

دنباله‌ها

تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ را یک دنباله گویند و با $\{a_n\}$ نمایش می‌دهند.

دنباله‌ها جزو توابع گسسته هستند و برای آنها حد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim a_n = L \quad ; \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

نکات:

- دنباله یکنوا و کراندار، همگراست.

- دنباله همگرا، کراندار است.

- اگر a_n به L همگرا باشد، آنگاه a_{m+n} نیز همگرا به L است که در آن $m \in \mathbb{N}$ ، $k \in \mathbb{Z}$

- اگر a_n به L همگرا باشد، آنگاه حد آن یکتاست.

- اگر a_n همگرا باشد آنگاه $a_{n+1} - a_n$ همگرا به صفر است.

دنباله‌های خاص:

۱- دنباله حسابی: $a_{n+1} - a_n = d$; مقدار ثابت و قدر نسبت d :

اگر $d > 0$ دنباله صعودی اکید و اگر $d < 0$ دنباله، نزولی اکید است. در حالت $d = 0$ دنباله ثابت است. $\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$

۲- دنباله توانی (هندسی) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$; مقدار ثابت و قدر نسبت q :

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

اگر $q > 1$ ، دنباله صعودی اکید و اگر $0 < q < 1$ باشد نزولی اکید است و اگر $q < 0$ ، دنباله نوسانی است.

اگر $|q| < 1$ باشد $\lim q^n = 0$ و اگر $|q| > 1$ باشد دنباله q^n واگراست.

اگر $q = 1$ باشد q^n همگرا به یک و اگر $q = -1$ باشد q^n واگراست.

$$3- \text{دنباله} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

این دنباله صعودی اکید و کراندار است (همگراست) و حد آن e است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

توجه: دنباله $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ دنباله‌ای نزولی اکید و همگرا به e است.

$$4- \text{دنباله} \frac{n!}{n^n}$$

این دنباله، دنباله‌ای نزولی اکید و همگرا به صفر است.

اگر $a_n = \frac{n!}{n^n}$ باشد آنگاه دنباله $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ دنباله‌ای همگرا به e است.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}$$

نکته: اگر دنباله $\{a_n\}$ به گونه‌ای باشد که $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجود باشد آنگاه داریم:

مثال: حد دنباله $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ را تعیین کنید.

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{(n+1)!}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

سری‌ها

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

اگر مجموع n جمله اول دنباله $\{a_n\}$ را با S_n نمایش دهیم داریم:

از آنجا دنباله $\{S_n\}$ تعریف می‌شود که اگر همگرا به S باشد می‌نویسیم $\lim S_n = S$ و یا $\lim \sum_{i=1}^n a_i = S$ و به اختصار می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \text{ و می‌گوئیم سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگرا به } S \text{ است. در غیر این صورت می‌گوئیم واگراست.}$$

نکات:

- شرط لازم همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ آن است که دنباله a_n همگرا به صفر باشد.

- اگر a_n همگرا به L باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ همگرا به $L - a_1$ است.

- اگر $a_n > 0$, $\lim na_n \neq 0$, آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

- اگر $q = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}$ باشد آنگاه به ازای $|q| < 1$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست و به ازای $|q| > 1$ سری واگراست و به ازای $|q| = 1$ چیزی نمی‌توان گفت.

- اگر $0 < a_n < b_n$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا خواهد بود و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگرا خواهد بود.

- اگر $\sum_{i=1}^n a_i = S_n$ باشد خواهیم داشت $\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$, $S_n - S_{n-1} = a_n$

مثال: حاصل $A = \sum_{n=1}^m \sin nx$ را محاسبه کنید.

حل: طرفین را در $2 \sin \frac{x}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^m 2 \sin \frac{x}{2} \sin nx = \sum_{n=1}^m \cos \frac{2n-1}{2} x - \cos \frac{2n+1}{2} x = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2m+1}{2} x = 2 \sin \frac{n}{2} x \sin \frac{(n+1)}{2} x \Rightarrow A = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

سری توانی: سری $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ را سری توانی گویند. هرگاه $|a| < 1$ ، سری همگراست.

$$S_n = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} \Rightarrow \lim S_n = \frac{a}{1 - a}$$

مثال: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3^{n+1}}$ را حساب کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \frac{-\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

سری همساز یا هارمونیک: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را گویند که واگراست.

- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$: همانطور که گفته شد $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$ و چون $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ پس سری فوق همگراست.

انتگرال

دیفرانسیل یک تابع:

در مسایل تخمین یک تابع از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

مثال: مقدار تقریبی $\sin 31^\circ$ کدام است؟

$$f(x) = \sin x ; x = \frac{\pi}{6} ; \Delta x = \frac{\pi}{18}$$

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + (\cos x)\Delta x \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{18}\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{18} = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$$

تابع اولیه:

$$F'(x) = f(x)$$

تابع $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ گوئیم هر گاه داشته باشیم:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

نتیجه: $F(x) + c$ نیز تابع اولیه تابع $f(x)$ است در نتیجه:

انتگرال‌های مهم:

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c ; \alpha \neq -1$$

$$\int \sin \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + c ; \int \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + c ; \alpha \neq 0$$

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c ; \alpha \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{1}{ab} \operatorname{Arctg} \frac{bx}{a} + c ; \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} dx = \frac{1}{b} \operatorname{Arcsin} \frac{bx}{a} + c$$

انتگرال جزء به جزء: $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \ln |\cos x| + c ; \int e^x (f(x) + f'(x)) dx = e^x f(x) + c$$

مثال: حاصل انتگرال $\int x^x e^x dx$ را حساب کنید.

$$I = \int x^f e^x dx = \int e^x (x^f + fx^{f-1} - fx^{f-1} - 12x^{f-2} + 12x^{f-2} + 24x - 24x - 24 + 24) dx$$

$$I = e^x (x^f - fx^{f-1} + 12x^{f-2} - 24x + 24) + c$$

تعویض متغیر در انتگرال گیری:

در انتگرال معین $I = \int f(x) dx$ اگر به جای x تابعی از y را قرار دهیم داریم:

$$x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y) dy \Rightarrow I = \int f(x) dx = \int f(g(y)) g'(y) dy$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx$$

مثال: حاصل انتگرال مقابل را حساب کنید.

$$x = y^2 \Rightarrow dx = 2y dy \Rightarrow I = \int \frac{1}{y(2+y^2)} 2y dy \Rightarrow I = \int \frac{2}{2+y^2} dy = \sqrt{2} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{x}{2}} + c$$

مثال: حاصل $\int x^x (1 + \operatorname{Ln} x) dx$ را حساب کنید.

$$\text{حل: } y = x^x \Rightarrow dy = x^x (1 + \operatorname{Ln} x) dx \Rightarrow I = \int dy = y + c = x^x + c$$

قضایای انتگرال:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

- خطی بودن انتگرال (α, β ثابت)

$$\forall c \in [a, b] ; \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

- تفکیک انتگرال

$$\exists c \in [a, b] ; \int_a^b f = f(c)(b-a)$$

- مقدار متوسط ($f(c)$)

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

- قضیه اساسی اول انتگرال: اگر f در $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد و به ازای $a < x < b$ داشته باشیم:

$$F'(x) = f(x)$$

در نتیجه با فرض پیوستگی تابع f در x داریم:

قضیه اساسی دوم انتگرال: اگر تابع f در $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد و تابع $F(x)$ در رابطه زیر صدق کند

$$\forall x \in (a, b) ; F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

مثال: حاصل $I = \int_0^1 (2x-1)^n dx$ را حساب کنید.

$$I = \frac{1}{2(n+1)} (2x-1)^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+2} (1)^{n+1} - \frac{1}{2n+2} (-1)^{n+1} = \frac{1+(-1)^n}{2n+2}$$

قضیه انتگرال تابع معکوس: اگر تابع f در $[a, b]$ صعودی و انتگرال پذیر باشد، در این صورت انتگرال تابع معکوس را از رابطه زیر حساب کرد:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = bf(b) - af(a)$$

مثال: حاصل $\int_1^e \operatorname{Ln} x dx$ را حساب کنید.

$$\int_1^e \operatorname{Ln} x dx + \int_0^1 e^y dy = e \Rightarrow \int_1^e \operatorname{Ln} x dx = 1$$

* قضیه تقارن در انتگرال معین

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

مثال: حاصل $\int_0^1 x(1-x)^n dx$ را حساب کنید:

$$I = \int_0^1 x(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)x^n dx \Rightarrow I = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

- مسامت بین منحنیها

- سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در بازه $[a,b]$ از رابطه زیر تعیین می شود:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

نتیجه: سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور ox در بازه $[a,b]$

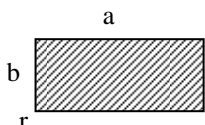
$$s = \int_c^d x dy = \int_c^d f^{-1}(y) dy \quad : c \leq y \leq d$$

مثال: سطح محصور به منحنی $y=Ln x$ و محور y ها وقتی $0 \leq y \leq 1$ را حساب کنید.

$$s = \int_0^1 e^y dy = e - 1$$

- قضیه تخمین انتگرال معین: اگر در هر نقطه x از بازه $[a,b]$ و $\psi(x) \leq f(x) \leq \phi(x)$ در نتیجه:

$$\int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \phi(x) dx \quad a < b$$



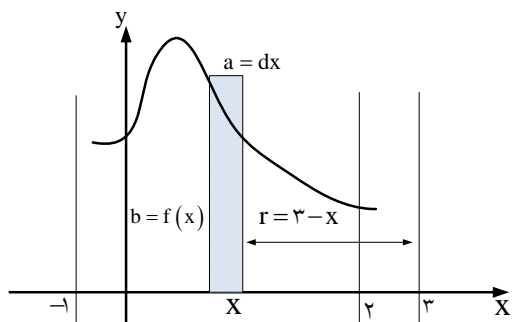
مماسیه حجم حاصل از دوران:

حجم حاصل از دوران مستطیل b,a حول خط به فاصله r :

$$V = \pi a(b+r)^2 - \pi ar^2 = \pi ab(b+2r) \quad \text{فرمول مهم:}$$

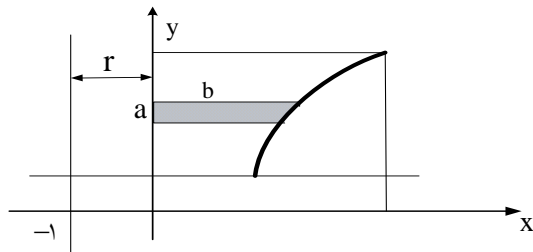
مثال: مطلوبست جزء حجم حادث از دوران سطح منحنی

$f(x)^+$ با محور ox بین خطوط $x=2, x=-1$ حول خط $x=3$.



$$dv = \pi dx f(x)(f(x) + 2(3-x)) = \pi f(x)(f(x) - 2x + 6) dx$$

مثال: جزء حجم حاصل از دوران منحنی $f(x)=Ln x+x$ و محور oy بین خطوط $y=1, y=e+1$ حول خط $x=-1$ را تعیین کنید.



$$a = dy, \quad b = x, \quad r = 1$$

$$dV = \pi x dy (x+2) = \pi \left(1 + \frac{1}{x}\right) (x+2) x dx$$

$$V = \int_1^e \pi (x+1)(x+2) dx$$

با استفاده از روش فوق می توان اثبات کرد حجم حادث از دوران سطح محصور بین دو منحنی f, g در بازه $[a,b]$ حول خط $x=c$ برابر است

$$V = \int_a^b 2\pi |x-c| |f(x) - g(x)| dx$$

با:

قضیه: حجم حادث از دوران سطح بسته به مساحت s حول خطی که فاصله مرکز ثقل سطح از آن d باشد برابر است با $V = 2\pi s d$

قضیه تعمیم انتگرال معین

اگر تابع f در فاصله $a(x)$, $b(x)$ پیوسته باشد و $a(x)$, $b(x)$ نیز مشتق پذیر باشند و داشته باشیم $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ آنگاه خواهیم داشت:

$$G'(x) = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x))$$

مثال: اگر $G(x) = \int_{x^2}^{\cos x} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$ باشد $G'(x)$ کدام است؟

$$G'(x) = \sin x \frac{\cos(\cos x)}{1 + \cos^2 x} - 2x \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

حل

$$f(x) \text{ تابع زوج} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

چند نکته:

$$f(x) \text{ تابع فرد} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$f(x) \text{ تابع متناوب با دوره تناوب } T \Rightarrow \int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_a^T f(x) dx$$

آزمون انتگرال در سریها:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

یعنی شرط همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ آن است که $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگرا باشد و یا کراندار باشد.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ با توجه به نکته بالا همگراست و مقدار آن بین ۱ و ۲ است زیرا:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^{\infty} = 1, \quad a_1 = 1$$

- قضیه انتگرال ریمان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=a_n}^{b_n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = b$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\text{Arctg} \frac{1}{n^2} + \text{Arctg} \frac{2}{n^2} + \dots + \text{Arctg} \frac{n-1}{n^2} \right) \quad \text{مثال: مطلوبست محاسبه حد}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \text{Arctg} \frac{i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

نمونه سؤالات:

۱- اگر $f(x) = \sin x$ باشد سری $\sum_{n=1}^{100} f(n)$ کدام است؟

$$2\sin 50 \quad (\xi)$$

$$\sin 50 \quad (\zeta)$$

$$\frac{\sin 50 \cdot \sin 49/5}{\sin 0/5} \quad (\psi)$$

$$\frac{\sin 50 \cdot \sin 50/5}{\sin 0/5} \quad (\theta)$$

۲- اگر مقدار c در قضیه مقدار میانگین برای تابع زیر در بازه داده شده باشد e^{c^2-c} کدام است؟

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{1+t} dt \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1+c^2}{c+c^2} \quad (2) \quad \frac{1+c^2}{1+c} \quad (1)$$

$$\frac{1+c^2}{2c+2c^2} \quad (4) \quad \frac{1+c^2}{2c+c^2} \quad (3)$$

۳- حاصل $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.992}}$ کدام است؟

$$125 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad 3\text{Ln}2 \quad (2) \quad 80 \quad (1)$$

۴- مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ وقتی $0 \leq x \leq 3$ حول محور oy کدام است؟

$$\frac{222\pi}{15} \quad (4) \quad 12\pi \quad (3) \quad \frac{166\pi}{15} \quad (2) \quad \frac{116\pi}{15} \quad (1)$$

۵- طول نقطه عطف منحنی $(x+1)e^{-x^2}$ کدام است؟

$$x=2 \quad (4) \quad x=-1 \quad (3) \quad x=1 \quad (2) \quad x=0 \quad (1)$$

۶- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} C_n (x-1)^{2n}$ برابر ۴ است. حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} + \frac{C_n}{C_n+1}$ کدام است؟

$$\frac{257}{16} \quad (4) \quad 4/25 \quad (3) \quad 2/5 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

۷- اگر $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+f(t)} dt$ باشد $f(1)$ کدام است؟

$$\frac{9}{4} \quad (4) \quad \frac{5}{4} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

۸- حاصل $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx$ کدام است؟

$$-\text{Ln}2 \quad (4) \quad \text{Ln}2 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۹- تابع f در شرط $f(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{f(t)}}{\cos^2 t} dt$ صدق می‌کند. کدام صحیح است؟

(۱) f در \mathbb{R} پیوسته است (۲) f در \mathbb{R} صعودی اکید است

(۳) خط $x=0$ عمود بر $y=f(x)$ است (۴) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

۱۰- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos x)^n$ همگرا به $f(x)$ است حاصل $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ کدام است؟

$$-\frac{2}{3} \quad (4) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

حل نمونه سؤالات:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n = \frac{1}{2 \sin(\cdot/\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin n \sin(\cdot/\delta) = \frac{1}{2 \sin(\cdot/\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n - \cdot/\delta) - \cos(n + \cdot/\delta)$$

۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2 \sin(\cdot/\delta)} (\cos(\cdot/\delta) - \cos(100 \cdot/\delta)) = \frac{\sin \delta \cdot \sin \delta \cdot/\delta}{\sin(\cdot/\delta)}$$

$$f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow \exists c \in (0, 1): \quad \cancel{2c} \frac{e^{c^2}}{1+c^2} - \frac{e^c}{1+c} = 0 \Rightarrow e^{c^2-c} = \frac{1+c^2}{2c+2c^2} \quad \text{گزینه ۴ صحیح است.}$$

$$I = \int_0^1 x^{-0.992} dx = \frac{1}{1-0.992} x^{1-0.992} \Big|_0^1 = \frac{1}{0.008} = 125 \quad \text{گزینه ۴ صحیح است.}$$

$$ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2} \Rightarrow s = \int_0^2 2\pi x \sqrt{1+x} dx \Rightarrow s = 2\pi \int_0^2 (x+1-1)(x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\Rightarrow s = 2\pi \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{232}{15} \pi \quad \text{گزینه ۴ صحیح است.}$$

$$y' = e^{-x^2} (1-2x(x+1)) \Rightarrow y'' = e^{-x^2} [-4x-3-2x(1-2x^2-2x)] = 0$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{گزینه ۲ صحیح است.}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} (x-1)^2 < 1 \Rightarrow |x-1| < \sqrt[n]{c_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{16} \quad \text{گزینه ۴ صحیح است.}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} (x-1)^2 < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{16} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = 16$$

$$f'(x) = \sqrt{1+f(x)}, f(0) = \int_0^0 = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)}} dx = \int 1 dx \Rightarrow 2\sqrt{1+f(x)} = x+c \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 - 1 \Rightarrow f(1) = \frac{5}{4} \quad \text{گزینه ۳ صحیح است.}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx = \int_0^\infty \int_1^2 e^{-yx} dy dx \Rightarrow I = \int_1^2 \int_0^\infty e^{-yx} dx dy = \int_1^2 \frac{1}{y} e^{-yx} \Big|_0^\infty dy = -\ln 2 \quad \text{گزینه ۴ صحیح است.}$$

در آزمون‌های بعد بیشتر توضیح داده خواهد شد.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{\cos^2 x}; \quad f(0) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \text{گزینه ۳ صحیح است.}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{f(x)} = \tan x + c \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \tan^2 x \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{خط قائم بر منحنی:}$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - 1, \quad \cos x > 0 \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Big|_{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3} \quad \text{گزینه ۳ صحیح است.}$$