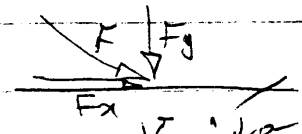
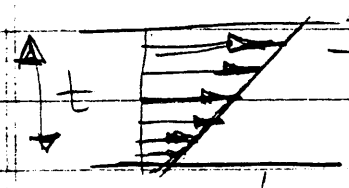
www.Prozheha.ir

سیال { مایع / جامد } مواد

سیالات موادی که در مقابل تنش برشی از خود مقاومت نشان نمی‌دهند.

$F_y/A = P$ و $\frac{F_x}{A} = \tau$



* صفحه بالایی را در اثر اعمال نیروی اندازه F شروع به حرکت می‌کند

سرعت سیال در صفحه پایینی صفر می‌شود.

* به شرطی که فاصله بین دو صفحه کم باشد تغییر سرعت صفحه سیال خطی است.

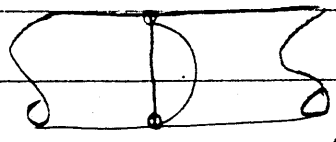
$$\begin{cases} F \propto V \\ F \propto A \\ F \propto 1/t \end{cases} \Rightarrow F = AV/t$$

$F/A \propto V/t$

تنش برشی $\tau = V/t \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\partial V}{\partial y}}$

$\frac{\partial V}{\partial y} \simeq \frac{\Delta V}{\Delta Y} = \frac{V_2 - V_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{V - 0}{t - 0}$

$$\boxed{\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial Y}}$$



(* همواره مثبت است)

نرخ تغییر شکل یا سرعت کرنش سیال یا نرخ کرنش $= \gamma = \frac{\partial U}{\partial y}$ زاویه‌ای

رابطه نیوتنی $\boxed{\tau = \mu \gamma}$

μ ویسکوزیته خاصیتی از سیال است که سیال می‌خواهد در مقابل تنش‌های برشی از خود مقاومت نشان دهد.

ویسکوزیته ناشی از دو عامل است: 1) نیروی چسبندگی 2) اصطکاک مومنتم بین مولکول‌ها.

* مایعات مولکول‌ها به هم نزدیک‌ترند پس نیروی چسبندگی زیاد و کرمت دارند

www.Prozheha.ir

مولکول‌ها خیلی کم است پس نیروهای چسبندگی در مقابل انتقال مومنتوم خیلی زیاد است پس در مایعات ویسکوزیته بیشتر تحت تأثیر نیروهای چسبندگی است. اما در گازها مولکول‌ها از هم فاصله دارند و با سرعت زیادی حرکت می‌کنند پس در گازها انتقال مومنتوم بین مولکول‌ها در مقایسه با نیروهای چسبندگی خیلی زیاد است پس در گازها ویسکوزیته ناشی از انتقال مومنتوم بین مولکول‌ها است. با حرارت دادن گازها جنبش مولکول‌ها زیاد شده انتقال مومنتوم مولکول‌ها زیاد می‌شود لذا انتقال ویسکوزیته در گازها با افزایش دما افزایش می‌یابد.

در مایعات با افزایش دما نیروهای چسبندگی کاهش می‌یابد پس ویسکوزیته با دما کاهش می‌یابد

$$\begin{cases} \text{گازها} & T \uparrow \quad \eta \uparrow \\ \text{مایعات} & T \uparrow \quad \eta \downarrow \end{cases}$$

$$\text{گازها: } \frac{\eta}{\eta_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n$$

$$\text{مایعات: } \eta = \eta_0 e^{-bT}$$

در فشارهای معمولی تأثیر فشار روی ویسکوزیته چندان زیاد نیست اما در فشارهای خیلی زیاد با افزایش فشار ویسکوزیته مایعات و گازها هر دو افزایش می‌یابد

www.Prozheha.ir

$$\mu = \frac{N/m^2}{m\,s^{-1}/m} = \frac{N\cdot s}{m^2}\ ,\ \frac{dyn\cdot s}{cm^2}\ ,\ \frac{lbf\times s}{ft^2}\ ,\ \frac{lbm}{ft\times s}\ ,\ \frac{gr}{cm\cdot s}$$

$$1\,gr/cm\,sec = 1\,poise$$

دیمانسیون μ: $ML^{-1}T^{-1}$

ویسکوزیته سینماتیک: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$; دیمانسیون: L^2T^{-1} ; واحد ν: cm^2/s ، ft^2/s ، m^2/s

$$\frac{1\,cm^2}{sec} = 1\ stokes \times \rho\left(gr/cm^3\right) = \frac{gr}{cm\cdot s}$$

ویسکوزیته دینامیک (یا ویسکوزیته مطلق)

* ویسکوزیته دینامیک مایعات از گازها بیشتر است.
* ویسکوزیته سینماتیک گازها از ویسکوزیته سینماتیک مایعات بیشتر است.

گاز (ν) مایع

$\nu = \mu/\rho$; $T\uparrow \mu\uparrow \rho\downarrow \nu\uparrow$

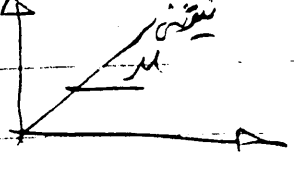
مایع: $T\uparrow \mu\downarrow \nu\downarrow$

سیالی که از قانون $\tau = \mu\frac{du}{dy}$ پیروی کند سیال نیوتنی می‌باشد.

سیالات
- نیوتنی
- غیرنیوتنی
  - مستقل از زمان
    - Dilatant
    - Psudoplastic (شبه پلاستیک)
    - Binghamplastic
  - وابسته به زمان
    - تیکسوتروپیک: thixotropic
    - رئوپلتیک: Rheopectic

سیالات نیوتنی سیالاتی هستند که در آن تنش برشی (τ) رابطه خطی با $\frac{du}{dy}$ دارد.

راستی است که از مبدأ عبور می‌کند شیب این خط برابر ویسکوزیته سیال می‌باشد.



www.Prozheha.ir

سیالات غیرنیوتنی سیالاتی هستند که در آنها تنش برحسب لا خطی است

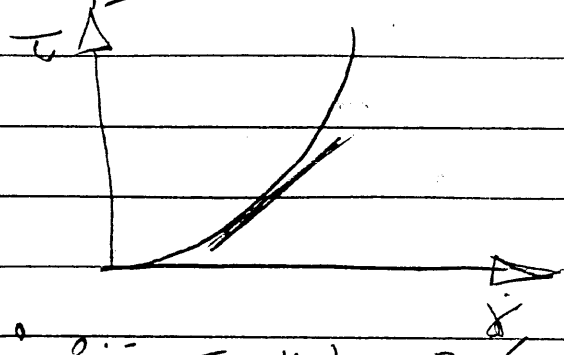
و چنانچه خط راست باشد از سیال اصطلاح نمی‌کند

سیالات مستقل از زمان سیالاتی هستند که در ویسکوزیته آنها تابعیت زمانی ندارد.

سیالات Dilatant (غلیظ شونده یا منبسط شونده): سیالاتی هستند که با

افزایش تنش برشی ویسکوزیته آنها افزایش می‌یابد لذا به این سیالات

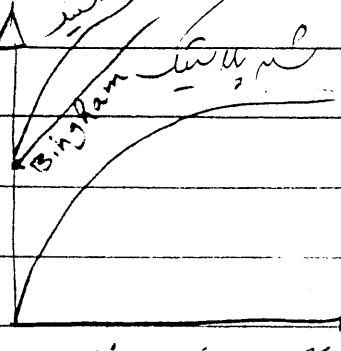
سیالات غلیظ شونده در مقابل تنش برشی می‌نامیم.



بنابراین مدل سیالات ویسکوزیته در هر لحظه مقدار تنش برشی اعمال شده می‌باشد

سیالات شبه پلاستیک با افزایش تنش برشی ویسکوزیته سیال کاهش می‌یابد

ویسکوزیته تابع تنش برشی می‌باشد.



سیالات بینگهام نوع خاصی از پلاستیک‌ها می‌باشند.

www.Prozheha.ir

$\tau = \mu(\dot{\gamma})^n$	$n=1$ نیوتنی
	$n>1$ Dilatant
	$n<1$ pseudoplastic

پلاستیک ها همواره یک تنش تسلیم دارند. (رفتار خاص از سیالات هستند)
- (yield stress)

در مقابل تنش برشی از خود مقاومت نشان می‌دهند. تنش تسلیم یعنی اگر تنش وارده شده بر این سیال از تنش تسلیمش کمتر باشد سیال شروع به حرکت نمی‌کند ($\frac{\partial u}{\partial y}=0$). تعریف دقیق از سیالات بینهایم می‌باشد.

بینهایم پلاستیک: $\tau = \tau_p + \mu(\dot{\gamma})^n$; $n=1$ پلاستیک

τ_p تنش تسلیم

رابطه رئولوژیک: $\tau = \mu\dot{\gamma}$

$\begin{cases} \tau < \tau_p \Rightarrow \dot{\gamma}=0 \\ \tau = \tau_p + \mu\dot{\gamma} \end{cases}$

* برای سیالات غیرنیوتنی ویسکوزیته جزء خواص سیال محسوب نمی‌شود زیرا در بردهای خاص ویسکوزیته تغییر نمی‌کند. (μ) فقط جزء خواص سیالات است.

* سیالی که منحنی رئولوژیکی مربوط به τ منطبق نشود چنین سیالی سیال ایده‌آل است. (سیال ایده‌آل سیالی است بدون اصطکاک یا ویسکوزیته صفر)

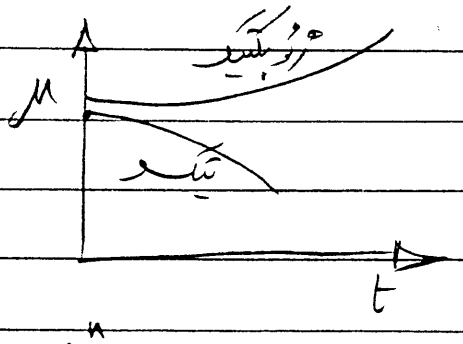
پس در سیالات ایده‌آل هیچ موقع تنش برشی ایجاد نمی‌شود طبق تعریف سیالات ایده‌آل

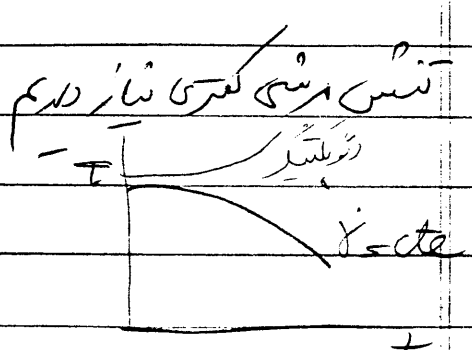
www.Prozheha.ir

تحلیل مراکم نایوتنی هستند. سیالات ایده آل در جریان برشی صدق می کند. 4) آزمایش تعیین ویسکوزیته را در مورد یک سیال ایده آل انجام دهید (سیال هیچگونه مقاومتی در قبال تنش برشی ایجاد نمی شود. (صفحه روی سیال سر می خورد).

حالت حدی دوم: اگر منحنی رئولوژیکی مربوط به منطبق باشد یعنی ویسکوزیته ثابت است یعنی جامد داریم.

سیالات نیوتنی: سیالاتی هستند که ویسکوزیته آنها با گذشت زمان ثابت می ماند یا سیالاتی هستند برای ثابت نگه داشتن نرخ کرنش ($\dot{\gamma}$) با گذشت زمان به تنش برشی کمتری نیاز داریم.





$\tau = \mu \dot{\gamma}^n$ ، $\mu = \frac{\tau}{(\dot{\gamma})^n}$

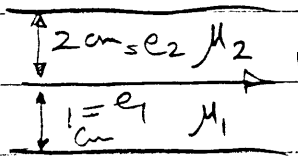
سیالات رئوپکتیک: سیالاتی هستند که ویسکوزیته آنها با گذشت زمان افزایش می یابد. برای ثابت نگه داشتن نرخ کرنش ($\dot{\gamma}$) با گذشت زمان تنش برشی بیشتری نیاز داریم.

www.Prozheha.ir

مثال: دو صفحه با مساحت $2\ m^2$ مطابق شکل قرار دارند. بین این دو صفحه صفحه سومی با سرعت ثابت $1\ m/s$ کشیده می‌شود. بین سیالات نیز سیالی با ویسکوزیته 5 poise

پرسیده است نیروی مورد نیاز برای کشیدن صفحه میانی برابر است با:

1) 15N 2) 150N 3) 30N 4) 300N



$\tau = \tau_1 + \tau_2$

$\tau = \mu_1 \frac{dv}{e_1} + \mu_2 \times V/e_2$

$\Rightarrow \tau = \mu V (1/e_1 + 1/e_2)$

$\tau = F/A$

$F = \mu A V (1/e_1 + 1/e_2)$

$\frac{5\ gr}{cm \cdot s} \times \frac{100\ cm}{1\ m} \times \frac{1\ kg}{1000\ gr} = 0.5\ \frac{kg}{m \cdot s}$

$F = 0.5 \frac{kg}{m \cdot s} \times 2m^2 \times \frac{1\ m}{s} \left(\frac{1}{0.01} + \frac{1}{0.02}\right)$

$= \boxed{150\ N}$

مثال: دو صفحه با سطح مقطع A با سرعت V روی سطح شیبداری با زاویه α با سرعت

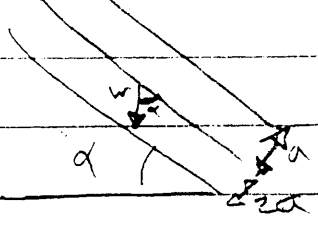
با این حرکت می‌کند اگر فاصله بین صفحات و سطح شیبدار توسط سیالی با ویسکوزیته

μ پر شود و سطح صفحات برابر A در نظر گیریم و W وزن صفحه میانی باشد.

وزن صفحه میانی چقدر است؟

1) $\frac{\mu AV}{a \sin\alpha}$ 2) $\frac{3\mu AV}{a}$

3) $\frac{3\mu AV}{a \sin\alpha}$ 4) $\frac{3\mu AV}{2a \sin\alpha}$



$V = cte, a = 0 : \sum F = 0$

$F - W \sin\alpha = 0 \Rightarrow W = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{\mu AV\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a}\right)}{\sin\alpha}$

www.Prozheha.ir

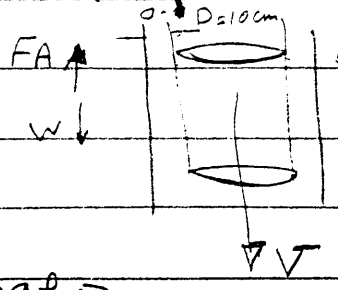
$$W_s = \frac{3\mu AV}{2a\sin\alpha}$$

مثال: پیستونی با دانسیته $8\frac{gr}{cm^3}$ به طول 10cm و به قطر 10cm در داخل

پیستونی با سرعت ثابت $20\frac{cm}{s}$ به سمت پایین حرکت می‌کند ما بین سیلندر و

پیستون روغنی با ضخامت 0.1mm پر شده باشد ویسکوزیته این روغن برابر خواهد بود با

1) $0.98\frac{Kg}{m.s}$ 2) $0.98\,cp$ 3) $1.96\,cp$ 4) $1.96\frac{Kg}{m.s}$



$\mu\frac{V}{h}$

$W - F = 0$

$\rho(\pi D^2/4)Lg - \tau(\pi DL) = 0$

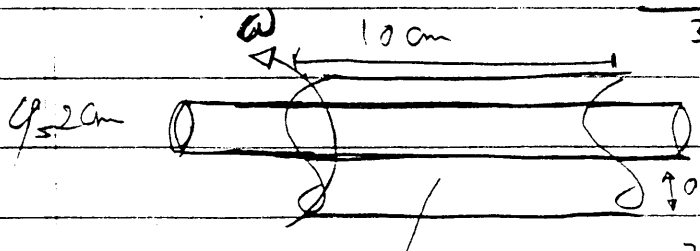
$\frac{\rho Dg}{4} - \mu V/h = 0 \rightarrow \mu = \frac{\rho g h D}{4V} = \frac{8000\times 9.8\times 0.1\times 10^{-4}}{4\times 0.2}$

$= \boxed{0.98}$

مثال: یک ذره مطابق شکل روی یک پاتاقان با سرعت ω می‌چرخد

گشتاور مورد نیاز برای رساندن به سرعت 1000RPM برابر است با:

1) 0.2π 2) $0.2\pi^2$ 3) 0.2π 4) $\frac{0.2\pi^2}{3}$



$T = F \times R$

$T = \mu\left(\frac{V_2 - V_1}{r_2 - r_1}\right)(2\pi rL)R$

$V = r\omega$ ← rad/s

$\omega\left(\frac{rad}{s}\right) = \frac{2\pi N}{60}$ → rpm

$\frac{1\,N.S}{m^2}$

$T = \mu\frac{R\frac{2R}{60}\times 1000\times 2\pi R^2 L}{10^{-4}}$

www.Prozheha.ir

$$T = \frac{\frac{4\pi^2}{60}\times 0.2\pi^2}{3}$$

۶: قطر

مدول الاستیسیته:

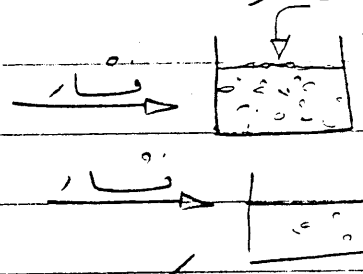
K: ضریب تراکم پذیری حجم (یا) $K = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ (I)

واحد K عکس فشار است. مدول بالک عکس تراکم پذیری حجم (یا) است (واحدش فشار است)

$$K = -\frac{dP}{(\partial V/V)} \quad \text{(II)}$$

مدول بالک در اصل میزان تراکم پذیری سیال را نشان می دهد.

هر چقدر مدول بالک (K) برای سیال بیشتر باشد سیال به حالت تراکم ناپذیری نزدیک تر است.



هر چقدر فشار زیاد باشد K (مدول بالک) زیاد است. در فشار زیاد سیال به حالت تراکم ناپذیری نزدیک می شود.

در رابطه II اگر $V = \frac{nRT}{P}$ آنگاه $K = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -V\left(\frac{RT}{V^2}\right)$

$$\Rightarrow K = \frac{RT}{V} = \rho RT$$

$K = \rho RT$ | مدول بالک گازهای ایده آل

www.Prozheha.ir

$1m^3$ آب را در اثر فشار روی آن به اندازه 1atm فشرده می‌کنیم:

$$K = -\frac{10^5 Pa}{dV/1m^3}$$

$K = 2.2\times10^9 Pa \Leftarrow T_{آب} = 25^\circ C$

$$2.2\times10^9 = -\frac{10^5}{dV} \Rightarrow dV = \frac{-10^5}{2.2\times10^9} = \boxed{45cm^3}$$

مثال: فشار روی $10ft^3$ آب را به اندازه 150psi زیاد می‌کنیم حجم آب به اندازه 0.2٪ کاهش یافته است مدول بالک مرجب Psi در این شرایط حرارت با:

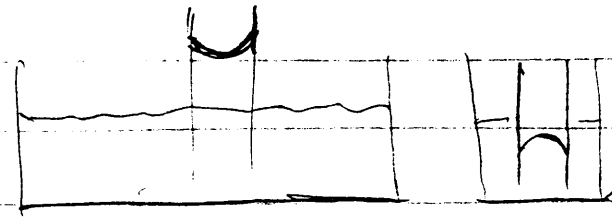
75000Psi (4✓ 7500Psi (3 750Psi (2 75Psi (1

کشش سطحی: اگر سیالی با هوا تماس داشته باشد در داخل سیال تحت تأثیر نیروهای قرار می‌گیرد که برآیند آنها صفر است اما اگر ذره‌ای از سیال را در سطح سیال در تماس با هوا در نظر بگیریم برآیند نیروها دیگر صفر نیست. این مسأله سبب می‌شود که در سطح تماس سیال با هوا یک کشش ایجاد می‌شود که به آن کشش سطحی گویند. به شکل کشش سطحی را از نیروی سطح سیال به ازای واحد طول سطح می‌نامند.

واحد کشش سطحی N/m یا J/m^2 یا $N.m$.

www.Prozheha.ir

صعود سیال در لوله مویین :



تمام سیالاتی که در لوله مویین بالا می روند

سطحشان به شکل مقعر است . اما بعضی سیالاتی که در لوله مویین پایین می آید و تمام سیالاتی

که بصورت نزولی در لوله عمل می کنند مانند جیوه

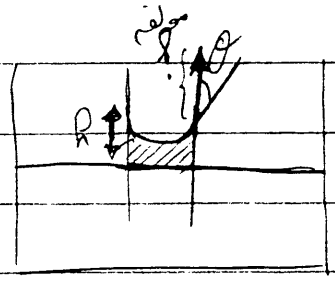
۱) نیروهای چسبندگی بین مولکولهای آب و شیشه ج) نیروهای پیوستگی بین مولکولهای

آب . در آب و تمام سیالاتی که در لوله مویین بالا می روند . نیروهای چسبندگی بین آب

و شیشه بیشتر از نیروهای پیوستگی بین مولکولهای آب است . سیال تا جایی

بالا می رود که این دو نیرو با هم برابر شوند و برعکس . سیالاتی که در لوله مویین بالا می روند

اصطلاحاً می گوییم سطح را خیس می کنند . سیالاتی که در لوله مویین تمایل دارند سطح را



خیس نمی کنند .

$$mg - \sigma(2\pi r)\cos\theta = 0 \quad \text{طول} * \text{N/m} = m$$

$$\pi r^2 h g = \sigma(2\pi r)\cos\theta$$

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$$

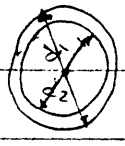
هرچه کشش سطح بیشتر شود سیال در لوله مویین بالاتر می رود .

www.Prozheha.ir

یک سیم باریک به شکل یک حلقه درآورده و روی سطح آبی با کشش سطحی (σ) قرار می‌دهیم وزن حلقه سیم برابر است با: (D = قطر حلقه)

1) $\pi D\sigma$ 2) $2\pi D\sigma$ 3) $\pi\sigma$ 4) صفر

$d_1 \sim d_2 = D$ $\quad \pi d_1\cdot\sigma + \pi d_2\sigma = \boxed{2\pi D\sigma}$



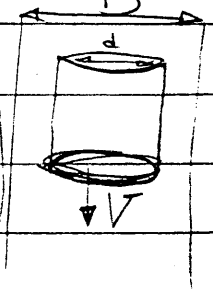
پیستونی به قطر d وارد سیلندری به قطر D می‌شود به سمت پایین حرکت می‌کند. بین سیلندر و پیستون روغنی با لزجت 0.5 قرار دارد. اگر سرعت پایین آمدن پیستون را ثابت و برابر V بگیریم V برابر است با:

1) $\frac{mg(D-d)}{\mu\pi dl}$ 2) $\frac{mg(D-d)}{\mu\pi DL}$ 3) $\frac{mg(D-d)}{2\mu\pi Dl}$ 4) $\frac{mgd}{2\pi\mu DL}$

$\sum F = 0 \rightarrow mg = \tau(\pi dL)$

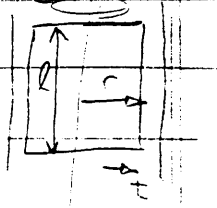
$mg = \mu\frac{V}{\left(\frac{D-d}{2}\right)}(\pi dl)$

$V = \frac{mg(D-d)}{2\pi\mu dl}$



★ بیرم: مطابق شکل یک پیستون در داخل یک سیلندر با سرعت دورانی ω می‌چرخد. شعاع پیستون r و طول آن l می‌باشد. ضخامت روغن بین t و لزجت آن μ می‌باشد. اگر شعاع پیستون را نصف کنیم تا گشتاور مورد نیاز برای دوران پیستون با همان سرعت دورانی ω چند برابر حالت اول خواهد بود؟ فرض کنید توزیع سرعت روغن تغییری نمی‌کند. (T)

1) ω 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{8}$ 5) $\frac{1}{16}$



$T = F\times r$

$T = \tau\times(2\pi rl)r$

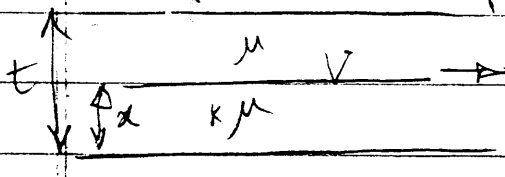
$T = \mu\times\frac{v}{t}(2\pi r^2 L) = \mu\times\frac{r\omega}{t}(2\pi r^2 L)$

$T\propto r^3$

www.Prozheha.ir

مثال: بین دو صفحهٔ موازی صفحه‌ی افقی بالایی با سرعت V و صفحه‌ی پایینی ساکن است. بین صفحات هم سیالی با ویسکوزیته‌ی μ و $K\mu$ پر شده و فاصله‌ی بین صفحات t می‌باشد. اگر بخواهیم صفحه‌ی میانی را با سرعت ثابت V بکشیم فاصله‌ی صفحه‌ی میانی با صفحه‌ی پایینی چقدر باشد تا مقدار نیروی مورد نیاز برای کشیدن حداقل شود؟

1) $\frac{t\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}}$ 2) $\frac{t(1+\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$ 3) $\frac{t(\sqrt{K}-1)}{\sqrt{K}}$ 4) $\frac{t\sqrt{K}}{(\sqrt{K}-1)}$



$F=(A\times\mu\times V/t-x)+(A\times K\mu V/x)$

$F=A\mu V\left(\frac{1}{t-x}+\frac{K}{x}\right)$

برای حداقل کردن F داریم: $\frac{\partial F}{\partial x}=0 \Rightarrow -\frac{K}{x^2}+\frac{1}{(t-x)^2}=0 \Rightarrow \frac{K}{x^2}=\frac{1}{(t-x)^2}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{K}}{x}=\frac{1}{t-x} \Rightarrow x(\sqrt{K}+1)=\sqrt{K}t$

$$x=\frac{\sqrt{K}t}{\sqrt{K}+1}$$

فشار: اگر نیروی F بر سطح A وارد شود. $P=F/A$

$\frac{F_y}{A}=P$ و $\frac{F_x}{A}=\tau$

$1atm=1.013\times10^5 Pa$

$1bar=10^5 Pa$ $1atm=1.01bar$

$1atm=14.7 PSi$, $1bar=14.5 PSi$

$1atm=760 cmHg=760 mmHg=29.92 inHg$

$1atm=10.33 mH_2O$

فشارسنجی و فشار مطلق:

فشارسنج: وسیله‌ای برای اندازه‌گیری فشار.

فشار مطلق: فشار نسبت به خلاء مطلق.

A

فشارسنج

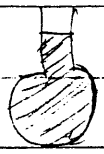
خلاء مطلق

www.Prozheha.ir

$$P_{abs} = P_{gauge} + P_{atm}$$

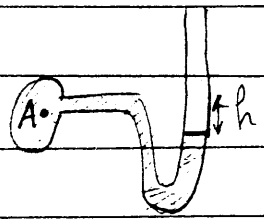
* فشار مطلق همواره مثبت است.

وسایل اندازه‌گیری فشار: ساده‌ترین وسیله اندازه‌گیری فشار پیزومتر



$P_A = \rho g h$

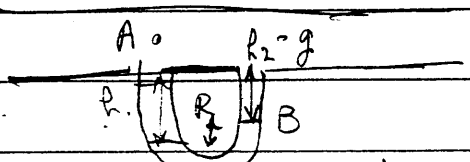
پیزومتر برای فشارهای خیلی زیاد کاربردی ندارد زیرا ارتفاع ستون را اندازه نمی‌گیرد.



$P_A = -\rho g h$

برای این حالت دو سیال مختلف می‌توانیم استفاده کنیم، همچنین برای فشارهای مثبت خیلی زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مانومتر هم برای اندازه‌گیری اختلاف فشار و هم فشار در یک نقطه کاربرد دارد.



* فرض کنید که می‌خواهیم اختلاف فشار بین دو نقطه A و B را بدست آوریم:
سیال مورد نظر ما چیره دارد (با دانسیته ρ)

برسمت پایین می‌رویم با علامت مثبت و برمی‌گردیم با علامت منفی.

$$P_A + \rho g h_1 - \rho' g R - \rho g h_2 = P_g$$

$$P_A - P_B = \rho' g R - \rho g (h_1 - h_2) = \rho' g R - \rho g (R)$$

$$P_A - P_B = \Delta P = R g (\rho' - \rho)$$

$$\boxed{\Delta P = R \Delta \gamma}$$

$$P_A = P_B + R g \Delta \rho$$

$P_A = 0\ barg + R g \Delta \rho\ barg$ نسبی

$P_A = 1\ barA + R g \Delta \rho\ barA$ مطلق

www.Prozheha.ir

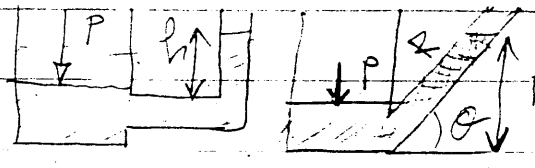
$$\Delta P = R\,\Delta\gamma$$

$$\Delta P = Rg(\rho' - \rho)$$

$$R = \frac{\Delta P}{g(\rho' - \rho)}$$

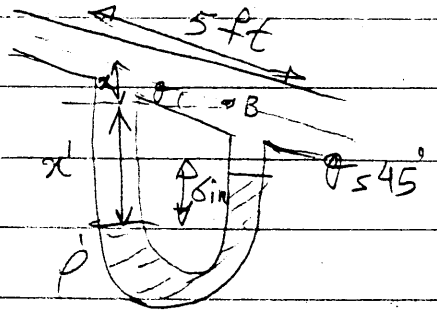
هرچه R بیشتر اندازه‌گیری دقیق‌تر و بهتر است.

دانسیته سیال مانومتری را تا حد امکان طوری انتخاب می‌کنیم که فاصله اش زیاد شود یعنی سیال کم باشد و یا مانومتر لوله باریک باشد.



$\sin\theta = h/R$ ، $R = \frac{h}{\sin\theta}$ ، $\sin\theta \ll 1$

مثال:



آب در داخل لوله‌ای مطابق شکل جریان دارد. این لوله با سطح افقی زاویه 45 می‌سازد. اگر سیال مانومتری جیوه باشد اختلاف فشار بین A و B برحسب $\frac{lbf}{ft^2}$ برابر کدام است؟

1) 128 2) 171 3) 186 4) 181

$\gamma = \rho g / g_c$

$$P_A + \gamma(x + x') - \gamma' R - \gamma h = P_B$$

$$P_A - P_B = \gamma' R - \gamma(x + x' - h) = R(\gamma' - \gamma) - \gamma x$$

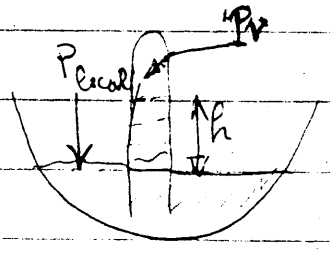
$$\Delta P = \tfrac{1}{2}\left(846\ lb/ft^3 - 62.4\ \frac{lbf}{ft^3}\right) - 62.4(3.56)$$

$\sin 45 = \frac{x}{5}$

$x = 3.53$

$$\Delta P = 171.3\ lbf/ft^2$$

بارومتر برای اندازه‌گیری فشار محلی بکار می‌رود.



$$P_v + \gamma h = P_{local}$$

www.Prozheha.ir

مثال: برای اندازه‌گیری فشار محلی لوله با بارومتر استفاده می‌کنیم سیال داخل بارومتر جیوه و $S=13.6$ ($S.G$) می‌باشد. اگر فشار بخار سیال در شرایط محیط 3 psi و فشار محیط اتمسفریک باشد ارتفاع ستون مایع در بارومتر حداکثر چقدر خواهد بود تا:

۱) ۱۱٫۷ ۲) ۲۱٫۳۸ ۳) ۲۳٫۸ ۴) ۲۹٫۸

$$P_v + \gamma h = P_{local}$$

$$3 + \gamma h = 14.7$$

$$\gamma h = 11.7 \ lbf/in^2$$

$$13.6 \times 62.4 \frac{lbf}{ft^3} \times 1\,ft^3 \times h(in) = 11.7 \frac{lbf}{in^2} \Rightarrow h = 23.8 \ inHg$$

گزینه ۳

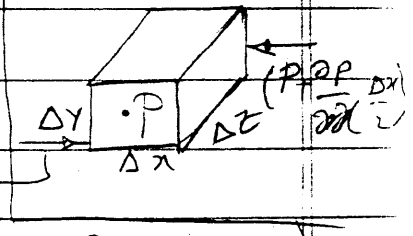
روش دوم: $\frac{11.7}{14.7} \times 29.92 \ inHg = 23.8$

تغییرات فشار سیال:

المانی با ابعاد Δx و Δy و Δz داریم فشار در مرکز المان P می‌باشد.

$$\sum F_x = m a_x$$

المانی را بسیار کوچک در نظر می‌گیریم بطوریکه تنش در آن در راستای x ثابت در نظر گرفته شود.



$$\sum F_x = m a_x \rightarrow \left(P - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z a_x$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x = \rho \Delta x a_x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$\partial P/\partial y = -\rho(g + a_y)$$

$$\left.\begin{matrix} a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{matrix}\right|$$

اگر در راستای افقی در یک سیال حرکت کنیم $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ یعنی فشار در راستای افقی ثابت است.

هر چقدر در یک سیال در سمت بالا حرکت کنیم فشار کم شده و هر چقدر پایین برویم فشار زیاد می‌شود.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g$$

www.Prozheha.ir

سیال تراکم ناپذیر: $\int_{P_0}^{P} dP = \int_{y_0}^{y} -\rho g\, dy \quad P - P_0 = -\rho g (y - y_0)$

در تراکم ناپذیر کاهش فشار بصورت خطی است.

در تراکم پذیر کاهش فشار بصورت اکپونانسیلی است.

سیال تراکم پذیر: $dP = -\frac{PM}{RT} g\, dy$

$$\int_{P_0}^{P} dP/P = \int_{y_0}^{y} -\frac{Mg}{RT} dy$$

$$\ln P/P_0 = -\frac{Mg}{R} \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{T}$$

① اگر T را ثابت فرض کنیم:

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{RT}(y - y_0)$$

(۱) اگر در سطح زمین: $P_0 = P_0$, $y_0 = 0$

با افزایش y فشار بصورت اکسپ

$$P = P_0 e^{-Mgy/RT}$$ فقط *

(۲) فرض کنیم تغییرات دما با ارتفاع وجود داشته باشد.

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{R} \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{T_0 - \beta y}$$

کاهش دما ←

$$\ln \frac{P}{P_0} = \frac{Mg}{R\beta} \ln \frac{T_0 - \beta y}{T_0 - \beta y_0} \Rightarrow \boxed{\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T_0 - \beta y}{T_0 - \beta y_0}\right)^{\frac{Mg}{R\beta}}}$$

مثال: در سطح زمین دما 25° و فشار 1 atm باشد با فرض اعتبار از تراکم فشار در ارتفاع ۵۰۰ متری از سطح زمین مرحب کیلوپاسکال را مشخص کنید:

1) 80 2) 85 3) 90 4) 95

$$P = P_0 e^{-\frac{29\,kg/kmol \times 9.8\,m/s^2 \times 500\,m}{8314\,J/kmol\,K \times 298.15\,K}}$$

$$P = 0.94 P_0 \quad (P = 95\,kPa)$$

www.Prozheha.ir

مثال: در سطح زمین فشار اتمسفریک برابر است با $1.18 \frac{kg}{m^3}$ در ارتفاع 500 متری از سطح زمین فشار برابر است با

1) 80 2) 85 3) 90 4) 95

فرض استفاده از قانون گازهای کامل

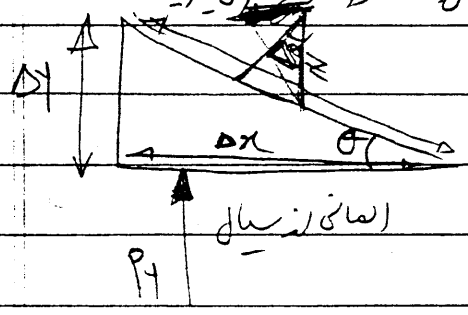
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0} \qquad \rho_0 = \frac{P_0 M}{RT_0} \qquad \rho = \frac{P_0 M}{RT_0}$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\int_{y_0}^{y} \rho g \, dy \qquad dP = -\rho_0 P / P_0 g \, dy$$

$$\ln P/P_0 = -\rho_0 g (y - y_0) \Rightarrow P = P_0 e^{-\rho_0 g y / P_0}$$

اصل پاسکال:

سیال ساکنی را در نظر می‌گیریم. ($\tau = 0$ تنشی برشی صفر است) بنابراین تنها نیروهای فشاری که عمود بر المان و اصابه نظر می‌گیریم سیال وارد می‌شود.



$$\sum F_x = 0 \qquad \Delta y / \Delta z$$

$$P_x * \Delta y * 1 - P_z \Delta z * 1 \sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 : P_y \Delta x * 1 - P_z \Delta z * 1 \times \cos\theta - \rho \times \tfrac{1}{2} \Delta y \Delta x * 1 g = 0 \qquad \Delta x / \Delta z$$

از اولی: $\rightarrow P_x = P_z$

از دومی: $P_y = P_z + \frac{1}{2} \rho g \Delta y$

اگر ابعاد المان را به سمت صفر میل دهیم بنابراین

$\Delta y \to 0$ ، $\Delta x \to 0$ ، $\Delta z \to 0$

$$P_x = P_y = P_z$$

* در یک سیال ساکن فشار در تمامی جهات یکسان است.

اما اگر سیال ساکن نباشد فشار در تمام راستاها با هم برابر نخواهد بود و $P = \frac{P_x + P_y + P_z}{3}$

دو نکته از نیروهای وارد بر سطوح شناور:

نیروهای وارد بر سطوح غوطه‌ور:

1) صفحه عمودی با سطح آزاد مایع باشد.
2) نیروهای وارد بر سطوح آزاد اختیاری باشد.
3) صفحه با سطح آزاد زاویه θ بسازد.
4) صفحه عمود بر سطح آزاد مایع باشد.

www.Prozheha.ir

$$P = \frac{\rho g h}{\eta} \quad \text{توان کل پمپ}$$

$$\frac{\rho \times 9.8 \times 50 \times 15 \times 10^{-3}}{0.85} = 2000$$

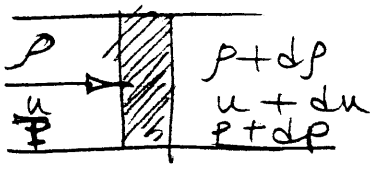
$$\rho = 809\ kg/m^3$$

$$S = \rho / \rho_{H_2O} =$$

$$\frac{P_s - P_v}{\rho g} - 6 - 2 - 5 > 0$$

$$\frac{P_s - P_v}{\rho g} \geq 13$$

جریان سیال را کم‌پذیر:



① قانون بقای جرم: $\rho u A = (\rho + d\rho)(u + du) A$

$$\rho u = \rho u + u\,d\rho + \rho\,du + d\rho\,du$$

$$u\,d\rho + \rho\,du = 0 \quad (*)$$

قانون بقای مومنتوم:

$$P \cdot A - (P + dP) A = \rho u A (u + du - u) \quad (*)$$

$$-dP = \rho u\,du \quad (II)$$

I, II:

$$u\,d\rho + \rho\left(\frac{-dP}{\rho u}\right) = 0$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$ سرعت صوت

$$K = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$ ضریب تراکم‌پذیری همدما

$$K = \frac{-dP}{\frac{dV}{V}}$$ ضریب تراکم‌پذیری

هرچه قدر مدول الک بزرگ باشد یعنی کم‌تر بتوان حجم سیال را تراکم‌پذیر کرد.

www.Prozheha.ir

$$\frac{dV}{V} = \frac{d(\frac{1}{\rho})}{\frac{1}{\rho}} = \frac{-\frac{1}{\rho^2}d\rho}{\frac{1}{\rho}}$$

$$dV/V = -d\rho/\rho \qquad K = +\frac{dp}{d\rho/\rho} \Rightarrow \frac{K}{\rho} = \frac{dp}{d\rho}$$

$$C = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$ سرعت صوت — مدول بالک

(سیال تراکم ناپذیر ← K زیاد)

موج صوتی از داخل لوله عبور می‌کند. این فرآیند تقریباً آدیاباتیک و برگشت‌پذیر است.

(سرعت زیاد دیواره و ... / زمان کافی برای مبادله حرارت با محیط خود تأثیری نمی‌گذارد)

$$p\forall^{\gamma} = cte \qquad p\rho^{-\gamma} = cte$$

$$\rho^{-\gamma}dp - \gamma\rho^{-\gamma-1}p\,d\rho = 0$$

$$dp - \frac{\gamma p}{\rho}d\rho = 0 \rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}$$

$$C = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

برای گاز ایده‌آل

$$C = \sqrt{\frac{\gamma p}{\frac{pM}{RT}}}$$

$$C = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

سرعت صوت در گاز ایده‌آل

$$Ma = V/C$$ سرعت سیال

هرچه عدد کوچک‌تر شود سیال به حالت تراکم ناپذیر نزدیک‌تر می‌شود.

$Ma = 0.3$ { $Ma > 0.3$ تراکم‌پذیر ; $Ma < 0.3$ تراکم ناپذیر }

$Ma > 1$: supersonic ماورای صوت

$Ma < 1$: subsonic مادون صوت

① $udu + \frac{dp}{\rho} = 0$ (رابطه اویلر برای جریان تک‌بعدی تراکم‌پذیر)

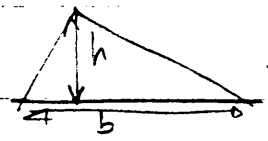
② $\rho uA = cte$

$$\rho u\,dA + \rho A\,du + uA\,d\rho = 0$$

تقسیم بر ρuA

$$\frac{dA}{A} + du/u + d\rho/\rho = 0$$

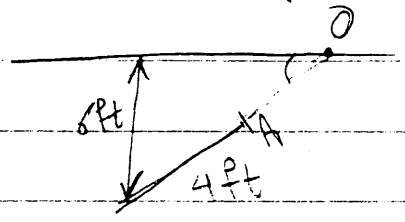
www.Prozheha.ir



$I_{xx} = b h^3/36$ برای تمام انگلال $x_p = 0$ به دلیل تقارن

مثال: صفحه‌ای به ابعاد 3×4 ft طوری در داخل آب قرار گرفته است که ضلع 3 فوتی آن با سطح آزاد مایع موازی مانده و فاصله‌اش از سطح آزاد مایع 6 ft است. اگر وزن مخصوص مایع γ باشد، نیروی وارد بر این صفحه برابر است با:

1) 36γ 2) 48γ 3) 56γ 4) 60γ



$\frac{1}{2} = \frac{6}{OB}$

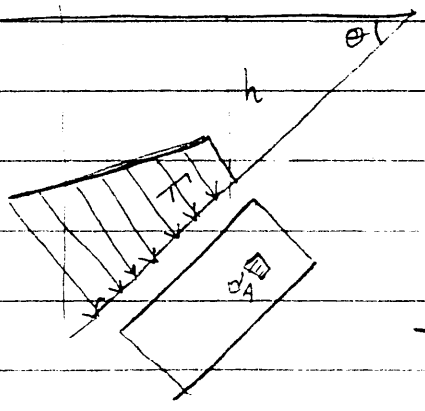
$OB = 12$ ft

$OA = 8$ ft

$\Rightarrow OC = 10\text{ft} \Rightarrow h_c = 5\text{ft}$ $\quad F = \gamma h_c A$

$F = \gamma(5)(3)(4) = 60\gamma$

$$y_p = -\frac{\frac{1}{12}(3)(4)^3 \times \frac{1}{2}}{5\times(3\times4)} = \frac{-16}{120} = \frac{-4}{30} = \frac{-1}{7} = -0.16 \text{ ft}$$



$df = \gamma h\, dA$

$df = \gamma\, dV$

$df = \gamma\, dV \rightarrow f = \gamma V$

$F \times \bar{X} = \int X \times \gamma\, dv$

محل اثر نیروی برآیند معادل مرکز حجم منشور.

اولاً اگر منشوری داریم که قاعده‌اش همان صفحه و ارتفاع منشور در هر نقطه معادل ارتفاع المان متناظر از سطح آزاد مایع باشد به این صورت می‌توان گفت وزن سیالی هم‌حجم منشور مساوی است با نیروی که بر صفحه وارد می‌شود. پس محل اثر نیروی برآیند برابر است با مرکز حجم منشور.

$\bar{X} = \frac{1}{V}\int x\, dv$

$\bar{Y} = \frac{1}{V}\int y\, dv$

منشور فوق را برای اندازه‌گیری محل اثر نیروی برآیند

www.Prozheha.ir

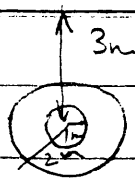
نیروی وارد بر سطح غوطه ور

$\theta = 90$

حالت سوم دقیقاً همان حالت دوم است ولی θ برابر ۹۰ شده بنابراین مطالب گفته شده حالت دوم در اینجا برقرار است.

سوم: یک دیسک مطابق شکل در داخل آن قرار دارد نیروی وارد بر یک طرف دیسک و محل اثر نیروی برآیند را محاسبه کنید

$F = \gamma h_c A$



$F = \gamma h_c A$

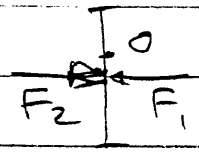
$= \gamma(3) \times [\pi(2)^2 - \pi(1)^2]$

$F = 3\gamma[3\pi] = 9\gamma\pi$

محل اثر نیرو:

$F_1 = 12\pi\gamma$ نیروی وارد بر دایره بزرگ

$F_2 = 3\pi\gamma$ نیروی وارده بر دایره کوچک



فرض می‌کنیم صفحه سالم است ولی F_2 در جهت مخالف F_1 وارد می‌گردد و یکی اینکه

$F_1 X_1 - F_2 X_2 = (F_1 - F_2)\bar{X}$

$X_1 = \frac{-\pi(2^4)/4 \times 1}{3 \times \pi(2)^2} = -1/3$

$X_2 = \frac{-\pi(1)^4}{3\pi(1)^2} = -1/12$

$9\pi\gamma - \pi\gamma/4 = 9\pi\gamma\bar{x}$

$\bar{x} = 15/4 \times 9 = 5/12$

راه دوم:

$y_p = -\frac{\pi(R^4 - r^4)/4}{3 \times \pi(R^2 - r^2)}$ یک دیسک

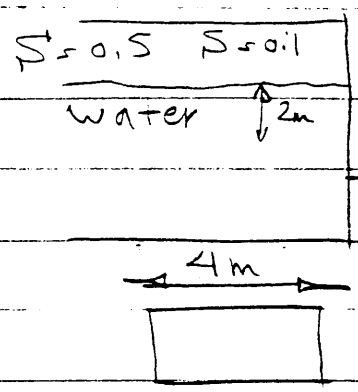
$y_p = -RR^4/h_c\pi(R^2 - r^2)$

$\bar{I}$ دایره $\times x \times \bar{I}$ دایره

کوچک بزرگ

یعنی

www.Prozheha.ir



اگر عمق دریچه ای ۹ متر باشد.
ابتدا محل اثر نیروی وارد بر آن را
نسبت به نقطه A بدست آورید.

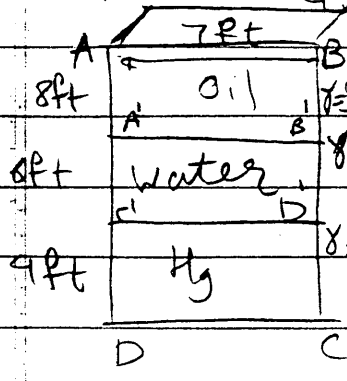
$$F = [(\gamma_{oil} \times 2) + (\gamma_{oil} \times 3)] \times (4 \times 2) = 320\ kN$$

از

$$P = \rho_{oil} g h_{oil} = \rho_{H_2O} g h_{H_2O}$$

$$0.5 \times 2 = 1 \times h_w \rightarrow \boxed{h_w = 1}$$

$$X_p = -\frac{\frac{1}{2}(4)(2)^3}{4 \times (4 \times 2)} = -0.048 = 4.8\ cm$$



$\gamma = 56\ lbf/ft^3$

$\gamma = 62.4\ lbf/ft^3$

$\gamma = 846\ lbf$

سیال داریم
در خواسته نیرو وارد بر سطح ABCD
را پیدا کنیم.

$$F_{ABA'B'} = (4 * \gamma_{oil})(8 \times 7)$$

$$F_{A'B'C'D'} = (8\gamma_{oil} + 3\gamma_w)(6 \times 7)$$

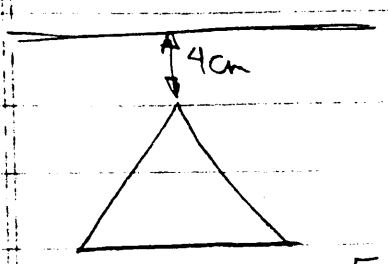
$$F_{C'D'CD} = (8\gamma_{oil} + 6\gamma_w + 2\gamma_{Hg})(7 * 4.)$$

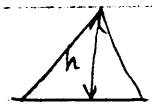
$$F_R = F_{ABA'B'} + F_{C'D'CD} = 1088001bf$$

یک صفحه دایره ای با قطر ۱۰۰cm در داخل آب قرار دارد
نیروی وارد بر یک سمت صفحه را محاسبه کنید.

۱۶۸ ۴۶۸ ۴۶۴۲۱۰ ۴۶۴۲۵

www.Prozheha.ir

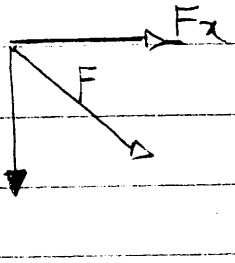




$$h = \sqrt{50^2 - \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2} = 43.8\,cm$$

$$F = P_c \times A = \gamma\left[4 + \tfrac{2}{3}h\right] \times \left(\tfrac{1}{2} \times 0.5 \times 0.438\right)$$

حالت چهارم: نیروی وارد بر سطح اختیاری:



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

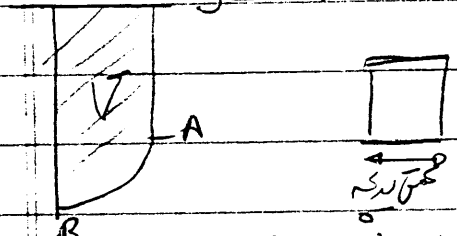
اگر بخواهیم نیروی افقی F_x را حساب کنیم کافیست نیروی وارد بر تصویر قائم سطح را بدست آوریم.

سپس آن را محاسبه کنیم.

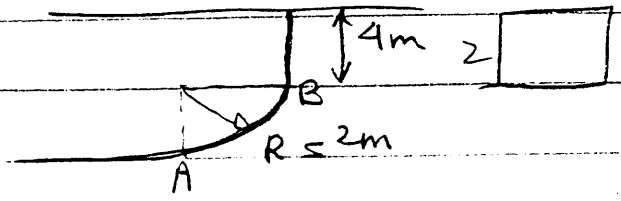
نیروی عمودی F_y: برابر است با وزن سیال روی سطح اختیاری در تا سطح آزاد مایع

$$F_y = \gamma V \qquad F_x = \gamma h A$$

تر



مثال: نیروی عمودی، نیروی افقی و نیروی کل وارد بر سد زیر را که بر سطح اختیاری AB وارد می شود را محاسبه نمایید. عمق سد 2m است.



$$F_x = \gamma h_c A = \gamma(5 \times 4) = 20\gamma$$

$$F_y = \gamma V = \gamma\left(2 \times 4 + \frac{\pi 2^2}{4}\right) = 22.28\gamma$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 29.2\gamma$$

ف/ص

www.Prozheha.ir

$F_{y_1} = 16\gamma$

$F_{y_2} = 2\pi\gamma$

$(F_{y_1} * 1m) + F_{y_2} * (4\times 2/3\pi) = (16\gamma + 1) + (2\pi\gamma \times \frac{8}{3\pi})$

$= (22.28\gamma)\bar{x}$

$\bar{x} = \frac{16\gamma + 16/3}{22.28\gamma} = 0.96m$

مثال: جسم مطابق شکل با وزن مخصوص γ در داخل سیالی قرار دارد. نیروی وارد بر کف استوانه را بیابید.

$F_y = \gamma V = \gamma\left[(5\times 2\times 4) - \frac{1}{2}(\pi\times 1^2\times 4)\right]$

عمق استوانه $= 4$

برآیند نیروی وارد استوانه بر راستای افقی صفر است.

نیروی عمودی وارد بر تیکه را بدست آورید.

$F_{y_{AB}} = \gamma\left[(\pi\times 1^2)\times 6 - \frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\pi r^3\right]$

$F_{y_{BC}} = \gamma\left[(\pi\times 1^2)\times\frac{6}{2} + (\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\pi r^3)\right]$

$F = \gamma\left[\frac{2}{3}\pi r^3\right]$

نیروی برآیندی شناور: غوطه ور: کاملاً در داخل سیال

شناور: بخشی در سیال قسمتی از جسم در هوا

$df_1 = \gamma h_1 dA$

$df_2 = \gamma h_2 dA$

$df_2 - df_1 = \gamma(h_2 - h_1)dA$

$= \gamma h dA$

df_2 بیشتر از df_1 یعنی برآیند نیروهای جسم رو به بالاست و برآیند آنها هم‌جهت با شتاب سیال است.

$df_2 - df_1 = df_B - \gamma h dA = 0 \longrightarrow F_B = \gamma V_{\text{سیال}}$

www.Prozheha.ir

14 8/20

اگر جسمی در سیال غوطه ور شود از طرف سیال بر جسم نیروی وارد می شود که معادله آن برابر است با وزن سیال هم حجم جسم. این نیرو همواره رو به بالاست و راستای آن از مرکز جسم می گذرد.

$\bar{x}_B F_B = \int x\,dF$, $\bar{x}_B = \frac{1}{\gamma V}\int x\gamma\,dV$

$\bar{x}_B \times \gamma \times V = \int x\gamma\,dV$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{V}\int x\,dV$$

یعنی راستای نیروی برآیندی از مرکز جسم می گذرد یا مرکز محل اثر نیروی برآیندی است.

وزن ظاهری W' = وزن واقعی W − F_B

* مثال: وزن جسمی در هوا 1.5N و در سیالی برابر 1.2N می باشد. چگالی سیال مزبور چند gr/cm^3 برابر است با یک، چگالی جسم مزبور چند gr/cm^3 برابر است با:

5(4 3(3 2(2 1.25(1

وزن واقعی = 1.5N $\quad 0.3 = \gamma_{سیال} V$

وزن ظاهری = 1.2N $\quad 0.3 = 10000V$

$W' = W - F_B$ $\quad F_B = \gamma V_{سیال}$ $\quad V = 3\times10^{-5} m^3 = 30cm^3$

$1.2 = 1.5 - F_B$ $\quad W_{واقعی} = 0.15 = 150gr$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{150}{30} = 5\,gr/cm^3$$

وزن یک جسم در داخل آب 1.5 و در روغنی با چگالی $750\,kg/m^3$ برابر 2N می باشد. چگالی جسم مزبور چند gr/cm^3 برابر است با:

5(4 3(3 2(2 1.75(1

$W_1' = W - F_{B_1}$

$W_2' = W_1' - W_2' = F_{B_2} - F_{B_1}$

$= V\times\gamma_2 - V\times\gamma_1$

$$V = \frac{W_1' - W_2'}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{2-1.5}{2500} = 2\times10^{-4}\,m^3$$

$$V = \frac{2-1.5}{10000-7500} = 0.2\times10^{-3}\,m^3$$

www.Prozheha.ir

$$W_1' = W - \gamma_1\left(\frac{W_1' - W_2'}{\gamma_2 - \gamma_1}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{W = \frac{\gamma_2 W_1' - \gamma_1 W_2'}{\gamma_2 - \gamma_1}}$$

$$\boxed{W = \frac{\gamma_2 W_1' - \gamma_1 W_2'}{\gamma_2 - \gamma_1}}$$

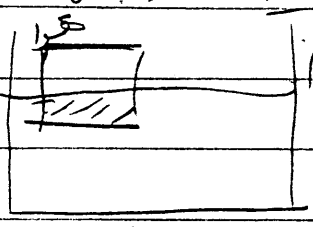
$$W = \frac{(10000 \times 2) - (7500 \times 15)}{10000 - 7500} = 3.5$$

$$W = 3.5 = mg \rightarrow m = 0.35\,Kg = \boxed{350\,gr}$$

$$\rho = \frac{350}{200} = 1.75$$

نیروی شناوری: طبق قانون ارشمیدس اگر جسمی در سیالی شناور شود وزن سیال جابجا شده برابر است با وزن جسم

$$W = \gamma \times V_{\text{سیال}}$$



مثال: قطعه چوبی به ابعاد $4 \times 4 \times 1\,ft$ با کمک نیروی $400\,lbf$ به طور آرام شناور شده است حجم قطعه چوب داخل آب را برابر است با $(S = 0.5)$ چوب

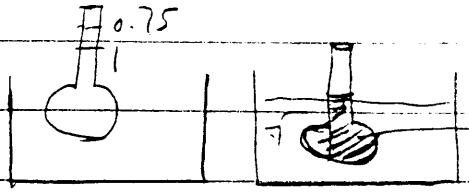
$$400\,lbf + 16 \times 0.5 \times 62.4\,(lbf/ft^3) = \gamma_2$$

وزن — حجم مکعب

$$\boxed{V = 14.41\,ft^3}$$

توجه: در سیستم انگلیسی لا و م برابرند.

هیدرومتر: وسیله ای است که برای اندازه گیری دانسیته سیال کاربرد دارد و براساس اصول شناوری عمل می کند.

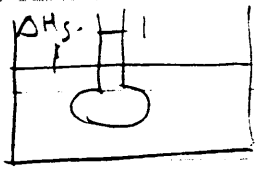


$W_{\text{وزن هیدرومتر}} = \gamma_{\text{سیال}} V_{\text{جابجا شده}}$

$W_{\text{هیدرومتر}} = \gamma_w V_{\text{آب}}$

www.Prozheha.ir

۱۵۷ ۸/۲۰



$W = (V_0 - a\Delta H)\gamma_{\text{سیال}}$

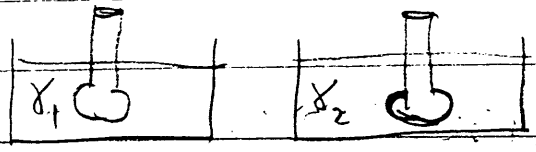
سطح تقطیع هیدرومتر

$S' = \frac{\gamma_{\text{سیال}}}{\gamma_w} \longrightarrow V_0\gamma_w = (V_0 - a\Delta H)\, s\gamma_w$

$V_0(1-S) = -a\Delta Hs$

$\Delta Hs = V_0/a\,(s - 1/s)$

توجه: اگر $\gamma_2 > \gamma_1$ هیدرومتر در کدام بیشتر فرو می‌رود

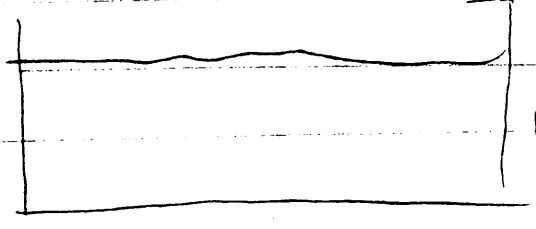


مثال: یک هیدرومتر را یکبار در الکل با $s=0.8$ و یکبار در روغنی با $s=0.9$ آزمایش می‌کنیم قطر هیدرومتر $0.1''$ است و اختلاف ارتفاع دو سیال $1''$ است. وزن واحد حجم هیدرومتر را محاسبه کنید

$\Delta H_1 = V_0/a\,(\frac{s_0 - 1}{s_1})$

$\Delta H_2 = V_0/a\,(s_2 - 1$

تعادل: تعادل یا خنثی است یا پایدار است یا ناپایدار:



تعادل پایدار: اگر جسم را از حالت اولیه منحرف کنیم جسم به حالت اولیه برمی‌گردد. (مرکز ثقل جسم از مرکز حجم جسم پایین‌تر باشد).

www.Prozheha.ir

تعادل ناپایدار : اگر جسم از حالت اولیه کمی منحرف کنیم جسم به حالت اول برنمی گردد.

در این حالت مرکز جرم از مرکز حجم بالاتر است.

تعادل خنثی تعادلی است اگر تغییر در موقعیت جسم ایجاد کنیم هیچ تغییری در این حالت

در شرایط جسم چه مرکز جرم، حجم ← ایجاد نمی شود. مرکز جرم بر مرکز حجم جسم منطبق است

حرکت سیال :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho(a_y + g)$$

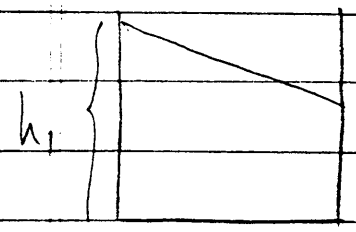
$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \qquad \rho > 0 \;,\; a_x > 0$$

$$\partial P/\partial x < 0 \;;\; P_2 - P_1 / X_2 - X_1 < 0$$

$$\frac{P_2 - P_1}{L} < 0$$

$$P_2 - P_1 < 0 \rightarrow P_2 < P_1 \rightarrow \boxed{h_2 < h_1}$$

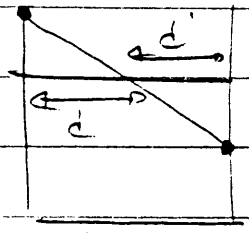
حالت دوم :



$$P = P(x,y)$$

$$dP = (\partial P/\partial x)\,dx + (\partial P/\partial y)\,dy$$

$$dP = -\rho a_x dy - \rho(a_y + g) - \rho(a_y + g)dy$$



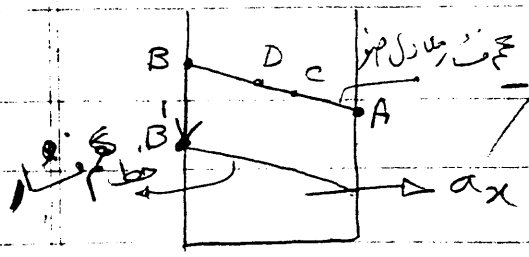
$$dP = -\rho a_x dx - \rho(a_y + g)dy$$

$$P = -\rho a_x X - \rho(a_y + g) + C$$

$$\int_0^P dP = -\int_{X_A}^{X_c} \rho a_x dx + -\int \rho(a_y + g)\,dy$$

www.Prozheha.ir

16. 8/20

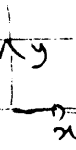


$-\rho a_x dx - \rho(a_y+g)dy = 0$

$\frac{dy}{dx} = -a_x/(a_y+g)$

ایزوبار خط متعادل فشار

✓ حجم مکعبی $1\times1\times1$ m³ از آب است پر شده که از بالا شتاب $a_x = g/2$ شروع به حرکت می‌کند چند درصد آب از ظرف بیرون می‌ریزد؟



$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{a_y+g}$

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -1/2$

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -1/2 \rightarrow \frac{(1-l)-1}{1-0} = -1/2$

$-l/1 = -1/2 \rightarrow l = 0.5\,m$

حجم بیرون ریخته $= 1/2 \times 1/2 \times 1\times1 = 1/4\,m^3$

یک مخزن $1\times1\times1$ تا ارتفاع 0.5 متری از آب و روغنی با دانسیته $0.75\,kg/m^3$ پر شده است این ظرف با شتاب g به سمت بالا شروع به حرکت می‌کند $P_{max} = ?$

13.9 12.9 11.9 8.9

$dp = -\rho a_x dx - \rho(a_y+g)dy$

$\int_A^B dp = -\int_A^B \rho(a_y+g)dy$

a_y به سمت بالا، a_y به سمت پایین

$P_{B-0} = +\int_0^{0.5} \rho(g+g)dy + \int_{0.5}^{1} \rho(g+g)dy$

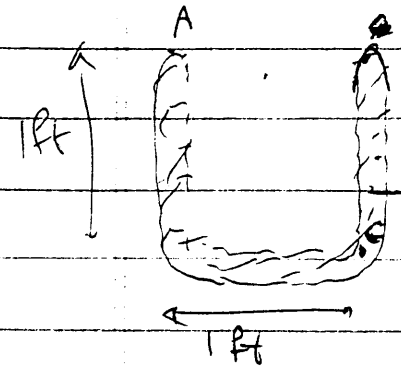
$P_B = +\rho_w(g+g)0.5 + \rho_{oil}(2g)0.5$

$P_B = 12898\,Pa = 12.89\,kPa$

یک سطح ذوزنقه‌ای شکل با سرعت a_x شروع به حرکت می‌کند تا

www.Prozheha.ir

a_x چقدر باشد تا فشار در نقطه C اتمسفریک باشد؟



$$dp = -\rho(a_y + g)\,dy - \rho a_x\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{a_y + g} = -\frac{a_x}{g}$$

$$\frac{Y_A - Y_C}{X_A - X_C} = -\frac{a_x}{g} \Rightarrow \frac{1-0}{0-1} = -\frac{a_x}{g}$$

یک مخزن مطابق شکل روی سطح شیبداری با شتاب a_x حرکت می‌کند. زاویه‌ای که سطح آزاد مایع با سطح افق می‌سازد برابر است با

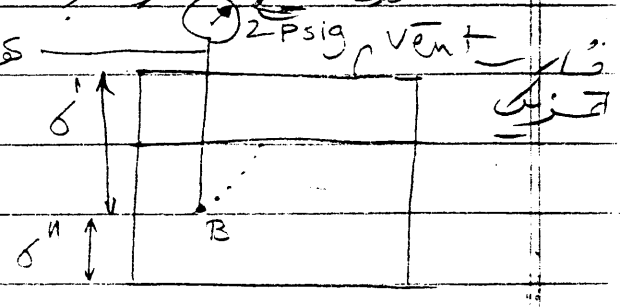
60 — 30 — 3c — با سطح افق موازی است

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{a_y + g} = -\frac{9.8\sin 30}{9.8\cos 30 + g} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \text{--}$$

$$\theta = \text{Arctg}(dy/dx)$$

$$\theta = -30$$

مثال: مخزن مطابق شکل هوای فشرده بادی خیلی کمی وارد مخزن می‌شود. اگر دانسیته مایع $50\ lb/ft^3$ و دانسیته هوا $1\ lb/ft^3$ فرض باشد به این صورت مطابق مخزن برحسب ft را بدست آورید.

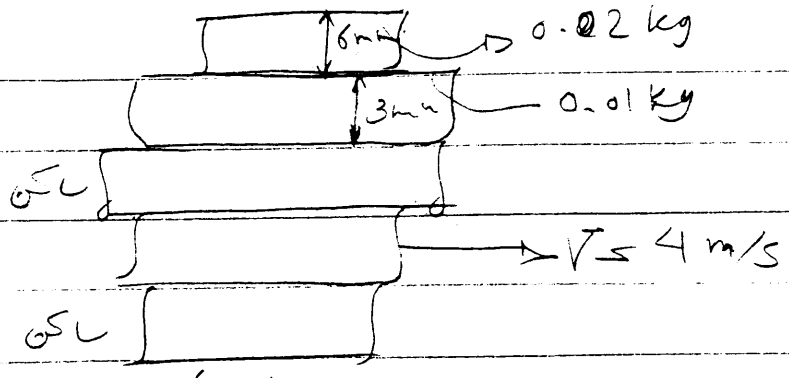


$$P_A = P_B = 2\ Psig$$

$$\Rightarrow \frac{2\ lbf}{in^2} \times \frac{12^2\ in^2}{1\ ft^2} = \frac{50\ lbf}{ft^3} \times h(ft)$$

$$\Rightarrow h = \frac{288}{50} = 4.8\ ft$$

www.Prozheha.ir



مثال: سه لوله مطابق شکل در داخل حجم ترکیب در سه قواصل بین لوله ها از سیال پر شده است. در یک لحظه لوله بالا با سرعت $4\ m/s$ حرکت می‌کند با فرض اینکه توزیع سرعت خطی باشد تنش برشی وارده به لوله‌های ساکن با تقریب خوب و بزرگ ترتیب مقادیر است با: (بر حسب Pa)

1) 0.67 و 13.34 — 13.34 و 13.34/4

2) 0.67 و 0.67

3) 0.67, 13.34

$$\tau_1 = \mu \frac{\Delta V}{\Delta r} \Rightarrow \tau_1 = 0.01 \times \frac{4}{0.003} = \frac{40}{3} = \boxed{13.34\ Pa}$$

$$\tau_2 = \mu \frac{\Delta V}{\Delta r} \Rightarrow \tau_2 = 0.02 \frac{4}{0.006} = \frac{40}{3} = \boxed{13.34\ Pa}$$

مثال: در داخل راکتوری به ارتفاع 10m دانسیته مخلوط با رابطه

$$\rho = 1000\left[1 + 50/y + \left(\frac{100}{y}\right)^2\right]$$

داده می‌شود اگر $g = 10\ m/s^2$ فرض شود اختلاف فشار دو سر راکتور بر حسب (KPa) برابر است با:

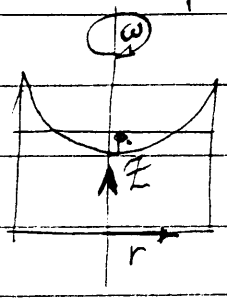
1) $\frac{43.1}{3}$ 2) $\frac{33.1}{3}$ 3) $\frac{331}{3}$ 4) $\frac{431}{3}$

$$dP = \rho g\, dy$$

$$\Rightarrow dp = \int_0^{10} \left[1 + \frac{50}{y} + \frac{10^4}{y^2}\right] dy \Rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{33.1}{3}\ kPa}$$

www.Prozheha.ir

حرکت دورانی : $dp = -\rho a_x dx - \rho(a_y + g)dy$



$x \sim r$

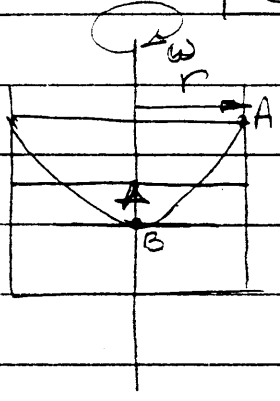
$y \sim Z$

$a_x = -r\omega^2$

$$\Rightarrow \boxed{dp = \rho r\omega^2 dr - \rho g dZ} \quad (*)$$

$$dp = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dZ}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}}$$

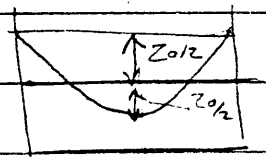
حالت اول :



$$e = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left[r_A^2 - r_B^2\right] - \rho g(Z_A - Z_B)$$

$$Z_A = \frac{r_A^2\omega^2}{2g} \qquad \boxed{Z_0 = \frac{R^2\omega^2}{2g}}$$

حالت دوم : به شرطی که هیچگونه مایعی بیرون نریزد . Z را مقدار ماکزیمم می‌گیریم

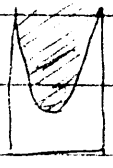


$$\boxed{\text{حجم سهمی} = \frac{1}{2}\pi R^2 Z_0}$$

مثال : استوانه‌ای به شعاع 2m و ارتفاع 5m پر از آب می‌شود. به یک‌باره با سرعت زاویه‌ای 5 rad/s حول محور عمودی خود شروع به دوران می‌کند. حجم آبی که بیرون می‌ریزد برحسب متر مکعب ...

1) $7.75\,m^3$ 2) $15.7\,m^3$ 3) 12.4 4) 31.4

$$Z_0 = \frac{R^2\omega^2}{2g} = \frac{4\times 25}{20} = 5\,m$$

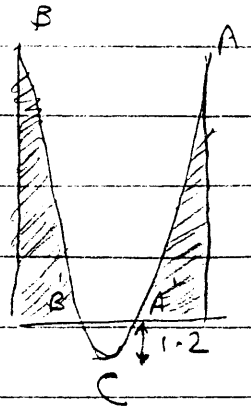


حجم مایعی که بیرون می‌ریزد $= \frac{1}{2}(4)\times 5 = 10\pi = 31.4\,m^3$

www.Prozheha.ir

مثال قبل با سرعت 6 rad/s :

$$Z_0 = \frac{R^2\omega^2}{2g} = \frac{4\times 36}{20} = 7.2\,m$$



$$Z = \frac{r^2\omega^2}{2g}$$

$$\frac{dZ}{dr} = \frac{r\omega^2}{2g}$$

حجم مایع بیرون ریخته $= V_{ACB} - V_{A'CB'}$

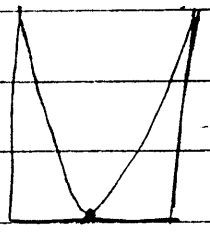
$$V_{ACB} = \frac{1}{2}\pi(2)^2(7.2)\,m$$

$$Z = 1.2 = \frac{r^2(36)}{20} \rightarrow r^2 = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = 0.81\,m$$

$$V_{A'CB'} = \frac{1}{2}\pi(0.81)^2 * 1.2$$

مثال : ظرفی استوانه ای به شعاع 2m در اختیار داریم اگر این ظرف با سرعت دورانی ω (rad/s) طوری بچرخد که فشار در مرکز کف ظرف اتمسفر یک باشد ω حداقل چند rad/s خواهد بود.

6.5 5.6 4.5 3.0



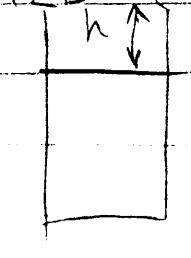
$$Z = \frac{r^2\omega^2}{2g} \quad h = \frac{R^2\omega^2}{2g}$$

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{2gh}$$

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{20\times 6} \Rightarrow \omega = 5.5\ rad/s$$

مثال : ظرفی استوانه ای به شعاع 2m و ارتفاع 8m تا ارتفاع 4m از مایع پر شده است اگر یک لحظه با سرعت دورانی $5\ rad/s$ حول محور مرکزی می چرخد حجم آبی که بیرون می ریزد چند متر مکعب است.

12.34 (4 9.4 (3 6.28 (2 3.14 (1

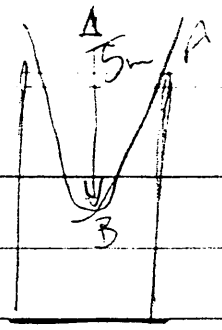


$$Z_0 = \frac{R^2\omega^2}{2g} = \frac{4\times 25}{20} = 5$$

$$\frac{Z_0}{2} = 2.5\,m$$

مایع بیرون می ریزد ← h ←

www.Prozheha.ir



$$Z_A = \frac{R^2\omega^2}{2g}$$

حجم اولیه = $\pi R^2(4) = 16\pi$

قبل از دوران

حجم سهمی $= \frac{\pi R^2 Z_0}{2} = 10\pi$

$2\pi = 6.28\,m^3$

حجم کل ظرف $= \pi R^2(6) = 24\pi$

حجم خالی $= \frac{\pi R^2 Z_0}{2} = 10\pi$ — حجم خالی $= 14\pi$ — بعد از دوران

مثال: یک ظرف استوانه‌ای از سیالی با رانیته $1200\ kg/m^3$ پر شده است. ظرف با سرعت دورانی $200\ rpm$ حول محور مرکزی تحت حرکت است. در نقطه A که $1\ m$ از محور دوران فاصله دارد $70\ kPa$ می‌باشد فشار سیال در نقطه B که $2\ m$ بالای نقطه A و 1.5 متر از محور مرکزی فاصله دارد برحسب kPa برابر است با:

1) 475 2) 175 3) 375 4) 275

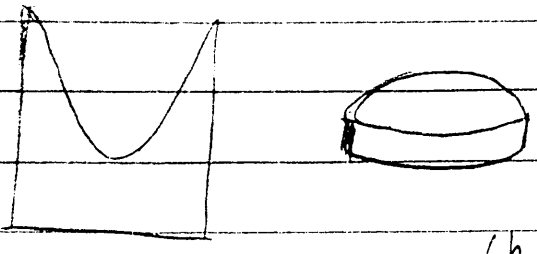
ω باید برحسب rad باشد

$$\int_A^B dP = \int_A^B \rho r\omega^2 dr - \int_A^B \rho g\, dZ$$

$$P_B - 70000 = 1200 \times \frac{\left[\frac{2\pi \times 200}{60}\right]^2}{2}\left[1.5^2 - 1^2\right] - 1200 \times 10 \times$$

$$P_B = 375000\ Pa = 375\ kPa$$

مثال: نیرو وارد بر صفحه ذوزنقه‌ای شکل انتهای ظرف استوانه‌ای



$$F_s = \int p\, dA$$

$$F_s = \int p(2\pi r)\, dr$$

$$= (2\pi R)\int_0^h p\, dz$$

www.Prozheha.ir

8/27

$$\int_A^B dP = \int_A^B \rho k\omega^2 dr - \int_A^B \rho g dZ$$

$$\Rightarrow P_E - 0 = \rho g Z$$

$$\Rightarrow F = (2\pi R)\int_0^h p\,dZ = 2\pi R \int_0^h (\rho g Z)\,dZ$$

حرکت سیال :

جریان آرام : جریانی است که در آن لایه‌های سیال به آرامی روی هم می‌لغزند و مسیر حرکت ذرات قابل پیش‌بینی می‌باشد. در جریان آرام انتقال مومنتم مولکولی توسط ذرات سیال صورت می‌گیرد. در جریان آرام رابطه $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ برقرار است در جریان آرام بازگشت ناپذیری در اتلاف انرژی از جریان زیاد هم کمتر است بطوریکه $h_f \propto Q$ ، $h_f \propto V$.

در جریان درهم مسیر حرکت ذرات قابل تشخیص نیستند بدان حالت ذرات سیال بهم چسبیده و تولید eddy یا گردابه می‌کنند. در جریان درهم انتقال مومنتم مولکولی توسط eddy صورت می‌گیرد. در جریان درهم قابل $\frac{du}{dy}$ صادق نیست بلکه $\tau = \eta \frac{du}{dy}$ که η لزجت گردابه‌ای است.

لزجت گردابه‌ای تابعی است از دانسیته سیال و نوع حرکت سیال.

در جریان درهم اتلاف انرژی به مراتب بیشتر از جریان آرام می‌باشد بطوریکه $h_f \propto V^n$ ، $h_f \propto Q^n$ $n = 1.75 - 2$

جریان یکنواخت : جریانی است که در آن مقدار بردار سرعت با مکان تغییری نمی‌کند $\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = 0\right)$. $t = 1$

جریان پایدار : (دائم) : جریانی است که بردار سرعت هم از لحاظ مقدار هم از لحاظ راستا با زمان تغییری نمی‌کند. $\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0\right)$

خط جریان : خطی است که مماس بر آن در هر لحظه بردار سرعت را به ما می‌دهد. در یک جریان دائم یا پایا چون تغییرات بردار سرعت از زمان صفر است بنابراین خط جریان هم تغییری نمی‌کند و همواره ثابت می‌ماند.

www.Prozheha.ir

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$dx = u\,dt$$
$$dy = v\,dt$$
$$dz = w\,dt$$

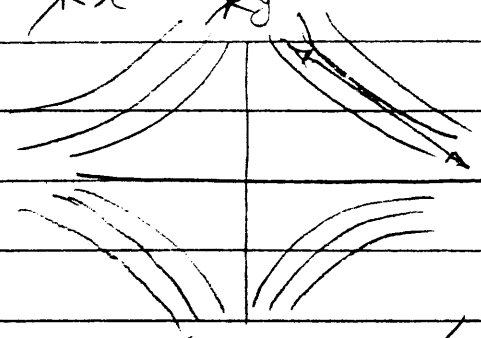
$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}} \quad (*)$$

در جریان دوبعدی داریم: $u = -kx$ و $v = +ky$ و $w = 0$ (مولفه‌های $\vec{V}$)

معادله خط جریان (که k مقدار ثابت است).

$$\frac{dx}{-kx} = \frac{dy}{ky} \Rightarrow -\ln x = \ln y + \ln c \quad \text{(به شرط } k>0\text{)}$$

$$\ln xy = \ln c$$
$$xy = c \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{x}}$$



خط مسیر: مکان هندسی تمام ذراتی است که یک نقطه خاص را طی می‌کنند.

خط رگه: برای اینکه مسیر حرکت یک ذره را در داخل سیال مشخص کنیم

یک ماده رنگی در داخل سیال تزریق می‌کنیم مسیری که ماده رنگی در داخل سیال از خود بجا می‌گذارد خط رگه نام دارد. اگر جریان پایدار باشد خط رگه خط مسیر و خط جریان هر سه بر روی هم منطبق هستند.

قوانین بقاء: اگر N یک خاصیت از سیستم باشد و مقدار N به ازای واحد جرم با η نشان دهیم در این صورت داریم:

- قانون نیوتنی

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V} \rho\eta\, dV + \int_{C.S} \rho V \eta\, dA$$

زمانی که $N = M$

$$\boxed{\frac{N}{m} = \eta = 1}$$

www.Prozheha.ir

$N = m \rightarrow \eta = 1$

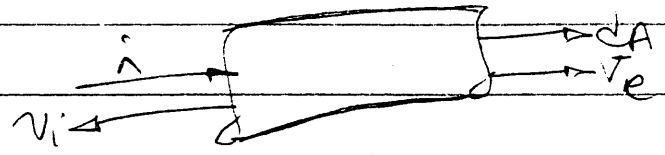
$\frac{dN}{dt}$ = جرم سیستم

$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV + \int \rho V dA$

$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = 0$: ساکن

$\Rightarrow \int \rho V dA = 0 \longrightarrow$ قانون پیوستگی

(مساحت سطح مورد نظر عمود بر سطح و همیشه به سمت بیرون)



$\int \rho_i V_i dA_i \cos(180) + \int \rho_e V_e dA_e \cos 0 = 0$

$\Rightarrow \int \rho_i V_i dA_i = \int \rho_e V_e dA_e$

اگر فرض کنیم سرعت سیال در سطح مقطع در راستا بر سطح مقطع ثابت باشد

$\rho_i V_i A_i = \rho_e V_e A_e$

$\rho = cte$: $V_i A_i = V_e A_e$

$Q_i = Q_e$

جریان یک بعدی جریانی است که مولفه‌ی سرعت در راستای عمود بر مسیر اصلی حرکت سیال صفر باشد.

$\rho_i \bar{V}_i A_i = \rho_e \bar{V}_e A_e$

$\dot{m} = \int \rho V dA$

$\dot{m} = \rho \bar{V} A$ $\Big\rangle$ $\rho \bar{V} A = \int \rho V dA$

www.Prozheha.ir

Ramin Sadi

ρ = cte : $\bar{V} = \frac{1}{A}\int V \cdot dA$ ← برای محاسبه سرعت متوسط

مثال: سرعت در جریان $V = V_{max}\left[1-(r/R)^2\right]$ از رابطه زیر محاسبه می‌گردد سرعت متوسط برابر است با:

$$V = V_{max}\left[1-(r/R)^2\right] \Rightarrow \bar{V} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R V_{max}\left[1-(r/R)^2\right] 2\pi r\, dr$$

$$\Rightarrow \bar{V} = \frac{2V_{max}}{R^2}\left[r^2/2 - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V} = 1/2\, V_{max}}$$

مثال: برای جریان توسعه یافته: $V = V_{max}\left[1-r/R\right]^{1/7}$

$$\bar{V} = V_{max} = \frac{49}{60}V_{max} = 0.82\, V_{max}$$

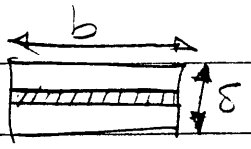
$$V = V_{max}\left[1-\frac{r}{R}\right]^m$$

$$\Rightarrow \bar{V} = \frac{2}{(1+m)(2+m)}V_{max}$$

مثال: سیالی مطابق شکل از روی سطح شیبداری به سمت پایین حرکت می‌کند توزیع سرعت سیال $V = V_{max}\left[1-(x/\delta)^2\right]$

$\frac{\bar{V}}{V_{max}} = ?$

3/4 ، 2/3 ✓ ، 1/3 ، 1/2



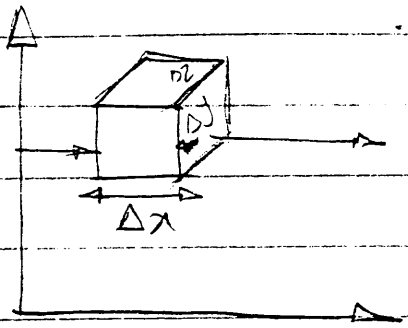
$$\bar{V} = \frac{1}{b\delta}\int_0^\delta V_{max}\left[1-(x/\delta)^2\right] b\, dx$$

$$\Rightarrow \bar{V} = \frac{V_{max}}{\delta}\left[x - x^3/3\delta^2\right]_0^\delta$$

$$\boxed{\bar{V} = 2/3\, V_{max}}$$

www.Prozheha.ir

قانون پیوستگی در حالت کلی: اگر المانی از سیال را به ابعاد Δx ، Δy ، Δz و مولفه‌های سرعت u و V و W داشته باشیم.



ورودی از المان: $\left[(\rho u) - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \times \frac{\Delta x}{2}\right] \Delta y \Delta z$

خروجی از المان: $\left[(\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \times \frac{\Delta x}{2}\right] \Delta y \Delta z$

در راستای x: ورودی − خروجی $= \frac{-\partial(\rho u)}{\partial x} \times \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$

در راستای y: $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \times \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$

در راستای z: $-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \times \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$

$$\left[-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

قانون پیوستگی $\nabla(\rho \cdot \vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ سیال تراکم‌پذیر

اگر سیال تراکم‌ناپذیر باشد $\rho = cte : \nabla \vec{V} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ همواره برقرار است

سیال تراکم‌پذیر: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \nabla(\rho \times \vec{V}) = 0$

در حالت S.S $\Rightarrow \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$

www.Prozheha.ir

مطابق جریان دو بعدی از یک سیال تراکم ناپذیر مولفه سرعت در راستای x با رابطه $u = 2x + 3y$ داده می‌شود مولفه سرعت در راستای y برای جریان خواهد بود با:

1) $-3y$ 2) $-2y$ 3) $4xy$ 4) $-4xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$2 + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow v = -2y$$

مثال مولفه u سرعت یک جریان سه بعدی برای یک سیال تراکم ناپذیر $u = a(x^2 - y^2)$ و $w = b$ ، $v = ?$ مقدار v برابر است با:

1) $-2axy$ 2) $2axy$ 3) $-2axy + f(x,z,t)$ 4) $2axy + f(x,z,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2ax \Rightarrow v = -2axy + f(x,z,t)$$

تابع جریان: فرض کنیم $\psi = \psi(x,y)$ این تابع فقط در جریان دو بعدی مطرح می‌شود.

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy$$

$$-v\,dx + u\,dy = 0$$

$$d\psi = -\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ و } u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

اگر ψ تابع جریان باشد ← مولفه سرعت در راستای x

$$\frac{dy}{v} = \frac{dx}{u} \longrightarrow d\psi = -v\,dx + u\,dy$$

$$d\psi = 0$$

$$v\,dx = u\,dy$$

www.Prozheha.ir

8,27

تابع جریان یک تابع کمکی است که با لزار دادن پیر مقدار C در رابطه $\psi(x,y)=C$ معادله یک خط جریان را به ما می‌دهد.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0$$

مثال: در یک جریان دوبعدی لزج سیال تراکم ناپذیر تابع جریان ψ با رابطه $\psi=-\frac{A}{2}\ln(x^2+y^2)$ داده می‌شود که در آن A مقدار ثابتی است مولفه‌های سرعت در راستای x و y را بدست آورید.

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\longrightarrow u=-\frac{A}{2}\left[\frac{2y}{x^2+y^2}\right]\Longrightarrow \boxed{u=\frac{-Ay}{x^2+y^2}}$$

$$V=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\longrightarrow V=-\left[-\frac{A}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}\right]\Longrightarrow \boxed{V=\frac{Ax}{x^2+y^2}}$$

مثال: $u=a(x^2-y^2)$, $V=-2axy$ (دوبعدی) لزج سیال تراکم ناپذیر است تابع ψ را بدست آورید.

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\rightarrow \psi=\int u\,dy\Longrightarrow \psi=\int a(x^2-y^2)\,dy$$

$$\psi=ax^2y-ay^3/3+f(x)$$

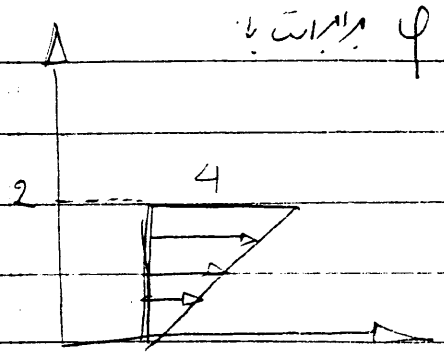
$$V=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-2axy=-\left[2axy+\frac{df(x)}{dx}\right]$$

$$\frac{df(x)}{dx}=0\longrightarrow f(x)=c$$

$$\boxed{\psi=ax^2y-ay^3/3+c}$$

www.Prozheha.ir

مثال: برای جریان یک بعدی زیر داده شده در شکل تابع جریان ψ برابر است با:



$4y^2/3 + 3$ (4

$\frac{y^2}{2} + x$ (1

$y^2 + 1$ (2

$2y^2 + 1$ (3

$$V_x = Ay + B$$

$$\begin{cases} y = 0 , V_x = 0 & 0 = 0 + B \\ y = 2 , V_x = 4 \rightarrow 4 = A*2 & B = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{V_x = 2y}$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad 2y = \frac{\partial \psi}{\partial y} , \; d\psi = 2y\,dy \quad \psi = y^2 + C$$

قانون بقای مومنتم:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho \eta \, dV + \int_{CV} \rho \eta \, v_x \, dA$$

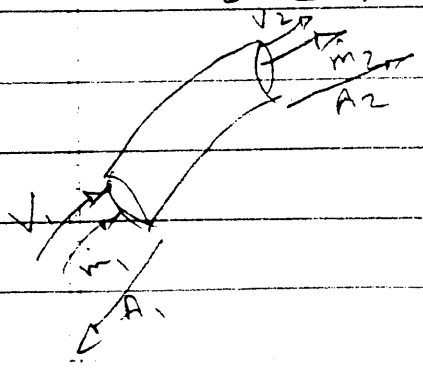
$$N = mV \qquad \sum F = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_x \, dV + \int \rho v \cdot v_x \, dA$$

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_x \, dv + \int \rho v_x \, v \, dA$$

1) اگر فرآیند S.S باشد.

$$\partial/\partial t \int \rho v_x \, dv = 0$$

$$\Rightarrow \sum F_x = \int \rho v_x \, v_x \, dA$$



$$\sum F_x = \int \rho v_{x_1} v_{x_1} \times dA_1 \cos 180$$

$$+ \int \rho v_{x_2} v_{x_2} \times dA_2 \times \cos 0$$

www.Prozheha.ir

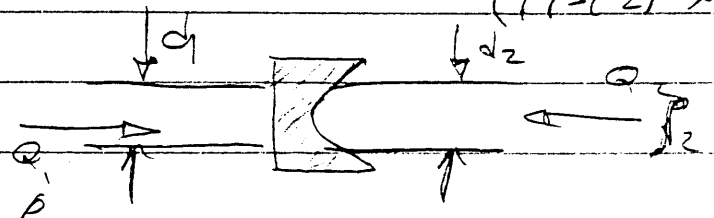
۲) اگر جریان را یکنواخت فرض کنیم

$$\sum F_x = v_{x_2}\dot{m}_2 - v_{x_1}\dot{m}_1$$

$$\sum f_x = \dot{m}/g_c\,(v_{2x} - v_{1x}) \longrightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

مثال: در شکل نشان داده شده نسبت Q_1/Q_2 چقدر باشد تا جسم ساکن بماند

شکل شکل در حال تعادل باقی بماند ($\rho_1 = \rho_2$)



1) $\frac{d_1}{d_2}$

2) $\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$

3) $(d_1/d_2)^2$

4) $\sqrt{2}\frac{d_1}{d_2}$

(نیرو برابر صفر است)

$$\sum f_x = 0 \Rightarrow \dot{m}_1 v_{1x} = \dot{m}_2 v_{2x}$$

$$\rho_1 Q_1 \times \frac{4Q_1}{\pi d_1^2} = \rho_2 Q_2 \times \frac{4Q_2}{\pi d_2^2}$$

$$\Longrightarrow Q_1^2/Q_2^2 = d_1^2/d_2^2$$

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{d_1}{d_2}}$$

مثال: یک جت آب با قطر 2 in به یک دیواره ثابت فرود کرده و نیروی 600 lbf را بر دیواره وارد می‌کند. دبی آب برحسب ft^3/s برابر است:

5.6 3.6 **2.6** 5.3

برای سیال $\sum f_x = \dot{m}/g_c\,(v_{2x} - v_{1x})$ $\quad Q = VA$

نیروی که بر دیواره وارد می‌شود $-600\,lbf = \frac{\rho Q}{32.2}\left(0 - \frac{4Q}{\pi D^2}\right)$

چون دیواره جسم صلب است و نیروی وارد بر آن صفر است

$$\frac{600}{1} = \frac{62.4}{32.2}\left(\frac{4}{\pi(\frac{2}{12})^2}\right)$$

$$Q^2 = 5.3$$

$$\boxed{Q = 2.5}$$

www.Prozheha.ir

مثال: آب با سرعت $5\,m/s$ و فشار $35\,kPa$ وارد یک زانوی $90°$ به قطر $30\,cm$ می‌شود. نیروی وارده از طرف سیال بر زانو چند نیوتن است؟

راست یا: در راستای x

1) 4241 2) 4241 3) 1748 4) -1748

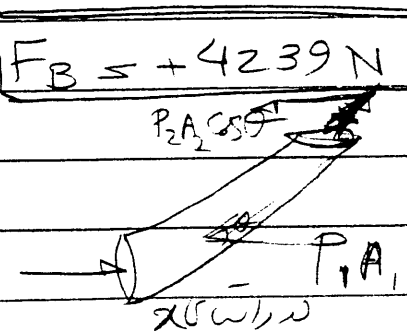
نیروی { فشاری / بدنه / وزن

در راستای x: $P_1A_1 - P_2A_2 + F_B - F_g = \dot{m}/g_c(V_{2x} - V_{1x})$

$$35000 \times \frac{\pi(0.3)^2}{4} - 0 + F_B - 0 = \frac{1000 \times 5 \times \pi/4 (0.3)^2}{1}(0-5)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_B = -4239\,N}$$ این نیرو از طرف زانو بر سیال وارد می‌شود

$$\boxed{F_B = +4239\,N}$$ از سیال بر زانو



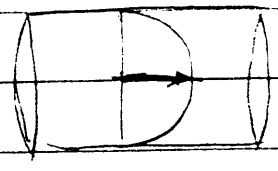
$$P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta + F_{Bx} = \frac{\dot{m}}{g_c}(V_2\cos\theta - V_1 x)$$

نیروی وارده بر سیال

$$\sum F_x = \dot{m}/g_c(V_{2x} - V_{1x})$$

زاویه سرعت یکنواخت امکانپذیر نیست چون ویسکوزیته نمی‌تواند صفر باشد.

ضریب تصحیح اندازه حرکت:



$$\sum F_x = \dot{m}/g_c(\beta_2 \bar{V}_{2x} - \beta_1 \bar{V}_{1x})$$

$$\int \rho V\, v\, dA = \rho \bar{V} A \beta \bar{V}$$

$$\beta = \frac{1}{A}\int \left(\frac{V}{\bar{V}}\right)^2 dA$$

ضریب تصحیح اندازه حرکت

www.Prozheha.ir

9/9 ضریب مومنتوم یکنواخت $\beta = 1$

ضریب مومنتوم همواره بزرگتر از 1 است.

در جریان آرام داخل لوله:

$$\beta = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left[\frac{U_{max}\left[1-(r/R)^2\right]}{U_{max}/2} \right]^2 (2\pi r\,dr)$$

$$\beta = \frac{8}{R^2} \int_0^R \left[1-(r/R)^2\right] r\,dr \longrightarrow \boxed{\beta = 4/3}$$

جریان آرام

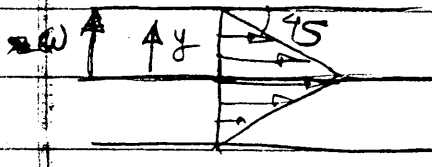
β در جریان درهم

$$\boxed{\beta_{\text{درهم}} = 1.03 - 1.01}$$

مثال: برای پروفایل نشان داده شده در شکل ضریب تصحیح اندازه حرکت β را بیابید.

فاصله صفحات موازی از هم ω می‌باشد. (کانال)

$4/3$ $\quad$ 2 $\quad$ $2/3$ $\quad$ $\boxed{1/2}$



$$V = ay + b$$

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow V = U \longrightarrow b = U \\ y = \omega \Rightarrow V = 0 \longrightarrow 0 = a\omega + U \end{cases}$$

$$\boxed{V = U(1 - y/\omega)} \qquad \boxed{a = -\frac{U}{\omega}}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{\omega \times 1} \int_0^\omega U(1 - y/\omega)\,dy$$

$$\bar{V} = U/\omega \left[y - y^2/2\omega \right] \longrightarrow \boxed{\bar{V} = U/2}$$

$$\beta = \frac{1}{\omega \times 1} \int_0^\omega \left[\frac{2U(1-y/\omega)}{U} \right]^2 dy \longrightarrow \boxed{\bar{V} = U/2}$$

$$\beta = 4/\omega \left[y - y^2/\omega + y^3/3\omega^2 \right]_0^\omega$$

$$\boxed{\beta = 4/3}$$

www.Prozheha.ir

Ramin Sadrpanah

رابطه اویلر :

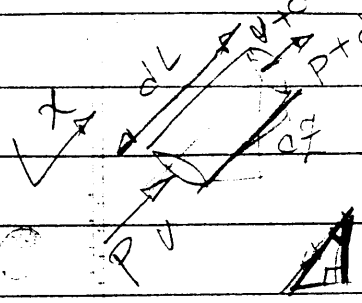
فرضیات اویلر :

1) سیال ، سیال ایده‌آل و بدون تنش برشی است.

$$\sum f_x = \frac{\dot{m}}{g_c}(v_{2x} - v_{1x})$$

2) جریان S.S می‌باشد

3) معادله اویلر برای یک خط جریان می‌نویسیم.



$$PxA - (P+dP)A - \rho A dL \times g/g_c \cos\theta = \frac{\rho V A}{g_c}(u+du-u)$$

$\frac{dz}{dL}$

$$-dP - \rho g/g_c dz = \rho u du/g_c$$

$$\frac{dP}{\rho} + g/g_c dz + \frac{u du}{g_c} = 0$$

رابطه برنولی که معادله اویلر برحسب حل آمد.

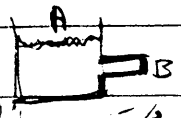
علاوه بر 3 فرض اویلر فرض 4 سیال تراکم ناپذیر باشد

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_A + v^2/2g_c = cte$$

$$\frac{P_A}{\rho} + g/g_c z_A + v^2/2g_c = \frac{P_B}{\rho} + g/g_c z_B + v_B^2/2g_c = cte$$

تحلیل

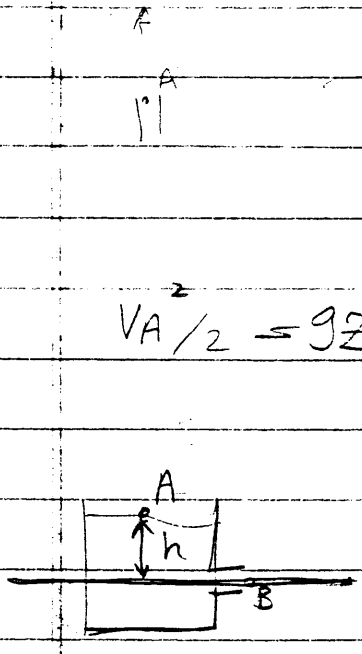
از این کاربرد نیز می‌توانیم برنولی را استفاده کنیم در صورتیکه تغییرات فشار بررسی وصلی کند صورت گیرد بنابراین در فاصله زمانی کوتاهی تغییرات فشار تغییرات حجم زیاد و دانسیته زیاد نخواهد بود بنابراین



مانند فرق برنولی اطراف

www.Prozheha.ir

مثال: آب از شلنگی با سرعت 10 m/s خارج می‌شود. آب در راستای عمودی صاف تا چه ارتباط بالا می‌رود؟



$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B$$

$P_A = P_B$ اتمسفریک $Z_A = 0$

$V_A^2/2 = gZ_B \Rightarrow Z_B = 100/2\times 9.81 \Rightarrow 5.1\,m$

مثال: سرعت خروجی سیال در اریفیس برابر است با

$P_A = P_B = 0$ اتمسفریک

$Z_B = 0$ $\quad V_A \times \frac{\pi}{4}(D^2) = V_B \times \frac{\pi}{4}(d)^2$

$V_A = V_B(d/D)^2$

خیلی کوچک است

$$\frac{P_A}{\rho g} + Z_A + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\rho g} + Z_B + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$0 + h + 0 = 0 + 0 + V_B^2/2g$$

$$\boxed{V_A \simeq 0}$$

$$\boxed{V_B = \sqrt{2gh}}$$

سرعت ایده آل

$$\boxed{V_{B_{\text{واقعی}}} = C_v\sqrt{2gh}}$$

$C_v < 1$ در اریفیس

$$Q_a = A_B \times \sqrt{2gh}$$

$$\frac{A_{\text{واقعی}}}{A_b} = C_c$$ ضریب انقباض در یک اریفیس

$$Q_{\text{واقعی}} = C_c A_B C_v \sqrt{2gh}$$

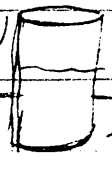
$$Q_{\text{واقعی}} = C_c C_v Q_{\text{ideal}}$$

$$\boxed{C_d = C_c C_v}$$

$$Q_{\text{واقعی}} = C_d Q_{\text{ایده آل}}$$

$C_d < 1$
$C_v < 1$
$C_c < 1$

سوال 103



$$0 - \rho \times \sqrt{2gh} \times \pi R^2 = \frac{d(\rho \times \pi R^2 h)}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{2gh}$$

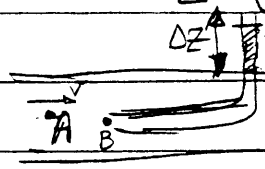
$$\int_L^0 \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

www.Prozheha.ir

$$-2/\sqrt{2g}\, h^{1/2}\Big]_L^0 = t \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

مثال: از یک پیتوت ساده برای اندازه‌گیری سرعت در یک نقطه استفاده می‌کنیم اگر میزان صعود مایع در داخل لوله پیتوت برابر 5cm باشد سرعت سیال برابر است با:

1) $1.4\ m/s$ 2) 1.8 3) 1 4) 2



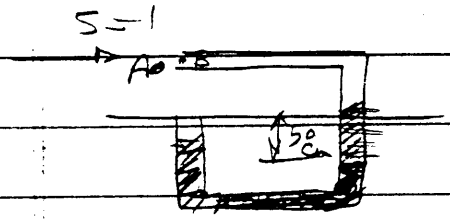
برنولی: $\frac{P_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gZ_A = \frac{P_B}{\rho} + gZ_B + \frac{V_B^2}{2}$

$$V_A^2/2 = \frac{(P_B - P_A)}{\rho} = \frac{\rho g \Delta Z}{\rho} \Rightarrow V_A = \sqrt{2g\Delta Z}$$

$$V_A = \sqrt{2\times 10\times 0.05} = 1\ m/s$$

مثال: از یک پیتوت مطابق شکل برای اندازه‌گیری سرعت در داخل یک لوله استفاده می‌کنیم مقدار سرعت سیال در نقطه A برابر است با:

1) $1\ m/s$ 2) 1.8 3) 1.4 4) 1



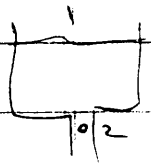
$V_B = 0$ و $Z_A = Z_B$

$$V_A = \sqrt{(P_B - P_A)\times 2}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{2Rg(\rho' - \rho)}{\rho}} \quad \text{یا} \quad V_A = \sqrt{2Rg\left(\frac{\rho'}{\rho} - 1\right)}$$

$$\sqrt{2\times 0.05\times 10\left[\frac{3}{1} - 1\right]} = \sqrt{2} = 1.4\ m/s$$

کدامیک از گزینه‌ها در مورد فشار نقاط 1 و 2 صحیح است.



سطح مایع در داخل مخزن و لوله شیر همواره ثابت نگه داشته می‌شود

1) $P_1 > P_2$ و 3)

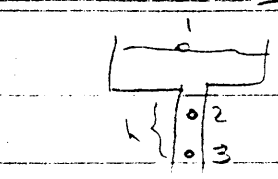
2) اختلاف بین P_1 و P_2 با افزایش سطح مقطع تانک باقی می‌ماند

3) کاهش $P_1 > P_4$

4) $P_2 > P_1$ و اختلاف دو نقطه

P_2 و P_1 اختلاف فشار بین دو نقطه با افزایش سطح مقطع افزایش

www.Prozheha.ir

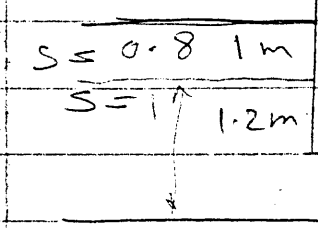


$$\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2=gz_3+\frac{V_3^2}{2}+\frac{P_3}{\rho}$$

$$P_3-P_2=gh \rightarrow P_3-P_2=\rho gh$$

$P_1-P_2=\rho gh>0$ گزینه اصحیح است.

مثال: در شکل دبی خروجی سیال از دریچه دوبعدی نشان داده شده در شکل اگر عرض دریچه واحد فرض شود برابر است با:



3.16 (1 3.63 (3 3.53 (4 3.31

$$\rho_1 h_1=\rho_2 h_2$$

$$1\times 0.8=1\times h_2 \rightarrow h=0.8m$$

$S=1-0.8m$ ← بنابراین باید از اختلاف داریم

$S=1.2-1m$ $V=\sqrt{2gh}$

$$Q=VA=\sqrt{45}\times(0.5\times 1)=3.32\ m^3/sec \qquad V=\sqrt{20(2.25)}=\sqrt{45}=6.64$$

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+Z_1g=\frac{P_2}{\r| \rho}+\frac{V_2^2}{2}+Z_2g$$

$$\frac{P_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+Z_1g+\eta W_p=\frac{P_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+Z_2g+h_p$$

انرژی بر واحد جرم ← ، اصطکاکی

(A)

$$E_K=\int_A \tfrac{1}{2}\rho v V^2 dA$$

$$E_{K_1}=\tfrac{1}{2}\rho \bar{V} A\times \bar{V}^2\times\alpha$$

$$\tfrac{1}{2}\rho A V^3\times\alpha=\int \tfrac{1}{2}\rho V^3 dA \rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{1}{A}\int\left(\frac{V}{\bar{V}}\right)^3 dA\\ \beta=\frac{1}{A}\int\left(\frac{V}{\bar{V}}\right)^2 dA\end{cases}$$

www.Prozheha.ir

ضریب تصحیح انرژی جنبشی برای جریان آرام در داخل لوله: $\alpha = 2$

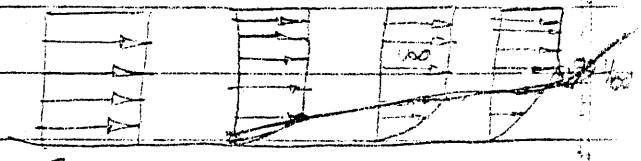
$\alpha = 1.06$ turbulent

لایه مرزی: فرض می‌کنیم سیالی با سرعت کاملاً یکنواخت (U_∞) به یک صفحه‌ی مزدیک شود

در نقطه‌ی S سیال با صفحه به دلیل خاصیت دیسکوزی سرعت به صفر می‌رسد. بنابراین در فاصله‌ی

کوچکی سرعت جریان U است و لایه‌ی مرزی صفر سرعت به صفر رسیده است.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$



لایه مرزی قسمتی از سیال است که در آن نیروهای برشی حائز اهمیت می‌باشد.

در لایه مرزی نیروهای اینرسی خیلی با چیزند چون سرعت بسیار کم است.

δ = ضخامت لایه مرزی

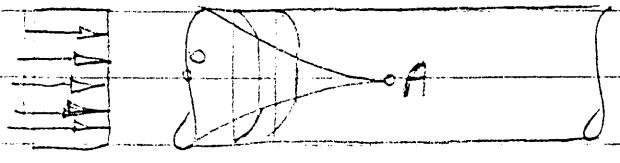
$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}$$

x = فاصله نقطه مفروض از ابتدای صفحه

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re}} \quad \text{laminar} \longrightarrow \delta \propto x^{1/2} \qquad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{Re^{0.2}} \quad \text{turbulent} \longrightarrow \delta \propto x^{0.8}$$

در جریان کم رشد لایه مرزی سریعتر صورت می‌گیرد.



فاصله‌ی O تا A ناحیه ورودی یک لوله می‌گویند.

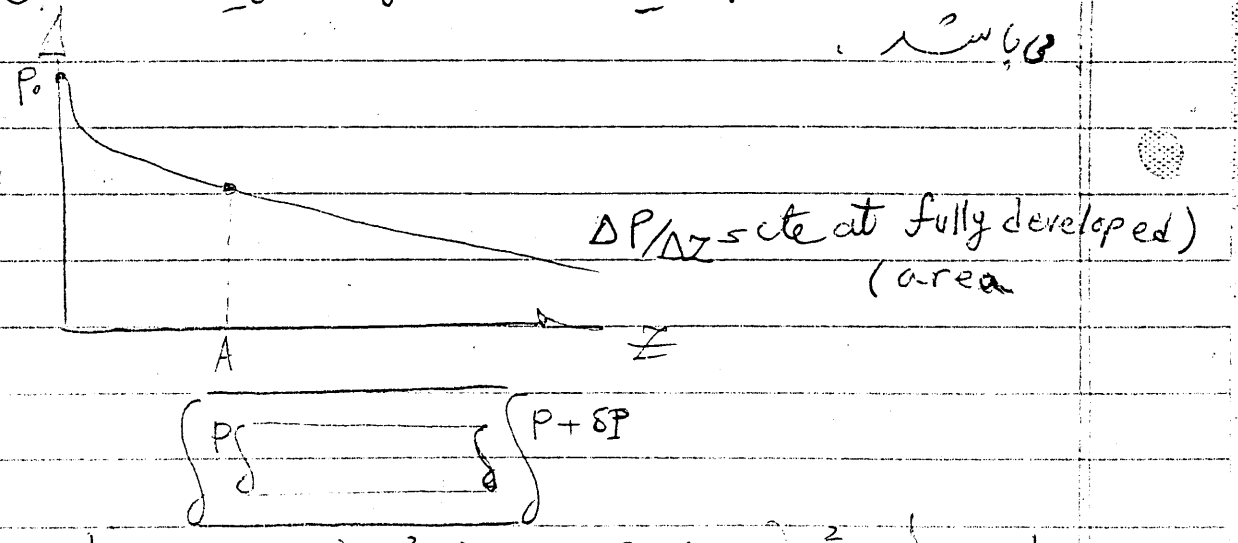
www.Prozheha.ir

پس از ناحیه A را ناحیه fully developed گویند.

مثل لوله A داریم: $V_z = V(r,z)$

در ناحیه fully developed داریم: $V_z = V(r)$

طول ناحیه ورودی نسبت به ناحیه fully developed ناچیز است و قابل صرفنظر کردن می باشد.



($\Delta P/\Delta z$ = cte at fully developed) (area

معادله برنولی: $\frac{P}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + Z_1 g = \frac{P+\Delta P}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + Z_2 g + h_f$

$$h_f = -\Delta P/\rho \qquad h_f = -\Delta P/\gamma$$

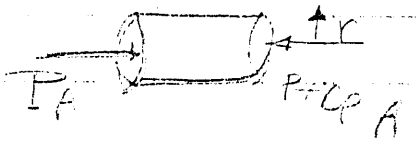
فرض: معادله فوق برای fully develop (جریان) است

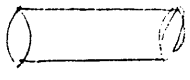
$$\sum f_x = m/g_c (V_{2x} - V_{1x})$$

فرض می کنیم جریان fully developed باشد.

$$\sum F = 0 \longrightarrow P(\pi r^2) - (P+\Delta P)\pi r^2$$

$$-\tau(2\pi r)\Delta L = 0$$



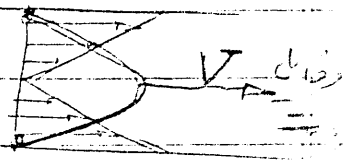


$$\tau = -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times r/2 \quad \text{یا} \quad -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times D/4$$

www.Prozheha.ir

در جریان آرام

$\tau \propto r$; $\boxed{\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{r_2}{r_1}}$



$r = 0 \rightsquigarrow \tau = 0 \rightarrow V = V_{max}$

$r = R \rightsquigarrow \tau_w = -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times \frac{R}{2} = -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times \frac{D}{4}$

سرعت تغییر تنش از مرتبه بالاتری است یعنی اگر تنش مرتبه 1 باشد سرعت مرتبه 2 است.

پروفایل انرژی جنبشی دقیقاً متناسب با پروفایل سرعت است.

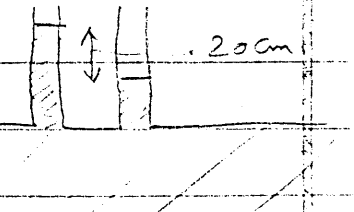
مثال: اگر افت فشار در طول مسطحی از خط لوله‌ای با قطر 24" برابر $\frac{10\,psi}{100\,ft}$ باشد تنش در دیواره لوله برحسب $\frac{lbf}{ft^2}$ برابر خواهد بود با:

7.2 ✓ 14.4 1.44 0.72

$$\tau = -\frac{10\,lbf/in^2 \times 144\,in^2/1\,ft^2 \times (12/2)\,ft}{100\,ft \quad 2}$$

مثال: مطابق شکل اختلاف ارتفاع سیال روی لوله‌ای به قطر 25mm برابر 20cm می‌باشد اگر فاصله بین ۲ لوله از هم 2m باشد تنش در دیواره لوله برحسب Pa برابر است با:

14 (4 18.75 (3 6.25 (2 ✓ 12.5 (1



$\tau_w = -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times D/4 = \frac{10000 \times 0.2}{2m} \times \frac{0.025}{4}$

$\boxed{\tau_w = 6.25\,Pa}$

www.Prozheha.ir

فرض: جریان آرام در داخل لوله برقرار است

$$\begin{cases} \tau = -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times \frac{r}{2} \\ \tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times \frac{r}{2} = -\mu \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\int_0^U dU = \int_R^r \frac{\Delta P}{\Delta L} \frac{1}{2\mu} r\,dr \rightsquigarrow U = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta P}{\Delta L} \times (r^2 - R^2)$$

$$\rightarrow u = -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$r = 0 \rightarrow u = u_{max} = -\frac{\Delta P \times R^2}{\Delta L \times 4\mu}$$

$$\boxed{u = u_{max} \left[1 - (r/R)^2\right]}$$

$$U_{max} = -\frac{\Delta P\, R^2}{4\mu L} \rightarrow U = -\frac{\Delta P \times R^2}{8\mu L}$$

$$-\Delta P = \frac{8\mu \bar{u} L}{R^2} \qquad \boxed{-\Delta P = \frac{32\mu \bar{U} L}{D^2}}$$

معادله پویزیل

laminar معادله محاسبه افت فشار در جریان

$$h_f = -\Delta P/\rho \qquad h_f = \frac{32\mu \bar{U} L}{\rho D^2}$$

$$\begin{cases} h_f \propto \bar{u}^1 \\ \Delta P \propto U^1 \end{cases} \quad \text{laminar}$$

$$-\Delta P = \frac{32\mu \frac{4Q}{\pi D^2} L}{g_c D^2}$$

$$\boxed{\Delta P = \frac{128 \mu Q L}{\pi g_c D^4}}$$

$Q = cte$ و سیال عوض نشود $\Rightarrow \Delta P \propto \frac{1}{D^4}$

in laminar flow

www.Prozheha.ir

در جریان آرام در لوله در یک دبی ثابت اگر قطر لوله را ۲ برابر کنیم افت فشار ۱/۱۶ خواهد شد.

$D = cte \quad , \quad \Delta p \propto Q$

ضریب اصطکاک friction factor و نسبت نیروی برشی در دیواره‌ی لوله به نیروی اینرسی.

$$f = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2g_c} \quad (1)$$

$$\tau_w = -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times \frac{D}{4} \quad (2) \qquad h_f = -\frac{\Delta P}{\rho} \quad (3)$$

از ترکیب روابط 1، 2 و 3 :

$$h_f = 4f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \longrightarrow [h_f] = m$$

$$h_f = 4f L/D \; V^2/2 \longrightarrow [h_f] = J/kg$$

$$h_f = 4f L/D \; V^2/2g \quad (f_t)$$

$$h_f = 4f L/D \; V^2/2g_c \quad \frac{ft \times lbf}{lbm}$$

fanning friction factor $\qquad f_{darcy} = 4 f_{fanning}$

$$\tau_w = f \rho V^2/2g_c \quad \frac{-\Delta P}{\Delta L} \frac{D}{4} = f \rho V^2/2g_c$$

$$\frac{32 \mu V}{g_c D^2} \times D/4 = f \rho V^2/2g_c$$

$$f = \frac{16}{f_{ann} Re} \quad \text{laminar flow}$$

$$f_{darcy} = \frac{64}{Re}$$

$\log f_{darcy}$ — $\log Re$ دیاگرام مودی

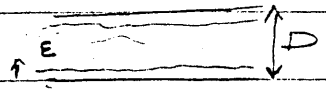
www.Prozheha.ir

جریان Turbulent :

$\log f = \log 16 - \log Re$

$f = \frac{16}{Re}$ ، $f_{Darcy} = \frac{64}{Re}$

زبری نسبی (بی بعد) : $\frac{\varepsilon}{D}$ ← زبری



(*) در جریان آرام ضریب اصطکاک مستقل از زبری و زبری نسبی است و تابع عدد رینولدز می باشد .

(*) در جریان درهم تابع رینولدز است هم تابع زبری نسبی است .

ضریب اصطکاک

(*) اگر عدد رینولدز خیلی زیاد باشد از زبری بحث زیادی است که ضریب اصطکاک فقط تابع زبری نسبی است و ارتباطی با رینولدز ندارد .

Laminar : $f = f(Re)$

Turbulent : $f = f(Re, \varepsilon/D)$

خیلی درهم : $f = f(\varepsilon/D)$

جریان درهم در لوله ها : $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(Re\sqrt{f}) - 0.8$

خیلی درهم : $\frac{1}{\sqrt{f}} = 4\log \frac{D}{\varepsilon} + 2.28$

رابطه بلازیوس : $f_{Funn} = \frac{0.0791}{Re^{0.25}}$

جریان درهم

در داخل لوله

$f = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2g}$

این مقدار خیلی زیاد است

$Re \uparrow \quad Re >> \longrightarrow \tau_w \downarrow \quad \frac{\rho V^2}{2g_c} \uparrow \longrightarrow f \downarrow$

$\longrightarrow h_f \uparrow$

اتلاف

www.Prozheha.ir

$$h_f = 4f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$\begin{cases} Q = cte: & h_f \propto 1/D^4 \\ D = cte: & h_f \propto Q^2 \end{cases}$$

$$h_f = \frac{4 \times 0.079}{\rho^{0.25} U^{0.25} D^{0.25}} \mu^{0.25} \propto \frac{L}{D} \frac{U^2}{2}$$

$$h_f \propto D^{-1.25} U^{1.75}$$

$$h_f \propto D^{-1.25} \frac{Q^{1.75}}{(D^2)^{1.75}} \longrightarrow h_f \propto \frac{Q^{1.75}}{D^{4.75}}$$

$$\begin{cases} D = cte: & h_f \propto Q^{1.75} \\ Q = cte: & h_f \propto \frac{1}{D^{4.75}} \end{cases} \quad \text{turbulent flow} *$$

اثر افزایش قطر روی کاهش افت فشار (h_f) در جریان turbulent: برای

بیشتر از جریان laminar می‌باشد.

جریان خیلی درهم

$$h_f = 4f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_f \propto \frac{V^2}{D} \quad h_f \propto \frac{(Q/D^2)^2}{D} \quad h_f = \frac{Q^2}{D^5}$$

$$\begin{cases} D = cte \longrightarrow h_f \propto Q^2 \\ Q = cte \longrightarrow h_f \propto 1/D^5 \end{cases}$$

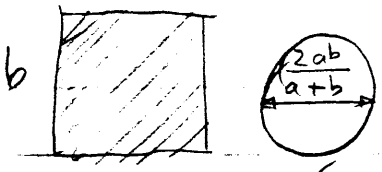
$$\frac{h_{f_2}}{h_{f_1}} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^n \quad \begin{cases} n = 4 & \text{laminar} \\ n = 4.75 & \text{Turbulent} \\ n = 5 & \text{خیلی درهم} \end{cases}$$

قطر هیدرولیکی:

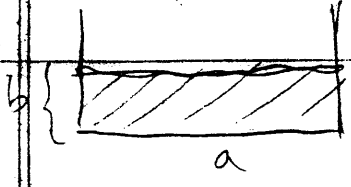
$$r_H = \frac{\text{سطح مقطع جریان عبوری}}{\text{محیطی که خیس می‌شود}}$$

www.Prozheha.ir

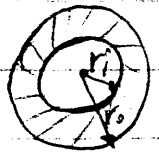
$D_H = 4r_H$ $\quad r_H = \frac{ab}{2(a+b)}$ $\quad D_H = \frac{2ab}{a+b}$



در مقام روابط برای کانالها به جای قطر، قطر هیدرولیکی مرادی‌گیریم.



کانال روباز $\quad D_H = \frac{4ab}{2b+a}$



$$D_H = \frac{4(\pi r_o^2 - \pi r_i^2)}{2\pi r_o + 2\pi r_i}$$

$$D_H = \frac{2[r_o - r_i][r_o + r_i]}{r_o + r_i}$$

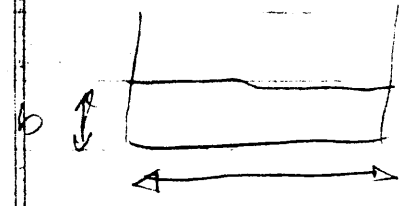
$$\boxed{D_H = D_o - D_i}$$

قطر هیدرولیکی سیالاتی

$$D_H = \frac{4\pi(r_o^2 - r_i^2)}{2\pi r_i} \rightarrow D = \frac{2[D_o^2/4 - D_i^2/4]}{D_i/2}$$

$$\boxed{D_H = \frac{D_o^2 - D_i^2}{D_i}}$$

★ روابطی که برای کانالها معمولاً استفاده می‌گردد را ابتدا تبدیل به قطر کرده و سپس روابط را بر حسب قطر هیدرولیکی می‌گذاریم.



$$D_H = \frac{4ab}{2b+a} \quad a \rightarrow \infty \quad \boxed{D_H = 4b}$$

مثال: در یک کانال به ابعاد $3 \times 4\ ft$ و به طول $300\ ft$ افت فشار را از $12\ ft$ می‌باشد مقدار تنش برشی به دیواره کانال برحسب psi را بدست آورید.

1) 3.48 $\quad$ 2) 0.014 $\quad$ 3) 0.028 $\quad$ 4) 1.4

www.Prozheha.ir

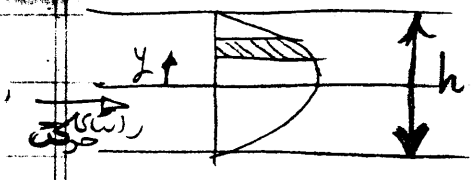
سال آزاد است

4 □ 3 $D = \frac{4 \times 3 \times 4}{14} = \boxed{3.48\ ft}$

$$\tau_w = -\frac{\Delta P}{\Delta L} \times \frac{D}{4} = -\frac{62.4\ \frac{lbf}{ft^3} * 12\ ft}{300\ ft} \times \frac{3.48\ ft}{4} \times \frac{1}{14}$$

$$= \boxed{0.0148\ psi}$$

جریان سیال نیوتنی بین صفحات موازی:



$$\sum F_x = \frac{\dot{m}}{g_c}(v_{2x} - v_{1x})$$

$P \cdot \Delta y \cdot w \big|_x$ — $P \cdot \Delta y \cdot w \big|_{x+\Delta x}$ (Δx)

سرعت در این المان بیشتر است از سرعت بالای المان که می‌شد گفت تنش در پایین در راستای حرکت بوده توانسته است سرعت را افزایش دهد و در بالای المان در جهت خلاف حرکت بوده سرعت را کاهش می‌دهد.

$$P\Delta y w\big|_x - P\Delta y w\big|_{x+\Delta x} + \underbrace{\tau \Delta x w\big|_y}_{A} - \tau A\big|_{y+\Delta y} = 0$$

$$\boxed{A = \Delta x w}$$

$$\frac{P\big|_x - P\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\tau\big|_y - \tau\big|_{y+\Delta y}}{\Delta y} = 0$$

$$\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0 \longrightarrow -\partial P/\partial x - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0}$$

در سیستم‌های کاربردی ارتباط بین تنش و افت فشار

در سیستم استوانه‌ای: $\tau = -\frac{\Delta P}{L} \times r/2$ $\quad \boxed{\frac{2\tau}{r} + \frac{\Delta P}{\Delta x} = 0}$

سیال نیوتنی: $\tau = -\mu \frac{dv}{dy}$ $\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(-\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\Delta P}{\Delta x}$

جریان آرام

www.Prozheha.ir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\Delta P/\Delta x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}y + C_1$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}y^2 + C_1 y + C_2$$

$\partial u/\partial y|_{y=0} \Rightarrow C_1 = 0$

$u(y=\frac{h}{2}) = 0$

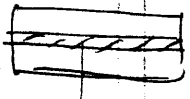
$$C_2 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}\left(\frac{h}{2}\right)^4\left[1-\left(\frac{y}{(h/2)}\right)^2\right]$$

$y=0 \Rightarrow$ $$u_{max} = -\frac{1}{8\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}$$ *

$$u = u_{max}\left[1-\left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right]$$ پروفایل سرعت سهموی است.

$$\bar{V} = \frac{1}{A}\int V\,dA \qquad \bar{V} = \frac{1}{\omega(h/2)}\int_0^{h/2} u_{max}\left[1-\left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right]\omega\,dy$$



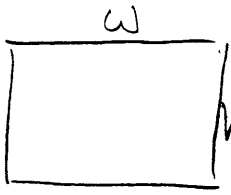
$dA = \omega dy$ سطح المقطع
محیط المان

$$\bar{V} = \frac{2}{3}u_{max}$$ *

محاسبهٔ ضریب اصطکاک:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho\bar{u}^2/2g_c} = \frac{-\mu/g_c\,\partial u/\partial y|_{y=h/2}}{\rho\bar{u}^2/2g_c}$$

$$\Rightarrow f = \frac{+\mu\left[\frac{4\times 3/2\,\bar{u}_x h}{h^2}\right]}{\rho\bar{u}^2/2} \Rightarrow f_{fun} = \frac{12}{Re} \quad ;Re = \frac{\rho u h}{\mu} = \frac{\rho u D_h}{\mu} = 2\frac{\rho u h}{\mu}$$



$$f_{darcy} = \frac{48}{Re}$$

$$D_H = \frac{4\times\omega h}{2h+2\omega} = 2h \qquad \omega \gg h$$

www.Prozheha.ir

$f = 24/Re$ → D_H برای $Re = 2\rho u h/\mu$

$f_{darcy} = \frac{96}{Re}$ → $Re = 2\rho u h/\mu$

محاسبهٔ آبگیرهای موضعی :

1) استفاده از ضریب اتلاف ؛ Loss coefficient

2) استفاده از طول معادل ؛

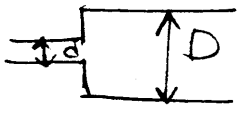
1)

$$h_f = 4f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2} \qquad \boxed{h_f = k\frac{V^2}{2}}$$

$$h_f = \frac{kV^2}{2g}$$

تابع رینولدز نیست و عددی ثابت است

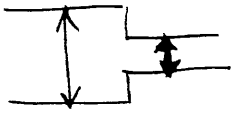
1) انبساط ناگهانی :



$$k = \left(1 - \frac{a}{A}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]^2}$$

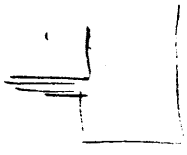
2) انقباض ناگهانی :



$$k = 0.5\left[1 - \frac{a}{a}\right]$$

$$\boxed{k = 0.5\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]}$$

حالات خاص : ورودی : یک مخزن :



$\frac{d}{D} \ll 1$

$\boxed{k = 1}$

خروجی از مخزن :

$\frac{d}{D} \ll 1$

$k = 0.5$

www.Prozheha.ir

مکانیک سیالات ۹/۲۵

تمرین K منظور شده در جداول و در فرمولها بر مبنای سرعت متوسط کوچکتر است.

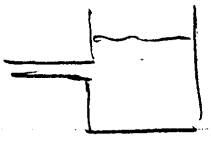
انبساط ناگهانی: $h_f = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$

روش دوم:

$$h_f = 4f \frac{Le}{D} V^2/2g$$

$$Le = \frac{KD}{4f} \qquad Le = \frac{kD}{f_{darcy}}$$

سوال (100): $Q = 0.1\pi\ m^3/sec$



$$0.1\pi = Q = VA = V \times \frac{\pi}{4}(0.2)^2$$

$$\Rightarrow V = 10\ m/s$$

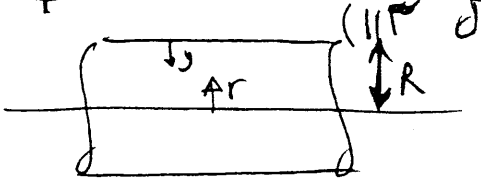
دوردی ته‌خزن: $K = 1$: $h_f = kV^2/2 = 1 \times \frac{100}{2} = 50\ J/kg$

$$h_f(J/kg) \times \dot{m}(kg/sec) = 50 \times 1000 \times 0.1\pi$$

$$= 5000\pi\ watt$$

سوال (112)

$$\frac{u}{u_{max}} = (y/R)^{1/7} = (1 - \frac{r}{R})^{1/7}$$



$$\tau_w = -\eta\, \partial u/\partial y = -\eta \times u_{max} \times \frac{1}{R^{1/7}} * \frac{1}{7} y^{-6/7}$$

$$\tau_w = -\frac{\eta u_{max}}{7R^{1/7} y^{6/7}} = \infty$$

(یعنی تنش برشی در دیواره بی‌نهایت است ~~که~~ غلط است.)

تنش برشی دیواره: $y = 0$

www.Prozheha.ir

$u = ch^2/12\mu \qquad \tau_w = ch/2$ (110)

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \bar{u}^2/2} = \frac{2\tau_w}{\rho \bar{u}\bar{u}} = \frac{ch}{\rho \bar{u} ch^2/12\mu} = \frac{12\mu}{\rho \bar{u} h} = \boxed{\frac{12}{Re}}$$

فانینگ

$$\boxed{\text{Darcy}: \frac{48}{Re}}$$

$\mu = 0.5$, $\rho = 0.8$, $Q = 0.6$ lit/min, $D = 2$mm : (122)

$Q = uA \rightarrow u = Q/A = 4Q/\pi D^2$ $\quad f = ?$, $\quad e = 0.01$ mm

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{\rho \times \frac{4Q}{\pi D}}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu}$$

$$Re = \frac{4 \times 0.8 \times 600/60}{\pi \times 0.2 \times 5} = \frac{32}{\pi} \rightarrow f = \frac{16}{Re} \qquad \boxed{f = \frac{\pi}{2}}$$

$\Delta P = 16\mu L$ (124

$$\tau = \frac{\Delta P}{2L} \times r \qquad \tau = \frac{16\mu L}{2L} \times r = 8\mu r$$

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial r} = 8\mu r \qquad \int_0^u du = -\int_{D/2}^{r} 8r\,dr$$

$$u = -4r^2 \Big|_{D/2}^{r} = -4r^2 + D^2 = \boxed{D^2 - 4r^2}$$

$$V = \underbrace{V_{max}}_{2\bar{V}} \left[1 - (r/R)^2\right]$$ (127: تست

$$V = 2\bar{V}\left[1 - (r/R)^2\right] \rightarrow (r/R)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$\boxed{r = 0.177}$$

15 cm, $f = 0.06$ (۱۴۴ تست

$$k = (0 + 2(0.9) + 0.2$$

$$\boxed{\Sigma k = 12}$$

www.Prozheha.ir

33) 9/25

$$\sum K \times \frac{V^2}{2} = 4f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} \qquad Le = \frac{D \times \sum K}{4f}$$

$$Le = \frac{12 \times 0.5}{4 \times 0.06} = \boxed{25} \qquad Le = \frac{12 \times 0.15}{0.06} = \boxed{30}$$

(157 $Q = 15\ m^3/min \qquad u_1 = 50\ m/s$

$u_2 = 20\ m/s$

$$hf = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \boxed{45m}$$

$$\Delta p = \delta h = 10000 \times 45 = \boxed{450kpa}$$

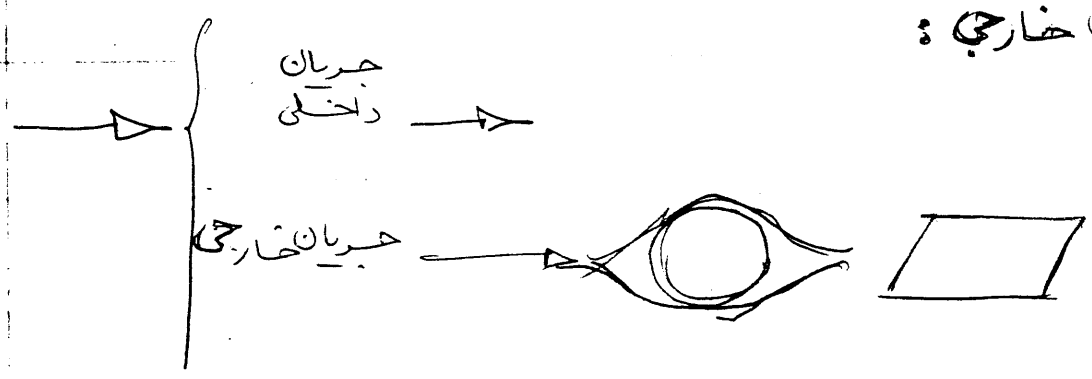
(158 برابر 2

(155 $f = \frac{16}{2000} = 0.008$ اگر $Re = 2000$ حد جریان آرام و درهم $Re = 20000$ /

$f < 0.008$

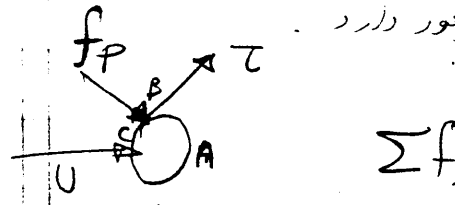
در حالت کلی از آرام به درهم هندسه اصطکاک کاهش پیدا می‌کند.

جریان خارجی:



فرض می‌کنیم سیالی با سرعت U به کره‌ای نزدیک می‌شود به طوع که سیال باکره

دو نیرو کلی یکی نیروی ناشی از فشار و دیگری برشی وجود دارد.



$$\sum f_x = \underbrace{\int P \times dA \cos\theta}_{F_p} + \underbrace{\int \tau \times dA \times \sin\theta}_{F_t}$$

بنابر تغییر فشار و تغییر تنش داریم

V_A حداکثر و P_A حداقل

V_B حداقل و P_B حداکثر

$V_A < V_c < V_B$ ماکس

www.Prozheha.ir

① سیال تراکم ناپذیر ② St-St ③ جریان خزشی Creeping flow

برای سهولت توزیع فشار و تنش را داریم. با این ۲ شرط ۶ معادله ۶ مجهول استوکس

$$\begin{cases} F_p = 2\pi\mu RU \\ F_\tau = 4\pi\mu RU \end{cases} \qquad F_p + F_\tau = F_D$$

نیروی Drag: $F_D = 6\pi\mu RU$

$F_D = 3\pi\mu DU$

$$C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho u^2/2g_c}$$

ضریب پسا

$$F_D = C_D A_p \rho u^2/2g_c$$

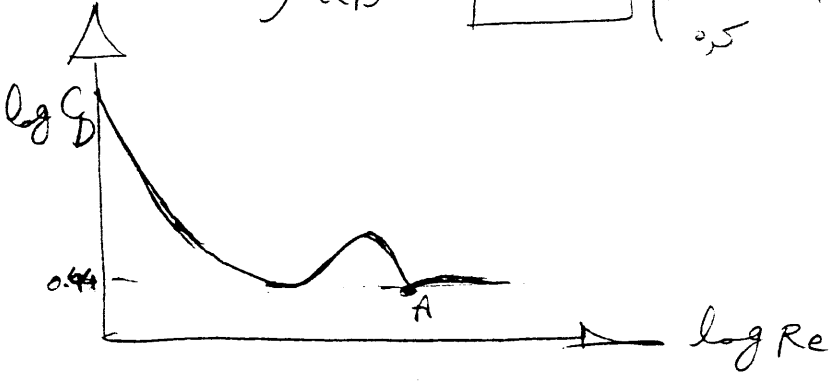
$A_p = \pi R^2$

$A_p = LD$

$A_p = a \times b$

$$C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho u^2/2} = \frac{\frac{3\pi\mu DU}{\pi D^2/4}}{\rho u^2/4}$$

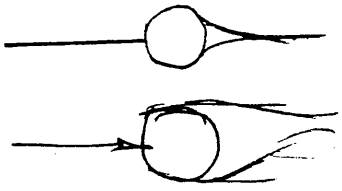
برای کره $C_D = \frac{24\mu}{\rho uD} = \frac{24}{Re}$ ← سیال تراکم ناپذیر، جریان خزشی، St-St، کره



هر چقدر Re افزایش یابد C_D کاهش می‌یابد ولی F_D افزایش می‌یابد

www.Prozheha.ir

۹,۲۵ مکانیک سیالات

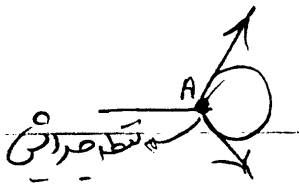


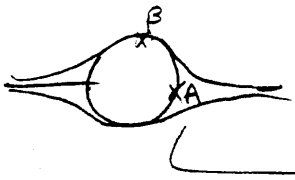
* $Re \uparrow \Rightarrow C_D \downarrow \rightarrow \uparrow$

با افزایش سرعت گردابه یا wake افزایش می‌یابد.

* $Re \uparrow \Rightarrow$ wake $\uparrow \rightarrow F_D \uparrow$

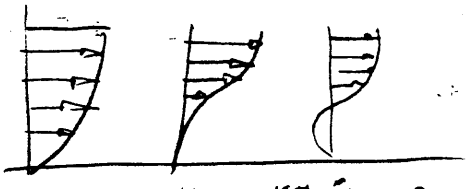
جریان گردابه‌ای





$\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ همیشه ولی

$P_2 > P_1$ در این حالت جریان



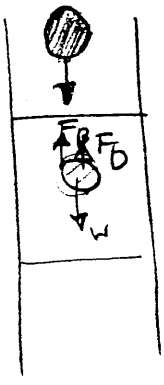
* جدایش زمانی اتفاق می‌افتد که $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ و با $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$

سطوح اکتادلر بجدایش لایه مرزی کمک می‌کنند.

احتمال جدایش در آن بیشتر است.

اگر سطح یکی صاف و دیگری زبر، احتمال جدایش در سطح صاف بیشتر از سطح زبر است.

● جدایش لایه مرزی در جریان آرام زودتر از جدایش در جریان درهم اتفاق می‌افتد.



سرعت حد سقوط ذره در داخل سیال:

$\sum F = 0$ در حالتی که سرعت ثابت است.

نیروی وزن و وزن و برآیند به تعادل می‌رسند.

$$W = F_B + F_D$$

$$\sum F = 0$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s \times g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \times g + 6\pi\mu R V$$

$$V_t = \frac{2R^2 g(\rho_s - \rho)}{\mu} = \frac{D^2(\gamma_s - \gamma)}{18\mu}$$

$$V_t \propto D^2$$

www.Prozheha.ir

برجسته تر و سیلندر به بیشتر شود جریان حرکتش از دیلیز می شود و درگ

متعادل بیشتر می شود.

$$m\frac{a_e}{g_c} = \frac{m}{\rho_p} \times \rho \times \frac{a_e}{g_c} + C_D A_p \rho u^2 / 2g_c$$

$$m a_e (1 - \rho/\rho_p) = C_D A_p \rho u^2/2$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \sqrt{\frac{2 m a_e (\rho_p - \rho)}{C_D A_p \rho \rho_p}}}$$

و میدان سانتریفوژ : $u = \sqrt{\frac{2 m r \omega^2 (\rho_p - \rho)}{C_D A_p \rho \rho_p}}$ ← سرعت

$$\boxed{u_t = \sqrt{r}}$$

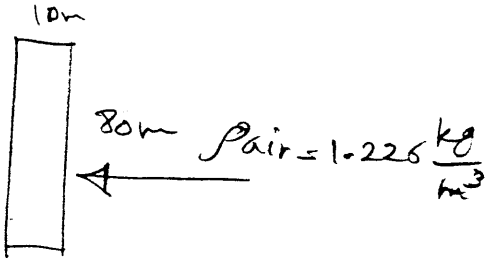
(176

$$F_D = C_D \times A_p \times \rho u^2 / 2g_c$$

$$1 = C_D \times \pi (1)^2 \times 62.4 V^2 / 2 \times 32.2$$

$$C_D = \frac{64.4}{\pi V^2 \times 62.2} \sim \boxed{\frac{1}{\pi V^2}}$$

(177

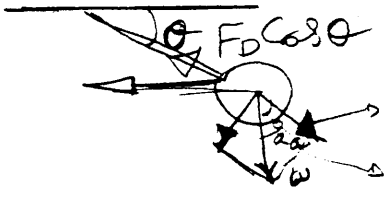


$$F_D = C_D \times A_p \rho u^2 / 2g_c$$

$$F_D = 0.34 \times (80 \times 10) \times \frac{1.226 (33.3)}{2}$$

$$\boxed{F_D = 184891.88}$$

(178



$$F_D \cos\theta = W \sin\theta$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho_S \times g \times \sin\theta = 6\pi\mu R u \cos\theta = C_D \times \pi R^2 \times \frac{\rho u^2}{2}$$

$$\tan\theta = C_D R^2 \rho_a u^2 / 2 / 4/3 R^3 \rho_S g$$

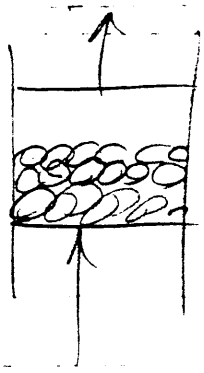
www.Prozheha.ir

$$\tan\theta = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_a}{\rho_s} u^2/2g$$ (گزینه ۱)

www.Prozheha.ir

بستر جوشان (Fludized bed)

بستری که برای خشک کردن استفاده می‌شود



$$\begin{cases} -\Delta p = \dfrac{32\mu u L}{g_c D^2} \\ \tau_w = \dfrac{-\Delta p}{L} D/4 \end{cases} \Rightarrow \tau_w = \frac{32\mu u L}{g_c D^2} \times \frac{D}{4} \Rightarrow \tau_w = \frac{8\mu u}{g_c D}$$

$$\boxed{\tau_w = \frac{4\mu V}{g_c R}} \qquad h_f = \frac{-\Delta P}{\rho} = 4f \frac{L}{D} V^2/2$$

جریان داخل لوله

$$\Delta p = 4f\rho \frac{L}{D} \frac{v^2}{2}$$

در بستر جامد داریم:

$$F_D = F_i + F_v$$

نیروی کل = نیروی اصطکاک + نیروی اینرسی

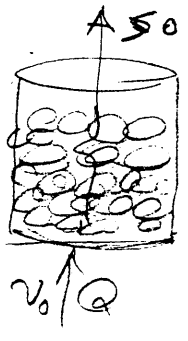
نیرو

K_2, K_1 : اعداد ثابت

$$\frac{F_D}{A_s} = \frac{F_i}{A_s} + \frac{F_v}{A_s} \Rightarrow \frac{F_D}{A_s} = \frac{k_2 \rho V^2}{g_c r_H} + \frac{k_1 \mu V}{g_c r_H}$$

سطح مقطع کامل

① تخلخل ε = حجم فضای خالی / حجم کل



② Q داخل بستر = Q بیرون بستر

$$S_0 \times V_0 = V(S_0 \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{V_0}{\varepsilon}}$$

* سرعت در داخل بستر بیشتر از سرعت در بیرون بستر است.

③ r_H = سطحی که جریان عبور می‌کند / محیطی که خیس می‌شود $\times \frac{\text{طول بستر } L}{L}$

$$= \frac{S_0 \varepsilon L}{N_p \times S_p}$$

www.Prozheha.ir

④ $N_p = \frac{S_0 L(1-\varepsilon)}{V_p}$ (حجم کل بستر / حجم ذرات) — تعداد کل ذرات

$\Rightarrow r_H = \frac{S_0 \varepsilon L}{S_0 L(1-\varepsilon)}$ (از تعریف در رابطه اخیر) $\dashrightarrow$ $\boxed{r_H = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{V_p}{S_p}}$ * (شعاع هیدرولیکی)

⑤ $\frac{V_p}{S_p} = \frac{D_p}{6}$ (قطر ذره)

⑥ $\Phi_s = \frac{(S_p/V_p)\text{کره‌ای}}{(S_p/V_p)\text{غیرکروی}}$

⑦ $F_D = (-\Delta P) S_0 \varepsilon$ (نیروی مقاوم)

f_p (Sabed فنینگ)

$$\frac{-\Delta P \times g_c}{\rho V_0^2} \times \frac{\Phi_s D_p}{L} \times \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} = \frac{36 k_1 (1-\varepsilon)}{\Phi_s Re} + 6k_2$$

($-\Delta P \times g_c / \rho V_0^2$ → 150 ; 6 → 1.75)

$$f = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2 g_c} = -\frac{\Delta P}{L} \times D/4 \times \frac{2 g_c}{\rho V^2}$$

$$f = -\frac{\Delta P\, g_c}{2\rho V^2}\frac{D}{L}$$

$$f_p = \frac{150(1-\varepsilon)}{\Phi_s Re} + 1.75$$

laminar : $f_p = \frac{150(1-\varepsilon)}{\Phi_s \times Re}$ * (بعاریم)

Turbulent : $f_p = 1.75$ *

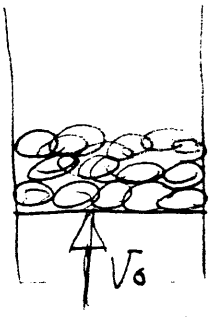
بستر { جریان درهم : $(-\Delta P) \propto V_0^2$ * ; جریان آرام : $(-\Delta P) \propto V_0$ * $\Longrightarrow$

جریان در داخل بستر از روابط KOZeny_karman پیروی می‌کند.

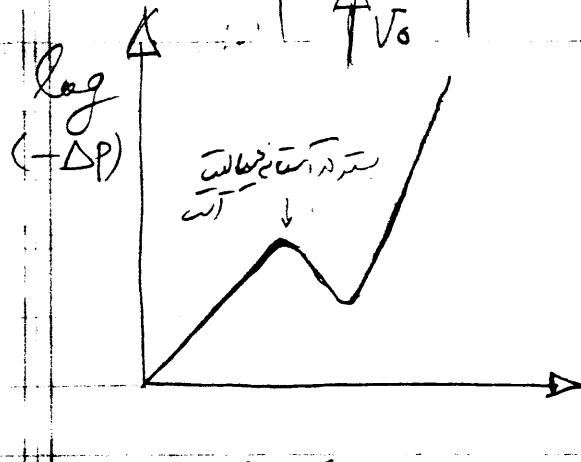
www.Prozheha.ir

$\log(-\Delta P) \propto 2 \log V_0$ دوم

$\log(-\Delta P) \propto \log V_0$ آرام



هر حالتی تا کم باشد و ذره ذرات بستر بیرون نرود بستر ساکن است.



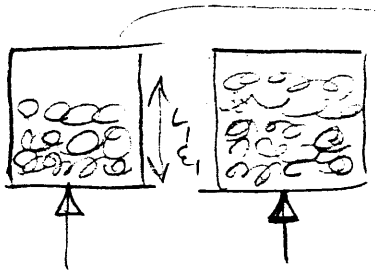
$$\frac{-\Delta P}{L} = \frac{g}{g_c}(\rho_s - \rho)(1-\varepsilon) \quad ①$$

$-\frac{\Delta P}{L}$: افت فشار در واحد طول بستر

$(1-\varepsilon)$: کسر حجمی جامد

* بسیار مهم

*



$$S_0 L_1 (1-\varepsilon_1) = S_0 L_2 (1-\varepsilon_2)$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1}$$ * بسیار مهم

اگر یک بستر در حالت fluidization باشد و سرعت سیال را افزایش دهیم طول بستر و تخلخل هر دو افزایش می‌یابند لذا از رابطه ① نتیجه گرفت که با افزایش سرعت افت فشار به ازاء واحد طول بستر کاهش پیدا می‌کند $\left(\frac{-\Delta P}{L}\right)$ اما افت فشار کل بستر ثابت می‌ماند...

www.Prozheha.ir

$$\frac{\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)_2}{\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)_1} = \frac{1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1} \frac{(-\Delta P)_2}{(-\Delta P)_1} = \left(\frac{1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1}\right) \times \frac{L_2}{L_1} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(-\Delta P)_2 = (-\Delta P)_1}$$

D_{pm} نفوذ تطر متوسط $= \dfrac{1}{\sum \frac{x_i}{D_{pi}}}$ جزء وزنی ذرات

آنالیز ابعادی :

۴

سرعت خروج سیال از فنجان زمانی که با صرف نظر کردن از کشش سطحی و نیروی وزن بر سیال از قطره $V = k \Delta P^a \rho^b$ داده می‌شود. ΔP افت فشار در دانسیته سیال است. کدام گزینه سرعت خروج سیال از قطره را نشان می‌دهد؟

1) $k\frac{\Delta P}{\rho}$ 2) $k\sqrt{\Delta P \rho}$ ✓ 3) $k\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$ 4) $k \Delta P \times \rho$

C

آنالیز ابعادی : 1) روش ریلی Rayleigh

2) روش Π - Buckingham

روش ریلی :

$V : LT^{-1}$ $\quad \Delta P = ML^{-1}T^{-2}$

$\rho : ML^{-3}$

$$LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^a (ML^{-3})^b$$

$$LT^{-1} = M^{a+b} L^{-a-3b} \times T^{-2a}$$

$$\begin{cases} -a-3b=1 \\ -2a=-1 \\ a+b=0 \end{cases} \quad a = 1/2 \ / \ b = -1/2 \quad \boxed{V = k\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}}$$

U

www.Prozheha.ir

* اگر تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر بود به تعداد معادلات فقط می‌توان مجهولات را بدست آورد و بنابراین سایر مجهولات را معلوم برحسب معادلات حساب می‌کنیم.

روش دوم: در بعضی حالات — ابعاد اساسی: M L T — F نیز به عنوان بعد اساسی در نظر گرفته می‌شود.

$f(V_1, V_2, V_3, V_4, \dots V_n)$ (باکینگهام)

قضیه π: اگر n تا پارامتر داشته باشیم تعداد گروه‌های بی‌بعد برابر خواهد بود با

$\pi = n - r$

n: تعداد کمیت‌ها

r: تعداد ابعاد اساسی (۳ یا ۴)

مثال: دبی سیال خروجی از یک سوراخ به ارتفاع سوراخ (h) شتاب جاذبه (g) سرعت نزدیک شدن سیال به سوراخ V و زاویه سوراخ ϕ بستگی دارد. چند گروه بی‌بعد می‌توان از آنالیز بدست آورد.

۵ کمیت داریم

$Q = f(V, h, g, \phi)$ — ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

$L^3T^{-1} = f(LT^{-1}, L, LT^{-2}, 0)$

$\pi_1 = \phi$

$4 - 2 = 2$ (تعداد گروه‌ها)

$f(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6) = 0$

$6 - 3 = 3$ (MLT)

$\pi_1 = (V_1 V_2 V_3) V_4^a$

$\pi_2 = (V_1 V_2 V_3) V_5^b$

$\pi_3 = (V_1 V_2 V_3) V_6^c$

$\pi_4 = (V_1 V_2 V_3) V_7^d$

www.Prozheha.ir

با حل چند مثال جزئی روی a و b و c و d بدست می آید.

کمیتهای تکراری V کمیتهایی هستند که بوسیله آنها توانیم گروه بی بعد بدست آوریم.

بهتر است کدام یک از کمیتهای تکراری یک کمیت هندسی سیستم مانند قطر و یک کمیت

کمیت دوم بهتر است از خواص سیال باشد مانند دانسیته و یسکوزیته و ...

سومی بهتر است یکی از خواص حرکتی سیال را انتخاب کنیم.

① ΔP ⑤ g

② V ⑥ σ کشش سطحی

③ ρ ⑦ μ

④ L یا D ⑧ C سرعت صوت

$8-3=5$ ← 5 گروه بی بعد

① $Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{\rho V^2}{\mu V/D} = \frac{\rho V^2}{\mu \frac{V}{D}}$

② $Mach = \frac{V}{C}$ ③ $Fr = V^2/Lg$ نیروی جاذبه

④ $Eu = \frac{-\Delta P}{\rho V^2}$ نیروی فشاری / نیروی اینرسی ⑤ $Wb = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$ نیروی اینرسی / نیروی کشش سطحی

$L/L' = H/H' = D/D'$

تشابه: 1) تشابه هندسی

2) تشابه دینامیکی

مقدار V_1 در اصل صفحه L_1 با در نقطه متناظر در اصل آن شکل برابر باشد.

مثال: سرعت سیال در داخل لوله ای به قطر 4 in برابر 5 m/s و افت فشار برابر 16 psi سرعت و افت فشار در داخل لوله ای به قطر 18 in برابر است با

شرط تشابه دینامیکی: $Re = Re_{مدل}$ در اصل صفحه

چه رابطه ای افت فشار بهینه شده Er را بر حسب برابر

اگر سیال از ارتفاعی پایین بیاید تعداد افزوده

حجم سیال در لوله مرتبه تعداد طبا

www.Prozheha.ir

عدد رینولدز را بیشتر برای سیالات تراکم پذیر و به عنوان شاخص وکنترل پارامترهای کنترل

$$Re_1 = Re_2 \longrightarrow \frac{\rho_1 u_1 D_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 u_2 D_2}{\mu_2}$$

$$5 \times 4 = V_2 \times 18 \Rightarrow \boxed{V_2 = 1.11}$$

افت فشار : $E_{P_1} = E_{P_2}$

$$\frac{\Delta P_1}{\rho V_1^2} = \frac{\Delta P_2}{\rho V_2^2} \Rightarrow \frac{10}{5^2} = \frac{\Delta P_2}{(1.11)^2}$$

$$\boxed{\Delta P_2 = 0.5 \text{ psi}}$$

40 4mi

(214) ②

$$\dot{m}_{air} = \rho u A$$

$$0.142 = 0.256 \times u \times \pi/4 \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{air} = 101.3 \text{ ft/sec}}$$

$$\frac{u_{air} \times D}{\nu_{air}} = \frac{u_{water} D_{water}}{\nu_{water}} \Rightarrow \frac{101.3 \times 1''}{4.825 \times 10^{-5}} = \frac{V_{water} \times 4''}{1.21 \times 10^{-5}}$$

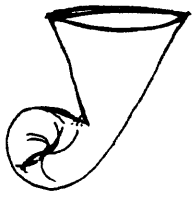
$$\boxed{u = 6.37}$$

(215) ②

جلب ۵ : تفاوت آن که برای انتقال مایعات کاربرد دارند در حالت کلی با دو دسته کلی سانتریفوژ و جابجایی مثبت تقسیم می‌شوند :

1) Centrifugal

2) Positive displacement pump (PDP)

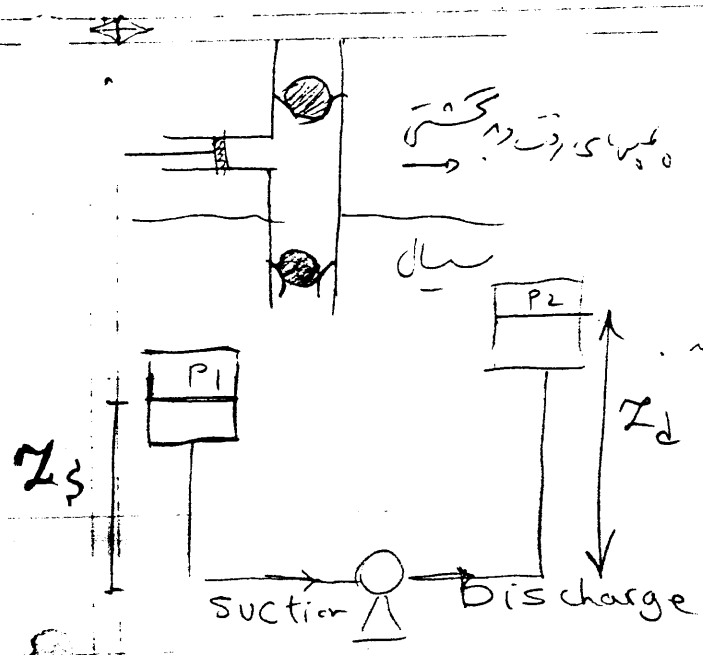


سانتریفوژ :

در اثر سرعت خیلی بالای پره سرعت پره افزایش می‌یابد و وقتی که وارد محیطی آزاد می‌شود به پره‌ها سرعت می‌دهد (در اثر فشار بالا و سرعت بالا در اثر سرعت زیاد)

پمپ‌های جابجایی مثبت : پمپ‌هایی هستند که در آنها سیال بین یک یا دو قطعه محرک گیر کرده و افزایش فشار پیدا می‌کند

www.Prozheha.ir



پمپ‌های جابجایی مثبت دبی ثابتی به ما می‌دهند.

ارتفاع سیستم در دافع مکش:

$$H_s = \frac{P_1}{\rho g} + Z_s - h_{fs}$$

هد سیستم در مکش — اصطکاک

$$H_d = \frac{P_2}{\rho g} + Z_d + h_{fd}$$

هد سیستم در فشار

ارتفاع بین H_s و H_d را هد کلی سیستم می‌گوییم.

$$H = H_d - H_s = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + (Z_d - Z_s) + (h_{fd} + h_{fs})$$

$4f\frac{L_d}{D}V^2/2g$ و $4f\frac{L_s}{D}V^2/2g$

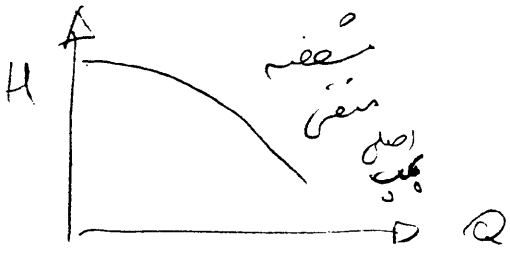
قطر ورودی و خروجی پمپ برابر است. (فرض)

در یک پمپ قطر خروجی کمتر از قطر ورودی است.

$H = A - BQ^2$ — ثوابت

هد سیستم

پمپ‌های سانتریفیوژ



www.Prozheha.ir

اگر به هر دلیلی فشار در داخل پمپ از فشار بخار سیال در دمای پمپاژ کمتر شود

قسمتی از مایع بخار شده و به شکل حباب ظاهر می‌شود.

$$P + \rho g z - h_f < P_{vp}$$

NPSH ← بر حسب متر

Net positive suction head (available)

$h_f \uparrow \rightarrow P \downarrow$

$$\frac{P}{\rho g} + z - h_f - \frac{P_{vp}}{\rho g} > 0$$

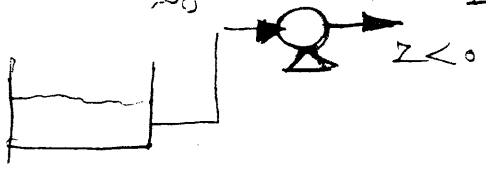
$$NPSH(A) = \left(\frac{P - P_v}{\rho g}\right) + z - h_f$$

NPSHR ← سازنده پمپ مشخص می‌کند

در سیستم تجربی $NPSHA > NPSHR$

پمپ در زیر مخزن

$z < 0$



دو راه برای جلوگیری از کاویتاسیون وجود دارد که یا باید

یکی از روش‌هایی که در مورد پدیده کاویتاسیون کاربرد دارد (البته که دبی را کاهش دهیم).

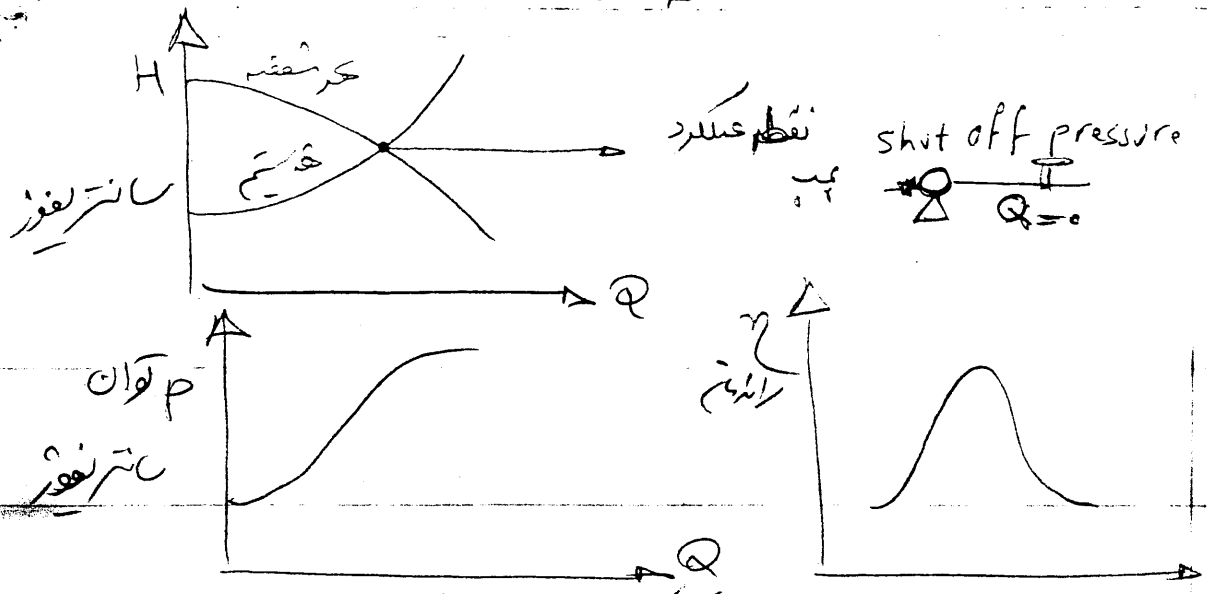
نکات سانتریفوژ: 1) هزینه لوله‌کشی کم به کار می‌رود. 2) برای دبی‌های زیاد و هد کم

یعنی فشار در خروجی پمپ‌های سانتریفوژ خیلی زیاد نیست. 3) برای پمپ‌های سانتریفوژ

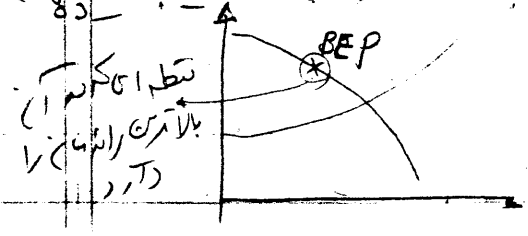
افزایش دبی هد پمپ کاهش می‌یابد. 4) این پمپ‌ها در حجم‌های کوچکی دارای راندمان بالایی می‌باشند

5) برای اتصال سیالات شیمیایی از پمپ‌های سانتریفوژ با درب پلاستیکی استفاده می‌شود.

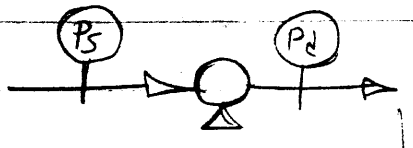
www.Prozheha.ir



پمپهای سانتریفوژ فقط در محدوده کوچکی دارای راندمان بالا هستند. (از عیب این پمپها)



هرچقدر از BEP دور شویم راندمان کاهش یافته و از طول عمر پمپ می کاهد.



$$\Delta P = P_d - P_s$$

$$H = \frac{P_d - P_s}{\rho g}$$ هد پمپ

از آنجایی که پمپ به سیال انرژی می دهد (کاری که پمپ روی سیال انجام می دهد)

توان $= Q \times \Delta P = P$ (Q: m^3/sec, ΔP: N/m^2)

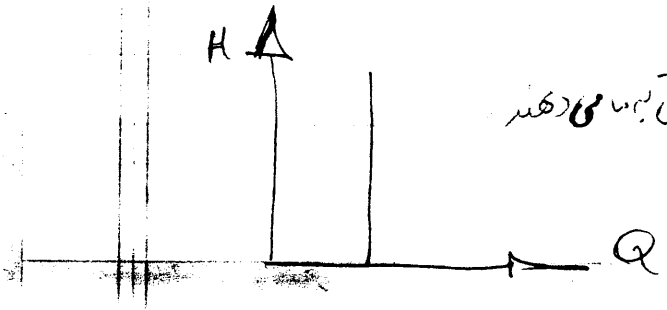
$$\text{توان مصرفی پمپ} = \frac{\text{توانی که پمپ به سیال می دهد}}{\eta} \qquad \text{توان مصرفی} = \frac{\rho g H Q}{\eta}$$

کاویتاسیون: * به دلیل کاهش فشار داخل پمپ از فشار بخار سیال با تولید بخار در داخل پمپ مرکز جرم پمپ به هم می خورد (لرزش) با کاهش راندمان پمپ همراه است ۲) این حباب ها بخار در پمپ و روی پره ها ضربه وارد کرده و می ترکند و باعث می شوند که پمپ پیتینگ شود یا خوردگی شدن اتفاق بیافتد.

www.Prozheha.ir

۵) برای انتقال سیالاتی که دارای ذرات جامد تشکیل شده از پمپ‌های سانتریفیوژ استفاده می‌کنیم ولی از پمپ‌های جابجایی مثبت استفاده کمتر می‌کنیم.

۶) هزینه تعمیرات و نگهداری آنها کم است.



پمپ‌های جابجایی مثبت: دبی مشخص دارند و دبی تابعی از H را می‌دهند

جابجایی مثبت:

۱) برای انتقال سیالات با ویسکوزیته زیاد.

۲) برای دبی‌های کم و هدهای زیاد.

۳) فشار در خروجی پمپ زیاد است.

۴) آلرژی پر دلیل خروجی پمپ لوله پمپ صدمه می‌بیند.

۵) این پمپ‌ها دبی ثابتی به ما می‌دهند

۶) برای انتقال سیالات Dilatant از پمپ‌های جابجایی مثبت استفاده می‌شود.

C_Q و C_H بردون بعد هستند.

$C_Q = Q/Nd^3$ ← ضریب دبی

$C_H = gH/N^2D^2$ ← ضریب هد

$N_S = \frac{C\,Q^{1/2}}{C_H^{3/4}} = N\frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}}$

N_S: سرعت مخصوص پمپ — N: سرعت دورانی پمپ (دور بر دقیقه)

N_S معیار خوبی برای تقسیم بندی پمپ‌ها است

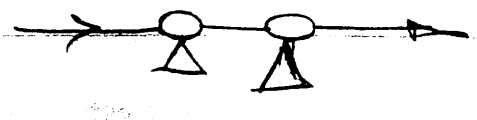
$N_S \uparrow$

N_S سرعت دورانی است که پمپ با آن سرعت دورانی در دبی واحد و هد واحد تولید می‌کند.

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3$$

$$\left(\frac{H_2}{H_1} = \left(N_2/N_1\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right.$$

پمپ‌های سری و موازی:



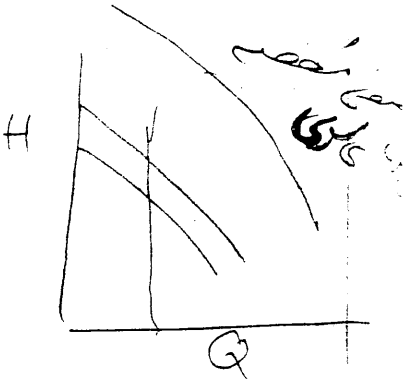
www.Prozheha.ir

(*) پمپ‌های سری: برای استفاده می‌کنیم که هدف افزایش هد پمپ به ازای دبی ثابت باشد.

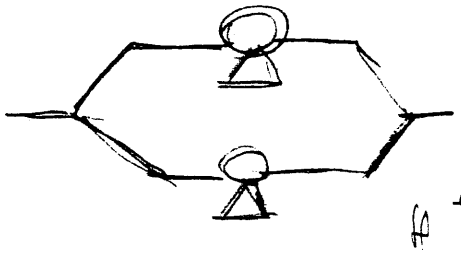
$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$

$H = H_1 + H_2 + H_3 + \cdots$

$\Delta P_{کل} = \Delta P_1 + \Delta P_2$ (1 پمپ) (2 پمپ)

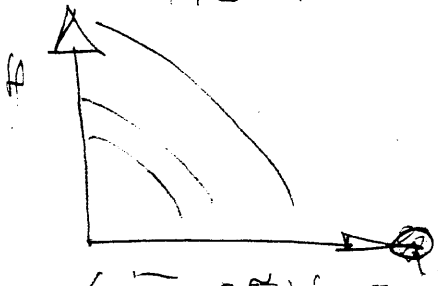


پمپ‌های موازی: هدف افزایش دبی ـ هد ثابت می‌ماند.



$Q = Q_1 + Q_2$

$H = H_1 = H_2$



(2 و 1 هم منطبق هستند)

چنانکه در پمپ‌ها با مشخصه $\Delta h_p = 60 - Q/4$ به صورت موازی استفاده شوند و $\Delta h_s = 20 + \frac{Q}{2}$ باشد مقدار دبی و هد چقدر است؟

1) $Q = \frac{160}{3}$ ، $\Delta h = \frac{140}{3}$ 2) $\frac{400}{3}$ $\frac{260}{3}$

3) $\frac{320}{3}$ $\frac{140}{3}$ 4) 64 52

$\Delta h_p = \Delta h_s \rightarrow \boxed{Q = \frac{160}{3}}$

$Q_{کل} = 2 \times \frac{160}{3}$

$Q_{کل} = 320/3$