی‌الساقین: هر مثلثی که دو ضلع آن برابر باشد را متساوی‌الساقین می‌نامند. هرکدام از آن ضلع‌های مساوی، ساق نامیده می‌شود و زاویه‌های زیر ساق‌ها با هم برابر هستند.



۲ مثلث متساوی‌الاضلاع: هر مثلثی که سه ضلع آن برابر باشد را متساوی‌الاضلاع می‌نامند. در مثلث متساوی‌الاضلاع هرکدام از زاویه‌ها 60° است.



۳ مثلث قائم‌الزاویه: هرمثلثی که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد را قائم‌الزاویه می‌نامند. در مثلث قائم‌الزاویه دو زاویه‌ی حاده، متمم یک‌دیگر می‌باشند.

چند تکنیک ساده

۱ برای نام‌گذاری زاویه‌های مجهول در هندسه، از حروف α، β، γ، θ، x، y، z و ... استفاده کنید و از به کار بردن نام‌گذاری‌هایی مانند A_1، A_2 و $\cdots$ تا حد امکان پرهیز نمایید. این نام‌گذاری‌های اندیس‌دار، باعث خطای دید و اشتباه و کاهش سرعت عمل می‌شود.

۲ هرگاه در شکلی زاویه‌ی خارجی دیدید، بهترین استفاده‌ها را از آن بکنید که استفاده از زاویه‌ی خارجی (که برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور است) حجم محاسبات بیهوده را بسیار کم می‌کند.

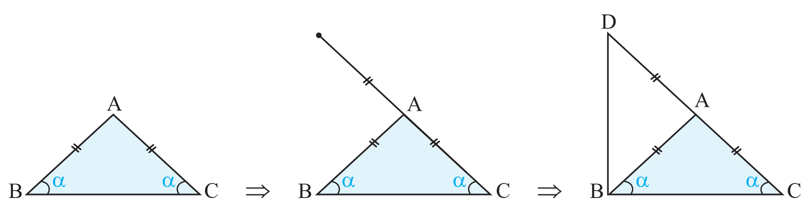
۳ هرگاه صحبت از زاویه در مثلث متساوی‌الساقین بود، زاویه‌های زیر ساق‌ها را α و α در نظر بگیرید و اگر زاویه‌ی رأس معلوم بود، ابتدا α را حساب کرده و مقدار معلوم آن را جای‌گذاری کنید.

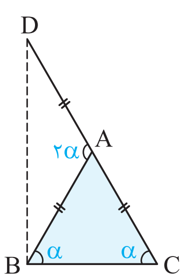
۴ یک ساق مثلث متساوی‌الساقینی را از طرف رأس مثلث به اندازه‌ی خودش ادامه می‌دهیم. نقطه‌ی حاصل و قاعده‌ی مثلث، چه نوع مثلثی تشکیل می‌دهند؟

داخل ریاضی قدیم | پاسخ: ۱

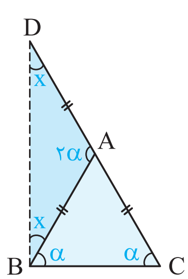
۱) قائم‌الزاویه
۲) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین
۳) متساوی‌الساقین
۴) منفرجه‌الزاویه

گام ۱: یک مثلث متساوی‌الساقین رسم می‌کنیم و ساق را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم و مثلث DBC را تشکیل می‌دهیم:





گام ۲: در مثلث ABC زاویه‌ی خارجی رأس $\widehat{A}$ برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور، یعنی 2α:



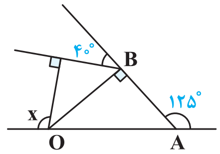
گام ۳: مثلث ABD متساوی‌الساقین است، بنابراین زاویه‌های زیرساق برابرند:

گام ۴: در مثلث DBC مجموع زوایای داخلی برابر 180° است، بنابراین:

$2x+2\alpha=180^\circ \Rightarrow x+\alpha=90^\circ \Rightarrow$ DBC قائم‌الزاویه است.

یک گام بلند: مثلثی که میانه‌ی آن نصف ضلع مقابل است، قائم‌الزاویه است.

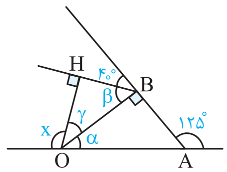
۵ داخل تجربی ۸۷ | پاسخ: ۱



در شکل مقابل $\widehat{A}=۱۲۵^\circ$ است. زاویه‌ی x چند درجه است؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۱۰

۳) ۱۱۵ ۴) ۱۲۵



گام ۱: زاویه‌ی خارجی برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور است، بنابراین در مثلث OAB داریم:

$$۱۲۵^\circ=\alpha+۹۰^\circ \Rightarrow \alpha=۳۵^\circ$$

گام ۲: در رأس B می‌توان نوشت:

$$\beta+۴۰^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \beta=۵۰^\circ$$

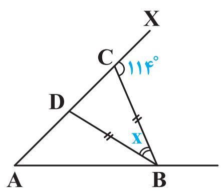
گام ۳: در مثلث OBH داریم:

$$\gamma+\beta=۹۰^\circ \Rightarrow \gamma=۴۰^\circ$$

گام ۴: در رأس O خواهیم داشت:

$$x+\alpha+\gamma=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۱۰۵^\circ$$

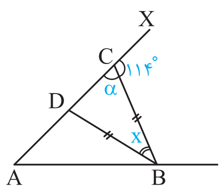
۶ داخل تجربی ۸۴ | پاسخ: ۳



در شکل مقابل $B\widehat{C}X=۱۱۴^\circ$. زاویه‌ی CBD چند درجه است؟

۱) ۴۴ ۲) ۴۶

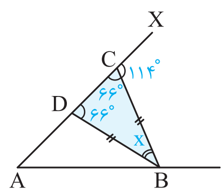
۳) ۴۸ ۴) ۵۲



گام ۱: در رأس C داریم:

$$\alpha+۱۱۴^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۶۶^\circ$$

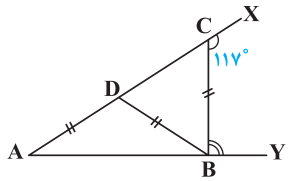
گام ۲: در مثلث متساوی‌الساقین BDC زاویه‌های زیر ساق برابرند:



گام ۳: مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر است با ۱۸۰°، بنابراین:

$$x+۶۶^\circ+۶۶^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۴۸^\circ$$

۷ خارج تجربی ۸۴ | پاسخ: ۲

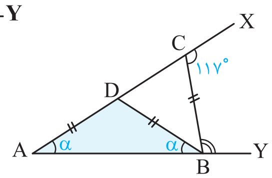


در شکل مقابل $B\widehat{C}X=۱۱۷^\circ$. زاویه‌ی CBY چند درجه است؟

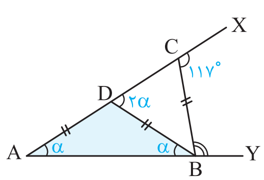
۱) ۹۳ ۲) ۹۴/۵

۳) ۹۵/۵ ۴) ۹۶

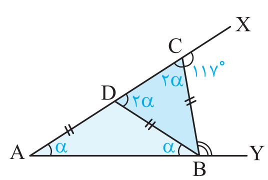
گام ۱: در مثلث ABD زاویه‌های زیر ساق برابرند.



گام ۲: زاویه‌ی خارجی مثلث ABD برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور است:



گام ۳: مثلث BDC متساوی‌الساقین است و زاویه‌های زیر ساق برابرند.



گام ۴: زوایای ۲α و ۱۱۷° مکمل‌اند:

$$۲\alpha+۱۱۷^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha=۶۳^\circ \Rightarrow \alpha=۳۱/۵^\circ$$

گام ۵: زاویه‌ی $C\widehat{B}Y$ زاویه‌ی خارجی مثلث ABC است، بنابراین:

$$C\widehat{B}Y=\alpha+۲\alpha=۳\alpha=۳\times ۳۱/۵^\circ=۹۴/۵^\circ$$

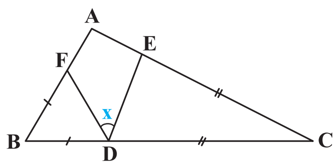
۴ پلی‌تیک زاویه‌های آزاد

هرگاه دو زاویه از مثلثی (در چندضلعی‌ها دو زاویه یا بیش‌تر) آزاد بود، یعنی نه داده شده بود و نه خواسته شده بود، می‌توانیم به زاویه‌ها مقدار دلخواهی بدهیم.

توجه بسیار مهم: در مثلث‌های خاص مانند متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه اگر یک زاویه از مثلث معلوم باشد، دیگر زاویه‌ی آزادی وجود ندارد و نباید عددگذاری کنید.

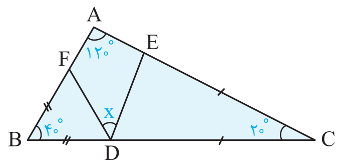
۸ در شکل روبه‌رو $BF=BD$ و $CD=CE$ و $\widehat{A}=۱۲۰^\circ$، زاویه‌ی FDE چند درجه است؟

داخل تجربی ۸۵ | پاسخ: ۲



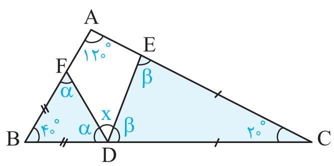
۱) ۶۰ ۲) ۳۰

۳) ۱۵ ۴) ۷۵



گام ۱: با توجه به این‌که زاویه‌های B و C نه داده شده و نه خواسته شده، می‌توانیم به آن‌ها عدد بدهیم ولی چون $\widehat{A}=۱۲۰^\circ$ است، باید $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ را طوری انتخاب کنیم که مجموع آن‌ها با $\widehat{A}$ برابر ۱۸۰° شود، مثلاً $\widehat{B}=۴۰^\circ$ و $\widehat{C}=۲۰^\circ$.

گام ۲: هر کدام از مثلث‌های کناری یعنی DEC و DFB متساوی‌الساقین هستند و زاویه‌های زیر ساق آن‌ها قابل محاسبه است:



$$\overset{\Delta}{DFB}: ۲\alpha+۴۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۷۰^\circ$$

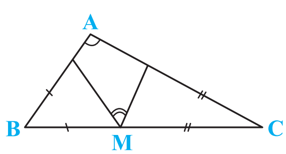
$$\overset{\Delta}{DEC}: ۲\beta+۲۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta=۸۰^\circ$$

گام ۳: زاویه‌ی D یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است، بنابراین:

$$x+\alpha+\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow x+۷۰^\circ+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۳۰^\circ$$

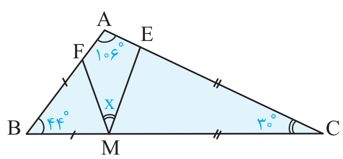
۹ در شکل مقابل، هر دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند. اگر زاویه‌ی A برابر ۱۰۶ درجه باشد، زاویه‌ی M چند درجه است؟

خارج ریاضی ۸۸ | پاسخ: ۱



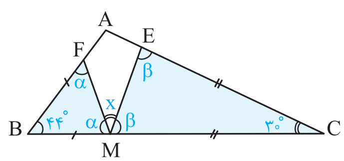
۱) ۳۷ ۲) ۳۸

۳) ۴۴ ۴) ۵۴



گام ۱: با توجه به این‌که زاویه‌های B و C نه داده شده و نه خواسته شده‌اند، می‌توانیم به آن‌ها عدد بدهیم ولی چون $\widehat{A}=۱۰۶^\circ$ است، باید $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ را طوری انتخاب کنیم که جمعشان با $\widehat{A}$ برابر ۱۸۰° شود، مثلاً $\widehat{B}=۴۴^\circ$ و $\widehat{C}=۳۰^\circ$. در این صورت خواهیم داشت:

گام ۲: هر کدام از مثلث‌های کناری یعنی MEC و MFB متساوی‌الساقین هستند و زاویه‌های زیر ساق آن‌ها قابل محاسبه است:



$$\overset{\Delta}{MFB}: ۲\alpha+۴۴^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۶۸^\circ$$

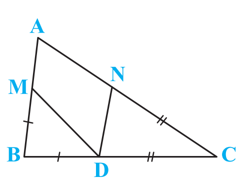
$$\overset{\Delta}{MEC}: ۲\beta+۳۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta=۷۵^\circ$$

گام ۳: زاویه‌ی M یک زاویه‌ی نیم صفحه است، بنابراین:

$$x+\alpha+\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow x+۶۸^\circ+۷۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۳۷^\circ$$

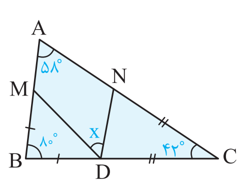
۱۰ در شکل مقابل $\widehat{A}=۵۸^\circ$، $BM=BD$ و $CN=CD$، زاویه‌ی MDN چند درجه است؟

داخل ریاضی ۹۱ | پاسخ: ۳

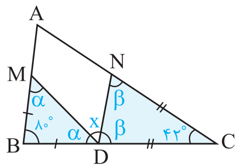


۱) ۵۸ ۲) ۵۹

۳) ۶۱ ۴) ۶۲



گام ۱: زاویه‌های B و C آزاد محسوب می‌شوند، به آن‌ها عدد می‌دهیم. مثلاً $\widehat{C}=۴۲^\circ$ و $\widehat{B}=۸۰^\circ$.



گام۲: زاویه‌های زیر ساق در مثلث‌های CDN و BMD به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

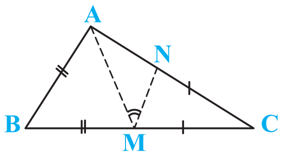
$$2\alpha + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

$$2\beta + 42^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 69^\circ$$

گام۳: زاویه‌ی D یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است، بنابراین:

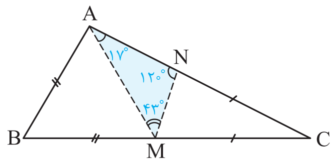
$$x + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow x + 50^\circ + 69^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 61^\circ$$

۱۱ در شکل مقابل، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و $\widehat{M} = 43^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی BAC چند درجه است؟

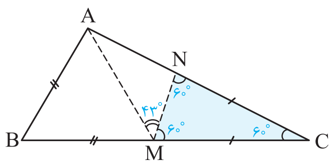


۱) ۹۳ ۲) ۹۴
۳) ۹۶ ۴) ۹۷

خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۲۰

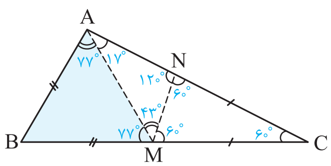


گام۱: در مثلث AMN یک زاویه معلوم است و دو زاویه‌ی دیگر آزاداند، بنابراین بـه آن‌ها عـدد می‌دهیم، مثلاً $\widehat{N} = 120^\circ$ و $\widehat{A} = 17^\circ$:



گام۲: در مثلث MNC زاویه‌ی N و در نتیجه زاویه‌ی M و در نهایت زاویه‌ی C معلوم می‌شوند:

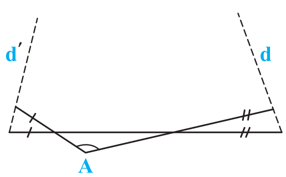
$$\begin{cases} \widehat{N} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \\ \widehat{M} = \widehat{N} \Rightarrow \widehat{M} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{C} = 180 - (\widehat{M} + \widehat{N}) = 60^\circ$$



گام۳: در مثلث ABM زاویه‌ی M و در نتیجه زاویه‌ی A معلوم می‌شود:

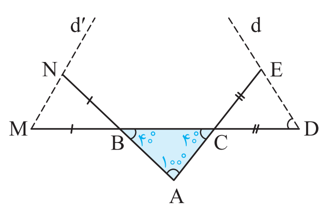
$$B\widehat{A}C = 77^\circ + 17^\circ = 94^\circ$$

۱۲ در شکل مقابل، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و $\widehat{A} = 100^\circ$. دو خط d و d′ با زاویه‌ی چند درجه متقاطع‌اند؟



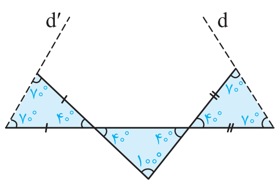
۱) ۲۰ ۲) ۴۰
۳) ۴۵ ۴) ۵۰

داخل ریاضی ۸۷ | پاسخ: ۲



گام۱: در مثلث ABC زاویه‌های B و C آزاد محسوب می‌شود، به آن‌ها عدد می‌دهیم. مثلاً هر کدام 40°:

گام۲: زاویه‌های مثلث‌های BMN و CED به‌صورت مقابل به‌دست می‌آیند:



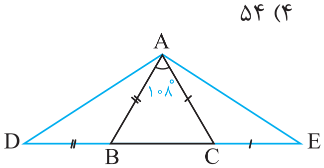
گام۳: بنابراین خطوط d و d′ با زاویه‌ی 40° همدیگر را قطع می‌کنند.

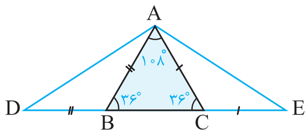
۱۳ در مثلث ABC زاویه‌ی $\widehat{A} = 108^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه‌ی BD = BA و CE = CA امتداد می‌دهیم. کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۵۴

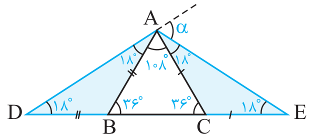
داخل تجربی ۹۳ | پاسخ: ۳

گام۱: یک شکل فرضی رسم می‌کنیم:





گام۲: در مثلث ABC زاویه‌های B و C آزاد محسوب می‌شوند، به آن‌ها عدد می‌دهیم:



گام۳: در مثلث‌های متساوی‌الساقین ABD و ACE زاویه‌ی 36° زاویه‌ی خارجی محسوب می‌شود که برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور است ، بنابراین:

گام٤: کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE در رأس A به‌دست می‌آید که بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی را دارد:

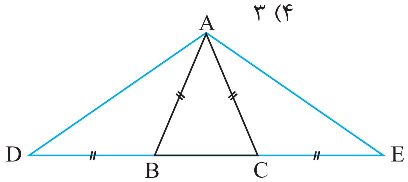
$$\alpha = \underbrace{18^\circ + 18^\circ}_{\text{مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور}} = 36^\circ$$

۱۴ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، قاعده‌ی BC را از هر دو طرف به اندازه‌ی ساق‌ها، تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی آن است؟

خارج تجربی ۹۳ | پاسخ: ۳

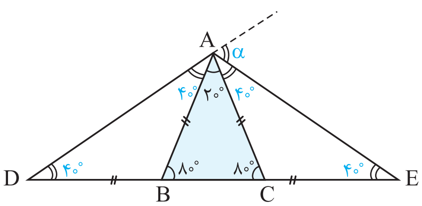
۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

گام۱: شکل را رسم می‌کنیم:



گام۲: به زاویه‌های مثلث ABC که همگی آزاد هستند، عدد می‌دهیم.

مثلاً $\hat{A} = 20^\circ$ ، $\hat{B} = 80^\circ$ و $\hat{C} = 80^\circ$.



گام۳: نسبت موردنظر برابر است با:

$$\alpha = 80^\circ \Rightarrow \frac{\text{کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی}}{\text{کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی}} = \frac{80^\circ}{40^\circ} = 2$$

۵ پلی‌تیک زاویه‌های نیمه آزاد

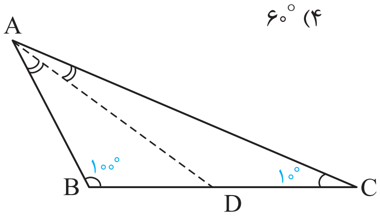
در مسائلی که مجموع، تفاضل و یا رابطه‌ای بین دو زاویه داده می‌شود می‌توان به آن زاویه‌ها طوری عدد داد که در شرایط داده شده صدق کند.

مثلاً: وقتی می‌گویند مجموع دو زاویه‌ی A و B از مثلثی 70° است، می‌توانید یکی را 30° و دیگری را 40° انتخاب کنید و با آن‌ها به ادامه‌ی حل بپردازید.

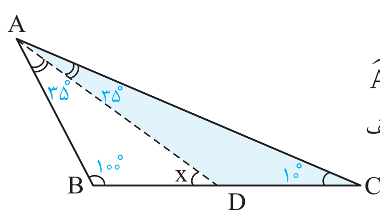
۱۵ اگر در مثلثی $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ باشد، زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و ضلع BC برابر کدام است؟

داخل تجربی قدیم | پاسخ: ۳

۱) 15° ۲) 30° ۳) 45° ۴) 60°



گام۱: زاویه‌های B و C نیمه آزاد محسوب می‌شوند، به آن‌ها عدد می‌دهیم، مثلاً $\hat{B} = 100^\circ$ و $\hat{C} = 10^\circ$:



گام۲: زاویه‌ی $\hat{A} = 180^\circ - (100^\circ + 10^\circ) = 70^\circ$ به‌دست می‌آید که نیمساز AD ، آن را نصف می‌کند، بنابراین:

گام۳: در مثلث ADC زاویه‌ی x ، زاویه‌ی خارجی است و برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن می‌باشد، یعنی:

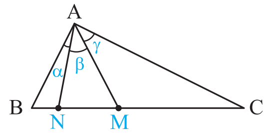
$$x = 35^\circ + 10^\circ = 45^\circ$$

۱۶ در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره‌خط‌های $BM = BA$ و $CN = CA$ را جدا می‌کنیم. اگر $\hat{A} = 72^\circ$ باشد، زاویه‌ی MAN چند درجه است؟

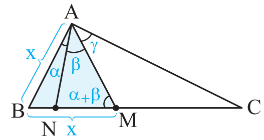
داخل تجربی ۸۶ | پاسخ: ۱

۱) ۵۴ ۲) ۵۲

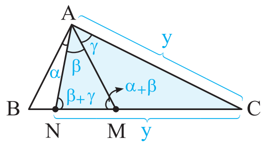
۳) ۴۸ ۴) ۴۲



گام ۱: شکل را رسم می‌کنیم. چون جزئی از زاویه‌ی داده شده را می‌خواهد، عددگذاری نمی‌توان کرد، بنابراین زاویه‌ی A را به سه جزء α، β و γ می‌شکنیم:



گام ۲: مثلث ABM متساوی‌الساقین است و زاویه‌های زیر ساقین برابرند:



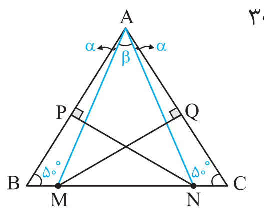
گام ۳: مثلث ANC متساوی‌الساقین است و زاویه‌های زیر ساقین برابرند:

گام ۴: با توجه به فرض مسأله داریم: $\widehat{A}=\alpha+\beta+\gamma=۷۲^\circ$ و هم‌چنین مجموع زوایای مثلث AMN برابر ۱۸۰° است، بنابراین:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=۷۲^\circ\\ \alpha+۳\beta+\gamma=۱۸۰^\circ\end{cases}\xRightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۲\beta=۱۰۸^\circ \Rightarrow \beta=۵۴^\circ$$

۱۷◀ در مثلث ABC داریم $AB=AC$، $\widehat{A}=۸۰^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌ی BC را در M و N قطع می‌کننـد. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث AMN چند درجه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰



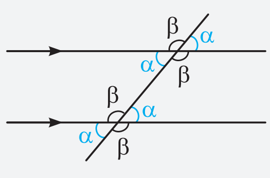
گام ۱: شکل را رسم می‌کنیم. چون $\widehat{A}=۸۰^\circ$ است، بنابراین $\widehat{B}=\widehat{C}=\dfrac{۱۸۰^\circ-۸۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$.

گام ۲: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، بنابراین مثلث‌های AMC و ANB متساوی‌الساقین هستند، یعنی زاویه‌های زیر ساق باید برابر باشند:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۵۰^\circ\\ \widehat{A}=۲\alpha+\beta=۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ \Rightarrow \beta=۲۰^\circ$$

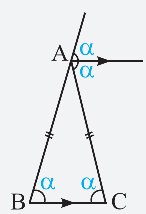
گام ۳: در مثلث متساوی‌الساقین AMN زاویه‌ی رأس ۲۰° است و زاویه‌های زیر ساق هر کدام ۸۰° می‌باشند، بنابراین زاویه‌ی ۲۰° کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث AMN می‌باشد.

۶ خطوط موازی و مورب



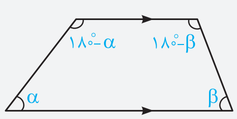
① اگر یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های ایجاد شده مطابق شکل مقابل با هم برابرند:

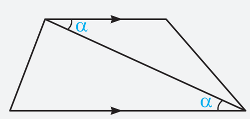
$$\boxed{\alpha+\beta=۱۸۰^\circ}$$

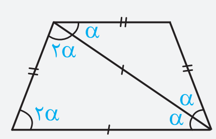


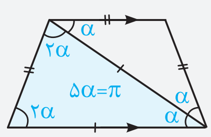
② در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز خارجی رأس، موازی قاعده است و زاویه‌های ایجاد شده مطابق شکل برابر خواهند بود:

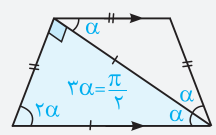
③ هر ذوزنقه در واقع دو خط موازی است که توسط دو خط مورب متفاوت قطع شده است. در مسائل مربوط به زاویه‌های ذوزنقه نیز می‌توانید از خواص خطوط موازی و مورب استفاده کنید. به شکل‌های زیر نگاه کنید:









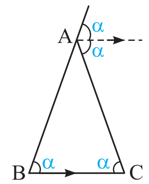


۱۸ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، $(AB = AC)$، نیمساز خارجی $\hat{A}$ و نیمساز داخلی $\hat{B}$ در نقطه‌ی D متقاطع‌اند، طول پاره‌خط AD برابر کدام جزء مثلث است؟

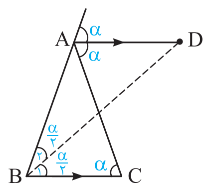
داخل تجربی قدیم | پاسخ: ۱

۱) AC ۲) طول نیمساز داخلی زاویه‌ی B

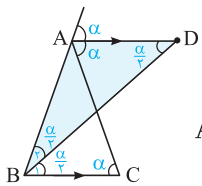
۳) BC ۴) شعاع دایره‌ی محیطی



گام ۱: در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز خارجی رأس، موازی قاعده است. بنابراین:



گام ۲: نیمساز داخلی $\hat{B}$ را رسم می‌کنیم و زاویه‌ی B نصف می‌شود:



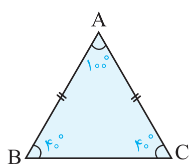
گام ۳: چون $AD \parallel BC$ است، بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{D}$ خواهد بود:

گام ٤: همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم مثلث ABD متساوی‌الساقین است و $AB = AD$ و چون $AB = AC$ می‌باشد، بنابراین $AD = AC$.

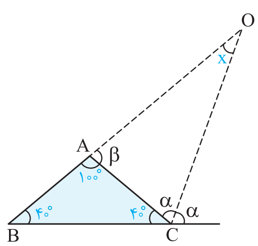
۱۹ یکی از زوایای مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۱۰۰° است. نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها امتداد ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

داخل ریاضی ۷۶ | پاسخ: ۲

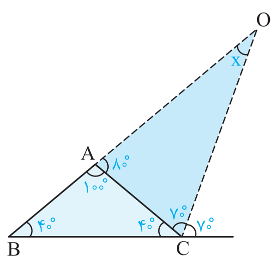
۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۳۵° ۴) ۴۰°



گام ۱: زاویه‌ی ۱۰۰° قطعاً زاویه‌ی رأس است. چون زاویه‌های زیر ساق نمی‌توانند ۱۰۰° باشند. بنابراین زاویه‌های زیر ساق هریک برابر ۴۰° هستند:



گام ۲: چون نیمساز خارجی زاویه‌ی رأس در مثلث‌های متساوی‌الساقین موازی قاعده است، امکان ندارد امتداد BC را قطع کند. پس نیمساز خارجی زاویه‌های زیر ساق را رسم می‌کنیم:

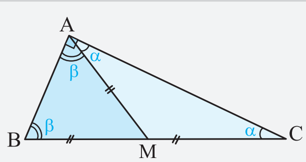


گام ۳: زاویه‌ی ۲α مکمل زاویه‌ی ۴۰° و زاویه‌ی β مکمل زاویه‌ی ۱۰۰° است، بنابراین $\alpha = ۷۰^\circ$ و $\beta = ۸۰^\circ$.

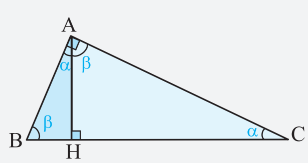
گام ٤: در مثلث OBC مجموع زوایا برابر ۱۸۰° است، بنابراین:

$$x + ۱۱۰^\circ + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۳۰^\circ$$

۷ ارتفاع و میانه‌ی مثلث قائم‌الزاویه



۱) در مثلث‌های قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است. یعنی میانه‌ی وارد بر وتر با قطعاتی که میانه روی وتر ایجاد می‌کند، برابر است.



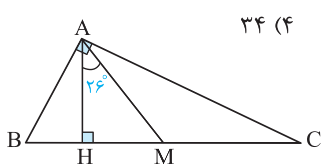
۲) با رسم ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه دو مثلث جدید و کوچک‌تر حاصل می‌شود که با مثلث اصلی متشابه‌اند (هم زاویه‌اند).

۳) کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث قائم‌الزاویه همواره کوچک‌تر از ۴۵° است.

۲۰ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر ۲۶° است. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟

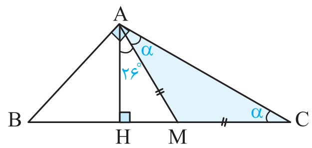
داخل تجربی ۸۱ | پاسخ: ۳

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

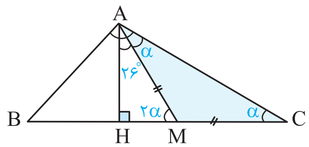


گام ۱: میانه و ارتفاع مثلث را رسم می‌کنیم و زاویه‌ی بین آن‌ها را ۲۶° می‌گذاریم:

گام ۲: میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است، بنابراین مثلث AMC متساوی‌الساقین می‌باشد:



گام ۳: در مثلث AMC زاویه‌ی خارجی M برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور است.

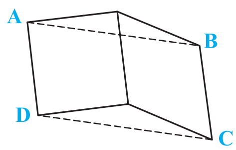


گام ۴: مثلث AHM قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$۲\alpha + ۲۶^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۶۴^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۲^\circ$$

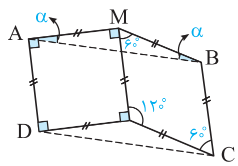
۲۱ در شکل زیر، یک مربع و یک لوزی با زاویه‌ی ۶۰°، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگ‌ترین زاویه‌ی متوازی‌الاضلاع ABCD چند درجه است؟

داخل تجربی ۷۸ | پاسخ: ۲



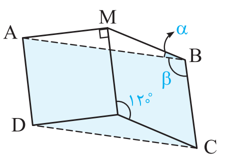
۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

گام ۱: چون در لوزی و مربع اضلاع با هم برابرند، داریم:



گام ۲: در مثلث ABM که متساوی‌الساقین است هر یک از زاویه‌های زیر ساق برابر است با:

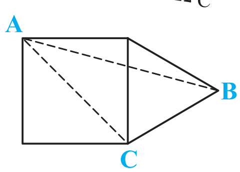
$$\alpha + \alpha + ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۵^\circ$$



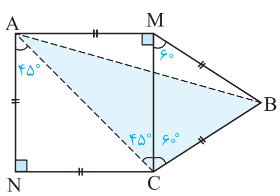
گام ۳: چون $\alpha + \beta = ۱۲۰^\circ$ است، بنابراین $\beta = ۱۰۵^\circ$.

۲۲ در شکل مقابل، بر روی ضلع مربع مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. در مثلث ABC، بزرگ‌ترین زاویه چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی آن است؟

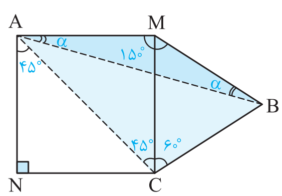
خارج تجربی ۷۸ | پاسخ: ۲



۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$
۳) ۴ ۴) $\frac{۹}{۲}$



گام ۱: اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع و مربع برابرند و زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع، ۶۰° و قطرهای مربع هم نیمساز هستند، پس مطابق شکل زاویه‌ی $\hat{C} = ۴۵^\circ + ۶۰^\circ = ۱۰۵^\circ$ است.



گام ۲: مثلث AMB متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$$\alpha + \alpha + ۱۵۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۵^\circ$$

گام ۳: زاویه‌ی A از مثلث ABC برابر است با:

$$\hat{A} = ۹۰^\circ - (۱۵^\circ + ۴۵^\circ) = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۱۰۵^\circ) = ۴۵^\circ$$

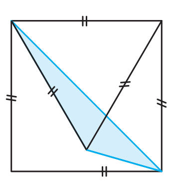
گام ۴: نسبت بزرگ‌ترین زاویه به کوچک‌ترین زاویه در مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{۱۰۵^\circ}{۳۰^\circ} = \frac{۷}{۲}$$

۲۳ مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع درون مربع، در یک ضلع مشترک‌اند. در مثلث غیر قائم‌الزاویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع است، زاویه‌ی بزرگ‌تر چند برابر زاویه‌ی کوچک‌تر است؟

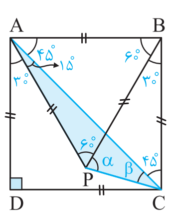
خارج تجربی ۸۶ | پاسخ: ۴

۱) ۷ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹



گام ۱: مثلث را طوری درون مربع قرار می‌دهیم که یک ضلع آن با مربع یکی باشد. مثلث بیان شده را مشخص می‌کنیم:

گام ۲: زاویه‌های مثلث و مربع و زاویه‌های بین آن‌ها را مشخص می‌کنیم:



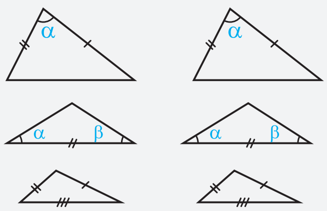
گام۳: در مثلث PBC که متساوی‌الساقین است، هرکدام از زاویه‌های زیرساق‌ها برابر است با $\frac{۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$ و بنابراین $\alpha = ۷۵^\circ$ و $\beta = ۳۰^\circ$ خواهد شد.

گام۴: نسبت زاویه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{بزرگ‌ترین زاویه} = ۶۰^\circ + \overset{\overset{\alpha}{\uparrow}}{۷۵^\circ} = ۱۳۵^\circ \\ \text{کوچک‌ترین زاویه} = ۱۵^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۳۵^\circ}{۱۵^\circ} = ۹$$

۸ همنهشت بودن دو مثلث

دو مثلث در ۳ حالت عمده همنهشت هستند (همنهشت یعنی مثل هم و قابل انطباق بر هم)، آن هم زمانی است که اجزای بیان شده در سه حالت زیر در دو مثلث برابر باشند:



۱) دو ضلع و زاویه‌ی بین (ض‌زض)

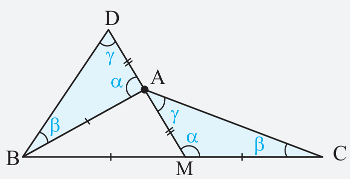
۲) دو زاویه و ضلع بین (زض‌ز)

۳) سه ضلع (ض‌ض‌ض)

توجه: در دو مثلث قائم‌الزاویه، اگر وتر و یک زاویه‌ی حاده و یا وتر و یک ضلع آن برابر باشند، دو مثلث همنهشت هستند.

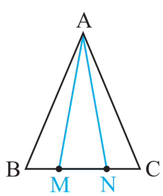
پلی تیک همنهشتی: در تست‌های کنکور اگر یک شکل شلوغ دیدید که روی اضلاع مثلث‌های آن دو علامت برابر زده شده بود (مانند شکل زیر) قطعاً دو مثلث تشکیل شده در آن‌جا همنهشت هستند و باید از همنهشت بودن آن‌ها در پیدا کردن زاویه‌ها استفاده کنید. مثلاً به شکل مقابل نگاه کنید:

$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{AMC}$ (ض‌زض)

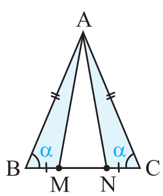


۲۴ بر قاعده‌ی BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC دو نقطه‌ی M و N را چنان اختیار می‌کنیم که BM = NC باشد. این نقاط را به رأس A وصل می‌کنیم، مثلث AMN همواره چگونه است؟ داخل تجربی قدیم | پاسخ: ۳۰

۱) غیرمشخص ۲) متساوی‌الاضلاع ۳) متساوی‌الساقین ۴) قائم‌الزاویه

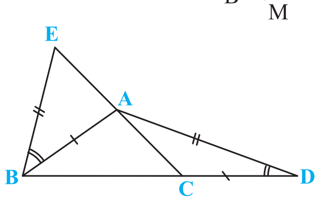


گام۱: شکل مسأله را طوری‌که در صورت سؤال بیان شده رسم می‌کنیم:



گام۲: می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ساق‌ها و زاویه‌های زیرساق‌ها برابراند. بنابراین دو مثلث رنگی همنهشت هستند، در نتیجه AM = AN.

۲۵ با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه‌گیری درست است؟ خارج تجربی ۸۵ | پاسخ: ۴۰



۱) AB = AC

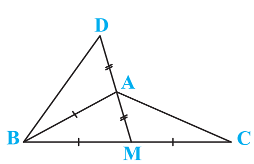
۲) AB = BC

۳) AE = BC

۴) AE = AC

دو مثلث ABE و ACD به حالت «ض‌زض» همنهشت هستند، بنابراین AE = AC.

۲۶ در شکل مقابل اگر $\widehat{D} + \widehat{C} = ۶۱^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی ABC چند درجه است؟ داخل تجربی ۸۹ | پاسخ: ۳۰



۱) ۳۹ ۲) ۵۶

۳) ۵۸ ۴) ۶۱

گام۱: چون مجموع $\widehat{D}$ و $\widehat{C}$ ثابت است، می‌توانیم از عددگذاری استفاده کرده و فرض کنیم $\widehat{D} = ۳۰^\circ$ و $\widehat{C} = ۳۱^\circ$: