دانشگاه تهران
دانشکده فنی
گروه مهندسی صنایع

عنوان درس:

تئوری صف

استاد:

دکتر جولای

1 تئوری صف

1.1 مراجع لاتین و فارسی

1- Introduction to Queuing theory by Grass γ Harris 1985.

2- Queuing systems γ Application (دو جلد) Klein rock 75

3- Queuing Methods for Services and Manufacturing by Randolph W. Hall 1991.

4- نظریه صف، محمد مدرس یزدی.

5- مدل‌های صف، ایروانی (2 جلد).

6-مقدمه‌ای به تئوری صف، شاهکار (نشر دانشگاهی).

2.1 نحوه ارزیابی

- آزمون پایان ترم 60-50٪.
- پروژه
- مقاله

30-40٪ تاریخ تحویل خرداد ماه 88.

- تمرینات 20٪.

2 فهرست مطالب

1.2 مقدمات

- ✍ کاربردها
- ✍ اجزای سیستم صف
- ✍ معیارهای صف
- ✍ نمادهای صف

2.2 مروری بر احتمالات

- ✍ توابع توزیع پر کاربرد
- ✍ تبدیل‌های لاپلاس و Z و مولد گشتاور و اشاره به کاربرد آنها

3.2 مروری بر فرآیندهای احتمالی

- ✍ زنجیره‌های مارکوف گسسته
- ✍ زنجیره‌های مارکوف پیوسته
- ✍ پروسه‌های تولد-مرگ
- ✍ فرآیند پواسون
- ✍

4.2 سیستم‌های صف

- سیستم‌های صف قطعی (سیستم M/M/*)
- سیستم‌های توزیع کلی (G/G/1 , G/M/1 , M/G/1)
- سیستم‌های خاص (انباشته‌ای ، شکست ماشین و غیره)

5.2 شبکه‌های صف

6.2 سایر موارد

- بهینه سازی، طراحی و پیاده سازی صف
- روشهای کوتاه کردن طول صف
- شبیه سازی صف
- نمونه‌های کاربردی

3 مقدمه

مشتری و سرویس کننده دو طرف یک صف هستند.

مثال: بانک، تعمیرگاه، صندوق فروشگاه.

معطل ماندن مشتری ⟵ از دست دادن اعتبار موسسه

وقتی تقاضا از امکانات بیشتر است ⟵ از دست دادن مشتریان

1.3 دلایل کم بودن امکانات

- از لحاظ اقتصادی قراردادن سرویس کافی در اختیار مشتری امکان‌پذیر نیست (موسسات خصوصی).
- وجود محدودیت فضا برای افزایش امکانات سرویس (مثلاً فضای آموزش یا محل تعمیرات ماشین).

2.3 آیا باید برای رفع کمبود سرمایه گذاری کنیم؟

برای اطلاع از این‌که چه مقدار سرویس باید در اختیار داشته باشیم (بر روی امکانات سرمایه گذاری کنیم یا خیر) باید دو سوال پاسخ داده شود:

1- چه مدت یک مشتری باید صبر کند؟

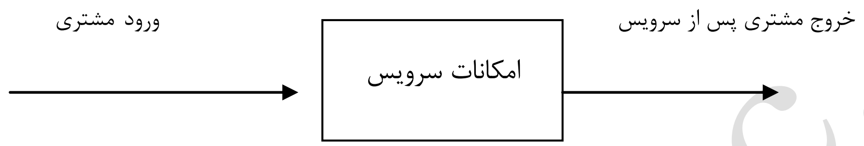
2- طول صف چقدر است؟

به سوالات فوق ،در تئوری صف، در درجه اول از طریق آنالیز ریاضی و در غیر این‌صورت از طریق شبیه‌سازی پاسخ داده می‌شود. و این دو سوال معیار ارزیابی سیستم موجود و یا معیارهای طراحی سیستم جدید هستند.

توجه: لزوماً مشتری یک انسان نیست مثلاً برنامه کامپیوتری یا نامه‌های تایپی، هواپیما، قطعات تولیدی و غیره، نیز مشتری محسوب می‌شوند.

4 توصیف مسأله صف[1]

یک سیستم صف را می‌توان به صورت مشتریانی تعریف کرد که برای سرویس گرفتن وارد سیستم می‌شوند و اگر سرویس در اختیار نباشد برای آن منتظر می‌مانند و پس از انجام سرویس سیستم را ترک می‌کنند.



اما بهترین طریقه برای توصیف یک مسئله تشریح اجزاء آن با دقت و به‌طور کامل است. اجزاء یک سیستم صف عبارتند از:

1. الگوی ورود مشتریان
2. الگوی سرویس سرویس کنندگان
3. نظم صف
4. ظرفیت سیستم
5. تعداد کانالهای سرویس
6. مراحل سرویس

[1] Description of Queuing problem

1.4 الگوی ورود مشتریان

تعداد متوسط ورودی در واحد زمان (میانگین نرخ ورودی) یا زمان متوسط مابین ورودی‌های متوالی، از هر کدام استفاده کنید فرقی نمی‌کند و مشخص کننده الگوی ورود مشتریان است و دو حالت کلی دارد :

1- قطعی (توزیع آماری خاص وجود ندارد و متوسط نرخ ورودی آن را تعیین می‌کند.)

2- تصادفی (عدم قطعیت داریم و به میانگین و واریانس ... و نوع توزیع برای مسئله خودمان نیاز داریم.)

2.4 نوع ورود مشتریان

1- تک به تک

2- انباشته‌ای یا گروهی[1]: در یک لحظه بیش از یک ورودی به سیستم(نه سرویس) داریم. تعداد مشتریان انباشته یا قطعی است یا تصادفی.

3.4 نوع واکنش مشتریان

- یعنی مشتری به محض ورود به سیستم چه تصمیمی می‌گیرد:
- هر اندازه صف طولانی باشد صبر می‌کند
- به نظر او صف طولانی است و سیستم را بلافاصله ترک می‌کند[2]
- به نظر او صف طولانی است و سیستم را پس از مدتی انتظار ترک می‌کند[3]
- گاهی اوقات پس از مدتی انتظار صف را ترک می‌کند ولی به صف دیگری در سیستم که به نظر او کوتاهتر است می‌رود[1]

---

[1] Batches or Bulks

[2] balking

[3] Reneging

4.4 نوع الگوی ورودی نسبت به زمان

1- الگوی ورودی نسبت به زمان ثابت است، یعنی شکل و مقادیر پارامترها و توزیع مستقل از زمان هستند و تغییر نخواهند کرد[2]

2- الگوی ورودی یا یکی از پارامترها با زمان تغییر می‌کند[3]. مثلاً قطعات ورودی به یک گارگاه عروسک سازی در ایام عید بیشتر است، یا مقدار کالائی که می‌سازند سال به سال به علت تغییرات تکنولوژی کمتر می‌شود.

5.4 الگوی سرویس

اکثر موارد الگوی ورودی در اینجا نیز صادق است.

ما به‌دنبال یافتن نرخ سرویس‌دهی هستیم: میانگین تعداد مشتریانی که در واحد زمان سرویس می‌شوند[4].

یا میانگین لازم برای سرویس یک مشتری[5] هستیم.

✍ **توجه:** وقتی راجع به نرخ یا میانگین صحبت می‌کنیم مقادیر شرطی هستند. این شرط که سیستم خالی از مشتری نباشد. اگر سیستم خالی باشد امکانات سرویس بلا استفاده می‌ماند.

6.4 سرویس به حالات

✍ قطعی یا احتمالی

---

[1] Jockeying

[2] Stationary

[3] Non Stationary

[4] Mean Service rate

[5] Mean Service time

- فردی[1] یا انباشته‌ای (حمل و نقل)
- سرویس وابسته به تعداد مشتریان[2] (افرادی‌که وارد سیستم شده‌اند)، مثلاً اگر صف طولانی شود یا سریع‌تر کار می‌کند یا دست‌پاچه می‌شود، یا مستقل از تعداد افراد سیستم است.

توجه: در الگوی ورود نیز می‌توانستیم عدم صبر مشتری را بعنوان ورودی وابسته به حالت بگیریم.

1.6.4 سرویس به حالات

- پایدار
- ناپایدار نسبت به زمان (سرویس کننده با کسب تجربه کار خود را بهتر فرا می‌گیرد) نیز تقسیم می‌شود.

توجه: وابستگی حالت به مدت زمانی که سیستم درکار بوده بستگی ندارد بلکه به حالت سیستم در یک زمان داده شده بستگی دارد. اما نوع دوم به زمان وابسته است.

توجه: یک سیستم می‌تواند هر دو نوع وابستگی را داشته باشد.

7.4 نظم صف

اشاره به طریقه‌ای دارد که مشتریان برای انجام سرویس انتخاب می‌شوند.

- اولین فرد (یا انباشته‌ی) ورودی برای سرویس انتخاب می‌شود[3].

---

[1] Single

[2] State Dependant Service

[3] FIFO

✍ آخرین ورودی اولین سرویس[1]: در انبارهائی که کالای اسقاط ندارند رایج است چون دسترسی به اقلام راحت‌تر است.

✍ به‌طور تصادفی و مستقل از زمان ورود به صف مشتری انتخاب می‌شود[2].

توجه: در خیلی مواقع هیچ نظمی را نمی‌توان برقرار کرد. مثلاً در سر چهار راه برای عبور از چراغ کلاً نظمی نیست. کلاً در جاهائی‌که مردم عادت به صف بستن ندارند این حالت روی می‌دهد.

✍ طرح‌های تقدم تاخر: (به مشتریان موقع ورود نمره و حق تقدم داده می‌شود و مشتریان با نمره بالا صرف نظر از زمان و ورودشان زودتر سرویس می‌شوند.) : به دو حالت همراه با تخلیه یا قطع[3] و غیر تخلیه تقسیم میشوند.

در حالت تخلیه کار مشتری جاری قطع شده و مشتری با حق تقدم بالاتر هنگام ورود سرویس داده می‌شود. در ابن حالت یا سرویس قطع شده در موقع ادامه از نقطه قطع ادامه می یابد یا سرویس قطع شده از نو شروع می‌شود. در حالت غیر تخلیه مشتری با تقدم بالا در جلوی صف قرار می‌گیرد.

توجه: اگر هم‌زمان بیش از یک مشتری دارای تقدم یکسان باشند، می‌توان براساس یکی از موارد قبل نظم داخلی را تعیین کرد.

نکته: می‌توان هم‌زمان حالت تخلیه و عدم تخلیه داشته باشیم. مثلاً پیام‌های نظامی که به یک مرکز می‌رسند، اپراتور تنها وقتی پیام جاری را قطع کند که پیام اضطراری دریافت شده باشد و یا می‌توان حالت پیچیده‌تر ساخت به این صورت که اگر مدت زمان زیادی از سرویس نگذشته باشد تخلیه صورت گیرد و گرنه ادامه یابد .

---

[1] LIFO

[2] Select in Random Order. (SIRO)

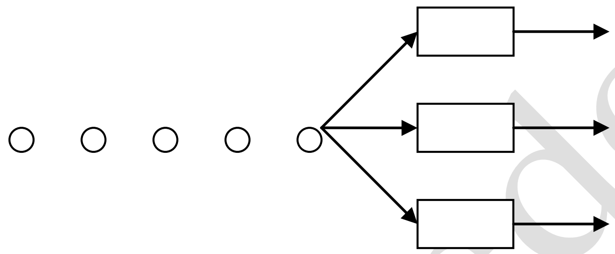
[3] preemptive

8.4 ظرفیت سیستم (یا مدل‌های صف محدود)

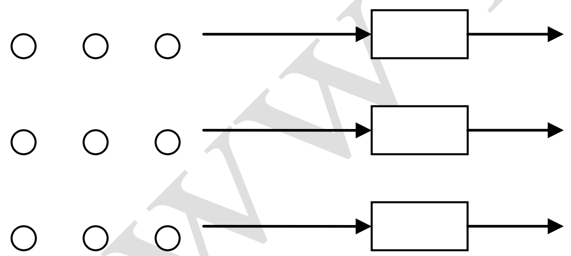
منظور محدودیت فیزیکی برای اندازه محل انتظار مشتریان است. در نتیجه وقتی صف به حد معینی رسید مشتریان اجازه ورود ندارند (به عبارت دیگر یک نوع امتناع اجباری مشتری است).

9.4 تعداد کانال‌های سرویس

منظور تعداد ایستگاه های سرویس موازی است که به‌طور هم‌زمان به مشتریان سرویس می‌دهند و دو نوع می‌باشند. نوع اول که برای همه سرورها یک صف واحد داریم:



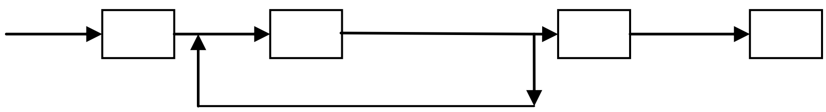
و نوع دوم که هر کانال یک صف جداگانه دارد:



10.4 مراحل سرویس

گاهی اوقات چند مرحله سرویس داریم. مثل انجام آزمایشات و معاینات پزشکی. در اینجا دو حالت وجود دارد:

- بدون سیکل برگشت
- با سیکل برگشت (دوباره کاری ضایعات خطوط تولید)



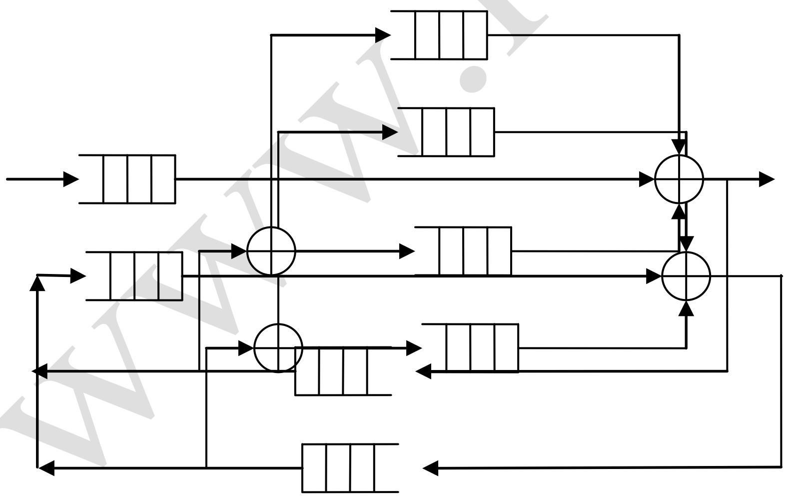
برای

شبکه‌های صف علاوه بر موارد یک سیستم صف اطلاعات دیگری نیز باید ذکر شوند:

چگونگی ارتباط و اتصال صف‌ها با یکدیگر

- استراتژی مسیر حرکت- قطعی یا احتمالی با احتمالات داده شده
- استراتژی که بدنبال وقوع حالت بلوکه شدن باید دنبال کرد (در حالت ظرفیت محدود مکان انتظار مشتری)
- شبکه‌های باز و شبکه‌های بسته دو نوع کلی و استاندارد هستند

شبکه باز به‌صورت شکل زیر می‌باشد:



نمایش شبکه بسته به صورت ذیل می‌باشد:

گاهی اوقات تشخیص موارد فوق به سادگی میسر نسیت. مثلاً اینکه مشتری را چه چیزی بگیریم، یا سرویس دهنده ممکن است حالت‌های مختلف و ناواضحی داشته باشد. کاربردهای تئوری صف مختلف

است. علاوه بر موارد ذکر شده در کنترل موجودی، بارگیری و تخلیه کشتی، بیمارستان‌ها، جریان تولید و طرح سیستم کاربرد دارد.

11.4 معیارهای ارزیابی[1]

برای سنجش عملکرد یک سیستم صف از سه معیار زیر بهره می‌گیرند.

- طول صف (تعداد مشتریانی که در صف منتظر دریافت خدمت هستند یا تعداد مشتریان داخل سیستم)
- زمان انتظار هر مشتری در صف یا سیستم (زمان انتظار در صف + مدت زمان دریافت سرویس)
- درصدی از زمان که سیستم به علت نبودن مشتری بیکار است (درصدی از زمان که سیستم مشغول به کار است).

چون سیستم‌ها تصادفی هستند اغلب اوقات ارزش انتظاری یا میانگین این معیار ها مد نظر است.

12.4 تعاریف و اصطلاحات

برای بیان مختصر یک مسئله صف روش‌های مختلفی ارائه شده است. از جمله کندال[2] (1953) یک مسئله صف را با حروفی که با خط مورب از هم جدا شده‌اند نشان داد: ($A/B/X/Y/Z$)

ویژگی	سمبل نشانه	توضیحات	ویژگی	سمبل	توضیحات
توزیع زمان مابین ورودی‌های متوالی	M D	توزیع نمایی قطعی	X	$1, 2, \dots, \infty$	

[1] Measure of effectiveness

[2] Kendall

A	E_k GI	ارلنگ توزیع نوع k زمان‌های با توزیع مستقل کلی			

نظم صف (Z)	FIFO LIFO SIRO PRI GD	منظم (به اولین ورودی، زودتر از بقیه سرویس‌دهی می‌شود) منظم (به آخرین ورودی، زودتر از بقیه سرویس‌دهی می‌شود) تصادفی برخی ورودی‌ها نسبت به بقیه دارای ارجحیت هستند کلی (تصمیم‌گیری مبنایی ندارد)

مثال: $M/D/2/\infty/FIFO$

اگر $y=\infty$ and $z=FIFO$ باشد ذکر نمی‌شوند $M/D/2$.

در GI ، تنها مستقل بودن توزیعات و یکسان بودن آنها لازم است.

E_k ارلنگ نوع k می‌باشد و جمع k متغیر تصادفی نمایی است (یا تابع گاما با درجات صحیح آزادی).

M نمایی است. چون تنها تابع نمایی دارای خاصیت مارکوفی است (یعنی احتمال اینکه بدانیم در لحظه آینده چند نفر وارد سیستم می‌شوند مشروط به وضعیت فعلی است نه وضعیت گذشته)، بنابراین با M نشان داده می‌شود. این سمبل‌ها کافی نیستند. مثلا برای سرویس انباشته‌ای یا ورودی انباشته‌ای یا نمایش مراحل و یا سرویس وابسته به حالت نمادی ارائه نشده است.

تمرینات

1- اجزای سیستم‌های صف زیر را مشخص کنید.

الف- انبار ابزار کارخانه

ب- مرکز اورژانس شهر

ج- مخزن سد آب

د- باجه عوارضی در ابتدای بزرگراه

هـ- خط تولید محصول با سه نوع عملیات و یک مورد بازرسی در انتهای خط

2- سیستم انبارداری محصولی را در نظر بگیرید که تعداد موجودی آن محصول به اضافه تعدادی که نمایش داده شده است همیشه برابر N باشد. به عبارت دیگر موقعی که یک واحد محصول فروخته می‌شود، بلافاصله برای جایگزینی آن واحد دیگری از محصول سفارش داده شود. سیستم صف را برای این مسئله تعریف کنید.

3- یک پارکینگ اتومبیل را با ظرفیت معین به صورت سیستم در نظر بگیرید. اجزای آن یعنی نوع خدمت، خدمت دهندگان و تعداد آنها، مشتری، جمعیت مشتریان بالقوه همگن بودن یا نبودن آهنگ ورودی مشتری، مدت زمان خدمت، آهنگ خدمت دهی و آهنگ خروج مشتری و طول صف را مشخص کنید.

1 مروری بر احتمالات

1.1 فضای نمونه

مجموعه نتیجه‌هایی است که می توان از یک تجربه (آزمایش) تصادفی انتظار داشت.

(**مثال 1**) یک مشتری وارد یک سیستم صف می گردد که حداکثر ظرفیت آن 5 نفر است. او نمی‌داند که هنگام ورودش چند نفر در سیستم هستند و لیکن اطمینان دارد که بیش از 5 نفر نمی باشند. بنابراین چنانچه نتیجه آزمایش را تعداد مشتریان داخل سیستم تعریف کنیم داریم: $S=\{0,1,2,...,5\}$

2.1 پیشامد

هر زیر مجموعه‌ی فضای نمونه را یک پیشامد گویند. اگر مجموعه E یک پیشامد باشد: $E\dot{C}S$.

(**مثال 2**) در مثال اول، $E=\{0\}$ پیشامد سیستم خالی بودن سیستم در هنگام ورود یک مشتری است.

3.1 احتمال وقوع یک پیشامد

براساس سه اصل زیر تعریف می شود:

$$(1)\quad if\quad E_1E_2=¤ \rightarrow P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)$$
$$(2)\quad P(S)=1$$
$$(3)\quad 0\le P(E)\le 1$$

4.1 متغیر تصادفی

عبارت از تابعی عددی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود. به هر عضو فضای نمونه عددی اختصاص داده می شود. به عنوان مثال متغیرهای تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

متغیر تصادفی زمان سرویس دهی X

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{اگر زمان سرویس بزرگتر از 6 باشد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

تابع توزیع (تجمعی) متغیر تصادفی X به ازای تمام مقادیر X عبارتست از:

$$F(x) = P(X \le x) : (-\infty, +\infty)$$
$$a \le b \to F(a) \le F(b)$$
$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$$

برای متغیر گسسته داریم:

اگر a یک عنصر از مجموعه قابل شمارش باشد: $P(a)=P(X=a)$ تابع احتمال تعریف می‌شود و داریم:

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} p(a) = 1$$
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} p(a)$$

برای متغیر پیوسته داریم: $f(x) = \frac{dF(x)}{da}$ که تابع چگالی متغیر تصادفی تعریف می‌شود و داریم:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$
$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(y)dy; \quad P(x=a) = 0$$

5.1 امید ریاضی

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \qquad ; E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$
$$E[ax+b] = aE[x] + b \qquad ; E[ax+by] = aE[x] + bE[y]$$

6.1 واریانس متغیر تصادفی

$$Var[x] = E[(x - E[x])^2] = E[x^2] - (E[x])^2$$
$$Var[ax + b] = a^2 \times Var[x]$$
$$if\ \ b \in R \Rightarrow Var[b] = 0$$

7.1 تابع توزیع توام

احتمال اینکه هر دو متغیر تصادفی X و Y با هم روی دهند عبارتست از:

$$F(x < y) = p(X \leq x, y \leq y)$$

و نحوه محاسبه احتمالات تکی به‌صورت ذیل خواهند بود:

$$F_x(x) = P(X \leq x, y < \infty) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) = F(x, \infty)$$
$$f(a,b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a,b) \qquad f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

8.1 متغیرهای تصادفی مستقل

اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند، داریم:

$$P(X \in A, y \in B) = P(x \in A)\, p(X \in B)$$

بنابراین اگر به ازای همه مجموعه‌های عددی A و B رابطه فوق صادق باشد، آنگاه دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل گویند. متغیرهای مستقل دارای خواص زیر هستند.

$$F(x, y) = F_x(x) F_y(y)$$
$$P(x, y) = P_x(x) P_y(y)$$
$$F(x, y) = f_x(x) f_y(y)$$
$$\operatorname{cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y) = 0$$
$$\Rightarrow E(xy) = E(x)E(y)$$

برای تمام متغیرهای مستقل و غیرمستقل داریم:

$$V(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

9.1 احتمال شرطی

$P(E|F)$ احتمال اتفاق افتادن پیشامد E است، مشروط بر این‌که پیشامد F اتفاق افتاده باشد.

اگر F و E مستقل باشند:

$$P(E/F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{P(E)\times P(F)}{P(F)}=P(E)$$

(**مثال 3**) دو مشتری وارد یک سیستم شده اند. با فرض اینکه احتمال ورود یک مشتری مرد برابر 0/6 باشد, احتمال پیشامد: {مرد بودن هر دو مشتری} = E را در سه حالت زیر حساب کنید:

الف ـ بدون اطلاعات اضافی:

$P(E)$=0/6(0/6)= 0/36

ب ـ اگر بدانیم مشتری اول مرد است (پیشامد F):

$$P(E/F)=\frac{P(EF)}{P(F)}$$

$P(EF) = P$ (مرد بودن هر دو مشتری و مرد بودن مشتری اول)

$= P$ (مرد بودن هر دو مشتری)=0/36

$$P(F)=0.6\rightarrow P(E/F)=0.6$$

ج – اگر بدانیم حداقل یکی از دو مشتری مرد است (پیشامد G

$$P(E/G)=\frac{P(EG)}{P(G)}\qquad\rightarrow P(E1G)=0.43$$

$P(E \cap G) = 0.36$

$P(G) = 1 - P$ (زن بودن هر دو مشتری) $= 1 - 0.16 = .84$

10.1 امید شرطی

امید ریاضی X مشروط بر آنکه متغیر تصادفی Y مقدار y داشته باشد:

$$E(X \mid Y = y) = \sum_x xP(X = x \mid y = y)$$

$$E(X \mid Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx}$$

کاربرد:

$$E[x] = \sum_y E(x / Y = y)P(Y = y) \quad , \quad E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x / Y = y) f_y(y)dy$$

$$P(A) = \sum P(A / Y = y)P(Y = y) \quad , \quad P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A / Y = y) f(y)dy$$

11.1 فرمول بیز

$$P(A / B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} = \frac{P(B / A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B / A)P(A)}{P(B / A)P(A) + P(B / A^c)P(A^c)}$$

(**مثال 4**) کارخانه ای دارای دو کارگاه است. محصولات کارگاه اول در 90 درصد اوقات و محصولات کارگاه دوم در 40 درصد اوقات استاندارد می باشند. با فرض اینکه میزان تولیدات کارگاه اول سه برابر تولید کارگاه دوم است, یک واحد کالای استاندارد این کارخانه با چه احتمالی در کارگاه اول تولید شده است؟

حل: تعریف پیشامدها

A: کالا از گروه تولیدات کارگاه اول است

B: کالا با استاندارد تطبیق کند.

$$P(A,B)=?$$
$$P(B/A)=0.9,\quad P(B/A^c)=0.4,\quad P(A)=0.75$$
$$P(A/B)=\frac{(0.9)0.75}{0.9(0.75)+0.4(0.25)}=\frac{27}{31}$$

12.1 تابع مولد گشتاور

می‌دانیم:

$$M_x(t)=E[e^{tx}]\ \rightarrow\ \frac{dM_x(t)}{dt^n\,|_{t=0}}=E(X^n)_{n=1,2,\ldots}$$
$$M_{x+y}(t)=E[e^{t(x+y)}]=E[e^{t(x)}]E[e^{t(y)}]=M_x(t)M_y(t)$$

تبدیل Z یا تابع مولد منحصراً برای توابع گسسته خواهد شد:

$$if\ \ G_i=P[x=i]\ \rightarrow\ G(z)=\sum_{i=0}^{\infty}P_iZ^i$$

به شرط آنکه Z به نحوی انتخاب شود که سری P_iZ^i همگرا باشد.

رابطه بین P_i و $P(z)$ منحصر به فرد است و با داشتن یکی، دیگری بدست می آید.

$$G_n=\frac{1}{n!}\frac{dG(z)}{dz^n\,/_{z=0}}\qquad n=1,2,\ldots$$
$$=\frac{1}{n!}G^{(i)}(o)$$

با کمک $G(z)$ می‌توان احتمالات P_i را راحت تر بدست آورد. معمولاً $G(z)$ را به‌صورت یک سری، در می‌آورند. در این سری ضرایب Z^i را P_iها تشکیل می دهند.

و یا آن‌را به‌صورت جز به جز به فرمی در می‌آورند که تبدیل اجزا آن از قبل شناخته شده است.

(مثال 5)

$$G(z)=\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4$$
$$P_i=\begin{cases}1 & for\ \ n\ \ be\ an\ even\ number\\ 0 & for\ n\ \ be\ an\ odd\ number\end{cases}$$
$$G(z)=\frac{2}{(1-z)(2-z)}=\frac{2}{1-z}-\frac{2}{2-z}=\frac{2}{1-z}-\frac{1}{1-z/2}$$

چون $\frac{A}{1-az}$برابر توالی $A.a^i$ است داریم:

$$P_i=2(1)^i-1(\frac{1}{2})^i=2-(\frac{1}{2})^i$$

13.1 محاسبه گشتاور های توزیع با کمک $G(z)$

چون P_i احتمال هستند, جمع آنها برابر 1 است:

$$G(1)=G^{(o)}(1)=\sum_{i=1}^{\infty}P_i 1^i=1$$

با مشتق‌گیری داریم:

$$G^{(1)}(z)=\frac{d}{dz}E[Z^x]=E[xZ^{x-1}]$$
$$G^{(1)}(1)=E[x]....G^{(i)}(1)=E[x(x-1)...(x-i+1)]=F_i$$

F_iرا گشتاور فاکتوریال i ام گویند.

ارتباط زیر بین F_i با M_i (گشتاور مرکزی) $E[x^i]=1$ وجود دارد:

$$F_1=M_1$$
$$F_2=M_2-M_1\quad\begin{cases}M_1=F_1\\ M_2=F_2+F_1\\ M_3=F_3+3F_2+F_1\end{cases}$$

(مثال 6)

$$F_2 = G^{(2)}(1) = E[X(X-1] = E[X^2] - E[X]$$
$$M_2 = F_2 + F_1 = G^{(2)}(1) + G^{(1)}(1) \Rightarrow V[x] = M_2 - M_1^2$$
$$= G^{(2)}(1) + G^{(1)}(1) - (G^{(1)}(1))^2$$

طرف1: گشتاورها مستقیماً نیز (بدون F_i) از توابع مولد قابل استحصال هستند:

$$\frac{dG(Z)}{dz/_{z=1}} = E[Xz^{X-1}]_{z=1} = E[X]$$
$$\frac{d}{dz}(Z\frac{d}{dz})G(z)_{/z=1} = E[X^2 z^{X-1}]_{z=1} = E[x^2]$$
$$E[x^i] = \frac{d}{dz}(z\frac{d}{dz})^{i-1}G(z)_{/Z=1} = (Z\frac{d}{dz})^i G(z)_{/z=1}$$

$$G_{X+Y}(z) = E[z^{X+Y}] = E[z^X z^Y] = E[z^X]E[z^Y] \text{ if X and Y are dependent}$$
$$= G_X(z).G_Y(z)$$

تابع مولد برای توزیعی که از کانولیشن دو توزیع بدست می‌آید برابر حاصل ضرب توابع توزیع‌های مربوطه می‌باشد. به زبان احتمالی :

$$P\{X+Y=k\} = (p \times q)_k = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i} \quad where \quad p_i = P\{X=j\}$$
$$\to \quad q_j = P\{Y=j\}$$

14.1 توزیع مرکب[1] و تابع مولد آن

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_N; \quad for\ i = 1,...,N \quad X_i\ are\ IID$$

N متغیر تصادفی غیرمنفی با توزیع یکسان و مستقل از هم داریم.

[1] Compound distribution

اگر $G_X(Z)$ برای X_i ها مشترک و $G_N(Z)$ ها داده شده باشند, برای محاسبه $G_Y(Z)$ داریم:

$$G_Y(z) = E[z^Y]$$
$$= E\left[E[z^Y \mid N]\right] = E\left[[z^{X_1+X_2+\ldots X_n} \mid N]\right] = E\left[E[z^{X_1} \ldots . z^{X_n} / N]\right]$$
$$= E[G_X(z)^N] = G_N(G_X(z)$$

1 توزیع‌های احتمال گسسته

1.1 توزیع برنولی[1]

برای یک آزمایش دو احتمال موفقیت و شکست داریم. مثلاً جریان برق از یک سیم عبور می‌کند یا عبور نمی‌کند. احتمال موفقیت برابر p بوده که در این صورت مقدار متغیر تصادفی $X=1$ است و در غیر این صورت (یعنی با احتمال $1-p$) مقدار متغیر تصادفی $X=0$ خواهد بود.

$$G(Z)=p_o Z^0+p_1 Z^1=q+z^1=q+pz \qquad E[x]=G^1(1)=p \qquad V[x]=pq$$

2.1 توزیع دو جمله‌ای[2]

در این توزیع متغیر تصادفی X تعداد موفقیت‌های موجود در n آزمایش برنولی متوالی و مستقل است، یعنی داریم:

$$y_i \sim \text{Bernoulli}(p) \quad \text{Where} \quad X=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

در تعریف فوق، y_iها مستقل از هم می‌باشند.

$$G(z)=(q+pz)^n=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}z^i$$

$$\xrightarrow{\text{where}} p_i=P\{X=i\}=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

$$E[X]=nE[Y_i]=np \quad , \quad V[X]=nV[Y_i]=np(1-p)$$

نکته) در حالت حدی وقتی تعداد آزمایشات $n\to+\infty$ میل می‌کند، اگر $E[X]=np=a$ ثابت باشد به توزیع پوآسون می‌رسیم، یعنی:

[1] Bernoulli distribution

[2] Polynomial distribution

$$G(z) = \left(1-(1-z)p\right)^n = (1-(1-z)\alpha/n)^n \longrightarrow e^{(z-1)\alpha}$$

نکته) اگر X_i ها دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامتر یکسان p باشند (با n_iهای متفاوت) توزیع جمعی آن‌ها برابر است با:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim \text{Bin}\,(n_1 + n_2 + \ldots + n_n\,, p)$$

3.1 توزیع چند جمله‌ای[1]

یک توالی از n آزمایش را در نظر بگیرید که این بار هر آزمایش دارای $k \geq 2$ پیشامد ممکن است. در هر آزمایش احتمال‌های پیشامدها برابر $p_1, p_2, \ldots, p_k$ $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1,$ است.

n_i تعداد دفعات وقوع پیشامد iام در توالی آزمایشات است. می‌خواهیم احتمال توأم واقعه متشکل از پیشامدهای $N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_k = n_k$ را بدست آوریم:

$$G(z_1, z_2, \ldots, z_k) = E[z_1^{N_1} \ldots z_k^{N_k}] = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{n_k=0}^{\infty} P(n_1, n_2, \ldots, n_k) z_1^{n_1} \ldots z_k^{n_k}$$

بعد از یک آزمایش یکی از n_iها برابر با یک و بقیه برابر صفر هستند بنابراین تابع مولد برابر است با:

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_k z_k$$

تابع مولد n آزمایش مستقل، از ضرب تابع مولد یک آزمایش حاصل می‌شود بنابراین داریم:

$$\mathrm{G(z)} = (p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_k z_k)^n$$

از ضرایب توان های مختلف Z_i داریم:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$$

---

[1] Multinomial distribution

4.1 توزیع هندسی[1]

در این توزیع متغیر تصادفی X، مقدار آزمایشات مورد نیاز در دنباله‌ای از آزمایشات برنولی (با احتمال موفقیت p) برای رسیدن به اولین موفقیت است. گاهی اوقات متغیر $X-1$ را هندسی تعریف می‌کنند (که از صفر شروع می شود). احتمال آن‌که اولین موفقیت بیش از n آزمایش لازم داشته باشد.

خاصیت بدون حافظه بودن این توزیع، یعنی اگر تا به حال j آزمایش بدون موفقیت داشته باشیم احتمال آن‌که پس از i آزمایش به موفقیت برسیم همانند آن است که i آزمایش جدید از اول شروع کرده باشیم.

5.1 توزیع دو جمله‌ای منفی[2]

در این توزیع X، تعداد آزمایشات مورد نیاز در یک توالی از آزمایشات برنولی برای n موفقیت است. اگر $X=i$ باشد به این معنی است که در بین $i-1$ آزمایش اول باید $n-1$ موفقیت وجود داشته باشد و iامین آزمایش هم با موفقیت همراه باشد. بنابراین تعداد آزمایشات برای رسیدن به اولین موفقیت از توانایی هندسی Geom (P) پیروی می کند. به همین نحو تعداد آزمایشات لازم از آن نقطه تا موفقیت بعدی نیز Geom (p) است بنابراین است که در آن یکسان هستند. تابع مولد، میانگین و واریانس این توزیع n برابر توزیع هندسی می باشند.

6.1 متغیر تصادفی هندسی

تعداد آزمایشات برنولی یکسان و مستقل تا رسیدن به اولین موفقیت از توزیع هندسی پیروی می‌کند، که در آن p احتمال موفقیت در هر آزمایشی برنولی است.

---

[1] Geometric distribution

[2] Negative binomial

در محیط صنعتی زمان لازم برای انجام یک کار, نصب یک ابزار, حمل یک قطعه, آماده سازی ماشین و نیز تعداد واحد زمانی که یک ماشین تا زمان خرابی می تواند مستمر کار کند و تعداد واحد زمانی لازم برای تعمیر آن (یا یک قطعه از آن) بکار رود. در ارتباط با خاصیت بدون حافظه بدون توزیع هندسی، رابطه ذیل قابل اثبات است:

$$p(X=m+n \mid X>m)=P(X=n)$$

یعنی به m که تاریخچه متغیر X است بستگی ندارد.

مثال: عمر یک ابزار ماشین کاری با تعداد باری که استفاده شده است قبل از آنک بشکند نشان داده می‌شود. فرض کنید عمر یک ابزار خاص با متغیر تصادفی X از توزیع هندسی پیروی می‌کند ($p=0.01$) بنابراین ابزار تا 100 بار می تواند بطور متوسط استفاده شود اگر بدانیم که تا به حال 50 بار مورد استفاده قرار گرفته است:

مثال: نشان دهید توزیع هندسی تنها توزیع گسسته دارای خاصیت بدون حافظه است.

اثبات: اگر خاصیت $p(X=m+n \mid X>m)=P(X=n)$ برای متغیر تصادفی X برقرار باشد, با قراردادن $m=1$ و $n=k;\ k=1,2,\ldots$ در رابطه داریم:

بنابراین به تابع برگشت زیر می رسیم:

توجه)

$$p(X=k+1)=(1-p)\times p(X=k);\ p=p(X=1)$$

همان احتمال موقعیت برنولی خواهد شد. با جایگزینی مکرر خواهیم داشت:

که توزیع هندسی با پارامتر P است.

7.1 توزیع پواسون[1]

X یک متغیر تصادفی غیرمنفی عدد صحیح با احتمالات نقطه ای است.

به همین طریق می‌توان این توزیع را به‌عنوان تعداد دفعات وقوع یک واقعه (ورود مشتری) در یک فاصله زمانی به طول t از یک فرایند پراسون به چگالی تعریف کرد:

- احتمال وقوع واقعه (پیشامد موفقیت) در فاصله زمانی کوچک dtو است.
- احتمال وقوع همزمان دو واقعه است.
- تعداد وقایع در فواصل زمانی بدون هم پوشی مستقل از هم هستند.

خواص توزیع پواسون:

1- جمع دو متغیر تصادفی پواسون از توزیع پواسون پیروی می کند.

2- اگر N را تعداد عناصر یک مجموعه تعریف کنیم که از توزیع پواسون پیروی کند:

$N \sim \text{poisson}\,(a)$

و با احتمال p (هر عنصر مستقل از دیگری با این احتمال انتخاب می شود) از این مجموعه انتخابی صورت دهیم, اندازه مجموعه انتخاب شده k یک متغیر تصادفی پوآسون است:

$K \sim \text{poisson}\,(pa)$

اثبات: K از توزیع مرکب پیروی می کند.

[1] Poisson distribution

3- اگر تعداد عناصر یک مجموعه از $N \sim \text{poisson}\,(a)$ پیروی کند و بطور تصادفی به یکی از دو گروه 1 و 2 با احتمال و تخصیص یابند در آن صورت اندازه های مجموعه های 1 و 2 مستقل از هم با توزیع های زیر هستند:

اثبات: با استفاده از قانون احتمالات کل.

بنابراین توزیع احتمالی توام از نوع ضربی است که از حاصل ضرب در توزیع پراسون با پارامترهای () حاصل می شوند (نتیجه فوق قابل تعمیم است).

1.7.1 Method of collective Marks

برای Z یک تعبیر احتمالی هم ساخته اند, هر چند خود آن یک متغیر کمکی است.

با تعبیر داده شده اثبات ها راحتر می شود.

$N = 0,1,2,...$ را متغیر تصادفی عدد صحیح غیرمنفی و () را تابع مولد آن فرض می‌کنیم.

تعبیر) به N به عنوان متغیری که اندازه یک مجموعه را نشان می دهد نگاه کنید. هر عضو از آن را بطور مستقل با احتمال $1-Z$ علامت می‌زنیم و با احتمال Z به حال خود رها می کنیم. در آن صورت احتمال آن خواهد بود که در کل مجموعه موجود, هیچگونه علامتی وجود نداشته باشد.

مثال: تابع مولد یک توزیع مرکب.

احتمال آنکه هیچ کدام از زیر مجموعه ها علامت نخورند.

احتمال آنکه یک زیر مجموعه علامت نخورده باشد.

2.7.1 Method of probability shift

روشی برای تخمین احتمالات گسسته است. خیلی از توزیعات با میانگین بزرگ را با توزیع نرمال تقریب می زنند. بعنوان مثال:

$N(a,a) \sim \text{poisson, when a} >> 1$

این ترتیب ها در حول و حوش میانگین خوب هستند, اما در نزدیک توزیع معمولاً خطا زیاد است. روش‌هایی وجود دارند که این تقریب را بهبود می‌دهند.

اگر تابع مولد توزیع احتمال نقطه ای معلوم باشد می توان احتمال آن را خوب تقریب زد.

مسئله عبارتست از محاسبه متغیر تصادفی X با احتمال نقطه‌ای.

$\text{when } i >> E[X]$

در این روش متغیر تصادفی شیفت داده شده `X را با توزیع نقطه ای زیر در نظر می گیریم، این یک توزیع نرمال شده است. گشتاورهای توزیع شیفت داده شده عبارتند از.

پارامتر شیفت Z را برای Z^* به نحوی انتخاب می کنیم که $M'(Z^*) = i$ یعنی میانگین توزیع جدید در نقطه مورد نظر ما i باشد.

حال اگر توزیع شیفت داده شده را با توزیع نرمال تقریب بزنیم.

به طریق معکوس با حل از رابطه قبلی تقریب دلخواه را بدست می آوریم

بنابراین تنها باید تابع مولد X را بدانیم تا را حساب کنیم.

این روش اگر X جمع چند متغیر تصادفی مستقل ولیکن با توزیعات مختلف باشد کاربرد مفیدی دارد.

مثال : توزیع پواسون:

که توزیع poisson (Za) عبارت خواهد بود از:

در نتیجه برای گشتاور آن داریم:

حل معادله $M'(Z^*) = i$ خواهد بود

تقریب حاصل بسیار نزدیک به توزیع اصلی پواسون است. اگر دقت شود در مخرج $i!$ با تقریب معروف استرلینگ جایگزین شده است

اگر تعداد عناصر مجموعه‌ای $N \sim \text{poisson}\,(a)$ پیروی کند و یک عضو از آن بطور تصادفی به یکی از دو گروه 1 یا 2 تخصیص یابد (با احتمال p_1 و $p_2 = 1 - p_1$) در آن صورت اندازه‌های مجموعه‌های 1 و 2 (N_1, N_2) دارای توزیع‌های زیر هستند:

$$N_1 \sim \text{poisson}\,(p_1 a)$$

$$N_2 \sim \text{poisson}\,(p_2 a)$$

Method of Collective Marks (Dantzig)

برای Z یک تعبیر احتمالی ارائه می‌دهد.

$N = 0,1,\ldots$ را یک متغیر تصادفی عدد صحیح غیرمنفی و $G_N(Z)$ را تابع مولد آن فرض می‌کنیم.

$$G_N(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n \;, \quad P_n = P\{N = n\}$$

به N به صورت متغیری که اندازه یک مجموعه را نشان می‌دهد نگاه می‌کنیم.

اگر هر عضو این مجموعه را به طور مستقل با احتمال $1 - Z$ علامت بزنیم و با احتمال Z به حال خود رها کنیم در آن صورت $G_N(Z)$ احتمال آن است که هیچ عضوی در مجموعه علامت نخورده باشد.

مثال:

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N \qquad \begin{cases} x_1 \sim x_2 \sim \ldots \sim x_N \sim G_X(Z) \\ iid \\ G_N(Z) \end{cases}$$

$$G_Y(Z) = P$$

$G_N(G_X(Z))$ = احتمال اینکه هیچکدام از عناصر X_i ها علامت نخورد.

1 توزیع‌های پیوسته

1.1 تبدیل لاپلاس

در تبدیل لاپلاس متغیر غیرمنفی $x \geq 0$ با تابع چگالی احتمال $f(x)$ برابر زیر است:

$$f^*_{(s)} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \Rightarrow E\left[e^{-sx}\right] = \int_0^\infty e^{-st} dF(t)$$

به عبارت ریاضی تبدیل لاپلاس pdf را داریم که با $L_x(s)$ هم نشان می‌دهند و برای توزیع پیوسته همان نقشی را دارد که توابع مولد در توزیعات گسسته داشتند. (اگر X مقداری صحیح و گسسته باشد و $X \geq 0$ در آن صورت $f^*_{(s)} = G\left(e^{-s}\right)$). اگر X و Y متغیرهای مستقل با تبدیل‌های $f^*_Y(s)$ و $f^*_X(s)$ باشند:

به شرط استقلال

$$f^*_{(x+y)}(s) = E\left[e^{-s(x+y)}\right] = E\left[e^{-sx}e^{-sy}\right] = E\left[e^{-sx}\right]E\left[e^{-sy}\right] = f^*_x(s)\, f^*_y(s)$$

1.1.1 محاسبهٔ گشتاورها با کمک تبدیل لاپلاس

مشتق اول تابع لاپلاس

$$f^{*\,\prime}_{(s)} = \frac{d}{ds} E\left[e^{-sx}\right] = E\left[-xe^{-sx}\right]$$

N

مشتق n ام تابع لاپلاس

$$f^{*\,(n)}_{(s)} = \frac{d^n}{ds^n} E\left[e^{-sx}\right] = E\left[(-x)^n e^{-sx}\right]$$

با ارزیابی این عبارت در نقطهٔ $s = 0$ خواهیم داشت:

$$E[x] = -f^{*'}(0)$$
$$E[x^2] = +f^{*''}(0)$$
$$\vdots$$
$$E[x^n] = (-1)^n f^{*(n)}(0)$$

2.1.1 تبدیل لاپلاس یک جمع تصادفی[1]

$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$; X_i are I.I.D with common $f^*_{x_i}(s)$

$N \geq 0$ integer,with $G_N(Z)$

با در نظر گرفتن شرط استقلال داریم:

$$\begin{aligned} f^*_y(s) &= E[e^{-sy}] = E[E[e^{-sy} \mid N]] = E[E[e^{-s(x_1+\ldots+x_N)} \mid N]] \\ &= E[E[e^{-sx_1}] \ldots E[e^{-s(x_N)}]] \\ &= E[(f^*_x(s))^N] = G_N(f^*_x(s)) \end{aligned}$$

که براساس تعریف $E[Z^n] = G_N(z)$ بدست می‌آید.

3.1.1 تبدیل لاپلاس در روش Collective Marks

تعبیر خاصی برای تبدیل لاپلاس $f^*_{(s)} = E[e^{-sx}];\ x \geq 0$ وجود دارد.

به X به عنوان طول یک فاصله نگاه کنید. فرض کنید این فاصله در معرض یک پروسهٔ علامت‌زنی پواسون با چگالی s است. در این صورت $f^*_{(s)}$ این احتمال را نشان می‌دهد که در طول این فاصله علامتی را مشاهده نکنیم. براساس قانون احتمال کل:

$$\begin{aligned} P\{x \text{ has no marks}\} &= E[P\{x \text{ has no marks} \mid x\}] \\ &= E[P\{\text{تعداد وقایع در طول فاصلهٔ x صفر باشد} \mid x\}] \\ &= E[e^{-sx}] = f^*_{(s)} \end{aligned}$$

---

[1] Random sum

$$P\{\text{وجود n واقعه در طول فاصلهٔ x} \mid x\} = \frac{(sx)^n}{n!}e^{-sx}$$

$$P\{\text{وجود n واقعه در طول فاصلهٔ x} \mid x\} = e^{-sx}$$

$$f^*(s) = L_X(s)$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N \; ; \; G_N(z), \quad X_i \sim f_X^*(s)$$

$$f_y^*(s) = G_N\left(f_X^*(s)\right)$$

$f_X^*(S)$: احتمال آنکه در یک زیر فاصله علامت نخورد.

$f_y^*(s)$: احتمال آنکه هیچکدام از زیر فواصل علامت نخورند.

اگر متغیر تصادفی Z با احتمال q برابر متغیر X و با احتمال $1-q$ برابر با متغیر تصادفی Y گردد داریم:

$$f_z^*(s) = q \times f^*{}_x(s) + (1-q) \times f_y^*(s)$$

مثال: تبدیل لاپلاس یک جمع تصادفی‌تر با این دیدگاه دوباره حل می‌کنیم.

$$y = x_1 + x_2 + \ldots . x_N \qquad \begin{cases} x_1 \sim x_2 \sim \ldots . x_N & \text{common} \quad f^*(s) \\ N \quad r.v. & \text{with} \quad G_N(t) \end{cases}$$

احتمال آنکه هیچکدام از زیر فواصل علامت نخورند. $= G_N(f_x^*(s))$

تذکر) اگر متغییر تصادفی Z با احتمال q برابر متغیر X و با احتمال $1-q$ برابر متغیر تصادفی Y گردد داریم :

$$f_t^*(s) = q \times f_x^*(s) + (1-q) \times f_y^*(s)$$

(را بطه فوق برای توزیعات گسسته نیز صادق است)

2.1 توزیع یکنواخت[1]

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & else\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \quad \text{و} \quad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

اگر $u_1,u_2,\dots,u_n$ دارای توزیع یکنواخت در بازه بسته $[0,1]$ بوده و مستقل باشند آنگاه:

1.تعداد متغیرهایی که از x $(0\le x\le 1)$ کوچکترند از توزیع $\mathrm{Bin}(n\ ,\ x)$ پیروی می‌کنند.

2.اگر $u_1,u_2,\dots,u_n$ ، n متغیر تصادفی یکنواخت باشد و به ترتیب صعودی فهرست شده باشند، آنگاه:

$$U(0)=0\,,\,U(n+1)=1$$

در آن‌صورت تمام فواصل بین u_iها از نوع یکسان زیر پیروی می‌کنند.

$$p\{U_{(i+1)}-U_{(i)}>x\}=(1-x)^n\ ,\quad i=1,2,3,\dots$$

3.1 توزیع نمایی

با نماد $x\sim EXP(\alpha)$ نشان داده می‌شود. گاهی اوقات پارامتر توزیع $1/\alpha$ نشان داده می‌شود که مقدار میانگین است ولیکن α نرخ این توزیع است.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\alpha x} & x\ge 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$f^*(s)=\frac{\alpha}{\alpha+s}$$

$$E(x)=-f^{*\prime}(0)=\frac{1}{\alpha} \quad \text{و} \quad V(x)=\frac{1}{\alpha^2}$$

[1] Uniform distribution

1.3.1 خاصیت بدون حافظه بودن

$$p\{X > t + x | X > t\} = p\{X > x\}$$

مثال : یک وصف و دو سرویس‌دهنده که دارای زمانهای سرویس نمایی هستند (با پارامتر یکسان) در نظر بگیرید. اگر هر دو سرویس‌دهنده مشغول بوده و مشتری در صف انتظار باشد، احتمال آنکه مشتری در صف آخرین نفر خروجی باشد چیست؟

با توجه به بدون حافظه بودن توزیع نمایی احتمال $\frac{1}{2}$ حاصل می‌شود

احتمال پایانی یک فاصله دارای توزیع نمایی

$p\{x \le t + h | x > t\}$ احتمال اتمام فاصله تا $t+h$

$$\lambda h + o(h) = p\{x \le h\} = 1 - e^{-\lambda h} = 1 - (1 - \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 - \ldots)$$

رابطه فوق نشان دهنده احتمال اتمام یک فاصله (مکالمه تلفنی) در واحد زمان همیشه مقدار ثابت و برابر λ است. توزیعات مربوطه متغیر تصادفی حداقل و حداکثر یکسری از متغیرهای تصادفی نمایی :

$$p\{Max(x_1 \ldots \text{و } x_n) \le x\} = (1 - e^{-\lambda x})^n$$
$$p\{\min(x1 \text{ و} \ldots \text{و } x_n) > x\} = e^{-n\lambda x} \sim EXP(n\lambda)$$
$$X_1, X_2, \ldots X_n \sim iid\ EXP(\lambda)$$

1 پروسه‌های احتمالی

یک پروسه احتمالی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{x(t):t\in T\}$ است که در آن $x(t)$ به ازاء هر $t\in T$ یک متغیر تصادفی است.

T = مجموعه اندیس فرآیند (پروسه).

مقادیر x = حالات فرآیند.

S = فضای حالت فرآیند.

اگر T قابل شمارش باشد، فرآیند احتمالی زمان گسسته و اگر یک فاصله (زمانی) از اعداد حقیقی باشد فرآیند پارامتر (زمان) پیوسته گویند. اگر S مجموعه‌ای قابل شمارش باشد، پروسه احتمالی را زنجیره گویند. 4 حالت ممکن وجود دارد:

زمان (T)	گسسته	گسسته
	پیوسته	پیوسته

مثال: بررسی یک دستگاه در لحظات خاصی از زمان از نظر سالم یا خراب بودن:

اگر t_1 , t_2 , ... t_n... لحظات بررسی باشند و x_i وضعیت (حالت) دستگاه را در لحظه i ام نشان دهد، $\{x_i:i\in N\}$ که در آن x_i متغیر گسسته با مقادیر ممکن 1 (دستگاه در حال کار) و صفر (دستگاه خراب) است . تشکیل یک فرایند احتمالی به صورت زنجیره زمان گسسته می‌دهد.

$$T=\{t_1,t_2,...\},\quad S=\{0,1\}$$

و اگر حالت ماشین در هر لحظه دلخواه بررسی گردد. $T=[0,\infty]$ بوده و پروسه $\{x(t):t\geq 0\}$ تشکیل یک زنجیره زمان پیوسته را خواهد داد.

اگر در فرآیند احتمالی $\{x(t): t \geq 0\}$ ، $T = \{t_1, t_2, ...\}$ و $S = N = \{0,1,2...\}$ باشد، $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ را مقادیر متناظر (x_t) در نظر می‌گیرند و x_0 مقدار اولیه است. برای $j \in N$, $n \in N$ اگر $x_n = j$ باشد گوییم حالت فرآیند در زمان t_n برابر j است.

2 زنجیره مارکوف زمان گسسته

یک زنجیره مارکوف زمان گسسته (DTMC) فرآیند احتمالی زمان گسسته است که دارای فضای حالت قابل شمارش S است به نحوی‌که به ازاء تمام $j, i \in S$, $n \in N$ و $i_0, i_1, ..., i_{n-2}$ داریم:

$$p\{x_n = j \mid x_{n-1} = i, x_{n-2} = i_{n-2}; ... x_1 = i_1, x_0 = i_0\} = P\{x_n = j \mid x_{n-1} = i\}$$

یک DTMC با احتمالات انتقال n مرحله‌ای زیر تشریح می‌گردد.

$$p_{ij}(m, m+n) = p\{x_{m+n} = j \mid x_m = i\} \text{ for } m, n \in N; \ i, j \in S$$

اگر مقدار هر کدام از $p_{ij}(m, m+n)$ از مستقل باشند، یک DTMC همگن داریم: یعنی تنها به n بستگی دارد.

$$p_{ij}(m, m+n) = p_{ij}(n); \ \forall ij \in S, \ \ \forall m, n \in N$$

به عبارت دیگر در تمام لحظات زمانی مقادیر احتمالات انتقال یکسان باقی می‌ماند.

1.2 احتمالات انتقال یک مرحله‌ای در حالت همگن

$$p_{ij}(1) = p_{ij} = p\{x_n = j \mid x_{n-1} = i\}, \ n \geq 1$$

به فرم ماتریسی داریم:

$$P=\left[p_{ij}\right]=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02}\cdots\cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12}\cdots\cdots \\ p_{\dots} & p_{21} & p_{22}\cdots\cdots \end{bmatrix}=\text{TPM}\begin{cases}\sum_j p_{ij}=1 & \forall i \\ 0\le p_{ij}\le 1 & \forall ij\end{cases}$$

Sojourn Time in state i $=T_i$= تعداد مراحل زمانی که DTMC $\{x_n \in S : n \in N$ در حالت i ام (قبل از رفتن به حالت دیگری) قرار می‌گیرد = متغیر تصادفی توزیع هندسی با میانگین $(1-p_{ii})$ است.

مثال برای DTMC:

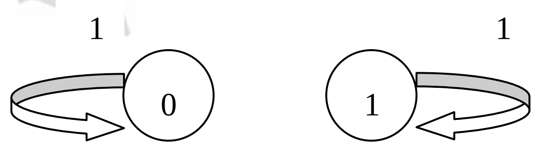
یک سیستم تولیدی شامل یک دستگاه در معرض شکست و خرابی را در نظر بگیرید. در هر لحظه زمانی یا دستگاه به درستی کار می‌کند (حالت صفر) یا به علت خرابی تحت تعمیر است (حالت 1) اگر a احتمال وقوع خرابی در یک ساعت (احتمال شرطی خراب شدن دستگاه در مشاهده بعدی به شرط سالم بودن آن در مشاهده فعلی) و b احتمال تعمیر شدن آن در یک ساعت (احتمال سالم بودن در مشاهده بعدی به شرط خراب بودن آن در حال حاضر) تعریف شود یک DTMC با مشخصات زیر خواهیم داشت:

$$\text{DTMC } \{x_n \in S : n \in N\} \quad \text{where} \quad S=\{0,1\},\ t_0, t_1 \ldots = 0,\ 1\text{h},\ 2\text{h},\ \ldots.$$

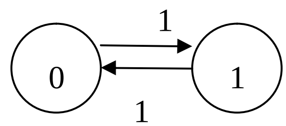
$$P=\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix};\quad 0 \le a-b \le 1$$

دیاگرام حالات سیستم تحت شرایط مختلف به شکل زیر است:

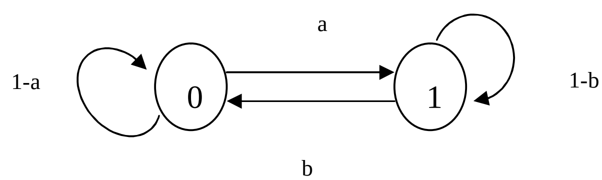
فرض 1: اگر $a=b=0$ باشد، آنگاه میانگین زمان اقامت در هر حالت بی نهایت است.



فرض2: اگر $a=b=1$ باشد، آنگاه میانگین زمان اقامت هر حالت برابر با 1 است.



فرض 3: میانگین اقامت حالت $1 = \frac{1}{b}$ و حالت $0 = \frac{1}{a}$ است.



برای $m, n \geq 0$ ، $i, j \in S$ در $\{x_n \in S : n \in N\}$ DTMC معدلات ذیل را خواهیم داشت:

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k \in s} p_{ik}(m) p_{kj}(n) \quad \text{chapmon} - \text{kolmogorov}$$

$$(\text{c} - \text{k})$$

با شرط $P(0) = I$

$$p_{(n)} = [p_{ij}(n)] = p^n; \, n \geq 0$$

ماتریس انتقال n مرحله‌ای، ماتریس انتقال یک مرحله‌ای به توان n است. اگر داشته باشیم:

$S = \{0,1,2,...\}, \; p_j(n) = p\{x_n = j\}; \quad n = 0,1,2,..., \quad j = 0,1,2,....$

در آن صورت داریم:

$$p_j(n) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(n)$$

به فرم ماتریس داریم:

$$\Pi(n) = \Pi(0) \times P(n) = \Pi(0) P^n \qquad n = 0,1,2... \qquad \Pi(n)[p_0(n) \qquad p_1(n)....]$$

یعنی با داشتن pmf متغیر تصادفی اولیه X_0 و TPM می‌توان pmf کلیه X_n $(n \in N)$ را حساب کرد.

مثال DTMC (2):

با فرض‌های مختلف داریم:

فرض 1: اگر $a=b=0$ باشد در آن صورت $p=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$ بوده و $P_{(n)}=P^n=I$. با شروع از حالت صفر $\Pi(0)=[1 \quad 0]$ بوده و $\Pi(n)=[1 \quad 0]$ $n=1,2,3...$ است.

با شروع از حالت یک $\Pi(0)=[0 \quad 1]$ بوده و $\Pi(n)=[1 \quad 0]$ می‌ماند.

فرض 2 : اگر $a=b=1$ باشد، برای n های فرد داریم: $P=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ و برای n های زوج نیز خواهیم داشت: $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

در نتیجه :

If $\pi(0)=[1 \ \ 0] \rightarrow$	$\pi(n)=[1 \ \ 0]$	For n even
	$\pi(n)=[0 \ \ 1]$	For n odd

فرض 3 : اگر $|1-a-b|<1$ باشد (Bhat 1984):

$$P^n=\begin{bmatrix}(b+ax^n)/(a+b) & (a-ax)/(a+b)\\(b-bx^n)/(a+b) & (a+bx^n)/(a+b)\end{bmatrix};\ x=1-a-b$$

اگر حالت اولیه صفر باشد:

$\pi(0)=[1 \ \ 0] \rightarrow \pi(n)=\pi(0)P^n=[\,(b+ax^n)/(a+b) \quad (a-ax^n)/(a+b)]\ ;\ \ n=1,2,\ldots$

اگر حالت اولیه یک باشد:

$\pi(0)=[0 \ \ 1] \rightarrow \pi(n)=[\,(b-bxn)/(a+b) \quad (a+bxn)/(a+b)]\ ;\ n=1,2,\ldots$

2.2 آنالیز حالت پایدار

به شرط منحصر به فرد بودن حدهای حاصل:

$$\lim_{n\to\infty} P_j(n) = \lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) \ ; \quad i=0,1,2,\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \begin{bmatrix} y \\ y \\ : \\ y \end{bmatrix} \ ; \quad y = [y_0 \quad y_1 \quad \ldots y_n \ldots] \ ; \quad y_j = \lim_{n\to\infty} P_j(n)$$

3.2 کلاسهای ارتباط و یکپارچگی[1]

اگر $i, j \in S$ بوده و حالت j از حالت i قابل دسترسی باشد $(P_{ij}(n)>0)$ برای تعدادی $n \geq 0$)، دو حالت i,j را قابل ارتباط گویند اگر از طریق یکدیگر در دسترس باشند. در یک DTMC که حالات مختلف آن بر اساس در ارتباط بودن آنها با یکدیگر دسته بندی شده باشند، هر دسته را یک کلاس ارتباط[2] گویند.

کلاس ارتباط A در یک DTMC با فضای حالت S را بسته گویند اگر از هیچ کدام از حالت A نتوان به یکی از حالات S (که به A تعلق ندارد) رسید (در غیر این‌صورت کلاس باز نام دارد). اگر تنها یک کلاس در DTMC باشد ، آن‌را یک‌پارچه گویند.

مثال DTMC (3):

فرض 1 : حالتهای صفر و یک تنها با خودشان در ارتباط هستند و DTMC یکپارچه نیست و دو کلاس بسته {0} و {1}داریم.

فرض 2 : حالت صفر با حالت یک مرتبط است و زنجیره یکپارچه داریم با کلاس بسته {1و 0}

فرض 3 : $|1-a-b|<1$ حالت صفر با حالت 1 در ارتباط است و زنجیره یکپارچه داریم.

---

[1] irreducibility

[2] Communication

برای زنجیره DTMC $\{X_n ; n \geq 0\}$ تعریف می‌کنیم:

$f_{ii}(k)$ = احتمال اینکه DTMC پس از k مرحله برای اولین بار به حالت i برگردد $(i=0,1,2,\ldots)$

f_i=احتمال برگشت DTMC به حالت i از تمام طرق ممکن:

$$f_j = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k), \quad f_{ii}(1) = p_{ii}, \quad v_i = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}(k)$$

v_i=میانگین مراحل مورد نیاز DTMC برای رسیدن به حالت i پس از ترک آن

حالت i ام از یک DTMC برگشت پذیر[1] است اگر $f_i=1$ باشد. در غیر این‌صورت (یعنی $f_i<1$) آن را گذار[2] گویند. دور های برگشت یک حالت برگشت پذیر (سیکل حالت) را با d_i نشان می‌دهیم. اگر d_i باشد حالت غیر سیکلی[3] و اگر $D_i>1$ باشد حالت سیکلی با دورهای d_i داریم. حالات غیر سیکلی و برگشت پذیر مثبت را" ارگودیک" گویند. در یک حالت برگشت پذیر مثبت I (یا با نام برگشت پذیر غیرتهی[4] v_i مقدار متناهی دارد.

مثال DTMC (4) :

با فرض 1 :

برگشت پذیر → $f_0=f_1=1$ $f_{00}(1)=1$; $f_{00}(k)=0$; for $k= 2,3,\ldots$

→

غیر سیکلی و برگشت پذیر مثبت → $v_0=v_1=1$ $f_{11}(1)=1$; $f_{11}(k)=0$ for $k=2,3,\ldots$

با فرض 2 : → $f_{00}(1)=0$; $f_{00}(2)=1$; $f_{00}(k)=0$; for $k=3,4,\ldots$

---

[1] recurrence

[2] Transience

[3] aperiodic

[4] non-null

$a=b=1$ $\qquad$ $f_{11}(1)=0\ ;\ f_{11}(2)=1\ ;\ f_{11}(k)=0\ ;\ for\ k=3,4,\ldots$

$f_0=f_1=1 \rightarrow$ حالات برگشت پذیر

$v_0=v_1=2\ ,\ (P_{00}(2k)=1\ ,\ P_{00}(2k+1)=0,\ k=0,1,2,\ldots) \rightarrow$ حالت صفر سیکلی با پریود 2

به همین نحو حالت یک سیکلی با پریود 2 است.

فرض 3 $|1-a-b|<1$:

$f_{00}(1)=1-a\ ;\ f_{00}(2)=ab\ ;\ f_{00}(3)=a(1-b)b\ ;\ f_{00}(k+2)=a(1-b)^k b\quad k=2,3,\ldots$

$f_0=1 \rightarrow$ برگشت پذیر ، $v_0=(1-a)+2(ab)+\sum_{k=3}^{\infty} ka(1-b)^{k-2}b<\infty$ مثبت غیر سیکلی

4.2 تعاریف

تمام حالات در یک کلاس ارتباطی باز، گذار هستند.

تمام حالات در یک کلاس ارتباطی بسته محدود، برگشت پذیر مثبت هستند.

حالات برگشت پذیر تهی تنها در کلاس‌های ارتباط بسته و نامحدود روی می‌دهد.

در یک DTMC یک‌پارچه و محدود تمام حالات برگشت‌پذیر مثبت هستند.

اگر و فقط اگر $n_i=\infty$ باشد، حالت i برگشت‌پذیر است:

$n_i=\sum_{k=1}^{\infty} P_{ii}(k)$

مثال DTMC (5):

با فرض 2 :	$P_{ii}(k)=1$ for $k=2,4,6,\ldots$	$n_i=\infty$ هر دو برگشت پذیرند	

		$P_{ii}(k)=0$ for $k=1,3,5,\ldots$	→
$n_0=\infty$ $n_1=\infty$	$P11(k)=(a+bxk)/(a+b)$, $x=1-a-b\rightarrow$	$P_{00}=(b+ax^n)/(a+b)$	با فرض 3

اگر DTMC یک‌پارچه با حالات برگشت‌پذیر مثبت باشد احتمالات y_j وجود دارند که منحصر به فرد بوده و مستقل از احتمال اولیه است.

$Y_j=\lim_{n\to\infty} P_j(n) \qquad j=0,1,2,\ldots \qquad y_j\geq 0$

$Y_j=ģ\ y_i P_{ij} \qquad i=0,1,2,\ldots \qquad y=yP \quad \text{where } y=[y_0,y_1,y_2,\ldots]$

Y بردار احتمالات پایدار نام دارد.

مثال DTMC (6):

مثال تک ماشین با حالات $S=\{0,1\}$ را در نظر بگیرید. در فرض سوم که $|1-a-b|<1$ بود،

$Y=(y_0, y_1)$ است. دیدیم که DTMC کاهش ناپذیر است و غیر سیکلی با حالات برگشت پذیر مثبت است. بنابراین می توانیم احتمالات پایدار منحصر به فرد را با حل معادلات زیر به دست آوریم :

$$[y_0 \quad y_1]=[y_0 \quad y_1]\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix}$$

$y_0+y_1=1$

$\rightarrow\ y_0=b/(a+b)\ ,\quad y_1=a/(a+b)$

که در مثال 14 نیز آن را به دست آوردیم. با $a=1/5$ و $b=3/5$ مقادیر $y_0=3/4$ و $y_1=1/4$ بدست می‌آید.

یعنی به طور متوسط DTMC حالت صفر را در 75٪ تعداد مراحل زمانی و حالت 1 را در 25٪ کل تعداد مراحل زمانی ملاقات می کند.

با فرض $a=b=1$ بار دیگر DTMC کاهش‌ناپذیر با حالات برگشت‌پذیر مثبت است ولیکن سیکلی با سیکل 2 است. در این حالت نیز احتمالات پایدار منحصر به فرد با $y_0=1/2$ و $y_1=1/2$ داریم. یعنی به طور متوسط 50٪ دیدارهای ما در حالت صفر و 50 ٪ دیگر در حالت 1 سیستم است. با فرض $a=b=0$ در کلاس ارتباط {0} و {1} داریم. معادله $y=yP$ و $y_0+y_1=1$ منجر به تعداد نامتناهی حل می‌گردد:

$Y= [y_0 \quad 1-y_0],\ \ 0 \leq y_0 \leq 1$

هر کلاس بردار احتمال پایدار خاص خود را دارد که در اینجا $y_0=1$ و $y_1=1$ است اما برای کل سیستم تعداد بردارها نامتناهی است.

معمولا این شرایط برای DTMC های غیر کاهش پذیر نیز روی می دهد که هر کلاس ارتباطی بسته بردار احتمال پایدار خاص خود را دارد.

1 مدل های زنجیرهٔ مارکوف زمان پیوسته (CTMC)

تعریف : فرآیند زمان پیوسته با فضای حالت گسسته $\{x(t); st \geq 0\}$ را زنجیرهٔ مارکوف پیوسته گویند اگر:

for all $s \geq 0$, $U \geq 0$ $t \geq s$ and i,j , $x(t) \in S$

$$P\{X(t) = j | X(s) = i \ ; \ X(u) = x(u) \quad \text{for} \quad 0 \leq u \leq s\} = P\{X(t) = j | X(s) = i\}$$

احتمالات انتقال عبارتند از :

$$P_{ij}(s,t) = P\{X(t) = j | X(s) = i\} \qquad t \geq s,\ s \geq 0,\ i,\ j \in S$$

تعریف: CTMC $\{x(t) : t \geq 0\}$ را همگن (دارای احتمالات انتقال پایدار) گویند اگر $P_{ij}(s,t)$ به ازاء کلیـه $s \geq 0$ و $t \geq s$ فقط به t-s بستگی داشته باشد و از s مستقل باشد.

$$P_{ij}(s,t) = P_{ij}(t-s) = P\{X(u+t-s) = j | x(u) = j\} \quad \forall u \geq 0$$

زمان اقامت T_i در حالت i یک متغیر تصادفی پیوسته نمایی است. $T_i = Exp(a_i)$

اگر $0 < a_i < \infty$ باشد ، حالت را پایدار گویند. در صورت $a_i = 0$ حالت جاذب و $a_i = \infty$ حالـت لحظـه‌ای داریم .

1.1 معادلات C-K

$$P_{ij}(s,t) = \sum_k P_{i,k}(s,u) P_{k,j}(u,t); \quad 0 \leq s \leq u \leq t$$

به فرم ماتریسی :

$$H(s,t) = H(s,u) H(u,t)$$

2.1 معادلات پیشرو ـ پسرو کلموگورف

1.2.1 معادلات پیشرو

$$\frac{dH(s,t)}{dt} = H(s,t)Q(t)$$

2.2.1 معادلات پس‌رو

$$\frac{dH(s,t)}{ds} = -Q(s)H(s,t)$$

3.1 ماتریس گذار CTMC

$$Q(t) = \underset{h\to 0}{Limit}\left(\frac{H(t,t+h)-I}{h}\right) \qquad H(s,s) = I$$

عناصر $Q(t)$:

$$\text{عناصر} = \begin{cases} q_{ii}(t) = \underset{h\to 0}{Limit}\dfrac{P_{ii}(t,t+h)-1}{h} \\ q_{ij}(t) = \underset{h\to 0}{Limit}\dfrac{P_{ij}(t,t+h)}{h} \end{cases} \underset{i \neq j}{\rightarrow} \begin{cases} 1-P_{ij}(t,t+h) = -hq_{ij}(t)+O_{(h)} \\ P_{ij}(t_1+th) = hq_{ij}(t)+O(h) \end{cases}$$

$-q_{ii}(t)$ = نرخی که با آن از حالت i ام در زمان t خارج می‌شویم:

$$\Rightarrow \sum_j q_{i,j}(t) = 0\,,\ \forall_i$$

4.1 آنالیز CTMC همگن

$$P_{ij}(t) = P_{ij}(x,x+t)\,,\ \forall x\ ;\quad q_{ij} = q_{ij}(x)\,,\forall x\ ;\quad Q = Q(x) = \lfloor q_{ij} \rfloor\ ,\ \forall x$$

5.1 معادلات C – K

$$H(t) = H(x, x+t) = \lfloor P_{ij}(t) \rfloor \ , \ \forall x \ ; \quad H(x+t) = H(x)H(t)$$

و معادلات پیش رو ـ پس رو خواهند شد :

$$\frac{dH(t)}{dt} = H(t)Q \quad ; \quad H(0) = I$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = QH(t) \ ; \quad H(0) = I \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dP_{ij}(t)}{dt} = q_{jj}\, p_{ij}(t) + \sum\limits_{k \neq j} q_{kj}\, p_{ik}(t) \\ \dfrac{dP_{ij}(t)}{dt} = q_{ii}\, p_{ij}(t) + \sum\limits_{k \neq i} q_{ikj}\, p_{kj}(t) \end{cases}$$

با حل معادلات $H(t) = Exp(Qt)$ می توان $P_{ij}(t)$ را حساب کرد .

$$P_j(t) = P\{x(t) = j\}, \ j = 0,1,2,\ldots \ , \ \pi(t) = [P_0(t), P_1(t), \ldots] \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad \pi(t) = \pi(0)Exp(Qt) \quad \leftarrow \quad \frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$$

برای یک CTMC همگن و برگشت‌پذیر مثبت و یک‌پارچه $\pi_j = \underset{t \to \infty}{Limit}\, P_i(t)$ همواره وجود دارند.

این احتمالات در بلندمدت درصد اوقاتی هستند که در حالات میمانیم و مستقل از حل اولیه و منحصر به فرد هستند. این احتمالات یک CTMC ارگودیک مـی سـازند کـه چـون از زمـان مسـتقل هسـتند، $\frac{d\pi(t)}{dt} = 0$ را می‌سازند. یکی از عناصر $\pi Q = 0$ به صورت زیر است:

$$q_{jj}\pi_j + \sum_{k \neq j} q_{kj}\pi_k = 0 \ , \quad j = 0,1,2,\ldots$$

معادلات حل ارگودیک:

$$\pi Q = 0$$
$$\sum \pi_j = 1 \ , \quad j = 0,1,2,\ldots$$
$$\pi_j \geq 0$$

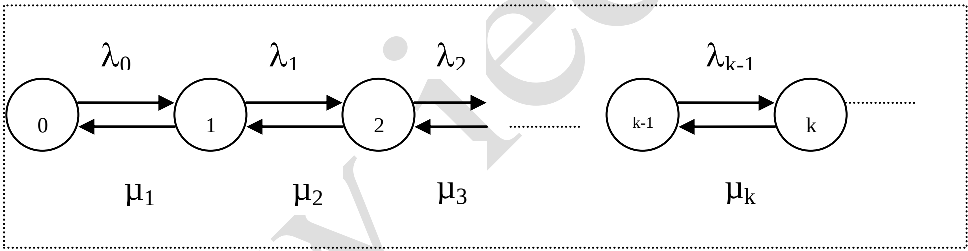
با کمک $\sum_j q_{ij} = 0$ می توان آن را به صورت $\sum_{k\neq j} q_{kj}\pi_k = \pi_j\left(\sum_{k\neq j} q_{jk}\right)$ نوشت که بـه معـادلات تعـادل حالت معروف هستند .

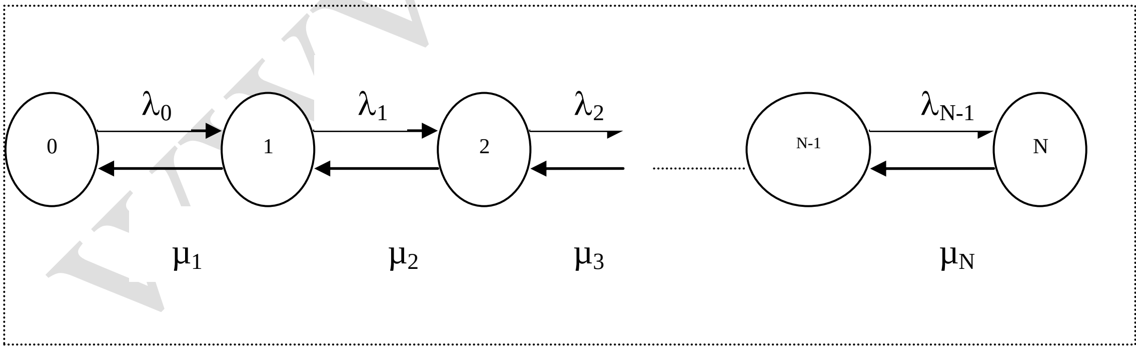
6.1 فرآیندهای تولد ـ مرگ (حالت خاص CTMC)

تعریف : CTMC همگن $\{x(t):t\geq 0\}$ با فضای حالت $\{0,1,2,...\}$ را فرآیند تولد- مـرگ (BD) گوینـد. اگر مقادیر ثابت λ_i و μ_i $(i=1,2,...)$ بتوان یافت که:

$$q_{i,i+1} = \lambda_i\,,\;\; q_{i,i-1} = \mu_i\;;\quad i = 0,1,2,...\;,\;\; q_{ij} = 0 \quad \text{for} \quad |i-j| > 1$$

فرآیند BD دارای تعداد حالات متناهی و نامتناهی است . تمام حالات یک BD متنـاهی و یـک‌پارچـه، برگشت‌پذیر مثبت هستند .





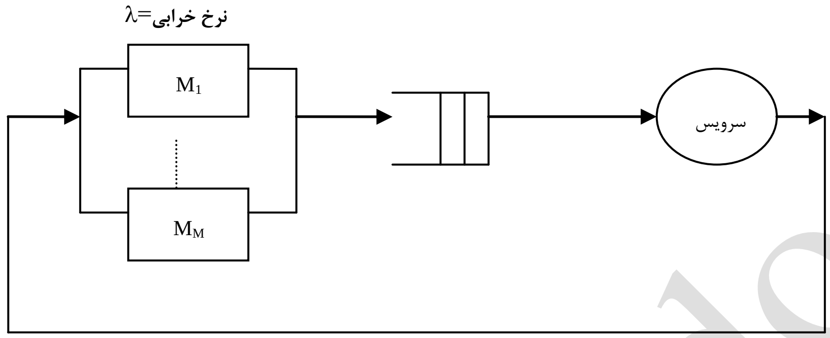
1.6.1 احتمالات حدی

$$\pi_k = \pi \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)\;;\quad k\geq 0$$

$$\pi_o = \frac{1}{1+\sum_{k\geq 1}^{k-1}\prod_{i=0}^{k-1}(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}})}$$

مثال BD :

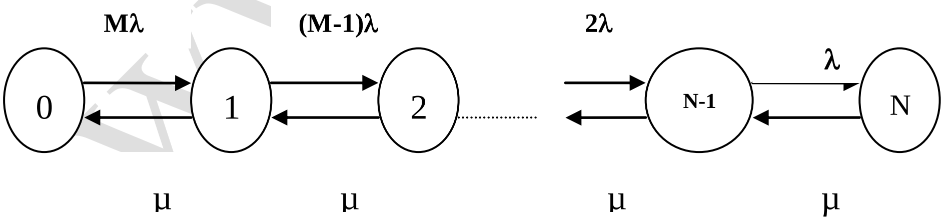
M ماشین موازی و یک تجهیزات تعمیر داریم.



اگر k تعداد ماشین های خراب را حالات سیستم بگیریم $(k = 0,1,2,...,M)$ سیستمی BD با M+1 حالت خواهیم داشت:

$\mu_k = \mu\,;\ k = 1,2,...,M$

$$\begin{cases}\lambda_k = (M-k)\lambda\,; & k = 0,1,2,...,M-1\\ \lambda_k = 0 & ;\quad k = M\end{cases}$$



$$\pi_k = \frac{\frac{M!}{(M-k)!}(\lambda/\mu)^k}{1+\sum(\lambda/\mu)^k\frac{M!}{(M-k)!}}\ ;\quad k = 0,1,2,...,M$$

متوسط ماشین های خارج از کار = $\sum_{k=0}^{M} k\pi_k$

برای $M = 1$ داریم:

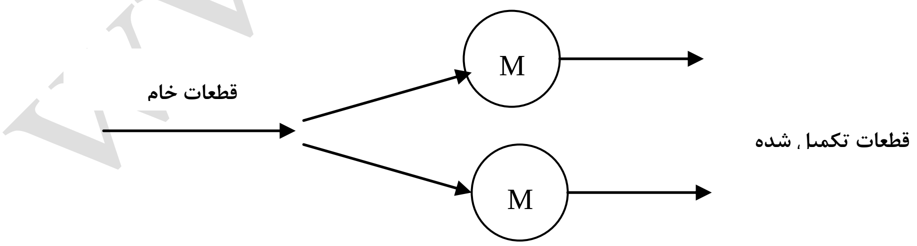
$$\pi_0 = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} \ , \ \pi_1 = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu}$$

درصدی از زمان که هر ماشین در حال کار است = (متوسط تعداد ماشین ها درحال کار) / (تعداد کل ماشین ها) = $\dfrac{M - \sum_{k=0}^{M} k\pi_k}{M}$

احتمال آن‌که حداقل k ماشین در حال کار باشد = احتمال آن‌که کمتر از k ماشین خراب شود = $1 - \sum_{i=k+1}^{M} \pi$

مثال CTMC:

دو ماشین M_1 و M_2 که در آن M_1 سریع‌تر از M_2 است در نظر بگیرید. قطعات خام به مقدار کافی همیشه در دسترس هستند .



امکان خرابی ماشین ها وجود دارد که در صورت وقوع بلافاصله شروع به تعمیر می شوند . μ_1 و μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$) زمان عملیات روی ماشین های M_1 و M_2 نمایی بوده و زمان شکست توزیع نمایی با نرخ f و زمان تعمیر نیز نمایی با نرخ r است . حالات سیستم عبارتند از:

حالت صفر (00) : M_1 و M_2 هر دو مشغول کارند .

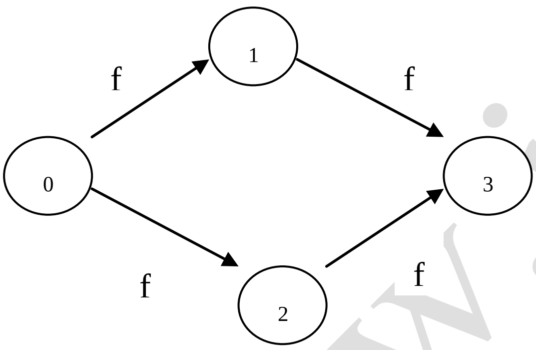
حالت 1 (01) : M_1 در حال کار و M_2 خراب است .

حالت 2 (10) : M_1 خراب و M_2 در حال کار است .

حالت 3 (11) : هر دو خراب هستند .

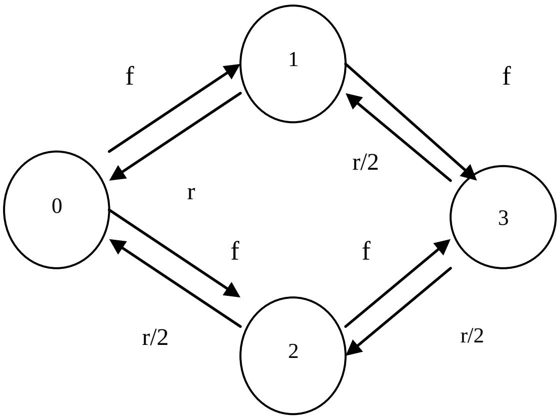
متوسط خروجی سیستم در حالت صفر $\mu_1+\mu_2$ ، حالت 1 μ_1 و حالت 2 μ_2 است و در حالت 3 خروجی نداریم .

اگر تعداد تعمیرکاران $n = 0$ باشد (حالت جاذب) $T_3 = \propto$ و $T_1 = Exp(f) = T_2$ و $T_0 = Exp(2f)$ و CTMC یک‌پارچه نخواهد بود.



اگر $n = 1$ باشد:

$T_1 = Exp(2f)$, $T_1 = T_2 = Exp(f+r)$, $T_3 = Exp(r)$



اگر $n=2$ باشد ، مانند $n=1$ است ولیکن $T_3 = Exp(2r)$

اگر با $n=1$ احتمالات را بدست آوریم، خواهیم داشت:

$$\pi_0 = \frac{r^2}{r^2+2fr+2f^2}$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{fr}{r^2+2fr+2f^2}$$

$$\pi_3 = \frac{2f^2}{r^2+2fr+2f^2}$$

و با $n=2$ این احتمالات خواهند بود:

$$\pi'_0 = \frac{r^2}{r^2+2fr+f^2}$$

$$\pi'_1 = \pi'_2 = \frac{fr}{r^2+2fr+f^2}$$

$$\pi'_3 = \frac{f^2}{r^2+2fr+2f^2}$$

$$\Rightarrow \pi'_0 \rangle \pi_0 \quad , \quad \pi'_0 \rangle \pi_1 \quad , \quad \pi'_2 \rangle \pi_1 \quad , \pi'_3 \langle \pi_3$$

متوسط نرخ خروجی سیستم

$$R=\pi_0(\mu_1+\mu_2)+\pi_1\mu_1+\pi_2\mu_2$$

$$R'=\pi'_0(\mu_1+\mu_2)+\pi'_1\mu_1+\pi'_2\mu_2$$

$$R'\rangle R$$

احتمال آن‌که حداقل یک ماشین در حال کار باشد:

$$A=1-\pi_3$$

$$A=1-\pi'_3$$

$$A'\rangle A$$

1 فرآیند پواسون

پروسه پواسون یک پروسه احتمالی زمان پیوسته با فضای حالت گسسته است که دارای خواص مناسبی جهت مدل‌سازی ورود قطعات به کارگاه‌های تولیدی, ورود کارها به یک مرکز رایانه, ورود مکالمات تلفنی به مرکز تلفن و غیره است. این پروسه ارتباط جالبی با خاصیت عدم حافظه دارد زیرا فواصل زمانی ورود در این پروسه مستقل از هم و متغیر تصادفی نمایی یکسان هستند.

مثال: یک کارگاه صنعتی را در نظر بگیرید که قطعات مواد اولیه بطور تصادفی و یک به یک وارد می‌شوند. $X(t)$ را تعداد قطعات وارد شده در فاصله زمانی $[0,t]$ در نظر بگیرید. واضح است که $X(t)$ متغیر تصادفی گسسته با محدوده مقادیر $\{0,1,2,...\}$, $\{x(t);\ t>0\}$ پروسه احتمالی زمان پیوسته با فضای حالت گسسته است. حال فاصله زمانی را به n زیر فاصله مساوی $\frac{t}{n}$ تقسیم می کنیم. اگر n خیلی بزرگ باشد, $\frac{t}{n}$ رقم بسیار کوچکی خواهد گرفت که در آن صورت در هر زیر فاصله حاصل شده، ورود حداکثر یک قطعه معقول خواهد بود و هر چقدر $n \to \infty$ برود احتمال ورود 2 یا تعداد بیشتری قطعه به صفر میل می کند. فرضیات دیگر عبارتند از:

1- احتمال ورود یک قطعه در فاصله ای به اندازه $\frac{t}{n}$ متناسب با طول آن است. اگر این تناسب ثابت و برابر λ باشد, در آن صورت احتمال ورود دقیقاً یک قطعه برابر $\frac{\lambda t}{n}$ و احتمال عدم ورودی $1-\frac{\lambda t}{n}$ است.

2- ورودی های از انواع مختلف بطور مستقل روی می دهند.

در شرایط فوق هر زیر فاصله حاصل $\frac{t}{n}$ به چشم آزمایش برنولی با تعریف موفقیت برابر ورود یک قطعه و شکست بعنوان عدم ورود قطعه منظور می گردد. تعداد ورودی ها در فاصله $[0,t]$ یک متغیر

تصادفی دو جمله ای بامقدار آزمایشات n و احتمال موفقیت $\frac{\lambda t}{n}$ است. با استفاده از pmf متغیر تصادفی دو جمله‌ای برای مقادیر $k = 0, 1, 2, ..., n$ داریم:

$P\{$ داشته باشیم $[0,t]$ ورودی در فاصله K دقیقاً $\} = P\{x(t) = k\}$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)....(n-k+1)}{n^k}\frac{(\lambda t)^k}{K!}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

اگر $n \to \infty$ برای هر $k = 0, 1, 2..., n$ داریم:

$$P\{x(t) = k\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}......\frac{n-k+1}{n} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}(1-\frac{\lambda t}{n})^{n-k}$$
$$= \frac{(\lambda t)^k}{ki}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda t}{n})^{n-k} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{ki}; k = 0,1,2....$$

عبارت فوق (pmf) توزیع پواسون بامیانگین λt است. بنابراین تعداد ورودی ها در فاصله $[0,t]$ یک متغیر تصادفی پواسون است.

برای حالت $K=0$ ، عدم ورود در فاصله $[0,t]$ داریم:

$$P\{x(t) = 0\} = e^{-\lambda t}\,(t > 0)$$

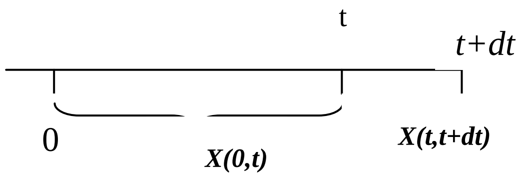
اگر T را فاصله زمانی بین دو ورودی متوالی تعریف کنیم, احتمال فوق را به فرم دیگری می توان نوشت:

$$P\{T > t\} = e^{-\lambda t}\,(t > 0)$$

مشاهده می شود که T توزیع نمایی دارد.

سه تعریف بیان شده یعنی 1- فرآیند پوراسون یک فرایند تولد خالص است 2- تعداد ورودی ها در فاصله t توزیع پواسون $P\{x(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{ni}e^{-\lambda t}$ دارند و 3- فواصل زمانی دو ورودی متوالی نمایی است قابل تبدیل به یکدیگرند.

قضیه 1: خاصیت 1 و 2 معادل اند:



فرض کنید ورودی ها در فواصل زمانی مختلف مستقل و $P\{$ ورودی در فاصله $(t, t+dt)\}=\lambda dt$ باشد. تابع مولد متغیر تصادفی تعداد ورودی ها در طی زمان t ، $G_t(Z)$، را در نظر بگیرید:

$$G_t(Z)=E[Z^{x(0,t)}]$$
$$G_{t+dt}(Z)=E[Z^{x(0,t+dt)}]=E[Z^{x(0,t)+x(t,t+dt)}]=G_t(Z)E[Z^{N(t,t+dt)}]$$
$$=G_t(Z)\{(1-\lambda dt)Z^{\circ}+\lambda .dtZ'\}=G_t(Z)-\lambda dt(1-Z)G_t(Z)$$
$$\frac{G_{t+dt}(Z)-G_t(Z)}{dt}=\lambda(Z-1)G_t(Z)\Rightarrow\frac{dG_t(Z)}{dt}=\lambda(Z-1)G_t(Z)$$
$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\log G_t(Z)=\lambda(Z-1)\Rightarrow\log G_t(Z)-\log G_{\circ}(Z)=\lambda(Z-1)t$$
$$\Rightarrow G_t(Z)=e^{(Z-1)}\lambda t\rightarrow \text{poisson dist.}$$

قضیه2: در فرآیند, توزیع پواسون منجر به یک فرآیند تولد خالص می‌شود:

فرض کنید:

$$P\{x(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{ni}e^{-\lambda t}$$

then

$$\begin{cases}P\{X(dt)=0\}=e^{-\lambda dt}=1-\lambda dt+O(dt)\\ P\{X(dt)=1\}=\frac{\lambda dt}{1i}e^{-\lambda dt}=\lambda dt+O(dt)\end{cases}$$

اثبات رسیدن از 2 به 3 قبلاً گفته شده است.

اثبات رسیدن از 3 به 1: قبلاً دیدیم که (در معرفی تابع نمایی) اگر $X \approx Exp(\lambda)$ باشد، در آن صورت احتمال پایان در فاصله dt (وقوع ورودی) برابر $\lambda dt + O(dt)$است.

اما قبل از تعریف رسمی پروسه پواسون به چند تعریف دیگر نیاز داریم.

تعریف: پروسه احتمالی $\{x(t): t>0\}$ را شمارشی یا پروسه ورودی گویند اگر $X(t)$ نماینگر تعداد کل وقایع روی داده تا زمان t باشد. (برای مثال ورود قطعات خام به سیستم تولیدی).

تعریف: پروسه شمارشی $\{x(t): t>0\}$ را پروسه شمارش دارای افزایش مستقل گویند اگر متغیرهای تصادف نماینگر تعداد وقایع روی داده در فواصل مجزا و مستقل از هم باشند.

تعریف: پروسه شمارشی $\{x(t): t>0\}$ را دارای افزایش های پایدار گویند اگر تعداد ورودی ها در فاصله $[t, t+h]$ که با مقدار $x(t+h)-X(t)$ نشان داده می شود مستقل از t دوره زمانی باشد.

تعریف: یک پروسه شمارشی $\{x(t): t>0\}$ را پروسه پواسون گویند اگر:

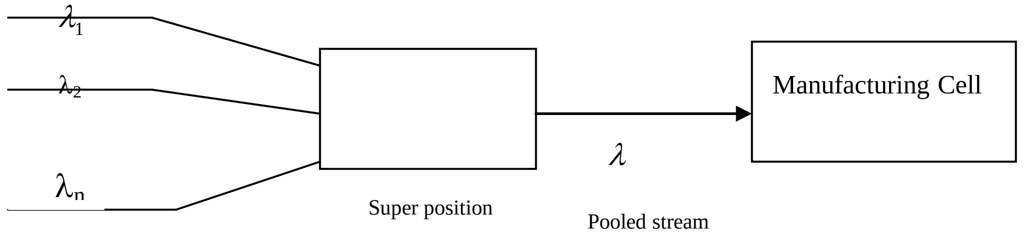
$X\ (01=0)$

پروسه افزایش های مستقل داشته باشد.

پروسه افزاش های پایدار داشته باشد.

احتمال دو یا تعداد بیشتری ورودی در فاصله زمانی h به سمت صفر میل کند اگر h به سمت صفر برود. خواص این پروسه ای با تعریف فوق را بدون اثبات جزئیات بیان می‌کنیم.

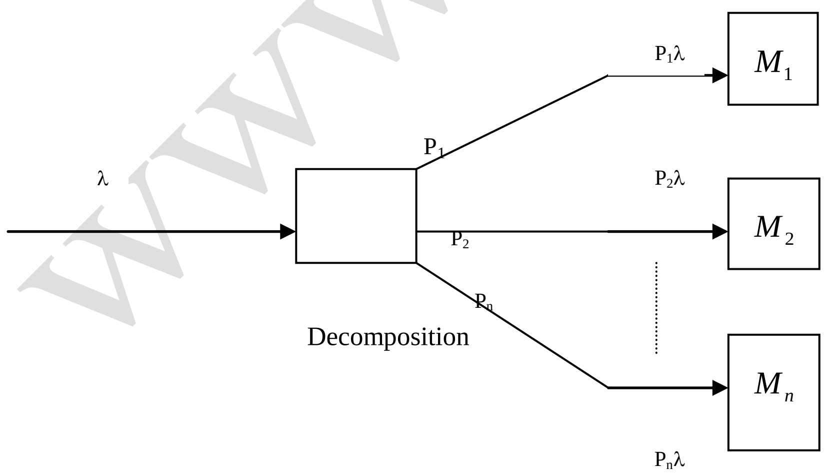
1.1 جمع پروسه پواسون[1]



اگر در کارگاهی ورودی های مختلف با نرخ های $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$ از پروسه های پواسون مختلف داشته باشیم. ورودی کل به کارگاه (شکل زیر) از پروسه پواسون با نرخی معادل جمع کل تک تک نرخ های ورودی پیروی می کند.

2.1 تفکیک یک پروسه پواسون[2]

فرض کنید قطعات به کارگاهی که دارای n ماشین است وارد می‌شوند و از توزیع پواسون با نرخ λ پیروی می‌کنند. بطور تصادفی یک قطعه به یکی از n ماشین تخصیص می‌یابد. احتمال تخصیص از توزیع $[P_1, P_2 ....., P_n]$ با خاصیت $P_1 + P_2 ..... + P_n = 1$ پیروی می کند.



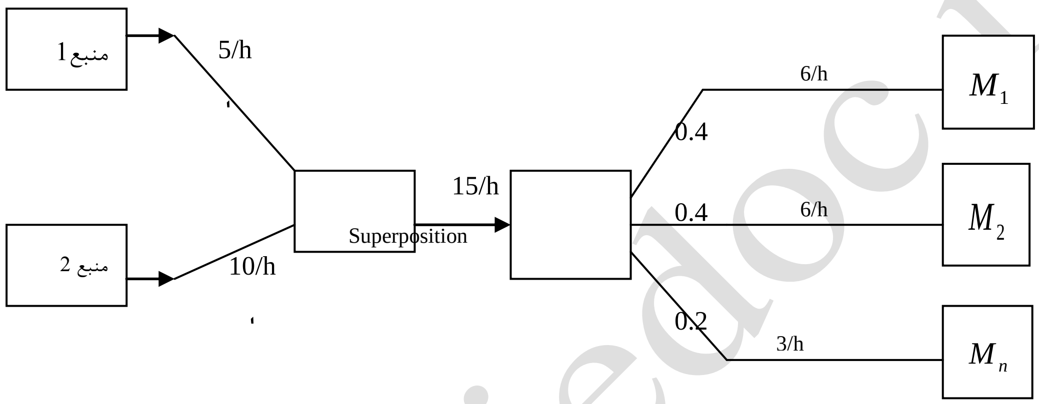
---

[1] **Superposition**

[2] **decomposition**

می توان نشان داد که جریان ورودی حاصل برای هر ماشین i ام از توزیع پواسون با نرخ λP_i پیروی می‌کند.

مثال 9: فرض کنید ورود قطعات به کارگاهی از دو منبع جداگانه با نرخ های 5 , 10 ساعت /عدد از پروسه پواسون پیروی می کند (شکل زیر). بنابراین نرخ کلی ورود از پروسه پواسون با نرخ 15 عدد در ساعت پیروی خواهد نمود.



بنابراین فاصله بین دو ورودی متوالی $\frac{1}{15}$ ساعت یا 4 دقیقه است. اگر سیستم دارای سه ماشین باشد که %40 قطعات به M_1 و %40 به M_2 و مابقی به M_3 تخصیص یابند در آن صورت سه جریان قطعات پروسه مستقل از هم خواهیم داشت که برای M_1 و M_2 میانگین زمان بین دو ورودی متوالی 10 دقیقه و برای M_3 , 20 دقیقه است.

3- در طول فاصله زمانی $(0,t)$ اگر مقدار ورودی ها $X(t)=n$ بوده باشد, ورودی ها بطور یکنواخت توزیع شده اند. به عبارت دیگر برای تولید یک فرآیند تصادفی پواسون کافی است n را از توزیع پواسون $\text{poisson}(\lambda t)$ تولید کرده و موقعیت هر ورودی را در طول $(0,t)$ بطور مستقل از دیگر با توزیع یکنواخت بدست آوردیم.

4- اگر از فرآیند پواسونی با نرخ λ یک انتخاب تصادفی انجام دهیم به طوریکه یک ورودی با احتمال P مستقل از دیگران انتخاب شده باشد, فرآیند حاصل نیز فرآیند پواسون با نرخ $P\lambda$ است.

5- PASTA :(process Arrivals see Time Averages): مشتریان یک فرآیند پواسون در هر لحظه زمانی دلخواه که بطور تصادفی در نظر بگیریم سیستم را به صورتی که در هنگام ورود دیده اند خواهند دید (صرف نظر از تغیر و تحولاتی که در این فاصله روی داده باشد).

خاصیت PASTA نقش کلیدی در تئوری صف دارد و (ROP(Random obeserver property نام گذاری می شود.

$$\xrightarrow{\lambda} \boxed{E_j} \longrightarrow$$

سیستمی را در نظر بگیرید که در حالات مختلف E_j قرار می‌گیرد. ورودی‌ها نیز از فرآیند پواسون با نرخ λ پیروی می‌کنند. در حالت پایدار به ازا هر حالتی دو احتمال مختلف داریم:

1- احتمال حالتیکه که از دید یک مشاهده گر خارج از سیستم تخصیص داده می شود: احتمال آنکه سیستم در حالت E_j (در یک لحظه تصادفی) = π_j

2- احتمال حالتیکه از دید یک مشتری وارد شده به سیستم تخصیص داده می شود: احتمال آنکه سیستم درست قبل از ورودمشتری (تصادفی) در حالت E_j باشد = π^*_j

در حالت کلی $\pi_j \neq \pi_j^*$ است.

مثال: PC خود را در نظر بگیرید (یک مشتری – یک سرویس دهنده)

چون رایانه شما هرگاه بخواهید با آن کار کنید آزاد است $\begin{cases}\pi_0^* = 1\\ \pi_1^* = 0\end{cases}$.

$$\begin{cases}E_0 = \text{PC آزاد است}\\ E_1 = \text{PC مشغول است}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \text{درصدی از زمان که PC آزاد است} < 1 \\ \pi_1 = \text{درصدی از زمان که PC مشغول است} > 0 \end{cases}$$

توجه داشته باشید که پروسه ورودی پواسون نمی باشد. زیرا ورودی ها در زمان های مختلف مستقل نمی باشند(هنگامیکه کار خود با PC را شروع کرده‌اید، یعنی یک ورودی داشته ایم، برای مدت زمان احتمال ورود مشتری دیگری وجود ندارد). اما در حالت فرآیند پواسون $\pi_j = \pi_j^*$ است.

3.1 فرآیند پواسون ناهمگن[1]

اگر به جای λ , $\lambda(t)$ که تابعی غیراحتمالی از زمان است داشته باشیم فرآیند پواسون ناهمگن خواهیم داشت. در این صورت احتمال ورود یک مشتری در فاصله زمانی کوتاه $(t, t+dt)$ برابر $\lambda(t)dt + O(dt)$ است. احتمال ورود بیشتر از یک مشتری از درجه $O(dt)$ است.

متوسط ورود در طول $(t, t+dt)$ برابر است با:

$$E[x(t,t+dt)] = \sum_{n=0}^{\infty} n.P\{(t,t+dt)\,|\,n\} = \lambda(t)dt + O(dt)$$

متوسط ورود در طول $(0,t)$:

$$E[x(0,t)] = E[\int_0^t x(u,u+du)] = \int_0^t E[x(u,u+du)] = \int_0^t \lambda(u)du$$

همانند حالت همگن داریم:

$$\frac{dG_t(Z)}{dt} = (Z-1)\lambda(t)G_t(Z) \to \frac{d}{dt}\log G_t(Z) = (Z-1)\lambda(t)$$
$$\to G_t(Z) = e^{(Z-1)\int_0^t \lambda(u)du}$$

[1] Inhomogeneous Poisson Process

اگر $a(t)=E[x(t)]=\int_0^t \lambda(u)du$ تعریف شود, $X(t)\approx Poisson(\lambda(t))$، خواص حالت همگن را به حالت ناهمگن تعمیم می دهیم:

1- Superposition: با $\lambda_1(r)$ و $\lambda_2(t)$ فرآیند پواسرن $\lambda(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)$ خواهیم داشت.

2- اگر فرآیند $\lambda(t)$ با احتمالات $(P_1(t)+P_2(t)=1)P_2(t),P_1(t)$ به دو فرایند تقسیم شود, دو فرآیند مستقل ناهمگن پواسون $P_1(t)\lambda(t)$ و $P_2(t)\lambda(t)$ خواهیم داشت.

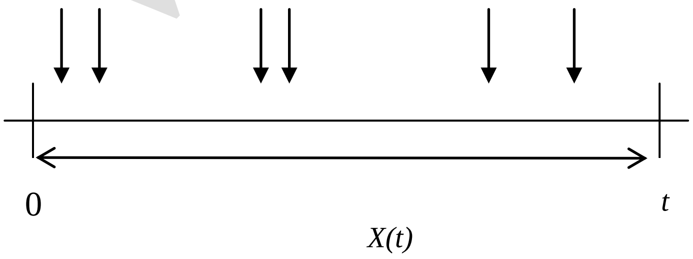
3- با داشتن $X(t)=n$ ورودی در فاصله $(0,t)$ از فرآیند ناهمگن پواسون، توزیع n ورودی بطور مستقل در فاصله $(0,t)$ از توزیع چگالی $\frac{\lambda(t)}{\int_0^t \lambda(u)du}$ پیروی می کند.

4- اگر انتخاب تصادفی یک ورودی از یک فرآیند پواسون ناهمگن با پارامتر $\lambda(t)$, با احتمال $P(t)$ مستقل از دیگران صورت پذیرد, فرآیند حاصل نیز پواسون $P(t)\lambda(t)$ است.

4.1 فرآیند پواسون

فرآیند پواسون، یک پروسه احتمالی زمان پیوسته با فضای حالت گسسته می‌باشدکه به فرآیند شمارشی نیز معروف است و برای مدل‌سازی جریان ورودی به کار می‌رود.

تعریف فرآیند شمارشی: در فرآیند احتمالی $\{X(t\ );\ t=>0\}$ اگر $X(t)$ نمایانگر تعداد کل وقـایع روی داده تا زمان t باشد، آن‌را شمارشی می‌نامند (مثلا تعداد قطعات وارد شده به یک سیستم تولید).



اگر فاصله زمانی t به n زیرفاصله t/n تقسیم شود و n خیلی بزرگ باشد،آنگاه این فرض که در فاصله t/n تنها یک ورودی داشته باشیم، قابل قبول است.

احتمال ورود یک قطعه متناسب با طول t/n است.اگر این تناسب ثابت و برابر با λ باشد،احتمال ورود دقیقا یک قطعه برابر با $\lambda t/n$ است و عدد ورودی برابر با $1- \lambda t/n$.

با توجه به اینکه ورود قطعه در فاصله t/n را می توان آزمایش برنولی تعریف کرد،در طول $(0,t)$ یک توزیع دوجمله ای خواهیم داشت که اگر n به سمت بینهایت میل کند،به توزیع پواسون می‌رسیم (یعنی $X(t)$ از توزیع پواسون پیروی می‌کند)

$$P\{X(t)=K\}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^K}{K!} \quad ; K= 0, 1, 2 \ldots$$

$$P\{X(t)=0\}=e^{-\lambda t} \quad ; \; t>0$$

فاصله ما بین دو ورود متوالی نیز دارای توزیع نمایی است:

$$P\{T>t\}=e^{-\lambda t} \quad ; \quad t>0$$

سیستم M/M/1

ساده ترین مدل، مدل *M/M/1/∞/FIFO* است:

$\alpha(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ و $b(t)=\mu e^{-\mu t}$

برای n>=1:

$\Pr(\Delta t$ یک ورودی در $)=\lambda\Delta t+O(\Delta t)$ و $\Pr\{\Delta t$ فاصله در یک سرویس $\}=\mu\Delta t+O(\Delta t)$

* $P_n(t+\Delta t)=\Pr\{$ سیستم در زمان $t+\Delta t$ در E_n باشد $\}=P_n(t).\{$ هیچ ورودی و سرویسی در طول Δt نباشد $\}+P_n(t)\{\Delta t$ یک ورودی و یک سرویس در فاصله $\}$ + $P_{n+1}(t).\{$ یک سرویس در فاصله Δt و بدون ورودی $\}$ +

$P_{n-1}(t).\{$ یک ورودی در Δt و بدون سرویس $\}$ + $O(\Delta t)\{$ حالاتی که بیش از یک سرویس و ورودی داشته باشیم $\}$

$$\Rightarrow P_n(t+\Delta t)=P_n(t).[1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t]+P_{n+1}(t).[\mu(\Delta t)+1-\lambda\Delta t)]+P_{n-1}(t)[1-\mu\Delta t+\lambda\Delta t]+O(\Delta t)$$

* $P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\{\Delta t$ هیچ ورودی در $\}$ + $P_1(t)\{\Delta t$ بدون ورودی و انجام یک سرویس در $\}$ + $O(\Delta t)$

$$\Rightarrow P_0(t+\Delta t)=P_0(t).(1-\lambda\Delta t)+P_1(t).(\mu\Delta t+1-\lambda\Delta t)+O(\Delta t)\ ;\quad n=0$$

معادلات دیفرانس-دیفرانسیل یا پیشرو:

$$dP_n(t)/dt=-(\lambda+\mu).P_n(t)+\mu P_{n+1}(t)+\lambda P_{n-1}(t)\quad,\quad dP_0(t)/dt=-\lambda P_0(t)+\lambda P_1(t)$$

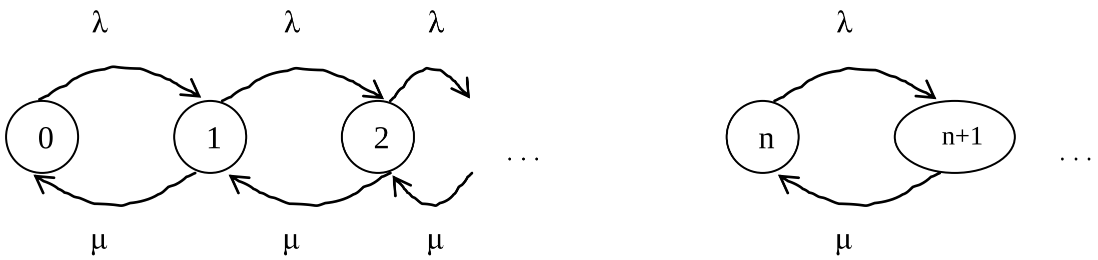
در حالت پایدار(یعنی هنگامی که t به سمت بینهایت میل می کند) $\lim dP_n(t)/dt=0$ می باشد :

$$P_{n+1}=(\lambda/\mu+1)P_n-(\lambda/\mu)P_{n-1}\quad,$$

$$P_1=(\lambda/\mu)P_0$$

و داریم : $\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$

از طریق دیاگرام انتقال حالات هم می توانستیم معادلات فوق را بیابیم:



$n = 0 \quad : \lambda P_0 = \mu P_1$

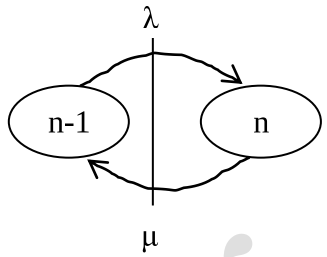
$n = 1 \quad : (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2.$

:

$n = n \quad : (\lambda + \mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$

روش **Global Balance**

معادلات تعادلی را که برای هر حالتی جداگانه نوشته ایم،برای کـل حـالات A={0,1,2,…,n-1} نیـز مـی تـوان جداگانه نوشت.به عبارت دیگر،جریان ورودی و خروجی مجموعه A معادل هم هستند.



$\lambda P_{n-1} = \mu P_n$ یا $P_n = \rho P_{n-1} \xrightarrow{\text{با تکرار}} P_n = \rho^n P_0$

و از $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \rightarrow P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1-\rho$

مقایسات کارایی

الف:محاسبه مقادیر متوسط L، L_q، L'_q

1- N = متغیر تصادفی تعداد افراد سیستم

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n (1-\rho) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \rho(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \rho(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^n$$
$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

■ $\rho = \lambda/\mu \rightarrow L = \lambda/(\mu-\lambda)$, $L = \rho + \rho^2/(1-\rho)$ = مشتریان در انتظار + مشتریان در سرویس

2- N_q = متغیر تصادفی تعداد افراد در صف

$$L_q = E[N_q] = 0 * P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = L - (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n$$
$$= L - (1-\rho)\left[\frac{1}{1-\rho} - 1\right] = L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

■ $L_q = L - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = L - (1-P_0)$

روابط فوق برای تمامی سیستمهای صف تک کاناله صرف نظر از نوع توزیعات ورودی و سرویس،صادق است.

3) L'_q=متوسط طول صف در زمانیکه صف خالی نبوده است.

$$L'_q = E\left[N_q / N_q \neq 0\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n' = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n'$$

$= P_n'$ توزیع احتمال شرطی n نفردرسیستم به شرط آنکه صف خالی نبوده است.

$$P_n' = P\{\text{نفر در سیستم } n / n \geq 2\} = \frac{P\{\text{n نفر در سیستم}\}}{P\{n \geq 2\}} = \frac{Pn}{1-\{P_0 + P_1\}}$$

$$\Rightarrow P_n' = \frac{\mathrm{P}_n}{\rho^2} \qquad * P\{N > n\} = \rho^n *$$

$$\Rightarrow L_q' = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{P_n}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_n = \frac{1}{\rho^2}L_q = \frac{1}{1-\rho} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

ب) توزیعات زمان انتظار (با فرض آنکه نظم صفFIFO است)

1) T_q=متغیر تصادفی زمان انتظار در صف (متغیر پیوسته به غیر از حالت زمان انتظار صفر)

$W_q(t)$= توزیع جمعی زمان انتظار در صف ؛ $W_q(0) = P\{T_q \leq 0\} = P_0 = 1-\rho$

اگر مشتری به محض ورود n نفر را در سیستم مشاهده کند باید منتظر سرویس آنها بماند:

$$W_q(t) = \sum_{n=1}^{\times} P_r \left\{ \text{زمان تکمیل سرویس} \leq t \;\middle|\; \text{در ورود به سیستم n نفر را مشاهده کند} \right\} P_n + W_q(0)$$

با توجه به آنکه جمع n متغیر تصادفی ارلنگ n ام است داریم :

$$W_q(t) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x} dx + 1 - \rho$$

با توجه به $e^{\mu x \rho} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu x \rho)^{n-1}}{(n-1)!}$

$$W_q(t) = (1-\rho)\rho\int_0^t \mu e^{\mu x(1-\rho)}dx + 1 - \rho$$

$$= 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad t > 0$$

$$\Rightarrow W_q(t) = \begin{cases} 1-\rho & t = 0 \\ 1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t} & t > 0 \end{cases}$$

$$W_q = E[T_q] = \int_0^\infty t\, d\,W_q(t) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

2) T =متغیر تصادفی زمان انتظار در سیستم

W= متوسط زمان انتظار در سیستم ، $T_q +$ زمان سرویس=T

$\omega(t) =$ تابع چگالی زمان انتظار در سیستم

$$W = E[T] = E[\text{زمان سرویس}] + E[T_q]$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$* \quad \omega(T) = (\mu-\lambda)\,e^{-(\mu-\lambda)t} \qquad , T \sim Exp(\mu-\lambda) \quad *$$

مثال :

روزهای پنج شنبه مشتریان یک آرایشگاه بر طبق فرآیند پواسون با نرخ 5 نفر در ساعت وارد می شوند .بطور متوسط هر اصلاح 10 دقیقه به طول می انجامد(توزیع نمایی).

a) متوسط تعداد مشتریان ومتوسط مشتریان منتظر چقدر است؟

$$\lambda = 5 \ \frac{\text{نفر}}{\text{ساعت}} \qquad , \mu = 6 \ \frac{\text{نفر}}{\text{ساعت}} \qquad \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 5/6 < 1$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 5 \quad , L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho L = 5 \times \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$$

اگر واقعاً مشتریان در انتظار باشد متوسط افراد در انتظار است:

$$L'_q = 6 \text{نفر} = \frac{1}{1-\rho}$$

b) چند درصد مشتریان بدون انتظار وارد سرویس سیستم می شوند؟

$P_0 = 1-\rho = 1-\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ بعبارتی 1/6 اوقات آرایشگر بیکار است

c) اگر 4 محل انتظار برای مشتریان وجود داشته باشد ، احتمال آنکه مشتری به محض ورود صندلی خالی پیدا نکند چقدر است؟

40 درصد از زمان یک مشتری سر پا است $P\{N \geq 5\} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.402$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{6} \quad Hour = 50 \quad Minute$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = 1 \quad Hour = 60 \quad Minute$$

$$W'_q = E[T_q / \ T_q \rangle \ 0] = \frac{1}{\mu-\lambda} = 60 \quad Minute$$

$$\Pr\{T_q \rangle 1\} = 1 - \Pr\{T_q \leq 1\} = 1 - W_q(1) = \frac{5}{6}e^{-1} = 0.306$$

مهم: W, W_q به نظم صف بستگی ندارند و لیکن $W_q(t) \ , \ W(t)$ _(توزیعات آنها) بستگی دارد.

<u>(فرمول)قانون لیتل:</u>

اگر یکی از مجهولات $\{L, L_q, W, W_q\}$ را داشته باشیم بقیه را میتوان از فرمولهای زیر بدست آورد

$$(1) \quad W = W_q + 1/\mu$$

$$(2) \quad L_q = \lambda \quad W_q$$

$$(3) \quad L = \lambda \quad W$$

که یه فرمولهای لیتل معروف هستند و برای هر سیستم صف تک کاناله که شرایط زیر را داشته باشند صادق است :

1) سیستم با احتمال 1 در آینده خالی گردد.

2)هروقت سیستم خالی شد مکانیسم ورودی و سرویس با اولین ورودی به حال اول برگردد.

3) L در اولین دوره ای که سیستم به بیکاری می رسد محدود باشد (دوره مشغول)

4)میانگین زمان انتظار و میانگین زمان مابین دو ورودی متوالی در در دوره مشغول محدود است.

فرمولهای $(4) \quad P_0 = 1 - \lambda/\mu \quad L = L_q + (1 - P_0)$ برای تمام صفهای تک کاناله غیر سرویس انباشته ای صادق است و فرمول $W_q = L/\mu \quad (5)$ تنها برای مدلهای $M/M/1$ صادق است .

بطور حسی میتوان روابط 2و3و5 را اثبات کرد و نیز میتوان نشان داد :

$$if\begin{cases} L=\lambda \quad W \rightarrow W=\dfrac{L}{\lambda} \\ W=W_q+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{L}{\mu}+\dfrac{1}{\mu} \end{cases} \rightarrow \quad \frac{L}{\lambda}=\frac{L}{\mu}+\frac{1}{\mu} \quad \rightarrow \quad L=\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}=\frac{\rho}{1-\rho} \qquad (6)$$

مثال) دو سیستم تولیدی $M/M/1$ را درنظر بگیرید . در اولـین سیسـتم نـرخ تولیـد 10 قطعـه در سـاعت و در دومین سیستم نرخ تولید 20 قطعه در ساعت است هزینه نگهداری سیستم اول 100 واحد پولی درمـاه و سیسـتم دومی 180 واحد پولی در ماه است. نرخ ورود قطعات 8 عدد در ساعت است . نگهداری یک قطعـه در یـک سـاعت یک واحد پولی هزینه دربر خواهد داشت اگر در هرماه 200 ساعت کارگاه مشغول بکار باشد کدام سیستم اقتصـادی تر خواهد بود ؟

متوسط هزینۀ کل سیستم i در یک ساعت $=L_i*1+\dfrac{C_i}{200}$

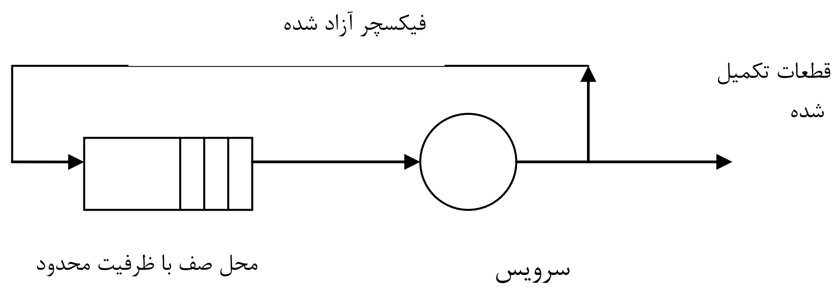
$$C_1=100 \qquad \rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1}=\frac{8}{10}=0.8 \qquad L_1=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}=4$$

$$C_2=180 \qquad \rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}=\frac{8}{20}=0.4 \qquad L2=\frac{\rho_2}{1-\rho_2}=\frac{2}{3}$$

$$Average \quad Cost \quad of \quad System1 \quad =4.5 \rangle \; Average \quad Cost \quad of \quad System2=1.567$$

اگر نرخ ورود قطعات 2 عدد در ساعت شود سیستم اول اقتصادی تر خواهد بود

فیکسچرNمثال) سیستم تولیدی زیر را در نظر بگیرید که قطعات خام به تعداد لازم در آن وجود دارد و لیکن تنها فیکسچر را دارد (قطعات نصب شده در فیکسچر). بعـد از 1- Nموجود است انبار کارگاه نیز تنها ظرفیت پذیرش اتمـــام عملیـــات قطعـــه از فیکســـچر بـــاز شـــده و فیکســـچر مـــورد اســـتفاده مجـــدد قـــرار میگیـــرد.



با فرض متوسط زمان سرویس $1/\mu$ و بدون زمان سوار کردن و باز کردن قطعه از روی فیکسچر، نرخ ورود قطعـات نیز μ خواهد بود . چون همواره N قطعه در سیستم است با قانون لیتل میزان انتظار (تاخیر)در سیستم خواهد بود:

$$W = \frac{N}{\mu}$$

مثال)کتابخانه ای عمومی که فقط یک کتابدار دارد را درنظر بگیرید . اعضای کتابخانه طبق فرایند پورسون میـانگین 10 نفر در ساعت وارد میشوند . مدت زمانی که طول میکشد تا این کتابدار بـه تقاضـای یـک عضـو رسـیدگی کنـد متغیری تصادفی با میانگین 5 دقیقه است .

a)در چند درصد اوقات این کتابدار بیکار است؟

b)احتمال اینکه 3 نفر منتظر باشند تا کتابدار به تقاضای آنها رسیدگی کند چقدر است ؟

c)به طور متوسط یک مشتری چه مدت منتظر میماند تا کتابدار به تقاضای او رسیدگی کند؟

d)احتمال اینکه یک مشتری اصلاً منتظر نماند چقدر است؟

e)احتمال آنکه حداقل یک ساعت منتظر بماند چقدر است؟

f)احتمال آنکه تعداد اعضای کتابخانه که منتظرند تا نوبت به آنها برسد بیش از 5 نفر باشد چقدر است ؟

$$\lambda = 10 \qquad \mu = 12 \qquad \rightarrow \qquad \rho = 10/12$$

$$(a) \quad P_0 = 1 - \rho = 1/6$$

$$(b) \quad P_4 = (1-\rho)\rho^4 = 0.08$$

$$(c) \quad W_q = \frac{10}{12(2)} = 25 \quad Minute$$

$$(d) \quad P(T_q = 0) = P_0 = 1/6$$

$$(e) \quad P(T_q \rangle 1) = \frac{5}{6} e^{-12(1/6)} = 0.11$$

(f)

p (طول صف > n) =p (نفر در سیستم باشند n+2)= $\sum_{i=n+2}^{\infty} P_i = \sum_{i=n+2}^{\infty} \rho^i (1-\rho) = \rho^{n+2}$

p (طول صف > 5)= $\rho^7 = (5/6)^7$

فرایند $\{N(t); t \geq 0\}$ تشکیل یک CTMC می دهد که حالت خاص فرایند تولد و مرگ است با μ_k, λ_k

$$\begin{cases} \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda_n+\mu_n)\, p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) \\ \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \end{cases}$$

معادلات پیشرو و پسرو

در حالت پایدار:

$p_n(t) \to p_n$ و $\dfrac{dp_0(t)}{dt} = 0$ $\quad t \to \infty$

$$\to \begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_{n+1}} p_n - \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} p_{n-1} \\ p_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_0} p_0 \end{cases}$$

با جایگذاری متوالی

$$\to \begin{cases} p_0 = \dfrac{1}{\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right]} \\ p_n = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} p_0 = p_0\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \end{cases}$$

شرط وجود معادلات حالت پایدار تقارب سری $\sum\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$ است.

در مدل M/M/1 ، $\lambda_i = \lambda$ و $\mu_i = \mu$ به ازای تمام iها می‌باشد . با این فرض به معادلات قبلی میرسیم. برای نمایش قدرت معادلات به دست آمده ، فرض کنید $\lambda_n = \lambda$ و $\mu_n = n\mu$ باشد ، می خواهیم p_n و p_0 را حساب کنید .

$$p_n = p_0\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{i\mu}\right) \to p_n = p_0\frac{\lambda^n}{\mu^n n!} = p_0\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$$

در این حالت سری مورد نظر ما تبدیل می‌شود به $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$.

به ازای تمامی مقادیر محدود λ/μ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}=e^{\lambda/\mu}-1$$

$$p_0 ==\frac{1}{1+e^{(\lambda/\mu)}-1}=e^{-\lambda/\mu}\rightarrow p_0=\frac{e^{-\lambda/\mu}(\lambda/\mu)}{n!}=\frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!}$$

تنها شرط $\rho\neq\infty$ بودن است.

رابطه P_nیک توزیع پواسون با پارامتر λ/μ است.

بدین طریق میتوان مدلهای بیشتری از صف بسازیم.

در ادامه سیستم $M/M/1$، فرآیند $\{N(t); t\geq 0\}$ را در نظر بگیرید. این فرآیند تشکیل یک CTMC می‌دهد که حالت خاص فرآیند تولد و مرگ با λ_k , μ_k است. معادلات پیشرو و پسرو به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda_n+\mu_n)\, p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) \\ \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0\, p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \end{cases}$$

در حالت پایدار خواهیم داشت:

$$p_n(t) \to p_n$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = 0$$
$$t \to \infty$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\to \begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_{n+1}}\, p_n - \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}}\, p_{n-1} \\ p_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_0}\, p_0 \end{cases}$$

همچنین با جایگذاری‌های متوالی خواهیم داشت:

$$\to \begin{cases} p_0 = \dfrac{1}{\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right]} \\ p_n = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}\, p_0 = p_0 \prod_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \end{cases}$$

- تذکر: شرط وجود معادلات حالت پایدار تقارب سری $\sum \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$ است.

در مدل $M/M/1$، به ازای تمام i ها نرخ ورود و خروج به ترتیب $\lambda_i = \lambda$ و $\mu_i = \mu$ می‌باشد. با این فرض به معادلات قبلی می‌رسیم. برای نمایش قدرت معادلات به دست آمده، فرض کنید $\lambda_n = \lambda$ و $\mu_n = n\mu$ باشد، می‌خواهیم P_0 و P_n را حساب کنیم:

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^{n} (\frac{\lambda}{i\mu}) \rightarrow p_n = p_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} = p_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$$

- تذکر: در این حالت سری مورد نظر ما به $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}$ تبدیل می‌شود.

از طرفی به ازای تمامی مقادیر محدود $\frac{\lambda}{\mu}$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

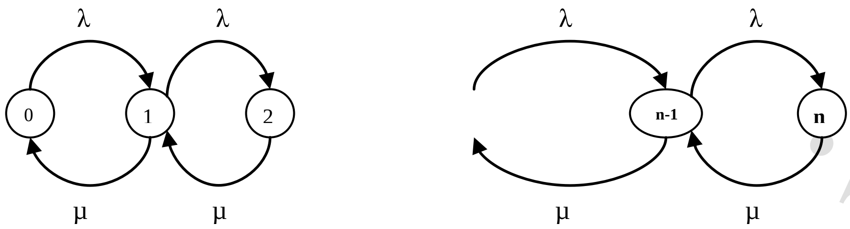
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = e^{\lambda/\mu} - 1$$

$$p_0 == \frac{1}{1+e^{(\lambda/\mu)} - 1} = e^{-\lambda/\mu} \rightarrow p_0 = \frac{e^{-\lambda/\mu} (\lambda/\mu)}{n!} = \frac{e^{-\rho} \rho^n}{n!}$$

- تذکر: تنها شرط $\rho \neq \infty$ بودن است و رابطه P_n یک توزیع پواسون با پارامتر $\frac{\lambda}{\mu}$ است. بدین طریق می‌توان مدل‌های بیشتری از صف بسازیم.

5. ظرفیت سیستم محدود باشد (صف‌های دارای بریدگی[1]) $M/M/1/K$

این سیستم زمانی به‌کار می‌رود که ظرفیت سیستم محدود باشد یا صف دارای بریدگی باشد. با توجه به شکل زیر، K نقطه بریدگی است (یعنی حداکثر تعداد K نفر مجاز به ورود به سیستم هستند).



بنابراین $n+1$ حالت وجود دارد که در ذیل نشان داده شده است.

$$\begin{cases} \lambda_j = \lambda : j = 0,1,2,\ldots, N-1 \\ \lambda_j = 0 : j \geq k \end{cases}$$

تا وقتی $k-1$ نفر در سیستم هستند ($n=k-1$)، معادلات حالت $M/M/1/\infty$ صـادق اسـت. در حالت $n=k$ احتمال این‌که یک نفر وارد شود، صفر است.

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)[1-\mu\Delta t] + P_{k-1}(t)[\lambda\Delta t][1-\mu\Delta t]$$

$$\Rightarrow P_k = \frac{\lambda}{\mu} P_{k-1}$$

در ادامه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_{n+1} = \frac{\lambda+\mu}{\mu} P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} & : 1 \leq n \leq k-1 \\ P_k = \frac{\lambda}{\mu} P_{k-1} & : n = k \end{cases}$$

[1] Finite System Capacity Queues with Truncation

از مدل قبلی می دانیم که: $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$ (برای $n \le k-1$)، بنابراین از رابطه P_k مشاهده می‌شود که: $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$ به ازای $n = k$ نیز صادق است، به عبارتی داریم:

$$P_n = \rho^n P_0 \qquad n \le k$$

می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=0}^{k} \rho^n P_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k} P^n}$$

$$\sum_{n=0}^{k} P^n = \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} \qquad (\rho \ne 1)$$

$$\sum_{n=0}^{k} P^n = k+1 \qquad (\rho = 1)$$

با نوجه به فرمول‌های فوق داریم:

$$\Rightarrow P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{k+1} & if \quad \rho = 1 \\ \frac{\rho^n (1-\rho)}{1-\rho^{k-1}} & if \quad \rho \ne 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} & \rho \ne 1 \\ \frac{1}{1+k} & \rho = 1 \end{cases}$$

6. مقیاسات کارایی در حالت $M/M/1/K$

برای محاسبه طول صف در این حالت از فرمول ذیل استفاده می‌شود:

$$L = \sum_{n=0}^{k} nP_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{k} n\frac{\rho^n}{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{n=0}^{k} n = \frac{k}{2} & if \quad \rho = 1 \\ \sum_{n=0}^{k} n\rho^n P_0 = P_0\rho \sum_{n=0}^{k} nP^{n-1} = P_0 \rho \frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{k}\rho^n = \frac{\rho[1-(k+1)\rho^k + k\rho]}{(1-\rho^{k+1})(1-\rho)} & if \ \rho \ne 1 \end{cases}$$

- تذکر: $L_q = L - (1-P_0) = L - \frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}}$ برای تمام صف‌های تک‌کاناله صادق است.

برای محاسبه میانگین زمان انتظار باید میانگین نرخ مشتریانی که عملا وارد سیستم شده‌اند[2] ((λ')) را بدست آوریم. بنابراین داریم:

$$\lambda' = \lambda(1-P_k)$$

در این حالت تمامی روابط که براساس فرمول لیتل بدست آوردیم با λ' نیز صدق می‌کند.

$$w = \frac{L}{\lambda'}$$

$$w = w_q + \frac{1}{\lambda} \quad , \quad w_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

$$w = \frac{1-\rho^k - k\rho^k(1-\rho)}{\mu(1-\rho)(1-\rho^k)}$$

$$w_q = \frac{\rho[1-\rho^k - k\rho^{k-1}(1-\rho)}{\mu(1-\rho)(1-\rho^k)}$$

مثال آرایشگاه: فرض کنید مشتریان وقتی صندلی خالی نباشد، سیستم را ترک می‌کنند. در این حالت میانگین اندازه سیستم، میانگین طول صف و متوسط زمان انتظار برای سرویس و متوسط زمان صرف شده در سیستم برای آن‌دسته از مشتریانی که وارد آرایشگاه می‌شوند را محاسبه کنید:

$$(\text{حالت قبلی})\; L = \frac{\frac{5}{6}\left[1-6\left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5\left(\frac{5}{6}\right)^6\right]}{\left[\frac{1}{6}\right]*\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^6\right]} = 1.97 \qquad < 5$$

$$L_q = L-(1-P_0) = 1.97-(1-P_0) = 1.97 - \frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\right]}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} = 1.22 \qquad < 4.17$$

برای محاسبه W از $L = \lambda' W$ استفاده می شود.

$$\lambda' = \lambda(1-P_k)$$

---

[2] Effective Arrival Rate

$$k=5 \quad \Rightarrow \quad P_5=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)\right)}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6}=0.1 \quad \Rightarrow \quad \lambda'=5(1-0.1)=4.5$$ در ساعت

$$W=\frac{L}{\lambda'}=\frac{1.97}{4.5}=0.438$$ 26/3 دقیقه

اگر بخواهیم بدانیم به‌طور متوسط چند نفر از مشتریان از دست می‌روند، اول باید احتمال 4 نفر مشتری در صف (یا 5 نفر در سیستم) را هنگام ورود به‌دست آوریم. ضرب این احتمال در λ متوسط مشتریانی را می‌دهد که وارد آرایشگاه پر می‌شوند.

$\lambda P_5=5(0.1)=0.5$ مشتری در ساعت (نفر در ساعت)

بنابراین 1 مشتری در هر 2 ساعت از دست می رود.

مثال: با مدل‌سازی یک مرکز ماشین کاری توسط $M/M/1/N$ (پارامترهای λ و μ) می‌توان نرخ سرویسی که حداکثر سود را ایجاد می‌کند محاسبه کرد. اگر C_μ هزینه عملیاتی شدن سیستم با نرخ μ باشد و q سود حاصل از هر قطعه باشد، داریم:

نرخ تولید مرکز ماشین کاری = $\mu(1-P_0)=\frac{\rho(1-\rho^N)}{1-\rho^{N+1}}\mu=\frac{\lambda\mu(\mu^N-\lambda^N)}{\mu^{N+1}-\lambda^{N+1}}$

سود حاصل از تولید در واحد زمان (واحد زمان μ) $P=\frac{\lambda\mu(\mu^N-\lambda^N)}{\mu^{N+1}-\lambda^{N+1}}q-C_\mu$

- تذکر: با مشتق‌گیری از رابطه P نسبت به μ، مقدار بهینه بدست می‌آید.

1. سرویس وابسته به حالت[1]

در این نوع سرویس‌دهی، میانگین سرویس‌دهی به تعداد افراد در سیستم (حالت سیستم) بستگی دارد. مدلی که در نظر می‌گیریم دارای دو میانگین نرخ (کند و سریع) است. به عنوان مثال تا وقتی‌که K نفر در سیستم وجود دارند، سیستم با نرخ کند کار می‌کند و پس از این نقطه سیستم به نرخ سریعش منتقل می‌شود (نرخ ورودی براساس توزیع پواسون= λ).

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & 0 \le n < k \\ \mu_2 & n \ge k \end{cases}$$

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i - 1}{\mu_i} P_i \qquad P_n = \begin{cases} (\lambda/\mu_1)^n P_c & 0 \le n < k \\ \dfrac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1}\mu_z^{n-k+1}} & n \ge k \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} (\frac{\lambda}{\mu_1})^n + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1}\mu^{n-k+1}} \right]^{-1} \qquad \frac{\lambda}{\mu_1} = \rho_1 \qquad \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

$$\rightarrow P_0 = \left[\frac{1-\rho_1^k}{1-\rho_1} + \frac{\rho\rho_1^{k-1}}{1-\rho} \right]^{-1} \qquad \rho < 1$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = P_0 \left[\frac{\rho_0[1+(k-1)\rho_1^k - K\rho_1^{k-1}]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho\rho_1^{k-1}[k-(k-1)\rho]}{(1-\rho)^2} \right]$$

$$L_q = L - (1-\rho_0) \qquad ,W = L/\lambda, W_q = \frac{lq}{\lambda}$$

- تذکر: فرمول $W = W_q + 1/\mu$ در این حالت صادق نیست. زیرا μ بستگی به نقطه انتقال حالت سیستم دارد بنابراین براساس فرمول لیتل و فرمول L_q می‌توان نوشت: $W = W_q + \frac{1-P_0}{\lambda}$.

همچنین داریم:

$$\mu = \frac{\lambda}{1-P_0}$$ متوسط نرخ سرویس

[1] State-Dependent service

مثال: یک گاراژ شستشوی اتومبیل در روز شنبه مشتریان را براساس FIFO سرویس می‌دهد. ماشین شستشو در دو سرعت کار می‌کند در سرعت پایین به طور متوسط 40 دقیقه و در سرعت بالا به طور متوسط 20 دقیقه وقت لازم است. به محض این‌که انتقال سرعت صورت می‌گیرد دوباره توزیع نمایی فرض می‌شود. مشتریان بر طبق فرآیند پواسون با متوسط زمان مابین ورودی‌های متوالی 30 دقیقه وارد می‌شوند. دو سیاست زیر مد نظر مدیران گاراژ است:

(1) انتقال به سرعت بالا اگر هر تعداد مشتری در حال انتظار وجود داشته باشد (دو نفر یا بیشتر در سیستم باشند).

(2) انتقال به سرعت بالا تنها موقعی که بیشتر از یک مشتری در حال انتظار باشند (سه نفر بیشتر در سیستم باشند). اگر در هر لحظه بتوان سرعت را تغییر داد (حتی اگر در حال کار باشد) متوسط زمان انتظار در تحت دو سیاست چه مقدار است؟

حل)

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_\text{o}} = \frac{1/30}{1/40} = \frac{4}{3} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/30}{1/20} = \frac{2}{3} < 1$$

$$K = 2 \qquad P_\text{o} = \left[\frac{1-(4/3)^2}{1-4/3} + \frac{(2/3)(4/3)}{1-(2/3)}\right]^{-1} = 1/5 = 0.2$$

$$L = 0.2\left[\frac{4/3[1+(4/3)^2 - 2(4/3)]}{(-1/3)^2} + \frac{(2/3)(4/3)[2-(2/3)^2]}{(1/3)^2}\right] = 2.4$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.4}{1/30} = 72$$

$$K = 3 \qquad P_\text{o} = \left[\frac{1-(4/3)^3}{1-4/3} + \frac{2/3(4/3)^2}{1-2/3}\right]^{-1} = 0.13 \qquad L = 2.96 \rightarrow W = 89$$

مشاهده می‌شود انتقال به سرعت بالاتر در K=3 تغییر زیادی در زمان انتظار نمی‌دهد (17 دقیقه)، در حالی‌که سرعت بالاتر هزینه بیشتری دارد. اگر هر ساعت کار در سرعت پائین 5 تومان هزینه و در سرعت بالا 8 تومان هزینه داشته باشد , ارزش انتظاری هزینه با انتقال سرعت در K خواهد بود:

$$C(k)=5\sum_{n=1}^{k-1}P_n+8\sum_{n=k}^{\infty}P_n \rightarrow C(k)=5\sum_{n=1}^{k-1}\rho_1^n P_o+8(\sum_{n=0}^{\infty}P_n-\sum_{n=0}^{k-1}P_n)$$
$$C(2)=5(\rho_1\times P_o)+8(1-\rho_1 P_o+\rho_1 P_o)=5(4/3)(0.2)+8\times[1-0.2-4/3(0.2)]$$
$$C(3)=5(\rho_1 P_o+\rho_1^2 P_o)+8[1-(P_o+\rho_1 P_o+\rho_1^2 P_o)]=5(0.13)[4/3+(4/3)^2]$$
$$=1-(0.13)(1+4/3-(4/3)^2]=5.72$$

2. سیستم $M/M/1$ با قرارداد جنبی ساخت[2]

اغلب وقتی بار کاری زیاد می‌شود، فرآیند سرویس‌دهی برای بخشی از مشتریان را به بیرون از سیستم منتقل می‌کنند. استفاده از قراردادهای جنبی ساخت و قبول نکردن تعدادی از مشتریان به میزان بار کاری (مدت زمانی که یک قطعه از سیستم عبور می کند و یا تعداد قطعات و غیره) بستگی دارد.

مثال: فرض کنید دو نوع قطعه 1 و 2 وارد یک سیستم تولیدی تک‌ماشین می‌شوند. نرخ ورود قطعات λ و بر اساس توزیع پواسون است. متوسط زمان سرویس هر کدام از قطعات $\frac{1}{\mu}$ است (توزیع نمایی). α احتمال آن است که یک قطعه ورودی از نوع 1 باشد. قطعات نوع 1 همواره پذیرفته می‌شوند و لیکن بسته به تعداد کل قطعات سیستم، قطعات نوع دوم ممکن است رد شوند. اگر تعداد کل قطعات سیستم N یا بیشتر شود، قطعات نوع دوم را نمی‌پذیریم. قطعات پذیرفته شده به ترتیب FIFO پردازش می‌شوند.

سیستم فوق یک فرآیند مارکوفی است. حالت سیستم کل قطعات داخل سیستم می‌باشد و چون زمان فرآیند هر دو نوع قطعه یکسان است، نوع کلاس مهم نخواهد بود. همچنین اگر P_k توزیع تعادل حالت k ام باشد (k قطعه در سیستم باشند)، معادله تعادل کلی برای مجموعه حالات$\{0,1,...,k\}$ خواهد بود:

$$\lambda P_k=\mu P_{k+1} \quad 0\le k\le N$$

[2] Sub Contracting

$$\alpha\lambda P_k = \mu P_{k+1} \qquad k \geq N$$

با تعریف $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ خواهیم داشت:

$$P_k = \rho^k P_0 \qquad 0 \leq k \leq N$$

$$P_{N+k} = \rho^N (\alpha\rho)^k P_0 \qquad k \geq 0$$

با کمک معادله نرمال‌سازی کردن احتمالات $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ داریم:

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{k=0}^{N-1} \rho^N + \frac{\rho^N}{1-\alpha\rho} = \frac{1-\rho^N}{1-\rho} + \frac{\rho^N}{1-\alpha\rho}$$

- تذکر: یکی از مهم‌ترین معیارهای کارایی این نوع سیستم‌های تولیدی، P_{rej} یا درصدی از قطعات نوع دوم است که وارد سیستم نمی‌شوند. $E(S_1)$ و $E(S_2)$ نیز میانگین زمان اقامت کارهای دو نوع قطعه می‌باشند.

با استفاده از قانون PASTA خواهیم داشت:

$$P_{rej} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{N+k} = \frac{P_0 \rho^N}{1-\alpha\rho}$$

$$E(S_2) = P_0 \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k (k+1) \frac{1}{\mu} = P_0 \frac{1-\rho^{N+1} - (N+1)\rho^N (1-\rho)}{(1-\rho)^2} \frac{1}{\mu}$$

$$E(S_1) = P_0 \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k (k+1) \frac{1}{\mu} + P_0 \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\rho)^k \rho^N (k+N+1) \frac{1}{\mu}$$

$$= P_0 \left(\frac{1-\rho^{N+1} - (N+1)\rho^N (1-\rho)}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho^N N}{1-\alpha\rho} + \frac{\rho^N}{(1-\alpha\rho)^2} \right) \frac{1}{\mu}$$

- تذکر: توجه داشته باشید که میانگین زمان اقامت یک کار دلخواه از نوع 2 با میانگین زمان اقامت یک کار نوع 2 که وارد سیستم شده است فرق می‌کند؛ دومی میانگین شرطی است ($E(S_2 \mid \text{accepted})$):

$$E(S_2) = P_{rej} \times 0 + (1 - P_{rej}) \times E(S_2 \mid \text{accepted})$$

همچنین کاری که وارد سیستم می‌گردد، دارای توزیع ارلنگ با پارامترهای $k+1$ و μ خواهد بود اگر در هنگام ورود k مشتری در سیستم بوده باشند.

- نکته 1: اگر سیستمی داشته باشیم که چنانچه تعداد کارهای سیستم از N بیشتر گردد، سرعت ماشین از μ به $(1+\alpha)\mu$ افزایش یابد، و همچنین اگر تعداد کارهای سیستم از N کمتر باشد، به μ برگردد، فرآیندمارکوف حاصل شبیه قرارداد جنبی است.
- نکته 2: در مثال فوق نرخ انتقال از حالت i به خود i بستگی دارد. نرخ ورود به حالت i به ازاء $i \le N$ برابر λ است و اگر $i \ge N$ باشد، این نرخ $\alpha\lambda$ است. مدل حاصل یک حالت خاص از فرآیند تولد- مرگ است که در آن نرخ رفتن از حالت i به $i+1$، λ_i و رفتن از حالت i به $i-1$، μ_i است. می توان مشاهده کرد که برای این سیستم احتمالات تعادل به صورت ذیل خواهند بود:

$$\rho_i = \frac{\rho_i}{\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j} \qquad i \ge 0$$

که در فرمول بالا $\rho_0 = 1$ است و نیز داریم:

$$\rho_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} \qquad i \ge 1$$

3. سیستم $M/M/1$ با اولویت‌بندی بین کارها

فرض کنید دو نوع 1 و 2 از کارها وجود دارند که به ترتیب با نرخهای λ_1 و λ_2 بر اساس فرآیند پواسون وارد یک سیستم می‌شوند. توزیع زمان فرآیند همه قطعات نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ است و فرض می‌کنیم که نرخ اشتغال ناشی از کار نوع iام به صورت ذیل باشد:

$$\rho_1 + \rho_2 < 1 ; \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$$

همچنین فرض می‌کنیم کارهای نوع 1 نسبت به نوع 2 دارای تقدم می‌باشند. دو حالت را در نظر می گیریم:

- **حالت 1**: تقدم با بریدگی و از سرگیری مجدد کار قطع شده[3].

کار 1 تقدم مطلق بر کار 2 دارد، یعنی اگر در حال سرویس‌دهی به کار نوع 2 باشیم و کاری از نوع 1 وارد شود، بلافاصله کار نوع دوم قطع شده و مادامی که از کار نوع 1 وجود دارد، کار دوم منتظر می‌ماند. هرگاه دیگر کار نوع 1 نبود از نقطه‌ای که کار نوع دوم قطع شده بود مجدداً از سر گرفته می‌شود:

$L_i =$ تعداد قطعات نوع iام

$S_i =$ زمان اقامت[4] نوع iام

چون برای قطعه نوع 1، نوع 2 وجود ندارد، داریم:

$$E(L_1) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \quad \text{و} \quad E(S_1) = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho_1}$$

- تذکر: کل تعداد کارهای سیستم بستگی به ترتیب پردازش شدن آن‌ها ندارد (چون بدون حافظه است)، در نتیجه فرض می کنیم کارهای نوع 1 و 2 پشت سر هم اجرا می‌شوند:

---

[3] Preemptive-Resume
[4] Throughput Time

$$E(L_1)+E(L_2)=\frac{\rho_1+\rho_2}{1-(\rho_1+\rho_2)}$$

با جایگزینی داریم:

$$E(L_2)=\frac{\rho_1+\rho_2}{1-(\rho_1+\rho_2)}-\frac{\rho_1}{1-\rho_1}=\frac{\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

و با قانون لیتل داریم:

$$E(S_2)=\frac{E(L_2)}{\lambda_2}=\frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

مثال: اطلاعات زیر از یک سیستم صف در دست است: $\lambda_1=0.2$، $\lambda_2=0.6$ و $\mu=1$. اگر در این سیستم بدون تقدم و تأخر عمل کنیم داریم:

$$E(s)=\frac{1}{1-0.8}=5$$

اگر کار نوع 1 تقدم مطلق نسبت به کار نوع 2 داشته باشد خواهیم داشت:

$$E(S_1)=\frac{1}{1-0.2}=1.25 \quad , \quad E(S_2)=\frac{1}{(1-0.2)(1-0.8)}=6.25$$

- **حالت 2**: سیاست بدون بریدگی.

اگر کار نوع 1 برتری تقریباً مطلق بر کار 2 داشته باشد، یعنی این‌که در صورت مشاهده یک کار نوع 2 در سرویس صبر کند تا آن به اتمام برسد، خواهیم داشت:

$$E(S_1)=E(L_1)\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\rho_2\frac{1}{\mu} \qquad (1)$$

در رابطه فوق مؤلفه سوم مربوط به زمان سرویس قطعه نوع دوم است که در حالت سرویس توسط یک مشتری نوع اول دیده می‌شود. ρ_2 درصدی از اوقات است که سیستم به سرویس قطعه نوع دوم اختصاص می‌یابد (مطابق PASTA). حال با کمک قانون لیتل داریم:

$$E(L_1) = \lambda_1 E(S_1) \quad (2)$$

با قرار دادن رابطه (2) در (1) داریم:

$$E(S_1) = \frac{\left(\frac{1+\rho_2}{\mu}\right)}{1-\rho_1}, \quad E(L_1) = \frac{(1+\rho_2)\rho_1}{1-\rho_1}$$

با کمک رابطه $E(L_1) + E(L_2) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1-\rho_1-\rho_2}$ خواهیم داشت:

$$E(L_2) = \frac{(1-\rho_1(1-\rho_1-\rho_2))\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

در ادامه با قانون لیتل داریم:

$$E(S_2) = \frac{(1-\rho_1(1-\rho_1-\rho_2))}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

مثال: اگر داشته باشیم: $\lambda_1 = 0.2$، $\lambda_2 = 0.6$ و $\mu = 1$. در نتیجه در این حالت می‌توان نوشت:

$$E(S_1) = \frac{1+0.6}{1-0.2} = 2, \quad E(S_2) = \frac{1-0.2(1-0.8)}{(1-0.2)(1-0.8)} = 6$$

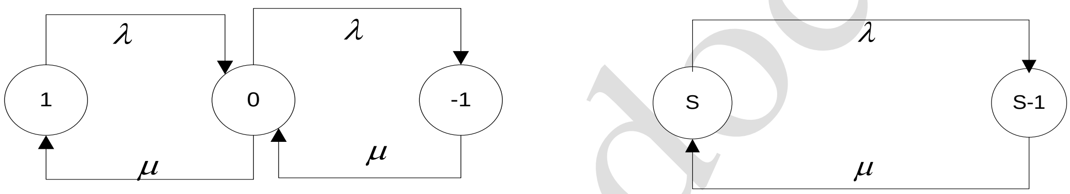
4. یک سیستم $M/M/1$ تولید برای انبار[5]

در سیستم‌های Make-to-Stock نسبت به Make-to-Order زمان تحویل کوتاه‌تری داریم و لیکن هزینه انبار بیشتری خواهیم داشت. μ نرخ تولید و λ نرخ تقاضا است ($\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$) . بر اساس سیاست base-stock مادامی‌که سطح موجودی ها به S نرسیده است، تولید می‌کنیم. فرض برآن

[5] Production-to-Stock

است در مواقع کمبود موجودی، سفارشات به‌طور کامل عقب افتاده می‌شود (یعنی با تأخیر تأمین می‌شود). دو نوع هزینه داریم:

h هزینه نگهداری واحد کالا در واحد زمان و b هزینه عقب افتادن یک واحد کالا در واحد زمان است. به‌دنبال یک S هستیم که حداقل هزینه میانگین در واحد زمان را ایجاد کند. حالت سیستم با تعداد اقلام موجودی منهای تعداد سفارشات عقب افتاده مشخص می‌شود. بنابراین مجموعه حالات ممکن {S, S-1, …, 1, 0, -1, …} خواهند بود. دیاگرام جریان سیستم به صورت ذیل خواهد بود:



P_n را احتمال تعادل قرار گرفتن سِستم در حالت n می نامیم. با توجه به تشابه سیستم فوق با $M/M/1$ بلافاصله داریم:

$$P_n = (1-\rho)\rho^{S-n} \;; \quad n = S,\ S-1,\ S-2, \ldots$$

با کمک این احتمالات توزیع تعداد قطعات در انبار و سفارشات عقب افتاده را می‌توانیم بدست می‌آوریم:

$$P(I=0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{-n} = \rho^S$$

$$P(I=n) = P_n = (1-\rho)\rho^{S-n} \;; \quad n = 1, 2, \ldots, S$$

$$P(B=0) = \sum_{n=0}^{S} P_n = 1-\rho^{S+1}$$

$$P(B=n) = P_{-n} = (1-\rho)\rho^{S+n} \;; \quad n = 1, 2, \ldots, S, \ldots$$

در نتیجه مقادیر میانگین به صورت زیر خواهند بود:

$$E(I) = S - \frac{\rho}{1-\rho}(1-\rho^{S}) \ , \quad E(B) = \frac{\rho^{S+1}}{1-\rho}$$

و همچنین میانگین هزینه در واحد زمان برابر است با:

$$E(C) = E(I) \times h + E(B) \times b$$

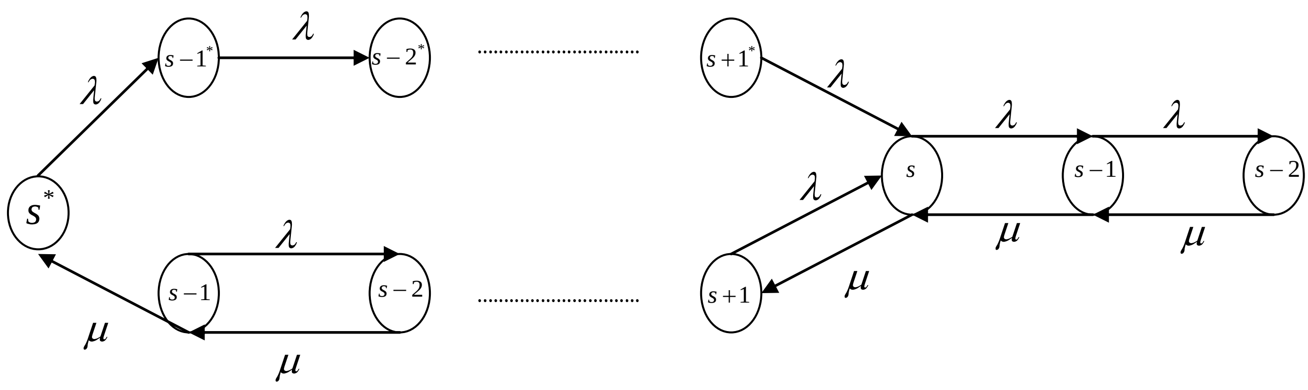
- تذکر: با شروع از $S=0$ و $S=1$ و غیره می‌توان حداقل مقدار $E(C)$ را به‌دست آورد (زیرا $E(C)$ محدب است).
- نکته: اگر فروش از دست رفته به جای فروش معوقه داشته باشیم، فضای حالت سیستم محدود به {S, S-1, …, 0} می‌شود.

5. مدل‌های موجودی با سیاست (s, S)

اغلب اگر محصول جدیدی تولید شود یک هزینه آماده سازی K نیز روی خواهد داد. در این مواقع سیاست base-stock معقول به نظر نمی‌رسد (چون انباشته‌های کوچک و هزینه زیاد دارد) بلکه از سیاست (s, S) استفاده می‌شود. به این معنی که اگر تعداد اقلام موجودی انبار به زیر s واحد رسید تولید آن شروع و تا زمانی‌که به سطح S برسد ادامه می‌یابد. توجه داشته باشید اگر s=S-1 باشد سیاست (s, S) مشابه سیاست قبل خواهد بود.

بار دیگر حالت‌های سیستم تعداد اقلام موجودی منهای تعداد سفارشات عقب افتاده می‌باشد. اما باید مشخص کنیم آیا تعداداقلام از s کمتر شده است یا خیر، تا بتوان تولید را آغاز کرد. اگر n قطعه در انبار وجود داشته باشد و ماشین در حال تولید باشد، سیستم را در حالت n گوئیم و اگر n قطعه در انبار باشد و دستگاه در حال کار نباشد سیستم را در حالت n^* گوئیم. کل حالات ممکن سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\{S-1, S-2, \ldots, 1, 0, -1, \ldots\} \cup \{S^*, \ldots, (S+1)^*\}$$



از روی شکل می‌توان معادلات تعادل را به صورت زیر نوشت:

$$P_{n^*} = D \; ; \quad n = S, \ldots, s+1$$

$$P_n = D \times \rho^{s-n} \sum_{j=1}^{S-s} \rho^j \; ; \quad n = s,\ s-1, \ldots$$

$$P_n = D \times \sum_{j=1}^{S-n} \rho^j \; ; \quad n = S-1, \ldots,\ s+1$$

- تذکر: D یک مقدار ثابت است و از معادله نرمال‌سازی کردن احتمالات بدست می‌آید. در ادامه داریم:

$$E(C) = \lambda P_{(S+1)^*} K + \sum_{n=1}^{s} \rho_n nh + \sum_{n=s+1}^{S-1} (P_n + P_{n^*}) nh + P_{S^*} Sh + \sum_{n=1}^{\infty} P_{-n} nh$$

در این حالت یافتن (s, S) که حداقل مقدار $E(C)$ را بدهد، ساده نمی‌باشد.

6. صف‌های همراه با شکست ماشین آلات

در حالت کلاسیک تئوری صف، فرض بر آن است که سرویس دهندگان همیشه قادر به کار هستند. ولیکن در محیط تولیدی تعمیرات دستگاه‌ها امری عادی بوده و بهتر است معیارهای کارایی تحت این شرایط بدست آیند. در این بخش یک سیستم $M/M/1$ را با فرض این‌که سرویس دهنده در معرض شکست و خرابی است در نظر می‌گیریم.

- **فرموله کردن مسئله:**

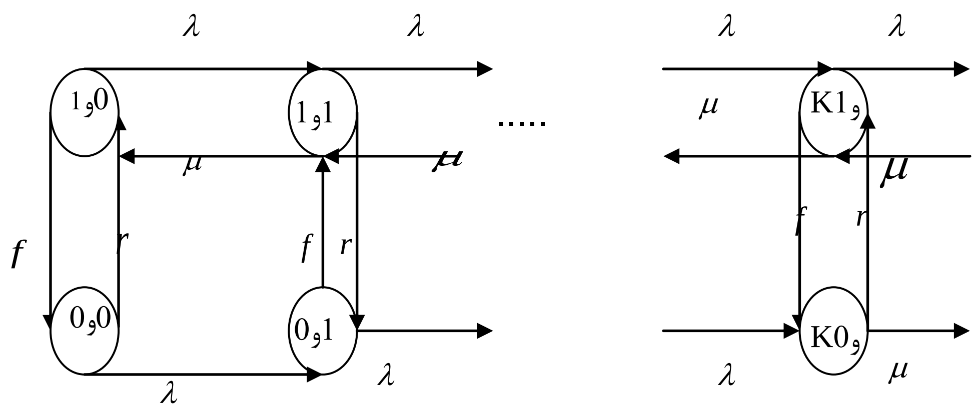
فرض کنید یک مرکز ساخت وجود دارد که مواد خام با نرخ λ وارد و با نرخ λ سرویس می‌شوند. دستگاه تولیدی بر اساس توزیع نمایی با نرخ f در معرض خرابی قرار دارد. زمان تعمیر نیز نمایی با پارامتر r فرض می‌شود. زمان‌های مابین ورود سرویس، زمان‌های شکست و زمان‌های تعمیر همگی مستقل از هم می‌باشند. فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

1. هنگامیکه ماشین تحت تعمیر است هیچگونه شکستی روی نمی‌دهد.
2. شکست ماشین‌آلات چه در هنگام بیکاری و چه در هنگام سرویس روی می‌دهد به محض وقوع شکست دستگاه متوقف و سرویس‌دهی به قطعه به دو صورت زیر پس از تعمیر دستگاه ادامه خواهد یافت:

- RRS (Pre-emptive Resume): از همان نقطه‌ای که سرویس قطع شده بود ادامه می‌یابد.
- RRT (Pre-emptive repeat): سرویس از ابتدا بر روی قطعه جدیدی آغاز می‌گردد.

- **آنالیز حالت پایدار:**

در شرایط بالا، فرض بر آن است که حالت PRS روی می‌دهد. فرض کنید پروسه احتمالی $\{X(t),Y(t):t\geq 0\}$ نمایان‌گر حالت سیستم باشد که درآن $X(t)$ حالت سرویس‌دهنده و $Y(t)$ تعداد مشتریان داخل سیستم در لحظه t باشند. $X(t)=1$ نمایان‌گر حالت آماده سرویس دادن و $X(t)=0$ نمایان‌گر حالت تحت تعمیر بودن دستگاه است. احتمال آن‌که سیستم در حالت $i=0,1$ و $j=0,1,2,...$ باشد را با $\pi(i,j)$ نشان می‌دهیم. شکل زیر دیاگرام حالات سیستم را نشان می‌دهد:



معادلات تعادل سیستم عبارتند از:

$$(\lambda + i\mu + if + (1-i)r)\pi(i,k) =$$
$$\lambda\pi(i,k-1) + i\mu\pi(i,k+1) + ir\pi(1-i,k) + (1-i)f\pi(1-i,k)$$
$$\mathrm{i} = 0,1 \quad \mathrm{k} \geq 1$$

$$(\lambda + if + (1-i)r)\pi(i,0) =$$
$$i\mu\pi(i,1) + ir\pi(1-i,0) + (1-i)f\pi(1-i,0); i = 0,1$$

با تعریف توابع مولد $G_i(Z)$ بصورت:

$$G_i(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i,j)Z^i \ ; \ \text{for } i = 0,1$$

دو طرف روابط تعادل را در Z^j ضرب وبرروی j جمع می‌بندیم:

$$\left[\lambda z(1-z) - i\mu(1-z) + ifz + |\,(1-i)rz\right]G_i(z)$$
$$= (1-i)fzG_{1-i}(z) + irzG_{1-i}(z) - (1-z)i\mu\pi(i,0) \ \ ] \ ; \ \text{for } i = 0,1$$

پس از ساده‌سازی برای $i = 0, 1$ داریم:

$$\begin{cases} \left(-\lambda(z-1) + r\right)G_0(z) - fG_1(z) = 0 \\ \left[-\lambda z(z-1) + \mu(z-1) + fz\right]G_1(z) - rzG_0(z) = \mu(z-1)\Pi(1,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_0(Z) = \dfrac{f\mu\pi(1,0)}{\lambda(\lambda z-\mu)(z-1) - \lambda(f+r)z + r\mu} \\ \\ G_1(Z) = \dfrac{[r-\lambda(z-1)]\mu\pi(1,0)}{\lambda(\lambda z-\mu)(z-1) - \lambda(f+r)z + r\mu} \end{cases}$$

در ادامه برای محاسبه $\pi(1,0)$ از رابطه $G_0(1)+G_1(1)=1$ استفاده می‌کنیم:

$$\pi(1,0)=\frac{r\mu-\lambda f(r+f)}{\mu(r+f)}$$

بنابراین تابع مولد $G(Z)=G_0(Z)+G_1(Z)$ براساس λ و μ و f و r قابل محاسبه است و مقادیر متوسط را می‌توان حساب نمود:

$$L=\frac{dG(Z)}{dZ}_{z=1}=\frac{\lambda\left[(f+r)^2+\mu f\right]}{(f+r)\left[r(\mu-\lambda)-\lambda f\right]}$$

مقدار زمان انتظار (میانگین) در سیستم نیز از قانون لیتل بدست می‌آید:

$$W=\frac{L}{\lambda}=\frac{(f+r)^2+\mu f}{(f+r)\left[r(\mu-\lambda)-\lambda f\right]}$$

براساس این معادلات شرایط پایدار بودن سیستم قابل اقتباس است:

$$\mu>\lambda(1+\frac{f}{r})$$

1. $M/M/C$ صف‌هایی که دارای کانال‌های موازی هستند[۱]

به علت پواسون بودن توزیع ورودی‌ها و نمایی بودن سرویس‌دهی، با پروسه تولد- مرگ مواجهیم و که تمام مقادیر ممکن n و $\lambda_n=\lambda$ را شامل می‌شود و لذا می‌توانیم از فرمول $P_n = P_0 \pi_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}$ استفاده کنیم. ولیکن قبل از آن باید μ_i را نیز مشخص نماییم. برای محاسبه میانگین نرخ سرویس‌دهی در این سیستم داریم:

- اگر بیش از c مشتری در سیستم باشد، تمام سرویس دهندگان مشغول‌اند و هر سرویس‌کننده با نرخ μ کار می‌کند. بنابراین میانگین نرخ خروجی $c\mu$ است.
- اگر تعداد افراد سیستم از c کمتر باشد ($n<c$)، در این صورت تنها n تا از c سرویس‌کننده مشغول‌اند و میانگین نرخ $n\mu$ است.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \le n < c \\ c\mu & n \ge c \end{cases}$$

بنابراین برای محاسبه P_n نیز دو حالت داریم:

$$\begin{cases} P_n = P_0 \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} & 1 \le \mathrm{n} < \mathrm{c} \\ P_n = P_0 \dfrac{\lambda^n}{c^{n-c} c! \mu^n} & \mathrm{n} \ge \mathrm{c} \end{cases}$$

$$1 \le n < c$$
$$n \ge c$$

همچنین برای محاسبه P_0 داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$
$$\Longrightarrow P_0 \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu^n c! c^{n-c}} \right] = 1$$

در ادامه خواهیم داشت:

[۱] Queues with Parallel channels

$$\begin{cases} r = \dfrac{\lambda}{\mu} \\ \rho = \dfrac{r}{c} = \dfrac{\lambda}{c\mu} \\ i = n - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} P_0\left[\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^n}{c!c^{n-c}}\right] = 1 \\ \displaystyle\sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^n}{c!c^{n-c}} = \frac{r^c}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^{n-c}}{c^{n-c}} = \frac{r^c}{c!}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i \end{array}$$

در نهایت با در نظر گرفتن شرط تقارب $\rho < 1$ (یا $\lambda < C\mu$) داریم:

$$\frac{r^c}{c!}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i = \frac{r^c}{c!}\frac{1}{1-\rho} = \frac{r^c}{c!}\frac{1}{1-{r}/{c}} = \frac{r^c}{(c-1)!}\frac{1}{c-r}$$

$\rho < 1$ باشرط

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!} + \frac{cr^c}{c!(c-r)}\right]^{-1}$$

2. محاسبه مقیاس‌های کارایی

ابتدا L_q را بدست می آوریم که ساده تر از L بدست می‌آید:

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)P_n$$

$$= \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\frac{\lambda^n}{\mu^n c! c^{n-c}}P_0\left[\frac{r^{\frac{c+1}{c}}}{c!(1-\frac{r}{c})^2}P_0\right]$$

برای یافتن L دو راه داریم:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty}nP_n = \sum_{n=0}^{c}nP_n + \sum_{n=c+1}^{\infty}nP_n$$

و با روش ساده‌تر براساس فرمول لیتل خواهیم داشت:

$$L = \lambda W$$

$$W = w_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = w_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

مجدداً نظم سیستم صف FIFO است (اولین ورودی اولین نفر ورودی به سرویس (نه خروج) است)

$$L = r + \frac{r^{c+1}/c}{c!(1-r/c)^2} P_0$$

در ضمن برای معیار زمان انتظار داریم:

$W_q(0) = p_r[T_q \le 0] =$ Pr[تعداد افراد سیستم کمتر یا مساوی C-1 نفر باشد] $= \sum_{n=0}^{c-1} p_n$

$$= 1 - \frac{C(\lambda/\mu)C}{C!(c-\lambda/\mu)} p_0 \qquad t=0 \text{ برای}$$

$W_q(t) = \sum_{n=c}^{\infty} p_r$ [ورودی n نفر را در سیستم مشاهده کند | زمان تکمیل سرویس $n\text{-}c\text{+}1$ نفر $\le t$] $P_n + w_q(0)$

از n نفر $(n \ge c)$ c نفر در سرویس هستند و $n\text{-}c$ نفر در صف اول باید منتظر اتمام سرویس $n\text{-}c$ نفر جلوی خود و یک نفر در حال سرویس باشد. (براساس ارلنگ نوع $n\text{-}c\text{+}1$ بدست می‌آید)

$$W_q(t) = \frac{(\lambda/\mu)^c (1-e^{-(\mu c-\lambda)t})}{(c-1)!(C-\lambda/\mu)} P_0 + W_q(0) \quad ; \quad t > 0$$

- تذکر: رابطه ذیل برای تمام معادلات $M/M/C$ معتبر است:

$$\left\{ W_q = \frac{(\lambda/\mu)^c \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0 \right.$$

مثال: در یک کلینیک چشم پزشکی سه متخصص کار می‌کنند. یک آزمایش چشم به‌طور متوسط 20 دقیقه طول می‌کشد. بیماران به‌طور میانگین 6 نفر در ساعت وارد می‌شوند (بر طبق پروسهٔ پواسون). به‌طور متوسط چند نفر انتظار می‌کشند؟ متوسط زمانی که یک بیمار در کلینیک صرف

می‌کند چقدر است؟ متوسط درصد زمانی که هریک از دکترها بیکار هستند (احتمال این‌که یک دکتر بیکار باشد) چقدر است؟ احتمال این‌که حداقل یک دکتر بیکار باشد چقدر است؟

حل:

$c=3$ $\lambda=6$ ساعت/نفر $\mu=1$ نفر / 20دقیقه = 3 نفر / ساعت $\Rightarrow r=\frac{\lambda}{\mu}=2$

$$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{r}{c}=\frac{2}{3}<1$$

$$\Rightarrow P_0=\left[1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{3(2)^3}{3!(3-2)}\right]^{-1}=\frac{1}{9}\Rightarrow\begin{cases}L_q=\frac{8}{9}\\ W=\frac{13}{27}hr=28\min.\end{cases}$$

با فرض انتخاب تصادفی دکترها در هنگامی که بیش از یک دکتر بیکار است داریم:

$$\Pr\{\text{سرویس‌کننده بیکار باشد}\}=\left(\frac{3}{3}\right)P_0+\left(\frac{2}{3}\right)P_1+\left(\frac{1}{3}\right)P_2=\frac{1}{3}$$

احتمال بیکاری اگر کسی در سیستم نباشد.

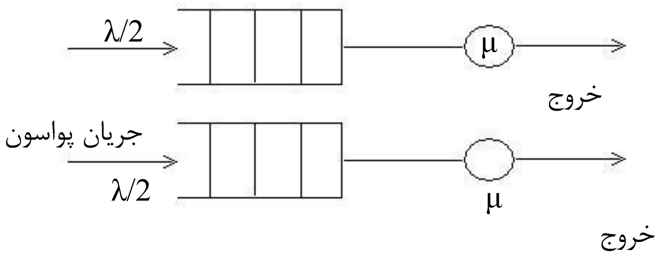
دو دکتر از سه دکتر وقتی یک نفر در سیستم است بیکارند.

بنابراین احتمال بیکاری $\frac{1}{3}$ است. یا به عبارتی یک دکتر، در یک سوم از اوقات خود، بیماری برای معاینه ندارد. برای احتمال فوق عبارت کلی $1-\frac{\lambda}{\mu c}=1-\rho$ وجود دارد که برای مدلهای *M/M/C* صادق است.

- تذکر: احتمال این‌که حداقل یک سرویس‌دهنده بیکار باشد $1-\rho$ نبوده بلکه $\sum_{n=0}^{c-1}P_n$ است.

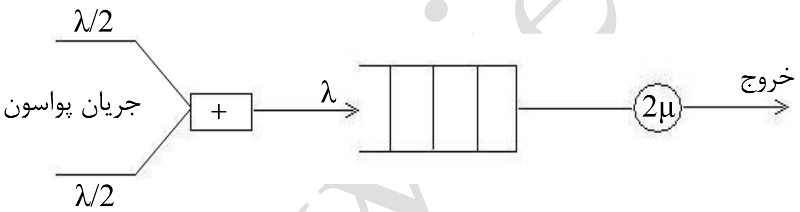
برای مثال فوق داریم: $P_0+P_1+P_2=\frac{5}{9}$ یعنی متجاوز از نیمی از زمان، حداقل یکی از دکترها بیکار است. درحالیکه هر دکتر خاصی $\frac{1}{3}$ اوقات بیکار است.

مثال: سه شکل(a) ,(b) ,(c) را درنظر بگیرید. درشکل a دو سیستم صف مجزا و یکسان *M/M/1* با پارامترهای μ و $\frac{\lambda}{2}$ داریم.



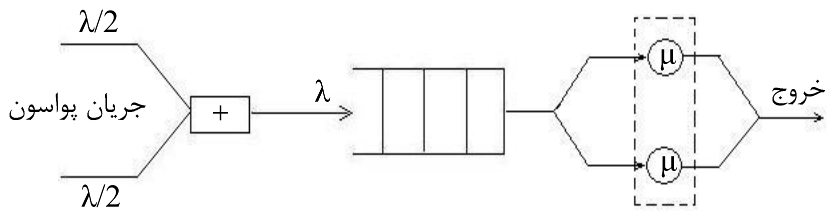
شکل (a) : دو صف مجزا

در شکل b دو جریان مجزای یکی شده با نرخ ورود λ و نرخ سرویس 2μ در یک سیستم *M/M/1* خواهیم داشت:



شکل (b) : صف مشترک با یک سرویس دهنده

در شکل c یک صف مشترک با یک سرویس‌دهنده دارای دو دستگاه را مشاهده می‌کنید، بنابراین یک سیستم *M/M/2* خواهیم داشت. پارامترهای این سیستم *M/M/2* ، λ و μ هستند.



شکل (c) : صف مشترک با دو سرویس دهنده

توجه داشته باشید که در هر سه سیستم نرخ مؤثر ورود λ و نرخ مؤثر سرویس 2μ است. هدف آن است که بدانیم کدام سیستم حداقل زمان تولید را دارند. برای این سه سیستم داریم:

$$W_1 = \frac{2}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda/2}$$

$$W_2 = \frac{1}{2\mu - \lambda}$$

$$W_3 = \frac{4\mu}{4\mu^2 - \lambda^2}$$

شرط پایداری سیستم $\lambda < 2\mu$ است، بنابراین:

$$W_3 = \left(\frac{4\mu}{2\mu + \lambda}\right)\left(\frac{1}{2\mu - \lambda}\right) > \frac{1}{2\mu - \lambda} = w2$$

$$W_3 = \left(\frac{2\mu}{2\mu + \lambda}\right)\left(\frac{2}{2\mu - \lambda}\right) < W_1$$

$\Rightarrow \ W_1 > W_3 > W_2$

<u>مثال:</u> اگر $\lambda = 15$ و $\mu = 10$ و هر ساعت وقت سرویس‌دهنده 120 تومان، هر ساعت اتلاف وقت مشتری در صف 360 تومان هزینه دربر داشته باشد و افزایش سرویس‌دهنده هزینه‌ای به سیستم تحمیل نکند، تعداد بهینه‌ی سرویس‌دهندگان در یک مدل $M/M/m$ را تعیین کنید.

حل:

میانگین سرویس‌دهندگان مشغول به کار $= L - L_q$

میانگین سرویس‌دهندگان بیکار $= m - L + L_q$

هزینهٔ وقت سرویس‌دهنده (چه در حالت بیکاری و چه درحالت مشغول بودن) $= C_s = 120 \ \dfrac{\text{tooman}}{\text{hr.}}$

هزینهٔ افزایش یک سرویس‌دهنده $= C_m = 0$

در نتیجه داریم:

$$TC(m) = 120(m - L + L_q) + 120(L - L_q) + mC_m + 360L_q = 120m + 360L_q$$

$$L_q = \left[\frac{\dfrac{r^{m+1}}{m}}{m!(1-\dfrac{r}{m})^2} P_0\right] \text{ و } P_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1}\frac{r^n}{n!} + \frac{mr^m}{m!(m-r)}\right]^{-1}$$

با توجه به شرط پایداری داریم:

$$r/m < 1 \qquad r = \lambda/\mu = \frac{15}{10} \quad \rightarrow \quad m \geq 2 \quad ; \text{یا} \quad \rho < 1$$

$TC(m)$	L_q	P_0	m
1.928	134.2	0.14	2
* 0.236	445.3	0.21	3
0447	496.1	0.22	4

$$\Rightarrow m^* = 3$$

3. صف‌هایی که دارای کانال موازی و بریدگی هستند. $M/M/C/K$

نرخ ورود و خروج به این سیستم به صورت ذیل است:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & 0 \leq n < k \\ 0 & n \geq k \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 < n \leq c \\ c\mu & c \leq n \leq k \end{cases}$$

k= تعداد افراد مجاز در سیستم است.

$$P_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}P_0=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{n\mu\times(n-1)\mu\times\ldots\times 1\mu} & 0<n\le c\\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{\underbrace{c\mu\times c\mu\times\ldots\times c\mu}_{(n-c)\ \ Statements}\times\underbrace{(c-1)\mu\times(c-2)\mu\times\ldots\times 1\mu}_{c\ \ times}}P_0 & c\le n\le k\end{cases}$$

$$\Rightarrow P_n=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{\mu^n n!}P_0\\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{c^{n-c}\mu^n c!}P_0\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{k}P_n=1\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=0}^{c-1}\frac{1}{n!}(\lambda/\mu)^n P_0+\sum_{n=c}^{k}\frac{1}{c^{n-c}c!}(\lambda/\mu)^n P_0=1$$

برای خلاصه کردن رابطهٔ فوق داریم:

$$\sum_{n=c}^{k}\frac{1}{c!c^{n-c}}r^n=\frac{r^c}{c!}\sum_{n=c}^{k}\frac{r^{n-c}}{c^{n-c}}=\frac{r^c}{c!}\sum_{n=c}^{k}\rho^{n-c}$$

تصاعد هندسی

$$\sum_{n=c}^{k}\rho^{n-c}=\underbrace{\rho^0+\rho^1+\ldots+\rho^{k-c}}_{(k-c+1)\ \ Statements}=\frac{1-\rho^{k-c+1}}{1-\rho}$$

$$\sum_{n=c}^{k}\frac{1}{c!c^{n-c}}r^n=\begin{cases}\dfrac{r^c}{c!}\dfrac{1-\rho^{k-c+1}}{1-\rho} & \rho\ne 1\\[2ex] \dfrac{r^c}{c!}(k-c+1) & \rho=1\end{cases}$$

$$P_0=\begin{cases}\left[\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\frac{r^n}{c!}\frac{1-\rho^{k-c+1}}{1-\rho}\right]^{-1} & \text{if}\quad \dfrac{\lambda}{c\mu}\ne 1\\[4ex] \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\frac{r^n}{c!}(k-c+1)\right]^{-1} & \text{if}\quad \dfrac{\lambda}{c\mu}=1\end{cases}$$

4. مقایس‌های کارایی

$$L_q=\sum_{n=c}^{k}(n-c)P_n=\frac{P_0(c\rho)^c\rho}{c!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{k-c+1}-(1-\rho)(k-c+1)\rho^{k-c}\right]$$

$$L = L_q + c - P_0 \sum_{n=0}^{c-1} (c-n) \frac{(\rho c)^n}{n!}$$

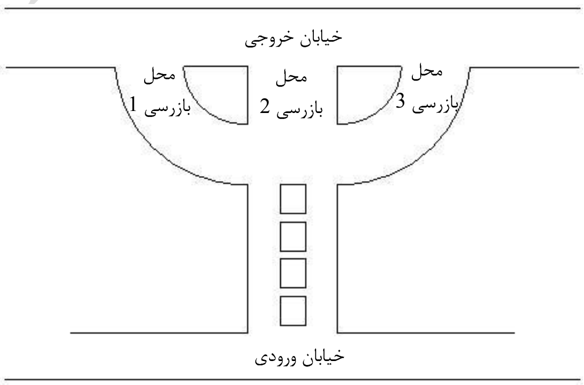
$$W = \frac{L}{\lambda'}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

نرخ ورود مؤثر $= \lambda' = \lambda(1 - P_k)$

$$W_q = W - \frac{L}{\mu}$$

مثال: ایستگاه بازرسی فنی اتومبیلی را درنظر بگیرید که دارای سه محوطهٔ بازرسی است. هر محوطه می‌تواند تنها یک اتومبیل را در خود جای دهد. اتومبیل‌ها به نحوی منتظر می‌مانند که وقتی یک سرویس خالی می‌شود اتومبیلی که در جلوی صف بوده وارد سرویس می‌شود. محل انتظار حداکثر 4 اتومبیل را در خود جای می‌دهد.



در اوج شلوغی میانگین ورود یک ورودی در هر دقیقه می‌باشد. زمان سرویس نمایی با میانگین 6 دقیقه می‌باشد. متوسط تعداد اتومبیل در سیستم، متوسط زمان انتظار در ایستگاه، متوسط تعداد اتومبیل در ساعت که به علت کمبود جا نمی‌توانند وارد ایستگاه شوند را بدست‌آورید.

حل:

$$k = 7,\ \lambda = 1\ \text{نفر/دقیقه},\ \frac{1}{\mu} = 6\ \text{دقیقه} \ \Rightarrow\ \mu = 1\ \text{نفر}/6\text{دقیقه} = \frac{1}{6}\ \text{نفر/دقیقه} \ \Rightarrow\ r = 6$$

$\rho = \frac{r}{c} = \frac{6}{3} = 2$ ➔ $P_0 = \left[\sum \frac{6^n}{n!} + \frac{6^3}{3!}\frac{1-2^5}{1-2}\right]^{-1} = \frac{1}{1144}$

(درفرمولی که $\rho \neq 1$ است)

$L_q = P_0 \frac{6^3 \times 2}{3!(1-2)^2}\left[1-2^5(1-2)2^4\right] = 3525P_0 = 3.09$ اتومبیل

$L = 3.09 + 3 - \frac{1}{1144}\sum_{n=0}^{2}\frac{(3-n)}{n!}6^n = 6.06$ اتومبیل

$W = \frac{L}{\lambda'}$, $\lambda' = \lambda(1-P_k)$, $P_k = P_7 = \frac{P_0 6^7}{3^4 3!}$ ➔ $W = 12.3$ دقیقه

P_k = احتمال وارد نشدن اتومبیل‌ها به سیستم

λP_k = متوسط تعداد افرادیکه در دقیقه نمی‌توانند وارد سیستم شوند.

$60\lambda P_k$ =متوسط تعداد افرادیکه در ساعت نمی‌توانند وارد سیستم شوند= 30.4 اتومبیل/ساعت

مثال: در یک کارگاه تولیدی به علت محدودیت فضای انبار حداکثر تعداد مشتریان پذیرفته شده محدود است. هدف تعیین تعداد بهینه ظرفیت سیستم و تعداد ماشین‌ها می‌باشد. مدت زمان سرویس نمایی با میانگین 15 دقیقه و ورود مشتریان پواسون با میانگین هر ساعت 16 مشتری می‌باشد. هزینه افزایش یک ظرفیت بیشتر 10 تومان، هزینه بیکاری سرویس دهنده 100 تومان در ساعت و هزینه اداره آن در یک ساعت (هزینه عملیاتی) 200 تومان است. خسارت ناشی از، از دست رفتن یک مشتری 300 تومان و خسارت ناشی از تاخیر در کار مشتری به ازای هر مشتری 150 تومان است. (چه در صف و چه در حال سرویس)

حل:

مدل $M/M/m/k$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$L - L_q$ = میانگین سرویس دهندگان مشغول

$$L = L_q + \frac{\lambda'}{\mu} \Rightarrow L - L_q = \frac{\lambda(1-\rho_k)}{\mu} = \frac{16}{4}(1-\rho_k) = 4 - 4\rho_k$$

$TC=$ هزینه افزایش یک سرویس دهنده + هزینه بیکاری سرویس دهنده + هزینه عملیاتی + 300(نرخ ورود مشتری به سیستم − نرخ مراجعه مشتری به سیستم) + هزینه اتلاف وقت مشتری در صف + هزینه اتلاف وقت مشتری در سیستم

$$TC = 10K + 100(m - L + L_q) + 200(L - L_q) + 300(16 - 16(1-\rho_k))$$
$$+150L_q + 150(L - L_q) = 100m + 10K + 150L_q + 3800\rho_k + 1000$$
$$\text{for } m \le K$$

M \ K	2	3	4	5	…….	11	12
2	2558	2409					
3	-	2042					
4	-	-					
5	-	-					
6	-	-				815	816
7	-	-					
8	-	-					

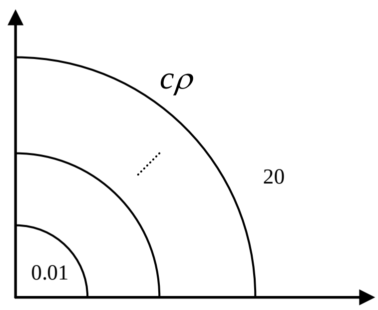
5. فرمول ارلنگ $M/M/C/C$

در سال 1917 توسط ارلنگ سیستمی با $K=C$ و عدم اجازه تشکیل صف مورد بررسی قرار گرفت.

فرمول فقدان ارلنگ:
$$\rho_C = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^C}{C!}}{\sum_{i=0}^{C}\frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}}$$

با قرار دادن $c=n$ در فرمول فوق، $\rho_n = \dfrac{(\lambda/\mu)^n / n!}{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}$ معروف به اولین فرمول ارلنگ به دست می‌آید.

قرمول فوق در طراحی سیستم‌های تلفن کاربرد دارد. ولی نتیجه شگفت‌آور آن در این است که P_c برای تمام $M/G/C/C$ صادق است حتی برای $M/D/C/C$.



Doeh در سال 1960 مجموعه ای از منحنی ها را برای P_c بدست آورد.

$$\frac{\lambda}{\mu} = r = c\rho$$

$$\rho_C = \frac{(c\rho)^C / C!}{\sum_{i=0}^{C} \dfrac{(c\rho)^i}{i!}}$$

اگر صورت و مخرج رابطه را در $e^{-c\rho}$ ضرب کنیم، صورت احتمال وجود c نفر در سیستم است و مخرج احتمال اینکه تا c نفر در سیستم باشند. این احتمالات را می توان از جداول مخصوص بدست آورد و P_c را مشخص کرد.

مثال: به یک ایستگاه راه آهن به طور متوسط مطابق پروسه پواسون 84/3 تماس تلفنی در هر ساعت صورت می گیرد. مسوولین می خواهند که علامت اشغال به طور متوسط یک‌بار در هر ساعت پیش آید. اگر متوسط زمان سرویس 0/103 ساعت باشد، چه تعداد خط تلفن مناسب خواهد بود؟

حل:

مدل *M/G/C/C* است چون علامت اشغال وقتی روی می‌دهد که تمام کانال‌ها مشغول باشند.

$$\lambda = 84.3 \quad \text{تلفن} \big/ \text{ساعت}$$
$$1/\mu = 0.103 \quad \text{ساعت}$$
$$r = c\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{84.3}{(0.103)^{-1}} = 8.7$$

احتمال از دست دادن مشتری یا پر بودن کانالها ی تلفن P_c است (اگر c کانال داشته باشیم). سیاست مدیریت از دست دادن یک مشتری در دو ساعت یا 1/2 مشتری در یک ساعت است بنابراین:

$$\lambda\rho_c = 1/2$$
$$\rho_c = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2(84.3)} = 0.0059$$

حال از منحنی ها می توان c را به دست آورد. چون P_c را داریم واگر منحنی 8/7 را داشته باشیم، c به دست می آید. حال که منحنی 8/7 در دسترس نیست از اینترپولیشن استفاده می‌کنیم.

مثال: در طراحی یک پارکینگ، هدف اصلی تعیین فضای آن است. اگر ظرفیت آن تکمیل شود اتومبیل‌ها به پارکینگ دیگری می‌روند و سود حاصله که 5 تومان در ساعت است از بین می‌رود. اتومبیل‌ها طبق فرآیند پواسون با میانگین هر ساعت 40 دستگاه وارد می‌شوند و مدت زمان توقف نمایی با میانگین نیم ساعت است. هزینه ایجاد فضای یک اتومبیل برابر 2 تومان در واحد زمان است.

حل:

مدل *M/M/m/m* داریم با: $\lambda = 40 \quad \frac{\text{ماشین}}{\text{ساعت}}, \mu = 2\frac{\text{ماشین}}{\text{ساعت}}$

$$\mathrm{TC(m)} = 2\mathrm{m} + 5(40 - 40(1 - \rho_{\mathrm{m}})) = 2\mathrm{m} + 200\mathrm{m}$$

$TC(m)$	P_m	m
60.1	0.05	25
59.43	0.037	26
59.36	0.026	27
59.75	0.018	28

$m=27$

6. صف‌هایی که برای سرویس نامحدود است $M/M/\infty$

موقعیت سلف سرویس نمونه چنین حالتی است.

$$P_n = \prod \frac{\lambda_i - 1}{\mu} \qquad \lambda_n = \lambda \qquad \mu_n = \mu$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0\, e^r = 1 \rightarrow P_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

یعنی P_0 تابع توزیع پوآسون با میانگین λ/μ دارد. برای هرمدلی که M/G/∞ باشد به شرط آن‌که P_n تنها به میانگین زمان سرویس بستگی داشته باشد (نه تابع زمان سرویس) صادق است.

$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_0 =$ میانگین تابع توزیع پوآسون $= \lambda/\mu$

$$L_q = 0$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0$$

$$W = \frac{1}{\mu}$$

- تذکر: توزیع زمان انتظار $W_{(t)}$ توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ می‌باشد.

مثال: یکی از کانال‌های تلویزیون می‌خواهد بداند به‌طور متوسط چند نفر در یک ساعت خاص یک برنامه خاص را می‌بینند. بررسی‌های گذشته نشان می‌دهد که به‌طور متوسط صد هزار نفر در ساعت، راس ساعت خاص، تلویزیون خود را روشن می‌کنند که بخوبی می‌توان با توزیع پوآسون آن‌ها را نشان داد. از بین پنج کانال تلویزیون هر بیننده به‌طور تصادفی یکی را انتخاب می‌کند. همچنین به‌طور متوسط 90 دقیقه تلویزیون را تماشا می‌کنند و تقریباً توزیع نمایی است.

حل:

برای یافتن L باید λ/μ را داشته باشیم.

$\lambda = \dfrac{100000}{5} = 20000$ میانگین نرخ ورودی

$\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{20000}{1/1.5} = 30000$ نفر

1/5 ساعت = 90 دقیقه = میانگین زمان سرویس

$L=$ 30000 نفر $\Rightarrow$ $W=$ 1/5 ساعت

7. صف‌هایی که دارای منبع محدود هستند[2]

در موارد قبل فرض کرده بودیم که جمعیتی که برای سرویس می‌آیند نامحدود است، زیرا پروسه پواسون داشتیم که اندازه فضای آن نامحدود است. اگر جمعیت تقاضاکننده محدود باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ مثلاً M نفر باشند. یک کاربرد این مدل در تعمیر و نگهداری ماشین‌ها است که سرویس‌دهندگان، تعمیرکنندگان هستند و ماشین‌آلات مشتریان.

فرض کنید C سرویس‌دهنده داریم. زمان‌های سرویس با میانگین $1/\mu$ متغییر نمایی هستند و پروسه ورودی به شریح زیر است:

اگر در زمان t تقاضاکننده‌ای در سیستم نباشد احتمال این‌که تا زمان $t+\Delta t$ وارد شود $\lambda.\Delta t+O(\Delta t)$ است یعنی زمانی‌که یک واحد تقاضا کننده در خارج از سیستم صرف می‌کند نمایی با میانگین $1/\lambda$ است.

n = تعداد ماشینها در سیستم

[2] Finite Source Queues

M= جمعیت تقاضا کننده

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda & 0 \le n < M \\ 0 & n \ge M \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \le n < C \\ C\mu & n \ge C \end{cases}$$

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i - 1}{\mu} P_0$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{M!/(M-n)!}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & 0 \le n < C \\ \\ \dfrac{M!/(M-n)!}{C^{n-c}C!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & C \le n \le M \end{cases} \quad \text{or } P_n = \begin{cases} \dbinom{M}{n}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \\ \\ \dbinom{M}{n}\dfrac{n!}{C^{n-c}C!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{M!/(M-n)!}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=C}^{M} \frac{M!/(M-n)!}{C^{n-c}C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$L = \sum_{n=0}^{M} nP_n = P_0\left[\sum_{n=0}^{C-1} n\binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=C}^{M} n\binom{M}{n}\frac{n!}{C^{n-c}C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$$

$$L_q = \sum_{n=0}^{M}(n-C)P_n = \sum_{n=C}^{M} nP_n - C\sum_{n=C}^{M} P_n = L - \sum_{n=0}^{C-1} nP_n - C\left(1 - \sum_{n=0}^{C-1} P_n\right) = L - C + \sum_{n=0}^{C-1}(C-n)P_n$$
$$= L - C + P_0\sum_{n=0}^{C-1}(C-n)\binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

8. محاسبه مقیاسات کارایی وابسته به زمان

اگر در یک سیستم n نفر باشند، در خارج از سیستم M-n نفر وجود دارد که هر یک دارای میانگین نرخ ورودی λ است. پس میانگین نرخ ورود به سیستم $(M\text{-}n)\lambda$ می‌باشد که پس از جمع زدن روی تمام حالات و وزن‌دهی آن با P_n ، متوسط نرخ ورود موثر به سیستم (λ') به‌دست می‌آید:

$$\lambda' = \sum_{n=0}^{M}(M-n)\lambda P_n = M\lambda\sum_{n=0}^{M} P_n - \lambda\sum_{n=0}^{M} nP_n = M\lambda - \lambda L = \lambda(M-L)$$

که به طور حسی هم قابل اقتباس بود. زیرا بطور متوسط L نفر در سیستم هستند و M-L نفر در خارج سیستم می‌باشند و هر کدام نرخ λ دارند:

$$L = \lambda' W$$
$$W = \frac{L}{\lambda'} = \frac{L}{\lambda(M-L)}$$
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'} = \frac{L_q}{\lambda(M-L)}$$

- تذکر: رابطه $W = W_q + 1/\mu$ و فرمول لیتل همواره روش دیگری برای محاسبه λ' بدست می‌دهند:

$$\lambda' = \mu\left(L - L_q\right)$$

این فرمول برای تمامی مدلهایی که فرمول لیتل برای آنها صدق می‌کند معتبر است.

مثال: در یک کارخانه که دارای 30 ماشین است، هدف تعیین تعداد بهینه تعمیرکاران است. مدت زمان تعمیر هر ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین 3 ساعت و مدت زمانی که ماشین کار می‌کند (قبل از اینکه خراب شود) نیز دارای توزیع نمایی با میانگین 240 ساعت است. خسارت قطع تولید هر ماشین ساعتی 1000 تومان و حقوق هر ساعت کار تعمیرکار را 300 تومان فرض کنید.

حل:

$$M = 30 \qquad \mu = 1/30, \qquad \lambda = 1/240$$
$$C_1 = C_2 = 1000$$
$$C(m) = 300m + 1000l$$

C(m)	*L*	P_0	*M*
7862	6.92	0.04	3
4589	3.37	0.168	4
3472	1.97	0.3	5
3144	1.34	0.4	6
3107*	**1.067**	**0.48**	***7***

8	0.54	0.8	3201

9. پروسه خروجی صف *M/M/m*

یک نتیجه مهم برای سیستم‌های *M/M/m* توسط Burke اثبات گردیده است که نشان می‌دهد فرآیند خروج مشتریان از سیستم یک فرآیند پورسون در شرایط پایدار است.

برای $N(t)$، مقدار مشتریان سیستم در زمان t، داریم:

$$N(t) = n_A(t) n_D(t)$$

که در آن $\{n_A(t): t \geq 0\}, \{n_D(t): t \geq 0\}$ پروسه‌های ورود و خروج صف هستند. و نیز داریم:

$$P\{N(t)=k\} = T_k^1 \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

متغیر X را برابر زمان مابین دو خروجی مقداری سیستم تعریف می‌کنیم. یک خروجی سیستم را وقتی ترک می‌کند k مشتری در سیستم هنوز وجود ندارد($k = 0,1,2,.$). اگر $k \geq m$ باشد، در آن صورت زمان لازم برای خروجی بعدی $e^{-\mu m}$ است. اگر $1 \leq k \leq m$ باشد این زمان $e^{-\mu m}$ است و اگر $k = 0$ باشد، این زمان جمع زمان ورودی بعدی با زمان سرویس آن است:

$$E \times P(\lambda) + E \times p(\mu) e^{-\lambda} + e^{-\mu}$$

$$X = E \times P(m\mu) \qquad \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j \qquad \text{با احتمال}$$

$$= E \times P(k\mu) \qquad (k = 1,2,\ldots,m-1)\pi_k \qquad \text{با احتمال}$$

$$= E \times P(\lambda) + E \times P(\mu) \qquad \pi_0 \qquad \text{با احتمال}$$

با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j E \times P(\mu m) + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\pi_k E \times P(k\mu)\right] + \pi_0 \left[E \times P(\lambda) + E \times P(\mu)\right] \\ &= E \times P(\lambda) \end{aligned}$$

$(t) \sim$ و X مستقل از هم هستند و نیز زمان‌های مابین خروجی‌ها iid هستند بنابراین xهای یک سیستم *M/M/m* در حالت پایدار تشکیل فرآیند پروسون با نرخ λ را می‌دهند.

1. سیستم صف M/G/1

در این سیستم ورودی‌ها دارای فرآیند ورودی پوآسون با چگالی (نرخ) λ هستند (*M: Memory less*).

خروجی‌های این سیستم درای توزیع زمان سرویس دهی کلی با میانگین $\bar{S}=\frac{1}{\mu}$ هستند (*G: General*). بنابراین این سیستم یک سرویس تک کاناله با $\rho=\lambda\bar{S}$ ($\rho<1$ در حالت پایدار) دارد.

N(t) تعداد افراد سیستم تشکیل یک فرآیند مارکوفی نمی‌دهند. احتمال انتقال در واحد زمان برای رفتن به حالت $\{N=n\}$ از حالت $\{N=n-1\}$ به مدت زمانی که مشتری در حال سرویس سپری کرده بستگی دارد و این اطلاعات از متغییر *N(t)* بدست نمی‌آید. مقادیر میانگین طول صف، زمان انتظار و نیز زمان اقامت به راحتی بدست می‌آیند (فرمول *P-K*).

2. فرمول میانگین *P-K* (Pollaczek - Khinchin)

با یافتن مقدار W_q شروع می‌کنیم که میانگین زمان انتظار یک مشتری است .

$$E[W_q]=\underbrace{E[N_q]\,E[s]}_{\text{میانگین زمان مورد نیاز سرویس مشتریان صف}}+\underbrace{E[R]}_{\text{مقدار باقیمانده از سرویس مشتری در حال سرویس}}$$

میانگین زمان سرویس * میانگین طول صف

R نشان‌دهنده زمان باقیمانده از سرویس مشتری در حال سرویس است. اگر سرویس‌کننده بیکار باشد، $R=0$ است. در اینجا خاصیت PASTA فرآیند پواسون و نیز قانون لیتل صادق است بنابراین خواهیم داشت:

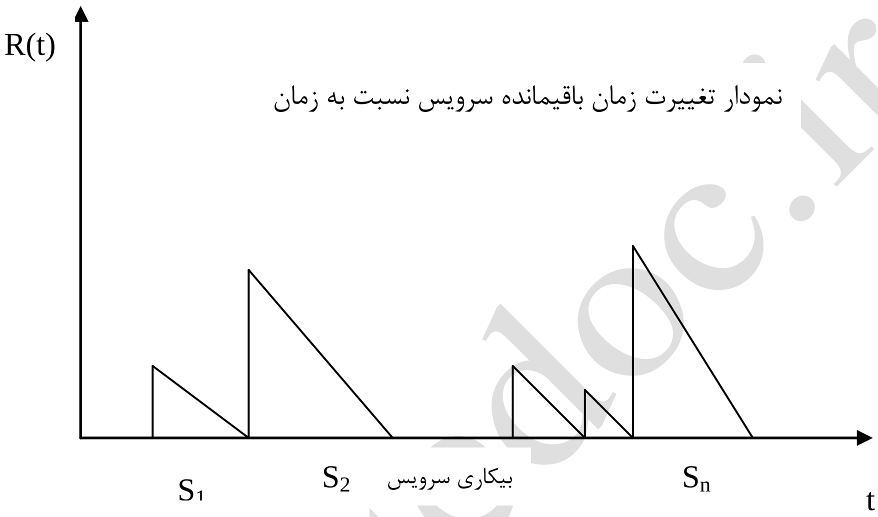
$$E[W_q]=\lambda E[W_q] \xrightarrow{\text{با جایگذاری رابطه فوق}} E[W_q]=\frac{E[R]}{1-p}$$

برای یافتن مقدار $E[R]$ نیز به طریق گرافیکی عمل می‌کنیم.

$$E[R] = \frac{\text{مساحت مثلث‌ها}}{\text{طول زمان}} \qquad n = \lambda t \quad \text{تعداد مثلث‌ها}$$

$$E[R] = 1/t\int_0^t R(t')dt' = 1/t\sum_{i=1}^{n} 1/2S_i^2 = \frac{n}{t}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i^2}{2} = \lambda\times 1/2E[S^2]$$

$$\Rightarrow \qquad E[W_q] = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-p)}$$



برای یافتن زمان w داریم:

$$E[w] = E[S] + E[w_q]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E[w_q] = \dfrac{\lambda E[S^2]}{2(1-p)} = \dfrac{1+C_v^2}{2}.\dfrac{p}{1-p}E[s] \\ E[w] = E[s] + \dfrac{\lambda E[S^2]}{2(1-p)} = (1+\dfrac{1+C_v^2}{2}.\dfrac{p}{1-p})E[s] \end{cases}$$

که در آن $C_v^2 = \dfrac{V[s]}{E[s]^2}$ است و C_v ضریب تغییرات متغیر تصادفی S است.

$$E[s^2] = v[s] + E[s]^2 = (1+C_V^2)E[s]^2$$

با بکارگیری قانون لیتل تعداد متوسط افراد در صف و سیستم نیز بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \begin{cases} E[w_q] = L_q = \lambda E[w_q] = \dfrac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-p)} = \dfrac{1+C_v^2}{2} \cdot \dfrac{p^2}{1-p} \\ E[N] = L = \lambda E[w] = \lambda E[s] + \dfrac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-p)} = p + \dfrac{1+C_v^2}{2} \cdot \dfrac{p}{1-p} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود فرمول‌ها با *M/M/1* در یک ضریب $\frac{1+C_V^2}{2}$ تفاوت دارند و تنها به میانگین و واریانس توزیع نیاز داریم.

مثال: در صف *M/M/1* و *M/D/1* مقادیر *W,L* را حساب نمائید:

$$M/M/1 =$$
$$V[s] = E[s]^2 \Rightarrow C_V^2 = 1$$
$$E[N] = L = p + \frac{p^2}{1-p} = \frac{p}{1-p}$$
$$E[w] = w(1 + \frac{p}{1-p})E[s] = \frac{1}{1-p} E[s]$$

$$M/D/1$$
$$V[s] = 0 \Rightarrow C_V^2 = 0$$
$$L = p + 1/2 \frac{p^2}{1-p}$$
$$w = (1 + 1/2 \frac{p}{1-p}).E[s]$$

3. یافتن توزیع طول صف در *M/G/1*

تعریف: با داشتن CTMC $\{x(t)\ , t \geq 0\}$ یک فرآیند گسسته $\{x_n\ ; n = 0,1,2,\ldots\}$ قابل تعریف است که نمایانگر حالات CTMC در مقاطع زمانی تغییر حالات آن می‌باشد. X_n حالت سیستم CTMC بعد از n تغییر است. به این فرآیند زنجیره مارکوف محاطی[1] گویند.

زنجیره مارکوف محاطی دارای احتمالات حالات پایدار منحصر به فرد است و اگر برگشت‌پذیر مثبت و کاهش ناپذیر باشد CTMC نیز دارای این خواص خواهد بود.

[1] Embedded Markov chain (EMC)

4. روش زنجیره مارکوف محاطی

با در نظر گرفتن صفی که پشت سر یک خروجی باقی می‌ماند (افراد داخل سیستم در مقاطع زمانی خروج مشتری از سیستم)، یک زنجیره مارکوفی محاطی خواهیم داشت. برای این سیستم علایم ذیل قابل تعریف هستند:

- N_{-}^{*} = طول صف درست قبل از ورود یک مشتری (از دید یک مشتری ورودی)،
- N_{+}^{*} = طول صف درست قبل از خروج یک مشتری (از دید یک مشتری خروجی)،
- N = طول صف در یک لحظه دلخواه.

با توجه به خاصیت PASTA فرآیندهای پواسون می‌دانیم که $N_{-}^{*} \sim N$، و برای هر سیستمی که ورودی و خروجی تکی دارند داریم: $N_{+}^{*} \sim N_{-}^{*}$ (خاصیت level Crossing). در نتیجه: $N_{+}^{*} \sim N$ است. بنابراین برای یافتن توزیع N کافی است توزیع لحظات زمانی خروجی مشتریان را محاسبه نماییم. در ادامه جهت اختصار N_{+}^{*} را با N نشان می‌دهیم و نیز تعریف می‌کنیم:

- N_k = طول صف بعد از خروج k امین مشتری،
- V_k= تعداد مشتریان جدیدی که در طی زمان سرویس مشتری k ام وارد شده‌اند.

قضیه: فرآیند زمان گسسته N_t یک زنجیره مارکوف غیر از تولد- مرگ می‌سازد.

اثبات: با داشتن N_k، N_{k+1} را می‌توان بر اساس آن و متغیر تصادفی V_{k+1} که مستقل از N_k و تاریخچه آن است بیان کرد:

$$N_{K+1} = \begin{cases} N_K - 1 + V_{K+1}; N_K \geq 1 \\ V_{K+1} \quad ; N_K = 0 \end{cases} \qquad (= N_K + V_{K+1})$$

اگر $N_K \geq 1$ باشد، درست در لحظهٔ خروج مشتری k ، مشتری k+1 ام که در صف است وارد سرویس می‌گردد. بعد از خروج مشتری k+1 ام یکی از طول صف کم می‌گردد. در طول سرویس مشتری k+1 ام V_{k+0} مشتری نیز وارد صف شده‌اند.

اگر $N_K=0$ باشد، مشتری k+1 ام صف خالی در پشت خود باقی می‌گذارد. پس از ورود مشتری k+1 ام طول صف یکی افزایش و پس از خروج آن نیز یکی کاهش می‌یابد. بنابراین صف تنها از مشتریانی که در طول سرویس مشتری k+1 ام وارد شده‌اند تشکیل خواهد شد. چون زمان‌های سرویس مستقل از هم بوده و فرآیند ورودی پواسون است، V_k ها نیز از یکدیگر مستقل بوده و بعلاوه V_{k+0} از فرآیند طول صف قبل از خروج مشتری k+1 ام (یعنی N_K) و مقادیر قبلی آن مستقل است. در نتیجه ویژگی احتمالی N_{k+1} به N_K بسگی دارد نه به مقادیر قبلی آن.

- **تعریف**:

$$\hat{N}_k=(N_k-1)^+=\begin{cases} N_k-1 & , \quad N_k\geq 1 \\ N_k(=0) & , \quad N_k=0 \end{cases}$$

در نتیجه $N_{k+1}=\hat{N}_k+V_{k+1}$ یعنی گام‌های فرآیند رو به جلو مقادیر دلخواه می‌گیرند ولیکن گام‌های رو به عقل یک مرحله‌ای هستند. در حالت تعادل متغیرهای N_K و N_{k+1} و غیره توزیع یکسان دارند (و نیز $V_k,\hat{N}_k$) بنابراین رابطه فوق را به صورت $N=\hat{N}+V$ می‌نویسیم. به دلیل این‌که V و $\hat{N}$ مستقل هستند داریم:

$$G_N(z)=G_{\hat{N}}(z)\ \ G_V(z)$$

حال باید توابع $G_V(z),G_{\hat{N}}(z)$ را محاسبه نماییم:

$$G_{\hat{N}}(z)=E[z^{\hat{N}}]=z^0 \qquad \underbrace{p\{\hat{N}=0\}}_{p\{N=0\}+p\{N=1\}}+\sum_{i=1}^{\infty}z^i\ \underbrace{p\{\hat{N}=i\}}_{p\{\hat{N}=i+1\}}=$$

$$p\{N=0\}+\frac{1}{z}\sum_{i=1}^{\infty}z^i p\{N=i\}=\underbrace{p\{N=0\}}_{1-\rho}(1-\frac{1}{z})+\frac{1}{z}\sum_{i=1}^{\infty}z^i\ \underbrace{p\{N=i\}}_{G_N(z)}$$

$$\Rightarrow G_{\hat{N}}(z)=\frac{G_N(z)-(1-p)\ \ (1-z)}{z}\quad , \quad p=\lambda E[s]$$

X را یک متغیر تصادفی دلخواه نماینگر یک فاصله زمانی در نظر بگیرید. به‌دنبال یافتن توزیع تعداد ورودی، K، از یک فرآیند پواسون (با چگالی λ) در طی زمان x هستیم (به ویژه $G_k(z)$).

$$G_k(z) = E[z^k] = E[\underbrace{E[z^k]}_{k\sim poisson(\lambda x)}] = E[e^{-(1-z)\lambda x}]$$
$$= X^*((1-z)\lambda)$$
$$= X^*(s) = E[e^{-sx}]$$

تعریف X^*:

حال با توجه به این‌که فاصله زمانی مورد نظر ما زمان سرویس یک مشتری است داریم:

$$G_V(z) = S^*((1-z)\lambda)$$

5. تفسیر $G_k(z)$ با روش Collective Marks

$G_k(z)$ احتمال آن است که هیچ کدام از k ورودی در طی فاصله X علامت نخورند چنانچه هر ورودی با احتمال 1-z و مستقل از دیگری شانس علامت خوردن داشته باشد. فرآیند علامت زدن که در آن به‌طور تصادفی از یک فرآیند پواسون (ورودی‌ها) یک انتخاب صورت می‌گیرد تشکیل یک فرآیند پواسون با چگالی $\lambda(1-z)$ می‌دهد.

- تفسیر تبدیل لاپلاس با روش Collective Marks: $X^*(s)$ احتمال آن است که در فاصله زمانی X از فرآیند پواسون با چگالی s ورودی نداشته باشیم:

x $X^*(s) = E[e^{-sx}] = E[p\{$ عدم ورودی در فاصله $| X\}] = p\{$هیچ ورودی در فاصله$\}$

اگر چگالی فرآیند علامت زنی $\lambda(1-z)$ باشد، احتمال علامت نخوردن $X^*((1-z)\lambda)$ است.

بنابراین در این مقطع با کنار هم قرار دادن نتایج داریم:

$$G_N(z) = G_{\hat{N}}(z).G_V(z) = \frac{G_N(z)-(1-p)(1-z)}{z}.S^*((1-z)\lambda)$$
$$\Rightarrow G_N(z) = \frac{(1-p)(1-z)}{S^*((1-z)\lambda)-z}.S^*((1-z)\lambda)$$
$$G_N(z) = \frac{(1-p)(1-z)}{1-z/S^*((1-z)\lambda)}$$

مثال: در صف *M/M/1* داریم:

$$S \sim E \times p(\mu) \Rightarrow S^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$\Rightarrow S^*((1-z)\lambda) = \frac{\mu}{(1-z)\lambda+\mu} = \frac{1}{(1-z)p+1} \qquad , p = \lambda/\mu$$

$$G_N(z) = \frac{(1-p)(1-z)}{1-z[((1-z)p+1]} = \frac{(1-p)(1-z)}{(1-z)(1-pz)} = \frac{1-p}{1-pz}$$

$$= (1-p)(1+(pz)+(pz)^2+....)$$

که توزیع صف *M/M/1* را به‌دست می‌دهد.

6. یافتن توزیع زمان اقامت در سیستم صف *M/G/1*

بر اساس اصول استفاده شده در یافتن توزیع طول صف می‌توان نوشت:

$$G_N(t) = W^*((1-z)\lambda)$$

W^* تبدیل لاپلاس زمان اقامت در سیستم است.

- نکته: با مشتق‌گیری از رابطه فوق و ارزیابی آن در $t=1$ داریم:

$$G'_N(1) = E[N] = -\lambda W^{*\prime} = \lambda E[w]$$

که همان نتیجه مورد انتظار از قانون لیتل است، بنابراین داریم:

$$W^*((1-z)\lambda) = \frac{(1-p)(1-z)}{S^*((1-z)\lambda)-z} \quad S^*((1-z)\lambda)$$

z یک متغیر آزاد است و با تعریف $S(1-z)\lambda$ خواهیم داشت $z = 1-\frac{s}{\lambda}$.

فرمول تبدیل P-K برای زمان اقامت عبارتست از:

$$W^*(S) = \frac{(1-p)s}{S-\lambda+\lambda S^*(s)} \quad S^*(s)$$

مثال: در صف *M/M/1* داریم:

$$S' \sim E \times p(\mu) \Rightarrow S^*(s) = \frac{\mu}{\mu + s}$$

$$T^*(s) = \frac{(1-p)s}{s - \lambda + \lambda \frac{\mu}{s+\mu}} \cdot \frac{\mu}{s+\mu} = \frac{\mu - \lambda}{s + (\mu - \lambda)} \Rightarrow W \sim E \times p(\mu - \lambda)$$

- یافتن توزیع زمان انتظار در صف (w_q) :

در حالت کلی داریم:	$w = w_q + s$= زمان سرویس + زمان انتظار

چون S , w_q مستقل از هم می‌باشند داریم: $W^*(s) = W^*_q(s).S^*(s)$ در نتیجه فرمول تبدیل p-k برای زمان انتظار در صف به صورت ذیل خواهد بود:

$$p = \lambda E[s] \qquad W^*_q(s) = \frac{(1-p)s}{s - \lambda + \lambda S^*(s)}$$

عبارت فوق را به شکل دیگری نیز می‌توان نوشت: ابتدا عبارت سمت راست را به شکل معادل دیگری می‌نویسیم:

$$W^*_q(s) = \frac{1-p}{1 - p\frac{1 - S^*(s)}{sE[S]}}$$

و نیز می‌توان نشان داد که زمان باقیمانده از سرویس (R) به شرط آن‌که یک مشتری در سرویس باشد دارای تابع چگالی زیر است:

$$f_R(t) = \frac{1 - F_s(t)}{E[s]} \rightarrow R^*(s) = \frac{1 - S^*(s)}{sE[S]}$$

در نتیجه رابطه جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$W^*_q(s) = \frac{1-p}{1 - pR^*(s)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)\rho^n R^*(s)^n$$

به عبارت دیگر زمان انتظار مشتریان بر اساس مقدار کار باقیمانده (زمان انتظار مجازی) بیان شده است.

7. سیستم صف *G/M/1*

در این سیستم زمان‌های ما بین دو ورود متوالی از توزیع یکسان و مستقل از هم پیروی می‌کنند که با B(t) نشان می‌دهیم و میانگین زمان بین دو ورود $\frac{1}{\lambda}$ است. زمان‌های سرویس نیز توزیع‌های مستقل از هم نمایی با میانگین زمان سرویس $\frac{1}{\mu}$ است. فاکتور بهره‌وری $\rho<1$ تعریف می‌شود. اگر B* (s) تبدیل لاپلاس توزیع زمان‌های بین ورود مشتریان باشد، $x<1$ را جواب منحصر به فرد معادله $x=B^*(\mu(1-n))$ تعریف می‌کنیم. می‌توان نشان داد که:

$$p\{N=K\}=\begin{cases}1-\rho & k=0\\ \rho x^{k-1}(1-x) & k=1,2,.....\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$L=\frac{\rho}{1-x} \quad , \quad W=\frac{1}{\mu(1-n)}$$

تابع توزیع تجمعی متغیر W در حالت پایدار نیز برابر $F_{\omega}(t)\begin{cases}0 & (t\leq 0)\\ 1-e^{-\mu(1-n)t} & (t>0)\end{cases}$ است.

مثال: سیستم *M/M/1* را در نظر بگیرید که برای آن داریم $B(s)=\frac{\lambda}{s+\lambda}$. به‌دنبال x هستیم که در رابطه زیر صدق کند $X=B^*(\mu(1-x))=\frac{\lambda}{\lambda(1-x)+\lambda}$. در نتیجه: $(x-1)(\mu x-\lambda)=0$ است. از دو جواب ممکن $x=1$ غیر ممکن و $x=\rho$ قابل قبول خواهد بود.

مثال: سیستم $E_2/M/1$ را در نظر بگیرید که زمان‌های ما بین ورود از توزیع ارلنگ-2 پیروی می‌کنند، در این سیستم داریم:

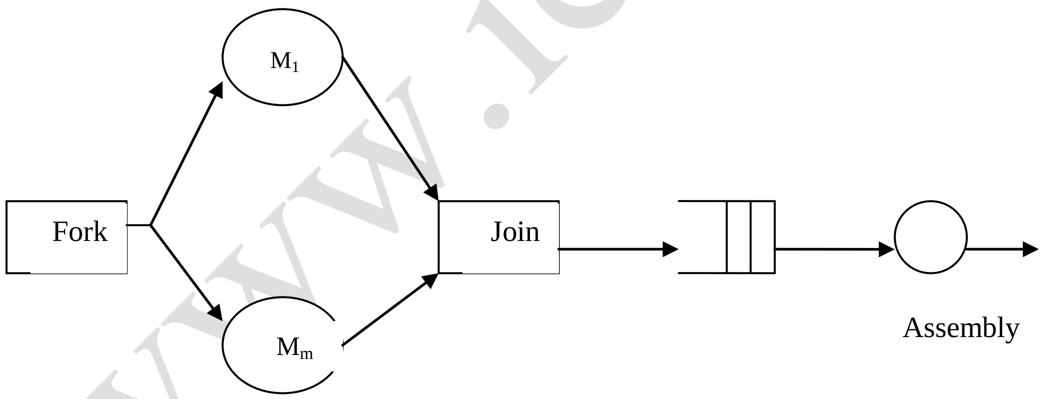
$$B^*(s) = \frac{2\mu^2}{(s+\mu)(s+2\mu)}$$

از رابطه x داریم:

$$X = \frac{2\mu^2}{(\mu-\mu_n+\mu)(\mu-\mu_n+2\mu)}$$

در ادامه حل به معادله درجه سوم $x^3-5x^2+6x-2=0$ می‌رسیم. این معادله دارای ریشه‌های $x=1$, $x=2+\sqrt{2}$, $x=2-\sqrt{2}$ است. واضح است که $x=2-\sqrt{2}$ تنها ریشه قابل قبول این معادله بوده و بر اساس آن معیارهای کارایی سیستم قابل محاسبه است.

مثال: سیستم صف زیر را در نظر بگیرید.



ایستگاه کاری مونتاژ، m قطعه را بر هم سوار کرده و به صورت محصول نهایی از سیستم خارج می‌کند. این m قطعه از مرکز ماشین کاری می‌آیند و در پشت ایستگاه مونتاژ جمع می‌شوند. در مرکز ماشین کاری m ماشین وجود دارد که از m قطعه خام که همیشه در دسترس هستند استفاده می‌کند. زمان مونتاژ $\frac{1}{\mu}$ و نمایی است. در لحظه‌ای‌که تمام m ماشین کار خود را به پایان ببرند همگی به محل انتظار حمل می‌شوند و مرکز ماشین کاری عملیات m قطعه بعدی را هم‌زمان شروع

می‌کند. زمان پروسه ماشین‌ها نمایی مستقل از هم با نرخ‌های $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ است. هم‌زمان بدون شروع کار m ماشین حتی اگر بعضی از آن‌ها زودتر کار خود را تمام کنند با خط‌چین و در باکس Fork-join نشان داده شده است. واضح است که با این فرض زمان‌های ما بین ورود قطعات به ایستگاه مونتاژ متغیر تصادفی $\max 1 \le i < m \quad E \times p(\mu_i)$ است. بنابراین یک صف *G/M/1* خواهیم داشت.

8. سیستم صف *G/G/1*

نتایج بسیار کمی برای این سیستم وجود دارد. تنها حدهایی بر روی مقادیر متوسط در حالت پایدار یافت شده است.

$$L \le p + \frac{\lambda^2 (V_a + V_s)}{2(1-p)}$$

$$W \le E(t_s) + \frac{\lambda (Va + V_s)}{2(1-p)}$$

t_a , t_s زمان‌های ما بین دو ورودی و زمان سرویس بوده و V_a , V_s نیز واریانس این زمان‌ها می‌باشند. در این رابطه $p = \dfrac{E[t_s]}{E[t_a]}$ است.