انتقال حرارت

انتقال حرارت

سرشناسه	:	گروه مولفین -، گردآورنده
عنوان و نام پدیدآور	:	گروه مولفین -، -، گردآورنده
مشخصات نشر	:	تهران: سنجش و دانش، 1392
مشخصات ظاهری	:	انتقال حرارت/ ص.؛ 28/5×20/5سم.
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۲۳۲-۳۲۶-۴
وضعیت فهرست نویسی	:	فاپا
یادداشت	:	بالای عنوان : ارشد.
یادداشت	:	عنوان روی جلد : ارشد.
یادداشت	:	کتابنامه :
عنوان روی جلد	:	انتقال حرارت -
موضوع	:	انتقال حرارت - -آزمون‌ها
موضوع	:	انتقال حرارت - -راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:	انتقال حرارت - -آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

انتقال حرارت

گردآورنده: گروه مولفین
ناشر: انتشارات سنجش و دانش
صفحه آرایی: مهناز تقوی
نوبت چاپ: دوم، ۱۳۹۳
تیراژ: ۱۵۰۰ نسخه
قیمت ۷۳۶۰۰تومان
شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۲۳۲-۳۲۶-۴
نشانی: تهران، خیابان انقلاب، خیابان دانشگاه، تقاطع روانمهر، پلاک۱۲۶، ساختمان سنجش و دانش
تلفن: ۶۱۲۶ ــ۰۲۱
www.sanjesh.ir

فهرست مطالب

فصل اول: مبانی انتقال حرارت

اگر دما در هر نقطه مستقل از زمان باشد ، سیستم را سیستم پایدار ، دائم و یا پایا می نامیم و واژه یک بعدی بدین معنی است که فقط در یک بعد انتقال حرارت داریم مثلا در جهت محور x ها ، برای انتقال حرارت دو بعدی فرض بر این است که انتقال حرارت دو بعدی می باشد . ولی در واقعیت انتقال حرارت سه بعدی ، یعنی در جهت محور x ها و y ها و Z ها می باشد ولی برای سادگی انتقال حرارت را یک بعدی فرض می کنیم .

دیوارساده :

فرض کنید دو طرف یک دیوار دارای درجه حرارت متفاوتی باشد

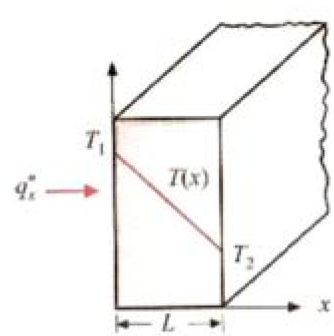
در شکل روبرو حرارت از سمت زیاد به کم خود به خود در حال حرکت خواهد بود و تغییرات خطی می باشد و علت آن این است که ضریب انتقال حرارت یعنی k مقدار ثابتی است و اگر k تغییر کند ، تغییرات ، تغییرات سهموی خواهد بود .

روش‌های به‌دست آوردن مقدار انتقال حرارت :

(1) از قانون فوریه، سرمایش نیوتن و استفان- بولتزمن استفاده می‌کنیم تا مقدار انتقال حرارت را به‌دست آوریم:

قانون فوریه فقط برای هدایت :

$$q = kA\frac{T_{High} - T_{Low}}{L}$$

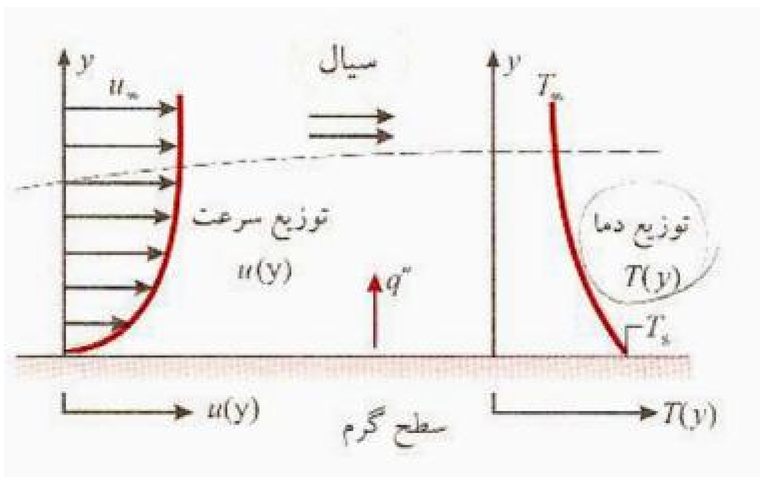


ضریب هدایت حرارتی (k)

یک خاصیت مهم اجسام می باشد. k ی زیاد یعنی اینکه جسم رسانای بسیار خوبی می باشد ، و k ی کم یعنی جسم عایق می باشد .

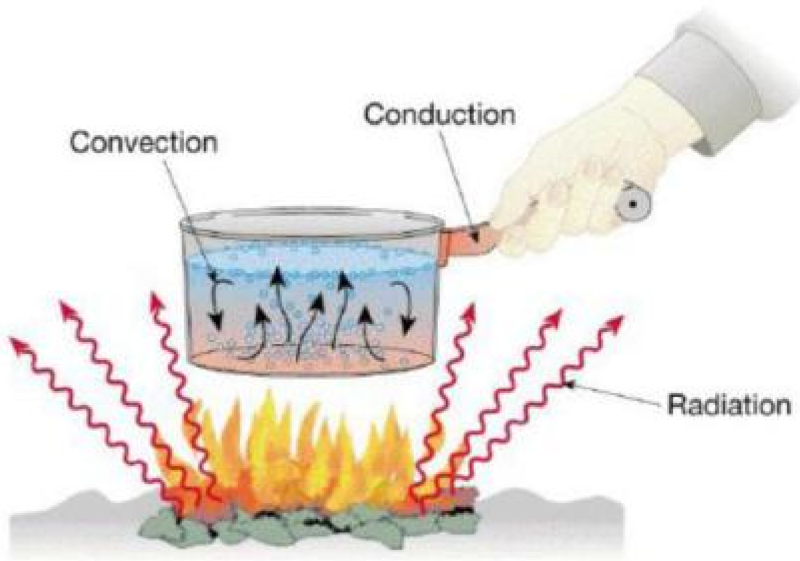
قانون سرمایش نیوتن فقط برای جابه‌جایی :

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$



قانون استفان- بولتزمن برای تشعشع :

$$q = \varepsilon\sigma A\,(T_s^4 - T_{\text{محیط}}^4)$$



از سه قانون فوق q را پیدا می‌کنیم:

انتقال حرارت بر واحد طول $q' = \frac{q}{L}$

(شار حرارتی) انتقال حرارتی برای واحد سطح $q'' = \frac{q}{A}$

(2) در صورت تغییر فاز (phase change) مثلاً از مایع به گاز Boiling یا جوشش و از جامد به مایع کـه بـه گرمـای گداخت (Fusion) معروف است،داریم:

$q_{Boiling} = \dot{m}_{evp} h_{fg}$ مایع به گاز واحد: $\frac{kg}{s} \times \frac{J}{kg} = \frac{J}{s} = w$

$q_{Fusion} = \dot{m} h_{sf}$ (آنتالپی گداخت h_{sf}) جامد به مایع واحد: $\frac{kg}{s} \times \frac{J}{s} = \frac{J}{s} = w$

(3) با داشتن غییر دما و ظرفیت گرمایی C می‌توان مقدار q را حساب کرد:

$C = C_v = C_p$ برای جامدات

$q = \dot{m} C \Delta T$ و $(\frac{kg}{s} \times \frac{J}{kg^{\circ}C} \times \frac{^{\circ}C}{1}) = \frac{J}{s} = w$ $\dot{m} = \dot{M} = \frac{m}{t} = \frac{M}{t}$

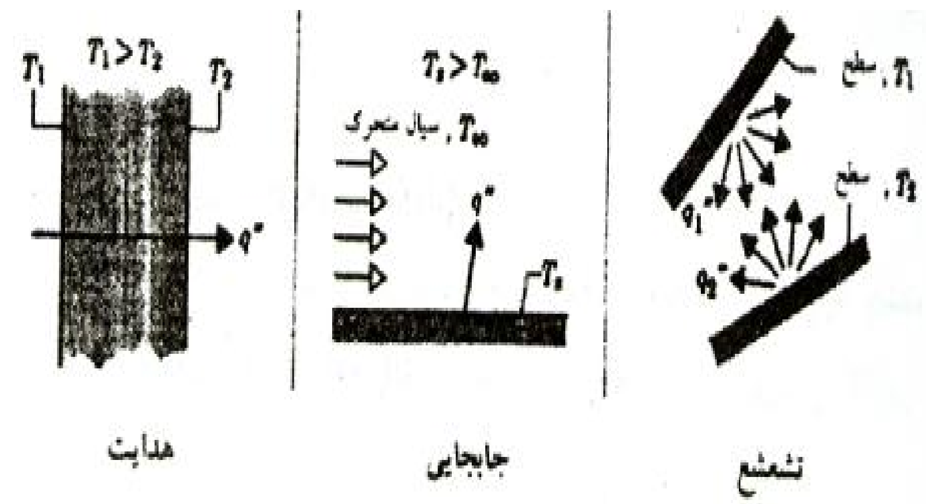
(4) در صورتی که مقاومت الکتریکی Re را داشته باشیم و شدت جریان I باشد:

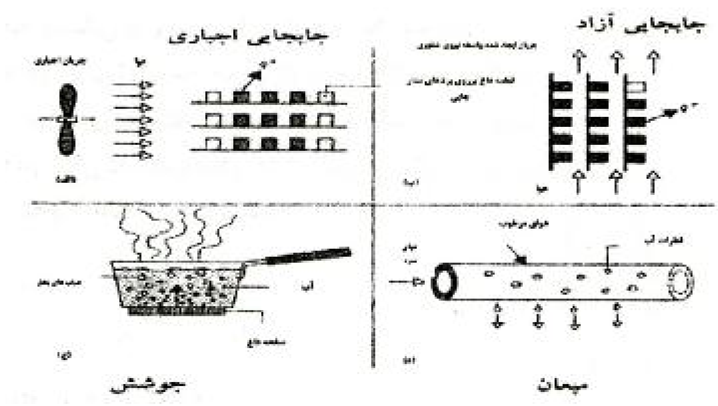
$q = I^2 Re \qquad (Amp)^2 \Omega = w$

(5) در صورتی که انرژی داخلی را داشته باشیم:

$E = \Delta U$

$E = mh_{sf} \qquad \dot{E} = q = \frac{E}{t} \; (\frac{J}{s})$





1) سطح کنترل مشخص گردد که جهت انتقال گرما را نشان دهد و ماده همگن در نظر گرفته میشود مثلا آهن خالص

2) روش انتقال حرارت مشخص شود که یک بعدی و یا سه بعدی میباشد.

3) مبنای زمانی تعیین میشود که معمولا در یک ثانیه انتقال حرارت محاسبه میشود.

4) معادله حرارت یا انرژی نوشته میشود که مبنای زمانی یک ثانیه است. هر دو دارای یک واحد میباشد.

5) حجم کنترل را در نظر میگیریم و معادله دیفرانسیل را برای هر نتقطه از سیستم حل میکنیم.

6) با در نظر گرفتن فرض های مسئله محاسبات را تا رسیدن به نتایج خواسته شده انجام می دهیم.

نقطه شنبم

دمایی که تحت آن در طی یک فرآیند فشار ثابت سرد بشود اولین نقطها ی که آب چگالید ه میشود نقطه شبنم است.

و اولیه(Boundary Conditions) شرایط مرزی

برای تعیین توزیع دما در یک ماده، بایستی معادله گرمای مربوطه را حل کرد. اما چنین حلی به شرایط فیزیکی موجود در مرزهای ماده و در صورت وابستگی به زمان، به شرایط موجود در زمان اولیه بستگی دارد. در حالت کلی برای حل مسائل انتقال حرارت نیاز به شرایط مرزی داریم. سه نوع شرط مرزی را می توان بیان نمود.

سه نوع شرط مرزی که معمولاً در انتقال گرما وجود دارد، اولین شرط مربوط به حالتی است که در آن سطح در دمای ثابت T_s نگه داشته می شود. این شرط معمولاً شرط دیریشله یا شرط مرزی نوع اول نامیده می شود. برای مثال، هنگامی که در روی سطح جوشش صورت گیرد. در جوشش انتقال حرارت در مایع از طریق جابجایی صورت میگیرد بنابراین بر طبق قانون سرمایش نیوتن داریم:

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

که در این شرایط دمای سطح ثابت میباشد بنابراین این معادله را بر اساس شار حرارتی میتوان نوشت

شرط مرزی دوم مربوط به حالتی است که در آن سطح شار حرارتی ثابتی نگه داشته شود. این شرط معمولاً شرط نیومن یا شرط مرزی نوع اول نامیده می شود. مانند وقتی که یک گرم کن الکتریکی به سطحی متصل است و یا قرار دادن یک اتوی گرم بر روی یک سطح.

$$q''_x(0) = -k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

شرط مرزی سوم مربوط به حالتی است که که انتقال حرارت جابجایی روی سطح وجود داشته باشد و معادله آن، از موازنه انرژی سطحی بدست می آید که در آن شار جابجایی با شار حرارتی برابر است.

$$k\frac{T_{High} - T_{Low}}{L} = h(T_s - T_\infty)$$

مقاومت حرارتی سطح تماس

مقاومت سطح تماس به عوامل زیر وابسته است:

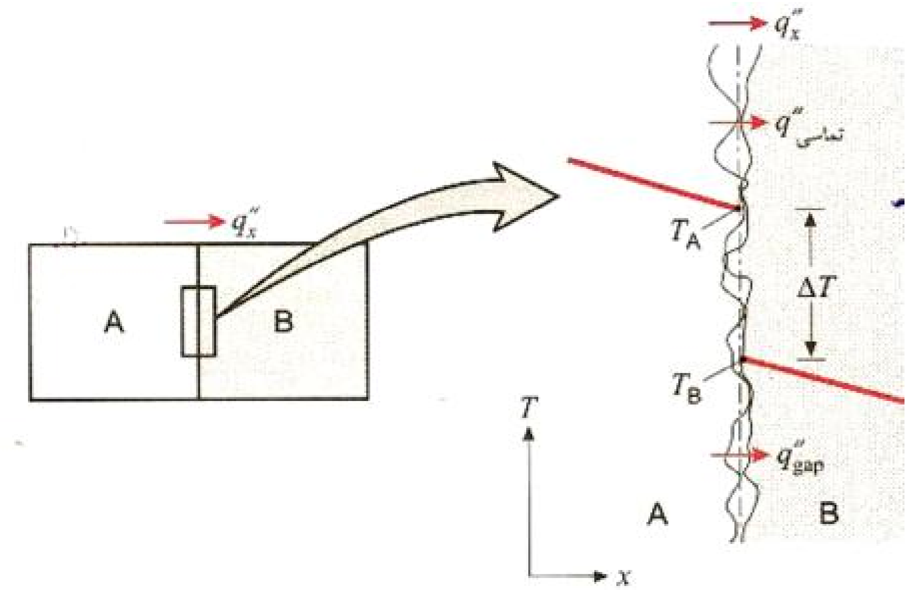
1-نوع سیال

2-زبری سطح

3-فشار.

۱)در حالت واقعی چون بین دو سطح تماس سیالی وجود دارد و خود سیال مقاومت دار د بنابراین انتقال حرارت را کم میکند.

2) هرچه زبری دو سطح بیشتر باشد افت دما بیشتر میشود . چون مقاومت بیشتر میشود.

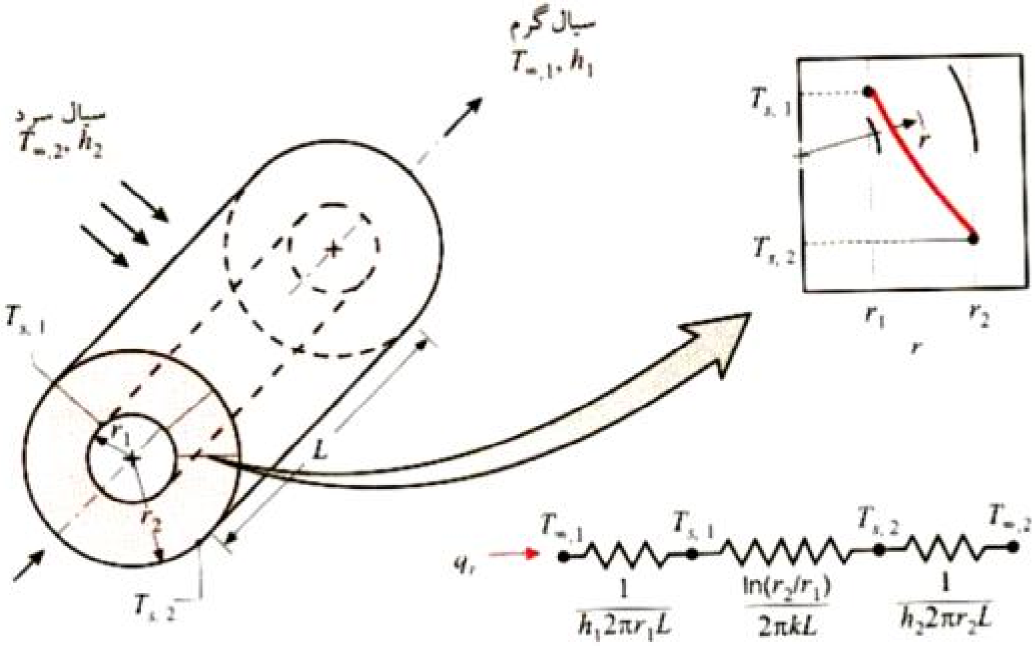


افت دما بر اثر مقاومت تماسی گرمایی

سوال : اگر سیال که بین فصل مشترک قرار دارد اکسیژن باشد افت دما بیشتر وجود دارد یانیتروژن؟

معادلۀ انتقال حرارت در استوانه ها

انتقال حرارت فقط در راستای شعاع است.



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{q}_G}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0 \Rightarrow r\frac{dT}{dr}=cfe \Rightarrow dT=\frac{C_1}{r}dr$$

$$\Rightarrow T(r)=C_1\ln+C_2$$

معادلهٔ انتقال حرارت در کره:

فرضیات:

بدون منبع حرارتی

شرایط پایدار

یک بعدی

نمی توانیم حرارت انتقال داشته باشیم، انتقال حرارت در جهت شعاع * q در راستاداریم ,اگر دور بزنیم کاهش و یا افزایش دما وجود ندارد.

*خطوط شعاع ثابت ، خطوط دما ثابت نیز هستند

* انتقال حرارت فقط در راستای شعاع اتفاق میافتد .در نتیجه هر سطح شعاع ثابت یک سطح دما ثابت است.

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_Q - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t}\Big|_{c.v} \Rightarrow \dot{q}_r = \dot{q}_{r+dr}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \dot{q}_r + \frac{\partial \dot{q}r}{\partial r}dr \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial r} = 0 \Rightarrow \dot{q}_r = cons\tan t$$

$$\uparrow q_r'' = \frac{\dot{q}_r}{A} \downarrow$$

شار حرارتی فقط در دیوار تخت ثابت است ولی در دیوارۀ استوانهای و کروی ثابت نیست و با افزایش شعاع کم میشود.

حل از راه قانون فوریه: $\dot{q}_r = -kA\frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2)\frac{dT}{dr} = cte$

$$\int_{r_i}^{r_o} \dot{q}_r \frac{dr}{r^2} = \int_{T_1}^{T_2} -4\pi dT \Rightarrow \dot{q}_r\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}\right) = 4k\pi(T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \frac{T_1 - T_2}{\left(1/r_i - 1/r_o\right)}$$

$$\Rightarrow R_{t,cond} = \frac{1/r_i - 1/r_o}{4k\pi}\ for\ sphere \qquad T(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

بطورکلی:

	دیوار تخت	استوانه	کروی
معادله :	$\frac{d^2T}{dx^2}=0$	$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})=0$	$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dT}{dr})=0$
توزیع دما :	$T=C_1X+C_2$ خطی	$T=c_1\ln r+c_2$ لگاریتمی	$T=\frac{C_1}{r}+C_2$ $\frac{1}{r}$
مقاومت حرارتی :	$\frac{L}{KA}$	$\frac{\ln(\frac{ro}{ri})}{2\pi lk}$	$\frac{\frac{1}{ri}-\frac{1}{ro}}{4\pi k}$
شعاع بحرانی :	-	$\frac{Kins}{h}$	$\frac{2Kins}{h}$

مثال) اختلاف درجه‌ی حرارتی معادل $85^{\circ}C$ به لایه‌ای از شیشه به ضخامت $130mm$ اعمال می‌شود. قابلیت هدایتی حرارتی شیشه $0/035\frac{w}{m\cdot k}$ است. مقدار انتقال حرارت را بر واحد سطح پیدا کنید.

چون k جسم داده شده است، بنابراین از قانون فوریه استفاده می‌کنیم:

$q=-kA\frac{\partial T}{\partial x}$ قانون فوریه برای هدایت

$q=kA\frac{T_{high}-T_{low}}{L}$ قانون اصلاح شده فوریه

$$\frac{q}{A}=k\frac{T_{high}-T_{low}}{L}=0/035\times\frac{85}{130\times10^{-3}}=22/88\frac{w}{m^2}$$

نکته: k می‌تواند دارای واحد $\frac{w}{m\cdot k}$ یا $\frac{w}{m\cdot^{\circ}C}$ باشد.

توجه: چون $\frac{\partial T}{\partial x}$ منفی است، بنابراین به قانون اصلاح شده فوریه می‌رسیم.

مثال) لوله‌ای حاوی بخار در اختیار داریم که در آن هوا و محیط اطراف دارای دمای $25^{\circ}C$ هستند. قطر خارجی لوله

70mm و دمای سطح آن $200^{\circ}C$ و ضریب انتشار 0/8 می‌باشد. اگر ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی از سطح به هوا برابر با $15\frac{w}{m^2 \cdot k}$ باشد اتلاف گرما از سطح لوله به‌ازای واحد طول آن $(\frac{q}{l})$ چه‌قدر است؟

$T_{\infty} = 25^{\circ}C$ دمای سیال

$T_w = 200^{\circ}C$

$\varepsilon = 0/8$

$h = 15\frac{w}{m^2 \cdot k}$

$T_B = 25^{\circ}C$ دمای محیط

$q_{total} = q_{\text{هدایت}} + q_{\text{جابه‌جایی}} + q_{\text{تشعشع}}$

چون k هوا بسیار کم است بنابراین از انتقال حرارت از طریق هدایت به هوا صرفنظر می‌شود.

$T_{\text{محیط}} = T_{\text{سیال}} = 25^{\circ}C$

$q_{total} = q_{convection} + q_{radiation}$

$$q_{total} = \underbrace{hA(T_w - T_{\infty})}_{\text{قانون سرمایش نیوتن}} + \underbrace{\varepsilon\sigma A(T_w^4 - T_s^4)}_{\text{قانون استفان- بولتزمن}}$$

نکته: T_{∞} در جابه‌جایی اهمیت دارد، در حالی که T_S (دمای محیط) در تشعشع اهمیت دارد.

به‌جای A مقدار πDL را قرار می‌دهیم:

$$q_t = h(\pi DL)(T_w - T_{\infty}) + \varepsilon\sigma(\pi DL)(T_w^4 - T_s^4)$$

$$\frac{q_t}{L} = h\pi D(T_w - T_{\infty}) + \varepsilon\sigma(\pi D)(T_w^4 - T_s^4) = 557 + 421 = 978\frac{w}{m}$$

مثال) یک وسیله کروی فضایی به قطر $0/5m$ حامل وسایل الکتریکی است که 150W گرما تولید می‌کند. اگر ضریب صدور سطح $0/8$ باشد و این وسیله از منابع دیگر مانند خورشید تابش دریافت نکند دمای سطح آن چه‌قدر است؟

قانون استفان - بولتزمن برای کره:

$A = 4\pi r^2 = 4\pi(\frac{D}{2})^2 = \pi D^2$:

$q_{radiation} = \varepsilon\sigma A T^4$

$150 = 0/8 \times 5/67 \times 10^{-8} \times \pi(0/5)^2 \times T_s^4 \Rightarrow T_s = 254/73\,k$

مثال) محفظه یک فریزر زمانی که بد کار می‌کند با لایه‌ای از برفک به ضخامت $2mm$ پوشیده شده است. انتقال گرما بین برفک و محیط در شرایط $T_\infty = 20^0 C$، $h = 2\frac{w}{m^2 \cdot k}$ با جابه‌جایی آزاد می‌باشد. زمان لازم برای آب شدن تمام برفک را تخمین بزنید. چگالی برفک $700\frac{kg}{m^3}$ و گرمای نهان ذوب آن (گرمای گداخت) را برابر $334(\frac{kj}{kg})$ در نظر بگیرید.

حل) از تشعشع صرفنظر کنید. چون h و T_∞ را داریم بنابراین جابه‌جایی اهمیت دارد.

نکته: در صورتی که تغییر فاز صورت گیرد از دو رابطه‌ی زیر می‌توان استفاده کرد:

برای مایع به بخار (جوشش Boiling):

$q_{Boiling} = m_{evp} \times h_{fg}$

برای تبدیل جامد به مایع از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

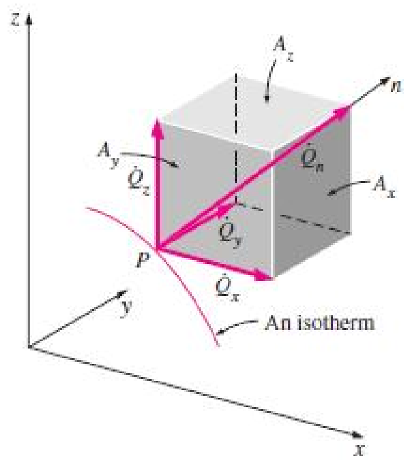
$\underbrace{q_{Fusion}}_{\text{گداخت}} = \underbrace{mh_{fg}}_{\text{آنتالپی گداخت}}$

(مقدار گرمای لازم برای تبدیل یخ (برفک) به آب = انتقال حرارت از طریق جابه‌جایی)

$$h\cancel{A}(T_\infty - T_f) = \frac{\rho \cancel{A}\,dx}{t} h_{sf} \Rightarrow t = \frac{\rho h_{sf}\,dx}{h(T_\infty - T_f)} = \frac{v_\infty(\frac{kg}{m^3}) \times 334 \times 10^3 (\frac{J}{kg}) \times 0/002m}{2(\frac{w}{m^2 \cdot {}^0 C})(20 - \underbrace{0}_{\text{یخ}})^0 C}$$

$t = 11690(s) = 3/2hr$

مثال) یک قطعه به جرم m در دمای ذوب $0^0 C$ در یک حفره‌ی مکعبی از جنس آهن به‌طول ضلع w قرار دارد. ضخامت جداره‌ی حفره L و ضریب رسانایی گرمایی آن k می‌باشد. اگر دمای سطح بیرونی (T_{high}) جداره بیش‌تر از دمای ذوب باشد عبارتی برای زمان مورد نیاز برای ذوب کامل یخ به‌دست آورید.



حل:

چون k فلز را داریم بنابراین از طریق هدایت انتقال حرارت به یخ صورت می‌گیرد:

هدایت در آهن $q = KA\dfrac{T_{high} - T_{low}}{L}$ دمای یخ

$A = 6w^2$

(چون 6 تا سطح است و همه سطح با یکدیگر برابر هستند).

مقدار گرمای هدایتی باید با گرمای لازم برای تبدیل از حالت جامد به مایع برابر باشد: برای جامد از $\dot{m}$ استفاده می‌کنیم

$q = \dot{m}\,h_{sf}$

$$t = \frac{mh_{sf}\cdot L}{6w^2k(T_{high} - T_{low})}$$

مثال) یک گرمکن برقی به‌شکل استوانه‌ای به‌طول $200mm$ و قطر خارجی $D = 20mm$ ساخته شده است. این گرمکن در شرایط کارکرد عادی مقدار $2kw$ گرما تولید می‌کند. این در حالی است که گرمکن در جریان آب با دمای $20°C$ و ضریب جابه‌جایی $h = 5000\dfrac{w}{m^2\cdot k}$ است. با صرفنظر از انتقال حرارت از دو انتهای گرمکن دمای سطح آن را محاسبه کنید. اگر هنگام کار جریان آب ناگهان قطع شود و جریان هوا با دمای $20°C$ و ضریب جابه‌جایی $50\dfrac{w}{m^2\cdot k}$ برقرار باشد دمای سطح گرمکن چه‌قدر خواهد بود؟

حل: انتظار داریم که با تغییر سیال آب به‌جای هوا دمای سطح افزایش یابد. بنابراین در حالت اول در زمانی که آب بعنوان یک سیال استفاده می‌شود، داریم:

$$q = hA(T_w - T_\infty) \Rightarrow q = h\pi DL(T_w - T_\infty) \Rightarrow T_w = T_\infty + \frac{q}{h\pi DL}$$

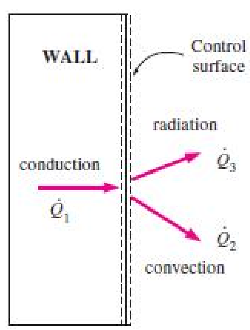
$$T_{s\ \text{آب به‌عنوان سیال}} = 20 + \frac{2000}{5000 \times \pi \times 0/02 \times 0/2} = 51/8^{o}C$$

اگر از هوا بخواهیم استفاده کنیم:

$$T_s = 20 + \frac{2000}{50 \times \pi \times 0/02 \times 0/2} = 3203^{o}C$$

مثال) با استفاده از معادله‌ی بقاء حرارت، فشار حرارتی را برای حالت زیر به‌دست آورید:

دمای یک طرف دیوار تخت $100^{0}C$ می‌باشد و طرف دیگر آن در محیطی جابه‌جایی با $T_\infty = 10^{0}C$ و $h = 10\frac{w}{m^2 \cdot k}$ قرار دارد. دیوار مزبور دارای $k = 1/6\frac{w}{m \cdot k}$ و ضخامت $40cm$ می‌باشد. فرض کنید که هیچ حرارتی جذب صفحه نشده و هیچ حرارتی در صفحه تولید نشود.



حل:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} + \dot{E}_{out}$$

هیچ حرارتی تولید و ذخیره نمی‌شود.

$$\Rightarrow q_{in} + q_g = q_{st} + q_{out}$$

$$\Rightarrow q_{in} = q_{out} \Rightarrow q_{\text{هدایت}} = q_{\text{جابه‌جایی}}$$

$$k\cancel{A}\frac{T_{high} - T}{L} = h\cancel{A}(T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow\ 1/6\times\frac{100-T}{0/4}=10(T-10)\ \Rightarrow\ T=35^{0}C$$

برای به‌دست آوردن شار حرارتی از قانون فوریه استفاده می‌شود:

$$q=kA\frac{T_{High}-T}{L}\ \Rightarrow\ \frac{q}{A}=k\frac{T_{High}-T}{L}\ \Rightarrow\ 1/6\times\frac{100-35}{0/4}\ \Rightarrow\ \frac{q}{A}=257\frac{w}{m^2}$$

تمرین) مخروط ناقص به ارتفاع $0/3m$ از آلومینیوم ساخته شده است. قطر آن در بالا $75cm$ و در کف $12/5cm$ می‌باشد. دمای سطح زیرین $93^{0}C$ و دمای سطح فوقانی $540^{0}C$ است. سطح جانبی عایق شده است. با فرض این‌که جریان یک‌بُعدی و در جهت x انجام می‌شود مقدار انتقال گرمای آهنگ گرما را به‌دست آورید؟

$$k_{\text{آلومینیوم}}=231/3\frac{kw}{m\cdot k}$$

تمرین) سقف یک ماشین $800\frac{w}{m^2}$ تابش خورشیدی را جذب می‌کند. در حالی که سطح زیر آن عایق‌بندی فرض شود و ضریب جابه‌جایی بین سقف و هوای محیط $12\frac{w}{m^2\cdot k}$ یا $12\frac{w}{m\cdot^{0}C}$ باشد دمای سطح سقف را در حالی‌که شرایط پایدار یا دائم یا پایا باشد به‌دست آورید(اگر دمای هوای بیرون $20^{0}C$ باشد) .

حل)

نکته: واحد k می‌تواند $\frac{w}{m\cdot k}$ یا $\frac{w}{m\cdot^{0}C}$ باشد. همچنین واحد h می‌تواند $\frac{w}{m^2\cdot h}$ یا $\frac{w}{m^2\cdot^{0}C}$ باشد.

نکته: شرایط دائم پایدار است اگر $\frac{\partial T}{\partial t}$ برابر با صفر است یعنی تغییرات دما نسبت به زمان صفر باشد یک بعدی $\frac{dT}{dt}$

چندبعدی $\frac{\partial T}{\partial t}$

$$G_{\text{تابش خورشیدی جذب شده}}=800\frac{w}{m^2}$$

معادله بقاء انرژی را می نویسیم: $q_{in}+q_g=q_{st}+q_{out}\ \Rightarrow\ q_{in}=q_{out}$

چون پایدار است.

هیچ جریان الکتریسیته عبور نمی‌کند
که بخواهد انرژی تولید کند

$$q = hA(T_s - T_\infty) \Rightarrow \frac{q}{A} = h(T_s - T_\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 800 = 12(T_s - (273+20)) \Rightarrow T_s = 359k = 86/6^{\circ}C$$

مثال) گرمای هدررفته از دیواری گچی با ضریب رسانایی حرارتی $0/75\frac{w}{m\cdot k}$ (چون کم است عایق است) برابر 80% نرخ انتقال حرارت از یک دیوار که با ضریب رسانایی حرارتی $0/25\frac{w}{m\cdot k}$ و ضخامت 100mm است. اگر اختلاف دمای سطح درونی و بیرونی در دو دیوار یکسان باشد $(\Delta T_1 = \Delta T_2)$ ضخامت دیواره‌ی گچی چه‌قدر است؟ فرض شود که مساحت هر دو سطح یکی باشد. $(A_1 = A_2)$

حل:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= k_1 A \frac{\Delta T_1}{L_1} \\ q_2 &= k_2 A \frac{\Delta T_2}{L_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{k_1}{k_2} \times \frac{L_2}{L_1} \Rightarrow L_1 = \frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{k_1}{k_2} \cdot L_2$$

$$q_1 = 0/8q_2 \Rightarrow L_1 = \frac{q_2}{0/8q_2} \times \frac{0/75}{0/25} \times 100 \times 10^{-3} \Rightarrow L_1 = 375 \times 10^{-3} m = 375mm$$

تمرین) شانه یا کارتن مقوایی تخم‌مرغ پس از شکل‌گیری در خلاء به‌مدت 18s روی تسمه نقاله‌ای حرکت کرده و آن‌گاه وارد یک کوره گازسوز می‌شود تا رطوبت آن به‌مدت مطلوب کاهش یابد. برای افزایش ظرفیت خط تولید پیشنهاد شده که تعدادی آبگرمکن تابشی مادون قرمز بالای تسمه نقاله نصب شود که شار گرمایی $500\frac{w}{m^2}$ را تأمین کند. سطح کارتن $0/0625m^2$ و جرم آن قبل از ورود به تسمه نقاله $0/22kg$ است که 0/75 آن را بعد از فرآیند شکل دادن آب تشکیل می‌دهد. پیشنهاد خرید گرمکن‌ها در صورتی به تأیید مدیر فنی خواهد رسید که درصد رطوبت کارتن در حین عبور از تسمه نقاله از 75% به 65% برسد. آیا این پیشنهاد را تأیید می‌کنید. گرمای نهان تبخیر آب $2400\frac{kJ}{kg}$.

حل:

$$h_{fg} = 2400 = 2400 \times 10^3 \frac{J}{kg}$$

شرایط خلاء فرض می‌شود زیرا می‌خواهیم انتقال حرارت از طریق جابه‌جایی نداشته باشیم همچنین ضریب انتشار یا ضریب صدور یا ε نداشته است. بنابراین از تشعشع صرفنظر می‌کنیم. چون زمان انتقال حرارت معلوم می‌باشد بنابراین معادله‌ی بقاء انرژی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} q_{in} + q_g = q_{st} + q_{out} \\ \dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} + \dot{E}_{out} \end{cases}$$

اگر زمان انتقال حرارت معلوم باشد معادله‌ی بقاء انرژی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E_{in} + E_g = E_{st} + E_{out}$$

راه‌حل اول: اول گرمای داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$q_{in} = q'' A \times$ زمان

$E_{in} = q_{in} = 5000 \times 0/0625 \times 18 = 5625$:گرمای داده شده به شانه تخم‌مرغ

گرمای مورد نیاز را حساب می‌کنیم که باید برحسب ژول (J) باشد:

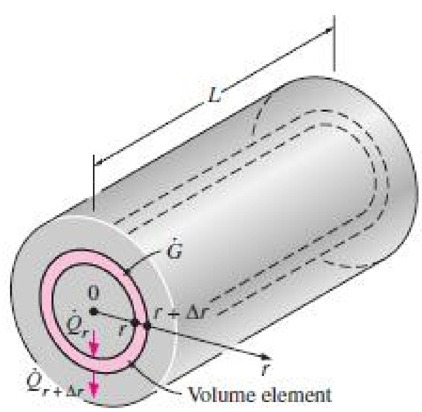
گرمای مورد نیاز: $q_{evp} = 0/22 \times 2400 \times 10^3 (0/75 - 0/65) = 52800J$ وقتی تغییر فاز داریم

$\Leftarrow \quad q_{evp} = Mh_{Rg}$

چون گرمکن گرمای $5625J$ به ما تحویل می‌دهد بنابراین دستگاه مورد نظر نمی‌تواند گرمای مورد نیاز را تأمین کند و نمی‌تواند خریداری شود.

q_{in} گرمای داده شده $> q$ گرمای مورد نیاز

تمرین) اگر یک جزء از لوله‌ای به ضخامت dr در فاصله‌ی r از مرکز داشته باشیم معادله‌ی انرژی (حرارت) برای المان انتخاب شده را به‌دست آورید. فرض کنید که استوانه توپر می‌باشد.



حل)

$A = 2\pi rL = \pi DL$

q_r حرارت ورودی به المان

q_{r+dr} حرارت خروجی از المان

نکته: برای یک دیواره با منبع حرارتی ثابت کردیم که:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \alpha = \frac{k}{\rho c}$$

اکنون می‌خواهیم برای یک استوانه معادله هدایت را پیدا کنیم:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gt}$$

$$(I)\ q_{in} + q_g = q_{out} + q_{st}$$

$$\dot{q}_g = \dot{q}v\ (\dot{q} = \frac{w}{m^3} = \frac{\text{حرارت تولید شده}}{\text{حجم}}) = \dot{q}Adr = \dot{q}2\pi rLdr$$

$$q_{in} = q_r = -kA\frac{\partial T}{\partial r} = -k(2\pi rL)\frac{\partial T}{\partial r}$$

چون تغییرات در جهت شعاع است.

$$q_{out} = q_{r+dr} = -k2\pi \underbrace{r}_{3} L\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{\underbrace{r}_{1}+\underbrace{dr}_{2}}$$

بسط تیلور $= \underbrace{-k2\pi rL\frac{\partial T}{\partial r}}_{1} \underbrace{-k2\pi rL\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}}_{2} \underbrace{-k2\pi L\frac{\partial T}{\partial r}dr}_{3}$

$$q_{st} = \rho v_{cp}\frac{\partial T}{\partial t} = \rho Adrc_p\frac{\partial T}{\partial t} = \rho 2\pi rLdrc_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

اگر مقادیر فوق را در معادله‌ی بقاء حرارت (I) (انرژی) قرار می‌دهیم:

اکنون طرفین را بر $2k\pi rLdr$ (ضرایب $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$) تقسیم می‌کنیم و به‌جای $\frac{k}{\rho\cdot c_p}$ مقدار α را قرار می‌دهیم:

معادله‌ی کلی هدایت برای یک استوانه با منبع حرارتی ناپایدار $\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{q}{k}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$

تمرین) توزیع دمای دائم در یک دیواره‌ی یک‌بعدی با ضریب رسانایی گرمایی k و ضخامت L به‌صورت زیر: $T(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ بیان شده است، که در آن x فاصله از لبه می‌باشد. فرمولی یا عبارتی برای نرخ تولید گرما بر واحد حجم ($\dot{q}$) برای این دیواره در $x=0$ روی سطح و $x=L$ در انتهای سطح به‌دست آورید.

حل)

نکته: فرمول هدایت کلی برای دیواره به‌صورت زیر است:

یک‌بعدی : $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial r}$$

سه‌بعدی : $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q}{k}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

از معادله داده شده مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=3ax^2+2bx+c$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=6ax+2b \quad (I)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q}{k}=0 \quad (II)$$ چون جریان دائم است.

$$(I)\ ,\ (II)\ \Rightarrow\ 60x+2b+\frac{\dot{q}}{k}=0\ \Rightarrow\ \dot{q}=-k(6ax+2b)$$

$$\begin{cases} x=0\ \Rightarrow\ \dot{q}=-k(2b) \\ x=L\ \Rightarrow\ \dot{q}=-k(6aL+2b) \end{cases}$$

تمرین) در یک لحظه توزیع دمای یک جسم همگن و بی‌نهایت بزرگ به‌صورت تابع زیر داده شده است:

$$T(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2-xy+2yz$$

با فرض خواص ثابت و بدون تولید حرارت داخلی نشان دهید که جریان پایدار است.

حل:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+\frac{\partial}{\partial y}(-4y-x+2z)+\frac{\partial}{\partial z}(2z+2y)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

مشتق دوم : $2-4+2=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t}=0$ بنابراین پایدار است.

تمرین 4) توزیع دما در یک دیوار که در آن تولید حرارت صورت نمی‌گیرد در یک فرآیند گذرا با سختی زیر داده شده است. آیا دیواره در حال سرد شدن است یا گرم شدن؟ با استفاده از قانون بقاء حرارت این مسئله را ثابت کنید.

حل) برای حل این مسئله یک المان به ضخامت dx انتخاب می‌کنیم. بنابراین از معادله‌ی حرارت استفاده کرده و ثابت می‌کنیم که دیواره در حال سرد شدن است.

تولید حرارت نداریم

$$\dot{E}_{in}+\dot{E}_g=\dot{E}_{st}+\dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{q}_{in}+\cancel{\dot{q}_g}^{\,0}=\dot{q}_{st}+\dot{q}_{out} \Rightarrow \dot{q}_{in}=\dot{q}_{st}+\dot{q}_{out} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -kA\frac{\partial T}{\partial x}=-kA\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+dx}+\rho vc\frac{\partial T}{\partial t}$$

طرفین را بر ρvc تقسیم می‌کنیم تا $\frac{\partial T}{\partial t}$ را حساب کنیم:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{kA}{\rho vc}\left[\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+dx}-\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x}\right]$$

اگر ثابت کنیم که $\frac{\partial T}{\partial t}$ منفی باشد بنابراین دیواره در حال سرد شدن است بنابراین:

چون $\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+dx}<\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x}$ می‌باشد. در نتیجه مشخص است که $\frac{\partial T}{\partial t}$ منفی خواهد بود.

حالت پایدار

برای دیواره : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\cdot\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}^{\,0}$

منبع حرارتی نداریم

در حالت یک بعدی : $\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0 \Rightarrow k\frac{d^2T}{dx^2}+\cancel{\dot{q}}^{\,0}=0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0$

هدایت $\begin{cases} q = kA\dfrac{\Delta T}{L} \\ q = \dfrac{\Delta T}{\dfrac{L}{kA}} = \dfrac{\Delta T}{R} \end{cases}$ جابه‌جایی $\begin{cases} q = hA\Delta T \\ q = \dfrac{\Delta T}{\dfrac{L}{hA}} = \dfrac{\Delta T}{R} \end{cases}$

مقاومت هدایتی

فرمول مذکور : $q_x = \dfrac{\text{دمای نهایی - دمای اولیه}}{\text{مقاومت کلی}}$

معادله کلی هدایت برای استوانه با منبع حرارتی و ناپایدار : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} + \dfrac{\dot{q}}{k} = \dfrac{1}{\alpha}\overset{\text{پایدار}}{\cancel{\dfrac{\partial T}{\partial t}}}^{0}$

$\Rightarrow\ k\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{k}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} + \overset{\text{منبع حرارتی نداریم}}{\cancel{\dot{q}}^{0}} = 0$

برای یک بعدی : $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[kr\dfrac{dT}{dr}\right] = 0$

مقاومت هدایتی برای استوانه $= \dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi kL}$ کره : $\begin{cases} R_{\text{هدایت}} = \dfrac{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}}{4\pi k} \\ R_{\text{جابه‌جایی}} = \dfrac{1}{hA} = \dfrac{1}{h(4\pi r^2)} \end{cases}$

اگر h زیاد باشد R جابه‌جایی قابل صرفنظر است. چون جوشش در داخل کره انجام می‌شود.

معادله کلی هدایت برای کره :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

برای دیواره : $x = 0 \quad n = 0$

برای استوانه : $q = r \quad n = 1$ $\qquad \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^n}\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{\dot{q}}{k} = \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial t}$

برای کره : $q = r \quad n = 2$

مثال) تولید درجه حرارت در یک دیوار تخت از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$T(x) = a + b\sinh x + c^{5x^2}$$

با فرض این‌که $b=-5\frac{k}{m}$ باشد، مقدار انتقال حرارت را برای دیواره‌هایی با مساحت $10m^2$ در بدو ورود به دیواره $x=0$ پیدا کنید. ضریب هدایتی دیواره را $40\frac{w}{m\cdot k}$ فرض کنید.

حل)

چون k دیواره را داریم پس از فوریه استفاده می‌کنیم:

$$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad q=-kA\frac{dT}{dx}$$

چون گفته شده در بدو حرکت: $x=0$

$$\frac{dT}{dx}=0+b\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}+10cx \quad \Rightarrow \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0}=bx\frac{1+1}{2}+0=b$$

$$\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0}=-5\frac{k}{m} \qquad q_{in}=-kA\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0}=(-40)\times10\times(-5)=2000w=2kw$$

مثال) توزیع دمای دائم پایدار در یک ماده‌ی نیمه‌شفاف که حرارت را از خود عبور می‌دهد و ضریب رسانایی آن k و ضخامت L مطابق شکل زیر در معرض شار لیزری قرار گرفته و به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T(x)=-\frac{A}{ka^{2}}e^{-ax}+Bx+C$$

که در آن A و a و b و c ثابت‌های معلوم می‌باشند. در این وضعیت جذب تابش در ماده باعث تولید گرمای داخلی متغیر $\dot{q}(x)$ می‌شود.

الف) عبارت‌هایی (فرمول‌هایی) برای شار حرارتی در سطح بالا و پائین (q'') به‌دست آورید.

ب) عبارت (فرمولی) برای $\dot{q}_x$ پیدا کنید.

حل)

$$q''\cdot\frac{q}{A}=-k\frac{dT}{dx}$$

$$T(x)=-\frac{A}{ka^{2}}e^{-ax}+Bx+C \;\Rightarrow\; \frac{dT}{dx}=-\frac{A}{ka^{2}}(-ae^{-ax})+B$$

$$q''_{x=0}=-k\left[\frac{Aa}{ka^{2}}+B\right]=-\left[\frac{A}{a}+kB\right]$$ شار حرارتی برای ورود به سطح

شار حرارتی در $x=-L$ $\quad q''_{x=L} = -k\left[\frac{A}{ka}e^{aL}+B\right] = -\left[\frac{A}{a}e^{aL}+kB\right]$

چون انتقال حرارت یک‌بعدی (در جهت x) می‌باشد، بنابراین برای دیواره با منبع حرارتی:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\overbrace{\cancel{\frac{dT}{dt}}}^{\text{پایدار}}{}^{0} \quad \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2}=\frac{Aa}{ka^2}(-a)e^{-ax}=\frac{-A}{k}e^{-ax}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\dot{q}(x)}{k}=0$$ (دیوار با منبع حرارتی و پایدار) $$\Rightarrow \dot{q}(x)=k\left(\frac{A}{k}e^{-ax}\right)=Ae^{-ax}$$

فصل دوم: پره‌ها

یکی از روش‌هایی که در صنعت استفاده می‌شود تا ضریب انتقال حرارت افزایش یابد استفاده از پره می‌باشد. پره‌ها معمولاً به شکل مستطیلی، پره‌ی سوزنی (Pin)، پره شعاعی و پره‌ی مثلثی می‌باشد. معمولاً بهترین پره زمانی می‌باشد که با استفاده از فرمول کارایی پره $\varepsilon_{fin} = (\frac{kp}{hA_c})^{\frac{1}{2}}$ بهترین و بیش‌ترین کارایی را داشته باشد.

(1) با افزایش k ، کارایی پره افزایش می‌یابد. بعنوان مثال در صنعت از آلومینیوم و مس یا آهن استفاده می‌کنند مانند سیلندر ماشین یا کندانسور پشت یخچال.

(2) کارایی پره‌ها با افزایش نسبت $\frac{P}{A_C} = \frac{\text{محیط}}{\text{سطح مقطع}}$ افزایش می‌یابد. بهمین‌علت از پره‌های نازک با فاصله‌ی کم استفاده می‌شود.

(3) برطبق فرمول کارایی پره، استفاده از پره هنگامی که ضریب جابه‌جایی h کوچک می‌باشد بیش‌تر قابل توجیه است. بنابراین هنگامی که یک سیال گاز می‌باشد. به‌ویژه زمانی که انتقال حرارت از طریق جابه‌جایی آزاد صورت گیرد نیاز بیش‌تری به پره می‌باشد. به‌عنوان مثال در رادیاتور ماشین پره‌ها همیشه در خارج رادیاتور نصب می‌شوند چون در داخل h آب زیاد می‌باشد و نیازی به پره نیست.

(4) به‌طور کلی زمانی از پره استفاده می‌شود که ε_f یعنی کارایی پره بزرگ‌تر یا مساوی 2 باشد: $\varepsilon_f \geq 2$

به‌طور کلی در صنعت از پره‌های شعاعی استفاده می‌شود و علّت آن این است که این پره‌ها دارای بازده بیش‌تری نسبت به پره‌ی مستطیلی، پره‌ی مثلثی و پره سهمی (نوک‌تیز) می‌باشند نوک تبری (نوک‌تیز) بعد از آن پره‌های مثلثی نسبت به پره‌های مستطیلی به‌دلیل نیاز کمتر به ماده بهتر می‌باشد. پره‌های سهمی به‌دلیل هزینه زیاد در هنگام ساخت آن‌ها به‌ندرت به‌کار می‌روند.

برای به‌دست آوردن بازده پره تقسیم‌بندی زیر را انجام می‌دهیم:

1- پره طویل باشد.

2- پره متوسط باشد و اتلاف حرارت از نوک پره بسیار کم باشد.

3- پره کوتاه باشد.

انتقال حرارت فقط در جهت طول فین انجام میشود و به صورت رسانش میباشد

شکل کاربردهای متنوع پره‌ها

مطابق جدول زیر:

بازده	انتقال حرارت از پره	اندازه پره
$\eta = \dfrac{1}{mL}$	$q_f = \sqrt{hpkA_c}\,(T_s - T_\infty)$	پره‌ی طویل $L > 100t$
$\eta = \dfrac{\tanh mL}{mL}$	$q_f = \sqrt{hpkA_C}\,(T_s - T_\infty)\tanh mL$	پره‌ی متوسط $20t < L < 100t$
$\eta = \dfrac{*}{mL}$	$q_f = \sqrt{hpkA_C}\,(T_s - T_\infty)*$	پره کوتاه $L < 20t$

$$* = \frac{\sinh mL + \dfrac{h}{mL}\cosh mL}{\cosh mL + \dfrac{h}{mL}\sinh mL}$$

درنتیجه ازروابط خواهیم داشت:

پره طویل : $q_f = M\theta_b$

$$\left.\begin{array}{l} M = \sqrt{hpkA_c} \\ \theta_b = T_s - T\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$ پره متوسط : $q_f = M\theta_b \tanh mL$

پره کوتاه : $q_f = M\theta_b\,*$

پره طویل:

اگر طول پره بسیار زیاد باشد و یا به‌عبارتی: $L > 100t$ نرخ انتقال گرما یا نرخ انتقال حرارت از پره q_f به‌روش زیر محاسبه می‌شود:

شرط مرزی اول $(B \cdot C \cdot 1)$: $x = 0 \Rightarrow T = T_s$: $\theta_b = \theta_0 = T_s - T_\infty$

bace

چون جواب عمومی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

باتوجه به اینکه $x = 0$ می‌باشد بنابراین جواب عمومی به‌شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$(I)\ \theta_0 = c_1 + c_2$$

شرط مرزی دوم $x=\infty \Rightarrow T=T_\infty \Rightarrow \theta=T_\infty-T_\infty=0$ $\qquad B\cdot C\cdot 2$

در جواب عمومی جایگزین می‌کنیم:

$$(II)\;0=c_1e^{m\times\infty}+\cancel{c_2e^{-m\times\infty}}^{\,0}$$

وبا حل 2 معادله (I) و (II) مقادیر c_1 و c_2 را پیدا می‌کنیم:

II از معادله $\Rightarrow c_1=0$ $\qquad$ I از معادله $\Rightarrow c_2\cdot\theta_0$

اکنون مقادیر c_1 و c_2 را جایگزین می‌کنیم(در جواب عمومی): $\qquad T-T_\infty=(T_s-T_\infty)e^{-mx}$

$$\theta=\theta_0e^{-mx}$$

همچنین برای محاسبه انتقال حرارت جابه‌جایی از پره از قانون سرمایش نیوتن استفاده می‌کنیم:

$$dq_f=h\underbrace{pdx}_{A}(T-T_\infty)\xrightarrow[T-T_\infty]{\text{جایگزین به‌جای}}dq_f=\int_0^\infty hp(T_s-T_\infty)e^{-mx}dx$$

$$=q_f=hp(T_s-T_\infty)\times\frac{-1}{m}e^{-mx}\Big|_0^\infty=\frac{-hp}{m}(T_s-T_\infty)\cancel{e^{-m\times\infty}}^{\,0}+\frac{hp}{m}(T_s-T_\infty)e^{-m\times 0}$$

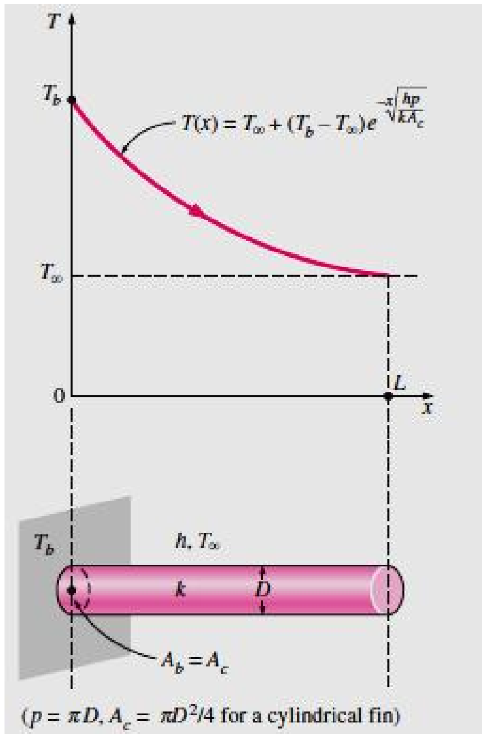
$$q_f=\frac{hp}{m}(T_s-T_\infty)$$

به‌جای m مقدار قرار می‌دهیم:

$$q=\frac{hp}{\sqrt{\frac{hp}{kA_C}}}(T_s-T_\infty)\;\Rightarrow\;q_f=\sqrt{hpkA_C}\,(T_s-T_\infty)$$

$$\eta=\frac{q_{\text{حقیقی}}}{q_{\text{ایده‌آل}}}=\frac{q_f}{q_{max}}=\frac{\sqrt{hpkA_C}\,(T_s-T_\infty)}{hpL(T_s-T_\infty)}\;\Rightarrow\;\eta=\frac{\sqrt{kA_C}}{\sqrt{hp}}\times\frac{1}{L}\;\Rightarrow\;\eta=\frac{1}{mL}$$

چون ماکزیمم است.



نکته: هرچه طول پره زیادتر باشد بازده کم‌تر می‌شود.

مثال) انتهای یک پره‌ی سوزنی مطابق شکل زیر (Pin Fin) با سطح مقطع دایره‌ای در دمای $100^\circ C$ قرار دارد. طول پره طویل است. اگر قطره پره $5mm$ و سطح میله در هوای محیط $25^\circ C$ و ضریب جابه‌جایی $100\frac{w}{m^2\cdot k}$ قرار گرفته باشد و جنس میله از مس با $k = 398\frac{w}{m\cdot k}$ باشد، مقدار گرمای هدررفته از پره سوزنی را حساب کنید.

حل) باتوجه به اینکه پره طویل است:

$$q_f = \sqrt{hpkA_C}(T_s - T_\infty)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{سطح مقطع} & A_C = \dfrac{\pi d^2}{4} \\ \text{محیط} & P = \pi D \end{array}\right\} \Rightarrow \quad q_f = \sqrt{100(\pi\times 0/005)\times 398\times(\frac{\pi}{4}\times 0/005^2)}\,(100-25) = 8/3\,w$$

مثال) یک میله‌ی گرد بسیار بلند (طویل) آلومینیومی از یک سر به یک دیوار گرم متصل است و در اثر جابه‌جایی به سیال سرد محیط گرما منتقل می‌شود.

الف) اگر قطر میله 3 برابر شود نرخ انتقال حرارت (q_f) چه تغییری خواهد کرد؟

ب) اگر به‌جای آلومینیوم از مس استفاده شود نرخ انتقال گرما چه تغییری خواهد نمود؟

حل)

$$q_f = \sqrt{hpkA_C}(T_s - T_\infty) \Rightarrow \begin{cases} A_C = \dfrac{\pi D^2}{4} \\ P = \pi D \end{cases} \Rightarrow q_f = (h\pi Dk\dfrac{\pi D^2}{4})^{\frac{1}{2}}\theta_b$$

$$q_f = \frac{\pi}{2}(hk)^{\frac{1}{2}}D^{\frac{3}{2}}\theta_b$$

اگر قطر میله 3 برابر شود: $\dfrac{q_f(3D)}{q_f(D)} = \dfrac{\frac{\pi}{2}(hk)^{\frac{1}{2}}(3D)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\pi}{2}(hk)^{\frac{1}{2}}D^{\frac{3}{2}}} = 3^{\frac{3}{2}} = 5/2$.

ب) اگر به‌جای آلومینیوم از مس استفاده کنیم:

آلومینیوم $k = 240\dfrac{w}{m \cdot k}$

مس $k = 400\dfrac{w}{m \cdot k}$

می‌دانیم که: $q \propto k^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{q_f(Cu)}{q_f(Al)} = (\frac{k_{Cu}}{k_{Al}})^{\frac{1}{2}} = (\frac{400}{240})^{\frac{1}{2}} = 1/29$$

فصل سوم: رسانش گذرا (غیرپایدار)

بسیاری از مسائل انتقال حرارت به زمان بستگی دارد که این نوع انتقال حرارت، انتقال حرارت گذرا، غیـردائم یـا ناپایـدار (unsteady state) گفته می‌شود. انتقال حرارت گذرا به دو روش بررسی می‌شود:

1) روش فشرده

2) روش غیرفشرده

1) روش فشرده:

هنگامی که گرادیان دما در داخل جسم کوچک باشد می‌تـوان از ایـن روش اسـتفاده کـرد. بنـابراین دمـا در یـک زمـان مشخص در تمام نقاط جسم یکسان است. به‌عنوان مثال اگر یک گلوله‌ی داغ از جنس فلـز کـه بسـیار کوچـک اسـت در دمای یکنواخت T_i قرار دارد و در مایعی با دمای سرد T_∞ قرار می‌گیرد می‌خواهیم زمان سرد شدن ایـن گلولـه را پیـدا کنیم.

دمای سرد و سیال $= T_\infty$

دمای اولیه گلوله‌ی داغ $= T_i$

$$\cancel{\dot{E}_{in}}^{0} + \cancel{\dot{E}_{g}}^{0} = E_{st} + \dot{E}_{aut} \Rightarrow \dot{E}_{st} = -\dot{E}_{out}$$

$$\rho vc \frac{dT}{dt} = \left[-hA_s(\overset{\text{دمای نهایی}}{T} - T_\infty)\right]$$

نکته: برای جامدات: $c = c_p = c_v$ چون تغییرات حجم و فشار نداریم.

فرض: $\left.\begin{array}{l} \theta = T - T_\infty \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dT}{dt} \end{array}\right\}$ $\Leftarrow$ $\rho vc \dfrac{d\theta}{dt} = -hA_s\theta \Rightarrow \int_0^t dt = -\int_{\theta_i}^{\theta} \dfrac{\rho vc}{hA_s}\dfrac{d\theta}{\theta}$

$$\text{(I)}\ t = \frac{\rho vc}{hAs}\ln\frac{\theta_i}{\theta}$$

$$\text{(II)}\ t = \frac{\rho vc}{hA_s}\ln\frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$$

$\dfrac{\rho vc}{hA_s}$ را ثابت زمانی می‌نامیم و با τ_t نشان می‌دهیم. می‌خواهیم معادله‌ی (II) را ساده‌تر کنیم. بنابراین L_c کـه طـول

مشخصه می‌باشد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

برای دیواره‌ی تخت: $L_c = \frac{v}{A_s} = \frac{L^3}{L^2} = L \Rightarrow t = \frac{\rho L_c}{h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T\infty}$

برای استوانه: $L_c = \frac{v}{A_s} = \frac{\pi r^2 L}{2RrL} = \frac{r}{2} \Rightarrow t = \frac{\rho r_c}{2h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$

برای کره: $L_c = \frac{v}{A_s} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{r}{3} \Rightarrow t = \frac{\rho r_c}{3h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$

نمودارهای جریان گذرا:

می‌خواهیم نموداری برحسب $\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$ و زمان رسم کنیم. برای این‌کار از معادله (I) استفاده می‌کنیم.

$$\text{(III)}\ \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\frac{t}{\frac{\rho vc}{hA_s}}}$$

الف) اگر زمان صفر باشد:

$$t = 0 \Rightarrow e^0 = 1 \Rightarrow \frac{T - T_0}{T_i - T_\infty} = 1 \Rightarrow T = T_\infty$$

ب) اگر زمان بی‌نهایت باشد.

$$t = \infty \Rightarrow e^\infty = 0 \Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0 \Rightarrow T = T_\infty$$

ج) اگر زمان 1s باشد و ثابت زمانی نیز یک باشد:

$$t = 1 \Rightarrow \frac{\rho vc}{hA_s} = 1 \Rightarrow e^{-1} = 0/368 \Rightarrow \frac{T - T_0}{T_i - T_\infty} = 0/368$$

نکته: ثابت زمانی τ_t برابر $\frac{\rho vc}{hA_s}$ می‌باشد:

$$\tau_t = \frac{1}{hA_s} \times \rho vc = R_{conv} \cdot c_t$$

مثال) ساچمه‌های فولادی به قطر 12mm ابتدا تا دمای 1150k حرارت داده می‌شوند و سپس در هوا با دمای

$T_\infty = 325k$ و $h = 20\frac{w}{m^2 \cdot k}$ به‌طور آهسته تا $400k$ خنک شده تا تنش‌زدایی شده و شکنندگی آن‌ها کم شود. با فرض بر این‌که ضریب هدایتی ساچمه‌های فولادی برابر با $40\frac{w}{m \cdot k}$ و دانسیته آن‌ها $7800\frac{kg}{m^3}$ و همچنین ظرفیت گرمایی (c) $600\frac{J}{kg \cdot k}$ باشد زمان لازم جهت سرد شدن ساچمه‌ها را به‌دست آورید.

حل)

برای محاسبه‌ی زمان باید مطمئن شویم که می‌توان از ظرفیت فشرده استفاده کرد. برای این‌کار اول باید عدد بدون بعد بیو را حساب کنیم. اگر عدد بدون بعد بیو کم‌تر از 0/1 باشد روش ظرفیت فشرده قابل استفاده خواهد بود. عدد بیو به روش زیر به‌دست می‌آید:

$D = 12mm$

$T_i = 1150k$

$h = 20\frac{w}{m^2 \cdot k}$

$T_{\text{نهایی}} = T = 400k$

$k = 40$

$\rho = 7800$

$c = 600$

$$k\cancel{A}\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{L} = h\cancel{A}(T_{s,2} - T_\infty) \Rightarrow \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_\infty} = \frac{\frac{L}{kA}}{\frac{1}{hA}} = \frac{\text{مقاومت هدایتی}}{\text{مقاومت جابه‌جایی}} = Bi$$

فرمول ساده‌تر بیو به‌شکل زیر است:

$Bi < 0/1 \Rightarrow$ روش ظرفیت فشرده $\qquad Bi = \frac{hL_c}{k}$

عدد بیو که بدون بعد می‌باشد همیشه باید کم‌تر از 0/1 باشد تا بتوان از روش ظرفیت فشرده استفاده کرد یعنی مقاومت در برابر هدایت خیلی کم‌تر از مقاومت در برابر جابه‌جایی می‌باشد. نکته بعدی این‌که برای حل این مسئله چون ضریب انتشار یا ضریب صدور ε داده نشده است بنابراین از تشعشع به محیط صرف‌نظر می‌شود:

اگر تشعشع داشته باشیم:

$$\dot{E}_{in}+\dot{E}_{g}=\dot{E}_{st}+\dot{E}_{out}\quad\Rightarrow\quad\dot{E}_{st}=-\dot{E}_{out}$$

$$q_{st}=-(q_{convection}+q_{radiation})$$

$$\rho vc\frac{dT}{dt}=-\left[hA(T-T_{\infty})+\varepsilon\sigma A(T^{4}-T_{\text{محیط}}^{4})\right]$$

بعد از ساده کردن به معادله‌ی زیر خواهیم رسید:

$$t=\frac{\rho vc}{hA_{s}}\Big(\underbrace{\frac{1}{T^{3}}}_{\text{دمای نهایی}}-\underbrace{\frac{1}{T_{i}^{3}}}_{\text{دمای اولیه}}\Big)$$

حل مثال) اول عدد بیو را حساب می‌کنیم که باید کم‌تر از 0/1 باشد. هرچه عدد بیو کم‌تر از 0/1 باشد جواب به‌دست آمده دقیق‌تر است:

$Bi=\frac{hL_{c}}{k}$ $\quad L_{c}=\mathbf{0}$ کره- استوانه- دیوار تخت

کره $\quad Bi=\frac{hr}{3k}=\frac{20\times\frac{12\times10^{-3}}{2}}{3\times40}=0/001$

(معادله عمومی) کره $\quad t=\frac{\rho vc}{3h}\ln\frac{T_{i}-T_{\infty}}{T-T_{\infty}}=\frac{7800\times12\times10^{-3}\times600}{6\times20}\ln\frac{1150-325}{400-325}=1122(s)=19\min$

روش ظرفیت غیرفشرده

حالت‌هایی اتفاق می‌افتد که نمی‌توان از روش فشرده استفاده کرد، چون گرادیان دما در جسم ناچیز نمی‌باشد. در این حالت عدد بیو مساوی یا بزرگ‌تر از 0/1 می‌باشد $(Bi\geq0/1)$. بنابراین از روش ظرفیت غیرفشرده استفاده می‌کنیم.

$$T=T(\underset{\text{مکان}}{x},\underset{\text{زمان}}{t},T_{i},T_{\infty},L,\alpha,h)$$

روش غیرفشرده:

1) حل دقیق

2) حل تقریبی

اگر بخواهیم از حل تقریبی استفاده کنیم باید یک عدد بدون بعد یعنی عـدد فوریـه را حسـاب کنـیم واگـر عـدد فوریـه بزرگ‌تر از 0/2 باشد از روش تقریبی می‌توان استفاده کرد.

عدد فوریه: اگر عدد Bi را حساب کنیم و مساوی و یا بزرگ‌تر از 0/1 به‌دست آمد نشان‌دهنده این است که دما در داخل جسم با توجه به زمان تغییر می‌کند. اول باید عدد فوریه را به‌دست آورد. برای این‌کار از معادله‌ی (III) استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\theta}{\theta_i}=\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}=e^{-\left(\frac{ht}{\rho vc/A_s}\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{ht}{\rho vc/A_s}=\frac{ht}{\rho L_c{}^{\circ}C}$$

مثال) سطح یک دیواره‌ی مسطح که در محیط جابه‌جایی قرار گرفته است را در نظر بگیرید. دمای θ را برای $Bi=10$ و $F_0=0/1$ پیدا کنید؟

حل) با داشتن عدد (Bi) مقادیر ζ_1 و ζ_2 و ζ_3 و ζ_4 را از پیوست های موجود درکتب مراجع می‌خوانیم واز رابطه‌ی: $c_n=\dfrac{4\sin\zeta_n}{2\zeta_n+\sin(2\zeta_n)}$ مقادیر c_1 و c_2 و c_3 و c_4 را حساب می‌کنیم.

$\zeta_1=1/4289$

$\zeta_2=4/3078$

$\zeta_3=7/2281$

$\zeta_4=10/2003$

$$c_1=\frac{4\sin(1/4289)}{2(1/4289)+\sin(2\times1/4289)}=1/2620$$

$c_2=-0/393$ $\qquad$ $c_3=0/2104$ $\qquad$ $c_3=-0/1309$

$$\theta^*=c_1e^{-F_0\zeta_1^2}\cos(\zeta_1\cancel{x^*})+c_2e^{-F_0\zeta^2}\cos(\zeta_2\cancel{x^*})+c_3e^{-F_0\zeta_3^2}\cos(\zeta_3\cancel{x^*})+c_4e^{-F_0\zeta_4^2}\cos(\zeta_4\cancel{x^*})x^*=1$$

$\theta^*=\mathbf{L}$

نکته: چون روی سطح هستیم بنابراین: $x^*=1$

حل تقریبی برای دیواره: این روش، روش ساده‌تری نسبت به حل دقیق می‌باشد. اگر عدد فوریـه را $F_0=\dfrac{\alpha t}{L^2}$ را حسـاب کردیم و بزرگ‌تر از 0/2 بود فقط جمله‌ی اول در سری در نظر گرفته می‌شود به‌همین علّت حل تقریبی نامیده می‌شود.

$$\theta_0^* = c_1 e^{(-\zeta_1^2 F_0)} \cos(\zeta_1 x^*)$$

مبدأ

مقادیر c_1 و ξ_1 از جدول 5-1 کتاب هولمن خوانده شود.

الف) برای مرکز دیواره: $x^* = 0$

$T_i =$ (اولیه) دمای مرکز

$T_0 = t$ دمای مرکز بعد از زمان

$$\theta_0^* = c_1 e^{(-\zeta_1^2 F_0)}$$

$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

ب) برای یک نقطه انتخابی $x^* = \frac{x}{L}$

$$\theta^* = c_1 e^{(-\zeta_1^2 Fo)} \cos(\zeta_1 \frac{x}{L})$$

بنابراین دمای انتخابی T بعد از زمان t به‌دست می‌آید.

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

انرژی منتقل شده: همیشه با داشتن دمای مرکز دیواره (T_0) بعد از زمان t می‌توان مقدار انرژی که به دیوار منتقل شده است را به‌دست آورد.

$$Q = \int_0^t q\,dt$$

این انرژی برحسب ژول می‌باشد و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$Q =$ مقدار انرژی خارج شده از یک نقطه مشخص که مجهول می‌باشد.

$Q_0 =$ مقدار انرژی ماکزیمم یا ایده‌آل

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin\zeta_1}{\zeta_1}\theta_0^*$$

$$Q_0 = \rho v_{max} c (T_i - T_\infty)$$

مقدار ξ_1 از جدول 5-1 خوانده می‌شود.

حل تقریبی برای استوانه: برای نشان دادن مکان از $r^* = \frac{r}{r_0}$ استفاده می‌کنیم که r_0 شعاع خارجی می‌باشد و برای زمان از عدد فوریه استفاده می‌کنیم. برای استوانه و همچنین کره مقادیر c_1 و ζ_1 از جدول 5-1 کتاب با توجه به عدد $Bi = \frac{hr_0}{k}$ می‌خوانیم.

برای استوانه از فرمول روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

$$\theta^* = c_1 e^{(-\zeta_1^2 F_o)} J_o(\zeta_1 r^*)$$

J_0 کمیت تابع بسل می‌باشد و از جدول ب-4 با توجه به فاصله از مرکز به‌دست می‌آید.

حل تقریبی برای کره: $\theta^* = c_1 e^{(-\zeta_1^2 F_o)} \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*)$

مثال) فولاد به‌طور متوالی گرم و سرد می‌شود تا شکنندگی آن کاهش یابد، به این فرآیند تا به‌کاری گفته می‌شود. ورق فولاد با $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$، $c = 500 \frac{J}{kg \cdot k}$، $k = 45 \frac{w}{m \cdot k}$ را به‌ضخامت $100mm$ در نظر بگیرید. ابتدا ورق در دمای یکنواخت $T_i = 300^0C$ است و دمای محیط در داخل کوره گازی $T_\infty = 700^0C$ و ضریب جابه‌جایی $h = 500 \frac{w}{m^2 \cdot k}$ در دو طرف دیوار برقرار است. ورق تا چه مدت باید در کوره بماند تا دمای مرکز ورق به 550^0C برسد؟

حل)

نکته : $2L = 100mm$

نکته $\begin{cases} T_0 = 550^0C \\ x^* = 0 \end{cases}$

دیواری

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{500 \times 50 \times 10^{-3}}{45} = 0/556 \Rightarrow$$ ظرفیت غیرفشرده

$t = ?$

با میان‌یابی از جدول 5-1 $\begin{cases} \zeta_1 = 0/682 \\ c_1 = 1/076 \end{cases}$ $\quad \theta^* = c_1 e^{(-\zeta_1^2 F_o)} c \cdot s(\zeta_1 x^*)$

برای مرکز $x^* = 0$ است. بنابراین:

$$\theta_0^* = c_1 e^{(\zeta_1^2 F_o)}$$

$$\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = c_1 e^{(-\zeta_1^2 F_o)} \Rightarrow \frac{550-700}{300-700} = 1/076 e^{(-0/682^2 \times F_o)} \Rightarrow F_0 = 2/27 > 0/2$$

بنابراین فرض تقریبی بودن درست است.

$$F_0 = \frac{\alpha t}{L^2} \Rightarrow 2/27 = \frac{1/154 \times 10^{-5} t}{(50 \times 10^{-3})^2} \Rightarrow t = 492(s)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{45}{7800 \times 500} = 1/15 \times 10^{-5} (\frac{m^2}{s})$$

$$\theta^* = c_1 e^{(-\zeta_1^2 F_o)} \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*)$$

مثال) در قسمتی از فرآیند عملیات حرارتی میله‌های استوانه‌ای فولادی ضدزنگ 304 با قطر $100(mm)$ و دمای اولیه 500^0C در حمام روغن 30^0C معلق و سرد می‌شوند. اگر با گردش روغن ضریب جابه‌جایی $500\frac{w}{m^2 \cdot k}$ حاصل شود چه مدت طول می‌کشد تا دمای سطح میله $(r^* = 1)$ به 50^0C برسد. در این لحظه میله‌ها از محیط خارج برده می‌شوند.

حل)

$D = 100mm$

$T_i = 500^0C$

$T_\infty = 30^0C$

$h = 500\frac{w}{m^2 \cdot k}$

چون خواص را نداریم باید خواص را در دمای میانگین به‌دست آوریم:

$$\bar{T} = \frac{500+30}{2} = 265 + 273 = 540k \; ; \; 600k$$

$$\begin{cases} T_s = 50^0C \\ r^* = 1 \\ t = ? \end{cases} \text{: روی سطح} \qquad \text{جدول الف-1} \Rightarrow \begin{cases} k = 19/8 \\ c = 557 \\ \rho = 7900 \end{cases}$$

اول عدد بیو را حساب می‌کنیم:

$$Bi=\frac{hr_0}{2k}=\frac{hD}{4k}=\frac{500\times 100\times 10^{-3}}{4\times 19/8}=0/63>0/1 \Rightarrow$$ ظرفیت غیرفشرده

نکته: برای خواندن c_1 و ξ_1 باید عدد بیو را از فرمول $Bi=\frac{hr_0}{k}$ حساب شود:

$$Bi=\frac{hr_0}{k}=1/26 \Rightarrow$$ از جدول 5-1 $$\begin{cases} c_1=1/241 \\ \zeta_1=1/345 \end{cases}$$

J_0 کمیت تابع بسل نامیده می‌شود و با توجه به r^* خوانده می‌شود. چون $r^*=1$

$$\theta^*=c_1e^{-\zeta_1^2F_0}J_0(\zeta_1r^*)$$

در نتیجه: $$\theta^*=\frac{T_s-T_\infty}{T_i-T_\infty}=c_1e^{-\zeta_1^2F_0}J_0(\zeta\cancel{r^*}^{1}) \Rightarrow \quad J_0=0/7652$$

$$\Rightarrow \frac{50-30}{500-30}=1/241^{-1/345^2F_0}\times 0/752(1/345) \Rightarrow F_0=1/8806>0/2 \Rightarrow$$ فرض تقریبی بودن درست است.

$$\Rightarrow F_0=\frac{\alpha t}{r_0^2} \Rightarrow t=1047s \Rightarrow 17/45\min$$

مثال) کره‌ای به ضخامت $80mm$ با مشخصات $k=50\frac{w}{m\cdot k}$ و $\alpha=1/5\times 10^{-6}\frac{m^2}{s}$ در یک محیط که سیال آن روغن می‌باشد خنک می‌شود. دمای روغن $T_\infty=50^\circ C$ است و ضریب جابه‌جایی این محیط سرمایشی $h=1000\frac{w}{m^2\cdot k}$ می‌باشد. در یک لحظه‌ی معین دمای سطح کره $150^\circ C$ می‌باشد. اگر دمای اولیه کره $200^\circ C$ باشد زمان این سرمایش را به‌دست آورید.

حل)

نکته: $$Bi=\frac{hr_0}{k}\xrightarrow{\text{از جدول}}\zeta_1, c_1$$

$$D=80mm$$

$$k=50\frac{w}{m\cdot k}$$

$$\alpha=1/5\times 10^{-6}\frac{m^2}{s}$$

$T_\infty = 50^0 C$

$h = 1000\dfrac{w}{m^2 \cdot k}$

$Bi = \dfrac{hr_0}{3k} = \dfrac{hD}{6k} = \dfrac{1000 \times 80 \times 10^{-3}}{6 \times 50} = 0/27 > 0/1$ ظرفیت غیرفشرده

$Bi = \dfrac{hr_0}{k} = 0/8 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/2236 \\ \zeta_1 = 1/432 \end{cases}$ $\Leftarrow$ 1-5 جدول

$\theta^* = c_1 e^{-\zeta_1^2 F_0} \dfrac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*)$

$\begin{cases} T_s = 150 \\ r^* = 1 \end{cases}$

برای روی سطح کره $r^* = 1$ پس:

$T_i = 200^0 C$

$t = ?$

$\theta^* = c_1 e^{-\zeta_1^2 F_0} \dfrac{1}{\zeta_1} \sin(\zeta_1)$

$\theta^* = \dfrac{T_s - T_\infty}{T_i - T_\infty} \Rightarrow \dfrac{150-50}{200-50} = 1/223 e^{(-1/432^2 F_0)} \dfrac{1}{1/432} \sin(1/432)$

$\Rightarrow F_0 = 0/1163 < 0/2$ فرض تقریبی بدون اشتباه است.

$F_0 = \dfrac{\alpha t}{r_0^2} \Rightarrow t = \mathbf{L}$

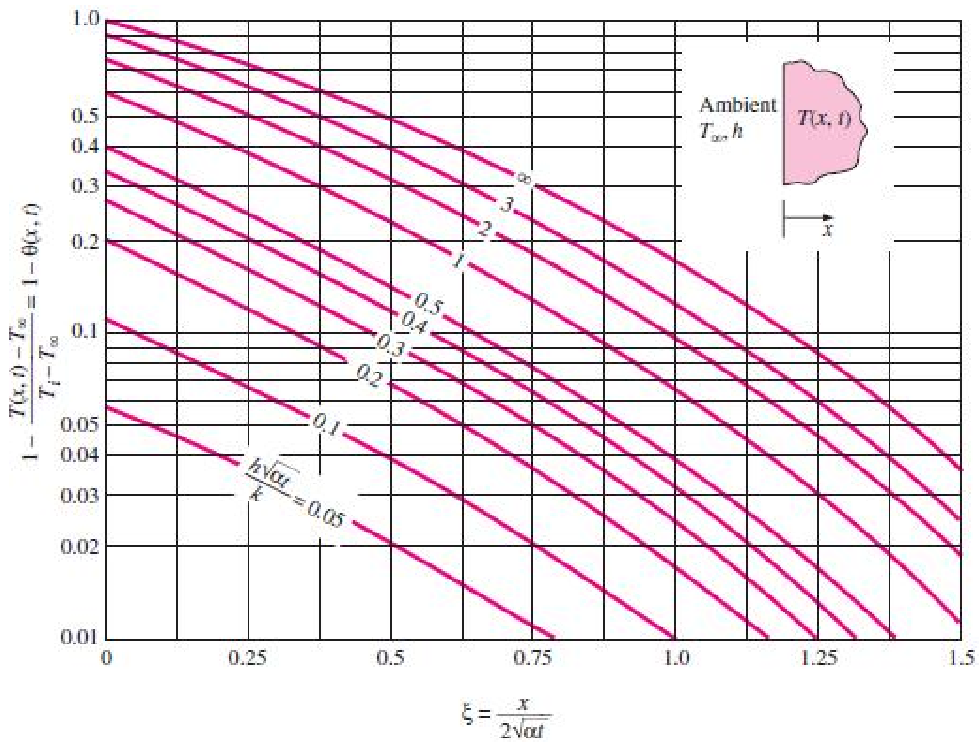
جسم نیمه‌بی‌نهایت: چنین جسمی از همه‌ی جهات به‌غیر از یک جهت تا بی‌نهایت گسترش یافته است. جسم نیمه‌بی‌نهایت تقریب مناسبی برای اغلب مسایل‌ها می‌باشد، مانند زمین که زمین جسم نیمه‌بی‌نهایت در جهت افقی فرض می‌شود. مطابق شکل زیر:

جسم نیمه‌بی‌نهایت را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: دمای سطح ثابت باشد (مانند قطب شمال و جنوب)

مطابق شکل زیر بعد از گذاشتن زمان بی‌نهایت، دمای سطح زمین با دمای تمام نقاط انتخاب شده در داخل زمین یکی

خواهد شد.



x: (فاصله زمین)

$$\frac{T_{(x,t)} - T_s}{T_i - T_s} = \text{erfw}$$

erfw تابع خطای گوس نامیده می‌شود که جواب یک انتگرال بوده از پیوست (ب-2) کتاب انتقال حرارت هولمن به‌دست می‌آید.

با داشتن erfw از جدول مقدار w را می‌خوانیم که مقدار w برابر است با:

$$w = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$ فاصله از سطح زمین

مثال) هنگام لوله‌کشی خط لوله‌ی آب در زیرزمین باید به امکان یخ زدن آن در هوای سرد توجه کرد. اگرچه مسئله تعیین دمای خاک برحسب زمان با تغییر شرایط سطح پیچیده است ولی با فرض بر این‌که دمای سطح زمین در یک مدت طولانی ثابت باقی بماند می‌توان نتایج تقریبی معقولی به‌دست آورد. اگر دمای اولیه خاک $20^\circ C$ باشد و دمای سطح آن به‌مدت 60 روز در مقدار ثابت $-15^\circ C$ قرار گیرد حداقل عمق (x) که آب درون لوله یخ نزند چه‌قدر باید باشد؟

حل) برای حل این مسئله نخست عمق x که آب درون لوله یخ می‌زند را به‌دست می‌آوریم و لوله را در فاصله‌ی بیش‌تری از عمق به‌دست آمده دفن می‌کنیم تا آب یخ نزند. مطابق شکل زیر:

$$\text{خواص خاک در دمای } 300k: \begin{cases} \rho = 2050\dfrac{kg}{m^3} \\ k = 0/52\dfrac{w}{m\cdot k} \\ c = 1840\dfrac{J}{kg\cdot k} \\ \alpha = \dfrac{k}{\rho c_p} = 0/138\times10^{-6}\dfrac{m^2}{s} \end{cases}$$

$$\frac{T_{(x,t)} - T_s}{T_i - T_s} = erfw \Rightarrow \frac{0-(-15)}{20-(-15)} = erfw$$

$$\frac{15}{35} = erfw \Rightarrow erfw = 0/429 \xrightarrow{\text{از جدول}} w = 0/4$$

$$w = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \Rightarrow 0/4 = \frac{x}{2\sqrt{0/138\times10^{-6}\times60\times24\times60\times60}} \Rightarrow$$

$$x = 0/676\,m$$

بنابراین لوله باید مثلاً در عمق $0/7\,m$ دفن شود تا آب یخ نزند.

حالت دوم: شار حرارتی ثابت باشد:

در این حالت $\frac{q}{A}$ ثابت می‌باشد، مانند قرار دادن یک اتوی داغ بروی سطح.

حالت سوم: جابه‌جایی با هدایت برابر باشد یا شرط بر این‌که $T_\infty > T_s$ یعنی سیال گرم باشد.

تأثیرهای چندبعدی: تاکنون انتقال حرارت را یک‌بعدی مورد بررسی قرار دادیم ولی در حالت‌هایی که انتقال حرارت دوبعدی می‌باشد. به‌عنوان مثال استوانه کوچکی که طول آن نسبت به قطرش بسیار بزرگ نباشد انتقال حرارت هم در جهت x و هم در جهت r تغییر خواهد کرد. بنابراین دما در داخل استوانه به r و x و t بستگی دارد.

سنجش و دانش

$$\frac{T_{(x,r,t)}-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\left.\frac{T_{(x,t)}-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\text{جهت توزیع دما در جهت x}}\times\left.\frac{T_{(r,t)}-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\text{جهت توزیع دما در جهت r}}$$

$$\frac{T_{(x,r,t)}-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\left.\frac{\theta}{\theta_i}\right|_{\text{استوانه}}\times\left.\frac{\theta}{\theta_i}\right|_{\text{دیواره}}$$

مثال) یک لوله‌ی فولادی به قطر $1m$ و ضخامت $40mm$ را در نظر بگیرید. سطح بیرونی لوله کاملاً عایق شده است. لوله قبل از شروع جریان سیال در داخل آن دارای دمای $-20^\circ C$ است. سپس روغن با دمای $60^\circ C$ در لوله جریان می‌یابد. و ضریب جابه‌جایی داخلی $h=500\frac{w}{m^2\cdot k}$ است. چون ضخامت لوله خیلی کم‌تر از قطر آن است دیواره را مانند یک دیواره‌ی تخت در نظر بگیرید و مقادیر زیر را حساب کنید:

(1) عدد بیو و فوریه پس از 8 دقیقه از شروع جریان سیال

(2) دمای سطح درونی لوله که عایق شده است. بعد از 8 دقیقه $T(0,t)=?$ (3) شار گرمایی از روغن بـه لولـه بعـد از $8\min$ (4) در مدت $8\min$ چه مقدار انرژی از روغن به هر متر از لوله منتقل می‌شود؟

حل)

$$\bar{T}=\frac{-20+60}{2}=20^\circ C\quad\begin{cases}\rho=7832\\ c=434\\ k=63/9\\ \alpha=18/8\times10^{-6}\end{cases}$$

1) ظرفیت غیرفشرده $\Rightarrow$ $Bi=\frac{hL}{k}=\frac{500\times0/04}{63/9}=0/313>0/1$

$Fo=\frac{\alpha t}{L^2}=\frac{18/8\times10^{-6}\times8\times6}{0/04^2}=5/64>0/2\Rightarrow$ حل تقریبی

2) برای زمانی که $x^*=0$ می‌باشد یعنی پشت عایق:

$$\theta^*=c_1e^{-\zeta_1^2Fo}\cos(\zeta_1x^*)\xrightarrow{x^*=0}\theta_0^*=c_1e^{-\zeta_1^2Fo}$$

مقادیر c_1 و ζ_1 را می‌خوانیم:

$c_1=1/047$ و $\zeta_1=0/531$

دمای سطح درونی لوله (مبدأ) بعد از 8 دقیقه

$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \Rightarrow 0/214 = \frac{T_{(0,8\min)} - 60}{-20 - 60} \Rightarrow T(0,8\min) = 42/9^0 c \Rightarrow$$

3) انتقال گرما به سطح درونی لوله در $x = L$ توسط جابه‌جایی صورت مـی‌گیـرد. بنـابراین از قـانون سـرمایش نیـوتن استفاده می‌کنیم که در این حالت $t = 480s$ می‌باشد و $L = 40mm$ است.

$$q''_{(L,t)} = h\left[T_{(L,t)} - T_\infty\right]$$

در معادله‌ی روبه‌رو که دمای دیگر نقاط دیواره را می‌دهد، داریم:

$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\zeta_1 x^*)$$

می‌خواهیم دمای $T_{(L,t)}$ را پیدا کنیم. برای زمانی که $x = L$ باشد:

$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\zeta_1 \frac{x}{L}) = \theta_0^* \cos(\zeta_1)$$

به‌جای θ^* مقدار قرار می‌دهیم:

$$\frac{T_{(L,t)} - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \theta_0^* \cos(\zeta_1)$$

$$\Rightarrow \frac{T_{(L,t)} - 60}{-20 - 60} = 0/214\cos(0/53) \Rightarrow T_{(L,t)} = 45/2^0C$$

$$q''_{(L,t)} = h(T_{(L,t)} - T_\infty) = 500[45/2 - 60] = -7400(\frac{w}{m^2})$$

نکته: علامت منفی نشان‌دهنده‌ی این است که انتقال حرارت از طرف روغن به لوله می‌باشد و در جهت خـلاف x صـورت گرفته است. بعبارتی دیگر حرارت به دیواره منتقل شده است. بنابراین q_{st} منفی می‌باشد.

4) مقدار انرژی ماکزیمم یا ایده‌آل

$$Q_0 = \rho v_{max} c(T_i - T_\infty)$$

$$Q'_0 = (7832)\overbrace{(\pi \times 1 \times 0/04)}^{V' = \pi DL \text{ حجم بر واحد طول لوله}}(434)(-20 - 60) = -34171359/65(J)$$

$$\frac{Q'}{Q'_0} = 1 - \frac{\sin\zeta_1}{\zeta_1}\theta_0^* \Rightarrow \frac{Q'}{-34171359/65} = 1 - \frac{\sin(5/31)}{5/31} \times 0/214 = 2/72 \times 10^7 \ \frac{J}{m}$$

مثال) برای سرمایش و گرمایش در زمانی که عدد بیو کوچک‌تر از 0/1 باشد می‌توان از ظرفیت فشرده استفاده کرد. یک کره‌ی مسی به‌قطر $10mm$ داریم که با قرار گرفتن در اجاقی به دمای $75^{o}C$ می‌رسد. این گلوله‌ی مسی پس از بیرون آوردن از اجاق در معرض جریان هوا با فشار $1atm$ و دمای $23^{o}C$ قرار می‌گیرد که سرعت هوا در این شرایط $10\frac{m}{s}$ می‌باشد. چه مدت طول می‌کشد تا کره به دمای $35^{o}C$ برسد؟

حل)

فرضیات زیر را انجام می‌دهیم:

1) خواص مس را در دمای میانگین حساب می‌کنیم.

2) دمای کره یکنواخت فرض می‌شود بنابراین می‌توان از ظرفیت فشرده استفاده کرد.

3) از اثرات تشعشع صرفنظر می‌کنیم.

$$\overline{T}=\frac{75+35}{2}=55+273=328k \Rightarrow \rho=8933$$

$$T_{\infty}=23+273=296\begin{cases}\mu=181\times10^{-7}\\ \nu=15\times10^{-6}\\ k=0/02\end{cases}$$

چون T_i صورت است نیاز به منفی نیست. $t=\frac{\rho vc}{hA_s}\ln\frac{T_i-T_{\infty}}{T-T_{\infty}}$ ظرفیت فشرده

برای به‌دست آوردن h باید از عدد ناسلت مربوط به کره استفاده کنیم. برای کره از فرمول ویتاکِر می‌توان استفاده کرد و عدد ناسلت را به‌دست آورد:

$\mu=$ لزجت سیال با توجه به دمای میانگین سیال

$$Nu_x=2+\left[0/4(Re)^{0/5}+0/06(Re)^{\frac{2}{3}}\right](Pr)^{0/4}(\frac{\mu}{\mu_s})=44/5$$

$\mu_s=$ لزجت سیال نزدیک به سطح با توجه به T_s

$$Re=\frac{u_D}{\nu}=\frac{10\times0/01}{15\times10^{-6}}=6666/7 \qquad Pr=0/7 \qquad \frac{\mu}{\mu_s}=\frac{1}{4}$$

$$T_s=75^{o}C\ ;\ 350k \Rightarrow \mu_s=208/2\times10^{-7}$$

$$L_c=\frac{V}{A_s}$$ طول واحد اصلاح شده

c_p

$$Nu_x=\frac{hD}{k}\Rightarrow t=\frac{8933\times385\times0/01}{6\times122}\ln\frac{75-23}{35-23}\longrightarrow t=69/2(s)\;;\;1\min$$

مثال) نقطه اتصال یک ترموکوپل که تقریباً کروی شکل است برای اندازه‌گیری دمای یک جریان گاز به‌کار می‌رود. ضریب جابه‌جایی بین سطح اتصال گاز برابر با $h=400\frac{w}{m^2\cdot k}$ و خواص ترموفیزیکی ترموکوپل برابر با $k=20\frac{w}{m\cdot k}$، $c=c_p400\frac{J}{kg\cdot k}$ و $\rho=850\frac{kg}{m^3}$ است.

الف) قطر مورد نیاز برای ترموکوپل که ثابت زمانی آن $1s$ باشد چه‌قدر است؟

ب) اگر دمای ترموکوپل در آغاز $25^\circ C$ باشد و در معرض جریان گاز به دمای $200^\circ C$ قرار گیرد چه مدت طول می‌کشد تا ترموکوپل به دمای $199^\circ C$ برسد.

حل)

نکته: چون ضریب انتشار داده نشده است بنابراین از تشعشع (تابش) صرفنظر می‌کنیم.

الف)

ثابت زمانی $\tau_t=\frac{1}{hA_s}\rho vc=\frac{\rho c}{h}\cdot\frac{v}{A_s}$

$$\frac{v}{A_s}=L_c=\frac{D}{6}\Rightarrow\tau_t=\frac{\rho_c}{h}\frac{D}{6}\Rightarrow1=\frac{850\times4000}{400}\times\frac{D}{6}\Rightarrow D=7/06\times10^{-4}m$$

$$Bi=\frac{hL}{k}=\frac{h\frac{v}{A_s}}{k}=\frac{hD}{6k}=\frac{400\times7/06\times10^{-4}}{6\times20}=2/35\times10^{-3}m<0/1\Rightarrow$$ ب) ظرفیت فشرده

$$t=\frac{\rho vc}{hA_s}\ln\frac{T_i-T_\infty}{T-T_\infty}\Rightarrow t=\frac{\rho Dc}{6h}\ln\frac{T_i-T_\infty}{T-T_\infty}$$

بی نهایت زمان طول می‌کشد تا دما به $200^\circ C$ برسد:

$$t=\frac{850\times7/06\times10^{-4}}{6\times400}Ln\frac{25-200}{199-200}=5/2s$$

مثال) در فرآیند شیمیایی و داروسازی معمولاً از یک سیستم بسته استفاده می‌شود که مواد داخل آن در اثر یک فرآیند گرمایش گذرا از دمای محیط تا دمای موردنظر گرم می‌شود. حالتی را در نظر بگیرید که ماده شیمیایی با دانسیته $\rho = 1200\dfrac{kg}{m^3}$ و گرمای ویژه $c = c_p = 2200\dfrac{J}{kg\cdot K}$ حجمی برابر با $V = 2/25 m^3$ را در سیستم اشغال می‌کند. محفظه عایق شده است و دمای ماده شیمیایی باید از دمای محیط $T_{sur} = 300K$ به دمای فرآیند $T = 450K$ برسد. عمل گرمایش با عبور بخار آب اشباع در $T_h = 500K$ در یک لوله مارپیچ جدار نازک به‌قطر $20mm$ انجام می‌شود. ضریب انتقال حرارت مربوط به میعان بخار در داخل لوله $h_i = 10/000\dfrac{w}{m^2\cdot K}$ و مربوط به مواد شیمیایی بیرون آن $h_o = 2000\dfrac{w}{m^2\cdot K}$ است. اگر زمان مورد نیاز برای گرمایش ماده شیمیایی از $300K$ به $450K$ برابر $60min$ باشد طول مورد نیاز لوله مارپیچ چه‌قدر باید باشد؟

حل)

$$\text{Data}: \begin{cases} \text{ضریب کل انتقال حرارت} \quad u = \left[\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{1}{h_o}\right]^{-1} \\ q = uA_s(T_h - T_{\text{نهایی}}) \end{cases}$$

برای حل این مسأله فرض می‌کنیم که اتلاف حرارتی به بیرون نداشته باشیم و همچنین در اثر واکنش شیمیایی تولید و جذب انرژی نداشته باشیم. بنابراین با استفاده از موازنه انرژی حرارت ذخیره شده در سیستم باید برابر با حرارت گرفته شده باشد. ضریب کلی انتقال حرارت u زمانی به‌کار می‌رود که هم ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی داشته باشیم و هم ضریب انتقال حرارت خارجی. در این حالت می‌توان از فرمول: $u = \left[\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{1}{h_o}\right]^{-1}$ استفاده کرد که از ضخامت لوله صرفنظر شده است:

صرفنظر

h_i | دیواره | h_o |

$$q = uA\Delta T$$

$$\dot{E}_{in} + \cancel{\dot{E}_g}^{0} = \dot{E}_{st} + \cancel{\dot{E}_{out}}^{0} \Rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{st}$$

$$q_{st} = q_{\text{گرفته شده}} \Rightarrow mc_p dT = uA_s(T_h - T_{\text{نهایی}})$$

$$\Rightarrow \rho vc\frac{dT}{dt} = uA\,(T_h - T_{\text{نهایی}})$$

اکنون دماها را در یک طرف و زمان را در طرف دیگر قرار می‌دهیم:

$$\int_{T_i}^{T} \frac{dT}{T_h - T} = \frac{uA_s}{\rho vc}\int_0^t dt$$

$$-Ln\frac{T_h - T}{T_h - T_i} = \frac{uA_s}{\rho vc}t \Rightarrow A_s = \frac{-\rho vc}{ut}Ln\frac{T_h - T}{T_h - T_i} = \frac{-1200\times 2/25\times 2200}{\left[\frac{1}{10000}+\frac{1}{2000}\right]^{-1}\times 3600}Ln\frac{500-450}{500-300} = 1/37\,m$$

$$L = \frac{A_s}{\pi D} \Rightarrow L = 21/8\,m$$

فصل چهارم :مقدمه‌ای بر انتقال حرارت جابه‌جایی

در این قسمت فقط در مورد جابه‌جایی بحث خواهد شد. می‌دانیم که ضریب انتقال حرارت از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$q=\bar{h}A(T_s-T_\infty)$ و $\bar{h}=$ ضریب انتقال حرارت متوسط

در حالی که h_x ضریب انتقال حرارت موضعی (محلی) می‌باشد و برای یک نقطه مشخص حساب می‌شود. می‌خواهیم ارتباط بین ضریب انتقال حرارت متوسط و ضریب انتقال حرارت موضعی را پیدا کنیم.

اگر T_s-T_∞ ثابت فرض شود امّا سطح و ضریب انتقال حرارت تغییر کند:

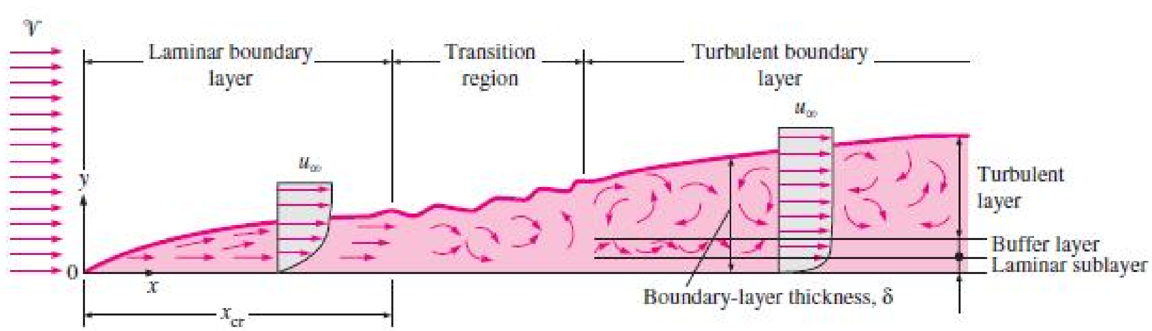
$$q=T_s-T_\infty\int_{A_s}h_x dA$$

$$T_s-T_\infty\int_{A_s}h_x dA=\bar{h}A(T_s-T_\infty)\ \Rightarrow\ \bar{h}=\frac{1}{A}\int_{A_s}h_x\cdot dA\ \Rightarrow\ \bar{h}=\frac{1}{L}\int_0^L h_x dx$$

اگر $A=L\times 1$ بنابراین $dA=dx$ در نتیجه: $\bar{h}=\frac{1}{L}\int_0^L h_x dx$ (x ضریب فاصله از لبه‌ی صفحه می‌باشد)

مفهوم لایه مرزی: همان‌طور که می‌دانیم ضخامت لایه مرزی سرعتی را با δنشان می‌دهیم که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

پروفیل سرعت : $u(y)=c_1+c_2y+c_3y^2+c_4y^3$



توجه: ضخامت لایه مرزی حرارتی δ_t می‌باشد.

جابه‌جایی $q=\bar{h}A(T_s-T_\infty)$

هدایت (رسانش) $q=-kA\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$

$$\Rightarrow\ \bar{h}\cancel{A}(T_s-T_\infty)=-k\cancel{A}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}\ \Rightarrow\ \bar{h}=\frac{-k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_s-T_\infty}$$

ومعادله پروفیل دما نیز به‌شکل زیر است:

$$T_{(y)} = a + by + cy^2 + dy^3$$

$$\bar{h} = \frac{-k\left[b + 2cy + 3dy^2\right]}{T_s - T_\infty} = \frac{-kb}{T_s - T_\infty}$$

عدد استانتون (Stanton): این عدد بدون بعد برای محاسبه‌ی ضریب انتقال حرارت h به‌کار می‌رود.

$$st = \frac{\text{شار حرارتی جابه‌جایی}}{\text{شار حرارتی هدایتی (ذخیره شده)}} \Rightarrow st = \frac{h\cancel{\Delta T}}{\rho u c_p \cancel{\Delta T}} \Rightarrow st = \frac{h}{\rho u c_p}$$

$$q = \dot{m} c_p \Delta t$$

$$q = \frac{m}{t} c_p \Delta t$$

$$q = \frac{\rho v}{t} c_p \Delta t$$

$$q = \frac{\rho A L}{t} c_p \Delta t$$

$$q_A = \rho \frac{L}{t} c_p \Delta t$$

عدد پرانتل: این عدد به‌نام دانشمند آلمانی پرانتل، که مفهوم لایه مرزی را معرفی کرده است نامگذاری شده است.

$$Pr = \frac{\text{لزجت سینماتیک}}{\text{ضریب نفوذ حرارتی}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{\rho c_p}} = \frac{c_p \mu}{k}$$

δ_t ضخامت لایه مرزی حرارتی و δ ضخامت لایه مرزی سرعتی می‌باشد.

$$\frac{\delta}{\delta_t} = Pr^{\frac{1}{3}}$$

عدد ناسلت: عدد ناسلت یا نوسلت فقط در انتقال حرارت جابه‌جایی استفاده می‌شود و مانند عد استانتون برای محاسبه‌ی ضریب انتقال حرارت متوسط در جهت x یعنی $\bar{h}_x$ و برای محاسبه‌ی ضریب انتقال حرارت موضعی (محلی) در جهت x یعنی h_x به‌کار می‌رود.

x : فاصله از لبه‌ی صفحه می‌باشد.

k : ضریب رسانش (هدایت)

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k}$$

در جابه‌جایی اجباری از فرمول مقابل می‌توان استفاده نمود:

$$\overline{Nu_x} = \frac{\bar{h}_x x}{k} \quad و \quad \bar{h}_x = 2h_x$$

تفاوت عدد بیو یا عدد ناسلت در این است که عدد بیو در جریان گذار کاربرد دارد در حالی‌که عدد ناسلت فقط در جریان جابه‌جایی سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

1) اگر هوا یا آب سیال باشد:

$0/6 < Pr < 50$ و $Pr = 0/7$ هوا و $Pr = 4/2$ آب

فرمول باکینهام برای جریان آرام و گذرا : $Nu_x = 0/332 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$

اگر جریان درهم (مغشوش) باشد : $Nu_x = 0/029 Re^{0/8} Pr^{\frac{1}{3}}$

2) برای سیالاتی مانند روغن: در این حالت $Pr > 50$

$$Nu_x = \frac{0/328 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[1 + \left(\frac{0/048}{Pr}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}}$$

3) برای فلزات مذاب مانند جیوه، سدیم و پتاسیم:

در این حالت $Pr < 0/6$

$$Nu_x = 0/56 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

ضریب کولبُرون J_x: برای سیالاتی که عدد پرانتل آن‌ها بین 0/6 تا 50 می‌باشد می‌توان رابطه‌ای به‌دست آورد که برحسب پرانتل و عدد استانتون باشد. این رابطه فقط برای محدوده‌ی آرام و گذرا کاربرد دارد و به تشابه اصلاح شده رینولدز معروف است.

$$st_x = \frac{Nu_x}{Re\,Pr} = \frac{0/332 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}}{Re\,Pr} \Rightarrow st_x = 0/332 Re^{-\frac{1}{2}} Pr^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow st_x \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = 0/332 Re^{-\frac{1}{2}}$$

$$st_x = Pr^{\frac{2}{3}} = \underset{\text{ضریب کولبرون}}{J_H} = \underset{\text{ضریب اصطکاک}}{\frac{C_f}{2}}$$

عدد ناسلت به‌روش بی‌بعدسازی: بی‌بعدسازی روشی است که برای حل مسائل انتقال حرارت به‌کار می‌رود. اگر دمای سیال T_∞ و دمای سطح T_s باشد، پارامترهای بدون بعد $y^* = \frac{y}{L}$ و $T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$ را تعریف می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} &q = hA(T_\infty - T_s) \text{ قانون نیوتن} \quad \text{اگر } T_\infty > T_s \text{ باشد} \\ &q = -kA\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(T_\infty - T_s) = -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

چون $T > T_s$ می‌باشد، بنابراین مقدار $T_{High} - T_{Low}$ را قرار می‌دهیم و منفی لازم نیست.

$$h(T_\infty - T_s) = k\left.\frac{T - T_s}{\partial y}\right|_{y=0}$$

طرف سمت راست را بر $\frac{T_\infty - T_s}{L}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$h(T_\infty - T_s) = k\frac{\frac{T_\infty - T_s}{L}}{\frac{T_\infty - T_s}{L}}\cdot\left.\frac{T - T_s}{\partial y}\right|_{y=0}$$

معادله برحسب T^* و y^* به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$h = \frac{k}{L}\left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} \Rightarrow Nu = \frac{hL}{k} = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$$

ضریب اصطکاک به‌روش بی‌بعدسازی:

$$\tau_s = \mu\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

با تعریف $u^* = \frac{u}{u_0}$ و $y^* = \frac{y}{L}$ داریم:

$u_\infty \rightarrow$ سرعت روی لایه مرزی

$$\tau_s = \mu\left(\frac{u_\infty}{L}\right)\left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$$

$$u^* = \frac{u}{u_\infty} \Rightarrow u = u^* u_\infty \Rightarrow \partial u = u_\infty \cdot \partial u^*$$

$$y^* = \frac{y}{L} \Rightarrow y = y^* \cdot L \Rightarrow \partial y = L \cdot \partial y^*$$

بنابراین چون می‌دانیم که: $\tau_s = c_f \cdot \frac{\rho u_\infty^2}{2} \quad \Leftarrow \quad c_f = \frac{\tau_s}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}} = \frac{2\tau_s}{\rho u_\infty^2}$

$$c_f = \frac{2\mu \frac{u_\infty}{L} \cdot \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}}{\rho u_\infty^2} = \frac{2}{Re} \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$$

مثال) روغن موتور در $20^\circ C$ از روی صفحه‌ای به‌طول $20cm$ و با سرعت $1/2 \frac{m}{s}$ عبور می‌کند. صفحه تا درجه‌ی حرارت یکنواخت $60^\circ C$ گرم می شود. اتلاف حرارتی از صفحه را حساب کنید اگر عرض صفحه $1m$ فرض شود.

حل) روش زیر یا الگوریتم زیر را انجام می‌دهیم:

1- دمای میانگین را محاسبه می‌کنیم.

2- خواص را از جدول می‌خوانیم.

3- عدد رینولدز را حساب می‌کنیم.

4- فرمول صحیح را انتخاب می‌کنیم.

5- از قانون سرمایش نیوتن استفاده می‌کنیم.

$$\bar{T} = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{20+60}{2} = 40+273 = 313k \xrightarrow{\text{روغن موتور}} \begin{cases} \rho = 876 \\ \nu = 0/0002 \\ k = 0/144 \\ Pr = 2870 \end{cases}$$

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\underset{\text{برای صفحه}}{\underbrace{\nu}}} = \frac{1/2 \times 0/2}{0/0002} = 1200$$: جریان آرام

چون سیال روغن است $Pr > 50$:

$$Nu_x = \frac{0/338 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[1+(\frac{0/048}{Pr})^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} = 152/2$$

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{k} \Rightarrow 152/2 = \frac{h_x(0/2)}{0/144} \Rightarrow h_x = 109/6 \frac{w}{m^2 \cdot k}$$

برای ناحیه آرام : $q_x = h_x A(T_s - T_\infty) = 109/6(0/2\times1)(60-20) = 876/8\,w$

مثال) هوا با دمای 20^0C روی صفحه‌ی تختی به‌طول $0/3m$ جریان دارد. سرعت جریان هوا $30\frac{m}{s}$ بوده و صفحه در کل طولش تا دمای 55^0C گرم می‌شود. اگر لزجت هوا $\mu_{air} = 2\times10^{-5}\frac{kg}{m\cdot s}$ فرض شود ضخامت لایه مرزی سرعتی و ضخامت لایه مرزی حرارتی را پیدا کنید. فشار یک اتمسفر.

حل) برای حل این مسئله اول باید عدد رینولدز را به‌دست بیاوریم و برای محاسبه‌ی عدد رینولدز دانسیته‌ی هوا را نیاز داریم. بنابراین به‌روش زیر دانسیته و عدد رینولدز را به‌دست می‌آوریم و با توجه به این‌که عدد پرانتل هوا $Pr = 0/7$ می‌باشد. ضخامت لایه مرزی حرارتی محاسبه خواهد شد:

$$\rho = \frac{P}{R\overline{T}} = \frac{1/0132\times10^5 Pa}{287(37/5+273)} = 1/2(\frac{kg}{m^3})$$

$$\overline{T} = \frac{55+20}{2} = 37/5^0C + 273 = 310/5K$$

$$R = \frac{\text{ثابت جهانی گاز}}{\text{جرم مولکولی هوا}} = \frac{8314}{29} = 287\frac{J}{kg\cdot K}$$

$$Re = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} = \frac{1/2\times30\times0/3}{2\times10^{-5}} = 101/000 < 500000$$

برای جریان آرام : $\frac{\delta}{x} = \frac{4/51}{\sqrt{Re}} \Rightarrow \frac{\delta}{0/3} = \frac{4/51}{\sqrt{101000}} \Rightarrow \delta = 4/3\times10^{-3}m$

$$\frac{\delta}{\delta_t} = Pr^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{4/3\times10^{-3}}{\delta_t} = (0/7)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \delta_t = 4/8\times10^{-3}$$

مثال) نتایج آزمایشگاهی که برای ضریب انتقال حرارتی موضعی h_x برای جریان روی سطح ناصاف یک صفحه‌ی تخت به‌دست آمده است با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$h_x = ax^{-0/1}$$

که در آن a یک ضریب و x فاصله از لبه‌ی صفحه می‌باشد.

الف) فرمولی (عبارتی) برای نسبت ضریب انتقال حرارت متوسط (میانگین) $\bar{h}$ برای صفحه به‌طول $x = L$ و ضریب انتقال حرارت محلی (موضعی) به‌دست آورید.

$$\frac{\bar{h}}{h_x} = ?$$

ب) تغییرات h_x و $\bar{h}$ را به‌عنوان تابعی از x به‌صورت نمودار پیدا کنید؟

حل)

الف) قبلاً ثابت ک

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x dx$$

به‌جای x مقدار قرار می‌دهیم:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L (ax^{-0/1})dx = \overbrace{\frac{1}{x}\int_0^x (ax^{-0/1})dx}^{\text{به‌جای } L \text{ و } x \text{ می‌گذاریم}}$$

در انتهای صفحه

$$= \frac{a}{x}\int_0^x x^{-0/1}dx = \frac{a}{x}\left[\frac{x^{0/9}}{0/9}\right]_0^x = 1/11ax^{-0/1} = 1/11h_x$$

ب: می‌خواهیم $\bar{h}$ یعنی ضریب انتقال حرارت متوسط را برحسب h_x یعنی ضریب انتقال محلی (موضعی) پیدا کنیم:

حل بعهده شمادانشجویان محترم می باشد.

فصل پنجم: جریان خارجی (External Flow)

در این فصل به مسئله محاسبه‌ی نرخ انتقال حرارت برای سطوح مختلف به‌عنوان مثال یک لوله، کره و یک مجموعه‌ی لوله می‌پردازیم وضریب انتقال حرارت جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. حرکت جابه‌جایی در اثر عامل خارجی مانند فن یا پمپ صورت می‌گیرد به‌همین علت جریان خارجی نامیده می شود. الگوریتم زیر را در همه‌ی حالات انجام می‌دهیم:

1) هندسه‌ی جریان را تشخیص می‌دهیم که جریان را از روی یک صفحه یا کره و یا استوانه می‌باشد.

2) دمای میانگین را حساب می‌کنیم.

3) خواص را با دمای میانگین می‌خواهیم (با حدس و خطا)

4) عدد رینولدز را به‌دست می‌آوریم که جریان آرام، آرام و گذرا یا متلاطم خواهد بود.

5) رابطه‌ی مناسبی انتخاب می‌کنیم.

جریان از روی یک صفحه:

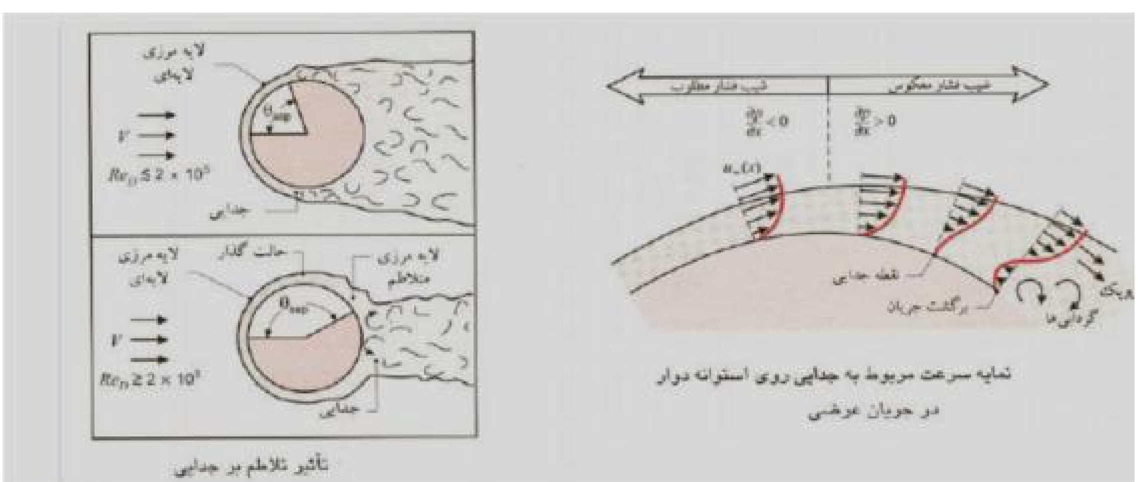
الف) روش تجربی (آزمایشگاهی)

ب) روش فرمولی (تئوری)

$$\begin{cases} 0/6 < \Pr < 50 \\ 0/6 < \Pr < 50 \end{cases} \text{برای سیالاتی مانند آب و هوا} \Leftarrow \quad \text{فرمول باکینهام:} \begin{cases} \overset{\text{موضعی}}{Nu_x} = 0/332 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \\ \overset{\text{متوسط}}{\overline{Nu_x}} = 0/664 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$Nu_x = 0/565 Pe^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{عدد پلکه}: Pe : Re \cdot Pr \quad \Leftarrow \text{برای فلزات مذاب} \Leftarrow \Pr \le 0/6$$

ج



تأثیر تلاطم بر جدایی

نمایه سرعت مربوط به جدایی روی استوانه دوار در جریان عرضی

معادلات لایه مرزی:

الف) معادله پیوستگی (پایستگی)

ب) معادله مومنتوم (اندازه حرکت)

ج) معادله انرژی

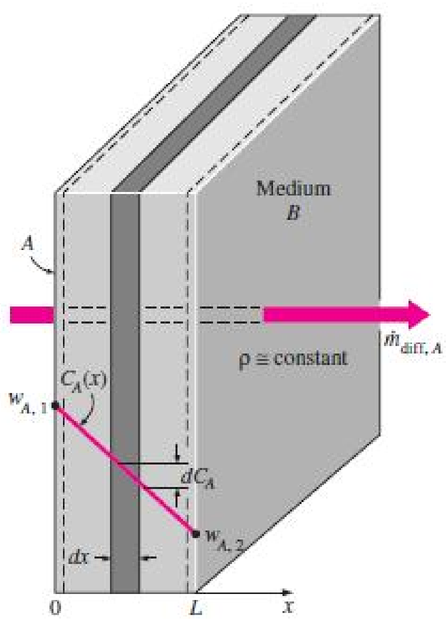
معادله پیوستگی: اولین معادله‌ای که مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدون شک قدیمی‌ترین معادله لایه مرزی خواهد بود. معادله پیوستگی همان معادله بقای جرم است که ماده نه خلق می‌شود و نه از بین می‌رود. جرم منحصراً توسط حرکت سیال به حجم کنترل دارد و یا از آن خارج می‌شود. فرضیات زیر را انجام می‌دهیم:

1- جریان آرام و دو بعدی باشد. $(dx, dy, 1)$

2- خواص ثابت می‌باشند.

3- جرم ورودی و خروجی در واحد زمان بررسی شود $[t = 1s]$

4- در جریان یک‌بعدی $dx = \partial x$ است. بنابراین تغییرات جرم خروجی $\dot{m}_x + dm_x$ خواهد بود. براساس بسط تیلور برای جریان دوبعدی جرم خروجی برابر با: $mx + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx$ خواهد بود چون $dx \neq \partial x$ می‌باشد.



5- جرم ورودی برابر با جرم خروجی است. انباشتگی نداریم.

جرم خروجی در جهت y $\quad m_y+\frac{\partial v_y}{\partial y}dy$

$m_y+\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial y}dy \qquad 1+2=3+4$

جرم خروجی در جهت y:

$m_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}dx$

برای جرم ورودی در جهت y با سرعت u به روش مشابه می‌توان نوشت:

$m_y=\rho v dx \quad (2)$

$\dot{m}=\rho u A$

جریان ورودی از سمت چپ: $\frac{m}{t}=\rho u\,(dy\times 1)$

چون $t=1$ می‌باشد: $m_x=\rho u\,dy \qquad (1)$

بنابراین جرم خروجی از سمت راست را به‌دست می‌آوریم:

$m_x+\frac{\partial m_x}{\partial x}dx$

$\rho u\,dy+\frac{\partial(\rho u dr)}{\partial x}dx \;\Rightarrow\; \rho\,(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx)dy \qquad (3)$

می‌توان جرم خروجی از بالا را به‌دست آورد:

$\rho\,(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy)dx \qquad (4)$

$\text{mass}(1)+\text{mass}(2)=\text{mass}(3)+\text{mass}(4)$

$\rho u dy+\rho v dx=\rho(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx)dy+\rho(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy)dx$

$\rho\frac{\partial u}{\partial x}dx\cdot dy+\rho\frac{\partial v}{\partial y}dx\,dy=0 \;\Rightarrow\; \rho\,dx\,dy\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

معادله فوق معادله پیوستگی نامیده می‌شود و عبارت کلی بقاء جرم است و باید در هر نقطه از لایه‌ی مـرزی قـانون فـوق صدق کند. اگر معادله پیوستگی با توجه به اولین شرط برای جریان آرام مورد بررسی قرار گیرد. بنابراین $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ چـون فقط در یک جهت حرکت می‌کنیم.

جریان از روی یک استوانه (لوله)

اگر ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی متوسط یعنی $\bar{h}$ را نداشته باشیم و لوله در معرض یک جریـان جابـه‌جـایی خـارجی قرار گیرد از فرمول هیلپرت (Hilpert) استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\bar{h}D}{k}=c\,(Re)^{n}\cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

که مقادیر c و n از جدول زیر به‌دست می‌آیند:

Re	c	n
0/4-4	0/98	0/33
4-40	0/91	0/38
M	M	M
4000-40/000	0/19	0/61
above 40000	0/027	0/8

نکته:اگر لوله دوار نباشد از جدول دیگری مقادیر c و n خوانده می‌شوند.

جریان از روی یک کره

اثرات لایه‌ی مرزی روی یک کره، شباهت زیادی به استوانه دارد. روابط بسـیار زیـادی بـرای کـره پیشـنهاد شـده اسـت. بهترین رابطه خطای کم توسط ویتاکِر (Whitaker) پیشنهاد شده است:

$$\overline{Nu}_{D}=2+(0/4Re_{D}^{\frac{1}{2}}+0/06Re_{D}^{\frac{2}{3}})\,Pr^{0/4}(\frac{\mu}{\mu_{s}})^{\frac{1}{4}}$$

μ: لزجت سیال در وسط دیواره با دمای میانگین خوانده می‌شود.

μ_s: لزجت سیال در کناره‌ی دیواره با T_s خوانده می‌شود.

مثال) بادسنج سیم داغ (Hot wire) وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سرعت گاز است. یک سیم پلاتینی به‌قطر $0/013\,cm$ و طول $1cm$ را در نظر بگیرید. دمای سطح سیم به‌وسیله یک مدار کنترل‌کننده در $500K$ ثابت نگه‌داشته می‌شود. این وسیله را در جریان هوا با دمای $T_\infty = 300K$ قرار می‌دهیم تا سرعت هوا را به‌دست آوریم. اگر ضریب الکتریکی پلاتین $17\mu\Omega\cdot cm$ باشد، سرعت جریان هوا $1\frac{m}{s}$ به‌دست می‌آید. شدت جریان لازم که باید از سیم عبور کند را به‌دست آورید. خواص را در دمای میانگین به‌دست آورید.

حل)

نکته: چون جریان از روی استوانه است باید از فرمول (Hilpert) استفاده کنیم.

$$\bar{T} = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{500+300}{2} = 400K \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0/883\,\frac{kg}{m^3} \\ k = 0/033 \\ c_p = 10^{14} \\ \alpha = 0/376\times10^{-4} \\ \nu = 25/9\times10^{-6} \\ Pr = 0/689 \end{cases}$$

$$Re_D = \frac{u_D}{\nu} = \frac{1\times0/00013}{25/9\times10^{-6}} = 5/019$$

از جدول مقادیر c و n را می‌خوانیم:

$$c = 0/91 \qquad n = 0/385$$

$$Nu_D = \frac{hD}{k} = 0/911\,Re_D^{0/385}\,Pr^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{h\times0/00013}{0/03365}\times0/911(5/019)^{0/385}0/689^{\frac{1}{3}} \Rightarrow h = 388\frac{w}{m^2\cdot k}$$

$$q = hA(T_s - T_\infty) = h\pi DL(T_s - T_\infty) = 0/317\,w \Rightarrow R = 17\times10^{-6}\,\frac{1}{\frac{\pi\times0/013^2}{4}} = 0/128\,\Omega$$

در نتیجه لازمه این‌که جرم ورودی با جرم خروجی برابر باشد و انباشتگی نداشته باشیم این است که: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

بنابراین باید سرعت روی یک خط جریان ثابت باشد تا معادله‌ی پیوستگی صدق می‌کند.

معادله مومنتوم

معادله مومنتوم یا اندازه حرکت، دومین قانون اصلی لایه مرزی می‌باشد و براساس سرعت و دبی جرمی بنا شده است.

نیروی جلوبرنده یا نیروی مومنتوم مانند حرکت یک رودخانه حائز اهمیت است. بنابراین این نیرو را در جهت x مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نیروی مومنتوم = جرم × شتاب = $\frac{\text{جرم}}{\text{وزن}}$ × سرعت

نیروی مومنتوم در جهت x با سرعت u $= \dot{m}_x \times u = \rho u A \times u = \rho u^2 A$

نیروی مومنتوم در جهت x با سرعت v $= \dot{m}_x \times v = \rho u A v$

با نوشتن مومنتوم‌ها برای حجم کنترل به معادله مومنتوم خواهیم رسید:

مومنتوم در جهت x: $\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+V\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

ν لزجت سینماتیک می‌باشد و برابر $\frac{\mu}{\rho}$ است.

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+V\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

معادله انرژی

در دو معادله‌ای که پیشتر به آن اشاره شده یعنی معادله پیوستگی و معادله‌ی مومنتوم در مورد سرعت سیال بحث می‌شد. در نتیجه برای مسائل جابه‌جایی اهمیت دارند. زمانی که هدایت نیز اهمیت دارد از قانون فوریه برای محاسبه انتقال حرارت استفاده می شود. بنابراین با مساوی قرار دادن حرارت ورودی از طریق جابه‌جایی و هدایت به حجم کنترل و با فرض این‌که حرارت ورودی با حرارت خروجی برابر باشد به معادله انرژی خواهیم رسید:

معادله انرژی : $$u\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

توجه: α برابر با ضریب نفوذ حرارتی است که برابر با $\frac{k}{\rho c_p}$ می‌باشد.

حل تشابهی

معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی معادلات دیفرانسیل غیرخطی نامیده می‌شوند و حل آن‌ها بسیار مشکل است. قبلاً دیدیم که این سه معادله به‌شکل زیر هستند: معادله پیوستگی : $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\nu=\frac{\mu}{\rho}$$

معادله مومنتوم :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+V\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

معادله انرژی : $\alpha=\frac{k}{\rho c_p}$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

برای جریان آرام $V=0$ خواهد بود. بنابراین معادله‌ی مومنتوم به‌شکل $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ تبدیل می‌شود. برای جریان آرام $V=0$ خواهد بود، بنابراین معادله‌ی انرژی به‌شکل $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$ تبدیل می‌شود.

حل عددی این معادلات برای جریان گذرا یعنی زمانی که $V\neq 0$ نیست به‌وسیله دو تن از شاگردان پرانتل به‌نام بلازیوس و پل‌هاوزن ارائه شد و معادلات دیفرانسیل عادی تبدیل شده و در نتیجه حل آن‌ها ساده می‌شود. اندیشه اصلی این روش براساس این بنا شده است که تغییرات سرعت و دما در تمام نقاط x با یکدیگر مشابه هستند. به‌همین علت حل تشابهی نامیده می‌شود. در حل تشابهی معادله مومنتوم به‌شکل ساده‌ای تبدیل می‌شود و با داشتن سرعت u می‌توان سرعت V را برای ناحیه‌ی گذرا به‌دست آورد. پل‌هاوزن نشان دادند که $\frac{u}{u_\infty}$ تابعی از $\frac{y}{\delta}$ می‌باشد. برای حل معادله مومنتوم به‌روش زیر عمل می‌کنیم:

برای حل معادله مومنتوم متغیر یا پارامتر تشابه η را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta=\frac{\text{فاصله انتخابی}}{\text{ضخامت لایه‌ی مرزی}}=\frac{y}{\delta}=\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}}$$

$$\eta=\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\,y$$

نکته: می‌دانیم که $\delta\sim\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$، ازاین روبرای به‌دست آوردن $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\qquad(1)$$

اکنون تابع جریان $\phi(x,y)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

برای این‌که معادله‌ی
پیوستگی ارضا شود.

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad V=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$f(x)=\frac{\phi}{u_\infty\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}} \quad\Rightarrow\quad \phi=u_\infty\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=u_\infty\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\frac{df}{d\eta} \qquad (2)$$

می‌خواهیم مقدار u را به‌دست آوریم که قبلاً داشتیم:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\overset{(1)}{\frac{\partial\psi}{\partial\eta}}\cdot\overset{(2)}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}$$

مقادیر فوق را جایگزین می‌کنیم:

$$u=u_\infty\cancel{\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}}\frac{df}{d\eta}\cdot\cancel{\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}} \quad\Rightarrow\quad u=u_\infty\frac{df}{d\eta}$$

اگر $f'=\frac{df}{d\eta}$ باشد، بنابراین با روش مشابهی می‌توان نوشت.

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu u_\infty}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\eta f'-f\right]$$

با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های سرعت می‌توان $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را به‌دست آورد.

وداریم:

$$u=\frac{\partial u}{\partial x}+V\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

با جایگزین کردن در معادله‌ی مومنتوم به نتایج زیر می‌رسیم:

$$2\frac{d^3f}{d\eta^3}+f\frac{d^2f}{d\eta^2}=0 \quad\Rightarrow\quad 2f'''+ff''=0$$

بلازیوس با آزمایشات خود به نتایج زیر رسید:

این آزمایشات در $u_\infty = 8\frac{m}{s}$ و x بین $1cm$ تا $17/5cm$ انجام شده است.

$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}}$	f	$f' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{df}{d\eta}$	$f' = \frac{d^2f}{dL^2}$
0/4	0/026	0/066	0/331
0/8	0/106	0/26	0/32
1/6	0/42	0/51	0/29
3/2	1/59	0/88	0/139
5	3/2	$0/99 \rightarrow$ روی لایه مرزی	0/159
5/6	3/6	0/996	0/07
6	4/2	0/999	0/024

نتیجه: از حل بلازیوس یا حل دقیق به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\eta = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\, y$$

$$5 = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\, \delta \;\Rightarrow\; \delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

حل دقیق یا حل بلازیوس:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re}}$$

مثال) جریان پایدار و موازی هوای اتمسفر روی یک صفحه‌ی تخت مدنظر است. دما و سرعت جریان هوا به ترتیب $300K$ و $15\frac{m}{s}$ می‌باشد.

الف) ضخامت لایه‌ی مرزی را در فاصله‌ی $x = 100mm$ ، $x = 10mm$ و $x = 1mm$ از لبه ابتدایی (جلویی) پیدا کنید.

ب) مؤلفه سرعت در جهت y یعنی V را برای فواصل بالا حساب کنید. اگر بدانیم: $\mu = 184/6\times10^{-7}$ و $\rho = 1/161\frac{kg}{m^3}$ است.

حل: الف)

$$Re=\frac{\rho ux}{\mu}=\frac{1/161\times25\times100\times10^{-3}}{184/6\times10^{-7}}=157231/85$$

$$\frac{\delta}{x}=\frac{5}{\sqrt{Re}} \Rightarrow \frac{\delta}{100}=\frac{5}{\sqrt{157231/85}} \Rightarrow \delta=1/26\,mm$$

$$Re=\frac{\rho ux}{\mu}=\frac{1/161\times25\times10\times10^{-3}}{184/6\times10^{-7}}=15723/185$$

$$\frac{\delta}{x}=\frac{5}{\sqrt{Re}} \Rightarrow \frac{\delta}{10}=\frac{5}{\sqrt{15723/185}} \Rightarrow \delta=0/399\,mm$$

$$Re=\frac{\rho ux}{\mu}=\frac{1/161\times25\times1\times10^{-3}}{184/6\times10^{-7}}=1572/3185$$

$$\frac{\delta}{x}=\frac{5}{\sqrt{Re}} \Rightarrow \frac{\delta}{1}=\frac{5}{\sqrt{1572/3185}} \Rightarrow \delta=0/126\,mm$$

$$\nu=\frac{\mu}{\rho}=\frac{184/6\times10^{-7}}{1/161}=1/59\times10^{-5}\,\frac{m^2}{s}$$

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu u_\infty}{x}\right)^{\frac{1}{2}}[\eta f'-f]=\frac{1}{2}\left(\frac{1/59\times10^{-5}\times25}{100\times10^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}}[5\times0/99-3/2]=0/055\frac{m}{s}$$

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu u_\infty}{x}\right)^{\frac{1}{2}}[\eta f'-f]=\frac{1}{2}\left(\frac{1/59\times10^{-5}\times25}{10\times10^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}}[5\times0/99-3/2]=0/174\frac{m}{s}$$

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu u_\infty}{x}\right)^{\frac{1}{2}}[\eta f'-f]=\frac{1}{2}\left(\frac{1/59\times10^{-5}\times25}{1\times10^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}}[5\times0/99-32]=0/551\frac{m}{s}$$

فرمول باکینهام به‌روش بی‌بعد سازی

برای سیالاتی که عدد پرانتل آن‌ها در محدوده‌ی بین 0/6 تا 5 می‌باشد برای به‌دست آوردن عدد ناسلت و در نتیجه ضریب انتقال حرارت استفاده می‌کنیم که در این قسمت به اثبات آن می‌پردازیم.

جابه‌جایی از فرمول باکینهام

اگر جابه‌جایی با هدایت برابر باشد و یا به‌عبارتی از تشعشع صرفنظر می‌کنیم:

$$h=\frac{-k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_s-T_\infty}$$

روی سطح

شرط معادله : $T_s>T_\infty$

صورت و مخرج را در منفی ضرب می‌کنیم:

$$h=\frac{k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_\infty-T_s}$$

$$\frac{\partial T}{T_\infty-T_s}\partial T^* \Rightarrow h=k\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}$$

اکنون می‌خواهیم $\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}$ را به‌دست آوریم، قبلاً در مکانیک سیالات داشتیم که:

(y : فاصله انتخابی، δ_t : ضخات لایه مرزی حرارتی)

$$T^*=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

می‌خواهیم $\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}$ را حساب کنیم:

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\delta_t}$$

اکنون مقدار $\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}$ را جایگزین می‌کنیم. قبل از آن به‌جای δ_t مقدار قرار می‌دهیم.

چون برای گازها:

$$\delta_t=\frac{4/51x}{Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}}$$

نکته: عدد رینولدز به x بستگی دارد در حالی که Pr مستقل از x است.

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{\dfrac{4/51x}{Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}}{4/51x}$$

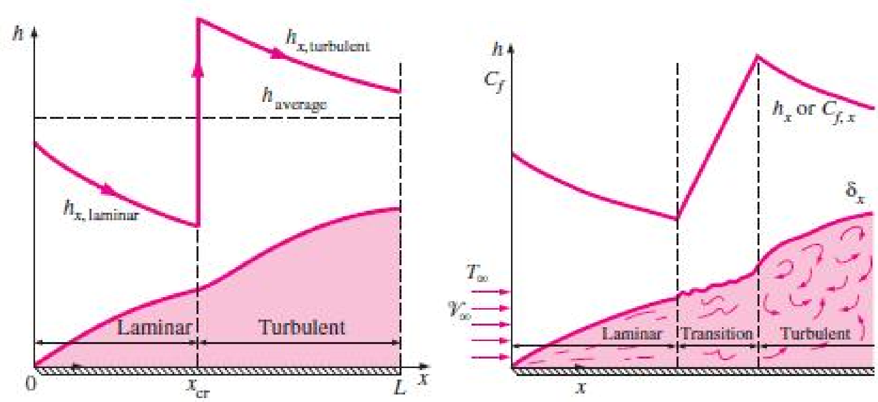
$$h=k\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}\quad\Rightarrow\quad h=k\times\frac{3}{2}\times\frac{Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}}{4/51x}$$

$$h=0/332\frac{k}{x}\cdot Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$$ فرمول باکینهام

نکته: $h\propto\frac{1}{x}$

ارتباط بین h_x و $\bar{h}_x$

h_x ضریب انتقال حرارت موضعی یا محلی نامیده می‌شود و برای یک نقطه مشخص به‌کار می‌رود، در حالی که $\bar{h}_x$ ضریب انتقال حرارت متوسط می‌باشد:



در ناحیه آرام حرکت یک‌بعدی است بنابراین h_x داریم در حالی که برای ناحیه گذرا و متلاطم به‌علت حرکت چرخشی باید $\bar{h}_x$ را حساب کنیم.

$$Nu_x=0/332Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$$

مثل هوا و آب: $0/6<Pr<50$

$$\frac{h_x\cdot x}{k}=0/332Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}\quad\Rightarrow\quad h_x=\frac{k}{x}0/332Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$$

برای به‌دست آوردن $\overline{h}_x$ باید از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\overline{h}_x=\frac{1}{L}\int_0^L h_x dx$$

$$\overline{h}_x=\frac{1}{L}0/332Pr^{\frac{1}{3}}k\int_0^L(\frac{\rho ux}{\mu})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\cdot dx=\frac{1}{L}0/332Pr^{\frac{1}{3}}k(\frac{\rho u}{\mu})^{\frac{1}{2}}\int_0^L x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$\Rightarrow\ \overline{h}_x=\frac{1}{L}0/332Pr^{\frac{1}{3}}k(\frac{\rho u}{\mu})^{\frac{1}{2}}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1\ \Rightarrow\ \overline{h}_x=2\left[0/332\frac{k}{L}Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{2}}\right]$$

چون قبلاً داشتیم:

$$\overline{h}_x=2h_x \qquad h_x=0/332\frac{k}{x}Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که: (برای گذرا و درهم) $\overline{Nu_x}=2Nu_x$ و $\overline{Nu_L}=2Nu_L$

عدد ناسلت متوسط: برای ناحیه‌ی آرام و گذرا زمانی که عدد پرانتل آن‌ها بین 0/6 تا 50 باشد از فرمول باکینهام و فقط برای ناحیه‌ی متلاطم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

فقط درهم: $$Nu_x=\frac{h_x\times x}{k}=0/0296Re_x^{0/8}Pr^{\frac{1}{3}}$$

آرام و گذرا: $$Nu_x=\frac{h_x\times x}{k}=0/332Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$$

می‌خواهیم عدد ناسلت را برای کل طول صفحه به‌دست آوریم:

$$\overline{h}_L=\frac{1}{L}\int_0^L h_x dx\ \Rightarrow\ \overline{h}_L=\frac{1}{L}\left[\int_0^{x_c}h_x dx+\int_{x_c}^L h_x L\right]$$

$$\overline{h}_L=\frac{1}{L}\left[\int_0^{x_c}\frac{k}{x}0/332Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}dx+\int_{x_L}^L\frac{k}{x}0/0296Re_x^{\frac{4}{5}=0/8}Pr^{\frac{1}{3}}dx\right]$$

$$\overline{h}_L=\frac{k}{L}Pr^{\frac{1}{3}}\left[\int_0^{x_c}\frac{1}{x}0/332Re_x^{\frac{1}{2}}dx+\int_{x_C}^L 0/0296\frac{Re_x^{\frac{4}{5}}}{x}dx\right]$$

$$\frac{\bar{h}L}{k}=Pr^{\frac{1}{3}}\left[0/332\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{x_C}\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}+0/0296\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{\frac{4}{5}}\int_{x_C}^{L}\frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}}\right]$$

$$\overline{Nu}_L=Pr^{\frac{1}{3}}\left[0/322\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}2x_c^{\frac{1}{2}}+0/0296\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)\times 1/25x^{\frac{4}{5}}\Big|_{x_c}^{L}\right]$$

$$\overline{Nu}_L=Pr^{\frac{1}{2}}\left[0/664Re_{x_C}^{\frac{1}{2}}+0/037Re_L^{0/8}-0/037Re_{x_C}^{0/8}\right]$$

آغاز ناحیه متلاطم زمانی است که عدد رینولدز 500/000 باشد:

$$Re_{x_C}=500/000$$

$$\overline{Nu}_L=Pr^{\frac{1}{2}}\left[0/037Re_L^{0/8}-871\right]$$

خلاصه‌ی جریان از روی یک صفحه:

حرارت	تنش برشی	ضریب اصطکاک	ضخامت لایه مرزی سرعتی	عدد ناسلت	محدودیت	جریان
$-kA\frac{\partial T}{\partial y}$	$\tau=\mu\frac{du}{dy}$	$\nu_f=0/664Re^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{\delta}{x}=\frac{5}{Re^{\frac{1}{2}}}$	آرام : $Nu_x=0/332Re_x^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$ گذرا : $\overline{Nu}_x=0/664Re^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$	هوا و آب $/6<Pr<50$	آرام و گذرا
" " "	" " "	" " "	" " "	چرچیل واُزو	روغن‌ها $Pr>50$	آرام و گذرا
$-kA\frac{\partial T}{\partial y}$ درهم	$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}$ درهم	$c_f=0/0592Re^{-\frac{1}{5}}$	$\frac{\delta}{x}=\frac{0/37}{Re^{\frac{1}{5}}}$	فرمول اثبات شده	$e\geq 500/000$	درهم

$$Nu_x=\frac{0/332Re^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[1+\left(\frac{0/048}{Pr}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}}$$: فرمول چرچیل وازو

مثال) نوارهای گرمکن برقی هر یک به‌طول 50mm که به‌طور مستقل قابل کنترلند. دمای یک صفحه‌ی تخت به عرض

$W=1m$ را در مقدار یکنواخت $T_s=230^0C$ ثابت نگه می‌دارند. اگر هوای اتمسفر با دمای 25^0C و سرعت $60\frac{m}{s}$ روی یک صفحه جریان داشته باشد، کدام‌یک از گرمکن‌ها بیش‌ترین توان ورودی الکتریکی را دارند؟

حل)

الگوریتم زیر را انجام می‌دهیم:

* خواص را در دمای میانگین می‌خوانیم:

* عدد رینولدز را پیدا می‌کنیم.

* فرمول مناسبی انتخاب می‌کنیم.

* با توجه به ناحیه‌ی آرام، گذرا و درهم و با استفاده از رابطه‌ی سرمایش نیوتن مقدار انتقال حرارت را به‌دست می‌آوریم.

مقدار انتقال حرارت را برای اولین گرمکن حساب می‌کنیم:

$$\bar{T}=\underset{\text{film = لایه}}{\underbrace{T_f}}=\frac{25+230}{2}=127/5+273\ ;\ 400K\ \begin{cases}\nu=26/4\times10^{-6}\\ k=0/0388\\ Pr=0/69\end{cases}$$

$$Re_1=\frac{u_\infty L_1}{\nu}=\frac{60\times0/05}{26/4\times10^{-6}}=1/14\times10^5 \qquad 2300<Re_1<500/000$$

$$\overline{Nu}_L=2\overline{Nu}_x=2(0/332Re^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}})=0/664Re^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}=0/664(1/14\times10^5)^{\frac{1}{2}}(0/69)^{\frac{1}{3}}=198$$

$$\bar{h}_1=\frac{\overline{Nu}k}{L_1}=\frac{198\times0/0338}{0/05}=134\frac{w}{m^2\cdot k}$$

$$q_{convection}=134(0/05\times\overset{\text{عرض}}{1})(230-25)=1370w$$

برای این‌که بفهمیم در چه ناحیه‌ای جریان متلاطم آغاز می‌شود:

$$Re_{x_c}=\frac{u_\infty x_c}{\nu}\Rightarrow 500000=\frac{60\times x_c}{26/4\times10^{-6}}\Rightarrow x_c=0/22m$$

بنابراین آغاز ناحیه متلاطم روی صفحه‌ی پنجم می‌باشد:

برای صفحه پنجم: $\overline{Nu}=Pr^{\frac{1}{3}}(0/037Re^{0/8}-871)$

$$Re_2 = \frac{u_\infty L_2}{\nu} = \frac{60 \times 0/1}{26/4 \times 10^{-6}} = 2/27 \times 10^5$$ ناحیه گذرا

$$\overline{Nu}_L = \left[0/332 \times (2/27 \times 10^5)^{\frac{1}{2}} (0/69)^{\frac{1}{3}}\right] \times 2 = 279/5$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-2} L_2}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-2} = \frac{279/5 \times 0/0338}{0/1} = 94/47 \frac{w}{m^2 \cdot k}$$

$$q_{conv} = 94/47(0/1 \times 1)(230 - 25) = 1936/635\,w$$

$$q_{conv,2} = 1936/635 - 1370 = 566/635\,w$$

$$Re_3 = \frac{u_\infty L_3}{\nu} = \frac{60 \times 0/15}{26/4 \times 10^{-6}} = 3/409 \times 10^5$$ ناحیه‌ی گذرا

$$\overline{Nu}_L = 2\left[0/332 \times (3/409 \times 10^5)^{\frac{1}{2}} (0/69)^{\frac{1}{3}}\right] = 342/58$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-3} L_3}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-3} = \frac{342/5 \times 0/0338}{0/15} = 77/19 \frac{w}{m^2 \cdot k}$$

$$q_{conv} = 77/19(0/15 \times 1)(230 - 25) = 2373/6\,w$$

$$q_{conv,3} = 2373/6 - 1936/635 = 436/965\,w$$

$$Re_4 = \frac{u_\infty L_4}{\nu} = \frac{6 \times 0/2}{26/4 \times 10^{-6}} = 4/54 \times 10^{+5}$$ ناحیه گذرا

$$\overline{Nu}_L = 2\left[0/332 \times (4/54 \times 10^5)^{\frac{1}{2}} (0/69)^{\frac{1}{3}}\right] = 395/34$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-4} \times L_4}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-4} = \frac{395/34 \times 0/0338}{0/2} = 66/81 \frac{w}{m^2 \cdot k}$$

$$q_{conv} = 66/81(0/2 \times 1)(230 - 25) = 2739/21\,w$$

$$q_{conv,4} = 2739/21 - 2373/6 = 365/61\,w$$

$$Re_5 = \frac{u_\infty L_5}{\nu} = \frac{60 \times 250 \times 10^{-3}}{26/4 \times 10^{-6}} = 5/68 \times 10^5$$ ناحیه درهم

$$\overline{Nu}_L = Pr^{\frac{1}{2}}(0/037\,Re^{0/8} - 871) = 0/69^{\frac{1}{3}}\left[0/037(5/68 \times 10^5)^{0/8} - 871\right] = 542/42$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-5} \times L_5}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-5} = \frac{542/42 \times 0/0338}{0/250} = 73/335 \frac{w}{m^2 \cdot k}$$

$$q_{conv} = 73/335(0/250 \times 1)(230-25) = 3758/4\,w$$

$$q_{conv,5} = 3758/4 - 2739/21 = 1019/19\,w$$

$$Re_6 = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{60 \times 0/3}{26/4 \times 10^{-6}} = 6/81 \times 10^5$$ ناحیه درهم

$$\overline{Nu}_L = Pr^{\frac{1}{3}}(0/037\,Re^{0/8} - 871) = 0/69^{\frac{1}{3}}\left[0/037(6/81 \times 10^5)^{0/8} - 871\right] = 747/39$$

$$\overline{Nu}_L = 0/0296\,Re_x^{0/8}\,Pr^{\frac{1}{3}} = 0/0296(6/81 \times 10^5)^{0/8}(0/69)^{\frac{1}{3}} = 1213/64$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_{1-6} \times L_6}{k} \Rightarrow \bar{h}_{1-6} = \frac{747/39 \times 0/0338}{0/3} = 84/2 \frac{w}{m^2 \cdot k}$$

$$q_{conv} = 84/2(0/3 \times 1)(230-25) = 5178/3$$

پس گرمکن ششم بیش‌ترین توان را دارد:

$$q_{conv,5} = 5178/3 - 3758/4 = 1419/9\,w$$

فصل ششم: جریان داخلی (Internal Flow)

در بخش قبل جریان خارجی مورد بررسی قرار گرفت که معادلاتی برای جریان از روی یک صفحه، جریان از روی یک استوانه و جریان از روی کره به‌دست آمد. در این فصل جریان داخلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم مانند جریان در داخل لوله‌ها، سیال به وسیله‌ی دیوارها احاطه شده است، بنابراین لایه مرزی نمی‌تواند آزادانه رشد نماید.

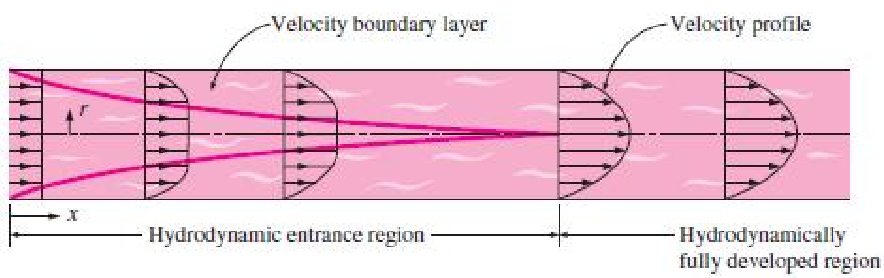
نوع جریان:

جریان در داخل لوله (جریان داخلی) به سه دسته تقسیم می‌شود:

1- جریان ورودی هیدرولیک $Re < 2300$ و سرعت متوسط $= u_m$ و $Re = \frac{\rho u_m D}{\mu}$

2- جریان توسعه‌یافته‌ی آرام $2300 \le Re < 10000$

3- جریان توسعه یافته‌ی درهم $Re \ge 10000$



$X_{F \cdot d \cdot h} =$ مسافتی که لازم است تا لایه‌های مرزی یکدیگر را قطع کنند و سرعت در مرکز ماکزیمم خواهد بود.

Fully Developed $F \cdot d =$

$h =$ هیدرولیکی (سرعتی)

فرمول لانگار: $\frac{X_{F \cdot d \cdot h}}{D} = 0/04 Re$

عدد رینولدز:

$\dot{m} = \rho u_m A_c$ سطح مقطع لوله $\Rightarrow u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A_c} = \frac{\dot{m}}{\rho \frac{\pi D^2}{4}} \Rightarrow u_m = \frac{4\dot{m}}{\rho \pi D^2}$

مقدار u_m را در فرمول رینولدز قرار می‌دهیم:

$$Re=\frac{\rho u_m D}{\mu}=\frac{\rho\frac{4\dot{m}}{\rho\pi D^2}D}{\mu}\quad\Rightarrow\quad Re=\frac{4\dot{m}}{\pi D\mu}$$

1) ناحیه ورودی هیدرولیک:

برای به‌دست آوردن ناسلت از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

عدد پکله Pe

$$Nu_D=3/66+\frac{0/0668\frac{D}{L}Re\,Pr}{1+0/04\left[\frac{D}{L}Re\,Pr\right]^{\frac{2}{3}}}$$

جریان داخلی

2) ناحیه توسعه یافته آرام:

هرگاه یک سیال با سرعت یکنواخت وارد یک لوله به‌شعاع ثابت r_0 شود لایه‌ی مرزی در جهت x شروع به رشد می‌کند و جائیکه لایه‌های مرزی یکدیگر را قطع کنند آغاز ناحیه‌ی توسعه‌یافته آرام خواهد بود. شرایط زیر برقرار است:

اگر درجه حرارت سطح لوله ثابت باشد (جوشش و میعان):

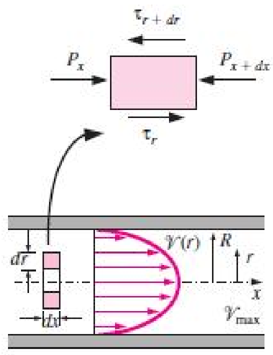
$$Nu_D=\frac{hD}{k}=3/66$$

اگر شار حرارتی ثابت باشد (مانند عبور جریان برق) :

$$Nu_D=\frac{hD}{k}=4/36$$

پروفیل سرعت در ناحیه‌ی توسعه‌یافته آرام

پروفیل سرعت در این ناحیه با فرض بر این‌که خواص ثابت باشند را می‌توان به‌دست آورد. علت این‌که خواص ثابت است چون جریان آرام می‌باشد با استفاده از معادله مومنتوم و نوشتن موازنه‌ی نیروها به تساوی نیروی برشی (لزجی) با نیروی فشاری خواهیم رسید. باید توجه داشت که چون حرکت یک‌بعدی می‌باشد بنـابراین فشـار خروجـی یعنـی $p+\frac{\partial p}{\partial x}dx$ برابر با $p+dp$ خواهد بود.



در حالت تعادل:

(نیروی فشاری) $F = F$ (نیروی برشی)

$\tau dA = Adp \qquad (I)$

سطح مقطع ثابت $\quad A = \pi r^2$

چون سطح جانبی متغیر است به‌جای L ، dx قرار می‌دهیم.

سطح جانبی متغیر $\; dA = 2\pi r\, dx \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \; \tau 2\pi r\, dx = \pi r^2 dp \;\Rightarrow\; (I)$

$\Rightarrow \; \mu \dfrac{du}{dy} 2\pi r\, dx = \pi r^2 dp$ (در جهت x است y) و $\; * du = \dfrac{1}{2\mu} \cdot \dfrac{dp}{dx} \cdot r \cdot dr$

حال نسبت به r انتگرال می‌گیریم:

$u = \dfrac{1}{2\mu} \cdot \dfrac{dp}{dx} \cdot \dfrac{r^2}{2} + c \quad \Rightarrow \; u = \dfrac{1}{4\mu} \cdot \dfrac{dp}{dx} \cdot r^2 + c \quad (I)$ معادله

با اعمال شرایط مرزی مقدار c را پیدا می‌کنیم.

شرط مرزی 1 $\quad B \cdot c \cdot 1: \Rightarrow r = r_0 \;\Rightarrow\; u = 0$

از معادله (1) $\quad \Rightarrow 0 = \dfrac{1}{4\mu} \cdot \dfrac{dp}{dx} \cdot r_0^2 + c \;\Rightarrow\; c = -\dfrac{1}{4\mu} \cdot \dfrac{dp}{dx} r_0^2$

مقدار c را در معادله (1) قرار می‌دهیم : $\quad u = \dfrac{1}{4\mu} \cdot \dfrac{dp}{dx} r^2 - \dfrac{1}{4\mu} \cdot \dfrac{dp}{dx} r_0^2 \qquad$ معادله (2)

$B \cdot c \cdot 2 \;\Rightarrow\; r = 0 \quad$ و $\quad u = u_{max}$

از معادله (2) : $\; u_{max} = -\dfrac{1}{4\mu} \dfrac{dp}{dx} r_0^2 \qquad$ معادله (3)

$$\frac{\text{(2) معادله}}{\text{(3) معادله}} = \frac{u}{u_{max}} = \frac{\frac{1}{4\mu}\cdot\frac{dp}{dx}(r^2 - r_0^2)}{-\frac{1}{4\mu}\cdot\frac{dp}{dx}\cdot r_0^2} = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2}$$

با داشتن شعاع r_0 و مسافت انتخابی r می‌توان سرعت را در نقطه‌ی انتخابی به‌دست آورد.

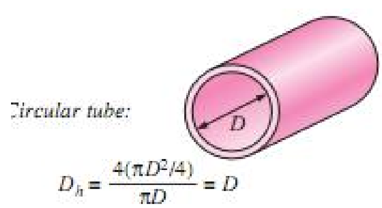
$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

قطر هیدرولیک:

$$D_u = \frac{4\times(\text{سطح مقطع جریان})}{\text{محیط خیس شده}} \Rightarrow D_H = \frac{4A}{P}$$

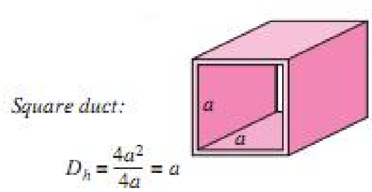
1) برای استوانه توخالی:

$$D_u = \frac{4\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = D$$



2) برای مربع

$$D_u = \frac{4(L\times L)}{4\times L} = L$$



3) برای بین مجرای دو لوله:

$$D_H = \frac{4\left[\frac{\pi}{4}D_0^2 - \frac{\pi}{4}D_i^2\right]}{\pi D_0 + \pi D_i} = \frac{(D_0 - D_i)(D_0 + D_i)}{D_0 + D_i} = D_0 - D_i$$

مثال) آب در فضای بین دولوله محور به قطرهای $25\,mm$ و $50mm$ با دبی $0/04\frac{kg}{s}$ و دمای $25^{o}C$ عبور می‌کند.

اگر آب به‌طور الکتریکی با شدت $4000\frac{w}{m}$ گرم شود به دمای $85^{o}C$ می‌رسد.

الف) با توجه به قطر هیدرولیک عدد رینولدز را حساب کنید. همچنین طول مورد نیاز لوله را پیدا کنید.

ب) دمای سطح داخلی لوله T_s چه قدر است؟

حل)

$$\rho = 995 \quad و \quad \mu = 513\times 10^{-4}\frac{kg}{m\cdot s} \quad و \quad k = 0/64 \quad و \quad Pr = 3/1$$ و

$$\overline{T} = \frac{T_o - T_i}{2} = \frac{85+25}{2} = 55^{o}C \ \Rightarrow\ c_p = 4179\frac{J}{kg\cdot K}$$

$$Re = \frac{\rho u_\infty D_u}{\mu} \qquad\qquad D_H = D_o - D_i$$

ناحیه توسعه‌یافته آرام: $$Re_{D_H} = \frac{4\dot{m}}{\pi D_u \mu} \ \Rightarrow\ Re_{D_H} = 159/000 > 10/000$$

فرمول دیتوس و بولستر برای ناحیه توسعه یافته درهم: $$Nu_D = 0/023 Re^{0/8}\quad Pr^{0/4}$$

$$\frac{\overline{h}D_H}{k} = 0/023 Re^{0/8} Pr^{0/4} \ \Rightarrow\ \overline{h} = 240\frac{w}{m^2\cdot k}$$

الف) می‌توان اول طول مورد نیاز برای این گرمایش را به‌دست آورد:

$$q'\times L = \dot{m}c_p(T_o - T_i)$$

$$4000\times L = 0/04\times 4179(85-25) \ \Rightarrow\ L = 2/5m$$

ب) با استفاده از فرمول دیتوس و بولستر دیدیم که ضریب انتقال حرارت متوسط $\overline{h}$ برابر با $240\frac{w}{m^2\cdot k}$ به‌دست آمد:

$$\dot{m}c_p(T_o - T_i) = \overline{h}\pi D_u L(T_s - \overline{T}) \ \Rightarrow\ T_s = 296/4^{o}C$$

ضریب انتقال حرارت:

برای در ناحیه توسعه یافته آرام و توسعه یافته درهم از فرمول‌های به خصوصی می‌توان استفاده کرد به‌خصوص فرمول دیتوس و بوستر که برای ناحیه‌یافته‌ی درهم به‌کار می‌رود. یعنی جائیکه $Re \geq 10/000$

$$n = 0/4 \quad \text{for Heating (گرمایش)}$$

$$Nu_D = 0/023 Re^{0/8} Pr^n$$

$$n = 0/3 \quad \text{(سرمایش)}$$

توضیح: در مسئله قبل چون گرمایش داشتیم، بنابراین:
$$Nu_D = 0/023 Re^{0/8} Pr^{0/4}$$

مثال) هوا با دمای $285k$ و دانسیته $1/16\frac{kg}{m^3}$ وارد مجرای مستطیلی به‌طول $2m$ و با سطح مقطع $75\times150mm^2$ می‌شود. سطح مجرا در دمای ثابت $400K$ قرار دارد و دبی جرمی جریان هوا $0/1\frac{kg}{S}$ ÷ است. با شرط بر این‌که لزجت سینماتیک هوا $15/8\times10^{-6}\frac{m^2}{s}$ و پرانتل هوا $0/7$ باشد و همچنین ضریب ظرفیت حرارتی آن $c_p = 1007\frac{J}{kg\cdot K}$ باشد دمای خروجی هوا را به‌دست آورید.

حل)

$$D_H = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{4\times75\times150}{2(75+150)} = 100mm = 0/1m$$

$$Re = \frac{u_m D_H}{\nu} = \frac{7/9\times0/1}{15/8\times10^{-6}} = 50/000$$

$$u_m = \frac{4\dot{m}}{\rho\pi D_H^2} = \frac{4\times0/1}{1/61\times\pi\times(0/1)^2} = 7/9(\frac{m}{s})$$

$$Nu_D = 0/023 Re^{0/8} Pr^{0/4} = 0/023(50/000)^{0/8}(0/7)^{0/4} = 114/53$$

$$Nu_D = \frac{\bar{h}D_H}{k} \Rightarrow \bar{h} = \frac{114/5\times29/445\times10^{-3}}{0/1} = 33/7$$

$$\bar{T} = \frac{285+400}{2} = 342/5\,K \xrightarrow{\text{جدول}} K = 29/445\times10^{-3}$$

$$q = \bar{h}A(T_s - \bar{T}) \Rightarrow q = 33/7\times(75\times150\times10^{-6})(400-342/5) = 21/8\,w$$

$$q = \dot{m} c_p (T_o - T_i) \Rightarrow 21/8 = 1/16 \times 1007\,(T_o - 285) \Rightarrow T_o = 285/018\ ^{o}K$$

دمای متوسط:

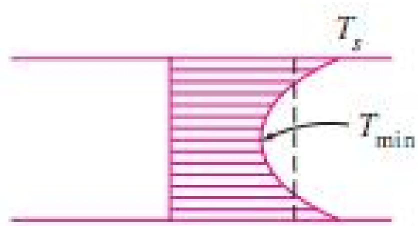
در جریان داخلی یعنی جریان در داخل لوله‌ها از دمای متوسط استفاده می‌شود زیرا دما در هر نقطه متغیر است. در جریان داخلی T_∞ معنی ندارد و به‌جای آن می‌توان از T_m یعنی دمای متوسط استفاده کرد. بنابراین با شرط بر این‌که جابه‌جایی داشته باشیم قانون سرمایش نیوتن به‌شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$q = hA\,(T_s - T_m) \qquad T_s > T_m$$

می‌توان ثابت کرد که:

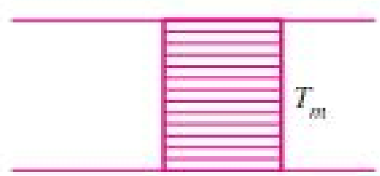
$$T_m = \frac{2}{u_m r_o^2} \int_0^{r_o} uTr\,dr ،$$

الف) اگر سیال سرد شود:



(a) Actual

ب) اگر سیال گرم باشد:



(b) Idealized

از فرمول لانگار می‌توان $X_{fd \cdot t}$ را به‌دست آورد:

برای گازها $Pr = 1$ بنابراین:

$$X_{fd\cdot h} = X_{fd\cdot t}$$

$$\frac{X_{fd\cdot t}}{D} = 0/04\,Re\,Pr$$

سرعت میانگین:

برای ناحیه‌ی توسعه‌یافته آرام و درهم باید از سرعت میانگین یا u_m استفاده کنیم. در ناحیه درهم و یا به‌عبارتی توسعه‌یافته درهم از حرکت گردابه‌ای نمی‌توان صرفنظر کرد و سرعت به r و x بستگی دارد. اما برای ناحیه آرام و یا به‌عبارتی توسعه‌یافته آرام سرعت فقط به r بستگی دارد. برای به‌دست آوردن سرعت میانگین یا متوسط به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$u_m = \frac{\int_{A_c} \rho u(r,x) dA_c}{\rho A_c}$$: اگر سرعت در هر نقطه تغییر کند.

$$\dot{m} = \rho u_m A_c$$

$A_c = \text{Area}$ (سطح مقطع)

سرعت متوسط برای ناحیه متلاطم:

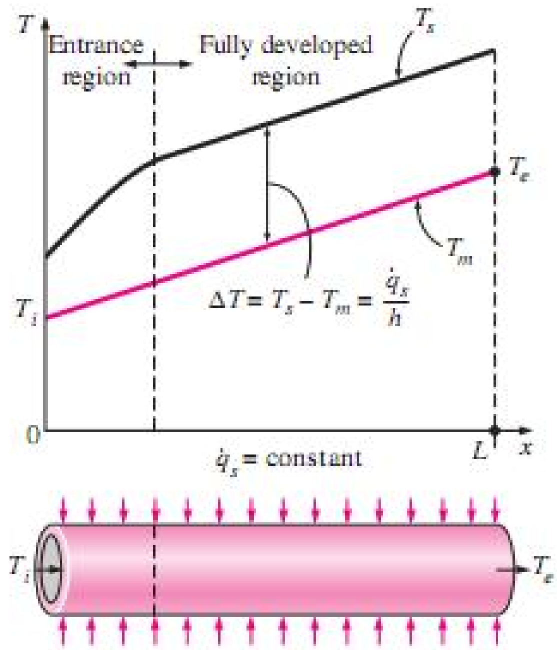
$$\xrightarrow[dA_c = 2\pi r dr]{A_c = \pi r_0^2} u_m = \frac{2\pi\rho}{\rho\pi r_0^2}\int_0^{r_0} u(r,x)\, r\, dr \Rightarrow u_m = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} u(r,x)\, r\, dr$$

$$u_m = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} u(r)\, r\, dr$$ سرعت متوسط برای ناحیه آرام

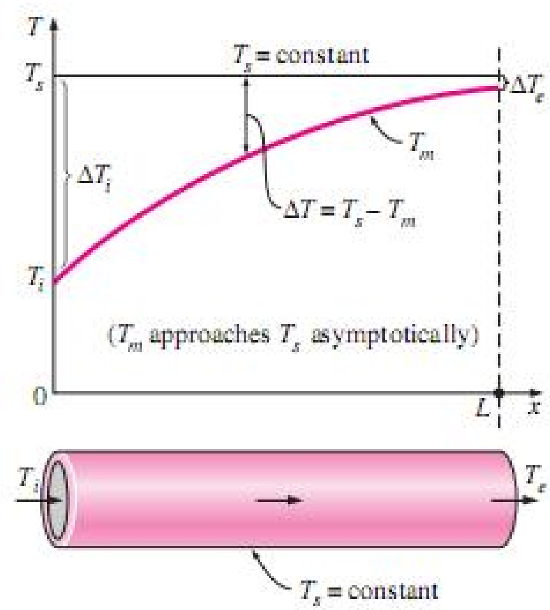
شار حرارتی یکنواخت:

در بسیاری از مسائل مهندسی شار حرارتی یعنی $\frac{q}{A}$ ثابت می‌باشد:

$$q'' = \frac{q}{A} =$$ ثابت



دمای سطح ثابت (مثل جوشش و میعان):



مثال) روغن با نرخ جرمی $0/05\frac{kg}{s}$ درون یک لوله‌ی مسی به‌قطر درونی $1cm$ و ضخامت $0/02cm$ جریان می‌یابد. روغن در دمای 35^oC وارد و با چگالی بخار اتمسفر روی جداره‌ی بیرونی لوله تا دمای 45^oC گرم می‌شود. طول لوله نیاز را به‌دست بیاورید.

حل)در جریان داخلی معمولاً عدد رینولدز از دبی محاسبه می‌شود:

$$\bar{T}=\frac{35+45}{2}=40 \Rightarrow \begin{cases} c_p=1964 \\ \rho=876 \\ k=0/144 \\ \mu=0/21 \\ Pr=2870 \end{cases}$$

$$Re=\frac{4\dot{m}}{\mu\pi D}=30 \Rightarrow$$ جریان آرام

برای جوشش و میعان: $Nu=3/66$: چون دما ثابت می‌باشد

$$Nu=\frac{hD}{k} \Rightarrow 3/66=\frac{h\times 0/01}{0/144} \Rightarrow h=527\frac{w}{m^2\cdot k}$$

$$q=\dot{m}c_p(T_{out}-T_{in})=0/05\times 1964(45-35)=983\,w$$

سطح جانبی

$$q=hA_i\Delta T_{LMTD} \qquad A_i=\pi D_i L$$

$$\Delta T_{LMTD}=\frac{55-65}{Ln\frac{55}{65}}=59/9 \qquad \frac{100 \quad 100}{35 \quad 45} \qquad A_i=\pi D_i L \Rightarrow L=0/991m$$

مثال) آب با دبی جرمی $0/01\frac{kg}{s}$ و دمای 10^oC به یک لوله با قطر درونی $0/02m$ وارد و تا 40^oC گرم می‌شود. سطح بیرونی لوله با یک المان الکتریکی حرارتی پوشیده شده و عایق شده است. این المان الکتریکی که بر روی سطح لوله شار حرارتی ثابت $1500\frac{w}{m^2}$ تولید می‌کند. تعیین کنید. الف) عدد رینولدز و ضریب انتقال حرارت ب) طول مورد نیاز و دمای سطح درونی لوله در مقطع خروجی.

حل)

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\mu\pi D} = 6990$$

$$Nu = 3/66 \Rightarrow h = 132\frac{w}{m^2 \cdot k}$$

$$q''\pi DL = \dot{m}c_p(T_{out} - T_{in}) \Rightarrow L = 1/33$$

$$q'' = \frac{q}{A} = h(T_s - T_{out}) \Rightarrow 1500 = 132(T_s - 40) \Rightarrow T_s = 153/2^\circ C$$

مثال) برای گرمایش آب از دمای $20^\circ C$ به دمای خروجی $60^\circ C$ از لوله‌ای به قطر داخلی $20mm$ و قطر خارجی $40mm$ استفاده می‌شود. سطح بیرونی آن کاملاً عایق شده است. با عبور جریان برق (شار حرارتی ثابت) از جداره‌ی داخلی گرمایی با شدت $10^6 \frac{w}{m^2}$ در آن تولید می‌شود.

الف) اگر دبی آب در لوله $0/1\frac{kg}{s}$ باشد، چه طولی از لوله لازم است تا دمای مورد نظر خروجی حاصل شود. ب) اگر دمای سطح درونی لوله مقطع خروجی $T_s = 70^\circ C$ باشد ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی متوسط را به‌دست آورید.

حل)

$$C_{p_{water}} = 4/179\frac{kj}{kg \cdot K}$$

الف) گرمای داده شده را به‌دست می‌آوریم:

سطح جانبی = حرارت را به محیط می‌دهد.

سطح مقطع = حرارت را تولید می‌کند:

گرمای داده شده $q = \dot{q}V = \dot{q}AL = \dot{q}(\frac{\pi D_i^2}{4})L$

گرمای گرفته شده $q = \dot{m}c_p(T_0 - T_i)$

در حالت تعادل، حرارتی که در داخل گرمکن تولید می‌شود با حرارت گرفته شده توسط سیال برابر است چون عایق شده است:

$$\bar{h}A(T_S - T_{out}) = \dot{m}c_p(T_0 - T_i) \Rightarrow \bar{h}\pi(D_0 - D_i)L(T_s - T_{out}) = \dot{m}c_p(T_0 - T_i)$$

$$\Rightarrow \bar{h}\pi(0/04 - 0/02) \times L(70 - 40) = 0/1 \times 4170(40 - 20)$$

برای به‌دست آوردن L از فرمول زیر مقدار q را حساب می‌کنیم:

$$q = \dot{m}c_p(T_o - T_i) \Rightarrow q = (0/1)4179\times(40-20) = 8358\,w$$

$$q = \dot{q}V = \dot{q}AL = \dot{q}\frac{\pi D_i^2}{4}L \Rightarrow 8358 = 10^6\times\frac{\pi(20\times10^{-3})^2}{4}\times L \Rightarrow L = 26/62\,m$$

مقدار L را در رابطه‌ی قبلی قرار می‌دهیم:

$$\bar{h}\pi(D_o - D_i)L(T_s - T_{out}) = \dot{m}c_p(T_o - T_i) \Rightarrow \bar{h} = 7$$

مثال) یک طرح پیشنهادی برای استفاده از انرژی خورشیدی این است که لوله‌ای را در نقطه‌ی کانونی یک آیینه سهموی (سهمی شکل) قرار داده و سیالی را از آن عبور می‌دهیم. اثر کلی این عمل را می‌توان توسط لوله‌ای با q_s'' ثابت در سطح بیان کرد. فرض کنید از لوله‌ای به‌قطر $60\,mm$ در یک روز آفتابی با $q_s'' = 2000\frac{w}{m^2}$ است، استفاده می‌شود.

الف) مطلوبست چنانچه آب با دبی $0/01\frac{kg}{s}$ و دمای $T_{Bi} = 20^\circ C$ وارد لوله شود برای آن‌که دمای سیال هنگام خروج برابر با $80^\circ C$ باشد طول مورد نیاز لوله را به‌دست آورید.

راهنما: معمولاً سطح بیرونی لوله را سیاه انتخاب می‌کنند تا انرژی بیش‌تری از خورشید دریافت کند.

حل)

موازنه انرژی را انجام می‌دهیم:

$$\bar{T} = \frac{20+80}{2} = 50^\circ C \begin{cases} k = 0/67 \\ \mu = 3/25\times10^{-4} \\ Pr = 2/2 \\ c_p = 4181\frac{J}{kg\cdot K} \end{cases}$$

$$q_s''\cdot A = \dot{m}c_p(T_\infty - T_{bi})$$

$$q_s''\cdot(\pi DL) = \dot{m}c_p(T_{bo} - T_{bi}) \Rightarrow L = \frac{\dot{m}c_p(T_{bo} - T_{bi})}{\pi D q_s''} = 6/65''$$

ب) با فرض بر این‌که شرایط کاملاً توسعه‌یافته در خروجی لوله برقرار شده باشد دمای سطح لوله را در خروجی پیدا کنید؟

حل)

اول باید عدد رینولدز را به‌دست آوریم و با فرض این‌که جریان توسعه‌یافته باشد بنابراین $N = 4/36$ خواهد بود. با استفاده از Nu، ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی را محاسبه می‌کنیم و با موازنه‌ی انرژی دمای سطح لوله را در خروجی پیدا خواهیم نمود.

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\mu\pi D} = 603$$

$$Nu = 4/36$$

$$q_s'' = h\,(T_s - T_m) \Rightarrow 2000 = 47/7\,(T_s - \frac{80+20}{2}) \Rightarrow T_s = 82^{\circ}C$$

$$Nu = \frac{hD}{k} \Rightarrow h = 47/7$$

مثال) برای جریان فلز مذاب در لوله که $T_s < T_m$ سرعت در یک مقطع خاص، یکنواخت و پروفیل دما سهمی می‌باشد یعنی $u(r) = c_1$ و $T_{(r)} - T_{(s)} = c_2\left[1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right]$ است که در آن c_1 و c_2 ثابت و مثبت می‌باشد. الف) T_m را برحسب T_s و c_2 پیدا کنید.

حل)

دمای متوسط یا میانگین:

$$T_m = \frac{2}{u_m r_0^2}\int_0^{r_0} u(r) T r\, dr$$

به‌جای u_r و T_r مقدار قرار می‌دهیم:

$$T_m = \frac{2}{u_m r_0^2}\int_0^{r_0} c_1 \left\{c_2\left[1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right] + T_s\right\} r\, dr$$

اکنون به‌جای u_m نیز مقدار c_1 را قرار می‌دهیم ولی اول ثابت می‌کنیم که: $c_1 = u_m$

$$u_m = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} u_{(r,x)} r\, dr$$

برطبق اطلاعات مسئله سرعت فقط به r بستگی دارد و به x بستگی ندارد و $u(r) = c_1$. بنابراین به‌جای $u(r)$ مقدار آن

یعنی c_1 را قرار می‌دهیم.

$$u_m = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} c_1 r\,dr \;\Rightarrow\; u_m = \frac{2}{r_0^2}\left[c_1\frac{r^2}{2}\right]_0^{r_0} \;\Rightarrow\; u_m = c_1$$

$$T_m = \frac{2c_1}{c_1 r_0^2}\int_0^{r_0}\left\{T_s + c_2\left[1+\frac{r^2}{r_0^2}\right]\right\} r\,dr$$

$$\Rightarrow\; T_m = \frac{2}{r_0^2}\left[T_s\frac{r^2}{2} + c_2\frac{r^2}{2} - \frac{c_2 r^4}{4r_0^2}\right]_0^{r_0} = \frac{2}{r_0^2}\left[T_s\frac{r_0^2}{2} + \frac{c_2}{2}r_0^2 - \frac{c_2}{4}r_0^2\right]$$

چون c_2 مقدار مثبتی می‌باشد بنابراین فرض $T_s < T_m$ درست است.