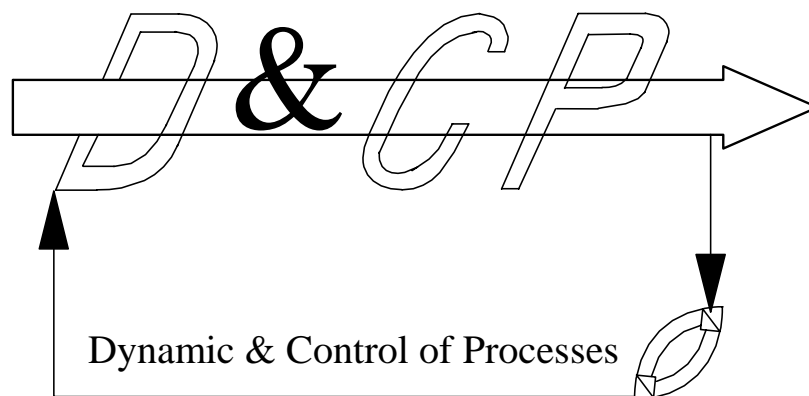
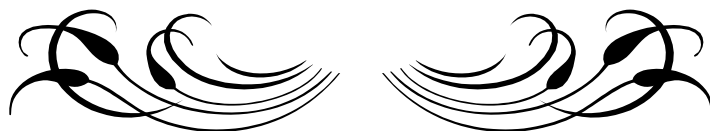


دانشگاه آزاد اسلامی  
واحد جنوب تهران

## کنترل فرآیندها در مهندسی شیمی



تهیه و تنظیم:  
دکتر مهدی رفیعزاده



## فهرست مطالب

### فصل اول - مقدمه و مفاهیم اولیه کنترل فرآیندها

- ۱-۱- مقدمه ..... ۱
- ۲-۱- عملکرد یک سیستم کنترلی ..... ۲
- ۳-۱- لزوم کنترل فرآیند ..... ۵
- ۴-۱- چگونگی اعمال سیستم کنترلی ..... ۵
- ۵-۱- مراجع ..... ۶

### فصل دوم - مروری بر تبدیل لاپلاس

- ۱-۲- مقدمه ..... ۷
- ۲-۲- مفاهیم اساسی ..... ۷
- ۳-۲- تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال یک تابع ..... ۱۰
- ۴-۲- انتقال روی محور  $s$  و محور  $t$  ..... ۱۲
- ۵-۲- کسرهای جزئی ..... ۱۴
- ۶-۲- ماهیت کیفی جواب ..... ۱۷
- ۷-۲- قضیه مقدار نهائی و مقدار اولیه ..... ۱۸
- ۸-۲- خلاصه ..... ۱۸
- ۹-۲- مراجع ..... ۱۹

### فصل سوم - مدل سازی دینامیکی و تابع انتقال فرآیندها

- ۱-۳- مقدمه ..... ۲۰
- ۲-۳- یک مثال مقدماتی ..... ۲۰
- ۳-۳- خواص تابع انتقال ..... ۲۴

- ۴-۳- بررسی دینامیک فرایند ..... ۲۵
- ۵-۳- سیستم‌های درجه اول در حالت سری ..... ۲۷
- ۳-۵-۱- دو تانک ارتفاع در حالت سری و بدون اثر متقابل ..... ۲۹
- ۳-۵-۲- دو تانک ارتفاع در حالت سری و با اثر متقابل ..... ۳۰
- ۳-۶- سیستم درجه دوم ..... ۳۲
- ۳-۷- مشخصه‌های پاسخ پله‌ای تحت میرای سیستم درجه دوم ..... ۳۴
- ۳-۸- سیستم غیر خطی ..... ۳۵
- ۳-۹- زمان مرده ..... ۳۷
- ۳-۱۰- شناسائی سیستم ..... ۳۸

#### فصل چهارم - سیستم حلقه بسته

- ۴-۱- مقدمه ..... ۳۹
- ۴-۲- سیستم گرمایش یک مایع ..... ۳۹
- ۴-۲-۱- تابع انتقال فرآیند ..... ۴۲
- ۴-۲-۲- تابع انتقال المان اندازه‌گیری و المان نهائی کنترل ..... ۴۳
- ۴-۲-۳- تابع انتقال کنترلر ..... ۴۴
- ۴-۳- تابع انتقال حلقه بسته ..... ۴۵
- ۴-۴- پاسخ سیستم حلقه بسته ..... ۴۷

#### فصل پنجم - روش مکان ریشه‌ها در طراحی کنترلر

- ۵-۱- مقدمه ..... ۵۰
- ۵-۲- پایداری سیستم ..... ۵۰
- ۵-۳- تست روث ..... ۵۲
- ۵-۴- مکان ریشه‌ها ..... ۵۳

۵۷	۵-۵- معیارهای تعیین مکان ریشه‌ها
۵۸	۶-۵- طراحی کنترلر
۵۹	۵-۶-۱- روش جانمائی قطب
۵۹	۵-۶-۲- روشهای یک معیاری در طراحی کنترلر
۶۰	۵-۶-۳- معیارهای انتگرالی در طراحی کنترلر
۶۳	۷-۵- روش Cohen-Coon
۶۵	۸-۵- روش تجربی تنظیم کنترلر

### فصل ششم - روش پاسخ فرکانسی برای طراحی کنترلر

۶۶	۶-۱- مقدمه
۶۶	۶-۲- قانون جایگذاری
۶۸	۶-۳- دیاگرام بد
۶۹	۶-۴- دیاگرام بد برای حاصلضرب چند سیستم
۷۱	۶-۵- معیار پایداری بد
۷۳	۶-۶- روش زیگلر-نیکولز برای طراحی کنترلر

### فصل هفت - روش فضای حالت در طراحی کنترلر

۷۵	۷-۱- مقدمه
۷۶	۷-۲- مدل فضای حالت
۷۸	۷-۳- انتقال حالت
۷۹	۷-۴- پاسخ دینامیکی بر اساس معادلات حالت
۸۰	۷-۵- طراحی کنترلر برای مدل فضای حالت کامل
۸۰	۷-۵-۱- انتخاب دستور کنترلی

## فصل هشت - کنترل عددی

- ۸-۱- مقدمه ..... ۸۱
- ۸-۲- نمونه‌برداری ..... ۸۱
- ۸-۳- توسعه مدل گسسته در فضای زمان ..... ۸۴
- ۸-۴- تبدیل Z ..... ۸۵

## ضمیمه الف - طراحی کنترلر دمای رآکتور ناپیوسته پلیمریزاسیون متیل متاکریلات

- الف-۱- مقدمه ..... ۸۷
- الف-۲- کنترل پلیمریزاسیون ناپیوسته ..... ۸۸
- الف-۳- تقریب حالت شبه پایدار ..... ۹۰
- الف-۴- تابع انتقال ..... ۹۰
- الف-۵- طراحی کنترلر ..... ۹۶
- الف-۶- تنظیم کردن کنترلر ..... ۹۷
- الف-۷- اعمال کنترلر بر روی فرآیند ..... ۱۰۱
- الف-۸- نتایج آزمایش کنترلر ..... ۱۰۱

## فصل اول

### مفاهیم اولیه کنترل فرآیندها

#### ۱-۱- مقدمه

یک مهندس خوب همواره باید درک کاملی از هدف داشته باشد، زیرا ممکن است که چنان با جزئیات مشغول شود که مسیر را فراموش کرده و یا گم کند. کنترل فرآیند در مطالعه دینامیک یک فرآیند جدید از اصول ریاضی و مهندسی ( که قبلا فرا گرفته شده‌اند) استفاده می‌کند. در این فصل مفاهیم اساسی و هدف کنترل فرآیند ارائه می‌شود تا خواننده هدف کلی اتوماسیون را فهمیده و نیاز به بخش‌های مختلف این کتاب را درک کند.

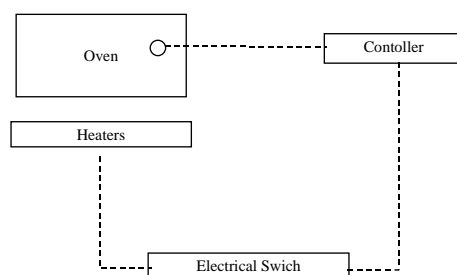
مطالعه کنترل فرآیند ماهیتا به عملکرد دینامیکی فرآیند می‌پردازد. درس‌های قبلی دانشجویان مهندسی شیمی و پلیمر نظیر انتقال جرم، عملیات واحد، سینتیک و طراحی رآکتورهای شیمیایی، مهندسی پلاستیک، طراحی دستگاه‌های مبدل حرارتی و جرمی و مهندسی الاستومر و ۰۰۰ در خصوص وضعیت پایدار بحث می‌کند. در طراحی یک فرآیند و محاسبه اندازه دستگاه‌های مختلف فرض معمول ثابت بودن شرایط فرآیند است. در حالیکه هیچ دستگاهی در طول عمر مفید خود دقیقا حالت پایدار (تغییرات صفر) عمل نمی‌کند. اگر در کنار یک دستگاه شکل دهی نظیر قالبگیری بادی بایستید، مشاهده می‌شود که دمای بخش‌های مختلف حول مقدار ثابتی نوسان کرده، سطح ماده در قیف تغذیه کم و زیاد شده و ۰۰۰، لذا نتیجه‌گیری می‌شود که جهان دینامیک است. تنها با دانستن رفتار گذرای<sup>۱</sup> فرآیند است که مهندسی می‌توانند فرآیند مناسبی در این جهان دینامیک طراحی کنند. این کتاب در نظر دارد که مفاهیم و روش‌های عملی بررسی دینامیک فرآیندها را طراحی کنترلر مناسب و اعمال این سیستم‌ها بر روی دستگاه‌ها را با دیدگاه کاربردی آموزش دهد.

مهندسی کنترل در رشته‌های متفاوتی مانند مهندسی برق، مکانیک، پزشکی، شیمی، پلیمر و متالورژی آموزش داده می‌شود. دانش آموختگان هر یک از این رشته‌ها، کنترل را برای عملیات مناسب فرآیندهایی که مطالعه

می‌کنند، بکار می‌برند. وظیفه یک مهندس خوب بطور خلاصه عبارت است از طراحی، ساخت و انجام مناسب سیستم‌های فیزیکی بوده، لذا یکی از اجزاء لاینفک آن نگه داشتن شرایط مناسب فرآیند یا همان مهندسی کنترل فرآیند است [۱].

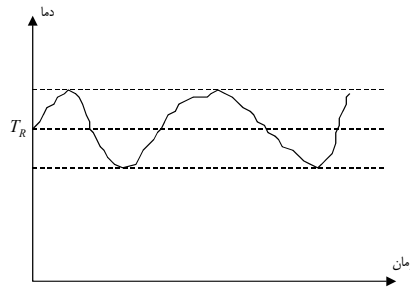
## ۲-۱- عملکرد یک سیستم کنترلی

اصول کلی اغلب سیستم‌های کنترلی مشابه می‌باشد. لذا در این بخش با چند مثال ساده این اصول معرفی می‌گردند. شکل ۱-۱ شماتیک یک سیستم گرمایش مانند یک آون را نشان می‌دهد. مسلماً هدف آن است که دمای داخل آون برابر یک مقدار تنظیم  $T_R$  باشد. دمای داخل آون  $T$  با ترموکوپل اندازه‌گیری می‌شود. این دما توسط یک ترموستات با مقدار تنظیم مقایسه می‌شود. اگر  $T < T_R$  باشد، آنگاه هیتر الکتریکی روشن شده و اگر  $T > T_R$  باشد، آنگاه هیتر خاموش شده و فن<sup>۲</sup> (در صورت وجود) روشن می‌شود. شکل ۲-۱ تاریخچه دمای داخل آون را نشان می‌دهد. همانگونه شکل نشان می‌دهد، دمای آون در اطراف دمای تنظیم نوسان غیر منظمی دارد. این روش کنترلی را روش on/off می‌نامند.



شکل ۱-۱- کنترل دمای یک تانک





شکل ۱-۲- تاریخچه دمای داخل آون

یک سیستم ملموس تر، شخصی است که در حال رانندگی می باشد. معمول ترین هدف رانندگی باقی ماندن در جاده و ما بین خطوط رانندگی می باشد. ابتداء راننده با دیدن محل اتومبیل بر روی جاده را تعیین می کند. سپس تصمیم می گیرد که چه مقدار با وضعیت مناسب اتومبیل اختلاف دارد. در ادامه، با توجه به مهارت خود و قابلیت های اتومبیل مقدار تغییر سرعت، موقعیت فرمان، شماره دنده و ۰۰۰ را محاسبه می کند. در انتها با اعمال تغییر محاسبه شده از طریق فرمان، ترمز و گاز و ۰۰۰، اتومبیل را در جاده نگه می دارد. راننده می بایست این فعالیت ها را دائما انجام دهد.

با بررسی این دو مثال، اکنون می توان مفاهیم اولیه را استخراج کرد. اولین مفهوم متغیر کنترل شونده<sup>۳</sup> بوده که در مثال های فوق دمای آون و موقعیت اتومبیل متغیرهای کنترل شونده می باشند. دومین مفهوم نقطه تنظیم<sup>۴</sup> بوده که مقدار مناسب متغیر کنترلی را نشان می دهد. نقطه تنظیم ممکن است ثابت یا متغیر با زمان باشد. در مثال آون معمولا نقطه تنظیم ثابت بوده در حالیکه به هنگام رانندگی نقطه تنظیم متغیر است. سومین مفهوم المان اندازه گیری<sup>۵</sup> بوده که برای تعیین لحظه ای مقدار متغیر کنترل شونده بکار می رود. چهارمین مفهوم، الگوریتم<sup>۶</sup> بوده که همان محاسباتی است انجام می گیرد تا مقدار تغییرات را مشخص کند. پنجمین مفهوم، متغیر

---

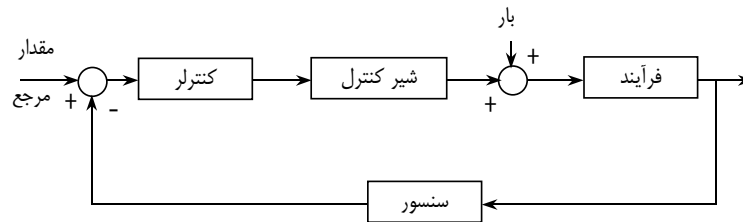
Controlled variable

Set point

Measuring element

Algorithm

کنترل کننده<sup>۷</sup> است که با تغییر آنها متغیر کنترل شونده به مقدار تنظیم میرسد. در مثال‌های فوق توان ورودی به هیتر یا تغییر چرخ‌ها با فرمان متغیرهای کنترل کننده می‌باشند. ششمین مفهوم، **المان نهایی کنترل**<sup>۸</sup> است که تغییرات بر متغیر کنترل کننده را اعمال می‌کند. بطور مثال، در سیستم گرمایش کلید الکتریکی و در اتومبیل فرمان نقش المان نهایی کنترل را ایفا می‌کند. شکل ۱-۳ اجزاء کنترلی بحث شده را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳- اجزای یک سیستم کنترلی

اگر دقت شود در مثال‌های فوق متغیر کنترل شونده اندازه‌گیری شده و با توجه به انحراف آن از مقدار تنظیم، تصمیم کنترلی اتخاذ می‌شود. این منطق را **کنترل فیدبک**<sup>۹</sup> می‌نامند. در مقابل کنترل فیدبک، منطق دیگری به نام **کنترل فیدفوروارد**<sup>۱۰</sup> بوده که بعداً به آن پرداخته خواهد شد.

دو مفهوم مهم دیگر **ورودی و خروجی**<sup>۱۱</sup> سیستم می‌باشند. منظور از ورودی و خروجی الزاماً حرکت ماده به داخل یا از داخل فرآیند را شامل نمی‌شود. ورودی و خروجی می‌تواند سیگنال یا فرمان باشد.

- 
- Manipulated variable
  - Final control element
  - Feedback control
  - Feedforward control
  - Input and output

### ۱-۳- لزوم کنترل فرآیند

مهمترین دلایل کنترل فرآیند عبارتند از:

- ۱- اطمینان از تبعیت متغیر کنترل شونده از مقدار تنظیم،
- ۲- حذف اغتشاش‌های<sup>۱۲</sup> ورودی به فرآیند، منظور از اغتشاش هر گونه ورودی ناخواسته به فرآیند است. بطور مثال، در مثال سیستم گرمایش آون اغتشاش‌های محتمل عبارتند از: نوسانات در جریان الکتریکی، عدم دقت در اندازه‌گیری، تاخیر در انتقال سیگنال‌های موجود و ۰۰۰.
- نتیجه کنترل فرآیند در واحدهای صنعتی عبارت است از: ۱- ایمنی، ۲- حفظ محیط زیست، ۳- عملکرد آرام فرآیند، ۴- کیفیت محصول، ۶- بهینه‌سازی سود و ۷- رهایی و تعیین مشکلات موجود.

### ۱-۴- چگونگی اعمال سیستم کنترلی

همانگونه که در مثال رانندگی مشاهده شد، می‌توان الگوریتم کنترلی را توسط یک انسان بر روی فرآیند اعمال کرد. مغز انسان پیچیده‌ترین سیستم کنترلی جهان است. انسان براحتی آموزش دیده و حتی خود آموز است و قادر است که رفتار دینامیکی فرآیند را بدست آورده و حتی تغییرات آن با زمان را نیز در الگوریتم کنترلی وارد کند. اما تکرار فعالیت مکرر اندازه‌گیری برای یک فرد می‌تواند کسل کننده باشد. همچنین ممکن است حجم محاسبات لازم برای تعیین مقدار تغییرات زیاد باشد. از سوی دیگر یک انسان تحت تاثیر بیماری یا احساسات ممکن است اشتباه کند. از لحاظ اقتصادی نیز اگر بتوان یک دستگاه بعنوان کنترلر بکار رود باعث افزایش سود خواهد شد. **اتوماسیون<sup>۱۳</sup>** طبق تعریف قرار دادن دستگاه مناسب بجای هریک از اجزاء سیستم کنترلی می‌باشد. در حال حاضر اکثر سیستم‌های کنترلی توسط دستگاه‌های الکترونیکی (که برای ارتباط اجزاء از ولتاژ یا جریان استفاده می‌شود) اعمال می‌شود. بنا بر این، محاسبات لازم توسط **تکنولوژی عددی یا دیجیتال<sup>۱۴</sup>** انجام می‌گیرد. تکنولوژی قدیمی سیستم‌های کنترلی پنوماتیکی، هیدرولیکی و یا مکانیکی می‌باشد. در سیستم‌های پنوماتیکی و هیدرولیکی از سیالی مانند هوا یا روغن برای ارتباط استفاده می‌شود. در سیستم مکانیکی از مکانیزم‌های مکانیکی بهره گرفته می‌شود.

یکی از ملزومات واجب کنترل فرآیند، ابزار دقیق<sup>۱۵</sup> می‌باشد. به همین منظور یک فصل به ابزار دقیق تخصیص داده شده است. انتخاب مناسب سنسورهای اندازه‌گیری در موفقیت سیستم کنترلی حیاتی است. مهمترین قسمت سیستم کنترلی، دستگاه لازم برای انجام محاسبات است که توسط کنترلر<sup>۱۶</sup> انجام می‌شود. کنترلرها به دو دسته کلی پیوسته (آنالوگ) و عددی (دیجیتال)<sup>۱۷</sup> تقسیم می‌شوند. تا دهه ۱۹۶۰ میلادی، سیستم‌های آنالوگ غالب بوده‌اند. در اینگونه سیستم‌ها، مکانیزی متناسب با محاسبات مورد نظر ساخته می‌شود. در سیستم‌های عددی، محاسبات توسط کیت‌های الکترونیکی انجام می‌گیرد. از مشخصه‌های سیستم‌های عددی قابلیت انجام محاسبات طولانی و پیچیده است. در دو دهه اخیر، با ساخت کامپیوترهای ارزان قیمت، اغلب محاسبات کنترلی توسط کامپیوتر انجام می‌گیرد.

#### ۵-۱- مراجع

1. Marlin T. E., "Process Control, Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance", McGraw-Hill Co., 1995

## فصل ۲

### مروری بر تبدیل لاپلاس<sup>۱۸</sup>

#### ۲-۱- مقدمه

روش تبدیل لاپلاس نام یک روش عملگر برای حل معادلات دیفرانسیل است. با این روش معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری تبدیل شده و معادله جبری حاصله با استفاده از عملیات جبری قابل حل خواهد بود. دانشجویان قبلاً مبحث روش تبدیل لاپلاس را دیده‌اند. اما همانگونه که در ادامه کتاب مشاهده خواهد شد، تبدیل لاپلاس در مهندسی کنترل بسیار مفید می‌باشد. روش تبدیل لاپلاس برای حل مسائل شرط اولیه کاربرد دارد. از سوی دیگر در کنترل فرآیندها  $t = 0$  لحظه‌ای است که تغییرات بر روی فرآیند اعمال می‌شود. بنا بر این، تمامی مسائل در کنترل فرآیندها از نوع مسئله شرط اولیه است.

#### ۲-۲- مفاهیم اساسی

تابعی مانند  $f(t)$  مفروض است که این تابع برای تمام  $t \geq 0$  تعریف شده است. حاصل انتگرال زیر که تابعی از  $s$  خواهد بود تبدیل لاپلاس  $f(t)$  نامیده می‌شود.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1-2)$$

و همچنین  $f(t)$  معکوس تبدیل لاپلاس  $F(s)$  نامیده می‌شود. در این کتاب از حرف بزرگ انگلیسی به عنوان تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود.

مثال ۲-۱- تبدیل لاپلاس  $f(t) = 1 \quad t > 0$  را بدست آورید:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad s > a \quad \text{حل -}$$

مثال ۲-۲ - تبدیل لاپلاس  $f(t) = e^{-at} \quad t > 0$  را بدست آورید.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}(e^{-at}) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad s > 0 \quad \text{حل -}$$

چند نکته مهم راجع به تبدیل لاپلاس عبارت است از:

۱- تبدیل لاپلاس هیچ اطلاعاتی راجع به  $f(t)$  در زمان‌های منفی  $t < 0$  ارائه نمی‌کند. البته در مهندسی کنترل فرض بر این است که در  $t < 0$  فرآیند در حالت پایدار بوده، لذا تمامی حالات فرآیند معین و معلوم می‌باشند.

۲- تبدیل لاپلاس یک **تبدیل خطی** است، به این معنی که:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad (۲-۲)$$

این رابطه براحتی با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس، رابطه (۲-۱)، بدست می‌آید.

مثال ۳-۲ - تبدیل لاپلاس  $f(t) = \sinh at \quad t > 0$  را بدست آورید:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}(\sinh at) = \int_0^{\infty} \sinh at e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} e^{-st} dt \quad \text{حل -}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

مثال ۴-۲ - تبدیل لاپلاس  $f(t) = t^a \quad t > 0$  را بدست آورید:

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^a dt = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^a dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \quad \text{حل -}$$

اگر چه می‌توان با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس و انتگرال‌گیری تبدیل لاپلاس توابع مختلف را بدست آورد، اما ساده‌تر است که از جدول تبدیل لاپلاس توابع مختلف استفاده کرد. تبدیل لاپلاس معمول در کنترل فرآیند در جدول ۱-۲ ارائه شده است.

جدول ۱-۲- تبدیل لاپلاس بعضی از توابع

	$f(t)$	$F(s)$
۱	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
۲	$t^n \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
۳	$t^a \quad a \text{ positive}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
۴	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
۵	$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
۶	$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$
۷	$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
۸	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
۹	$f(t-a) \quad t > a$ $0 \quad t < a$	$e^{-as} F(s)$
۱۱	$-tf(t)$	$F'(s)$
۱۲	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s}$
۱۴	$\int_0^t f(u)g(t-u) du$	$F(s)G(s)$
۱۵	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u) du$
۱۶	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n > 0$
۲۰	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \text{ or } \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \quad n > 0$	$\frac{1}{s^n}$
۲۱	$e^{at} \cos kt$	$\frac{1}{(s-a)^2 + k^2}$

## ۲-۳- تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال یک تابع

مهمترین خاصیت بعد از خاصیت خطی بودن، تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع است. لازم بذکر است که با استفاده از تبدیل لاپلاس یک تابع از فضای محاسباتی  $t$  به فضای محاسباتی  $s$  برده می‌شود. اگر  $f(t)$  برای  $t \geq 0$  پیوسته باشد و تبدیل لاپلاس داشته باشد آنگاه تبدیل لاپلاس مشتق این تابع عبارت است از:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \quad (۴-۲)$$

اثبات- با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت که:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \left| f(t)e^{-st} \right|_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

توجه شود که از روش انتگرال گیری جزء به جزء استفاده شده است. در حالت کلی برای مشتق  $n$  ام می‌توان نوشت که:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (۵-۲)$$

با دانستن تبدیل لاپلاس مشتق تابع می‌توان به حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش تبدیل لاپلاس پرداخت. این روش با ذکر یک مثال معرفی می‌شود.  
**مثال ۲-۵- معادله زیر را با روش تبدیل لاپلاس حل کنید.**

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \quad y(0) = 3 \quad \text{at} \quad y'(0) = 1$$

**حل-** با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله و فرض  $Y(s) = L\{y(t)\}$  بدست می‌آید که:

$$\left. \begin{aligned} L\{y'(t)\} &= sY - y(0) = sY - 3 \\ L\{y''(t)\} &= s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 3s - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s^2Y + 4sY + 3Y = 3s + 13$$

$$Y = \frac{3s + 13}{(s+3)(s+1)} = \frac{-2}{s+3} + \frac{5}{s+1}$$

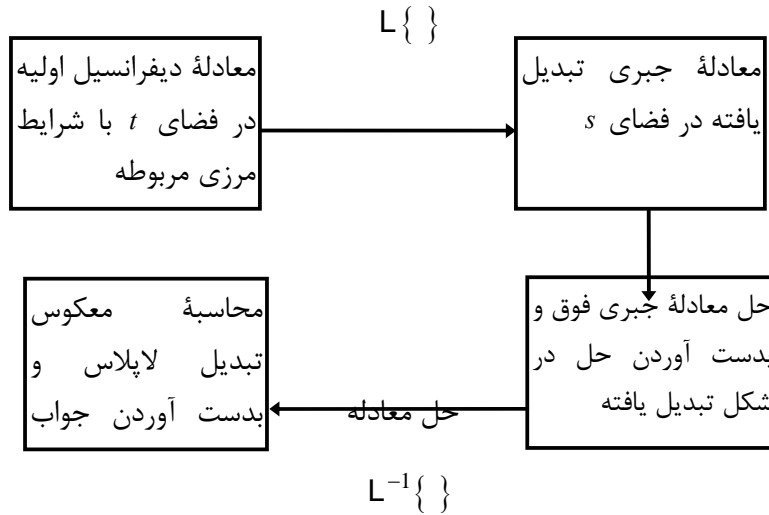
این عبارت به کمک تجزیه به کسرها با عوامل اول بدست آمده است. با استفاده از جدول معکوس تبدیل

$$L^{-1}\{Y(s)\} = -2e^{-3t} + 5e^{-t} \quad \text{لاپلاس این تابع بدست می‌آید که:}$$



فضای  $t$

فضای  $s$



خلاصه روش را می‌توان مطابق شکل ۱-۲ نشان داد.

اگر  $f(t)$  پیوستگی مقطعی داشته باشد و دارای تبدیل لاپلاس باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس انتگرال

آن عبارت است از:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} \quad s > 0 \quad (7-2)$$

اثبات - که به ترتیب زیر قابل اثبات است:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$$

مثال ۲-۶ - معکوس تبدیل لاپلاس عبارت زیر را حساب کنید:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + w^2}\right\} = \frac{1}{w} \sin wt$$

حل -

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + w^2}\right\} = \frac{1}{w} \int_0^t \sin w\tau d\tau = \frac{1}{w^2} (1 - \cos wt)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + w^2}\right\} = \frac{1}{w^2} \int_0^t (1 - \cos w\tau) d\tau = \frac{1}{w^2} \left( t - \frac{\sin wt}{w} \right)$$

## ۲-۴- انتقال روی محور s و محور t

دو خاصیت بسیار مهم انتقال روی محور s و t می باشد که ذیلا توضیح داده می شوند. اگر  $F(s)$  تبدیل لاپلاس  $f(t)$  باشد آنگاه  $F(s-a)$  تبدیل لاپلاس  $e^{at}f(t)$  می باشد. به بیان دیگر اگر تبدیل لاپلاس به اندازه  $a$  در فضای s انتقال داده شود آنگاه تابع در فضای t در  $e^{at}$  ضرب می شود.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \quad (۸-۲)$$

**اثبات-** برای اثبات از روش زیر استفاده می شود:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$$

**مثال ۲-۷-** تبدیل لاپلاس  $e^{at} \cos wt$  را بدست آورید.

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos wt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2} \quad \text{حل - تبدیل لاپلاس عبارت است از:}$$

اگر  $F(s)$  تبدیل لاپلاس  $f(t)$  باشد آنگاه  $e^{-as}F(s)$  تبدیل لاپلاس  $f(t-a)$  می باشد. به بیان دیگر اگر تابع در فضای t به اندازه  $a$  انتقال داده شود آنگاه در فضای s تبدیل لاپلاس در  $e^{-as}$  ضرب می شود.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s) \quad (۹-۲)$$

**اثبات-** برای اثبات از روش زیر استفاده می شود:

$$e^{-as}F(s) = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-s(a+\tau)} f(\tau) d\tau$$

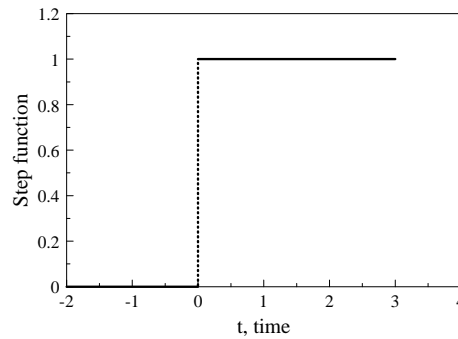
$$e^{-as}F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \mathcal{L}\{f(t-a)\} \text{ where } \tau + a = t$$

معمولاً برای نشان دادن انتقال در یک تابع از مفهوم **تابع پله واحد**<sup>۱۹</sup> استفاده می‌شود. طبق تعریف

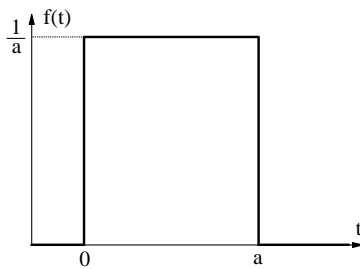
تابع پله واحد عبارت است از:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (۱۰-۲)$$

شکل ۲-۲ تابع پله واحد را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲- منحنی تابع پله واحد



شکل ۲-۳- تابع pulse

**مثال ۲-۸-** ضابطه تابع نشان داده شده در شکل را بدست

آورده و تبدیل لاپلاس آنرا بدست آورید.

**حل-** برای بدست آوردن ضابطه تابع شکل ۲-۳ می‌توان

فرض کرد که یک تابع پله به بزرگی  $1/a$  در نقطه  $t=0$  وارد

شده و یک تابع پله به بزرگی  $-1/a$  در  $t=a$  وارد شده است و

از جمع آنها ضابطه تابع  $f(t)$  بدست می‌آید که:

$$f(t) = \frac{1}{a} u(t) - \frac{1}{a} u(t-a)$$

تبدیل لاپلاس این تابع عبارت است از:

$$F(s) = \frac{1}{as} - \frac{e^{-as}}{as} = \frac{(1 - e^{-as})}{as} \quad (۱۱-۲)$$

لازم بذکر است که تابع نشان داده شده در شکل با نام **تابع پالس** Pulse function شناخته می‌شود.

در مثال فوق اگر  $a \rightarrow 0$  میل کند آنگاه مقدار تابع در صفر به بی‌نهایت می‌رود. این تابع جدید را **تابع ایمپالس**<sup>۲۰</sup> می‌نامند و با  $\delta(t)$  نشان می‌دهند.

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(t-a)}{a} \quad (۱۲-۲)$$

با این تعریف تابع ایمپالس مشتق تابع پله‌ای می‌باشد. در رابطه (۱۲-۲) اگر  $a \rightarrow 0$  آنگاه تبدیل لاپلاس تابع ایمپالس بدست می‌آید:

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-as})}{as} = 1 \quad (۱۳-۲)$$

در مسائل کاربردی، تابع ایمپالس به معنی ایجاد تغییر ناگهانی و بسیار کوتاه مدت در ورودیهای فرآیند است. بطور مثال افزودن مقدار مشخصی از واکنش‌کننده‌ها به رآکتور ایجاد یک تغییر ایمپالس در ورودی است.

## ۲-۵- کسرهای جزئی<sup>۲۱</sup>

اکثر کاربردها و مثال‌های این بخش به عبارتی بر حسب  $s$  می‌رسد که می‌توان آنرا به شکل کسری نوشت:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (۱۹-۲)$$

که  $N(s)$  و  $D(s)$  چندجمله‌ایهای بر حسب  $s$  هستند و فرض می‌شود که درجه  $N(s)$  از درجه  $D(s)$  کمتر است و هر دو دارای ضرائب حقیقی هستند و دارای ریشه مشترک نمی‌باشند. بنا بر این جواب  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$  خواهد بود. در مثال ۲-۵ حالت ساده‌ای از این روش ذکر شد.

اگر مخرج را بتوان به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد در این صورت می‌توان نوشت که:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s-r_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s-r_i} \quad (20-2)$$

که  $n$  درجه چند جمله‌ای  $D(s)$  است و  $r_i$  ریشه‌های این چندجمله‌ای می‌باشند. به این عمل نوشتن در شکل کسرهای جزئی گفته می‌شود. در جواب عبارت خواهد بود با:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{r_i t} \quad (21-2)$$

سریعترین و متداولترین روش برای محاسبه  $\alpha_i$  تبدیل به کسرهای جزئی روش **هویساید**<sup>۲۲</sup> می‌باشد، که ذیلاً توضیح داده می‌شود.

**مثال ۲-۱۴** - معکوس لاپلاس عبارت زیر را بدست آورید.

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+4}$$

**حل** - ریشه‌های مخرج عبارتند از  $r_1 = -1$  و  $r_2 = -4$ ، لذا می‌توان نوشت که:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+4} = \frac{s+5}{(s+1)(s+4)} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+4}$$

طبق روش هویساید دو طرف معادله را در اولین مخرج سمت راست ضرب کرده و  $s$  برابر با ریشه این مخرج قرار داده می‌شود، به این ترتیب تمامی جملات سمت راست حذف شده و تنها  $\alpha_1$  باقی می‌ماند:

$$\alpha_1 = \left. \frac{s+5}{s+4} \right|_{s=-1} = \frac{4}{3}$$

به همین ترتیب برای دیگر ضرائب عمل می‌شود:

$$\alpha_2 = \left. \frac{s+5}{s+1} \right|_{s=-4} = -\frac{1}{3}$$

در حالت کلی برای رابطه (۲۰-۲) می‌توان نوشت که:

$$\alpha_i = \left. (s-r_i) \frac{N(s)}{D(s)} \right|_{s=r_i} \quad (22-2)$$

**ریشه‌های مکرر** - اگر در مخرج ریشه  $r$  به تعداد  $b$  بار تکرار شود، در این صورت  $Y(s)$  به شکل

زیر بسط داده می‌شود:

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s-r} + \frac{\alpha_2}{(s-r)^2} + \dots + \frac{\alpha_b}{(s-r)^b} + \dots + W(s) \quad (23-2)$$

که  $W(s)$  باقیمانده  $Y(s)$  بعد از تفکیک بخش ریشه مکرر است. در این صورت با ضرب طرفین در  $(s-r)^b$  تنها  $\alpha_b$  محاسبه می‌شود. در این حالت با گرفتن مشتق‌های متوالی و قرار دادن  $s=r$  دیگر ضرائب محاسبه می‌شوند:

$$\alpha_{b-i} = \frac{1}{i!} \frac{d^{(i)}}{ds^{(i)}} \left( \frac{N(s)}{D(s)} (s-r)^b \right) \Bigg|_{s=r} \quad i = 0, \dots, b-1 \quad (24-2)$$

**ریشه‌های موهومی** - اگر ریشه‌های موهومی وجود داشته باشند، مانند  $r_{1,2} = a \pm bj$ ، محاسبات

مستلزم عملیات جبری اعداد موهومی می‌باشد که معمولاً طولانی می‌باشد. در این مورد بهتر است که  $Y(s)$  به شکل زیر بسط داده شود:

$$Y(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s-a)^2 + b^2} + W(s) \quad (25-2)$$

در این صورت جواب عبارت است از:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{b} e^{at} (T_a \cos bt + S_a \sin bt) + \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} \quad (26-2)$$

که  $T_a$  و  $S_a$  بترتیب بخش حقیقی و موهومی عبارت زیر هستند:

$$S_a + j T_a = \left[ (s-a)^2 + b^2 \right] \frac{N(s)}{D(s)} \Bigg|_{s=r_1} \quad (27-2)$$

**ریشه‌های مکرر موهومی** - اگر ریشه‌های موهومی وجود داشته باشند، مانند  $r_{1,2} = a \pm bj$  که

تکرار هم شده باشند یعنی  $(s-r_1)^2$  و  $(s-r_2)^2$  حضور داشته باشند آنگاه کسرهای جزئی عبارتند از:

$$Y(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{\left[ (s-a)^2 + b^2 \right]^2} + \frac{\alpha_3 s + \alpha_4}{\left[ (s-a)^2 + b^2 \right]} + W(s) \quad (28-2)$$

معکوس لاپلاس این عبارت به شکل زیر است:

$$y(t) = \frac{1}{2b^3} e^{at} \left[ (T_a - bS_a^* - bS_a t) \cos bt + (S_a + bT_a^* + bT_a t) \sin bt \right] + L^{-1}\{W(s)\} \quad (29-2)$$

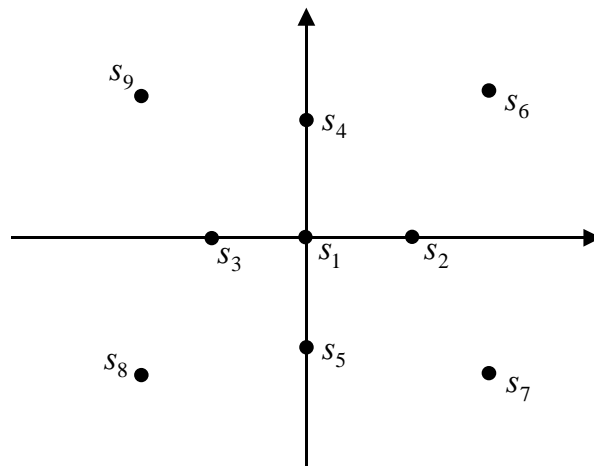
که ضرائب  $T_a, S_a^*, S_a$  و  $T_a^*$  از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$S_a + jT_a = \left[ (s-a)^2 + b^2 \right]^2 \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=j_1} \quad (30-2)$$

$$S_a^* + jT_a^* = \frac{d}{ds} \left[ \left[ (s-a)^2 + b^2 \right]^2 \frac{N(s)}{D(s)} \right] \Big|_{s=j_1} \quad (31-2)$$

## ۲-۶- ماهیت کیفی جواب

گاهی اوقات لازم است که ماهیت کیفی جواب از پیش معلوم باشد، چرا که اگر پارامتری در مسئله باشد و بتوان آنرا تغییر داد، می‌توان جواب نهائی را معماری کرد. با توجه به رابطه (۲۰-۲) مقدار ریشه‌ها در ماهیت جواب نقش اساسی دارند. اگر ریشه‌ها حقیقی مثبت باشند، جواب بدون نوسان به سمت بی‌نهایت می‌رود. اگر ریشه‌ها حقیقی منفی باشند، جواب بدون نوسان به سمت صفر می‌رود. اگر ریشه‌ای صفر باشد، جواب دارای یک مقدار ثابت است. اگر ریشه‌ها موهومی باشند، جواب نوسانی خواهد بود. شکل ۲-۴ محل ریشه‌ها در صفحه مختصات موهومی-حقیقی و ماهیت جواب متناظر را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۴- تاثیر محل ریشه‌ها در کیفیت جواب

## ۲-۷- قضیه‌های مقدار نهائی و مقدار اولیه

اگر تابع  $F(s)$  تبدیل لاپلاس  $f(t)$  باشد، آنگاه:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] \quad (۳۲-۲)$$

بنا بر این در صورت نیاز به مقدار  $f(t)$  در زمان‌های بزرگ می‌توان مقدار  $sF(s)$  در صفر را محاسبه کرد.

این قضیه مقدار نهائی<sup>۲۳</sup> نامیده می‌شود. برای اثبات از رابطه زیر کمک گرفته می‌شود:

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

حد این رابطه در  $s \rightarrow 0$  عبارت است از:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

ترتیب انتگرال‌گیری و حدگیری در سمت چپ را تغییر داده و عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

که نتیجه همان رابطه (۳۲-۲) می‌باشد.

قضیه مقدار اولیه به شکل زیر می‌باشد:

$$\lim_{t \rightarrow 0} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] \quad (۳۳-۲)$$

اثبات این قضیه مشابه قضیه قبل می‌باشد.

## ۲-۸- خلاصه

در این فصل روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل بررسی شد. این روش با خواص

منحصر بفرد خود باعث می‌شود که یک معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری تبدیل شود. این روش تنها



برای معادلات دیفرانسیل خطی و مسائل شرط اولیه قابل استفاده است. البته این محدودیت از جذابیت، سادگی و کوتاهی مسیر حل این روش نمی‌کاهد. مثال‌های ۲-۱۰ و ۲-۱۲ کاربرد این روش در مسائل مهندسی را نشان می‌دهد. لذا یک مهندس می‌بایست حداقل با این روش آشنا بوده و بتواند در تجزیه و تحلیل مسائل از آن استفاده کند.

## ۲-۹- مراجع

1. W. L. Luyben, "Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineering", McGraw Hill Co., 1993
5. E. Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", Wiley Inc., 4th edition, 1979
7. M. R. Spiegel, "Mathematical Handbook of Formulas and Tables", Schum's Outline Series, McGraw Hill Co., 1968
10. D. R. Coughanowr, "Process Systems Analysis and Control", McGraw Hill Co., 1993

## فصل سوم

### مدل سازی دینامیکی و تابع انتقال فرآیندها

#### ۳-۱- مقدمه

قبل از بررسی سیستم‌های کنترلی، باید دانست که فرآیندها بطور مجزا در مقابل تغییرات ورودی یا ایجاد اغتشاش در آنها چگونه رفتار می‌کنند. پاسخ گذرای سیستم عبارت است از تغییرات خروجی فرآیند در اثر اعمال تغییرات در ورودی یا ایجاد اغتشاش در فرآیند. بدین منظور باید یک مدل ریاضی استفاده گردد. مبانی مدل سازی فرآیندها در درس‌های قبلی نظیر کاربرد ریاضیات، پدیده‌های انتقال کامل بحث شده است، بنا بر این برخی از جزئیات در اینجا ذکر نخواهد شد.

#### ۳-۲- یک مثال مقدماتی

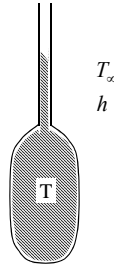
یک دماسنج جیوه‌ای در نظر بگیرید. این دماسنج در ابتداء در محیطی به دمای  $T_{\infty s}$  قرار داشته و دمای  $T_s = T_{\infty s}$  (زیرنویس  $s$  بیانگر حالت پایدار است) را نشان می‌دهد. در لحظه  $t = 0$ ، این دماسنج در محیطی بدمای  $T_{\infty} = T_{\infty s} + \Delta T$  قرار می‌گیرد. در نظر است که دمایی که دماسنج نشان می‌دهد، بر حسب زمان بدست آید. شکل ۱-۳ این دماسنج را نشان می‌دهد.

می‌بایست موازنه انرژی گذرا برای دماسنج نوشته شود. برای ساده سازی از فرضیات زیر استفاده می‌شود:

۱- مقدار جیوه در حباب بسیار بیشتر از مقدار جیوه در لوله موئینه است. لذا فرض می‌شود که جرم جیوه درون حباب ثابت است.

۲- شیشه حباب بسیار نازک بوده و مقاومت حرارتی ناچیزی دارد. در نتیجه انتقال حرارت جابجائی مستقیماً بین جیوه و محیط انجام می‌گیرد.

۳- تمامی نقاط جیوه دارای یک دما می‌باشد.



شکل ۳-۱- دماسنج جیوه‌ای

موازنه انرژی برای جیوه عبارت است از:

$$mC \frac{dT}{dt} = hA(T_{\infty} - T) \quad (1-3)$$

$$T = T_s \quad @ \quad t = 0$$

که  $A$  سطح حباب جیوه بوده و ثابت فرض شده،  $C$  ظرفیت حرارتی جیوه،  $h$  ضریب انتقال حرارت جابجائی بین محیط و جیوه بوده و  $m$  جرم جیوه درون حباب می‌باشد. حل معادله دیفرانسیل (۱-۳) توزیع دمای گذرا در دماسنج را بدست می‌دهد.

این معادله را می‌توان با استفاده از روش‌های که در معادلات دیفرانسیل بررسی شده، حل کرد. بدین منظور

مقدار  $T_{\infty}$  در معادله (۱-۳) قرار داده می‌شود:

$$\frac{mC}{hA} \frac{dT}{T - (T_{\infty s} + \Delta T)} = -dt$$

پارامتر  $\tau = \frac{mC}{hA}$  دارای بعد زمان بوده و به آن **ثابت زمانی**<sup>۲۴</sup> گفته می‌شود. راجع به معنی فیزیکی ثابت زمانی بعداً

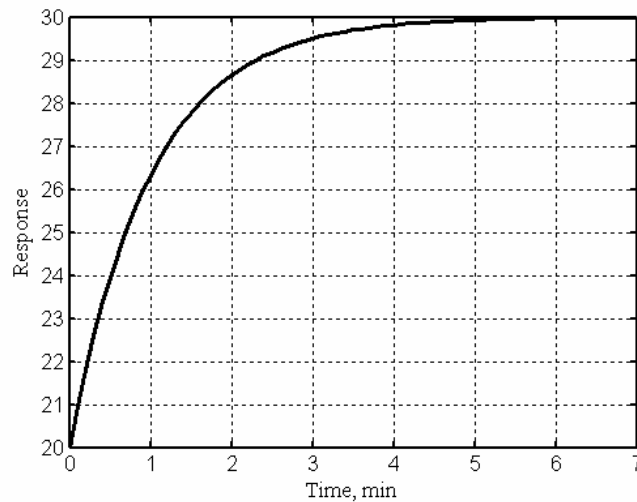
بحث خواهد شد. ادامه حل عبارت است از:

$$\frac{dT}{T - (T_{\infty s} + \Delta T)} = -\frac{1}{\tau} dt \quad \Rightarrow \quad \ln[T - (T_{\infty s} + \Delta T)] = -\frac{t}{\tau} + C_1$$

مقدار ثابت  $C_1$  با استفاده از شرط مرزی بدست می‌آید. جواب نهائی عبارت است از:

$$T = T_s + \Delta T(1 - e^{-t/\tau}) \quad (2-3)$$

شکل ۲-۳ رسم دمای دماسنج بر حسب زمان را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳- دمای دماسنج بر اثر تغییر ناگهانی دمای محیط

اگرچه این روش صحیح است، اما در مهندسی کنترل همین مسئله از دیدگاه خاصی بررسی و حل می‌شود.

بدین ترتیب که:

۱- موازنه گذرای انرژی نوشته می‌شود، که همان رابطه (۱-۳) بدست می‌آید.

۲- موازنه انرژی در حالت پایدار نیز نوشته می‌شود:

$$0 = hA(T_{\infty S} - T_s) \quad (3-3)$$

۳- تفاضل این دو معادله عبارت است از:

$$\tau \frac{dT}{dt} = [(T_{\infty} - T_{\infty S}) - (T - T_s)]$$

۴- متغیرهای انحرافی<sup>۲۵</sup> به شکل زیر تعریف می‌شوند:

Time Constant

Deviation variables

$$T' = T - T_s \text{ و } T'_\infty = T_\infty - T_{\infty s} \quad (۴-۳)$$

این متغیرها میزان انحراف از حالت پایدار اولیه را نشان می‌دهند. در مهندسی کنترل میزان انحراف بیشتر از خود مقادیر مورد توجه می‌باشند. بنا بر این می‌توان نوشت که:

$$\tau \frac{dT'}{dt} = T'_\infty - T' \quad (۵-۳)$$

۵- تبدیل لاپلاس رابطه (۵-۳) برابر است با:

$$\tau [sT'(s) - T'(t=0)] = T'_\infty(s) - T'(s) \quad (۶-۳)$$

با توجه به تعریف متغیرهای انحرافی  $T'(t=0) = 0$ ، این یکی دیگر از مزایای متغیرهای انحرافی است. بنا بر این:

$$\frac{T'(s)}{T'_\infty(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (۷-۳)$$

این رابطه **تابع انتقال**<sup>۲۶</sup> دماسنج نامیده می‌شود. برای بدست آوردن دمای دماسنج در اثر تغییر ناگهانی در دمای محیط به ترتیب زیر عمل می‌شود. تابع دمای محیط، با استفاده از تعریف تابع پله‌ای، عبارت است از:

$$T_\infty = \begin{cases} T_{\infty s} & t < 0 \\ T_{\infty s} + \Delta T & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow T'_\infty = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \Delta T & t \geq 0 \end{cases} = \Delta T \cdot u(t)$$

تبدیل لاپلاس این تابع  $T'_\infty(s) = \Delta T/s$  بوده که در رابطه (۷-۳) جایگذاری می‌شود:

$$T'(s) = \frac{\Delta T}{s} \frac{1}{\tau s + 1}$$

معکوس لاپلاس این رابطه با استفاده از روش هویساید عبارت است از:

$$T'(s) = \frac{\Delta T}{s} + \frac{\Delta T}{s + 1/\tau} \Rightarrow T'(t) = \Delta T \left[ 1 - e^{-t/\tau} \right] \Rightarrow T(t) = T_s + \Delta T \left[ 1 - e^{-t/\tau} \right] \quad (۲-۳)$$

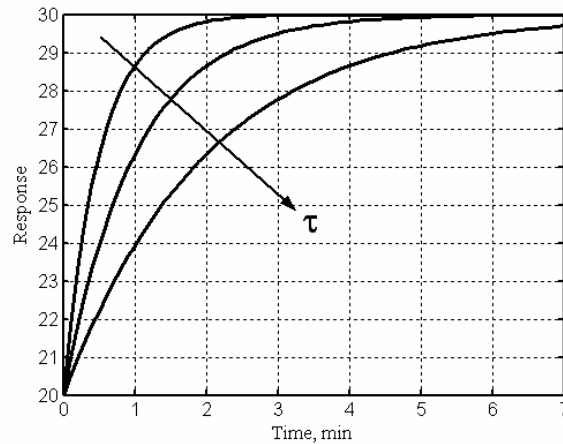
این همان رابطه (۲-۳) می‌باشد. بنا بر این جواب هر دو روش یکسان است، اما دیدگاه دوم روش معمول در کنترل فرآیندها می‌باشد. یکی از مزایای روش دوم آن است که اگر تابعی برای تغییرات دمای محیط وجود داشته باشد، می‌توان از آن تبدیل لاپلاس گرفته و در تابع انتقال قرار داده و پس از معکوس لاپلاس گیری جواب یا پاسخ سیستم<sup>۲۷</sup> بدست می‌آید.

---

Transfer function

System response

ثابت زمانی زمانی معیاری از سرعت پاسخگوئی فرآیند در مقابل تغییر ورودی است. هر چه ثابت زمانی کمتر باشد، آنگاه سرعت پاسخدهی کمتر خواهد بود. اصطلاحاً گفته می‌شود که دینامیک فرآیند سریع می‌باشد. همچنین مدت زمانی که فرآیند دارای تغییرات است تا به حالت پایدار جدید (*مقدار ماندگار*) برسد را رفتار دینامیکی فرآیند می‌گویند. شکل ۳-۳ نحوه پاسخدهی چند دماسنج با ثابت زمانی مختلف را نشان می‌دهد.

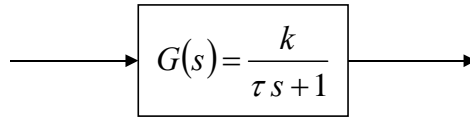


شکل ۳-۳- تغییر رفتار در اثر تغییر ثابت زمانی

### ۳-۳- خواص تابع انتقال

همانگونه که در رابطه (۷-۳) مشخص است، تابع انتقال نسبت متغیر خروجی به متغیر ورودی می‌باشد. در این مثال ورودی همان دمای محیط و خروجی همان دمای دماسنج است. تابع انتقال با  $G(s)$  نشان داده می‌شود. تابع انتقال حاوی مشخصه‌های دینامیکی سیستم است. ثابت زمانی معیاری از سرعت سیستم در پاسخ دهی به تغییرات ورودی است.

دماسنج یک سیستم درجه اول می‌باشد، زیرا دینامیک آن با یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بیان می‌شود. نمایش معمول در مهندسی کنترل، *دیاگرام جعبه‌ای*<sup>۲۸</sup> است. بدین ترتیب که هر سیستم با یک جعبه نشان داده شده و ورودی و خروجیهای آن با پیکان نشان داده می‌شود. شکل ۳-۴ دیاگرام جعبه‌ای دماسنج را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۴ - دیاگرام جعبه‌ای دماسنج

شکل عمومی سیستم مرتبه اول عبارت است از:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \quad (۸-۳)$$

که  $k$  بهره سیستم و  $\tau$  ثابت زمانی آن می‌باشد.

### ۳-۴ - بررسی دینامیک فرآیند

در مهندسی کنترل یکی از اقدامات اولیه بررسی دینامیک فرآیند است. منظور از بررسی دینامیکی عبارت است از بدست آوردن تابع انتقال فرآیند و همچنین محاسبه پاسخ سیستم نسبت به ورودیهای مختلف. معمولترین ورودیهای که در دینامیک فرآیندها بررسی می‌شود عبارتند از: ۱- ورودی پله‌ای، ۲- ورودی ایمپالس، و ۳- ورودی سینوسی.

### مثال ۳-۱ - پاسخ ایمپالس سیستم مرتبه اول

پاسخ ایمپالس سیستم مرتبه اول در مقابل ورودی ایمپالس به بزرگی  $A$  را بدست آورید.

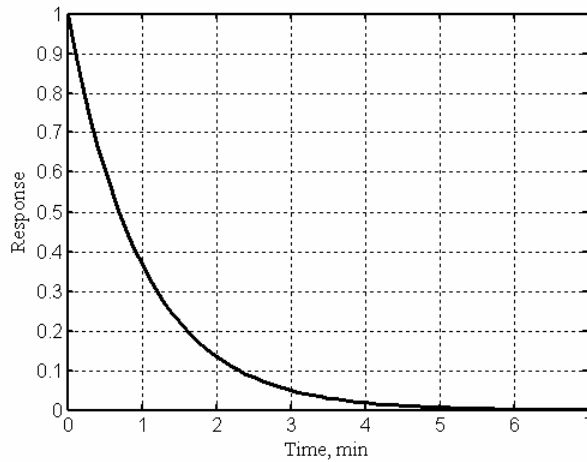
حل - ورودی به بزرگی  $A$  عبارت است از:

$$X(t) = A\delta(t) \Rightarrow X(s) = A$$

این عبارت در تابع انتقال قرار داده می‌شود:

$$Y(s) = A \frac{k}{\tau s + 1} \Rightarrow Y(t) = \frac{Ak}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (9-3)$$

شکل ۳-۵ این پاسخ را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۵- پاسخ ایمپالس سیستم درجه اول

### مثال ۳-۲- پاسخ سینوسی سیستم درجه اول

پاسخ سینوسی سیستم درجه اول در مقابل ورودی  $X(t) = A \sin \omega t$  را بدست آورید. تذکر-  $A$  دامنه و  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای نامیده می‌شود. واحد فرکانس زاویه‌ای  $rad/time$  است.

حل- تبدیل لاپلاس ورودی  $X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$  بوده که در تابع انتقال قرار داده می‌شود:

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{k}{\tau s + 1} = \frac{C_1 s + C_2}{s^2 + \omega^2} + \frac{C_3}{s + 1/\tau}$$

سمت راست با استفاده از روش کسرهای جزئی نوشته شده است. پس از انجام محاسبات بدست می‌آید که:

$$Y(t) = \frac{A\omega\tau}{\tau^2\omega^2 + 1} e^{-t/\tau} + \frac{A}{\tau^2\omega^2 + 1} \sin \omega t - \frac{A\omega\tau}{\tau^2\omega^2 + 1} \cos \omega t \quad (10-3)$$

با استفاده از رابطه  $A \cos \theta + B \sin \theta = \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\theta + \text{Arc tan} \frac{A}{B}\right)$  می‌توان نوشت که:



$$Y(t) = \frac{A\omega\tau}{\tau^2\omega^2 + 1} e^{-t/\tau} + \frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \sin(\omega t - \text{Arc tan } \omega\tau) \quad (11-3)$$

این جواب مشتمل بر دو قسمت است، جمله اول که با گذشت زمان به سمت صفر می‌رود، بنا بر این میرا است. جمله دوم همواره باقی می‌ماند بنا بر این بخش ماندگار جواب است:

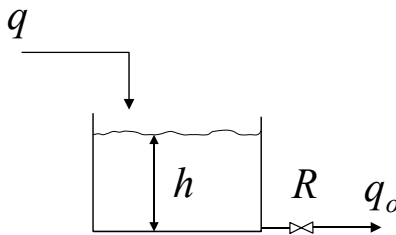
$$Y(t)|_{steady} = \frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \sin(\omega t - \text{Arc tan } \omega\tau) \quad (12-3)$$

اگر این جواب پایدار جدید را با ورودی مقایسه کنیم نتیجه می‌شود: اولاً پاسخ ورودی سینوسی نیز سینوسی با همان فرکانس زاویه‌ای می‌باشد، ثانیاً نسبت دامنه خروجی به ورودی  $A/\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}$  بوده که همواره کمتر از یک است، ثالثاً خروجی همواره نسبت به ورودی دارای تاخیر فاز  $\text{Arc tan } \omega\tau$  می‌باشد.

### ۳-۵- سیستم‌های درجه اول در حالت سری

دماسنج تنها فرآیند مرتبه اول نبوده و می‌توان فرآیندهای دیگری با دینامیک مرتبه اول پیدا کرد. گاهی سیستم‌های مرتبه اول در حالت سری هستند. در این بخش ابتداء مثال دیگری از سیستم مرتبه اول ارائه شده و سپس در حالت سری بررسی می‌شوند.

یک سیستم سطح مایع در تانک مطابق شکل ۳-۶ در نظر بگیرید. میزان دبی حجمی به تانک  $q$  بوده و حجم مایع داخل تانک  $V$  می‌باشد. دبی خروجی از تانک  $q_o = h/R$  بوده که از میان یک شیر با رفتار خطی عبور می‌کند.  $R$  مقاومت شیر می‌باشد. منظور از شیر با رفتار خطی آن است که دبی گذرنده از آن متناسب با ارتفاع مایع داخل تانک است.



شکل ۳-۶- تانک ارتفاع

در نظر است که تابع انتقال ارتفاع مایع داخل تانک نسبت به دبی ورودی به تانک بدست آید. بدین منظور موازنه جرم برای حجم مایع داخل تانک نوشته می‌شود:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho q - \rho_o q_o \quad (۱۳-۳)$$

برای سادگی فرض می‌شود که دانسیته مایع ثابت بوده و همچنین سطح مقطع تانک ثابت بوده و لذا  $V = Ah$ ، در نتیجه رابطه فوق تبدیل می‌شود به:

$$A \frac{dh}{dt} = q - \frac{h}{R} \quad (۱۴-۳)$$

طبق دستور العمل ذکر شده در بخش ۳-۲، این معادله از حالت پایدار کسر می‌شود:

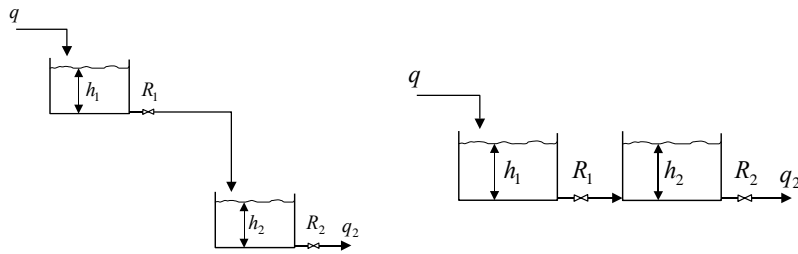
$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{dh}{dt} = q - \frac{h}{R} \\ 0 = q_s - \frac{h_s}{R} \end{array} \right. \Rightarrow A \frac{dh}{dt} = (q - q_s) - \frac{h - h_s}{R}$$

با تعریف متغیرهای انحرافی  $Q = q - q_s$ ،  $H = h - h_s$  و تبدیل لاپلاس گیری از طرفین می‌توان نوشت که:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{ARs + 1} \quad (۱۵-۳)$$

این رابطه، تابع ارتفاع مایع داخل تانک نسبت به دبی ورودی است. در اینحالت ثابت زمانی  $\tau = AR$  بوده و بهره سیستم  $R$  است. در اینمورد بهره نقش تبدیل واحد از ورودی (دبی) به خروجی (ارتفاع) را نیز دارد.

اکنون دو تانک ارتفاع مایع بطور سری فرض می‌شوند. البته این دو تانک را به دو صورت مختلف می‌توان بطور سری قرار داد. شکل ۳-۷ این دو حالت را نشان می‌دهد. در حالت الف دو تانک بر یکدیگر اثر متقابل نداشته و خروجی از تانک اول تاثیری از ارتفاع مایع در تانک دوم نمی‌پذیرد. در حالیکه، در حالت ب دو تانک بر یکدیگر اثر متقابل داشته و خروجی از تانک اول از ارتفاع مایع در تانک دوم تاثیر می‌پذیرد. در نتیجه انتظار می‌رود که این دو حالت رفتار دینامیکی متفاوتی داشته باشند.



شکل ۳-۷- دو تانک ارتفاع در حالت سری

### ۳-۵-۱- دو تانک ارتفاع در حالت سری و بدون اثر متقابل

هدف بدست آوردن تابع انتقال ارتفاع در تانک دوم نسبت به دبی ورودی به تانک اول  $H_2(s)/Q(s)$

می باشد. بدین منظور رابطه (۳-۱۵) برای هر یک از تانکها نوشته می شود:

$$\frac{H_1(s)}{Q(s)} = \frac{R_1}{\tau_1 s + 1} \quad (۳-۱۶)$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{R_2}{\tau_2 s + 1} \quad (۳-۱۷)$$

متغیرهای انحرافی در اینمورد عبارتند از:

$$Q = q - q_s, Q_1 = q_1 - q_{1s}, Q_2 = q_2 - q_{2s}, H_1 = h_1 - h_{1s}, H_2 = h_2 - h_{2s} \quad (۳-۱۸)$$

توجه شود که رابطه (۳-۱۵) قابل نوشتن است زیرا دبی خروجی از تانک اول تحت تاثیر ارتفاع مایع در تانک دوم نیست. رابطه رفتار خطی شیر در حالت پایدار نیز صحیح است و لذا:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{h_1}{R_1} \\ q_{1s} = \frac{h_{1s}}{R_1} \end{cases} \Rightarrow q_1 - q_{1s} = \frac{h_1 - h_{1s}}{R_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{H_1}{R_1} \Rightarrow Q_1(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \quad (۳-۱۹)$$

اکنون این رابطه در معادله (۳-۱۶) قرار داده شده حاصل عبارت است از:

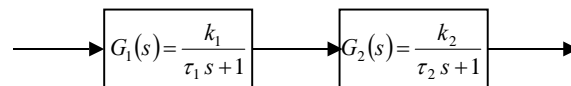
$$\frac{Q_1(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \quad (۳-۲۰)$$

(توجه شود که ورودی و خروجی دبی بوده و بهره مجدداً یک شده است). حاصل ضرب رابطه (۳-۱۷) و (۳-۲۰) تابع

انتقال مطلوب را ارائه می کند:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (21-3)$$

قابل ذکر است که رابطه (21-3) نشان می‌دهد که ارتباط  $h_2$  با  $q$  توسط یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بیان می‌شود، لذا این سیستم مثالی از سیستم درجه دوم می‌باشد. دیاگرام جعبه‌ای این سیستم مطابق شکل 3-8 است. در نتیجه تابع انتقال کلی سیستم‌های سری بدون اثر متقابل برابر با حاصلضرب تابع انتقال هر یک از آنها است.



شکل 3-8 - دیاگرام جعبه‌ای دو تانک ارتفاع در حالت سری بدون اثر متقابل

### 3-5-2 - دو تانک ارتفاع در حالت سری و با اثر متقابل

در حالتی که دو تانک بصورت با اثر متقابل سری می‌باشند، دبی خروجی از تانک اول تحت تاثیر اختلاف ارتفاع دو تانک می‌باشد. با فرض اینکه رفتار شیر خطی است، می‌توان نوشت که:

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \quad (22-3)$$

در نتیجه، دینامیک کامل این سیستم با معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} A_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \\ q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \\ q_2 = \frac{h_2}{R_2} \end{cases} \quad (23-3)$$

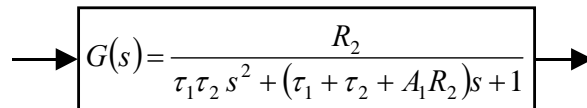
اگر این معادلات از معادلات در حالت پایدار کسر شده و پس از تبدیل لاپلاس بدست می‌آید که:

$$\begin{cases} A_1 s H_1(s) = Q(s) - Q_1(s) \\ A_2 s H_2(s) = Q_1(s) - Q_2(s) \\ R_1 Q_1(s) = H_1(s) - H_2(s) \\ R_2 Q_2(s) = H_2(s) \end{cases} \quad (24-3)$$

با حذف سه پارامتر  $Q_1$ ،  $Q_2$  و  $H_1$  بین این معادلات بدست می‌آید که:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2) s + 1} \quad (25-3)$$

شکل ۳-۹ نمودار دیاگرام جعبه‌ای این سیستم را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۹- دیاگرام جعبه‌ای دو تانک ارتفاع و با اثر متقابل

مثال ۳-۳- پاسخ پله‌ای دو تانک ارتفاع در حالت سری

دو تانک کاملاً مشابه بطور سری بسته می‌شوند. پاسخ پله‌ای واحد این دو تانک در دو حالت بدون اثر متقابل و با اثر متقابل را بدست آورده و با یکدیگر مقایسه کنید.

حل- در موردی که دو تانک کاملاً مشابه هستند می‌توان نوشت که:  $R_1 = R_2 = R$  ،  $A_1 = A_2 = A$  و

$\tau_1 = \tau_2 = \tau$  . ورودی  $Q(s) = \frac{1}{s}$  است. در حالت بدون اثر متقابل می‌توان نوشت که:

$$H_2(s) = \frac{1}{s} \frac{R}{(\tau s + 1)^2} \Rightarrow H_2(t) = R \left[ 1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \right]$$

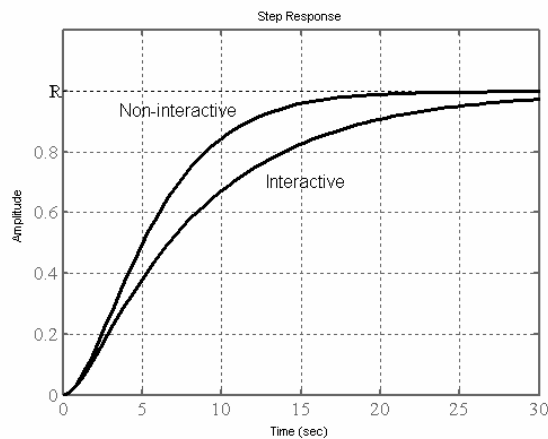
در حالت با اثر متقابل می‌توان نوشته که:

$$H_2(s) = \frac{1}{s} \frac{R}{(\tau^2 s^2 + 3\tau s + 1)^2} = \frac{1}{s} \frac{R}{(0.38\tau s + 1)(2.62\tau s + 1)} \Rightarrow$$

$$H_2(t) = R \left[ 1 + 0.17e^{-t/0.38\tau} - 1.17e^{-t/2.62\tau} \right]$$

شکل ۳-۱۰ رسم این دو پاسخ را نشان می‌دهد. همانگونه که انتظار می‌رفت، پاسخ سیستم با اثر متقابل کندتر است.

دلیل این موضوع آن است که ارتفاع مایع در تانک دوم مانعی بر سر جریان بوده که در حالت بدون اثر متقابل وجود ندارد.



شکل ۳-۱۰- رفتار دو تانک ارتفاع

سیستم درجه دوم فرآیندی است که دینامیک آن توسط معادله دیفرانسیل مرتبه دوم قابل بیان است. دو سیستم درجه اول سری مثالی از این نوع سیستمها می باشد. شکل کلی سیستم درجه دوم بصورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \quad (۲۶-۳)$$

که  $k$  بهره سیستم،  $\tau$  ثابت زمانی و  $\zeta$  (این پارامتر زتا خوانده می شود) ضریب میرایی نامیده می شود.

### مثال ۳-۴ - سیستم درجه دوم

برای تابع انتقال فرآیند دو تانک ارتفاع در حالت سری با اثر متقابل، پارامترهای تابع انتقال سیستم درجه دوم را بدست آورید.

حل -

تابع انتقال در این حالت رابطه (۲۵-۳) می باشد:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1R_2)s + 1}$$

در مقایسه با رابطه (۲۶-۳) می توان نوشت که:

$$k = R_2, \quad \tau = \sqrt{\tau_1\tau_2}, \quad \zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2 + A_1R_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

### مثال ۳-۵ - پاسخ پله ای سیستم درجه دوم

پاسخ پله ای واحد سیستم مرتبه دوم را بدست آورید.

حل - در رابطه (۲۶-۳)  $X(s) = 1/s$  قرار داده می شود:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} = \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{s} \frac{k}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

که  $s_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$  می باشد. از آنجا که ریشه ها می توانند موهومی باشند، جواب می تواند ماهیت نوسانی

داشته باشد. اگر  $\zeta < 1$  باشد، جواب عبارت است از:

$$Y(t) = k \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/\tau} \sin \left( \sqrt{1-\zeta^2} \frac{t}{\tau} + \text{Arc tan} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \quad (27-3)$$

پارامتر  $\zeta$  در توان قرار دارد و هر چه بزرگتر باشد، جواب سریعتر به مقدار پایدار جدید خواهد رسید. به همین علت، آنرا ضریب میرائی می‌نامند.

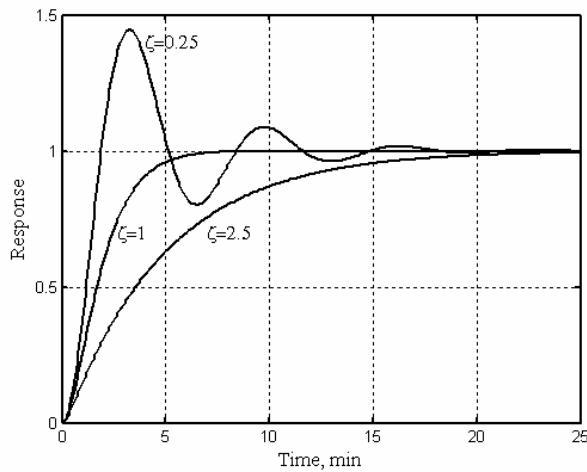
اگر  $\zeta = 1$  باشد، جواب عبارت است از:

$$Y(t) = k \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] \quad (28-3)$$

اگر  $\zeta > 1$  باشد، جواب خواهد بود:

$$Y(t) = k \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/\tau} \left( \cosh \sqrt{1-\zeta^2} \frac{t}{\tau} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sinh \sqrt{1-\zeta^2} \frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (29-3)$$

شکل ۱۱-۳ این سه جواب را نشان می‌دهد. همانگونه که در شکل واضح است در دو حالت میرای بحرانی و فوق میرا، جواب به پاسخ پله‌ای سیستم درجه اول بسیار نزدیک بوده و غیر نوسانی می‌باشد. اما حالت تحت میرا جدید بوده و مکرراً در سیستم‌های کنترلی چنین رفتاری مشاهده می‌شود. مشخصه‌های این رفتار بطور جزئی بحث می‌گردند.

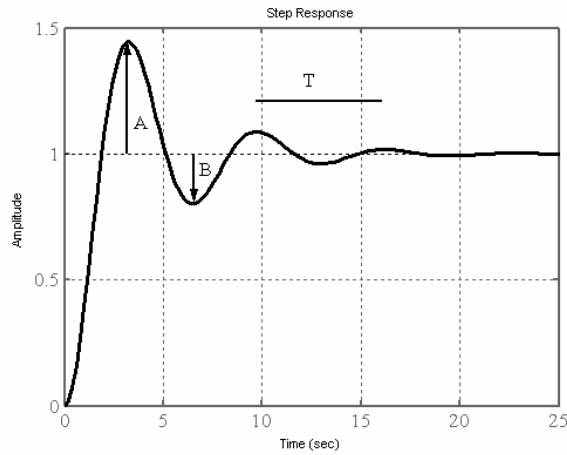


شکل ۱۱-۳- پاسخ پله‌ای سیستم درجه دوم



### ۷-۳- مشخصه‌های پاسخ پله‌ای تحت میرای سیستم مرتبه دوم

شکل ۱۲-۳ یک نمونه از پاسخ پله‌ای سیستم مرتبه دوم تحت میرا را نشان می‌دهد. بر روی این شکل مشخصه‌های مهم نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۲-۳- پاسخ پله‌ای تحت میرای سیستم درجه دوم

حد اکثر انحراف<sup>۲۹</sup> معیاری از بیشترین انحراف از مقدار ماندگار است:

$$\text{overshoot} = \frac{A}{k} = \exp\left(\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (۳۰-۳)$$

ضریب میرایی<sup>۳۰</sup> نسبت دو قله متوالی می‌باشد:

$$\text{Decay ratio} = \frac{C}{A} = \exp\left(\frac{-2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (۳۱-۳)$$

زمان خیزش زمانی<sup>۳۱</sup> است که جواب برای اولین بار به مقدار پایدار جدید می‌رسد:

$$\text{Risetime} = \frac{\left[ \pi - \text{Arc tan} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right] \tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (۳۲-۳)$$

Overshoot

Decay ratio

زمان پاسخ<sup>۳۲</sup> برابر زمانی است که جواب به فاصله پنج درصدی از مقدار پایدار جدید می‌رسد:

$$\text{Re sponse time} = \frac{3\tau}{\zeta} \quad (33-3)$$

### ۳-۸- سیستم غیر خطی

فرآیندهای که تاکنون بررسی شدند، با توجه به فرضیات اعمال شده به معادلات دیفرانسیل خطی منجر شدند. اما در مورد فرآیندهای واقعی، عموماً معادلات دیفرانسیل غیرخطی بدست می‌آیند. به چنین فرآیندهای سیستم‌های غیرخطی<sup>۳۳</sup> گفته می‌شود. اگرچه روش کنترل غیرخطی نیز وجود دارد، اما اولاً وسعت آن محدود بوده و ثانیاً پیچیدگی ویژه‌ای دارد. در چنین مواردی یکی از روشها تقریب خطی فرآیند می‌باشد. بدین ترتیب که جملات غیر خطی در معادله با استفاده از دو جمله اول بسط تیلور<sup>۳۴</sup> خطی می‌شود. بسط تیلور عبارت است از:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{d^2f(x_0)}{2!dx^2}(x - x_0)^2 + \dots \quad (34-3)$$

بطور مثال فرآیند تانک ارتفاع را مجدداً در نظر بگیرید. دبی خروجی از تانک متناسب با ارتفاع مایع داخل تانک نیست. در واقع شیر رفتار خطی ندارد. رابطه معمول در مکانیک سیالات عبارت است از:

$$q_o = C\sqrt{h} \quad (35-3)$$

که یک عبارت خیرخطی می‌باشد. بنا بر این موازنه جرم عبارت است از:

$$A \frac{dh}{dt} = q - C\sqrt{h} \quad (36-3)$$

این معادله غیرخطی بوده و نمی‌توان از روش تبدیل لاپلاس استفاده کرد. به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت که:

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_s} + \frac{2}{\sqrt{h_s}}(h - h_s) \quad (37-3)$$

که  $h_s$  ارتفاع در حالت پایدار است. با قرار دادن در رابطه بالا می‌توان نوشت که:

---

Rise time

Response time

Non linear systems

Taylor expansion series

$$A \frac{dh}{dt} = q - C \left[ \sqrt{h_s} + \frac{2}{\sqrt{h_s}}(h - h_s) \right] \quad (38-3)$$

اکنون این معادله خطی بوده و می توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد. البته ابتداء طبق معمول معادله حالت پایدار از آن کسر می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{dh}{dt} = q - C \left[ \sqrt{h_s} + \frac{2}{\sqrt{h_s}}(h - h_s) \right] \\ 0 = q_s - C\sqrt{h_s} \end{array} \right. \Rightarrow A \frac{dh}{dt} = (q - q_s) - \frac{2C}{\sqrt{h_s}}(h - h_s) \quad (39-3)$$

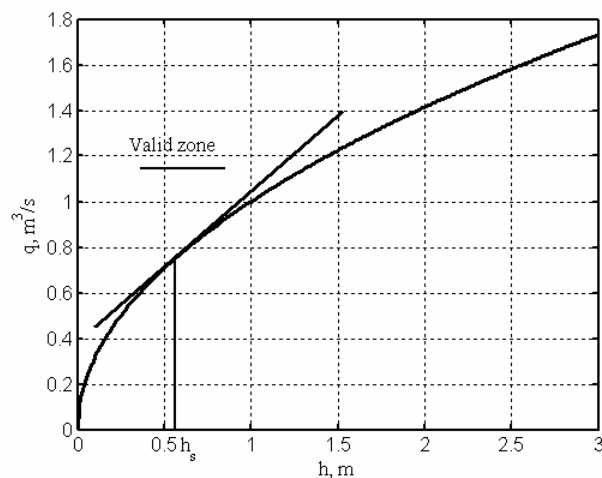
با استفاده از متغیرهای انحرافی می توان نوشت که:

$$A \frac{dH}{dt} = Q - \frac{2C}{\sqrt{h_s}} H = Q - \frac{1}{R} H \quad \text{where} \quad R = \frac{\sqrt{h_s}}{2C} \quad (40-3)$$

تبدیل لاپلاس گیری از این رابطه و نوآرائی آن می دهد که:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{ARs + 1} \quad (41-3)$$

اگرچه این تابع انتقال مشابه (3-15) می باشد، اما دقت شود که بهره و ثابت زمانی تابعی از  $h_s$  یا وضعیت پایدار هستند. بنابراین، خطی سازی وابسته به نقطه خطی سازی می باشد. شکل زیر مفهوم هندسی خطی سازی را نشان می دهد. شکل 3-13 نمایش ترسیمی مفهوم خطی سازی می باشد.



شکل 3-13 - مفهوم ترسیمی خطی سازی فرآیند

### ۳-۹- زمان مرده

بعضی از سیستم‌ها دارای نوعی از تاخیر در خروجی هستند که با **زمان مرده**، **زمان تاخیر** یا **تاخیر انتقالی**<sup>۳۵</sup> شناخته می‌شود. زمان مرده ممکن است عامل درونی یا بیرونی داشته باشد. بطور مثال، فرض کنید که یک دماسنج دمای خروجی از یک تانک را در فاصله  $L$  از خروجی درون لوله‌ای عایق‌بندی شده را اندازه‌گیری می‌کند. در نتیجه دمای خروجی از تانک پس از عبور از لوله اندازه‌گیری می‌شود. در بررسی دینامیک فرآیند یا مطالعات کنترلی می‌بایست اثر زمان مرده را وارد کرد.

بنا بر این، ارتباط دمای جریان ورودی به لوله و دمای دماسنج ارتباط زیر برقرار است:

$$y(t) = x(t - \tau_d) \quad (۳-۴۲)$$

که  $\tau_d$  زمان مرده است. تابع انتقال زمان مرده خواهد بود:

$$y(t) - y_s = x(t - \tau_d) - x_s \Rightarrow Y(s) = X(s)e^{-\tau_d s} \quad (۳-۴۳)$$

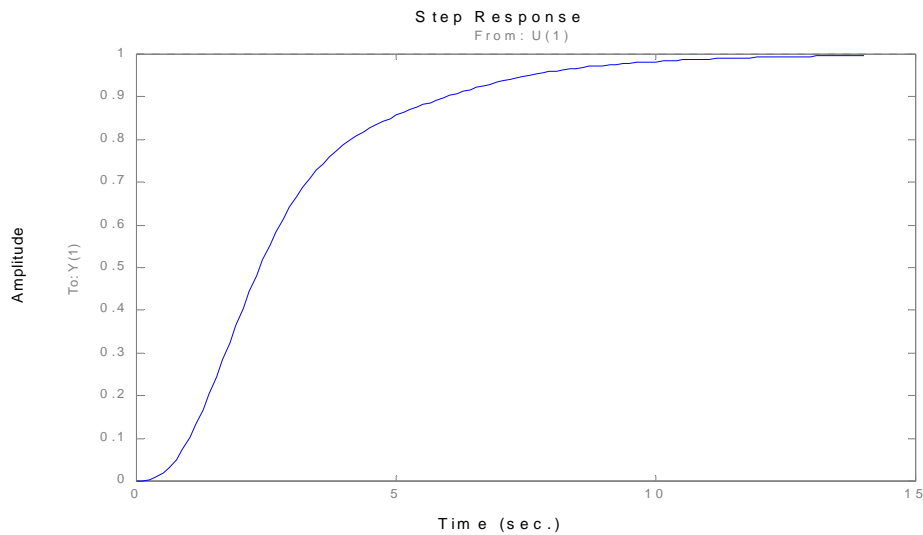
### ۳-۱۰- شناسائی سیستم<sup>۳۶</sup>

اگرچه می‌توان تابع انتقال سیستم‌های با درجه بالاتر را بدست آورده و دینامیک آنها را بررسی کرد، اما یک روش ساده‌تر آن است که سیستم‌های دیگر را با سیستم مرتبه اول یا دوم بعلاوه زمان مرده (در صورت نیاز) تقریب زد. سیستم‌ها بطور کلی دو نوع رفتار در مقابل ورودی پله‌ای نشان می‌دهند: ۱- رفتار غیرنوسانی که بدون نوسان بسمت مقدار ماندگار می‌رود، ۲- رفتار نوسانی با ماکزیمم انحراف که پس از نوسان بسمت مقدار ماندگار می‌رود.

یک سیستم درجه سوم با تابع انتقال زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 1} \quad (۳-۴۴)$$

پاسخ پله‌ای واحد این سیستم در شکل ۳-۱۴ رسم شده است.



شکل ۳-۱۴- پاسخ پله‌ای واحد سیستم درجه سوم

این سیستم را می‌توان با یک سیستم درجه اول با زمان مرده تقریب زد.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k e^{-\tau_d s}}{\tau s + 1} \quad (3-45)$$

مقدار بهره  $k$  مقدار جواب در  $t \rightarrow \infty$  است. برای بدست آوردن ثابت زمانی و زمان مرده روشهای متفاوتی وجود دارد. یک روش آن است که مدت زمان  $1.0 s$  را بعنوان زمان مرده در نظر گرفته و مدت زمانی که جواب به  $63.2\%$  مقدار نهائی ثابت زمانی  $3.0 - 1.0 = 2.0 s$  است. روش دوم رسم مماس در نقطه عطف می‌باشد که تقاطع با محور زمان، زمان مرده و تقاطع با مقدار پایدار جدید، ثابت زمانی را می‌دهد.

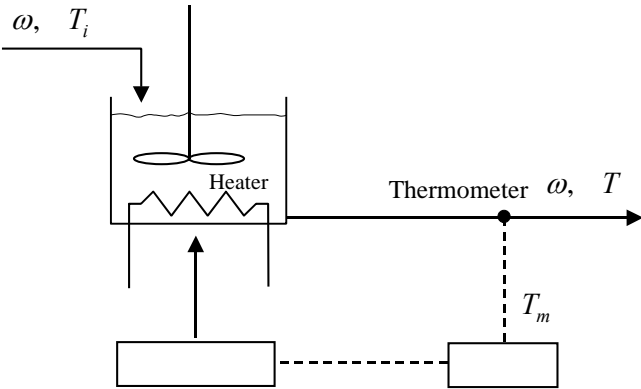
فعالیت خارج از کلاس ۳-۱- روش‌های شناسائی سیستم درجه دوم غیرنوسانی و نوسانی را بدست آورید.

\_\_\_\_\_

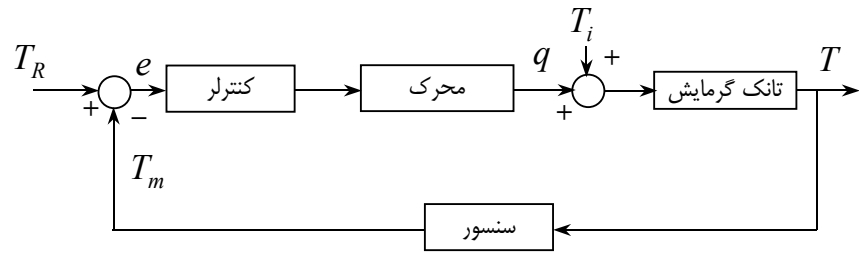
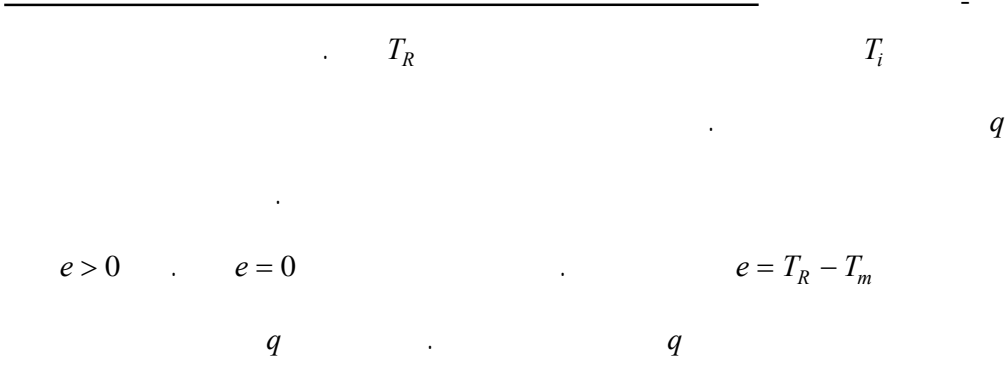
--

--

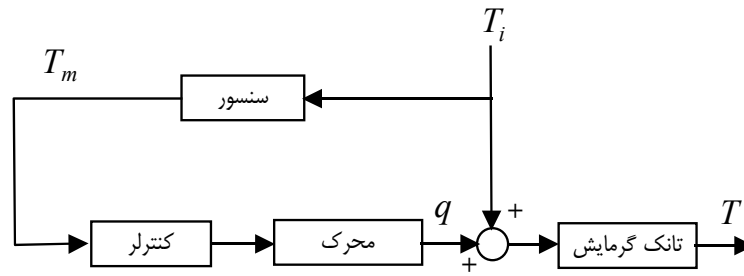
w



--



$e = 0$



$$\rho CV \frac{dT}{dt} = wC(T_i - T_{ref}) - wC(T - T_{ref}) + q \quad ( - )$$

$$\rho CV \frac{dT}{dt} = wC(T_i - T_{is}) - wC(T - T_s) + q - q_s \quad ( - )$$

$$T'_i = T_i - T_{is}, \quad T' = T - T_s, \quad Q = q - q_s \quad ( - )$$

$$\frac{\rho V}{w} \frac{dT'}{dt} = T'_i - T' + \frac{Q}{wC} \quad ( - )$$

$$\tau = \rho V / w$$

$$T'(s) = \frac{1}{\tau s + 1} T'_i(s) + \frac{1/wC}{\tau s + 1} Q(s) \quad ( - )$$



$$\frac{T'(s)}{T_i'(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

( - )

(PT100 )

$$\frac{T_m'(s)}{T'(s)} = \frac{1}{\tau_m s + 1}$$

( - )

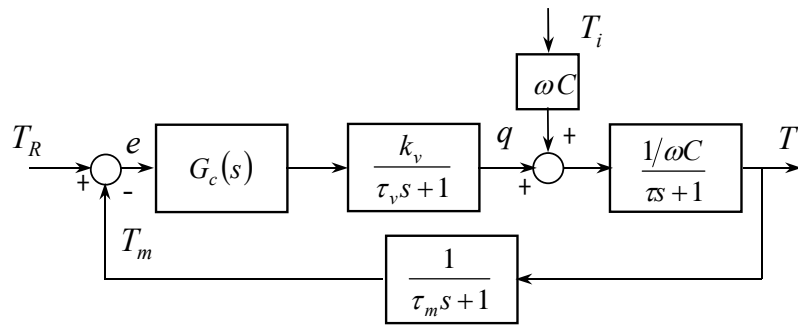
$T_m'(s)$

$$\frac{Q(s)}{M(s)} = \frac{k_v}{\tau_v s + 1}$$

( - )

$M(s)$

$\tau_v$   $k_v$



$m$              $e$              $G_c(s)$              $e$              $m$

$e > 0$

$q$              $m$              $q$

$(P)$

$m(t) = m_s + k_c e(t)$              $(-)$

$m(t)$              $k_c$              $e(t)$

$M = m - m_s = k_c e \Rightarrow M(s) = k_c e(s)$              $(-)$

Proportional controller

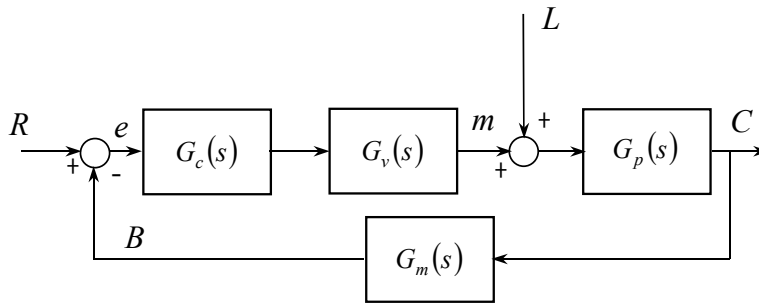
	:	<i>P</i>	-
$\frac{M(s)}{e(s)} = k_c$			( - )
	:	( <i>PI</i> )	-
$m(t) = m_s + k_c e(t) + \frac{k_c}{\tau_I} \int_0^t e(t) dt$			( - )
	:	<i>PI</i>	$\tau_I$
$\frac{M(s)}{e(s)} = k_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$			( - )
	:	( <i>PD</i> )	-
$m(t) = m_s + k_c e(t) + k_c \tau_D \frac{de(t)}{dt}$			( - )
	:	<i>PD</i>	$\tau_D$
$\frac{M(s)}{e(s)} = k_c (1 + \tau_D s)$			( - )
	:	( <i>PID</i> )	- -
$\frac{M(s)}{e(s)} = k_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$			( - )
		$\tau_D \quad \tau_I \quad k_c$	

---

Proportional-Integral controller  
Proportional-Derivative controller  
Proportional-Integral-Derivative controller  
Controller design

$G_c(s) \quad G_v(s) \quad G_m(s) \quad G_p(s)$

*Servo*



$R = 0$

$$\begin{cases} B = G_m C \\ e = -B \\ Q = G_c G_v e \\ C = G_p (L + Q) \end{cases} \quad ( - )$$

$Q \quad e \quad B$

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m} \quad ( - )$$

$L = 0$

*Servo*

( - )

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m}$$

:  $G_{op}(s)$

$$G_{op}(s) = G_c G_v G_p G_m \quad ( - )$$

$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y}{1 + X}$
---------------------------------------

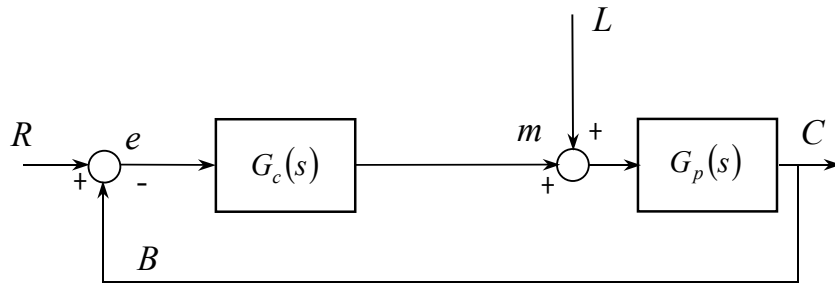
:

$$\tau_m = 0$$

$$\tau_v, \tau_m < 0.15\tau_p$$

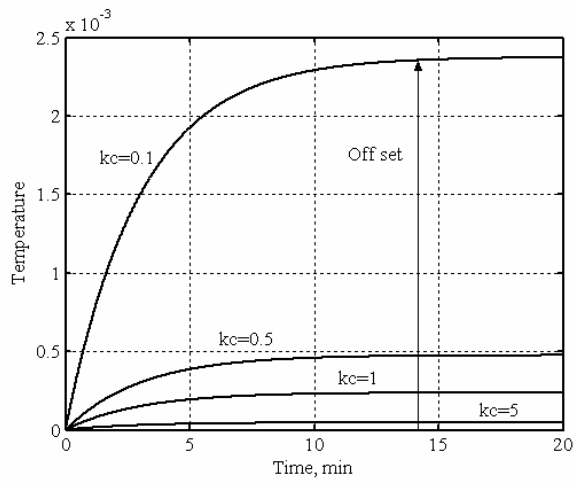
$$\tau_v = 0$$

Open loop transfer function



$$\frac{T'(s)}{T_i'(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + k_c/wC} = \frac{1}{\frac{1 + k_c/wC}{\tau} s + 1} \quad ( - )$$

$$\tau_{cl} < \tau \quad .k_{cl} = \frac{1}{1 + k_c/wC} \quad \tau_{cl} = \frac{\tau}{1 + k_c/wC} :$$



Offset error

---


$$\text{offset} = R(\infty) - C(\infty) = T'_R(\infty) - T'(\infty) \quad ( - )$$

:

$$\text{offset} = 0 - \frac{1}{1 + k_c/wC} = \frac{1}{1 + k_c/wC} \quad ( - )$$

$$k_c \rightarrow \infty \quad ( - )$$

( - )

PI

:

$$\frac{T'(s)}{T'_i(s)} = \frac{1/(\tau s + 1)}{1 + k_c(1 + 1/\tau_I s)(k_c/wC/(\tau s + 1))} \quad ( - )$$

$$\frac{T'(s)}{T'_i(s)} = \frac{(wC\tau_I/k_c)s}{(wC\tau\tau_I/k_c)s^2 + \tau_I(1 + wC/k_c)s + 1} \quad ( - )$$

:

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_I}{\tau}} \frac{1 + k_c/wC}{\sqrt{k_c/wC}} \quad \tau_{cl} = \sqrt{\frac{wC\tau\tau_I}{k_c}} \quad k_{cl} = \frac{wC\tau_I}{k_c} \quad ( - )$$

: ( - )

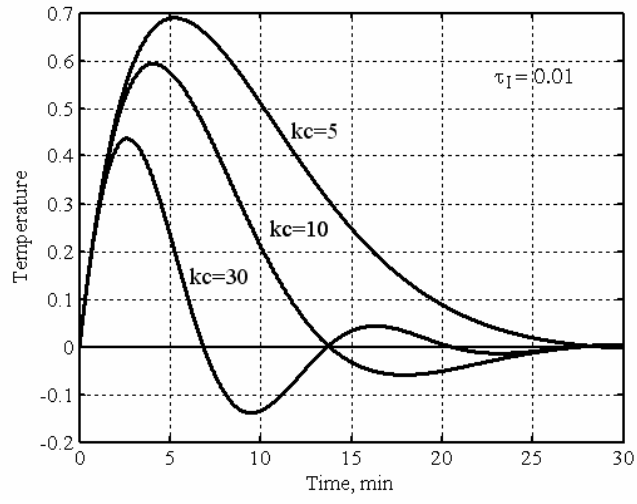
$\zeta < 1$

$$T'(t) = k_{cl} \left( \frac{1}{\tau_{cl}} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta t/\tau_{cl}} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{t}{\tau_{cl}} \right) \quad ( - )$$

:

$$\text{offset} = T'_R(\infty) - T'(\infty) = 0 - 0 = 0 \quad ( - )$$

-



*PI*

- -

Servo



\_\_\_\_\_

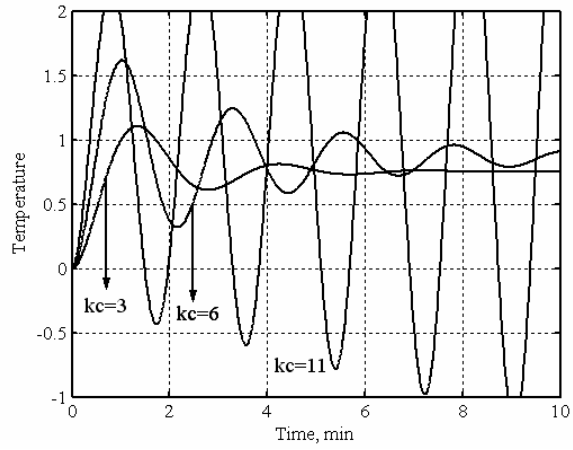
--

--

*PI*

$k_c$  Servo

$k_c$



$k_c$

--

---

$t \rightarrow \infty$

$$C(s) = \frac{G_p L(s) + G_c G_v G_p R(s)}{1 + G_{op}(s)} \quad ( - )$$

$$1 + G_{op}(s) = 0$$

$$1 + G_{op}(s) = 0$$

$$G_m(s) = 1 \quad G_v(s) = 1 \quad G_c(s) = \frac{5s+1}{s} \quad G_p(s) = \frac{0.8}{2s+1}$$

$$1 + G_{op}(s) = 1 + \frac{0.8(5s+1)}{s(2s+1)} = \frac{2s^2 + 5s + 0.8}{s(2s+1)} = 0$$

-2.328    -0.172

---

Stable

Characteristic eq.

---

MATALB

roots

$s$

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad a_0 > 0 \quad ( - )$$

$a_i$

1	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	
2	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	
3	$b_1$	$b_2$	$b_3$		
4	$c_1$	$c_2$	$c_3$		
5	$d_1$	$d_2$			
6	$e_1$	$e_2$			
$\vdots$	$f_1$				
n+1	$g_1$				

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1a_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

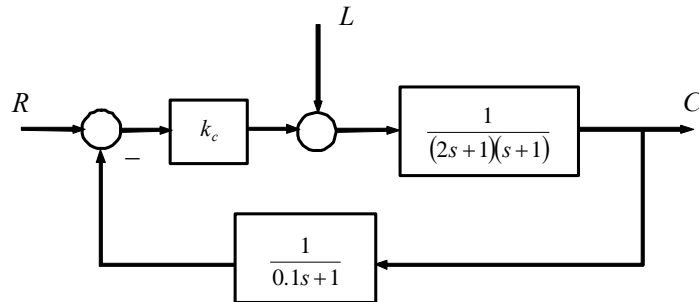
$\vdots$                        $\vdots$

( - )

$$Cs^2 + D = 0 \Rightarrow s = \pm \sqrt{\frac{D}{C}} \quad ( - )$$

$(n-1) \quad D \quad C$

$\tau_I \quad \tau_D \quad \tau_I \quad k_c$   
 $k_c \quad \tau_D$



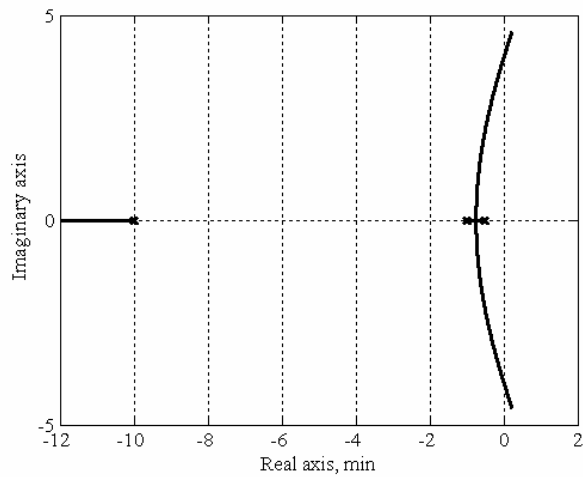
$$1 + \frac{k_c}{(2s+1)(s+1)(0.1s+1)} = 0$$

---

 $k_c$  $k_c$ 

			$k_c$
-	-	- ,	
- ,	- ,	- ,	,
- ,	- ,	- ,	,
- ,	- ,	- ,	,
- ,	- , + , I	- , - , I	,
- ,	- , + , I	- , - , I	,
- ,	- , + , I	- , - , I	
- ,	- , + , I	- , - , I	
- ,	+ , I	- , I	,
- ,	, + , I	, - , I	

 $( ) k_c$  $k_c$



$k_c$

$$1 + G_{op}(s) = 1 + K \frac{N}{D} = 1 + K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = 0 \quad ( - )$$

$p_j$

$z_i$

$D \quad N$

$$n \geq m$$

$n$

$$n - m$$

Zero

Pole

$n - m$

$$\gamma = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad ( - )$$

$$slope = (2k + 1) \frac{\pi}{n - m} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1 \quad ( - )$$

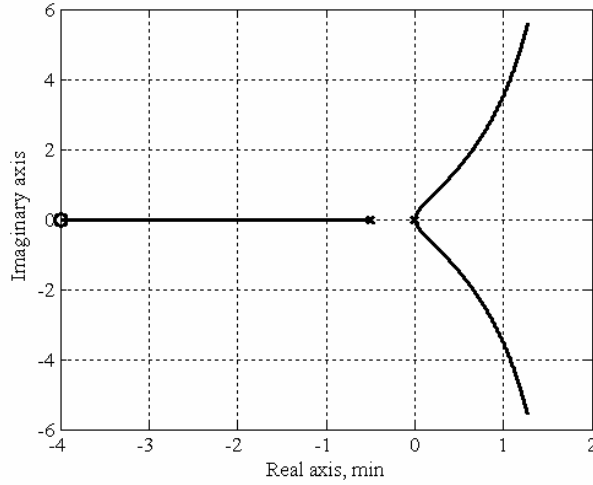
$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} \quad ( - )$$

$\pm \pi/2$

$$\theta = \frac{1}{q} \left[ (2k + 1)\pi + \sum_{i=1}^m \angle(p_a - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq a}}^n \angle(p_a - p_j) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, q - 1 \quad ( - )$$

$$\theta = \frac{1}{q} \left[ (2k + 1)\pi + \sum_{j=1}^n \angle(z_b - p_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq b}}^m \angle(z_b - z_i) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, q - 1 \quad ( - )$$

$$G_{op}(s) = \frac{s+4}{s^2(2s+1)}$$



$$K \frac{N}{D} = -1 \Rightarrow K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = -1 \quad ( - )$$

$$K \frac{|s-z_1||s-z_2|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|} = 1 \quad ( - )$$

$$\begin{aligned} \angle(s-z_1) + \angle(s-z_2) + \cdots + \angle(s-z_m) \\ - \angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) - \cdots - \angle(s-p_n) = (2i+1)\pi \end{aligned} \quad ( - )$$

Breakaway point



---

( - )

( - )

*K*

( - )

*P*

:

.*PID PD PI*

*P*

*PI*

*PID*

*PID*

Simulink

MATLAB

)

(

---

-

:

-

-

-

- - - -

-

Servo

-

-

-

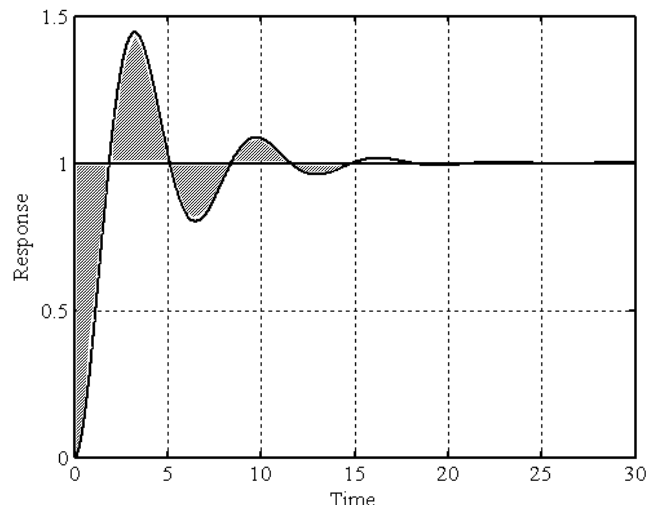
-

-

---

<sup>1</sup> Pole displacement method  
<sup>2</sup> Optimum

1/4



$$IAE = \int_0^{\infty} |e| dt$$

( - )

---


$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e|dt \quad ( - )$$

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2 dt \quad ( - )$$

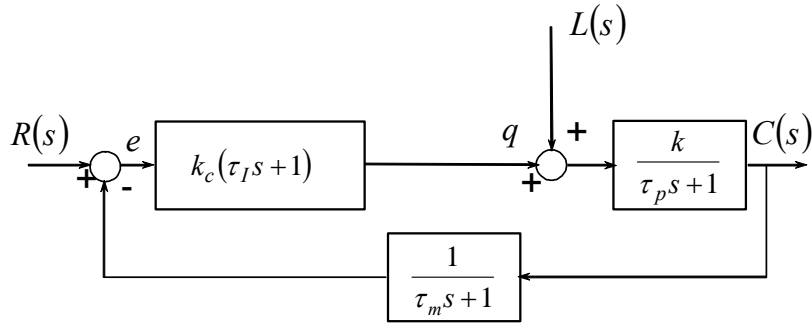
$$\int_0^{\infty} te^2 dt \quad ( - )$$

(Servo )

*PI*      *ITAE*

---

<sup>1</sup> Integral of the Absolute value of the Error  
<sup>2</sup> Integral of the Time wighted of the absolute value of the Error  
<sup>3</sup> Integral of the Squre value of the Error



- -

:

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{\frac{k}{\tau_p s + 1}}{1 + \frac{k_c(\tau_I s + 1)}{s} \cdot \frac{k}{\tau_p s + 1} \cdot \frac{1}{\tau_m s + 1}} = \frac{k(\tau_m s^2 + s)}{\tau_p \tau_m s^3 + (\tau_p + \tau_m)s^2 + (1 + k \cdot k_c \tau_I)s + k \cdot k_c}$$

:

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{k(\tau_m s^2 + s)}{\tau_p \tau_m s^3 + (\tau_p + \tau_m)s^2 + (1 + k \cdot k_c \tau_I)s + k \cdot k_c}$$

:

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{k(\tau_m s^2 + s)}{\tau_p \tau_m s^3 + (\tau_p + \tau_m)s^2 + (1 + k \cdot k_c \tau_I)s + k \cdot k_c} \right\}$$

:

$$e(t) = R(t) - C(t) = R(t) - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{k(\tau_m s^2 + s)}{\tau_p \tau_m s^3 + (\tau_p + \tau_m)s^2 + (1 + k \cdot k_c \tau_I)s + k \cdot k_c} \right\}$$

:

ITAE

$$ITAE = \int_0^{\infty} t \left| R(t) - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{k(\tau_m s^2 + s)}{\tau_p \tau_m s^3 + (\tau_p + \tau_m)s^2 + (1 + k \cdot k_c \tau_I)s + k \cdot k_c} \right\} \right| dt$$

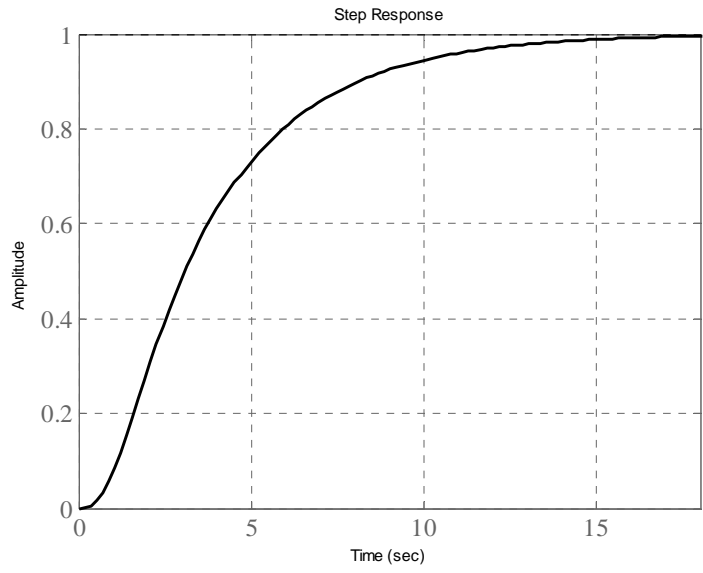
---

$$\begin{cases} \frac{\partial ITAE}{\partial k_c} = 0 \\ \frac{\partial ITAE}{\partial \tau_I} = 0 \end{cases}$$

**Cohen-Coon** - -

Cohen-Coon

*IAE*



$$G_p(s) = \frac{k_p e^{-T_d s}}{Ts + 1}$$

( - )

Cohen-Coon

	$k_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
$P$	$\frac{1}{k_p} \frac{T}{T_d} \left( 1 + \frac{T_d}{3T} \right)$	-----	-----
$PI$	$\frac{1}{k_p} \frac{T}{T_d} \left( \frac{9}{10} + \frac{T_d}{12T} \right)$	$T_d \frac{30 + 3T_d/T}{9 + 20T_d/T}$	-----
$PD$	$\frac{1}{k_p} \frac{T}{T_d} \left( \frac{5}{4} + \frac{T_d}{6T} \right)$	-----	$T_d \frac{6 - 2T_d/T}{22 + 3T_d/T}$
$PID$	$\frac{1}{k_p} \frac{T}{T_d} \left( \frac{4}{3} + \frac{T_d}{4T} \right)$	$T_d \frac{32 + 6T_d/T}{13 + 8T_d/T}$	$T_d \frac{4}{11 + 2T_d/T}$

\_\_\_\_\_

-  
--

:

$\tau_D$

$\tau_I$  -

$k_c$  -

$k_c$  .

1.2-1.5  $\tau_I$  .

$\tau_I$  -

0.5-0.6  $\tau_D$  .

$\tau_D$  -



---

--

--

:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \quad ( - )$$

:

$$AR = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}, \quad \varphi = -Arc \tan(\tau\omega) \quad ( - )$$

$$(j = \sqrt{-1}) \quad j\omega \quad s \quad .$$

:

$$G(j\omega) = \frac{k}{\tau \omega j + 1} \quad ( - )$$

:

---

Substitution Rule

$$a + bj = r \angle \theta, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

:

$$G(j\omega) = \frac{k}{\tau \omega j + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \angle -\arctan(\tau \omega) \quad ( - )$$

$G(j\omega)$

$j\omega \quad s \quad :$

$$G(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\tau \zeta s + 1} \xrightarrow{s \rightarrow j\omega} G(j\omega) = \frac{k}{-\tau^2 \omega^2 + 2\tau \zeta \omega j + 1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\zeta \tau \omega)^2}} \angle \text{Arc tan} \left( \frac{-2\zeta \tau \omega}{1 - \omega^2 \tau^2} \right)$$

$$G(s) = e^{-\tau_d s} \xrightarrow{s \rightarrow j\omega} G(j\omega) = e^{-\tau_d \omega j} = \cos \tau_d \omega - j \sin \tau_d \omega$$

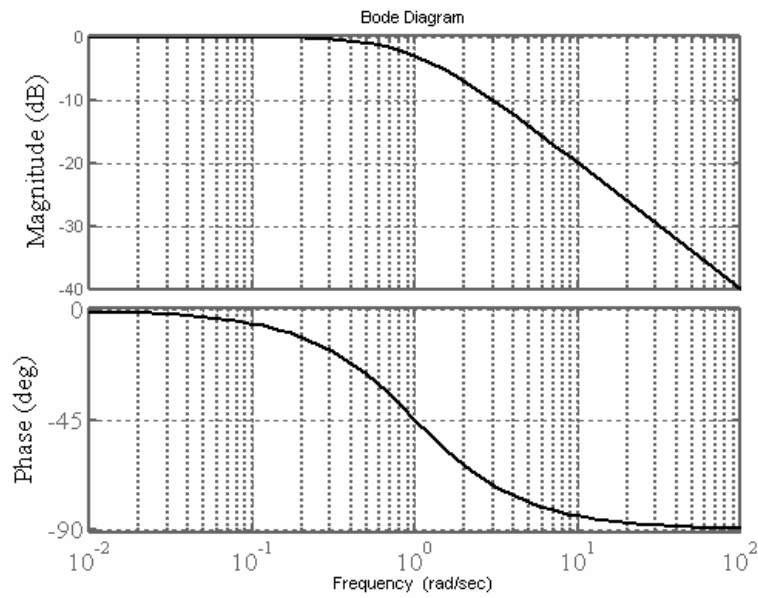
$$AR = |e^{-\tau_d \omega j}| = 1, \quad \varphi = \angle e^{-\tau_d \omega j} = -\tau_d \omega$$

---

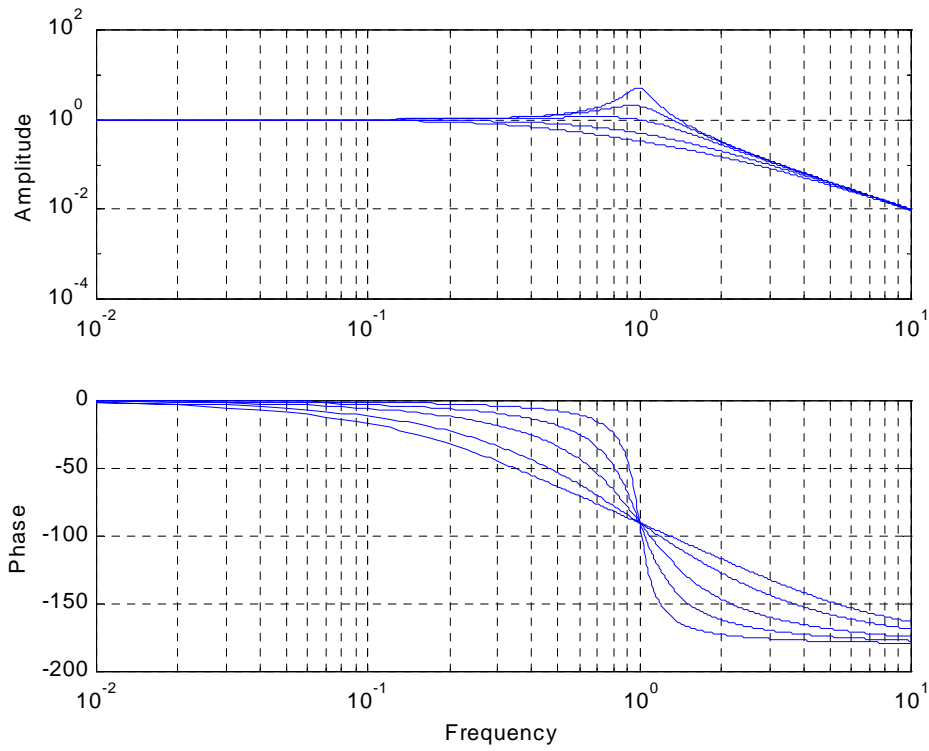
$$\log AR = -\frac{1}{2} \log \left[ 1 + (\tau \omega)^2 \right]$$

( - )

( - )



$$\log AR = -\frac{1}{2} \left[ 1 + (2\tau\omega)^2 (\zeta^2 - 1) + (2\tau\omega)^4 \right]$$



$$G_p(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdots G_n(s)$$

( - )

---


$$AR = |G_p(j\omega)| = |G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdots G_n(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdots |G_n(j\omega)| \quad ( - )$$

$$= AR_1 \cdot AR_2 \cdots AR_n$$

$$\log AR = \log\{AR_1 \cdot AR_2 \cdots AR_n\} = \log AR_1 + \log AR_2 + \cdots + \log AR_n \quad ( - )$$

:

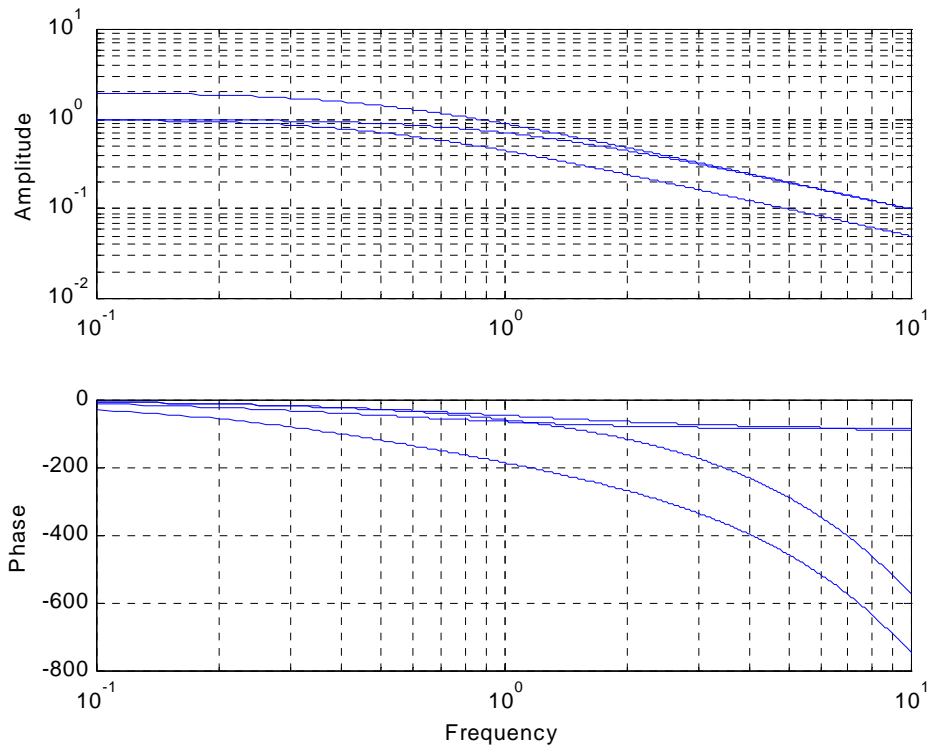
$$\varphi = \angle G_p(j\omega) = \angle\{G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdots G_n(j\omega)\} = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \cdots + \angle G_n(j\omega) \quad ( - )$$

$$= \angle \varphi_1 + \angle \varphi_2 + \cdots + \angle \varphi_n$$

$$G_p(s) = \frac{2e^{-s}}{(s+1)(2s+1)}$$

:

$$G_p(s) = 2e^{-s} \frac{1}{s+1} \frac{1}{2s+1} \Rightarrow \frac{AR}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \frac{1}{\sqrt{1+(2\omega)^2}} \quad \& \quad \varphi = -\omega - \tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}(2\omega)$$



-180°

-180°

Crossover frequency

---


$$G_{op}(s) = \frac{k_c e^{-5s}}{(2s+1)(4s^2+s+1)}$$

$$G_{op}(s) = \frac{k_c e^{-5s}}{(2s+1)(4s^2+s+1)}$$

$$\varphi = -5\omega - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{1-\omega^2}$$

$$-5\omega - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{1-\omega^2} = -\pi$$

$$\omega = 0.36 \text{ rad/time}$$

$$\frac{AR}{k_c} = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-4\omega^2)^2 + \omega^2}}$$

$$\frac{AR}{k_c} = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-4\omega^2)^2 + \omega^2}} \Big|_{\omega=0.36} = 1.35, \quad AR=1.0 \Rightarrow k_c = 0.74$$

$$0 < k_c < 0.74$$

**Z-N**

$$P$$

$$k_u \quad \omega_{co} \quad k_c$$

$$P_u = \frac{2\pi}{\omega_{co}} \quad ( - )$$


---

$P_u \quad k_u$

	$k_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
$P$	$0.5k_u$	-----	-----
$PI$	$0.45k_u$	$\frac{P_u}{1.2}$	-----
$PID$	$0.6k_u$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{8}$

$$G_p(s) = \frac{e^{-0.5s}}{(s+1)(2s+1)}$$

$PID$

$$\frac{AR}{k_c} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\varphi = -0.5\omega - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} 2\omega$$

$$\omega_{co} = 1.56 \text{ rad/time}, \quad k_u = 6.9, \quad P_u = 4.0 \text{ time}$$

$$k_c = 0.6k_u = 4.2, \quad \tau_I = \frac{P_u}{2} = 2.0, \quad \tau_D = \frac{P_u}{8} = 0.5$$



---

---

Normal form  
Modern control

---

---

(( - ) )

$$\begin{cases} A_1 \frac{dh_1}{dt} = q - \frac{h_1}{R_1} \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \end{cases} \quad ( - )$$

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{A_2 R_1} & -\frac{1}{A_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \quad ( - )$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad ( - )$$

( )

$$\dot{x} = f(x, u) \quad ( - )$$

$$y = g(x, u) \quad ( - )$$

$n$

$n$

$x$

( - )

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$n \times 1$

$B$

$n \times n$

$A$

$D$

$1 \times n$

$C$

:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1] \quad D = 0$$

( - )

)

:

(

$$G(s) = \frac{n_1 s^{n-1} + n_2 s^{n-2} + \dots + n_n}{s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_n} \quad ( - )$$

:

$$A_c = \begin{bmatrix} -d_1 & -d_2 & \dots & -d_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_n], \quad D_c = 0 \quad ( - )$$

c

:

State space form

Canonical control form

( - )

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{\tau_1\tau_2s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1R_2)s + 1} = \frac{\frac{R_2}{\tau_1\tau_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{A_2R_1}\right)s + \frac{1}{\tau_1\tau_2}}$$

: ( - )

$$A_c = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{A_2R_1}\right) & \frac{1}{\tau_1\tau_2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_2}{\tau_1\tau_2} \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

: . A

$$Y(s) = \frac{n_1s^{n-1} + n_2s^{n-2} + \dots + n_n}{s^n + d_1s^{n-1} + d_2s^{n-2} + \dots + d_n} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s - r_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - r_i} \quad ( - )$$

:

$$A_m = \begin{bmatrix} -r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -r_n \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_m = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n], \quad D_m = 0 \quad ( - )$$

( :

( .

- -

:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad ( - )$$

---


$$x = Tz \quad ( - )$$

$$\dot{x} = T\dot{z} = ATz + Bu \Rightarrow \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \Rightarrow \dot{z} = A'z + B'u \quad ( - )$$

$$y = CTz + Du \Rightarrow y = C'z + D'u \quad ( - )$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ( - )$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad ( - )$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) + x(0) \quad ( - )$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0) \quad ( - )$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad ( - )$$

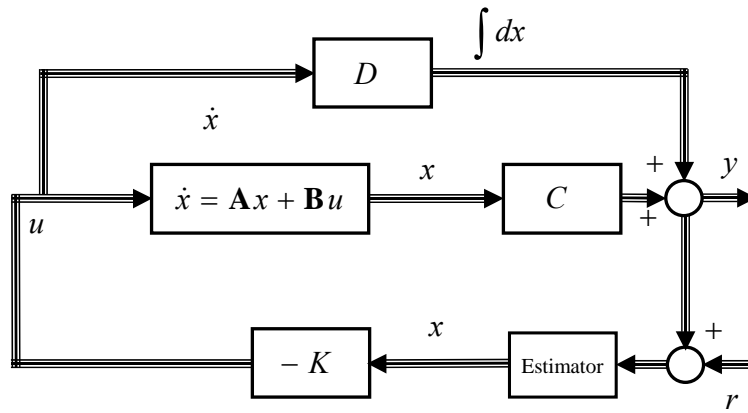
$$= C(sI - A)^{-1}BU(s) + C(sI - A)^{-1}x(0) + DU(s)$$

$$x(0) = 0$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad ( - )$$

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = 0 \quad ( - )$$

$$G(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}}{\det(sI - A)} \quad ( - )$$



( - )

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

( )

$K_i$  . . . . .  $n$  . . . . .  $n$   $n$

:

$$\dot{x} = Ax - BKx \tag{ - }$$

:

$$\det[sI - (A - BK)] = 0 \tag{ - }$$

. . . . .  $K_1, K_2, \dots, K_n$  . . . . .  $n$

:

$$s = s_1, s_2, \dots, s_n \tag{ - }$$

:

$$(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0 \tag{ - }$$

( - ) ( - )

:

$$A_c = \begin{bmatrix} -d_1 & -d_2 & \dots & -d_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_n], \quad D_c = 0$$

---


$$\begin{array}{l}
\vdots \\
A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} -d_1 - K_1 & -d_2 - K_2 & \cdots & -d_n - K_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ( - ) \\
\vdots \\
s^n + (d_1 + K_1)s^{n-1} + (d_2 + K_2)s^{n-2} + \cdots + (d_n + K_n) = 0 \quad ( - ) \\
\vdots \\
s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0 \quad ( - ) \\
\vdots \\
K_1 = -a_1 + \alpha_1, \quad K_2 = -a_2 + \alpha_2, \quad K_n = -a_n + \alpha_n, \quad ( - ) \\
\vdots \\
K = K_c T^{-1} \quad ( - )
\end{array}$$



