بنام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی – واحد نجف آباد

جزوه درس پردازش سیگنالهای دیجیتال (DSP)

مدرس: دکترسعید نصری

نیمسال اول ۹۵-۹۴

موضوع: جلسه‌ی اول 1

پردازش سیگنال دیجیتال: DSP Digital signal processing

مرجع درسی: Discrete time signal processing. By openheim & schafer

چاپ سوم پردازش سیگنال‌های گسسته در زمان مترجم: محمود دیانی ۲ جلد 2010

سایر مراجع: Digital signal processing using Mathlab - Proakis 3rd Edition

عناوین فصل‌ها:

مقدمه:

فصل ۱: سیگنال‌ها و سیستم‌های گسسته در زمان

فصل ۲: تبدیل فوریه زمان گسسته DTFT

فصل ۳: تبدیل Z و خواص آن - تبدیل لاپلاس گسسته

فصل ۴: نمونه برداری از سیگنال‌های پیوسته در زمان (با استفاده از تئوری نایکوئیست)

فصل ۵: تحلیل تبدیلی سیستم‌های LTI

فصل ۶: ساختارهای سیستم‌های گسسته در زمان (فیلترهای IIR - FIR)

فصل ۷: طراحی فیلترهای دیجیتال

فصل ۸: سری فوریه گسسته DFS - تبدیل فوریه گسسته DFT

فصل ۹: محاسبه تبدیل فوریه گسسته (محاسبه DFT) الگوریتم FFT

مقدمه: این درس در ادامه‌ی درس تجزیه و تحلیل است. تفاوت این است که در اینجا سیگنال‌های دیجیتال است ولی در تجزیه سیگنال‌ها آنالوگ بوده است. این درس در رشته‌های برق دارای کاربرد بسیار زیادی است.

فصل اول: سیگنالها و سیستمهای گسسته در زمان

سیگنال چیست؟ تابعی که حاوی اطلاعات باشد را سیگنال می‌نامیم

اطلاعات چیست؟ چیزی است که گیرنده علاقمند به دریافت آن است

سیگنال می‌تواند تابعی از یک یا چند متغیر مستقل باشد که با تغییر هر کدام اطلاعات عوض می‌شود مثلاً زمان یکی از متغیرهاست وقتی می‌گوییم درجه حرارت محیط با زمان تغییر می‌کند متغیر مستقل زمان می‌باشد البته می‌تواند متغیر مکان باشد.

برای مثال در تصویر متغیر مستقل مکان است از این به بعد ممکن است به جای لفظ متغیر مستقل از اصطلاح زمان استفاده کنیم که ضرورتاً ممکن است زمان نباشد همچنین متغیرها می‌توانند یک بعدی یا چند بعدی باشند برای مثال در پردازش تصویر مکان به صورت دو بعدی می‌باشد [x , y] سطر ستون مثل یک ماتریس که سطر و ستون دارد ولی تاکید ما در این درس برای متغیرهای یک بعدی است.

زمان یا متغیر مستقل خودش می‌تواند هم به صورت پیوسته continuous time و هم به صورت گسسته Discontinuous time تغییر کند که در این درس به صورت گسسته بررسی می‌شود. البته این به معنای آن نیست که حتماً عدد صحیح باشد به جای یک مقدار جلو رفتن از جلو می‌رود تا وقت آن با لااقل باشد درنگاشتی می‌کنیم به اعداد صحیح)

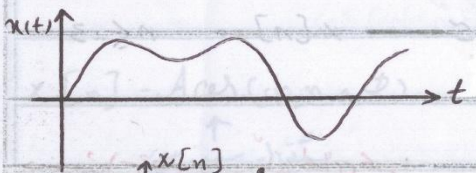
مثلاً ۱٫۷ ثانیه و ۱٫۹ ثانیه نیز گسسته اند ولی برای سادگی قرارداد می‌کنیم که این زمانها را با عدد صحیح نمایش دهیم مثلاً زمان اول را زمان ۱ درنظر می‌گیریم:

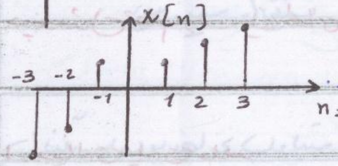
$x[t_n] \rightarrow x[۱٫۷ \text{ ثانیه}] \rightarrow t_n \triangleq n \quad x[n] = x[1] = x[۱٫۷ \text{ ثانیه}]$

در این درس از علامت پردازش برای سیگنالهای زمان پیوسته و از کروشه برای سیگنالهای زمان گسسته استفاده می کنیم.

این سیگنالهای زمان گسسته چطور به وجود می آید؟ یکی از راههای بدست آوردن این نوع سیگنالها نمونه برداری است. اگر چه تنها راه بدست آوردن سیگنالهای زمان گسسته نمونه برداری نیست در حالی که لفظ دنباله یا رشته sequence برای اینگونه از سیگنالها استفاده می کنیم در موقع نمونه برداری با پریود تناوب T_0 می باشد که به ازای nهای صحیح هر T_0 ثانیه یک نمونه بدست می آید $t_n = nT_0$ و این نمونه های دنبال هم $x[n]$ را تشکیل می دهند.

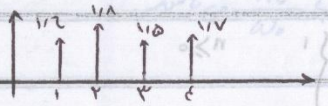
دامنه ی سیگنال: دامنه ی یک سیگنال می تواند گسسته یا پیوسته باشد بنابراین چهار حالت به وجود می آید که درک این چهار حالت مهم است: ۱. سیگنال آنالوگ: سیگنالی است که دامنه و زمان هر دو پیوسته هستند.





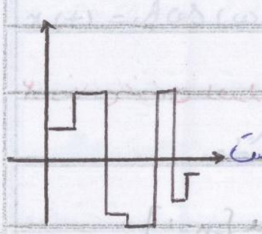
۲. سیگنال دیجیتال: سیگنالی که دامنه و زمان هر دو گسسته باشند.

در این درس با این نوع سیگنالها سروکار داریم.



۳. سیگنال گسسته: سیگنالی با دامنه ی پیوسته و زمان گسسته

بعداً آن را تبدیل به حالت ۲ می کنیم.

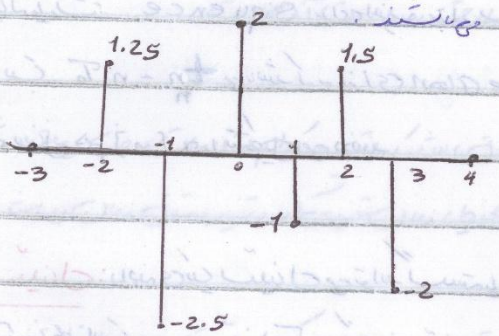


۴. زمان پیوسته و دامنه گسسته است) مثل موج پله ای که دامنه ی آن گسسته است

در حال حاضر روی سیگنالهای زمان گسسته یعنی نوع سوم بحث می کنیم که در نهایت صفر به همان سیگنال دیجیتال می شود.

پردازش: Processing عملیاتی مانند مدولاسیون تقویت کردن فیلترهای پیش تأکید و جبران تأکید و غیره همگی مثالهایی از پردازش می باشند که در سیستم های مخابراتی امری اجتناب ناپذیر است. آن عملیاتی که سیگنال را به صورت مفید یا قابل بازیابی کردن (قابل استفاده) برای آن کاربرد خاص درآورد (چون مخابراتی است کاربرد ۱. ارسال ۲. دریافت) گروه مهمی از سیگنالهای گسسته سیستم های خطی و تغییر ناپذیر با زمان یا LTI می باشند.

مثالی از سیگنال زمان گسسته:



$x[1] = -1$

$x[2] = 1.5$

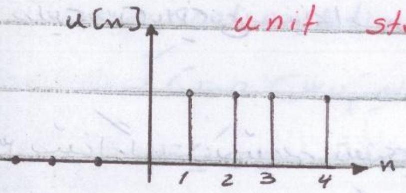
$x[1.7] =$ نداریم

$x[4] = 0$

$x[n] = 0 \quad n \geq 6 \qquad x[-2] = 1.25 \qquad x[n] = 0 \quad n \leq -3$

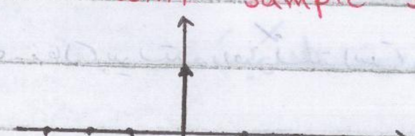
چند مثال مهم از سیگنالهای مهم:

۱- دنباله ی پله ی واحد unit step sequence



$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

۲- دنباله ی نمونه ی واحد (دنباله ی ضربه واحد) unit Sample Sequence



$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

تفاوت با حالت آنالوگ در این است که قبلاً مشتق می گرفتیم اما الان تفاضل می گیریم

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[\underbrace{k}_{n-k=k'}] \qquad u[n] = \sum_{k'=+\infty}^{0} \delta[n-k']$$

در اینجا n دارد جمع دسیگما شده است

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt$$

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

شبیه انتگرال برونکه

در اینجا n وارد آرگومان شده است.

۳- دنباله ی نمایی حقیقی: a یک عدد حقیقی است

$$x[n] = a^n$$

۴- دنباله ی نمایی مختلط و دنباله ی سینوسی Sino Soid Sequence

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

سیگنال سینوسی

در اینجا برخلاف سیگنالهای پیوسته یک سیگنال سینوسی همواره متناوب نخواهد بود در سیگنال سینوسی پیوسته دیدیم که سیگنال همواره متناوب با دوره تناوب $\frac{2\pi}{\omega_0}$ می باشد.

اما در اینجا ضرورتا همیشه متناوب نخواهد بود $\qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

دنباله ی متناوب: دنباله ی $x[n]$ را متناوب با دوره ی تناوب N می نامیم هرگاه.

$$x[n] = x[n+N] \quad \forall N$$

حداقل N را دوره ی تناوب اصلی گوئیم و N باید یک عدد صحیح باشد زیرا آرگومانها باید عدد صحیح باشند

به همین دلیل بعضی از سیگنالهای گسسته متناوب نیستند زیرا $N=\frac{2\pi}{\omega_0}$ و معلوم نیست که N عدد صحیح باشد.

$$x[n]=A\cos(\omega_0 n+\Phi)=A\cos(\omega_0(n+N)+\Phi)=A\cos(\omega_0 n+\omega_0 N+\Phi)$$

$$\omega_0 N=k_0 2\pi \rightarrow N=\frac{2k\pi}{\omega_0}$$ دوره تناوب اصلی ← $k=1$ $\quad N=\frac{2\pi}{\omega_0}$

بنابراین باید k طوری تعیین شود که N عدد صحیح گردد که در بعضی از روابط ممکن است این طور نشود

مثلاً وقتی که $\frac{2\pi}{\omega_0}$ یک عدد گویا نباشد (اصم یا گنگ باشد)

مثال: $\omega_0=1$ $\quad \frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{1}$ ← عدد گنگ

$\omega_0=\frac{2\pi}{7}$ $\quad \frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}}=7$ ← عدد صحیح

پس شرط لازم و کافی برای آنکه یک دنباله سینوسی متناوب باشد آن است که $\frac{2\pi}{\omega_0}$ یک عدد صحیح یا لااقل گویا باشد.

نکته: اولین تفاوت دنباله‌های سینوسی پیوسته و گسسته متناوب بودن است.

دومین تفاوت: در پیوسته $\cos\omega_0 t$ ← ω_0 افزایش ← T کاهش

یعنی دوره تناوب کم شود فرکانس افزایش می‌یابد.

اما در گسسته چنین نیست اگر متناوب باشد دوره تناوب آن 2π است. اگر ω_0 به اندازه‌ی 2π افزایش یابد دوباره به همان سیگنال قبلی می‌رسیم. در حالت پیوسته با افزایش ω_0 سیگنال فشرده می‌شود. اما در اینجا به علت اینکه n یک عدد صحیح است سیگنال تکراری می‌شود. اما در اینجا تا π سیگنال افزایش یافته اما از π به بعد دوباره کاهش می‌یابد.

در پیوسته دیدیم که مثلاً در سیگنال $x(t) = \cos \omega_0 t$ اگر ω_0 افزایش یابد آنگاه T_0 کاهش می‌یابد بنابراین تفاوتی بین نوسان و پریودیک باشد. ولی آیا در زمان گسسته هم همین طور است. جواب خیر است. زیرا در آنجا T یک عدد صحیح نبود ولی در اینجا N عدد صحیح است.

مثال: $x[n] = \cos w_0 n$ اگر $w_0 \to w_0 + 2\pi$

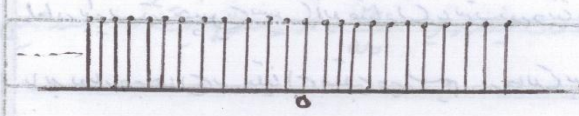
$$\cos(\omega_0 + 2\pi)n = \cos(\omega_0 n + 2\pi n) = \cos \omega_0 n$$

پس با افزایش ω_0 نوسانات افزایش نمی‌یابد بنابراین دنباله‌های با فرکانس‌های متفاوت می‌توانند نشان دهنده‌ی یک سیگنال یا دنباله باشند پس کافی است آن را در یک دوره‌ی با فاصله‌ی 2π بیان نمود.

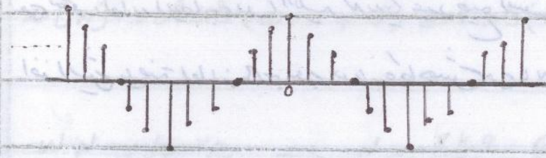
نکته: در پیوسته $0 < \omega_0 < \infty$ تغییر می‌کند اما در گسسته $-\pi < \omega_0 < \pi$ می‌تواند تغییر کند

در سیگنالهای متناوب گسسته با افزایش ω_0 از 0 تا π نوسان افزایش می‌یابد از π تا 2π کاهش می‌یابد تا دوباره به همان سیگنال برسد.

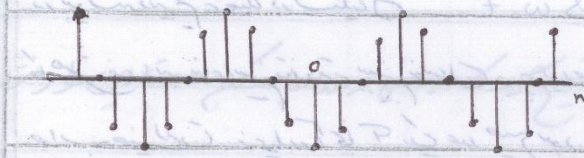
مثال ۱-۲ (فصل ۲ شماره ۱) سینوسی های ص ۱۳ مطالعه شود.



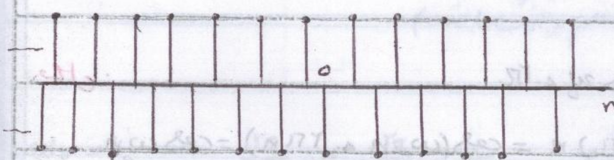
الف) $\omega_0 = 0$ یا $\omega_0 = 2\pi$



ب) $\omega_0 = \pi/8$ یا $\omega_0 = \frac{15\pi}{8}$



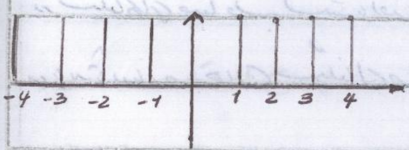
ج) $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ یا $\omega_0 = \frac{7\pi}{4}$



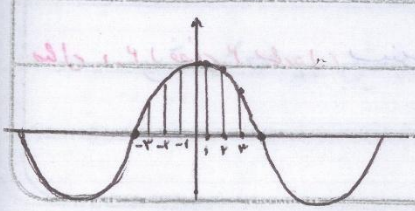
د) $\omega_0 = \pi$

شکل ۲-۵: این شکل $\cos \omega_0 n$ به ازای چند مقدار ω_0 است از صفر تا π در بخشهای الف تا د نوسانات رشته سیگنال تندتر می‌شود با افزایش ω_0 از π تا 2π شکل د تا الف نوسانات کند تر می‌شود.

در این مثال ملاحظه می‌شود که با افزایش ω_0 فرکانس تا مقدار $\omega_0 = \pi$ افزایش می‌یابد و از π تا 2π دوباره شروع به کاهش می‌نماید. در اینجا $\omega_0 = 2\pi/8$ رسم شده است که بعد از مقدار π است.



$x[n] = \cos \omega_0 n$ $\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos 2\pi = 1 \end{cases}$ $\omega_0 = 0$ یا $\omega_0 = 2\pi$



یک π اضافه شده

$\omega_0 = \frac{\pi}{8}$ یا $\cos \frac{\pi}{8}$ یا $\omega_0 = \frac{15\pi}{8}$ $\cos \frac{15\pi}{8}$

موضوع: جلسه‌ی دوم 9 تاریخ: / /

مثال ۲-۱: سینوسی‌های گسسته در زمان $x[n] = \cos(\pi n/4)$

دوره تناوب این سیگنال $N = 8$ است. $\omega_0 N = 2k\pi \qquad N\pi/4 = 2\pi k$

به ازای $k = 1$ دوره تناوب اصلی پیدا می‌شود که در اینجا ۸ است. $k = 1 \qquad N = 8$

اگر $x[n + \overset{N}{8}]$ را بدست آوریم خواهیم داشت:

$$x[n+\overset{N}{8}] = \cos(\pi(n+8)/4) = \cos(n\pi/4 + 2\pi) = \cos(n\pi/4) = x[n]$$

یک تفاوت عمده‌ی سینوسی‌های گسسته زمان این بود که با افزایش دوره‌ی تناوب تا یک جایی افزایش فرکانس داشتیم و از آن جا به بعد فرکانس کاهش می‌یابد.

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان Linear Time Invariant (LTI)

اگر یک سیستم داشته باشیم که ورودی گسسته داشته باشد و دارای یک تابع تبدیل باشد خروجی آن $y[n]$ می‌شود.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T \text{ تابع تبدیل}} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

یک دسته از تبدیلات خطی هستند که در سیستم‌های خطی این نوع تبدیلات وجود دارند.

سیستم‌های با تبدیل خطی: Linear Transformation

سیستمی را با تبدیل خطی می‌گوییم که دارای دو شرط زیر باشد:

موضوع:	تاریخ:	/	/	۱۰

۱- ویژگی جمع‌پذیری: Sumable

$$T\{x_1[n]+x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$$

۲- ویژگی همگنی: a = عدد اسکالر

$$T\{a\,x[n]\} = a\,T\{x[n]\}$$

مقیاس‌پذیری: اگر ورودی در یک اسکالر ضرب شود پاسخ هم در آن ضرب شود.

این دو شرط را می‌توان در یک شرط خلاصه کرد. با ترکیب دو شرط فوق می‌توان گفت شرط لازم و کافی برای خطی بودن یک سیستم آن است که پاسخ به ترکیب خطی از ورودی‌ها، ترکیب خطی از پاسخ‌ها با همان ضرایب باشد.

$$T\{a\,x_1[n] + b\,x_2[n]\} = a\,T\,x_1[n] + b\,T\,x_2[n]$$

به طور خلاصه شده: $x_1 \to y_1$ و $x_2 \to y_2$ $\quad ax_1 + bx_2 \to ay_1 + by_2$

$x[0]$ باید صفر باشد یعنی از مبدأ بگذرد.

مثال ۲-۵: سیستم انباره:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

مهم

این سیستم ورودی‌ها را می‌گیرد و با هم جمع می‌کند. تابع پله هم همین کار را می‌کرد که مقادیر قبلی را با هم جمع می‌کرد. (رابطه ورودی و خروجی را از $-\infty$ تا حال جمع می‌کند)

مثل خازنی که از قبل جمع شده است و شارژ شده. این به معنای حافظه‌دار بودن است.

حال اگر بخواهیم ببینیم خطی است یا خیر:

$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$ $\qquad$ $y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$

با فرض اینکه ورودی جدید: $x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} (a x_1[k] + b x_2[k])$$

$$= a \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] = a y_1[n] + b y_2[n]$$ = سیستم خطی است.

بنابراین سیستم انباره یک سیستم خطی است

مثالی از یک سیستم غیرخطی: برای اثبات غیرخطی بودن کافی است که یک مثال نقض بیاوریم.

$w[n] = \log_{10}(|x(n)|)$ $\qquad$ $x_1[n] = 1$ $\qquad$ $x_2[n] = 10$

$x_1[n] + x_2[n] = 11$ $\qquad$ $\log_{10}(1+10) = \log_{10} 11$

این دو با هم مخالف هستند. $\times$

$$\log_{10} 1 + \log_{10} 10 = 1$$

Time Invariant sys: * خاصیت های سیستم های مستقل از زمان:

اگر در یک سیستم ورودی را به اندازه ی T شیفت دهیم خروجی هم باید به اندازه ی T شیفت یابد.

بنابراین سیستمی مستقل از زمان است که مستقل از جابه جایی یا شیفت باشد. (LSI)

سیستم در صورتی مستقل از زمان است که به ازای هر مقدار n_0 دلخواهی ورودی

$$x_1[n] = x[n-n_0]$$

خروجی $y_1[n] = y[n-n_0]$ را ایجاد کند.

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$x_1[n] = x[n-n_0] \rightarrow y_1[n] = y[n-n_0]$$

مثال ۲-۷: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ ← در اینجا n محدود نیست.

$$x[n] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$x_1[n] = x[n-n_0] \rightarrow y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

بنابراین این سیستم مستقل از زمان و تغییرناپذیر با زمان است.

حل کتاب: $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0]$

$$x_1[n] = x[n-n_0]$$

تغییر متغیر: $k_1 \triangleq k - n_0$

$$y_1[n] = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1]$$

از طرفی:

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

در نتیجه سیستم LTI است.

$$y_1[n] = y[n-n_0]$$

۱۲

مثال ۲-۸: سیستم فشرده‌ساز یا کمپرسور: $y[n]=x[Mn]$

در این سیستم در ورودی مضاربی از M را داریم. مضاربی از ۲ یا ۳ یا ... $-\infty<n<\infty$

آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟ اینجا n آرگومان است.

ثابت می‌شود که این سیستم Time Invariant نمی‌باشد. در این سیستم از بعد M تا نمونه $M-1$ نمونه را دور می‌ریزد مثلاً اگر $M=2$ باشد نمونه‌های فرد را دور می‌ریزد و نمونه‌های زوج را نگه می‌دارد در نتیجه حجم کمتری را اشغال می‌کند (حافظه‌ی کامپیوتر را کمتر اشغال می‌کند) که به آن کمپرسور می‌گویند.

$$x[n] \Rightarrow y[n]=x[Mn]$$

$$x_1[n]=x[n-n_0] \rightarrow y_1[n]=x[Mn-n_0]$$

$$\neq$$

$$y[n-n_0]=x[M(n-n_0)]$$

بنابراین سیستم علّی نیست

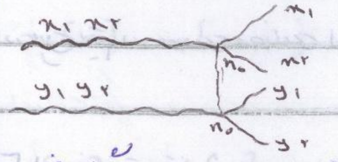
علّی بودن (علّیت) causality: از حال و گذشته تبعیت می‌کند.

خروجی به آینده بستگی ندارد یعنی قدرت پیش‌بینی ندارد.

سیستمی علّی است که به ازای هر مقدار n_0 رشته‌ی خروجی (دنباله) در $n=n_0$ تنها به مقادیر ورودی در $n\le n_0$ بستگی داشته باشد.

یعنی اگر به ازای $n\le n_0$ داشته باشیم $x_1[n]=x_2[n]$ آنگاه در $n\le n_0$ داریم $y_1[n]=y_2[n]$

به معنای آن است که به ازای دو ورودی که مقادیرشان تا $n_0 \geq n$ برابر است باخروجی‌ها نیز باید تا آن زمان برابر باشد



تعبیر مطالب فوق آن است که سیستم پیش بینی کننده نمی باشد یعنی خروجی وابسته به گذشته ورودی بوده و به آینده ورودی بستگی ندارد.

مثال ۲.۲: سیستم تأخیر دهنده‌ی ایده آل: یک سیستم را اینگونه گوئیم که اگر به اندازه‌ی nd شیفت می دهیم

$$x[n] \longrightarrow \boxed{n_d} \longrightarrow y[n] = x[n-n_d]$$

اگر n_d مثبت یا صفر باشد خروجی وابسته به گذشته و حال است پس سیستم علی است.

اگر n_d منفی باشد وابسته به آینده است. خروجی به آینده ورودی بستگی دارد پس سیستم علی نمی باشد

مثال ۳.۲: سیستم میانگین متحرک: برای هر بازه دلخواه می توان میانگین بگیرد.

سیستم میانگین متحرک با رابطه‌ی زیر بیان می شود.

$$y[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

در این سیستم علی بودن بستگی به علامت M_1 و M_2 دارد. برای مثال به ازای $-M_1 \geq 0$ و $M_2 \geq 0$ سیستم علی می باشد در غیر این صورت غیر علی است

مثال ۴.۲: سیستم تفاضلی پیشرو و پسرو: backward & forward

این سیستم تفاضلی پیشرو است forward diffrence

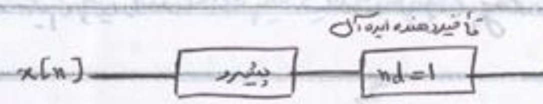
غیر علی است چون به آینده بستگی دارد.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n] = \underbrace{x[n+1]}_{\text{آینده - بعدی}} - \underbrace{x[n]}_{\text{فعلی - حال}}$$

اگر $y[n]$ به صورت مقابل باشد آنگاه سیستم علی نیز است چون که گذشته و حال بستگی دارد بنابراین سیستم علی می باشد ← backward

$$y[n] = \underbrace{x[n]}_{\text{حال}} - \underbrace{x[n-1]}_{\text{قبلی یا گذشته}}$$

نکته: هر وقت خواستیم یک سیستم غیر علی را به علی تبدیل کنیم باید به یک تا خیر دهنده وصل شود. ملاحظه می شود که اگر یک سیستم غیرعلی باشد می توان با یک تاخیر دهنده ی ایده آل مناسب آن را علی نمود.



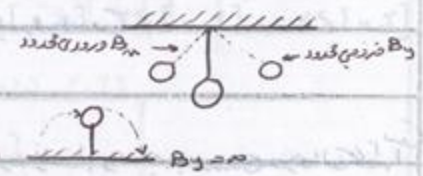
$Z[n] = y[n-1] = x[n] - x[n-1]$ علی است.

$y[n] = x[n+1] - x[n]$

پایداری: Stability یک سیستم را پایدار گویند که به ازای ورودی محدود خروجی محدود بگیریم. سیستم را به لحاظ ورودی محدود - خروجی محدود یا در اختصار (BIBO) پایدار می نامیم اگر و فقط اگر هر دنباله ورودی محدود یک دنباله ی خروجی محدود ایجاد کند: Bounded Input _ Bounded output

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \quad \forall n$$

$$\rightarrow |y[n]| \leq B_y < \infty \quad \forall n$$



مثال ۲-۶: سیستم مربع کننده (Squarer)

$y[n] = (x[n])^2$ ← سیستم مربع کننده Squarer

آیا سیستم مربع کننده پایدار است؟ $x_1[n] \le B_x < \infty$

سیستم پایدار است. $y_1[n] = (x_1[n])^2 = B_x^2 = B_y < \infty$

مثال ۲-۴: آیا این سیستم پایدار است؟ $w[n] = \log_{10}(|x[n]|)$

کافی است یک مثال نقض بیاوریم.

ثابت شد سیستم ناپایدار است. $x[n] = 0 < \infty$ $\quad w[n] = \log_{10}(0) = -\infty$

مثال ۲-۵: آیا سیستم انباره پایدار است؟ $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

کافی است مثال نقض بیاوریم.

$x[n] = u[n] \qquad B_x = 1 < \infty$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] \begin{cases} 0 & n<0 \\ n+1 & n \ge 0 \end{cases} \qquad n+1 \le B_y \le \infty$$

برای تمامی nها رابطه‌ی بالا برقرار نمی باشد پس سیستم ناپایدار است.

* سیستم های بی حافظه: سیستم بی حافظه سیستمی است که خروجی در هر لحظه وابسته به ورودی در همان لحظه است
به عبارت دیگر به گذشته و آینده بستگی نداشته باشد.

مثال: سیستم انباره یک سیستم حافظه دار است. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

سیستم مربع کننده بی حافظه است. $y[n] = (x[n])^2$

سیستم تاخیردهنده حافظه دار است $y[n] = x[n-n_d]$

سیستم میانگین گیر متحرک حافظه دار است. $y[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$

* سیستم‌های LTI :

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y[n] = h[n]$$

پاسخ ضربه

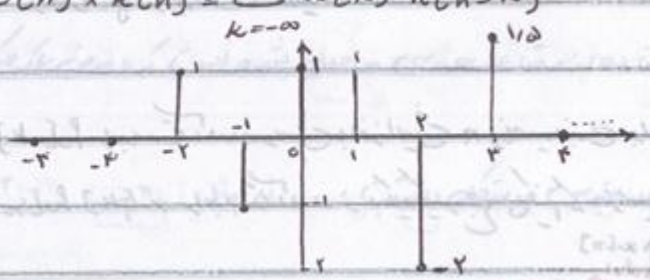
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \qquad y[n] = h_k[n] = h[n-k]$$

کانولوشن ←
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = x[n] * h[n]$$

در سیستم‌های LTI اگر $x[n]$ را داشته باشیم و پاسخ ضربه این سیستم را داشته باشیم

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

مثال:



$$x[n] = 1\delta[n+2] - 1\delta[n+1] - 2\delta[n] + \delta[n-1] - 2\delta[n-2] + 1.5\delta[n-3]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

پس هر سیگنالی را می‌توان به صورت پاسخ ضربه‌های شیفت یافته بنویسیم. حال اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی ضربه را داشته باشیم طبق روابط فوق می‌توانیم پاسخ به هر ورودی دلخواه را نیز داشته باشیم. کافی است ورودی را با پاسخ ضربه کانولوشن نمائیم.

مثال ۲-۱۱: سیستمی با پاسخ ضربه‌ی $h[n] = u[n] - u[n-N]$ را در نظر بگیرید و پاسخ آن را به ورودی $x[n] = a^n u[n]$ را بدست آورید؟

موضوع: جلسه‌ی سوم:　　　۱۸　　　تاریخ: / /

یادآوری: $x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]}_{LTI} \longrightarrow y[n]$

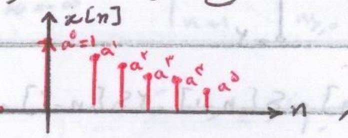
جمع کانولوشن: $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$

مثال: اگر در یک سیستم LTI: $h[n]=u[n]-u[n-N]=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & o.w\end{cases}$

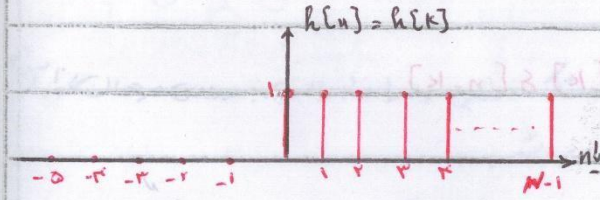
ورودی سیستم عبارت است از: $x[n]=\begin{cases}a^n & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases} \rightarrow x[n]=a^n u[n]$

آنگاه خروجی $y[n]$ را بدست آورید:

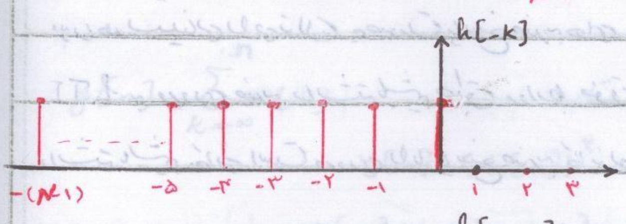
پاسخ: ابتدا $h[-k]$ را بدست آورده و سپس با افزایش n و ناحیه بندی برای نقاط مشابه n حاصلضرب $x[k]h[n-k]$ را بدست آورده و با یکدیگر جمع می‌کنیم که با رسم این کار راحتتر است.



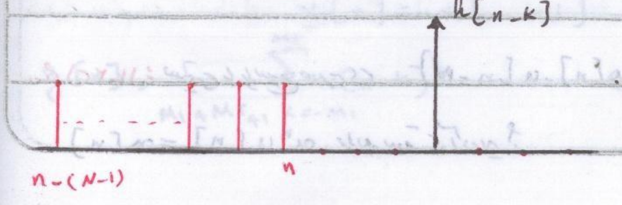
$x[n]$ را رسم می‌کنیم فرض می‌کنیم $0<a<1$ باشد در این صورت نمودار حالت نمایی دارد.



اکنون نمودار $h[n]=h[k]$ را رسم می‌کنیم.

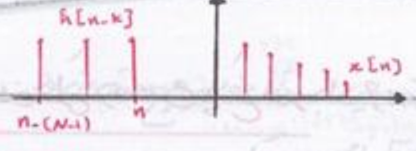


حال نمودار $h[-k]$ را رسم می‌کنیم.



اکنون نمودار $h[-k]$ را به اندازه n شیفت می‌دهیم.

19



ناحیه‌ی اول: اگر n منفی باشد:

$$y[n]=\sum x[k]\,h[n-k]=0$$

ناحیه‌ی دوم: n را حقدر جلو بیاوریم تا یک ناحیه‌ی مشترک با x[n] داشته باشیم.

$$n-(N-1)\leq 0 \qquad 0\leq n\leq N-1$$

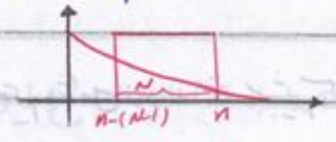
$$y[n]=\sum_{k=0}^{n} a^k u[k]\times h[n-k]=\sum_{k=0}^{n} a^k = 1\cdot\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

جواب بالا با استفاده از قاعده هندسی حاصل شده است که با فرض a کوچکتر از یک، یک قاعده هندسی داریم

یادآوری: دنباله هندسی چه شکلی داشت: $1, q, q^2, q^3, \ldots, q^n \quad |q|<1$

$$S_n=t_1\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad S_\infty=\frac{t_1}{1-q} \Rightarrow y[n]=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

ناحیه‌ی سوم: $n\geq N-1$



$$y[n]=\sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k = a^{n-(N-1)}\frac{1-a^N}{1-a}$$

در نهایت داریم:

$$y[n]=\begin{cases} 0 & n<0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & 0\leq n\leq N-1 \\ a^{n-(N-1)}\left[\dfrac{1-a^N}{1-a}\right] & N-1<n \end{cases}$$

موضوع: ۲۰ تاریخ: / /

ویژگی های سیستم های خطی بر اساس پاسخ ضربه $h[n]$

بایستی ابتدا خواص کانولوشن را بدانیم، چون خواص سیستم‌های LTI بر اساس خواص کانولوشن مطرح می‌شود.

۱- خاصیت جابجایی:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

اثبات:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$n-k \triangleq k'$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h[k']\, x[n-k'] = h[n] * x[n]$$

تعبیر سیستمی: اگر جای پاسخ ضربه و ورودی عوض شود تفاوتی نمی‌کند چون این دو شکل معادل یکدیگر هستند.

$$h[n] \longrightarrow \boxed{x[n]} \longrightarrow y[n]$$

۲- خاصیت شرکت‌پذیری: اگر دو سیستم به شکل زیر داشته باشیم آنگاه:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

اثبات:

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

اثبات به عنوان تمرین کلاس:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n] * h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

تعبیر سیستمی: اگر h_1 و h_2 را از خاصیت جابه‌جایی استفاده کنیم هیچ فرقی نمی‌کند. در اتصال سری سیستم‌های LTI ترتیب قرار گرفتن آنها مهم نیست.

$$y[n]=x[n]*(h_2[n]*h_1[n])=(x[n]*h_2[n])*h_1[n]$$

$x[n] \to \boxed{h_2[n]} \to \boxed{h_1[n]} \to y[n]$ این دو شکل معادل هم هستند.

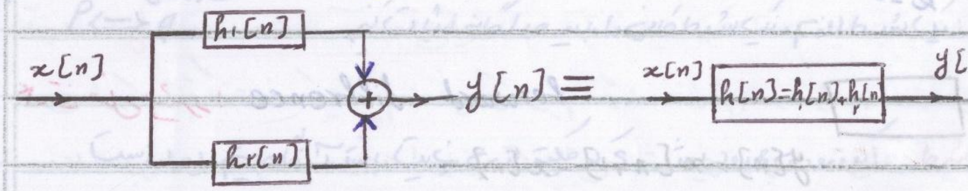
۳- خاصیت توزیع‌پذیری کانولوشن روی جمع:

$$y[n]=x[n]*\{h_1[n]+h_2[n]\}$$

اثبات: تمرین کلاسی

$$=(x[n]*h_1[n])+(x[n]*h_2[n])$$

در سیستم موازی ورودی مشترک است و ضربه‌ها با هم جمع می‌شوند.



پاسخ ضربه‌ی دو سیستم موازی برابر است با حاصل جمع پاسخ ضربه‌های آنها

چند مثال در مورد پاسخ‌های ضربه‌ی سیستم‌های معروف LTI

۱- تأخیردهنده‌ی ایده‌آل «خطی و تغییرناپذیر با زمان» $x[n] \to \boxed{n_d} \to y[n]=x[n-n_d]$

$$\delta[n] \longrightarrow h[n]=\delta[n-n_d]$$

۲- میانگین متحرک:

$$x[n] \to \boxed{\quad} \to y[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

$$\delta[n] \to h[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]$$

$$h[n]=\begin{cases}\frac{1}{M_1+M_2+1} & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0 & o.w\end{cases}$$

۳- انباره:

$$x[n] \to \boxed{\quad} \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$\delta[n] \to h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \qquad h[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0 \\ 0 & n<0\end{cases} \qquad h[n]=u[n]$$

$$h[n]=\sum_{k'=0}^{\infty} \delta[n-k'] \qquad n-k=k'$$

تغییر متغیر را نباید فراموش کرد.

۴- تفاضل پیشرو: forward diffrence

$$x[n] \to \boxed{\quad} \to y[n]=x[n+1]-x[n]$$

$$\delta[n] \to h[n]=\delta[n+1]-\delta[n]$$

۴- تفاضل پسرو: backward diffrence

$$x[n] \to \boxed{\quad} \to y[n]=x[n]-x[n-1]$$

$$\delta[n] \to h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

خواص سیستم‌های LTI براساس پاسخ ضربه:

* پایداری یک سیستم LTI براساس $h[n]$: اگر یک سیستم LTI را داشته باشیم و پاسخ ضربه‌ی آن را به ما بدهند چطور بفهمیم پایدار است یا خیر؟

قبلاً دیدیم سیستمی پایدار است که هر ورودی محدود خروجی محدود تولید کند.

$$|x[n]| < B_x < \infty \rightarrow |y[n]| \leq B_y < \infty$$

شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI آن است که:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq B_h < \infty$$

سیستم‌های با پاسخ ضربه‌ی محدود FIR پایدار هستند. سیستم‌های با پاسخ ضربه‌ی نامحدود IIR ناپایدار هستند.

اثبات: یک بار شرط لازم و یک بار شرط کافی را به صورت جداگانه اثبات کنیم. $P \Longleftrightarrow q$ شرط کافی شرط لازم

کفایت شرط: اگر ورودی محدود باشد و کوچکتر از بی‌نهایت باشد آنگاه سیستم پایدار است.

$$\left.\begin{array}{l} |x[n]| < B_x < \infty \\ S \leq B_h < \infty \end{array}\right\} \rightarrow |y[n]| \leq B_y < \infty$$

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]\right| \leq \sum |x[k]|\,|h[n-k]|$$

$$< B_x \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]|}_{B_h} < \infty$$

۲۴

اثبات لزوم شرط: نشان می دهیم اگر سیستم پایدار باشد آنگاه ورودی کراندار است.

نشان می دهیم که اگر $S=\infty$ باشد حتی ورودی محدود باشد خروجی ممکن است نامحدود باشد.

$$\left.\begin{array}{l} S=\infty \\ |x[n]| \le B_x < \infty \end{array}\right\} \rightarrow |y[n]| = \infty$$

$$x[n] \triangleq \begin{cases} \dfrac{h^*[-n]}{|h[-n]|} & h[n] \neq 0 \\ 0 & h[n] = 0 \end{cases}$$

فرض: $S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[0-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h^*[k]}{|h[k]|} \cdot h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$$

علیت: causality برحسب $h[n]$

همان طور که قبلاً گفته شد یک سیستم را علی می گوییم هرگاه خروجی در هر لحظه از زمان صرفاً و صرفاً تابعی از ورودی در همان لحظه و لحظات ماقبل باشد یعنی خروجی مستقل از آینده ی ورودی باشد.

شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم LTI آن است که:

$$h[n] = 0 \qquad n < 0$$

اثبات کفایت شرط:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, h[k] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} x[n-k]h[k]}_{\text{وابسته به آینده دستگاه چون k منفی است}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]h[k]}_{\text{وابسته به گذشته ورودی}}$$

وابسته به حال ورودی است $k=0$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} x[n-k]h[k] = 0 \Rightarrow \begin{cases} h[k] = 0 & \text{برای k منفی} \\ x \neq 0 & \text{ورودی صفر نمی شود} \end{cases}$$

۲۵

برای هر n یا ورودی دلخواه ← $h[k] = 0 \quad k < 0 \quad \forall x$

$h[n] = 0 \quad n < 0$

برای اثبات لزوم شرط نیز می‌توان گفت که:

سیستم وابسته به آینده‌ی ورودی نیست پس علی است. $\forall x[n] \rightarrow h[k] = 0 \quad k < 0$

مثال: سیستم تأخیر دهنده‌ی ایده‌آل آیا علی است یا خیر؟

$h[n] = \delta[n - n_d]$

این سیستم پایدار است چون: $\sum |h[n]| < B_h < \infty$

ثانیاً اگر $n_d \geq 0$ باشد علی است.

مثال: سیستم میانگین متحرک آیا علی است یا خیر؟

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1} & -M_1 < n < M_2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

چون عرض سیستم محدود است و یک فیلتر FIR است و پاسخ ضربه‌ی آن محدود است چون تعداد نقاط آن محدود است. $S < \infty$

علّی بودن: به ازای $-M_1 \geq 0$ و $M_2 \geq 0$ سیستم علی است و $h[n]$ برای $n < 0$ صفر می‌شود.

مثال: سیستم انباره آیا علی است یا خیر؟

$h[n] = u[n]$

برای nهای مثبت جواب دارد. اما پایدار نیست. $S = \infty$ است

علی است $h[n] = 0 \quad n < 0$

مثال: سیستم تفاضلی پیشرو آیا علی و پایدار است یا خیر؟

$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$

پایدار است چون تنها دو نقطه دارد.

اما علی نیست چون وابسته به آینده‌ی سیستم است.

$h[-1] = \delta[0] - \delta[-1] \neq 0$

مثال: سیستم تفاضلی پسرو آیا علی است یا خیر؟

$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

این سیستم پایدار است ولی علی بودنش چون وابسته به آینده‌ی ورودی نیست علی است.

نکته: در حالت کلی هر سیستم FIR غیرعلی را می‌توان با متوالی کردن با تأخیرهای به حد کافی طولانی به سیستم علی تبدیل کرد.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]=\delta[n-1]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= x[n] * \delta[n-n_d] = x[n-n_d]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{تفاضلی پیشرو}} \longrightarrow \boxed{\text{تأخیر ایده‌آل تا } n_d = 1} \longrightarrow y[n]$$

$h_1[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$ $\qquad$ $h_2[n] = \delta[n-1]$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \left(\delta[n+1] - \delta[n]\right) * \delta[n-1]$$

در کانولوشن فقط n داخل پرانتز تبدیل به [illegible] شده.

$$= \delta[n-1] * (\delta[n+1] - \delta[n]) = \delta[n-1+1] - \delta[n-1]$$

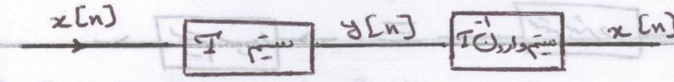
$$= \delta[n] - \delta[n-1]$$

$\equiv$ — [تأخیر ۱ واحد] — [سیستم پیشرو] — $\equiv$ → [سیستم پسرو] →

موضوع: جلسه‌ی چهارم — تاریخ: / / — ۲۸

سیستم وارون و وارون پذیر: inverse system

اگر یک سیستم اصلی داشته باشیم که $x[n]$ را وارد آن کنیم و بعد وارد سیستم وارون یا وارون پذیر شود بازهم $x[n]$ را به ما می‌دهد.



$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$$x[n] = T^{-1}\{y[n]\} = T^{-1}\{T\{x[n]\}\} = x[n]$$

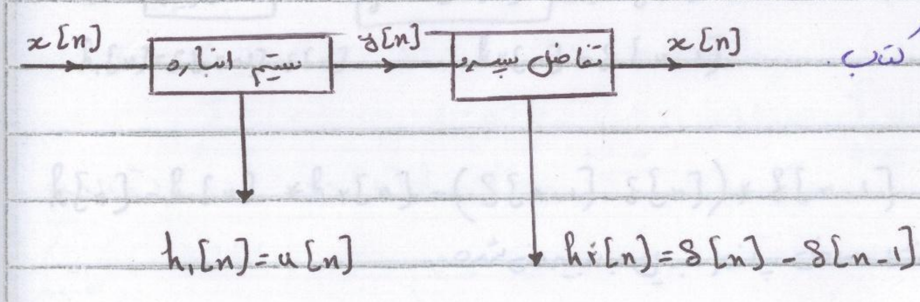
مثال: پاسخ ضربه‌ی چنین سیستم هایی اگر $h[n]$ باشد سیستم وارون پاسخ ضربه اش $h_i[n]$:

$$h[n] * h_i[n] = h_i[n] * h[n] = \delta[n]$$

$$\equiv \quad x[n] \longrightarrow \boxed{h[n] = \delta[n]} \longrightarrow x[n]$$

سیستم عینی = همانی = identify

مثال، صد ۶۲ کتاب.



این دو سیستم سری هستند.

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1])$$

$$= u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

نکته: بنابراین سیستم تفاضل بیرو وارون سیستم انباره می باشد.

همیشه سیستم ها وارون ندارند یعنی وقتی پیدا کردن سیستم وارون امکان پذیر نیست.

البته سیستم وارون وقتی وجود دارد که سیستم اصلی وارون پذیر باشد.

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت: LCCD

Linear constant coenfiencent Difference

سیستم هایی که ورودی و خروجی سیستم معادلاتی با ضرایب ثابت را ارضا کنند دسته ی مهمی از سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان را ارضا می کنند.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m\, x[n-m]$$

دسته ی مهمی از سیستم های LTI سیستم هایی هستند که ورودی و خروجی آنها یک معادله ی خطی با ضرایب ثابت به شکل فوق صدق می کنند.

در سیستم های گسسته مشتق تبدیل به تفاضل می شود.

مثال ص ۲-۱۲: نمایش معادله‌ی تفاضلی این به:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

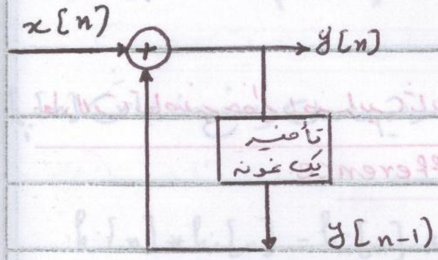
$$y[n]=x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$y[n-1]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$y[n]=x[n]+y[n-1] \rightarrow y[n]-y[n-1]=x[n]$$

$N=1 \quad a_0=1 \quad a_1=-1 \quad M=0 \quad b_0=1$

بلوک دیاگرام نمایش بازگشتی معادله‌ی تفاضلی این به:



مثال ۲-۱۳ مطالعه شود. نمایش معادله تفاضلی سیستم های کلی مشترک به جزوه اضافه شود.

برای سیستم های علّی می‌توان گفت در سیستم علّی خروجی وابسته به آینده‌ی ورودی نخواهد بود.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=\sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

$$a_0 y[n]+\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]=\sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

$$y[n]=-\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k]+\sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0} x[n-m]$$

شرط علی بودن سیستم آرامش اولیه است یعنی مادامیکه ورودی سیستم صفر است، خروجی صفر خواهد شد (صفر باقی خواهد ماند)

$N=0$ اگر سیستم مرتبه صفر باشد

$$y[n]=\sum_{m=0}^{M}\underbrace{\frac{b_m}{a_0}}_{h[m]}x[n-m]$$

یعنی در $M+1$ تا نقطه غیرصفر است.

$$h[m]=\begin{cases}\dfrac{b_n}{a_0} & n=0,1,\ldots,M\\ 0 & oth\end{cases}$$

نکته: یک مثال از سیستم $\boxed{FIR}$ (سیستم با پاسخ ضربه محدود) می‌باشد مطالعه شود.

یک نمونه از پاسخ ضربه با طول محدود است یعنی FIR یعنی این سیستم پاسخ ضربه‌اش در یک مقدار نقاط محدود، صفر است.