ریاضی ۱ و ۲

تابع

تعریف تابع: متغیر y را تابعی از متغیر x در حوزه تعریف D گویند اگر به ازای هر x از این حوزه یا دامنه مقدار معینی برای متغیر y متناظر باشد. یا برای هر (x_1, y_1) و (x_1, y_2) داشته باشیم $(y_1 = y_2)$

روش‌های نمایش توابع:

۱- ضابطه تحلیلی، $y=f(x)$

مثال: $y=x^2+2\log x$

۲- ضابطه ضمنی $f(x,y)=0$

مثال: $y\cos x+x^2\ln y=2$

نکته: در هر صورت نمایش تابع، باید تعریف آن صادق باشد.

دامنه تابع: مجموعه تمام xهایی که در معادله تابع صدق کنند را دامنه تابع گفته و با D_f نمایش می‌دهند.

برد تابع: مجموعه تمام yهایی که در معادله تابع صدق کند را برد تابع گفته و با R_f نمایش می‌دهند.

انواع تابع

۱- تابع یک به یک: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

۲- تابع پوشا: f پوشا است اگر $f:X\to Y \Rightarrow Y=R_f$

۳- تابع متناوب: T: دوره تناوب و $\forall x\in D_f \Rightarrow f(x+T)=f(x)$

نکته: دوره تناوب تابع $f(ax)$ در صورت متناوب بودن f با دوره T، برابر $\frac{T}{|a|}$ می‌باشد.

۴- تابع زوج: تابع متقارن نسبت به محور yها یا $f(-x)=f(x)$

۵- تابع فرد: تابع متقارن نسبت به مرکز یا $f(-x)=-f(x)$

۶- تابع صعودی و اکیدا صعودی:

تابع اکیدا صعودی: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2>y_1$ و تابع صعودی: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2\ge y_1$

۷- تابع نزولی و اکیدا نزولی:

تابع اکیدا نزولی: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2<y_1$ و تابع نزولی: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2\le y_1$

معرفی برخی توابع خاص:

- تابع جزء تصحیح: $y=[x]=n \quad ; \quad n\le x\le n+1$
- تابع نمایی: $y=a^x \quad , \quad a>0, a\ne 1$
- تابع لگاریتمی: $y=\log_a^x \quad , \quad a>0 \quad , \quad a\ne 1$

– تابع سینوس: $y=\sin x$

خواص: $\sin(-x)=-\sin x$ تابع فرد و $\sin(x+2k+1)\pi=-\sin x$ و $\sin(\pi-x)=\sin x$

– تابع کسینوس: $y=\cos x$

خواص: $\cos(-x)=\cos x$ تابع زوج و $\cos(x+2k+1)\pi=\cos x$ و $\cos(\pi-x)=-\cos x$

– تابع تانژانت: $y=\mathrm{tg}x \;,\; x\neq(2n-1)\frac{\pi}{2} \;;\; n\in z$

خواص: $\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}x$ و $\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\mathrm{tg}(x+k\pi)=\mathrm{tg}x$

– تابع کتانژانت: $y=\cot gx$ و $x\neq n\pi \;;\; n\in z$

توجه: همانطور که دیده شد دوره تناوب تابع سینوس و کسینوس، 2π و دوره متناوب تانژانت و کتانژانت π می‌باشد.

روابط مثلثاتی مهم:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \quad,\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x \quad,\quad \mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot gx$$

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b \quad,\quad \cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$$

$$\mathrm{tg}(a\pm b)=\frac{\mathrm{tga}\pm\mathrm{tgb}}{1\mp\mathrm{tga}.\mathrm{tgb}} \quad,\quad \cot g(a\pm b)=\frac{\cot ga\,.\,\cot gb\pm1}{\cot ga\mp\cot gb}$$

$$\sin 2a=2\sin a\cos a \quad,\quad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$

$$\mathrm{tg}2a=\frac{2\mathrm{tga}}{1-\mathrm{tg}^2a} \quad,\quad \sin 2a=\frac{2\mathrm{tga}}{1+\mathrm{tg}^2a} \quad,\quad \cos 2a=\frac{1-\mathrm{tg}^2a}{1+\mathrm{tg}^2a}$$

$$\sec^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}=1+\mathrm{tg}^2a \quad,\quad \cos c^2a=\frac{1}{\sin^2 a}=1+\cot g^2a$$

$$\sin a\pm\sin b=2\sin\frac{a\pm b}{2}\cos\frac{a\mp b}{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \quad,\quad \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$$

توابع معکوس و معکوس توابع

در تابع $f:D_f\to R_f$ با ضابطه $y=f(x)$ معکوس تابع، رابطه روبرو است: $f^{-1}:R_f\to D_f$

اگر تابعی بخواهد معکوس‌پذیر باشد باید حتما یک به یک باشد.

توابع مثلثاتی معکوس:

$$f(x)=\sin x \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=\mathrm{Arcsin}\,x$$

نکات: Arcsinx تابعی صعودی و فرد و $-\frac{\pi}{2}\leq \mathrm{Arcsin}\,x\leq\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\cos x \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=\mathrm{Arccos}\,x$$

Arccosx نزولی و تابعی نه زوج و نه فرد است. $0\leq \mathrm{Arccos}\,x\leq\pi$

$f(x)=\mathrm{tg}x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\mathrm{Arctg}x$

Arctgx صعودی و فرد است و $-\frac{\pi}{2}\le \mathrm{Arctg}x \le \frac{\pi}{2}$

برخی روابط:

$$\sin(\mathrm{Arcsin}\,x)=x \quad , \quad \sin(\mathrm{Arccos}\,x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\mathrm{Arccos}\,x)=x \quad , \quad \cos(\mathrm{Arcsin}\,x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\mathrm{Arcsin}\,x+\mathrm{Arccos}\,x=\frac{\pi}{2}$$

توابع هیپربولک و معکوس هیپربولیک

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathrm{tgh}x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

$$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x \quad , \quad \sinh 2x=2\sinh x\cosh x$$

$$\cosh^2 x=\frac{1}{1-\mathrm{tgh}^2 x} \quad , \quad \sinh^2 x=\frac{\mathrm{tgh}^2 x}{1-\mathrm{tgh}^2 x}$$

نکته: اگر در هر یک از اتحادهای مثلثاتی sinx و cosx و tgx را با i sinh x و cosh x و i tgh x (که $i^2=-1$) عوض کنیم، اتحادهای هیپربولیک حاصل می‌شوند.

تابع معکوس sinh x:

$$\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

تابع coshx دربازه $(-\infty,0]$ نزولی و دربازه $[0,\infty)$ صعودی است. برد آن $[1,\infty)$ می‌باشد. در نتیجه تابع $y=\cosh^{-1}x$ به دو شاخه یک مقداری که به ازای $x\ge 1$ معین هستند تقسیم می‌شوند. لذا:

$$\left(\cosh^{-1}x\right)_1=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \quad , \quad \left(\cosh^{-1}x\right)_2=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

از آنجا که $\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ پس تابع coshx تابعی زوج است. Sinh x و tgh x نیز توابعی فرد هستند.

تابع معکوس tgh x:

$$\mathrm{tgh}^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

حد و پیوستگی

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ باشد f را در x=a پیوسته گوئیم.

اگر $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ باشد f را در x=a پیوسته چپ گوئیم.

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ باشد f را در x=a پیوسته راست گوئیم.

مثال: به ازای کدام مقدار a و b تابع f با ضابطهٔزیر در x=1 پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-a} & x>1\\ [-x]+b & x\le 1\end{cases}$$

حل:

$$f(1^+)=\frac{0}{1-a}=0 \quad , \quad f(1^-)=-1+b \quad , \quad f(1)=-1+b \quad \Rightarrow \quad b=1, a\ne 1$$

نکته: اگر تابع f در x=a حد داشته باشد ولی تعریف نشده باشد، می‌توان با تعریف f(a) برابر حد تابع در x=a تابع را پیوسته کرد. به این نقطه «رفع شدنی» گویند.

مثال: f(2) چند باشد تا تابع $f(x)=\left(\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x-۲}}$ در x=2 پیوسته باشد.

حل: $f(۲)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x-۲}}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x+۲}{۲}\right)^{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to ۰}\left(۱+\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x}}=e^{\frac{۱}{۲}}$

مشتق و کاربرد آن

مشتق‌پذیری: تابع f را در x=a مشتق‌پذیر گوئیم هرگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد که آن را مشتق تابع f $(f'(a))$ در x=a گوئیم.

(فرمول دوم مشتق $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x+a)-f(a)}{x}$)

مشتق چپ: $f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و مشتق راست: $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

نکته ۱: $f'(a)$ و حد آن $\left(\lim_{x\to a}f'(x)\right)$ لزوماً برابر نیستند.

نکته ۲: برای محاسبهٔ برخی مشتق‌ها استفاده از تعریف مناسب‌تر است.

مثال: اگر تابع f در شرط روبرو صدق کند، $f'(a)$ کدام است؟

$$\forall x,y\in R: f(x+y)=f(x)+f(y)+xy \quad , \quad \lim\frac{f(x)}{x}=b$$

حل: $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x+a)-f(a)}{x}=\lim\frac{f(x)+f(a)+xa-f(a)}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{f(x)}{x}+a\right)=b+a$

همانطور که در مثال دیده شد گاهی در حل مسایل لازم است از فرمول دوم مشتق استفاده کنیم.

نکته: از آنجا که مشتق شیب خط مماس در نقطهٔ مفروض است لذا جهت محاسبه معادلهٔ خط‌های مماس یا عمود بر منحنی‌ها از آن استفاده می‌شود.

قضایای مشتق:

۱- مشتق مجموع تعداد متناهی از توابع برابر مجموع مشتقات آنهاست: $(u+v+...+w)'=u'+v'+...+w'$

۲- مشتق حاصل‌ضرب دو تابع: $(uv)'=u'v+uv'$ به همین صورت: $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$

۳- مشتق خارج قسمت دو تابع: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^۲}$ به همین صورت: $\left(\frac{۱}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^۲}$

۴- مشتق تابع مرکب: $(f(g(x)))'=g'(x)f'(g(x))$

نکته: مشتق توابعی که به صورت حاصلضرب می‌باشند و نیز توابع توانی را می‌توان با گرفتن Ln و استفاده از فرمول بالا، محاسبه کرد.

مثال: مشتق تابع $y=\sin x^{\cos x}$ را محاسبه کنید.

حل: $Lny=\cos x\left(Ln\sin x\right)$ حال از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\left(Ln\sin x\right)+\cos x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)\qquad\Rightarrow\qquad y'=\sin x^{\cos x}\left(\frac{\cos^{۲} x}{\sin x}-\sin x\left(Ln\sin x\right)\right)$$

۵- مشتق تابع معکوس: $\left(f^{-۱}(x)\right)'=\dfrac{۱}{f'\left(f^{-۱}(x)\right)}$

مشتقات معروف:

$$\left(x^{x}\right)'=x^{x}\left(۱+Lnx\right)\qquad,\qquad\left(a^{x}\right)'=a^{x}Lna$$

$$\left(Arc\cos x\right)'=\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\quad,\left(Arc\sin x\right)'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

$$\left(tgx\right)'=۱+tg^{۲}x\quad,\quad\left(Arctgx\right)'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}\quad;\quad\left(\cot gx\right)'=-\left(۱+\cot g^{۲}x\right)\quad,\quad\left(Arc\cot gx\right)'=\frac{-۱}{۱+x^{۲}}$$

مشتق n ام: $\left(\frac{۱}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-۱)^{n}n!}{x^{n+۱}}\quad,\quad\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{۲}\right)$

$$\left(\sinh x\right)'=\cosh x\quad,\quad\left(\cosh x\right)'=\sinh x$$

نکته: زاویهٔ بین دو خط y=mx+h و $y=m'x+h'$ برابر است با: $tg\theta=\left|\dfrac{m-m'}{۱+mm'}\right|$

– اگر $mm'=-۱$ باشد دو خط بر هم عمودند.

نکته: فاصله نقطه $\left(x_{۰},y_{۰}\right)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با: $AH=\dfrac{\left|ax_{۰}+by_{۰}+c\right|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$

برای یافتن معادلهٔ خط مماس بر منحنی از نقطه‌ای خارج از منحنی، رابطهٔ $\dfrac{f(x)-y_{۱}}{x-x_{۱}}=f'(x)$ را استفاده می‌نمائیم. و نقطهٔ مماس $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و شیب را می‌یابیم سپس از رابطهٔ $y-b=f'(x)(x-a)$ معادله را می‌نویسیم.

برای یافتن معادلهٔ خط عمود بر منحنی از نقطهٔ خارج آن از رابطهٔ $\dfrac{F(X)-y_{۱}}{x-x_{۱}}=\dfrac{-۱}{f(x)}$ استفاده می‌کنیم.

قاعدهٔ هوپیتال:

در محاسبه حدهای مبهم ($\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا ۱^{∞} یا ...) می‌توان از آن استفاده کرد: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

شرط استفاده از این قاعده، مشتق‌پذیری f و g در a است.

نکته: در محاسبهٔ حدهای ۱^{∞} یا مشابه باید از دو طرف ln بگیریم و با ایجاد کسر فوق، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده نمائیم.

سری تیلور: $f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots+c_n(x-a)^n+\dots \quad ; \quad c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

بسط مک لورن: $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$

بسط‌های مهم: $\operatorname{Ln}(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dots \qquad e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots\dfrac{x^n}{n!}+\dots$

$\sinh x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1!)}+\dots \qquad \cosh x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$

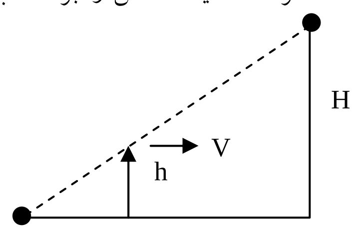
$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dots \quad , \quad \cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dots$

مشتق تابع قدر مطلق:

$g(x)=|f(x)| \Rightarrow g'(x)=f'(x)\dfrac{f(x)}{|f(x)|}$

آهنگ تغییر کمیت‌های وابسته: برای حل مسایل مربوط به این قسمت ابتدا باید تابع ضمنی را بیابید سپس نسبت به متغیر خواسته شده مشتق بگیرید.

مثال: در شکل، شخصی با قد H و با سرعت V به سمت تیر چراغی به ارتفاع H حرکت می‌کند. سرعت سایهٔ شخص را بر حسب h و H و V به دست آورید. (به مقادیر ثابت و متغیر باید دقت کنید)



حل: فاصله سایه سر تا چراغ= y و فاصلهٔ شخص تا چراغ= x

$$\Rightarrow \quad \frac{y-x}{y}=\frac{h}{H} \quad \Rightarrow \quad (H-h)y-Hx=0 \quad , \quad \frac{dx}{dt}=V \quad \Rightarrow \quad -H\frac{dx}{dt}+(H-h)\frac{dy}{dt}=0 \quad \frac{dy}{dt}=\frac{H}{H-h}V$$

نکته: اگر بین x و y رابطهٔ $f(x,y)=0$ برقرار باشد در این صورت مشتق y برابر است با: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

نقاط بحرانی:

نقطه‌ای که در آن یکی از دو شرط روبرو برقرار باشد: ۱) $f'(a)=0$ ۲) $f'(a)$ موجود نباشد.

انواع نقاط بحرانی:

- نقاط ناپیوستگی تابع
- نقاط زاویه‌دار (نکته: زاویهٔ بین دو مماس برابر است با : $tg\alpha=\left|\dfrac{f_1'(a)-f_2'(a)}{1+f_1'(a)f_2'(a)}\right|$)
- نقاط بازگشت: مشتق‌های چپ و راست مختلف العلامه
- نقاط عطف قائم: مشتق‌های چپ و راست هم علامت– تقعر منحنی تغییر می‌کند. (y" تغییر علامت می‌دهد)
- نقاط عطف افقی: مشتق‌های چپ و راست مختلف‌العلامه– تقعر منحنی تغییر می‌کند (y" تغییر علامت می‌دهد)
- نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی: مشتق صفر و تغییر علامت مشتق

قضیه رل: اگر تابع f در بازه [a, b] پیوسته و در بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر باشد و نیز f(a)= f(b) آنگاه وجود دارد یک نقطهٔ c در بازه (a, b) بـه قسمی که $f'(c)=0$.

قضیه مقدار میانگین: اگر تابع f در بازه [a, b] پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه وجود دارد نقطهٔ c در بازهٔ (a, b) به طوری که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

قضیهٔ کوشی: تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین، اگر f و g پیوسته ودر (a, b) مشتق‌پذیر باشند $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

مثال: مقدار c در قضیهٔ مقدار میانگین تابع $f(x)=\mathrm{Arcsin}\,x$ وقتی $۰\le x\le ۱$ باشد را تعیین کنید.

حل:

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\quad ;\quad f(۰)=۰\quad ,\quad f(۱)=\frac{\pi}{۲}\quad\Rightarrow\quad \frac{۱}{\sqrt{۱-c^۲}}=\frac{\frac{\pi}{۲}-۰}{۱-۰}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{۱-\frac{۴}{\pi^۲}}$$

قضیه نامساوی: اگر g و f در بازهٔ (a,∞) مشتق‌پذیر بوده و به ازای هر x>a داشته باشیم $f'(x)\ge g'(x)$ همچنین f و g در x=a دارای مقادیر مساوی باشند آنگاه خواهیم داشت $f(x)\ge g(x)$.

قضیه مقدار میانی: اگر تابع f در بازه [a, b] پیوسته باشد آنگاه f(x) هر مقداری را بین f(a) و f(b) در بازه [a, b] اختیار می‌کند.

مثال: تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x\sin x=۱$ را در بازه $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ تعیین کنید.

$$f(x)=x\sin x\quad ;\quad f(۰)=۰\quad ,\quad f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{\pi}{۲}$$

در نتیجه چون $۱\in\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ است و همچنین f(x) صعودی است در نتیجه در این بازه معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

قضیه تله موش:

اگر f و g در x=a دارای حدی برابر باشند (L) و در یک همسایگی a داشته باشیم: $h(x)\le f(x)\le g(x)$ در این صورت تابع f نیز در x=a دارای حدی برابر L است.

نمونه سوالات

۱- حد مقابل کدام است؟ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\mathrm{Arctg}x-\mathrm{Arcsin}\,x}{x^۳}$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ٤) $-\frac{۱}{۳}$

۲- تابع f در رابطه $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲Lnx & x\ne ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ صدق می‌کند. کدام صحیح است؟

۱) f تنها دارای دو مینیمم نسبی است ۲) f دارای نقطه عطف است

۳) معادلهٔ $f(x)=\frac{\pi}{۳}$ دو ریشهٔ حقیقی دارد ٤) معادله $f(x)=x$ دو ریشهٔ حقیقی داد

۳- اگر $\forall x,y\in\mathbb{R}:f(x,y)=f(x)f(y)$ و $f(۰)\ne ۰$ آنگاه دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{f(x)}}$ کدام است؟

۱) R ۲) $[۰,\infty)$ ۳) $[-۱,۱]$ ٤) $\{۰\}$

٤- مشتق دهم تابع $f(x)=x^۲e^{(x-۱)}$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) ۹۱ ۲) ۱۰۱ ۳) ۱۱۱ ٤) ۱۲۱

۵- ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی تابع معکوس تابع y=f(x) در هر نقطه (x, y) روی آن برابر $۲y+۱$ می‌باشد. اگر $f(۰)=۱$ باشد. $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵- ۳) ۶- ۴) ۷

حل نمونه سؤالات:

۱-۲: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$A=\lim_{x\to ۰}\frac{\text{Arctg}x-\text{Arc}\sin x}{x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(x-\frac{۱}{۳}x^۳\right)-\left(x+\frac{۱}{۶}x^۳\right)}{x^۳}=-\frac{۱}{۲}$$

۲-۴: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f'(x)=۲x-\frac{۲}{x}=۰\Rightarrow x=\pm۱ \quad ; \quad y=۱ \qquad \lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۰}f(x)=+\infty$$

نقطه‌های $(۰,۰)$ و $(-۱,۱)$ و $(۱,۱)$ همه مینیمم نسبی هستند و $f''(x)=۲+\frac{۲}{x^۲}>۰$ منحنی نقطهٔ عطف ندارد.

معادلهٔ $f(x)=\frac{\pi}{۳}>۱$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی است. معادلهٔ f(x)= x دو ریشهٔ حقیقی مثبت یکی $x_۱=۱$ و دیگری $x_۲>۱$ دارد.

۳-۱: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f(x)=a^x \qquad g(x)=a^{-\frac{x}{۲}} \qquad \Rightarrow \quad D_g=\mathbb{R}$$

۴-۳: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f(x+۱)=(x+۱)^۲e^x \Rightarrow f(x+۱)=(x^۲+۲x+۱)(۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots) \quad C_{۱۰}=\frac{۱}{۸!}+\frac{۲}{۹!}+\frac{۱}{۱۰!}$$

$$\Rightarrow f^{(۱۰)}(۱)=۱۰!C_{۱۰}=۱۱۱$$

۵-۲: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$m=-\frac{۱}{(f^{-۱})'}=-f'(y)=۲y+۱ \Rightarrow f(y)=-y^۲-y+c \qquad f(۰)=c=۱ \Rightarrow f(y)=-y^۲-y+۱ \Rightarrow f(۲)=-۵$$