

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه فردوسی مشهد

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، شماره ۳۳۸

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

(جلد اول : فرایندهای انتقال)

کریستی جی . گینکوپلیس

ترجمه

محمود اخوان مهدوی

Geankiolis, Christi J.

گینگوپلیس، کریستی، ۱۹۲۱ - م

فرآیندهای انتقال و عملیات واحدها / کریستی جی. گینگوپلیس؛ ترجمه محمود اخوان مهدوی. - مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۸۱.

۲ ج، ۵۹۶ ص: مصور، جدول. - انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۳۳۸.

ISBN: 964-5782-69-4

۳۵۰۰۰ ریال (ج. ۱)

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا (فهرست‌نویسی پیش از انتشار).

Transport processes and unit operations.

عنوان اصلی:

کتابنامه.

مندرجات: ج. ۱. فرآیندهای انتقال.

۱. نظریه -- انتقال. الف. اخوان مهدوی، محمود، ۱۳۴۵ - ، مترجم. ب. دانشگاه

فردوسی مشهد. ج. عنوان.

۶۶۰/۲۸۴۲

گ ۹ ن ۶ / ۵۶ TP

۱۳۸۱

م ۸۱-۱۹۰۷۱

کتابخانه ملی ایران



فرآیندهای انتقال و عملیات واحدها

تألیف

کریستی جی. گینگوپلیس

ترجمه

محمود اخوان مهدوی

وزیری، ۷۶۸ صفحه، ۱۰۰۰ نسخه، چاپ اول، پاییز ۱۳۸۱

امور فنی و چاپ: مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

بها: ۳۵۰۰۰ ریال

ISBN: 964-5782-69-4

شابک ۹۶۴-۵۷۸۲-۶۹-۴

فهرست مطالب

۷	مقدمه نویسنده
۱۱	مقدمه مترجم
۱۳	بخش اول - فرایندهای انتقال: ممنتوم، حرارت و جرم
۱۵	فصل اول - مقدمه‌ای بر اصول مهندسی و واحدها
۱۵	۱-۱ طبقه‌بندی عملیات واحدها و فرایندهای انتقال
۱۸	۱-۲ سیستم اساسی واحدهای SI به کار برده شده در این کتاب و سیستمهای دیگر
۲۱	۱-۳ روشهای بیان دما و ترکیب
۲۴	۱-۴ قوانین گازها و فشار بخار
۲۷	۱-۵ بقای جرم و موازنه ماده
۳۳	۱-۶ واحدهای انرژی و حرارت
۴۰	۱-۷ بقای انرژی و موازنه گرما
۴۶	۱-۸ روشهای ترسیمی، عددی و ریاضی
۴۷	مسائل
۵۷	منابع
۵۹	فصل دوم - اصول انتقال ممنتوم و موازنه‌های کلی
۵۹	۲-۱ مقدمه
۶۰	۲-۲ استاتیک سیالات
۷۰	۲-۳ معادله کلی انتقال مولکولی برای انتقال جرم، حرارت و ممنتوم

۷۵	۲-۴	ویسکوزیته سیالات
۸۱	۲-۵	انواع جریان سیال و عدد رینولدز
۸۵	۲-۶	موازنه کلی جرم و معادله پیوستگی
۹۳	۲-۷	موازنه کلی انرژی
۱۰۹	۲-۸	موازنه کلی ممنتوم
۱۲۱	۲-۹	موازنه پوسته‌ای ممنتوم و توزیع سرعت در جریان آرام
۱۲۷	۲-۱۰	معادلات طراحی برای جریان آرام و مغشوش در لوله‌ها
۱۵۰	۲-۱۱	جریان تراکم‌پذیر گازها
۱۵۵		مسائل
۱۶۹		منابع

فصل سوم - اصول انتقال ممنتوم و کاربردها

۱۷۱	۳-۱	جریان گذرنده از روی اجسام غوطه‌ور، برجهای آکنده بسترهای سیالی شده
۱۷۱	۳-۲	اندازه‌گیری جریان سیالات
۱۹۰	۳-۳	پمپها و تجهیزات انتقال گاز
۱۹۸	۳-۴	همزدن و اختلاط سیالات و توان لازم
۲۰۸	۳-۵	سیالات غیرنیوتنی
۲۲۶	۳-۶	معادلات دیفرانسیل پیوستگی
۲۴۰	۳-۷	معادلات دیفرانسیل انتقال ممنتوم یا حرکت
۲۴۷	۳-۸	کاربرد معادلات دیفرانسیل پیوستگی و حرکت
۲۵۴	۳-۹	روشهای دیگر برای حل معادلات دیفرانسیل حرکت
۲۶۴	۳-۱۰	جریان لایه مرزی و اغتشاش
۲۷۱	۳-۱۱	آنالیز ابعادی در انتقال ممنتوم
۲۸۷		مسائل
۲۹۰		منابع
۳۰۲		

فصل چهارم - اصول انتقال حرارت پایدار

۳۰۵	۴-۱	مقدمه و مکانیسمهای انتقال حرارت
۳۰۵	۴-۲	انتقال حرارت هدایتی
۳۱۲		

۳۱۶	۴-۳	هدایت از طریق جامدات به صورت سری
۳۳۱	۴-۴	هدایت پایدار و ضرایب شکل
۳۳۵	۴-۵	انتقال حرارت به روش جابه‌جایی اجباری در داخل لوله‌ها
۳۵۰	۴-۶	انتقال حرارت در بیرون اشکال هندسی مختلف در جابه‌جایی اجباری
۳۵۸	۴-۷	انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد
۳۶۷	۴-۸	جوشش و چگالش
۳۷۷	۴-۹	مبدلهای حرارتی
۳۸۸	۴-۱۰	مقدمه‌ای بر انتقال حرارت تابشی
۳۹۶	۴-۱۱	اصول انتقال حرارت تابشی پیشرفته
۴۱۸	۴-۱۲	انتقال حرارت سیالات غیریوتنی
۴۲۲	۴-۱۳	ضرایب انتقال حرارت خاص
۴۳۳	۴-۱۴	آنالیز ابعادی در انتقال حرارت
۴۳۶	۴-۱۵	روشهای عددی برای هدایت پایدار دو‌بعدی
۴۴۵		مسائل
۴۶۳		منابع

فصل پنجم - اصول انتقال حرارت ناپایدار

۴۶۵	۵-۱	به‌دست آوردن معادله اساسی
۴۶۵	۵-۲	حالت ساده شده برای سیستمهایی با مقاومت داخلی ناچیز
۴۶۸	۵-۳	هدایت گرمایی ناپایدار در اشکال هندسی مختلف
۴۷۱	۵-۴	روشهای عددی تفاضل محدود برای هدایت ناپایدار
۴۸۹	۵-۵	سرد کردن و انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی
۵۰۳	۵-۶	معادله دیفرانسیل تغییر انرژی
۵۱۰	۵-۷	جریان لایه مرزی و اغتشاش در انتقال حرارت
۵۱۷		مسائل
۵۲۳		منابع
۵۳۱		

فصل ششم - اصول انتقال جرم

۵۳۳	۶-۱	مقدمه‌ای بر انتقال جرم و نفوذ
۵۳۳		

۵۳۹	۶-۲	نفوذ مولکولی در گازها
۵۵۶	۶-۳	نفوذ مولکولی در مایعات
۵۶۴	۶-۴	نفوذ مولکولی در محلولهای بیولوژیکی و ژلها
۵۷۰	۶-۵	نفوذ مولکولی در جامدات
۵۷۷	۶-۶	روشهای عددی نفوذ مولکولی دو بُعدی در حالت پایدار
۵۸۵		مسائل
۵۹۲		منابع

فصل هفتم - اصول انتقال جرم جابه‌جایی و ناپایدار

۵۹۵	۷-۱	نفوذ ناپایدار
۵۹۵	۷-۲	ضریب انتقال جرم جابه‌جایی
۶۰۴	۷-۳	ضرایب انتقال جرم برای شکل‌های هندسی مختلف
۶۱۰	۷-۴	انتقال جرم در سوسپانسیونهای ذرات کوچک
۶۲۹	۷-۵	نفوذ مولکولی همراه با جابه‌جایی و واکنش شیمیایی
۶۳۳	۷-۶	نفوذ گازها در جامدات متخلخل و لوله‌های موین
۶۴۵	۷-۷	روشهای عددی در نفوذ مولکولی ناپایدار
۶۵۴	۷-۸	آنالیز ابعادی در انتقال جرم
۶۶۰	۷-۹	جریان لایه مرزی و اغتشاش در انتقال جرم
۶۶۲		مسائل
۶۶۷		منابع
۶۷۸		

ضمایم

۶۸۱	ضمیمه A.1 - ثابتهای اساسی و ضرایب تبدیل
۶۸۳	ضمیمه A.2 - خواص فیزیکی آب
۶۸۷	ضمیمه A.3 - خواص فیزیکی ترکیبات آلی و معدنی
۶۹۹	ضمیمه A.4 - خواص فیزیکی مواد غذایی و بیولوژیکی
۷۲۵	ضمیمه A.5 - خواص لوله‌ها و صفحات مشبک
۷۲۹	علایم
۷۳۳	راهنمای مطالب
۷۴۹	

مقدمه نویسنده

در ویرایش سوم این کتاب اهداف اصلی و روش نگارش ویرایشهای اول و دوم حفظ شده است. بخشهای مربوط به انتقال ممتوم به میزان زیادی گسترش داده شده‌اند، خصوصاً بخشهایی که معادلات دیفرانسیل انتقال ممتوم را پوشش می‌دهند. با توجه به این، پوشش کاملی از فرایندهای انتقال ممتوم، حرارت و جرم ارایه شده است. همچنین یک بخش مربوط به جذب سطحی و یک فصل کامل در ارتباط با فرایندهای غشایی به قسمت عملیات واحدها اضافه شده است.

مهندسی شیمی که در ارتباط با تغییرات فیزیکی و فیزیکی-شیمیایی مواد آلی و غیرآلی و تا حدی مواد بیولوژیکی است، به میزان زیادی با زمینه‌های دیگر مهندسی فرایند مانند مهندسی سرامیک، فرایندهای متالورژی، مهندسی کشاورزی و صنایع غذایی، مهندسی تصفیه پساب و بیومهندسی همپوشانی دارد. اصول انتقال ممتوم، حرارت و جرم و عملیات واحدها در این زمینه‌های فرایندی نیز کاربرد دارند.

اصول انتقال ممتوم و انتقال حرارت به همه مهندسان تدریس می‌شود. مطالعه انتقال جرم به مهندسان شیمی محدود می‌شود. اما مهندسان در دیگر زمینه‌ها نیز علاقمند به انتقال جرم در گازها، مایعات و جامدات می‌باشند.

امروزه، چون دانشجویان مهندسی شیمی و دیگر دانشجویان مهندسی باید موضوعات زیادی را مطالعه کنند، مقدمه جامع‌تر و یکنواخت‌تری برای فرایندهای انتقال ممتوم، حرارت و جرم و کاربردهای عملیات واحدها ارایه می‌شود. در این کتاب ابتدا اصول فرایندهای انتقال و سپس عملیات واحدها بحث می‌شود. برای انجام این کار کتاب به دو بخش اصلی تقسیم شده است.

قسمت اول: فرایندهای انتقال: ممنتوم، حرارت و جرم

این قسمت در ارتباط با اصول بنیانی است و شامل این فصلها می‌باشد: ۱- مقدمه‌ای بر اصول مهندسی و واحدها، ۲- اصول انتقال ممنتوم و موازنه‌های کلی، ۳- اصول انتقال ممنتوم و کاربردها، ۴- اصول انتقال حرارت پایدار، ۵- اصول انتقال حرارت ناپایدار، ۶- اصول انتقال جرم، ۷- اصول انتقال جرم ناپایدار و جابجایی.

قسمت دوم: عملیات واحدها

این قسمت که در ارتباط با کاربردها است، عملیات واحدهای زیر را پوشش می‌دهد: ۸- تبخیر، ۹- خشک کردن مواد فرایندی، ۱۰- فرایندهای پیوسته و مرحله‌ای جداسازی گاز- مایع (رطوبت‌زنی و جذب)، ۱۱- فرایندهای جداسازی بخار- مایع (تقطیر)، ۱۲- فرایندهای جداسازی مایع- مایع و مایع- جامد (جذب سطحی، تبادل یونی، استخراج مایع، استخراج جامد، تبلور)، ۱۳- فرایندهای جداسازی غشایی (دیالیز، جداسازی گاز، اسمز معکوس، اولترافیلتراسیون)، ۱۴- فرایندهای جداسازی فیزیکی- مکانیکی (فیلتراسیون، ته نشینی، جداسازی سانتریفوژ، خرد کردن).
در فصل اول اصول اولیه‌ی روشهای ریاضی و ترسیمی، قوانین شیمی و فیزیک، موازنه‌ی مواد، و موازنه انرژی مرور شده است. بسیاری خصوصاً مهندسان شیمی ممکن است با این اصول آشنا باشند و شاید بخواهند از تمام یا قسمتهایی از این فصل صرف‌نظر کنند.

چند موضوع در ارتباط با فرآورش مواد بیولوژیکی ممکن است به تشخیص خواننده یا مدرس حذف شود که عبارتند از بخشهای: ۵-۵، ۴-۶، ۷-۸، ۹-۱۱. متجاوز از ۲۳۰ مثال یا مسأله نمونه و ۵۰۰ مسأله به عنوان تمرین در باره‌ی همه‌ی موضوعات درس در کتاب ارایه شده است. برای خوانندگانی که علاقمند به سیستمهای بیولوژیکی هستند تعدادی از مسایل در ارتباط با این سیستمها می‌باشد.
این کتاب ممکن است به هر یک از شیوه‌های زیر در قالب یک درس ارایه شود. در همه‌ی حالتها فصل ۱ ممکن است حذف شود یا نشود.

۱- مطالعه‌ی فرایندهای انتقال ممنتوم، حرارت و جرم و عملیات واحدها: در این شیوه، تقریباً تمام کتاب شامل اصول فرایندهای انتقال در قسمت ۱ و عملیات واحدها در قسمت ۲ باید پوشش داده شود. این شیوه برای دانشجویان سالهای سوم و یا چهارم مهندسی شیمی و همچنین دانشجویان دیگر زمینه‌های مهندسی فرایند در یک سال و یا نیمسال تحصیلی مناسب است.

۲- مطالعه‌ی فرایندهای انتقال ممنتوم، حرارت و جرم و بعضی از عملیات واحدها: فقط بخشهای ابتدایی قسمت اول کتاب (فصلهای دوم، سوم، چهارم، پنجم، ششم و هفتم) به علاوه‌ی بخشهایی از

قسمت دوم کتاب در طی یک درس دو ترمی پوشش داده می‌شوند. کسانی که در زمینه مهندسی تصفیه پساب، مهندسی فرایندهای غذایی و فرایندهای متالورژی از این کتاب استفاده می‌کنند نیز می‌توانند از این شیوه استفاده کنند.

۳- مطالعه فرایندهای انتقال ممتوم، حرارت و جرم: هدف این شیوه در یک درس دو ترمی به دست آوردن یک درک اساسی از فرایندهای انتقال ممتوم، حرارت و جرم است. در این شیوه قسمت اول کتاب مطالعه می‌شود و قسمت دوم حذف می‌شود.

۴- مطالعه عملیات واحدها: اگر خواننده قبلاً درسهایی در موضوع فرایندهای انتقال ممتوم، حرارت و جرم گذرانده است می‌تواند فصلهای دوم تا هفتم را حذف کند و فصلهای قسمت دوم کتاب را در یک درس یک ترمی بگذراند. این شیوه می‌تواند برای مهندسان شیمی و دیگر مهندسان بکار رود.

۵- مطالعه انتقال جرم: برای مهندسان شیمی و مکانیک که قبلاً انتقال ممتوم و حرارت را گذرانده‌اند یا کسانی که علاقمند هستند زمینه‌ای در انتقال جرم در طی یک درس یک ترمی به دست آورند، فصلهای ششم، هفتم و دهم باید مطالعه شوند. فصلهای نهم، یازدهم، دوازدهم و سیزدهم می‌توانند به صورت اختیاری بسته به نیاز خواننده مطالعه شوند.

سیستم SI توسط محافل علمی به عنوان سیستم واحدها انتخاب شده است. به همین دلیل در این کتاب نیز در معادلات، مسایل نمونه و مسایل آخر هر فصل از این سیستم استفاده شده است. اما مهمترین معادلات به دست آمده در کتاب در صورت تفاوت، در هر دو سیستم واحدهای SI و انگلیسی رایج شده‌اند. مثالها و مسایل زیادی نیز با استفاده از سیستم واحدهای انگلیسی رایج شده‌اند.

کریستی جی گینکوپلیس

مقدمه مترجم

بی شک کتاب فرایندهای انتقال و عملیات واحدها یکی از کاملترین و جدیدترین مجموعه‌هایی است که در سالهای اخیر در زمینه مهندسی شیمی نوشته شده است. ترتیب قرار گرفتن مطالب در فصلها به گونه‌ای است که به یک دانشجوی مهندسی شیمی این امکان را می‌دهد که به نحو مناسب کلیه مطالبی را که در طول چهار سال خوانده است مرور کند و درک کامل و جامعی از آنها به دست آورد. یکی از خصوصیات مهم این کتاب بیان ساده مطالب پیچیده مهندسی شیمی است که فهم آن را برای همگان امکان‌پذیر می‌نماید. مطالب ارائه شده نیز به گونه‌ای است که برای دانشجویان سالهای دوم تا چهارم دانشکده مناسب می‌باشد. لذا استفاده از این کتاب به کلیه دانشجویان مهندسی شیمی و دیگر دانشجویانی که در زمینه مهندسی فرایند تحصیل می‌کنند در سطح کارشناسی و کارشناسی ارشد توصیه می‌شود.

در ترجمه این کتاب که حاصل تلاش چهار ساله این جانب می‌باشد سعی شده است مطالب نویسنده به طور کامل منتقل شود و هیچ گونه تغییری در محتوای مطالب داده نشود. در برخی موارد که ترجمه یک اصطلاح به زبان فارسی تا حدی نارسا بوده است کلمه اصلی نیز در پاورقی داده شده است. ترجمه حاضر فقط مربوط به قسمت اول کتاب یعنی فرایندهای انتقال می‌باشد و جلد دوم این کتاب که مربوط به بخش عملیات واحدها است به زودی در دسترس خوانندگان و دانشجویان عزیز قرار خواهد گرفت. اینجانب امیدوارم که قبل از انتشار جلد دوم این کتاب خوانندگان عزیز با راهنماییها و انتقادات سازنده خود و انتقال اشکالات کتاب حاضر به اینجانب در هر چه بهتر ارائه کردن جلد دوم کتاب مرا یاری رسانند.

بخش اول

فرایندهای انتقال: ممنتوم، حرارت و جرم

فصل اوّل

مقدمه‌ای بر اصول مهندسی و واحدها

۱-۱ طبقه‌بندی عملیات واحدها و فرایندهای انتقال

۱-۱A مقدمه

در صنایع شیمیایی و دیگر صنایع فرایندی فیزیکی، صنایع غذایی و صنایع فرایندی بیولوژیکی تشابهات زیادی در روش تبدیل مواد اولیه ورودی به محصولات نهایی شیمیایی و بیولوژیکی وجود دارد. ما می‌توانیم این فرایندهای شیمیایی، فیزیکی و یا بیولوژیکی به ظاهر گوناگون را به یک سری مراحل جداگانه و مشخص به نام عملیات واحد^(۱) تفکیک کنیم. این عملیات واحدها در انواع صنایع مختلف فرایندی مشترک هستند.

به‌عنوان مثال، عملیات واحد تقطیر، برای خالص سازی یا جداسازی الکل در صنعت نوشابه‌سازی و جداسازی هیدروکربنها در صنعت نفت به‌کار می‌رود. خشک کردن حبوبات و مواد غذایی دیگر با خشک کردن الوار، خشک کردن جامدات ته‌نشین شده روی سطح صافی و خشک کردن الیاف ابریشم مشابه است. عملیات واحد جذب، در جذب اکسیژن از هوا در یک فرایند تخمیر یا در یک واحد تصفیه فاضلاب و یا برای جذب هیدروژن در فرایند هیدروژناسیون روغن مایع مورد استفاده قرار می‌گیرد. تبخیر محلولهای نمک در صنایع شیمیایی مشابه تبخیر محلولهای شکر در صنایع غذایی است. ته‌نشین شدن و رسوب جامدات معلق در جریان فاضلاب با ته‌نشین شدن و رسوب در صنایع

معدنی با هم مشابه اند. برای به جریان انداختن هیدروکربنهای مایع در پالایشگاه نفت و برای به جریان انداختن شیر در یک کارخانه محصولات لبنی از روشهای مشابهی استفاده می‌شود.

عملیات واحدها به‌طور عمده با انتقال و تغییر انرژی و مواد به صورت فیزیکی و همچنین فیزیکی - شیمیایی سر و کار دارند. عملیات واحدهای مهم که می‌توانند به شکل‌های مختلف در یک فرایند با هم ترکیب شوند و در بخش دوم این کتاب تشریح خواهند شد، در زیر توضیح داده می‌شوند.

۱-۱B طبقه‌بندی عملیات واحدها

- ۱- جریان سیال^(۱): در ارتباط با اصول حاکم بر جریان یا انتقال هر سیال از نقطه‌ای به نقطه دیگر است.
- ۲- انتقال حرارت^(۲): این عملیات واحد با اصولی که بر تجمع و انتقال انرژی و گرما از نقطه‌ای به نقطه دیگر حاکم است، سر و کار دارد.
- ۳- تبخیر^(۳): حالت خاصی از انتقال حرارت است، که با تبخیر حلال فرار مانند آب از یک حل شونده غیر فرار مانند نمک و یا هر ماده دیگری در محلول، سر و کار دارد.
- ۴- خشک کردن^(۴): در این عملیات مایعات فرار، معمولاً آب، از مواد جامد جدا می‌شوند.
- ۵- تقطیر^(۵): عملیاتی است که در نتیجه آن اجزاء یک مخلوط مایع بوسیله جوشیدن و بر اساس اختلاف فشار بخار خود از یکدیگر جدا می‌شوند.
- ۶- جذب^(۶): در این فرایند یک جزء از یک جریان گاز به وسیله یک مایع جدا می‌شود.
- ۷- جداسازی توسط غشاء^(۷): در این فرایند یک حل شونده در محلول توسط نفوذ مولکولی از میان یک غشاء نیمه تراوا عبور کرده و به سیال دیگر منتقل می‌شود.
- ۸- استخراج مایع - مایع^(۸): در این حالت یک حل شونده در یک محلول مایع، در اثر تماس با یک حلال مایع دیگر که با محلول نسبتاً امتزاج ناپذیر است، جدا می‌شود.
- ۹- جذب سطحی^(۹): در این حالت یک جزء از یک جریان گاز یا مایع جدا شده و جذب سطحی یک جاذب جامد می‌شود.
- ۱۰- استخراج مایع - جامد^(۱۰): این فرایند با ترکیب شدن یک جامد خرد شده با مایعی که می‌تواند حل شونده موجود در جامد را در خود حل کند، سر و کار دارد.

1. Fluid Flow

3. Evaporation

5. Distillation

7. Membrane Separation

9. Adsorption

2. Heat Transfer

4. Drying

6. Absorption

8. Liquid-liquid Extraction

10. Liquid-solid Leaching

۱۱- کریستال کردن^(۱): این فرایند در ارتباط با جدا کردن یک حل شونده مانند یک نمک از یک محلول به وسیله ته‌نشین کردن حل شونده در محلول، می‌باشد.

۱۲- جداسازیهای مکانیکی - فیزیکی^(۲): این فرایندها در ارتباط با جداسازی جامدات، مایعات یا گازها به روشهای مکانیکی مانند صاف کردن، ته‌نشینی و خرد کردن می‌باشد، که اغلب به صورت عملیات واحدهای جداگانه دسته‌بندی می‌شوند.

بسیاری از این عملیات واحدها اصول اساسی و مکانیسمهای مشترکی دارند. به عنوان مثال، مکانیسم نفوذ مولکولی یا انتقال جرم در خشک کردن، جداسازی غشایی، جذب، تقطیر و کریستال کردن وجود دارد. انتقال حرارت در خشک کردن، تقطیر، تبخیر و مانند آن روی می‌دهد. بنابراین اغلب، دسته‌بندی کلی تری در مورد فرایندهای انتقال انجام می‌شود که به صورت زیر است:

۱C-۱ فرایندهای اساسی انتقال

۱- انتقال ممتوم: این مسأله در ارتباط با انتقال ممتوم در یک محیط متحرک است. مانند آنچه در عملیاتی شبیه جریان سیال، ته نشینی و اختلاط اتفاق می‌افتد.

۲- انتقال حرارت: ما در این فرایند اساسی، به انتقال گرما از یک نقطه به نقطه دیگر توجه داریم، این پدیده در عملیات واحدهایی مانند انتقال حرارت، خشک کردن، تبخیر، تقطیر و دیگر موارد اتفاق می‌افتد.

۳- انتقال جرم: در این پدیده جرم از یک فاز به فاز مجزای دیگری منتقل می‌شود. مکانیسم اساسی برای تمام فازهای گاز، جامد و مایع یکسان است. انتقال جرم عملیاتی مانند تقطیر، جذب، استخراج مایع - مایع، جداسازی غشایی، جذب سطحی و استخراج مایع - جامد را شامل می‌شود.

۱D-۱ ترتیب مطالب در قسمتهای اول و دوم کتاب

این کتاب در دو قسمت تنظیم شده است:

قسمت اول: فرایندهای انتقال: ممتوم، حرارت و جرم: این اصول اساسی در فصلهای اول تا هفتم به طور وسیع بحث شده‌اند تا مبنایی برای مطالعه عملیات واحدها شوند.

قسمت دوم: عملیات واحدها: عملیات واحدهای مختلف و کاربردهای آنها در فرایندها در

قسمت دوم کتاب مطالعه شده‌اند.

بعضی از اصول اولیه مهندسی، روشهای ریاضی و قوانین فیزیکی و شیمیایی برای مطالعه

اصول انتقال ممتوم، حرارت، جرم و عملیات واحدها ضروری می‌باشند. این موارد در اولین فصل برای خواننده مرور شده‌است. بعضی از خوانندگان، مخصوصاً مهندسان شیمی، مهندسان کشاورزی، مهندسان عمران و شیمی‌دانها ممکن است با بسیاری از این اصول اولیه و روشها آشنا باشند و بخواهند از تمامی و یا بخشی از این فصل صرف نظر کنند.

مسائل انتهایی هر فصل به بخشهای مختلف تقسیم شده‌اند و شماره هر کدام متناظر با شماره بخش و فصل مربوطه است.

۲-۱ سیستم واحدهای اساسی SI مورد استفاده در این کتاب و سیستمهای دیگر

در حال حاضر، در مهندسی و علوم سه سیستم اصلی واحدهای اساسی به کار برده می‌شود. اولین و مهمترین آنها سیستم SI (سیستم بین‌المللی واحدها) است که سه واحد اساسی آن متر (m)، کیلوگرم (kg) و ثانیه (s) هستند. سیستمهای دیگر، سیستم انگلیسی fps با واحدهای اساسی فوت (ft)، پوند (lb) و ثانیه (s) و سیستم cgs با واحدهای اساسی سانتی‌متر (cm)، گرم (g) و ثانیه (s) هستند.

در حال حاضر سیستم SI به طور رسمی برای کاربرد وسیع در مهندسی و علوم پذیرفته شده‌است. اما سیستمهای قدیمی‌تر انگلیسی و cgs هنوز برای سالها مورد استفاده خواهند بود. اغلب داده‌های فیزیکی و شیمیایی و همچنین معادلات تجربی در دو سیستم اخیر ارائه شده‌اند. بنابراین نه تنها یک مهندس بایستی در سیستم SI تخصص داشته باشد بلکه بایستی قادر باشد دو سیستم دیگر واحدها را تا حد نیاز به کار ببرد.

۲A-۱ سیستم واحدهای SI

کمیت‌های اساسی مورد استفاده در سیستم SI عبارتند از: واحد طول متر (m)، واحد زمان ثانیه (s)، واحد جرم کیلوگرم (kg)، واحد درجه حرارت کلوین (K) و واحد یک عنصر کیلوگرم مول (kg mol). واحدهای استاندارد دیگر از این کمیت‌های اساسی مشتق می‌شوند.

واحد اصلی نیرو، نیوتن (N) است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$1 \text{ newton (N)} = 1 \text{ kg.m/s}^2$$

واحد اصلی کار، انرژی یا گرما، نیوتن - متر یا ژول (J) است.

$$1 \text{ joule (J)} = 1 \text{ newton.m (N.m)} = 1 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2$$

توان بر حسب ژول بر ثانیه یا وات اندازه‌گیری می‌شود.

$$1 \text{ joule/s (J/s)} = 1 \text{ watt (W)}$$

واحد فشار نیوتن بر مترمربع یا پاسکال است.

$$1 \text{ newton/m}^2 \text{ (N/m}^2\text{)} = 1 \text{ pascal (Pa)}$$

[فشار بر حسب اتمسفر (atm) جزء واحدهای استاندارد SI نیست، اما از آن در طول دوره انتقال استفاده می‌شود]. شتاب ثقل استاندارد به صورت زیر تعریف شده است.

$$1 g = 9/80665 \text{ m/s}^2$$

چند نمونه از پیشوندهای استاندارد مربوط به واحدهای اساسی به صورت زیر

هستند.

$$10^9 = (G) \text{ گیگا}$$

$$10^6 = (M) \text{ مگا}$$

$$10^3 = (k) \text{ کیلو}$$

$$10^{-2} = (c) \text{ سانتی}$$

$$10^{-3} = (m) \text{ میلی}$$

$$10^{-6} = (\mu) \text{ میکرو}$$

$$10^{-9} = (n) \text{ نانو}$$

پیشوند c یک پیشوند معمول نیست.

ترجیحاً دماها در سیستم SI با کلونین بیان می‌شوند. اما در عمل مقیاس درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$) نیز

زیاد به کار می‌رود، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$t^{\circ}\text{C} = T(\text{K}) - 273/15$$

توجه کنید که $1^{\circ}\text{C} = 1 \text{ K}$ و در حالت اختلاف دما،

$$\Delta t^{\circ}\text{C} = \Delta T \text{ K}$$

واحد استاندارد زمان، ثانیه (s) است. اما زمان با واحدهای دیگری مانند دقیقه (min)، ساعت (h)، و یا

روز (d) هم بیان می‌شود.

۱-۲B سیستم واحدهای CGS

رابطه سیستم cgs با سیستم واحدهای SI به صورت زیر است.

$$1 \text{ g mass (g)} = 1 \times 10^{-3} \text{ kg mass (kg)}$$

$$1 \text{ cm} = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$1 \text{ dyne (dyn)} = 1 \text{ g.cm/s}^2 = 1 \times 10^{-5} \text{ newton (N)}$$

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn.cm} = 1 \times 10^{-7} \text{ joule (J)}$$

شتاب ثقل استاندارد در این سیستم:

$$g = 980.665 \text{ cm/s}^2$$

می باشد.

۱-۲C سیستم واحدهای انگلیسی fps

رابطه سیستم انگلیسی با سیستم SI به صورت زیر است:

$$1 \text{ lb. mass (lb}_m) = 0.45359 \text{ kg}$$

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ lb force (lb}_f) = 4.4482 \text{ newtons (N)}$$

$$1 \text{ ft.lb}_f = 1/35582 \text{ newton.m (N.m)} = 1/35582 \text{ joule (J)}$$

$$1 \text{ Psia} = 6/89476 \times 10^3 \text{ newton/m}^2 \text{ (N/m}^2)$$

$$1/8^\circ\text{F} = 1 \text{ K} = 1^\circ\text{C} \text{ (سانتیگراد یا سلسیوس)}$$

$$g = 32/174 \text{ ft/s}^2$$

ضریب تناسب برای قانون نیوتن عبارت است از،

$$g_c = 32/174 \text{ ft.lb/lb} \cdot \text{s}^2$$

فاکتور g_c در سیستم واحدهای SI و cgs برابر با یک است و از آن صرف نظر می شود.

ضرایب تبدیل معمول برای هر سه سیستم واحدها در ضمیمه A.1 آورده شده اند. در قسمتهای مختلف کتاب به بحثهای بیشتر و کاربرد این روابط پرداخته خواهد شد.

این کتاب سیستم SI را به عنوان سیستم اصلی واحدها در معادلات، مسائل نمونه و مسائل آخر هر فصل به کار می برد. اما معادلات مهم که در متن کتاب اثبات می شوند در صورتی که در دو سیستم واحدهای SI و انگلیسی تفاوت داشته باشند، در هر دو سیستم ارائه خواهند شد. بعضی از مثالها و مسائل آخر فصل نیز بر حسب واحدهای انگلیسی بیان شده اند. همچنین در بعضی موارد، مراحل میانی

و یا پاسخها در مثالها با واحدهای انگلیسی هم بیان شده‌اند.

۲D-۱ معادلات همگن و واحدهای یکنواخت

یک معادله همگن بُعدی معادله‌ای است که واحدهای تمامی جملات آن یکسان باشند. این واحدها، می‌توانند واحدهای اساسی و یا مشتقات آنها (مثل $\text{Kg/s}^2 \cdot \text{m}$ یا Pa) باشند. چنین معادله‌ای می‌تواند با هر سیستم واحدی به کار رود، به شرطی که همان واحدهای اصلی و یا مشتقات آنها در سراسر معادله استفاده شود. وقتی از واحدهای یکنواخت در معادله‌ای استفاده شود به هیچ ضریب تبدیلی نیاز نخواهد بود.

خواننده بایستی در به کار بردن معادلات دقیق باشد و همیشه معادله را از نظر هماهنگ بودن ابعاد بررسی کند. برای انجام این کار ابتدا بایستی یک سیستم واحدها (SI، انگلیسی و غیره) انتخاب شود. سپس واحد مربوطه هر عبارت در معادله جایگزین شود و واحدهای مشابه در هر عبارت با یکدیگر حذف شوند.

۳-۱ روشهای بیان دما و ترکیب

۳A-۱ دما

در صنایع شیمیایی و بیولوژیکی دو مقیاس معمول دما وجود دارند. این دو مقیاس، درجه فارنهایت ($^{\circ}\text{F}$) و درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$) می‌باشند. اغلب لازم است که این دو مقیاس دما به یکدیگر تبدیل شوند. در هر دو مقیاس، از نقطه انجماد و نقطه جوش آب در فشار یک اتمسفر به عنوان نقاط مبنا استفاده می‌شود. اغلب به جای $^{\circ}\text{C}$ یا $^{\circ}\text{F}$ از دماهای مطلق K (استاندارد SI) و یا درجه رانکین ($^{\circ}\text{R}$) استفاده می‌شود. نقاط مبنا در این چهار مقیاس در جدول ۱-۳-۱ نشان داده شده‌اند.

اختلاف نقطه جوش آب و نقطه ذوب یخ در یک اتمسفر برابر 100°C یا 180°F است. بنابراین $1/180^{\circ}\text{F}$ تغییر دما برابر با 1°C است. معمولاً دمای $273/15^{\circ}\text{C}$ به $273/2^{\circ}\text{C}$ و دمای $459/7^{\circ}\text{F}$ به 460°F گرد می‌شوند. از معادلات زیر برای تبدیل یک مقیاس به مقیاس دیگر استفاده می‌شود.

$$^{\circ}\text{F} = 32 + 1.8(^{\circ}\text{C}) \quad (1-3-1)$$

$$^{\circ}\text{C} = \frac{1}{1.8} (^{\circ}\text{F} - 32) \quad (1-3-2)$$

$$^{\circ}\text{R} = ^{\circ}\text{F} + 460 \quad (1-3-3)$$

$$\text{K} = ^{\circ}\text{C} + 273.15 \quad (1-3-4)$$

جدول ۱-۳-۱. مقیاسهای دما و معادلهای آنها

	Centigrade	Fahrenheit	Kelvin	Rankine	Celsius
Boiling water	100°C	212°F	373.15 K	671.7°R	100°C
Melting ice	0°C	32°F	273.15 K	491.7°R	0°C
Absolute zero	-273.15°C	-459.7°F	0 K	0°R	-273.15°C

۱-۳B واحدهای مول و واحدهای جرم و وزن

روشهای زیادی برای بیان ترکیب گازها، مایعات و جامدات وجود دارند. یکی از مفیدترین روشها استفاده از واحدهای مولی است. زیرا واکنشهای شیمیایی و قوانین گازی برحسب واحدهای مولی ساده تر بیان می شوند. یک مول (mol) از یک ماده خالص مقداری از ماده است که جرمش از نظر عددی مساوی با جرم مولکولی آن ماده است. بنابراین یک کیلوگرم مول از متان (CH₄) شامل ۱۶/۰۴ کیلوگرم متان است. همچنین یک پوند مول از آن شامل ۱۶/۰۴ پوند متان است.

به طور ساده کسر مولی یک ماده خاص از تقسیم مولهای این ماده بر تعداد کل مولها به دست می آید. به روش مشابه کسر وزنی یا جرمی عبارت است از جرم یک ماده تقسیم بر کل جرم. این دو تعریف که برای گازها، مایعات و جامدات صدق می کند، برای جزء A در یک مخلوط به صورت زیر نوشته می شود.

$$X_A(A) = \frac{\text{مولهای A}}{\text{کل مولها}} \quad (1-3-5)$$

$$W_A(A) = \frac{\text{جرم A}}{\text{کل جرم}} \quad (1-3-6)$$

مثال ۱-۳-۱. کسر مولی و کسر وزنی یا جرمی یک محلول

یک ظرف محتوی ۵۰ گرم آب (B) و ۵۰ گرم NaOH (A) می باشد. کسر مولی و کسر وزنی NaOH را حساب کنید. همچنین جرم هر کدام از اجزاء را برحسب lb_m محاسبه کنید. حل: با در نظر گرفتن ۵۰+۵۰ یا ۱۰۰ گرم از محلول به عنوان مبنای محاسبه، اطلاعات زیر محاسبه می شوند.

جزء	G	کسر وزنی	جرم مولکولی	G moles	کسر مولی
H ₂ O(B)	۵۰	$\frac{۵۰}{۱۰۰}=۰/۵$	۱۸/۰۲	$\frac{۵۰}{۱۸/۰۲}=۲/۷۸$	$\frac{۲/۷۸}{۴/۰۳}=۰/۶۹$
NaOH(A)	۵۰	$\frac{۵۰}{۱۰۰}=۰/۵$	۴۰/۰	$\frac{۵۰}{۴۰}=۱/۲۵$	$\frac{۱/۲۵}{۴/۰۳}=۰/۳۱$
-----	-----	-----	-----	-----	-----
Total	۱۰۰	۱/۰۰		۴/۰۳	۱/۰۰

بنابراین، $X_A = ۰/۳۱۰$ ، $X_B = ۰/۶۹۰$ و $X_A + X_B = ۰/۳۱۰ + ۰/۶۹۰ = ۱/۰۰$ همچنین $W_A + W_B = ۰/۵۰۰ + ۰/۵۰۰ = ۱/۰۰$ از ضمیمه ۱-A ضریب تبدیل ۴۵۳/۶ گرم به ازاء هر پوند برای تعیین جرم هر جزء بر حسب پوند به دست می آید. یا به کار بردن این ضریب:

$$\text{lb mass of A} = \frac{۵۰ \text{ gr A}}{۴۵۳/۶ \text{ gr A/lb}_m \text{ A}} = ۰/۱۱۰۲ \text{ lb}_m \text{ A}$$

توجه کنید که جرم A بر حسب گرم در صورت کسر، با جرم A بر حسب گرم در مخرج حذف می شود و فقط جرم A بر حسب پوند در صورت باقی میماند. خواننده باید دقت کند که همه واحدها را در یک معادله قرار دهد و عوامل مشابه را در صورت و مخرج با یکدیگر حذف نماید. به این ترتیب، $۰/۱۱۰۲ \text{ lb}_m$ ماده B ($۰/۰۵۰۰ \text{ Kg}$) خواهیم داشت.

معمولاً ترکیب جامدات و مایعات به صورت کسر وزنی (یا جرمی) و یا درصد وزنی داده می شود و ترکیب گازها به صورت کسر مولی یا درصد مولی بیان می شوند. در صورتی که واحدی برای ترکیب مشخص نشده باشد، ترکیب مایعات و جامدات با درصد و یا کسر وزنی و ترکیب گازها با درصد یا کسر مولی ارایه می شوند.

۳-۱ واحدهای غلظت برای مایعات

معمولاً هنگامی که یک مایع با مایع قابل امتزاج دیگری مخلوط می شود، حجم کل برابر با مجموع حجمها نیست. بنابراین ترکیب مایعات معمولاً بر حسب درصد حجمی بیان نمی شود و به صورت درصد وزنی یا مولی ارایه می شوند. روش دیگری که از آن برای بیان غلظت یک جزء در یک محلول استفاده می شود، ملاریته است که به صورت gmol یک جزء به حجم محلول بر حسب لیتر، تعریف

می‌گردد. همچنین غلظت به صورت kg/m^3 ، g/cm^3 ، lb mol/ft^3 ، lb_m/ft^3 و lb_m/gal بیان می‌شود. تمامی این غلظتها به دما بستگی دارند، لذا در موقع تعیین آنها دما بایستی معلوم باشد.

معمولترین روش برای بیان غلظت کل به ازای واحد حجم، دانسیته است که برحسب Kg/m^3 ، g/cm^3 یا lb_m/ft^3 می‌باشد. به عنوان مثال، دانسیتهٔ آب در $277/2 \text{ K}$ (4°C) برابر با 1000 Kg/m^3 و یا $62/43 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ است. گاهی دانسیتهٔ یک محلول به صورت چگالی نسبی بیان می‌شود، که به صورت نسبت دانسیتهٔ یک محلول در یک دمای مشخص به دانسیتهٔ یک مادهٔ مرجع در همان دما تعریف می‌شود. اگر مادهٔ مرجع آب در $277/2 \text{ K}$ باشد، چگالی نسبی و دانسیتهٔ ماده از نظر عددی با هم مساویند.

۱-۴ قوانین گازها و فشار بخار

۱-۴۸ فشار

راههای زیادی برای بیان فشار اعمال شده توسط یک سیال یا سیستم وجود دارند. فشار مطلق یک اتمسفر معادل با 760 mm Hg در صفر درجهٔ سلسیوس و معادل $29/921 \text{ in. Hg}$ ، $0/76 \text{ m Hg}$ ، $14/696$ پوند نیرو براینچ مربع (Psia) و یا $33/90$ فوت آب 4°C است. فشار نسبی، فشاری علاوه بر فشار مطلق است. بنابراین فشار نسبی $21/5$ (Psig) معادل $14/7 \text{ Psi} + 21/5$ یا $36/2 \text{ Psi}$ مطلق (Psia) است. در سیستم SI، $1 \text{ Psia} = 10^5 \text{ Pa} = 6/89476 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ ، همچنین $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa} = 1/01325 \times 10^5$ است.

در بعضی موارد، خصوصاً در تبخیر، ممکن است فشار به صورت اینچ جیوه خلاء بیان شود. این بیان به این معنی است که فشار اندازه‌گیری شده زیر فشار مطلق بارومتر است. به عنوان مثال، فشار $25/4$ اینچ جیوه خلاء معادل فشار $25/4 - 29/92 = 4/52$ یا اینچ جیوه مطلق است. ضرایب تبدیل فشار در ضمیمهٔ A.۱ داده شده است.

۱-۴B قانون گازایده آل

گاز ایده آل گازی است که از قوانین ساده تبعیت کند. همچنین در یک گاز ایده آل ملکولها به صورت کره سخت^(۱) در نظر گرفته می‌شوند که خودشان هیچ حجمی اشغال نکرده و هیچ نیرویی بر یکدیگر اعمال نمی‌کنند. هیچ گاز واقعی از این قوانین به طور دقیق پیروی نمی‌کند. اما قوانین ایده آل در دماهای معمولی و فشارهایی تا چند اتمسفر پاسخهای خوبی با خطای کم می‌دهند. بنابراین این قوانین تا حدودی برای

محاسبات مهندسی کافی هستند.

بر طبق قانون گاز ایده‌آل بویل حجم یک گاز به طور مستقیم متناسب با دمای مطلق آن و به طور معکوس متناسب با فشار مطلق آن است. این قانون به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(1-4-1)$$

که در معادله بالا، p فشار مطلق بر حسب N/m^2 ، V حجم گاز بر حسب m^3 ، n تعداد مول گاز بر حسب $kg \text{ mol}$ ، T دمای مطلق بر حسب K و R ثابت قانون گاز برابر با، $K \cdot s^2 / kg \text{ mol} \cdot m^3$ است. $8314/3$ است. وقتی که حجم بر حسب ft^3 ، تعداد مول بر حسب $lbmoles$ و دما بر حسب $^{\circ}R$ بیان شود، R برابر با $10.7316 \text{ ft}^3 \cdot atm / lb \text{ mol} \cdot ^{\circ}R$ است. در سیستم واحدهای cgs (ضمیمه A.1 را ببینید)، $V = cm^3$ ، $R = 82.057 \text{ cm}^3 \cdot atm / gmol \cdot K$ ، $T = K$ و $n = gmol$ است.

به منظور مقایسه مقادیر گازهای مختلف با یکدیگر، شرایط استاندارد دما و فشار (STP یا SC) به طور دلخواه به صورت 101325 KPa (1 atm) مطلق و $273/15 \text{ K}$ ($0^{\circ}C$) تعریف شده‌اند. تحت این شرایط حجمها به صورت زیر است:

$$\text{حجم یک کیلوگرم مول (SC)} = 22/414 \text{ m}^3$$

$$\text{حجم یک گرم مول (SC)} = 22/414 \text{ lit} = 22414 \text{ Cm}^3$$

$$\text{حجم یک پوند مول (SC)} = 359/05 \text{ ft}^3$$

مثال 1-4-1. ثابت قانون گازها

در صورتی که فشار بر حسب $Psia$ ، تعداد مول بر حسب $lb \text{ mol}$ ، حجم بر حسب ft^3 و دما بر حسب $^{\circ}R$ باشند، مقدار ثابت گازها (R) را محاسبه کنید. همین محاسبه را در سیستم SI تکرار کنید.

حل: در شرایط استاندارد $P = 14.7 \text{ Psia}$ ، $V = 359 \text{ ft}^3$ و $T = 460 + 32 = 492^{\circ}R$ ($273/15 \text{ K}$)

با جایگزین کردن این اعداد در معادله (1-4-1) و حل آن نسبت به R به ازای $n = 1 \text{ lbmol}$

داریم:

$$R = \frac{pV}{nT} = \frac{14.7 \text{ psia} \times 359 \text{ ft}^3}{1 \text{ lbmol} \times 492^{\circ}R} = 10.73 \frac{\text{ft}^3 \cdot \text{psia}}{\text{lbmol} \cdot ^{\circ}R}$$

$$R = \frac{pV}{nT} = \frac{101325 \text{ Pa} \times 22/414 \text{ m}^3}{1 \text{ kgmol} \times 273/15 \text{ K}} = 8314 \frac{\text{m}^3 \cdot \text{Pa}}{\text{kgmol} \cdot \text{K}}$$

می‌توان یک رابطه مفید از معادله (1-4-1) برای n مول گاز در شرایط P_1 ، V_1 و T_1 و شرایط

با جایگذاری در معادله (۱-۴-۱) داریم،

$$p_1 v_1 = nRT_1$$

$$p_2 v_2 = nRT_2$$

از ترکیب دو رابطه داریم:

$$(1-4-2)$$

۱-۴-۱ مخلوط گازهای ایده آل

قانون دالتون برای مخلوط گازهای ایده آل بیان می‌کند که فشار کل یک مخلوط گازی مساوی با مجموع فشارهای جزئی هر جزء است.

$$(1-4-3)$$

که در معادله بالا، P فشار کل و p_A, p_B, p_C و... فشارهای جزئی اجزاء A, B, C و... در مخلوط هستند. چون تعداد مولهای یک جزء متناسب با فشار جزئی آن است، بنابراین کسر مولی یک جزء به صورت زیر خواهد بود:

$$(1-4-4)$$

کسر حجمی مساوی با کسر مولی است. مخلوطهای گازی تقریباً همیشه با کسر مولی ارائه می‌شوند نه با کسر وزنی. در کاربردهای مهندسی، قانون دالتون برای مخلوطهای حقیقی تا فشار چند اتمسفر به اندازه کافی دقت دارد.

مثال ۱-۴-۲ ترکیب یک مخلوط گازی

یک مخلوط گازی شامل اجزائی با فشار بخارهای زیر است.

$p_{CO_2} = 75 \text{ mmHg}$ ، $p_{CO} = 50 \text{ mmHg}$ ، $p_{N_2} = 595 \text{ mmHg}$ ، $p_{O_2} = 26 \text{ mmHg}$ ، فشار کل و کسر مولی

هر جزء را در ترکیب پیدا کنید.

حل: با جایگزین کردن در معادله (۱-۴-۳)،

$$P = p_A + p_B + p_C + p_D = 75 + 50 + 595 + 26 = 746 \text{ mmHg}$$

جزء مولی CO_2 به وسیله معادله (۱-۴-۴) به دست می‌آید:

$$x_A(CO_2) = \frac{p_A}{P} = \frac{75}{746} = 0.101$$

به طریق مشابه کسرهای مولی CO ، N_2 و O_2 به ترتیب 0.067 ، 0.797 و 0.035 می‌باشند.

۴D-۱ فشار بخار و نقطه جوش مایعات

وقتی مایعی در یک ظرف در بسته قرار می‌گیرد، ملکولهای مایع به صورت بخار وارد فضای خالی بالای مایع شده و آن را به طور کامل پر می‌کنند. پس از مدتی تعادل برقرار می‌شود. این بخار همانند یک گاز فشاری را اعمال می‌کند که ما این فشار را فشار بخار مایع می‌نامیم. فشار بخار مستقل از مقدار مایع و زمان ماندن مایع در ظرف است.

اگر یک گاز خنثی مانند هوا نیز به همراه بخار وجود داشته باشد، تأثیر بسیار ناچیزی بر فشار بخار خواهد داشت. معمولاً، اثر فشار کل بر روی فشار بخار، تا فشارهای چند اتمسفر قابل صرف نظر کردن است.

فشار بخار یک مایع به طور چشمگیری با دما افزایش پیدا می‌کند. به عنوان مثال برای آب، فشار بخار در 50°C برابر $12/333\text{ kPa}$ ($92/51\text{ mmHg}$) است. در 100°C فشار بخار به $101/325\text{ kPa}$ (760 mmHg) افزایش پیدا می‌کند.

نقطه جوش یک مایع دمایی است که در آن فشار بخار مایع مساوی با فشار کل است. بنابراین اگر فشار کل اتمسفری 760 mmHg باشد، آب در 100°C خواهد جوشید. روی یک قله بلند که در آنجا فشار خیلی کمتر است آب در دمایی زیر 100°C به جوش می‌آید.

نمودار فشار بخار یک مایع بر حسب دما به صورت خط مستقیم نیست و به صورت منحنی می‌باشد. اما در محدوده دماهای معمولی منحنی $\log P_A$ بر حسب $1/T$ تقریباً خطی است که معادله آن به صورت زیر است:

$$\log P_A = m\left(\frac{1}{T}\right) + b \quad (1-4-5)$$

که در معادله فوق، m شیب و b یک ثابت مربوط به مایع A و T دما بر حسب کلونین است.

۵-۱ بقای جرم و موازنه ماده

۵A-۱ بقای جرم

یکی از قوانین بنیانی علم فیزیک، قانون بقای جرم است. این قانون، به طور ساده می‌گوید که جرم نمی‌تواند تولید شود و یا از بین برود (البته بجز واکنشهای هسته‌ای و یا اتمی). بنابراین جرم کل (وزن) همه مواد ورودی به هر فرایندی بایستی مساوی با جرم کل مواد خروجی به علاوه جرم تمام مواد تجمع کننده در فرایند باشد.

$$\text{تجمع} + \text{خروجی} = \text{ورودی} \quad (1-5-1)$$

در بیشتر حالات، تجمع جرم در فرایند وجود ندارد و بنابراین به شکل ساده ورودی با خروجی برابر خواهد بود. یا بعبارت دیگر " آنچه وارد می شود باید خارج شود." مابین نوع فرایند را فرایند پایدار می نامیم (۱).

خروجی = ورودی (۱-۵-۲)

۱-۵B موازنه ساده مواد

در این بخش چند موازنه ماده (جرم یا وزن) ساده را برای فرایندهای مختلف در شرایط پایدار و بدون واکنش شیمیایی می نویسیم. می توانیم واحدهایی مانند kg ، lb_m ، lb mol ، g ، kg mol و غیره را در موازنه خود به کار ببریم. مسأله هماهنگی واحدها بایستی مد نظر باشد و از مخلوط کردن واحدهای مختلف در یک معادله موازنه بایستی پرهیز نمود. وقتی واکنش شیمیایی اتفاق بیفتد (در بخش ۱-۵D بحث خواهد شد) واحدها باید به صورت kg mol باشند، زیرا در معادلات شیمیایی روابط واکنش کننده‌ها به صورت مولی است. در بخش ۶-۲، موازنه کلی جرم به صورت مفصل تر بحث خواهد شد و در فصل ۶-۳ موازنه دیفرانسیلی جرم بررسی می شود.

برای حل یک مسأله موازنه جرم، مراحل زیر پیشنهاد می شوند:

- ۱- رسم یک شکل ساده از فرایند. این شکل میتواند یک دیاگرام جعبه‌ای ساده باشد که در آن همه جریانهای ورودی و خروجی با پیکانهایی که جهت‌های ورودی و خروجی را نشان می دهند، مشخص می شوند. روی هر پیکان ترکیب، مقدار، دما و سایر داده‌های مربوط به آن جریان نوشته می شود. کلیه داده‌های مسأله باید در این شکل مشخص شود.
- ۲- نوشتن معادلات شیمیایی مربوطه (در صورت وجود).
- ۳- انتخاب یک مبنا برای محاسبات. در اغلب موارد، مسأله مربوط به مقدار مشخصی از یک جریان در فرایند می شود. که همان می تواند به عنوان مبنا انتخاب شود.
- ۴- نوشتن موازنه جرم. پیکانهای ورودی به فرایند نشان دهنده جریانهای ورودی و پیکانهای خروجی از فرایند نشان دهنده جریانهای خروجی هستند. موازنه می تواند به صورت یک موازنه کلی ماده مطابق معادله (۱-۵-۲) و یا به صورت یک موازنه روی هر جزء موجود باشد (در صورتی که واکنش شیمیایی وجود نداشته باشد).

از میان فرایندهایی که در آنها واکنش شیمیایی اتفاق نمی افتد می توان از، خشک کردن، تبخیر،

رقیق‌سازی محلولها، تقطیر، استخراج و مانند آن نام برد. برای این فرایندها می‌توان معادلات موازنه ماده برحسب مجهولات را نوشت و پارامترهای مجهول را از حل آنها به دست آورد.

مثال ۱-۵-۱ تغلیظ آب پرتقال

در فرایند تغلیظ آب پرتقال، آب میوه تازه و صاف شده که حاوی ۷/۰۸ درصد وزنی مواد جامد است، به یک تبخیرکننده خلاء وارد می‌شود. در تبخیرکننده، آب جدا می‌شود و غلظت مواد جامد تا ۵۸ درصد وزنی افزایش می‌یابد. برای 1000 kg/hr آب میوه ورودی، مقدار آب میوه تغلیظ شده خروجی و میزان آب خروجی را محاسبه کنید.

حل: چهار مرحله حل یک مسأله را در اینجا دنبال می‌کنیم. در شکل (۱-۵-۱) شکلی از مسأله را رسم می‌کنیم (مرحله ۱).

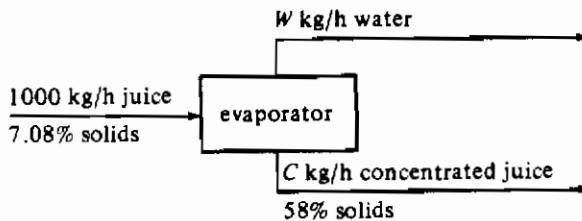
حرف W نشان‌دهنده مقدار مجهول آب و C مقدار آب میوه تغلیظ شده است. هیچ‌گونه واکنش شیمیایی اتفاق نمی‌افتد (مرحله ۲). مبنا 1000 kg/hr آب میوه ورودی در نظر گرفته می‌شود (مرحله ۳).

برای انجام موازنه جرم (مرحله ۴)، موازنه کلی ماده با توجه به معادله (۱-۵-۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$1000 = W + C \quad (1-5-3)$$

معادله نوشته شده دارای دو مجهول است. بنابراین یک موازنه جزئی برای مواد جامد هم باید نوشته شود.

$$1000 \left(\frac{7.08}{100} \right) = W(0) + C \left(\frac{58}{100} \right) \quad (1-5-4)$$



شکل ۱-۵-۱. نمودار فرایند مثال ۱-۵-۱

برای حل این دو معادله، ابتدا معادله (۴-۵-۱) برای به دست آوردن C حل می شود زیرا W حذف می شود. سپس مقدار آب میوه غلیظ به دست می آید، $C = 122/1 \text{ kg/hr}$. با جایگذاری مقدار C در معادله (۳-۵-۱) نتیجه می شود:

$$1000 = W + 122/1$$

و $W = 877/9 \text{ kg/hr}$ ، به دست می آید.

برای امتحان کردن محاسبات، می توانیم موازنه ای برای جزء آب بنویسیم،

$$1000 \left(\frac{100 - 7.08}{100} \right) = 877.9 + 122.1 \left(\frac{100 - 58}{100} \right) \quad (5-5-1)$$

که با حل آن

$$929/2 = 877/9 + 51/3 = 929/2$$

در مثال ۱-۵-۱ فقط یک واحد یا فرایند جداگانه وجود داشت. غالباً تعدادی از واحدها به صورت سری با هم کار می کنند. در این صورت می توانیم روی هر واحد دلخواه موازنه مستقلی بنویسیم و یا موازنه ای حول کل فرایند ببندیم.

۱-۵C موازنه جرم و جریان برگشتی

گاهی اوقات با فرایندهایی مواجه هستیم که در آن بخشی از محصول به جریان ورودی خوراک برگشت داده می شود. به عنوان مثال، در یک تصفیه خانه شهری، قسمتی از لجن فعال از تانک ته نشینی به تانک هوادهی که در آنجا تصفیه انجام می شود، بازگشت داده می شود. در بعضی از فرایندهای خشک کردن مواد غذایی، رطوبت هوای ورودی به وسیله بازگشت دادن بخشی از هوای داغ و مرطوب خروجی از خشک کن، کنترل می شود. در واکنشهای شیمیایی، ماده ای که در واکنش شرکت نمی کند، می تواند از محصول نهایی جداسازی شده و به راکتور بازگشت داده شود.

مثال ۱-۵-۲ کریستال کردن KNO_3 و جریان برگشتی

در یک فرایند تولید نمک KNO_3 ، 1000 kg/hr محلول خوراک حاوی KNO_3 با غلظت ۲۰٪ وزنی به یک تبخیرکننده وارد می شود. در اثر تبخیر بخشی از آب در دمای ۴۲۲K، محلول ۵۰٪ وزنی KNO_3 تولید می شود. این محلول به یک کریستال کننده در دمای ۳۱۱ K وارد می شود. در آنجا کریستالهای KNO_3 با غلظت ۹۶٪ وزنی به دست می آیند. محلول اشباع KNO_3 با غلظت ۳۷/۵٪ وزنی به تبخیرکننده برگشت داده می شود. مقدار جریان برگشتی (R) را بر حسب kg/hr

و جریان کریستالهای محصول (P) را بر حسب kg/hr به دست آورید.
 حل: شکل ۱-۵-۲ شمایی از فرایند را نشان می‌دهد. ۱۰۰۰ kg/hr خوراک تازه به عنوان مبنا انتخاب می‌شود. واکنش شیمیایی اتفاق نمی‌افتد.

می‌توانیم یک موازنه برای KNO_3 روی کل فرایند بنویسیم و مقدار P را مستقیماً به دست آوریم.

$$1000(0.20) = W(0) + P(0.96) \quad (1-5-6)$$

$$P = 208.3 \text{ kg crystals/h}$$

برای محاسبه جریان برگشتی، می‌توان موازنه‌ای حول تبخیرکننده یا کریستال‌کننده نوشت. با نوشتن موازنه کلی حول کریستال‌کننده معادله‌ای به دست خواهد آمد که فقط شامل دو مجهول S و R است. بنابراین داریم:

$$S = R + 208.3 \quad (1-5-7)$$

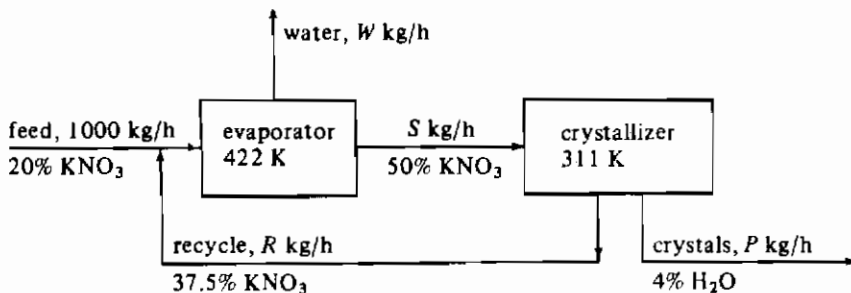
موازنه KNO_3 در کریستال‌کننده به صورت زیر است:

$$S(0.50) = R(0.375) + 208.3(0.96) \quad (1-5-8)$$

با جایگزینی S از معادله (۱-۵-۷) در معادله (۱-۵-۸) و حل این معادله، $R = 766/6 \text{ kg/hr}$ و $S = 974/9 \text{ kg/hr}$ به دست می‌آید.

۱-۵D موازنه جرم و واکنش شیمیایی

در بسیاری از حالات مواد ورودی به فرایند با هم واکنش شیمیایی انجام می‌دهند، به طوری که مواد ورودی با مواد خروجی متفاوت هستند. در این موارد، مناسبتر است که موازنه‌ها به صورت مولی و روی یک جزء خاص نوشته شود نه به صورت جرمی یا وزنی. مثلاً می‌توان از کیلوگرم مول H_2 یا کیلوگرم اتم H، کیلوگرم مول یون CO_3 ، کیلوگرم مول $CaCO_3$ ، کیلوگرم اتم Na^+ ، کیلوگرم مول N_2 و مانند آن استفاده کرد. به عنوان مثال، در احتراق CH_4 با هوا، موازنه‌ها باید به صورت کیلوگرم مول H_2 ، C، O_2 و یا N_2 باشد.



شکل ۱-۵-۲. نمودار فرایند مثال ۱-۵-۲

مثال ۳-۵-۱ احتراق سوختهای گازی

یک سوخت گازی شامل $1/3$ مولی H_2 ، $2/27$ مولی CO ، $6/5$ مولی CO_2 ، $5/0$ مولی O_2 و $6/63$ مولی N_2 با 20% هوای اضافی می‌سوزد (یعنی این‌که هوا بیشتر از مقدار لازم برای واکنش کامل که تولید CO_2 و H_2O می‌کند، مصرف می‌شود). احتراق CO فقط 98% است. برای 100 kg mol سوخت گازی، تعداد مول هر یک از اجزاء را در گاز خروجی پیدا کنید. حل: ابتدا شکل شماتیک فرایند رسم می‌شود (شکل ۳-۵-۱). در این شکل اجزای سوخت گازی نشان داده شده‌اند.

فرض کنید A تعداد مولهای هوا و F تعداد مولهای سوخت گازی باشد. واکنشهای شیمیایی به صورت زیر هستند:



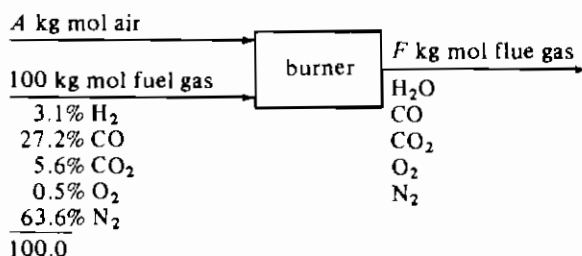
کل مولهای O_2 در سوخت گازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$O_2 \text{ در سوخت گازی} = \left(\frac{1}{2}\right)(27/2)(CO) + 5/6(CO_2) + 0/5(O_2) = 19/7 \text{ mol } O_2$$

برای این‌که تمامی H_2 به طور کامل به H_2O تبدیل شود، طبق معادله (۱-۵-۱۰) به ازای هر مول H_2 ، $1/2$ مول O_2 نیاز است. بنابراین کل O_2 مورد نیاز عبارت است از: $1/55 = \left(\frac{1}{2}\right) \times 3/1$ برای احتراق کامل CO طبق معادله (۱-۵-۹) نیاز به $\left(\frac{1}{2}\right) \times 27/2$ مول O_2 می‌باشد. بنابراین از نظر تئوری مقدار O_2 که باید اضافه شود برابر است با،

$$O_2 \text{ (در سوخت گازی)} = 14/65 = 1/55 + 13/6 - 0/5 \text{ (مورد لازم (تئوری))}$$

با محاسبه 20% اکسیژن اضافی، $(14/65) \times 1/2$ یا $17/58$ مول O_2 وارد می‌شود. چون هوا شامل 79% مولی N_2 است، مقدار N_2 اضافه شده $(17/58) \times \left(\frac{79}{21}\right)$ یا $66/1$ مول N_2 می‌باشد.



شکل ۳-۵-۱. نمودار مثال ۳-۵-۱

تعداد کل مولها در گاز خروجی به این ترتیب به دست می‌آید که، همه مولهای H_2O به H_2O تبدیل می‌شود یا $3/1$ مول H_2O داریم. از طرف دیگر، 2% از CO ، واکنش نمی‌دهد. بنابراین $(27/2) \times 0/02$ یا $0/54$ مول CO نسوخته باقی می‌ماند. موازنه کلی کربن به این صورت است که: مول ورودی کربن $C = 27/2 + 5/6 = 32/8$ می‌باشد. در گاز خروجی $0/54$ مول CO خواهد بود و باقیمانده آن یعنی: $32/8 - 0/54 = 32/26$ یا $32/26$ مول به صورت CO_2 است. برای محاسبه مول خروجی O_2 ، موازنه O_2 را می‌نویسیم.

$$O_2 \text{ mol} = 37/28 = (\text{در هوا}) 17/58 + (\text{در سوخت گازی}) 19/7 + O_2 \text{ ورودی}$$

$$O_2 \text{ آزاد} = O_2 (\text{در } CO_2) + 32/26 + O_2 (\text{در } CO) + 0/54 + O_2 (\text{در } H_2O) = \frac{3/1}{4}$$

با مساوی قرار دادن O_2 ورودی و خروجی، O_2 باقیمانده $3/2$ مول خواهد بود. برای N_2 :

$$N_2 \text{ mol} = 129/70 = (\text{در هوا}) 66/1 + (\text{در سوخت}) 63/6 + N_2 \text{ خروجی}$$

بنابراین گاز خروجی محتوی $3/10$ مول H_2O ، $0/54$ مول CO ، $32/26$ مول CO_2 ، $3/2$ مول O_2 و $129/70$ مول N_2 است.

جزء محدودکننده در واکنشهای شیمیایی با چند واکنش‌کننده، ترکیبی است که مقدار آن کمتر از مقدار لازم برای انجام واکنش استوکیومتری با اجزای دیگر حاضر در واکنش است. بنابراین برطبق تعریف، درصد تکمیل^(۱) یک واکنش عبارت است از، مقدار واقعی واکنش‌کننده محدودکننده که به محصول تبدیل می‌شود تقسیم بر مقدار اولیه آن ضرب در صد.

۱-۶ واحدهای انرژی و حرارت

۱-۶A ژول، کالری و Btu

به همان ترتیب که برای فرایندهای شیمیایی و بیولوژیکی موازنه ماده نوشته شد، می‌توانیم موازنه انرژی را نیز برای یک فرایند بنویسیم. غالباً بخش اعظم انرژیهای ورودی و خروجی یک سیستم به شکل گرماست. قبل از این که چنین موازنه‌ای نوشته شود بهتر است با انواع مختلف واحدهای انرژی و حرارت آشنا شویم. در سیستم SI، انرژی بر حسب ژول (J) یا کیلو ژول (kJ) است. همچنین انرژی بر حسب Btu (واحد انگلیسی حرارت) یا کالری (cal) نیز بیان می‌شود. گرم کالری (g cal) مقدار گرمای لازم برای بالا بردن دمای یک گرم آب به اندازه یک درجه سانتیگراد (از $14/5$ درجه به $15/5$ درجه) می‌باشد. یک

کیلوکالری (kcal) معادل ۱۰۰۰ کالری است. Btu به صورت، مقدار حرارت لازم برای بالا بردن دمای یک پوند آب به اندازه یک درجه فارنهایت است. بنابراین بر اساس ضمیمه A.۱ (۱-۶-۱)

۱-۶B ظرفیت گرمایی^(۱)

ظرفیت گرمایی یک ماده، مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای آن به میزان ۱ درجه می‌باشد. این مقدار گرما می‌تواند برای ۱ g، ۱ lb، ۱ gr mol، ۱ kg mol، یا ۱ lb mol از ماده باشد. به عنوان مثال، ظرفیت گرمایی در سیستم SI به صورت J/kgmol.K و در سیستمهای دیگر به صورت cal/gmol.°C، kcal/kgmol.°C، Btu/lbmol.°F و یا Btu/lbmol.°F بیان می‌شود.

می‌توان نشان داد که مقدار عددی ظرفیت گرمایی بر حسب واحدهای جرمی و یا مولی با هم مساوی هستند یعنی:

$$1.0 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C} = 1.0 \text{ btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{F} \quad (1-6-2)$$

$$1.0 \text{ cal/g mol} \cdot ^\circ\text{C} = 1.0 \text{ btu/lb mol} \cdot ^\circ\text{F} \quad (1-6-3)$$

این مطلب را به این شکل می‌توان اثبات کرد که فرض کنیم ماده‌ای دارای ظرفیت گرمایی $0.8 \text{ Btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{F}$ است. با اعمال ضرایب تبدیل مختلف داریم:

$$(\text{cal/g} \cdot ^\circ\text{C}) = \left(0.8 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}}\right) \left(\frac{252}{16} \frac{\text{cal}}{\text{Btu}}\right) \left(\frac{1 \text{ lb}_m}{453.6 \text{ g}}\right) \left(\frac{1}{1.8} \frac{^\circ\text{F}}{^\circ\text{C}}\right) = 0.8 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

ظرفیت گرمایی گازها (که گاهی گرمای ویژه نیز نامیده می‌شود) در فشار ثابت (c_p) تابعی از دما است و در کاربردهای مهندسی تا فشار حدود چند اتمسفر، میتواند مستقل از فشار در نظر گرفته شود. در بیشتر محاسبات مربوط به فرایندها، تمایل بر این است که مقدار گرمای لازم برای گرم کردن گاز از دمای t_1 تا دمای t_2 به دست آید. چون c_p با دما تغییر می‌کند، بنابراین یا باید انتگرال گیری انجام شود و یا از ظرفیت گرمایی میانگین (c_{pm}) استفاده شود. این مقادیر میانگین برای گازها در $T_1 = 298 \text{ K}$ یا 25°C یا 77°F و با T_2 های مختلف در فشار $101/325 \text{ kPa}$ یا کمتر در جدول ۱-۶-۱ داده شده‌اند. مقادیر c_{pm} در این جدول بر حسب kJ/kg mol.K و مقادیر مختلف T_2 بر حسب K و $^\circ\text{C}$ می‌باشند.

مثال ۱-۶-۱ گرم کردن گاز N₂

گاز N₂ در فشار مطلق یک اتمسفر در یک مبدل حرارتی گرم شده است. مقدار گرمای لازم برای

گرم کردن ۳ گرم N_2 را در محدوده دماهای زیر بر حسب ژول محاسبه کنید:

(الف) $298 - 673 \text{ K}$ ($25 - 400^\circ \text{C}$)

(ب) $298 - 1123 \text{ K}$ ($25 - 850^\circ \text{C}$)

(پ) $673 - 1123 \text{ K}$ ($400 - 850^\circ \text{C}$)

جدول ۱-۶-۱. ظرفیت گرمایی میانگین مولی گازها بین ۲۹۸ و T کلوین (25°C و T)

در فشار $101/325 \text{ kPa}$ یا کمتر (در سیستم SI: $c_p = \text{kJ/kgmol.K}$)

$T(\text{K})$	$T(^{\circ}\text{C})$	H_2	N_2	CO	Air	O_2	H_2O	CO_2	CH_4	SO_2
298	25	28.86	29.14	29.16	29.19	29.38	33.59	37.20	35.8	39.9
373	100	28.99	29.19	29.24	29.29	29.66	33.85	38.73	37.6	41.2
473	200	29.13	29.29	29.38	29.40	30.07	34.24	40.62	40.3	42.9
573	300	29.18	29.46	29.60	29.61	30.53	34.39	42.32	43.1	44.5
673	400	29.23	29.68	29.88	29.94	31.01	35.21	43.80	45.9	45.8
773	500	29.29	29.97	30.19	30.25	31.46	35.75	45.12	48.8	47.0
873	600	29.35	30.27	30.52	30.56	31.89	36.33	46.28	51.4	47.9
973	700	29.44	30.56	30.84	30.87	32.26	36.91	47.32	54.0	48.8
1073	800	29.56	30.85	31.16	31.18	32.62	37.53	48.27	56.4	49.6
1173	900	29.63	31.16	31.49	31.48	32.97	38.14	49.15	58.8	50.3
1273	1000	29.84	31.43	31.77	31.79	33.25	38.71	49.91	61.0	50.9
1473	1200	30.18	31.97	32.30	32.32	33.78	39.88	51.29	64.9	51.9
1673	1400	30.51	32.40	32.73	32.76	34.19	40.90	52.34		

ظرفیت گرمایی میانگین مولی گازها بین 25°C و T در فشار 1 atm یا کمتر (در سیستم Eng: $c_p = \text{btu/lbmol.}^\circ\text{F}$)

$T(^{\circ}\text{C})$	H_2	N_2	CO	Air	O_2	NO	H_2O	CO_2	HCl	Cl_2	CH_4	SO_2	C_2H_6	SO_3	C_2H_4
25	6.894	6.961	6.965	6.972	7.017	7.134	8.024	8.884	6.96	8.12	8.55	9.54	10.45	12.11	12.63
100	6.924	6.972	6.983	6.996	7.083	7.144	8.084	9.251	6.97	8.24	8.98	9.85	11.35	12.84	13.76
200	6.957	6.996	7.017	7.021	7.181	7.224	8.177	9.701	6.98	8.37	9.62	10.25	12.53	13.74	15.27
300	6.970	7.036	7.070	7.073	7.293	7.252	8.215	10.108	7.00	8.48	10.29	10.62	13.65	14.54	16.72
400	6.982	7.089	7.136	7.152	7.406	7.301	8.409	10.462	7.02	8.55	10.97	10.94	14.67	15.22	18.11
500	6.995	7.159	7.210	7.225	7.515	7.389	8.539	10.776	7.06	8.61	11.65	11.22	15.60	15.82	19.39
600	7.011	7.229	7.289	7.299	7.616	7.470	8.678	11.053	7.10	8.66	12.27	11.45	16.45	16.33	20.58
700	7.032	7.298	7.365	7.374	7.706	7.549	8.816	11.303	7.15	8.70	12.90	11.66	17.22	16.77	21.68
800	7.060	7.369	7.443	7.447	7.792	7.630	8.963	11.53	7.21	8.73	13.48	11.84	17.95	17.17	22.72
900	7.076	7.443	7.521	7.520	7.874	7.708	9.109	11.74	7.27	8.77	14.04	12.01	18.63	17.52	23.69
1000	7.128	7.507	7.587	7.593	7.941	7.773	9.246	11.92	7.33	8.80	14.56	12.15	19.23	17.86	24.56
1100	7.169	7.574	7.653	7.660	8.009	7.839	9.389	12.10	7.39	8.82	15.04	12.28	19.81	18.17	25.40
1200	7.209	7.635	7.714	7.719	8.068	7.898	9.524	12.25	7.45	8.94	15.49	12.39	20.33	18.44	26.15
1300	7.252	7.692	7.772	7.778	8.123	7.952	9.66	12.39							
1400	7.288	7.738	7.818	7.824	8.166	7.994	9.77	12.50							
1500	7.326	7.786	7.866	7.873	8.203	8.039	9.89	12.69							
1600	7.386	7.844	7.922	7.929	8.269	8.092	9.95	12.75							
1700	7.421	7.879	7.958	7.965	8.305	8.124	10.13	12.70							
1800	7.467	7.924	8.001	8.010	8.349	8.164	10.24	12.94							
1900	7.505	7.957	8.033	8.043	8.383	8.192	10.34	13.01							
2000	7.548	7.994	8.069	8.081	8.423	8.225	10.43	13.10							
2100	7.588	8.028	8.101	8.115	8.460	8.255	10.52	13.17							
2200	7.624	8.054	8.127	8.144	8.491	8.277	10.61	13.24							

حل: برای حالت (الف) مقدار c_{pm} در جدول ۱-۶-۱ برای فشار یک اتمسفر و کمتر درج شده است، که تا فشار چند اتمسفر نیز می‌تواند به کار رود. برای گاز N_2 در 673 K داریم: $c_{pm} = 29/68\text{ kJ/kg mol.K}$ یا $29/68\text{ J/g mol.K}$ که مقدار ظرفیت گرمایی در محدوده $673\text{ K} - 298\text{ K}$ است.

$$\text{گرمای لازم} = M \text{ g mol} \left(c_{pm} \frac{\text{J}}{\text{g mol} \cdot \text{K}} \right) (T_2 - T_1) \text{K} \quad (1-6-4)$$

با جایگذاری مقادیر معلوم

$$\text{گرمای لازم} = (3) (29/68) (673 - 298) = 33390\text{ J}$$

برای حالت (ب)، c_{pm} در 1123 K (بر اساس درون‌یابی خطی بین 1073 K و 1173 K) برابر با 31 J/g mol.K است.

$$\text{گرمای لازم} = (3) (31) (1123 - 298) = 76725\text{ J}$$

برای حالت (پ)، هیچ ظرفیت گرمایی میانگینی در محدوده 673 K تا 1123 K وجود ندارد، اما می‌توانیم مقدار گرمای مورد نیاز را با کم کردن مقدار گرمای لازم برای گرم کردن گاز از 298 K تا 673 K در حالت (الف) از مقدار گرمای لازم در حالت (ب) به دست آوریم.

$$\begin{aligned} \text{گرمای لازم} &= (298-1123\text{ K}) \text{ گرمای لازم} = (673-1123\text{ K}) \text{ گرمای لازم} \\ &= (298-673) \text{ گرمای لازم} \end{aligned} \quad (1-6-5)$$

با جایگزین کردن مقادیر مناسب در معادله (۱-۶-۵) نتیجه می‌شود که:

$$\text{گرمای لازم} = 76725 - 33390 = 43335\text{ J}$$

برای گرم کردن یک مخلوط گازی، ابتدا گرمای لازم برای گرم کردن هر جزء به طور مستقل محاسبه می‌شود و سپس از حاصل جمع این مقادیر، گرمای کل مشخص خواهد شد.

ظرفیت گرمایی جامدات و مایعات تابع دما و مستقل از فشار است. داده‌های خواص فیزیکی آب در ضمیمه A.2، خواص فیزیکی ترکیبات آلی و معدنی در ضمیمه A.3 و خواص فیزیکی مواد غذایی و بیولوژیکی در ضمیمه A.4 داده شده‌اند.

مثال ۱-۶-۲ گرم کردن شیر

شیر گاو با شدت جریان 4536 kg/hr و دمای $4/4^\circ\text{C}$ در یک مبدل حرارتی توسط آب داغ

به دمای $54/4^{\circ}\text{C}$ می‌رسد. مقدار گرمای لازم چقدر است؟

حل: از ضمیمه A.4، ظرفیت گرمایی میانگین شیر گاو $3/85 \text{ kJ/kg.K}$ است. افزایش دما برابر

$$\Delta T = 54/4 - 4/4 = 50^{\circ}\text{C}$$

است با:

$$\text{گرمای لازم} = (4536 \frac{\text{kg}}{\text{hr}}) (3/85 \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}) (\frac{1}{3600}) (50 \text{ K}) = 242/5 \text{ KW}$$

انتالپی (H) یک ماده بر حسب J/kg از مجموع انرژی داخلی و عبارت فشار - حجم به دست می‌آید. برای یک فرایند بدون واکنش شیمیایی در شرایط فشار ثابت و دمایی متغیر تغییرات گرمایی محاسبه شده توسط معادله (۴-۶-۱)، برابر با تغییر انتالپی ماده نسبت به یک دمای مشخص یا نقطه مبنا است. واحدهای دیگر انتالپی Btu/lb_m و cal/g هستند.

۱-۶C گرمای نهان و جدول بخار

هنگامی که یک ماده در دمای ثابت تغییر فاز میدهد، با تغییرات گرمایی زیادی مواجه است. به عنوان مثال، یخ در صفر درجه سانتیگراد و فشار یک اتمسفر، $6013/4 \text{ kJ/kg mol}$ گرما جذب میکند. این تغییر انتالپی گرمای نهان ذوب^(۱) نامیده می‌شود. داده‌های مربوط به ترکیبات دیگر در مراجع مختلف ارائه شده‌اند.

وقتی یک مایع تحت فشار بخار خود در دمای ثابت تبخیر می‌شود، گرمایی به اندازه گرمای نهان تبخیر^(۲) باید به آن داده شود. گرمای نهان تبخیر در مراجع مختلف موجود است. گرمای نهان تبخیر آب در 25°C و فشار $23/75 \text{ (mmHg)}$ برابر با $44020 \text{ (kJ/kg.mol)}$ و در 25°C و 760 (mmHg) برابر با $44045 \text{ (kJ/kg.mol)}$ است. بنابراین اثر فشار در محاسبات مهندسی قابل صرف نظر کردن است. اما دما تأثیر زیادی روی گرمای نهان آب دارد. همچنین اثر فشار بر ظرفیت گرمایی آب مایع ناچیز و قابل صرف نظر کردن است.

چون آب یک ماده شیمیایی بسیار شناخته شده است، خواص ترمودینامیکی آن در جدول بخار ارائه شده و در ضمیمه A.2 این کتاب نیز بر حسب واحدهای SI و انگلیسی آورده شده است.

مثال ۱-۶-۳ کاربرد جدول بخار

تغییر انتالپی (یعنی مقدار گرمای داده شده) برای هر کدام از حالات زیر را بر حسب واحدهای SI

1. latent heat of fusion

2. latent heat of vaporization

و انگلیسی محاسبه کنید.

الف) گرم کردن یک کیلوگرم (1 lb_m) آب از $21/11^\circ\text{C}$ (70°F) تا 60°C (140°F) در فشار $101/325 \text{ kPa}$ (1 atm).

ب) گرم کردن یک کیلوگرم (1 lb_m) آب از $21/11^\circ\text{C}$ (70°F) تا $115/6^\circ\text{C}$ (240°F) و تبخیر در $172/2 \text{ kPa}$ ($24/97 \text{ Psia}$).

پ) تبخیر یک کیلوگرم (1 lb_m) آب در $115/6^\circ\text{C}$ (240°F) و فشار $172/2 \text{ kPa}$ ($24/97 \text{ Psia}$).

حل: برای قسمت (الف)، اثر فشار روی انتالپی مایع ناچیز است، از ضمیمه A.2:

$$70^\circ\text{F} \text{ در } H = 38/09 \text{ Btu/lb}_m \text{ یا } 21/11^\circ\text{C} \text{ در } H = 88/60 \text{ kJ/kg}$$

$$140^\circ\text{F} \text{ در } H = 107/96 \text{ kPa} \text{ یا } 60^\circ\text{C} \text{ در } H = 251/13 \text{ kJ/kg}$$

$$\Delta H = 251/13 - 88/60 = 162/53 \text{ kJ/kg}$$

$$\Delta H = 107/96 - 38/09 = 69/87 \text{ Btu/lb}_m$$

در قسمت (ب) انتالپی بخار اشباع در $115/6^\circ\text{C}$ (240°F) و $172/2 \text{ kPa}$ ($24/97 \text{ psia}$) برابر با $2699/9 \text{ kJ/kg}$ یا $1160/7 \text{ Btu/lb}_m$ است.

$$\Delta H = 2699/9 - 88/60 = 2611/3 \text{ kJ/kg}$$

$$= 1160/7 - 38/09 = 1122/6 \text{ Btu/lb}_m$$

گرمای نهان آب در $115/6^\circ\text{C}$ (240°F) در قسمت (پ) برابر:

$$2699/9 - 484/9 = 2215 \text{ kJ/kg}$$

$$1160/7 - 208/44 = 952/6 \text{ Btu/lb}_m$$

۶D-۱ گرمای واکنش

وقتی واکنش شیمیایی اتفاق می‌افتد، اثرات گرمایی همیشه در واکنش ظاهر می‌شود. بحث مربوط به این تغییرات انرژی ترموشیمی نامیده می‌شود. به عنوان مثال، هنگامی که HCl با NaOH خنثی می‌شود، گرمای زیادی آزاد می‌شود و واکنش گرمازاست. در واکنش گرماگیر گرما جذب می‌شود. این گرمای واکنش بستگی به طبیعت شیمیایی مواد اولیه و محصولات و هم چنین حالت فیزیکی آنها دارد. به منظور نظم دادن به اطلاعات و امکان ارائه آنها، گرمای واکنش استاندارد (ΔH°) را تعریف

می‌کنیم، که به صورت تغییر انتالپی یک کیلوگرم مول ماده وقتی در شرایط $101/325 \text{ kPa}$ فشار و دمای 298 K واکنش دهد، بیان می‌شود. مثلاً برای واکنش



ΔH° واکنش $10^3 \text{ kJ/kgmol} \times 285/840$ یا $68/317 \text{ kcal/gmol}$ است. واکنش گرمازا است و مقدار منفی است. زیرا واکنش کاهش انتالپی می‌دهد. در این حالت گاز H_2 با گاز O_2 برای تولید آب مایع واکنش می‌دهد، که همه در دمای 298 K هستند.

بسته به نوع واکنش نامهای خاصی به ΔH° داده‌اند، وقتی در یک واکنش محصول از عناصر تشکیل‌دهنده خود تولید می‌شود، مانند معادله (1-6-6)، آنرا گرمای تشکیل ΔH_f° می‌نامند. در احتراق CH_4 برای تشکیل CO_2 و H_2O ، آنرا گرمای احتراق ΔH_c° می‌نامند. مقادیر مختلف ΔH° در ضمیمه A.3 ارائه شده‌است.

مثال 1-6-4 احتراق کربن

10 گرم مول کربن گرافیتی در یک کالریمتر در 298 K و 1 atm سوزاننده شده‌است. احتراق کامل نیست و 90% کربن به CO_2 و 10% به CO تبدیل می‌شود. تغییر انتالپی کل بر حسب kJ و kcal چقدر است؟

حل: در ضمیمه A.3، مقدار ΔH° وقتی که کربن به CO_2 تبدیل شود $393/513 \times 10^3 \text{ kJ/kgmol}$ یا $94/0518 \text{ kcal/g mol}$ داده شده است و وقتی که کربن به CO تبدیل شود گرمای احتراق برابر با $110/523 \times 10^3 \text{ kJ/kg mol}$ یا $26/4157 \text{ kcal/g mol}$ می‌باشد. چون 9 مول CO_2 و یک مول CO تشکیل شده‌است،

$$\Delta H = 9 \times (-393/513) + 1 \times (-110/523) = -3652 \text{ kJ}$$

$$= 9 \times (-94/0518) + 1 \times (-26/4157) = -872/9 \text{ kcal}$$

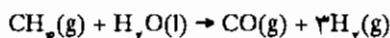
اگر جدول گرمای تشکیل این ترکیبات در دسترس باشد، گرمای استاندارد واکنش ΔH° به روش زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta H^\circ = \sum \Delta H_f^\circ(\text{products}) - \sum \Delta H_f^\circ(\text{reactants}) \quad (1-6-7)$$

در ضمیمه A.3 تعداد کمی از ΔH_f° ها آورده شده‌است.

مثال ۵-۶-۱ واکنش متان

یک کیلوگرم مول CH_4 در شرایط $101/325 \text{ kPa}$ و 298 K واکنش زیر را انجام می‌دهد:



گرمای استاندارد واکنش در 298 K را بر حسب kJ حساب کنید.

حل: از ضمیمه A.3 گرمای تشکیل استاندارد ترکیبات زیر در 298 K به دست می‌آید.

	$\Delta H_f^0 \text{ (kJ/kgmol)}$
$\text{CH}_4(\text{g})$	$-74/848 \times 10^3$
$\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	$-285/840 \times 10^3$
$\text{CO}(\text{g})$	$-110/523 \times 10^3$
$\text{H}_2(\text{g})$	۰

توجه کنید که بر اساس تعریف ΔH_f^0 همه عناصر برابر با صفر است. با جایگزینی در معادله (۷-۶-۱) نتیجه می‌شود که،

$$\Delta H = [-110/523 \times 10^3 - 3 \times (0)] - (-74/848 \times 10^3 - 285/840 \times 10^3)$$

$$= +250/165 \times 10^3 \text{ kJ/kg mol (گرماگیر)}$$

۷-۱ بقای انرژی و موازنه گرما

۷A-۱ بقای انرژی

در نوشتن موازنه ماده از قانون بقای جرم استفاده کردیم، که بیان می‌کند: جرم ورودی مساوی جرم خروجی به علاوه جرم باقیمانده در فرایند است. به طریق مشابه می‌توانیم قانون بقای انرژی را بیان کنیم که می‌گوید: همه انرژی ورودی به یک فرایند مساوی با انرژی خروجی به علاوه انرژی باقیمانده در فرایند است. در این بخش موازنه‌های ابتدایی گرما نوشته خواهد شد و موازنه‌های کامل تر در بخشهای ۷-۲ و ۷-۵ بحث خواهد شد.

انرژی می‌تواند به شکلهای مختلفی وجود داشته باشد. تعدادی از شکلهای معمول انرژی، انتقالی، انرژی الکتریکی، انرژی شیمیایی، انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل، کار و گرما هستند. غالباً در فرایندهایی که در فشار ثابت اتفاق می‌افتند، شکلهایی از انرژی مانند انرژی الکتریکی،

انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار، یا وجود ندارد و یا در صورت وجود می‌توانند ناچیز فرض شوند. بنابراین فقط انتالپی مواد (در فشار ثابت)، انرژی استاندارد واکنش شیمیایی (ΔH) در 25°C ، و گرمای داده شده یا گرفته شده باید در موازنه انرژی در نظر گرفته شود. به این حالت معمولاً موازنه گرما گفته می‌شود.

۱-۷B موازنه گرما

در انجام یک موازنه گرما در شرایط پایدار، می‌توانیم همان روشی را که برای موازنه ماده به کار بردیم، در این جا هم استفاده کنیم. انرژی که توسط مواد ورودی به فرایند وارد می‌شود به علاوه هر گونه انرژی خالصی که به فرایند داده شود، مساوی با انرژی خارج شده توسط مواد در خروجی فرایند می‌باشد. به عبارت ریاضی:

$$\sum H_R + (-\Delta H_{298}^\circ) + q = \sum H_P \quad (1-7-1)$$

که در این جا $\sum H_R$ مجموع انتالپی‌های همه مواد ورودی نسبت به حالت مبنا برای گرمای واکنش استاندارد در 298 K و $101/32\text{ kPa}$ است. اگر دمای ورودی بالاتراز 298 K باشد این حاصل جمع مثبت خواهد بود. ΔH_{298}° گرمای واکنش استاندارد در 298 K و $101/32\text{ kPa}$ است. با توجه به این که واکنش گرمای خود را به فرایند می‌دهد، بنابراین در یک واکنش گرمازا باید علامت منفی ΔH_{298}° مثبت در نظر گرفته شود. q انرژی یا گرمای خالص داده شده به سیستم است. اگر گرما از سیستم خارج شود، این پارامتر منفی خواهد بود. $\sum H_P$ مجموع انتالپی‌های همه مواد خروجی نسبت به حالت استاندارد مبنا در 298 K یا 25°C است.

به خاطر داشته باشید که اگر دمای مواد ورودی به فرایند کمتر از 298 K (25°C) باشد، $\sum H_R$ منفی خواهد بود. باید دقت شود که علامت عبارات در معادله (۱-۷-۱) اشتباه نشود. اگر واکنش شیمیایی نداشته باشیم، گرمایش و سرمایش ساده و یا تغییر فاز اتفاق می‌افتند. کاربرد معادله (۱-۷-۱) در طی چند مثال توضیح داده خواهد شد. برای راحتی، تمام جملات طرف چپ معادله (۱-۷-۱) به عنوان ورودی و جمله طرف راست به عنوان خروجی نامیده می‌شوند.

مثال ۱-۷-۱ گرمایش محیط تخمیر

یک مایع مخمر در 30°C با نرخ 2000 kg/hr به یک گرمکن پمپ می‌شود و در آن جا تحت فشار تا 70°C گرم می‌گردد. از پساب داغ برای گرم کردن مایع مخمر استفاده می‌شود. این پساب در 95°C وارد و در 85°C خارج می‌شود. ظرفیت گرمایی میانگین مایع مخمر $4/06\text{ kJ/kg.K}$ و

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

آب $4/21 \text{ kJ/kg.K}$ است. جریان مایع مخمر و جریان پساب در گرمکن توسط صفحه‌ای فلزی از هم جدا شده‌اند که گرما از طریق این صفحه منتقل می‌شود. این دو جریان هیچگونه اختلاط فیزیکی با یکدیگر ندارند. یک موازنه کامل انرژی برای سیستم بنویسید. نرخ جریان آب و مقدار گرمای منتقل شده به مایع مخمر را با فرض این که اتلاف حرارتی وجود ندارد محاسبه کنید. این فرایند در شکل ۱-۷-۱ نشان داده شده است.

حل: طبق معمول شرایط استاندارد 298 K (25°C) مبنای محاسبه انتالپی‌های مختلف است. ورودیها با توجه به معادله (۱-۷-۱) به صورت زیر هستند.

ورودیها: $\sum H_R$ مجموع انتالپی‌های دو جریان نسبت به حالت مینا 298 K (25°C)

(توجه کنید که $\Delta t = 30 - 25 = 5^\circ\text{C} = 5 \text{ K}$)

$$H_{\text{مایع}} = (20000 \text{ kg/hr})(4/06 \text{ kJ/kg.K})(5 \text{ K}) = 4/060 \times 10^4 \text{ kJ/hr}$$

$$H_{\text{آب}} = W(4/21)(95-25) = 2/947 \times 10^4 \text{ W kJ/hr}$$

$-\Delta H_{298}^\circ = 0$ (چون واکنش شیمیایی وجود ندارد)

$q = 0$ (تلفات گرمایی وجود ندارد و گرما هم افزوده نمی‌شود)

خروجیها: $\sum H_P$ مجموع انتالپی‌های دو جریان نسبت به حالت مینا 298 K (25°C)

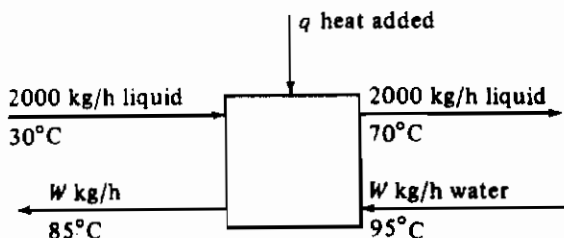
$$H_{\text{مایع}} = 20000(4/06)(70-25) = 3/65 \times 10^5 \text{ kJ/hr}$$

$$H_{\text{آب}} = W(4/21)(85-25) = 2/526 \times 10^4 \text{ W kJ/hr}$$

با مساوی قرار دادن ورودی و خروجی در معادله (۱-۷-۱) و حل آن برای W ، نتیجه می‌شود:

$$4/060 \times 10^4 + 2/947 \times 10^4 \text{ W} = 3/654 \times 10^5 + 2/526 \times 10^4 \text{ W}$$

$$W = 7720 \text{ kg/hr}$$



شکل ۱-۷-۱. نمودار فرایند مثال ۱-۷-۱

گرمای داده شده به مایع مخمر، برابر با اختلاف انتالپی‌های مایع ورودی و خروجی است.

$$H(\text{مایع خروجی}) - H(\text{مایع ورودی}) = 3/654 \times 10^5 - 4/060 \times 10^4$$

$$= 3/248 \times 10^5 \text{ kJ/hr (90/25 kW)}$$

توجه کنید که در این مثال چون ظرفیتهای گرمایی ثابت فرض شده‌اند، بنابراین موازنه ساده‌تری به شکل زیر می‌تواند نوشته شود:

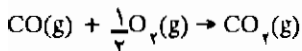
گرمای از دست داده شده توسط آب = گرمای گرفته شده به وسیله مایع

$$2000(4/06)(70 - 30) = W(4/21)(95 - 85)$$

با حل این معادله نتیجه می‌شود که: $W = 7720 \text{ kg/hr}$. این موازنه ساده هنگامی قابل استفاده است که c_p ثابت باشد. وقتی c_p با دما تغییر می‌کند و ماده هم به صورت گاز است، مقادیر c_{pm} در محدوده 298 K و t در دسترس هستند و روش ساده فوق نمی‌تواند بدون به دست آوردن مقادیر جدید c_{pm} در محدوده‌های مختلف دما به کار رود.

مثال ۱-۷-۲ موازنه ماده و گرما در احتراق

گاز CO حاصل از یک فرایند با نرخ 1000 g mol/hr و دمای 473 K در یک کوره در فشار 1 atm همراه با هوا بادامی 373 K می‌سوزد. احتراق کامل است و 90% هوای اضافی به کار می‌رود. گازهای خروجی با دمای 1273 K کوره را ترک می‌کنند. گرمای منتقل شده از کوره را به دست آورید. حل: شمایی از فرایند در شکل ۱-۷-۲ نشان داده شده است. موازنه جرم به صورت زیر نوشته می‌شود.



$$\Delta H_{298}^\circ = -282/989 \times 10^3 \text{ kJ/kg mol}$$

$$\text{CO} \text{ مول} = 1000 \text{ g mol/hr} = \text{CO}_2 \text{ مول} = 1 \text{ kg mol/hr}$$

$$\text{تعداد مول تئوری O}_2 \text{ لازم} = (1) \left(\frac{1}{2}\right) = 0/5 \text{ kg mol/hr}$$

$$\text{مول O}_2 \text{ ورودی} = (0/5)(1/9) = 0/95 \text{ kg mol/hr}$$

$$\text{مول N}_2 \text{ ورودی} = 0/95 \left(\frac{79}{21}\right) = 3/57 \text{ kg mol/hr}$$

$$\text{هوای ورودی} = 0/95 + 3/57 = 4/52 \text{ kg mol/hr} = A$$

$$\text{در گاز خروجی O}_2 = \text{مصرف شده} - \text{ورودی} = 0/95 - 0/5 = 0/45 \text{ kg mol/hr}$$

$$\text{در گاز خروجی CO}_2 = 1 \text{ kg mol/hr}$$

$$\text{در گاز خروجی N}_2 = 3/57 \text{ kg mol/hr}$$

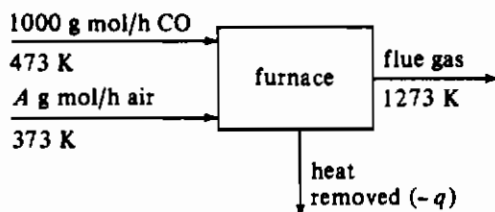
بر طبق معادله (۱-۷-۱)، برای موازنه گرما نسبت به شرایط استاندارد در ۲۹۸ K ورودیها:

$$H(\text{CO}) = 1(c_{\text{pm}})(473 - 298) = 1(29/38)(473 - 298) = 5142 \text{ kJ/hr}$$

c_{pm} برای CO برابر $29/38 \text{ kJ/kg mol.K}$ در گستره ۲۹۸ K تا ۴۷۳ K است.

$$H(\text{هوا}) = 4/52(c_{\text{pm}})(373 - 298) = 4/52(29/29)(373 - 298) = 9929 \text{ kJ/hr}$$

$q =$ گرمای اضافه شده، kJ/hr



شکل ۱-۷-۲. نمودار فرایند مثال ۱-۷-۲

(در این جا مقدار به دست آمده منفی است که نشان می دهد گرما از سیستم خارج شده است)

$$-\Delta H_{298}^{\circ} = -(-282/989 \times 10^3 \text{ kJ/kg mol})(1 \text{ kg mol/hr}) = 282990 \text{ kJ/hr}$$

خروجیها:

$$H(\text{CO}_2) = 1(c_{\text{pm}})(1273 - 298) = 1(49/91)(1273 - 298) = 48660 \text{ kJ/hr}$$

$$H(\text{O}_2) = 0/45(c_{\text{pm}})(1273 - 298) = 0/45(33/25)(1273 - 298) = 14590 \text{ kJ/hr}$$

$$H(\text{N}_2) = 3/570(c_{\text{pm}})(1273 - 298) = 3/57(31/43)(1273 - 298) = 109400 \text{ kJ/hr}$$

با مساوی قرار دادن ورودی و خروجی و حل معادله بر حسب q

$$5142 + 9929 + q + 282990 = 8660 + 14590 + 109400$$

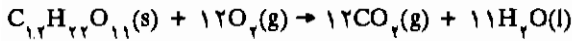
$$q = -125411 \text{ kJ/hr}$$

بنابراین گرمای منتقل شده برابر با 34837 Watt - می باشد.

غالباً هنگامی که واکنش شیمیایی در فرایند اتفاق می افتد و ظرفیتهای گرمایی با دما تغییر می کنند، اگر دمای نهائی مجهول باشد، حل معادله موازنه گرما به صورت حدس و خطا خواهد بود.

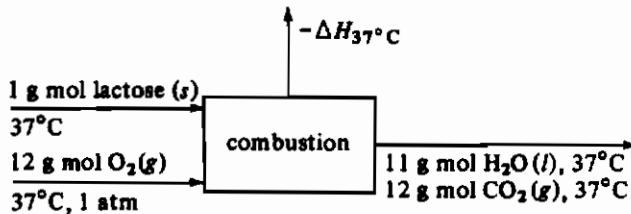
مثال ۳-۷-۱ اکسیداسیون لاکتوز

در بیشتر فرایندهای بیوشیمیایی، لاکتوز به عنوان یک ماده غذایی به صورت زیر اکسید می‌شود،



طبق ضمیمه A.3 گرمای احتراق (ΔH°_c) در $25^\circ C$ برابر $5648/8 \times 10^4$ J/g mol می‌باشد.

گرمای احتراق کامل در $37^\circ C$ را، که دمای بسیاری از واکنشهای بیوشیمیایی است، تعیین کنید. c_{pm} لاکتوز جامد $1/2$ J/g.K و جرم مولکولی آن $342/3$ است.



شکل ۳-۷-۱. نمودار فرایند مثال ۳-۷-۱

حل: این مسأله به صورت یک مسأله معمولی موازنه گرما می‌تواند حل شود. ابتدا شکل مسأله رسم می‌شود. سپس با در نظر گرفتن دمای مبنای برابر با $25^\circ C$ ، انتالپی‌های ورودی و خروجی محاسبه می‌شوند. اختلاف دما به صورت زیر است:

$$\Delta t = (37 - 25)^\circ C = (37 - 25) K$$

$$H(\text{لاکتوز}) = (342/3 \text{ g}) (c_{pm} \frac{J}{g.K}) (37 - 25) K = 342/3 (1/2) (37 - 25) = 4929 J$$

$$H(O_2 \text{ گاز}) = (12 \text{ gmol}) (c_{pm} \frac{J}{mol.K}) (37 - 25) K = 12 (29/38) (37 - 25) = 4230 J$$

(c_{pm} مربوط به O_2 از جدول ۱-۶-۱ به دست آمده است).

$$-\Delta H^\circ_{\text{پد}} = -(-5648/8 \times 10^4)$$

خروجیها:

$$H(H_2O \text{ مایع}) = 11 (18/0.2 \text{ g}) (c_{pm} \frac{J}{g.K}) (37 - 25) K = 11 (18/0.2) (4/18) (37 - 25) = 9943 J$$

(c_{pm} آب مایع از ضمیمه A.2 به دست آمده است)

$$H(CO_2 \text{ گاز}) = (12 \text{ gmol}) (c_{pm} \frac{J}{mol.K}) (37 - 25) K = 12 (37/45) (37 - 25) = 5393 J$$

(c_{pm} گاز CO_2 از جدول ۱-۶-۱ به دست آمده است)

با در نظر گرفتن این که، خروجی = ورودی و حل آن

$$4929 + 4230 + 5648/8 \times 10^3 = 9943 + 5393 - \Delta H_{pv}$$

$$\Delta H_{pv} = -5642/6 \times 10^3 = \Delta H_{p1,k}$$

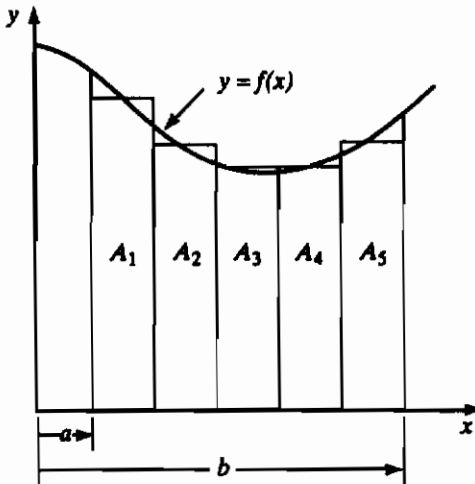
۱-۸ روشهای ترسیمی، عددی و ریاضی

۱-۸-۱ انتگرال گیری ترسیمی

اغلب اوقات با توابع ریاضی پیچیده‌ای روبرو هستیم که به روشهای تحلیلی نمی‌توان از آنها انتگرال گرفت. یا در برخی موارد، تابع از داده‌های تجربی به دست آمده است و هیچ معادله ریاضی برای این داده‌های تجربی وجود ندارد تا بتوان از آن به‌طور تحلیلی انتگرال گرفت. در این موارد انتگرال گیری به صورت ترسیمی انجام می‌شود.

به طوری که در شکل ۱-۸-۱ نشان داده شده است، انتگرال گیری در گستره $x = a$ تا $x = b$ به صورت ترسیمی انجام می‌شود. در اینجا تابع $y = f(x)$ بر حسب x رسم می‌شود و سطح زیر نمودار $y = f(x)$ بین محدوده $x = a$ تا $x = b$ برابر با مقدار انتگرال است. این سطح مساوی با مجموع سطح مستطیلهای می‌باشد که به صورت زیر است.

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \quad (1-8-1)$$



شکل ۱-۸-۱. انتگرال گیری ترسیمی $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$

۱-۸B انتگرال گیری عددی و روش سیمپسون^(۱)

گاهی اوقات لازم است که انتگرال گیری را به صورت عددی از طریق محاسبه مقدار یک انتگرال معین از یک سری مقادیر عددی تابع $f(x)$ انجام دهیم. اما اگر تعداد داده‌های موجود زیاد باشد روشهای عددی و استفاده از کامپیوتر مناسب تر است. انتگرالی که باید محاسبه شود به صورت زیر است.

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx \quad (1-8-2)$$

که در این جا گستره انتگرال از a تا b است.

معمولترین روش عددی، روش سهمی است که به قاعده سیمپسون معروف است. این روش تمامی محدوده a تا b را به m محدوده کوچکتر تقسیم میکند، که m یک عدد زوج است.

$$m = \frac{b-a}{h} \quad (1-8-3)$$

مقدار h ، به عنوان یک ثابت، فاصله روی محور x است. سپس تابع $f(x)$ به یک سهمی در هر محدوده کوچکتر تقریب زده می‌شود و بر اساس روش سیمپسون

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{m-1}) + 2(f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{m-2}) + f_m] \quad (1-8-4)$$

که در این جا f_0 مقدار تابع در $x = a$ ، f_1 مقدار تابع در $x = x_1$ و... و f_m مقدار تابع $f(x)$ در $x = b$ است. خواننده بایستی توجه کند که m یک عدد زوج است و فاصله‌ها نیز تعدادشان زوج است. این روش برای محاسبات کامپیوتری مناسب است.

مسائل

۱-۲-۱. دمای یک فرایند شیمیایی: دمای یک واکنش شیمیایی $353/2$ K است. دمای آن بر حسب $^{\circ}F$ ، $^{\circ}C$ و $^{\circ}R$ چقدر است؟

جواب: $176^{\circ}F$ ، $80^{\circ}C$ ، 636 R

۱-۲-۲. دمای محل آماده کردن گوشت دودی: در یک محل آماده کردن گوشت دودی برای ساخت سوسیس دمای نهایی داخل سوسیس غالباً $155^{\circ}F$ است. این دما را بر حسب $^{\circ}F$ ، $^{\circ}C$ و $^{\circ}R$ حساب کنید.

۱-۳-۱. جرم مولکولی هوا: در بیشتر محاسبات مهندسی فرض می‌شود که هوا ترکیبی از ۲۱٪ مولی اکسیژن و ۷۹٪ مولی نیتروژن است. جرم مولکولی هوا را محاسبه کنید.

جواب: $g/g \text{ mol}$ یا $۲۸/۹$ یا $lb_m/lb \text{ mol}$ یا $kg/kg \text{ mol}$

۱-۳-۲. اکسیداسیون CO و واحدهای مولی: برای تولید CO_p گاز CO توسط اکسیژن (O_p) اکسید می‌شود. از ۵۶ kg گاز CO چند کیلوگرم CO_p به دست خواهد آمد؟ همچنین جرم اکسیژن (O_p) لازم تئوری را برای انجام این واکنش محاسبه کنید. (راهنمایی: ابتدا واکنش شیمیایی موازنه شده را بنویسید تا بتوانید تعداد مول O_p لازم را به ازای ۱ kmol گاز CO پیدا کنید. سپس تعداد مول CO را بازای ۵۶ kg گاز CO محاسبه کنید).

جواب: $۳۲ \text{ kg } O_p$ ، $۸۸ \text{ kg } CO_p$

۱-۳-۳. ترکیب یک مخلوط گازی: یک مخلوط گازی از ۲۰ گرم گاز O_p ، ۸۳ گرم N_p و ۴۵ گرم CO_p تشکیل شده است. ترکیب مخلوط را بر حسب کسر مولی محاسبه کنید و جرم مولکولی متوسط مخلوط را پیدا کنید.

جواب: جرم مولکولی متوسط = $۳۴/۲۹$ و $۳۴/۲ \text{ kg/kg mol}$

۱-۳-۴. ترکیب یک محلول پروتئین: یک محلول مایع از $۱/۱۵$ ٪ وزنی پروتئین، $۰/۲۷$ ٪ وزنی KCl و باقیمانده آن آب، تشکیل شده است. بر اساس روش gel permeation جرم مولکولی متوسط پروتئین برابر با ۵۲۵۰۰۰ g/mol است. کسر مولی هر جزء را در محلول پیدا کنید.

۱-۳-۵. غلظت محلول NaCl: یک محلول آبی در $۲۵ \text{ }^\circ\text{C}$ دارای غلظت ۲۴ ٪ وزنی و دانسیته $۱/۱۷۸ \text{ g/cm}^۳$ است. موارد زیر را حساب کنید:

الف) کسر مولی NaCl و آب

ب) غلظت NaCl بر حسب $g \text{ mol/lit}$ ، $lb_m/ft^۳$ ، lb_m/gal و $kg/m^۳$

۱-۴-۱. تبدیل اندازه گیرهای فشار در انجماد خشک^(۱): در اندازه گیری آزمایش انجماد خشک گوشت گاو، فشار مطلق $۲/۴ \text{ mmHg}$ در محفظه ایجاد شده است. این فشار را بر حسب اتمسفر، اینچ آب در ۴°C ، میکرومتر جیوه و پاسکال بیان کنید. (راهنمایی: از ضمیمه A.1 برای به دست آوردن ضرایب تبدیل کمک بگیرید).

جواب: $۳ \times ۱۰^{-۳} \text{ atm}$ ، $۳/۱۶$ ، $۱/۲۸۵ \text{ in H}_2\text{O}$ ، $۲۴۰۰ \text{ } \mu\text{mHg}$ و ۳۲۰ Pa

۱-۴-۲. تراکم و سرد کردن گاز نیتروژن: $۶۵ \text{ ft}^۳$ گاز در $۹۰ \text{ }^\circ\text{F}$ و ۲۹ psig تا فشار ۷۵ psig فشرده شده و تا دمای $۶۵ \text{ }^\circ\text{F}$ سرد می‌شود. حجم نهایی گاز را بر حسب $\text{ft}^۳$ و دانسیته نهایی را

برحسب lb_m/ft^3 محاسبه کنید. (راهنمایی: ابتدا همه فشارها را به psia و سپس اتمسفر تبدیل کنید و شرایط اصلی را در معادله (۱-۴-۱) جایگزین کنید تا تعداد مول را به دست آورید.)

۱-۴-۳. ترکیب گاز و حجم: مخلوط گازی شامل 0.13 g mol NH_3 ، 0.27 g mol N_2 و $0.25 \text{ gmol H}_2\text{O}$ به صورت بخار در یک ظرف در فشار کل 830 mmHg و 323 K محبوس شده است. موارد زیر را حساب کنید:

الف) کسر مولی هر جزء

ب) فشار جزئی هر جزء بر حسب mmHg

پ) حجم کل مخلوط بر حسب m^3 یا ft^3 .

۱-۴-۴. تبخیر یک ماده آلی حساس به گرما: یک مایع آلی قرار است از یک محلول مایع که شامل درصد کمی مواد جامد محلول غیرقوار است تبخیر شود. چون این ماده به گرما حساس است و ممکن است در دمای بالا بپزد، تبخیر در خلأ انجام می‌شود. اگر پایین‌ترین فشار مطلق قابل دسترسی 12 mmHg باشد. دمای تبخیر بر حسب K چقدر است؟ فرض می‌شود که مقدار کم جامدات تأثیری روی فشار بخار ندارد. فشار بخار توسط رابطه زیر داده شده است:

$$\log P_A = -2250 \left(\frac{1}{T} \right) + 9.05$$

که در معادله بالا، P_A برحسب میلی‌متر جیوه و T بر حسب کلورین است.

جواب: $9/1^\circ\text{C}$ یا $283/3 \text{ K}$

۱-۵-۱. تبخیر محلول شیرۀ نیشکر: از یک تبخیرکننده برای تغلیظ محلول نیشکر استفاده می‌شود. خوراک با نرخ 10000 kg/d شامل 38% وزنی شکر تبخیر شده و تولید محصولی با غلظت 74% وزنی می‌کند. وزن محلول تولید شده و مقدار آب تبخیر شده را محاسبه کنید.

جواب: 5135 kg از محلول 74% وزنی، 4865 kg/d آب

۱-۵-۲. آماده کردن خوراک ماهی: از ماهی تازه برای آماده کردن خوراک ماهی به عنوان پروتئین کمکی غذا استفاده می‌شود. در این فرایند، در ابتدا برای تولید کیک ماهی مرطوب که شامل 80% وزنی آب و 20% وزنی کیک است، روغن ماهی گرفته می‌شود. سپس کیک مرطوب در یک خشک‌کن دوار خشک می‌شود تا کیک خشک محتوی 40% وزنی آب به دست آید. نهایتاً محصول خرد شده و بسته‌بندی می‌شود. مقدار کیک مرطوب لازم برای تولید 1000 kg/hr محصول کیک خشک را بر حسب kg/hr محاسبه کنید.

جواب: 3000 kg/hr کیک مرطوب

۱-۵-۳. خشک کردن الوار: 100 کیلوگرم الوار مرطوب محتوی 11% وزنی رطوبت خشک می‌شود

به نحوی که هر کیلو از الوار خشک حاوی $6/38 \text{ kg}$ آب باشد. وزن الوار خشک شده و میزان آب تبخیر شده چقدر است؟

۱-۵-۴. فرآورش خمیر کاغذ: خمیر کاغذ مرطوب محتوی 68% وزنی آب است. پس از خشک شدن خمیر مشخص می شود که 55% مقدار آب اولیه تبخیر شده است. ترکیب خمیر خشک شده و وزن آن را هنگامی که نرخ خوراک (خمیر مرطوب) 1000 kg/min است، محاسبه کنید.

۱-۵-۵. تولید مربا از قطعات خرد شده میوه در دو مرحله: در یک فرایند تولید مربا، قطعات خرد شده میوه محتوی 14% وزنی مواد جامد قابل حل، با شکر ($1/22 \text{ kg}$ شکر بازای هر کیلوگرم میوه خرد شده) و پکتین ($0/025 \text{ kg}$ پکتین بازای هر کیلوگرم میوه خرد شده) در یک مخلوط کن مخلوط می شوند. مخلوط حاصل در یک ظرف تبخیر می شود تا مربایی حاصل گردد که محتوی 67% وزنی مواد جامد محلول است. در صورتی که جرم قطعات میوه 1000 kg باشد، جرم کل مخلوط موجود در مخلوط کن، جرم آب تبخیر شده و جرم مربای تولید شده را حساب کنید.

جواب: $2222/5 \text{ kg}$ مخلوط، 89 kg آب، $2033/5 \text{ kg}$ مربا

۱-۵-۶. خشک کردن نشاسته: در بسیاری از کشورها از آرد نشاسته برای تهیه نان و محصولات مشابه استفاده می شود. برای تولید آرد، دانه های درشت نشاسته که محتوی 66% وزنی آب است تا 5% وزنی خشک شده و سپس آسیاب می شوند. برای تولید 5000 kg/hr آرد چه مقدار دانه بایستی خشک شود و چه مقدار آب خارج می شود؟

۱-۵-۷. فرآورش روغن سویا در سه مرحله: 10000 kg دانه سویا در یک سیستم سه مرحله ای فرآورش می شود. خوراک محتوی 35% وزنی پروتئین، $27/1\%$ وزنی کربوهیدرات، $9/4\%$ وزنی الیاف، $10/5\%$ وزنی رطوبت و 18% وزنی روغن است. در اولین مرحله دانه ها خرد شده و فشرده می شوند تا مقداری از روغن آنها خارج شود. جریانی از روغن و جریان دیگری از دانه های فشرده شده ایجاد می شود که محتوی 6% روغن است. فرض کنید جریان روغن حاوی روغن خالص است و اجزای دیگر در آن وجود ندارد. در مرحله دوم، روغن موجود در دانه های فشرده شده با هگزان استخراج می شود که یک جریان حاوی دانه های استخراج شده با محتوی $0/5\%$ روغن و یک جریان هگزان-روغن ایجاد می شود. فرض کنید هگزان در دانه های استخراج شده خروجی وجود ندارد. در مرحله آخر دانه های استخراج شده با میزان رطوبت 8% وزنی خشک می شوند. مطلوب است:

الف) جرم دانه های فشرده شده خروجی از مرحله اول بر حسب کیلوگرم

ب) جرم دانه‌های استخراج شده از مرحله دوم بر حسب کیلوگرم
 پ) جرم دانه‌های خشک شده در مرحله نهایی بر حسب کیلوگرم و درصد وزنی پروتئین در
 دانه‌های خشک شده.

جواب: الف) 8723 kg ب) 8241 kg پ) 7818 kg و $44/8\%$ وزنی پروتئین.
 ۸-۵-۱. جریان برگشتی در یک خشک‌کن: یک ماده جامد محتوی 15% وزنی رطوبت به وسیله دمیدن
 هوای گرم تازه که با جریان هوای برگشتی مخلوط شده است، خشک می‌شود و به رطوبت 7%
 وزنی می‌رسد. رطوبت هوای تازه ورودی برابر با (هوای خشک kg/kg آب) $0/01$ می‌باشد و
 رطوبت هوای برگشتی از خشک‌کن (هوای خشک kg/kg آب) $0/1$ است. رطوبت هوای
 حاصل از اختلاط این دو جریان برابر با (هوای خشک kg/kg آب) $0/03$ می‌باشد.
 در صورتی که نرخ خوراک (kg/hr جامد) 100 باشد، دبی هوای خشک را در هوای تازه و در
 جریان هوای برگشتی بر حسب kg/hr به دست آورید و نرخ محصول خشک شده را بر حسب
 kg/hr محاسبه کنید.

جواب: $95/6 \text{ kg}/\text{hr}$ هوای خشک در هوای تازه، $27/3 \text{ kg}/\text{hr}$ هوای خشک
 در هوای برگشتی و $91/4 \text{ kg}/\text{hr}$ محصول خشک شده.

۹-۵-۱. کریستال کردن و جریان برگشتی: می‌خواهیم $1000 \text{ kg}/\text{hr}$ کریستال $\text{Na}_2\text{PO}_4 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ را از
 محلول $5/6\%$ وزنی Na_2PO_4 با ناخالصی ناچیز تهیه کنیم. در ابتدا محلول اولیه در یک
 تبخیرکننده مقداری از آب خود را از دست می‌دهد و به غلظت 35% وزنی می‌رسد. سپس در
 یک کریستال‌کننده تا دمای 293 K سرد می‌شود، که در آنجا کریستالهای هیدراته و محلول آبی
 اصلی از یکدیگر جدا می‌شوند. از هر 10 کیلوگرم محلول اصلی یک کیلوگرم آن برای
 خارج کردن ناخالصیها، به دور ریخته می‌شود و بقیه آن به تبخیرکننده بازگشت داده می‌شود.
 حلالیت Na_2PO_4 در 293 K برابر $9/91\%$ وزنی است. نرخ محلول خوراک و نرخ آب
 خروجی از تبخیرکننده را بر حسب kg/hr محاسبه کنید.

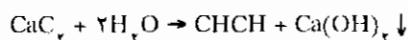
جواب: $7771 \text{ kg}/\text{hr}$ خوراک، $6739 \text{ kg}/\text{hr}$ آب.

۱۰-۵-۱. تبخیر و جریان کنارگذر در تغلیظ آب پرتقال: از یک فرایند برای تغلیظ 1000 kg آب پرتقال
 تازه حاوی $12/5\%$ وزنی مواد جامد استفاده می‌شود که در ابتدا آب میوه صاف شده و kg
 800 آب میوه صاف شده و 200 kg آب میوه تغاله دار به دست می‌آید. آب میوه صاف شده
 در یک تبخیرکننده خلأ تغلیظ شده و غلظت مواد جامد آن به 58% وزنی می‌رسد. 200 kg
 آب میوه تغاله دار نیز به صورت یک جریان کنارگذر با آب میوه تغلیظ شده جهت بهبود مزه و

طعم محصول در یک ظرف همزن دار مخلوط می شود. آب میوه نهایی شامل ۴۲٪ مواد جامد است. غلظت مواد جامد در آب میوه صاف شده، جرم آب میوه تغلیظ شده نهایی برحسب کیلوگرم و غلظت مواد جامد را در جریان کنار گذر که حاوی آب میوه تفاله دار است را حساب کنید. (راهنمایی: ابتدا یک موازنه کلی و سپس موازنه جامد روی کل فرایند بنویسید. بعداً موازنه ای روی تبخیرکننده نوشته و در نهایت موازنه حول مخلوط کن برقرار کنید).

جواب: ۳۴/۲٪ وزنی جامد در آب میوه تفاله دار

۱۱-۵-۱. تولید استیلین: به منظور تولید 6000 ft^3 گاز استیلین (CHCH) در 70°F و 750 mmHg ، کاربید کلسیم جامد (CaC_2) که حاوی ۹۷٪ وزنی CaC_2 و ۳٪ وزنی مواد جامد خنثی است همراه با آب مورد استفاده قرار می گیرد. واکنش انجام شده به صورت زیر است:



دو غاب آهک نهایی شامل آب، مواد جامد خنثی و Ca(OH)_2 است. در این دو غاب درصد وزنی کل مواد جامد خنثی به علاوه Ca(OH)_2 برابر با ۲۰٪ است. چند پوند آب باید اضافه شود و چند پوند دو غاب آهک تولید می شود؟ (راهنمایی: مبنا را 6000 ft^3 انتخاب کنید و آن را به پوند مول تبدیل نمایید، که برابر با $15/30 \text{ lb mol C}_2\text{H}_2$ می شود. تعداد مول Ca(OH)_2 و CaC_2 که باید اضافه شود به ترتیب $15/3 \text{ lb mol}$ و $15/3 \text{ lb mol}$ می باشد. تعداد مول CaC_2 خوراک را به پوند تبدیل کنید و پوند مواد خنثی را نیز محاسبه کنید. جرم کل مواد جامد در دو غاب برابر با مجموع جرم مواد خنثی ورودی و جرم Ca(OH)_2 است. هنگام محاسبه مقدار آب اضافه شده به خاطر داشته باشید که مقداری از آن در واکنش مصرف شده است).

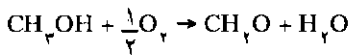
جواب: 5200 lb_m آب اضافه شده، 5815 lb_m دو غاب آهک

۱۲-۵-۱. احتراق سوخت جامد: نتیجه آنالیز یک سوخت، ۷۴٪ وزنی C و ۱۲٪ وزنی خاکستر است. گازهای خروجی پس از سوختن در هوا، شامل ۱۲/۴٪ گاز CO_2 ، ۱/۲٪ گاز CO، ۵/۷٪ گاز O_2 و ۸۰/۷٪ گاز N_2 است. جرم سوخت مصرف شده را به ازای 1000 kg mol گاز خروجی برحسب کیلوگرم و تعداد مول هوای مصرف شده را محاسبه کنید. (راهنمایی: ابتدا تعداد مول O_2 وارد شده توسط هوا را با استفاده از این واقعیت که N_2 ورودی و N_2 خروجی با هم یکسان هستند، محاسبه کنید و سپس موازنه کربن را برای به دست آوردن تعداد مول کربن وارد شده برقرار کنید).

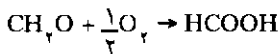
۱۳-۵-۱. سوختن زغال: در یک کوره، زغال که حاوی ۸۱٪ وزنی C، ۸٪ وزنی H و باقیمانده خاکستر

است می‌سوزد. کوره ۶۰٪ هوای اضافی مصرف می‌کند (هوای مازاد بر مقدار لازم برای سوزاندن تمام کربن و تبدیل آن به CO_p و تبدیل H به H_2O). در صورتی که ۹۵٪ کربن به CO_p و ۵٪ به CO تبدیل شود تعداد مول همه اجزای موجود در گاز خروجی را محاسبه کنید.

۱۴-۵-۱. تولید فرمالدئید: فرمالدئید (CH_2O) از طریق اکسیداسیون کاتالیزوری بخار متانول خالص و هوا در یک راکتور ساخته می‌شود. مولهای خروجی از راکتور شامل، $\frac{63}{1}$ مول N_p ، $\frac{13}{4}$ مول O_p ، $\frac{5}{9}$ مول H_2O ، $\frac{4}{1}$ مول CH_2O ، $\frac{12}{3}$ مول CH_3OH و $\frac{1}{2}$ مول HCOOH می‌باشند. واکنش اصلی به صورت زیر است:



یک واکنش جانبی نیز اتفاق می‌افتد.



تعداد مول متانول خوراک، تعداد مول هوا و درصد تبدیل متانول به فرمالدئید را محاسبه کنید.

جواب: $\frac{17}{6}$ مول CH_3OH ، $\frac{79}{8}$ مول هوا، $\frac{23}{3}$ ٪ تبدیل

۱-۶-۱. گرم کردن گاز CO_p : ۲۵۰ گرم گاز CO_p در فشار کل $101/32 \text{ kPa}$ از 373 K تا 623 K گرم شده است. مقدار گرمای لازم را بر حسب Btu ، cal و kJ حساب کنید.

جواب: 15050 cal ، $59/7 \text{ Btu}$ ، $62/98 \text{ kJ}$

۱-۶-۲. گرم کردن یک مخلوط گازی: مخلوطی شامل 25 lb mol گاز N_p ، 75 lbmol گاز CH_p می‌خواهد از 400°F تا 800°F در فشار ثابت یک اتمسفر گرم شود. مقدار گرمای لازم را بر حسب Btu محاسبه کنید.

۱-۶-۳. دمای نهایی در گرم کردن سس سیب: مخلوطی از 454 kg سس سیب در 10°C در یک مبدل حرارتی با افزودن 121300 kJ گرما، گرم شده است. دمای خروجی سس را از جدول پیدا کنید. (راهنمایی: در ضمیمه A.4 ظرفیت گرمایی سس سیب در $32/8^\circ\text{C}$ داده شده است. این مقدار را ثابت فرض کنید و آن را به عنوان c_{pm} در نظر بگیرید).

جواب: $76/5^\circ\text{C}$

۱-۶-۴. کاربرد جدول بخار: با استفاده از جدول بخار، تغییر انتالپی یک پوند آب در هر کدام از حالات زیر را تعیین کنید.

الف - گرم کردن آب مایع از 40°F تا 240°F در فشار 30 psia (اثر فشار کل بر انتالپی می‌تواند ناچیز فرض شود).

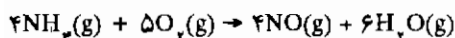
- ب - گرم کردن آب مایع از 40°F تا 240°F و تبخیر در 240°F و $24/97 \text{ psia}$.
- پ - سرد کردن و میعان بخار اشباع در 212°F و یک اتمسفر مطلق و سپس سرد کردن مایع تا دمای 60°F .
- ت - مایع شدن بخار اشباع در 212°F و یک اتمسفر مطلق.

جواب: الف) $200/42 \text{ Btu/lb}_m$ (ب) $1152/7 \text{ Btu/lb}_m$ (پ) $1122/4 \text{ Btu/lb}_m$
 ت) $970/3 \text{ Btu/lb}_m$ و $2256/9 \text{ kJ/kg}$

۵-۶-۱. گرم کردن و تبخیر با استفاده از جدول بخار: در اولین مرحله یک فرایند، 1000 kg/hr آب با دمای $21/1^{\circ}\text{C}$ تا 110°C در فشار کل $244/2 \text{ kPa}$ گرم شده است. در مرحله دوم در همان فشار آب گرمتر می شود تا هنگامی که به نقطه جوش برسد و تمام آن تبخیر شود. تغییر انتالپی کل را در مرحله اول و در هر دو مرحله محاسبه کنید.

۶-۶-۱. احتراق CH_4 و H_2 : 100 g mol از یک مخلوط گازی شامل 75% مولی CH_4 و 25% مولی H_2 است. گرمای احتراق کل مخلوط را در 298 K و $101/32 \text{ kPa}$ محاسبه کنید. فرض کنید احتراق کامل است.

۷-۶-۱. گرمای واکنش از گرمای تشکیل: برای واکنش



گرمای واکنش را برای 4 g mol از NH_3 در 298 K و $101/32 \text{ kPa}$ محاسبه کنید.

جواب: $\Delta H = -904/7 \text{ kJ}$

۷-۱-۱. موازنه گرمایی و سرد کردن شیر: در فرآورش شیر چرب گاو، 4540 kg/hr شیر از 60°C تا $4/44^{\circ}\text{C}$ توسط مبرد سرد می شود. گرمای گرفته شده از شیر را محاسبه کنید.

جواب: $296/6 \text{ kW}$

۷-۲-۱. گرم کردن روغن به وسیله هوا: جریانی از یک روغن هیدروکربنی با نرخ $2200 \text{ lb}_m/\text{hr}$ در 100°F وارد یک مبدل می شود که در آنجا به وسیله هوای داغ تا 150°F گرم می شود. هوای داغ در 300°F وارد و در 200°F خارج می شود. کل هوای لازم را در ساعت محاسبه کنید. ظرفیت گرمایی میانگین روغن $0/45 \text{ Btu/lb}_m \cdot ^{\circ}\text{F}$ می باشد.

جواب: $70/1 \text{ lb mol/hr}$ یا $31/8 \text{ kg mol/hr}$ هوا

۷-۳-۱. احتراق متان در یک کوره: 10000 kg mol/hr گاز متان در شرایط $101/32 \text{ kPa}$ و 373 K در یک کوره، با هوا در 313 K می سوزد. احتراق کامل است و 50% هوای اضافی مصرف می شود. گازهای خروجی در 673 K کوره را ترک می کنند. گرمای گرفته شده از کوره را محاسبه کنید.

(راهنمایی: دمای 298 K و آب مایع در 298 K را به عنوان مینا در نظر بگیرید. ورودیها به این صورت خواهند بود: انتالپی CH_4 در 373 K نسبت به 298 K ، انتالپی هوا در 313 K نسبت به 298 K ، $-\Delta H_c^\circ$ ، گرمای احتراق CH_4 در 298 K نسبت به آب مایع و حرارت اضافه شده (q). خروجیها شامل این موارد هستند: انتالپی گازهای CO_2 ، O_2 ، N_2 و H_2O در 673 K نسبت به 298 K و گرمای نهان بخار آب در 298 K و $101/32\text{ kPa}$ از ضمیمه A.2. این مورد لازم است در نظر گرفته شود زیرا مبنای محاسبه و مبنای ΔH_c° آب مایع است).

۴-۷-۱. پیش گرم کردن هوا به وسیله بخار برای استفاده در یک خشک کن: یک جریان هوا در $32/2^\circ\text{C}$ قرار است در یک خشک کن به کار رود که ابتدا در یک گرمکن توسط بخار آب به دمای $148/9^\circ\text{C}$ می رسد. شدت جریان هوا 10000 kg/hr است. بخار به صورت اشباع در $148/9^\circ\text{C}$ وارد گرمکن می شود و پس از مایع شدن و سرد شدن در $137/8^\circ\text{C}$ خارج می شود. مقدار بخار مصرف شده (بر حسب kg/hr) را محاسبه کنید.

جواب: 450 kg/hr بخار

۵-۷-۱. سرد کردن قوطیهای کنسرو سیب زمینی بعد از فرآورش حرارتی^(۱): 15000 قوطی کنسرو سیب زمینی در یک محفظه در دمای 240°F تحت فرآورش گرمایی قرار می گیرد. سپس قوطیها در همان محفظه توسط جریان آب سرد تا 100°F سرد می شوند. جریان آب سرد در 75°F وارد و در 85°F خارج می شود. جرم آب سرد لازم را محاسبه کنید. هر قوطی کنسرو محتوی 1 lb سوپ سیب زمینی و وزن قوطی خالی $0/16\text{ lb}$ می باشد. ظرفیت گرمایی میانگین سوپ برابر با $0/94\text{ Btu/lb}_m^\circ\text{F}$ و ظرفیت گرمایی میانگین فلز قوطی برابر با $0/12\text{ Btu/lb}_m^\circ\text{F}$ است. سبب فلزی که برای نگهداشتن قوطیها در محفظه استفاده می شود 350 lb وزن دارد و دارای ظرفیت گرمایی $0/12\text{ Btu/lb}_m^\circ\text{F}$ است. فرض کنید سبب فلزی از 240°F تا 85°F (دمای آب خروجی) سرد می شود. مقدار گرمای گرفته شده از دیواره های محفظه در سرد کردن از 240°F تا 100°F حدود 10000 Btu است. اتلاف حرارت تشعشعی از محفظه در طول سرد کردن 5000 Btu تخمین زده می شود.

جواب: (9670 kg) 21320 lb_m آب

۱-۸-۱. انتگرال گیری ترسیمی و انتگرال گیری عددی به روش سیمپسون: داده های تجربی زیر از

$$y = f(x) \text{ به دست آمده است:}$$

$f(x)$	x	$f(x)$	x
۰	۱۰۰	۰/۴	۵۳
۰/۱	۷۵	۰/۵	۶۰
۰/۲	۶۰/۵	۰/۶	۷۲/۵
۰/۳	۵۳/۵		

مقدار انتگرال زیر را به روشهای خواسته شده تعیین کنید.

$$A = \int_{0.1}^{0.3} f(x) dx$$

الف) بر اساس روش ترسیمی

ب) بر اساس روش عددی سیمپسون.

جواب: الف) $A=38/55$ ب) $A=38/45$

۲-۸-۱. انتگرال‌گیری عددی و ترسیمی برای به‌دست آوردن جریان فاضلاب: نرخ جریان فاضلاب در یک کانال روباز به صورت زیر اندازه‌گیری شده است.

زمان (دقیقه)	جریان m^3/min	زمان دقیقه	جریان m^3/min
۰	۶۵۵	۷۰	۸۰۰
۱۰	۷۰۵	۸۰	۷۲۵
۲۰	۷۸۰	۹۰	۶۷۰
۳۰	۸۳۰	۱۰۰	۶۴۰
۴۰	۸۷۰	۱۱۰	۶۲۰
۵۰	۸۹۰	۱۲۰	۶۱۰
۶۰	۸۷۰		

الف) کل جریان را بر حسب متر مکعب در ۶۰ دقیقه اول و همچنین در کل ۱۲۰ دقیقه به‌وسیله انتگرال‌گیری ترسیمی به‌دست آورید.

ب) جریان را در کل ۱۲۰ دقیقه با استفاده از روش عددی سیمپسون به‌دست آورید.

جواب: الف) $48460 m^3$ برای ۶۰ دقیقه ب) $90390 m^3$ برای ۱۲۰ دقیقه.

منابع

- (C1) CHARM, S. E. *The Fundamentals of Food Engineering*, 2nd ed. Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971.
- (E1) EARLE, R. L. *Unit Operations in Food Processing*. Oxford: Pergamon Press, Inc., 1966.
- (H1) HOUGEN, O. A., WATSON, K. M., and RAGATZ, R. A. *Chemical Process Principles, Part I*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1954.
- (O1) OKOS, M. R. M.S. thesis. Ohio State University, Columbus, Ohio, 1972.
- (P1) PERRY, R. H., and GREEN, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
- (S1) SOBER, H. A. *Handbook of Biochemistry, Selected Data for Molecular Biology*, 2nd ed. Boca Raton, Fla.: Chemical Rubber Co., Inc., 1970.
- (W1) WEAST, R. C., and SELBY, S. M. *Handbook of Chemistry and Physics*, 48th ed. Boca Raton, Fla.: Chemical Rubber Co., Inc., 1967-1968.

فصل دوم

اصول انتقال ممنتوم و موازنه‌های کلی

۲-۱ مقدمه

جریان سیالات و رفتار آنها در بیشتر عملیات واحدها در مهندسی فرایند از اهمیت زیادی برخوردار است. سیال ممکن است به صورت ماده‌ای که به‌طور پیوسته در مقابل تغییر شکل از خود مقاومت نشان نمی‌دهد، تعریف شود. بنابراین شکل آن همیشه تغییر می‌کند. در این کتاب فرض می‌شود که گازها، مایعها و بخارها مشخصات سیال را دارند و از قوانین مشابهی پیروی می‌کنند.

بسیاری از مواد در صنایع فرایندی به شکل سیال هستند و بایستی ذخیره، جابجا و پمپ شوند و در فرایند مورد استفاده قرار گیرند، لذا لازم است با اصولی که بر جریان سیالات حاکم است و همچنین با وسایل مورد استفاده آشنا شویم. آب، هوا، CO_2 ، روغن، دوغاب‌ها و شربت‌های غلیظ، نمونه‌هایی از سیالاتی هستند که با آنها سر و کار داریم.

اگر تأثیر تغییرات فشار بر یک سیال بسیار کم باشد، آن سیال تراکم‌ناپذیر نامیده می‌شود. اکثر مایعها تراکم‌ناپذیر هستند. گازها، سیالاتی تراکم‌پذیرند. با این حال، اگر گازها تحت تأثیر تغییرات کم فشار و دما قرار گیرند، تغییر دانسیته‌شان اندک خواهد بود و آنها را می‌توان، تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت. مانند همهٔ مواد فیزیکی، واحد حجم یک سیال از تعداد بی‌شماری مولکول تشکیل شده است. یک تئوری مانند تئوری جنبشی گازها، یا مکانیک آماری حرکات مولکولها را بر حسب گروههای آماری و نه بر حسب هر مولکول به تنهایی مورد بحث قرار می‌دهد. در مهندسی، عمدتاً به جای این‌که رفتار

یک مولکول خاص را مد نظر داشته باشیم، به رفتار ماکروسکوپی یا توده سیال توجه داریم. در انتقال ممتوم، سیال را مانند یک ماده یکنواخت پیوسته یا مانند یک «محیط پیوسته»^(۱) فرض می‌کنیم. فرض محیط پیوسته برای یک سیال وقتی معتبر است که کوچکترین حجم سیال، شامل آن قدر مولکول باشد که میانگین آماری دارای مفهوم باشد و خواص ماکروسکوپی سیال مثل دانسیته، فشار و غیره از نقطه‌ای به نقطه دیگر به صورت پیوسته تغییر کند.

مطالعه انتقال ممتوم، که اغلب مکانیک سیالات نامیده می‌شود، می‌تواند به دو بخش تقسیم شود. استاتیک سیال، یا سیال در حال سکون و دینامیک سیال، یا سیال در حال حرکت. در بخش ۲-۲، استاتیک سیال را مورد بحث قرار می‌دهیم و در بقیه بخشهای فصل ۲ و در فصل ۳ دینامیک سیالات را بررسی می‌کنیم. چون در دینامیک سیال، ممتوم انتقال پیدا می‌کند، از عبارت «انتقال ممتوم» یا «انتقال» معمولاً استفاده می‌شود. در بخش ۲-۳، انتقال ممتوم به انتقال جرم و انتقال حرارت ربط داده می‌شود.

۲-۲ استاتیک سیال

۲-۲۸ نیرو، واحدها و ابعاد

یکی از خواص مهم سیال ساکن، فشار درون آن است. فشار به صورت نیروی سطحی وارد شده توسط سیال به دیواره‌های ظرف حاوی آن شناخته می‌شود. این فشار در همه نقاط سیال وجود دارد. به منظور درک فشار که به صورت نیروی اعمال شده بر واحد سطح تعریف می‌شود، بایستی ابتدا قانون اساسی نیوتن را شرح دهیم. این معادله برای محاسبه نیروی وارد شده توسط یک ماده با جرم معین تحت تأثیر ثقل، به صورت زیر است.

$$F = mg \quad (\text{SI units})$$

$$F = \frac{mg}{g_c} \quad (\text{English units}) \quad (2-2-1)$$

که در سیستم واحدهای SI، نیروی اعمال شده برحسب نیوتن ($\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$)، N ، m ، جرم برحسب kg و g شتاب جاذبه زمین برابر 9.80665 m/s^2 است.

در سیستم واحدهای انگلیسی، F برحسب lb_f ، m برحسب lb_m ، g برابر (ft/s^2) 32.1740 و g_c (یک ضریب تبدیل ثقلی) برابر با $32.174 \text{ lb}_m\cdot\text{ft}/\text{lb}_f\cdot\text{s}^2$ است. استفاده از ضریب تبدیل g_c به این معناست که g/g_c برابر $1 \text{ lb}_f/\text{lb}_m$ است و جرمی برابر با 1 lb_m نیرویی برابر با 1 lb_f ایجاد می‌کند. غالباً در

واحدهای فشار از کلمه «نیرو» صرف نظر می‌شود. مانند (psi) که به جای lb_f/in^2 استفاده می‌شود. وقتی جرم m بر حسب gr mass داده می‌شود، نیرو بر حسب gr force ، $g = 980/665 \text{ cm/s}^2$ و g mass/cm^3 $g_c = 980/665 \text{ force.s}$ است. اما واحد گرم نیرو به ندرت به کار می‌رود.

در سیستم واحدهای دیگر که گاهی در معادله (۲-۲-۱) کاربرد دارد، از عبارت g_c صرف نظر می‌شود و نیرو $(F = mg)$ بر حسب $\text{lb}_m \cdot \text{ft/s}^2$ است که پوندال (poundal) نامیده می‌شود. بنابراین 1 lb_m تحت اثر ثقل نیرویی معادل $32/174$ پوندال ($\text{lb}_m \cdot \text{ft/s}^2$) ایجاد خواهد کرد. اگر gr mass ۱ به کار رود، نیرو $(F = mg)$ بر حسب dyne بیان می‌شود ($\text{g} \cdot \text{cm/s}^2$). این سیستم، سانتیمتر-گرم-ثانیه (cgs) است. ضرایب تبدیل برای واحدهای مختلف نیرو و همچنین نیرو بر واحد سطح (فشار) در ضمیمه A.1 داده شده‌اند. توجه کنید که عبارت g_c همیشه در سیستم SI و معمولاً در سیستم cgs به کار نمی‌رود.

مثال ۲-۲-۱ واحدها و ابعاد نیرو

نیروی وارد شده توسط جرم 3 lb_m را بر حسب هر یک از واحدهای زیر محاسبه کنید.

الف - lb_f (در سیستم انگلیسی)

ب - Dyne (سیستم cgs)

پ - نیوتن (سیستم SI)

حل: برای قسمت (الف)، با استفاده از معادله (۲-۲-۱) نتیجه می‌شود،

$$F(\text{force}) = m \frac{g}{g_c} = 3 \text{ lb}_m \times 32/174 \text{ ft/s}^2 \times \left(\frac{1}{32/174 \text{ ft} \cdot \text{lb}_m / \text{lb}_f \cdot \text{s}^2} \right) = 3 \text{ lb}_f$$

برای قسمت (ب)،

$$\begin{aligned} F = mg &= 3 \text{ lb}_m \times 453/59 \frac{\text{g}}{\text{lb}_m} \times 980/665 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \\ &= 1/332 \times 10^6 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} = 1/332 \times 10^6 \text{ dyne} \end{aligned}$$

روش دیگری برای قسمت (ب) وجود دارد. با استفاده از ضمیمه A.1 داریم:

$$1 \text{ dyne} = 2/2481 \times 10^{-6} \text{ lb}_f$$

$$F = 3 \text{ lb}_f \times \frac{1}{2/2481 \times 10^{-6} \text{ lb}_f/\text{dyne}} = 1/332 \times 10^6 \text{ dyne}$$

برای محاسبه نیوتن در قسمت (پ)،

$$F = mg = 3 \text{ lb}_m \times \frac{1 \text{ kg}}{2/2046 \text{ lb}_m} \times 9/80665 \text{ m/s}^2 = 13/32 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 13/32 \text{ N}$$

به عنوان یک روش دیگر، با استفاده از مقادیر به دست آمده از ضمیمه A.1:

$$1 \frac{\text{g.cm}}{\text{s}^2} (\text{dyne}) = 10^{-5} \frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2} (\text{newton})$$

$$F = 1/332 \times 10^{-1} \text{ dyn} \times 10^{-5} \frac{\text{newton}}{\text{dyn}} = 13/32 \text{ N}$$

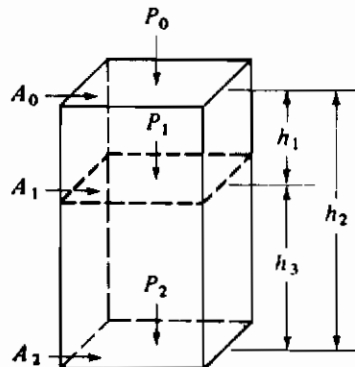
۲-۲B فشار در یک سیال

از آنجایی که معادله (۲-۲-۱) بیانگر نیروی وارد شده توسط جرم تحت تأثیر ثقل می باشد، نیروی اعمال شده توسط جرمی از سیال روی یک سطح یا به عبارت دیگر نیرو تقسیم بر واحد سطح (فشار) نیز از این معادله تبعیت می کند. در شکل ۲-۲-۱ یک ستون ساکن سیال با ارتفاع h_2 متر و سطح مقطع ثابت A_2 متر مربع، که $A = A_0 = A_1 = A_2$ می باشد نشان داده شده است. فشار بالای سیال P_0 بر حسب نیوتن بر متر مربع است که می تواند فشار اتمسفری باشد، سیال در هر نقطه، مثلاً h_1 ، بایستی تمام وزن سیال بالای خود را تحمل کند. می توان نشان داد که نیروها در هر نقطه معین در یک سیال ساکن در همه جهتها برابر هستند. همچنین، برای یک سیال ساکن، نیرو بر واحد سطح یا به عبارت دیگر فشار برای تمام نقاطی که ارتفاع یکسانی دارند، مساوی است. به عنوان مثال در h_1 متر از سطح سیال، فشار در تمام نقاط سطح مقطع A_1 یکسان است.

کاربرد معادله (۲-۲-۱) در محاسبه فشار نقاط مختلف ستون سیال در شکل ۲-۲-۱، نشان داده

خواهد شد. جرم کل سیال برای ارتفاع h_2 متر و دانسیته $\rho \text{ kg/m}^3$ خواهد بود:

$$\text{total kg fluid} = (h_2 \text{ m})(A \text{ m}^2) \left(\rho \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = h_2 A \rho \text{ kg} \quad (2-2-2)$$



شکل ۲-۲-۱. فشار در یک سیال ساکن

با جایگزینی در معادله (۲-۲-۱) می‌توان کل نیروی F سیال بر روی سطح A_1 که فقط ناشی از خود سیال است را به دست آورد که عبارت است از:

$$F = (h_2 A \rho \text{ kg})(g \text{ m/s}^2) = h_2 A \rho g \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} (\text{N}) \quad (2-2-3)$$

فشار به صورت نیرو بر واحد سطح تعریف می‌شود:

$$P = \frac{F}{A} = (h_2 A \rho g) \frac{1}{A} = h_2 \rho g \text{ N/m}^2 \text{ or Pa} \quad (2-2-4)$$

فشار روی سطح A_2 ، ناشی از جرم سیال بالای آن است. برای به دست آوردن فشار کل P_2 روی سطح A_2 ، فشار P_0 بالای سیال نیز بایستی به آن اضافه شود.

$$P_2 = h_2 \rho g + P_0 \text{ N/m}^2 \text{ or Pa} \quad (2-2-5)$$

معادله (۲-۲-۵)، معادله‌ای اساسی برای محاسبه فشار سیال در هر عمق است. برای محاسبه P_1

$$P_1 = h_1 \rho g + P_0 \quad (2-2-6)$$

اختلاف فشار بین نقاط ۱ و ۲ عبارت است از:

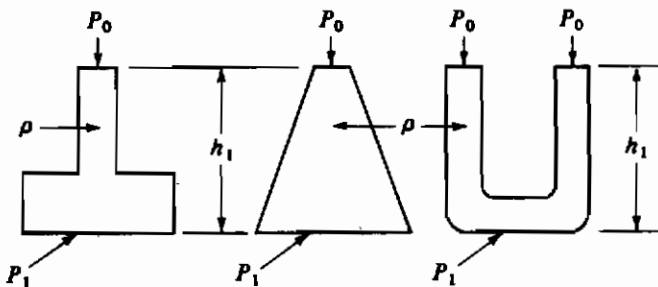
$$P_2 - P_1 = (h_2 \rho g + P_0) - (h_1 \rho g + P_0) = (h_2 - h_1) \rho g \quad (\text{SI units}) \quad (2-2-7)$$

$$P_2 - P_1 = (h_2 - h_1) \rho \frac{g}{g_c} \quad (\text{English units})$$

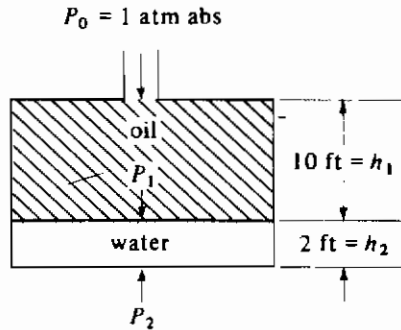
چون ارتفاع عمودی، تعیین کننده فشار در یک سیال است، بنابراین شکل ظرف بر فشار تأثیر ندارد. برای مثال، در شکل ۲-۲-۲ فشار P_1 در کف هر سه ظرف یکسان و معادل با $P_0 + h_1 \rho g$ است.

مثال ۲-۲-۲ فشار در تانک ذخیره

یک تانک ذخیره بزرگ محتوی روغن با دانسیته 917 kg/m^3 (0.917 g/cm^3) است. تانک $3/66$ متر (12 ft) ارتفاع دارد و از بالا با محیط (یک اتمسفر مطلق) مرتبط است. تانک تا ارتفاع 0.61 m (2 ft) توسط آب پر شده و بالای آن تا ارتفاع $3/0.5 \text{ m}$ (12 ft) روغن قرار دارد. فشار را بر حسب Pa و psia در عمق $3/0.5 \text{ m}$ از بالای تانک و همچنین در کف تانک محاسبه کنید. فشار نسبی در کف تانک را به دست آورید.



شکل ۲-۲-۲. فشار در ظرفهایی با شکلهای مختلف



شکل ۲-۲-۳. مخزن ذخیره مثال ۲-۲-۲

حل: ابتدا یک طرح ساده از تانک رسم می‌شود (شکل ۲-۲-۳). از ضمیمه A.1،
 $P_0 = 1 \text{ atm abs} = 14/696 \text{ psia}$ ، همچنین،

$$P_0 = 1/0.1325 \times 10^5 \text{ Pa}$$

از معادله (۲-۲-۶) با استفاده از سیستم واحدهای انگلیسی و سپس سیستم SI نتیجه می‌شود،

$$P_1 = h_1 \rho_{\text{oil}} \frac{g}{g_c} + P_0 = 10 \times 0.917 \times 62/43 \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^3} \times 1 \frac{\text{lb}_f}{\text{lb}_m} \times \frac{1}{144 \text{ in}^2/\text{ft}^2} + 14/696 \text{ lb}_f/\text{in}^2 = 18/68 \text{ psia}$$

برای محاسبه P_2 در کف تانک، با توجه به دانسیته آب ($\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$) داریم:

$$P_2 = h_2 \rho_{\text{آب}} \frac{g}{g_c} + P_1 = (2) \times (1 \times 62/43) \times (1) \times \left(\frac{1}{144}\right) + 18/68 = 19/55 \text{ psia}$$

$$= h_2 \rho_{\text{آب}} g + P_1 = 0.61 \times 1000 \times 9/8066 + 1/287 \times 10^5 = 1/347 \times 10^5 \text{ Pa}$$

فشار نسبی در کف ظرف معادل با فشار مطلق P_2 منهای فشار یک اتمسفر است:

$$P_{\text{gage}} = 19/55 \text{ psia} - 14/696 \text{ psia} = 4/85 \text{ psig}$$

۲-۲C هد سیال (۱)

فشار بر حسب واحدهای مختلفی مانند psia، dyne/cm^2 و N/m^2 بیان می‌شود. اما یک روش معمول بیان فشار بر حسب هد سیال است که بر حسب m یا ft بیان می‌شود. این ارتفاع یا هد سیال بر حسب متر

یا فوت معادل با همان فشاری است که در آن نقطه قابل اندازه‌گیری است. با استفاده از معادله (۲-۲-۴) که فشار P و ارتفاع h یک سیال را بهم ربط می‌دهد و از حل آن برای h نتیجه می‌شود،

$$h(\text{head}) = \frac{P}{\rho g} \text{ m} \quad (\text{SI})$$

$$h = \frac{P g_c}{\rho g} \text{ ft} \quad (\text{English}) \quad (2-2-8)$$

مثال ۲-۲-۳ تبدیل فشار به هد یک سیال

چنانچه فشار یک اتمسفر استاندارد معادل با 101325 N/m^2 باشد، مطلوب است:

الف - تبدیل این فشار به هد آب 4°C بر حسب متر.

ب - تبدیل این فشار به هد جیوه 0°C بر حسب متر.

حل: برای قسمت (الف)، دانسیته آب در 4°C از ضمیمه A.2 به دست می‌آید که معادل با 1 g/cm^3 است. دانسیته 1 g/cm^3 معادل 1000 kg/m^3 است (ضمیمه A.1). با جایگزینی این مقادیر در معادله (۲-۲-۸) داریم.

$$h(\text{head}) = \frac{P}{\rho g} = \frac{101325 \times 10^3}{1000 \times 9.8066} = 10.33 \text{ mH}_2\text{O} (4^\circ\text{C})$$

برای قسمت (ب)، دانسیته Hg برابر با 135955 g/cm^3 است (ضمیمه A.1). با مساوی قرار دادن فشار P در سیالات مختلف، معادله (۲-۲-۸) به صورت زیر نوشته می‌شود.

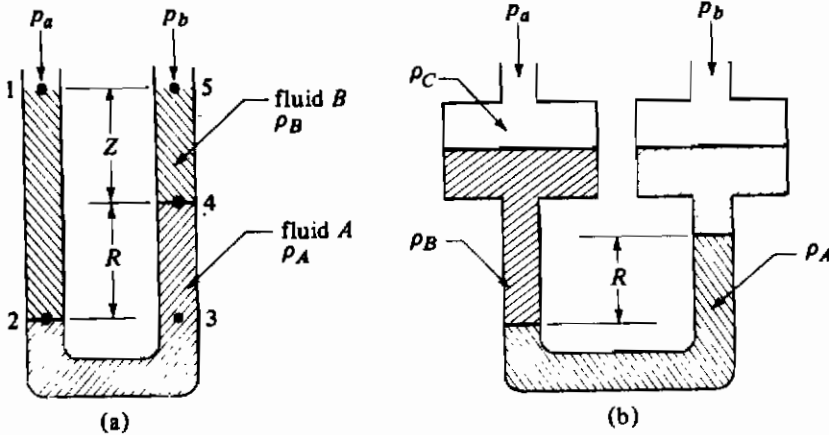
$$P = \rho_{\text{Hg}} h_{\text{Hg}} g = \rho_{\text{H}_2\text{O}} h_{\text{H}_2\text{O}} g \quad (2-2-9)$$

از حل معادله (۲-۲-۹) برای h_{Hg} و جایگزینی مقادیر معلوم در آن داریم:

$$h_{\text{Hg}}(\text{head}) = \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}} h_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Hg}}} = \frac{1}{135955} \times 10.33 = 0.076 \text{ m Hg}$$

۲D-۲ ابزار اندازه‌گیری فشار و اختلاف فشار

در واحدهای فرایندی صنایع شیمیایی و یا دیگر صنایع، اغلب اندازه‌گیری و کنترل فشار در یک ظرف یا فرایند و یا اندازه‌گیری سطح مایع اهمیت دارد. چون سیالات زیادی در حال جریان در یک لوله یا کانال هستند، لازم است نرخ جریان اندازه‌گیری شود. بسیاری از این وسایل اندازه‌گیری جریان، تجهیزاتی دارند که فشار یا اختلاف فشار را اندازه‌گیری می‌کنند. تعدادی از این تجهیزات در زیر شرح داده می‌شود.



شکل ۲-۲-۴. مانومترهای اندازه‌گیری اختلاف فشار: (a) شکل U (b) شکل دو سیالی

۱- مانومتر لوله‌ای U شکل ساده: این مانومتر در شکل ۲-۲-۴a نشان داده شده است. فشار P_a بر حسب N/m^2 روی یک شاخه لوله و P_b روی شاخه دیگر وارد می‌شود. هر دو فشار P_a و P_b می‌توانند فشاری غیر از فشار اتمسفری باشند و یا P_a غیر اتمسفری و P_b اتمسفری باشد. بالای مانومتر با مایع B پر شده است، که دانسیته آن ρ_B بر حسب kg/m^3 است و پایین آن با یک سیال سنگین تر A با دانسیته ρ_A بر حسب kg/m^3 پر شده است. مایع A با مایع B آمیخته نمی‌شود. برای پیدا کردن ارتباط بین P_a و P_b که P_a فشار در نقطه ۱ و P_b فشار در نقطه ۵ است، از فشار در نقطه ۲ استفاده می‌کنیم که مساوی است با:

$$p_2 = p_a + (Z + R)\rho_B g \quad N/m^2 \quad (2-2-10)$$

که R از مانومتر بر حسب متر خوانده می‌شود. بر اساس اصول هیدرواستاتیک، فشار در نقاط ۲ و ۳ باید مساوی باشند.

$$p_3 = p_2 \quad (2-2-11)$$

فشار در نقطه ۳ نیز به صورت زیر است:

$$p_3 = p_b + Z\rho_B g + R\rho_A g \quad (2-2-12)$$

از برابر قرار دادن معادلات (۲-۲-۱۱) و (۲-۲-۱۲) و حل آنها داریم:

$$p_a + (Z + R)\rho_B g = p_b + Z\rho_B g + R\rho_A g \quad (2-2-13)$$

$$p_a - p_b = R(\rho_A - \rho_B)g \quad (\text{SI})$$

(۲-۲-۱۴)

$$p_a - p_b = R(\rho_A - \rho_B) \frac{g}{g_c} \quad (\text{English})$$

خواننده باید توجه داشته باشد که ارتفاع Z و قطر لوله در معادله نهایی ظاهر نمی‌شوند، البته به شرط این‌که P_b, P_a در یک صفحه افقی اندازه‌گیری شوند.

مثال ۲-۲-۴ اختلاف فشار در یک مانومتر

مانومتر شکل ۲-۲-۴a برای اندازه‌گیری هد یا آفت فشار در یک دبی سنج استفاده می‌شود. سیال سنگین تر جیوه، با دانسیته $13/6 \text{ g/cm}^3$ و سیال بالایی آب با دانسیته 1 g/cm^3 است. مقدار R از مانومتر برابر $32/7 \text{ cm}$ خوانده می‌شود. اختلاف فشار را بر حسب N/m^2 محاسبه کنید.

حل: با تبدیل R به متر،

$$R = \frac{32/7}{100} = 0/327 \text{ m}$$

و همچنین تبدیل ρ_A و ρ_B به kg/m^3 و جایگزینی در معادله (۲-۲-۱۴) داریم،

$$\begin{aligned} p_a - p_b &= R(\rho_A - \rho_B)g = 0/327 \text{ m} \times [(13/6 - 1) \times 1000 \text{ kg/m}^3] \times 9/8066 \text{ m/s}^2 \\ &= 4/04 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \quad (5/85 \text{ psia}) \end{aligned}$$

۲- مانومتر دو سیالی: در شکل ۲-۲-۴b یک مانومتر دو سیالی نشان داده شده است، که یک وسیله حساس برای اندازه‌گیری هدها یا اختلاف فشارهای کوچک است. فرض کنید A سطح مقطع هر مخزن بزرگ و a سطح مقطع لوله‌های U شکل برحسب متر مربع باشد. با استفاده از موازنه فشار برای لوله U شکل داریم:

$$p_a - p_b = (R - R_0) \left(\rho_A - \rho_B + \frac{a}{A} \rho_B - \frac{a}{A} \rho_C \right) g \quad (2-2-15)$$

هنگامی که $P_a = P_b$ باشد، R_0 اختلاف ارتفاع در مانومتر است. R اختلاف ارتفاع واقعی، ρ_A دانسیته سیال سنگین تر و ρ_B دانسیته سیال سبکتر است. معمولاً مقدار a/A بقدر کافی کوچک است که بتوان از آن صرف‌نظر کرد و اغلب R_0 روی صفر تنظیم می‌شود. پس اگر ρ_A ρ_B اختلاف کمی داشته باشند، اختلاف ارتفاع R بزرگ می‌شود.

مثال ۲-۲-۵ اندازه‌گیری فشار در یک ظرف

از مانومتر شکل ۲-۲-۵a برای اندازه‌گیری فشار P_A در یک ظرف حاوی مایع با دانسیته ρ_A

استفاده می‌شود. معادله‌ای به دست آورید که فشار P_A و اختلاف ارتفاع مانومتر را به هم ارتباط دهد.

حل: در نقطه ۲ فشار برابر است با:

$$p_2 \text{ (N/m}^2\text{)} = p_{atm} + h_2 \rho_B g \quad (2-2-17)$$

و فشار در نقطه ۱ نیز به صورت زیر است:

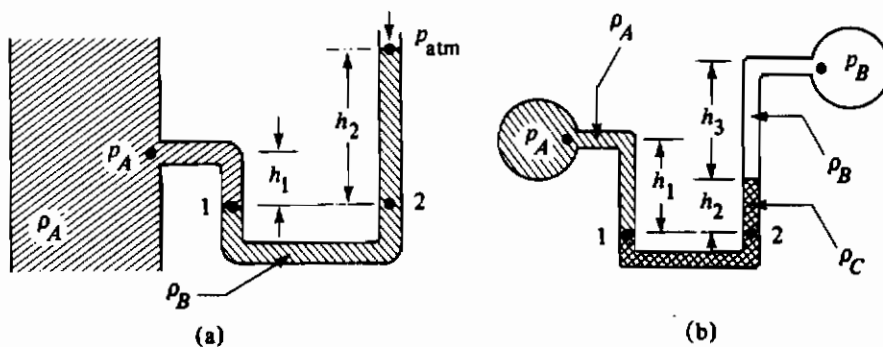
$$p_1 = p_A + h_1 \rho_A g \quad (2-2-18)$$

از مساوی قرار دادن p_1 با p_2 بر اساس اصول هیدرواستاتیک و مرتب کردن معادله داریم:

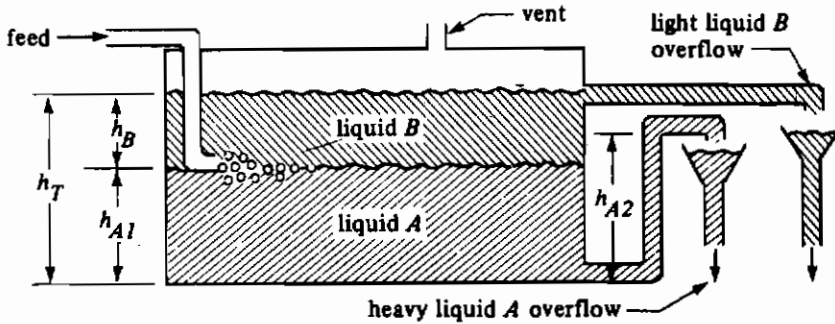
$$p_A = p_{atm} + h_2 \rho_B g - h_1 \rho_A g \quad (2-2-19)$$

مثال دیگری از یک مانومتر لوله‌ای U شکل توسط شکل ۲-۲-۵b نشان داده شده است. این وسیله برای اندازه‌گیری اختلاف فشار دو ظرف به کار می‌رود.

۳- فشارسنج بوردون^(۱): اگر چه مانومترها برای اندازه‌گیری فشار به کار می‌روند، اما رایج‌ترین وسیله اندازه‌گیری فشار، فشارسنج مکانیکی بوردون است. یک لوله مارپیچ وقتی که در معرض فشار داخلی قرار می‌گیرد، از هم باز می‌شود و میزان باز شدن آن بستگی به اختلاف فشار داخل و خارج لوله دارد. این لوله به یک عقربه وصل شده است که روی صفحه مدرج قرار دارد.



شکل ۲-۲-۵. اندازه‌گیری فشار در ظروف (a) اندازه‌گیری فشار در یک ظرف (b) اندازه‌گیری اختلاف فشار



شکل ۲-۲-۶. جداکنندهٔ ثقلی اتمسفری پیوسته برای مایعات غیر قابل امتزاج

۲- جداکنندهٔ ثقلی^(۱) برای دو مایع غیر قابل امتزاج: در شکل ۲-۲-۶ یک جداکنندهٔ ثقلی (دکانتور) برای جداسازی دو مایع غیر قابل امتزاج A (مایع سنگین تر) و B (مایع سبکتر) از یکدیگر، نشان داده شده است. خوراک که مخلوطی از دو مایع است، از یک طرف وارد جداکننده می‌شود و آرام به طرف دیگر جریان پیدا می‌کند و به دو لایهٔ مجزا از هم تفکیک می‌شود. مطابق شکل، هر مایع از طریق لولهٔ جداگانه‌ای جریان پیدا می‌کند. با فرض این‌که مقاومت اصطکاکی در مقابل جریان ناچیز باشد، اصول استاتیک سیال برای تجزیه و تحلیل عملکرد این دستگاه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

در شکل ۲-۲-۶ ارتفاع لایهٔ سیال سنگین A، h_{A1} متر است و ارتفاع لایهٔ B، h_B است. ارتفاع کل ($h_T = h_{A1} + h_B$) توسط لولهٔ خروجی B ثابت نگهداشته می‌شود. مایع A از طریق یک لولهٔ سرریز که در ارتفاع h_{A2} متر بالاتر از کف ظرف قرار دارد، خارج می‌شود. ظرف و لوله‌های خروجی (سرریز) با محیط در ارتباط هستند. از یک موازنهٔ هیدرواستاتیک داریم:

$$h_B \rho_B g + h_{A1} \rho_A g = h_{A2} \rho_A g \quad (2-2-20)$$

با جایگزینی $h_B = h_T - h_{A1}$ در معادلهٔ (۲-۲-۲۰) و حل آن برای h_{A1} داریم:

$$h_{A1} = \frac{h_{A2} - h_T \rho_B / \rho_A}{1 - \rho_B / \rho_A} \quad (2-2-21)$$

معادلهٔ بالا نشان دهندهٔ آن است که موقعیت (مکان) سطح مشترک (ارتفاع h_{A1}) بستگی به نسبت دانسیته‌های دو مایع و ارتفاعهای دو جریان سرریز h_T و h_{A2} دارد. معمولاً ارتفاع h_{A2} قابل تغییر است بنابراین، فصل مشترک دو سیال را می‌توان تنظیم کرد.

۳-۲ معادله کلی انتقال مولکولی برای انتقال جرم، حرارت و ممنتوم

۳-۲A معادله کلی انتقال مولکولی و موازنه کلی خاصیت

۱- مقدمه‌ای بر فرایندهای انتقال: معمولاً در فرایندهای انتقال مولکولی، با انتقال یا جابجایی یک خاصیت یا ماهیت معین توسط جابجایی مولکولها در یک سیستم یا محیط سر و کار داریم. سیستم یا محیط می‌تواند یک سیال (گاز یا مایع) و یا یک جامد باشد. خاصیتی که منتقل می‌شود می‌تواند جرم، انرژی گرمایی (گرما) یا ممنتوم باشد. هر مولکول از یک سیستم مقدار مشخصی از خاصیت (جرم، انرژی یا ممنتوم) را همراه خود دارد. هنگامی که غلظت (مقدار) هر یک از این خواص در یک ناحیه و ناحیه مجاور آن متفاوت باشد، انتقال صورت می‌پذیرد. در سیالات رقیق مثل گازها که مولکولها نسبتاً از هم دور هستند، نرخ انتقال خاصیت بایستی نسبتاً زیاد باشد، چون تعداد مولکولهای کمتری برای ایجاد مانع یا تأثیر گذاشتن بر روند انتقال وجود دارند. در سیالات چگال مثل مایعات، مولکولها بهم نزدیکتر هستند و انتقال یا نفوذ کندتر انجام می‌شود. مولکولها در جامدات بیشتر از مایعات به هم فشرده‌اند و مهاجرت مولکولی محدودتر است.

۲- معادله کلی انتقال مولکولی: در وهله اول، هر سه فرایند انتقال مولکولی ممنتوم، گرما و جرم با یک نوع معادله کلی انتقال مشخص می‌شوند. ابتدا با توجه به معادله زیر شروع می‌کنیم:

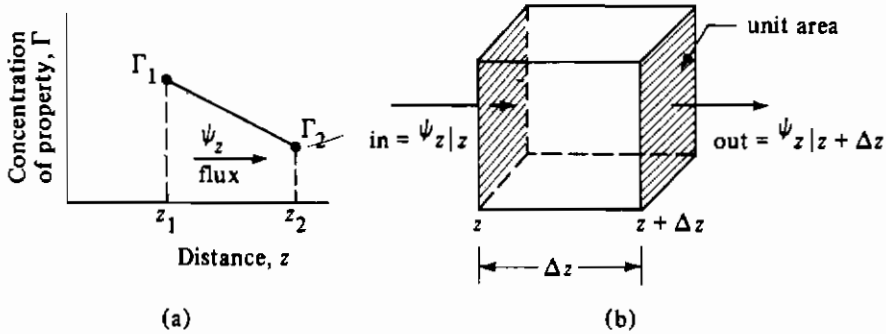
$$(۳-۲-۱) \quad \text{نرخ فرایند انتقال} = \frac{\text{نیروی رانش}}{\text{مقاومت}}$$

این معادله بیان می‌کند که هنگام انتقال یک خاصیت برای غلبه بر مقاومت به یک نیروی رانش نیاز داریم. این مشابه قانون اهم در الکتریسیته است که نرخ (شدت) جریان الکتریسیته با اُفت ولتاژ (نیروی رانش) متناسب است و نسبت عکس با مقاومت دارد.

می‌توانیم معادله (۳-۲-۱) را با نوشتن معادله‌ای به صورت زیر برای انتقال مولکولی یا نفوذ یک خاصیت تغییر شکل دهیم.

$$(۳-۲-۲) \quad \psi_z = -\delta \frac{d\Gamma}{dz}$$

که ψ_z بیانگر شار یک خاصیت به صورت مقدار خاصیت انتقال یافته در واحد زمان و در واحد سطح عمود بر جریان در جهت z تعریف می‌شود و با عبارت $\frac{\text{مقدار خاصیت}}{s.m^2}$ نشان داده می‌شود. δ یک ثابت تناسب است که ضریب نفوذ نامیده می‌شود و بر حسب $\frac{m^2}{s}$ است. Γ غلظت خاصیت بر حسب $\frac{\text{خاصیت}}{m^3}$ و z فاصله در جهت جریان بر حسب m است.



شکل ۲-۳-۱. انتقال مولکولی یک خاصیت (a) منحنی تغییرات غلظت بر حسب فاصله برای حالت پایدار (b) موازنه عمومی خاصیت در حالت ناپایدار

اگر فرایند در حالت پایدار باشد، ψ_z ثابت است. با بازنویسی معادله (۲-۳-۲) و انتگرال‌گیری از

آن نتیجه می‌شود:

$$\psi_z \int_{z_1}^{z_2} dz = -\delta \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} d\Gamma \quad (2-3-3)$$

$$\psi_z = \frac{\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{z_2 - z_1} \quad (2-3-4)$$

نمودار غلظت Γ بر حسب z در شکل ۲-۳-۱a نشان داده شده است که به صورت خط مستقیم است. چون شار در جهت ۱ به ۲ است و غلظت کاهش می‌یابد بنابراین، شیب $d\Gamma/dz$ منفی است و علامت منفی در معادله (۲-۳-۲) باعث می‌شود تا شار از نقطه ۱ به ۲ مثبت به دست آید. در بخش ۲-۳B معادلات مخصوص انتقال منتوم، حرارت و جرم بحث خواهند شد و نشان داده می‌شود که با معادله (۲-۳-۴) یکسان هستند.

مثال ۲-۳-۱ انتقال مولکولی یک خاصیت در حالت پایدار

یک خاصیت به وسیله نفوذ در یک سیال در حالت پایدار منتقل می‌شود. در نقطه ۱ غلظت

$\frac{\text{مقدار خاصیت}}{\text{m}^3} = 1/37 \times 10^{-2}$ است و در نقطه ۲ در یک فاصله $Z_2 = 0/4 \text{ m}$ برابر $0/72 \times 10^{-2}$

است. ضریب نفوذ $\delta = 0/013 \text{ m}^2/\text{s}$ و سطح مقطع ثابت است.

الف - شار را محاسبه کنید.

ب - یک معادله برای Γ بر حسب تابعی از فاصله پیدا کنید.

پ - Γ را در وسط مسیر حساب کنید.

حل: برای قسمت (الف) با جایگزینی در معادله (۲-۳-۴)

$$\psi_z = \frac{\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{z_2 - z_1} = \frac{0/013 \times (1/37 \times 10^{-2} - 0/72 \times 10^{-2})}{(0/4 - 0)} \\ = 2/113 \times 10^{-4} \frac{\text{مقدار خاصیت}}{\text{s.m}^2}$$

برای قسمت (ب) با انتگرالگیری از معادله (۲-۳-۲) در گستره‌های Γ_1 تا Γ و z_1 تا z و مرتب‌کردن آن داریم:

$$\psi_z \int_{z_1}^z dz = -\delta \int_{\Gamma_1}^{\Gamma} d\Gamma \quad (2-3-5)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \frac{\psi_z}{\delta}(z_1 - z) \quad (2-3-6)$$

برای قسمت (پ) با استفاده از نقطه میانی $Z = 0/2 \text{ m}$ و جایگزینی آن در معادله (۲-۳-۶) داریم:

$$\Gamma = 1/37 \times 10^{-2} + \frac{2/113 \times 10^{-4}}{0/013} \times (0 - 0/2) = 1/045 \times 10^{-2} \frac{\text{مقدار خاصیت}}{\text{s.m}^2}$$

۳- موازنه کلی خاصیت برای حالت ناپایدار: هنگام استفاده از معادله نفوذ مولکولی (معادله (۲-۳-۲)) برای محاسبه سرعت انتقال در در یک سیستم، لازم است که مقدار خاصیت منتقل شده را در کل سیستم در نظر بگیریم. این کار با نوشتن یک موازنه کلی برای خاصیت یا معادله بقای خاصیت (ممتوم، انرژی گرمایی، جرم) در حالت ناپایدار انجام می‌شود. در ابتدا با نوشتن یک معادله در جهت z شروع می‌کنیم، که این معادله مطابق شکل ۱b-۲-۳، شامل مقدار خاصیت ورودی، خروجی و تولید شده از طریق انتقال مولکولی و نرخ تجمع آن در یک سیستم می‌باشد، که به شکل یک المان ثابت در فضا با حجم $\Delta z(1)$ متر مکعب است.

$$\text{(نرخ تولید خاصیت)} + \text{(نرخ ورودی خاصیت)} \\ = \text{(نرخ تجمع خاصیت)} + \text{(نرخ خروجی خاصیت)} \quad (2-3-7)$$

نرخ ورودی $\frac{\text{مقدار خاصیت}}{s} \times 1 \times (\psi_z|_z)$ و نرخ خروجی $1 \times (\psi_z|_{z+\Delta z})$ است. سطح مقطع جریان 1 m^2 می‌باشد. نرخ تولید خاصیت $(1 \times \Delta z) \times R$ است که R بر حسب $\frac{\text{نرخ تولید خاصیت}}{\text{s.m}^3}$ است. عبارت مربوط به تجمع به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{نرخ تجمع خاصیت} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} (\Delta z \cdot 1) \quad (2-3-8)$$

با جایگزینی عبارتهای مختلف در معادله (۲-۳-۷)، خواهیم داشت،

$$(\psi_{z,tz}) \cdot 1 + R(\Delta z \cdot 1) = (\psi_{z,tz + \Delta z}) \cdot 1 + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} (\Delta z \cdot 1) \quad (2-3-9)$$

از تقسیم رابطه بر Δz و میل دادن Δz به سمت صفر داریم:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = R \quad (2-3-10)$$

با جایگزینی ψ_z از معادله (۲-۳-۲) در معادله (۲-۳-۱۰) و با فرض ثابت بودن δ ،

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = R \quad (2-3-11)$$

در صورتی که خاصیت تولید نشود، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \quad (2-3-12)$$

معادله نهایی، غلظت خاصیت (Γ)، موقعیت (z) و زمان را بهم مرتبط می‌سازد.

معادلات (۲-۳-۱۱) و (۲-۳-۱۲) معادلات کلی بقای ممتوم، گرما و جرم هستند و در بخشهای زیادی از این کتاب استفاده خواهند شد. معادلات فقط براساس انتقال مولکولی مورد توجه قرار گرفته‌اند و مکانیسمهای دیگر انتقال مثل جابه‌جایی و غیره در نظر گرفته نشده‌اند. این مکانیسمها هنگامی که معادلات ویژه ممتوم، جرم و انرژی در بخشهای دیگر کتاب به دست آیند در نظر گرفته خواهند شد.

۲-۳B مقدمه‌ای بر انتقال مولکولی

تئوری جنبشی گازها تفسیر فیزیکی خوبی از حرکت انفرادی مولکولها در سیالات به ما می‌دهد. مولکولها به دلیل انرژی جنبشی‌شان دارای حرکتهای اتفاقی سریع هستند و غالباً با هم برخورد می‌کنند. انتقال مولکولی یا نفوذ مولکولی یک خاصیت مثل ممتوم، گرما و یا جرم در سیال به دلیل این حرکتهای اتفاقی به وقوع می‌پیوندد. هر مولکولی که دارای خاصیتی قابل انتقال باشد، به صورت تصادفی در تمام جهات حرکت می‌کند و بنابراین شار در تمام جهتها وجود دارد. اگر گرادیان غلظت خاصیت وجود داشته باشد، شار خالص خاصیت از غلظت زیاد به غلظت کم به وجود خواهد آمد. این پدیده به این دلیل اتفاق می‌افتد که تعداد مساوی مولکول بین نواحی با غلظت کم و زیاد تبادل می‌شود.

۱- انتقال ممتوم و قانون نیوتن: وقتی که یک سیال در جهت x موازی با سطح جامد جریان پیدا می‌کند، گرادیان سرعت به وجود می‌آید. در این حالت، هم چنانکه در جهت z به سطح جامد نزدیک

می شویم سرعت v_x در جهت x کاهش می یابد. سیال دارای ممتوم در جهت x است و غلظت آن ρv_x می باشد. با توجه به این که واحد ممتوم kg.m/s است بنابراین، واحد ρv_x به صورت $(\text{kg.m/s})/\text{m}^2$ خواهد بود. بر اساس نفوذ اتفاقی مولکولها، مبادله مولکولی در جهت z وجود دارد. تعداد مساوی از آنها در هر جهت $(+z, -z)$ بین لایه مولکولی با سرعت بیشتر و لایه مجاور که دارای سرعت کمتری است جابجا می شوند. بنابراین، ممتومی که در جهت x وجود دارد، در جهت z از لایه سریعتر به لایه آهسته تر منتقل می شود. معادله این انتقال ممتوم مشابه معادله (۲-۳-۲) است و قانون ویسکوزیته نیوتنی به صورت زیر در حالتی که دانسیته (ρ) ثابت باشد، نوشته می شود،

$$\tau_{zx} = -\nu \frac{d(\rho v_x)}{dz} \quad (2-3-13)$$

که τ_{zx} شار انتقال ممتوم در جهت z برحسب $(\text{kg.m/s})/\text{s.m}^2$ ، ν مساوی با μ/ρ و ضریب نفوذ ممتوم برحسب m^2/s است. سایر پارامترها عبارتند از: z جهت انتقال یا نفوذ برحسب m ، ρ دانسیته برحسب kg/m^3 و μ ویسکوزیته برحسب kg/m.s .

۲- انتقال گرما و قانون فوریه: قانون فوریه برای انتقال مولکولی گرما یا هدایت گرمایی در یک سیال یا ماده جامد می تواند به صورت زیر در حالتی که دانسیته (ρ) ثابت باشد نوشته شود. c_p ظرفیت گرمایی ویژه ماده است که آن هم ثابت می باشد.

$$q_z = -\alpha \frac{d(\rho c_p T)}{dz} \quad (2-3-14)$$

در معادله بالا، q_z/A شار گرما برحسب J/s.m^2 ، α ضریب نفوذ گرمایی برحسب m^2/s و $\rho c_p T$ غلظت گرما یا انرژی گرمایی برحسب J/m^3 است. وقتی که گرادیان دما در سیال وجود دارد، تعداد مساوی مولکول در هر جهت بین نواحی گرم و سرد جابجا می شوند. در این روش انرژی در جهت z منتقل می شود.

۳- انتقال جرم و قانون فیک: قانون فیک برای انتقال مولکولی جرم در یک سیال یا جامد با غلظت کلی ثابت، به صورت زیر است:

$$J_{zA}^* = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} \quad (2-3-15)$$

که J_{zA}^* شار A برحسب kg mol A/s.m^2 ، D_{AB} ضریب نفوذ مولکولی مولکول A در B برحسب m^2/s و c_A غلظت A برحسب kgmol/m^3 است. همانند انتقال ممتوم و گرما، وقتی گرادیان غلظت در یک سیال وجود داشته باشد، تعداد مساوی از مولکولها در هر جهت بین نواحی با غلظت زیاد و کم نفوذ

می‌کنند و شار خالص جرم اتفاق می‌افتد.

بنابراین، معادلات (۲-۳-۱۳)، (۲-۳-۱۴) و (۲-۳-۱۵) برای انتقال ممتوم، گرما و جرم با یکدیگر شباهت دارند و مشابه با معادله کلی انتقال مولکولی (۲-۳-۲) هستند. همه این معادلات دارای شار در طرف چپ معادله و همچنین دارای ضریب نفوذ بر حسب m^2/s و مشتق غلظت نسبت به فاصله می‌باشند. هر سه معادله انتقال مولکولی از نظر ریاضی مشابهند. اما باید تأکید کنیم که گرچه تشابه ریاضی بین این معادلات وجود دارد، اما مکانیسم فیزیکی واقعی که اتفاق می‌افتد، می‌تواند کاملاً متفاوت باشد. مثلاً هنگام انتقال جرم دو جزء، آنها از طریق حرکت نسبی در یکدیگر منتقل می‌شوند یا به عبارت دیگر نفوذ می‌کنند. هنگام انتقال گرما در یک جامد، مولکولها تقریباً ثابت هستند و انتقال عمدتاً توسط الکترونها صورت می‌گیرد. انتقال ممتوم می‌تواند با مکانیسمهای مختلفی انجام شود. توضیحات مفصل‌تر مربوط به هر کدام از فرایندهای انتقال ممتوم، انرژی و جرم در این فصل و فصلهای بعدی آورده خواهند شد.

۲-۴ ویسکوزیته سیالات

۲-۴A لایون نیون و ویسکوزیته

هنگامی که یک سیال در یک مجرای بسته مانند لوله و یا بین دو صفحه صاف جریان می‌یابد، با توجه به سرعت آن دو نوع جریان ممکن است رخ دهد. در سرعتهای پایین، سیال تمایل دارد بدون اختلاط جانبی جریان یابد و لایه‌های مجاور مانند کارتهای بازی روی یکدیگر می‌لغزند. هیچ‌گونه جریان متقاطع عمود بر جهت حرکت و نیز گردابه و چرخش سیال وجود ندارد. این نوع جریان یا رژیم، جریان آرام^(۱) نامیده می‌شود. در سرعتهای بالاتر گردابه‌ها شکل می‌گیرند، که منجر به اختلاط جانبی می‌شود. این جریان، جریان مغشوش^(۲) نام دارد. بحث ما در این بخش به جریان آرام محدود می‌شود.

در بحث ویسکوزیته، وجه تمایز یک سیال با جامد، رفتارهای متفاوت آنها در هنگامی است که تحت تأثیر تنش (نیرو به واحد سطح) یا نیرو قرار می‌گیرند. یک جسم جامد کشسان تغییر شکلی متناسب با تنش وارده می‌یابد. اما، یک سیال وقتی که تحت تنش مشابهی قرار گیرد، به طور پیوسته تغییر شکل پیدا می‌کند یا به عبارت دیگر جریان می‌یابد. در صورت افزایش تنش سرعت نیز افزایش پیدا می‌کند. یک سیال، در مقابل چنین تنشی مقاومت نشان می‌دهد. ویسکوزیته، خاصیتی از سیال است که باعث بوجود آمدن نیروهایی می‌شود که در مقابل حرکت نسبی لایه‌های مجاور سیال، مقاومت می‌کنند. این نیروهای ویسکوز ناشی از نیروهای بین مولکولی سیال می‌باشند و ویژگیهای آنها شبیه

به ویژگیهای نیروهای برشی^(۱) در جامدات است.

ایده‌های فوق با یک بحث کمی در مورد ویسکوزیته می‌توانند روشن‌تر شوند. در شکل ۱-۴-۲ یک سیال بین دو صفحه موازی بی‌نهایت (از نظر طول و عرض) قرار دارد. فرض کنید که صفحه پایینی به صورت موازی نسبت به صفحه بالایی با سرعت ثابت Δv_z m/s حرکت می‌کند. این حرکت ناشی از اعمال نیروی ثابت F (بر حسب نیوتن) است. این نیرو، نیروی مقاوم ویسکوز^(۲) نام دارد و از نیروهای ویسکوز سیال ناشی می‌شود. فاصله صفحات از یکدیگر برابر Δy متر می‌باشد. لایه‌های مایع در جهت z حرکت می‌کنند. لایه مجاور صفحه پایینی با سرعتی برابر با سرعت این صفحه جابجا می‌شود. هر چه در جهت y بالاتر رویم سرعت لایه‌ها کمتر می‌شود. همانطور که در شکل ۱-۴-۲ نشان داده شده است، این توزیع سرعت در جهت y ، خطی می‌باشد. این پدیده را می‌توان مشابه پدیده‌ای دانست که در کارتهای بازی اتفاق می‌افتد که اگر کارت پایینی جابجا شود، کارتهای بالای آن تا حدی می‌لغزند.

آزمایشهای انجام شده بر روی تعداد زیادی از سیالات نشان می‌دهند که نیروی F (بر حسب نیوتن) نسبت مستقیم با سرعت Δv_z بر حسب m/s و بخشی از مساحت دو صفحه که در مقابل هم هستند یعنی A (بر حسب m^2) داشته و نسبت معکوس با فاصله Δy (بر حسب متر) دارد. به عبارت دیگر براساس قانون ویسکوزیته نیوتنی برای جریان آرام،

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{\Delta v_z}{\Delta y} \quad (2-4-1)$$

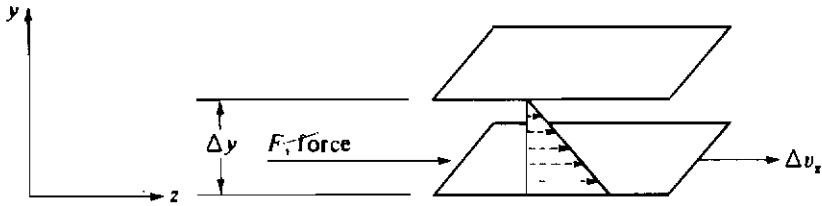
که در رابطه فوق، μ یک ثابت تناسب است که ویسکوزیته سیال نام دارد و بر حسب Pa.s یا kg/m.s بیان می‌شود. اگر Δy را به سمت صفر میل دهیم، براساس تعریف مشتق داریم:

$$\tau_{yz} = -\mu \frac{dv_z}{dy} \quad (\text{SI units}) \quad (2-4-2)$$

که در رابطه فوق $\tau_{yz} = \frac{F}{A}$ تنش برشی و یا به عبارت دیگر نیرو بر واحد سطح می‌باشد که بر حسب نیوتن بر متر مربع بیان می‌شود. در سیستم cgs، F بر حسب dyn، μ بر حسب $\frac{\text{g}}{\text{cm.s}}$ ، v_z بر حسب cm/s و y بر حسب cm می‌باشند. همچنین می‌توانیم معادله (۲-۴-۲) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\tau_{yz} \theta_c = -\mu \frac{dv_z}{dy} \quad (\text{English units}) \quad (2-4-3)$$

که τ_{yz} بر حسب lb_f/ft^2 است.



شکل ۱-۴-۲. تنش برشی وارد بر سیال بین دو صفحه موازی

واحد ویسکوزیته در سیستم cgs، $\frac{g}{cm \cdot s}$ است که پویز یا سانتی پویز (cp) نام دارد. در سیستم SI، ویسکوزیته بر حسب Pa.s (N.s/m²) یا kg/m.s است.

$$1 \text{ cp} = 1 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s} = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2 \text{ (SI)}$$

$$1 \text{ cp} = 0.01 \text{ poise} = 0.01 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$$

$$1 \text{ cp} = 6.7197 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{s}$$

سایر ضرایب تبدیل ویسکوزیته در ضمیمه A.1 داده شده‌اند. گاهی ویسکوزیته به صورت μ/ρ که ویسکوزیته سینماتیک نامیده می‌شود و بر حسب m^2/s یا cm^2/s است، بیان می‌شود. در این رابطه ρ دانسیته سیال است.

مثال ۱-۴-۲ محاسبه تنش برشی در یک مایع

با توجه به شکل ۱-۴-۲ فاصله بین صفحات $\Delta y = 0.5 \text{ cm}$ ، $\Delta v_z = 10 \text{ cm/s}$ و سیال اتیل الکل در 273 K با ویسکوزیته $1/77 \text{ cp}$ ($1/77 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$) می‌باشد.

الف - تنش برشی (τ_{yz}) و گرادیان سرعت یا میزان تنش (dv_z/dy) را در دستگاه cgs حساب کنید.

ب - محاسبه قسمت (الف) را در دستگاه واحدهای انگلیسی تکرار کنید.

پ - محاسبه قسمت (الف) را در دستگاه واحدهای SI تکرار کنید.

حل: می‌توانیم مقادیر معلوم را مستقیماً در معادله (۱-۴-۲) جایگزین کنیم و بنا از معادله

(۲-۴-۲) انتگرال بگیریم. با استفاده از روش اخیر و مرتب کردن معادله (۲-۴-۲)، صفحه

پایینی را نقطه (۱) نامیده و انتگرال گیری می‌کنیم:

$$\tau_{yz} \int_{y_1=0}^{y_2=0.5} dy = -\mu \int_{v_1=10}^{v_2=0} dv_z \quad (2-4-4)$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{v_1 - v_2}{y_2 - y_1} \quad (2-4-5)$$

با جایگذاری مقادیر معلوم

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= \mu \frac{v_1 - v_2}{y_2 - y_1} = 0.0177 \frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}} \times \frac{(10 - 0) \text{ cm/s}}{(0.5 - 0) \text{ cm}} \quad (2-4-6) \\ &= 0.354 \frac{\text{g}\cdot\text{cm/s}^2}{\text{cm}^2} = 0.354 \text{ dyne/cm}^2\end{aligned}$$

محاسبه میزان تنش dv_z/dy با توجه به خطی بودن تغییر سرعت نسبت به y ،

$$\text{shear rate} = \frac{dv_z}{dy} = \frac{\Delta v_z}{\Delta y} = \frac{(10 - 0) \text{ cm/s}}{(0.5 - 0) \text{ cm}} = 20 \text{ s}^{-1} \quad (2-4-7)$$

برای قسمت (ب) از به کار بردن واحدهای lb_f و ضریب تبدیل ویسکوزیته از ضمیمه A.1 نتیجه می شود،

$$\mu = 1/77 \text{ cp} \times 6/7197 \times 10^{-4} \frac{\text{lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}}{\text{cp}} = 1/77 \times 6/7197 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}$$

با انتگرال گیری از معادله (2-4-3) داریم:

$$\tau_{yz} = \frac{\mu (\text{lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s})}{g_c (\text{ft}\cdot\text{lb}_m/\text{lb}_f\cdot\text{s}^2)} \frac{(v_1 - v_2) \text{ ft/s}}{(y_1 - y_2) \text{ ft}} \quad (2-4-8)$$

با تبدیل واحد Δv_z به ft/s و Δy به ft و جایگزینی مقادیر معلوم در معادله (2-4-8)، نتیجه می شود که $\tau_{yz} = 7/39 \times 10^{-4} \text{ lb}_f/\text{ft}^2$. همچنین $20 \text{ s}^{-1} = dv_z/dy$ است.

برای قسمت (پ)،

$$\Delta v_z = 10/100 = 0.1 \text{ m/s} \text{ و } \Delta y = 0.5 / 100 = 0.005 \text{ m}$$

$$\mu = 1/77 \times 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s} = 1/77 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

از جایگزینی آنها در معادله (2-4-5) نتیجه می شود:

$$\tau_{yz} = \frac{1/77 \times 10^{-3} \times 0.1}{0.005} = 0.354 \text{ N/m}^2$$

میزان برش همان مقدار 20 s^{-1} خواهد بود.

۲-۴B انتقال ممتوم در یک سیال

تنش برشی τ_{yz} در معادلات (2-4-1) و (2-4-3) را نمی توان به صورت شار انتقال ممتوم در جهت y ، که در جهت z اعمال می شود، تفسیر کرد. τ_{yz} نرخ جریان ممتوم (ممتوم به ازای واحد زمان) به ازای

واحد سطح است. واحد ممتوم که حاصل ضرب جرم در سرعت است به صورت $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}$ نشان داده می‌شود. تنش برشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tau_{yz} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}}{\text{m}^2\cdot\text{s}} = \frac{\text{ممتوم}}{\text{m}^2\cdot\text{s}} \quad (۲-۴-۹)$$

رابطه بالا بیانگر مقدار ممتوم منتقل شده در ثانیه به ازای واحد سطح است.

این حالت به وسیله نیروی متقابل بین دو لایه مجاور از سیال در شکل ۲-۴-۱ که سرعتهای متفاوت و در نتیجه ممتوم متفاوت در جهت z دارند، می‌تواند نشان داده شود. حرکت اتفاقی مولکولها در لایه با سرعت بیشتر تعدادی از مولکولهای را به لایه با سرعت کمتر می‌فرستد، که در آنجا با مولکولهای با سرعت کمتر برخورد می‌کنند که باعث افزایش سرعت این مولکولها و یا افزایش ممتوم آنها در جهت z می‌شوند. به همین ترتیب مولکولهای لایه با سرعت کمتر باعث کند شدن حرکت مولکولها در لایه با سرعت بیشتر می‌شوند. این تبادل مولکولها بین لایه‌ها منجر به یک انتقال یا شار ممتوم، اعمال شده در جهت z از لایه‌های با سرعت بیشتر به لایه‌های با سرعت کمتر می‌شود. علامت منفی در معادله (۲-۴-۲) نشان می‌دهد که ممتوم از ناحیه سرعت زیاد به ناحیه سرعت کم منتقل می‌شود. این مشابه انتقال گرما از ناحیه با دمای بالا به ناحیه با دمای پایین است.

۲-۴C ویسکوزیته سیالات نیوتنی

سیالاتی که از قانون ویسکوزیته نیوتنی یعنی معادلات (۲-۴-۱) و (۲-۴-۲) تبعیت می‌کنند سیالات نیوتنی نامیده می‌شوند. برای یک سیال نیوتنی، بین تنش برشی τ_{yz} و گرادیان سرعت dv_z/dy (میزان برش) رابطه‌ای خطی وجود دارد. این بدین معناست که ویسکوزیته μ دارای مقدار ثابتی است و مستقل از میزان برش است. برای سیالات غیر نیوتنی، رابطه بین τ_{yz} و dv_z/dy خطی نیست، یعنی ویسکوزیته μ ثابت باقی نمی‌ماند و تابعی از میزان برش است. بعضی مایعات شناخته شده از این قانون ساده نیوتن تبعیت نمی‌کنند. از آن جمله، خمیرها، دوغاب‌ها، پلیمرهای سنگین و امولسیونها هستند. علم مربوط به جریان و تغییر شکل سیالات غالباً رئولوژی^(۱) نامیده می‌شود. بحث مربوط به سیالات غیرنیوتنی در این‌جا آورده نمی‌شود و در بخش ۳-۵ مطرح خواهد شد.

ویسکوزیته گازها، که سیالات غیرنیوتنی هستند، با دما افزایش می‌یابد و تا حدود فشار 1000 kPa تقریباً مستقل از فشار است. در فشارهای بالاتر ویسکوزیته گازها با افزایش فشار، افزایش می‌یابد. به عنوان مثال، ویسکوزیته گاز N_2 در 298 K از فشار 100 kPa تا حدود $5 \times 10^4 \text{ kPa}$ دو برابر می‌شود. در مایعات، ویسکوزیته با افزایش دما، کاهش می‌یابد. چون اصولاً مایعات تراکم‌ناپذیر هستند، ویسکوزیته آنها تحت تأثیر فشار نیست.

در جدول ۱-۴-۲ مقادیر تجربی ویسکوزیته تعدادی از سیالات خالص در فشار $101/32 \text{ kPa}$ داده شده است. ویسکوزیته گازها بسیار کم است و از یک گاز تا گاز دیگر تفاوت قابل ملاحظه‌ای ندارد و حدود تغییرات آن از $3 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ تا $5 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ است. ویسکوزیته مایعات خیلی بیشتر است. ویسکوزیته آب در 293 K حدود 1×10^{-3} و گلیسرول $1/069 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ است. بنابراین اختلاف زیادی بین ویسکوزیته‌های مایعات وجود دارد. جداول کاملتر ویسکوزیته برای آب در ضمیمه A.2، برای مایعات آلی و غیرآلی و گازها در ضمیمه A.3 و برای مایعات بیولوژیکی و مواد غذایی در ضمیمه A.4 داده شده است. اطلاعات وسیعتر در مراجع دیگر موجود می‌باشند. می‌توان روشهای تخمین ویسکوزیته گازها و مایعات را هنگامی که اطلاعات تجربی در دسترس نباشد از منابع به دست آورد. این روشها برای گازها تا فشار 100 kPa با خطای حدود ۷.۵٪ دقت قابل قبولی دارند، اما روشهای تخمین ویسکوزیته مایعات غالباً دقت چندانی ندارند.

جدول ۱-۴-۲. ویسکوزیته تعدادی از گازها و مایعات در فشار $101/325 \text{ kPa}$

Gases				Liquids			
Substance	Temp., K	Viscosity $(\text{Pa}\cdot\text{s}) 10^3$ or $(\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}) 10^3$	Ref.	Substance	Temp., K	Viscosity $(\text{Pa}\cdot\text{s}) 10^3$ or $(\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}) 10^3$	Ref.
Air	293	0.01813	N1	Water	293	1.0019	S1
CO ₂	273	0.01370	R1		373	0.2821	S1
	373	0.01828	R1	Benzene	278	0.826	R1
CH ₄	293	0.01089	R1	Glycerol	293	1069	L1
SO ₂	373	0.01630	R1	Hg	293	1.55	R2
				Olive oil	303	84	E1

۲-۵ انواع جریان سیال و عدد رینولدز**۲-۵A مقدمه و انواع جریان سیال**

اصول استاتیک سیالات، که در بخش ۲-۲ بیان شد، تقریباً اصولی دقیق هستند. از طرف دیگر اصول حرکت سیالات کاملاً پیچیده است. روابط اساسی که حرکت سیالات را تشریح می‌کنند، معادلات موازنه کلی جرم، انرژی و ممتوم هستند که در بخشهای بعدی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

این موازنه‌های کلی یا ماکروسکوپی برای یک فضای محدود یا حجم کنترل ثابت در فضا نوشته می‌شوند. به این دلیل از کلمه «کلی» استفاده می‌کنیم که می‌خواهیم این موازنه‌ها را از خارج این محدوده تشریح کنیم. تغییرات در داخل این محدوده بر حسب خواص جریانهای ورودی و خروجی و تغییرات انرژی بین محدوده مورد نظر و محیط تعیین می‌شود.

وقتی که موازنه‌های کلی جرم، انرژی و ممتوم را می‌نویسیم، علاقه‌مند به دانستن جزئیات آنچه که در داخل محدوده اتفاق می‌افتد نیستیم. بعنوان مثال در یک موازنه کلی، سرعتهای میانگین ورودی و خروجی در نظر گرفته می‌شوند. اما در یک موازنه دیفرانسیلی توزیع سرعت در داخل یک محدوده با استفاده از قانون ویسکوزیته نیوتن به دست می‌آید.

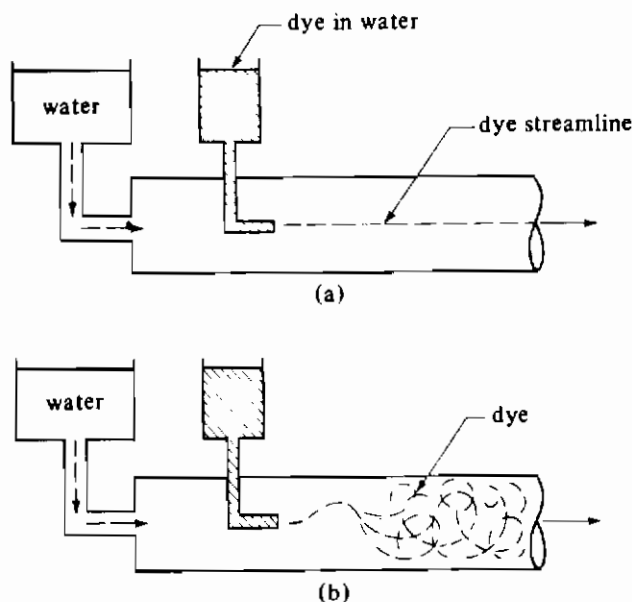
در این بخش ابتدا در مورد دو نوع از جریان سیال که می‌تواند وجود داشته باشد، یعنی جریان آرام و جریان مغشوش، بحث می‌شود. همچنین عدد رینولدز که برای مشخص کردن رژیم جریان به کار می‌رود تشریح خواهد شد. سپس در بخشهای ۲-۶ و ۲-۷ و ۲-۸ موازنه کلی جرم، موازنه انرژی و موازنه ممتوم همراه با تعدادی از کاربردهای آنها تشریح خواهد شد. در نهایت در بخش ۲-۹ بحثی در مورد نوشتن موازنه پوسته‌ای^(۱) روی یک المان برای به دست آوردن توزیع سرعت در المان و اُفت فشار خواهیم داشت.

۲-۵B جریان آرام و جریان مغشوش

در دینامیک سیالات، نوع جریان سیالی که در یک کانال جاری است اهمیت دارد. وقتی که سیالی در یک کانال بسته با هر مقطعی حرکت می‌کند، بر حسب شرایط موجود، هر دو نوع جریان قابل مشاهده است. این دو نوع جریان معمولاً در کانال روباز یا در رودخانه نیز مشاهده می‌شود. وقتی سرعت سیال کم است، خطوط جریان صاف است. اما وقتی که سرعت زیاد است، یک الگوی ناپایدار مشاهده می‌شود که در آن گردابه‌ها یا قطعات کوچک سیال در همه جهات و در همه زوایا نسبت به خط جریان حرکت می‌کنند. اولین نوع جریان که در آن سرعت کم است و به نظر می‌رسد لایه‌های سیال بدون این که گردابه‌ای

ایجاد شود روی همدیگر می لغزند، جریان آرام نامیده می شود. همان طور که در بخش ۲-۴A هم بحث شد، قانون ویسکوزیته نیوتنی در مورد این نوع جریان صدق می کند. دومین نوع جریان با سرعتهای بالاتر، که در آن گردابه ها وجود دارند و باعث می شوند که سیال دارای آفت و خیز باشد، جریان مغشوش نامیده می شود.

وجود جریانهای آرام و مغشوش براحتی توسط آزمایش رینولدز به اثبات می رسد و قابل مشاهده است. آزمایشات او در شکل ۱-۵-۲ نشان داده شده است. آب در شرایط پایدار در یک لوله شفاف با شدت جریان کنترل شده توسط یک شیر در انتهای لوله، جریان پیدا می کند. از طریق یک جت کوچک یک جریان رنگی مطابق شکل وارد جریان اصلی می شود و مسیر آن مشاهده می گردد. در شدت جریانهای کم، مسیر رنگی منظم است و به شکل یک خط جریان مانند یک نخ می باشد (شکل ۱a-۵-۲). هیچ اختلاط جانبی سیال وجود ندارد و مانند یک خط جریان تا انتهای لوله حرکت می کند. با قرار دادن جتهای اضافی در نقاط دیگر مقطع لوله، دیده می شود که هیچ گونه اختلاطی در قسمتهای دیگر لوله نیز وجود ندارد و سیال رنگی در خطوط کاملاً صاف و موازی حرکت می کند. این نوع از جریان را جریان آرام یا جریان ویسکوز^(۱) می نامند.



شکل ۱-۵-۲. آزمایش رینولدز برای انواع مختلف جریان: (a) جریان آرام (b) جریان مغشوش

همچنان که سرعت افزایش می‌یابد، مشاهده می‌شود که در یک سرعت مشخص، خط نازک رنگی بهم خورده و مسیر نامنظم می‌شود (شکل ۱b-۵-۲). این نوع جریان به جریان مغشوش معروف است. سرعتی که در آن رژیم جریان تغییر می‌کند، سرعت بحرانی^(۱) نامیده می‌شود.

۵C-۲ عدد رینولدز

مطالعات نشان داده است که انتقال از جریان آرام به جریان مغشوش در لوله‌ها نه تنها تابعی از سرعت بلکه تابعی از دانسیته و ویسکوزیته سیال و قطر لوله است. این متغیرها با هم ترکیب می‌شوند و عدد رینولدز را به وجود می‌آورند که عددی بدون بُعد است.

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} \quad (۲-۵-۱)$$

که در معادله بالا، N_{Re} عدد رینولدز، D قطر بر حسب متر، ρ دانسیته بر حسب kg/m^3 ، μ ویسکوزیته سیال بر حسب Pa.s و v سرعت میانگین سیال بر حسب m/s است (سرعت میانگین به صورت دبی حجمی جریان تقسیم بر سطح مقطع لوله تعریف شده است). واحدها در سیستم cgs به صورت: D بر حسب سانتی‌متر، ρ بر حسب g/cm^3 ، μ بر حسب g/cm.s و v بر حسب cm/s است. در سیستم انگلیسی، D بر حسب ft، ρ بر حسب lb_m/ft^3 ، μ بر حسب $\text{lb}_m/\text{ft.s}$ و v بر حسب ft/s است.

ناپایداری جریانی که منتهی به جریان مغشوش می‌شود، به وسیله نسبت نیروهای اینرسی یا جنبشی به نیروهای ویسکوز در جریان سیال تعیین می‌شود. نیروهای اینرسی متناسب با ρv^2 و نیروهای ویسکوز متناسب با $\mu v/D$ هستند و نسبت $\rho v^2 / (\mu v/D)$ همان عدد رینولدز $(\rho v D / \mu)$ می‌باشد. توضیح اضافی و نحوه به دست آوردن اعداد بدون بُعد در بخش ۱۱-۳ بحث شده است.

در یک لوله مستقیم و استوانه‌ای که مقدار عدد رینولدز کمتر از ۲۱۰۰ است، جریان همیشه آرام است. وقتی که از ۴۰۰۰ تجاوز کند، جریان مغشوش خواهد بود، مگر در حالت‌های خاص. در بین این دو عدد که ناحیه گذرا^(۲) نامیده می‌شود، جریان می‌تواند ویسکوز یا مغشوش باشد، که به جزئیات سیستم بستگی دارد و قابل پیش‌بینی نیست.

مثال ۱-۵-۲ عدد رینولدز در یک لوله

آب در 303 K با شدت 10 gal/min در لوله‌ای به قطر داخلی $2/067\text{ in}$ جریان دارد. عدد رینولدز را با استفاده واحدهای SI و در سیستم انگلیسی محاسبه کنید.

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

حل: از ضمیمه A.1 داریم: $1 \text{ ft}^3 = 7/481 \text{ gal}$. شدت جریان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{شدت جریان} = 10 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ ft}^3}{7/481 \text{ gal}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0/0223 \text{ ft}^3/\text{s}$$

از ضمیمه A.2 برای آب در 30.3 K ،

$$D = \frac{2/067}{12} = 0/172 \text{ ft}$$

$$\text{سطح مقطع لوله} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 0/172^2}{4} = 0/0233 \text{ ft}^2$$

$$v = 0/0223 \text{ ft}^3/\text{s} \times \frac{1}{0/0233 \text{ ft}^2} = 0/957 \text{ ft/s}$$

از ضمیمه A.2 برای آب در 30.3 K (30.0°C)،

$$\rho = 0/996 \times 62/43 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$$

$$\mu = 0/8007 \text{ cp} \times 6/7197 \times 10^{-4} \frac{\text{lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}}{\text{cp}} = 5/38 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}$$

با جایگزینی در معادله (۱-۵-۲)،

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0/172 \text{ ft} \times 0/957 \text{ ft/s} \times 0/996 \times 62/43 \text{ lb}_m/\text{ft}^3}{5/38 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}} = 1/905 \times 10^4$$

بنابراین، جریان مغشوش است. در سیستم واحدهای SI،

$$\rho = 0/996 \times 1000 \text{ kg/m}^3 = 996 \text{ kg/m}^3$$

$$D = 2/067 \text{ in} \times \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ m}}{3/2808 \text{ ft}}\right) = 0/0525 \text{ m}$$

$$v = (0/957 \frac{\text{ft}}{\text{s}}) \times \left(\frac{1 \text{ m}}{3/2808 \text{ ft}}\right) = 0/2917 \text{ m/s}$$

$$\mu = 0/8007 \text{ cp} \times (1 \times 10^{-3} \frac{\text{kg/m}\cdot\text{s}}{\text{cp}}) = 8/007 \times 10^{-4} \text{ kg/m}\cdot\text{s} = 8/007 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0/0525 \text{ m} \times 0/2917 \text{ m/s} \times 996 \text{ kg/m}^3}{8/007 \times 10^{-4} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 1/905 \times 10^4$$

۲-۶ موازنه کلی جرم و معادله پیوستگی

۲-۶A مقدمه و موازنه ساده جرم

در دینامیک سیال، سیالات در حال حرکت هستند. معمولاً آنها توسط ابزار مکانیکی مانند پمپ یا دمنده و یا بر اساس فشار یا هد ثقلی حرکت می‌کنند و در سیستم لوله کشی یا تجهیزات فرایندی به جریان می‌افتند. اولین قدم در حل مسائل جریان معمولاً به کار گرفتن اصل بقای جرم برای کل سیستم و یا قسمتی از آن است. ابتدا یک موازنه ابتدایی را برای یک شکل هندسی ساده بررسی خواهیم کرد و سپس معادله عمومی موازنه جرم را به دست خواهیم آورد.

موازنه ساده جرم در بخش ۵-۱ معرفی شد که بر طبق آن،

$$(1-5-1) \quad \text{تجمع} + \text{خروجی} = \text{ورودی}$$

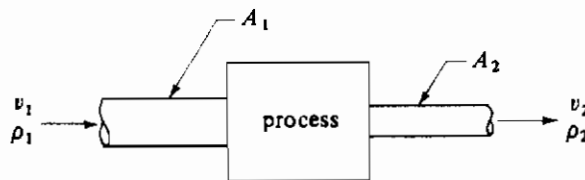
چون در جریان سیال، معمولاً با شدت جریان در حالت پایدار سروکار داریم، نرخ تجمع برابر با صفر است.

$$(1-6-2) \quad (\text{حالت پایدار}) \text{نرخ خروجی} = \text{نرخ ورودی}$$

در شکل ۲-۶-۱ سیستم جریانی ساده‌ای نشان داده شده است که سیال از مقطع ۱ با سرعت میانگین v_1 m/s و دانسیته ρ_1 kg/m³ وارد می‌شود. سطح مقطع، A_1 m² است. سیال از مقطع ۲ با سرعت میانگین v_2 خارج می‌شود. موازنه جرم (معادله ۱-۶-۲) را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$(2-6-2) \quad m = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

که در معادله بالا، m بر حسب kg/s است. غالباً به صورت $G = \rho v$ بیان می‌شود که G سرعت جرمی یا شار جرمی بر حسب kg/s.m² است. در سیستم واحدهای انگلیسی، v بر حسب ft/s، ρ بر حسب lb_m/ft³، A بر حسب ft²، m بر حسب lb_m/s و G بر حسب lb_m/s.ft² است.



شکل ۱-۶-۲. موازنه جرم روی سیستم جریانی

مثال ۱-۶-۲ جریان نفت خام و موازنه جرم

نفت خام با دانسیته 892 kg/m^3 در یک سیستم لوله کشی که در شکل (۲-۶-۲) نشان داده شده است، با شدت $1/388 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ جریان پیدامی کند. نفت در ابتدا وارد لوله ۱ شده و سپس جریان به طور مساوی تقسیم شده و وارد لوله های ۳ می شود. لوله ها از جنس فولاد و شماره ۴۰ می باشند (برای به دست آوردن ابعاد واقعی ضمیمه ۸.۵ را ببینید). موارد زیر را در سیستم واحدهای SI محاسبه کنید:

الف - دبی جرمی کل (m) در لوله ۱ و لوله ۳

ب - سرعت میانگین (v) در لوله ۱ و لوله ۳

پ - سرعت جرمی در لوله ۱

حل: از ضمیمه ۸.۵، ابعاد لوله ها به صورت زیر به دست می آیند:

لوله ۲ اینچی: $D_2 = 2/067 \text{ in}$ (قطر داخلی). سطح مقطع آن برابر است با،

$$A_2 = 0/0233 \text{ ft}^2 = 0/0233 \times 0/0929 = 2/165 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

لوله ۱/۵ اینچی: $D_3 = 1/610 \text{ in}$ (قطر داخلی). سطح مقطع آن برابر است با،

$$A_3 = 0/01414 \text{ ft}^2 = 0/01414 \times 0/0929 = 1/313 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

دبی جرمی کل در لوله های ۱ و ۲ مساوی است و برابر است با،

$$m_1 = (1/388 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}) \times (892 \text{ kg/m}^3) = 1/238 \text{ kg/s}$$

چون جریان به طور مساوی بین لوله های ۳ تقسیم می شود:

$$m_3 = \frac{m_1}{2} = \frac{1/238}{2} = 0/619 \text{ kg/s}$$

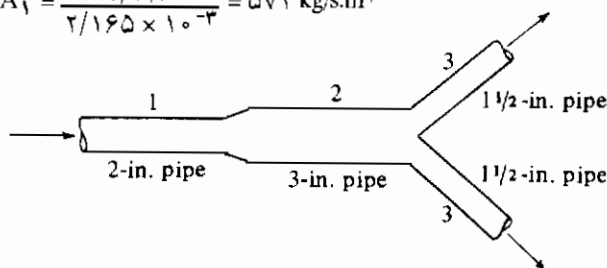
برای قسمت (ب) با به کار بردن معادله (۲-۶-۲) و حل آن برای v داریم:

$$v_1 = \frac{m_1}{\rho_1 A_1} = \frac{1/238 \text{ kg/s}}{892 \text{ kg/m}^3 \times 2/165 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 0/641 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{m_3}{\rho_3 A_3} = \frac{0/619}{892 \times 1/313 \times 10^{-3}} = 0/528 \text{ m/s}$$

برای قسمت (پ)،

$$G_1 = v_1 \rho_1 = m_1/A_1 = \frac{1/238}{2/165 \times 10^{-3}} = 572 \text{ kg/s.m}^2$$



شکل ۲-۶-۲. آرایش لوله ها در مثال ۱-۶-۲

۲-۶B حجم کنترل^(۱) برای موازنه‌ها

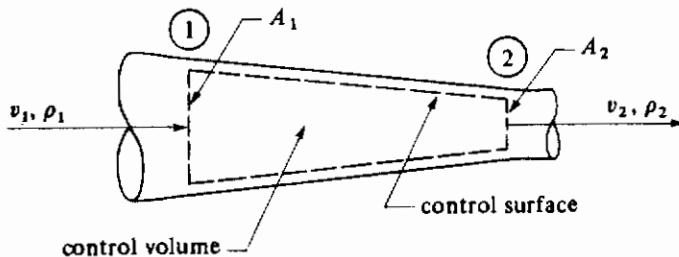
قوانین بقای جرم، انرژی و ممتوم همه برای یک سیستم بیان شده‌اند. این قوانین رابطه متقابل سیستم را با محیط مشخص می‌کنند. یک سیستم، مجموعه‌ای از یک سیال با ماهیت مشخص است. در جریان سیالات ذرات مشخص سیال به راحتی قابل شناسایی نیستند. در نتیجه به جای توجه به جرم مشخص سیال، توجه به فضای مشخصی معطوف می‌شود که از طریق آن سیال جریان می‌یابد. در این روش که روش مناسبتری است، یک حجم کنترل انتخاب می‌شود. حجم کنترل عبارت است از یک ناحیه مشخص در فضا که سیال از میان آن عبور می‌کند.

شکل ۳-۶-۲ سیالی را در حال عبور از یک کانال نشان داده است. سطح کنترل که به صورت خط چین نشان داده شده است، سطحی است که حجم کنترل را احاطه می‌کند. در اغلب مسائل قسمتی از سطح کنترل بر قسمتی از مرز جامد مثلاً دیواره کانال منطبق می‌شود. قسمت باقیمانده سطح کنترل یک سطح تصویری است که سیال از میان آن می‌تواند عبور کند. در شکل ۳-۶-۲، ورودی حجم کنترل و خروجی آن توسط نقاط ۱ و ۲ نشان داده شده است. مفهوم حجم کنترل معادل با سیستم باز در ترمودینامیک است.

۲-۶C معادله کلی موازنه جرم

برای به دست آوردن معادله عمومی موازنه کلی جرم، قانون بقای جرم را برای یک حجم کنترل که هیچ‌گونه جرمی در داخل آن تولید نمی‌شود، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(نرخ ورودی جرم به حجم کنترل) - (نرخ خروجی جرم از حجم کنترل) + (نرخ تولید جرم) = 0 \quad (نرخ تجمع جرم در حجم کنترل) \quad (۲-۶-۳)$$



شکل ۳-۶-۲. حجم کنترل برای جریان از طریق یک کانال

حال یک حجم کنترل ثابت را در فضا در نظر می‌گیریم که در میدان جریان سیال قرار گرفته است (شکل ۲-۶-۴). میزان انتشار جرم از یک المان سطح dA در روی سطح کنترل برابر با $(\rho v)(dA \cos \alpha)$ ، است که در این رابطه $dA \cos \alpha$ تصویر سطح dA در جهت عمود بر بردار سرعت v و زاویه بین بردار سرعت v و بردار n عمود بر سطح dA بطرف خارج است. ρ دانسیته برحسب kg/m^3 می‌باشد. واحد کمیت ρv در سیستم SI، kg/s.m^2 است و شار یا سرعت جرمی (G) نامیده می‌شود.

با استفاده از جبر برداری می‌دانیم که $(\rho v)(dA \cos \alpha)$ یک کمیت اسکالر و یا حاصلضرب داخلی $\rho(v \cdot n)dA$ است. اگر از این کمیت روی کل سطح A انتگرال بگیریم، شدت جریان خالص جرم خروجی از سطح کنترل یا مقدار خالص جرم خارج شده از حجم کنترل V برحسب kg/s به دست خواهد آمد،

$$\int_A \rho(v \cdot n) dA = \int_A \rho v \cos \alpha dA = \int_A \rho v \cos \alpha dA \quad (2-6-4)$$

(مقدار خالص انتشار جرم از حجم کنترل)

باید توجه کرد که اگر جرم به حجم کنترل وارد شود، یا به عبارت دیگر جهت جریان روی سطح کنترل به طرف داخل باشد، چون $\alpha > 90^\circ$ و $\cos \alpha$ منفی است، بنابراین، مقدار خالص جرم در معادله (۲-۶-۴) منفی خواهد شد و جریان خالص جرم بطرف داخل خواهد بود. اگر $\alpha < 90^\circ$ باشد جریان خالص جرم به طرف خارج خواهد بود.

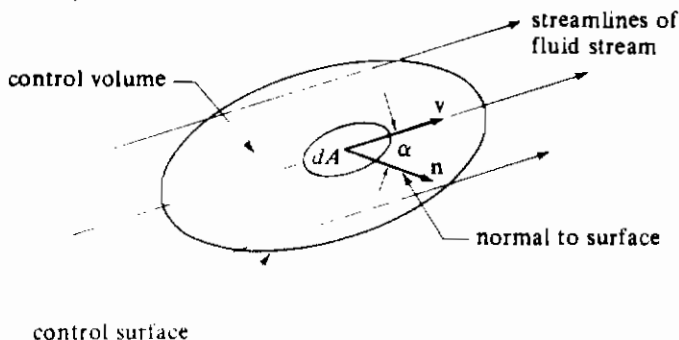
نرخ تجمع جرم در داخل حجم کنترل V به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \frac{dM}{dt} \quad (2-6-5)$$

(نرخ تجمع جرم در حجم کنترل)

در این رابطه M جرم سیال برحسب kg در داخل حجم کنترل است. با جایگزینی معادله (۲-۶-۴) و (۲-۶-۵) در معادله (۲-۶-۳) شکل عمومی، موازنه کلی جرم به دست می‌آید.

$$\int_A \rho(v \cdot n) dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \quad (2-6-6)$$



شکل ۲-۶-۴. جریان از طریق یک سطح دیفرانسیلی dA روی یک سطح کنترل

کاربرد معادله (۲-۶-۶) را برای یک حالت معمول از جریان پایدار یک بُعدی، در حالتی که مطابق با شکل ۲-۶-۳ کل جریان ورودی بر سطح A_1 و جریان خروجی بر سطح A_2 عمود می‌باشد، می‌توان نشان داد. وقتی که سرعت خروجی v_2 (شکل ۲-۶-۳) عمود بر A_2 است، زاویه α_2 که بین بردار عمود بر سطح کنترل و بردار سرعت قرار دارد برابر با صفر است و $\cos \alpha_2 = 1$. در این حالت v_1 به طرف داخل است و $\alpha_1 > \pi/2$ و در شرایط شکل ۲-۶-۳، زاویه α_1 برابر 180° است ($\cos \alpha_1 = -1$). چون α_2 برابر صفر و α_1 برابر 180° است، بنابراین، با استفاده از معادله (۲-۶-۴) داریم،

$$\iint_{A_1} v \rho \cos \alpha dA = \iint_{A_2} v \rho \cos \alpha_2 dA + \iint_{A_1} v \rho \cos \alpha_1 dA \quad (2-6-7)$$

$$= v_2 \rho_2 A_2 - v_1 \rho_1 A_1$$

در معادله (۲-۶-۵)، در حالت پایدار مقدار عبارت dm/dt برابر با صفر می‌شود و معادله (۲-۶-۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (2-6-2)$$

معادله بالا همان معادله (۲-۶-۲) است که قبلاً اثبات شد.

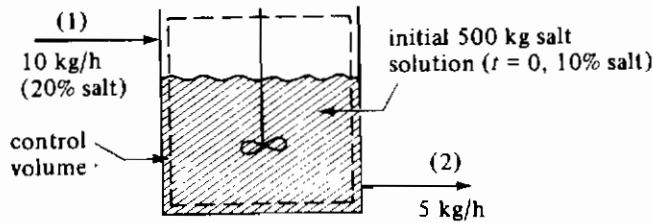
در شکل ۲-۶-۳ و معادلات (۲-۶-۳) تا (۲-۶-۷) به ترکیب جریانها توجه نداشتیم. این معادلات به راحتی برای موازنه کلی جرم یک جزء i در یک سیستم چند جزئی می‌تواند به کار رود. برای شرایط نشان داده شده در شکل ۲-۶-۳، معادلات (۲-۶-۵)، (۲-۶-۶) و (۲-۶-۷) را با یکدیگر ترکیب می‌کنیم و با اضافه کردن یک عبارت مربوط به تولید جرم رابطه‌ای به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$m_{i2} - m_{i1} + \frac{dM_i}{dt} = R_i \quad (2-6-8)$$

که در این رابطه، m_{i2} نرخ جریان جرمی جزء i که از حجم کنترل خارج می‌شود، و R_i نرخ تولید جزء i در حجم کنترل برحسب kg بر واحد زمان است (از شار نفوذ صرفنظر شده است). البته در برخی حالات $R_i = 0$ است و تولید جرم نداریم. غالباً معادله (۲-۶-۸) به صورت مولی به کار می‌رود.

مثال ۲-۶-۲ موازنه کلی جرم در تانک مجهز به همزن

تانکی محتوی 500 kg محلول نمک 10% است. در نقطه (۱) جریانی از آب نمک 20% با نرخ ثابت 10 kg/hr وارد حجم کنترل می‌شود (شکل ۲-۶-۵). شدت جریان خروجی در نقطه (۲) برابر با 5 kg/hr و ثابت است و تانک به طور کامل همزده می‌شود. رابطه‌ای به دست آورید که کسر وزنی نمک (w_A) را در تانک در زمان t بر حسب ساعت مشخص کند.



شکل ۲-۶-۵. حجم کنترل برای جریان در یک مخزن همزن دار برای مثال ۲-۶-۲

حل: ابتدا با استفاده از معادله (۲-۶-۷) موازنه کلی جرم را برای به دست آوردن جرم خالص خروجی از حجم کنترل، می نویسیم:

$$\iint_A v \rho \cos \alpha \, dA = m_2 - m_1 = 5 - 10 = -5 \text{ kg solution/h} \quad (2-6-9)$$

از معادله (۲-۶-۵) که در آن M جرم کل محلول موجود در حجم کنترل در زمان t است، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV = \frac{dM}{dt} \quad (2-6-5)$$

با جایگزینی معادلات (۲-۶-۵) و (۲-۶-۹) در معادله (۲-۶-۶) و سپس انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$-5 + \frac{dM}{dt} = 0 \quad (2-6-10)$$

$$\int_{M=500}^M dM = 5 \int_{t=0}^t dt \quad (2-6-11)$$

$$M = 5t + 500$$

معادله (۲-۶-۱۱)، کل جرم موجود در تانک (M) را به زمان t ربط می دهد.

در مرحله بعدی، موازنه را برای جزء نمک (A) می نویسیم، فرض می کنیم که w_A برابر با کسر وزنی نمک در تانک در زمان t و m_2 غلظت در جریان خروجی در زمان t باشد. مجدداً با استفاده از معادله (۲-۶-۷) برای جزء نمک داریم،

$$\iint_A v \rho \cos \alpha \, dA = (5)w_A - 10(0.20) = 5w_A - 2 \text{ kg salt/h} \quad (2-6-12)$$

با به کار بردن معادله (۲-۶-۵) برای موازنه نمک،

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \frac{d}{dt} (Mw_A) = \frac{M}{dt} \frac{dw_A}{dt} + w_A \frac{dM}{dt} \text{ kg salt/h} \quad (2-6-13)$$

با جایگذاری معادلات (۲-۶-۱۲) و (۲-۶-۱۳) در معادله (۲-۶-۶) نتیجه می‌شود،

$$5w_A - 2 + M \frac{dw_A}{dt} + w_A \frac{dM}{dt} = 0 \quad (2-6-14)$$

و با جایگذاری مقدار M از معادله (۲-۶-۱۱) در معادله (۲-۶-۱۴) و جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری و حل آن نسبت به w_A داریم:

$$5w_A - 2 + (500 + 5t) \frac{dw_A}{dt} + w_A \frac{d(500 + 5t)}{dt} = 0$$

$$5w_A - 2 + (500 + 5t) \frac{dw_A}{dt} + 5w_A = 0 \quad (2-6-15)$$

$$\int_{w_A=0.10}^{w_A} \frac{dw_A}{2 - 10w_A} = \int_{t=0}^t \frac{dt}{500 + 5t}$$

$$-\frac{1}{10} \ln \left(\frac{2 - 10w_A}{1} \right) = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{500 + 5t}{500} \right)$$

$$w_A = -0.1 \left(\frac{100}{100 + t} \right)^2 + 0.20 \quad (2-6-16)$$

توجه داشته باشید که معادله (۲-۶-۸) که برای جزء i است می‌توانست برای موازنه نمک با $R_i = 0$ به کار برده شود.

۲-۶D سرعت میانگین برای استفاده در معادله موازنه کلی جرم

در حل معادله (۲-۶-۷) فرض کردیم که سرعت‌های v_1 و v_2 در مقاطع ۱ و ۲ ثابت باشند. اگر سرعت در مقطع ثابت نباشد و در عرض سطح مقطع تغییر کند، سرعت میانگین یا سرعت توده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v_{av} = \frac{1}{A} \iint_A v dA \quad (2-6-17)$$

این رابطه برای سطحی است که بر روی آن سرعت (v) عمود بر A است و دانسیته (ρ) ثابت فرض می‌شود.

مثال ۳-۶-۲ تغییر سرعت در روی سطح کنترل و سرعت میانگین

هنگامی که یک سیال تراکم‌ناپذیر (ρ ثابت) از یک لوله با مقطع مدور به شعاع R عبور می‌کند، توزیع سرعت برای جریان آرام به صورت زیر است:

$$v = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2-6-18)$$

که در این رابطه، v_{\max} سرعت ماکزیمم در مرکز با $r = 0$ و v سرعت در شعاعی به فاصله r از مرکز است. رابطه‌ای برای سرعت میانگین v_{av} جهت استفاده در معادله موازنه کلی جرم، به دست آورید.

حل: سرعت میانگین به وسیله معادله (۲-۶-۱۷) بیان می‌شود. در دستگاه مختصات کارترین $dA = r dr d\theta$ برابر $dx dy$ است. اما با استفاده از مختصات قطبی که برای لوله مناسب‌تر است، $dA = r dr d\theta$ و $dA = r dr d\theta$ که θ در مختصات قطبی زاویه است. با جایگزینی معادله (۲-۶-۱۸) و $\Lambda = \pi R^2$ در معادله (۲-۶-۱۷) و انتگرال‌گیری از آن داریم:

$$\begin{aligned} v_{av} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr d\theta \\ &= \frac{v_{\max}}{\pi R^4} \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr d\theta \end{aligned} \quad (2-6-19)$$

$$= \frac{v_{\max}}{\pi R^4} (2\pi - 0) \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$$

$$v_{av} = \frac{v_{\max}}{2} \quad (2-6-20)$$

در این بحث موازنه‌های کلی یا ماکروسکوپی جرم مورد بررسی قرار گرفت، زیرا این موازنه‌ها را از خارج سیستم تشریح کردیم. در این بخش تعدادی از معادلات ارائه شده ممکن است واضح و بدیهی به نظر برسند. اما هدف توسعه روشهایی بود که در بخشهای بعدی مفید خواهند بود. همچنین در بخشهای بعدی موازنه‌های کلی انرژی و ممتوم نیز بحث خواهند شد. این موازنه‌های کلی جزئیات آنچه را که در داخل سیستم اتفاق می‌افتد به ما نمی‌گویند. در بخش ۹-۲ از موازنه پوستهای ممتوم برای به دست آوردن این جزئیات استفاده خواهد شد، که توزیع سرعت و اُفت فشار را به ما خواهد داد. برای مطالعه بیشتر جزئیات فرایندی که در داخل سیستم اتفاق می‌افتد، موازنه‌های دیفرانسیلی به جای موازنه پوستهای نوشته می‌شوند که در بخشهای ۶-۳ تا ۹-۳ بحث خواهند شد. این بخش‌ها در ارتباط با معادلات دیفرانسیل پیوستگی و انتقال ممتوم هستند. بخشهای ۶-۵ و ۷-۵ در مورد معادلات دیفرانسیل تغییر انرژی و جریان لایه مرزی و بخش ۵B-۷ در مورد معادلات دیفرانسیل پیوستگی برای یک مخلوط دو تایی است.

۲-۷ موازنه کلی انرژی

۲-۷A مقدمه

دومین خاصیتی که در موازنه‌های کلی مربوط به یک حجم کنترل در نظر گرفته می‌شود، انرژی است. همان طور که از اصل بقای جرم برای به دست آوردن معادله موازنه کلی جرم استفاده کردیم، اصل بقای انرژی را برای یک حجم کنترل ثابت در فضا به کار خواهیم برد. معادله بقای انرژی با قانون اول ترمودینامیک برای به دست آوردن معادله نهایی موازنه کلی انرژی ترکیب می‌شود. می‌توانیم قانون اول ترمودینامیک را به صورت زیر بنویسیم:

$$\Delta E = Q - W \quad (2-7-1)$$

که در این جا E کل انرژی به ازای واحد جرم سیال، Q گرمای جذب شده توسط واحد جرم سیال و W همه انواع کارهای انجام شده روی محیط توسط واحد جرم سیال است. در محاسبات، تمام عبارتهای معادله باید با واحدهای یکسانی مانند J/kg (SI)، Btu/lb_m یا $ft.lbf/lb_m$ (انگلیسی) بیان شوند. چون جرم بر اساس موقعیت، حرکت و یا حالت فیزیکی همواره انرژی با خود حمل می‌کند، لذا هر کدام از این انواع انرژی در معادله انرژی ظاهر خواهند شد. به علاوه ما می‌توانیم انرژی را از طریق مرزهای سیستم منتقل کنیم، بدون این که جرمی منتقل شده باشد.

۲-۷B به دست آوردن معادله موازنه کلی انرژی

ماهیت معادله موازنه برای یک کمیت ذخیره شدنی مانند انرژی مشابه معادله (۲-۶-۳) می‌باشد و برای یک حجم کنترل به صورت زیر است:

$$0 = \text{نرخ تجمع کمیت} + \text{نرخ ورودی کمیت} - \text{نرخ خروجی کمیت} \quad (2-7-2)$$

انرژی E موجود در داخل یک سیستم به سه صورت زیر است:

۱- انرژی پتانسیل (zg) به ازای واحد جرم سیال، انرژی موجود به دلیل موقعیت جرم در یک میدان ثقلی g می‌باشد، که در این جا z ارتفاع نسبی بر حسب متر از یک نقطه مرجع است. واحد zg در سیستم SI به صورت $m.m/s^2$ است. با ضرب و تقسیم کردن آن به kg این واحد می‌تواند به صورت $(m/kg).(kg.m/s^2)$ یا J/kg بیان شود. در سیستم واحدهای انگلیسی انرژی پتانسیل به صورت zg/g_c بر حسب $ft.lbf/lb_m$ می‌باشد.

۲- انرژی جنبشی ($v^2/2$) به ازای واحد جرم سیال، انرژی موجود به دلیل حرکت‌های انتقالی یا چرخشی

جرم است. که در اینجا v سرعت بر حسب m/s نسبت به مرز سیستم در یک نقطه مشخص است. در سیستم SI واحد $v^2/2$ به صورت J/kg است. در سیستم انگلیسی انرژی جنبشی به صورت $v^2/2g_c$ بر حسب $ft \cdot lb_f/lb_m$ می باشد.

۳- انرژی داخلی (U) به ازای واحد جرم سیال، از کل انرژی های دیگر موجود مانند انرژی چرخشی و ارتعاشی پیوندهای شیمیایی تشکیل می شود. واحدهای این نوع انرژی J/kg یا $ft \cdot lb_f/lb_m$ است. بنابراین کل انرژی واحد جرم سیال به صورت زیر است:

$$E = U + \frac{v^2}{2} + zg \quad (SI)$$

$$E = U + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{zg}{g_c} \quad (\text{English}) \quad (2-7-3)$$

نرخ تجمع انرژی در داخل حجم کنترل V در شکل ۴-۶-۲ برابر است با:

$$\text{نرخ تجمع انرژی در داخل حجم کنترل} = \frac{d}{dt} \iiint_V \left(U + \frac{v^2}{2} + zg \right) \rho \, dV \quad (2-7-4)$$

حال نرخ انرژی ورودی و خروجی همراه جرم را در حجم کنترل بررسی می کنیم. جرم وارد شده یا خارج شده از سیستم با خود انرژی جنبشی، پتانسیل و داخلی حمل می کند. به علاوه هنگامی که جرم به داخل یا خارج حجم کنترل جریان پیدا می کند، انرژی هم تبدیل می شود. سیال در جریان این ورود و خروج، کار خالص انجام می دهد. کار فشار-حجم مربوط به واحد جرم سیال به صورت pV است. معمولاً از کار برشی صرف نظر می شود. pV و U با استفاده از تعریف انتالپی (H) با هم ترکیب می شوند.

$$H = U + pV \quad (2-7-5)$$

بنابراین، کل انرژی که واحد جرم با خود حمل می کند، برابر با $(H + v^2/2 + zg)$ است.

به ازای یک سطح کوچک dA روی سطح کنترل (شکل ۴-۶-۲)، نرخ انرژی خروجی و ورودی برابر با $(H + v^2/2 + gz)(\rho v)(dA \cos \alpha)$ است، که در این جا $(dA \cos \alpha)$ سطح تصویر شده dA در جهت عمود بر بردار سرعت v و زاویه بین بردار بردار واحد عمود بر سطح (n) به طرف خارج است. حال از این کمیت روی کل سطح کنترل انتگرال می گیریم و به رابطه زیر می رسم،

$$\text{نرخ خالص انتشار از حجم کنترل} = \iint_A \left(H + \frac{v^2}{2} + zg \right) (\rho v) \cos \alpha \, dA \quad (2-7-6)$$

اکنون، کل انرژی همراه جرم در سیستم و انرژی ای که به وسیله جرم مرزهای سیستم را قطع می کند، در معادله موازنه انرژی، یعنی معادله (۲-۷-۲) در نظر گرفته شده است. حال انرژی گرمایی و

کار را که بدون نیاز به همراهی با جرم مرزهای سیستم را قطع می‌کنند به حساب می‌آوریم. q گرمای منتقل شده در واحد زمان است که به دلیل اختلاف دما مرز سیستم را قطع کرده و به سیال منتقل می‌شود. بنا به قرارداد گرمای جذب شده توسط سیستم مثبت است.

کار W که انرژی در واحد زمان است می‌تواند به دو صورت مشخص شود. کار خالص محوری (W_s) که می‌تواند به صورت چرخش یک محور که مرز سیستم را قطع کرده است مشخص شود و کار فشار - حجم که معمولاً در انتالپی در معادله $(2-7-6)$ منظور می‌شود. بنا به قرارداد، کار انجام شده توسط سیال روی محیط یعنی کار خروجی از سیستم مثبت است.

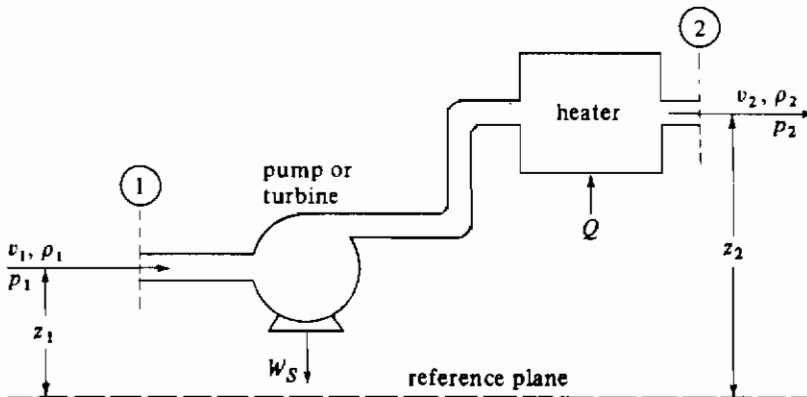
برای به دست آوردن معادله موازنه کلی انرژی، معادلات $(2-7-4)$ و $(2-7-6)$ را در معادله $(2-7-2)$ جایگزین می‌کنیم و معادله حاصل را با $q - W_s$ مساوی قرار می‌دهیم.

$$\iint_A \left(H + \frac{v^2}{2} + zg \right) (\rho v) \cos \alpha \, dA + \frac{\hat{c}}{\hat{c}t} \iiint_V \left(U + \frac{v^2}{2} + zg \right) \rho \, dV = q - W_s \quad (2-7-7)$$

2-7C معادله موازنه کلی انرژی برای سیستم با جریان پایدار

یک حالت خاص موازنه کلی یا ماکروسکوپی انرژی، یک سیستم پایدار با جریان یک بعدی در مرزهای سیستم است. این سیستم دارای یک ورودی، یک خروجی با تغییر ناچیز ارتفاع (z) ، دانسیته ρ و انتالپی ثابت H در مقاطع ورودی و خروجی می‌باشد. این حالت در شکل 2-7-1 نشان داده شده است. عبارت تجمع را در معادله $(2-7-7)$ مساوی صفر قرار داده و انتگرال می‌گیریم:

$$H_2 m_2 - H_1 m_1 + \frac{m_2 (v_2^3)_{av}}{2v_{2,av}} - \frac{m_1 (v_1^3)_{av}}{2v_{1,av}} + gm_2 z_2 - gm_1 z_1 = q - W_s \quad (2-7-8)$$



شکل 2-7-1. سیستم جریان پایدار برای یک سیال

در حالت پایدار، $m_1 = \rho_1 v_{1av} A_1 = m_2 = m$ است. برای این که معادله بر مبنای واحد جرم باشد، آن را بر m تقسیم می‌کنیم:

$$H_2 - H_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{(v_{2av}^2)}{v_{2av}} - \frac{(v_{1av}^2)}{v_{1av}} \right] + g(z_2 - z_1) = Q - W_s \quad (\text{SI}) \quad (2-7-9)$$

عبارت $(v_{2av}^2)/v_{2av}$ با $v_{2av}^2/2\alpha$ جایگزین می‌شود، که α ضریب تصحیح سرعت در انرژی جنبشی است و مساوی با $v_{2av}^2/(v_{2av}^2)$ می‌باشد. α برای جریانهای مختلف در لوله‌ها محاسبه شده است و برای جریان آرام برابر با $\frac{1}{2}$ و برای جریان مغشوش نزدیک به 1 است (بخش 2-VD را ببینید). بنابراین معادله (2-7-9) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$H_2 - H_1 + \frac{1}{2\alpha} (v_{2av}^2 - v_{1av}^2) + g(z_2 - z_1) = Q - W_s \quad (\text{SI}) \quad (2-7-10)$$

$$H_2 - H_1 + \frac{1}{2\alpha g_c} (v_{2av}^2 - v_{1av}^2) + \frac{g}{g_c} (z_2 - z_1) = Q - W_s \quad (\text{English})$$

تعدادی از ضرایب تبدیل که در این روابط باید به کار روند از ضمیمه A.1 به صورت زیر استخراج شده‌اند:

$$1 \text{ btu} = 778 / 17 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f = 10550.6 \text{ J} = 10550.6 \text{ kJ}$$

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f / \text{s} = 0.7457 \text{ kW}$$

$$1 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f / \text{lb}_m = 2/9800 \text{ J/kg}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$$

2-VD ضریب تصحیح سرعت در انرژی جنبشی (α)

۱- مقدمه: برای به دست آوردن معادله (2-7-8) لازم بود که از عبارت مربوط به انرژی جنبشی انتگرال بگیریم:

$$\text{انرژی جنبشی} = \iint_A \left(\frac{v^2}{2} \right) (\rho v) \cos \alpha \, dA \quad (2-7-11)$$

که در معادله (2-7-7) این انتگرال ظاهر شد. برای انجام این کار ابتدا فرض می‌کنیم که ρ ثابت باشد و $\cos \alpha = 1$ ، سپس صورت و مخرج را در $A v_{av}$ ضرب می‌کنیم که v_{av} سرعت میانگین است. یا در نظر گرفتن $m = \rho v_{av} A$ ، معادله (2-7-11) را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\rho}{2} \iint_A (v^3) \, dA = \frac{\rho v_{av} A}{2 v_{av} A} \iint_A (v^3) \, dA = \frac{m}{2 v_{av} A} \iint_A (v^3) \, dA \quad (2-7-12)$$

برای این که معادله بر مبنای واحد جرم باشد آن را بر m تقسیم می‌کنیم،

$$\left(\frac{1}{2 v_{av}} \right) \frac{1}{A} \iint_A (v^3) \, dA = \frac{(v^3)_{av}}{2 v_{av}} = \frac{v_{av}^2}{2\alpha} \quad (2-7-13)$$

که α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha = \frac{v_{av}^3}{(v^3)_{av}} \quad (2-7-14)$$

و $(v^3)_{av}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$(v^3)_{av} = \frac{1}{A} \iint_A (v^3) dA \quad (2-7-15)$$

سرعت موضعی v در یک مقطع از لوله، متغیر است. برای محاسبه $(v^3)_{av}$ ، و در نتیجه α بایستی معادله‌ای داشته باشیم که v را به صورت تابعی از موقعیت آن در سطح مقطع جریان بیان کند.

۲- جریان آرام: به منظور تعیین مقدار α برای جریان آرام، ابتدا معادلات (۲-۶-۱۸) و (۲-۶-۲۰) مربوط به جریان آرام را با هم ترکیب می‌کنیم تا v به صورت تابعی از موقعیت r به دست آید:

$$v = 2v_{av} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2-7-16)$$

با جانشین کردن معادله (۲-۷-۱۶) در معادله (۲-۷-۱۵) و این‌که $A = \pi R^2$ و $dA = r dr d\theta$ (مثال ۳-۶-۳ را ببینید) معادله (۲-۷-۱۵) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$(v^3)_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[2v_{av} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^3 r dr d\theta \quad (2-7-17)$$

$$= \frac{(2\pi)2^3 v_{av}^3}{\pi R^2} \int_0^R \frac{(R^2 - r^2)^3}{R^6} r dr = \frac{16v_{av}^3}{R^8} \int_0^R (R^2 - r^2)^3 r dr$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۲-۷-۱۷) و مرتب کردن آن داریم:

$$\begin{aligned} (v^3)_{av} &= \frac{16v_{av}^3}{R^8} \int_0^R (R^6 - 3r^2R^4 + 3r^4R^2 - r^6)r dr \\ &= \frac{16v_{av}^3}{R^8} \left(\frac{R^8}{2} - \frac{3}{4}R^8 + \frac{1}{2}R^8 - \frac{1}{8}R^8 \right) \\ &= 2v_{av}^3 \end{aligned} \quad (2-7-18)$$

با جایگزین کردن معادله (۲-۷-۱۸) در معادله (۲-۷-۱۷):

$$\alpha = \frac{v_{av}^3}{(v^3)_{av}} = \frac{v_{av}^3}{2v_{av}^3} = 0.50 \quad (2-7-19)$$

بنابراین برای جریان آرام مقدار α برای استفاده در جمله انرژی جنبشی معادله (۲-۷-۱۰) برابر ۰/۵ است.

۳- جریان مغشوش: برای جریان مغشوش نیاز به یک رابطه بین سرعت v و موقعیت می‌باشد. این رابطه تقریباً به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$v = v_{max} \left(\frac{R-r}{R} \right)^{1/7} \quad (2-7-20)$$

که در این رابطه ۲ فاصله شعاعی از مرکز است. این معادله در معادله (۲-۷-۱۵) جایگزین می‌گردد و معادله حاصل برای به دست آوردن مقدار $(v^3)_{av}$ انتگرال‌گیری می‌شود. سپس معادله (۲-۷-۲۰) در معادله (۲-۶-۱۷) قرار داده می‌شود و معادله حاصل برای به دست آوردن v_{av} و (v_{av}^3) انتگرال‌گیری می‌شود. با قرار دادن روابط $(v^3)_{av}$ و (v_{av}^3) در معادله (۲-۷-۱۴)، مقدار α برابر $0/945$ به دست می‌آید. (مسئله ۱-۷-۲ را ببینید). مقدار α برای جریان مغشوش از حدود $0/9$ تا $0/99$ تغییر می‌کند. در بیشتر حالات (بجز برای کارهای دقیق) مقدار α یک در نظر گرفته می‌شود.

۲-۷E کاربردهای معادله کلی موازنه انرژی

غالباً موازنه کلی انرژی، یعنی معادله (۲-۷-۱۰)، به شکلی که ارائه شد در هنگام تغییر قابل ملاحظه انتقالی یا انتقال گرمای زیاد به سیستم، به کار نمی‌رود. چون جملات انرژی جنبشی و پتانسیل معمولاً کوچک هستند و می‌توان از آنها صرف‌نظر نمود. در نتیجه، وقتی که گرمای زیادی به سیستم می‌رسد و یا دفع می‌شود و یا تغییر عمده انتقالی اتفاق می‌افتد، عموماً روشهای موازنه گرما که در بخش ۱-۷ بیان شد مورد استفاده قرار می‌گیرد. مثالهایی برای توضیح این مسأله و حالت‌های دیگر ارائه می‌شود.

مثال ۱-۷-۲ موازنه انرژی روی دیگ بخار

آب در $18/33^\circ\text{C}$ و $137/9\text{ kPa}$ از طریق یک لوله با سرعت میانگین $1/52\text{ m/s}$ وارد یک دیگ بخار می‌شود. بخار خروجی در ارتفاع $15/2\text{ m}$ بالاتر از محل ورود مایع در فشار $137/9\text{ kPa}$ و $148/9^\circ\text{C}$ با سرعت $9/14\text{ m/s}$ وارد خط خروجی می‌شود. در حالت پایدار چه مقدار گرما به ازای هر کیلوگرم بخار باید داده شود؟ جریان در هر دو لوله مغشوش است.

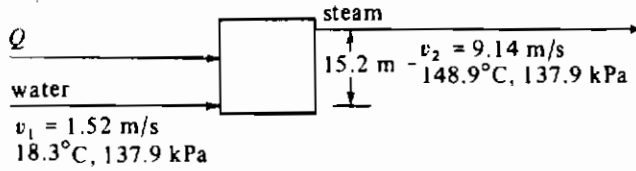
حل: شمای این فرایند در شکل ۲-۷-۲ نشان داده شده است. با مرتب کردن معادله (۲-۷-۱۰) و قرار دادن $\alpha = 1$ برای جریان مغشوش و $W_s = 0$ (کار خارجی نداریم)،

$$Q = (z_2 - z_1)g + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + (H_2 - H_1) \quad (2-7-21)$$

با حل معادله برای عبارتهای انرژی جنبشی،

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{1/52^2}{2} = 1/115\text{ J/kg}$$

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{9/14^2}{2} = 41/77\text{ J/kg}$$



شکل ۲-۷-۲. نمودار فرایند برای مثال ۲-۷-۱

با در نظر گرفتن ارتفاع z_1 در نقطه ۱ به عنوان سطح مبنا و $z_2 = 15/2 \text{ m}$ بنابراین:

$$z_2 g = 15/2 \times 9/80665 = 149/4 \text{ J/kg}$$

از جدول بخار بر حسب واحدهای SI در ضمیمه A.2، H_1 در $18/33^\circ \text{C}$ برابر با $76/97 \text{ kJ/kg}$ و H_2 برای بخار سوپرهیت در $148/9^\circ \text{C}$ برابر با $2771/4 \text{ kJ/kg}$ است و،

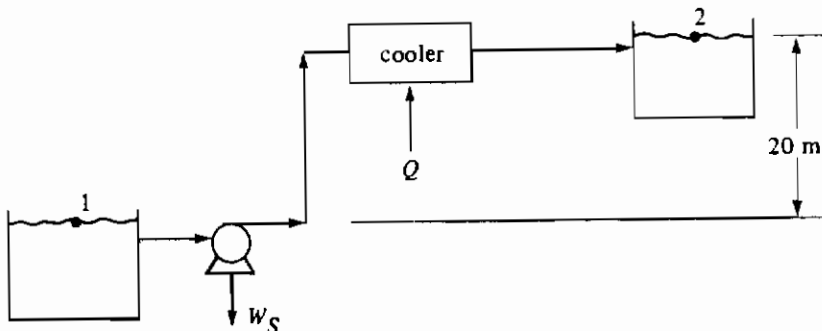
$$H_2 - H_1 = 2771/4 - 76/97 = 2694/4 \text{ kJ/kg} = 2/694 \times 10^6 \text{ J/kg}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله (۲-۷-۲۱):

$$Q = (149/4 - 0) + (2771/4 - 76/97) + 2/694 \times 10^6$$

$$= 189/75 + 2/694 \times 10^6 = 2/6942 \times 10^6 \text{ J/kg}$$

بنابراین مجموع جملات انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل $189/75 \text{ J/kg}$ است که در مقایسه با تغییرات انتالپی $2/694 \times 10^6 \text{ J/kg}$ ناچیز است. این مقدار انرژی ($189/75 \text{ J/kg}$) دمای آب مایع را حدود $0/453^\circ \text{C}$ بالا می‌برد که مقداری بسیار ناچیز است.



شکل ۲-۷-۳. نمودار فرایند برای موازنه انرژی در مثال ۲-۷-۲

مثال ۲-۷-۲ موازنه انرژی حول یک سیستم جریانی با یک پمپ

آب در 85°C قرار است در یک تانک بزرگ و عایق‌بندی شده در فشار اتمسفری مطابق شکل ۲-۷-۳ ذخیره شود. آب در شرایط پایدار از این تانک در نقطه ۱ با دبی $0.567\text{ m}^3/\text{min}$ پمپ می‌شود. موتور پمپ توانی به میزان $7/45\text{ kW}$ به پمپ می‌دهد. آب از یک مبدل حرارتی عبور می‌کند که 1408 kW انرژی در آنجا از دست می‌دهد. آب سرد شده در نقطه ۲ وارد تانک بزرگ و رویازی می‌شود که 20 متر بالاتر از تانک اول است. دمای نهایی آب وارد شده به تانک دوم را محاسبه کنید. از تغییرات انرژی جنبشی صرف‌نظر کنید، زیرا سرعت‌های اولیه و نهایی در تانکها مساوی صفر هستند.

حل: از ضمیمه ۸.۲، جدول بخار،

$$H_1(85^{\circ}\text{C}) = 355/9 \times 10^3 \text{ J/kg}, \rho_1 = \frac{1}{0.0010325} = 968/5 \text{ kg/m}^3$$

بنابراین در شرایط پایدار،

$$m_1 = m_2 = 0.567 \times 968/5 \times \frac{1}{60} = 9/152 \text{ kg/s}$$

همچنین $z_2 = 20\text{ m}$ ، $z_1 = 0$ و کار انجام شده به وسیله سیال W_s است. اما در این حالت این کار روی سیال انجام شده است و منفی است.

$$W_s = -(7/45 \times 10^3 \text{ J/s}) \times \left(\frac{1}{9/152} \text{ kg/s}\right) = -0.814 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

گرمای داده شده به سیال نیز منفی است، چون سیال گرما از دست می‌دهد و داریم،

$$Q = -(1408 \times 10^3 \text{ J/s}) \times \left(\frac{1}{9/152} \text{ kg/s}\right) = -153/8 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

با قرار دادن $0 = (v_1^2 - v_2^2)/2$ و جایگزین کردن در معادله $(2-7-10)$:

$$\begin{aligned} H_2 - 355/9 \times 10^3 + 0 + 9/80665 \times (20 - 0) \\ = (-153/8 \times 10^3) - (-0.814 \times 10^3) \end{aligned}$$

پس از حل، $H_2 = 202/71 \times 10^3 \text{ J/kg}$. با توجه به جدول بخار این انتالپی متناظر با دمای $^{\circ}\text{C}$

$t_2 = 48/41$ می‌باشد. توجه کنید که در این مثال W_s و $g(z - z_1)$ در مقایسه با Q خیلی کوچک هستند.

مثال ۳-۷-۲ موازنه انرژی در کالریمتر جریانی

یک کالریمتر جریانی برای اندازه‌گیری انتالپی بخار آب به کار می‌رود. کالریمتر که یک لوله عایق شده افقی است، از یک گرم‌کن الکتریکی که در سیال در حال جریان در حالت پایدار غوطه‌ور شده است تشکیل می‌شود. آب مایع در 0°C با دبی 0.3964 kg/min در نقطه ۱ وارد کالریمتر می‌شود. مایع به طور کامل توسط گرم‌کن تبخیر می‌شود، که توان گرمایی منتقل شده $19/63 \text{ kW}$ است و بخار آب در نقطه ۲ با دمای 250°C و فشار مطلق 150 kPa خارج می‌گردد. اگر انتالپی مایع در 0°C برابر صفر در نظر گرفته شود، انتالپی خروجی را محاسبه کنید. از تغییرات انرژی جنبشی صرف‌نظر می‌شود. (فرض می‌شود که اثر فشار روی انتالپی مایع ناچیز است).

حل: برای این حالت $W_s = 0$ است. چون هیچگونه کار محوری بین نقاط ۱ و ۲ وجود ندارد. همچنین،

$$g(z_1 - z_2) = 0 \quad \text{و} \quad (v_2^2/2\alpha - v_1^2/2\alpha) = 0$$

در حالت پایدار: $m_1 = m_2 = \frac{0.3964}{60} = 6/607 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$. چون گرما به سیستم داده شده است،

$$Q = + \frac{19/63 \text{ kJ/s}}{6/607 \times 10^{-3} \text{ kg/s}} = 2971 \text{ kJ/kg}$$

مقدار $H_1 = 0$ است، معادله (۲-۷-۱۰) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_2 - H_1 + 0 + 0 = Q - 0$$

معادله نهایی برای کالریمتر به صورت زیر است:

$$H_2 = Q + H_1 \quad (2-7-22)$$

با جانشین کردن $Q = 2971 \text{ kJ/kg}$ و $H_1 = 0$ در معادله (۲-۷-۲۲) در 250°C و 150 kPa ، $H_2 = 2971 \text{ kJ/kg}$ خواهد بود که نزدیک به مقدار $2972/7 \text{ kJ/kg}$ در جدول بخار است.

۲-۷F موازنه کلی انرژی مکانیکی

نوع مناسبتری از موازنه انرژی برای سیالات در حال جریان، خصوصاً مایعات، شکل اصلاح شده‌ای از معادله کلی انرژی است که در ارتباط با انرژی مکانیکی است. مهندسان اغلب با این گونه خاص از انرژی

که انرژی مکانیکی نامیده می‌شود سر و کار دارند، که شامل کار، انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و قسمت کار جریانی معادله انتالپی می‌باشد. انرژی مکانیکی صورتی از انرژی است که یا به صورت کار است و یا می‌تواند مستقیماً به کار تبدیل شود. جملات دیگر در معادله موازنه انرژی (۲-۷-۱۰)، یعنی جملات گرما و انرژی داخلی، بدلیل قانون دوم ترمودینامیک و راندمان تبدیل که به دما بستگی دارد، براحتی به کار تبدیل نمی‌شوند. جملات انرژی مکانیکی چنین محدودیتی ندارند و می‌توانند تقریباً به‌طور کامل به کار تبدیل شوند. انرژی تبدیل شده به گرما یا انرژی داخلی کار تلف شده یا اتلاف انرژی مکانیکی است که ناشی از مقاومت اصطکاکی در مقابل جریان است.

بهتر است یک موازنه انرژی بر حسب اتلاف ΣF که مجموع همه افت‌های اصطکاکی برای واحد جرم است بنویسیم. برای جریان پایدار، هنگامی که واحد جرم سیال از ورودی تا خروجی را طی می‌کند، کار انجام شده بوسیله سیال، W' به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV - \Sigma F \quad (\Sigma F > 0) \quad (2-7-23)$$

این کار W' با W در معادله (۲-۷-۱) متفاوت است، چون شامل انرژی جنبشی و پتانسیل هم می‌شود. قانون اول ترمودینامیک برای این حالت که در آن ΔE تبدیل به ΔU می‌شود، به صورت زیر است:

$$\Delta U = Q - W' \quad (2-7-24)$$

معادله تعریف انتالپی (معادله (۲-۷-۵))، می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\Delta H = \Delta U + \Delta pV = \Delta U + \int_{V_1}^{V_2} p \, dV + \int_{p_1}^{p_2} V \, dp \quad (2-7-25)$$

با جایگزین کردن معادله (۲-۷-۲۳) در معادله (۲-۷-۲۴) و ترکیب معادله حاصل با معادله (۲-۷-۲۵) داریم:

$$\Delta H = Q + \Sigma F + \int_{p_1}^{p_2} V \, dp \quad (2-7-26)$$

نهایتاً، معادله (۲-۷-۲۶) را در معادله (۲-۷-۱۰) با در نظر گرفتن $V = 1/\rho$ قرار می‌دهیم تا معادله کلی موازنه انرژی مکانیکی به صورت زیر به دست آید:

$$\frac{1}{2\alpha} [v_2^2 \rho v - v_1^2 \rho v] + g(z_2 - z_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + \Sigma F + W_s = 0 \quad (2-7-27)$$

در سیستم واحدهای انگلیسی، عبارتهای انرژی جنبشی و پتانسیل در معادله (۲-۷-۲۷) بر g_c تقسیم می‌شوند. مقدار عددی انتگرال در معادله (۲-۷-۲۷) بستگی به معادله حالت سیال و مسیر فرایند دارد. اگر سیال یک مایع تراکم‌ناپذیر باشد، مقدار انتگرال برابر با $(p_2 - p_1)/\rho$ می‌شود و معادله (۲-۷-۲۷) را

می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{1}{2\alpha} (v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \sum F + W_S = 0 \quad (2-7-28)$$

مثال ۲-۷-۴ موازنه انرژی مکانیکی برای یک سیستم پمپاژ

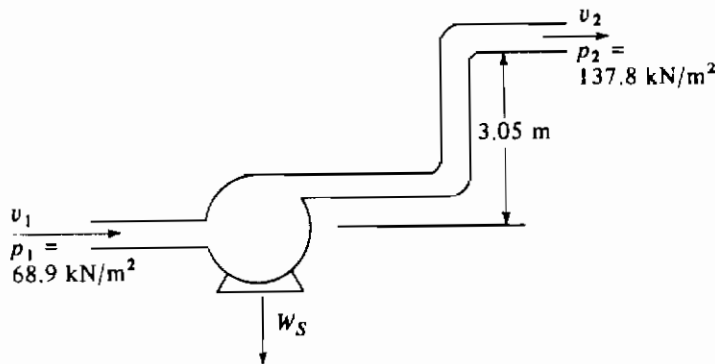
آب با دانسیته 998 kg/m^3 با دبی جرمی یکنواخت در یک لوله با قطر ثابت جریان دارد. فشار مطلق سیال در ورود به لوله 68.9 kN/m^2 می‌باشد که این لوله به پمپ وصل می‌شود و پمپ انرژی‌ای معادل $155/4 \text{ J/kg}$ را به سیال در حال جریان در لوله می‌دهد. قطر لوله خروجی پمپ با لوله ورودی آن یکسان است. مقطع خروجی لوله 3.05 m ، بالاتر از ورودی آن و فشار مطلق خروجی 137.8 kN/m^2 می‌باشد. عدد رینولدز در لوله بالاتر از 4000 است. افت اصطکاکی $\sum F$ را در سیستم به دست آورید.

حل: ابتدا شکلی از سیستم رسم می‌شود (شکل ۲-۷-۴) و انرژی مکانیکی که به سیال داده شده است ($155/4 \text{ J/kg}$) در آن منظور می‌گردد. چون کار انجام شده به وسیله سیال مثبت است. بنابراین، $W_S = -155/4$

با در نظر گرفتن $z_1 = 0$ به عنوان ارتفاع مبنا، $z_2 = 3.05 \text{ m}$ است. چون قطر لوله ثابت است بنابراین، $v_1 = v_2$ همچنین برای جریان مغشوش $\alpha = 1$ است:

$$\frac{1}{2 \times 1} (v_2^2 - v_1^2) = 0$$

$$z_2 g = 3.05 \text{ m} \times 9.806 \text{ m/s}^2 = 29.9 \text{ J/kg}$$



شکل ۲-۷-۴. نمودار فرایند مثال ۲-۷-۴

چون مایع می تواند تراکم ناپذیر فرض شود، معادله (۲-۷-۲۸) می تواند به کار رود،

$$\frac{P_1}{\rho} = \frac{68/9 \times 1000}{998} = 69 \text{ J/kg}$$

$$\frac{P_2}{\rho} = \frac{137/8 \times 1000}{998} = 138 \text{ J/kg}$$

با به کار بردن معادله (۲-۷-۲۸) و حل آن نسبت به ΣF (آفتهای اصطکاکی)،

$$\Sigma F = -W_s + \frac{1}{2\alpha} (v_1^2 - v_2^2) + g(z_1 - z_2) + \frac{P_1 - P_2}{\rho} \quad (2-7-29)$$

با جایگزینی مقادیر معلوم و حل معادله نسبت به آفتهای اصطکاکی

$$\Sigma F = -(-155/4) + 0 - 29/9 + 69 - 138 = 56/5 \text{ J/kg} \quad (18/9 \text{ ft.lbf/lbm})$$

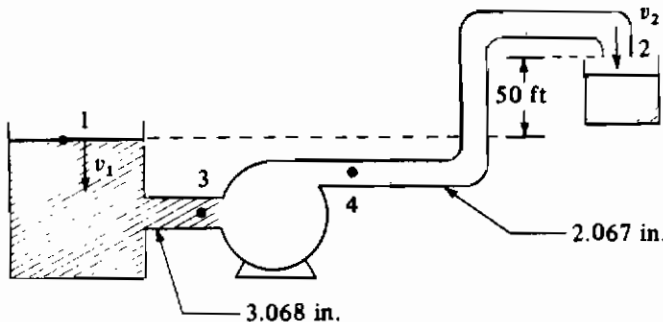
مثال ۲-۷-۵ توان پمپ در سیستم جریانی

یک پمپ محلول مایعی با دانسیته $114/8 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ را از یک تانک با سطح مقطع بزرگ از طریق لوله‌ای به قطر $3/068 \text{ in}$ مکش می کند و در تانک روباز دیگری در ارتفاع بالاتر تخلیه می کند. قطر لوله خروجی پمپ $2/067 \text{ in}$ است. انتهای لوله خروجی 50 ft بالاتر از سطح مایع در تانک اول است. آفت اصطکاکی در کل سیستم برابر 10 ft.lbf/lbm است. در صورتی که راندمان پمپ 65% باشد فشار خروجی پمپ و توان پمپ چقدر است؟ جریان مغشوش است.

حل: ابتدا شکلی از سیستم رسم می شود (شکل ۲-۷-۵). معادله (۲-۷-۲۸) در این جا استفاده خواهد شد. جمله W_s در این معادله عبارت است از:

$$W_s = -\eta W_p \quad (2-7-30)$$

که در این جا $-W_s$ انرژی مفید مکانیکی که به وسیله پمپ به سیال داده شده یا کار خالص مکانیکی، η راندمان پمپ و W_p کار انجام شده توسط پمپ است.



شکل ۲-۷-۵. نمودار فرایند مثال ۲-۷-۵

از ضمیمه ۸.۵، سطح مقطع لوله‌ای به قطر ۳/۰۶۸ in برابر $۰/۰۵۱۳۴ \text{ ft}^2$ و سطح مقطع لوله‌ای به قطر ۲/۰۶۷ in برابر $۰/۰۲۳۳ \text{ ft}^2$ است. بنابراین شدت جریان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{شدت جریان} = \left(\frac{۶۹}{۱ \text{ min}} \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) \times \left(\frac{۱ \text{ min}}{۶۰ \text{ s}}\right) \times \left(\frac{۱ \text{ ft}^3}{۷/۴۸۱ \text{ gal}}\right) = ۰/۱۵۳۹ \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$v_2 = \left(۰/۱۵۳۹ \frac{\text{ft}^3}{\text{s}}\right) \left(\frac{۱}{۰/۰۲۳۳ \text{ ft}^2}\right) = ۶/۶۱ \text{ ft/s}$$

$v_1 = ۰$ چون تانک خیلی بزرگ است، بنابراین $v_1^2/2g_c = ۰$. فشار $p_1 = ۱ \text{ atm}$ و $p_2 = ۱ \text{ atm}$ است و همچنین $\alpha = ۱$ است چون جریان مغشوش می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = ۰$$

$$\frac{v_2^2}{2g_c} = \frac{۶/۶۱^2}{۲ \times ۳۲/۱۷۴} = ۰/۶۷۸ \text{ ft.lbf/lb}_m$$

با در نظر گرفتن $z_1 = ۰$ داریم:

$$z_2 \frac{g}{g_c} = ۵۰ \times \frac{۳۲/۱۷۴}{۳۲/۱۷۴} = ۵۰ \text{ ft.lbf/lb}_m$$

با به کار بردن معادله (۲۸-۴-۲) و حل آن نسبت به W_s و جایگزینی مقادیر معلوم نتیجه می‌شود:

$$W_s = z_1 \frac{g}{g_c} - z_2 \frac{g}{g_c} + \frac{v_1^2}{2g_c} - \frac{v_2^2}{2g_c} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} - \Sigma F$$

$$= ۰ - ۵۰ + ۰ - ۰/۶۷۸ + ۰ - ۱۰ = -۶۰/۶۷۸ \text{ ft.lbf/lb}_m$$

با به کار بردن معادله (۳۰-۷-۲) و حل آن نسبت به W_p ،

$$W_p = -\frac{W_s}{\eta} = \frac{۶۰/۶۷۸}{۰/۶۵} = ۹۳/۳ \text{ ft.lbf/lb}_m$$

$$\text{شدت جریان جرمی} = ۰/۱۵۳۹ \text{ ft}^3/\text{s} \times ۱۱۴/۸ \text{ lb}_m/\text{ft}^3 = ۱۷/۶۵ \text{ lb}_m/\text{s}$$

$$\text{توان پمپ} = ۱۷/۶۵ \text{ lb}_m/\text{s} \times ۹۳/۳ \text{ ft.lbf/lb}_m \times \frac{۱ \text{ hp}}{۵۵۰ \text{ ft.lbf/s}} = ۳ \text{ hp}$$

برای محاسبه فشار خروجی پمپ معادله (۲۸-۷-۲) باید بین ورودی و خروجی پمپ نوشته

شود (بین نقاط ۳ و ۴ در شکل)،

$$v_3 = 0.1539 \text{ ft}^3/\text{s} \times \frac{1}{0.5134 \text{ ft}^2} = 3 \text{ ft/s}$$

$$v_4 = v_3 = 6/61 \text{ ft/s}$$

چون اختلاف ارتفاع بین ورودی و خروجی پمپ ناچیز است از آن صرفنظر می‌شود. با نوشتن معادله (۲-۷-۲۸) بین نقاط ۳ و ۴ و جایگزینی مقادیر معلوم ($\Sigma F = 0$) این پارامتر فقط برای لوله‌هاست) نتیجه می‌شود،

$$\frac{p_4 - p_3}{\rho} = z_4 \frac{g}{g_c} - z_3 \frac{g}{g_c} + \frac{v_3^2}{2g_c} - \frac{v_4^2}{2g_c} - W_s - \Sigma F \quad (2-7-31)$$

$$= 0 - 0 + \frac{3^2}{2 \times 32/174} - \frac{6/61^2}{2 \times 32/174} + 60/678 - 0$$

$$= 0 - 0 + 0.14 - 0.678 + 60/678 = 60/14 \text{ ft.lbf/lb}_m$$

$$p_4 - p_3 = 60/14 \text{ ft.lbf/lb}_m \times 114/8 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 \times \frac{1}{144 \text{ in}^2/\text{ft}^2}$$

$$= 48 \text{ lbf/in}^2 \quad (331 \text{ kPa}) \quad (\text{فشار ایجاد شده توسط پمپ})$$

۲-۷G معادله برنولی برای موازنه انرژی مکانیکی

در حالت خاصی که انرژی مکانیکی نداریم ($W_s = 0$) و اصطکاک هم وجود ندارد ($\Sigma F = 0$)، معادله (۲-۷-۲۸) تبدیل به معادله برنولی، (معادله (۲-۷-۳۲))، برای جریان مغشوش می‌شود که برای بحثهای بعدی از اهمیت زیادی برخوردار است.

$$z_1 \theta + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = z_2 \theta + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad (2-7-32)$$

این معادله بسیاری از حالات مهم عملی را پوشش می‌دهد و غالباً همراه با معادله موازنه جرم (۲-۶-۲) برای حالت پایدار به کار می‌رود.

$$m = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (2-6-2)$$

چند مثال از کاربرد این معادله در پی می‌آید.

مثال ۲-۷-۶ شدت جریان با استفاده از اندازه‌گیری فشار

مایعی با دانسیته ثابت ρ kg/m^۳ در یک لوله با مقطع A_1 m^۲ در فشار p_1 N/m^۲ و سرعت نامعلوم v_1 m/s در جریان است. مقطع لوله به‌طور تدریجی به A_2 m^۲ کاهش یافته و فشار آن به p_2 می‌رسد. با فرض این‌که افت اصطکاکی در سیستم وجود ندارد و در صورتی که اختلاف فشار $p_1 - p_2$ معلوم باشد سرعت‌های v_1 و v_2 را به دست آورید.

حل: در شکل ۲-۷-۶ شمایی از سیستم همراه با فشار سنج‌هایی که فشارهای نقاط ۱ و ۲ را اندازه‌گیری می‌نمایند نشان داده شده است. با توجه به معادلهٔ پیوستگی (۲-۶-۲) برای دانسیته ثابت $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} \quad (2-7-33)$$

با توجه به عبارتهای موجود در معادلهٔ برنولی (معادلهٔ (۲-۷-۳۲))، برای یک لولهٔ افقی،

$$z_1 = z_2 = 0$$

سپس با جایگذاری معادلهٔ (۲-۷-۳۳) به جای v_2 در معادلهٔ برنولی داریم:

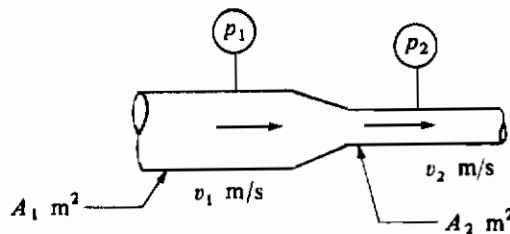
$$0 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = 0 + \frac{v_1^2 A_1^2 / A_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad (2-7-34)$$

و با مرتب کردن آن:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2 [(A_1/A_2)^2 - 1]}{2} \quad (2-7-35)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho} \frac{2}{[(A_1/A_2)^2 - 1]}} \quad (\text{SI}) \quad (2-7-36)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho} \frac{2g_c}{[(A_1/A_2)^2 - 1]}} \quad (\text{English})$$



شکل ۲-۷-۶. نمودار فرایند مثال ۲-۷-۶

اگر همان روش را برای به دست آوردن v_2 انجام دهیم نتیجه می شود،

$$v_2 = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho} \frac{2}{1 - (A_2/A_1)^2}} \quad (2-7-37)$$

مثال ۲-۷-۷ شدت جریان خروجی از نازل در یک تانک

سیال داخل یک تانک بزرگ از طریق یک نازل با سطح مقطع A_2 که در جداره تانک قرار گرفته است به محیط تخلیه می شود و سطح آزاد سیال در تانک H متر بالاتر از خط مرکزی نازل است. سرعت v_2 سیال در نازل و دبی حجمی سیال خروجی را در صورتی که اصطکاک وجود نداشته باشد محاسبه کنید؟

حل: فرایند در شکل ۲-۷-۷ نشان داده شده است. نقطه (۱) در داخل مایع در محل ورودی نازل و نقطه (۲) در خروجی نازل در نظر گرفته شده است. چون A_1 در مقایسه با A_2 خیلی بزرگ است، $v_1 = 0$. فشار p_1 بزرگتر از یک اتمسفر ($101/3 \text{ kN/m}^2$) است، چون در این نقطه سیال دارای هد برابر $H \text{ m}$ است. فشار p_2 که در خروجی نازل است برابر 1 atm است.

با در نظر گرفتن نقطه (۲) بعنوان سطح مبنا، $z_2 = 0$ و $z_1 = 0 \text{ m}$ و با مرتب کردن معادله

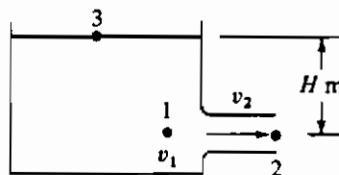
$$z_1 g + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = z_2 g + \frac{v_2^2}{2} \quad (2-7-38)$$

با جایگزینی مقادیر معلوم،

$$0 + 0 + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = 0 + \frac{v_2^2}{2} \quad (2-7-39)$$

و حل معادله نسبت به v_2 ،

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad \text{m/s} \quad (2-7-40)$$



شکل ۲-۷-۷. نمودار جریان نازل در مثال ۲-۷-۷

چون $p_3 = p_2 = 1 \text{ atm}$ و $p_1 - p_3 = H\rho g$ بنابراین،

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \quad \text{m} \quad (2-7-41)$$

که در این جا H هد مایع با دانسیته ρ است. بنابراین معادله (۲-۴-۴۰) به صورت زیر نوشته می شود:

$$v_2 = \sqrt{2gH} \quad (2-7-42)$$

دبی حجمی جریان برابر است با،

$$\text{flow rate} = v_2 A_2 \quad \text{m}^3/\text{s} \quad (2-7-43)$$

برای روشن شدن این مطلب که نقاط متفاوتی می توانند برای نوشتن موازنه انرژی در نظر گرفته شوند، نقاط ۲ و ۳ را انتخاب می کنیم و معادله (۲-۷-۳۲) را برای آنها می نویسیم،

$$z_2 g + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2 - p_3}{\rho} = z_3 g + \frac{v_3^2}{2} \quad (2-7-44)$$

چون $p_3 = p_2 = 1 \text{ atm}$ ، $v_3 = 0$ و $z_2 = 0$ است، بنابراین:

$$v_2 = \sqrt{2gz_3} = \sqrt{2gH} \quad (2-7-45)$$

۲-۸ موازنه کلی ممتوم

۲-۸۸ به دست آوردن معادلات کلی

موازنه ممتوم می تواند برای حجم کنترل نشان داده شده در شکل (۲-۶-۳) نوشته شود که تا حدی مشابه با معادله موازنه کلی جرم است. ممتوم در مقایسه با جرم و انرژی یک کمیت برداری است. بردار ممتوم خطی کل (P) برای یک جسم متحرک با جرم کل M که با سرعت v حرکت می کند، به صورت زیر است:

$$P = Mv \quad (2-8-1)$$

عبارت Mv ممتوم این جرم متحرک است که در یک موقعیت خاص در حجم کنترل (شکل (۲-۶-۴))، فرار گرفته است. واحد Mv در سیستم SI به صورت kg.m/s است.

با شروع از قانون دوم نیوتن، معادله انتگرالی موازنه ممتوم را برای حالت ممتوم خطی به دست خواهیم آورد. ممتوم زاویه ای در اینجا مورد بحث قرار نخواهد گرفت. قانون دوم نیوتن به این صورت بیان می شود: میزان تغییرات زمانی ممتوم یک سیستم مساوی با مجموع کل نیروهای

اعمال شده بر سیستم است و در جهت نیروی خالص می باشد.

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (2-8-2)$$

که در این جا F نیرو است؛ در سیستم SI، F بر حسب نیوتن (N) و $1 \text{ kg.m/s}^2 = 1 \text{ N}$ است. توجه کنید که در سیستم SI به g نیازی نیست، اما در سیستم انگلیسی لازم است.

معادله بقای ممتوم برای یک حجم کنترل به صورت زیر است،

$$\text{نرخ ممتوم خروجی از حجم کنترل} = \text{برآیند نیروهای عمل کننده بر حجم کنترل} \quad (2-8-3)$$

$$\text{نرخ تجمع ممتوم در حجم کنترل} + \text{نرخ ممتوم ورودی به حجم کنترل} -$$

این رابطه به همان شکل معادله کلی موازنه جرم (۲-۶-۳) است و مجموع نیروها نیز همان عبارت نرخ تولید است. بنابراین ممتوم یک مقدار ثابت نیست، چون به وسیله نیروهای خارجی اعمال شده بر سیستم تولید می شود. اگر نیروهای خارجی وجود نداشته باشند ممتوم مقدار ثابتی می شود.

با استفاده از حجم کنترل نشان داده شده در شکل (۲-۶-۴)، عبارتهای مختلف در معادله (۲-۸-۳) را ارزیابی خواهیم کرد که روشهای به کار برده شده بسیار مشابه با روشهای به دست آوردن معادله موازنه کلی جرم است. برای یک المان روی سطح کنترل به مساحت dA می توانیم بنویسیم:

$$\text{نرخ انتشار ممتوم} = \rho v(dA \cos \alpha) \quad (2-8-4)$$

توجه کنید که $(\rho v)(dA \cos \alpha)$ مشخص کننده نرخ ورود و خروج جرم است که $dA \cos \alpha$ تصویر سطح dA در جهت عمود بر بردار سرعت v و α زاویه بین بردار سرعت v و بردار عمود بر سطح n و به طرف خارج است. حاصلضرب معادله (۲-۸-۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho v(dA \cos \alpha) = \rho v(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-8-5)$$

با انتگرال گیری روی کل سطح کنترل A

$$\text{انتشار خالص ممتوم از حجم کنترل} = \iint_A \rho v \cos \alpha dA = \iint_A \rho v(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-8-6)$$

دو عبارت اول سمت راست معادله (۲-۸-۳) نشان دهنده انتشار خالص^(۱) ممتوم است.

به طور مشابه با معادله (۲-۶-۵)، نرخ تجمع ممتوم خطی در داخل حجم کنترل V برابر است با:

$$\text{نرخ تجمع ممتوم در حجم کنترل} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v dV \quad (2-8-7)$$

با جایگزینی معادلات (۲-۸-۲) و (۲-۸-۶) و (۲-۸-۷) در معادله (۲-۸-۳)، معادله موازنه کلی ممتوم خطی برای یک حجم کنترل به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\sum \mathbf{F} = \iint_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV \quad (2-8-8)$$

باید توجه داشته باشید که $\sum \mathbf{F}$ ممکن است در تمام جهت‌ها یک مؤلفه داشته باشد و \mathbf{F} نیرویی است که محیط بر سیال داخل حجم کنترل اعمال می‌کند. چون معادله (۲-۸-۸) یک معادله برداری است، می‌توانیم آن را در سه جهت x ، y ، z بنویسیم:

$$\sum F_x = \iint_A v_x \rho v \cos \alpha dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_x dV \quad (\text{SI}) \quad (2-8-9)$$

$$\sum F_x = \iint_A v_x \frac{\rho}{g_c} v \cos \alpha dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{\rho}{g_c} v_x dV \quad (\text{English})$$

$$\sum F_y = \iint_A v_y \rho v \cos \alpha dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_y dV \quad (2-8-10)$$

$$\sum F_z = \iint_A v_z \rho v \cos \alpha dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_z dV \quad (2-8-11)$$

عبارت نیرو ($\sum F_x$) در معادله (۲-۸-۹) ترکیبی از چند نیروی مختلف است. این نیروها به صورت زیر هستند:

۱- نیروی بدنه‌ای: نیروی بدنه‌ای F_{xg} ، نیروی ایجاد شده در جهت x در اثر تاثیر ثقل روی کل جرم M موجود در حجم کنترل است. این نیرو (F_{xg}) برابر با $M \cdot g_x$ است. اگر محور x در جهت افق باشد این نیرو برابر با صفر است.

۲- نیروی فشاری: نیروی F_{xp} ، نیروی در جهت x و به دلیل نیروهای فشاری وارد بر سطح سیال می‌باشد. وقتی سیال سطح کنترل را قطع می‌کند، فشار بطرف داخل و عمود بر سطح در نظر گرفته می‌شود. در بعضی از حالات ممکن است قسمتی از سطح کنترل جامد باشد، این دیواره داخل سطح کنترل قرار می‌گیرد. بنابراین نیروی فشاری F_{xp} ناشی از فشار وارد شده بر این دیواره خواهد بود که به عنوان مثال می‌تواند فشار اتمسفری باشد. اگر از فشار نسبی استفاده شود انتگرال فشار ثابت خارجی روی کل سطح خارجی خودبخود حذف می‌شود.

۳- نیروی اصطکاک: وقتی که سیال در حال جریان است، یک نیروی تنش یا نیروی اصطکاک F_{xs} در جهت x وجود دارد که وقتی مرز حجم کنترل، بین دیواره و سیال قرار دارد، به وسیله دیواره جامد به

سیال اعمال می‌شود. در بیشتر حالات این نیروی اصطکاکی در مقایسه با نیروهای دیگر ناچیز است و از آن صرف‌نظر می‌شود.

۴- نیروی سطح جامد: در مواقعی که سطح کنترل از جامد عبور می‌کند، نیروی R_x وجود دارد که R_x مؤلفه در جهت x برآیند نیروهایی است که در آن نقطه بر حجم کنترل عمل می‌کنند. این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که حجم کنترل مثلاً قسمتی از یک لوله باشد که سیال در آن جریان دارد. این نیرو توسط سطح جامد بر سیال اعمال می‌شود.

عبارت نیرو در معادله (۲-۸-۹) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\sum F_x = F_{xg} + F_{xp} + F_{xs} + R_x \quad (2-8-12)$$

معادلات مشابهی برای جهت‌های y و z می‌توانند نوشته شوند. بنابراین معادله (۲-۸-۹) در جهت x به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{xg} + F_{xp} + F_{xs} + R_x \\ &= \iint_A v_x \rho v \cos \alpha \, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_x \, dV \end{aligned} \quad (2-8-13)$$

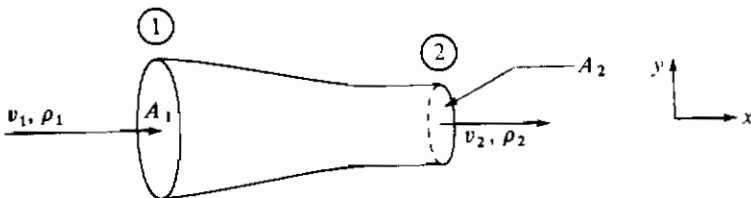
۲-۸۱۳ معادله کلی موازنه ممنتوم برای سیستم جریانی در یک جهت

یکی از کاربردهای معمول معادله موازنه کلی ممنتوم، مربوط به بخشی از یک کانال است که محور آن در جهت x قرار دارد. فرض می‌شود سیال در حالت پایدار در حجم کنترل نشان داده شده در شکل (۲-۶-۳) در جریان است. معادله (۲-۸-۱۳) وقتی که $v = v_x$ باشد در جهت x به صورت زیر است،

$$\sum F_x = F_{xg} + F_{xp} + F_{xs} + R_x = \iint_A v_x \rho v_x \cos \alpha \, dA \quad (2-8-14)$$

پس از انتگرال‌گیری با توجه به این‌که $\cos \alpha = \pm 1$ و $\rho A = m/v$ داریم:

$$F_{xg} + F_{xp} + F_{xs} + R_x = m \frac{(v_{x2}^2)_{av}}{v_{x2,av}} - m \frac{(v_{x1}^2)_{av}}{v_{x1,av}} \quad (2-8-15)$$



شکل ۲-۸-۱. جریان از طریق یک نازل افقی در جهت x

که در این جا اگر سرعت ثابت نباشد و در سطح مقطع تغییر کند بنابراین،

$$(\overline{v_x^2})_{av} = \frac{1}{A} \iint_A v_x^2 dA \quad (2-8-16)$$

نسبت $(\overline{v_x^2})_{av} / v_{x,av}$ پوسیله $V_{x,av} / \beta$ جایگزین می‌شود که β ضریب تصحیح سرعت در ممتوم است و مقدار آن برای جریان مغشوش بین 0.95 و 0.99 و برای جریان آرام 0.75 است. غالباً در جریان مغشوش، به جای $(\overline{v_x^2})_{av} / v_{x,av}$ از $v_{x,av}$ ، یعنی سرعت میانگین توده‌ای^(۱) سیال، استفاده می‌شود. زیرنویس x در v_x و F_x می‌تواند حذف شود، چون در جریان یک بعدی $v_x = v$ و $F_x = F$ است.

جمله F_{xp} که نیروی ایجاد شده به وسیله فشار اعمال شده بر سطح حجم کنترل است، به صورت

زیر خواهد بود:

$$F_{xp} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \quad (2-8-17)$$

از نیروی اصطکاکی در معادله (۲-۸-۱۵) صرفنظر خواهد شد، بنابراین $F_{xs} = 0$. چون نیروی ثقل فقط در جهت y وجود دارد بنابراین نیروی بدنه‌ای $F_{xg} = 0$ است. با جایگزین کردن F_{xp} از معادله (۲-۸-۱۷) در معادله (۲-۸-۱۵) و جایگزینی $(\overline{v_x^2})_{av} / v_{x,av}$ با v/β (که در آن $v_{x,av} = v$) و قراردادن $\beta = 1$ و حل معادله (۲-۸-۱۵) برای R_x داریم:

$$R_x = mv_2 - mv_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1 \quad (2-8-18)$$

که R_x نیروی اعمال شده توسط سطح جامد بر سیال است. نیروی سیال روی سطح جامد (نیروی عکس‌العمل) برابر با منفی این مقدار ($-R_x$) است.

مثال ۲-۸-۱ ضریب تصحیح سرعت در ممتوم برای جریان آرام

ضریب تصحیح سرعت در ممتوم برای جریان آرام و یک بعدی به صورت زیر تعریف شده است، که در اینجا زیرنویس x حذف شده است.

$$\frac{(\overline{v^2})_{av}}{v_{av}} = \frac{v_{av}}{\beta} \quad (2-8-19)$$

$$\beta = \frac{(v_{av})^2}{(\overline{v^2})_{av}} \quad (2-8-20)$$

مقدار β را برای جریان آرام در یک لوله به دست آورید.

حل: با استفاده از معادله (۲-۸-۱۶)،

$$(v^2)_{av} = \frac{1}{A} \iint_A v^2 dA \quad (2-8-21)$$

با جایگزینی معادله (۲-۷-۱۶) برای جریان آرام در معادله (۲-۸-۲۱) و با توجه به این‌که $dA = r dr d\theta$ و $A = \pi R^2$ (مثال ۲-۶-۳ را ببینید)

$$\begin{aligned} (v^2)_{av} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[2v_{av} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^2 r dr d\theta \\ &= \frac{(2\pi)2^2 v_{av}^2}{\pi R^2} \int_0^R \frac{(R^2 - r^2)^2}{R^4} r dr \end{aligned} \quad (2-8-22)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۲-۸-۲۲) و مرتب کردن آن،

$$(v^2)_{av} = \frac{8v_{av}^2}{R^6} \left(\frac{R^6}{2} - \frac{R^6}{2} + \frac{R^6}{6} \right) = \frac{4}{3} v_{av}^2 \quad (2-8-23)$$

پس از جایگزینی معادله (۲-۸-۲۳) در معادله (۲-۸-۲۰) داریم، $\beta = \frac{3}{4}$

مثال ۲-۸-۲ موازنهٔ ممتوم برای نازل‌های افقی

جریان آب با شدت $0.03154 \text{ m}^3/\text{s}$ از طریق یک نازل افقی (شکل ۲-۸-۱) در نقطهٔ ۲ به محیط تخلیه می‌شود و نازل در نقطهٔ ۱ به انتهای لوله‌ای وصل شده است که نیروهای اصطکاک در نازل ناچیز هستند. قطر ورودی نازل 0.0635 m و قطر خروجی آن 0.0286 m است. برآیند نیروهای وارد بر نازل را به دست آورید. دانستهٔ آب 1000 kg/m^3 است.

حل: ابتدا، دبی جرمی و سرعت‌های میانگین در نقاط ۱ و ۲ محاسبه می‌شوند.

سطح مقطع در نقطهٔ ۱، $A_1 = (\pi/4)(0.0635)^2 = 3.167 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ و در نقطهٔ ۲، $A_2 = (\pi/4)(0.0286)^2 = 6.424 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ بنابراین:

$$m_1 = m_2 = m = 0.03154 \times 1000 = 31.54 \text{ kg/s}$$

سرعت در نقاط (۱) و (۲) برابر است با،

$$v_1 = \frac{0.03154}{(3.167 \times 10^{-3})} = 9.96 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{0.03154}{(6.424 \times 10^{-4})} = 49.1 \text{ m/s}$$

برای به دست آوردن فشار ورودی p_1 از معادلهٔ موازنهٔ انرژی مکانیکی (۲-۷-۲۸) از فرض

جریان مغشوش و عدم وجود اصطکاک استفاده می‌کنیم. لذا این معادله برای $\alpha = 1$ می‌شود،

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad (2-8-24)$$

با قرار دادن فشار نسبی $p_2 = 0$ ، $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ، $v_1 = 9/96 \text{ m/s}$ ، $v_2 = 49/1 \text{ m/s}$ و حل معادله فوق برای p_1 داریم:

$$p_1 = \frac{1000 \times (49/1^2 - 9/96^2)}{2} = 1/156 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (\text{فشار نسبی})$$

برای جهت x ، معادله موازنه ممتوم (2-8-18) به کار می‌رود. با جایگزین کردن مقادیر معلوم و حل آن نسبت به R_x نتیجه می‌شود،

$$R_x = 31/54 \times (49/1 - 9/96) + 0 - (1/156 \times 10^6 \times 3/167 \times 10^{-3}) \\ = -2427 \text{ N} \quad (-546 \text{ lbf})$$

چون نیرو منفی است، در جهت منفی محور x ‌ها عمل می‌کند. این نیرویی است که نازل بر سیال وارد می‌کند. بنابراین نیروی سیال روی جامد، منفی این مقدار یعنی $-R_x$ یا 2427 N است.

2-AC معادله موازنه کلی ممتوم در دو بعد

کاربرد دیگر معادله موازنه کلی ممتوم در شکل 2-8-2 نشان داده شده است. این شکل مربوط به یک سیستم جریانی است که در آن سیال از طریق یک کانال که با افق زاویه α_1 ساخته است وارد می‌شود و از طریق یک کانال که با افق زاویه α_2 ساخته است خارج می‌شود. جریان پایدار فرض می‌شود و نیروی اصطکاک ناچیز است. بنابراین معادله (2-8-13) در حالتی که تجمع وجود ندارد به صورت زیر نوشته می‌شود،

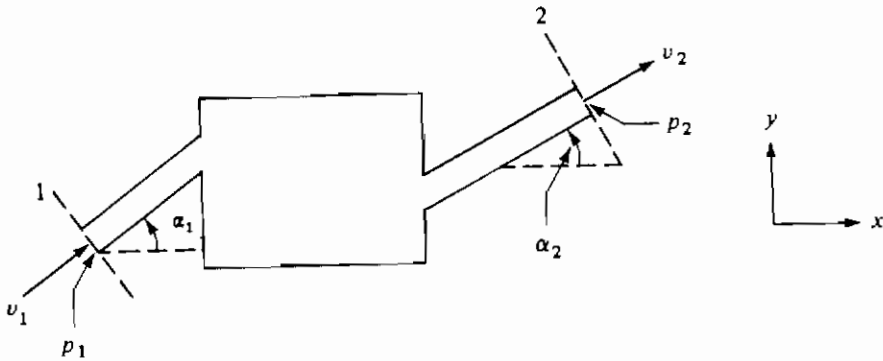
$$F_{xg} + F_{xp} + R_x = \iint_A v_x \rho v \cos \alpha \, dA \quad (2-8-25)$$

با انتگرال‌گیری روی کل سطح،

$$F_{xg} + F_{xp} + R_x = m \frac{(v_2^2)_{av}}{v_{2,av}} \cos \alpha_2 - m \frac{(v_1^2)_{av}}{v_{1,av}} \cos \alpha_1 \quad (2-8-26)$$

جمله $(v^2)_{av} / v_{av}$ می‌تواند توسط $\beta = v_{1,av} / v_{av}$ که $\beta = 1$ است جایگزین شود. با توجه به شکل (2-8-2)، عبارت F_{xp} را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$F_{xp} = p_1 A_1 \cos \alpha_1 - p_2 A_2 \cos \alpha_2 \quad (2-8-27)$$



شکل ۲-۸-۲. موازنه کلی ممتوم در یک سیستم جریانی با سیال ورودی در نقطه ۱ و سیال خروجی در نقطه ۲

پس معادله (۲-۸-۲۶) پس از حل نسبت به R_x به صورت زیر می شود،

$$R_x = mv_2 \cos \alpha_2 - mv_1 \cos \alpha_1 + p_2 A_2 \cos \alpha_2 - p_1 A_1 \cos \alpha_1 \quad (2-8-28)$$

که در این حالت $F_{Xg} = 0$ است.

برای R_y ، نیروی بدنه‌ای F_{Yg} در جهت منفی محور y است و $F_{Yg} = -m_1 g$ که m_1 بیانگر کل جرم

سیال در حجم کنترل است. با جایگزینی $\cos \alpha$ با $\sin \alpha$ معادله در جهت y به صورت زیر می شود،

$$R_y = mv_2 \sin \alpha_2 - mv_1 \sin \alpha_1 + p_2 A_2 \sin \alpha_2 - p_1 A_1 \sin \alpha_1 + m_1 g \quad (2-8-29)$$

مثال ۲-۸-۳ موازنه ممتوم در یک زانویی

سیال در حالت پایدار از طریق یک زانویی با قطر کاهشی، به طوری که در شکل ۲-۸-۳ نشان داده شده است در جریان است. جریان مغشوش فرض می شود و افت اصطکاکی ناچیز است. دبی حجمی مایع و فشار p_2 در نقطه ۲ و قطرهای نقاط ۱ و ۲ معلوم هستند. معادلاتی به دست آورید که به کمک آنها بتوان نیروهای وارد بر زانویی را محاسبه کرد. فرض کنید دانسیته سیال ثابت است.

حل: سرعتهای v_1 و v_2 از دبی حجمی و سطح مقطعها به دست می آید. همچنین

$$m = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (2-8-4)$$

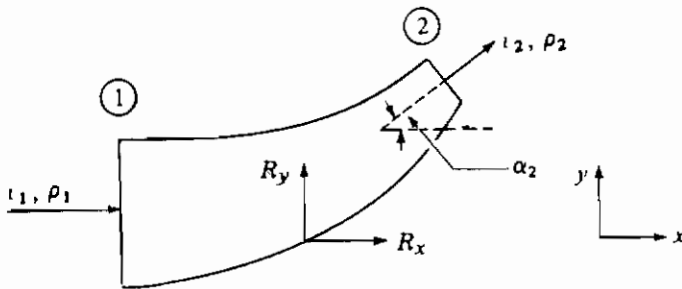
برای به دست آوردن فشار بالا دست (p_1) استفاده می شود. برای موازنه ممتوم از

$$\text{معادله (2-8-28) در جهت } x \text{ استفاده می شود. چون } \alpha_1 = 0 \text{ و } \cos \alpha_1 = 1, \text{ معادله (2-8-28)}$$

می شود،

$$R_x = mv_2 \cos \alpha_2 - mv_1 + p_2 A_2 \cos \alpha_2 - p_1 A_1 \quad (SI)$$

$$R_x = \frac{m}{g_c} v_2 \cos \alpha_2 - \frac{m}{g_c} v_1 + p_2 A_2 \cos \alpha_2 - p_1 A_1 \quad (\text{English}) \quad (2-8-30)$$



شکل ۲-۸-۳. جریان از طریق یک خم با قطر کاهش در مثال ۲-۸-۳

در جهت y معادله موازنه ممتوم (۲-۸-۲۹) در حالی که $\sin \alpha_1 = 0$ است به کار می‌رود.

$$R_y = mv_2 \sin \alpha_2 + p_2 A_2 \sin \alpha_2 + m_1 g \quad (SI) \quad (2-8-31)$$

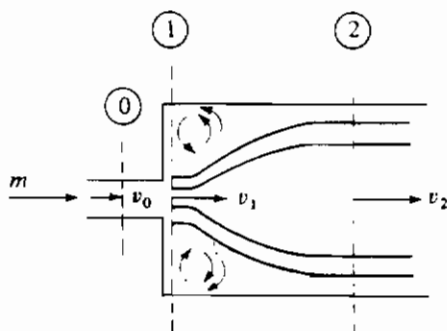
که در این جا m_1 نشان‌دهنده کل جرم سیال در زانویی است. فشارها در نقاط ۱ و ۲ نسبی هستند. زیرا فشار اتمسفری که روی همه سطوح وارد می‌شود، حذف می‌شود. بزرگی نیروی برآیند زانویی وارد بر سیال حجم کنترل به صورت زیر است،

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (2-8-32)$$

زاویه‌ای که این نیرو با محور قائم می‌سازد $\theta = \arctan (R_x / R_y)$ است. غالباً نیروی وزن F_{yg} در مقایسه با دیگر جملات در معادله (۲-۸-۳۱) کوچکتر است و صرف‌نظر می‌شود.

مثال ۲-۸-۴ اُفت اصطکاکی در یک انبساط ناگهانی

وقتی که سیالی از طریق یک لوله کوچک جریان پیدا می‌کند و از طریق یک انبساط ناگهانی وارد لوله‌ای با قطر بزرگتر می‌شود (شکل ۲-۸-۴) اُفت انرژی مکانیکی روی می‌دهد. با استفاده از معادله موازنه ممتوم و معادله موازنه انرژی مکانیکی رابطه‌ای برای اُفت ایجاد شده در مایع به دست آورید. (راهنمایی: فرض کنید که $p_0 = p_1$ و $v_0 = v_1$. موازنه انرژی مکانیکی را بین نقاط ۰ و ۲ و موازنه ممتوم را بین نقاط ۱ و ۲ بنویسید. فرض می‌شود که p_1 و p_2 در کل مقطع ثابت هستند).



شکل ۲-۸-۴. اتلاف در انبساط جریان

حل: حجم کنترل را طوری انتخاب می‌کنیم که دیواره لوله را دربرنگیرد. لذا R_x حذف می‌شود. مرزهای انتخاب شده نقاط ۱ و ۲ هستند. جریان عبوری از صفحه ۱ از سطح A_1 می‌گذرد. نیروی مقاومت ناشی از اصطکاک قابل صرفنظر کردن است و فرض می‌شود که تمام تلفات ناشی از گردابه‌ها در این حجم باشد. با نوشتن موازنهٔ ممتوم بین نقاط ۱ و ۲ و به کار بردن معادلهٔ (۲-۸-۱۸) و توجه به این که $p_1 = p_2$ ، $v_0 = v_1$ و

$$A_2 = A_1$$

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = mv_2 - mv_1 \quad (2-8-33)$$

دبی جرمی $m = v_0 \rho A_0$ و $v_2 = (A_0/A_2)v_0$ است. با جایگزینی این جملات در معادلهٔ (۲-۸-۳۳) و مرتب کردن آن داریم،

$$v_0^2 \frac{A_0}{A_2} \left(1 - \frac{A_0}{A_2}\right) = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad (2-8-34)$$

با اعمال کردن معادلهٔ موازنه انرژی مکانیکی (۲-۷-۲۸) در نقاط ۱ و ۲،

$$\frac{v_0^2 - v_2^2}{2} - \sum F = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad (2-8-35)$$

نهایتاً، با ترکیب معادلات (۲-۸-۳۴) و (۲-۸-۳۵) با یکدیگر،

$$\sum F = \frac{v_0^2}{2} \left(1 - \frac{A_0}{A_2}\right)^2 \quad (2-8-36)$$

AD-۲ موازنه کلی ممتوم برای جت آزاد سیال در برخورد به یک تیغه ثابت

هنگامی که یک جت آزاد سیال مطابق شکل ۲-۸-۵ با یک تیغه ثابت برخورد می‌کند، می‌توان از موازنه کلی ممتوم برای تعیین نیروی وارد شده بر روی سطح تیغه استفاده کرد. چون هیچ‌گونه تغییری در ارتفاع یا فشار قبل و بعد از برخورد وجود ندارد، بنابراین هیچ‌گونه اُفتی در انرژی وجود ندارد و کاربرد معادله برنولی نشان می‌دهد که سرعت هم تغییری نمی‌کند. از تلفات ناشی از برخورد نیز صرف‌نظر می‌شود. مقاومت اصطکاکی بین جت و سطح صاف تیغه هم ناچیز است. سرعت در بالادست و پایین دست جت ثابت فرض می‌شود. چون جت با اتمسفر در ارتباط است، لذا فشار در تمام طول تیغه ثابت است.

برای نوشتن موازنه ممتوم برای حجم کنترل نشان داده شده روی تیغه دارای انحنا (شکل ۲-۸-۵)، معادله (۲-۸-۲۸) برای حالت پایدار به صورت زیر نوشته می‌شود. که در این رابطه جملات مربوط به فشار صفر هستند و $v_1 = v_2$ ، $A_1 = A_2$ ، $v_1 = v_2$ و $m = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ است،

$$R_x = mv_2 \cos \alpha_2 - mv_1 + 0 = mv_1(\cos \alpha_2 - 1) \quad (2-8-37)$$

با به کار بردن معادله (۲-۸-۲۹) در جهت y و صرف‌نظر کردن از نیروی بدنه‌ای،

$$R_y = mv_2 \sin \alpha_2 - 0 = mv_1 \sin \alpha_2 \quad (2-8-38)$$

بنابراین، R_x و R_y مؤلفه‌های نیروی وارده از طرف تیغه بر سیال داخل حجم کنترل هستند. مؤلفه‌های نیروی وارده از طرف سیال بر تیغه $-R_x$ و $-R_y$ می‌باشند.

مثال ۲-۸-۵ نیروی وارده از طرف جت آزاد سیال بر یک تیغه ثابت دارای انحنا

یک جت آب با سرعت $30/5 \text{ m/s}$ و قطر $2/54 \times 10^{-2} \text{ m}$ توسط یک تیغه صیقلی و دارای انحنا مطابق شکل ۲-۸-۵a از مسیر خود منحرف می‌شود که $\alpha_2 = 60^\circ$ نیروی وارده از طرف جت بر تیغه چقدر است؟ فرض کنید $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

حل: سطح مقطع جت، $A_1 = \pi(2/54 \times 10^{-2})^2/4 = 5/067 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ است. بنابراین،

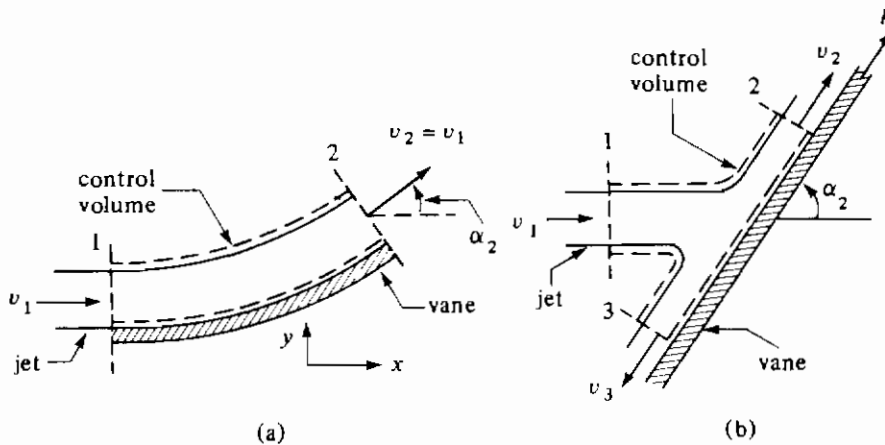
$m = v_1 A_1 \rho_1 = 30/5 \times 5/067 \times 10^{-4} \times 1000 = 15/45 \text{ kg/s}$ است. با جایگزینی در

معادلات (۲-۸-۳۷) و (۲-۸-۳۸)، نتیجه می‌شود:

$$R_x = 15/45 \times 30/5 \times (\cos 60^\circ - 1) = -235/6 \text{ N} \quad (-52/97 \text{ lbf})$$

$$R_y = 15/45 \times 30/5 \times \sin 60^\circ = 408/1 \text{ N} \quad (91/74 \text{ lbf})$$

نیروی اعمال شده بر تیغه $-R_x = 235/6 \text{ N}$ و $-R_y = -408/1 \text{ N}$ است. نیروی برآیند با استفاده از معادله (۲-۸-۳۲) محاسبه می‌شود.



شکل ۲-۸-۵. برخورد جت آزاد سیال به یک تیغه ثابت: (a) تیغه خمیده و صیقلی (b) تیغه صاف و صیقلی

در شکل ۲-۸-۵b یک جت آزاد سیال با سرعت v_1 به یک صفحه صیقلی و صاف که به صورت مایل قرار گرفته است برخورد می‌کند و جریان به دو قسمت جداگانه تقسیم می‌شود که چون افت انرژی وجود ندارد سرعت‌های مساوی دارند ($v_1 = v_2 = v_3$). به طور معمول موازنهٔ ممنتوم در جهت p موازی با صفحه نوشته می‌شود. در این جهت هیچ نیرویی از طرف صفحه بر سیال اعمال نمی‌شود. یعنی نیروی مماسی وجود ندارد. بنابراین اولین جزء ممنتوم در جهت P با آخرین جزء ممنتوم در این جهت مساوی باشد. این بدین معناست که $\sum F_p = 0$ با نوشتن معادله‌ای مشابه با معادله (۲-۸-۲۶) که در آن m_1 بر حسب kg/s جرم ورودی در نقطه ۱ و m_2 و m_3 خروجیها در نقاط ۲ و ۳ هستند خواهیم داشت،

$$\sum F_p = 0 = m_2 v_2 - m_1 v_1 \cos \alpha_2 - m_3 v_3 \quad (2-8-39)$$

$$0 = m_2 v_1 - m_1 v_1 \cos \alpha_2 - m_3 v_1$$

براساس معادلهٔ پیوستگی،

$$m_1 = m_2 + m_3 \quad (2-8-40)$$

با ترکیب این رابطه و حل آنها،

$$= \frac{m_1}{2} (1 + \cos \alpha_2), \quad m_3 = \frac{m_1}{2} (1 - \cos \alpha_2) \quad (2-8-41)$$

نیروی برآیند اعمال شده از طرف صفحه بر سیال بایستی بر آن عمود باشد. این بدین معناست که نیروی برآیند برابر با $m_1 v_1 \sin \alpha_1$ است. به عبارت دیگر، نیروی برآیند اعمال شده روی سیال می‌تواند با تعیین R_x, R_y از معادلات (۲-۸-۲۸) و (۲-۸-۲۹) و سپس (۲-۸-۳۲) محاسبه شود. نیروی اعمال شده بر صفحه نیز عکس آن است.

۲-۹ موازنه پوسته‌ای ممنتوم^(۱) و توزیع سرعت در جریان آرام

۲-۹A مقدمه

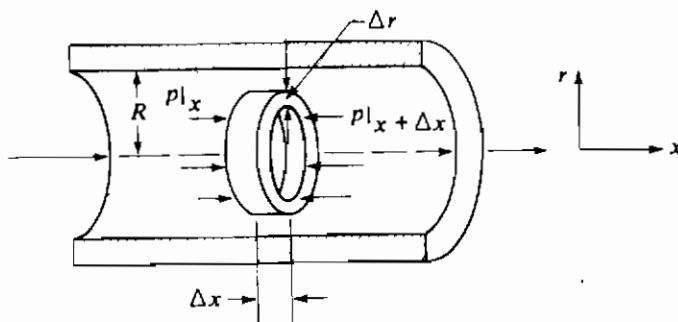
در بخش ۲-۸ موازنه‌های کلی یا ماکروسکوپی ممنتوم را با استفاده از یک حجم کنترل تجزیه و تحلیل کردیم. از این موازنه‌ها تغییرات کلی ممنتوم را در حالتی که مرزهای حجم کنترل را قطع می‌کند، به دست آوردیم. این موازنه کلی ممنتوم جزئیات آنچه را که در داخل حجم کنترل اتفاق می‌افتد، برای ما مشخص نکرد. در این فصل یک حجم کنترل کوچک را تجزیه و تحلیل می‌کنیم و سپس ابعاد آن را تا حدود دیفرانسیل کوچک می‌کنیم. با اینکار، با استفاده از مفاهیم موازنه ممنتوم در بخش قبل، به موازنه پوسته‌ای ممنتوم می‌رسیم و سپس با استفاده از معادله تعریف ویسکوزیته، رابطه‌ای برای توزیع سرعت در داخل حجم کنترل و رابطه‌ای برای اُفت فشار به دست می‌آوریم. این معادلات برای جریان آرام در حالت پایدار و برای سیستمهایی با هندسه ساده به دست خواهند آمد.

در بسیاری از مسائل مهندسی اطلاع از توزیع کامل سرعت مورد نیاز نیست. اما دانستن سرعت ماکزیمم، سرعت میانگین یا تنش برشی روی سطح لازم است. در این بخش چگونگی به دست آوردن این کمیتها را با استفاده از معادله توزیع سرعت نشان خواهیم داد.

۲-۹B موازنه پوسته‌ای ممنتوم در داخل یک لوله

مهندسان اغلب با جریان سیال داخل یک کانال یا مقطع مدور یا لوله سر و کار دارند. در شکل ۲-۹-۱ یک مقطع طولی از یک لوله که در آن یک سیال تراکم‌ناپذیر نیوتنی در حالت پایدار به صورت یک‌بعدی و با رژیم آرام جریان دارد نشان داده شده است. جریان کاملاً توسعه یافته است، یعنی تحت تأثیر اثرات ورودی نیست و توزیع سرعت در طول محور در جهت x تغییر نمی‌کند.

حجم کنترل استوانه‌ای از یک پوسته با قطر داخلی r ، ضخامت Δr و طول Δx - تشکیل شده است. معادله بقای ممنتوم در حالت پایدار (معادله (۲-۸-۳)) به این صورت است: نرخ ممنتوم ورودی - نرخ ممنتوم خروجی = مجموع نیروهایی که بر حجم کنترل عمل می‌کنند.



شکل ۱-۹-۴. حجم کنترل برای موازنه پوسته‌ای ممتوم روی سیال در حال جریان در یک لوله مدور

نیروهای فشاری با استفاده از معادله (۱۷-۸-۲) عبارتند از:

$$\text{نیروهای فشاری} = pA|_x - pA|_{x+\Delta x} = p(2\pi r \Delta r)|_x - p(2\pi r \Delta r)|_{x+\Delta x} \quad (۲-۹-۱)$$

نیروی برشی یا نیروی مقاومت که روی سطح استوانه‌ای به شعاع r عمل می‌کند برابر با حاصلضرب تنش برشی τ_{rx} در سطح $2\pi r \Delta x$ است. براساس معادله (۹-۴-۲) این نیرو همچنین به صورت نرخ جریان ممتوم به داخل سطح استوانه‌ای پوسته نیز می‌تواند در نظر گرفته شود. بنابراین نرخ خالص ممتوم خروجی برابر با اختلاف نرخ ممتوم خروجی و نرخ ممتوم ورودی است. بنابراین،

$$\text{انتشار خالص} = (\tau_{rx} 2\pi r \Delta x)|_{r+\Delta r} - (\tau_{rx} 2\pi r \Delta x)|_r \quad (۲-۹-۲)$$

شار خالص جابجایی ممتوم در جهت عمود بر جریان در فواصل x و $x + \Delta x$ صفر است، زیرا جریان کاملاً توسعه یافته است و جملات مستقل از x هستند و به همین دلیل v_x در x با v_x در $x + \Delta x$ مساوی است.

با مساوی قرار دادن معادله (۱-۹-۲) با (۲-۹-۲) و مرتب کردن آن،

$$\frac{(r\tau_{rx})|_{r+\Delta r} - (r\tau_{rx})|_r}{\Delta r} = \frac{r(p|_x - p|_{x+\Delta x})}{\Delta x} \quad (۲-۹-۳)$$

در جریان کاملاً توسعه یافته، تغییرات فشار $(\Delta p/\Delta x)$ ثابت و برابر با $(\Delta p/L)$ است، که Δp افت فشار در طول L از لوله است. با میل دادن Δr به سمت صفر داریم،

$$\frac{d(r\tau_{rx})}{dr} = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)r \quad (۲-۹-۴)$$

پس از جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری،

$$\tau_{rx} = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \quad (۲-۹-۵)$$

اگر شار ممتوم در $r = 0$ بی‌نهایت نباشد، ثابت انتگرال C_1 باید صفر باشد، بنابراین،

$$\tau_{rx} = \left(\frac{\Delta p}{2L} \right) r = \frac{p_0 - p_L}{2L} r \quad (2-9-6)$$

این بدین معناست که مطابق شکل ۲-۹-۲ شار ممتوم به‌طور خطی با شعاع تغییر می‌کند و تنش ماکزیمم در دیواره یعنی $r = R$ اتفاق می‌افتد.

با جایگزینی قانون ویسکوزیته نیوتنی،

$$\tau_{rx} = -\mu \frac{dv_x}{dr} \quad (2-9-7)$$

در معادله (۲-۹-۶)، معادله دیفرانسیل زیر برای سرعت به‌دست می‌آید،

$$\frac{dv_x}{dr} = -\frac{p_0 - p_L}{2\mu L} r \quad (2-9-8)$$

با انتگرال‌گیری و استفاده از شرایط مرزی که در دیواره در $r = R$ ، $v_x = 0$ است، معادله توزیع سرعت به‌دست می‌آید،

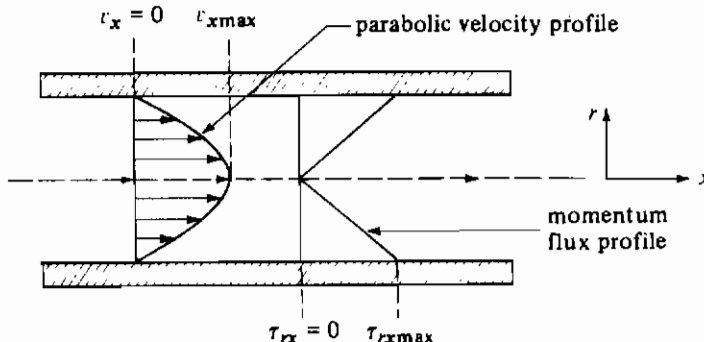
$$v_x = \frac{p_0 - p_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2-9-9)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که توزیع سرعت مطابق شکل ۲-۹-۲ سهمی است.

سرعت میانگین $v_{x,av}$ در یک مقطع از جمع کردن تمام سرعتها در آن مقطع و تقسیم کردن آن

بر مساحت مقطع براساس معادله (۲-۹-۱۷) به‌دست می‌آید. براساس روش ارائه شده در مثال ۲-۶-۳ که در آنجا $dA = r dr d\theta$ و $A = \pi R^2$ بود،

$$v_{x,av} = \frac{1}{A} \iint_A v_x dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v_x r dr d\theta = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_x 2\pi r dr \quad (2-9-10)$$



شکل ۲-۹-۲. توزیع سرعت و شار ممتوم برای جریان آرام در یک لوله

با ترکیب معادلات (۲-۹-۹) و (۲-۹-۱۰) و انتگرالگیری داریم،

$$v_{x\text{av}} = \frac{(p_0 - p_L)R^2}{8\mu L} = \frac{(p_0 - p_L)D^2}{32\mu L} \quad (2-9-11)$$

که در این رابطه $D = 2R$. بنابراین معادله (۲-۹-۱۱) که معادله Hagen-Poiseuille است، اُفت فشار و سرعت میانگین در جریان آرام در یک لوله افقی را به هم مرتبط می‌کند.

سرعت ماکزیمم در لوله با استفاده از معادله (۲-۹-۹) در $r = 0$ اتفاق می‌افتد.

$$v_{x\text{max}} = \frac{p_0 - p_L}{4\mu L} R^2 \quad (2-9-12)$$

با ترکیب معادلات (۲-۹-۱۱) و (۲-۹-۱۲) داریم،

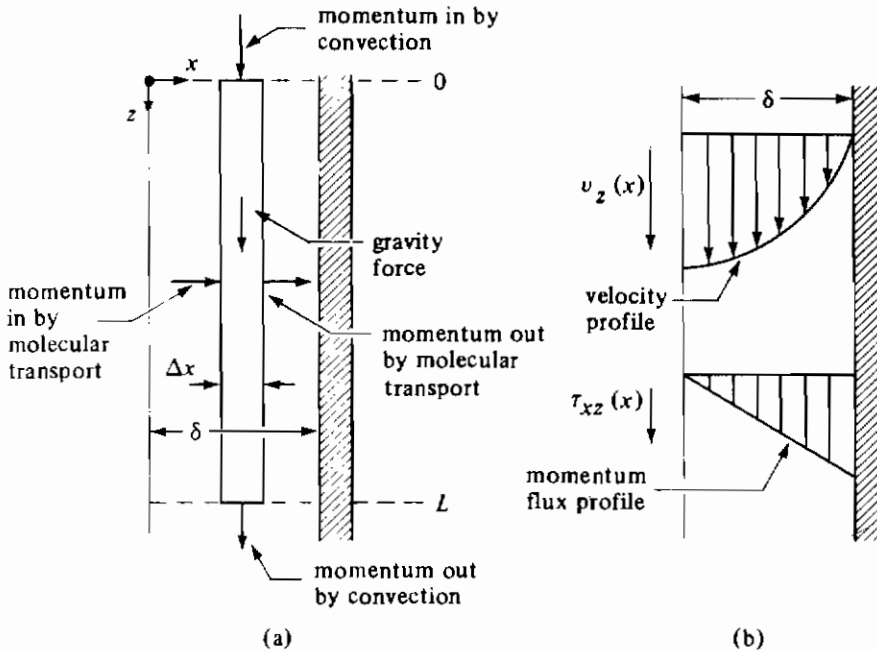
$$v_{x\text{av}} = \frac{v_{x\text{max}}}{2} \quad (2-9-13)$$

۲-۹C موازنه پوسته‌ای ممتوم برای فیلم پایین رونده^(۱)

حال دیدگاهی مشابه آنچه را که در مورد جریان آرام در داخل لوله اعمال شد برای جریان سیالی که به صورت یک فیلم نازک بر روی یک سطح عمودی به طرف پایین جریان دارد، عمل می‌کنیم. فیلم در حال سقوط برای مطالعه پدیده‌های مختلف در انتقال جرم، روکش کردن سطوح و مانند آن، به کار می‌رود. حجم کنترل برای فیلم در حال سقوط در شکل ۲-۹-۳a نشان داده شده است که در آنجا المان پوسته‌ای سیال به ضخامت Δx و طول L در جهت عمودی z در نظر گرفته شده است. این ناحیه به اندازه کافی از نواحی ورودی و خروجی سیال دور است، به طوری که جریان تحت تأثیر این نواحی نیست. این بدین معناست که سرعت $v_z(x)$ به موقعیت z بستگی ندارد.

در ابتدا موازنه ممتوم را برای محدوده‌ای به ضخامت Δx که بین صفحات $z = 0$ و $z = L$ محدود شده است، می‌نویسیم و در جهت y نیز طول W را برای این محدوده در نظر می‌گیریم. در اولین مرحله، شار ممتوم ناشی از انتقال مولکولی را در نظر می‌گیریم. اختلاف نرخ ممتوم ورودی و خروجی، برابر با شار ممتوم در نقطه $x + \Delta x$ منهای شار ممتوم در نقطه x ضرب در سطح LW است.

$$LW(\tau_{xz})|_{x+\Delta x} - LW(\tau_{xz})|_x = \text{انتشار خالص} \quad (2-9-14)$$



شکل ۳-۹-۲. جریان آرام لایه نازک مایع به صورت عمودی: (a) موازنه پوسته‌ای ممنتوم برای یک حجم کنترل به ضخامت Δx (b) توزیع سرعت و شار ممنتوم

شار خالص ممنتوم جابجایی، برابر با نرخ ممنتوم خروجی از سطح $W\Delta x$ در $z = L$ منهای نرخ ممنتوم ورودی از سطح $W\Delta x$ در $z = 0$ است. چون به ازای تمام مقادیر x مقدار v_x در $z = 0$ مساوی با مقدار v_x در $z = L$ است، بنابراین، مقدار خالص خروجی صفر است.

$$\Delta x W v_z(\rho v_z)|_{z=L} - \Delta x W v_z(\rho v_z)|_{z=0} = 0 \quad (2-9-15)$$

نیروی وزن که بر سیال وارد می‌شود به صورت زیر است،

$$\Delta x W L(\rho g) \quad (2-9-16)$$

بنابراین با به کار بردن معادله (۲-۸-۳) برای بقای ممنتوم در حالت پایدار خواهیم داشت،

$$\Delta x W L(\rho g) = L W(\tau_{xz})|_{x+\Delta x} - L W(\tau_{xz})|_x + 0 \quad (2-9-17)$$

با مرتب کردن معادله (۲-۹-۱۷) و میل دادن Δx به سمت صفر خواهیم داشت:

$$\frac{\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_x}{\Delta x} = \rho g \quad (2-9-18)$$

$$\frac{d}{dx} \tau_{xz} = \rho g \quad (2-9-19)$$

با انتگرال‌گیری و اعمال شرایط مرزی به صورت، $\tau_{xz} = 0$ در $x = 0$ در سطح آزاد سیال و $\tau_{xz} = \tau_{xz}$ در $x = x$

$$\tau_{xz} = \rho g x \quad (2-9-20)$$

این بدین معناست که توزیع شار ممتوم مطابق شکل ۲-۹-۳۵ خطی است و مقدار ماکزیم آن در دیواره است. با به کار بردن قانون ویسکوزیته نیوتنی برای یک سیال نیوتنی،

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \quad (2-9-21)$$

معادله دیفرانسیل زیر از ترکیب معادلات (۲-۹-۲۰) و (۲-۹-۲۱) برای سرعت به دست می‌آید،

$$\frac{dv_z}{dx} = -\left(\frac{\rho g}{\mu}\right)x \quad (2-9-22)$$

پس از جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری،

$$v_z = -\left(\frac{\rho g}{2\mu}\right)x^2 + C_1 \quad (2-9-23)$$

با به کار بردن شرط مرزی $v_z = 0$ در $x = \delta$ داریم: $C_1 = (\rho g / 2\mu)\delta^2$. بنابراین، معادله توزیع سرعت عبارت است از:

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 \right] \quad (2-9-24)$$

این بدین معناست که مطابق شکل ۲-۹-۳۵ توزیع سرعت به صورت سهمی است. سرعت ماکزیم در معادله (۲-۹-۲۴) در $x = 0$ اتفاق می‌افتد و داریم،

$$v_{z \max} = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \quad (2-9-25)$$

سرعت میانگین با به کار بردن معادله (۲-۶-۱۷) می‌تواند به دست آید،

$$v_{z \text{ av}} = \frac{1}{A} \iint_A v_z dA = \frac{1}{W\delta} \int_0^W \int_0^\delta v_z dx dy = \frac{W}{W\delta} \int_0^\delta v_z dx \quad (2-9-26)$$

با جایگزینی معادله (۲-۹-۲۴) در (۲-۹-۲۶) و انتگرال‌گیری،

$$v_{z \text{ av}} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} \quad (2-9-27)$$

از ترکیب معادلات (۲-۹-۲۵) و (۲-۹-۲۷) نتیجه می‌شود که $v_{z\ av} = (2/3)v_{z\ max}$ دبی حجمی q به وسیله ضرب کردن سرعت میانگین $v_{z\ av}$ در سطح مقطع δW به دست می‌آید.

$$q = \frac{\rho g \delta^3 W}{3\mu} \text{ m}^3/\text{s} \quad (2-9-28)$$

غالباً در فیلم پایین رونده، دبی حجمی به ازای واحد عرض دیواره Γ بر حسب kg/s.m به صورت $\Gamma = \rho \delta v_{z\ av}$ تعریف می‌شود و عدد رینولدز آن نیز به صورت زیر بیان می‌شود،

$$N_{Re} = \frac{4\Gamma}{\mu} = \frac{4\rho\delta v_{z\ av}}{\mu} \quad (2-9-29)$$

جریان در $N_{Re} < 1200$ آرام است. جریان آرام با کمی افت و خیز در N_{Re} بالاتر از ۲۵ اتفاق می‌افتد.

مثال ۲-۹-۱ سرعت و ضخامت فیلم پایین رونده

روغنی روی یک دیواره عمودی به صورت فیلمی به ضخامت $1/7 \text{ mm}$ به طرف پایین جاری است. دانسیته روغن 810 kg/m^3 و ویسکوزیته آن 0.2 Pa.s است. دبی جرمی به ازای واحد عرض دیواره Γ ، عدد رینولدز و سرعت میانگین را حساب کنید.

حل: ضخامت فیلم $\delta = 0.0017 \text{ m}$ است. با جایگزینی معادله (۲-۹-۲۷) در تعریف Γ ،

$$\Gamma = \rho \delta v_{z\ av} = \frac{(\rho \delta) \rho g \delta^2}{3\mu} = \frac{\rho^2 \delta^3 g}{3\mu} \quad (2-9-30)$$

$$= \frac{820^2 \times (1/7 \times 10^{-3})^3 \times 9/806}{3 \times 0.2} = 0.05399 \text{ kg/s.m}$$

با به کار بردن معادله (۲-۹-۲۹)

$$N_{Re} = \frac{4\Gamma}{\mu} = \frac{4 \times 0.05399}{0.2} = 1.08$$

بنابراین، فیلم در رژیم جریان آرام است و با استفاده از معادله (۲-۹-۲۷)،

$$v_{z\ av} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} = \frac{820 \times 9/806 \times (1/7 \times 10^{-3})^2}{3 \times 0.2} = 0.03873 \text{ m/s}$$

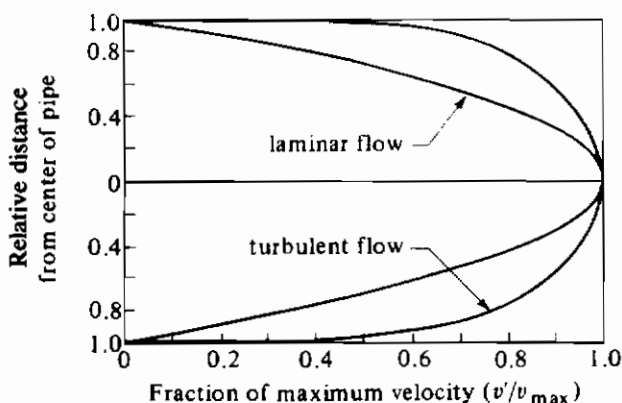
۲-۱۰ معادلات طراحی برای جریان آرام و مغشوش در لوله‌ها

۲-۱۰A توزیع سرعت در لوله‌ها

یکی از مهمترین کاربردهای جریان سیال، جریان در داخل کانالهایی با مقطع مدور و لوله‌هاست.

در ضمیمه A.5 اندازه‌های لوله‌های استاندارد فولادی تجارتمی درج شده است. لوله شماره ۴۰ در اندازه‌های مختلف، استاندارد است که معمولاً از آن استفاده می‌شود. شماره ۸۰ دیواره ضخیم‌تری دارد و فشاری حدود دو برابر لوله شماره ۴۰ تحمل می‌کند. هر دوی این لوله‌ها قطر خارجی یکسانی دارند، بنابراین اتصالات مربوط به هر دو یکسان است. همانند لوله‌های فولادی لوله‌های از جنس دیگر فلزات نیز قطر خارجی یکسانی دارند تا بتوان قسمتهای مختلف یک سیستم لوله‌کشی را به یکدیگر وصل نمود. اندازه لوله‌ها معمولاً برحسب قطر خارجی و ضخامت دیواره آنها داده می‌شود. Perry (P1) و Green جداول مفصلی از انواع مختلف لوله‌ها ارائه داده‌اند.

وقتی که سیال در یک لوله با مقطع مدور جریان دارد و سرعتها در فواصل مختلف از دیواره لوله تا مرکز آن اندازه‌گیری می‌شوند، مشاهده می‌شود که هم در جریان آرام و هم در جریان مغشوش، سرعت سیال در مرکز لوله بیشتر از سرعت آن در نزدیکی دیواره است. این اندازه‌گیری‌ها در فاصله مناسبی از ورودی لوله انجام می‌شود. در شکل ۱-۱۰-۲ نمودار فاصله نسبی از مرکز لوله بر حسب v/v_{max} رسم شده است که v سرعت موضعی در یک نقطه و v_{max} بیشترین سرعت در مرکز لوله است. در جریان آرام مطابق معادله (۹-۹-۲) توزیع سرعت به شکل یک سهمی کامل است و سرعت در دیواره صفر است. در بسیاری از کاربردهای مهندسی رابطه بین سرعت میانگین (v_{av}) در یک لوله و بیشترین سرعت v_{max} بسیار مفید است. زیرا برخی مواقع، فقط v_{max} در مرکز لوله اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین فقط با اندازه‌گیری سرعت در یک نقطه، رابطه بین v_{av} و v_{max} می‌تواند برای تعیین v_{av} مورد استفاده قرار گیرد. در شکل ۲-۱۰-۲ مقادیر تجربی v_{av}/v_{max} به صورت تابعی از عدد رینولدز (Dv_{av}/μ) و Dv_{max}/μ رسم شده است.



شکل ۱-۱۰-۲. توزیع سرعت یک سیال در عرض یک لوله

بر اساس موازنه پسته‌ای ممتوم برای جریان آرام (معادله ۲-۹-۱۳) سرعت میانگین در مقطع لوله به‌طور دقیق $0/5$ برابر سرعت ماکزیمم در مرکز آن است. از طرف دیگر در جریان مغشوش، منحنی در مرکز تا حدودی صافتر است (شکل ۲-۱۰-۱) را ببینید) و سرعت میانگین حدود $0/8$ برابر بیشترین سرعت است. مقدار $0/8$ نسبت به عدد رینولدز تا حدودی تغییر می‌کند که در نمودار شکل ۲-۱۰-۲ نشان داده شده است. (توجه: مسأله ۲-۶-۳ را ببینید. در این مسأله با استفاده از قانون توان $\frac{1}{V}$ عدد $0/817$ به‌دست آمده است).

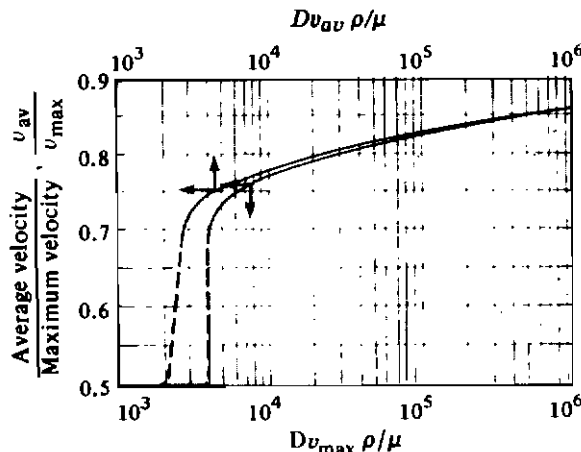
۲-۱۰-B اُفت فشار و تلفات اصطکاکی در جریان آرام

۱- اُفت فشار و اتلاف ناشی از اصطکاک: وقتی که یک سیال نیوتنی در حالت پایدار یا جریان آرام در لوله جریان دارد، تنش برشی توسط معادله (۲-۴-۲) به دست می‌آید که اگر برحسب تغییرات آن در جهت شعاع dr نوشته شود به صورت زیر است،

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \quad (2-10-1)$$

معادله Hagen-Poiseuille (معادله ۲-۹-۱۱) با استفاده از این رابطه و موازنه پسته‌ای ممتوم برای سیال در یک پسته استوانه‌ای شکل، برای جریان آرام یک مایع در لوله مدور به‌دست آمد. همچنین در بخش ۳-۶ با استفاده از موازنه دیفرانسیلی ممتوم روش دیگری ارائه شده است. این رابطه به صورت زیر می‌تواند نوشته شود،

$$\Delta p_f = (p_1 - p_2)_f = \frac{32\mu v(L_2 - L_1)}{D^2} \quad (2-10-2)$$



شکل ۲-۱۰-۲. نسبت v_{av}/v_{max} به صورت تابعی از عدد رینولدز برای لوله‌ها

که در اینجا p_1 فشار بالادست در نقطه ۱ برحسب N/m^2 ، p_2 فشار در نقطه ۲، v سرعت میانگین در لوله برحسب m/s ، D قطر داخلی برحسب m و $(L_2 - L_1)$ یا ΔL طول مستقیم لوله برحسب متر است. در سیستم واحدهای انگلیسی طرف راست معادله $(2-10-2)$ بر g_c تقسیم می شود.

کمیت $(p_1 - p_2)_f$ یا Δp_f افت فشار ناشی از اصطکاک پوسته‌ای^(۱) است. بنابراین در ρ ثابت تلفات اصطکاک (F_f) به صورت زیر نوشته می شود:

$$F_f = \frac{(p_1 - p_2)_f}{\rho} = \frac{N \cdot m}{kg} \quad \text{or} \quad \frac{J}{kg} \quad (SI)$$

(2-10-3)

$$F_f = \frac{ft \cdot lb_f}{lb_m} \quad (\text{English})$$

این رابطه تلفات انرژی مکانیکی ناشی از اصطکاک پوسته‌ای برحسب $N \cdot m$ برای هر کیلوگرم سیال است و بخشی از عبارت ΣF مربوط به تلفات اصطکاک در معادله موازنه انرژی مکانیکی $(2-7-28)$ است. عبارت $(p_1 - p_2)_f$ مربوط به اصطکاک پوسته‌ای با عبارت $(p_1 - p_2)$ متفاوت است. زیرا هد سرعتی و هد پتانسیل در معادله $(2-7-28)$ با هم متفاوت هستند. قسمتی از ΣF که مربوط به اصطکاک در داخل خود لوله برحسب نوع جریان (آرام یا مفشوش) است، در بخشهای B و C $(2-10-B)$ و $(2-10-C)$ مورد بحث قرار گرفته‌اند. تلفات اصطکاک ناشی از اتصالات (شیرها، زانوها و غیره)، خمها و مانند آن که گاهی بخش مهمی از اصطکاک را ایجاد می کنند، در بخش $(2-10-F)$ بحث شده‌اند. توجه کنید که اگر معادله $(2-7-28)$ برای جریان پایدار در یک لوله صاف و افقی به کار رود، خواهیم داشت، $(p_1 - p_2)/\rho = \Sigma F$ یکی از کاربردهای معادله $(2-10-2)$ برای اندازه‌گیری تجربی ویسکوزیته سیال بوسیله اندازه‌گیری افت فشار و دبی حجمی سیال عبوری از یک لوله با طول و قطر مشخص است. تصحیح انرژی جنبشی و اثرات ورودی نیز معمولاً در عمل لازم است. همچنین معادله $(2-10-2)$ غالباً برای اندازه‌گیری جریانهای کم مایع به کار می رود.

مثال ۲-۱۰-۱ اندازه‌گیری جریانهای کم مایع

یک لوله موئینه کوچک با قطر داخلی $2/22 \times 10^{-3}$ متر و طول $0/317$ متر به طور پیوسته برای اندازه‌گیری دبی یک مایع با دانسیته 875 kg/m^3 و $1/13 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ به کار می رود. افت فشار در طول لوله در هنگام جریان، $0/0655$ متر آب (با دانسیته 996 kg/m^3) است. اگر اثرات انتهایی صرفنظر شود دبی جریان برحسب m^3/s چقدر است؟

حل: با فرض آرام بودن جریان، از معادله (۲-۱۰-۲) استفاده می‌شود. ابتدا با استفاده از معادله (۲-۲-۴) ارتفاع h را که معادل 0.0655 متر آب است به آفت فشار تبدیل می‌کنیم،

$$\Delta p_f = h\rho g = 0.0655 \text{ m} \times 996 \text{ kg/m}^3 \times 9.80665 \text{ m/s}^2 \\ = 640 \text{ kg.m/s}^2.\text{m}^2 = 640 \text{ N/m}^2$$

با جایگزینی مقادیر $D = 2/22 \times 10^{-3} \text{ m}$ ، $L_2 - L_1 = 0.317 \text{ m}$ ، $\mu = 1/13 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ در معادله (۲-۱۰-۲) و حل آن نسبت به v داریم:

$$\Delta p_f = \frac{32\mu v (L_2 - L_1)}{D^3} \quad (2-10-2)$$

$$640 = \frac{32 \times 1/13 \times 10^{-3} \times v \times 0.317}{(2/22 \times 10^{-3})^3}$$

$$v = 0.275 \text{ m/s}$$

بنابراین دبی حجمی برابر است با:

$$\text{شدت جریان حجمی} = v\pi \frac{D^2}{4} = \frac{0.275 \times \pi \times (2/22 \times 10^{-3})^2}{4} = 1/0.66 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

چون جریان را آرام فرض کردیم، بنابراین برای تأیید این فرض باید عدد رینولدز محاسبه شود،

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{2/22 \times 10^{-3} \times 0.275 \times 875}{1/13 \times 10^{-3}} = 473$$

پس فرض اولیه صحیح است.

۲- کاربرد ضریب اصطکاک برای آفت اصطکاک در جریان آرام: پارامتری که معمولاً در جریان آرام و خصوصاً در جریان مغشوش از آن زیاد استفاده می‌شود، ضریب اصطکاک فنینگ^(۱) (f) است که به صورت نیروی مقاومت^(۲) در واحد سطح خیس شده (تنش برشی τ_s در سطح) تقسیم بر حاصلضرب دانسیته در هد سرعتی یا ρv^2 تعریف می‌شود. نیرو برابر با Δp_f ضرب در سطح مقطع (πR^2) و ضرب در سطح خیس شده ($2\pi R \Delta L$) است. بنابراین رابطه بین آفت فشار ناشی از اصطکاک و f برای جریان آرام و مغشوش به صورت زیر است،

$$f = \frac{\tau_s}{\rho v^2/2} = \frac{\Delta p_f \pi R^2}{2\pi R \Delta L} \frac{\rho v^2}{2} \quad (2-10-4)$$

با مرتب کردن مجدد معادله فوق داریم،

$$\Delta p_f = 4f\rho \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2} \quad (\text{SI}) \quad (2-10-5)$$

$$\Delta p_f = 4f\rho \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2g_c} \quad (\text{English})$$

$$F_f = \frac{\Delta p_f}{\rho} = 4f \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2} \quad (\text{SI}) \quad (2-10-6)$$

$$F_f = 4f \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2g_c} \quad (\text{English})$$

با ترکیب کردن معادلات (2-10-2) و (2-10-5)، فقط برای جریان آرام داریم،

$$f = \frac{16}{N_{Re}} = \frac{16}{Dv\rho/\mu} \quad (2-10-7)$$

معادلات (2-10-2)، (2-10-5)، (2-10-6)، (2-10-7) برای جریان آرام تا عدد رینولدز ۲۱۰۰ صدق می‌کنند. در عدد رینولدز بالاتر از ۲۱۰۰، معادلات (2-10-2) و (2-10-7) برای جریان مغشوش صدق نمی‌کنند. برای جریان مغشوش معادلات (2-10-5) و (2-10-6) همراه با روشهای تجربی تخمین ضریب اصطکاک، بیشتر مورد استفاده هستند. این موضوع در بخش بعدی مفصل تر بحث خواهد شد.

مثال 2-10-2 کاربرد ضریب اصطکاک در جریان آرام

همان داده‌های مثال 2-10-1 را در نظر بگیرید. سرعت ۰/۲۷۵ m/s است. اُفت فشار Δp_f را با استفاده از روش ضریب اصطکاک فنینگ به دست آورید.

حل: همانند قبل، عدد رینولدز به صورت زیر است،

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{2/22 \times 10^{-3} \text{ m} \times 0/275 \text{ m/s} \times 875 \text{ kg/m}^3}{1/13 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}} = 473$$

از معادله (2-10-7) می‌توان ضریب اصطکاک را به دست آورد.

$$f = \frac{16}{N_{Re}} = \frac{16}{473} = 0/0338 \quad (\text{بدون بعد})$$

با به کار بردن معادله (2-10-5) در شرایطی که، $v = 0/275 \text{ m/s}$ ، $\Delta L = 0/317 \text{ m}$ و $D = 2/22 \times 10^{-3} \text{ m}$ و $\rho = 875 \text{ kg/m}^3$ نتیجه می‌شود:

$$\Delta p_f = 4f\rho \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2} = \frac{4 \times 0/0338 \times 875 \times 0/317 \times 0/275^2}{(2/22 \times 10^{-3}) \times 2} = 640 \text{ N/m}^2$$

که مقدار به دست آمده مقدار داده شده در مثال (۲-۱۰-۱) را تأیید می‌کند.

هنگامی که سیال گاز است، معادله (۲-۱۰-۲) برای جریان آرام به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$m = \frac{\pi D^4 M (p_1^2 - p_2^2)}{128(2RT)\mu(L_2 - L_1)} \quad (\text{SI}) \quad (2-10-8)$$

$$m = \frac{\pi D^4 g_c M (p_1^2 - p_2^2)}{128(2RT)\mu(L_2 - L_1)} \quad (\text{English})$$

که در این رابطه $m = \text{kg/s}$ ، $M = \text{kg/kg mol}$ جرم مولکولی برحسب T ، دمای مطلق برحسب کلوین و $R = 8314/3 \text{ N.m/kg mol.K}$ است. در سیستم واحدهای انگلیسی، $R = 1545/3 \text{ ft.lbf/lb mol.}^\circ\text{R}$ است.

۲-۱۰C اُفت فشار و ضریب اصطکاک در جریان مغشوش

همانند جریان آرام، در جریان مغشوش ضریب اصطکاک به عدد رینولدز بستگی دارد. اما به دست آوردن ضریب اصطکاک فیننگ برای جریان مغشوش برخلاف جریان آرام، به طور تئوری قابل محاسبه نیست. ضریب اصطکاک باید به طور تجربی تعیین شود و نه تنها تابع عدد رینولدز است بلکه تابع زبری سطح لوله نیز هست. در جریان آرام زبری اثری ندارد.

آنالیز ابعادی نیز وابستگی ضریب اصطکاک به این پارامترها را نشان می‌دهد. در بخشهای ۱۱-۳ و ۱۴-۴ روشهای به دست آوردن اعداد بدون بعد و اهمیت آنها بحث شده است.

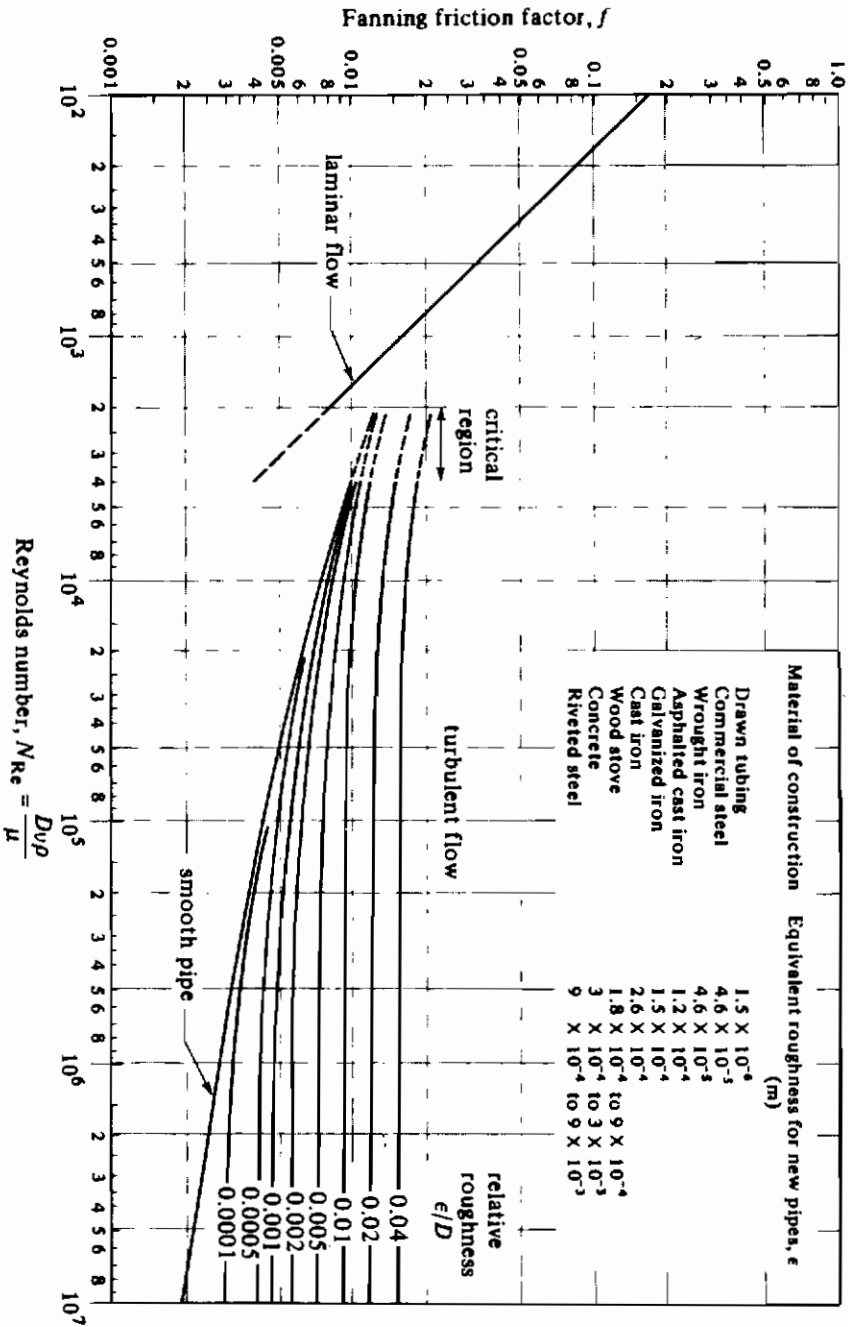
تعدادزیدی از اطلاعات تجربی ضریب اصطکاک مربوط به لوله‌های صاف و لوله‌های بازبریهی متفاوت تاکنون به دست آمده و روابطی برای آنها ارائه شده است. در طراحیها برای تخمین ضریب اصطکاک f و بنا بر این اُفت فشار ناشی از اصطکاک در لوله‌های با مقطع مدور، از نمودار ضریب اصطکاک (شکل ۳-۱۰-۳) استفاده می‌شود. این نمودار به صورت لگاریتمی و f برحسب عدد رینولدز می‌باشد. ضریب اصطکاک f در معادلات (۲-۱۰-۵) و (۲-۱۰-۶) برای تخمین اُفت اصطکاک Δp_f یا F_f مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\Delta p_f = 4f\rho \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2} \quad (\text{SI}) \quad (2-10-5)$$

$$\Delta p_f = 4f\rho \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2g_c} \quad (\text{English})$$

$$F_f = \frac{\Delta p_f}{\rho} = 4f \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2} \quad (\text{SI}) \quad (2-10-6)$$

$$F_f = 4f \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2g_c} \quad (\text{English})$$



شکل ۳-۱۰-۲. ضرایب اصطکاک برای سیالات داخل لوله‌ها (بر اساس

L. F. Moody, Trans. A.S.M.E., 66, 671, (1944); Mech. Eng. 69, 1005 (1947).

برای ناحیه‌ای با عدد رینولدز زیر ۲۱۰۰، خط مورد نظر مطابق معادله (۷-۱۰-۲) است. پایین‌ترین خط در شکل (۳-۱۰-۲) در رینولدزهای بالاتر از ۴۰۰۰ برای جریان مغشوش، مربوط به ضریب اصطکاک لوله‌های صاف مانند لوله‌های شیشه‌ای، مسی و برنجی است. خطوط دیگر که نشان‌دهنده ضرایب اصطکاک بالاتر است مربوط به زیریهای نسبی (ϵ/D) مختلف می‌باشد، که D قطر داخلی لوله برحسب متر و ϵ ارتفاع میانگین زیریهای دیواره لوله برحسب متر می‌باشد. در شکل ۳-۱۰-۲ مقادیر زیری برای لوله‌های نو داده شده است. معمول‌ترین لوله، فولاد تجارتي، دارای زیری $(1/5 \times 10^{-4} \text{ ft}) = (4/6 \times 10^{-3} \text{ m})$ است.

خواننده باید در به کاربردن ضریب اصطکاک از منابع دیگر دقت داشته باشد. در معادله (۶-۱۰-۲) این کتاب ضریب اصطکاک فنینگ به کار رفته است. ضرایب اصطکاک دیگر ممکن است یک ضریب ۴ نیز داشته باشند.

مثال ۳-۱۰-۲ کاربرد ضریب اصطکاک در جریان مغشوش.

مایع از طریق یک لوله افقی از جنس استیل تجارتي با سرعت $4/57 \text{ m/s}$ در جریان است. قطر اسمی لوله ۲ اینچ و شماره ۴۰ است. ویسکوزیته مایع $4/46 \text{ cp}$ و دانسیته آن 801 kg/m^3 است. افت انرژی مکانیکی ناشی از اصطکاک (F_f) را برحسب kg/lb برای طولی به اندازه $36/6 \text{ m}$ از لوله حساب کنید. حل: اطلاعات زیر از ضمیمه A5 موجود است: $D = 0/0525 \text{ m}$ ، $v = 4/57 \text{ m/s}$ ، و $\Delta L = 36/6 \text{ m}$ ، $\rho = 801 \text{ kg/m}^3$

$$\mu = 4/46 \text{ cp} \times (1 \times 10^{-3}) = 4/46 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

عدد رینولدز به صورت زیر محاسبه می‌شود،

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0/0525 \times 4/57 \times 801}{4/46 \times 10^{-3}} = 4/31 \times 10^4$$

بنابراین جریان مغشوش است. برای لوله‌ای از جنس فولاد تجارتي با استفاده از جدول شکل ۳-۱۰-۲، زیری $4/6 \times 10^{-5} \text{ m}$ است.

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{4/6 \times 10^{-5} \text{ m}}{0/0525 \text{ m}} = 0/00088$$

ضریب اصطکاک از شکل (۳-۱۰-۲) برای رینولدز $4/31 \times 10^4$ برابر $f = 0/0060$ است. با جایگزینی در معادله (۶-۱۰-۲) افت اصطکاک محاسبه می‌شود،

$$F_f = 4f \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2} = \frac{4 \times 0/0060 \times 36/6 \times 4/57^2}{0/0525 \times 2} = 174/8 \text{ J/kg} \quad (58/5 \text{ ft.lbf/lbm})$$

در مسائلی که با اُفت اصطکاکای (F_f) در لوله‌ها سروکار دارند، F_f معمولاً مجهول و قطر (D)، سرعت (v) و طول لوله (ΔL) معلوم هستند. بنابراین مانند مثال ۳-۱۰-۲ حل مسأله مستقیم است. اما در بعضی حالات اُفت اصطکاکای (F_f) بر اساس هد موجود مایع، قبلاً مشخص شده است. بنابراین اگر دبی حجمی و طول لوله معلوم باشند، قطر مجهولی است که باید تعیین شود. حل این مسأله به وسیله حدس و خطاست، زیرا سرعت هم در N_{Re} و هم در f ظاهر می‌شود که مجهول است. در حالت دیگر، مجدداً هنگامی که F_f معلوم است و قطر و طول لوله هم مشخص هستند، سرعت باید به روش حدس و خطا تعیین شود. مثال ۴-۱۰-۲ روش محاسبه قطر لوله را با مشخص بودن F_f نشان می‌دهد. محققان دیگر نمودارهای مناسبی برای کمک به این نوع محاسبات ارائه کرده‌اند.

مثال ۴-۱۰-۲ محاسبه قطر لوله به روش حدس و خطا

آب با دمای $4/4^\circ C$ از طریق یک لوله افقی با جنس فولاد تجارتي به طول ۳۰۵ متر و با دبی 150 gal/min در جریان است. برای غلبه بر اُفت اصطکاکای هد موجود آب $6/1 \text{ m}$ است، قطر لوله را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از ضمیمه A.2 دانسیته آب $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ و ویسکوزیته آب برابر است با،

$$\mu = 1/55 \text{ cp} \times (1 \times 10^{-3}) = 1/55 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

$$F_f = 6/1 \text{ m} \times g = 6/1 \times 9/80665 = 59/82 \text{ J/kg}$$

$$\begin{aligned} \text{شدت جریان} &= (150 \frac{\text{gal}}{\text{min}}) \times (\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}) \times (\frac{1 \text{ ft}^3}{7/481 \text{ gal}}) \times 0/028317 \text{ m}^3/\text{ft}^3 \\ &= 9/46 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$\text{قطر مجهول است} = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$v = 9/46 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \times (\frac{1}{\pi D^2/4}) = \frac{0/01204}{D^2} \text{ (بر حسب m/s)}$$

حل مسأله به وسیله حدس و خطاست زیرا v در N_{Re} و f وجود دارد. فرض کنید به عنوان حدس اول $D = 0/089 \text{ m}$ باشد،

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = 0/089 \times \frac{0/01204 \times 1000}{0/0892 \times 1/55 \times 10^{-3}} = 8/73 \times 10^4$$

با استفاده از شکل ۳-۱۰-۲، برای لوله فولادی تجارتي $\varepsilon = 4/6 \times 10^{-5} \text{ m}$ بنابراین،

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4/6 \times 10^{-5} \text{ m}}{0/089 \text{ m}} = 0/00052$$

از شکل ۳-۱۰-۲ برای $N_{Re} = 8/73 \times 10^4$ و $\varepsilon/D = 0/00052$ داریم: $f = 0/0051$.

با جایگزینی در معادله (۲-۱۰-۶)،

$$F_f = 59/82 = 4f \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2} = \frac{4 \times 0/0051 \times 305}{D \times 2} \frac{0/01204^2}{D^4}$$

و با حل رابطه نسبت به D ، نتیجه می‌شود: $D = 0/0945 \text{ m}$. مقدار به دست آمده با مقدار فرض شده $0/089$ متفاوت است.

به عنوان حدس دوم فرض می‌شود که $D = 0/0945 \text{ m}$.

$$N_{Re} = 0/0945 \times \frac{0/01204}{0/0945} \frac{1000}{1/55 \times 10^{-3}} = 8/22 \times 10^4$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4/6 \times 10^{-5}}{0/0945} = 0/00049$$

با توجه به شکل ۳-۱۰-۲، $f = 0/0052$. مشاهده می‌شود که در ناحیه مغشوش f تغییر زیادی نسبت به N_{Re} نمی‌کند.

$$F_f = 59/82 = \frac{4 \times 0/0052 \times 305}{D \times 2} \frac{0/01204^2}{D^4}$$

با حل معادله بالا، $D = 0/0954 \text{ m}$ یا $3/75 \text{ in}$. بنابراین حدس درست است و مقدار D به دست می‌آید.

۲-۱۰-D افت فشار و ضریب اصطکاک در جریان گازها

معادلات و روشهای بحث شده در این بخش برای جریان مغشوش در لوله‌ها، برای مایعات تراکم‌ناپذیر صادق است. این معادلات همچنین برای یک گاز اگر دانسیته‌اش (یا فشارش) کمتر از ۱۰٪ تغییر کند صادق است. بنابراین باید از دانسیته میانگین (ρ_{av}) برحسب kg/m^3 استفاده شود و خطاهای حاصل هم کمتر از محدوده نوسانات f خواهد بود. معادله (۲-۱۰-۵) برای گازها در جریان آرام و مغشوش به صورت زیر می‌تواند نوشته شود،

$$(p_1 - p_2)_f = \frac{4f \Delta L G^2}{D 2 \rho_{av}} \quad (2-10-9)$$

که ρ_{av} دانسیته در $(p_1 + p_2)/2$ است. همچنین N_{Re} به صورت DG/μ است، که G برحسب $\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}$ است و مقدار آن برای گازها ثابت و مستقل از دانسیته و تغییرات سرعت می‌باشد. معادله

(۲-۱۰-۵) می‌تواند به صورت زیر برای جریان آرام و مغشوش نوشته شود،

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4f \Delta L G^2 RT}{DM} \quad (\text{SI})$$

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4f \Delta L G^2 RT}{\theta_c DM} \quad (\text{English})$$

(۲-۱۰-۱۰)

که R برابر $8314/3 \text{ J/kg mol.K}$ یا $1545/3 \text{ ft.lbf/lb mol.}^\circ\text{R}$ بوده و M وزن مولکولی است.

معادلات (۲-۱۰-۹) و (۲-۱۰-۱۰) برای گازها فقط برای حالت‌هایی است که تغییرات نسبی فشار آن قدر کم است که تغییرات زیادی در سرعت ایجاد نمی‌کند. اگر سرعت خروجی زیاد باشد، جمله انرژی جنبشی که حذف شده بود مهم خواهد شد. با تغییرات فشار بیشتر از حدود ۱۰٪، جریان تراکم‌پذیر است و خواننده بایستی به بخش ۱۱-۲ مراجعه کند. سرعت در جریان آدیاباتیک در یک لوله یکنواخت نمی‌تواند از سرعت صوت تجاوز کند.

مثال ۲-۱۰-۵ خط جریان گاز و اُفت فشار

گاز نیتروژن در 25°C در یک لوله صاف به قطر داخلی 0.01 m و با سرعت جرمی 9 kg/s.m^2 در جریان است. طول لوله ۲۰۰ متر و جریان هم‌دما فرض می‌شود. فشار در ورودی لوله $2/0.265 \times 10^5 \text{ Pa}$ است. فشار خروجی را محاسبه کنید.

حل: ویسکوزیته گاز از ضمیمه A.3 برابر $1/77 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ در دمای $T = 298/15 \text{ K}$ است. فشار ورودی گاز $p_1 = 2/0.265 \times 10^5 \text{ Pa}$ ، $G = 9 \text{ kg/s.m}^2$ ، $D = 0.01 \text{ m}$ ، $M = 28/0.2 \text{ kg/kgmol}$ ، $\Delta L = 200 \text{ m}$ و $R = 8314/3 \text{ J/kg mol.K}$ است. با فرض این‌که معادله (۲-۱۰-۱۰) برای این حالت برقرار باشد و اُفت فشار کمتر از ۱۰٪ باشد، عدد رینولدز به صورت زیر است،

$$N_{\text{Re}} = \frac{DG}{\mu} = \frac{0.01 \times 9}{1/77 \times 10^{-5}} = 5085$$

بنابراین جریان مغشوش است. با به کار بردن شکل (۲-۱۰-۳) و $f = 0.0090$ برای لوله صاف و جایگزینی در معادله (۲-۱۰-۱۰) نتیجه می‌شود:

$$P_1^2 - P_2^2 = \frac{4f \Delta L G^2 RT}{DM}$$

$$(2/0.265 \times 10^5)^2 - P_2^2 = \frac{4 \times 0.009 \times 200 \times 9^2 \times 8314/3 \times 298/15}{0.01 \times 28/0.2}$$

$$4/1067 \times 10^{10} - P_2^2 = 0.5160 \times 10^{10}$$

پس از حل، $p_2 = 1/895 \times 10^5 \text{ Pa}$ به دست می‌آید. بنابراین معادله (۲-۱۰-۱۰) می‌تواند در این‌جا استفاده شود، زیرا افت فشار کمتر از ۱۰٪ است.

۲-۱۰-E اثر انتقال حرارت بر ضریب اصطکاک

ضریب اصطکاک f داده شده در شکل (۲-۱۰-۳) برای جریان همدمما است، یعنی این که انتقال حرارت وجود نداشته باشد. هنگامی که سیالی سرد یا گرم می‌شود، تغییرات دما باعث تغییر خواص فیزیکی سیال مخصوصاً ویسکوزیته می‌شود. در کاربردهای مهندسی از روش Sieder و Tate برای پیش‌بینی ضریب اصطکاک جریان غیر همدمما برای مایعات و گازها استفاده می‌شود. روش مذکور به شرح زیر است:

- ۱- دمای میانگین توده‌ای $t_a^{(1)}$ را به صورت میانگین دمای توده‌ای ورودی و خروجی سیال محاسبه کنید.
- ۲- با استفاده از μ_a در t_a ، عدد رینولدز Re را محاسبه کنید و با استفاده از شکل ۳-۱۰-۲، f_a را به دست آورید.
- ۳- با استفاده از دمای دیواره لوله t_w ، مقدار μ_w را در t_w پیدا کنید.
- ۴- با استفاده از حالت‌های زیر مقدار ψ را برای حالت مورد نظر پیدا کنید.

$$\psi = \left(\frac{\mu_a}{\mu_w} \right)^{0.17} \quad (\text{heating}) \quad N_{Re} > 2100 \quad (2-10-11)$$

$$\psi = \left(\frac{\mu_a}{\mu_w} \right)^{0.11} \quad (\text{cooling}) \quad N_{Re} > 2100 \quad (2-10-12)$$

$$\psi = \left(\frac{\mu_a}{\mu_w} \right)^{0.38} \quad (\text{heating}) \quad N_{Re} < 2100 \quad (2-10-13)$$

$$\psi = \left(\frac{\mu_a}{\mu_w} \right)^{0.23} \quad (\text{cooling}) \quad N_{Re} < 2100 \quad (2-10-14)$$

۵- ضریب اصطکاک نهایی از تقسیم f_a به دست آمده از مرحله ۲ بر ψ به دست می‌آید.

بنابراین هنگامی که سیال گرم می‌شود، ψ بزرگتر از ۱ بوده و f کاهش می‌یابد. در موقع سرد شدن مایع حالت عکس اتفاق می‌افتد.

۲-۱۰-F افت‌های اصطکاک در انبساط، انقباض و اتصالات

افت ناشی از اصطکاک پوسته‌ای در جریان عبوری از یک لوله مستقیم با استفاده از ضریب اصطکاک فنینگ محاسبه می‌شود. اما اگر سرعت سیال به دلیل تغییر جهت یا تغییر قطر لوله، تغییر کند افت‌های

اصطکاک اضافی نیز اتفاق می‌افتد. این اُفت‌های اضافی به دلیل افزایش اغتشاش و این نیز به نوبه خود در اثر ایجاد گردابه‌ها و عوامل دیگر است. روشهایی برای تخمین این اُفت‌ها در زیر آورده شده است:

۱- اُفت ناشی از انبساط ناگهانی: اگر مقطع یک لوله خیلی ملایم افزایش یابد، اُفت اضافی در جریان ایجاد نمی‌شود. اگر تغییر قطر به صورت ناگهانی باشد، در اثر ایجاد گردابه‌ها به وسیله جت سیال در حال انبساط در ناحیه با قطر زیاد، یک اُفت انرژی اضافی اتفاق می‌افتد. در صورتی که در هر دو مقطع جریان مغشوش باشد، اُفت اصطکاک از رابطه زیر، که قبلاً در مثال ۴-۸-۲ (معادله ۳۶-۸-۲) به دست آمده بود، محاسبه می‌شود،

$$h_{ex} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2\alpha} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2\alpha} = K_{ex} \frac{v_1^2}{2\alpha} \frac{J}{kg} \quad (2-10-15)$$

در این رابطه h_{ex} اُفت اصطکاک بر حسب J/kg و K_{ex} ضریب اُفت انبساطی و مساوی با $(1 - A_1/A_2)^2$ ، v_1 سرعت بالا دست جریان در قسمت با قطر کمتر بر حسب m/s، v_2 سرعت پایین دست جریان و $\alpha = 1/0$ است. اگر جریان در هر دو مقطع آرام باشد، پارامتر α در معادله برابر $\frac{1}{4}$ است. در سیستم واحدهای انگلیسی طرف دوم رابطه (۲-۱۰-۱۵) بر g_c تقسیم می‌شود و

$$h = ft \cdot lb_f / lb_m$$

۲- اُفت ناشی از انقباض ناگهانی: هنگامی که مقطع لوله به طور ناگهانی کاهش می‌یابد، جریان نمی‌تواند در گوشه‌های تیز حرکت کند و به دلیل گردابه‌های تشکیل شده، اُفت اصطکاک اضافی اتفاق می‌افتد. برای جریان مغشوش، این اُفت به صورت زیر است،

$$h_c = 0.55 \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{v_2^2}{2\alpha} = K_c \frac{v_2^2}{2\alpha} \frac{J}{kg} \quad (2-10-16)$$

که در این جا h_c اُفت اصطکاک، $\alpha = 1$ برای جریان مغشوش، v_2 سرعت میانگین در مقطع کوچکتر یا پایین دست و K_c ضریب اُفت انقباضی و تقریباً مساوی با $0.55(1 - A_2/A_1)$ است. در جریان آرام، همان رابطه با $\alpha = \frac{1}{4}$ قابل استفاده است. بر حسب واحدهای انگلیسی طرف راست رابطه بر g_c تقسیم می‌شود و

$$h = ft \cdot lb_f / lb_m$$

جدول ۱-۱۰-۲. اُفت اصطکاکی برای جریان مغشوش در شیرها و اتصالات

Type of Fitting or Valve	Frictional Loss, Number of Velocity Heads, K_f	Frictional Loss, Equivalent Length of Straight Pipe in Pipe Diameters, L_e/D
Elbow, 45°	0.35	17
Elbow, 90°	0.75	35
Tee	1	50
Return bend	1.5	75
Coupling	0.04	2
Union	0.04	2
Gate valve		
Wide open	0.17	9
Half open	4.5	225
Globe valve		
Wide open	6.0	300
Half open	9.5	475
Angle valve, wide open	2.0	100
Check valve		
Ball	70.0	3500
Swing	2.0	100
Water meter, disk	7.0	350

Source: R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973. With permission.

۳- تلفات در اتصالات و شیرها: اتصالات و شیرها خطوط جریان را در یک لوله بهم می‌ریزند و باعث ایجاد اُفت اضافی می‌شوند. در یک لوله کوتاه با اتصالات زیاد، اُفت اصطکاکی ناشی از این اتصالات می‌تواند بیشتر از اُفت در لوله مستقیم باشد. اُفت اصطکاکی ناشی از اتصالات و شیرها براساس معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$h_f = K_f \frac{v_1^2}{2} \quad (2-10-17)$$

در این رابطه K_f پارامتر تلفات برای اتصال یا شیر و v_1 سرعت میانگین در لوله قبل از اتصال مربوطه است. مقادیر تجربی برای K_f برای جریان مغشوش در جدول (۲-۱۰-۱) و برای جریان آرام در جدول (۲-۱۰-۲) داده شده است.

به عنوان روش دیگر، در بعضی مراجع و کتابها (B1) اطلاعات مربوط به اُفت‌ها در اتصالات و شیرها را به صورت طول معادل از لوله‌ای به همان قطر ارائه شده‌اند. این اطلاعات که در جدول (۲-۱۰-۱) نیز داده شده است، به صورت L_e/D می‌باشد که L_e طول معادل از لوله مستقیم برحسب متر با داشتن اُفت اصطکاکی یکسان با اتصال، و D قطر داخلی لوله برحسب متر است. مقادیر K در

معادله‌های (۲-۱۰-۱۵) و (۲-۱۰-۱۶) می‌تواند به وسیله ضرب کردن K در ۵۰ (P1) به مقادیر L_e/D تبدیل شود. مقادیر L_e برای اتصالات به سادگی به طول لوله مستقیم اضافه می‌شوند و این طول کلی در معادله (۲-۱۰-۶) به کار می‌رود.

۴- اُفتهای اصطکاکی در معادله موازنه انرژی مکانیکی: اُفت اصطکاکی ناشی از اصطکاک در لوله مستقیم، اُفت ناشی از انبساط، اُفت ناشی از انقباض و اُفت در شیرها و اتصالات، همه در عبارت ΣF معادله (۲-۷-۲۸) برای موازنه انرژی مکانیکی جمع شده‌اند، به طوری که،

$$\Sigma F = 4f \frac{\Delta L}{D} \frac{v^2}{2} + K_{ex} \frac{v_1^2}{2} + K_c \frac{v_2^2}{2} + K_f \frac{v_1^2}{2} \quad (2-10-18)$$

اگر همه سرعتهای v و v_1 و v_2 یکسان باشند، بنابراین با فاکتور گرفتن آن، معادله (۲-۱۰-۱۸) به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\Sigma F = \left(4f \frac{\Delta L}{D} + K_{ex} + K_c + K_f \right) \frac{v^2}{2} \quad (2-10-19)$$

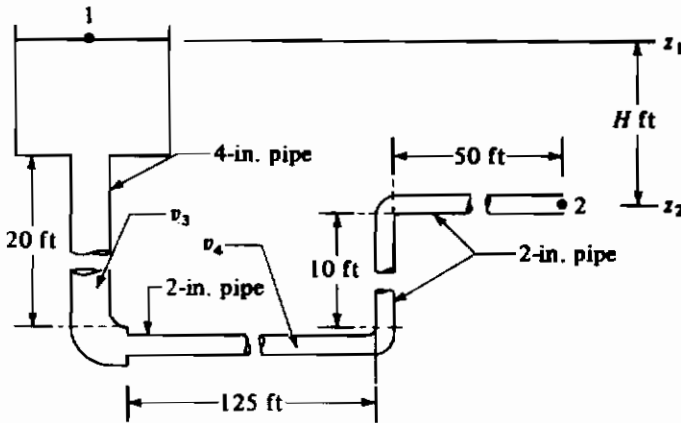
کاربرد معادله موازنه انرژی مکانیکی (۲-۷-۲۸) با معادله (۲-۱۰-۱۸) در مثالهای زیر نشان داده می‌شود.

مثال ۲-۱۰-۶ اُفتهای اصطکاکی و موازنه انرژی مکانیکی

مطابق شکل ۲-۱۰-۴ یک تانک حاوی آب در $82/2^\circ\text{C}$ در ارتفاع قرار گرفته است. می‌خواهیم میزان تخلیه در نقطه ۲ برابر $0/233 \text{ ft}^3/\text{s}$ باشد. ارتفاع سطح آب در تانک نسبت به نقطه تخلیه (H) برحسب فوت چقدر باید باشد؟ لوله به کار رفته از جنس فولاد تجارتي شماره ۴۰ است.

جدول ۲-۱۰-۲. اُفت اصطکاکی برای جریان آرام در شیرها و اتصالات (K1)

Type of Fitting or Valve	Frictional Loss, Number of Velocity Heads, K_f Reynolds Number					
	50	100	200	400	1000	Turbulent
Elbow, 90°	17	7	2.5	1.2	0.85	0.75
Tee	9	4.8	3.0	2.0	1.4	1.0
Globe valve	28	22	17	14	10	6.0
Check valve, swing	55	17	9	5.8	3.2	2.0



شکل ۲-۱۰-۴. نمودار فرایند مثال ۲-۱۰-۶

حل: معادله موازنه انرژی مکانیکی (۲-۷-۲۸) بین نقاط ۱ و ۲ نوشته می‌شود،

$$z_1 \frac{g}{g_c} + \frac{v_1^2}{2\alpha g_c} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) - W_s = z_2 \frac{g}{g_c} + \frac{v_2^2}{2\alpha g_c} + \sum F \quad (2-10-20)$$

از ضمیمه A.2 برای آب، $\rho = 0.97 \times 62.43 = 60.52 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$

$$\mu = 0.347 \text{ cp} = 0.347 \times (6/7.197 \times 10^{-4}) = 2/33 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}$$

قطر لوله‌ها به صورت زیر هستند:

$$D_4 = \frac{4/0.26}{12} = 0.3353 \text{ ft} \quad A_4 = 0.0884 \text{ ft}^2 \quad \text{برای لوله ۴ اینچی}$$

$$D_2 = \frac{2/0.67}{12} = 0.1722 \text{ ft} \quad A_2 = 0.02330 \text{ ft}^2 \quad \text{برای لوله ۲ اینچی}$$

سرعتها در لوله‌های ۲ اینچی و ۴ اینچی به صورت زیر هستند،

$$v_4 = \frac{0.223 \text{ ft}^3/\text{s}}{0.0884 \text{ ft}^2} = 2.523 \text{ ft/s} \quad (\text{برای لوله ۴ اینچی})$$

$$v_2 = \frac{0.223}{0.02330} = 9.57 \text{ ft/s} \quad (\text{برای لوله ۲ اینچی})$$

عبارت $\sum F$ مربوط به افتهای اصطکاکی سیستم شامل این موارد است: (۱) انقباض در خروجی تانک، (۲) اصطکاک در لوله ۴ اینچی، (۳) اصطکاک در زانوی ۴ اینچی، (۴) انقباض از لوله ۴ اینچی به لوله ۲ اینچی، (۵) اصطکاک در لوله ۲ اینچی، (۶) اصطکاک در دو زانوی ۲ اینچی.

محاسبات مربوط به این ۶ مورد به صورت زیر است:

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

۱- انقباض در خروجی تانک: از معادله (۱۶-۱۰-۲) برای انقباض از سطح مقطع A_1 به سطح مقطع A_2 استفاده می‌شود. چون سطح مقطع تانک A_1 در مقایسه با A_2 خیلی بزرگ است، بنابراین:

$$K_c = 0.55 \times \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) = 0.55 \times (1 - 0) = 0.55$$

$$h_c = K_c \frac{v^2}{2g_c} = 0.55 \times \frac{2/523^2}{2 \times 32/174} = 0.54 \text{ ft.lbf/lb}_m$$

۲- اصطکاک در لوله ۴ اینچی: عدد رینولدز عبارت است از:

$$N_{Re} = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{0.3353 \times 2/523 \times 60/52}{2/33 \times 10^{-4}} = 2/193 \times 10^5$$

بنابراین جریان معشوش است. از شکل ۳-۱۰-۲، $\epsilon = 4/6 \times 10^{-5} \text{ m}$ یا $\epsilon = 1/5 \times 10^{-4} \text{ ft}$.

$$\frac{\epsilon}{D_2} = \frac{0.00015}{0.3353} = 0.000448$$

سپس برای $N_{Re} = 219300$ ، ضریب اصطکاک فنینگ $f = 0.0047$ به دست می‌آید. برای یک

لوله ۴ اینچی با $\Delta L = 20 \text{ ft}$ با جایگزینی آن در معادله (۶-۱۰-۲) نتیجه می‌شود:

$$F_f = 4f \frac{\Delta L v^2}{D 2g_c} = 4 \times 0.0047 \times \frac{20}{0.3353} \frac{2/523^2}{2 \times 32/174} = 0.111 \text{ ft.lbf/lb}_m$$

۳- اصطکاک در زانوی ۴ اینچی: از جدول ۱-۱۰-۲، $K_f = 0.75$ ، با جایگزینی آن در معادله

(۱۷-۱۰-۲)،

$$h_f = K_f \frac{v^2}{2g_c} = 0.75 \times \frac{2/523^2}{2 \times 32/174} = 0.074 \text{ ft.lbf/lb}_m$$

۴- تلفات به دلیل انقباض از لوله ۴ اینچی به لوله ۲ اینچی: با استفاده از معادله (۱۶-۱۰-۲)

برای انقباض از سطح مقطع A_2 به A_4 ،

$$K_c = 0.55 \times \left(1 - \frac{A_4}{A_2}\right) = 0.55 \times \left(1 - \frac{0.0233^2}{0.0884^2}\right) = 0.405$$

$$h_c = K_c \frac{v^2}{2g_c} = 0.405 \times \frac{9/57^2}{2 \times 32/174} = 0.575 \text{ ft.lbf/lb}_m$$

۵- اصطکاک در لوله ۲ اینچی: عدد رینولدز عبارت است از:

$$N_{Re} = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{0.1722 \times 9/57 \times 60/52}{2/33 \times 10^{-4}} = 4/28 \times 10^5$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.00015}{0.1722} = 0.00087$$

ضریب اصطکاک فینینگ از شکل (۳-۱۰-۲) به دست می‌آید، $f = ۰/۰۰۴۸$. طول کل برابر است با $\Delta L = ۱۲۵ + ۱۰ + ۵۰ = ۱۸۵$ ft. با جایگزینی آن در معادله (۶-۱۰-۲)،

$$F_f = 4f \frac{\Delta L v^2}{D 2g_c} = 4 \times ۰/۰۰۴۸ \times \frac{۱۸۵ \times ۹/۵۷^2}{۰/۱۷۲۲ \times ۲ \times ۳۲/۱۷۴} = ۲۹/۴ \text{ ft.lbf/lb}_m$$

۶- اصطکاک در دو زانوی ۲/۱ینچی: در شرایط $K_f = ۰/۷۵$ وجود دو زانویی،

$$h_f = 2K_f \frac{v^2}{2g_c} = 2 \times ۰/۷۵ \times \frac{۹/۵۷^2}{۲ \times ۳۲/۱۷۴} = ۲/۱۳۶ \text{ ft.lbf/lb}_m$$

کل افت اصطکاک ΣF مجموع موارد ۱ تا ۶ است.

$$\Sigma F = ۰/۰۵۴ + ۰/۱۱۱ + ۰/۰۷۴ + ۰/۵۷۵ + ۲۹/۴ + ۲/۱۳۶ = ۳۲/۳۵ \text{ ft.lbf/lb}_m$$

با در نظر گرفتن z_2 به عنوان سطح مبنا، $z_1 = H$ و $z_2 = ۰$. چون جریان مغشوش است بنابراین، $\alpha = ۱$ ، همچنین $v_1 = ۰$ و $v_2 = ۹/۵۷$ ft/s. چون p_1 و p_2 هر دو فشار مطلق یک اتمسفر هستند و $\rho_1 = \rho_2$ بنابراین،

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = ۰$$

همچنین چون پمپی به کار نرفته است، پس $W_s = ۰$. با جایگزینی این مقادیر در معادله (۲۰-۱۰-۲) نتیجه می‌شود،

$$\frac{H g_c}{g_c} + ۰ + ۰ - ۰ = ۰ + \frac{۱ \times ۹/۵۷^2}{۲ \times ۳۲/۱۷۴} + ۳۲/۳۵$$

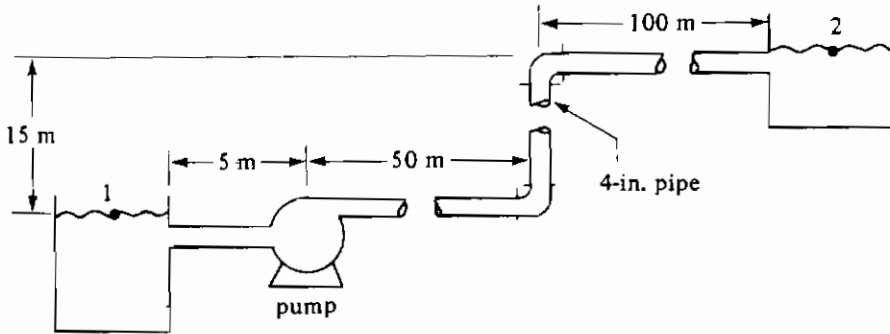
با حل معادله بالا، $H(g/g_c) = ۳۳/۷۷$ ft.lbf/lb_m ($۱۰۰/۹$ J/kg). تخلیه (H) برابر با $۳۳/۷۷$ ft به دست می‌آید.

مثال ۷-۱۰-۲-۱۰-۷ موازنه انرژی مکانیکی با وجود پمپ در موازنه انرژی مکانیکی

آب در ۲۰°C از یک تانک به تانک دیگری در ارتفاع بالاتر با نرخ $۵ \times ۱۰^{-۳} \text{ m}^3/\text{s}$ پمپ می‌شود. همه لوله‌ها مطابق شکل ۵-۱۰-۲، ۴ اینچی شماره ۴۰ هستند. راندمان پمپ ۶۵٪ است. توان لازم برای پمپ را پیدا کنید.

حل: معادله موازنه انرژی مکانیکی (۲۸-۷-۲) بین نقاط ۱ و ۲ نوشته می‌شود. نقطه ۱ به عنوان سطح مبنا در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{1}{2\alpha} (v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \Sigma F + W_s = 0 \quad (28-7-2)$$



شکل ۵-۱۰-۲. نمودار فرایند مثال ۷-۱۰-۲

از ضمیمه A.2 برای آب، $\rho = 998/2 \text{ kg/m}^3$ و $\mu = 1/005 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ برای لوله ۴ اینچی از ضمیمه A.5، $D = 0/1023 \text{ m}$ و $A = 8/219 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ سرعت در لوله v است، $v = 5 \times 10^{-3} / 8/219 \times 10^{-3} = 0/6083$ عدد رینولدز به صورت زیر است،

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0/1023 \times 0/6083 \times 998/2}{1/005 \times 10^{-3}} = 6/181 \times 10^4$$

بنابراین جریان مغشوش است.

عبارت ΣF شامل این موارد است: (۱) انقباض در خروجی از تانک، (۲) اصطکاک در لوله مستقیم، (۳) اصطکاک در دو زانو، (۴) انبساط در ورودی به تانک.

۱- تلفات به دلیل انقباض در خروجی از تانک: از معادله (۱۶-۱۰-۲) برای انقباض از سطح مقطع بزرگتر A_1 به سطح مقطع کوچکتر A_2 داریم،

$$K_c = 0/55 \times \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) = 0/55 \times (1 - 0) = 0/55$$

$$h_c = K_c \frac{v^2}{2\alpha} = 0/55 \times \frac{0/6083^2}{2 \times 1} = 0/102 \text{ J/kg}$$

۲- اصطکاک در لوله مستقیم: از شکل ۳-۱۰-۲، $\epsilon = 4/6 \times 10^{-5} \text{ m}$ ، $f = 0/0051$ ، $N_{Re} = 6/181 \times 10^4$ ، بنابراین، برای $\epsilon/D = 4/6 \times 10^{-5} / 0/1023 = 0/00045$ ، با جایگزینی این مقادیر در معادله (۶-۱۰-۲) برای $\Delta L = 5 + 50 + 15 + 100 = 170 \text{ m}$ نتیجه می شود،

$$F_f = 4f \frac{\Delta L v^2}{D} = 4 \times 0/0051 \times \frac{170 \times 0/6083^2}{0/1023 \times 2} = 6/272 \text{ J/kg}$$

۳- اصطکاک در دو زانو: از جدول ۱-۱۰-۲، $K_f = 0/75$ ، سپس با جایگزینی آن در معادله (۷-۱۰-۲) برای دو زانو خواهیم داشت،

$$h_f = 2K_f \frac{v^2}{\gamma} = 2 \times 0.75 \times \frac{0.6083^2}{\gamma} = 0.278 \text{ J/kg}$$

۴- تلفات به دلیل انبساط در ورود به تانک: با استفاده از معادله (۲-۱۰-۱۵)،

$$K_{ex} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = (1 - 0)^2 = 1$$

$$h_{ex} = K_{ex} \frac{v^2}{\gamma} = 1 \times \frac{0.6083^2}{\gamma} = 0.185 \text{ J/kg}$$

کل اُفت اصطکاکی ΣF به صورت زیر است،

$$\Sigma F = 0.102 + 6/272 + 0.278 + 0.185 = 6/837 \text{ J/kg}$$

با جایگزینی در معادله (۲-۷-۲۸) در شرایطی که $(v_1^2 - v_2^2) = 0$ و $(p_2 - p_1) = 0$

$$0 + 9/806 \times (15 - 0) + 0 + 6/837 + W_s = 0$$

پس از حل، $W_s = -153/93 \text{ J/kg}$. دبی جرمی برابر با $m = 5 \times 10^{-3} \times (998/2) = 4/991 \text{ kg/s}$ است. با استفاده از معادله (۲-۷-۳۰)،

$$W_s = \eta W_p$$

$$-153/93 = -0.65 \times W_p$$

با حل معادله، $W_p = 236/8 \text{ J/kg}$. توان پمپ برحسب kW عبارت است از،

$$kW = mW_p = \frac{4/991 \times 236/8}{1000} = 1/182 \text{ kW}$$

۲-۱۰G اُفت اصطکاکی در کانالهای غیرمدور

اُفت اصطکاکی در کانالهای طویل یا مجراهایی با مقطع غیرمدور با همان معادلات مربوط به لوله‌های مدور قابل محاسبه است، به شرطی که در رابطه عدد رینولدز و معادله ضریب اصطکاک (۲-۱۰-۶) از قطر معادل استفاده شود. قطر معادل D به صورت چهار برابر شعاع هیدرولیک r_H تعریف می‌شود. شعاع هیدرولیک به صورت نسبت سطح مقطع کانال به محیط خیس شده کانال تعریف می‌شود. این تعریف فقط برای جریان مغشوش است. بنابراین،

$$D = 4r_H = 4 \times \frac{\text{سطح مقطع کانال}}{\text{محیط خیس شده کانال}} \quad (2-10-21)$$

به عنوان مثال برای لوله با مقطع مدور،

$$D = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$$

برای یک فضای حلقوی^(۱) با قطر خارجی D_1 و قطر داخلی D_2 ،

$$D = \frac{4(\pi D_1^2/4 - \pi D_2^2/4)}{\pi D_1 + \pi D_2} = D_1 - D_2 \quad (2-10-22)$$

برای یک کانال با مقطع مستطیل به ابعاد a و b فوت،

$$D = \frac{4(ab)}{2a + 2b} = \frac{2ab}{a + b} \quad (2-10-23)$$

در جریان مغشوش، برای کانالهای باز و مجراهای نیمه باز قطر معادل و معادله (۲-۱۰-۶) مورد استفاده می‌باشند. قطر معادل برای مستطیلی با عمق مایع y و عرض b برابر است با،

$$D = \frac{4(by)}{b + 2y} \quad (2-10-24)$$

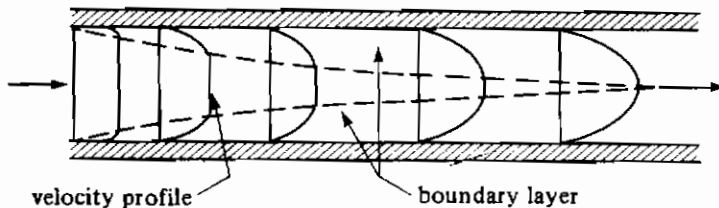
برای یک جریان عریض و کم عمق به اندازه y ،

$$D = 4y \quad (2-10-25)$$

برای جریان آرام در مجاری که در کل مقطع آنها سیال جریان دارد و در کانالهای باز با سطح مقطع غیرمدور، معادلاتی در مراجع دیگر داده شده‌اند.

۲-۱۰H مقطع ورودی یک لوله

اگر توزیع سرعت در ناحیه ورودی یک لوله کاملاً صاف باشد، قسمتی از طول لوله لازم است تا در آن فاصله توزیع سرعت به طور کامل تثبیت شود. این طول برای تشکیل جریان کاملاً توسعه یافته، طول انتقالی^(۲) یا طول ورودی^(۳) نامیده می‌شود. این طول برای جریان آرام در شکل ۲-۱۰-۶ نشان داده شده است. در ورودی توزیع سرعت کاملاً صاف است. یعنی سرعت در تمام نقاط مقطع یکسان است. همچنان که سیال در لوله پیش می‌رود، ضخامت لایه مرزی افزایش می‌یابد تا هنگامی که خطوط لایه مرزی در مرکز لوله به یکدیگر برسند و توزیع سرعت به صورت سهمی شکل بگیرد.



شکل ۲-۱۰-۶. توزیع سرعت نزدیک ورودی یک لوله در جریان آرام

1. annular space
3. entry length

2. transition length

طول ورودی (L_e) تقریبی یک لوله به قطر D تا تشکیل توزیع سرعت کاملاً توسعه یافته^(۱) در جریان آرام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{L_e}{D} = 0.0575 N_{Re} \quad (2-10-26)$$

برای جریان مغشوش، رابطه‌ای برای تخمین طول ورودی تا تشکیل توزیع سرعت کاملاً توسعه یافته در دسترس نیست. به عنوان یک تقریب، طول ورودی تقریباً مستقل از عدد رینولدز بوده و تقریباً ۵۰ برابر قطر است.

مثال ۸-۱۰-۲ طول ورودی برای یک سیال در یک لوله

آب در 20°C از طریق یک لوله به قطر 0.010 m با سرعت 0.1 m/s در جریان است. الف) طول ورودی را حساب کنید.

ب) طول ورودی را برای جریان مغشوش حساب کنید.

حل: برای قسمت (الف) از ضمیمه A.2، $\rho = 998/2\text{ kg/m}^3$ و $\mu = 1/0.05 \times 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ ، عدد رینولدز عبارت است از:

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0.01 \times 0.1 \times 998/2}{1/0.05 \times 10^{-3}} = 993/2$$

با به کار بردن معادله (۲-۱۰-۲۶) برای جریان آرام،

$$\frac{L_e}{D} = \frac{L_e}{0.01} = 0.0575 \times 993/2 = 57/1$$

بنابراین $L_e = 0.571\text{ m}$ و برای جریان مغشوش در قسمت (ب) $L_e = 50 (0.01) = 0.5\text{ m}$.

اُفت فشار یا ضریب اصطکاک در طول ورودی بزرگتر از قسمت توسعه یافته جریان است. ضریب اصطکاک در جریان آرام در ورودی بیشترین مقدار است و سپس به آهستگی تا ناحیه توسعه یافته جریان کاهش می‌یابد. در جریان مغشوش در قسمتی از ورودی لوله لایه مرزی آرام است و توزیع ضریب اصطکاک بسیار پیچیده است. به صورت تقریبی ضریب اصطکاک برای طول ورودی دو یا سه برابر ضریب اصطکاک در ناحیه توسعه یافته جریان است.

جدول ۳-۱۰-۲. محدوده‌های سرعت در لوله‌های فولادی

Type of Fluid	Type of Flow	Velocity	
		ft/s	m/s
Nonviscous liquid	Inlet to pump	2-3	0.6-0.9
	Process line or pump discharge	5-8	1.5-2.5
Viscous liquid	Inlet to pump	0.2-0.8	0.06-0.25
	Process line or pump discharge	0.5-2	0.15-0.6
Gas		30-120	9-36
Steam		30-75	9-23

۲-۱۰-۱ انتخاب اندازه لوله

در سیستم‌های لوله‌کشی بزرگ و پیچیده، اندازه بهینه لوله برای یک موقعیت خاص بستگی به میزان سرمایه‌گذاری، هزینه‌های انرژی، نگهداری و مانند آن دارد. نمودارهایی برای تعیین اندازه بهینه لوله‌ها در دسترس هستند. اما برای سیستم‌های کوچک، تقریباً معمولاً دقت لازم را دارند. نمونه‌هایی از محدوده‌های سرعت در لوله‌ها در جدول (۳-۱۰-۲) نشان داده شده‌اند.

۲-۱۱ جریان تراکم‌پذیر گازها

۲-۱۱-۱ مقدمه و معادله اساسی برای جریان در لوله‌ها

هنگامی که تغییرات فشار در گاز بیشتر از ۱۰٪ است، معادلات آفت اصطکاکی (۲-۱۰-۹) و (۲-۱۰-۱۰) به دلیل تراکم‌پذیر بودن جریان ممکن است خطا داشته باشند. بنابراین، حل معادله انرژی به دلیل تغییر دانسیته یا حجم مخصوص با تغییر فشار، پیچیده‌تر خواهد شد. محدوده جریان تراکم‌پذیر بسیار وسیع است و محدوده وسیعی از تغییرات در شکل، فشار، سرعت و دما را در بر می‌گیرد. در این بخش بحث خود را به جریان هم‌دما و آدیاباتیک در لوله‌های مستقیم با مقطع ثابت محدود می‌کنیم و جریان در نازل‌ها مورد بحث قرار نخواهد گرفت. جریان در نازل‌ها در مراجع دیگر به طور مفصل بحث شده است.

معادله عمومی موازنه انرژی مکانیکی (۲-۷-۲۷) بعنوان نقطه شروع مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض می‌شود جریان مغشوش باشد، بنابراین $\alpha = 1$ و کار محوری وجود ندارد ($W_s = 0$). معادله (۲-۷-۲۷) برای طول دیفرانسیلی dl به صورت زیر است:

$$v dv + g dz + \frac{dp}{\rho} + dF = 0 \quad (2-11-1)$$

برای یک مجرای افقی $dz = 0$. با به کار بردن فقط عبارت اصطکاک برشی دیواره برای dF و نوشتن معادله (۲-۱۰-۶) به شکل دیفرانسیلی خواهیم داشت:

$$v dv + V dp + \frac{4fv^2 dL}{2D} = 0 \quad (2-11-2)$$

که در این جا $v = 1/\rho$. با فرض جریان پایدار و قطر ثابت لوله، مقدار G ثابت است و داریم:

$$G = v\rho = \frac{v}{V} \quad (2-11-3)$$

$$dv = G dV \quad (2-11-4)$$

از جایگزینی معادلات (۲-۱۱-۳) و (۲-۱۱-۴) در (۲-۱۱-۲) و مرتب کردن آن نتیجه می شود،

$$G^2 \frac{dV}{V} + \frac{dp}{V} + \frac{2fG^2}{D} dL = 0 \quad (2-11-5)$$

این رابطه معادله دیفرانسیل اصلی است که باید انتگرالگیری شود. برای انجام این کار، رابطه بین V و p بایستی مشخص باشد تا انتگرال dp/V گرفته شود. این انتگرال بستگی به طبیعت جریان دارد و دو شرط مهم جریان آدیاباتیک و همدمای نیز در آن به کار رفته است.

۲-۱۱B جریان تراکم پذیر همدمای

در جریان همدمای، برای انتگرالگیری از معادله (۲-۱۱-۵) گاز ایده آل فرض می شود که در این حالت،

$$pV = \frac{1}{M} RT \quad (2-11-6)$$

با حل معادله (۲-۱۱-۶) نسبت به V و جایگزینی آن در معادله (۲-۱۱-۵) و انتگرالگیری با فرض ثابت بودن f داریم:

$$G^2 \int_1^2 \frac{dV}{V} + \frac{M}{RT} \int_1^2 p dp + 2f \frac{G^2}{D} \int_1^2 dL = 0 \quad (2-11-7)$$

$$G^2 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{M}{2RT} (p_2^2 - p_1^2) + 2f \frac{G^2}{D} \Delta L = 0 \quad (2-11-8)$$

از جایگزینی p_1/p_2 با V_2/V_1 و مرتب کردن معادله نتیجه می شود،

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4f\Delta LG^2 RT}{DM} + \frac{2G^2 RT}{M} \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (2-11-9)$$

که در این جا M وزن مولکولی برحسب kg mass/kg mol ، همچنین $R = 8314/34 \text{ N.m/kg mol.K}$ و

T دما برحسب کلوین است. مقدار $p_{av}/\rho_{av} = RT/M$ است که $p_{av} = (p_1 + p_2)/2$ و ρ_{av} دانسیته میانگین در T و p_{av} است. در سیستم واحدهای انگلیسی $R = 1545/3 \text{ ft.lbf/lb mol.}^\circ\text{R}$ و طرف راست معادله بر g_c تقسیم می‌شود. معادله (۲-۱۱-۹) به شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$(p_1 - p_2)_f = \frac{4f\Delta LG^2}{2D\rho_{av}} + \frac{G^2}{\rho_{av}} \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (2-11-10)$$

اولین جمله سمت راست معادلات (۲-۱۱-۹) و (۲-۱۱-۱۰) همان افت اصطکاک در معادلات (۲-۱۰-۹) و (۲-۱۰-۱۰) است. آخرین جمله در هر دو معادله معمولاً در کانالهای طویل ناچیز است، مگر این که افت فشار خیلی زیاد باشد.

مثال ۲-۱۱-۱ جریان تراکم‌پذیر گاز یک در خط لوله

گاز طبیعی که عمدتاً متان است، از طریق یک خط لوله به قطر $1/016 \text{ m}$ به نقطه‌ای در فاصله $10^5 \times 1/609 \text{ m}$ با شدت جریان $2/077 \text{ kgmol/s}$ فرستاده می‌شود. می‌توان خط راه‌دما در دمای ثابت $288/8 \text{ K}$ فرض کرد. فشار مطلق p_2 در خروجی خط $170/3 \times 10^3 \text{ Pa}$ است. فشار p_1 را در ورودی خط لوله به دست آورید. ویسکوزیته متان در $288/8 \text{ K}$ برابر $1/04 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ است.

حل: $D = 1/016 \text{ m}$ ، $A = \pi D^2/4 = 0/8107 \text{ m}^2$ ، بنابراین،

$$G = (2/077 \text{ kgmol/s}) \times (16 \text{ kg/kgmol}) \times \left(\frac{1}{0/8107 \text{ m}^2}\right) = 41 \text{ kg/s.m}^2$$

$$N_{Re} = \frac{DG}{\mu} = \frac{1/016 \times 41}{1/04 \times 10^{-5}} = 4/005 \times 10^7$$

از شکل ۲-۱۰-۳، $\varepsilon = 4/6 \times 10^{-5} \text{ m}$ ،

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4/6 \times 10^{-5}}{1/016} = 0/0000453$$

ضریب اصطکاک $f = 0/0027$

برای به دست آوردن p_1 ، از معادله (۲-۱۱-۹) باید حدس و خطا انجام شود.

با تخمین $R = 8314/34 \text{ N.m/kgmol.K}$ ، $p_1 = 620/5 \times 10^3 \text{ Pa}$ و

$\Delta L = 1/609 \times 10^5 \text{ m}$ از جایگزینی این مقادیر در معادله (۲-۱۱-۹) نتیجه

می‌شود،

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4 \times 0.0027 \times 1/609 \times 10^5 \times 41^2 \times 8314/34 \times 288/8}{1/0.16 \times 16}$$

$$+ \frac{2 \times 41^2 \times 8314/34 \times 288/8}{16} \ln \frac{620/5 \times 10^3}{170/3 \times 10^3}$$

$$= 4/375 \times 10^{11} + 0.00652 \times 10^{11} = 4/382 \times 10^{11} \text{ (Pa)}^2$$

حال $p_2 = 170/3 \times 10^3 \text{ Pa}$ ، با جایگزینی این مقدار در روابط بالا و حل آنها نسبت به p_1 داریم: $p_1 = 683/5 \times 10^3 \text{ Pa}$. با جایگزینی این مقدار جدید p_1 در معادله (۲-۱۱-۹) و حل آن نسبت به p_1 ، مقدار نهایی $p_1 = 683/5 \times 10^3 \text{ Pa}$ به دست می‌آید. توجه کنید که در این مسأله آخرین عبارت در معادله (۲-۱۱-۹) ناچیز است.

هنگامی که فشار بالادست جریان (p_1) ثابت باقی می‌ماند، دبی جرمی G همراه با تغییرات فشار پایین دست (p_2) تغییر می‌کند. با توجه به معادله (۲-۱۱-۹) وقتی که $p_1 = p_2$ ، $G = 0$ و هنگامی که $p_2 = 0$ ، $G = 0$ است. این نشان می‌دهد که در مقادیر میانی p_2 جریان باید حداکثر باشد و این بدین معناست که وقتی $dG/dp_2 = 0$ است جریان حداکثر است. با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۲-۱۱-۹) وقتی که p_1 و f ثابت هستند و حل معادله نسبت به G خواهیم داشت،

$$G_{\max} = \sqrt{\frac{M p_2^2}{RT}} \quad (2-11-11)$$

با به کار بردن معادلات (۲-۱۱-۳) و (۲-۱۱-۶)،

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{RT}{M}} = \sqrt{p_2 V_2} \quad (2-11-12)$$

این معادله مربوط به سرعت صوت در سیال در شرایط همدم است. بنابراین، در جریان تراکم‌پذیر همدم، در یک فشار معلوم پایین دست جریان p_1 ، جریان حداکثری وجود دارد که با کاهش p_2 این جریان افزایش پیدا نخواهد کرد. جزئیات کاملتر در مورد طول لوله و فشار در شرایط حداکثر جریان در مراجع دیگر بحث شده است ($D1$ ، $M2$ ، $P1$).

مثال ۲-۱۱-۲ حداکثر جریان یک گاز تراکم‌پذیر

برای شرایط مثال ۲-۱۱-۱، سرعت حداکثر قابل دسترسی و سرعت صوت را محاسبه کنید. نتایج را با مثال ۲-۱۱-۱ مقایسه کنید.

حل: با به کار بردن معادله (۲-۱۱-۱۲) در شرایط مثال ۲-۱۱-۱،

$$v_{\max} = \left(\frac{RT}{M}\right)^{1/5} = \left(\frac{8314 \times 288/8}{16}\right)^{1/5} = 387/4 \text{ m/s}$$

اگر p_2 کاهش یابد این سرعت حداکثر قابل دسترسی است و برابر با سرعت صوت در سیال در شرایط همدمای می باشد. سرعت واقعی در فشار خروجی p_2 برای مقایسه با مثال ۲-۱۱-۱ از ترکیب معادلات (۲-۱۱-۳) و (۲-۱۱-۶) به دست می آید که:

$$v_2 = \frac{RTG}{p_2 M} \quad (2-11-13)$$

$$= \frac{8314/34 \times 288/8 \times 41}{170/3 \times 10^3 \times 16} = 36/13 \text{ m/s}$$

۲-۱۱C جریان تراکم پذیر آدیباتیک

هنگامی که انتقال حرارت از دیواره یک لوله ناچیز است، جریان تراکم پذیر گاز در یک لوله مستقیم با سطح مقطع ثابت آدیباتیک است. معادله (۲-۱۱-۵) برای جریان آدیباتیک انتگرالگیری می شود که جزئیات آن در مراجع آمده است. نمودارهایی نیز برای حل این نوع جریان در دسترس هستند. نتایج مربوط به جریان آدیباتیک غالباً با جریان همدمای، خصوصاً در خط لوله های طویل تفاوت زیادی ندارد. شدت جریان آدیباتیک در لوله های کوتاه با افت فشار نسبتاً زیاد از جریان همدمای بیشتر است، اما حداکثر اختلاف حدود ۲۰٪ است. اختلاف در لوله هایی به طول ۱۰۰۰ برابر قطر یا بلندتر معمولاً کمتر از ۵٪ است. همچنین معادله (۲-۸-۱۱) موقعی که تغییرات دما در مجراکم است، با در نظر گرفتن یک میانگین حسابی، می تواند استفاده شود.

بر اساس همان روشی که برای حداکثر جریان در حالت همدمای استفاده شد، حداکثر جریان برای حالت آدیباتیک وقتی اتفاق می افتد که سرعت در انتهای لوله برابر با سرعت صوت باشد. بنابراین،

$$v_{\max} = \sqrt{\gamma p_2 V_2} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (2-11-14)$$

که در این رابطه، $\gamma = c_p/c_v$ ، نسبت ظرفیتهای گرمایی بوده و برای هوا $\gamma = 1/4$ است. بنابراین حداکثر سرعت برای جریان آدیباتیک حدود ۲۰٪ بزرگتر از مقدار آن برای جریان همدمای است. دبی در عمل ممکن است توسط شرایط جریان در لوله محدود نشود، بلکه توسط سرعت صوت در اتصالات و شیرها محدود شود. بنابراین در انتخاب اتصالات و شیرها برای لوله های مربوط به جریان تراکم پذیر باید دقت شود. جزئیات بیشتر مربوط به طول لوله و فشار در شرایط حداکثر جریان در مراجع دیگر آمده است (P_1 ، M_2 ، D_1).

یک پارامتر معمول که غالباً در معادلات جریان تراکم پذیر استفاده می شود، عدد ماخ N_{Ma} است که به صورت نسبت v (سرعت سیال) در مجرا به v_{max} (سرعت صوت) در سیال در شرایط واقعی جریان، تعریف می شود،

$$N_{Ma} = \frac{v}{v_{max}} \quad (2-11-15)$$

در عدد ماخ برابر با یک، سرعت معادل با سرعت صوت است. در مقادیر کمتر از یک، جریان مادون صوت است و در مقادیر بالاتر از یک، جریان مافوق صوت می باشد.

مسائل

۲-۲-۱. فشار در یک تانک کروی: یک تانک کروی شکل به قطر ۸ ft با روغنی به دانسیته 0.922 g/cm^3 پر شده است و بالای آن نیز با اتمسفر با (فشار $14/72 \text{ psia}$) ارتباط دارد. فشار را در کف تانک برحسب psia و kN/m^2 پیدا کنید.

جواب: $17/92 \text{ psia}$ و $123/5 \text{ kN/m}^2$

۲-۲-۲. فشار با دو مایع جیوه و آب: یک لوله آزمایش باز در 293 K در قسمت پایین محتوی $12/1 \text{ cm}$ جیوه و در روی آن $5/6 \text{ cm}$ آب است. اگر فشار اتمسفری 756 mmHg باشد، فشار را در کف لوله آزمایش به دست آورید. دانسیته جیوه $13/55 \text{ g/cm}^3$ و دانسیته آب 0.998 g/cm^3 است. پاسخ را برحسب psia ، dyne/cm^2 و kN/m^2 بیان کنید. برای ضرایب تبدیل از ضمیمه A.1 کمک بگیرید.

جواب: $1/175 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$ و 17 psia و $2/3 \text{ psig}$ و $117/5 \text{ kN/m}^2$

۲-۲-۳. هد سیال سوخت جت و فشار آن: فشار در بالای یک مخزن سوخت جت $180/6 \text{ kN/m}^2$ است، عمق مایع در تانک $6/4 \text{ m}$ و دانسیته سوخت جت 825 kg/m^3 است. هد مایع را برحسب متر که متناظر با فشار مطلق در کف تانک است محاسبه کنید.

۲-۲-۴. اندازه گیری فشار: یک مانومتر U - شکل باز مشابه شکل ۲-۲-۴a برای اندازه گیری فشار مطلق p_a در یک ظرف محتوی هوا به کار می رود. فشار p_b فشار اتمسفری است که معادل 754 mmHg است. مایع داخل مانومتر آب با دانسیته 1000 kg/m^3 است. فرض کنید دانسیته ρ_B معادل $1/30 \text{ kg/m}^3$ و فاصله z خیلی دم است. اختلاف ارتفاع مانومتر R نیز $0/415 \text{ m}$ است. p_a را برحسب psia و kPa محاسبه کنید.

جواب: $p_a = 15/17 \text{ psia}$ و $p_a = 104/6 \text{ kPa}$

۲-۲-۵. اندازه گیری اختلاف فشارهای کوچک: یک مانومتر U-شکل با دو سیال برای اندازه گیری اختلاف فشار دو نقطه در یک خط هوا با فشار یک اتمسفر، به کار می رود. برای فشارهای مساوی، $R_0 = 0$ است. سیال سبکتر یک ماده هیدروکربنی با دانسیته 812 kg/m^3 است و سیال سنگین تر آب با دانسیته 998 kg/m^3 می باشد. قطر داخلی لوله U-شکل و مخزن به ترتیب $3/2 \text{ mm}$ و $54/2 \text{ mm}$ هستند. فاصله R ، $117/2 \text{ mm}$ است. اختلاف فشار را بر حسب mmHg و پاسکال پیدا کنید.

۲-۲-۶. فشار در آزمایشگاه دریایی: یک آزمایشگاه دریایی به ارتفاع ۵ متر قرار است طوری طراحی شود که بتواند در عمق ۱۵۰ متری زیر آب (از سطح آب تا بالای آزمایشگاه) غوطه ور شود. فشار را در سطح بالایی آزمایشگاه و همچنین تغییرات فشار را روی دیواره آن بر حسب فاصله x از سطح بالایی، به طرف پایین پیدا کنید. دانسیته آب دریا 1020 kg/m^3 است.

جواب: $p = 10(150 + x) \text{ kN/m}^2$

۲-۲-۷. اندازه گیری اختلاف فشار در محفظه ها: در شکل ۲-۲-۵b یک مانومتر تفاضلی برای اندازه گیری اختلاف فشار بین دو محفظه به کار رفته است. رابطه ای برای اختلاف فشار ($P_A - P_B$) بر حسب ارتفاع مایع و دانسیته های آنها به دست آورید.

۲-۲-۸. طراحی یک ته نشین کننده و جداکننده برای مایعات امتزاج ناپذیر: یک سیستم ته نشین کننده - جداکننده استوانه ای و عمودی برای جداسازی مخلوطی با شدت جریان $20 \text{ m}^3/\text{h}$ شامل حجمهای مساوی از یک مایع سبک نفتی ($\rho_B = 875 \text{ kg/m}^3$) و یک محلول رقیق از آب شستشو ($\rho_A = \text{kg/m}^3$) می خواهد طراحی شود. نتایج آزمایشگاهی نشان می دهد که ۱۵ دقیقه زمان لازم است تا دو فاز به اندازه کافی از هم جدا شوند. برای طراحی زمان جداسازی را ۲۵ دقیقه در نظر بگیرید و اندازه مناسب ظرف، سطح مایعات سبک و سنگین در ظرف و ارتفاع h_{A2} مایع سنگین را که سرریز می کند حساب کنید. فرض کنید که بالا و پایین ظرف صاف هستند و قطر ظرف مساوی با ارتفاع آن است و یک سوم حجم ظرف مربوط به بخاری است که در محیط تخلیه می شود. از شکل ۲-۲-۶ استفاده کنید.

جواب: $h_{A2} = 1/537 \text{ m}$

۲-۳-۱. انتقال مولکولی یک خاصیت با نفوذپذیری متغیر: یک خاصیت می خواهد از طریق یک سیال در حالت پایدار و از طریق یک مقطع ثابت منتقل شود. در نقطه (۱) غلظت Γ_1 برابر با $10^{-2} \times 2/78$ مقدار خاصیت در متر مکعب و در نقطه (۲) به فاصله ۲ متر دورتر، برابر با

$10^{-2} \times 1/5$ است. نفوذپذیری بستگی به غلظت Γ دارد که با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$\delta = A + B\Gamma = 0.15 + 1/65\Gamma$$

(الف) معادله‌ای برای شار برحسب Γ_1 و Γ_2 به دست آورید و سپس شار را محاسبه کنید.

(ب) در $z = 1$ مقدار Γ را محاسبه کرده و با سه نقطه Γ را برحسب z رسم کنید.

جواب: (الف)
$$\psi_z = [A(\Gamma_1 - \Gamma_2) + (B/2)(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)] / (z_2 - z_1)$$

۲-۳-۲. **انتگرال‌گیری از معادله عمومی خاصیت در حالت پایدار:** از معادله عمومی خاصیت

(۲-۳-۱۱) در حالت پایدار و بدون تولید بین نقاط Γ_1 در z_1 و Γ_2 در z_2 انتگرال بگیرید.

معادله نهایی باید Γ و z را به هم ربط دهد.

جواب:
$$\Gamma = (\Gamma_2 - \Gamma_1)(z - z_1) / (z_2 - z_1) + \Gamma_1$$

۲-۴-۱. **تنش برشی در روغن سویا:** با توجه به شکل ۲-۴-۱، فاصله بین دو صفحه موازی

0.0914 m و صفحه پایینی با سرعت نسبی 0.366 m/s نسبت به صفحه بالایی کشیده

می‌شود. سیال مورد استفاده روغن سویا با ویسکوزیته $0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ در 303 K است.

(الف) تنش برشی τ و میزان برش را برحسب واحدهای s, ft, lbf حساب کنید.

(ب) محاسبه قسمت (الف) را با واحدهای SI تکرار کنید.

(پ) اگر گلیسرول در 293 K با ویسکوزیته $1.069 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ به جای روغن سویا استفاده

شود، چه سرعت نسبی لازم است تا با همان فاصله بین صفحات تنش برشی یکسان

مانند قسمت (الف) به دست آید؟ میزان برش در این حالت چقدر است؟

جواب: (الف)
$$1/6 \text{ N/m}^2$$
 (میزان برش ب) 40 s^{-1} و $\tau = 3/34 \times 10^{-2} \text{ lbf/ft}^2$

(ب) سرعت نسبی 0.1369 m/s و میزان برش $1/5 \text{ s}^{-1}$

۲-۴-۲. **تنش برشی و میزان برش در سیالات:** با توجه به شکل ۲-۴-۱، صفحه پایینی با سرعت

نسبی 0.4 m/s نسبت به صفحه، بالایی کشیده می‌شود، سیال مورد استفاده آب در 24°C است.

(الف) فاصله دو صفحه چقدر باشد تا تنش برشی برابر 0.3 N/m^2 شود. میزان برش را

نیز محاسبه کنید.

(ب) اگر روغن با ویسکوزیته $0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ با همان فاصله صفحات و سرعت قسمت

(الف) به کار رود، تنش برشی و میزان برش چقدر خواهد بود؟

۲-۵-۲. **عدد رینولدز برای جریان شیر:** شیر در 293 K با دانسیته 1030 kg/m^3 و ویسکوزیته

$2/12 \text{ cp}$ با دبی 0.605 kg/s در یک لوله شیشه‌ای به قطر $63/5 \text{ mm}$ در جریان است.

(الف) عدد رینولدز را محاسبه کنید. آیا جریان مغشوش است؟

(ب) سرعت و دبی را برای این که عدد رینولدز 2100 باشد بر حسب m/s و m^3/s حساب کنید.

جواب: الف) جریان مغشوش $Re = 5723$

۲-۵-۲. قطر لوله و عدد رینولدز: یک روغن به داخل یک لوله به قطر 10 mm با عدد رینولدز 2100

پمپ می شود. دانسیته روغن 855 kg/m^3 و ویسکوزیته آن $Pa \cdot s \times 10^{-2} \times 2/1$ است.

الف) سرعت در لوله چقدر است؟

(ب) اگر بخواهیم از سیال دیگری با دانسیته 925 kg/m^3 و ویسکوزیته $Pa \cdot s \times 10^{-2} \times 1/5$

استفاده کنیم و عدد رینولدز با همان سرعت قسمت (الف) برابر با عدد قبلی 2100

باشد، قطر لوله را به دست آورید.

۲-۶-۱. سرعت میانگین برای موازنه جرم در جریان روی یک صفحه عمودی به طرف پایین: برای

یک لایه مایع که به صورت آرام و در جهت z روی یک سطح عمودی به طرف پایین در

جریان است توزیع سرعت به صورت زیر می باشد،

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

که δ ضخامت لایه، x فاصله از سطح آزاد مایع بطرف صفحه و v_x سرعت در فاصله x از سطح

آزاد است.

الف) حداکثر سرعت ($v_z \max$) چقدر است؟

(ب) معادله ای برای سرعت نسبی $v_z \text{ av}$ و همچنین رابطه آن با $v_z \max$ را به دست آورید.

جواب: الف) $v_z \max = \rho g \delta^2 / 2\mu$ (ب) $v_z \text{ av} = \frac{2}{3} v_z \max$

۲-۶-۲. جریان مایع در یک لوله و موازنه جرم: مطابق شکل ۱-۶-۲ یک مایع هیدروکربنی وارد

یک سیستم جریان یافته ساده با سرعت میانگین $1/282\text{ m/s}$ می شود، که $A_1 = 4/33 \times 10^{-3}\text{ m}^2$

و $\rho_1 = 902\text{ kg/m}^3$. مایع در طی یک فرایند گرم می شود و در خروجی دانسیته آن

875 kg/m^3 است. سطح مقطع نقطه ۲ برابر $2 \times 10^{-3}\text{ m}^2 \times 5/26$ است و فرایند در حالت

پایدار است.

الف) دبی جرمی m را در ورودی و خروجی پیدا کنید.

(ب) سرعت میانگین v را در نقطه ۲ و سرعت جرمی G را در نقطه ۱ محاسبه کنید.

جواب: الف) $m_1 = m_2 = 5/007\text{ kg/s}$ (ب) $G_1 = 1156\text{ kg/s} \cdot \text{m}^2$

۲-۶-۳. سرعت میانگین برای موازنه جرم در جریان مغشوش: توزیع سرعت مطابق رابطه زیر در

رینولدز حدود 10^5 برای جریان مغشوش در یک لوله مدور صاف به شعاع R تغییر می کند.

که در این رابطه r فاصله شعاعی از مرکز و v_{max} حداکثر سرعت در مرکز است. رابطه‌ای بین سرعت میانگین (v_{av}) و حداکثر سرعت (v_{max}) برای یک سیال تراکم‌ناپذیر به دست آورید. (راهنمایی: انتگرال‌گیری توسط تغییر متغیر $z = R - r$ ساده می‌شود).

جواب: $v_{av} = \left(\frac{4}{3}\right)v_{max} = 0.817 v_{max}$

۴-۶-۲. سرعت توده‌ای در جریان بین صفحات موازی: یک سیال به صورت آرام بین دو صفحه موازی در جهت x در جریان است. توزیع سرعت در این جریان به صورت زیر است،

$$v_x = v_{x \max} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \right]$$

که در این رابطه $2y_0$ فاصله بین صفحات، y فاصله از خط مرکزی و v_x سرعت در جهت x در یک y مشخص است. رابطه‌ای بین $v_{x \ av}$ (سرعت میانگین یا توده‌ای) و $v_{x \ max}$ به دست آورید. ۴-۶-۵. موازنه کلی جرم برای فرایند رقیق کردن: یک تانک ذخیره مجهز به همزن محتوی 1000 kg محلول متانول رقیق (کسر وزنی متانول $w_A = 0.05$) است. جریان ثابت 500 kg/min آب خالص به طور ناگهانی وارد این تانک می‌شود و یک جریان خروجی 500 kg از محلول نیز شروع می‌شود. این دو جریان به طور پیوسته ثابت باقی می‌مانند. با فرض این‌که دانسیته محلولها یکسان باشند و مقدار مایع در دو تانک 1000 kg ثابت باقی بماند، مدت زمان لازم برای کاهش غلظت الکل به 1% وزنی را پیدا کنید.

جواب: $32/2 \text{ min}$

۴-۶-۶. موازنه کلی جرم برای فرایند ناپایدار: یک تانک ذخیره مجهز به همزن محتوی 500 kg محلول با غلظت 5% نمک است. محلول محتوی $16/67\%$ نمک با جریان ثابت 900 kg/h به طور ناگهانی وارد تانک می‌شود و جریان خروجی 600 kg/hr نیز شروع می‌شود. این دو جریان پس از این ثابت باقی می‌مانند. معادله‌ای به دست آورید که غلظت خروجی را به صورت تابعی از زمان نشان دهد. همچنین غلظت را بعد از 2 ساعت محاسبه کنید.

۴-۶-۷. موازنه جرم در جریان محلول ساکارز: محلول 20% وزنی ساکارز با دانسیته 1074 kg/m^3 از طریق یک سیستم لوله‌کشی مشابه مثال ۱-۶-۲ (شکل ۲-۶-۲) در جریان است. دبی جریان ورودی به لوله ۱ برابر با $1/892 \text{ m}^3/\text{h}$ است. جریان به طور مساوی وارد دو لوله شماره ۳ می‌شود. موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) سرعت در لوله‌های ۲ و ۳ برحسب m/s .

ب) سرعت جرمی G در لوله‌های ۲ و ۳ برحسب $\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}$.

۲-۷-۱: ضریب تصحیح سرعت در انرژی جنبشی برای جریان مغشوش: معادله‌ای برای تعیین مقدار ضریب تصحیح سرعت در انرژی جنبشی (α)، در جریان مغشوش به دست آورید. از معادله (۲-۷-۲۰) برای تعیین توزیع تقریبی سرعت استفاده کنید و این معادله را در معادله (۲-۷-۱۵) برای به دست آوردن $(v^3)_{av}$ جایگزین کنید. سپس از معادلات (۲-۷-۲۰) و (۲-۶-۱۷) و (۲-۷-۱۴) برای به دست آوردن α استفاده کنید.

جواب: $\alpha = 0.9448$

۲-۷-۲: جریان بین صفحات موازی و ضریب تصحیح انرژی جنبشی: در مسأله ۲-۶-۴، معادله توزیع سرعت برای سیالی که به صورت آرام بین دو صفحه موازی در جریان است داده شده است. معادله‌ای برای تعیین مقدار ضریب تصحیح انرژی جنبشی (α) به دست آورید. (راهنمایی: ابتدا رابطه بین v و v_{av} را به دست آورید. سپس معادله‌ای برای $(v^3)_{av}$ به دست آورده و در نهایت این نتایج را به α ربط دهید.)

۲-۷-۳: اُفت دما در شیر اختناق و موازنه انرژی: بخار آب از طریق یک شیر اختناق آدیاباتیک (بدون اُفت گرمایی یا کار خارجی) در جریان است. بخار در نقطه ۱ در بالادست جریان دارای فشار ۶۸۹ kPa و دما $171/1^\circ\text{C}$ است و در خروج از شیر در نقطه ۲ دارای فشار ۳۵۹ kPa است. دمای خروجی ۲ را پیدا کنید. (راهنمایی: معادله (۲-۷-۲) را برای موازنه انرژی به کار ببرید و از عبارتهای انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل مانند مثال ۲-۷-۱ صرف‌نظر کنید. انتالپی H_1 را از ضمیمه A.2 به دست آورید. برای H_2 باید از درون‌یابی خطی بین مقادیر جدول ۲ را به دست آورید.)

جواب: $t_2 = 160/6^\circ\text{C}$

۲-۷-۴: موازنه انرژی برای یک مبدل حرارتی و یک پمپ: آب در $93/3^\circ\text{C}$ از یک تانک ذخیره بزرگ در فشار یک اتمسفر با دبی $0.189 \text{ m}^3/\text{min}$ پمپ می‌شود. موتوری که پمپ را می‌چرخاند توانی معادل $1/49 \text{ kW}$ به آن می‌دهد. آب پمپ شده از یک مبدل حرارتی عبور می‌کند و گرمایی معادل 704 kW را از دست می‌دهد. سپس به یک تانک روباز دیگر در ارتفاع $15/24 \text{ m}$ بالاتر از تانک اول وارد می‌شود. دمای نهایی آب ورودی به تانک دوم چقدر است؟ همچنین، افزایش انتالپی آب ناشی از کار ورودی به سیستم چقدر است؟ (راهنمایی: از جدول بخار، انتالپی آب را پیدا کنید. از تغییرات انرژی جنبشی صرف‌نظر کنید، اما از تغییرات انرژی پتانسیل نمی‌توان صرف‌نظر کرد.)

جواب: $0.491 \text{ kJ/kg} =$ افزایش انرژی ناشی از کار ورودی، $t_2 = 38/2^\circ\text{C}$

جواب: $0/491 \text{ kJ/kg}$ = افزایش انرژی ناشی از کار ورودی، $38/2^\circ\text{C}$ $\Sigma F = 14$

۲-۷-۵. دیگ بخار و موازنه کلی انرژی: آب مایع تحت فشار 150 kPa و دمای 24°C از طریق یک لوله با سرعت میانگین $3/5 \text{ m/s}$ و در حالت مغشوش وارد دیگ بخار می‌شود. ارتفاع بخار خروجی 25 m بالاتر از مایع ورودی است و شرایط آن 150°C و 150 kPa مطلق می‌باشد. سرعت بخار در خط خروجی $12/5 \text{ m/s}$ در حالت جریان مغشوش است. فرایند در حالت پایدار است. انرژی داده شده برای هر کیلوگرم بخار چقدر است؟

۲-۷-۶. موازنه انرژی روی یک سیستم جریانی با یک پمپ و مبدل حرارتی: آب ذخیره شده در یک تانک بزرگ و کاملاً عایق‌بندی شده در 21°C و فشار اتمسفری در شرایط پایدار با دبی $40 \text{ m}^3/\text{s}$ از این تانک پمپ می‌شود. موتوری که پمپ را به کار می‌اندازد توانی معادل $8/5 \text{ kW}$ به آن می‌دهد. این آب به عنوان سیال سردکننده به کار می‌رود و از یک مبدل حرارتی عبور می‌کند که در آنجا 225 kW گرما به آب داده می‌شود. سپس آب گرم شده به تانک روباز دومی وارد می‌شود که 25 m از تانک اول بالاتر است. دمای نهایی آب ورودی به تانک دوم را پیدا کنید.

۲-۷-۷. موازنه انرژی مکانیکی در پمپاژ روغن سویا: روغن سویا از طریق یک لوله با قطر ثابت و دبی جرمی ثابت پمپ می‌شود. پمپ برای به جریان انداختن سیال به توانی معادل $209/2 \text{ J/kg}$ نیاز دارد. فشار ورودی پمپ $103/4 \text{ kN/m}^2$ است. خروجی لوله $3/35$ متر بالاتر از ورودی آن است و فشار خروجی $172/4 \text{ kN/m}^2$ است. قطر لوله‌های ورودی و خروجی پمپ یکسان است. جریان سیال مغشوش است. اُفت اصطکاک در سیستم را محاسبه کنید. خواص فیزیکی روغن سویا در ضمیمه A.4 آمده است. دما 303 K است.

جواب: $\Sigma F = 101/3 \text{ J/kg}$

۲-۷-۸. توان پمپ در سیستم آب نمک: یک پمپ $0/2 \text{ ft}^3/\text{s}$ محلول آب نمک را با دانسیته $1/15 \text{ g/cm}^3$ از یک تانک روباز با سطح مقطع بزرگ پمپ می‌کند. خط لوله ورودی پمپ دارای قطر $3/548 \text{ in}$ و لوله خروجی پمپ دارای قطر $2/067 \text{ in}$ می‌باشد. سیال خروجی به تانک روباز دیگری تخلیه می‌شود که محل خروج سیال 75 ft بالاتر از سطح سیال در تانک اول است. اگر تلفات اصطکاکی در سیستم لوله‌کشی $18 \text{ ft}\cdot\text{lb}_f/\text{lb}_m$ باشد، فشار خروجی پمپ و توان مورد نیاز آن بر حسب اسب بخار را به دست آورید. جریان مغشوش است و راندمان پمپ 70% می‌باشد.

۲-۷-۹. اندازه‌گیری فشار جریان: آب با دانسیته 998 kg/m^3 و با سرعت $1/676 \text{ m/s}$ در یک لوله

لوله‌ای می‌شود که قطر داخلی آن $2/067 \text{ in}$ می‌باشد.

الف) فشار جدید p_2 را در لوله $2/067 \text{ in}$ پیدا کنید. فرض کنید اُفت اصطکاکی وجود ندارد.
 ب) اگر لوله کشی به صورت عمودی و جریان به طرف بالا باشد، فشار p_2 را به دست آورید.
 محل اندازه‌گیری فشار p_2 تقریباً $0/475 \text{ m}$ بالاتر از محل اندازه‌گیری فشار p_1 است.

جواب: $p_2 = 59/1 \text{ kPa}$ (ب) ، $p_2 = 63/5 \text{ kPa}$ (الف)

۲-۷-۱۰. تخلیه روغن پنبه دانه از یک تانک: یک تانک استوانه‌ای شکل به قطر $1/52 \text{ m}$ و ارتفاع $7/62 \text{ m}$ محتوی روغن پنبه دانه با دانسیته 917 kg/m^3 می‌باشد. تانک به اتمسفر راه دارد. یک نازل تخلیه به قطر داخلی $15/8 \text{ m}$ و سطح مقطع A_2 نزدیک کف تانک قرار گرفته است. سطح مایع در ارتفاع $6/1 \text{ m}$ بالای خط مرکزی نازل است. نازل تخلیه باز می‌شود و سطح مایع از $H = 6/1 \text{ m}$ به $H = 4/57 \text{ m}$ می‌رسد. زمان لازم برای تخلیه این مقدار مایع را به دست آورید. (راهنمایی: سرعت تغییر سطح مخزن بسیار کم است و می‌تواند صرف نظر شود. در نازل سرعت 72 m/s برحسب m/s با استفاده از H براساس معادله $(2-7-26)$ می‌تواند محاسبه شود. اما H و در نتیجه 72 متغیرند. موازنه جرم ناپایدار را به این صورت می‌نویسیم که در آن دبی حجمی تانک $(A_1 dH)/dt$ است (A_1 سطح مقطع بر حسب متر مربع و dH حجم سیال در حال جریان در زمان dt ثانیه است). این نرخ باید برابر با مقدار منفی دبی حجمی عبوری از نازل $(-A_2 v_2)$ بر حسب m^3/s باشد. علامت منفی به این خاطر است که dH مساوی منهای v_2 است. با مرتب کردن این معادله و انتگرال‌گیری بین $H = 6/1 \text{ m}$ در $t = 0$ و $H = 4/57 \text{ m}$ در $t = t_F$ پاسخ به دست می‌آید.)

جواب: $t_F = 1380 \text{ s}$

۲-۷-۱۱. اُفت اصطکاکی در توربین آبی نیروگاه: آب در یک مخزن مرتفع ذخیره شده است. برای تولید توان، آب از این مخزن و از طریق یک مجرای بزرگ وارد توربین می‌شود و سپس وارد مجرایی به اندازه مجرای قبلی می‌شود. در یک نقطه در مجرا که $89/5 \text{ m}$ بالاتر از توربین است، فشار $172/4 \text{ kPa}$ و در 5 متر بالاتر از توربین فشار $89/6 \text{ kPa}$ است. دبی آب $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ است. توان خروجی محور توربین 658 kW است و دانسیته آب 1000 kg/m^3 است. اگر راندمان توربین در تبدیل انرژی صورت گرفته از سیال به محور توربین $7/89$ باشد، اُفت اصطکاکی را در توربین برحسب J/kg حساب کنید. توجه کنید که در معادله موازنه انرژی مکانیکی، W_s مساوی با توان خروجی محور توربین تقسیم بر η_t است.

جواب: $\Sigma F = 85/3 \text{ J/kg}$

۲-۷-۱۲ **خط لوله پمپاژ نفت:** یک خط لوله طویل، نفت را با دبی $795 \text{ m}^3/\text{s}$ منتقل می‌کند. فشار نسبی نفت در خروجی ایستگاه پمپاژ شماره (۱) برابر با 1793 kPa است و در ورودی به ایستگاه بعدی (۲) برابر 862 kPa است. ایستگاه دوم $17/4$ متر بالاتر از ایستگاه اول است. انرژی تلف شده را برحسب J/kg محاسبه کنید. دانسیته نفت 769 kg/m^3 است.

۲-۷-۱۳ **امتحان کردن پمپ سانتریفوژ و موازنه انرژی مکانیکی:** عملکرد یک پمپ سانتریفوژ قرار است امتحان شود. در طول تست، فشار ورودی پمپ که لوله‌ای به قطر $0/305 \text{ m}$ می‌باشد، در محل اتصال به بدنه پمپ $20/7 \text{ kPa}$ است. در خط خروجی به قطر $0/254 \text{ m}$ در نقطه‌ای که $2/53 \text{ m}$ بالاتر از خط ورودی است فشار نسبی $289/6 \text{ kPa}$ است. دبی پمپ $0/1133 \text{ m}^3/\text{s}$ است. (دانسیته آب 1000 kg/m^3 فرض می‌شود). توان ورودی به پمپ را محاسبه کنید.

جواب: $38/11 \text{ kW}$

۲-۷-۱۴ **أفت اصطکاکی در پمپ و سیستم جریانی:** آب در 20°C از کف یک تانک ذخیره که فشار نسبی در آنجا $310/3 \text{ kPa}$ است به یک شیپوره که $15/25 \text{ m}$ بالاتر از کف تانک است، پمپ می‌شود. آب خروجی از شیپوره با سرعت $19/81 \text{ m/s}$ در خروجی شیپوره به محیط تخلیه می‌شود. دبی آب $45/4 \text{ kg/s}$ است. راندمان پمپ 80% و توان داده شده به محور پمپ $7/5 \text{ kW}$ است. موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) أفت اصطکاکی در پمپ.

ب) أفت اصطکاکی در قسمتهای دیگر فرایند.

۲-۷-۱۵ **توان پمپ در سیستم جریانی:** آب از یک مخزن باز در 10°C و با شدت 2 kg/s به تانک روباز دیگری در فاصله 1500 متری پمپ می‌شود. لوله استفاده شده $3/5 \text{ in}$ شماره ۴۰ و أفت اصطکاکی در سیستم 625 J/kg است. سطح آب در مخزن 20 متر بالاتر از سطح تانک ذخیره است. راندمان پمپ 75% است.

الف) توان لازم برای پمپ چقدر است؟

ب) اگر پمپ در سیستم وجود نداشته باشد، آیا سیال جریان خواهد داشت؟

جواب: الف) $1/143 \text{ kW}$

۲-۸-۱ **موازنه ممتوم در یک لوله خمیده با قطرکاهشی:** آب از طریق یک لوله خمیده به صورت پایدار مطابق شکل ۲-۸-۳ در جریان است. زاویه $\alpha = 90^\circ$ است (یک تبدیل قائمه مانند زانویی). فشار مطلق در نقطه (۲) یک اتمسفر است. دبی جریان $0/02 \text{ m}^3/\text{s}$ و قطرهای

نقاط (۱) و (۲) بترتیب ۰/۰۵ متر و ۰/۰۳ متر هستند. از نیروهای اصطکاکی و ثقلی صرفنظر می‌شود. نیروی برآیند وارد بر لوله خمیده را بر حسب نیوتن و پوند نیرو حساب کنید. $\rho = ۱۰۰۰ \text{ kg/m}^3$

جواب: $-R_y = -۵۶۵/۸ \text{ N}$ و $-R_x = +۴۵۰ \text{ N}$

۲-۸-۲. نیروهای وارد بر لوله خمیده با قطر کاهش: آب در ۳۶۳ K به صورت پایدار با دبی $۰/۰۵۶۶ \text{ m}^3/\text{s}$ از طریق یک لوله خمیده ۶۰° ($\alpha_2 = ۶۰^\circ$) مطابق شکل ۲-۸-۳ در جریان است. قطر ورودی لوله $۰/۱۰۱۶ \text{ m}$ و قطر خروجی $۰/۰۷۶۲ \text{ m}$ است. افت اصطکاکی در لوله خمیده به صورت $۷۲/۵$ است. از نیروی وزن صرفنظر می‌شود. فشار نسبی خروجی $p_2 = ۱۱۱/۵ \text{ kN/m}^2$. نیروهای وارد بر لوله خمیده را بر حسب نیوتن حساب کنید.

جواب: $-R_y = -۱۰۲۶ \text{ N}$ و $-R_x = +۱۳۴۴ \text{ N}$

۲-۸-۳. نیروی وارده از طرف جریان آب بر یک دیواره: آب در ۲۹۸ K از یک شیبوره خارج می‌شود و به طور افقی به یک دیواره قائم برخورد می‌کند. قطر شیبوره ۱۲ mm و سرعت آب در خروجی ۶ m/s است. با صرفنظر کردن از مقاومت اصطکاکی هوا در مقابل جت، نیروی وارد بر دیواره را بر حسب نیوتن محاسبه کنید.

جواب: $-R_x = ۴/۰۵۹ \text{ N}$

۲-۸-۴. جریان از طریق یک لوله خمیده با قطر افزایشی: آب با دبی $۰/۰۵ \text{ m}^3/\text{s}$ به صورت پایدار از طریق یک لوله خمیده که تغییر جهت ۱۲۰° در جهت جریان می‌دهد، در جریان است. قطر لوله در بالادست جریان $۰/۰۷۶۲ \text{ m}$ و در پایین دست $۰/۲۱۱۲ \text{ m}$ است. فشار نسبی بالادست $۶۸/۹۴ \text{ kPa}$ است. با صرفنظر کردن از افت انرژی در زانو فشار پایین دست جریان در ۲۹۸ K و R_x و R_y را محاسبه کنید.

۲-۸-۵. نیروی وارده از طرف جریان بر دیواره: مسأله ۲-۸-۳ را با همان شرایط و در حالی که دیواره به اندازه ۴۵° نسبت به حالت عمودی منحرف شده است، تکرار کنید. جریان بدون اصطکاک است و از افت انرژی صرفنظر می‌شود. مقدار سیالی که به هر طرف می‌رود با استفاده از معادله پیوستگی و موازنه ممتوم قابل محاسبه است. مقدار هر جریان و نیروی وارد بر دیواره را محاسبه کنید.

جواب: $m_1 = ۰/۰۹۹۰۷ \text{ kg/s}$ ، $m_2 = ۰/۰۵۷۷۴ \text{ kg/s}$ ، $-R_x = ۲/۰۳ \text{ N}$ ، $-R_y = -۲/۰۳ \text{ N}$

(نیروی وارد بر دیواره)

۲-۸-۶. موازنه ممتوم برای جت آزاد سیال روی یک تیغه ثابت و خمیده: یک جت آزاد سیال با سرعت $30/5 \text{ m/s}$ و قطر $5/08 \times 10^{-2} \text{ m}$ توسط یک تیغه ثابت و خمیده مطابق شکل ۲-۸-۵a تغییر جهت می‌دهد. تیغه با یک زاویه 60° به سمت پایین انحناء دارد. نیروی وارده از طرف جت بر تیغه را پیدا کنید. $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

جواب: $R_x = 942/8 \text{ N}$, $-R_y = 1633 \text{ N}$

۲-۸-۷. موازنه ممتوم برای جت آزاد سیال روی یک تیغه ثابت U شکل: یک جت سیال با سرعت $30/5 \text{ m/s}$ و قطر $1 \times 10^{-2} \text{ m}$ توسط یک تیغه ثابت صیقلی مطابق شکل ۲-۸-۵a تغییر جهت می‌دهد. تیغه به شکل U است، به طوری که جهت خروجی جت از تیغه کاملاً عکس جهت ورودی به تیغه است. نیروی وارد بر تیغه را حساب کنید. $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

جواب: $-R_x = 146/1 \text{ N}$, $-R_y = 0$

۲-۸-۸. موازنه ممتوم روی زانو با قطر کاهشی و افتهای اصطکاک: آب در 20°C از طریق یک لوله خمیده با $\alpha_2 = 120^\circ$ (شکل ۲-۸-۳) را ببینید) در جریان است. قطر ورودی لوله $1/829 \text{ m}$ و قطر خروجی $1/219 \text{ m}$ و دبی $8/5 \text{ m}^3/\text{s}$ است. نقطه خروجی $\alpha_2 = 3/05$ متر بالاتر از نقطه ورودی است که فشار نسبی ورودی 276 kPa است. افت اصطکاک به صورت $72/2 \text{ m}$ بوده و جرم آب در زانویی 8500 kg است. نیروهای R_x , R_y و برآیند نیروی وارد بر سیال داخل حجم کنترل را به دست آورید.

۲-۸-۹. ضریب تصحیح ممتوم β برای جریان مغشوش: ضریب تصحیح ممتوم β را برای جریان مغشوش در یک لوله تعیین کنید. معادله (۲-۷-۲۰) را برای رابطه بین v و مکان به کار ببرید.

۲-۹-۱. لایه نازک آب در برج دیواره مرطوب: آب خالص در 20°C در حال پایین آمدن در یک برج دیواره مرطوب عمودی با دبی $0/124 \text{ kg/s.m}$ است. ضخامت لایه نازک و سرعت میانگین را محاسبه کنید.

جواب: $v_{z,av} = 0/3687 \text{ m/s}$, $\delta = 3/37 \times 10^{-4} \text{ m}$

۲-۹-۲. موازنه پوسته‌ای ممتوم برای جریان بین صفحات موازی: یک سیال با دانسیته ثابت به صورت آرام و پایدار در جهت افقی x بین دو صفحه صاف و موازی در جریان است. فاصله بین دو صفحه در جهت عمودی y برابر $2y_0$ است. با استفاده از موازنه پوسته‌ای ممتوم رابطه‌ای برای توزیع سرعت سیال بین دو صفحه و سرعت ماکزیمم برای طول L متر از صفحات در جهت x ، پیدا کنید. (راهنمایی: روش به کار برده شده در بخش ۲-۹B را برای به دست آوردن معادله (۲-۹-۹) ببینید. یک شرط مرزی مورد استفاده $dv_x/dy = 0$ در $y = 0$

است).

$$v_x = \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} y_0^2 \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \quad \text{جواب:}$$

۲-۹-۳. توزیع سرعت برای سیال غیرنیوتنی: میزان تنش برشی برای یک سیال غیر نیوتنی توسط رابطه زیر داده شده است،

$$\tau_{rx} = K \left(-\frac{dv_x}{dr} \right)^n$$

که K و n دو ثابت هستند. رابطه‌ای بین سرعت و موقعیت شعاعی r در حالت پایدار برای این سیال تراکم‌ناپذیری پیدا کنید. (راهنمایی: معادله داده شده را با معادله (۲-۹-۶) ترکیب کنید. سپس از هر دو طرف رابطه ریشه $1/n$ بگیرید و انتگرالگیری کنید.)

$$v_x = \frac{n}{n+1} \left(\frac{P_0 - P_L}{2KL} \right)^{1/n} R_0^{(n+1)/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{(n+1)/n} \right] \quad \text{جواب:}$$

۲-۹-۴. موازنه پوسته‌ای ممتوم برای جریان روی یک سطح شیب‌دار: فرض کنید یک سیال نیوتنی به صورت آرام و پایدار روی یک سطح شیب‌دار که با افق زاویه θ ساخته است در حال جریان به طرف پایین است. با استفاده از موازنه پوسته‌ای ممتوم، توزیع سرعت در داخل لایه سیال به ضخامت l را پیدا کنید. همچنین سرعت ماکزیمم روی سطح آزاد را به دست آورید. (راهنمایی: جمله ممتوم جابجایی در ناحیه کاملاً توسعه یافته حذف می‌شود و نیروی فشاری نیز بدلیل وجود سطح آزاد حذف می‌شود. نیروی وزن بر سیال مؤثر است.)

$$v_{x \max} = \rho g L^2 \sin \theta / 2\mu \quad \text{جواب:}$$

۲-۱۰-۱. اندازه‌گیری ویسکوزیته یک مایع: یکی از کاربردهای معادله Hagen - Poiseualli (معادله (۲-۱۰-۲)) تعیین ویسکوزیته یک مایع به وسیله اندازه‌گیری اُفت فشار و سرعت مایع در یک لوله موئین با ابعاد مشخص است. دانسیته مایع مورد استفاده 912 kg/m^3 و قطر لوله موئین $2/222 \text{ mm}$ و طول آن 0.1585 m است. دبی اندازه‌گیری شده $5/33 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$ و اُفت فشار 131 میلی‌متر آب (با دانسیته 996 kg/m^3) است. با صرف‌نظر کردن از اثرات انتهایی، ویسکوزیته مایع را برحسب Pa.s حساب کنید.

$$\mu = 9/06 \times 10^{-3} \text{ Pa.s} \quad \text{جواب:}$$

۲-۱۰-۲. اُفت فشار ناشی از اصطکاک در جریان روغن زیتون: اُفت فشار ناشی از اصطکاک را برحسب پاسکال برای جریان روغن زیتون در 293 K از طریق یک لوله فولادی به قطر داخلی 0.0525 m و طول $76/2 \text{ m}$ حساب کنید. سرعت سیال $1/22 \text{ m/s}$ است. از روش

داخلی 0.0525 m و طول $76/2 \text{ m}$ حساب کنید. سرعت سیال $1/22 \text{ m/s}$ است. از روش ضریب اصطکاک استفاده کنید. جریان آرام است یا مغشوش؟ خواص فیزیکی را از ضمیمه A.4 به دست آورید.

۲-۱۰-۳. **اُفت اصطکاکی در لوله مستقیم و اثر نوع لوله:** یک مایع با دانسیته 801 kg/m^3 و ویسکوزیته $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ از طریق یک لوله افقی با سرعت $4/57 \text{ m/s}$ در جریان است. لوله از جنس فولاد تجارتي به قطر اسمی $1/5 \text{ in}$ و شماره ۴۰ است. برای طول 61 m از لوله موارد زیر را حساب کنید:

الف) اُفت اصطکاکی F_f .

ب) برای یک لوله صاف با همان قطر داخلی اُفت اصطکاکی را حساب کنید. اُفت اصطکاکی در لوله صاف چند درصد کاهش می‌یابد؟

جواب: الف) $348/9 \text{ J/kg}$ (ب) $(91/7 \text{ ft}\cdot\text{lb}_f/\text{lb}_m)$ و $274/2 \text{ J/kg}$ و $21/4$.

۲-۱۰-۴. **روش حدس و خطا برای حل مسأله تخلیه هیدرولیکی:** در یک پروژۀ هیدرولیکی یک لوله چدنی به قطر داخلی 0.156 m و طول 30.5 m برای تخلیه فاضلاب در دمای 293 K به کار رفته است. هد موجود برابر $4/57$ متر آب است. با صرف نظر کردن از تلفات در اتصالات لوله، دبی جریان را برحسب m^3/s حساب کنید. (راهنمایی: خواص فیزیکی را مانند آب فرض کنید. حل به صورت حدس و خطاست، زیرا سرعت که در عدد رینولدز ظاهر می‌شود و برای تعیین ضریب اصطکاک نیز لازم است، مجهول می‌باشد. به عنوان حدس اولیه $v = 1/7 \text{ m/s}$ را فرض کنید).

۲-۱۰-۵. **موازنۀ انرژی مکانیکی و اُفتهای اصطکاکی:** آب داغ از تانک ذخیره با شدت $0.223 \text{ ft}^3/\text{s}$ تخلیه می‌شود. شکل فرایند و شرایط آن مانند مثال (۶-۱۰-۲) است، با این اختلاف که قطر لوله‌های شماره ۴۰ به این صورت است. قطر اسمی لوله ۲۰ فوتی خروجی از تانک ذخیره به جای 4 in برابر $1/5 \text{ in}$ است. لوله دیگر که 2 in بود، اکنون $2/5 \text{ in}$ است. توجه کنید که اکنون یک انبساط ناگهانی بعد از زانو اتفاق می‌افتد که قطر از $1/5 \text{ in}$ به $2/5 \text{ in}$ می‌رسد.

۲-۱۰-۶. **اُفتهای اصطکاکی و توان پمپ:** آب داغ از یک تانک ذخیره روباز در $82/2^\circ \text{C}$ با شدت $0.379 \text{ m}^3/\text{min}$ پمپ می‌شود. لوله ورودی پمپ $6/1 \text{ m}$ با قطر اسمی 2 in و شماره ۴۰ از جنس فولاد است. این لوله شامل سه زانو می‌باشد. خط خروجی بعد از پمپ به طول 61 m و قطر 2 in شامل دو زانو است. آب در ارتفاع $6/1 \text{ m}$ بالاتر از سطح آب در تانک

الف) کل آفت اصطکاکی ΣF را حساب کنید.

ب) با نوشتن موازنه انرژی مکانیکی W_s پمپ را برحسب J/kg حساب کنید.

پ) توان برحسب kW اگر راندمان آن ۷۵٪ باشد، چقدر است؟

جواب: الف) $\Sigma F = 122/8 J/kg$ ب) $W_s = -186/9 J/kg$ پ) $1/527 kW$

۲-۱۰-۷. آفت فشار جریان گاز: گاز نیتروژن از طریق یک لوله ۴ اینچی شماره ۴۰ از جنس فولاد

تجارتی در $298 K$ در جریان است. دبی کل گاز $10^{-2} \times 7/4 \text{ kg/s}$ بوده و جریان همدمای

فرض می‌شود. طول لوله 3000 m و فشار ورودی آن 200 kPa است. فشار خروجی را

محاسبه کنید.

جواب: $p_2 = 188/5 \text{ kPa}$

۲-۱۰-۸. طول ورودی جریان در یک لوله: هوا در $10^\circ C$ و فشار مطلق 1 atm با سرعت 2 m/s وارد

یک لوله به قطر 0.12 m می‌شود.

الف) طول ورودی را حساب کنید.

ب) طول ورودی را برای آب در $10^\circ C$ و همان سرعت حساب کنید.

۲-۱۰-۹. آفت اصطکاکی در پمپاژ روغن به یک تانک تحت فشار: یک روغن با دانسیته 833 kg/m^3

و ویسکوزیته 10^{-3} Pa.s از یک تانک روباز به یک تانک تحت فشار که در فشار

نسبی 345 kPa ثابت نگهداشته می‌شود، در حال پمپ شدن است. روغن از طریق یک

خط لوله فولادی به قطر داخلی 0.07792 m که به تانک روباز وصل شده است با دبی

$3/494 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ پمپ می‌شود. طول مستقیم لوله 122 m و شامل دو زانوی 90° و

یک شیر کروری نیمه باز است. سطح مایع در تانک روباز 20 m بالاتر از سطح مایع در

تانک تحت فشار است. راندمان پمپ ۶۵٪ است. توان پمپ را برحسب kW حساب کنید.

۲-۱۰-۱۰. جریان در یک مسیر حلقوی و آفت فشار: آب در یک مسیر حلقوی در یک مبدل حرارتی

دو لوله‌ای افقی که لوله‌های آن به صورت هم مرکز قرار گرفته‌اند در جریان است و از $40^\circ C$

تا $50^\circ C$ گرم می‌شود. مبدل دارای 30 m طول لوله افقی است. دبی آب

$2/9 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ است. قطر اسمی لوله داخلی 1 in با شماره ۴۰ و لوله خارجی 2 in با

شماره ۴۰ است. آفت فشار چقدر است؟ دمای میانگین $45^\circ C$ را برای خواص فیزیکی

توده‌ای به کار ببرید. فرض کنید دمای دیواره به طور میانگین $4^\circ C$ از دمای میانگین توده‌ای

سیال بیشتر است، به طوری که ضریب اصطکاک برای اثر انتقال حرارت باید تصحیح

شود.

۲-۱۱-۱. سرعت ماکزیمم برای جریان تراکم‌پذیر همدمما: با شروع از معادله (۹-۱۱-۲)، معادلات (۱۱-۱۱-۲) و (۱۲-۱۱-۲) را برای محاسبه سرعت ماکزیمم در جریان تراکم‌پذیر همدمما به دست آورید.

۲-۱۱-۲. **اُفت فشار در جریان تراکم‌پذیر:** گاز متان از طریق یک لوله فولادی به طول 3.05 m و قطر $52/5 \text{ mm}$ با دبی $41 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$ جریان دارد. فشار مطلق ورودی $p_1 = 345 \text{ kPa}$ است. با فرض این که جریان همدمما در $288/8 \text{ K}$ باشد، الف) فشار p_2 را در انتهای لوله پیدا کنید. ویسکوزیته $1.0 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ است. ب) سرعت ماکزیمم قابل دسترسی در این شرایط را پیدا کنید و با سرعت به دست آمده در قسمت الف) مقایسه کنید.

جواب: الف) $p_2 = 298/4 \text{ kPa}$ ب) $v_p = 387/4 \text{ m/s}$, $v_{\max} = 20/62 \text{ m/s}$

۲-۱۱-۳. **اُفت فشار در جریان تراکم‌پذیر همدمما:** هوا در 288 K و فشار مطلق 275 kPa وارد یک لوله فولادی به قطر 0.08 m می‌شود و به صورت تراکم‌پذیر و همدمما جریان پیدا می‌کند. طول لوله 60 متر است. سرعت جرمی در ورودی لوله $165/5 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$ است. اگر جرم مولکولی هوا 29 باشد فشار خروجی را محاسبه کنید. همچنین سرعت ماکزیمم مجاز را که می‌توان به آن رسید به دست آورده و با سرعت واقعی مقایسه کنید.

منابع

- (B1) BENNETT, C. O., and MEYERS, J. E. *Momentum, Heat and Mass Transfer*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1982.
- (D1) DODGE, B. F. *Chemical Engineering Thermodynamics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1944.
- (E1) EARLE, R. L. *Unit Operations in Food Processing*. Oxford: Pergamon Press, Inc., 1966.
- (K1) KITTRIDGE, C. P., and ROWLEY, D. S. *Trans. A.S.M.E.*, **79**, 1759 (1957).
- (L1) LANGE, N. A. *Handbook of Chemistry*, 10th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1967.
- (L2) LANGHAAR, H. L. *Trans. A.S.M.E.*, **64**, A-55 (1942).
- (M1) MOODY, L. F. *Trans. A.S.M.E.*, **66**, 671 (1944); *Mech Eng.*, **69**, 1005 (1947).
- (M2) McCABE, W.L., SMITH, J. C., and HARRIOTT, P. *Unit Operations of Chemical Engineering*, 4th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1985.
- (N1) National Bureau of Standards. *Tables of Thermal Properties of Gases*, Circular 464 (1955).
- (P1) PERRY, R. H., and GREEN, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
- (R1) REID, R. C., PRAUSNITZ, J. M., and SHERWOOD, T. K. *The Properties of Gases and Liquids*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1977.
- (R2) *Reactor Handbook*, vol. 2, AECD-3646. Washington D.C.: Atomic Energy Commission, May 1955.

- (S1) SWINDELLS, J. F., COE, J. R. Jr., and GODFREY, T. B. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **48**, 1 (1952).
- (S2) SKELLAND, A. H. P. *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- (S3) SIEDER, E. N., and TATE, G. E. *Ind. Eng. Chem.*, **28**, 1429 (1936).
- (W1) WEAST, R. C. *Handbook of Chemistry and Physics*, 48th ed. Boca Raton, Fla.: Chemical Rubber Co., Inc., 1967-1968.

فصل سوم

اصول انتقال ممتوم و کاربردها

۳-۱ جریان گذرنده از روی اجسام غوطه‌ور، برجهای آکنده و بسترهای سیالی شده

۳-۱۸ تعریف ضریب دراگ^(۱) برای جریان گذرنده از روی اجسام غوطه‌ور

۱- مقدمه و انواع نیروی دراگ^(۲): در فصل دوم با انتقال ممتوم و تلفات اصطکاکی (اتلاف انرژی توسط اصطکاک) جریان سیال در مجراها و کانالها آشنا شدیم. در این بخش به تفصیل جریان سیال را در اطراف جامدات و اجسام غوطه‌ور مورد بررسی و ملاحظه قرار می‌دهیم.

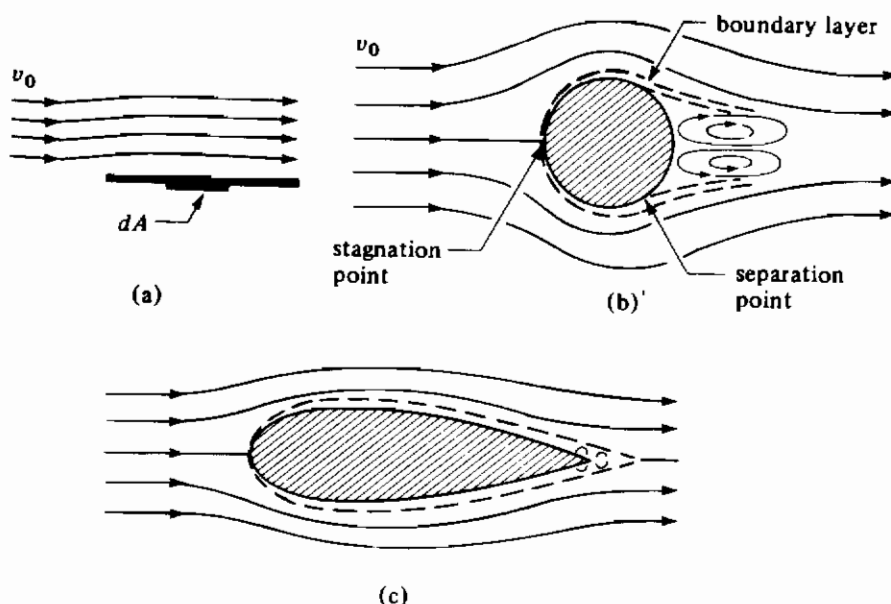
با پدیدهٔ جریان سیال در اطراف اجسام غوطه‌ور در بسیاری از جنبه‌های کاربردی مهندسی شیمی و سایر فرایندها روبرو هستیم. جریان سیال در اطراف کره در فرایند ته‌نشینی، جریان در برجهای آکنده در فرایندهای خشک کردن و فیلتراسیون و جریان داخل لوله‌ها در مبدل حرارتی و همانند آنها از جمله این کاربردها می‌باشند. پیش‌بینی اُفت اصطکاکی و نیروی وارد بر اجسام غوطه‌ور در این کاربردهای متنوع، مفید و مؤثر خواهد بود.

در مثالهایی از اصطکاک سیال درون لوله‌ها که در فصل ۲ مورد بررسی قرار گرفت، انتقال ممتوم عمود بر سطح ناشی از تنش برشی یا نیروی دراگ وارد بر سطح صاف موازی با مسیر جریان بود. این نیرو که توسط سیال بر روی جامداتی که در مسیر جریان قرار دارند اعمال می‌شود، نیروی دراگ

1. Drag coefficient

2. Drag force

دیواره^(۱) یا نیروی دراگ پوسته‌ای^(۲) نام دارد. برای هر سطحی که با جریان سیال تماس دارد اصطکاک پوسته‌ای^(۳) وجود دارد. اگر سیال موازی با سطح، جریان نداشته باشد به گونه‌ای که برای گذشتن از جسم جامد ناگزیر به تغییر مسیر باشد (مانند کره) علاوه بر اصطکاک پوسته‌ای، اُفت اصطکاک قابل توجه دیگری به نام نیروی دراگ شکلی^(۴) نیز وجود دارد.



شکل ۱-۳. جریان گذرنده از روی اجسام غوطه‌ور: (a) صفحه صاف (b) کره (c) اجسام دوکی شکل

در شکل ۱-۳a جریان سیال موازی با سطح صاف جسم است. نیروی F (بر حسب نیوتن) وارد بر المان سطح dA (بر حسب m^2) برابر است با تنش برشی در دیواره (τ_w) ضرب در مساحت (dA) و یا $\tau_w \cdot dA$. نیروی کل برابر مجموع انتگرال این کمیتهاست که در روی کل سطح صفحه به دست آمده‌اند. در این جا انتقال ممتوم روی سطح، بدلیل تنش مماسی یا نیروی دراگ پوسته‌ای وارد بر سطح می‌باشد.

اما در موارد زیادی جسم غوطه‌ور لبه ضخیم دارد و زوایای متفاوتی را در مسیر جریان ایجاد می‌کند. همچنان‌که در شکل ۱-۳b نشان داده شده سرعت جریان آزاد سیال v_0 است و سرعت در

1. wall drag
3. skin friction,

2. skin drag
4. form drag

نزدیکی جسم که در یک کانال بزرگ معلق می‌باشد یکنواخت است. خطوطی که خطوط جریان^(۱) نامیده می‌شوند نشان‌دهنده مسیر المانهای سیال در اطراف جسم معلق هستند. لایه‌های باریک مرزی نزدیک به سطح جسم جامد با خط‌چین نشان داده شده‌اند و در اطراف این لایه سرعت ضرورتاً برابر با سرعت توده‌ای سیال اطراف آن است. در جلوی مرکز جسم که نقطه سکون^(۲) نام دارد سرعت سیال برابر صفر است و رشد لایه‌های مرزی در این نقطه آغاز می‌شود و در بالای سطح ادامه می‌یابد تا زمانی که از سطح جدا شود. تنش مماسی اعمال شده بر جسم به علت تغییر سرعت در لایه مرزی همان اصطکاک پوسته‌ای است. سیال در خارج از لایه مرزی ناگزیر به تغییر مسیر برای گذر از اطراف جسم است و در ابتدا سرعت افزایش و سپس کاهش می‌یابد. به دلیل این اثرات، علاوه بر نیروی دراگ پوسته‌ای در لایه مرزی، نیروی دیگری نیز از طرف سیال بر جسم اعمال می‌شود. این پدیده، نیروی دراگ شکلی نام دارد.

همان طور که در شکل ۱۵-۱-۳ نشان داده شده است، جدایی لایه مرزی و تشکیل یک جریان کم فشار در عقب جسم در جایی اتفاق می‌افتد که گردابه‌های بزرگی ظاهر شوند که به ایجاد نیروی دراگ شکلی کمک می‌کنند. نقطه جدایی به شکل جسم، عدد رینولدز و ... بستگی دارد و در مراجع دیگر (S3) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نیروی دراگ شکلی برای اجسام کروی با تغییر شکل دادن آنها به صورت دوکی شکل به حداقل مقدار خود می‌رسد (شکل ۱۵-۱-۳) که نقطه جدایی را به قسمت انتهایی جسم منتقل می‌کند و به میزان زیادی باعث کاهش اندازه گردابه‌ها می‌شود. بحثهای تکمیلی در مورد اغتشاش و لایه‌های مرزی در بخش ۱۰-۳ مطرح شده است.

۲- ضریب دراگ^(۳). چنان که در بحثهای قبلی مشخص شد، شکل هندسی جامدات غوطه‌ور، پارامتر مهمی در تعیین مقدار کل نیروی دراگ اعمال شده بر جسم است. در مورد اجسام جامد که در جریان آزاد معلق هستند (مانند اجسام غوطه‌ور) ارتباط بین شکل هندسی جسم و ویژگیهای جریان از نظر مفهوم و شکل شبیه ارتباط عدد رینولدز و ضریب اصطکاک در جریان درون کانال است. مطابق معادله (۴-۱۰-۲)، در جریان سیال درون کانال ضریب اصطکاک به صورت نسبت نیروی دراگ در واحد سطح (تنش برشی) به حاصل ضرب دانسیته در هد سرعت، تعریف شده است.

به روشی مشابه برای جریان گذرنده از روی اجسام، ضریب دراگ C_D به صورت نسبت کل نیروی دراگ در واحد سطح به $\frac{\rho v^2}{2}$ تعریف شده است.

$$C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho v_0^2/2} \quad (\text{SI})$$

(۳-۱-۱)

$$C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho v_0^2/2g_c} \quad (\text{English})$$

که F_D نیروی دراگ کل برحسب N ، A_p سطح بر حسب m^2 ، C_D بدون بعد، v_0 (سرعت جریان آزاد) برحسب m/s و ρ دانسیته سیال بر حسب kg/m^3 است. در سیستم انگلیسی، F_D برحسب lb_f و ρ برحسب lb_m/ft^3 ، A_p برحسب ft^2 است. مساحت A_p استفاده شده در فرمول، تصویر جسم روی سطح مستوی عمود بر خط جریان می باشد. برای یک کره $A_p = \pi D_p^2/4$ است که D_p قطر کره می باشد. برای استوانه‌ای که محور آن عمود بر مسیر جریان است $A_p = L D_p$ که L طول استوانه می باشد. با حل معادله (۳-۱-۱) برای کل نیروی دراگ،

$$F_D = C_D \frac{\rho v_0^2}{2} A_p \quad (3-1-2)$$

عدد رینولدز برای یک جسم جامد مشخص غوطه‌ور در جریان مایع به صورت زیر است،

$$N_{Re} = \frac{D_p v_0 \rho}{\mu} = \frac{D_p G_0}{\mu} \quad (3-1-3)$$

که $G_0 = v_0 \rho$ است.

۱B-۳ جریان گذرنده از روی کره، استوانه طویل و دیسک

برای هر شکل خاص از یک جسم و وضعیت قرار گرفتن آن نسبت به مسیر جریان، رابطه متفاوتی برای C_D بر حسب N_{Re} وجود دارد. در شکل ۳-۱-۲ ارتباط ضریب دراگ با عدد رینولدز برای کره، استوانه طویل و دیسک نشان داده شده است. سطح دیسک و محور استوانه عمود بر مسیر سیال هستند. این نمودارها به طریق تجربی تعیین شده‌اند. اما در ناحیه آرام برای اعداد رینولدز کمتر از ۱ نیروی دراگ وارد شده بر یک کره که به طریق تجربی اندازه گیری می شود برابر با نیرویی است که از طریق قانون Stokes به صورت زیر به دست می آید،

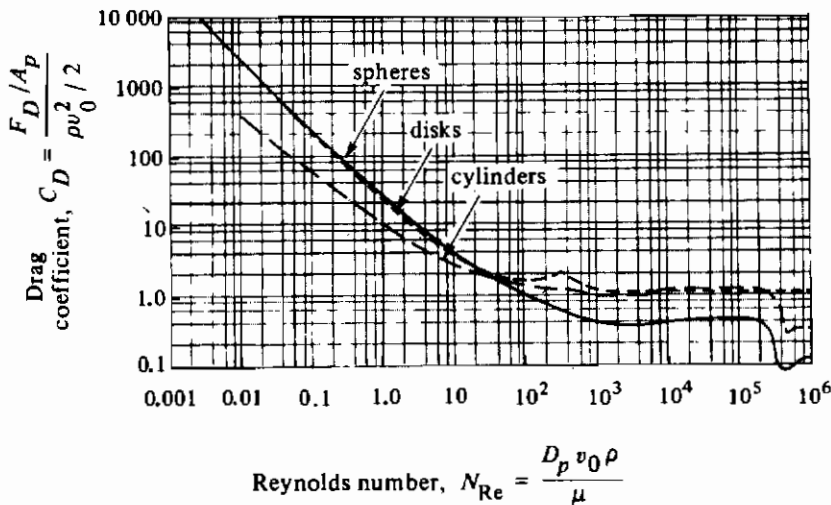
$$F_D = 3\pi\mu D_p v_0 \quad (3-1-4)$$

ضریب دراگ را می توان به وسیله قانون Stokes از طریق ترکیب معادلات (۳-۱-۲) و (۳-۱-۴) و حل آن برای C_D پیش بینی کرد.

$$C_D = \frac{24}{D_p v_0 \rho / \mu} = \frac{24}{N_{Re}} \quad (3-1-5)$$

تغییرات C_D بر حسب N_{Re} (شکل ۳-۱-۲) به علت تأثیر عواملی که دراگ پوسته‌ای و دراگ

شکلی را کنترل می‌کنند بسیار پیچیده است. در مورد کره وقتی عدد رینولدز بیش از محدوده قانون Stokes افزایش یابد، جدایی^(۱) اتفاق می‌افتد و گردابه‌ها تشکیل می‌شوند. افزایش بیشتر N_{Re} باعث جابجایی در نقطه جدایی می‌شود. در ناحیه حدود $N_{Re} = 3 \times 10^5$ افت ناگهانی C_D اتفاق می‌افتد که به دلیل اغتشاش در لایه مرزی و حرکت نقطه جدایی به سمت پایین دست جریان است. در محدوده‌ای که N_{Re} حدوداً بین 1×10^3 تا 2×10^5 باشد ضریب دراگ تقریباً برای تمام اشکال ثابت است و در این حالت C_D کره برابر 0.44 می‌باشد. اگر N_{Re} از حدود 5×10^5 بالاتر باشد ضریب دراگ باز هم تقریباً ثابت است. در این حالت C_D برای کره برابر با 0.13 و برای استوانه برابر با 0.33 و برای دیسک برابر با $1/12$ می‌باشد. بحثهای تکمیلی و تئوری در مورد جریان گذرنده از کره در بخش ۹E-۳ ارائه شده است.



شکل ۲-۱-۳. ضرایب دراگ برای جریان گذرنده از روی کره‌ها، استوانه‌های بلند و دیسک‌های غوطه ور در سیال. (باکسب مجوز از (C. E. Lapple, C. B. Shepherd, Ind. Eng. Chem., 32, 606 (1940)).

برای درک تئوریه‌ها و بحثهای جزئی‌تر در مورد نیروی دراگ در جریان موازی با یک صفحه مسطح باید بخش ۱۰-۳ که در مورد جریان لایه مرزی و اغتشاش است مطالعه شود. جریان سیال عمود بر گروه استوانه‌ها یا لوله‌ها در مبدل‌های حرارتی و در سایر کاربردهای فرایندی روی می‌دهد. گروه لوله‌ها می‌توانند آرایشهای متفاوتی داشته باشند. به علت آرایشهای مختلف لوله‌ها و فواصل متفاوت بین آنها، ارائه یک رابطه برای همبسته^(۲) کردن داده‌های اُفت فشار و ضریب اصطکاک عملی نیست. جزئیات بیشتر در مراجع دیگر (P1) ارائه شده‌اند.

مثال ۳-۱-۱ نیروی وارد بر کره غوطه‌ور

هوا در دمای $37/8^{\circ}\text{C}$ و فشار مطلق $101/3\text{ kPa}$ در اطراف یک کره به قطر 42 mm با سرعت 23 m/s جریان می‌یابد. ضریب دراگ (C_D) و نیروی وارد بر کره را محاسبه کنید.

حل: از ضمیمه A.3 برای هوا در $37/8^{\circ}\text{C}$ داریم:

$$\mu = 1/90 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s} \quad , \quad \rho = 1/137\text{ kg/m}^3$$

همچنین، $D_p = 0/042\text{ m}$ و $v_0 = 23\text{ m/s}$ با استفاده از معادله (۳-۱-۳)،

$$N_{Re} = \frac{D_p v_0 \rho}{\mu} = \frac{0/042 \times 23 \times 1/137}{1/9 \times 10^{-5}} = 5/781 \times 10^4$$

از شکل ۳-۱-۲ برای یک کره $C_D = 0/47$ می‌باشد. با جایگزینی آن در معادله (۳-۱-۲) و با در نظر گرفتن این‌که برای یک کره $A_p = \pi D_p^2/4$ است خواهیم داشت،

$$F_D = C_D \frac{v_0^2}{2} \rho A_p = (0/47) \frac{(0/23)^2}{2} (1/137)(\pi) \frac{(0/042)^2}{4} = 0/1958\text{ N}$$

مثال ۳-۱-۲ نیروی وارد بر یک استوانه در یک تونل

آب در دمای 24°C از روی یک استوانه طویل با سرعت 1 m/s در یک تونل بزرگ جریان می‌یابد. محور استوانه بر مسیر جریان عمود است. قطر استوانه $0/090\text{ m}$ است. نیروی وارد بر هر متر از طول استوانه را محاسبه کنید.

حل: از ضمیمه A.2 برای آب در دمای 24°C داریم:

$$\mu = 0/9142 \times 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s} \quad , \quad \rho = 997/2\text{ kg/m}^3$$

همچنین $D_p = 0/090\text{ m}$ و $v_0 = 1\text{ m/s}$ و $L = 1\text{ m}$ با استفاده از معادله (۳-۱-۳)،

$$N_{Re} = \frac{D_p v_0 \rho}{\mu} = \frac{0/090 \times 1 \times 997/2}{0/9142 \times 10^{-3}} = 9/817 \times 10^4$$

از شکل (۳-۱-۲) برای استوانه طویل، $C_D = 1/4$. با جایگزینی در معادله (۳-۱-۲) و با

توجه به این‌که $A_p = L D_p = (1)(0/09) = 0/09\text{ m}^2$

$$F_D = C_D \frac{v_0^2}{2} \rho A_p = (1/4) \frac{(1)^2}{2} (997/2)(0/09) = 62/82\text{ N}$$

۱C-۳ جریان در بسترهای آکنده^(۱)

۱- مقدمه: یکی از سیستمهای مهم در مهندسی شیمی و مهندسی فرایند بستر آکنده یا برج آکنده می باشد که به صورتهای، راکتور کاتالیزوری با بستر ثابت، جذب سطحی یک حل شونده، جذب، بستر صافی و همانند آنها مورد استفاده قرار می گیرد. آکندهها^(۲) در بستر ثابت ممکن است کره، ذرات با شکل هندسی نامنظم، استوانه و انواع متفاوت آکندههای تجارتي باشند. در دنباله بحث فرض بر این است که آکندهها همه جا یکنواخت هستند و پدیده کانالی شدن روی نمی دهد. برای آنکه تأثیر جداره به حداقل خود برسد نسبت قطر ستون به قطر آکنه باید حداقل ۸:۱ تا ۱۰:۱ باشد. به طور ثوری برج آکنده مانند ستونی از لوله های کج با سطح مقطع متغیر در نظر گرفته می شود. ثوری ای که در مورد لوله های مستقیم منفرد در فصل ۲ بیان شد برای توسعه نتایج دسته لوله های کج نیز به کار می رود.

۲- جریان آرام در بسترهای آکنده: از روابط هندسی مشخصی برای به دست آوردن معادلات جریان ذرات داخل برجهای آکنده استفاده شده است. ضریب تخلخل^(۳) در یک بستر پر شده به صورت زیر تعریف شده است.

$$\varepsilon = \frac{\text{حجم فضاهای خالی بستر}}{\text{حجم کل بستر (حجم جامد + حجم خالی)}} \quad (3-1-6)$$

سطح مخصوص یک ذره (a_v) با واحد m^{-1} به صورت زیر تعریف می شود،

$$a_v = \frac{S_p}{V_p} \quad (3-1-7)$$

در این جا S_p سطح مفید ذره بر حسب m^2 و V_p حجم یک ذره بر حسب m^3 است. برای یک ذره گروی داریم،

$$a_v = \frac{6}{D_p} \quad (3-1-8)$$

که D_p قطر بر حسب متر است. قطر مؤثر ذره (D_p) در یک برج آکنده با ذرات غیر گروی به صورت زیر تعریف شده است،

$$D_p = \frac{6}{a_v} \quad (3-1-9)$$

چون $(1 - \varepsilon)$ کسر حجمی ذرات در داخل بستر است،

$$a = a_v(1 - \varepsilon) = \frac{6}{D_p}(1 - \varepsilon) \quad (3-1-10)$$

که a نسبت کل سطح مفید در بستر به حجم کل بستر (حجم خالی به اضافه حجم ذرات) بر حسب m^{-1} است.

مثال ۳-۱-۳ سطح مفید بستر آکنده با آکنه‌های استوانه‌ای

یک برج آکنده از استوانه‌هایی به قطر $D = 0.02 \text{ m}$ و طول $h = D$ تشکیل شده است. دانسیته توده‌ای برج آکنده برابر با 962 kg/m^3 و دانسیته استوانه‌های جامد برابر 1600 kg/m^3 می‌باشد. الف) ضریب تخلخل ε را محاسبه کنید. ب) قطر مؤثر ذرات (D_p) را محاسبه کنید. پ) مقدار a را در معادله (۳-۱-۱۰) محاسبه کنید.

حل: برای قسمت الف) 1 m^3 از برج آکنده را به عنوان مبنا در نظر می‌گیریم. جرم کل بستر، $962 \text{ kg} = (1 \text{ m}^3)(962 \text{ kg/m}^3)$ است. جرم ذرات استوانه‌ای هم محسوب می‌شود. بنابراین حجم استوانه‌ها، $0.0601 \text{ m}^3 = (962 \text{ kg}) / (1600 \text{ kg/m}^3)$ است. با استفاده از معادله (۳-۱-۶)،

$$\varepsilon = \frac{\text{حجم فضاهای خالی بستر}}{\text{حجم کل بستر (حجم جامد + حجم خالی)}} = \frac{1 - 0.061}{1} = 0.939$$

برای محاسبه قطر مؤثر ذرات (D_p) در قسمت ب)، در استوانه‌ای که در آن $h = D$ سطح مفید ذره برابر است با،

$$S_p = 2 \times \frac{\pi D^2}{4} + \pi D(D) = \frac{3}{2} \pi D^2$$

حجم ذره (v_p) برابر است با،

$$v_p = \frac{\pi D^2}{4} (D) = \frac{\pi D^3}{4}$$

با جایگزینی در معادله (۳-۱-۷)،

$$a_v = \frac{S_p}{v_p} = \frac{6}{D}$$

سرانجام، با جایگزینی در معادله (۳-۱-۹)،

$$D_p = \frac{6}{a_v} = \frac{6}{6/D} = D = 0.02 \text{ m}$$

بنابراین قطر مؤثر مورد استفاده $D_p = D = 0.02 \text{ m}$ است. برای قسمت پ) با استفاده از

معادله (۳-۱-۱۰)،

$$a = \frac{6}{D_p} (1 - \varepsilon) = \frac{6}{0.02} (1 - 0.939) = 180/3 \text{ m}^{-1}$$

v بر حسب m/s سرعت سیال در لایه‌ی منافذ بستر است و متناسب با سرعت ذاتی (v') براساس سطح

مقطع خالی بستر می‌باشد که با رابطه زیر نشان داده می‌شود.

$$v' = \varepsilon v \quad (3-1-11)$$

شعاع هیدرولیک (r_H) جریان که در معادله (۲۱-۱۰-۲) تعریف شده است، به صورت زیر تغییر می‌یابد (B2).

$$\begin{aligned} r_H &= \frac{\text{حجم خالی در دسترس برای جریان}}{\text{کل سطح خیس شده ذرات جامد}} = \frac{\text{سطح مقطع در دسترس برای جریان}}{\text{محیط خیس شده}} \\ &= \frac{\text{نسبت حجم ذرات به حجم بستر}}{\text{نسبت سطح خیس شده به حجم بستر}} = \frac{\varepsilon}{\alpha} \end{aligned} \quad (3-1-12)$$

با ترکیب معادلات (۳-۱-۱۰) و (۳-۱-۱۲)،

$$r_H = \frac{\varepsilon}{6(1-\varepsilon)} D_p \quad (3-1-13)$$

چون قطر معادل D برای یک کانال (لوله) برابر با $4 \times r_H$ است، بنابراین عدد رینولدز برای بستر آکنده با استفاده از معادله (۳-۱-۱۳) و $v' = \varepsilon v$ به صورت زیر است،

$$N_{Re} = \frac{(4r_H)v\rho}{\mu} = \frac{4\varepsilon}{6(1-\varepsilon)} D_p \frac{v'\rho}{\varepsilon\mu} = \frac{4}{6(1-\varepsilon)} \frac{D_p v'\rho}{\mu} \quad (3-1-14)$$

برای بسترهای آکنده Ergun (E1) عدد رینولدز را به صورت بالا ولی بدون عبارت $\frac{4}{6}$ تعریف کرد،

$$N_{Re,p} = \frac{D_p v'\rho}{(1-\varepsilon)\mu} = \frac{D_p G'}{(1-\varepsilon)\mu} \quad (3-1-15)$$

که $G' = v'\rho$.

برای جریان آرام معادله Hagen-Poiseuille، (معادله (۲-۱۰-۲)) می‌تواند با معادله (۳-۱-۱۳) r_H و معادله (۳-۱-۱۱) ترکیب شود و معادله زیر به دست آید،

$$\Delta p = \frac{32\mu v \Delta L}{D^2} = \frac{32\mu(v'/\varepsilon) \Delta L}{(4r_H)^2} = \frac{(72)\mu v' \Delta L(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 D_p^2} \quad (3-1-16)$$

ΔL واقعی به علت غیر مستقیم بودن مسیر بزرگتر است و به جهت استفاده از شعاع هیدرولیک، مقدار بسیار بزرگی برای v' پیش‌بینی می‌شود. داده‌های تجربی نشان می‌دهد که مقدار ثابت باید معادل ۱۵۰ باشد که معادله Blake-Kozeny را برای جریان آرام با ضریب تخلخل کمتر از ۰/۵، قطر مؤثر ذرات D_p و N_{Re} کوچکتر از ۱۰ نتیجه می‌دهد.

$$\Delta p = \frac{150\mu v' \Delta L (1-\varepsilon)^2}{D_p^2 \varepsilon^3} \quad (3-1-17)$$

۳- جریان مغشوش در بسترهای آکنده: برای جریان مغشوش نیز از همین روند استفاده می‌شود. با

معادله (۵-۱۰-۲) شروع می‌کنیم و با جایگزینی معادلات (۱۱-۱-۳) و (۱۳-۱-۳) در این معادله داریم:

$$\Delta p = \frac{3f\rho(v')^2 \Delta L}{D_p} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \quad (3-1-18)$$

برای جریان با اغتشاش زیاد ضریب اصطکاک به مقدار ثابتی نزدیک می‌شود. هم چنین فرض می‌کنیم تمام بسترهای آکنده زبری نسبی^(۱) یکسان دارند. اطلاعات تجربی نشان می‌دهد که $1/75 = 0.34$. بنابراین معادله نهایی برای جریان مغشوش با $1000 < N_{Re,p}$ ، که معادله Burke-Plummer نام دارد، به صورت زیر است،

$$\Delta p = \frac{1.75\rho(v')^2 \Delta L}{D_p} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \quad (3-1-19)$$

Ergun با جمع کردن معادله (۱۷-۱-۳) برای جریان آرام و معادله (۱۹-۱-۳) برای جریان مغشوش، معادله عمومی زیر را برای محدوده‌های اعداد رینولدز کم، میانگین و زیاد که به طریق تجربی نیز امتحان شده‌اند، پیشنهاد کرد،

$$\Delta p = \frac{150\mu v' \Delta L}{D_p^2} \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} + \frac{1.75\rho(v')^2 \Delta L}{D_p} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \quad (3-1-20)$$

با بازنویسی معادله (۲۰-۱-۳) برحسب گروه‌های بدون بعد،

$$\frac{\Delta p \rho D_p}{(G')^2 \Delta L} \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} = \frac{150}{N_{Re,p}} + 1.75 \quad (3-1-21)$$

همچنین برای شکل دیگر معادله (۲۱-۱-۳)، معادله (۳۳-۱-۳) را ببینید. معادله Ergun (۲۱-۱-۳) برای گازها نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد که دانسیته میانگین حسابی گاز در فشارهای ورودی و خروجی را در نظر می‌گیرد. سرعت v' در طول بستر برای یک سیال تراکم‌پذیر تغییر می‌کند اما G' مقدار ثابتی است. اگر مقدار $N_{Re,p}$ زیاد باشد معادلات (۲۰-۱-۳) و (۲۱-۱-۳) به معادله (۱۹-۱-۳) و برای مقادیر رینولدز کم به معادله (۱۷-۱-۳) تبدیل می‌شوند. معادله (۲۰-۱-۳) برای اُفت فشار زیاد گازها می‌تواند به شکل دیفرانسیلی نوشته شود (P1).

مثال ۴-۱-۳ اُفت فشار و جریان گازها در برج آکنده

هوا در دمای ۳۱۱ K در داخل یک بستر آکنده با آکنه‌های کروی به قطر ۱۲/۷ mm جریان دارد. ضریب تملخل بستر (ε) برابر ۰/۳۸ است و قطر بستر ۰/۶۱ m و ارتفاع آن ۲/۴۴ m است. هوا

ضریب تخلخل بستر (ϵ) برابر $0/38$ است و قطر بستر $0/61$ m و ارتفاع آن $2/44$ m است. هوا در فشار مطلق $1/10$ اتمسفر با دبی $0/358$ kg/s وارد بستر می‌شود. اُفت فشار هوا را در داخل برج آکنده محاسبه کنید. وزن مولکولی میانگین هوا برابر $28/97$ می‌باشد.

حل: از ضمیمه A.3 برای هوا در 311 K، $\mu = 1/90 \times 10^{-5}$ Pa.s، سطح مقطع بستر برابر—، $A = (\pi/4)D^2 = (\pi/4)(0/61)^2 = 0/2922$ m²، $G' = 0/358/0/2922 = 1/225$ kg/m².s، $D_p = 0/0127$ m. (براساس سطح مقطع خالی بستر). $\Delta L = 2/44$ m، فشار ورودی $p_1 = 1/1 \times (1/01325 \times 10^5) = 1/115 \times 10^5$ Pa، از معادله (۳-۱-۱۵) داریم،

$$N_{Re,p} = \frac{D_p G'}{(1-\epsilon)\mu} = \frac{0/0127 \times 1/225}{(1-0/38) \times 1/9 \times 10^{-5}} = 1321$$

هنگام استفاده از معادله (۳-۱-۲۱) برای گازها دانسیته (ρ)، برابر با میانگین دانسیته در فشارهای ورودی p_1 و خروجی p_2 یا در $(p_1 + p_2)/2$ است. چون p_2 مجهول است باید از حدس و خطا استفاده شود. با فرض $p_2 = 1/115 \times 10^5 - 0/05 \times 10^5 = 1/065 \times 10^5$ Pa، $\Delta p = 0/05 \times 10^5$ Pa، فشار میانگین برابر است با، $p_{av} = (1/115 \times 10^5 + 1/065 \times 10^5)/2 = 1/090 \times 10^5$ Pa، دانسیته میانگین مورد استفاده برابر است با،

$$\rho_{av} = \frac{M}{RT} p_{av} = \frac{28/97 \times 1/09 \times 10^5}{8314/34 \times 311} = 1/221 \text{ kg/m}^3 \quad (3-1-22)$$

با جایگزینی در معادله (۳-۱-۲۱) و حل آن نسبت به Δp داریم،

$$\frac{\Delta p \times 1/221 \times 0/0127}{1/225^2} \frac{0/38^3}{2/44} = \frac{150}{1321} + 1/75$$

پس از حل، $\Delta p = 0/497 \times 10^5$ Pa، که به اندازه کافی به مقدار حدس زده شده نزدیک است و نیاز به حدس دوم نیست.

۴- ضرایب شکل^(۱): بسیاری از آکنه‌ها دارای شکل هندسی منظمی نیستند. قطر معادل یک ذره به صورت قطر کره‌ای با همان حجم تعریف می‌شود. ضریب شکل کرویت^(۲) یک ذره (ϕ_s) برابر است با نسبت سطح مفید کره‌ای با همان حجم به سطح مفید واقعی ذره مورد نظر. سطح مفید یک کره برابر با $S_p = \pi D_p^2$ و حجم آن $v_p = \pi D_p^3/6$ است. بنابراین برای هر ذره $\phi_s = \pi D_p^2/S_p$ است که S_p سطح

مفید واقعی ذره و D_p قطر کره‌ای (قطر معادل) با همان حجم می‌باشد. بنابراین،

$$\frac{S_p}{v_p} = \frac{\pi D_p^2 / \phi_s}{\pi D_p^3 / 6} = \frac{6}{\phi_s D_p} \quad (3-1-23)$$

از معادله (3-1-7) داریم،

$$a_v = \frac{S_p}{v_p} = \frac{6}{\phi_s D_p} \quad (3-1-24)$$

بنابراین معادله (3-1-10) می‌شود،

$$a = \frac{6}{\phi_s D_p} (1 - \epsilon) \quad (3-1-25)$$

برای یک کره $\phi_s = 1$ است. برای یک استوانه که قطر و طول آن مساویند ϕ_s برابر 0.874 ، و برای یک مکعب ϕ_s برابر 0.806 به دست می‌آید. برای مواد دانه‌ای شکل اندازه‌گیری حجم واقعی و سطح مفید برای به دست آوردن قطر معادل دشوار است. بنابراین D_p معمولاً برابر اندازه اسمی حاصل از آنالیز توسط غربال یا اندازه‌گیری‌های طول ظاهری در نظر گرفته می‌شود. سطح مفید با اندازه‌گیری میزان جذب سطحی یا اندازه‌گیری اُفت فشار در یک بستر تعیین می‌شود. سپس معادله (3-1-23) برای محاسبه ϕ_s مورد استفاده قرار می‌گیرد (جدول 3-1-1). مقادیر نمونه برای بسیاری از مواد خرد شده معمولاً بین 0.6 و 0.7 است. برای سهولت کار در مورد استوانه و مکعب معمولاً قطر اسمی مورد استفاده قرار می‌گیرد (به جای قطر معادل) که در نتیجه ضریب شکل برابر 1 به دست می‌آید.

جدول 3-1-1. ضریب شکل (کرویت) برای تعدادی از مواد جامد

Material	Shape Factor, ϕ_s	Reference
Spheres	1.0	
Cubes	0.81	
Cylinders, $D_p = h$ (length)	0.87	
Berl saddles	0.3	(B4)
Raschig rings	0.3	(C2)
Coal dust, pulverized	0.73	(C2)
Sand, average	0.75	(C2)
Crushed glass	0.65	(C2)

a_{vm} را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$a_{vm} = \sum x_i a_{vi} \quad (3-1-26)$$

که در این جا x_i برابر جزء حجمی است. با ترکیب معادلات (۳-۱-۲۴) و (۳-۱-۲۶)،

$$D_{pm} = \frac{6}{a_{vm}} = \frac{6}{\sum x_i (6/\phi_s D_{pi})} = \frac{1}{\sum x_i / (\phi_s D_{pi})} \quad (3-1-27)$$

که D_{pm} قطر میانگین مؤثر برای مخلوط است.

مثال ۳-۱-۵ قطر میانگین برای یک مخلوط ذرات

مخلوطی از سه نوع ذره موجود است. ۲۵٪ حجمی از ذراتی به قطر ۲۵ mm، ۴۰٪ حجمی از ذراتی به قطر ۵۰ mm و ۳۵٪ حجمی از ذراتی به قطر ۷۵ mm تشکیل شده است. ضریب کرویت برابر ۰/۶۸ است. قطر میانگین مؤثر را محاسبه کنید.

حل: این اطلاعات معلوم است، $D_{p1} = 25 \text{ mm}$ $\alpha_1 = 0/25$ ، $D_{p2} = 50 \text{ mm}$ $\alpha_2 = 0/4$ ، $D_{p3} = 75 \text{ mm}$ $\alpha_3 = 0/35$ ، با جایگزینی در معادله (۳-۱-۲۷)،

$$D_{pm} = \frac{1}{0/25/(0/68 \times 25) + 0/4/(0/68 \times 50) + 0/35/(0/68 \times 75)} = 30 \text{ mm}$$

۶- قانون تجربی داری برای جریان آرام: معادله (۳-۱-۱۷) برای جریان آرام در یک برج آکنده نشان می دهد شدت جریان با Δp متناسب است و با ویسکوزیته μ و طول ΔL نسبت عکس دارد. این پایه قانون داری است که برای جریان کاملاً ویسکوز در تماس با محیطهای متخلخل سخت به صورت زیر است،

$$v' = \frac{q'}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L} \quad (3-1-28)$$

که v' سرعت ذاتی^(۱) بر مبنای سطح مقطع خالی با واحد cm/s، q' شدت جریان برحسب cm^۳/s، A سطح مقطع خالی بر حسب cm^۲، μ ویسکوزیته برحسب cp، Δp افت فشار برحسب atm، ΔL طول برحسب cm و k ضریب نفوذپذیری^(۲) بر حسب پارامترهای مختلفی به صورت حاصل ضرب [(طول). (ویسکوزیته). (دبی حجمی)] تقسیم بر حاصل ضرب [(افت فشار). (سطح)] است. واحد مورد استفاده برای k cm^۲.cp/s.atm است که اغلب داری

یا میلی داری گفته می‌شود. بنابراین اگر یک محیط متخلخل دارای ضریب نفوذپذیری ۱ darcy باشد، سیالی با ویسکوزیته ۱ cp با دبی حجمی $1 \text{ cm}^3/\text{s}$ به ازای هر 1 cm^2 از سطح مقطع، با Δp برابر یک اتمسفر به ازای هر سانتی‌متر از طول، در آن جریان خواهد یافت. این معادله اغلب برای اندازه‌گیری ضریب نفوذپذیری مخازن زیرزمینی نفت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱D-۳ جریان در بسترهای سیالی شده

۱- سرعت و تخلخل حداقل برای سیالی شدن: وقتی سیال با سرعت کم در یک برج آکنده به طرف بالا جریان می‌یابد، ذرات ساکن باقی می‌مانند. همچنان که سرعت سیال افزایش می‌یابد بر طبق معادله Ergun (۲۰-۱-۳) اُفت فشار نیز افزایش می‌یابد. با افزایش بیشتر سرعت در نهایت به نقطه‌ای می‌رسیم که نیروی حاصل از اُفت فشار ضریبدر سطح مقطع درست مساوی با نیروی ثقل وارده بر جرم ذرات می‌شود. پس اجزاء در آستانه حرکت قرار می‌گیرند و این ابتدای پیدایش سیالی شدن یا حداقل سیالی شدن است. سرعت سیال هنگامی که سیالی شدن شروع می‌شود سرعت حداقل سیالی شدن (v'_{mf}) است که بر حسب m/s می‌باشد. این سرعت بر مبنای سطح مقطع خالی بستر است (سرعت ذاتی).

تخلخل^(۱) بستر وقتی که سیالی شدن واقعی اتفاق می‌افتد، برابر با حداقل تخلخل برای سیالی شدن یا ε_{mf} می‌باشد. نمونه‌ای از مقادیر ε_{mf} برای اجسام مختلف در جدول ۲-۱-۳ ارائه شده است. قبل از این که حرکت اجزاء ظاهر شود بستر منبسط می‌شود و تخلخل بستر افزایش می‌یابد. این تخلخل حداقل، به طور تجربی به وسیله وارد کردن یک جریان گاز به طرف بالا به داخل بستر و اندازه‌گیری ارتفاع بستر L_{mf} بر حسب متر تعیین می‌شود. عموماً به نظر می‌رسد که بهتر است گاز را به جای مایع به عنوان سیال مورد استفاده قرار دهیم. زیرا مایعات معمولاً ε_{mf} بالاتری دارند.

جدول ۳-۱-۲. ضریب تخلخل (ϵ_{mf}) در شرایط حداقل سیالی شدن (L2)

Type of Particles	Particle Size, D_p (mm)			
	0.06	0.10	0.20	0.40
	Void fraction, ϵ_{mf}			
Sharp sand ($\phi_s = 0.67$)	0.60	0.58	0.53	0.49
Round sand ($\phi_s = 0.86$)	0.53	0.48	0.43	(0.42)
Anthracite coal ($\phi_s = 0.63$)	0.61	0.60	0.56	0.52

همان‌طورکه پیشتر اشاره شد تا پیدایش شرایط حداقل سیالی شدن با افزایش سرعت، اُفت فشار نیز افزایش می‌یابد. سپس به محض افزایش بیشتر سرعت، اُفت فشار به مقدار جزئی کاهش می‌یابد و سپس عملاً بدون تغییر می‌ماند. سپس با افزایش سرعت، انبساط بستر یا افزایش تخلخل ادامه می‌یابد. بستر مانند یک مایع در حال جوش است. همچنانکه بستر با افزایش سرعت منبسط می‌شود، سطح بالایی بستر افقی باقی می‌ماند. سرانجام وقتی سرعت به میزان بیشتری افزایش می‌یابد، خروج ذرات از بستر به میزان قابل ملاحظه‌ای شروع می‌شود.

ارتباط بین ارتفاع بستر (L) و تخلخل (ϵ) برای بستری با سطح مقطع یکنواخت A به صورت زیر است. حجم $LA(1 - \epsilon)$ معادل با حجم کل جامدات است. در صورتی که همه از یک نوع باشند داریم،

$$L_1 A(1 - \epsilon_1) = L_2 A(1 - \epsilon_2) \quad (3-1-29)$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1 - \epsilon_2}{1 - \epsilon_1} \quad (3-1-30)$$

در این جا L_1 ارتفاع بستر با تخلخل ϵ_1 و L_2 ارتفاع بستر با تخلخل ϵ_2 می‌باشند.

۲- اُفت فشار و حداقل سرعت سیالی شدن: به‌عنوان اولین تقریب، اُفت فشار در ابتدای سیالی شدن می‌تواند به این ترتیب تعیین گردد که نیروی حاصل از اُفت فشار ضربدر سطح مقطع باید با نیروی جاذبه‌ای که به وسیله جرم ذرات منهای نیروی شناوری سیال جایجا شده اعمال می‌شود، مساوی باشد.

$$\Delta p A = L_{mf} A(1 - \epsilon_{mf})(\rho_p - \rho)g \quad (3-1-31)$$

بنابراین،

$$\frac{\Delta p}{L_{mf}} = (1 - \epsilon_{mf})(\rho_p - \rho)g \quad (\text{SI})$$

$$\frac{\Delta p}{L_{mf}} = (1 - \epsilon_{mf})(\rho_p - \rho) \frac{g}{g_c} \quad (\text{English}) \quad (3-1-32)$$

اغلب در بستر، ذرات به صورت نامنظم هستند و بهتر است که در معادلات از اندازه ذره و ضریب شکل استفاده کنیم. ابتدا برای قطر میانگین مؤثر D_p ، جمله $\phi_S D_p$ را جانشین می‌کنیم که D_p اندازه ذره‌ای به همان حجم ذره و ϕ_S ضریب شکل است. غالباً، مقدار D_p براساس اندازه اسمی حاصل از آنالیز توسط یک غربال تقریب زده می‌شود. پس معادله (۳-۱-۲۰) برای اُفت فشار در یک بستر پر شده، به صورت زیر است:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150\mu v' (1-\varepsilon)^2}{\phi_S^2 D_p^2 \varepsilon^3} + \frac{1.75\rho(v')^2 (1-\varepsilon)}{\phi_S D_p \varepsilon^3} \quad (3-1-33)$$

که در این جا $L = \Delta L$ طول بستر برحسب متر است.

معادله (۳-۱-۳۳) می‌تواند به وسیله برون یابی برای محاسبه سرعت حداقل سیالی شدن در بستره‌ای پر شده که در آن سرعت سیالی شدن آغاز می‌شود مورد استفاده قرار گیرد. این کار به وسیله جایگزینی v'_{mf} به جای v' ، ε_{mf} به جای ε و L_{mf} به جای L و ترکیب نتایج با معادله (۳-۱-۳۲) انجام می‌شود و خواهیم داشت،

$$\frac{1.75D_p^2(v'_{mf})^2\rho^2}{\phi_S^2\varepsilon_{mf}^2\mu^2} + \frac{150(1-\varepsilon_{mf})D_p v'_{mf}\rho}{\phi_S^2\varepsilon_{mf}^3\mu} - \frac{D_p^3\rho(\rho_p-\rho)g}{\mu^2} = 0 \quad (3-1-34)$$

با تعریف عدد رینولدز به صورت زیر،

$$N_{Re,mf} = \frac{D_p v'_{mf}\rho}{\mu} \quad (3-1-35)$$

معادله (۳-۱-۳۴) می‌شود،

$$\frac{1.75(N_{Re,mf})^2}{\phi_S^2\varepsilon_{mf}^3} + \frac{150(1-\varepsilon_{mf})(N_{Re,mf})}{\phi_S^2\varepsilon_{mf}^3} - \frac{D_p^3\rho(\rho_p-\rho)g}{\mu^2} = 0 \quad (3-1-36)$$

زمانی که $N_{Re,mf} < 20$ (ذرات کوچک) باشد، اولین جمله معادله (۳-۱-۳۶) می‌تواند حذف شود و زمانی که $N_{Re,mf} > 1000$ (ذرات بزرگ) باشد جمله دوم حذف می‌شود.

اگر عبارات ε_{mf} و یا ϕ_S معلوم نباشند، Yu و Wen (W4) روابط زیر را برای بعضی سیستمها به دست آورده‌اند،

$$\phi_S \varepsilon_{mf}^3 \cong \frac{1}{14}, \quad \frac{1-\varepsilon_{mf}}{\phi_S^2 \varepsilon_{mf}^3} \cong 11 \quad (3-1-37)$$

با جایگزینی در معادله (۳-۱-۳۶) معادله ساده زیر به دست می‌آید،

$$N_{Re,mf} = \left[(33.7)^2 + 0.0408 \frac{D_p^3 \rho (\rho_p - \rho) g}{\mu^2} \right]^{1/2} - 33.7 \quad (3-1-38)$$

این معادله برای عدد رینولدز در محدوده ۰/۰۰۱ تا ۴۰۰۰ با انحراف میانگین $\pm 25\%$ صادق است. معادلات دیگر در مراجع (K1,W4) موجود هستند.

مثال ۳-۱-۶ سرعت حداقل سیالی شدن

ذرات جامد به قطر ۰/۱۲ mm و ضریب شکل (ϕ_s) برابر با ۰/۸۸ و دانسیته 1000 kg/m^3 با استفاده از هوا در فشار مطلق ۲ atm و دمای 25°C می‌خواهند سیالی شوند. تخلخل حداقل در شرایط سیالی شدن ۰/۴۲ است.

(الف) اگر سطح مقطع بستر خالی 0.30 m^2 باشد و بستر محتوی 300 kg جسم جامد باشد، ارتفاع حداقل بستر سیالی شده را محاسبه کنید.

(ب) افت فشار را در شرایط حداقل سیالی شدن محاسبه کنید.

(پ) سرعت حداقل سیالی شدن را محاسبه کنید.

(ت) با فرض این‌که ϕ_s و ϵ_{mf} در دسترس نیستند از معادله (۳-۱-۳۸) برای محاسبه v'_{mf} استفاده کنید.

حل: برای قسمت (الف)، حجم جامدات برابر با، $0.3 \text{ m}^3 = 300 \text{ kg} / (1000 \text{ kg/m}^3)$ است.

اگر $\epsilon_1 = 0$ باشد ارتفاعی که جامدات در بستر اشغال خواهند کرد برابر خواهد بود با،

$$L_1 = \frac{0.3 \text{ m}^3}{(0.3 \text{ m}^2)} = 1 \text{ m} \quad \text{همچنین با استفاده از معادله (۳-۱-۳۰) و قرار دادن } L_{mf} = L_2 \text{ و}$$

$$\epsilon_{mf} = \epsilon_2 \quad \text{داریم،}$$

$$\frac{L_1}{L_{mf}} = \frac{1 - \epsilon_{mf}}{1 - \epsilon}$$

$$\frac{1}{L_{mf}} = \frac{1 - 0.42}{1 - 0}$$

که از حل آن خواهیم داشت، $L_{mf} = 1/0.58 \text{ m}$.

خواص فیزیکی هوا در فشار ۲ atm و دمای 25°C (ضمیمه A.3) عبارتند از:

$$\rho = 2/0.265 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad \rho = 1/187 \times 2 = 2/374 \text{ kg/m}^3, \quad \mu = 1/845 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$$

برای ذره داریم،

$$\epsilon_{mf} = 0.42 \quad \phi_s = 0.88 \quad \rho_p = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad D_p = 0.00012 \text{ m}$$

در قسمت (ب) با استفاده از معادله (۳-۱-۳۲) برای محاسبه Δp داریم،

$$\Delta p = L_{mf} (1 - \varepsilon_{mf}) (\rho_p - \rho) g$$

$$= 1/724 \times (1 - 0/42)(1000 - 2/374)(9/80665) = 0/0978 \times 10^5 \text{ Pa}$$

برای محاسبه v'_{mf} در قسمت (پ)، معادله (۳-۱-۳۶) استفاده می‌شود،

$$\frac{1/75 (N_{Re,mf})^2}{0/88 \times 0/42^3} + \frac{150 (1 - 0/42)(N_{Re,mf})}{0/88 \times 0/42^3}$$

$$- (0/00012)^3 \frac{2/374 (1000 - 2/374)(9/80665)}{(1/845 \times 10^{-5})^2}$$

از حل معادله نتیجه می‌شود که،

$$N_{Re,mf} = 0/07764 = \frac{D_p v'_{mf} \rho}{\mu} = \frac{0/00012 \times (v'_{mf}) \times 2/374}{1/845 \times 10^{-5}}$$

$$v'_{mf} = 0/005029 \text{ m/s}$$

با به کار بردن معادله ساده شده (۳-۱-۳۸) برای قسمت (ت) داریم،

$$N_{Re,mf} = \left[33/7^2 + \frac{0/0408 \times 0/00012^3 \times 2/374 \times (1000 - 2/374) \times 9/80665}{(1/845 \times 10^{-5})^2} \right]^{1/2} - 33/7$$

$$= 0/07129$$

$$v'_{mf} = 0/004618 \text{ m/s, پس از حل،}$$

۳- انبساط بسترهای سیالی شده^(۱). برای ذرات کوچک و $N_{Re,f} = D_p v' \rho / \mu < 20$ می‌توانیم تغییرات تخلخل یا ارتفاع بستر L را به این صورت تخمین بزنیم. فرض کردیم که معادله (۳-۱-۳۶) در کل محدوده سرعت‌های سیال با حذف اولین عبارت به کار می‌رود. بنابراین با حل معادله برای v' داریم،

$$(3-1-39)$$

می‌دانیم که همه عبارات به جز ε برای یک سیستم بخصوص ثابت هستند و ε به v' بستگی دارد. این معادله می‌تواند برای تخمین زدن ε در مایعات به کار رود که در آنها $\varepsilon < 0/8$ است. اما در موقع استفاده از رابطه برای گازها به دلیل حرکت آرام و عوامل دیگر خطا به وجود خواهد آمد.

شدت جریان در یک بستر سیالی شده از یک طرف به سرعت حداقل (v'_{mf}) و از طرف دیگر به خروج جامدات از بستر محدود می‌شود. این سرعت حداکثر مجاز به صورت تقریب به عنوان سرعت

حد ته‌نشینی ذرات^(۱) (v'_t) در نظر گرفته می‌شود (برای روشهای محاسبه سرعت ته‌نشینی، بخش (۳-۱۳) را ببینید). معادلات تقریبی برای محاسبه محدوده عملیاتی به شرح زیر است (P2). برای جامدات ریز و

$$N_{Re,f} < 0.4 \text{ داریم،}$$

$$\frac{v'_t}{v_{mf}} \cong \frac{90}{1} \quad (3-1-40)$$

برای جامدات درشت و $N_{Re,f} > 1000$ داریم،

$$\frac{v'_t}{v_{mf}} \cong \frac{9}{1} \quad (3-1-41)$$

مثال ۳-۱-۷ انبساط بستر سیالی شده

با استفاده از داده‌های مثال ۳-۱-۶، سرعت حداکثر مجاز v'_t را تخمین بزنید. با استفاده از سرعت عملیاتی سه برابر سرعت حداقل، تخلخل بستر را تخمین بزنید.

حل: از مثال ۳-۱-۶ داریم،

$$N_{Re,mf} = 0.07764, v'_{mf} = 0.005029 \text{ m/s}, \varepsilon_{mf} = 0.42$$

با استفاده از معادله (۳-۱-۴۰) حداکثر سرعت مجاز برابر است با،

$$v'_t \cong 90(v'_{mf}) = 90 \times 0.005029 = 0.4526 \text{ m/s}$$

با استفاده از سرعت عملیاتی v' معادل سه برابر سرعت حداقل داریم،

$$v' = 3(v'_{mf}) = 3 \times 0.005029 = 0.01509 \text{ m/s}$$

برای تعیین تخلخل در این سرعت جدید، مقادیر معلوم را در حداقل شرایط سیالی شدن برای تعیین K_1 در معادله (۳-۱-۳۹) جایگزین می‌کنیم و داریم،

$$0.005029 = K_1 \frac{0.42^3}{1 - 0.42}$$

از حل معادله، $K_1 = 0.03938$ به دست می‌آید. سپس با به کار بردن سرعت عملیاتی در معادله (۳-۱-۳۹) داریم،

$$0.01509 = 0.03938 \frac{\varepsilon^3}{1 - \varepsilon}$$

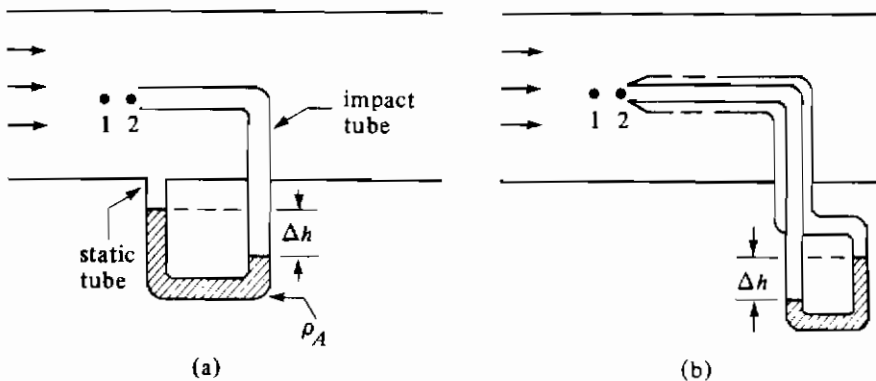
از حل معادله فوق تخلخل بستر در این سرعت عملیاتی، $\varepsilon = 0.555$ به دست می‌آید.

۳-۲ اندازه‌گیری جریان سیالات

توانایی اندازه‌گیری و کنترل مقدار مواد ورودی و خروجی کارخانه‌های شیمیایی یا فرایندهای دیگر مهم است. چون بسیاری از مواد که به شکل سیال هستند، در لوله‌ها و کانالها جریان پیدا می‌کنند. وسایل مختلفی برای اندازه‌گیری جریان سیالات استفاده می‌شوند. ساده‌ترین نوع، آنهایی هستند که مستقیماً حجم مایعات را اندازه‌گیری می‌کنند. مثل کنتورهای معمولی آب و گاز و پمپهای جابجایی مثبت. کنتورهای موجود از اجزایی مانند یک پروانه یا تیغه‌های خمیده روی یک محور دوار استفاده می‌کنند که این اجزا با یک سرعت معین براساس سرعتی که سیال از آنها عبور می‌کند می‌چرخند. وسایل دیگری نیز برای اندازه‌گیری جریان سیال به کار می‌روند که از جمله آنها لوله پیتوت، وانتوری متر، اریفیس متر و سرریزهای کانال باز می‌باشند.

۳-۲۸ لوله پیتوت^(۱)

لوله پیتوت برای اندازه‌گیری سرعت موضعی در یک نقطه مشخص در جریان سیال استفاده می‌شود، ولی برای اندازه‌گیری سرعت میانگین در لوله‌ها و کانالها مناسب نیست. در شکل ۳-۲-۱a شمایی از این وسیله ساده نشان داده شده است. در یک لوله پیتوت روزنه قسمتی از لوله که در داخل سیال قرار دارد، عمود بر جهت جریان سیال است و روزنه قسمتی از لوله پیتوت که خارج از سیال قرار دارد موازی با جهت جریان سیال است.



شکل ۳-۲-۱. لوله پیتوت: (a) لوله ساده (b) لوله با روزنه فشار استاتیک

سیال در نقطه ۲ وارد روزنه می‌شود و معادل با فشارش در لوله بالا می‌رود و سپس در این نقطه ثابت می‌ماند. این نقطه، نقطه سکون نامیده می‌شود. اختلاف بین فشار سکون در نقطه ۲ و فشار استاتیک (که توسط قسمتی از لوله پیتوت که خارج سیال است اندازه‌گیری می‌شود) ناشی از افزایش فشار به همراه کاهش سرعت سیال است. مانومتر این افزایش فشار کوچک را اندازه‌گیری می‌کند. اگر سیال تراکم‌ناپذیر باشد، می‌توانیم معادله برنولی (۳۲-۷-۲) را بین نقطه ۱، با سرعت ۷۱ (که هنوز کاهش سرعت روی آن تأثیر نگذاشته است)، و نقطه ۲ که در آنجا سرعت ۷۲ برابر صفر است، بنویسیم،

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = 0 \quad (3-2-1)$$

با قرار دادن $v_2 = 0$ و حل معادله نسبت به v_1 داریم،

$$v = C_p \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \quad (3-2-2)$$

در اینجا، v_1 سرعت در لوله در نقطه ۱ برحسب m/s ، p_2 فشار سکون، ρ دانسیته سیال در فشار استاتیک و p_1 و C_p یک ضریب ثابت بدون بعد برای از بین بردن عوامل خطای معادله (۳-۲-۱) بوده که عموماً بین ۰/۹۸ تا ۱ تغییر می‌کند. برای دقت بیشتر، این ثابت باید به وسیله درجه‌بندی لوله پیتوت تعیین شود. این معادله برای سیالات تراکم‌ناپذیر بکار برده می‌شود. اما تقریباً می‌تواند برای جریان‌های گازها در سرعت‌های معمولی و تغییرات فشار کل حدود ۱۰٪ یا کمتر استفاده شود. برای گازها تغییرات فشار غالباً پایین است و بنابراین اندازه‌گیری دقیق سرعت مشکل است.

مقدار افت فشار $p_2 - p_1$ یا Δp برحسب پاسکال توسط رابطه زیر به Δh (اختلاف ارتفاع مانومتر) بر اساس معادله (۳-۲-۱۴) ربط داده می‌شود،

$$\Delta p = \Delta h(\rho_A - \rho)g \quad (3-2-3)$$

که ρ_A دانسیته سیال مانومتر برحسب kg/m^3 و Δh اختلاف ارتفاع مانومتر برحسب m است. در شکل ۳-۲-۱۱h یک طرح دیگر با لوله‌های هم مرکز نشان داده شده است. در لوله خارجی، روزنه‌های مربوط به فشار استاتیک، موازی جهت جریان هستند. جزئیات بیشتر در مراجع (P1) داده شده است.

چون لوله پیتوت فقط سرعت را در یک نقطه جریان اندازه‌گیری می‌کند، روش‌های مختلفی برای به دست آوردن سرعت میانگین در لوله می‌توانند استفاده شوند. در روش اول برای این‌که v_{max} را به دست آوریم دقیقاً سرعت در مرکز لوله اندازه‌گیری می‌شود. سپس سرعت میانگین v_{av} می‌تواند با استفاده از شکل ۳-۲-۱۰ به دست آید. باید توجه کرد که بایستی فاصله لوله پیتوت تا هر مانعی در لوله حداقل ۱۰۰ برابر قطر لوله باشد. در روش دوم، اختلاف ارتفاع مانومتر در چند نقطه مختلف از مقطع

لوله اندازه‌گیری می‌شود و سپس برای به دست آوردن v_{av} با استفاده از معادله (۱۷-۶-۲) از طریق انتگرالگیری ترسیمی یا عددی اقدام می‌شود.

مثال ۱-۲-۳ اندازه‌گیری جریان با استفاده از لوله پیتوت

یک لوله پیتوت مشابه شکل ۱۸-۲-۳ برای اندازه‌گیری جریان هوا در یک مجرای مدور به قطر ۶۰۰ mm استفاده می‌شود. دمای هوا $65/6^\circ\text{C}$ است. لوله پیتوت در مرکز مجرا قرار داده شده و Δh خوانده شده روی مانومتر برابر با $10/7$ میلی‌متر آب است. فشار استاتیک قرائت شده از لوله پیتوت ۲۰۵ میلی‌متر آب بیشتر از فشار اتمسفر است. ضریب ثابت لوله پیتوت $C_p = 0/98$ می‌باشد.

الف) سرعت در مرکز و سرعت میانگین را محاسبه کنید.

ب) دبی حجمی هوا را در مجرا حساب کنید.

حل: برای قسمت (الف)، خواص هوا در $65/6^\circ\text{C}$ از ضمیمه A.3 عبارتند از،

$$\mu = 2/03 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}, \rho = 1/043 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{در } 101/325 \text{ kPa})$$

برای محاسبه فشار مطلق استاتیک، اختلاف ارتفاع مانومتر $\Delta h = 0/205$ متر آب، فشاری بالاتر از فشار مطلق اتمسفر را نشان می‌دهد. با استفاده از معادله (۱۴-۲-۲) و این‌که دانسیته آب 1000 kg/m^3 است و با فرض این‌که دانسیته هوا برابر $1/043 \text{ kg/m}^3$ باشد، داریم،

$$\Delta p = 0/205 \times (1000 - 1/043) \times 9/80665 = 2008 \text{ Pa}$$

پس فشار مطلق استاتیک p_1 برابر با، $p_1 = 1/01325 \times 10^5 + 0/2008 \times 10^5 = 1/0333 \times 10^5 \text{ Pa}$ است. دانسیته صحیح هوا در جریان برابر با $(1/0333 \times 10^5 / 1/01325 \times 10^5) (1/043) = 1/063 \text{ kg/m}^3$ است. این مقدار صحیح موقعی که به جای $1/043$ استفاده شود تأثیر ناچیزی روی محاسبه مجدد p_1 دارد. برای محاسبه Δp در لوله پیتوت از معادله (۳-۲-۳) استفاده می‌شود.

$$\Delta p = \Delta h (\rho_A - \rho) g = \frac{10/7}{1000} (1000 - 1/063) \times 9/80665 = 104/8 \text{ Pa}$$

با استفاده از معادله (۳-۲-۳) سرعت حداکثر در مرکز برابر است با،

$$v = 0/98 \times \left(\frac{2 \times 104/8}{1/063} \right)^{1/5} = 13/76 \text{ m/s}$$

عدد رینولدز با به کار بردن سرعت حداکثر به صورت زیر است،

$$N_{Re} = \frac{D v_{max} \rho}{\mu} = \frac{0.06 \times 13/76 \times 1/0.63}{2/0.3 \times 10^{-5}} = 4/323 \times 10^5$$

از شکل ۲-۱۰-۲ داریم، $v_{av}/v_{max} = 0.85$ سپس $v_{av} = (0.85)(13/76) = 11/7$ m/s

برای محاسبه شدت جریان در قسمت (ب) سطح مقطع مجرا برابر است با،

$$A = (\pi/4)(0.06)^2 = 0.2728 \text{ m}^2$$

شدت جریان نیز برابر با، $0.2827 \times 11/7 = 3/308 \text{ m}^3/\text{s}$ است.

۳-۲B ونتوری متر^(۱)

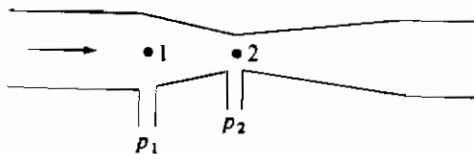
یک ونتوری متر در شکل ۳-۲-۲ نشان داده شده است و معمولاً به طور مستقیم در مسیر خط لوله قرار می‌گیرد. مانومتر یا یک وسیله دیگر به دو روزنه فشار متصل می‌شود و اختلاف فشار $p_1 - p_2$ را بین دو نقطه ۱ و ۲ اندازه می‌گیرد. سرعت میانگین در نقطه ۱ جایی که قطر آن D_1 متر است برابر v_1 متر بر ثانیه است و در نقطه ۲ یا گلوگاه، سرعت برابر با v_2 و قطر نیز D_2 می‌باشد. به دلیل این که کاهش قطر از D_1 به D_2 و انبساط مجدد از D_2 به D_1 تدریجی است، افت اصطکاکی کمی از این انبساط و انقباض به وجود می‌آید.

برای به دست آوردن معادله ونتوری متر از اصطکاک صرف‌نظر شده و فرض می‌شود که لوله افقی است. با فرض جریان مغشوش و نوشتن معادله انرژی مکانیکی (۲۸-۷-۲) بین نقاط ۱ و ۲ برای یک سیال تراکم‌ناپذیر داریم،

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad (3-2-4)$$

معادله پیوستگی برای فشار ثابت برابر است با،

$$v_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \quad (3-2-5)$$



شکل ۳-۲-۲. ونتوری متر

با ترکیب کردن معادلات (۳-۲-۴) و (۳-۲-۵) و حذف v_1 داریم،

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (3-2-6)$$

برای به حساب آوردن مقدار کم اُفت اصطکاک، یک ضریب ثابت تجربی C_v به صورت زیر در معادله وارد می شود،

$$v_2 = \frac{C_v}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (\text{SI}) \quad (3-2-7)$$

$$v_2 = \frac{C_v}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (\text{English})$$

برای بسیاری از وسایل اندازه گیری با عدد رینولدز بزرگتر از 10^4 در نقطه ۱، C_v در حدود 0.98 برای لوله های با قطر کمتر از 0.2 m است و برای اندازه های بزرگتر، 0.99 می باشد. اما اگر درجه بندی توسط سازنده انجام نشده باشد، این ضرایب ثابت می توانند تغییر کنند و درجه بندیهای خاصی می توانند بکار روند.

برای محاسبه دبی حجمی، سرعت v_2 در مساحت A_2 ضرب می شود و داریم،

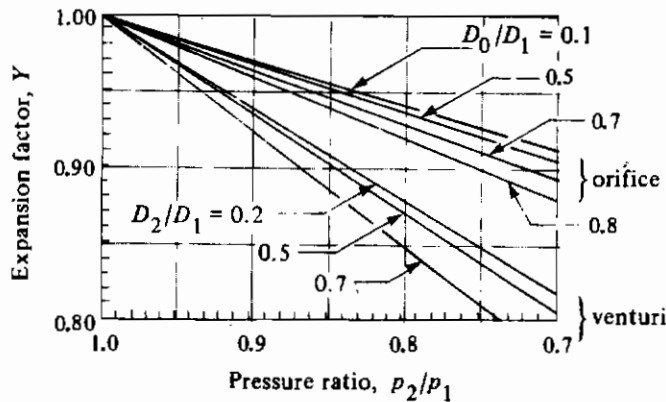
$$\text{شدت جریان} = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \quad \text{m}^3/\text{s} \quad (3-2-8)$$

برای اندازه گیری جریان تراکم پذیر گازها، انبساط آدیاباتیکی از p_1 به p_2 در معادله (۳-۲-۷) بایستی در نظر گرفته شود. رابطه مشابهی با همان ضریب ثابت C_v همراه ضریب تصحیح انبساط بدون بعد Y (در شکل ۳-۲-۳ برای هوا نشان داده شده است) به صورت زیر به کار می رود،

$$m = \frac{C_v A_2 Y}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \sqrt{2(p_1 - p_2)\rho_1} \quad (3-2-9)$$

در این جا m شدت جریان برحسب kg/s ، ρ_1 دانسیته سیال بالادستی در نقطه ۱ برحسب kg/m^3 و A_2 سطح مقطع در نقطه ۲، برحسب m^2 است.

به دلیل اینکه سرعت از v_1 به v_2 افزایش می یابد، اختلاف فشار $p_1 - p_2$ رخ می دهد. اما برای مایعات، سرعت پایین دست لوله به مقدار v_1 بر می گردد. به دلیل افتهای اصطکاک کمی، تمام اختلاف فشار $p_1 - p_2$ بازیابی نمی شود. در یک ونتوری متر با طراحی مناسب، اُفت ثابت در حدود 10% اختلاف $p_1 - p_2$ است و این نشان دهنده اُفت توان است. ونتوری متر اغلب برای اندازه گیری جریان در خطوط بزرگ مثل سیستمهای آبرسانی شهر به کار برده می شود.

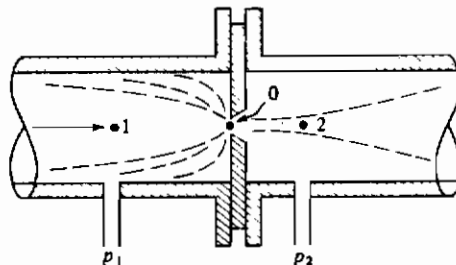


شکل ۳-۲-۳. ضریب انبساط هوا در ونتوری و اریفیس (محاسبه شده از معادلات و اطلاعات مراجع S3, M2, A2)

۳-۲-۳ اریفیس متر^(۱)

به کاربردن ونتوری متر در صنایع شیمیایی معمولی چند عیب دارد. اولاً فضای قابل ملاحظه‌ای را اشغال می‌کند و ثانیاً گران است. همچنین قطر گلوگاهش ثابت است، بنابراین اگر دامنه شدت جریان تغییرات قابل ملاحظه‌ای داشته باشد، ممکن است اختلاف فشار نادرستی نتیجه شود. اریفیس متر این ایراد را ندارد اما در مقابل افت انرژی بیشتری دارد.

یک اریفیس با لبه تیز در شکل ۳-۲-۴ نشان داده شده است. یک صفحه صاف و صیقلی که دارای یک سوراخ به قطر D است بین دو فلانج در یک لوله به قطر D_1 قرار می‌گیرد. روزه‌های فشار در نقطه ۱ در بالادست جریان، و در نقطه ۲ در پایین دست جریان، اختلاف فشار $p_1 - p_2$ را اندازه‌گیری می‌کنند. موقعیت دقیق دو روزه تا حدی اختیاری است و در بعضی از وسایل اندازه‌گیری، روزه‌ها در حدود ۱ برابر قطر لوله در قسمت بالادست و $0/3$ تا $0/8$ برابر قطر لوله در قسمت پایین دست ایجاد می‌شوند. جریان سیال که از اریفیس می‌گذرد ایجاد یک جت آزاد یا *vena contracta* می‌کند.



شکل ۳-۲-۴. اریفیس متر

معادلهٔ اریفیس مشابه معادلهٔ (۷-۲-۳) به صورت زیر است،

$$v_0 = \frac{C_0}{\sqrt{1 - (D_0/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (3-2-10)$$

که v_0 سرعت در اریفیس متر بر حسب m/s ، D_0 قطر اریفیس بر حسب m و C_0 ضریب ثابت بدون بُعد اریفیس است. همیشه ضریب ثابت C_0 اریفیس به طور تجربی تعیین می‌شود. اگر در اریفیس Re بیشتر از ۲۰۰۰۰ باشد و D_0/D_1 کمتر از حدود ۰/۵ باشد، C_0 تقریباً ثابت و برابر ۰/۶۱ است که برای مایعات کافی است (M2, P1). پایین‌تر از ۲۰۰۰۰، ضریب ثابت به شدت افزایش یافته و سپس اُفت می‌کند. رابطه‌ای برای C_0 در مراجع دیگر (P1) داده شده است.

همانند ونتوری، برای اندازه‌گیری جریان تراکم‌پذیر گازها در یک اریفیس، یک ضریب تصحیح Y که در شکل ۳-۲-۳ برای هوا داده شده است، به شرح زیر استفاده می‌شود،

$$m = \frac{C_0 A_0 Y}{\sqrt{1 - (D_0/D_1)^4}} \sqrt{2(p_1 - p_2)\rho_1} \quad (3-2-11)$$

در این جا m شدت جریان بر حسب kg/s ، ρ_1 دانسیته بالا دست جریان بر حسب kg/m^3 و A_0 سطح مقطع اریفیس است.

به دلیل گردابه‌های تشکیل شده هنگام انبساط جت سیال در زیر ناحیهٔ ونا، اُفت فشار دائمی خیلی بیشتر از ونتوری متر است. این اُفت به D_0/D_1 بستگی دارد و برای ۰/۵ برابر با ۷۳ درصد مقدار $p_1 - p_2$ است و برای ۰/۶۵، برابر با ۵۶٪ و برای ۰/۸ برابر با ۳۸٪ می‌باشد (P1).

مثال ۲-۲-۳ اندازه‌گیری جریان روغن به وسیلهٔ یک اریفیس

یک اریفیس با لبه‌های تیز به قطر m ۰/۰۵۶۶ در یک خط لوله به قطر ۰/۱۵۴۱ نصب شده است که روغن با دانسیتهٔ kg/m^3 ۸۷۸ و ویسکوزیتهٔ cp ۴/۱ در آن جریان دارد. اختلاف فشار اندازه‌گیری شده در عرض اریفیس kN/m^2 ۹۳/۲ است. دبی حجمی را بر حسب m^3/s محاسبه کنید. فرض کنید $C_0 = 0/61$.

حل:

$$p_1 - p_2 = 93/2 \text{ kN/m}^2$$

$$D_1 = 0/1541 \text{ m} \quad D_2 = 0/0566 \text{ m} \quad \frac{D_2}{D_1} = \frac{0/0566}{0/1541} = 0/368$$

با جانشین کردن در معادله (۳-۲-۱۰) داریم،

$$v_0 = \frac{C_0}{(1 - (D_2/D_1)^4)^{1/5}} \left(\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \right)^{1/5}$$

برای این که ببینیم N_{Re} از 2×10^4 برای $2/61 = C_0$ بزرگتر است آن را محاسبه می کنیم.

$$\mu = 4/1 \times 1 \times 10^{-3} = 4/1 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

$$N_{Re} = \frac{D_2 v_0 \rho}{\mu} = \frac{0/0566 \times 8/97 \times 878}{4/1 \times 10^{-3}} = 1/087 \times 10^5$$

بنابراین عدد رینولدز بیشتر از 2×10^4 است.

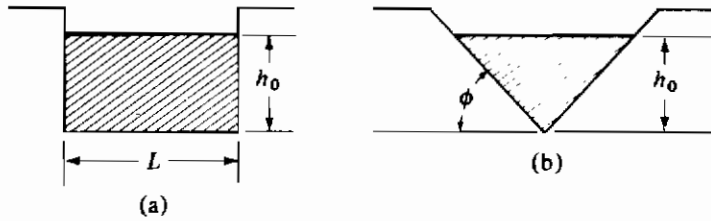
وسایل اندازه گیری دیگر جریان در مجاری بسته مانند: روتامترها، نازلها و مانند آن در مراجع دیگر (P1) بحث شده اند.

۳-۲D جریان در کانالهای باز و سرریزها

در موارد زیادی در مهندسی فرایند و در کشاورزی، مایعات در مجراهای باز به جای مجراهای بسته جریان دارند. برای اندازه گیری شدت جریان، اغلب از وسایل سرریزدار استفاده می شود. سرریز، سدی است که مایع از روی آن جریان پیدا می کند. دو نوع مهم سرریزها، سرریز مستطیل شکل و سرریز مثلثی شکل است که در شکل ۳-۲-۵ نشان داده شده اند. مایع روی سرریز جریان پیدا می کند و ارتفاع h_0 (هد سرریز) برحسب متر نسبت به صفحه مبنا مطابق آنچه در شکل نشان داده شده است، می باشد. این هد باید در فاصله ای حدود $3h_0$ از بالادست جریان در سرریز، توسط یک اندازه گیر سطح یا شناور اندازه گیری شود.

معادله دبی حجمی برحسب m^3/s در سرریز مستطیل شکل به صورت زیر است،

$$q = 0.415(L - 0.2h_0)h_0^{1.5} \sqrt{2g} \quad (3-2-12)$$



شکل ۳-۲-۵. انواع سرریزها: (a) چهارگوش (b) سه گوش

در این جا L حداکثر طول برحسب متر، $g = 9/80665 \text{ m/s}^2$ و h_0 هد سرریز بر حسب متر است. این رابطه، فرمول تغییر یافته فرانسویس برای سرریزها نامیده می شود که نتایج آن تحت شرایطی با مقادیر تجربی حدود ۳٪ اختلاف دارد، این شرایط عبارتند از: $L > 2h_0$ ، سرعت بالادست جریان کوچکتر از $0/6 \text{ m/s}$ و $0/09 \text{ m} > h_0$ و حداکثر ارتفاع بالای کف کانال بزرگتر از $3h_0$. در سیستم واحدهای انگلیسی L و h بر حسب ft و q بر حسب ft^3/s و $g = 32/174 \text{ ft/s}^2$ است.

برای سرریز مثلثی شکل داریم،

$$q = \frac{0.31h_0^{2.5}}{\tan \phi} \sqrt{2g} \quad (3-2-13)$$

هر دو معادله (۳-۲-۱۲) و (۳-۲-۱۳) فقط برای آب بکار می روند. برای بقیه مایعات به داده هایی که در مراجع دیگر (P1) داده شده اند، مراجعه کنید.

۳-۳ پمپها و تجهیزات انتقال گاز

۳-۳۸ مقدمه

وجود یک نیروی رانش برای جاری کردن سیال از یک نقطه به نقطه دیگر در یک مجرای بسته یا لوله لازم است. بعضی مواقع در جایی که اختلاف ارتفاع وجود داشته باشد، این نیرو بوسیله جاذبه تأمین می شود. معمولاً، انرژی یا نیروی رانش به وسیله یک دستگاه مکانیکی مانند پمپ یا دمنده که انرژی مکانیکی سیال را افزایش می دهد، تأمین می شود. این انرژی ممکن است برای افزایش سرعت (حرکت سیال)، افزایش فشار یا ارتفاع سیال استفاده شود، مانند آنچه که در معادله موازنه انرژی مکانیکی (۲-۷-۲۸) دیده شد که v و p و ρ و کار را به هم ربط می داد. معمول ترین روشهای افزودن انرژی، جابه جایی مثبت یا عمل سانترفوژ است.

عموماً لغت «پمپ» به ماشین یا وسیله‌ای برای حرکت دادن یک مایع تراکم‌ناپذیر اطلاق می‌شود. فن‌ها، دمنده‌ها و کمپرسورها وسایلی برای انتقال گاز (معمولاً هوا) هستند. فن‌ها، حجم زیادی از گاز را در فشارهای پایین تا حدود چند صد میلی‌متر آب جابجا می‌کنند. دمنده‌ها و کمپرسورها، گازها را در فشارهای بالاتر جابجا می‌کنند. در پمپها و فن‌ها، دانسیته سیال تغییر محسوسی نمی‌کند و جریان می‌تواند تراکم‌ناپذیر فرض شود. تئوری جریان تراکم‌پذیر در دمنده‌ها و کمپرسورها استفاده می‌شود.

۳-۳B پمپها

۱- توان و کار لازم: انرژی مکانیکی تئوری یا واقعی (W_s بر حسب J/kg) اضافه شده به سیال توسط پمپ می‌تواند با استفاده از معادله کلی موازنه انرژی مکانیکی (۲۸-۷-۲) برای یک پمپ و سیستم لوله‌کشی محاسبه شود. مثال ۵-۷-۲ یک نمونه را نشان می‌دهد. اگر η راندمان جزئی و W_p کار محوری داده شده به پمپ باشد، معادله (۳۰-۷-۲) می‌شود،

$$W_p = - \frac{W_s}{\eta} \quad (3-3-1)$$

که توان واقعی^(۱) پمپ به طریق زیر محاسبه می‌شود،

$$\text{brake kW} = \frac{W_p m}{1000} = - \frac{W_s m}{\eta \times 1000} \quad (\text{SI}) \quad (3-3-2)$$

$$\text{brake hp} = \frac{W_p m}{550} = \frac{W_s m}{\eta \times 550} \quad (\text{English})$$

W_p بر حسب J/kg، m شدت جریان بر حسب kg/s و ۱۰۰۰ ضریب تبدیل kW به W می‌باشد. در سیستم انگلیسی W_s بر حسب ft.lbf/lb_m و m بر حسب lb_m/s می‌باشد. توان تئوری سیال،

$$\text{توان تئوری} = (\text{brake kW})(\eta) \quad (3-3-3)$$

انرژی مکانیکی W_s بر حسب J/kg افزوده شده به سیال اغلب به صورت هد H افزوده شده بر حسب متر به سیال پمپ شده، بیان می‌شود. که در این صورت،

$$-W_s = Hg \quad (\text{SI}) \quad (3-3-4)$$

$$-W_s = H \frac{\theta}{\theta_c} \quad (\text{English})$$

برای محاسبه توان فن هنگامی که اختلاف فشار در حدود چند صد میلی‌متر آب باشد، از میانگین خطی دانسیته گاز بین ورودی و خروجی فن برای محاسبه توان واقعی (بر حسب kW یا اسب بخار) استفاده می‌شود.

چون بیشتر پمپها به وسیله موتور الکتریکی کار می‌کنند بنابراین بازده موتور الکتریکی نیز برای تعیین توان الکتریکی کل ورودی به موتور باید در نظر گرفته شود. انواع بازده برای موتورهای الکتریکی به این صورت می‌باشد: ۷۵٪ برای موتور ۱/۴ kW، ۸۰٪ برای موتور ۲ kW، ۸۴٪ برای موتور ۵ kW و ۸۷٪ برای ۱۵ kW و در حدود ۹۳٪ برای موتور بالای ۱۵۰ kW. بنابراین کل توان الکتریکی ورودی برابر با توان مفید تقسیم بر بازده موتور الکتریکی (η_e) می‌باشد.

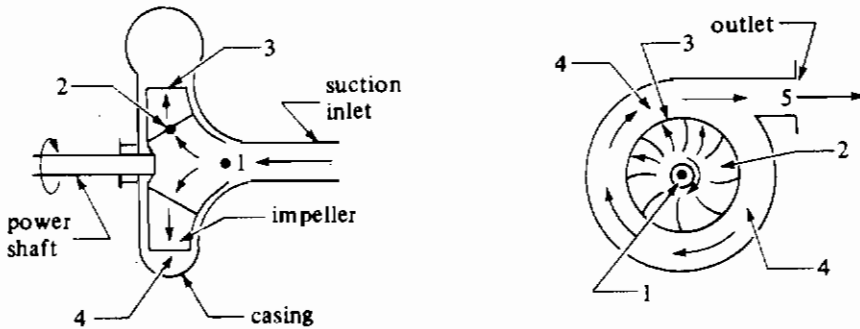
$$\text{توان الکتریکی ورودی (kW)} = \frac{\text{brake kW}}{\eta_e} = \frac{-W_s m}{\eta_e \cdot 1000} \quad (3-3-5)$$

۲- نیروی مکش: توان محاسبه شده به وسیله معادله (۳-۷-۲) به اختلاف فشار بستگی دارد و به این‌که فشار واقعی بالا یا پائین اتمسفر باشد بستگی ندارد. اما حد پائینی فشار مطلق در خط ورودی به پمپ بوسیله فشار بخار مایع در دمای مایع در لوله ورودی محدود شده است. اگر فشار مایع در ورودی پمپ تا حد فشار بخار کاهش یابد مقداری از مایع به بخار تبدیل می‌شود (کاویتاسیون)، بنابراین مایعی به داخل پمپ مکیده نمی‌شود.

در حالت خاص هنگامی که مایع غیر فرار باشد اصطکاک در لوله ورودی قابل چشم‌پوشی است و مایع از یک مخزن باز پمپ می‌شود که در این حالت پمپ بیشترین مکش را دارد. برای آب سرد این مقدار در حدود ۱۰/۴ m آب است. اما عملاً به خاطر وجود اصطکاک، فشار بخار، گازهای محلول و افت انرژی در ورودی از این مقدار کمتر است. برای شرح بیشتر به مراجع (P1, M2) مراجعه کنید.

۳- پمپهای گریز از مرکز: فرایندهای صنعتی معمولاً از پمپهای گریز از مرکز استفاده می‌کنند. این پمپها در اندازه‌های حدود ۰/۰۰۴ تا ۳۸۰ m^۳/min (۱ تا ۱۰۰۰۰۰ gal/min) و برای فشار خروجی از هد فشاری کم تا ۵۰۰۰ kPa وجود دارد. ساده‌ترین پمپ گریز از مرکز شامل یک پروانه است که در داخل پوسته‌اش می‌چرخد. شکل (۳-۳-۱) نمایی از یک پمپ گریز از مرکز ساده را نشان می‌دهد.

مایع به صورت محوری در نقطه (۱) وارد پمپ می‌شود و سپس توسط پروانه در حال چرخش به صورت شعاعی پخش می‌شود. در گسترش شعاعی، سیال وارد مجاری بین تیغه‌ها در نقطه (۲) می‌شود و از میان این مجاری تا نقطه (۳) در محیط پره جریان پیدا می‌کند. بعد در محفظه حلزونی (۴) جمع می‌شود و سپس به خارج پمپ در نقطه (۵) جریان پیدا می‌کند. چرخش پروانه هد سرعتی بالایی را به سیال می‌دهد که به هد فشاری تبدیل می‌شود، به طوری که مایع از محفظه حلزونی عبور کرده و سپس از پمپ خارج می‌شود. بعضی از پمپها دو مرحله‌ای یا چند مرحله‌ای هستند.



شکل ۱-۳-۳. پمپ گریز از مرکز ساده

عوامل پیچیده بسیاری بر تعیین بازده واقعی و عملکرد پمپ تأثیر می‌گذارند. بنابراین از عملکرد واقعی تجربی پمپ استفاده می‌شود. عملکرد پمپ معمولاً به وسیله سازنده پمپ توسط نمودارهایی بیان می‌شود که به این نمودارها، منحنی مشخصه^(۱) گفته می‌شود. این منحنیها معمولاً برای آب هستند. هد (H) ایجاد شده (برحسب متر) برای مایعهایی با ویسکوزیته برابر، یکسان خواهد بود. فشار تولید شده که برابر با ρgH می‌باشد متناسب با دانسیته است. ویسکوزیته‌های کمتر از $0.05 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ اثر کمی بر هد تولید شده دارند. توان واقعی (بر حسب kW) با دانسیته مستقیماً تغییر می‌کند.

به عنوان یک تقریب از فرمولهای زیر می‌توان برای یک پمپ مشخص استفاده کرد، ظرفیت

(q_1) برحسب m^3/s مستقیماً متناسب با N_1 است. یا،

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3-3-6)$$

هد (H_1) متناسب با q_1^2 است. یا،

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \quad (3-3-7)$$

توان مصرف شده (W_1) متناسب با $H_1 q_1$ است. یا،

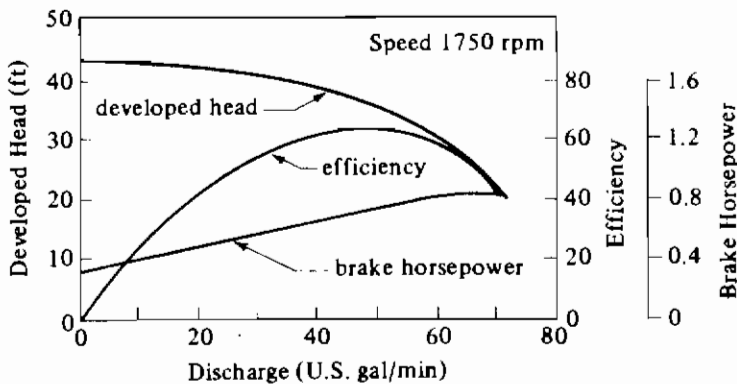
$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{H_1 q_1}{H_2 q_2} = \frac{N_1^3}{N_2^3} \quad (3-3-8)$$

معمولاً در بیشتر پمپها سرعت تغییر نمی‌کند. منحنیهای مشخصه برای یک پمپ گریز از مرکز یک مرحله‌ای در سرعت ثابت در شکل (۳-۳-۲) داده شده است. پمپها معمولاً براساس هد و ظرفیتشان در نقطه حداکثر راندمان تقسیم‌بندی می‌شوند. بازده در دبی حدود $50 \text{ gal}/\text{min}$ به

حداکثر می‌رسد. همچنان‌که دبی برحسب gal/min افزایش پیدا می‌کند هد کاهش می‌یابد. توان واقعی هم (بر حسب hp) همان‌گونه که انتظار داریم با افزایش دبی افزایش پیدا می‌کند.

مثال ۳-۳-۱ محاسبه توان واقعی یک پمپ برحسب اسب بخار

به منظور آشنایی با چگونگی تعیین منحنی توان واقعی، توان پمپ شکل ۳-۳-۲ را با شدت جریان ۴۰ gal/min تعیین کنید.



شکل ۳-۳-۲. منحنیهای مشخصه یک پمپ گریز از مرکز یک مرحله‌ای با آب (باکسب مجوز از:

W.L. Badger and J. T. Banchero, Introduction to Chemical Engineering,

(New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

حل: در شدت جریان ۴۰ gal/min از روی منحنی بازده برابر با ۶۰٪ و هد در حدود ۳۸/۵ ft خواهد بود، دبی جرمی آب با شدت ۴۰ gal/min و دانسیته $۶۲/۴ \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ خواهد بود،

$$m = \frac{۴۰ \text{ gal/min}}{۶۰ \text{ s/min}} \times \frac{۱ \text{ ft}^3}{۷/۴۸۱ \text{ gal}} \times ۶۲/۴ \text{ lb}_m/\text{ft}^3 = ۵/۵۶ \text{ lb}_m/\text{s}$$

W_s از معادله (۳-۳-۴) محاسبه می‌شود،

$$W_s = -11 \frac{\dot{V}}{g_c} = -۳۸/۵ \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{lb}_m$$

توان از معادله (۳-۳-۲) برابر است با،

$$\text{توان واقعی} = \frac{-W_s m}{\eta \times ۵۵۰} = \frac{۳۸/۵ \times ۵/۵۶}{۰/۶ \times ۵۵۰} = ۰/۶۵ \text{ hp (} ۰/۴۸ \text{ kW)}$$

این مقدار با مقدار به دست آمده از نمودار شکل ۲-۳-۳ تطابق دارد.

۴- پمپهای جابه‌جایی مثبت^(۱): در این نوع پمپ حجم معینی از مایع درون محفظه‌ای قرار دارد که فشار زیادی بر این حجم وارد می‌شود. دو نوع اصلی از این نوع پمپ وجود دارد: محفظه در پمپ رفت و برگشتی^(۲) یک سیلندر ثابت است و مایع به وسیله نیروی مکش پیستون وارد سیلندر می‌شود و سپس با ضربه برگشت پیستون به بیرون رانده می‌شود. محفظه در پمپهای دورانی^(۳) از ورودی تا خروجی حرکت می‌کند و این تکرار می‌شود. در یک پمپ دورانی دنده‌ای دو چرخ دنده درگیر می‌چرخند و مایع در فضای بین آنها گیر می‌افتد و سپس با قدرت به بیرون رانده می‌شود.

پمپهای رفت و برگشتی و دورانی می‌توانند در فشارهای خیلی بالا هم استفاده شوند. در حالی که پمپهای گریز از مرکز به وسیله هدشان محدود می‌شوند و در فشارهای پائین‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرند. خروجی پمپهای گریز از مرکز دارای فشار یکنواخت و بدون هیچ‌گونه شوک یا نوسان است و می‌توانند مقدار زیادی از مایع را با مواد معلق در آن جابه‌جا کنند. معمولاً در واحدهای فرایندی یا شیمیایی و بیولوژیکی از پمپهای گریز از مرکز استفاده می‌شود.

از معادله‌های (۱-۳-۳) تا (۵-۳-۳) برای محاسبه توان پمپ جابجایی مثبت استفاده می‌شود. در سرعتهای ثابت ظرفیت پمپ با مایعهای مختلف، ثابت باقی می‌ماند. به طور معمول نرخ سیال خروجی مستقیماً به سرعت مربوط می‌شود. توان مستقیماً با هد افزایش پیدا می‌کند و نرخ سیال خروجی هنگام افزایش هد تقریباً ثابت می‌ماند.

۳-۳C تجهیزات انتقال گاز

تجهیزات انتقال گاز شامل وسایلی مکانیکی برای تراکم و انتقال گازها هستند. آنها معمولاً برحسب هد فشاری تولید شده طبقه‌بندی می‌شوند. فن‌ها برای فشارهای پائین، دمنده‌ها برای فشارهای میانگین و کمپرسورها برای فشارهای بالا هستند.

۱- فن‌ها: معمول‌ترین روش برای انتقال حجم‌های کم گاز در فشار پایین استفاده از فن است. فن‌های بزرگ معمولاً گریز از مرکز هستند و اصول کارکرد آنها مشابه پمپهای گریز از مرکز است. هد خروجی فن‌ها معمولاً کم و در حدود ۰/۱ تا ۱/۵ m آب می‌باشد. در اغلب موارد بیشتر انرژی داده شده به فن به انرژی جنبشی تبدیل شده و مقدار کمی از آن به هد فشاری تبدیل می‌شود.

در فن گریز از مرکز، نیروی گریز از مرکز تولید شده به وسیلهٔ روتور گاز را متراکم می‌کند که به آن هد فشاری استاتیکی^(۱) گفته می‌شود. همچنین چون سرعت گاز افزایش پیدا می‌کند یک هد سرعتی به وجود می‌آید. افزایش هر دو هد فشاری ساکن و هد جنبشی باید در تخمین بازده و توان منظور شود. راندمانهای عملی در حدود ۴۰٪ تا ۷۰٪ می‌باشند. فشار نسبی یک فن معمولاً بر حسب اینچ آب داده می‌شود که مجموع هد سرعتی و هد فشاری ساکن گاز خروجی از فن است. می‌توان از تئوری جریان تراکم‌ناپذیر برای محاسبهٔ توان فن استفاده کرد.

مثال ۲-۳-۳ توان واقعی (kW) یک فن گریز از مرکز

۲۸/۳۲ m^۳/min هوا در فشار ۱۰۱/۳ kPa و ۲۹۴/۱ K در فرایندی استفاده می‌شود. این مقدار از هوا که ساکن است در فشار ۷۴۱/۷ mmHg و دمای ۳۶۶/۳ K وارد لولهٔ مکش فن می‌شود و در فشار ۷۶۹/۶ mmHg با سرعت ۴۵/۷ m/s خارج می‌شود. بازده فن ۶۰٪ می‌باشد. توان واقعی مورد نیاز را محاسبه کنید.

حل: جریان را می‌توان تراکم‌ناپذیر فرض کرد چون افت فشار فقط ۳/۸٪ فشار بالا دست جریان است. از دانسیتهٔ میانگین گاز در معادلهٔ موازنهٔ انرژی مکانیکی استفاده می‌شود.

دانسیته در مقطع ورودی، نقطهٔ ۱، برابر است با:

$$\rho_1 = \left(\frac{28/97 \text{ kg air}}{\text{kg mol}} \right) \times \frac{1 \text{ kg mol}}{22/414 \text{ m}^3} \times \frac{273/2}{366/3} \times \frac{741/7}{760}$$

$$= 0/940 \text{ kg/m}^3$$

(جرم مولکولی هوا برابر با ۲۸/۹۷ و حجم ۲۲/۴۱۴ m^۳/kg mole هوا در فشار ۱۰۱/۳ kPa و دمای ۲۷۳/۲ K از ضمیمهٔ ۸.۱ به دست می‌آید). دانسیتهٔ خروجی در نقطهٔ ۲ برابر است با:

$$\rho_2 = 0/940 \times \frac{769/6}{741/7} = 0/975 \text{ kg/m}^3$$

دانسیتهٔ میانگین گاز برابر است با:

$$\rho_{av} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{0/940 + 0/975}{2} = 0/958 \text{ kg/m}^3$$

دبی جرمی گاز به صورت زیر است،

$$m = \left(\frac{28}{32} \frac{\text{m}^3}{\text{min}} \right) \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1 \text{ kg mol}}{22/414 \text{ m}^3} \times \frac{273/2}{294/1} \times \left(\frac{28}{97} \frac{\text{kg}}{\text{kg mol}} \right)$$

$$= 0.5663 \text{ kg/s}$$

هد فشاری به دست آمده عبارت است از،

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho_{av}} = \frac{(769/6 - 741/7) \text{ mmHg} \times 1/0.1325 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{760 \text{ mmHg/atm}} \times \frac{1}{0.958 \text{ kg/m}^3}$$

$$= 3883 \text{ J/kg}$$

و هد سرعتی نهایی در $v_1 = 0$ برابر است با،

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{4/57^2}{2} = 1044 \text{ J/kg}$$

با نوشتن معادله موازنه انرژی مکانیکی (۲-۷-۲۸)،

$$z_1 g + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} - W_s = z_2 g + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + \Sigma F$$

با قرار دادن $z_1 = 0$ ، $z_2 = 0$ و $\Sigma F = 0$ برای W_s ،

$$-W_s = \frac{P_2 - P_1}{\rho_{av}} + \frac{v_2^2}{2} = 3883 + 1044 = 4927 \text{ J/kg}$$

با جایگزین کردن در معادله (۳-۳-۲)،

$$\text{توان واقعی} = \frac{-W_s \cdot m}{\eta \times 1000} = \frac{4927 \times 0.5663}{0.6 \times 1000} = 4.65 \text{ kW (6/23 hp)}$$

۲- دمنده‌ها و کمپرسورها: برای جابجایی حجم‌های بیشتر گاز در فشارهای بالاتر از آنچه که فن ایجاد می‌کند، از تجهیزات دیگری استفاده می‌شود. دمنده‌های توربینی^(۱) یا کمپرسورهای گریز از مرکز^(۲) به‌طور گسترده برای انتقال حجم‌های زیاد گاز در فشارهای بالا از حدود ۵ kPa تا چند هزار kPa استفاده می‌شوند. اصول کارکرد دمنده‌های توربینی مشابه پمپهای گریز از مرکز است. تشابه این دو از لحاظ ظاهری است. تفاوت اصلی این است که در دمنده گاز تراکم‌پذیر است. هد دمنده‌های توربینی مانند پمپ گریز از مرکز به سیال جابجا شده مربوط نمی‌شود. دمنده‌های توربینی چند مرحله‌ای برای فشارهای بالاتر استفاده می‌شوند.

دمنده‌های دورانی و کمپرسورها ماشینهایی از نوع جابجایی مثبت هستند و دبی حجمی ثابت با فشار خروجی متغیر دارند. با تغییر سرعت، دبی حجمی تغییر خواهد کرد. جزئیات مربوط به ساخت

انواع این وسایل کاملاً متفاوت هستند و بسته به نوعشان می‌توانند تا فشارهای حدود ۱۰۰۰ kPa ساخته شوند.

کمپرسورهای رفت و برگشتی که از نوع جابجایی مثبت می‌باشند برای ایجاد فشارهای بالاتر از پیستون استفاده می‌کنند. برای فشارهای تا حدود ۱۰۰۰۰ kPa و بیشتر، این وسایل به صورت چند مرحله‌ای ساخته می‌شوند.

۳-۳D معادلات مربوط به تراکم‌گازها

در دمنده‌ها و کمپرسورها تغییرات فشار زیاد است و جریان نیز تراکم‌پذیر است. هنگامی که تغییرات دانسیته قابل ملاحظه است، معادله دیفرانسیلی موازنه انرژی مکانیکی باید نوشته شود و سپس برای به دست آوردن کار حاصل از تراکم، از آن انتگرال گرفته شود. در تراکم‌گازها جملات هد استاتیکی، هد سرعتی و اصطکاک حذف می‌شود و فقط dW و dp/ρ به شکل دیفرانسیلی در معادله انرژی مکانیکی باقی می‌مانند. یا،

$$dW = \frac{dp}{\rho} \quad (3-3-9)$$

کار تراکم بوسیله انتگرال گرفتن از dp/ρ بین فشار ورودی p_1 تا فشار خروجی p_2 به دست می‌آید،

$$W = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} \quad (3-3-10)$$

برای انتگرال گرفتن از معادله (۳-۳-۱۰) برای یک گاز ایده‌آل، تراکم آدیاباتیکی و همدمای در نظر گرفته می‌شود. برای تراکم همدمای هنگامی که گاز پس از تراکم سرد شود p/ρ ثابت می‌ماند و برابر با RT/M می‌شود، که در اینجا $R = 8314/3 \text{ J/kg mole.K}$ در واحد SI و $R = 1545/3 \text{ ft.lbf/lb mole.}^\circ\text{R}$ در سیستم انگلیسی می‌باشد. پس،

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p}{\rho} \quad (3-3-11)$$

با حل معادله (۳-۳-۱۱) نسبت به ρ و جایگزین کردن آن در معادله (۳-۳-۱۰) کار انجام شده در تراکم همدمای به صورت زیر به دست می‌آید،

$$-W_s = \frac{p_1}{\rho_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{2.3026RT_1}{M} \log \frac{p_2}{p_1} \quad (3-3-12)$$

همچنین، $T_1 = T_2$ ، چون فرایند همدمای است.

برای تراکم آدیاباتیکی، سیال به صورت آیزوتروپیک عمل می‌کند و،

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\gamma \quad (3-3-13)$$

که $\gamma = c_p/c_v$ نسبت ظرفیتهای گرمایی است. با ترکیب کردن معادلات (۳-۳-۱۰) و (۳-۳-۱۳) و انتگرال گیری داریم،

$$-W_s = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{RT_1}{M} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] \quad (3-3-14)$$

دماهای آدیاباتیک به صورت زیر به هم ارتباط دارند.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (3-3-15)$$

برای به دست آوردن توان هنگامی که بازده η می باشد،

$$\text{brake kW} = \frac{-W_s m}{(\eta)(1000)} \quad (3-3-16)$$

که $W_s = \text{J/kg}$ و $m = \text{kg gas/s}$ است.

مقدار γ برای هوا تقریباً $1/4$ ، برای متان $1/31$ ، برای SO_2 (دی اکسید گوگرد) $1/29$ ، برای اتان $1/20$ و برای N_2 (ازت) $1/4$ است (P1). کار در تراکم همدمما با یک نسبت تراکم معلوم، در معادله (۳-۳-۱۲) کمتر از کار برای تراکم آدیاباتیک در معادله (۳-۳-۱۴) است. بنابراین بعضی مواقع در کمپرسورها از سردکردن استفاده می شود.

مثال ۳-۳-۳ تراکم متان

یک کمپرسور تک مرحله ای 10^{-3} kg mol/s گاز متان را در دمای $26/7^\circ \text{C}$ و فشار مطلق $137/9 \text{ kPa}$ تا فشار مطلق $551/6 \text{ kPa}$ متراکم می کند.

الف - توان مورد نیاز را اگر بازده مکانیکی 80% و تراکم آدیاباتیک باشد، محاسبه کنید.

ب - قسمت (الف) را برای یک تراکم همدمما تکرار کنید.

حل: برای قسمت (الف)، $p_1 = 137/9 \text{ kPa}$ ، $p_2 = 551/6 \text{ kPa}$ ، $M = 16 \text{ kg mass/kg mol}$ و

$$T_1 = 273/2 + 26/7 = 299/9 \text{ K}$$

دبی جرمی در ثانیه برابر است با،

$$m = (10^{-3} \text{ kg mol/s}) \times (16 \text{ kg/kg mol}) = 0/121 \text{ kg/s}$$

با جایگزین کردن در معادله (۳-۳-۱۴) با $\gamma = 1/31$ برای متان و $\frac{551/6}{137/9}$ ،

$$-W_s = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{RT_1}{M} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

$$= \left(\frac{1/31}{1/31 - 1} \right) \times \frac{8314/3 \times 299/9}{16} \left[\left(\frac{4}{1} \right)^{(1.31-1)/1.31} - 1 \right]$$

با به کار بردن معادله (۱۶-۳-۳)،

$$\text{توان واقعی} = \frac{-W_s \cdot m}{\eta \times 1000} = \frac{2563000 \times 0.121}{0.8 \times 1000} = 38.74 \text{ kW (52 hp)}$$

برای قسمت (ب)، از معادله (۱۲-۳-۳) برای تراکم همدم استفاده می‌کنیم،

$$-W_s = \frac{2/3026 RT_1}{M} \log \frac{p_2}{p_1} = \frac{2/3026 \times 8314/3 \times 299/9}{16} \log \frac{4}{1}$$

$$= 216000 \text{ J/kg}$$

$$\text{توان واقعی} = \frac{-W_s \cdot m}{\eta \times 1000} = \frac{216000 \times 0.121}{0.8 \times 1000} = 32.67 \text{ kW (43.8 hp)}$$

بنابراین تراکم همدم، ۱۵/۸٪ توان کمتری احتیاج دارد.

۳-۴ همزدن و اختلاط سیالات و توان لازم

۳-۲۸ اهداف همزدن

در فرایندهای شیمیایی و دیگر فرایندهای صنعتی، بسیاری از عملیات تا حد زیادی به اختلاط مؤثر سیالات بستگی دارد. معمولاً، همزدن^(۱) به جریان اجباری یک سیال به صورت دایره‌وار یا صورت‌های دیگر درون یک ظرف توسط یک وسیله مکانیکی اطلاق می‌شود. اختلاط^(۲) معمولاً به دو یا چند فاز جداگانه اشاره دارد مانند یک سیال و یک جامد پودر شده داخل آن یا دو سیال. اختلاط باعث توزیع اتفاقی آنها در یکدیگر می‌شود.

چند هدف برای همزدن سیالات وجود دارد که بعضی از آنها به طور خلاصه در زیر می‌آید:

- ۱- مخلوط کردن دو مایع قابل اختلاط مانند اتیل الکل و آب.
- ۲- انحلال جامدات در مایعات مانند نمک در آب.
- ۳- پخش کردن یک گاز در داخل مایع به صورت حبابهای ریز مانند اکسیژن موجود در هوا در یک سوسپانسیون از میکروارگانیزمها برای عملیات تخمیر یا فرایند لجن فعال در تصفیهٔ پساب.
- ۴- معلق‌سازی ذرات جامد در مایع مانند هیدروژن‌دار کردن کاتالیزوری یک مایع هنگامی که ذرات کاتالیست جامد و حبابهای هیدروژن در مایع پخش شده‌اند.
- ۵- همزدن سیالات برای افزایش انتقال حرارت بین سیال و یک لولهٔ مارپیچی یا ژاکت در دیوارهٔ ظرف.

۳-۲B تجهیزات مربوط به همزن

معمولاً مایعات در یک ظرف استوانه‌ای باز یا بسته همزده می‌شوند. ارتفاع مایع تقریباً مساوی با قطر تانک است. در این ظرف یک پروانه که به محور متصل شده به وسیلهٔ موتور الکتریکی به گردش در می‌آید. یک نمونه همزن در شکل ۳-۴-۱ نشان داده شده است.

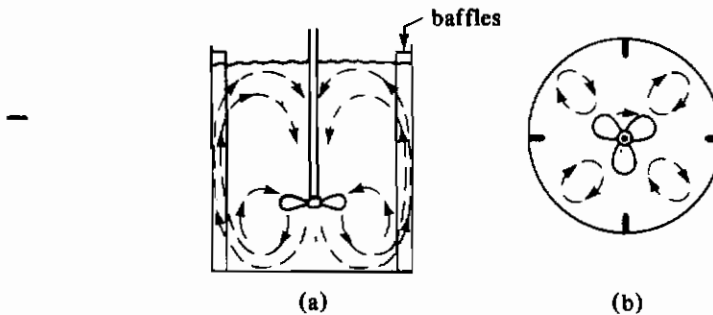
۱- همزن با پروانه سه تیغه‌ای^(۱): معمولاً از چند نوع همزن استفاده می‌شود. معمولترین آنها که در شکل ۳-۴-۱ نشان داده شده است، سه تیغه دارد که مشابه پروانه کشتی‌هاست. این پروانه هم می‌تواند در جدارهٔ تانک نصب شود و هم به صورت مایل در بالای تانکهای روباز قرار گیرد. این پروانه‌ها در محدودهٔ سرعت از ۴۰۰ تا ۱۷۵۰ rpm کار می‌کنند و برای مایعات با ویسکوزیته پائین استفاده می‌شوند. در شکل ۳-۴-۱ الگوی جریان در یک تانک مجهز به بافل با یک پروانه که در مرکز تانک تعبیه شده نشان داده شده است. این نوع الگوی جریان، جریان محوری نامیده می‌شود. چون سیال به‌طور محوری در مرکز ظرف به طرف پائین جریان پیدا می‌کند و از اطراف تانک به بالا می‌آید (مطابق شکل).

۲- همزنهای پارویی^(۲): اغلب از انواع مختلفی از همزنهای پارویی در سرعت‌های پائین بین ۲۰ تا ۲۰۰ rpm استفاده می‌شود. معمولاً از پاروهای دو تیغه‌ای و چهار تیغه‌ای صاف مطابق شکل ۳-۴-۲a استفاده می‌شود. کل طول پرهٔ پارو معمولاً ۶۰٪ تا ۸۰٪ قطر تانک است و عرض تیغه ۱/۶ تا ۱/۱۰ طول آن می‌باشد. در سرعت‌های پائین برای همزدن ملایمتر از ظرفهای بدون بافل استفاده می‌شود. در سرعت‌های بالاتر از بافل استفاده می‌شود، چون بدون بافل مایع براحتی اطراف خود می‌چرخد و به‌ندرت اختلاط واقعی صورت می‌گیرد. همزن پارویی برای جامدات معلق مناسب نیست چون جریان شعاعی خوب انجام می‌شود، اما جریان عمودی یا محوری انجام نمی‌شود. در این موارد از یک پاروی دریچه‌دار^(۳) (یا به‌شکل لنگر) استفاده می‌شود که در شکل ۳-۴-۲b نشان داده شده است. این لنگر دیواره‌های تانک و در بعضی مواقع ته تانک را جارو می‌کند. این نوع همزن برای مایع‌های ویسکوز استفاده می‌شود که این مایعها روی دیوارهٔ تانک می‌توانند رسوب کنند و از انتقال گرما از دیواره جلوگیری کنند. اما این همزن مخلوط‌کنندهٔ ضعیفی است و اغلب در فرایندهای مربوط به خمیر نشاسته، رنگها، چسبها و مواد آرایشی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

1. three-blade propeller agitator

2. paddle agitators

3. gate or anchor paddle



شکل ۱-۴-۳. مخزن بافل دار و همزن با پروانه سه تیغه‌ای همراه با الگوی جریان محوری: (a) نمای جانبی (b) نمای زیر

۳- همزنهای توربینی^(۱): همزنهایی مشابه با همزنهای پارویی با تیغه‌های کوتاهتر هستند. همزنهای توربینی برای سرعت‌های بالا و برای مایعات با دامنه ویسکوزیته وسیع استفاده می‌شوند. قطر یک توربین معمولاً بین ۳۰٪ تا ۵۰٪ قطر تانک است. معمولاً توربینها چهار یا شش تیغه دارند. شکل ۳-۴-۳ یک همزن توربینی شش تیغه را با دیسک نشان می‌دهد. در شکل ۳-۴-۲۵ یک توربین باز با شش تیغه صاف نشان داده شده است. توربینها با تیغه‌های صاف همچنان که در شکل ۳-۴-۳ نشان داده شده است موجب حرکت شعاعی مایعات می‌شوند. این همزنها گاز را به خوبی در مایع پخش می‌کنند به طوری که گاز درست از زیر پره وارد شده و به روی تیغه کشیده می‌شود و سپس به صورت حبابهای کوچک بالا می‌رود. در توربین با تیغه زاویه دار^(۲) (شکل ۳-۴-۲۵) با زاویه‌های ۴۵° بخشی از جریان به صورت محوری است به طوری که ترکیبی از جریان شعاعی و محوری داریم. این نوع توربین برای ذرات معلق جامد مورد استفاده قرار می‌گیرد، چون سیال به سمت پائین جریان پیدا کرده و جامدات را به سمت بالا جارو می‌کند.

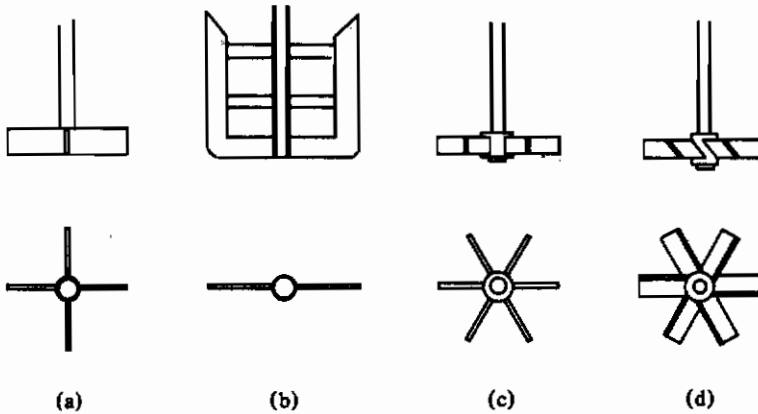
۴- همزنهای با نوار مارپیچی^(۳): این نوع همزن برای محلولهای با ویسکوزیته بالا استفاده می‌شود و با سرعت کم در ناحیه آرام کار می‌کند. نوار به صورت مارپیچی، شکل داده شده و به محور مرکزی وصل می‌شود. مایع از یک مسیر پیچ و خم دار در مرکز به سمت پائین حرکت می‌کند و با یک حرکت چرخشی در طول کناره‌ها بالا می‌آید. انواع مشابهی از این همزنها وجود دارد که دو نوار مارپیچی و بعضی یک نوار مارپیچی با یک مارپیچ معمولی^(۴) دارند.

1. turbine agitators

2. pitched-blade turbine

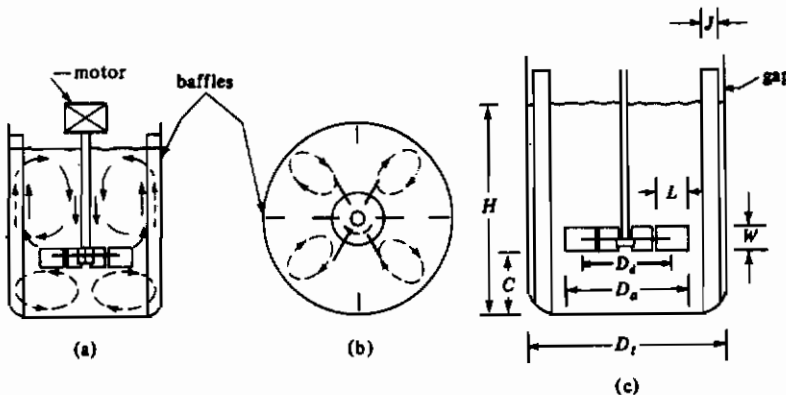
3. helical-ribbon agitators

4. screw



شکل ۲-۴-۳. انواع مختلف همزن: (a) پارویی چهار تیغه‌ای (b) پارویی درجه‌ای یا لنگری (c) توربینی با شش تیغه باز (d) توربینی با تیغه‌های خمیده ۴۵ درجه

۵- انتخاب همزن و محدوده‌های ویسکوزیته: ویسکوزیته سیال یکی از چند عامل مؤثر در انتخاب نوع همزن می‌باشد. محدوده ویسکوزیته این نوع از همزنها به این صورت است: همزنهای پروانه دار برای سیالاتی با ویسکوزیته زیر حدود ۳ Pa.s (۳۰۰۰ cp) استفاده می‌شوند. همزنهای توربینی برای سیالاتی با ویسکوزیته حدود ۱۰۰ Pa.s (۱۰۰۰۰۰ cp) استفاده می‌شوند، همزنهای پارویی اصلاح شده مانند همزنهای لنگری برای ویسکوزیته‌های حدود ۵۰ Pa.s تا ۵۰۰ Pa.s (۵۰۰۰۰۰ cp) استفاده می‌شوند، نوع ماریچی همزنها اغلب برای ویسکوزیته بالاتر از ۱۰۰۰ Pa.s تا ۲۵۰۰۰ Pa.s استفاده می‌شوند، برای ویسکوزیته‌های بین ۲/۵ تا ۵ Pa.s و بالاتر از آنها به بافل نیازی نیست چون حرکت چرخشی سیال تا حدودی وجود دارد.



شکل ۳-۴-۳. مخزن بافل دار با همزن توربینی شش تیغه‌ای دیسک دار همراه با الگوی جریان: (a) نمای جانبی (b) نمای زیر (c) ابعاد توربین و مخزن

۴C-۳ الگوهای جریان در همزدن

الگوی جریان در یک تانک مجهز به همزن به خواص سیال، شکل هندسی تانک، انواع بافلها در تانک و خود همزن بستگی دارد. اگر یک همزن پروانه‌ای یا همزن نوع دیگر به طور عمودی در مرکز یک تانک بدون بافل قرار گیرد یک الگوی جریان چرخشی برقرار می‌شود. معمولاً این حالت نامطلوب است، زیرا هوای اضافی به داخل ظرف مکش می‌شود و باعث ایجاد یک گرداب بزرگ خصوصاً در سرعت‌های بالا می‌گردد. معمولاً برای جلوگیری از این مشکل همزن را به صورت مایل نصب می‌کنند و توان پروانه را کم در نظر می‌گیرند. اما برای همزدن شدید با توان بالاتر، نیروهای غیر تعادلی قابل توجه می‌شوند و استفاده از توان بالاتر را محدود می‌کنند.

برای همزدن شدید با همزنهای عمودی، معمولاً از بافلها برای کاهش حالت چرخشی استفاده می‌شود و اختلاط مناسب را به وجود می‌آورند. بافلها به طور عمودی بر دیواره تانک نصب می‌شوند که در شکل (۳-۴-۳) نشان داده شده است. معمولاً چهار بافل کافی است، که عرض آنها هنگام استفاده از توربینها و پروانه‌ها در حدود $\frac{1}{14}$ قطر تانک است. پره توربین، مایع را به طور شعاعی به دیواره می‌زند که در اثر برخورد به دیواره به دو قسمت تقسیم می‌شود، یک قسمت به طرف بالا نزدیک سطح می‌رود و از بالا به طرف پره برمی‌گردد و قسمت دیگر به طرف پائین جریان پیدا می‌کند. گاهی اوقات در تانکهایی که عمق مایع، خیلی بیشتر از قطر تانک است دو یا سه پره روی یک محور نصب می‌شود و هر کدام به صورت یک همزن جداگانه عمل می‌کنند. پره پائینی حدوداً به اندازه یک برابر قطر پره از کف ظرف فاصله دارد. در یک سیستم اختلاط دبی حجمی سیال جابجا شده توسط پروانه یا میزان گردش سیال، برای جاروب کردن کل حجم در یک زمان مناسب با اهمیت است. همچنین اغتشاش در جریان برای اختلاط اهمیت دارد، چون که اغتشاش باعث به حرکت در آوردن ماده از توده مایع داخل تانک به طرف داخل جریان می‌شود. برخی سیستمهای اختلاط به اغتشاش زیاد و میزان گردش سیال کم و برخی دیگر به اغتشاش کم و میزان گردش سیال زیاد نیاز دارند. اغلب این مساله به نوع سیالاتی که با یکدیگر مخلوط می‌شوند و مقدار اختلاط مورد نیاز بستگی دارد.

۴D-۳ روش استاندارد طراحی توربین

همزن توربینی نشان داده شده در شکل ۳-۴-۳ معمولی ترین نوع همزن در فرایندهای صنعتی است. این نوع همزن اغلب در طراحی اولیه برای طراحی یک سیستم معمولی اختلاط استفاده می‌شود. نسبتهای هندسی سیستمهای اختلاط که به عنوان استاندارد طراحی در نظر گرفته شده است در جدول ۱-۴-۳ داده شده است. این روابط مبنای بیشتر روابط مربوط به عملکرد همزن در بسیاری از کاربردها می‌باشد. (شکل ۳-۴-۳c را ببینید).

جدول ۱-۴-۳. روابط هندسی برای یک سیستم استاندارد همزدن

$\frac{D_a}{D_t} = 0.3 \text{ to } 0.5$	$\frac{H}{D_t} = 1$	$\frac{C}{D_t} = \frac{1}{3}$
$\frac{W}{D_a} = \frac{1}{5}$	$\frac{D_d}{D_a} = \frac{2}{3}$	$\frac{L}{D_a} = \frac{1}{4}$
		$\frac{J}{D_t} = \frac{1}{12}$

در برخی حالات در روابط همزنها از $W/D_a = \frac{1}{8}$ استفاده می‌شود. در بسیاری از کاربردها تعداد بافل‌ها چهار تا می‌باشد. برای اطمینان از جمع نشدن مایع بین بافلها و دیواره در فضای مرده لقی یا شکاف بین بافلها و دیواره معمولاً $0/10$ تا $0/15$ در نظر گرفته میشود. در بعضی از روابط نسبت قطر بافل به قطر تانک بجای $\frac{1}{12}$ برابر با $\frac{1}{10}$ است.

۳-۴E توان مورد نیاز در ظروف همزن‌دار

در طراحی یک ظرف همزن‌دار یک عامل مهم توان مورد نیاز برای به حرکت در آوردن پروانه است. از آنجایی که توان مورد نیاز برای یک سیستم مشخص نمی‌تواند به طور تئوری برآورد شود، روابط تجربی برای پیشگویی توان مورد نیاز گسترش داده شده‌اند. وجود یا عدم وجود اغتشاش می‌تواند با عدد رینولدز پروانه N'_{Re} که به صورت زیر تعریف می‌شود، رابطه داشته باشد،

$$N'_{Re} = \frac{D_a^2 N \rho}{\mu} \quad (3-4-1)$$

که D_a قطر پروانه همزن برحسب متر، N سرعت دورانی بر حسب rev/s ، ρ دانسیته سیال برحسب kg/m^3 و μ ویسکوزیته برحسب kg/m.s می‌باشد. جریان در تانک در $N'_{Re} < 10$ آرام، در $10^4 < N'_{Re}$ مغشوش و در بین این دو محدوده جریان گذرا است. در نزدیکی پروانه جریان مغشوش و در نقاطی دور از پروانه جریان آرام است.

بر اساس منحنی عدد توان N_p بر حسب N'_{Re} توان مصرفی به ρ دانسیته، μ ویسکوزیته سیال، N سرعت دورانی و D_a قطر پروانه بستگی دارد. عدد توان بدین صورت تعریف می‌شود،

$$N_p = \frac{P}{\rho N^3 D_a^5} \quad (\text{SI}) \quad (3-4-2)$$

$$N_p = \frac{P g_c}{\rho N^3 D_a^5} \quad (\text{English})$$

که در این جا P توان بر حسب J/s یا وات می‌باشد. در واحد انگلیسی P مساوی با ft.lbf/s می‌باشد.

شکل ۳-۴-۴ رابطه‌ای است که غالباً برای ظروف استوانه‌ای و بافل‌دار حاوی سیالات نیوتنی استفاده می‌شود. ابعاد مختلف مربوط به بافل، تانک و پره در شکل ۳-۴-۳ داده شده است. این منحنی‌ها همچنین برای پره‌های مشابه در تانکهای بدون بافل وقتی که N'_{Re} برابر با ۳۰۰ یا کمتر است، استفاده می‌شود. وقتی که N_{Re} بیشتر از ۳۰۰ باشد، مقدار توان برای ظرف بدون بافل به‌طور قابل توجهی کمتر از ظرف بافل‌دار است. منحنی‌های دیگری برای انواع دیگر پروانه‌ها موجود است (B3,R1).

مثال ۳-۴-۱ توان مصرفی در یک همزن

یک همزن توربینی با تیغه‌های صاف با صفحه‌ای که شامل شش تیغه است در یک تانک مشابه شکل ۳-۴-۳ نصب شده است. قطر تانک D_t برابر با $1/83$ متر است. D_a قطر توربین $0/61$ متر، $H = D_t$ و W عرض $0/122$ متر است. تانک چهار بافل دارد که عرض هر کدام $0/15$ متر است. توربین با دور 90 rpm کار می‌کند و مایع داخل تانک دارای ویسکوزیته 10 cp و دانسیته 929 kg/m³ است.

الف) توان مورد نیاز همزن را محاسبه کنید.

ب) برای شرایط مشابه، با این تفاوت که محلول دارای ویسکوزیته‌ای برابر 1000000 cp باشد، توان مورد نیاز را محاسبه کنید.

حل: برای قسمت (الف) اطلاعات داده شده به این شرح است،

$$J = 0/15 \text{ m}, D_t = 1/83 \text{ m}, W = 0/122 \text{ m}, D_a = 0/61 \text{ m}$$

$$\rho = 929 \text{ kg/m}^3, N = 90/60 = 1/5 \text{ rev/s}$$

$$\mu = (10 \text{ cp}) \times 1 \times 10^{-3} = 0/01 \text{ kg/m.s} = 0/01 \text{ Pa.s}$$

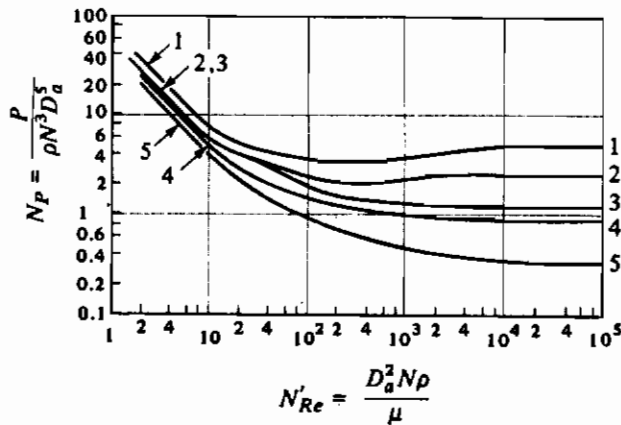
با استفاده از معادله (۳-۴-۱) عدد رینولدز بدین صورت می‌شود،

$$N'_{Re} = \frac{D_a^2 N \rho}{\mu} = \frac{0/61^2 \times 1/5 \times 929}{0/01} = 5/185 \times 10^4$$

با استفاده از منحنی ۱ در شکل (۳-۴-۴) وقتی که $D_a/W = 5$ و $D_t/J = 12$ ، به ازای 5 داریم، $N_p = 5$. با حل معادله (۳-۴-۲) نسبت به P و جایگزینی مقادیر معلوم

$$P = N_p \rho N^3 D_a^5 = 5 \times 929 \times 1/5^3 \times 0/61^5$$

$$= 1324 \text{ J/s} = 1/324 \text{ kW} (1/77 \text{ hp})$$



شکل ۳-۴-۴. روابط توان برای پروانه‌ها و بافل‌های مختلف (برای ابعاد D_t ، D_a ، J و W شکل ۳-۴-۳c را ببینید).

منحنی ۱- همزن توربینی شش تیغه‌ای صاف دیسک‌دار (مانند شکل ۳-۴-۳ اما با شش تیغه)،

$$D_t/J = 12, D_a/W = 5 \text{ چهار بافل هر کدام}$$

منحنی ۲- همزن توربینی باز شش تیغه‌ای صاف (مانند شکل ۳-۴-۳c)، $D_a/W = 8$ ، چهار بافل هر کدام

$$D_t/J = 12$$

منحنی ۳- همزن توربینی باز شش تیغه‌ای خمیده با تیغه‌های 45° (مانند شکل ۳-۴-۳d)، $D_a/W = 8$ ،

$$D_t/J = 12 \text{ چهار بافل هر کدام}$$

منحنی ۴- پروانه (مانند شکل ۳-۴-۱)، فاصله بین لبه‌های تیغه‌ها $= 2D_a$ ، چهار بافل هر کدام $D_t/J = 10$ ،

همچنین برای پروانه‌های خارج از مرکز و بدون بافل نیز صدق می‌کند.

منحنی ۵- پروانه، فاصله بین لبه‌های تیغه‌ها $= D_a$ ، چهار بافل هر کدام $D_t/J = 10$ ، همچنین برای

پروانه‌های خارج از مرکز و بدون بافل نیز صدق می‌کند.

(منحنی‌های ۱، ۲ و ۳ با کسب مجوز از

R. L. Bates, P. L. Fondy, and R.R. Corpstein, Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev., 2, 310, (1963)

که حق انتشار آن با انجمن شیمی آمریکا است چاپ مجدد شده است. منحنی‌های ۴ و ۵ با کسب مجوز از

منبع زیر اخذ شده است.

J. H. Rushton, E. W. Costich, and H. J. Everett, Chem. Eng. Progr., 46, 395, 467 (1950)

برای قسمت (ب)،

$$\mu = 1000000 \times (1 \times 10^{-3}) = 1000 \text{ kg/m.s}$$

$$N'_{Re} = \frac{0.61^2 \times 1/5 \times 929}{100} = 5/185$$

این محدوده ناحیه جریان آرام می باشد. از شکل ۳-۴-۴، $N_p = 14$

$$P = 14 \times 929 \times 1/5^3 \times 0.61^5 = 370.7 \text{ J/s} = 3/71 \text{ kW} (4/98 \text{ hp})$$

از این رو افزایش ۱۰۰۰۰ برابر ویسکوزیته فقط توان را از ۳/۲۴ به ۳/۷۱ کیلووات افزایش می دهد.

تغییر در نسبتهای هندسی استاندارد طراحی می تواند اثرات متفاوتی روی عدد توان N_p

همزنهای توربینی در ناحیه مغشوش داشته باشد، که شرح آن در ذیل می آید (B3).

$$1 - \text{ برای توربین باز با شش تیغه صاف، } N_p \propto (W/D_a)^1$$

۲- برای توربین باز با شش تیغه صاف، تغییر D_a/D_t از ۰/۲۵ تا ۰/۵ عملاً هیچ اثری روی N_p ندارد.

۳- با دو توربین باز شش تیغه نصب شده روی یک محور و فاصله بین دو پروانه (فاصله عمودی بین

لبه های پایین دو توربین) حداکثر برابر با D_a ، توان کل ۱/۹ برابر توان لازم برای یک پروانه با تیغه

صاف می باشد. برای دو توربین شش تیغه با تیغه های ۴۵ درجه، توان حدود ۱/۹ برابر توان لازم

برای یک پروانه با تیغه خمیده می باشد.

۴- یک تانک چهارگوش عمودی با فل دار یا یک تانک استوانه ای شکل افقی عدد توان مساوی با یک

تانک عمودی استوانه ای شکل دارد. اما تفاوت های قابل ملاحظه ای در الگوی جریان دارند.

عدد توان برای یک همزن نوع لنگری مشابه با شکل ۳-۴-۲b اما بدون دو میله افقی در

$$N'_{Re} < 100 \text{ بدین صورت است (H2)}$$

$$N_p = 215(N'_{Re})^{-0.955} \quad (3-4-3)$$

$$\text{که، } D_a/D_t = 0/9, W/D_t = 0/1 \text{ و } C/D_t = 0/05$$

عدد توان برای یک همزن مارپیچی برای مایعات خیلی ویسکوز در $N'_{Re} < 20$ بدین صورت

است (H2, P3)

$$N_p = 186(N'_{Re})^{-1} \quad (\text{agitator pitch/tank diameter} = 1.0) \quad (3-4-4)$$

$$N_p = 290(N'_{Re})^{-1} \quad (\text{agitator pitch/tank diameter} = 0.5) \quad (3-4-5)$$

نمونه ای از نسبتهای ابعادی مورد استفاده، $D_a/D_t = 0/95$ ، گاهی کمتر حدود $0/75$ و $0/95$ هستند.

۳-۴F افزایش مقیاس^(۱) همزن

۱- مقدمه: در صنایع فرآیندی داده‌های تجربی اغلب در اندازه‌های آزمایشگاهی و یا برای واحد پایلوت سیستم اختلاط در دسترس هستند و تمایل بر این است که این نتایج برای طراحی واحد اصلی افزایش مقیاس داده شوند. تنوع زیادی در فرایندهایی که می‌خواهند افزایش مقیاس دهند وجود دارد و هیچ روش منحصر به فردی که تمام مسائل افزایش مقیاس را شامل شود وجود ندارد و دیدگاههای زیادی در این زمینه مطرح است. البته تشابه هندسی مهم بوده و ساده‌ترین روش است. تشابه سینماتیکی به صورت نسبت سرعتها یا زمانها تعریف می‌شود (R2). تشابه دینامیکی به نسبت‌های ثابت نیروهای ویسکوز، اینرسی یا ثقلی نیاز دارد. اغلب حتی اگر تشابه هندسی برقرار باشد، تشابه سینماتیکی و دینامیکی نمی‌توانند همزمان وجود داشته باشند. بنابراین لازم است که شخص طراح به قضاوت و تجربه در مسألهٔ افزایش مقیاس اعتماد کند.

در بسیاری از حالات اهداف اصلی در یک فرآیند اختلاط بدین شرح هستند: حرکت مساوی مایع مانند اختلاط مایعات، که در اینجا حرکت مایع یا سرعتهای متناظر تقریباً در دو حالت یکسان هستند. مساوی بودن جامدات معلق، که میزان جامدات معلق در هر دو حال یکسانند. و بالاخره نرخ انتقال جرم مساوی که انتقال جرم موجود بین یک فاز مایع و یک فاز جامد، فازهای مایع و مایع، و مانند آن اتفاق می‌افتد و نرخ انتقال جرم یکسان است.

۲- روش افزایش مقیاس: یک روش مرحله به مرحله پیشنهاد شده، که برای افزایش مقیاس از شرایط اولیه که ابعاد هندسی آن در جدول ۳-۴-۱ به صورت W_1, H_1, D_{T1}, D_{a1} داده شده است به شرایط نهایی D_{T2}, D_{a2} و مانند آن بکار می‌رود و همراه با جزئیات در زیر آمده است.

الف) نسبت افزایش مقیاس R_0 را محاسبه کنید. با فرض آنکه ظرف اصلی یک استوانهٔ استاندارد با $D_{T1} = H_1$ باشد، حجم V_1 برابر است با:

$$V_1 = \left(\frac{\pi D_{T1}^3}{4} \right) (H_1) = \left(\frac{\pi D_{T1}^3}{4} \right) \quad (3-4-6)$$

پس نسبت حجمها بدین صورت است،

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi D_{T2}^3/4}{\pi D_{T1}^3/4} = \frac{D_{T2}^3}{D_{T1}^3} \quad (3-4-7)$$

نسبت افزایش مقیاس می‌شود،

$$R = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1/3} = \frac{D_{T2}}{D_{T1}} \quad (3-4-8)$$

(ب) با استفاده از این مقدار R ، آن را برای همه ابعاد داده شده در جدول ۱-۴-۳ به منظور محاسبه ابعاد جدید به کار ببرید. برای مثال،

$$D_{a2} = RD_{a1}, \quad J_2 = RJ_1, \dots \quad (3-4-9)$$

(پ) سپس یک قانون افزایش مقیاس باید انتخاب شود و برای تعیین سرعت همزن N_2 بکار گرفته شود، تا در مشابه سازی نتایج مقیاس کوچک با استفاده از N_1 مورد استفاده قرار گیرد. این معادله به صورت زیر است (R2).

$$N_2 = N_1 \left(\frac{1}{R} \right)^n = N_1 \left(\frac{D_{T1}}{D_{T2}} \right)^n \quad (3-4-10)$$

که $n = 1$ برای حرکت مساوی مایع، $n = \frac{2}{3}$ برای جامدات معلق مساوی و $n = \frac{1}{3}$ برای نرخ انتقال جرم مساوی (که معادل با توان به ازای واحد حجم مساوی است). این مقدار n براساس ملاحظات تجربی و تئوری است.

(ت) با تعیین N_2 ، با استفاده از معادله (۲-۴-۳) و شکل (۴-۴-۳) توان موردنیاز می تواند مشخص شود.

مثال ۲-۴-۳ به دست آوردن توان در قانون افزایش مقیاس

برای توان قانون افزایش مقیاس (n) در معادله (۱۰-۴-۳) در اختلاط مغشوشن موارد زیر را به دست آورید،

الف) نشان دهید هنگامی که $n = \frac{2}{3}$ توان به ازای واحد حجم در افزایش مقیاس ثابت است.
 ب) نشان دهید هنگامی که $n = 1/0$ ، سرعت لبه پروانه همزن در افزایش مقیاس ثابت است.
 حل: برای قسمت (الف) از شکل ۴-۴-۳، N_p برای ناحیه مغشوش ثابت است. پس از معادله (۲-۴-۳)

$$P_1 = N_p \rho N_1^3 D_{a1}^5 \quad (3-4-11)$$

سپس برای توان به ازای واحد حجم مساوی، $P_1/V_1 = P_2/V_2$ ، یا با استفاده از معادله (۶-۴-۳) داریم،

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_1}{\pi D_{T1}^2/4} = \frac{P_2}{V_2} = \frac{P_2}{\pi D_{T2}^2/4} \quad (3-4-12)$$

با جایگزینی P_1 از معادله (۱۱-۴-۳) و همچنین معادله مشابه برای P_2 در معادله (۱۲-۴-۳)

و ترکیب با معادله (۳-۴-۸) داریم،

$$N_2 = N_1 \left(\frac{1}{R} \right)^{2/3} \quad (3-4-13)$$

برای قسمت (ب)، با استفاده از معادله (۳-۴-۱۰) یا $n = 1/0$ ، با مرتب کردن و ضرب کردن در π داریم،

$$N_2 = N_1 \left(\frac{D_{T1}}{D_{T2}} \right)^{1.0} \quad (3-4-14)$$

$$\pi D_{T2} N_2 = \pi D_{T1} N_1 \quad (3-4-15)$$

که در این جا $\pi D_{T2} N_2$ سرعت لبه پروانه همزن برحسب m/s است.

برای کمک به طراح سیستمهای جدید اختلاط و به عنوان راهنمایی برای ارزیابی سیستمهای موجود به برخی خطوط راهنمای تقریبی برای مایعات با ویسکوزیته معمولی، اشاره می شود (M2):
 برای همزدن ملایم و اختلاط، $0/1$ تا $0/2$ کیلووات به ازای هر متر مکعب سیال ($0/0005$ تا $0/001$ اسب بخار به ازای هر گالن)، برای اختلاط شدید، $0/4$ تا $0/6$ کیلووات به ازای هر متر مکعب سیال ($0/002$ تا $0/003$ اسب بخار به ازای هر گالن)، برای اختلاط شدید یا جایی که انتقال جرم مهم است $0/8$ تا 2 کیلووات به ازای هر متر مکعب سیال ($0/004$ تا $0/01$ اسب بخار به ازای هر گالن) توان لازم است. این توان برحسب کیلووات، توان واقعی است که به سیال داده می شود. مانند آنچه که در شکل ۳-۴-۴ و معادله ۳-۴-۲ داده شده است. این توان شامل توان مورد استفاده در جعبه دنده ها و یاتاقانها نمی شود. نمونه ای از راندمان موتورهای الکتریکی در بخش ۳-۳B داده شده است. همچنین به طور تقریبی 30 تا 40 درصد توان واقعی داده شده به سیال می باشد.

مثال ۳-۴-۳ افزایش مقیاس سیستم همزن توربینی

یک سیستم همزن مشابه مثال ۳-۴-۱a دارای توربینی با شش تیغه صاف و یک دیسک است. شرایط و اندازه ها بدین صورت هستند:

$$J_1 = 0/15 \text{ m}, W_1 = 0/122 \text{ m}, D_{a1} = 0/61 \text{ m}, D_{T1} = 1/83 \text{ m}$$

$$\mu = 0/01 \text{ Pa.s}, \rho = 929 \text{ kg/m}^3, N_1 = \frac{90}{60} = 1/5 \text{ rev/s}$$

مطلوب است. افزایش مقیاس نتایج فوق برای ظرفی که حجمش ۳ برابر بزرگتر است. این کار را برای دو فرایند زیر انجام دهید.

الف) هنگامی که نرخ مساوی انتقال جرم مطلوب باشد.

ب) هنگامی که حرکت مساوی مایع مطلوب باشند.

حـل: هنگامی که $H_1 = D_{T1} = 1/83 \text{ m}$ ، حجم تانک اصلی $V_1 = (\pi D_{T1}^2 / 4)(H_1) = \frac{\pi (1/83)^3}{4} = 4/813 \text{ m}^3$ است. حجم $V_2 = 3(4/813) = 14/44 \text{ m}^3$ با دنبال کردن مراحل روش افزایش مقیاس و استفاده از معادله (۳-۴-۸)،

$$R = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/3} = \left(\frac{14/44}{4/813}\right)^{1/3} = 1/442$$

ابعاد سیستم اختلاط بزرگتر به این صورت هستند،

$$D_{a2} = 1/442(0/61) = 0/88 \text{ m} \quad D_{T2} = R D_{T1} = 1/442(1/83) = 2/64 \text{ m}$$

$$J_2 = 1/442(0/15) = 0/216 \text{ m} \quad W_2 = 1/442 \times (0/122) = 0/176 \text{ m}$$

برای قسمت (الف)، برای انتقال جرم مساوی با $n = \frac{2}{3}$ در معادله (۳-۴-۱۰)،

$$N_2 = N_1 \left(\frac{1}{R}\right)^{2/3} = 1/5 \left(\frac{1}{1/442}\right)^{2/3} = 1/175 \text{ rev/s (70/5 rpm)}$$

با استفاده از معادله (۳-۴-۱)،

$$N'_{Re} = \frac{D_a^2 N \rho}{\mu} = \frac{0/88^2 \times 1/175 \times 929}{0/01} = 8/453 \times 10^6$$

با استفاده از $N_p = 5/0$ در معادله (۳-۴-۲)،

$$P_2 = 1 N_p \rho N_2^3 D_{a2}^5 = 5 \times 929 \times 1/175^3 \times 0/88^5 = 3977 \text{ J/s} = 3/977 \text{ kW}$$

توان در واحد حجم برابر است با،

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{1/324}{4/813} = 0/2752 \text{ kW/m}^3$$

$$\frac{P_2}{V_2} = \frac{3/977}{14/44} = 0/2752 \text{ kW/m}^3$$

مقدار $0/2752 \text{ kW/m}^3$ تا اندازه‌ای کمتر از مقدار تقریبی $0/8$ تا $2/0$ برای انتقال جرم می‌باشد.

برای قسمت (ب)، برای حرکت مساوی مایع، $n = 1/0$ ،

$$N_T = 1/5 \left(\frac{1}{1/442} \right)^{1/3} = 1/0.40 \text{ rev/s}$$

$$P_T = 5 \times 929 \times 1/0.40^3 \times 0/88^5 = 2757 \text{ J/s} = 2/757 \text{ kW}$$

$$\frac{P_T}{V_T} = \frac{2/757}{14/44} = 0/1909 \text{ kW/m}^3$$

۳-۴G زمان اختلاط مایعات قابل امتزاج

در یک روش برای مطالعهٔ زمان اختلاط یا در هم آمیختن دو مایع قابل امتزاج، مقداری HCl به یک اکی والان NaOH اضافه می‌شود و زمان مورد نیاز برای تغییر رنگ معرف اندازه‌گیری می‌شود. این معیاری برای اختلاط مولکول با مولکول است. روشهای تجربی دیگری نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. اختلاط سریع در نزدیکی پره اتفاق می‌افتد و اختلاط کندتر که به سرعت گردش مواد بستگی دارد در نواحی خارجی تر رخ می‌دهد.

در شکل ۳-۴-۵ رابطه‌ای برای زمان اختلاط یک همزن توربینی داده شده است (B5, M5, N1).

ضریب اختلاط بدون بعد f_t به این صورت تعریف می‌شود،

$$f_t = t_T \frac{(ND_a^2)^{2/3} g^{1/6} D_a^{1/2}}{H^{1/2} D_i^{3/2}} \quad (3-4-16)$$

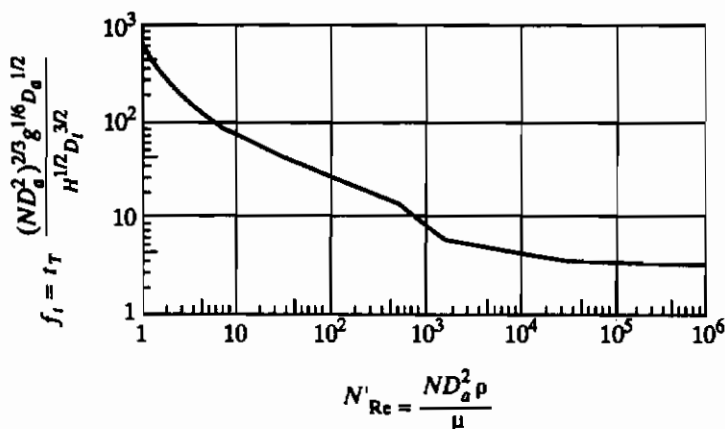
که t_T زمان اختلاط برحسب ثانیه است. در $Re > 1000$ ، چون f_t تقریباً ثابت است، پس $t_T N^{2/3}$ نیز ثابت است. برای برخی دیگر از مخلوط‌کن‌ها نشان داده می‌شود که $t_T N$ تقریباً ثابت است. برای افزایش مقیاس از ظرف ۱ به ظرف ۲ با شکل هندسی مشابه و با نسبت توان بر واحد حجم مساوی در ناحیهٔ مفشوش، زمان اختلاط برای دو ظرف به صورت زیر بهم ارتباط دارند،

$$\frac{t_{T_2}}{t_{T_1}} = \left(\frac{D_{a_2}}{D_{a_1}} \right)^{11/18} \quad (3-4-17)$$

بنابراین، زمان اختلاط برای ظرف بزرگتر افزایش می‌یابد. در افزایش مقیاس با زمان اختلاط مساوی، نسبت توان بر واحد حجم به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

$$\frac{(P_2/V_2)}{(P_1/V_1)} = \left(\frac{D_{a_2}}{D_{a_1}} \right)^{11/4} \quad (3-4-18)$$

معمولاً در افزایش مقیاس به ظرفی با اندازهٔ بزرگتر، از زمان اختلاط بزرگتری استفاده می‌شود، تا نسبت توان بر واحد حجم تغییر قابل ملاحظه‌ای نکند.



شکل ۳-۴-۵. رابطه زمان اختلاط برای مایعات قابل امتزاج با استفاده از یک توربین در یک مخزن بافل دار (برای یک توربین صاف، توربین دیسک دار و توربین با تیغه‌های خمیده) (با کسب مجوز از انجمن مهندسين شیمی امریکا ۱۹۶۰، گرفته شده از:

"Flow Patterns and Mixing Rates in Agitated Vessels" by K. W. Norwood and A. B.

Metzner, A.I.Ch.E. J., 6,432 (1960)

زمان اختلاط برای یک همزن مارپیچی در $N'_{Re} < 20$ به صورت زیر است (H2):

$$Nt_T = 126 \quad (\text{agitator pitch/tank diameter} = 1.0) \quad (3-4-19)$$

$$Nt_T = 90 \quad (\text{agitator pitch/tank diameter} = 0.5) \quad (3-4-20)$$

برای مایعات خیلی ویسکوز، مخلوط‌کن مارپیچی زمان اختلاط بسیار کمتری نسبت به مخلوط‌کن توربینی با همان نسبت توان بر واحد حجم، دارد (M5). اما برای مایعات غیر ویسکوز مخلوط‌کن مارپیچی زمان بیشتری مصرف می‌کند.

رابطه زمان اختلاط برای یک همزن پروانه‌ای در یک تانک بافل‌دار توسط Biggs (B5)، و برای

تانک بدون بافل توسط Fox (F1) و Gex داده شده است.

۳-۴H عدد جریان و نرخ گردش در فرایند همزدن

یک همزن مانند پروانه یک پمپ سانتریفوژ بدون پوسته عمل می‌کند و جریانی را با یک هد فشاری مشخص ایجاد می‌کند. این نرخ گردش (Q) بر حسب m^3/s از لیه پره برابر با شدت جریان عمود بر مقطع خروجی پروانه است. سرعت سیالات در همزنها اندازه‌گیری شده‌اند و برای محاسبه سرعت گردش

مورد استفاده قرار گرفته‌اند. داده‌های مربوط به ظروف با قطر دار با استفاده از عدد بدون بعد جریان (N_Q) به روابطی تبدیل شده‌اند (U_1).

(۳-۴-۲۱)

$N_Q = 0/5$ پروانه کشتی (قطر = فاصله پره‌ها)

$N_Q = 0/75$ توربین شش تیغه با دیسک ($W/D_a = \frac{1}{5}$)

$N_Q = 0/5$ توربین شش تیغه با دیسک ($W/D_a = \frac{1}{8}$)

$N_Q = 0/75$ توربین با تیغه زاویه‌دار ($W/D_a = \frac{1}{5}$)

۳-۴۱ سیستم‌های اختلاط خاص

۱- محلولهای حاوی جامدات معلق: در برخی سیستم‌های اختلاط، جامد در مایعی که می‌خواهد همزده شود معلق است. نمونه‌هایی از این موارد بدین شرح می‌باشد: جامدات ریزی که می‌خواهند در یک مایع حل شوند، میکروارگانیزمهایی که در عمل تخمیر معلق می‌مانند، یک مخلوط همگن جامد-مایع به عنوان خوراک یک فرایند، و یا یک جامد معلق که به عنوان یک کاتالیزور برای بالا بردن سرعت یک واکنش استفاده می‌شود. جامدات معلق تا حدی شبیه به بسترهای سیالی هستند. در سیستم مجهز به همزن گردش مایع ذرات را در حالت معلق نگه می‌دارد. مقدار و نوع همزدن عمدتاً بستگی به سرعت حد ته‌نشینی ذرات دارد، که با استفاده از معادلات بخش ۳-۱۴ می‌تواند محاسبه شود. معادلات تجربی برای پیشگویی توان مورد نیاز برای تعلیق ذرات در مراجع داده شده است (M_2, W_1).

۲- پراکنده کردن مایعات و گازها در مایعات: در فرایندهای پراکندگی مایع-گاز، گاز که از زیر پره وارد می‌شود به حبابهای بسیار ریز تقسیم می‌شود. نوع و درجه اختلاط بر اندازه حبابها و سطح کل حبابها تأثیر می‌گذارد. نمونه‌هایی از این قبیل فرایندها: هوادهی در تصفیه خانه‌های شهری، هیدروژناسیون مایعات توسط گاز هیدروژن در حضور یک کاتالیزور، جذب یک جزء حل شده در گاز توسط مایع و بالاخره فرایند تخمیر می‌باشد. روابطی برای پیشگویی اندازه حباب، ماندگی و توان مورد نیاز موجودند (C_3, L_1, Z_1). برای مایعات پراکنده شده در مایعات غیر قابل امتزاج مرجع T_1 را ببینید. توان مورد نیاز برای همزن در سیستم‌های پراکندگی مایع-گاز می‌تواند از لحاظ مقدار ۱۰ تا ۵۰ درصد کمتر از توان مورد نیاز برای هنگامی که گاز وجود ندارد، باشد (C_3, T_2).

۳- مخلوط‌کنهای ثابت: اختلاط دو سیال می‌تواند در مخلوط‌کنهای ثابت انجام شود که هیچ قسمت

متحرکی ندارند. در برخی سیستمهای تجارتي، قسمت‌های ثابت در داخل یک لوله به‌طور مناسبی جریان را به بخشهایی تقسیم می‌کنند و سپس مجدداً آن را ترکیب می‌کنند. در نوعی از آن، یک قطعه ماریچی کوتاه جریان را به دو بخش تقسیم می‌کند و 180° می‌چرخاند. قطعه دوم که با زاویه 90° نسبت به قطعه اول قرار دارد مجدداً جریان را به دو بخش تقسیم می‌کند. برای هر قطعه، ۲ تقسیم و ترکیب مجدد وجود دارد، یا برای ۵ قطعه به‌صورت سری ۲ⁿ تقسیم و ترکیب مجدد وجود دارد. برای ۲۰ عنصر در حدود 10^6 تقسیم اتفاق می‌افتد. انواع دیگر موجود، شامل میله‌ها یا صفحات صافی هستند که به‌طور طولی در داخل یک لوله قرار می‌گیرند. اُفت فشارهای کم مشخصه این نوع از همزن‌ها می‌باشد. اختلاط مواد با ویسکوزیته بالا به‌خوبی در این مخلوط‌کنها انجام می‌شود.

۳-۴J مخلوط کردن پودرها، مواد ویسکوز و خمیرها

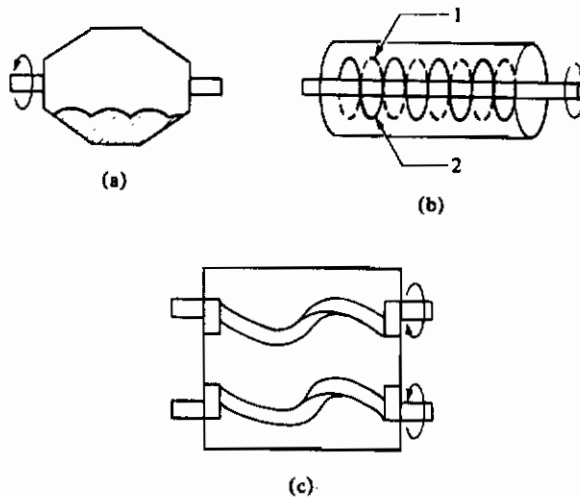
۱- پودرها: در اختلاط ذرات جامد یا پودرها لازم است قسمت‌های مختلف مخلوط پودر نسبت به همدیگر جابه‌جا شوند. مخلوط‌کن چرخان^(۱) ساده‌ترین وسیله برای ترکیب آرام پودرها است. اما معمولاً از آن برای خرد کردن کلوخه‌ها استفاده نمی‌شود. یک نوع معمول از مخلوط‌کن‌های چرخان به نام مخلوط‌کن دو مخروطی^(۲) از دو مخروط تشکیل شده‌اند که از دو انتهای بازشان به همدیگر چسبیده‌اند و می‌چرخند که در شکل ۳-۴-۶a نشان داده شده است. همچنین از بافل نیز می‌توان در داخل آن استفاده کرد. اگر یک جسم متحرک در داخل مخروطها قرار داده شود می‌تواند کلوخه‌ها را نیز بشکند. شکل‌های دیگری که مورد استفاده قرار می‌گیرند یک ظرف استوانه‌ای شکل بافل‌دار یا یک ظرف دو جداره V شکل می‌باشد. مخلوط‌کنهای چرخانی که برای خرد کردن کلوخه‌ها به‌کار می‌روند، استوانه‌های دواری هستند که با گلوله‌ها یا میله‌های فلزی یا چینی پر شده‌اند.

گروه دیگری از وسایلی که برای اختلاط جامدات استفاده می‌شود، دستگاهی است که پوسته ثابت^(۳) نامیده می‌شود. که در آن ظرف ثابت است و جابجایی مواد توسط قسمت یا قسمت‌های گردنده داخلی انجام می‌گیرد. در مخلوط‌کن نواری در شکل ۳-۴-۶b یک محور با دو ماریچ ۱ و ۲ که روی آن نصب شده‌اند می‌چرخد. ماریچها طوری نصب شده‌اند که یکی راست‌گرد و دیگری چپ‌گرد است. همچنان‌که محور می‌چرخد، قسمت‌های مختلف پودر در خلاف جهت حرکت می‌کنند و عمل اختلاط انجام می‌شود. انواع دیگری از وسایل گردنده داخلی برای حالات خاص موجودند (P1). همچنین در برخی دستگاهها، هم پوسته و هم قسمت‌های داخلی می‌چرخند.

1. tumbler

2. double-cone blender

3. stationary shell device



شکل ۳-۴-۶ - مخلوط کنندهای پودرها و خمیرها: (a) مخلوط کن دو مخروطی برای پودرها
(b) مخلوط کن نواری برای پودرها با دو نوار (c) خمیرگیر برای خمیرها

۲- خمیرها و مواد ویسکوز: در اختلاط خمیرها و مواد ویسکوز، توان زیادی برای تقسیم، همزدن و ترکیب مجدد مواد مورد نیاز است و همچنین قسمتهای مختلفی بایستی نسبت به یکدیگر جابجا شوند تا این که سطوح تازه تا حد امکان با هم ترکیب شوند. برخی ماشینها ممکن است به جداره‌های سردکننده احتیاج پیدا کنند تا حرارت تولید شده دفع گردد.

اولین گروه از این دستگاهها کمی شبیه به گروهی هستند که برای همزدن سیالات استفاده می‌شود، که دارای پروانه‌ای است که به آرامی در داخل یک تانک می‌گردد. پره می‌تواند یک همزن لنگری مطابق شکل ۳-۴-۲b باشد که قسمت جاروب کننده سطح خارجی می‌تواند تیغه‌های خراش دهنده نیز داشته باشد. پره دریچه‌ای نیز می‌تواند بکار رود که دارای میله‌های افقی و عمودی است و خمیر را در سطوح مختلف و در دیواره می‌تواند برش دهد، این میله‌ها می‌توانند ثابت هم باشند. یک همزن دریچه‌ای اصلاح شده، همزن میله‌ای مماسی^(۱) نامیده می‌شود، که شامل میله‌ها یا پاروهای گردنده عمودی است که از بین زبانه‌های ثابت عمودی می‌گذرند. در انواع اصلاح شده دیگر، ظرف نیز مانند میله‌ها و تیغه‌ها می‌چرخد. که به اینها مخلوط کنندهای ظرف - متحرک^(۲) می‌گویند.

معمولترین نوع همزن مورد استفاده برای خمیرهای سنگین، خمیرگیر دوبازویی^(۳) است. عمل

1. shear-bar mixer

2. change-can mixers

3. double-arm kneader mixer

اختلاط با حرکت توده‌ای، مالش دادن، کشیدن، جدا کردن، روی هم قرار دادن، و ترکیب مجدد همراه است. وسیعترین طرح بکار برده شده، استفاده از دو بازوی غیر هم جهت است که با سرعت‌های متفاوت می‌چرخند، همانطور که در شکل ۳-۴-۶۴-۳ نشان داده شده است.

۳-۵ سیالات غیرنیوتنی

۳-۵A انواع سیالات غیرنیوتنی

همان‌طور که در بخش ۲-۴ بحث شد، سیالات نیوتنی آنهایی هستند که از قانون نیوتن، معادله (۳-۵-۱)، به صورت زیر پیروی می‌کنند،

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} \quad (\text{SI})$$

$$\tau = -\frac{\mu}{g_c} \frac{dv}{dr} \quad (\text{English})$$

(۳-۵-۱)

که μ ویسکوزیته بوده و یک ثابت مستقل از میزان برش^(۱) است. در شکل ۳-۵-۱-۱ منحنی تنش برشی τ بر حسب میزان برش dv/dr نشان داده شده است. خط مربوط به سیال نیوتنی مستقیم و شیب آن μ می‌باشد.

اگر یک سیال از معادله (۳-۵-۱) پیروی نکند یک سیال غیر نیوتنی است. پس منحنی τ بر حسب dv/dr خطی نیست و از مبدأ نمی‌گذرد. سیالات غیرنیوتنی می‌توانند به دو گروه عمده بر مبنای نسبت تنش برشی به میزان برش تقسیم شوند: گروه اول آنهایی که تنش برشی‌شان مستقل از زمان است و تابع زمان برش نیستند (مستقل از زمان) و گروه دوم آنهایی که تنش برشی‌شان وابسته به زمان است یا وابستگی زمانی به برش دارند (تابع زمان). علاوه بر رفتار غیر معمول تنش برشی، تعدادی از سیالات غیرنیوتنی رفتار کشسانی (شبه لاستیک) نشان می‌دهند که تابع زمان است. این سیالات را سیالات ویسکوالاستیک می‌نامند. این سیالات علاوه بر تنشهای مماسی معمول، تنشهای قائم، عمود بر جهت جریان نیز اعمال می‌کنند. اما بیشترین تأکید ما بر روی سیالات مستقل از زمان می‌باشد که بیشتر شامل سیالات غیرنیوتنی هستند.

۳-۵B سیالات مستقل از زمان

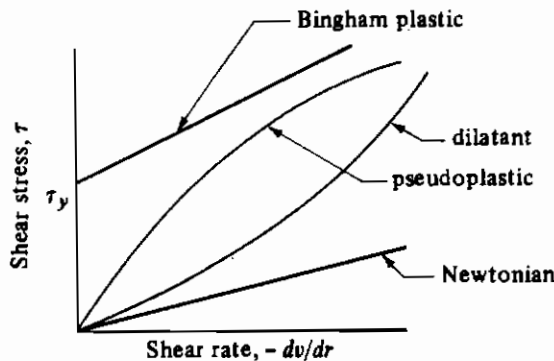
۱- سیالات بینگهام پلاستیک^(۲): این سیالات ساده‌ترین نوع سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان هستند. همان‌گونه که در شکل ۳-۵-۱-۳ نشان داده شده این سیالات به دلیل داشتن عرض از مبدأ با

سیالات نیوتنی تفاوت دارند. یک تنش برشی محدود τ_y (که تنش تحمل نامیده می‌شود) برحسب N/m^2 برای شروع جریان نیاز است. برخی سیالات تنش برشی تحمل دارند اما نمودار τ بر حسب dv/dr آنها به صورت یک منحنی صعودی یا نزولی می‌باشد. این انحراف از حالت واقعی سیالات بینگهام پلاستیک غالباً کم است. نمونه‌هایی از انواع سیالات دارای تنش تحمل، گل حفاری، مارگارین، مخلوطهای شکلاتی، گریسها، صابون، محلولهای حاوی ذرات جامد، خمیر دندان، خمیر کاغذ و لجن فاضلاب می‌باشند.

۲- سیالات شبه پلاستیک^(۱): اکثر سیالات غیرنیوتنی در این گروه هستند و شامل فلزات مذاب یا محلولهای پلیمر، گریسها، محلول نشاسته، مایونز، سیالات بیولوژیکی، محلولهای شوینده، فازهای توزیع شده و معلق در فاز دیگر در صنایع داروسازی و رنگها می‌باشند. منحنی جریان برای این سیالات در شکل ۱-۵-۳ نمایش داده شده است و معمولاً این سیالات توسط یک معادله پاورلا (که گاهی به آن معادله Ostwald-deWaele گفته می‌شود) نشان داده می‌شوند.

$$\tau = K \left(-\frac{dv}{dr} \right)^n \quad (n < 1) \quad (3-5-2)$$

که K شاخص یکنواختی برحسب $N.s^n/m^2$ یا $lb_f.s^n/ft^2$ و n شاخص بدون بعد رفتار جریان می‌باشد، ویسکوزیته ظاهری از معادلات (۱-۵-۳) و (۲-۵-۳) که $\mu_a = K(dv/dr)^{n-1}$ می‌باشد به دست آمده و با افزایش میزان برش کاهش می‌یابد.



شکل ۱-۵-۳. نمودار تنش برای سیالات نیوتنی مستقل از زمان و سیالات غیرنیوتنی

۳- سیالات دیلاتانت^(۱): این سیالات در مقایسه با سیالات شبه پلاستیک کمتر معمولند و رفتار جریان آنها در شکل ۱-۵-۳ افزایش ویسکوزیته ظاهری را با افزایش میزان برش نشان می‌دهد. معادله پاورلا (۲-۵-۳) با $n > 1$ غالباً قابل استفاده می‌باشد.

$$\tau = K \left(-\frac{dv}{dr} \right)^n \quad (n > 1) \quad (3-5-3)$$

برای سیال نیوتنی $n = 1$. محلولهایی که خاصیت دیلاتانت نشان می‌دهند از جمله: محلولهای شکر با آرد ذرت، شن مرطوب ساحلی، محلول نشاسته با آب، محلول آبی سیلیکات پتاسیم و محلولهای با غلظت زیاد پودر در آب می‌باشند.

۳-۵C سیالات وابسته به زمان

۱- سیالات تیکسوتروپیک: این سیالات کاهش بازگشت پذیر تنش برشی را نسبت به زمان در شرایط نرخ ثابت برش از خود نشان می‌دهند. این تنش برشی به یک مقدار حدی که بستگی به میزان برش دارد میل می‌کند. مثالهایی از این نوع سیالات: بعضی محلولهای پلیمری، برخی مواد غذایی، رنگها و چربیها می‌باشند. در حال حاضر هنوز تئوری سیالات وابسته به زمان کاملاً توسعه نیافته است.

۲- سیالات رئوپکتیک: این سیالات کاملاً کمیاب هستند و تنش برشی را نسبت به زمان در یک میزان برش ثابت به صورت بازگشت پذیر افزایش می‌دهند. محلولهای خاک بنتونیت، محلول گچ و برخی محلولهای معدنی مثالهایی از این نوع سیالات هستند. در روشهای طراحی برای سیالات تیکسوتروپیک و رئوپکتیک برای جریان پایدار در لوله‌ها، غالباً از مقادیر حدی خواص جریان در میزان برش ثابت استفاده می‌شود.

۳-۵D سیالات ویسکوالاستیک

سیالات ویسکوالاستیک تغییر شکل ناشی از جریان را باز می‌گردانند. این سیالات هم خواص سیالات ویسکوز و هم خواص الاستیک را دارا می‌باشند. بخشی از تغییر شکل بدلیل حذف تنش برمی‌گردد. به‌عنوان مثال خمیر تهیه شده از آرد، مواد افزودنی، مذاب پلیمرها و قیر نمونه هایی از این سیالات هستند.

۳-۵B جریان آرام سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان

۱- خواص جریان یک سیال: در تعیین خواص جریان سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان اغلب از ویسکومتر لوله موین استفاده می‌شود. آفت فشار Δp برحسب N/m^2 در یک دبی مشخص q برحسب m^3/s در یک لوله مستقیم به طول L متر و قطر D متر اندازه‌گیری می‌شود. این عمل برای دبی‌های متفاوت یا سرعت‌های میانگین V m/s تکرار می‌شود. اگر سیال مستقل از زمان باشد این داده‌های جریان می‌توانند برای پیش‌بینی جریان در لوله‌هایی با اندازه‌های دیگر استفاده شوند.

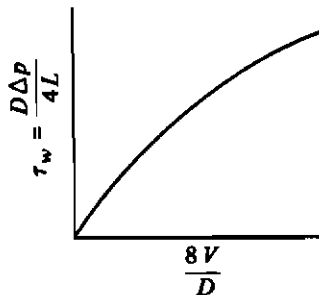
منحنی $D \Delta p / 4L$ یا τ_w تنش برشی در دیواره برحسب N/m^2 در برابر $\Delta V/D$ ، که متناسب با میزان برش در دیواره است، در شکل ۳-۵-۲ برای یک سیال پاورلا مطابق رابطه زیر، (معادله ۳-۵-۴)، نشان داده شده است.

$$\tau_w = \frac{D \Delta p}{4L} = K' \left(\frac{8V}{D} \right)^{n'} \quad (3-5-4)$$

که n' هنگامی که اطلاعات روی منحنی لگاریتمی رسم شود، شیب خط می‌باشد و K' دارای واحد $N \cdot s^{n'} / m^2$ است. برای $n' = 1$ سیال نیوتنی است. در $n' < 1$ سیال شبه پلاستیک یا اگر منحنی از مبدأ عبور نکند بینگهام پلاستیک است و در $n' > 1$ سیال دیلاتانت می‌باشد. K' شاخص یکنواختی^(۱) در معادله (۳-۵-۴)، برابر با مقدار $D \Delta p / 4L$ در $\Delta V/D = 1$ است. میزان برش در دیواره، $(-dv/dr)_w$ ، خواهد بود،

$$\left(-\frac{dv}{dr} \right)_w = \left(\frac{3n' + 1}{4n'} \right) \left(\frac{8V}{D} \right) \quad (3-5-5)$$

همچنین برای سیالات نیوتنی $K' = \mu$ می‌باشد.



شکل ۳-۵-۲. منحنی عمومی جریان برای یک سیال پاورلا با جریان آرام در یک لوله

معادله (۳-۵-۴) صورت ساده دیگری از مدل پاورلا (معادله (۳-۵-۲)) است که برای جریان در لوله‌های مدور به کار می‌رود و برای استفاده در حالت جریان لوله مناسبتر است (D2). از این رو معادله (۳-۵-۴) مشخصه‌های جریان را به کاملی معادله (۳-۵-۲) تعریف می‌کند. از طریق آزمایش (M3) ثابت شده است که n' و K' برای بیشتر سیالات در محدوده وسیعی از $\Delta p/4L$ یا $\Delta V/D$ ثابت می‌باشند. برای برخی سیالات این مورد صادق نیست و n' و K' متغیر هستند. پس برای موارد طراحی، مقادیری از n' و K' باید به کار رود که برای مقادیر واقعی $\Delta p/4L$ یا $\Delta V/D$ صادق باشند. روش استفاده از جریان در یک لوله اغلب برای تعیین خواص جریان یک سیال غیرنیوتنی به کار می‌رود.

در بسیاری از موارد خواص جریان یک سیال با استفاده از ویسکومتر دوار تعیین می‌شود. خواص K و n جریان در معادله (۳-۵-۲) با این روش تعیین می‌گردد، در مورد ویسکومتر دوار در بخش ۳-۵I بحث می‌شود.

وقتی خواص جریان در یک محدوده تنشهای برشی برای سیالات زیادی ثابت باشند، معادلات زیر صادق هستند (M3)،

$$n' = n \quad (3-5-6)$$

$$K' = K \left(\frac{3n' + 1}{4n'} \right)^{2n'} \quad (3-5-7)$$

غالباً یک ضریب ویسکوزیته عمومی γ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\gamma = K' 8^{n'-1} \quad (\text{SI}) \quad (3-5-8)$$

$$\gamma = g_c K' 8^{n'-1} \quad (\text{English})$$

که γ دارای واحد $\text{N}\cdot\text{s}^n/\text{m}^2$ یا $\text{lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}^2\cdot\text{n}'$ است.

نمونه ثابتهای جریان (ثابتهای رئولوژیکی) برای برخی از سیالات در جدول ۳-۵-۱ داده شده است. در برخی از داده‌ها، مقادیر γ را به جای مقادیر K' می‌دهند، اما معادله (۳-۵-۸) می‌تواند برای تبدیل این مقادیر در صورتی که لازم باشد به کار رود. در برخی موارد در منابع، مقادیر K یا K' بر حسب $\text{dyn}\cdot\text{s}^n/\text{cm}^2$ یا $\text{lb}_f\cdot\text{s}^n/\text{ft}^2$ داده می‌شوند. از ضمیمه A.1 ضرایب تبدیل به صورت زیر می‌باشند،

$$1 \text{ lb}_f \cdot \text{s}^n / \text{ft}^2 = 47.880 \text{ N} \cdot \text{s}^n / \text{m}^2$$

$$1 \text{ dyn} \cdot \text{s}^n / \text{cm}^2 = 2.0886 \times 10^{-3} \text{ lb}_f \cdot \text{s}^n / \text{ft}^2$$

جدول ۳-۵-۱. ثابتهای جریان برای سیالات غیرنیوتنی

Fluid	Flow-Property Constants		Ref.
	n'	$K \left(\frac{N \cdot s^n}{m^2} \right)$	
1.5% carboxymethylcellulose in water	0.554	1.369	(S1)
3.0% CMC in water	0.566	4.17	(S1)
4% paper pulp in water	0.575	9.12	(A1)
14.3% clay in water	0.350	0.0512	(W2)
10% napalm in kerosene	0.520	1.756	(S1)
25% clay in water	0.185	0.3036	(W2)
Applesauce, brand A (297 K), density = 1.10 g/cm ³	0.645	0.500	(C1)
Banana puree, brand A (297 K), density = 0.977 g/cm ³	0.458	6.51	(C1)
Honey (297 K)	1.00	5.61	(C1)
Cream, 30% fat (276 K)	1.0	0.01379	(M4)
Tomato concentrate, 5.8% total solids (305 K)	0.59	0.2226	(H1)

۲- معادلات مربوط به جریان در یک لوله: به منظور پیش‌بینی افت فشار اصطکاک Δp در جریان آرام در یک لوله، معادله (۳-۵-۴) نسبت به ΔP حل شده است،

$$\Delta p = \frac{K'4L}{D} \left(\frac{8V}{D} \right)^n \quad (3-5-9)$$

اگر سرعت میانگین مطلوب باشد، معادله (۳-۵-۴) به صورت زیر مرتب می‌شود،

$$V = \frac{D}{8} \left(\frac{\Delta p D}{K'4L} \right)^{1/n} \quad (3-5-10)$$

اگر معادلات به جای K' بر حسب K مرتب شوند، معادلات (۳-۵-۶) و (۳-۵-۷) باید در معادلات (۳-۵-۹) و (۳-۵-۱۰) قرار داده شوند. جریان باید آرام باشد. عدد رینولدز عمومی به این صورت تعریف شده است،

$$N_{Re, gen} = \frac{D^n V^{2-n} \rho}{\gamma} = \frac{D^n V^{2-n} \rho}{K' 8^{n-1}} = \frac{D^n V^{2-n} \rho}{K 8^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n} \quad (SI) \quad (3-5-11)$$

۳- روش ضریب اصطکاک: همچنین برای سیالات نیوتنی با استفاده از روش ضریب اصطکاک Fanning در معادلات (۲-۱۰-۵) تا (۲-۱۰-۷)، و با بکار بردن عدد رینولدز عمومی داریم،

$$f = \frac{16}{N_{Re, gen}} \quad (3-5-12)$$

$$\Delta p = 4f\rho \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} \quad (SI)$$

$$\Delta p = 4f\rho \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g_c} \quad (\text{English}) \quad (3-5-13)$$

مثال ۳-۵-۱ اُفت فشار سیال پاورلا در جریان آرام

یک سیال پاورلا با دانسیته 1041 kg/m^3 در یک لوله به طول $14/9 \text{ m}$ و قطر داخلی $0/0524 \text{ m}$ با سرعت میانگین $0/0728 \text{ m/s}$ جریان دارد. خواص رئولوژیکی سیال، $(0/318 \text{ lb}_f \cdot \text{s}^n / \text{ft}^2)$ و $K' = 15/23 \text{ N} \cdot \text{s}^n / \text{m}^2$ و $n' = 0/4$ می‌باشد.

الف) اُفت فشار و افت اصطکاک را با استفاده از معادله (۳-۵-۹) برای جریان آرام محاسبه نمایید. عدد رینولدز عمومی را برای اطمینان از آرام بودن جریان به دست آورید.

ب) قسمت الف) را با استفاده از روش ضریب اصطکاک تکرار نمایید.

حل: داده‌های معلوم به این صورت هستند، $K' = 15/23$ ، $n' = 0/4$ ، $D = 0/0524 \text{ m}$ ، $V = 0/0728 \text{ m/s}$ ، $L = 14/9 \text{ m}$ و $\rho = 1041 \text{ kg/m}^3$ برای قسمت الف) با استفاده از معادله (۳-۵-۹)،

$$\Delta p = \frac{K' \cdot fL}{D} \left(\frac{\Delta V}{D}\right)^{n'} = \frac{15/23 \times 4 \times 14/9}{0/0524} \times \left(\frac{8 \times 0/0728}{0/0524}\right)^{0/4} = 45390 \text{ N/m}^2$$

همچنین؛ برای محاسبه افت اصطکاک،

$$F_f = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{45390}{1041} = 43/60 \text{ J/kg}$$

با استفاده از معادله (۳-۵-۱۱)،

$$N_{Re, gen} = \frac{D^{n'} V^{2-n'} \rho}{K' \cdot 8^{n'-1}} = \frac{0/0524^{0/4} \times 0/0728^{1/6} \times 1041}{15/23 \times 8^{-1/6}} = 1/106$$

بنابراین جریان آرام است.

برای قسمت ب)، با استفاده از معادله (۳-۵-۱۲)،

$$f = \frac{16}{N_{Re, gen}} = \frac{16}{1/106} = 14/44$$

با جایگزینی در معادله (۳-۵-۱۳)،

$$\begin{aligned} \Delta p &= 4f\rho \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} = 4 \times 14/44 \times 1041 \times \frac{14/9}{0/0524} \times \frac{0/0728^2}{2} \\ &= 45/39 \text{ kN/m}^2 \quad (946 \text{ lb}_f/\text{ft}^2) \end{aligned}$$

برای محاسبه افت فشار یک سیال بینگهام پلاستیک با تنش تحمل، روشهایی برای جریان آرام در دسترسند که در مورد جزئیات آن در مراجع دیگر بحث شده است (C1, P1, S2).

۵F-۳ افت اصطکاکی در انقباضها، انبساطها و اتصالات در جریان آرام

چون جریان سیالات غیرنیوتنی پاورلا در مجراها به دلیل بالا بودن اثرات ویسکوزیته معمولاً آرام است، بنابراین افتها در تغییرات ناگهانی سرعت و اتصالات در جریان آرام مهم هستند.

۱- انرژی جنبشی در جریان آرام: در کاربرد معادله کلی موازنه انرژی مکانیکی، معادله (۲۸-۷-۲)، میانگین انرژی جنبشی به ازای واحد جرم لازم است، که به صورت زیر است (S2)،

$$\text{میانگین انرژی جنبشی به ازای واحد جرم} = \frac{V^2}{2\alpha} \quad (۳-۵-۱۴)$$

برای سیالات نیوتنی در جریان آرام $\alpha = \frac{1}{4}$ است، برای سیالات غیرنیوتنی پاورلا داریم،

$$\alpha = \frac{(2n+1)(5n+3)}{3(3n+1)^2} \quad (۳-۵-۱۵)$$

به عنوان مثال اگر $n = 0.5$ باشد، $\alpha = 0.585$ و اگر $n = 1$ باشد، $\alpha = \frac{1}{4}$ است. در جریان مغشوش برای سیالات نیوتنی و غیر نیوتنی $\alpha = 1$ است (D1).

۲- تلفات در انقباضها و اتصالات: Skelland (S2) و Metzner & Dodge (D2) بیان می کنند که وقتی سیال از یک تانک خارج می شود و در اثر یک انقباض ناگهانی به داخل یک لوله با قطر D_2 جریان می یابد و یا از یک لوله با قطر D_1 در اثر انقباض ناگهانی به داخل یک لوله با قطر D_2 جریان می یابد، یک vena contracta در پائین دست جریان پس از انقباض شکل می گیرد. مشاهدات نشان می دهد که افت فشار اصطکاکی برای سیالات بینگهام و شبه پلاستیک خیلی مشابه افت فشار اصطکاکی سیالات نیوتنی با اعداد رینولدز عمومی یکسان در انقباضها، اتصالات و شیرها می باشد.

برای افتهای اصطکاکی ناشی از انقباض، معادله (۱۶-۱۰-۲) می تواند استفاده شود که در آن برای جریان مغشوش $\alpha = 1$ و برای جریان آرام α از معادله (۱۵-۵-۳) تعیین می شود، چون n مساوی ۱ نیست. افتهای اصطکاکی برای اتصالات و شیرها باید از معادله (۱۷-۱۰-۲) و مقادیر مندرج در جدول ۱-۱۰-۲ تعیین شود.

۳- افتها در انبساط ناگهانی: برای افت اصطکاکی یک سیال غیرنیوتنی در جریان آرام از طریق یک انبساط ناگهانی از قطر D_1 تا قطر D_2 ، Skelland (S2) رابطه زیر را پیشنهاد می کند،

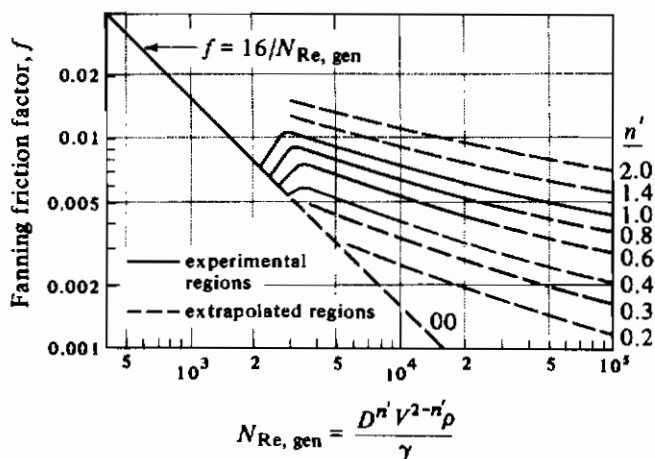
$$h_{fs} = \frac{3n+1}{2n+1} V_1^2 \left[\frac{n+3}{2(5n+3)} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 + \frac{3(3n+1)}{2(5n+3)} \right] \quad (۳-۵-۱۶)$$

که در این جا h_{ex} اُفت اصطکاکی برحسب J/kg می باشد، در سیستم واحدهای انگلیسی معادله (۳-۵-۱۶) بر g_c تقسیم می شود و h_{ex} برحسب $ft.lbf/lb_m$ می باشد.

معادله (۲-۱۰-۱۵) در جریان آرام با $\alpha = \frac{1}{4}$ برای یک سیال نیوتنی مقادیری را می دهد که تا حد قابل قبولی نزدیک به مقادیری هستند که از معادله (۳-۵-۱۶) با $n = 1$ (سیال نیوتنی) نتیجه می شود. اُفت اصطکاک برای جریان مغشوش از معادله (۲-۱۰-۱۵) با $\alpha = 1$ برای سیالات غیرنیوتنی، تخمین زده می شود (S2).

۳-۵G جریان مغشوش و ضرایب اصطکاک عمومی

عدد رینولدز در جریان مغشوش سیالات مستقل از زمان به دلیل این که جریان مغشوش اتفاق می افتد با خواص جریان سیال غیرنیوتنی تغییر می کند. Metzner & Dodge (D2) در یک مطالعه جامع یک معادله تئوری برای جریان مغشوش سیالات غیرنیوتنی در لوله های صاف به دست آوردند. از معادله نهایی برای رسم شکل ۳-۵-۳ استفاده شده است، که در آن ضریب اصطکاک Fanning برحسب عدد رینولدز عمومی، $N_{Re, gen}$ داده شده در معادله (۳-۵-۱۱)، رسم شده است. سیالات پاورلا با شاخصهای رفتار جریان n' بین 0.36 و 1 در اعداد رینولدز تا حدود $10^4 \times 3/5$ مورد مطالعه آزمایشگاهی قرار گرفتند که نتایج با مقادیر به دست آمده از تئوری مطابقت می کردند.



شکل ۳-۵-۳. ضریب اصطکاک فنینگ بر حسب عدد رینولدز عمومی برای سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان و سیالات نیوتنی که در لوله های صاف جریان دارند. (با کسب مجوز از:

منحنیهای مقادیر مختلف n' خط جریان آرام را در اعداد رینولدز مختلف قطع می‌کنند تا این‌که وارد ناحیه گذرا شوند. برای $n' = 1$ (سیالات نیوتنی) ناحیه گذرا از $2100 = N_{Re}$ شروع می‌شود. چون بسیاری از سیالات پاورلا غیرنیوتنی ویسکوزیته‌های بالا دارند اغلب جریان آرام دارند. رابطهٔ مربوط به لوله‌های صاف برای لوله‌های زیر در جریان آرام نیز صدق می‌نماید.

از شکل ۳-۵-۳ برای لوله‌های تجارتي زیر با مقادیر متغیر زبری نسبتی ϵ/D در جریان مغشوش استفاده نمی‌شود، چون این شکل برای لوله‌های صاف به دست آمده است. وابستگی مقادیر زبری نسبتی ϵ/D به n' از طریق اطلاعات آزمایشگاهی به دست می‌آید که هنوز در دسترس نیست. Reed (M3, S3) & Metzner استفاده از روابط موجود را پیشنهاد می‌کنند، از جمله شکل ۳-۱۰-۳ برای سیالات نیوتنی در لوله‌های زیر با استفاده از عدد رینولدز عمومی $N_{Re,gen}$ می‌باشد. این کار تا حدی محافظه کارانه است چون اطلاعات مقدماتی نشان می‌دهد که ضرایب اصطکاک برای سیالات شبه پلاستیک مختصری کمتر از سیالات نیوتنی است. همچنین از شکل ۳-۵-۳ و منحنی مربوط به لوله‌های صاف می‌توان دریافت که این لوله‌ها برای سیالات با n' کمتر از ۱ مقادیر f کمتری دارند (S2).

مثال ۳-۵-۲ جریان مغشوش سیال پاورلا

یک سیال شبه پلاستیک که از معادلهٔ پاورلا پیروی می‌نماید با دانسیته 961 kg/m^3 در یک لولهٔ مدور صاف با قطر داخلی 0.0508 m با سرعت میانگین $6/10 \text{ m/s}$ جریان دارد. خواص جریان سیال، $n' = 0.3$ و $K' = 2/744 \text{ N.s}^{n'}/\text{m}^2$ می‌باشد. افت فشار اصطکاک برای یک لوله به طول $30/5 \text{ m}$ را محاسبه نمایید.

حل: اطلاعات داده شده به این صورت هستند، $K' = 2/744$ ، $n' = 0.3$ ، $D = 0.0508 \text{ m}$ ، $V = 6/10 \text{ m/s}$

و $\rho = 961 \text{ kg/m}^3$ ، $L = 30/5 \text{ m}$ از معادلهٔ عدد رینولدز عمومی، (۳-۵-۱۱)،

$$N_{Re,gen} = \frac{D^{n'} V^{2-n'} \rho}{K' \lambda^{n'-1}} = \frac{0.0508^{0.3} \times (6/10)^{1.7} \times 961}{2/744 \times 8^{-0.7}} = 1/328 \times 10^4$$

بنابراین، جریان مغشوش است. با استفاده از شکل ۳-۵-۳ در $N_{Re,gen} = 1/328 \times 10^4$ و

$$f = 0.0032 \quad n' = 0.3$$

با جایگزینی در معادلهٔ (۳-۵-۱۳)،

$$\Delta p = 4 f \rho \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} = 4 \times 0.0032 \times 961 \times \frac{30/5}{0.0508} \times \frac{6/10^2}{2}$$

$$= 137/4 \text{ kN/m}^2 \quad (2870 \text{ lb}_f/\text{ft}^2)$$

۳-۵H توزیع سرعت در سیالات غیرنیوتنی

با شروع از معادله (۳-۵-۲) و نوشتن آن به صورت زیر،

$$\tau_{rx} = K \left(-\frac{dv_x}{dr} \right)^n \quad (3-5-17)$$

معادله زیر برای ربط دادن سرعت v_x با شعاع r به دست می‌آید، که شعاع r فاصله از مرکز است. (برای اثبات مساله ۳-۹-۲ را ببینید.)

$$v_x = \frac{n}{n+1} \left(\frac{p_0 - p_L}{2KL} \right)^{1/n} (R_0)^{(n+1)/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{(n+1)/n} \right] \quad (3-5-18)$$

در $r = 0$ ، $v = v_{\max}$ و معادله (۳-۵-۱۸) می‌شود،

$$v_x = v_{x \max} \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{(n+1)/n} \right] \quad (3-5-19)$$

توزیع سرعت در جریان آرام یک سیال غیرنیوتنی نشان می‌دهد که این توزیع سرعت می‌تواند با توزیع سرعت یک سیال نیوتنی (معادله (۳-۹-۹))، خیلی متفاوت باشد. برای سیالات شبه پلاستیک ($n < 1$) یک توزیع سرعت نسبتاً یکنواخت در مقایسه با توزیع سرعت سهمی شکل سیال نیوتنی، به دست می‌آید. در $n = 0$ جریان میله‌ای شکل است. برای سیالات دیلاتانت ($n > 1$) یک توزیع سرعت تیزتر به دست می‌آید و در $n = \infty$ سرعت تابع خطی از شعاع است.

۳-۵I تعیین خواص جریان سیالات غیرنیوتنی با استفاده از ویسکومتر دوار

خواص جریان یا ثابتهای رئولوژیکی سیالات غیر نیوتنی با استفاده از جریان لوله‌ای همانگونه که در بخش ۳-۵E بحث شد می‌تواند اندازه‌گیری شود. روش مهمتر دیگر برای اندازه‌گیری خواص جریان استفاده از ویسکومتر دوار با استوانه هم مرکز است. این ویسکومتر در ابتدا توسط Couette در سال ۱۸۹۰ طرح شد. در این وسیله یک استوانه با سرعت چرخشی ثابت به صورت هم مرکز در درون استوانه دیگری می‌چرخد. عموماً یک فاصله خیلی کوچک میان دیواره‌ها وجود دارد که با سیال پر می‌شود. گشتاور لازم برای ثابت نگهداشتن سرعت چرخش استوانه داخلی توسط پیچش یک سیم که از آن سیم استوانه داخلی آویزان است، اندازه‌گیری می‌شود. یک نوع تجاری آن، ویسکومتر Brookfield می‌باشد. در برخی از انواع این ویسکومتر، استوانه بیرونی می‌چرخد.

تنش برشی در دیواره استوانه به صورت زیر می‌باشد،

$$\tau_w = \frac{T}{2\pi R_0^2 L} \quad (3-5-20)$$

که تنش برشی در دیواره برحسب N/m^2 یا $kg/s^2 \cdot m$ یا T گشتاور اندازه گیری شده برحسب $kg \cdot m^2/s^2$ ، R_b شعاع استوانه داخلی بر حسب m و L طول مؤثر استوانه برحسب m می باشد. معادله (۳-۵-۲۰) هم برای سیالات نیوتنی و هم برای سیالات غیرنیوتنی صادق است.

میزان برش در سطح استوانه داخلی برای سیالات غیرنیوتنی در محدوده

$$0.5 < R_b/R_c < 0.99, \quad (M6)$$

$$\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w = \frac{2\omega}{n[1 - (R_b/R_c)^{2/n}]} \quad (3-5-21)$$

که R_c شعاع استوانه بیرونی یا ظرف بر حسب متر، و ω سرعت زاویه ای استوانه داخلی بر حسب rad/s است. همچنین $\omega = 2\pi N/60$ که N برحسب RPM است. نتایج محاسبه شده از معادله (۳-۵-۲۱) مقادیر خیلی نزدیکی را با نتایج حاصل از معادلات پیچیده تر (K2) Maron & Krieger می دهد. این معادلات در مراجع (P4, S2) نیز داده شده است.

معادله پاورلا به صورت زیر داده شده است،

$$\tau = K \left(-\frac{dv}{dr}\right)^n \quad (3-5-2)$$

که در این جا $K = N \cdot s^{n-2}/m$. با جایگزینی معادلات (۳-۵-۲۰) و (۳-۵-۲۱) در (۳-۵-۲) داریم،

$$T = 2\pi R_b^2 L K \left[\frac{2}{n[1 - (R_b/R_c)^{2/n}]} \right]^n \omega^n \quad (3-5-22)$$

یا،

$$T = A \omega^n \quad (3-5-23)$$

که در آن،

$$A = 2\pi R_b^2 L K \left[\frac{2}{n[1 - (R_b/R_c)^{2/n}]} \right]^n \quad (3-5-24)$$

داده های تجربی به وسیله اندازه گیری گشتاور^(۱) T در مقادیر مختلف ω برای یک سیال مشخص به دست می آیند. ثابتهای خواص جریان با رسم نمودار $\log T$ برحسب $\log \omega$ ارزیابی می شود. پارامتر n شیب خط راست و $\log A$ عرض از مبدأ می باشد. اکنون ضریب یکنواختی K به آسانی از معادله (۳-۵-۲۴) به دست می آید.

حالت‌های خاص مختلفی از معادله (۳-۵-۲۱) می‌تواند نتیجه شود.

۱- سیال نیوتنی: ($n = 1$).

$$\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w = \frac{2\omega}{1 - (R_b/R_c)^2} \quad (3-5-25)$$

۲- فاصله خیلی زیاد دو استوانه ($R_b/R_c < 0.1$): این حالت شبیه فرو بردن استوانه دوار در یک ظرف بزرگ از سیال مورد آزمایش است. معادله (۳-۵-۲۱) به صورت زیر است،

$$\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w = \frac{2\omega}{n} \quad (3-5-26)$$

با جایگزینی معادلات (۳-۵-۲۰) و (۳-۵-۲۶) در (۳-۵-۲)،

$$T = 2\pi R_b^2 L K \left(\frac{2}{n}\right)^n \omega^n \quad (3-5-27)$$

مشابه قبل، ثابت‌های خواص جریانی می‌تواند با نمودار $\log T$ برحسب $\log \omega$ ارزیابی شود.

۳- فاصله خیلی کم دو استوانه ($R_b/R_c > 0.99$): این حالت شبیه به جریان بین صفحه‌های موازی است. با در نظر گرفتن میزان برش در شعاع $(R_b + R_c)/2$ ،

$$\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w \cong \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{2\omega}{1 - (R_b/R_c)^2} \quad (3-5-28)$$

این معادله، همان معادله (۳-۵-۲۵) می‌باشد.

۳-۵J توان لازم برای همزدن و اختلاط سیالات غیرنیوتنی

برای فرموله کردن توان لازم در همزدن و اختلاط سیالات غیرنیوتنی عدد بدون بعد توان N_p بر اساس معادله (۳-۴-۲) تعریف می‌شود، که همان معادله مربوط به سیالات نیوتنی است. اما تعریف عدد رینولدز در این حالت نسبت به سیالات نیوتنی خیلی پیچیده تر است چون ویسکوزیته ظاهری برای سیالات غیرنیوتنی ثابت نیست و با میزان برش یا اختلاف سرعت در ظرف تغییر می‌کند. چند تن از محققین ($G1, M1$) از ویسکوزیته ظاهری میانگین استفاده کرده‌اند که در تعریف عدد رینولدز به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$N_{Re, n} = \frac{D_a^2 N_p}{\mu_a} \quad (3-5-29)$$

ویسکوزیته ظاهری میانگین با میانگین میزان برش یا اختلاف سرعت میانگین به طریق زیر ارتباط داده می‌شود. برای یک سیال پاورلا،

$$\tau = K \left(-\frac{dv}{dy} \right)_{av}^n \quad (3-5-30)$$

برای یک سیال نیوتنی،

$$\tau = \mu_a \left(-\frac{dv}{dy} \right)_{av} \quad (3-5-31)$$

با ترکیب معادلات (3-5-30) و (3-5-31) داریم:

$$\mu_a = K \left(\frac{dv}{dy} \right)_{av}^{n-1} \quad (3-5-32)$$

Metzner و دیگران (G1, M1) به طریق تجربی دریافته‌اند که میزان برش میانگین $(dv/dy)_{av}$ برای مایعات شبه پلاستیک ($n < 1$) تقریباً به صورت زیر با سرعت چرخشی تغییر می‌کند،

$$\left(\frac{dv}{dy} \right)_{av} = 11N \quad (3-5-33)$$

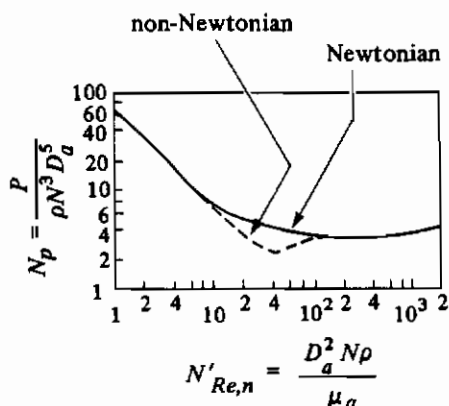
بنابراین با ترکیب معادلات (3-5-32) و (3-5-33)،

$$\mu_a = (11N)^{n-1} K \quad (3-5-34)$$

با جانشینی در معادله (3-5-29) داریم،

$$N'_{Re,n} = \frac{D_a^2 N^{2-n} \rho}{11^{n-1} K} \quad (3-5-35)$$

معادله (3-5-35) در مایعات شبه پلاستیک برای ربط دادن داده‌های تجربی برای یک همزن توربینی شش تیغه صاف همراه با دیسک، استفاده شده است و منحنی خط چین در شکل (3-5-4) این رابطه را نشان می‌دهد (M1). منحنی خط پر برای سیالات نیوتنی به کار می‌رود (R1). هر دو دسته اطلاعات تجربی برای محفظه‌هایی با ۴ بافل با $D_i/J = 10$ ، $D_a/W = 5$ ، $D_i/J = 10$ و $L/W = \frac{D}{4}$ به دست آمده‌اند. اما چون تفاوت در نتایج برای $D_i/J = 10$ و $D_i/J = 12$ خیلی ناچیز است (R1)، خط مربوط به سیالات نیوتونی می‌تواند همان منحنی ۱ شکل ۴-۴-۳ در نظر گرفته شود. منحنی‌ها در شکل (3-5-4) نشان می‌دهند که نتایج برای محدوده عدد رینولدز ۱ تا ۲۰۰۰ یکسان هستند، به جز این که در محدوده عدد رینولدز بین ۱ تا ۱۰۰، جایی که سیالات شبه پلاستیک از توان کمتری نسبت به سیالات نیوتنی استفاده می‌کنند، تفاوت دارند. الگوهای جریان در همزن نشان می‌دهد که گرادیمان سرعت در سیالات شبه پلاستیک بسیار بیشتر از سیالات نیوتنی تغییر می‌کند. بخشی از سیال که از پره دور است به صورت آرام حرکت می‌کند که ویسکوزیته ظاهری آن نیز زیاد است. داده‌های مربوط به فن‌های توربینی و پروانه‌ای در مراجع دیگر در دسترس‌اند (M1).



شکل ۴-۵-۳. رابطه توان در همزدن با یک همزن توربینی شش تیغه دیسک دار در سیالات

نیوتنی و غیرنیوتنی (R1, M1, G1): $D_a/W = 5$, $L/W = \frac{5}{4}$, $D_1/J = 10$.

۳-۶ معادلات دیفرانسیل پیوستگی

۳-۶A مقدمه

در بخشهای ۲-۶ و ۲-۷ و ۲-۸ موازنه‌های کلی جرم، انرژی و ممنتوم به ما امکان می‌داد که بسیاری از مسائل ابتدایی را در جریان سیال حل کنیم. این موازنه‌ها روی یک حجم محدود اختیاری که گاهی اوقات حجم کنترل نامیده می‌شود صورت گرفته بودند. در این انرژی کل، انرژی مکانیکی و موازنه‌های ممنتوم ما تنها به دانستن حالت جریانهای ورودی و خروجی و تبادلشان با محیط احتیاج داشتیم.

این موازنه‌های کلی ابزار قدرتمندی در حل مسائل مختلف جریان بودند، زیرا آنها نیاز به دانستن این که چه چیزی در داخل حجم کنترل محدود می‌گذرد نداشتند. همچنین در موازنه‌های ممنتوم پوسته‌ای ساده که در بخش ۲-۹ بحث شده بود روابطی برای توزیع سرعت و افت فشار به دست آمد. اما به منظور پیشرفت در مطالعه این سیستمهای جریانی باید جزئیات بیشتری را از آنچه که در داخل حجم کنترل می‌گذرد بدانیم. از این رو، اکنون از یک المان دیفرانسیلی برای یک حجم کنترل استفاده می‌کنیم. موازنه‌های دیفرانسیلی قدری شبیه به موازنه‌های کلی و موازنه‌های پوسته‌ای خواهند بود. اما اکنون ما باید موازنه‌ای روی یک فاز جداگانه تشکیل دهیم و تا مرز فاز با استفاده از شرایط مرزی انتگرال بگیریم. در موازنه‌های قبلی، برای هر سیستم به طور جداگانه موازنه نوشته می‌شد. لازم نیست برای هر سیستمی موازنه جدیدی بنویسیم. اغلب ساده‌تر است با معادلات دیفرانسیل بقای جرم (معادله پیوستگی) و بقای ممنتوم در شکل کلی شروع کنیم. سپس این معادلات به وسیله حذف جملات غیرضروری برای

هر مسأله خاص ساده می‌شوند.

برای سیستمهای غیرهمدم، یک معادله دیفرانسیل عمومی بقای انرژی در فصل پنجم در نظر گرفته خواهد شد. همچنین در فصل هفتم، یک معادله دیفرانسیل عمومی پیوستگی برای یک مخلوط دو جزئی به دست خواهد آمد. معادله دیفرانسیلی موازنه ممتوم براساس قانون دوم نیوتن به دست می‌آید و به ما امکان می‌دهد که چگونگی تغییرات سرعت را با مکان و زمان و افت فشار در جریان آرام تعیین کنیم. معادله موازنه ممتوم می‌تواند برای جریان مغشوش با پاره‌ای تغییرات استفاده شود.

اغلب این معادلات بقا، معادلات تغییر^(۱) نامیده می‌شوند، زیرا آنها تغییرات خواص سیال را نسبت به مکان و زمان بیان می‌کنند. قبل از این‌که این معادلات را به دست آوریم یادآوری مختصری از انواع مشتقات نسبت به زمان که در این معادلات موجود هستند و شرح کوتاهی از نمادهای برداری ارائه می‌شود.

۶B-۳ انواع مشتقات زمان و نمادهای برداری

۱- مشتق جزئی زمان: انواع گوناگون مشتقات زمان در به دست آوردن معادلات استفاده شده‌اند. متداول‌ترین نوع مشتق، مشتق جزئی زمان است. به عنوان مثال فرض کنید که می‌خواهیم غلظت جرمی یا دانسیته (ρ) یک جریان را بر حسب kg/m^3 به صورت تابعی از α و y و z و زمان t به دست آوریم. مشتق جزئی ρ نسبت به زمان برابر است با $\partial\rho/\partial t$. این جمله تغییر موضعی دانسیته با زمان در یک نقطه ثابت به مختصات α و y و z می‌باشد.

۲- مشتق کامل زمان: فرض کنید که می‌خواهیم دانسیته را در جریان اندازه بگیریم در حالی که در جریان با سرعتهای dx/dt و dy/dt و dz/dt به ترتیب در جهتهای α و y و z حرکت می‌کنیم. مشتق کامل $d\rho/dt$ برابر است با:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3-6-1)$$

این بدین معنی است که دانسیته تابعی از t و مؤلفه‌های سرعت dx/dt ، dy/dt و dz/dt است که در آنها شاهد هم در حال حرکت است.

۳- مشتق ذاتی زمان^(۲): نوع مفید دیگری از مشتق زمان موقعی است که شاهد همراه با سیال با سرعت v شناور باشد و تغییرات دانسیته را نسبت به زمان یادداشت کند. این نوع از مشتق که همراه با جریان است مشتق ذاتی زمان $D\rho/Dt$ نامیده می‌شود،

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla\rho) \quad (3-6-2)$$

در این جا v_x ، v_y و v_z مؤلفه‌های بردار سرعت جریان \mathbf{v} می‌باشند. این مشتق ذاتی برای متغیرهای عددی و برداری به کار برده شده است. عبارت $(\mathbf{v} \cdot \nabla\rho)$ در قسمت ۶ از بخش ۳-۶B توضیح داده خواهد شد.

۴- مقادیر عددی: خواص فیزیکی که در انتقال ممتوم، انتقال حرارت و انتقال جرم با آنها مواجه هستیم چند گروه می‌باشند که عبارتند از مقادیر عددی، بردارها و تنسورها. مقادیر عددی، کمیت‌هایی مانند غلظت، دما، طول، حجم، زمان و انرژی می‌باشند. آنها مقدار دارند اما جهت ندارند و به عنوان تنسورهای مرتبه صفر در نظر گرفته می‌شوند. قوانین معمول جبری برای جبر مقادیر عددی صدق می‌کند. به عنوان مثال $bc = cd$ و $(bc)d = (cd)b$ و غیره.

۵- بردارها: سرعت، نیرو، ممتوم و شتاب بردار هستند. چون آنها هم بزرگی و هم جهت دارند. این پارامترها، تنسورهای مرتبه اول می‌باشند و با حروف درشت پررنگ در این متن نوشته شده‌اند. مانند \mathbf{v} برای سرعت. جمع دو بردار $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ به‌روش متوازی‌الاضلاع و تفاضل دو بردار $\mathbf{B} - \mathbf{C}$ در شکل ۱-۶-۳ نشان داده شده است. بردار \mathbf{B} به وسیله سه تصویرش B_x ، B_y و B_z در روی محورهای α ، y و z نشان داده شده است،

$$\mathbf{B} = iB_x + jB_y + kB_z \quad (3-6-3)$$

در این جا i ، j و k بردارهای واحد بترتیب در طول محورهای α ، y و z می‌باشند.

در ضرب یک مقدار عددی r یا s در یک بردار \mathbf{B} روابط زیر برقرار است،

$$r\mathbf{B} = \mathbf{B}r \quad (3-6-4)$$

$$(rs)\mathbf{B} = r(s\mathbf{B}) \quad (3-6-5)$$

$$r\mathbf{B} + s\mathbf{B} = (r + s)\mathbf{B} \quad (3-6-6)$$

این روابط نیز صدق می‌کنند:

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \quad (3-6-7)$$

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) \quad (3-6-8)$$

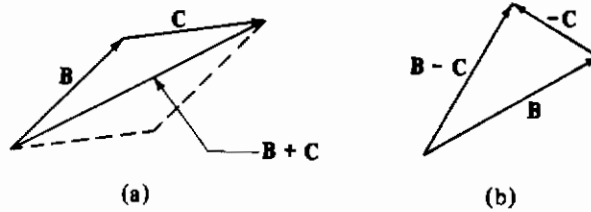
$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D} \neq \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) \quad (3-6-9)$$

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = BC \cos \phi_{BC} \quad (3-6-10)$$

در این جا ϕ_{BC} زاویه بین دو بردار می‌باشد و کوچکتر از 180° است.

تنسورهای مرتبه دوم τ عمدتاً در انتقال ممتوم وجود دارند و ۹ مؤلفه دارند که در مراجع دیگر

بررسی شده‌اند (B2).



شکل ۱-۳-۶. جمع و تفریق بردارها: (a) جمع بردارها $B + C$ (b) تفریق بردارها $B - C$

۶- عملیات دیفرانسیلی با مقادیر عددی و بردارها: گرادیان یا "grad" یک میدان عددی برابر است با:

$$\nabla \rho = \mathbf{i} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (3-6-11)$$

در این جا ρ یک مقدار عددی به نام دانسیته است.

دیورژانس^(۱) یا "div" یک بردار \mathbf{v} به صورت زیر است:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3-6-12)$$

در این جا \mathbf{v} تابعی از v_x ، v_y و v_z می باشد.

لاپلاسین یک میدان عددی برابر است با:

$$\nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \quad (3-6-13)$$

دیگر عملیاتی که ممکن است مفید باشند عبارتند از:

$$\nabla(rs) = r\nabla s + s\nabla r \quad (3-6-14)$$

$$(\nabla \cdot s\mathbf{v}) = (\nabla s \cdot \mathbf{v}) + s(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3-6-15)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla s) = v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} \quad (3-6-16)$$

۳-۶C معادله دیفرانسیل پیوستگی

۱- به دست آوردن معادله پیوستگی: موازنه جرم برای یک سیال خالص در حال جریان از میان یک المان حجمی ساکن در فضا به ابعاد Δx ، Δy و Δz (شکل ۲-۳-۶) نوشته می شود. موازنه جرم برای سیال

با دانسیته $\rho \text{ kg/m}^3$ برابر است با:

$$(17-3-6) \quad (\text{نرخ تجمع جرم}) = (\text{نرخ جرم خروجی}) - (\text{نرخ جرم ورودی})$$

در جهت x نرخ جرم ورودی در فاصله α به صفحه‌ای به مساحت $\Delta y \Delta z \text{ m}^2$ ، برابر است با، $\Delta z \Delta y$ $(\rho v_x)_x$ برحسب kg/s و جرم خروجی در $x + \Delta x$ برابر است با، $\Delta y \Delta z (\rho v_x)_{x+\Delta x}$. جمله $(\rho v_x)_x$ شار جرمی برحسب kg/s.m^2 می‌باشد. همچنین جرم ورودی و خروجی در جهت‌های y و z در شکل ۲-۶-۳ نشان داده شده است.

نرخ تجمع جرم در حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ برابر است با:

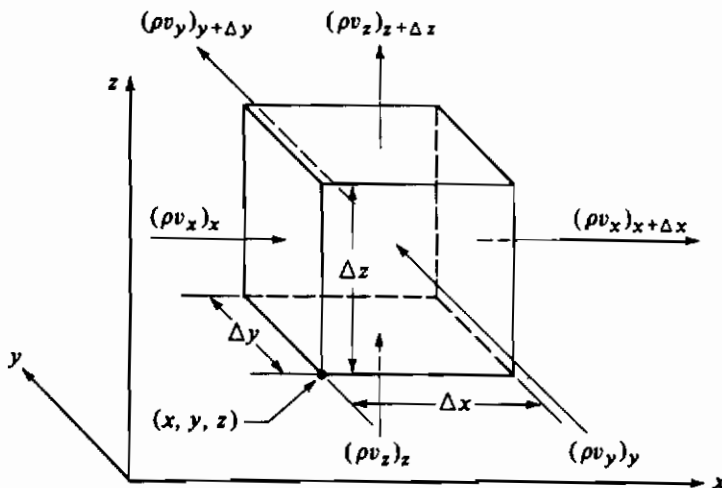
$$(18-3-6) \quad \text{نرخ تجمع جرم} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

با جانشینی همه این عبارات در معادله (۱۷-۶-۳) و تقسیم کردن هر دو طرف بر $\Delta x \Delta y \Delta z$ ،

$$(19-3-6) \quad \frac{[(\rho v_x)_x - (\rho v_x)_{x+\Delta x}]}{\Delta x} + \frac{[(\rho v_y)_y - (\rho v_y)_{y+\Delta y}]}{\Delta y} + \frac{[(\rho v_z)_z - (\rho v_z)_{z+\Delta z}]}{\Delta z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

با گرفتن حد وقتی Δx ، Δy و Δz به سمت صفر میل می‌کنند، معادله پیوستگی یا بقای جرم برای یک سیال خالص به دست می‌آید،

$$(20-3-6) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} \right] = -(\nabla \cdot \rho v)$$



شکل ۲-۶-۳. موازنه جرم برای یک سیال خالص که از میان حجم ثابت $\Delta x \Delta y \Delta z$ در فضا عبور می‌کند

نماد برداری در طرف راست معادله (۳-۶-۲۰) از این واقعیت که v یک بردار است نتیجه می‌شود. معادله (۳-۶-۲۰) به ما چگونگی تغییرات دانسیته (ρ) را با زمان در یک نقطه ثابت به دلیل تغییرات در بردار سرعت جرمی ρv می‌دهد. می‌توانیم معادله (۳-۶-۲۰) را به وسیله دیفرانسیل‌گیری جزئی به شکل دیگری تبدیل کنیم.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (3-6-21)$$

با مرتب ساختن معادله (۳-۶-۲۱) داریم،

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (3-6-22)$$

طرف چپ معادله (۳-۶-۲۲) همان مشتق ذاتی در معادله (۳-۶-۲) می‌باشد. بنابراین معادله (۳-۶-۲۲) می‌شود:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\rho(\nabla \cdot v) \quad (3-6-23)$$

۲- معادله پیوستگی برای دانسیته ثابت: غالباً در مهندسی مایعات نسبتاً تراکم‌ناپذیرند و ضرورتاً دانسیته آنها (ρ) ثابت است. پس برای یک المان سیال همچنانکه در طول مسیر حرکت می‌کند، ثابت باقی می‌ماند یا $D\rho/Dt = 0$. بنابراین معادله (۳-۶-۲۳) برای یک سیال با دانسیته ثابت در حالت پایدار و یا ناپایدار به صورت زیر در می‌آید،

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3-6-24)$$

در حالت پایدار، در معادله (۳-۶-۲۳)، $\partial\rho/\partial t = 0$ است.

مثال ۳-۶-۱ جریان روی یک صفحه صاف

یک سیال تراکم‌ناپذیر در یک طرف صفحه صافی جریان دارد. جریان در جهت x موازی با صفحه صاف است. در لبه صفحه، جریان یکنواخت است. سرعت جریان آزاد v_{x0} است. در جهت z سرعتی وجود ندارد. جهت y فاصله عمودی از صفحه را نشان می‌دهد. با استفاده از معادله پیوستگی این حالت را تحلیل کنید.

حل: در این حالت وقتی که ρ ثابت است معادله (۳-۶-۲۴) صدق می‌کند.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3-6-24)$$

چون در جهت z سرعت نداریم خواهیم داشت،

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (3-6-25)$$

در یک y مشخص کمی نزدیک به صفحه همچنانکه سیال از لبه صفحه در جهت x عبور می‌کند، مقدار v_x به علت اصطکاک سیال باید نسبت به سرعت در جریان آزاد V_{x0} کاهش یابد. بنابراین $\partial v_x / \partial x$ منفی است. بنابراین، از معادله (۳-۶-۲۵) نتیجه می‌شود که $\partial v_y / \partial y$ مثبت است و یک مؤلفه سرعت دور از صفحه وجود دارد.

۳- معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای و کروی: اگر سیال در یک استوانه در حال جریان باشد استفاده از مختصات استوانه‌ای اغلب برای حل معادله پیوستگی مناسبتر است. همچنین این دستگاه مختصات با مختصات کارتزین ارتباط دارد که در شکل ۳-۶-۳a نشان داده شده است. روابط بین مختصات کارتزین x, y, z و استوانه‌ای r, θ, z به صورت زیر می‌باشد:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad (3-6-26)$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

با استفاده از روابط معادله (۳-۶-۲۶) و معادله (۳-۶-۲۵)، معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای به دست می‌آید،

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (3-6-27)$$

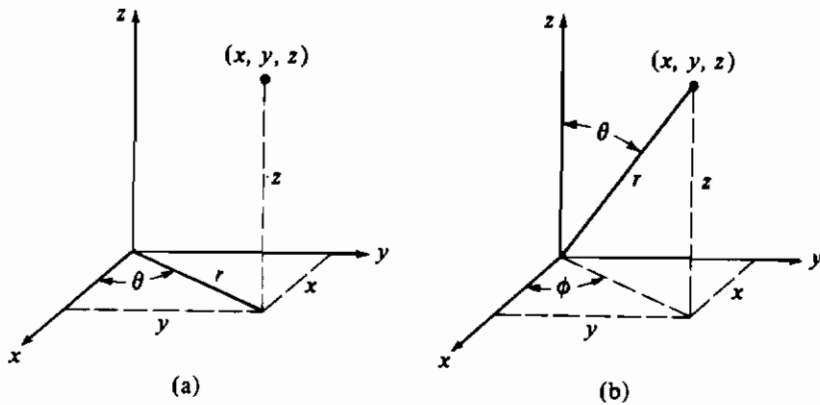
برای مختصات کروی متغیرهای r, θ, ϕ به صورت زیر با x, y, z همچنان که در شکل ۳-۶-۳b نشان داده شده است ارتباط دارند،

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (3-6-28)$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

معادله پیوستگی در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (3-6-29)$$



شکل ۳-۶-۳. سیستمهای مختصات خمیده: (a) مختصات استوانه‌ای (b) مختصات کروی

۳-۷ معادلات دیفرانسیل انتقال ممتوم یا حرکت

۳-۷۸ به دست آوردن معادلات انتقال ممتوم

معادله حرکت همان معادله بقای ممتوم (۳-۸-۲) می‌باشد که می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:

(نرخ ممتوم خروجی - نرخ ممتوم ورودی)

$$(۳-۷-۱) \quad (\text{نرخ تجمع ممتوم}) = \text{مجموع نیروهای عمل‌کننده} +$$

یک موازنه بر روی المانی مانند شکل ۳-۶-۲ می‌نویسیم. ابتدا فقط مؤلفه x هر جمله را در معادله

(۳-۷-۱) مورد بررسی قرار می‌دهیم. مؤلفه‌های y و z نیز به روش مشابه بررسی می‌شوند.

مؤلفه x نرخ ممتوم ورودی به صفحه‌ای به ابعاد Δy و Δz در فاصله x از مبدا و در جهت x

به طریق جابه‌جایی به صورت $(\rho v_x v_x)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ است. نرخ ممتوم خروجی در $x + \Delta x$ برابر با $\Delta y \Delta z$

$(\rho v_x v_x)_{x+\Delta x}$ است. کمیت (ρv_x) غلظت ممتوم بر حسب $\frac{\text{ممتوم}}{\text{m}^2}$ یا $\frac{\text{kg.m/s}}{\text{m}^2}$ می‌باشد و این مقدار در v_x ضرب شده است تا شار ممتوم را بر حسب $\frac{\text{ممتوم}}{\text{s.m}^2}$ بدهد.

مؤلفه x ممتوم ورودی به صفحه‌ای به ابعاد Δx و Δz در فاصله y از مبدا، $\Delta x (\rho v_y v_x)_y \Delta z$ است

و خروجی در $y + \Delta y$ برابر است با، $(\rho v_y v_x)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$. برای صفحه‌ای در فاصله z از مبدا، برای

ورودی داریم: $\Delta x \Delta y (\rho v_z v_x)_z$ و در $z + \Delta z$ برای خروجی داریم: $\Delta x \Delta y (\rho v_z v_x)_{z+\Delta z}$. بنابراین جریان

خالص مؤلفه x ممتوم جابجایی به داخل المانی به حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ به صورت زیر است،

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$[(\rho v_x v_x)_z - (\rho v_x v_x)_{z+\Delta z}] \Delta y \Delta z + [(\rho v_y v_x)_x - (\rho v_y v_x)_{x+\Delta x}] \Delta x \Delta z + [(\rho v_x v_x)_x - (\rho v_x v_x)_{x+\Delta x}] \Delta x \Delta y \quad (3-7-2)$$

ممنتوم براساس مکانیزمهای جابجایی (حرکت توده‌ای) مطابق معادله (۳-۷-۲)، و انتقال مولکولی (براساس اختلاف سرعت در جریان آرام) به المان وارد یا از آن خارج می‌شود. نرخ مؤلفه x ممنتوم ورودی در فاصله x به طریق انتقال مولکولی $(\tau_{xx})_x \Delta y \Delta z$ است و مؤلفه x ممنتوم خروجی از صفحه‌ای در $x+\Delta x$ برابر $(\tau_{xx})_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ می‌باشد. نرخ مؤلفه x ممنتوم ورودی در فاصله y به صفحه $(\tau_{yx})_y \Delta z \Delta x$ می‌باشد و خروجی در $y+\Delta y$ $(\tau_{yx})_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$ است. توجه کنید که τ_{yx} شار ممنتوم x از طریق صفحه‌ای عمود بر محور y می‌باشد. با نوشتن یک معادله مشابه برای صفحات باقیمانده، مؤلفه x ممنتوم خالص به طریق انتقال مولکولی برابر است با،

$$[(\tau_{xx})_x - (\tau_{xx})_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [(\tau_{yx})_y - (\tau_{yx})_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z + [(\tau_{zx})_z - (\tau_{zx})_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \quad (3-7-3)$$

این شارهای مولکولی ممنتوم می‌توانند به صورت تنشهای برشی و تنشهای عمودی در نظر گرفته شوند. بنابراین، τ_{yx} تنش برشی در جهت x روی صفحه y و τ_{zx} تنش برشی بر روی صفحه z است. همچنین τ_{xx} تنش عمود بر صفحه x است.

نیروی فشاری خالص سیال که بر المان در جهت x وارد می‌شود، اختلاف بین نیروهای موجود در x و $x + \Delta x$ است،

$$(p_x - p_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \quad (3-7-4)$$

نیروی ثقل g_x وارد بر واحد جرم در جهت x در جرم المان ضرب می‌شود تا رابطه زیر به دست آید،

$$\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3-7-5)$$

در این جا g_x مؤلفه x بردار ثقلی g است.

نرخ تجمع ممنتوم x در المان برابر است با:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \quad (3-7-6)$$

با جانشینی معادلات (۳-۷-۲) تا (۳-۷-۶) در معادله (۳-۷-۱) و تقسیم آن بر $\Delta x \Delta y \Delta z$ و گرفتن حد وقتی که Δx ، Δy و Δz به سمت صفر میل می‌کنند، مؤلفه x معادله دیفرانسیل حرکت را به دست می‌آوریم،

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = \left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z} \right] - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (3-7-7)$$

مؤلفه‌های v_x, v_y, v_z معادله دیفرانسیل حرکت به ترتیب به صورت زیر می‌باشند،

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} \right] - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (3-7-8)$$

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z} \right] - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (3-7-9)$$

می‌توانیم از معادله (۳-۶-۲) که معادله پیوستگی است و معادله (۳-۷-۷) استفاده کنیم و یک معادله حرکت برای مؤلفه x به دست آوریم و همین عمل را برای مؤلفه‌های y و z انجام دهیم که به صورت زیر خواهد شد،

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] + \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3-7-10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] + \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3-7-11)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3-7-12)$$

معادله حرکت یک سیال خالص را به کمک جمع برداری به دست می‌آوریم،

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (3-7-13)$$

باید توجه داشته باشیم که معادلات (۳-۷-۷) تا (۳-۷-۱۳) تنها برای محیطهای پیوسته معتبر هستند.

۳-۷B معادلات حرکت برای سیالات نیوتنی با دانسیته و ویسکوزیته متغیر

به منظور استفاده از معادلات (۳-۷-۷) تا (۳-۷-۱۳) برای تعیین توزیع سرعت، باید روابطی برای تنشهای مختلف برحسب گرادیان سرعت و خواص سیال، مورد استفاده قرار گیرند. برای سیالات نیوتنی این روابط برای تنشهای $\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ و غیره به گرادیان سرعت و ویسکوزیته سیال مرتبط شده‌اند (B1, B2, D1) و به صورت زیر می‌باشند.

۱- مؤلفه‌های تنش برشی برای سیالات نیوتنی در مختصات کارتزین:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3-7-14)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3-7-15)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3-7-16)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (3-7-17)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (3-7-18)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (3-7-19)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (3-7-20)$$

۲- مؤلفه‌های تنش برشی برای سیالات نیوتنی در مختصات استوانه‌ای:

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (3-7-21)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (3-7-22)$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] \quad (3-7-23)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial (v_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (3-7-24)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad (3-7-25)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad (3-7-26)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3-7-27)$$

۳- مؤلفه‌های تنش برشی برای سیالات نیوتنی در مختصات کروی:

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (3-7-28)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (3-7-29)$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (3-7-30)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial(v_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (3-7-31)$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(v_\phi/\sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (3-7-32)$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = -\mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial(v_\phi/r)}{\partial r} \right] \quad (3-7-33)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \quad (3-7-34)$$

۴- معادله حرکت برای سیالات نیوتنی با دانسیته و ویسکوزیته متغیر: پس از این که معادلات (۳-۷-۱۴) تا (۳-۷-۲۰) برای مؤلفه‌های تنش برشی در معادله (۳-۷-۱۰) برای مؤلفه x ممتوم جانشین شد، معادله عمومی حرکت برای یک سیال نیوتنی با دانسیته و ویسکوزیته متغیر به دست می‌آید.

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (3-7-35)$$

معادلات مشابه‌ای برای مؤلفه‌های y و z ممتوم به دست می‌آید.

۳-۷C معادلات حرکت برای سیالات نیوتنی با دانسیته و ویسکوزیته ثابت

معادلات بالا به ندرت به شکل کاملشان استفاده می‌شوند. وقتی دانسیته ρ و ویسکوزیته μ ثابت هستند، در حالتی که $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ است، معادلات ساده می‌شوند و معادلات حرکت برای سیالات نیوتنی

به دست می آید. این معادلات همچنین معادلات ناویر-استوکس^(۱) نامیده می شوند.

۱- معادله حرکت در مختصات دکارتی: برای سیالات نیوتنی با ρ و μ ثابت مولفه های x و y و z به ترتیب به صورت زیر هستند،

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho g_x \quad (۳-۷-۳۶)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho g_y \quad (۳-۷-۳۷)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho g_z \quad (۳-۷-۳۸)$$

با ترکیب سه معادله فوق داریم،

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \rho + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (۳-۷-۳۹)$$

۲- معادله حرکت در مختصات استوانه‌ای: این معادلات برای سیالات نیوتنی با ρ و μ ثابت بر حسب مؤلفه های r و θ و z به ترتیب به صورت زیر هستند،

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \quad (۳-۷-۴۰)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \quad (۳-۷-۴۱)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (۳-۷-۴۲)$$

۳- معادله حرکت در مختصات کروی: این معادلات برای سیالات نیوتنی با ρ و μ ثابت بر حسب مؤلفه‌های r و θ و ϕ به صورت زیر می‌باشند،

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_r \quad (3-7-43)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_\theta \quad (3-7-44)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) + \rho g_\phi$$

که در سه معادله فوق،

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3-7-45)$$

مزایای قابل توجه و کاربردهای این معادلات در تغییر مختصات دکارتی به استوانه‌ای می‌باشد. به عنوان مثال در معادله (۳-۷-۴۰) عبارت $\rho v_\theta^2 / r$ نیروی گریز از مرکز می‌باشد. این عبارت نیرو را در جهت r (شعاعی)، که از حرکت سیال در جهت θ نتیجه شده، به ما می‌دهد. توجه داشته باشید که این عبارت از تغییر مختصات دکارتی به مختصات استوانه‌ای حاصل شده است. این عبارت نباید به طور فیزیکی به معادله اضافه شود.

نیروی محرکه‌ای که به علت چرخش به سیال وارد می‌شود^(۱) $(\rho v_r v_\theta / r)$ ، نیز خود به خود از تغییر مختصات کروی به استوانه‌ای در معادله (۳-۷-۴۱) به وجود می‌آید. این نیروی مؤثر در جهت θ هنگامی که جریان در هر دو جهت r و θ وجود داشته باشد به وجود می‌آید، مانند جریان در اطراف یک دیسک در حال چرخش.

۳-۸ کاربرد معادلات دیفرانسیل پیوستگی و حرکت

۳-۸۸ مقدمه

همان‌طور که قبلاً اشاره شد هدف و کاربردهای معادلات دیفرانسیل حرکت و پیوستگی، استفاده از این معادلات در مسائل جریان ویسکوز است. در یک مساله خاص، جملاتی که صفر یا نزدیک به صفر هستند حذف می‌شوند و معادله باقی‌مانده برای حل مسأله به کار می‌رود مانند به دست آوردن توزیع سرعت، دانسیته و یا فشار. البته لازم است که شرایط اولیه و مرزی را برای حل مسأله بدانیم. چند مثال روشهای عمومی کاربرد این معادلات را توضیح خواهد داد.

مواردی که بررسی خواهد شد نمونه‌هایی از جریان در سیستمهای با شکلهای هندسی شناخته شده است که از نظر ریاضی به راحتی قابل بررسی هستند، مانند جریان بین صفحات موازی و جریان در استوانه‌ها.

۳-۸۸ معادلات دیفرانسیل پیوستگی و حرکت برای جریان بین صفحات موازی

دو مثال بررسی خواهد شد، یکی در مورد صفحه‌های افقی و دیگری در مورد صفحه‌های عمودی.

مثال ۳-۸-۱ جریان آرام بین صفحات موازی افقی

معادله توزیع سرعت را در حالت پایدار برای جریان آرام با دانسیته و ویسکوزیته ثابت برای سیالی که بین دو صفحه موازی و مسطح جریان دارد به دست آورید. توزیع سرعت خواسته شده در نقطه‌ای دور از ورودی و خروجی کانال است. دو صفحه ثابت بوده و عرض آنها نامحدود است و جریان به دلیل اختلاف فشار در جهت x برقرار می‌شود.

حل: با فرض این که کانال به صورت افقی است، شکل ۳-۸-۱ امتداد جریان را در جهت x و عرض صفحه را در جهت z نشان می‌دهد. سرعتهای v_y و v_z صفر هستند. فاصله دو صفحه $2y_0$ می‌باشد.

معادله پیوستگی (۳-۶-۲۴) با دانسیته ثابت به صورت زیر است،

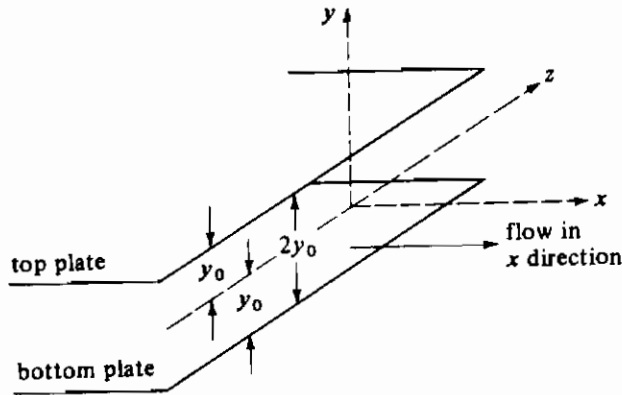
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3-6-24)$$

چون v_y و v_z صفر هستند معادله (۳-۶-۲۴) به صورت زیر در می‌آید،

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (3-8-1)$$

مؤلفه x معادله ناویر-استوکس به صورت زیر است،

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (3-7-36)$$



شکل ۳-۸-۱. جریان بین دو صفحه موازی در مثال ۳-۸-۱

همچنین، در حالت پایدار $\partial v_x / \partial t = 0$ ، $v_y = 0$ ، $v_z = 0$ ، $\partial v_x / \partial x = 0$ ، $\partial^2 v_x / \partial x^2 = 0$ می‌توان مشاهده کرد که $\partial v_x / \partial z = 0$ زیرا v_x با z تغییر نمی‌کند. پس $\partial^2 v_x / \partial z^2 = 0$ با قرار دادن این مقادیر در معادله (۳-۷-۳۶) داریم،

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (3-8-2)$$

در ارتباط با g_x با g شتاب ثقل برحسب m/s^2 است)، در مسائل جریان سیال فقط با جهت عمودی نیروی ثقل سروکار خواهیم داشت. فشار استاتیکی p را با نیروی ثقل ترکیب می‌کنیم و آنها را برای ساده شدن p می‌نامیم، به صورت زیر: (توجه کنید که در این مسئله به دلیل این‌که لوله افقی است $g_x = 0$ ، اما در حالت کلی در لوله‌هایی که افقی نیستند، صفر نیست).

$$p = p + \rho gh \quad (3-8-3)$$

در این جا h فاصله به سمت بالا از یک صفحه مرجع می‌باشد. (h در جهت خلاف جاذبه می‌باشد). پس معادله (۳-۸-۲) می‌شود،

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (3-8-4)$$

می‌توانیم مشاهده کنیم که p تابعی از z نیست. همچنین با فرض این‌که $2y_0$ کوچک باشد، p تابعی از y نیست. (بعضی مراجع از این مسئله چشم‌پوش کرده و برای راحتی p را به عنوان فشار دینامیک به کار می‌برند، که تا حدی صحیح نیست، زیرا گرادیان فشار دینامیک باعث به وجود آمدن جریان می‌شود. در یک سیال ساکن گرادیان فشار کل گرادیان فشار هیدرواستاتیک است و گرادیان فشار دینامیک صفر می‌باشد). همچنین، $\partial p / \partial x$ در این مسئله ثابت است زیرا v_x

تابعی از x نیست. پس معادله (۳-۸-۴) به صورت یک معادله دیفرانسیل معمولی در می آید.

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \text{ثابت} \quad (3-8-5)$$

با یک بار انتگرال گیری از معادله (۳-۸-۵) با استفاده از شرط $dv_x/dy = 0$ در $y = 0$ به دلیل تقارن،

$$\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) y \quad (3-8-6)$$

با انتگرال گیری مجدد و استفاده از شرط $v_x = 0$ در $y = y_0$ داریم،

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - y_0^2) \quad (3-8-7)$$

سرعت ماکزیمم در معادله (۳-۸-۷) هنگامی به دست می آید که $y = 0$ بنابراین داریم،

$$v_{x \max} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (-y_0^2) \quad (3-8-8)$$

با ترکیب معادلات (۳-۸-۷) و (۳-۸-۸) داریم،

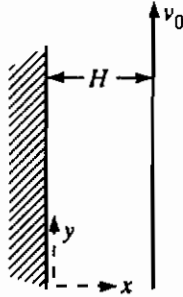
$$v_x = v_{x \max} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \quad (3-8-9)$$

بنابراین، توزیع سرعت به صورت سهمی به دست می آید. این نتیجه از معادله (۲-۹-۹) به روش موازنه پوسته‌ای ممتوم نیز به دست آمد.

نتیجه حاصل از مثال ۳-۸-۱ با نوشتن یک موازنه نیرو روی یک المان دیفرانسیلی و استفاده از تقارن سیستم برای حذف بعضی عبارات، نیز به دست می آید.

مثال ۳-۸-۲ جریان آرام بین صفحه‌های عمودی در حالی که یکی از دو صفحه متحرک است یک سیال نیوتنی بین دو صفحه عمودی موازی، همان‌طور که در شکل ۳-۸-۲ (W6) نشان داده، قرار دارد. صفحه سمت چپ ثابت بوده و صفحه دیگر به طور عمودی با سرعت ثابت v_0 در حال حرکت است. با فرض این که جریان آرام باشد، توزیع سرعت را به دست آورید.
حل: معادله مورد استفاده، معادله ناویر-استوکس در جهت y (۳-۷-۳۷) می باشد.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \end{aligned} \quad (3-7-37)$$



شکل ۳-۸-۲. جریان بین صفحات موازی در مثال ۳-۸-۲

در حالت پایدار، $\partial v_y / \partial t = 0$ است. سرعت‌های v_x و v_z صفر هستند. همچنین، از معادله پیوستگی، $\partial v_y / \partial y = 0$ ، $\partial v_y / \partial z = 0$ و $\rho g_y = -\rho g$ مشتقات جزئی به مشتقات معمولی تبدیل می‌شوند و معادله (۳-۷-۳۷) به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\mu \frac{d^2 v_y}{dx^2} - \frac{dp}{dy} - \rho g = 0 \quad (3-8-10)$$

این معادله شبیه به معادله (۳-۸-۲) در مثال ۳-۸-۱ می‌باشد. گرادیان فشار dp/dy ثابت است. با یکبار انتگرال‌گیری از معادله (۳-۸-۱۰) خواهیم داشت،

$$\frac{dv_y}{dx} - \frac{x}{\mu} \left(\frac{dp}{dy} + \rho g \right) = C_1 \quad (3-8-11)$$

با انتگرال‌گیری مجدد داریم،

$$v_y - \frac{x^2}{2\mu} \left(\frac{dp}{dy} + \rho g \right) = C_1 x + C_2 \quad (3-8-12)$$

شرایط مرزی عبارتند از: $v_y = 0$ در $x = 0$ و $v_y = v_0$ در $x = H$ پس از حل،

$$C_2 = 0 \quad \text{و} \quad C_1 = v_0/H - (H/2\mu)(dp/dy + \rho g)$$

بنابراین، معادله (۳-۸-۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$v_y = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dy} + \rho g \right) (Hx - x^2) + v_0 \frac{x}{H} \quad (3-8-13)$$

۳-۸C معادلات دیفرانسیل پیوستگی و حرکت برای جریان در استوانه‌های ثابت و متحرک

چند مثال برای جریان در استوانه‌های ثابت و متحرک در زیر آورده می‌شود.

مثال ۳-۸-۳ جریان آرام در یک لوله مدور

رابطه توزیع سرعت برای حالت پایدار یک جریان ویسکوز در یک لوله افقی با شعاع a که در آن سیال از ورودی لوله دور است، را به دست آورید. سیال غیر قابل تراکم بوده و μ ثابت است. بر اثر گرادیان فشار ثابت، جریان در یک جهت برقرار می‌شود.

حلی: فرض می‌شود که سیال در جهت z جریان دارد، (همان طور که در شکل ۳-۸-۳ نشان داده شده است). جهت y به صورت عمودی و جهت x به صورت افقی می‌باشد. چون v_x و v_y صفر هستند، معادله پیوستگی به صورت $\partial v_z / \partial z = 0$ می‌شود. در حالت پایدار $\partial v_z / \partial t = 0$ است. با جایگذاری در معادله (۳-۷-۳۸) برای مؤلفه z داریم،

$$\frac{dp}{dz} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) \quad (3-8-14)$$

برای حل معادله (۳-۸-۱۴) می‌توان از مختصات استوانه‌ای در معادله (۳-۶-۲۶) استفاده کرد که:

$$\begin{aligned} z &= z & x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ r &= +\sqrt{x^2 + y^2} & \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (3-6-26)$$

این مقادیر را در معادله (۳-۸-۱۴) قرار می‌دهیم،

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \quad (3-8-15)$$

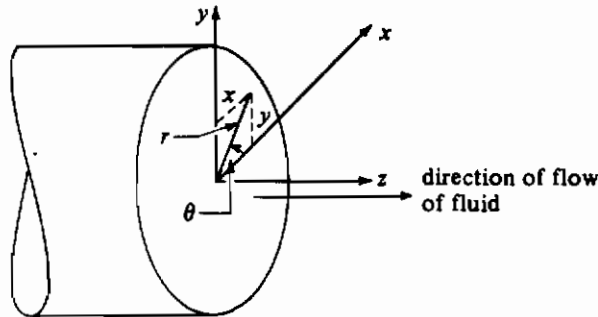
جریان حول محور z متقارن است، به طوری که $\partial^2 v_z / \partial \theta^2 = 0$ در معادله (۳-۸-۱۵) صفر است. مانند قبل dp/dz ثابت است، بنابراین معادله (۳-۸-۱۵) می‌شود،

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = \text{const} = \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (3-8-16)$$

همچنین، معادله (۳-۷-۴۲) در مختصات استوانه‌ای می‌تواند به عنوان مؤلفه z استفاده

شود و جملاتی که صفر هستند حذف شوند.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} \\ + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] &+ \rho g_z \end{aligned} \quad (3-7-42)$$



شکل ۳-۸-۳. جریان افقی در یک لوله در مثال ۳-۸-۳

همانند قبل، $\partial v_z / \partial t = 0$ ، $\partial^2 v_z / \partial \theta^2 = 0$ ، $v_r = 0$ ، $\partial v_z / \partial \theta = 0$ ، $\partial v_z / \partial z = 0$ پس معادله (۳-۷-۴۲) با معادله (۳-۸-۱۶) یکسان است.

شرایط مرزی برای اولین انتگرال‌گیری عبارت است از: $dv_z/dr = 0$ در $r = 0$. برای دومین انتگرال‌گیری، $v_z = 0$ در $r = r_0$ می‌باشد. نتیجه این که،

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (r^2 - r_0^2) \quad (3-8-17)$$

با تبدیل به سرعت حداکثر مانند قبل داریم:

$$v_z = v_{z \max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (3-8-18)$$

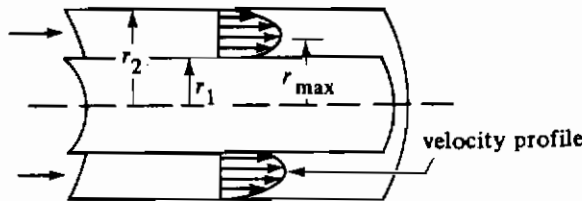
اگر از معادله (۳-۸-۱۷) روی کل سطح مقطع با استفاده از معادله (۲-۹-۱۰) انتگرال‌گیری شود. سرعت میانگین $v_{z \text{ av}}$ به دست می‌آید.

$$v_{z \text{ av}} = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad (3-8-19)$$

برای به دست آوردن افت فشار با انتگرال‌گیری از $z = 0$ برای $p = p_1$ تا $z = L$ برای $p = p_2$ نتیجه می‌گیریم:

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu v_{z \text{ av}} L}{r_0^2} = \frac{32\mu v_{z \text{ av}} L}{D^2} \quad (3-8-20)$$

در این جا $D = 2r_0$ ، این معادله، معادله hagen-poiseuille می‌باشد که قبلاً توسط معادله (۲-۹-۱۱) بیان شد.



شکل ۳-۸-۴. جریان از طریق یک محیط حلقوی استوانه‌ای

مثال ۳-۸-۴ جریان آرام در یک فضای حلقوی استوانه‌ای

معادله‌ای برای حالت پایدار در جریان آرام گذرنده از فضای حلقوی بین دو لوله افقی هم مرکز به دست آورید. این نوع جریان غالباً در لوله‌های هم مرکز در مبدلهای حرارتی اتفاق می‌افتد.

حل: در این حالت معادله (۳-۸-۱۶) کاربرد دارد. اما سرعت در فضای حلقوی در شعاع $r = r_{\max}$ که بین r_1 و r_2 است، (مطابق شکل ۳-۸-۴) به حداکثر خود می‌رسد. برای اولین انتگرال‌گیری شرایط مرزی عبارتند از، $\frac{dv_z}{dr} = 0$ در $r = r_{\max}$ که نتیجه می‌شود:

$$r \frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \right) \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_{\max}^2}{2} \right) \quad (3-8-21)$$

همچنین برای دومین انتگرال‌گیری از معادله (۳-۸-۲۱)، در دیواره داخلی که $r = r_1$ است $v_z = 0$. پس داریم:

$$v_z = \left(\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} \right) \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} - r_{\max}^2 \ln \frac{r}{r_1} \right) \quad (3-8-22)$$

با تکرار دومین انتگرال این بار برای $v_z = 0$ در دیواره دیگر که $r = r_2$ است، داریم:

$$v_z = \left(\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} \right) \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_2^2}{2} - r_{\max}^2 \ln \frac{r}{r_2} \right) \quad (3-8-23)$$

با ترکیب معادلات (۳-۸-۲۲) و (۳-۸-۲۳) و حل آن نسبت به r_{\max} داریم:

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\ln(r_2/r_1)} (r_2^2 - r_1^2)/2} \quad (3-8-24)$$

در شکل ۳-۸-۴ توزیع سرعت پیش‌بینی شده به وسیله معادله (۳-۸-۲۳) رسم شده

است. برای حالتی که $r_1 = 0$ است، r_{\max} در معادله (۳-۸-۲۴) برابر صفر است و معادله

(۳-۸-۲۳) برای یک لوله مدور به معادله (۳-۸-۱۷) تبدیل می‌شود.

مثال ۳-۸-۵ توزیع سرعت در جریان بین استوانه‌های هم محور

جریان آرام مماسی سیال نیوتنی با دانسیته ثابت بین دو استوانه عمودی هم محور برقرار است، که در این جریان استوانه بیرونی با سرعت زاویه‌ای ω مطابق شکل ۳-۸-۵ می‌چرخد (S4). با فرض این‌که اثرات انتهایی ناچیز باشد توزیع سرعت و تنش برشی را در این جریان مشخص کنید.

حل: سیال دارای حرکت دورانی است و سرعت v_r در جهت شعاع و v_z در جهت محور صفر هستند. بنابراین، در حالت پایدار، $\partial\rho/\partial t = 0$ است، هیچ گرادیان فشاری در جهت θ وجود ندارد. معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای که قبلاً به دست آمد به صورت زیر است.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (3-6-27)$$

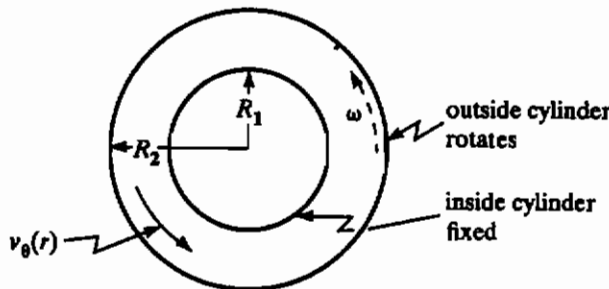
تمام عبارات در این معادله صفر هستند.

معادلات حرکت در مختصات استوانه‌ای، معادلات (۳-۷-۴۰)، (۳-۷-۴۱) و (۳-۷-۴۲) به ترتیب به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (r\text{-component}) \quad (3-8-25)$$

$$0 = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr} \right) \quad (\theta\text{-component}) \quad (3-8-26)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (z\text{-component}) \quad (3-8-27)$$



شکل ۳-۸-۵. جریان آرام در ناحیه بین دو استوانه هم محور در مثال ۳-۸-۵

با انتگرال‌گیری از معادله (۳-۸-۲۶) داریم،

$$v_{\theta} = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (3-8-28)$$

برای به دست آوردن ثابت‌های C_1 و C_2 از این شرایط مرزی استفاده می‌شود، $v_{\theta} = 0$ در $r = R_1$ و $v_{\theta} = \omega R_2$ در $r = R_2$ معادله نهایی به صورت زیر است:

$$v_{\theta} = \frac{\omega}{(R_1^2 - R_2^2)/(R_1 R_2^2)} \left[\frac{R_1}{r} - \frac{r}{R_1} \right] \quad (3-8-29)$$

با استفاده از مؤلفه تنش برشی در مختصات استوانه‌ای (برای سیالات نیوتنی) داریم:

$$\tau_{r,\theta} = -\mu \left[r \frac{\partial(v_{\theta}/r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (3-7-31)$$

آخرین عبارت در معادله (۳-۷-۳۱) صفر است، با جایگذاری معادله (۳-۸-۲۹) در معادله (۳-۷-۳۱) و دیفرانسیل‌گیری داریم:

$$\tau_{r,\theta} = -2\mu\omega R_2^2 \left(\frac{1}{r^2} \right) \left[\frac{R_1^2/R_2^2}{1 - R_1^2/R_2^2} \right] \quad (3-8-30)$$

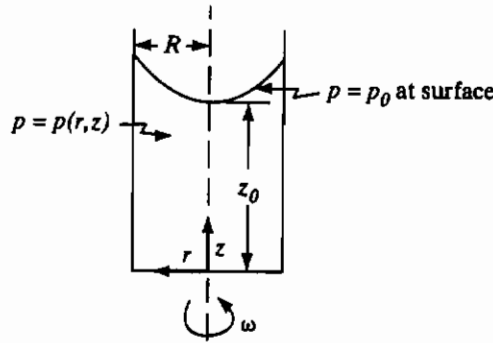
گشتاور T که برای چرخش سیلندر بیرونی لازم است برابر با حاصلضرب نیرو در بازوی محرک می‌باشد.

$$\begin{aligned} T &= (2\pi R_2 H)(-\tau_{r,\theta})|_{r=R_2}(R_2) \\ &= 4\pi\mu H\omega R_2^2 \left[\frac{R_1^2/R_2^2}{1 - R_1^2/R_2^2} \right] \end{aligned} \quad (3-8-31)$$

در این جا H طول استوانه است. این نوع وسایل برای اندازه‌گیری ویسکوزیته سیال، از طریق سرعت‌های زاویه‌ای و گشتاور، به کار می‌روند و همچنین به عنوان مدلی برای بعضی از یاتاقانهای اصطکاکی نیز مورد استفاده می‌باشند.

مثال ۳-۸-۶ مایع در حال چرخش در ظرف استوانه‌ای

یک سیال نیوتنی با دانسیته ثابت در یک استوانه عمودی با شعاع R ، مطابق شکل ۳-۸-۶ در حال چرخش حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ω می‌باشد (B2). در حالت پایدار شکل سطح آزاد سیال را به دست آورید.



شکل ۳-۸-۶. مایع در حال چرخش در یک ظرف با سطح آزاد در مثال ۳-۸-۶

حل: این سیستم را می‌توان در مختصات استوانه‌ای تشریح کرد، همانند مثال ۳-۸-۵ در حالت پایدار $v_r = v_z = 0$ و $g_r = g_\theta = 0$. معادلات نهایی در مختصات استوانه‌ای که در زیر داده شده‌اند همان معادلات (۳-۸-۲۵) تا (۳-۸-۲۷) در مثال ۳-۸-۵ می‌باشند. فقط در معادله (۳-۸-۲۷)، $g_z = -g$ است.

$$\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3-8-32)$$

$$0 = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} \right) \quad (3-8-33)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3-8-34)$$

انتگرال‌گیری از معادله (۳-۸-۳۳) همان معادله مثال ۳-۸-۵ را می‌دهد،

$$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (3-8-35)$$

ثابت C_2 باید صفر باشد، زیرا v_θ در $r = 0$ نمی‌تواند بینهایت باشد. در $r = R$ ، $v_\theta = R\omega$ می‌باشد. از این رو، $C_1 = \omega$ و داریم:

$$v_\theta = \omega r \quad (3-8-36)$$

با ترکیب معادلات (۳-۸-۳۲) و (۳-۸-۳۵) داریم،

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad (3-8-37)$$

بنابراین، مشاهده می‌کنیم که معادلات (۳-۸-۳۴) و (۳-۸-۳۶) نشان می‌دهند که فشار به دلیل نیروی گریز از مرکز به r و به دلیل نیروی ثقل به z بستگی دارد.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3-8-34)$$

چون p تابعی از موقعیت است، می‌توانیم دیفرانسیل کامل فشار را به صورت زیر بنویسیم،

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (3-8-37)$$

از ترکیب معادلات (۳-۸-۳۴) و (۳-۸-۳۶) با معادله (۳-۸-۳۷) و انتگرال‌گیری از آن داریم:

$$p = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g z + C_3 \quad (3-8-38)$$

ثابت انتگرال با توجه به این‌که در $r = 0$ و $z = z_0$ ، $p = p_0$ است، می‌تواند تعیین شود. معادله به صورت زیر در می‌آید،

$$p - p_0 = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} + \rho g (z_0 - z) \quad (3-8-39)$$

سطح آزاد عبارت است از سطحی که فشار همه نقاط آن برابر با p_0 است ($p = p_0$). بنابراین،

$$z - z_0 = \left(\frac{\omega^2}{2g} \right) r^2 \quad (3-8-40)$$

این نتیجه بیانگر آن است که سطح آزاد، سهمی شکل است.

۳-۹ روشهای دیگری برای حل معادلات دیفرانسیل حرکت

۳-۹A مقدمه

در بخش ۳-۸ مثالهایی را بررسی کردیم که در آنها معادلات دیفرانسیلی حرکت ناویر - استوکس می‌توانستند به طور تحلیلی حل شوند. این حالتها تنها در جایی که فقط یک مولفه پس از ساده‌سازی باقی می‌ماند استفاده می‌شوند. حل این معادلات برای جریانهای دو بُعدی یا سه بُعدی کاملاً پیچیده است.

در این بخش تقریبهایی در نظر خواهیم گرفت که معادلات دیفرانسیل را ساده کند تا با روشهای تحلیلی قابل حل باشند. جمله‌هایی حذف خواهند شد که در مقابل جملات باقی مانده کوچک باشند. سه حالت در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرند که عبارتند از: جریان غیر ویسکوز، جریان پتانسیل و جریان خزشی. حالت چهارم جریان لایه مرزی است که آن را در بخش ۳-۱۰ بررسی می‌کنیم. حل این معادلات ممکن است با استفاده از تابع جریان $\psi(x,y)$ یا پتانسیل سرعت $\phi(x,y)$ به جای

مؤلفه‌های سرعت v_x ، v_y و v_z ساده شود.

۳-۹B تابع جریان

تابع جریان $\psi(x, y)$ پارامتر مناسبی است که توسط آن می‌توانیم جریان دو بعدی، پایدار و تراکم‌ناپذیر را نمایش دهیم. تابع جریان ψ بر حسب m^2/s ، به صورت زیر با مولفه‌های سرعت v_x و v_y رابطه دارد،

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3-9-1)$$

این تعاریف v_x و v_y می‌توانند در مولفه‌های x و y معادله دیفرانسیل حرکت، (معادلات (۳۶-۷-۳) و (۳۷-۷-۳)) با $v_z = 0$ برای به دست آوردن معادله دیفرانسیلی بر حسب ψ که معادل با معادله ناویر-استوکس است، بکار روند. جزئیات بیشتر در مراجع دیگر داده شده است (B2).

تابع جریان بسیار مفید است زیرا اهمیت فیزیکی آن در این است که خطوط جریان پایدار که توسط $\psi = \text{constant}$ تعریف می‌شوند همان خطوط جریان حقیقی هستند که توسط سیال پیموده می‌شوند. تابع جریان برای همه جریانهای تراکم‌ناپذیر، پایدار و دو بعدی وجود دارد، خواه ویسکوز باشد و خواه غیر ویسکوز، خواه چرخشی باشد و خواه غیرچرخشی.

مثال ۳-۹-۱ تابع جریان و خطوط جریان

رابطه تابع جریان، به صورت $\psi = xy$ داده شده است. معادلاتی برای مولفه‌های سرعت بیابید. همچنین خطوط جریان را برای $\psi = 4$ و $\psi = 1$ رسم کنید.

حل: با استفاده از معادله (۳-۹-۱) داریم،

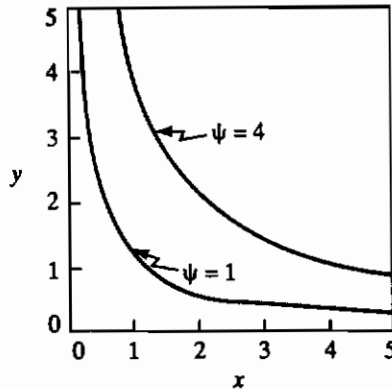
$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} = x$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial(xy)}{\partial x} = -y$$

برای تعیین خط جریان در $xy = 1 = \text{ثابت} = \psi$ فرض می‌کنیم که $y = 0.5$ و آن را نسبت به x حل می‌کنیم،

$$\psi = 1 = xy = x \times 0.5$$

بنابراین، $x = 2$. با تکرار عمل برای $y = 1$ ، $x = 1$ برای $y = 2$ ، $x = 0.5$ برای $y = 5$ ، $x = 0.2$ و غیره. با انجام همان کار برای $\psi = 4$ = ثابت، خطوط جریان برای $\psi = 1$ و $\psi = 4$ در شکل ۳-۹-۱ رسم شده‌اند. یک مدل ممکن برای این نوع جریان، جریان در یک گوشه است.



شکل ۳-۹-۱. منحنی خطوط جریان برای $\psi = xy$ در مثال ۳-۹-۱

۳-۹C معادلات دیفرانسیل حرکت برای سیالات ایده‌آل (جریان غیر ویسکوز)

معادلات ویژه‌ای برای سیالات ایده‌آل یا غیرویسکوز با دانسیته ثابت و ویسکوزیته صفر می‌توان به‌دست آورد. این معادلات، معادلات اولر^(۱) نامیده می‌شوند. معادلات (۳-۷-۳۶) تا (۳-۷-۳۹) به‌عنوان مؤلفه‌های x ، y و z ممتوم به‌صورت زیر می‌باشند،

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (3-9-2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (3-9-3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (3-9-4)$$

در اعداد رینولدز خیلی بالا، نیروهای ویسکوز در مقایسه با نیروهای اینرسی، خیلی کوچک هستند و ویسکوزیته می‌تواند صفر فرض شود. این معادلات در محاسبه توزیع فشار در لبه بیرونی لایه نازک مرزی در جریان عبوری از روی اجسام غوطه‌ور می‌توانند مفید باشند. دورتر از سطح در خارج از لایه مرزی، فرض سیال ایده‌آل اغلب معتبر است.

۳-۹D جریان پتانسیل و پتانسیل سرعت

پتانسیل سرعت یا تابع پتانسیل $\phi(x,y)$ برحسب m^2/s در مسائل جریان غیر ویسکوز مفید است و

به صورت زیر تعریف می‌گردد،

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3-9-5)$$

این پتانسیل تنها برای جریان با سرعت زاویه‌ای صفر یا غیرچرخشی وجود دارد. این نوع جریان، برای یک سیال ایده‌آل یا سیال غیر ویسکوز ($\mu = 0$ و ثابت ρ) جریان پتانسیل^(۱) نامیده می‌شود. به علاوه پتانسیل سرعت ϕ برای جریانهای سه بعدی که در آنها تابع جریان نداریم، موجود است.

حرکت گردابی یک سیال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z \quad (3-9-6)$$

یا،

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\omega_z \quad (3-9-7)$$

که در این روابط $2\omega_z$ حرکت گردابی^(۲) است و ω_z سرعت زاویه‌ای حول محور z برحسب s^{-1} است. اگر $2\omega_z = 0$ ، جریان غیر چرخشی است و تابع پتانسیل وجود دارد.

با استفاده از معادله (۳-۶-۲۴)، معادله بقای جرم برای جریان در جهت‌های x ، y با دانسیته ثابت، به صورت زیر است:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3-9-8)$$

با دیفرانسیل‌گیری از v_x در معادله (۳-۹-۵) نسبت به x و از v_y نسبت به y و جایگزینی در معادله (۳-۹-۸) داریم:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3-9-9)$$

این معادله، معادله لاپلاس در مختصات دکارتی است. اگر شرایط مرزی مناسب وجود داشته باشد، معادله (۳-۹-۹) می‌تواند برای به دست آوردن $\phi(x,y)$ حل شود. سپس این سرعت می‌تواند در هر نقطه با استفاده از معادله (۳-۹-۵) به دست آید. روشهای حل این معادله، شامل استفاده از روشهای عددی، نگاشت و توابعی از متغیرهای پیچیده می‌باشد که در مراجع دیگر داده شده است (B2, S3). معادلات اولر می‌توانند برای به دست آوردن توزیع فشار، به کار روند.

زمانی که جریان غیرویسکوز و غیرچرخشی باشد، معادلهٔ مشابهی از نوع معادله لاپلاس برای تابع جریان با استفاده از معادلهٔ (۳-۹-۷) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (3-9-10)$$

خطوط ψ ثابت، خطوط هم پتانسیل نامیده می‌شوند و در جریان پتانسیل در همه جا عمود بر خطوط ψ ثابت هستند. این امر می‌تواند به صورت زیر اثبات شود. یک خط ψ ثابت می‌تواند طوری در نظر گرفته شود که تغییر در ψ برابر با صفر باشد.

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad (3-9-11)$$

سپس با جایگذاری معادلهٔ (۳-۹-۱۱) در معادلهٔ بالا داریم،

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi = \text{constant}} = \frac{v_y}{v_x} \quad (3-9-12)$$

همچنین برای خطوط ϕ ثابت،

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0 \quad (3-9-13)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi = \text{constant}} = -\frac{v_y}{v_x} \quad (3-9-14)$$

بنابراین،

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi = \text{constant}} = -\frac{1}{(dy/dx)_{\psi = \text{constant}}} \quad (3-9-15)$$

مثالی از کاربرد تابع جریان، به دست آوردن الگوی جریان برای یک جریان غیرچرخشی و غیرویسکوز عبوری از روی یک استوانهٔ بینهایت است. سیال در حالی که به استوانه نزدیک می‌شود، دارای سرعت پایدار و یکنواخت v_∞ در جهت x است. معادلهٔ لاپلاس، (۳-۹-۱۰)، می‌تواند به مختصات قطبی تبدیل شود که به صورت زیر خواهد بود،

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3-9-16)$$

که مولفه‌های سرعت به صورت زیر داده شده است،

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3-9-17)$$

با استفاده از چهار شرط مرزی، تابع جریان ψ به روش جداسازی متغیرها به دست می‌آید. با تبدیل به مختصات دکارتی،

$$\psi = v_{\infty} y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (3-9-18)$$

که R شعاع استوانه است. خطوط جریان و خطوط با پتانسیل سرعت ثابت به عنوان یک جریان خالص در شکل ۳-۹-۲ رسم شده است.

مثال ۳-۹-۲ تابع جریان برای یک میدان جریان

مؤلفه‌های سرعت برای یک میدان جریان به صورت زیر است،

$$v_x = a(x^2 - y^2) \quad v_y = -2axy$$

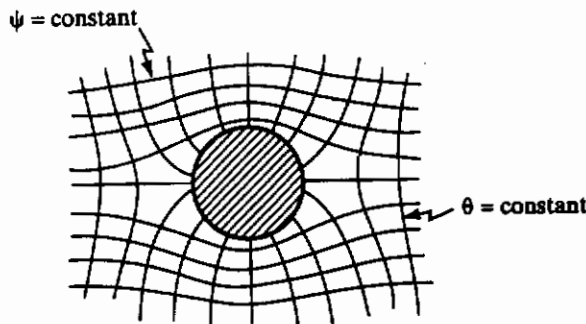
ثابت کنید معادله بقای جرم برقرار است و ψ را تعیین کنید.

حل: نخست $\partial v_x / \partial x = 2ax$ و $\partial v_y / \partial y = -2ax$ با جایگذاری این مقادیر در معادله (۳-۶-۲۴)، بقای جرم برای جریان دو بُعدی به دست می‌آید،

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \text{یا} \quad 2ax - 2ax = 0$$

سپس با استفاده از معادله (۳-۹-۱)،

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax^2 - ay^2 \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2axy \quad (3-9-19)$$



شکل ۳-۹-۲. خطوط جریان (ثابت ψ) و خطوط ثابت پتانسیل سرعت (ثابت ψ) برای جریان پایدار و غیر چرخشی یک سیال بدون ویسکوزیته و تراکم‌ناپذیر حول یک استوانه نامحدود

با انتگرال‌گیری از معادله (۳-۹-۱۹) نسبت به v_x ،

$$\psi = ax^2y - \frac{ay^3}{3} + f(x) \quad (3-9-20)$$

با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۳-۹-۲۰) نسبت به x و معادل قرار دادن آن با معادله (۳-۹-۱۹)،

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2axy - 0 + f'(x) = +2axy \quad (3-9-21)$$

بنابراین، $f'(x) = 0$ و $f(x) = C$ یک ثابت است. بنابراین، معادله (۳-۹-۲۰) به صورت زیر درمی‌آید،

$$\psi = ax^2y - \frac{ay^3}{3} + C \quad (3-9-22)$$

برای رسم تابع جریان، ثابت C می‌تواند قبل از رسم، مساوی با صفر قرار داده شود.

در جریان پتانسیل، تابع جریان و تابع پتانسیل برای نمایش جریان در توده اصلی سیال، به کار می‌روند. این روش‌های حل سیال ایده‌آل، شرط $v_x = v_y = 0$ را روی سطح دیواره ارضا نمی‌کنند. نزدیک دیواره، نیروی دراگ و ویسکوز^(۱) وجود دارد و تئوری لایه مرزی را به کار می‌بندیم که در این صورت به نتایج تقریبی برای توزیع سرعت در این لایه نازک مرزی، با در نظر گرفتن ویسکوزیته، میرسیم. این موضوع در بخش ۱۰-۳ مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس ترکیب این روش با روش حل جریان ایده‌آل، جریان در خارج از لایه مرزی را تشریح خواهد کرد.

۳-۹B معادلات دیفرانسیل حرکت برای جریان خزشی

برای تشریح جریان در اعداد رینولدز کوچک (در حدود یک) اصطلاح جریان خزشی^(۲) برای سرعت‌های بسیار پایین استفاده می‌شود. این نوع جریان برای سقوط یا ته‌نشین شدن ذرات کوچک در یک سیال به کار می‌رود. قانون استوکس با استفاده از این نوع جریان در مسائل ته‌نشینی به دست آمده است.

به عنوان مثال در جریان یک سیال در اطراف یک کره، به شکل پیچیده‌ای دارای سرعت و جهت متغیر است. اگر در این حالت اثرات اینرسی مهم باشد، لازم است همه جملات را در سه معادله ناویر-استوکس حفظ کنیم. آزمایشات نشان داده است که در اعداد رینولدز کوچک حدود یک، اثرات اینرسی کم است و می‌تواند حذف شود. بنابراین، معادلات حرکت (۳-۷-۳۶) تا (۳-۷-۳۹) برای

جریان خزشی یک سیال تراکم‌ناپذیر، به صورت زیر می‌باشند،

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (3-9-23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (3-9-24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (3-9-25)$$

برای جریان عبوری از روی یک کره، تابع جریان (ψ) می‌تواند در معادلات ناویر - استوکس در مختصات کروی برای به دست آوردن معادله‌ای برای تابع جریان و توزیع سرعت و توزیع فشار روی کره به کار رود. سپس با انتگرالگیری روی کل کره، نیروی دراگ شکلی ایجاد شده توسط توزیع فشار و نیروی اصطکاک پوسته‌ای یا نیروی دراگ ویسکوز ایجاد شده توسط تنش برشی در سطح، می‌تواند با هم جمع شوند تا نیروی دراگ کل به صورت زیر به دست آید،

$$F_D = 3\pi\mu D_p v \quad (\text{SI}) \quad (3-9-26)$$

$$F_D = \frac{3\pi\mu D_p v}{g_c} \quad (\text{English})$$

در این جا F_D نیروی دراگ کل برحسب نیوتن، D_p قطر ذره برحسب متر، v سرعت جریان آزاد سیال در حال نزدیک شدن به کره بر حسب m/s و μ ویسکوزیته برحسب $kg/m.s$ است. این رابطه، معادله استوکس برای نیروی دراگ روی یک کره است.

معادله (3-9-26) اغلب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_D = C_D \frac{\rho v^2}{2} A \quad (\text{SI}) \quad (3-9-27)$$

$$F_D = C_D \frac{\rho v^2}{2g_c} A \quad (\text{English})$$

در این جا C_D ضریب دراگ است و برای قانون استوکس مساوی با $24/Re$ می‌باشد. A سطح تصویر شده کره به صورت $\pi D_p^2/4$ است. این موضوع با جزئیات بیشتر برای جریان عبوری از روی کره‌ها در بخش ۱-۳ مورد بحث قرار گرفته است.

۳-۱۰ جریان لایه مرزی و اغتشاش

۳-۱۰A جریان لایه مرزی

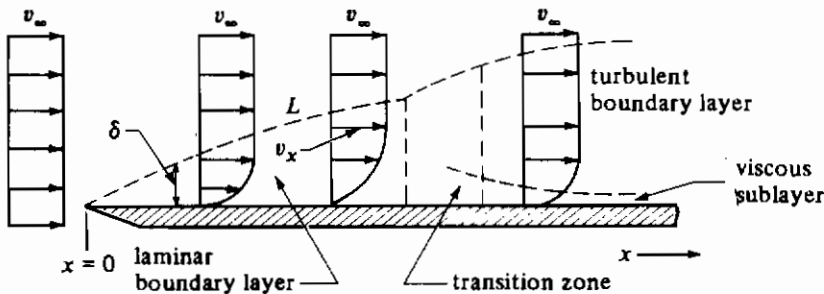
در بخشهای ۳-۸ و ۳-۹ معادلات ناویر - استوکس برای پیدا کردن روابطی که جریان بین صفحات

صاف و داخل لوله‌های مدور را تشریح کند، به کار گرفته شدند. در این بخش، جریان سیالات در اطراف اجسام، با جزئیات بیشتر و با نگاه دقیقتر به ناحیه نزدیک سطح جامد که لایه مرزی نامیده می‌شود، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در ناحیه لایه مرزی نزدیک سطح جامد، حرکت سیال به طور وسیعی توسط سطح جامد تحت تأثیر قرار می‌گیرد. در توده سیال دور از لایه مرزی، جریان براساس تئوری سیال ایده‌آل با ویسکوزیته صفر به اندازه کافی مورد بحث قرار گرفت. اما در لایه نازک مرزی ویسکوزیته عامل مهمی است. از آنجا که ناحیه مورد نظر نازک است، روشهای ساده شده‌ای برای ناحیه لایه مرزی می‌تواند به دست آید. پراوتل در ابتدا پیشنهاد کرد که مسأله به دو قسمت تقسیم گردد که این نظریه به طور وسیعی در دینامیک سیالات به کار می‌رود.

به منظور کمک به توضیح لایه‌های مرزی، مثالی از شکل‌گیری لایه مرزی در جریان یک سیال در حال عبور از روی یک صفحه صاف در شکل ۱-۱۰-۳ ارائه شده است. سرعت سیال در بالا دست لبه صفحه در $x = 0$ یکنواخت و مقدار آن v_∞ است. سرعت سیال در سطح تماس صفر می‌باشد و همچنان که از صفحه دور می‌شویم، سرعت v_x در جهت x افزایش می‌یابد. سرعت v_x به تدریج به سرعت توده جریان v_∞ میل می‌کند.

خط چین L طوری رسم شده است که در آنجا سرعت ۹۹٪ سرعت توده‌ای v_∞ است. لایه یا ناحیه بین صفحه و خط چین، لایه مرزی نامیده می‌شود. زمانی که جریان آرام باشد، همچنان که در جهت x حرکت می‌کنیم ضخامت لایه مرزی δ با \sqrt{x} زیاد می‌شود. عدد رینولدز به صورت $Re_x = \rho v_\infty x / \mu$ است که x فاصله پایین دست جریان از لبه صفحه است. زمانی که عدد رینولدز کمتر از 2×10^5 باشد، جریان آرام است که در شکل ۱-۱۰-۳ نشان داده شده است.



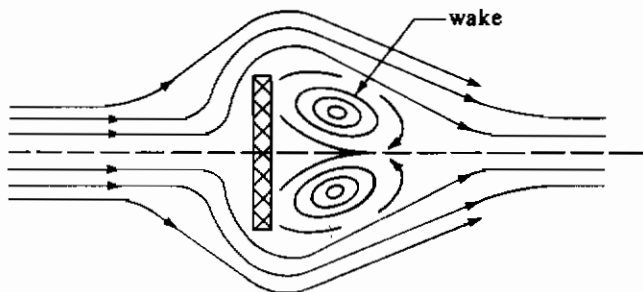
شکل ۱-۱۰-۳. لایه مرزی برای جریان گذرنده از روی یک صفحه صاف

در روی یک صفحه صاف، گذر از جریان آرام به جریان مغشوش در محدوده عدد رینولدز بین $10^5 \times 2$ تا $10^6 \times 3$ (مطابق شکل ۱-۱۰-۳) اتفاق می‌افتد. زمانی که لایه مرزی مغشوش است یک زیر لایه نازک ویسکوز، نزدیک صفحه وجود دارد. نیروی دراگ ایجاد شده توسط برش ویسکوز در لایه‌های مرزی، اصطکاک پوسته‌ای^(۱) نامیده می‌شود که تنها نیروی دراگ موجود در جریان سیال روی یک صفحه صاف است.

هنگامی که سیال از اطراف یک جسم زاویه دار مانند کره یا استوانه عبور می‌کند، نوعی از نیروی دراگ به وجود می‌آید که به آن دراگ شکلی^(۲) می‌گوییم. این نیرو عمدتاً بر اثر اختلاف فشار به وجود می‌آید. این نیروی دراگ در جریان عبوری از چنین اجسامی خود نمایی می‌کند مگر در اعداد رینولدز کم و غالباً گردابه نیز به وجود می‌آید. اصطکاک پوسته‌ای و نیروی دراگ شکلی هر دو در جریان عبوری از یک شکل زاویه دار ظاهر می‌شوند و نیروی دراگ کل، مجموع اصطکاک پوسته‌ای و نیروی دراگ شکلی است. (بخش ۱۸-۳ را نیز ببینید).

۳-۱۰B جدایی در لایه مرزی و تشکیل گردابه‌ها

رشد لایه مرزی در لبه یک صفحه مورد بحث قرار گرفت و با شکل ۲-۱۰-۳ نشان داده شد. اما، پدیده‌های نسبتاً مهمی در لبه انتهایی این صفحه و اجسام دیگر اتفاق می‌افتد. در بالا و پایین لبه انتهایی صفحه، لایه‌های مرزی وجود دارند. هنگام ترک صفحه، لایه‌های مرزی به تدریج در هم مخلوط شده و ناپدید می‌شوند.



شکل ۲-۱۰-۳. جریان عمود بر یک صفحه صاف و جدایی لایه مرزی

اگر جهت جریان عمود بر صفحه باشد (شکل ۲-۱۰-۳)، همانند قبل یک لایه مرزی در سیالی که در وجه بالا دستی صفحه جریان دارد ایجاد می‌شود. اما در لبه صفحه، ممتوم سیال از برگشت سیال به لبه صفحه جلوگیری کرده و سیال از صفحه جدا می‌شود. درست در پشت صفحه ناحیه‌ای ایجاد می‌گردد که در آن شتاب سیال گرفته می‌شود و گردابه‌های بزرگی به نام wake در این ناحیه شکل می‌گیرند. این گردابه‌ها مقادیر زیادی از انرژی مکانیکی را تلف می‌کنند. این جدایی لایه‌های مرزی زمانی اتفاق می‌افتد که تغییر سرعت سیال یا تغییر جهت سیال عبوری از اطراف یک جسم، زیاد باشد.

از آن‌جا که شکل‌گیری گردابه، باعث اتلاف انرژی مکانیکی می‌شود اغلب لازم است جدایی لایه مرزی به وسیله شکل دادن در جهت خطوط جریان^(۱) یا روشهای دیگر به حداقل رسانیده شود و یا از جدا شدن آن از سطح جلوگیری شود. این موضوع در بخش ۱۸-۳ برای جریان عبوری از اجسام غوطه‌ور، مورد بحث قرار گرفته است.

۳-۱۰C جریان آرام و تنوری لایه مرزی

۱- معادلات لایه مرزی: زمانی که در یک لایه مرزی جریان آرام است، برخی عبارات در معادلات ناویر-استوکس ناچیز می‌باشند و می‌توان از آنها چشم پوشید. ضخامت لایه مرزی (δ) به دلخواه به عنوان فاصله از سطح جامد در نظر گرفته می‌شود، جایی که سرعت به ۹۹٪ سرعت جریان آزاد می‌رسد. مفهوم لایه مرزی تقریباً نازک، باعث ساده‌سازیهای مهمی در معادلات ناویر-استوکس می‌شود.

برای جریان آرام دو بعدی یک سیال با دانسیته ثابت در جهت‌های x و y ، معادلات (۳-۷-۳۶) و (۳-۷-۳۷) برای جریان پایدار زمانی که از نیروهای بدنه‌ای g_x و g_y صرف‌نظر کنیم همان طور که در شکل ۱-۱۰-۳ نشان داده شده است، به صورت زیر می‌باشند،

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (3-10-1)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (3-10-2)$$

معادله پیوستگی برای جریان دو بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3-10-3)$$

در معادله (۳-۱۰-۱) عبارت $\mu/\rho(\partial^2 v_x/\partial x^2)$ در مقایسه با عبارتهای دیگر ناچیز است. هم چنین می توان نشان داد که همه جملات شامل v_y هستند و مشتقات آنها کوچک است. بنابراین، دو معادله نهائی لایه مرزی که باید حل شوند، معادلات (۳-۱۰-۳) و (۳-۱۰-۴) هستند.

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (3-10-4)$$

۲- حل لایه مرزی آرام روی یک صفحه صاف: یک مورد مهم که در آن، روش حل تحلیلی برای حل معادلات لایه مرزی وجود دارد، لایه مرزی آرام روی یک صفحه صاف در جریان پایدار است (شکل ۳-۱۰-۱). می توان ساده سازی های بیشتری در معادله (۳-۱۰-۴) انجام داد، بدین ترتیب که چون v_{∞} ثابت است، بنابراین، $dp/dx = 0$.

معادلات نهائی لایه مرزی به صورت زیر به معادله حرکت در جهت x و معادله پیوستگی تبدیل

می شوند:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (3-10-5)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3-10-3)$$

شرایط مرزی به صورت، $v_x = v_y = 0$ در $y = 0$ (فاصله از صفحه) و $v_x = v_{\infty}$ در $y = \infty$ است.

ابتدا حل این مسأله برای جریان آرام روی یک صفحه صاف با v_x و v_y به عنوان تابعی از x و y توسط بلازیوس به دست آمد و بعدها زحمت Howarth آن را به نتیجه رساند (B1, B2, S3). جزئیات ریاضی این روش حل، کاملاً پیچیده و خسته کننده است و در این جا ارائه نمی شود. مراحل کلی حل مختصراً بررسی خواهد شد. بلازیوس دو معادله را به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل کرد. معادله جواب دقیقی نداشت اما یک جواب به صورت سری به دست آمد.

نتایج تلاش بلازیوس به این صورت است: ضخامت لایه مرزی (δ) که در آنجا $v_x = 0.99 v_{\infty}$ است، تقریباً به صورت زیر به دست آمد،

$$\delta = \frac{5.0x}{\sqrt{N_{Re,x}}} = 5.0 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho v_{\infty}}} \quad (3-10-6)$$

که در این جا $N_{Re,x} = x v_{\infty} \rho / \mu$. بنابراین، ضخامت δ با \sqrt{x} تغییر می کند.

نیروی دراگ در جریان عبوری از روی یک صفحه صاف تنها شامل اصطکاک پوسته ای است و با استفاده از تنش برشی در سطح، در $y = 0$ به ازای هر x به صورت زیر محاسبه می گردد،

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3-10-7)$$

از رابطه τ_x بر حسب x و y در پاسخ سری به دست آمده از حل معادلات، معادله (۳-۱۰-۷) می شود:

$$\tau_0 = 0.332\mu v_\infty \sqrt{\frac{\rho v_\infty}{\mu x}} \quad (3-10-8)$$

نیروی دراگ کل روی یک صفحه به طول L و عرض b به صورت زیر به دست می آید،

$$F_D = b \int_0^L \tau_0 dx \quad (3-10-9)$$

با جایگذاری معادله (۳-۱۰-۸) در معادله (۳-۱۰-۹) و انتگرال گیری از آن داریم،

$$F_D = 0.664b\sqrt{\mu\rho v_\infty^3 L} \quad (3-10-10)$$

ضریب دراگ (C_D) مرتبط با نیروی دراگ کل روی یک طرف صفحه به مساحت $A = bL$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$F_D = C_D \frac{\rho v_\infty^2}{2} A \quad (3-10-11)$$

با جایگذاری مقدار برای A و معادله (۳-۱۰-۱۰) در معادله (۳-۱۰-۱۱) خواهیم داشت،

$$C_D = 1.328 \sqrt{\frac{\mu}{Lv_\infty\rho}} = \frac{1.328}{N_{Re,L}^{1/2}} \quad (3-10-12)$$

در این جا $N_{Re,L} = Lv_\infty\rho/\mu$ شکلی از معادله (۳-۱۰-۱۱) در بخش ۳-۱۴ برای حرکت ذره در سیال استفاده شده است. تعریف C_D در معادله (۳-۱۰-۱۲) شبیه به ضریب اصطکاک فنینگ (f) برای لوله هاست.

معادله به دست آمده برای C_D فقط برای لایه مرزی آرام در اعداد رینولدز کمتر از حدود 5×10^5 به کار می رود. همچنین، نتایج تنها برای موقعیتهایی که x آن بقدر کافی دور از لبه صفحه باشد به طوریکه x یا L خیلی بزرگتر از δ باشد، معتبر است. نتایج آزمایشات روی ضریب دراگ یک صفحه صاف، اعتبار معادله (۳-۱۰-۱۲) را تأیید می کند. جریان لایه مرزی عبوری از روی بسیاری از شکلهای هندسی دیگر به طور موفقیت آمیزی با روشهای مشابه، تجزیه و تحلیل می گردد.

۳-۱۰D ماهیت و شدت اغتشاش

۱- ماهیت اغتشاش: از آن جا که جریان مغشوش در بسیاری از عرصه های مهندسی مهم است، ماهیت اغتشاش به طور وسیعی مورد بررسی قرار گرفته است. اندازه گیری افت و خیزهای سرعت گردابه ها در جریان مغشوش به توضیح اغتشاش کمک کرده است.

برای مسائل جریان مغشوش، هیچ راه حل دقیقی آن طور که در جریان آرام هست، وجود ندارد، چون معادلات تقریبی به کار برده شده بستگی زیادی به فرضیات دارند. اما، روابط مفیدی با استفاده از ترکیب اطلاعات آزمایشی و تئوری به دست آمده است. بعضی از این روابط مورد بحث قرار خواهند گرفت. اغتشاش می‌تواند به وسیله تماس دو لایه سیال متحرک با سرعت‌های متفاوت یا توسط یک جریان روان در تماس با یک مرز جامد مثل دیوار یا کره تولید شود. وقتی جت سیال خروجی از یک منفذ وارد توده سیال می‌شود، می‌تواند اغتشاش روی دهد. در جریان مغشوش، گردابه‌های بزرگ در یک زمان و مکان مشخص دائماً تشکیل می‌شوند که به گردابه‌های کوچکتر شکسته شده و سرانجام ناپدید می‌گردند. گردابه‌ها به کوچکی 0.1 یا 1 mm و یا در همین حدود و به بزرگی کوچکترین بعد جریان مغشوش هستند. جریان داخل یک گردابه به دلیل بزرگی اندازه‌اش، آرام است.

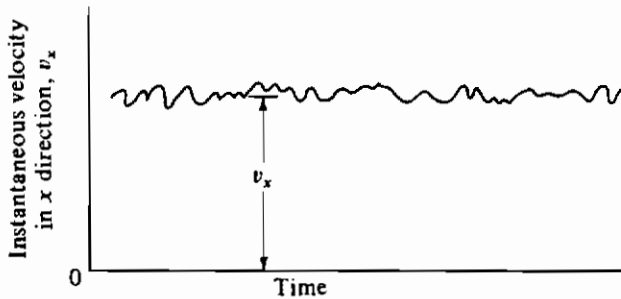
در جریان مغشوش سرعت در تمام جهات دارای افت و خیز است. در شکل ۳-۱۰-۳ نمونه‌ای از منحنی تغییرات لحظه‌ای سرعت v_x در جهت x در یک نقطه مشخص در جریان مغشوش نشان داده شده است. سرعت \bar{v}_x انحراف از سرعت میانگین \bar{v}_x در جهت x جریان می‌باشد. همچنین روابط مشابهی در جهات y و z نتیجه می‌شوند،

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x, \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y, \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z \quad (3-10-13)$$

$$\bar{v}_x = \frac{1}{t} \int_0^t v_x dt \quad (3-10-14)$$

که (\bar{v}_x) سرعت میانگین زمانی در مدت زمان t ، v_x سرعت لحظه‌ای کل در جهت x و v'_x انحراف لحظه‌ای یا تغییر سرعت در جهت x می‌باشد. این تغییرات در جهات y و z نیز می‌تواند رخ دهند. مقدار v'_x به عنوان یک میانگین در حدود صفر نوسان می‌کند. بنابراین، میانگینهای زمانی، دارای مقادیر $\bar{v}'_x = 0$ و $\bar{v}'_y = 0$ و $\bar{v}'_z = 0$ هستند. اما، مقادیر v'^2_x ، v'^2_y و v'^2_z صفر نخواهد بود. روابط مشابهی برای فشار که به همین ترتیب دارای افت و خیز است می‌تواند نوشته شود.

۲- شدت اغتشاش: میانگین زمانی نوسان پارامترها در حدود چند ثانیه است اما میانگین زمانی میانگین مربع پارامترهای دارای نوسان مقداری مثبت است. از آنجا که نوسانها اتفاقی هستند، بنابراین داده‌های موجود براساس روشهای آماری تحلیل شده‌اند. سطح یا شدت اغتشاش به ریشه دوم مجموع میانگین مربعات متغیرهای دارای نوسان می‌تواند مربوط شود. شدت اغتشاش، یک پارامتر مهم در آزمایش مدلها و تئوری لایه‌های مرزی است.



شکل ۳-۱۰-۳. اُفت و خیزهای سرعت در جریان مغشوش

شدت اغتشاش (I) در شکل ریاضی می‌تواند به صورت زیر تعریف شود،

$$I = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)}}{\bar{v}_x} \quad (3-10-15)$$

پارامتر I بسیار مهم است. فاکتورهایی مثل حالت گذرای لایه مرزی، جداسازی و ضرایب انتقال جرم و حرارت به شدت اغتشاش بستگی دارند. شبیه‌سازی جریان‌های مغشوش در مدل‌های آزمایشی مستلزم این است که عدد رینولدز و شدت اغتشاش یکی باشند. یک روش اندازه‌گیری شدت اغتشاش استفاده از بادسنج حرارتی^(۱) است.

۳-۱۰E برش مغشوش یا تنشهای رینولدز^(۲)

نیروهای برشی در جریان مغشوش یک سیال وقتی ظاهر می‌شوند که یک اختلاف سرعت در عرض صفحه‌ای که برش روی آن اتفاق می‌افتد، وجود داشته باشد. این نیروها از نیروهایی که در جریان آرام ظاهر می‌شوند بزرگتر هستند. تغییرات سرعت در معادله^(۳-۱۰-۱۳) باعث افزایش تنشهای برشی مغشوش می‌شود. معادلات حرکت و معادله پیوستگی برای جریان مغشوش نیز معتبر هستند. برای یک سیال تراکم‌ناپذیر با دانسیته ثابت ρ و ویسکوزیته μ معادله پیوستگی^(۳-۶-۲۴) به صورت زیر صدق می‌کند،

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3-6-24)$$

همچنین مؤلفه x معادله حرکت، یعنی معادله^(۳-۷-۳۶)، در صورت صدق معادله^(۳-۶-۲۴)

می تواند به صورت زیر نوشته شود،

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (3-10-16)$$

می توانیم معادله پیوستگی (۳-۶-۲۴) و معادله (۳-۱۰-۱۶) را با جایگزینی v_x با $\bar{v}_x + v'_x$ و v_y با $\bar{v}_y + v'_y$ و v_z با $\bar{v}_z + v'_z$ و p با $\bar{p} + p'$ بازنویسی کنیم،

$$\frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y + v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_z + v'_z)}{\partial z} = 0 \quad (3-10-17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\rho(\bar{v}_x + v'_x)]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_x + v'_x)]}{\partial x} + \frac{\partial[\rho(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_y + v'_y)]}{\partial y} \\ + \frac{\partial[\rho(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_z + v'_z)]}{\partial z} = \mu \nabla^2(\bar{v}_x + v'_x) - \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (3-10-18)$$

اکنون از این واقعیت که مقدار میانگین زمانی افت و خیز سرعتها برابر با صفر است (v'_x و v'_y و v'_z صفر هستند) و این که میانگین زمانی حاصل ضرب $\bar{v}_x v'_y$ برابر با صفر نیست استفاده می کنیم. بنابراین، معادلات (۳-۱۰-۱۷) و (۳-۱۰-۱۸) به صورت زیر نوشته می شوند،

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (3-10-19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \bar{v}_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_x \bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_x \bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_x \bar{v}_z)}{\partial z} \\ + \left[\frac{\partial(\rho \bar{v}_x v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_x v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_x v'_z)}{\partial z} \right] = \mu \nabla^2 \bar{v}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (3-10-20)$$

با مقایسه این دو معادله و ابسته به زمان با معادلات (۳-۶-۲۴) و (۳-۱۰-۱۶) می بینیم که عبارتهای وابسته به زمان همه جا جانشین مقادیر لحظه ای شده اند. اما در معادله (۳-۱۰-۲۰) عبارتهای جدیدی که در کرشه هستند مربوط به اُفت و خیزهای سرعت مغشوش هستند. برای راحتی از نمادهای زیر استفاده می کنیم،

$$\bar{\tau}'_{xx} = \overline{\rho v'_x v'_x}, \quad \bar{\tau}'_{yx} = \overline{\rho v'_x v'_y}, \quad \bar{\tau}'_{zx} = \overline{\rho v'_x v'_z} \quad (3-10-21)$$

این علائم مؤلفه های شار مومنت مغشوش می باشند که تنش های رینولدز نامیده می شوند.

۳-۱۰F طول اختلاط پراتل

معادلات نتیجه گرفته شده از جریان مغشوش، برای به دست آوردن توزیع سرعت باید حل شوند. برای این کار، قبل از این که روابط مربوط به تنشهای رینولدز بتوانند مورد ارزیابی قرار گیرند باید ساده سازیهای بیشتری صورت گیرد. تعدادی معادله نیمه تجربی مورد استفاده قرار گرفته اند و مدل ضریب نفوذگر دابی

Boussinesq یکی از اولین تلاشها برای ارزیابی این تنشها می باشد. با همگونی با معادله تنش برشی در جریان آرام، $\tau_{yx} = -\mu(dv_x/dy)$ ، تنش برشی مغشوش می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\bar{\tau}'_{yx} = -\eta_1 \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (3-10-22)$$

که η_1 ویسکوزیته گردابی یا مغشوش می باشد که یک تابع قوی از مکان و جریان است. این معادله به صورت زیر نیز می تواند نوشته شود،

$$\bar{\tau}'_{yx} = -\rho \varepsilon_1 \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (3-10-23)$$

که $\varepsilon_1 = \eta_1/\rho$ و ε_1 ضریب نفوذ گردابی مومنتم با واحد m^2/s در قیاس با ضریب نفوذ مومنتم μ/ρ برای جریان آرام می باشد.

پرانتل در مدل طول اختلاط خود با فرض این که حرکت گردابه ها در داخل سیال مشابه حرکت مولکولها در گاز است، روابطی را برای ارزیابی این تنشها به دست آورد. گردابه ها قبل از این که از بین بروند مسافتی را طی می کنند که طول اختلاط L نامیده می شود.

در واقع، گردابه متحرک یا توده سیال^(۱) متحرک به تدریج از بین می رود. اما، در تعریف طول اختلاط پرانتل L ، فرض می شود که این توده کوچک سیال تا زمانی که کل طول L را می پیماید ماهیت خود را حفظ می کند و پس از آن از بین می رود و یا در محل خود جذب می شود.

پرانتل فرض کرد که افت و خیز سرعت v'_x ناشی از توده سیالی است که مسافت L را در جهت y طی می کند و سرعت میانگینش را حفظ می کند. در نقطه L ، سرعت میانگین توده سیال با سیال مجاور به میزان $\bar{v}_x|_{y+L} - \bar{v}_x|_y$ متفاوت خواهد بود. پس، مقدار $v'_x|_y$ برابر است با،

$$v'_x|_y = \bar{v}_x|_{y+L} - \bar{v}_x|_y \quad (3-10-24)$$

طول L آنقدر کوچک است که اختلاف سرعت می تواند به صورت زیر نوشته شود،

$$v'_x|_y = \bar{v}_x|_{y+L} - \bar{v}_x|_y = L \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (3-10-25)$$

بنابراین،

$$v'_x = L \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (3-10-26)$$

پرانتل همچنین فرض کرد $v'_x \cong v'_y$. بنابراین میانگین زمانی $\overline{v'_x v'_y}$ برابر است با،

$$\overline{v'_x v'_y} = -L^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (3-10-27)$$

برای این که کمیت $\overline{v_x'v_x'}$ را با داده‌های تجربی تطبیق دهند از علامت منفی و قدر مطلق استفاده کرده‌اند. با جایگذاری معادله (۳-۱۰-۲۷) در معادله (۳-۱۰-۲۱) داریم،

$$\tau_{yx} = -\rho L^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (3-10-28)$$

با مقایسه با معادله (۳-۱۰-۲۳)،

$$\epsilon_t = L^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \quad (3-10-29)$$

۳-۱۰G توزیع سرعت عمومی در جریان مغشوش

برای تعیین توزیع سرعت در جریان مغشوش در حالت پایدار در داخل یک لولهٔ مدور، سیال داخل لوله را به دو ناحیه تقسیم می‌کنیم. یک هستهٔ مرکزی جایی که تنش رینولدز تقریباً با تنش برشی برابر است و یک زیر لایهٔ نازک ویسکوز در مجاورت دیواره جایی که تنش برشی فقط ناشی از برش ویسکوز است و اثرات اغتشاش ناچیز فرض می‌شود. سپس یک ناحیهٔ سوم در نظر می‌گیریم که منطقهٔ میانی یا حایل نامیده می‌شود و در آن جا هر دو تنش مهم و عمده هستند.

با حذف زیر نویسها و بالانویسهای تنش برشی و سرعت، و در نظر گرفتن زیر لایهٔ ویسکوز نازک

می‌توانیم بنویسیم:

$$\tau_0 = -\mu \frac{dv}{dy} \quad (3-10-30)$$

که τ_0 در این ناحیه ثابت فرض شده است. با انتگرال‌گیری:

$$\tau_0 y = \mu v \quad (3-10-31)$$

با تعریف یک سرعت اصطکاکی به صورت زیر و جانشین کردن آن در معادله (۳-۱۰-۳۱) داریم:

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (3-10-32)$$

$$\frac{v}{v^*} = \frac{y v^*}{\mu/\rho} \quad (3-10-33)$$

نسبت بدون بعد سرعت در سمت چپ به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$v^+ = v \sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}} \quad (\text{SI}) \quad (3-10-34)$$

$$v^+ = v \sqrt{\frac{\rho}{\tau_0 g_c}} \quad (\text{English})$$

عدد بدون بعد سمت راست نیز می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$y^+ = \frac{\sqrt{\tau_0 \rho}}{\mu} y \quad (\text{SI})$$

(۳-۱۰-۳۵)

$$y^+ = \frac{\sqrt{\tau_0 g_c \rho}}{\mu} y \quad (\text{English})$$

که y فاصله از دیواره لوله است. برای یک لوله با شعاع r_0 ، $r = r_0 - y$ که r فاصله از مرکز است. بنابراین، برای زیر لایه ویسکوز، توزیع سرعت برابر است با:

$$v^+ = y^+ \quad (۳-۱۰-۳۶)$$

سپس با در نظر گرفتن هسته مغشوش، جایی که تنشهای ویسکوز ناچیز هستند، معادله

(۳-۱۰-۲۸) به صورت زیر در می آید،

$$\tau = \rho L^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \quad (۳-۱۰-۳۷)$$

که عبارت dv/dy همیشه مثبت است و علامت قدر مطلق آن حذف شده است. پراپتیل فرض کرد که طول اختلاط متناسب با فاصله از دیوار است یا،

$$L = Ky \quad (۳-۱۰-۳۸)$$

و $\tau = \tau_0 = \text{const}$. حال معادله (۳-۱۰-۳۷) به صورت زیر نوشته می شود،

$$\tau_0 = \rho K^2 y^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \quad (۳-۱۰-۳۹)$$

بنابراین،

$$v^* = Ky \frac{dv}{dy} \quad (۳-۱۰-۴۰)$$

با انتگرال گیری،

$$v^* \ln y = Kv + K_1 \quad (۳-۱۰-۴۱)$$

که K_1 یک ثابت است. ثابت K_1 با فرض این که v در یک مقدار کوچک y مثلاً y_0 صفر است، به دست می آید.

$$\frac{v}{v^*} = v^+ = \frac{1}{K} \ln \frac{y}{y_0} \quad (۳-۱۰-۴۲)$$

با معرفی متغیر y^+ به وسیله ضرب کردن صورت و مخرج کسر y/y_0 در v^*/ν و این که $\nu = \mu/\rho$ ، داریم:

$$v^+ = \frac{1}{K} \left(\ln \frac{y v^*}{\nu} - \ln \frac{y_0 v^*}{\nu} \right) \quad (۳-۱۰-۴۳)$$

$$v^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + C_1 \quad (۳-۱۰-۴۴)$$

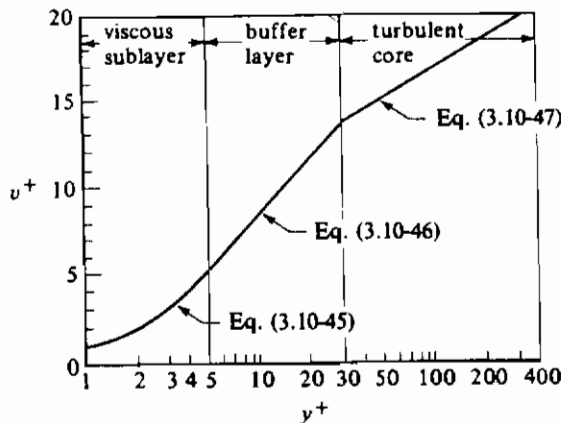
مقدار زیادی از داده‌های توزیع سرعت به وسیلهٔ Nikuradse و دیگران در محدودهٔ وسیعی از اعداد رینولدز از ۴۰۰۰ تا $3/2 \times 10^6$ به دست آمده است و این داده‌ها با معادلهٔ (۳-۱۰-۳۶) در ناحیه y^+ تا حدود ۵ و همچنین با معادلهٔ (۳-۱۰-۴۴) در ناحیه y^+ بالاتر از حدود ۳۰ با ثابتهای عمومی C_1 و K سازگار می‌باشند. برای ناحیه y^+ از ۵ تا ۳۰، که ناحیهٔ میانی (حایل) است، معادله‌ای تجربی به شکل معادلهٔ (۳-۱۰-۴۴) با داده‌های تجربی مطابقت می‌کند. در شکل ۳-۱۰-۴ معادلات معتبر زیر که توزیع سرعت عمومی در لولهٔ صاف و استوانه‌ای را می‌دهند رسم شده‌است.

$$v^+ = y^+ \quad (0 < y^+ < 5) \quad (3-10-45)$$

$$v^+ = 5.0 \ln y^+ - 3.05 \quad (5 < y^+ < 30) \quad (3-10-46)$$

$$v^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \quad (30 < y^+) \quad (3-10-47)$$

سه ناحیه مجزا در شکل ۳-۱۰-۴ نشان داده شده‌است. ناحیه اول بلافاصله بعد از دیواره، زیر لایهٔ ویسکوز^(۱) است (قبلاً به آن زیر لایه آرام می‌گفتند)، که به وسیلهٔ معادلهٔ (۳-۱۰-۴۵) بیان می‌شود. در این ناحیه سرعت با فاصله از دیواره متناسب است. ناحیهٔ دوم که لایهٔ میانی^(۲) نامیده می‌شود با معادلهٔ (۳-۱۰-۴۶) مشخص شده است که ناحیهٔ گذار از زیر لایهٔ ویسکوز، با تقریباً بدون فعالیت گردابه‌ها، به ناحیهٔ مرکزی اغتشاش^(۳)، با فعالیت شدید گردابه‌ها، می‌باشد. ناحیهٔ اخیر با معادلهٔ (۳-۱۰-۴۷) مشخص شده است. این معادلات بعداً می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند و به ضریب اصطکاک فینینگ که در بخش گذشته بحث شد ارتباط داده شوند. این معادلات همچنین در حل مسائل لایهٔ مرزی مغشوش نیز می‌توانند مورد استفاده واقع شوند.



شکل ۳-۱۰-۴. توزیع سرعت کلی برای جریان مغشوش در لوله‌های مدور و صاف

1. viscous sublayer

2. buffer layer

3. turbulent core region

H-۱۰-۳ موازنه انتگرالی مومنتم برای تحلیل لایه مرزی

۱- مقدمه و به دست آوردن رابطه انتگرالی: در حل لایه مرزی آرام روی یک صفحه صاف، حل بلازیوس کاملاً محدود است، زیرا برای جریان آرام روی سطح صاف می باشد. سیستمهای پیچیده تر با این روش قابل حل نیستند. یک روش تقریبی توسط ون کارمن ارائه شده است که برای سیستمهای پیچیده تر یا جریان مغشوش می تواند مورد استفاده قرار بگیرد. این روش یک تحلیل تقریبی انتگرالی مومنتم لایه مرزی است که از یک توزیع سرعت تجربی یا فرضی استفاده می کند.

به منظور به دست آوردن معادله اصلی برای لایه مرزی مغشوش یا آرام، یک حجم کنترل کوچک در لایه مرزی روی یک سطح صاف همان طور که در شکل ۵-۱۰-۳ نشان داده شده است، در نظر گرفته می شود. عمق در جهت z برابر با b می باشد. جریان فقط از طریق سطوح A_1 و A_2 و همچنین از سطح منحنی شکل بالایی در فاصله δ عبور می کند. یک موازنه کلی انتگرالی مومنتم با استفاده از معادله (۸-۸-۲) و یک موازنه کلی انتگرالی جرم با استفاده از معادله (۶-۶-۲)، برای حجم کنترل داخل لایه مرزی در حالت پایدار نوشته می شود. عبارت انتگرالی نهایی براساس روش ون کارمن به صورت زیر است (B2, S3)،

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x(v_{\infty} - v_x) dy \quad (3-10-48)$$

که τ_0 تنش برشی در صفحه $y = 0$ در نقطه x در طول صفحه است. همچنین، δ و τ_0 توابعی از x هستند. معادله (۳-۱۰-۴۸) عبارتی است که حل آن مستلزم دانستن سرعت v_x به صورت تابعی از فاصله از سطح (y) می باشد. البته دقت نتایج بستگی به این دارد که توزیع سرعت فرض شده چقدر به توزیع سرعت واقعی نزدیک است.

۲- موازنه انتگرالی مومنتم برای لایه مرزی آرام: قبل از این که از معادله (۳-۱۰-۴۸) برای لایه مرزی مغشوش استفاده کنیم، این معادله برای لایه مرزی آرام روی سطح صاف به کار گرفته خواهد شد، به طوری که نتایج با حل دقیق بلازیوس در معادلات (۶-۱۰-۳) تا (۱۲-۱۰-۳) قابل مقایسه باشد. در این تحلیل شرایط مرزی معلوم باید در لایه مرزی صدق کند.

$$\begin{aligned} v_x &= 0 & \text{at } y &= 0 \\ v_x &\cong v_{\infty} & \text{at } y &= \delta \end{aligned} \quad (3-10-49)$$

$$\frac{dv_x}{dy} \cong 0 \quad \text{at } y = \delta$$

شرایط فوق در توزیع ساده و فرضی سرعت در زیر اعمال شده اند،

$$\frac{v_x}{v_{\infty}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (3-10-50)$$

تنش برشی τ_0 در یک x مشخص از رابطه زیر می‌تواند به دست آید،

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)_{y=0} \quad (3-10-51)$$

با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۳-۱۰-۵۰) نسبت به y و قراردادن $y = 0$

$$\left(\frac{dv_x}{dy} \right)_{y=0} = \frac{3v_\infty}{2\delta} \quad (3-10-52)$$

با جایگذاری معادله (۳-۱۰-۵۲) در (۳-۱۰-۸۱) داریم،

$$\tau_0 = \frac{3\mu v_\infty}{2\delta} \quad (3-10-53)$$

با جایگذاری معادله (۳-۱۰-۵۰) در معادله (۳-۱۰-۴۸) و انتگرال‌گیری بین $y = 0$ و $y = \delta$

داریم،

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{280}{39} \frac{\tau_0}{v_\infty^2 \rho} \quad (3-10-54)$$

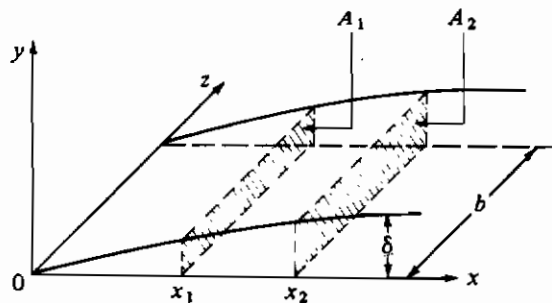
با ترکیب معادلات (۳-۱۰-۵۳) و (۳-۱۰-۵۴) و انتگرال‌گیری بین $\delta = 0$ و $\delta = \delta$ و $x = 0$ و $x = L$

داریم،

$$\delta = 4.64 \sqrt{\frac{\mu L}{\rho v_\infty}} \quad (3-10-55)$$

که طول صفحه $x = L$ است. با عمل کردن به طریق مشابه با معادلات (۳-۱۰-۶) تا (۳-۱۰-۱۲)، ضریب دراگ به دست می‌آید،

$$C_D = 1.292 \sqrt{\frac{\mu}{Lv_\infty \rho}} = \frac{1.292}{N_{Re, L}^{1/2}} \quad (3-10-56)$$



شکل ۳-۱۰-۵. حجم کنترل برای تحلیل انتگرالی جریان لایه مرزی

مقایسه معادله (۳-۱۰-۶) با (۳-۱۰-۵۵) و (۳-۱۰-۱۲) با (۳-۱۰-۵۶) موفقیت این روش را نشان می‌دهد. فقط ثابت‌های عددی، کمی اختلاف دارند. این روش با دقت قابل قبول برای حالت‌هایی که یک تحلیل دقیق امکان‌پذیر نیست می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۳- تحلیل انتگرال مومنتم برای لایه مرزی مغشوش: روش‌هایی که برای تحلیل انتگرالی مومنتم برای لایه مرزی آرام استفاده شد، برای لایه مرزی مغشوش روی یک صفحه صاف نیز کاربرد دارند. یک توزیع سرعت تجربی ساده برای جریان در لوله که تا عدد رینولدز 10^5 معتبر است برای لایه مرزی روی سطح صاف به این صورت است،

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (3-10-57)$$

این رابطه، قانون توان یک هفتم بلازیوس نامیده می‌شود، که اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

معادله (۳-۱۰-۵۷) در رابطه انتگرالی (۳-۱۰-۴۸) جایگزین می‌شود،

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x^2 \left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{2/7} \right] dy = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (3-10-58)$$

معادله قانون توان در دیواره وقتی که لایه سمت صفر میل می‌کند، صدق نمی‌کند. رابطه مفید دیگر رابطه بلازیوس برای تنش برشی جریان لوله می‌باشد که برای تنش برشی دیواره τ_0 نیز استفاده می‌شود. برای جریان در داخل لایه مرزی روی یک سطح صاف این رابطه به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} = 0.023 \left(\frac{\delta v_\infty \rho}{\mu} \right)^{-1/4} \quad (3-10-59)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۳-۱۰-۵۸) و با ترکیب نتیجه با معادله (۳-۱۰-۵۹) و انتگرال‌گیری بین $\delta = 0$ و $\delta = \delta$ و $x = 0$ و $x = L$ داریم،

$$\delta = 0.376 \left(\frac{L v_\infty \rho}{\mu} \right)^{-1/5} \quad L = \frac{0.376 L}{N_{Re, L}^{1/5}} \quad (3-10-60)$$

با انتگرال‌گیری از نیروی دراگ همانند قبل داریم:

$$C_D = \frac{0.072}{N_{Re, L}^{1/5}} \quad (3-10-61)$$

در این تعمیم فرض شده است که لایه مرزی مغشوش تا $x = 0$ گسترش پیدا کند. در واقع، یک طول معین از صفحه دارای لایه مرزی آرام است. داده‌های تجربی، معادله (۳-۱۰-۶۱) را در محدوده عدد رینولدز از $10^5 \times 5$ تا 10^7 به خوبی تأیید می‌کند. نتایج دقیق‌تر در اعداد رینولدز بالاتر می‌توانند با استفاده از معادلات (۳-۱۰-۴۵) تا (۳-۱۰-۴۷) و توزیع سرعت لگاریتمی به دست آیند.

۳-۱۱ آنالیز ابعادی در انتقال ممتوم

۳-۱۱۸ آنالیز ابعادی معادلات دیفرانسیل

در این فصل چندین معادله دیفرانسیل که حالت‌های مختلف جریان را توصیف می‌کنند به دست آوردیم. همگونی ابعادی مستلزم این است که تمام عبارتها در یک معادله مشخص دارای واحدهای یکسان باشند. پس نسبت یک عبارت در معادله به عبارت دیگر بدون بعد است. با دانستن مفهوم فیزیکی هر عبارت در معادله، قادر خواهیم بود که هر پارامتر یا عدد بدون بعد را تفسیر فیزیکی کنیم. این اعداد بدون بعد مثل عدد رینولدز و بقیه، در همبسته کردن و پیشگویی پدیده‌های انتقال در جریان مغشوش و آرام مفید هستند.

اغلب انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیلی که وضعیت یک جریان را تشریح می‌کنند ممکن نیست. اما می‌توانیم از معادله برای پیدا کردن اعداد بدون بعدی که در ارتباط دادن داده‌های آزمایشگاهی برای این حالت فیزیکی نقش دارند، استفاده کنیم.

یک مثال مهم در این زمینه کاربرد معادله ناویر-استوکس می‌باشد که اغلب برای یک حالت فیزیکی قابل انتگرال‌گیری نیست. برای شروع، معادله (۳-۷-۳۶) را به عنوان مؤلفه x معادله ناویر-استوکس در نظر می‌گیریم. این معادله در حالت پایدار به صورت زیر است،

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (3-11-1)$$

هر عبارت در این معادله دارای واحد $\frac{\text{طول}}{\text{مجدورثانه}}$ یا (L/t^2) می‌باشد.

در این معادله هر عبارت دارای مفهوم فیزیکی است. در ابتدا از یک سرعت مشخصه v و یک طول مشخصه L برای همه عبارتها استفاده می‌کنیم. پس بیان هر عبارت در معادله (۳-۱۱-۱) به صورت زیر است. طرف چپ می‌تواند به صورت v^2/L بیان شود و عبارتهای سمت راست به ترتیب به صورت g ، $p/\rho L$ و $\mu v/\rho L^2$ بیان می‌شوند. بنابراین،

$$\left[\frac{v^2}{L} \right] = [g] - \left[\frac{p}{\rho L} \right] + \left[\frac{\mu v}{\rho L^2} \right] \quad (3-11-2)$$

این رابطه یک تساوی ابعادی را بیان می‌کند و یک تساوی عددی نیست. هر جمله دارای بُعد L/t^2 می‌باشد. جمله سمت چپ در معادله (۳-۱۱-۲) نیروی اینرسی را بیان می‌کند و جملات سمت راست به ترتیب، نیروی وزن، نیروی فشاری و نیروی ویسکوز هستند. با تقسیم کردن هر کدام از عبارتها در معادله (۳-۱۱-۲) بر نیروی اینرسی، $[v^2/L]$ ، گروههای بدون بعد زیر یا معکوس آنها به دست می‌آیند،

$$\frac{[v^2/L]}{[g]} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ثقل}} = \frac{v^2}{gL} = N_{Fr} \quad (\text{عدد فرود}) \quad (3-11-3)$$

$$\frac{[p/\rho L]}{[v^2/L]} = \frac{\text{نیروی فشاری}}{\text{نیروی اینرسی}} = \frac{P}{\rho v^2} = N_{Eu} \quad (\text{عدد اولر}) \quad (3-11-4)$$

$$\frac{[v^2/L]}{[\mu v/\rho L^2]} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}} = \frac{L v \rho}{\mu} = N_{Re} \quad (\text{عدد رینولدز}) \quad (3-11-5)$$

توجه کنید که این روش نه تنها گروه‌های بدون بعد گوناگون را برای یک معادله دیفرانسیل می‌دهد، بلکه مفهوم فیزیکی این گروه‌های بدون بعد را نیز ارائه می‌کند. در یک حالت مشخص، طول، سرعت و غیره مهمترین مقادیر هستند. برای مثال طول ممکن است قطر یک کره، طول یک سطح صاف و مانند آن باشد.

اگر پارامترهای مربوط به نسبت نیروهای متناظر سیستمهایی که تشابه هندسی دارند، مساوی باشند مشابه دینامیکی نامیده می‌شوند. این بدان معنی است که اعداد رینولدز، اولر و فرود در دو سیستم باید مساوی باشند.

تشابه دینامیکی یک شرط مهم در به دست آوردن داده‌های تجربی از روی یک مدل کوچک و توسعه دادن این داده‌ها برای تعمیم به الگوی اصلی، است. از آنجا که انجام آزمایش با الگوهایی با مقیاس اصلی اغلب مشکل و یا گران است، مطالعه روی مدل‌های کوچک معمول می‌باشد. این کار در افزایش مقیاس تجهیزات فرایندی شیمیایی و در طراحی کشتی‌ها و هواپیماها به کار می‌رود.

۳-۱۱B آنالیز ابعادی با استفاده از روش باکینگهام

روش به دست آوردن اعداد بدون بعد مهم از معادلات دیفرانسیل بنیانی عموماً روش مناسبی است. اما در بسیاری از حالات قادر به به دست آوردن یک معادله دیفرانسیل که دقیقاً مربوط به پدیده‌ای خاص است نیستیم. پس یک روش عمومی‌تر لازم است که به روش باکینگهام^(۱) معروف می‌باشد. در این روش ابتدا متغیرهای مهم در مسأله فیزیکی خاص فهرست می‌شوند. سپس با استفاده از قضیه باکینگهام تعدادی از پارامترهای بدون بعد را که ترکیبی از متغیرها هستند به دست می‌آوریم.

قضیه باکینگهام بیان می‌کند که رابطه‌ی تابعی بین q کمیت یا متغیر که واحدهای آنها ممکن است برحسب π بعد اساسی باشند می‌تواند به صورت $(q-u)$ گروه مستقل بدون بعد نوشته شود که این گروه‌های مستقل بدون بعد اغلب π ها نامیده می‌شوند (مقدار u در واقع حداکثر تعداد متغیرهایی است که تشکیل گروه بدون بعد نمی‌دهند. اما در بعضی موارد u با تعداد ابعاد اساسی مساوی نیست (B1)). اجازه دهید که برای شرح این روش مثالی را مورد بررسی قرار دهیم. یک سیال تراکم ناپذیر در

یک لولهٔ مدور با قطر داخلی D جریان دارد. متغیرهای مشخصه عبارتند از، افت فشار Δp ، سرعت v ، قطر D ، طول لوله L ، ویسکوزیته μ و دانسیته ρ تعداد کل متغیرها $q = 6$ است.

ابعاد یا واحدهای اساسی $u = 3$ است و عبارتند از، جرم M ، طول L و زمان t . واحدهای متغیرها

به این صورت است، Δp بر حسب M/Lt^2 ، v بر حسب L/t ، D بر حسب L ، L بر حسب L ، μ بر حسب M/Lt و ρ بر حسب M/L^3 . تعداد گروه‌های بدون بعد یا π ها برابر با $q - u = 3 - 3 = 0$ است. بنابراین،

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \quad (3-11-6)$$

سپس باید یک گروه اصلی شامل u (یا ۳) متغیر را انتخاب کنیم که در تمام گروه‌های بدون بعد π ظاهر خواهد شد و شامل همهٔ ابعاد اساسی نیز باشد. همچنین، هیچ کدام از متغیرهای انتخابی نمی‌توانند ابعاد یکسان داشته باشند. در انتخاب متغیرهای اصلی، تغییری که اثرش مورد نظر است مستثنی می‌شود (برای مثال Δp). این محدودیت فقط متغیرهای v ، D ، μ و ρ را برای استفاده باقی می‌گذارد (L و D ابعاد یکسان دارند).

D ، v و ρ را به عنوان متغیرهای اصلی انتخاب می‌کنیم که در هر سه گروه بدون بعد مشترک

می‌باشند. پس سه گروه بدون بعد به صورت زیر خواهند بود،

$$\pi_1 = D^a v^b \rho^c \Delta p^1 \quad (3-11-7)$$

$$\pi_2 = D^a v^b \rho^c L^1 \quad (3-11-8)$$

$$\pi_3 = D^a v^b \rho^c \mu^1 \quad (3-11-9)$$

برای بدون بعد بودن، متغیرها باید به توانهای معین a ، b ، c و غیره برسند.

ابتدا گروه π_1 را شرح می‌دهیم،

$$\pi_1 = D^a v^b \rho^c \Delta p^1 \quad (3-11-7)$$

برای به دست آوردن این توانها، معادلهٔ (۳-۱۱-۷) را به صورت ابعادی با قرار دادن ابعاد برای هر متغیر، می‌نویسیم،

$$M^0 L^0 t^0 = 1 = L^a \left(\frac{L}{t}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \frac{M}{Lt^2} \quad (3-11-10)$$

سپس توانهای L ، M و بالاخره t را در دو طرف معادله مساوی قرار می‌دهیم.

$$(L) \quad 0 = a + b - 3c - 1$$

$$(M) \quad 0 = c + 1$$

$$(t) \quad 0 = -b - 2$$

(۳-۱۱-۱۱)

با حل این معادلات، $a = 0$ و $b = -2$ و $c = -1$ به دست می‌آید.

با قراردادن این مقادیر در معادله (۳-۱۱-۷)،

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{v^2 \rho} = N_{Eu} \quad (3-11-12)$$

با تکرار این عمل برای π_2 و π_3 خواهیم داشت،

$$\pi_2 = \frac{L}{D} \quad (3-11-13)$$

$$\pi_3 = \frac{Dv\rho}{\mu} = N_{Re} \quad (3-11-14)$$

و بالاخره، با قراردادن π_1 و π_2 و π_3 در معادله (۳-۱۱-۶)،

$$\frac{\Delta p}{v^2 \rho} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{Dv\rho}{\mu}\right) \quad (3-11-15)$$

نتیجه به دست آمده از ترکیب معادله (۳-۱۰-۵) با سمت چپ معادله (۳-۱۱-۱۵) نشان می‌دهد که ضریب اصطکاک تابعی از عدد رینولدز (همان طور که قبلاً همبستگی تجربی ضریب اصطکاک و عدد رینولدز نشان داده شده بود) و نسبت $\frac{\text{طول}}{\text{قطر}}$ است. در لوله‌هایی با $\frac{L}{D} \gg 1$ یا لوله‌هایی با جریان کاملاً توسعه یافته، ضریب اصطکاک مستقل از نسبت L/D به نظر می‌رسد.

این نوع آنالیز در معادلات تجربی بیشتر مورد استفاده است. اما اهمیت هر گروه بدون بعد را، که بایستی به وسیله آزمایش معین شود، به ما نشان نمی‌دهد و همچنین مشخص نمی‌کند که کدام متغیرها بایستی انتخاب شوند:

مسائل

۳-۱-۱. نیروی وارد بر یک استوانه در یک تونل باد: هوا در فشار مطلق $101/3 \text{ kPa}$ و دمای 25°C با سرعت 10 m/s در یک تونل باد در جریان است. یک استوانه بلند به قطر 90 mm در تونل قرار داده شده است و محور استوانه به طور عمودی در معرض جریان هوا نگهداشته شده است. نیروی وارد بر استوانه به ازای هر متر طول چقدر است؟

جواب: $C_D = 1/3$ و $F_D = 6/94 \text{ N}$

۳-۱-۲. نیروی باد وارد بر دودکش دیگ بخار: یک دودکش استوانه‌ای دیگ بخار با قطر 1 m و ارتفاع 30 m در معرض بادی با دمای 25°C و سرعت 50 miles/h قرار دارد. نیروی وارد بر دودکش را محاسبه کنید.

جواب: $C_D = 0/33$ و $F_D = 2935 \text{ N}$

۳-۱-۳. اثر سرعت بر نیروی وارد بر یک کره و قانون استوکس: یک کره در یک تونل کوچک باد که در آن هوا در دمای $37/8^{\circ}\text{C}$ و فشار مطلق 1 atm است، قرار دارد و هوا با سرعت‌های مختلف از روی این کره به قطر $0/042\text{ m}$ عبور داده می‌شود.
الف) ضریب درآگ و نیروی وارد بر کره را در سرعت $2/3 \times 10^{-4}\text{ m/s}$ تعیین کنید. در صورت امکان از قانون استوکس استفاده کنید.

ب) نیرو را در سرعت‌های $2/3 \times 10^{-3}\text{ m/s}$ ، $2/3 \times 10^{-2}\text{ m/s}$ ، $2/3 \times 10^{-1}\text{ m/s}$ و $2/3\text{ m/s}$ تعیین کنید. F_D را بر حسب سرعت رسم کنید.

۳-۱-۴. نیروی وارد بر پایه پل در رودخانه: یک پایه استوانه‌ای پل به قطر 1 m در عمق 10 متری آب فرو برده شده است. آب در دمای 20°C و سرعت $1/2\text{ m/s}$ در رودخانه در جریان است. نیروی وارد بر پایه را محاسبه کنید.

۳-۱-۵. سطح مفید در یک بستر پر شده: یک بستر پر شده حاوی ذرات مکعب مشکل به طول $0/02\text{ m}$ است و دانسیته حجمی بستر پر شده 980 kg/m^3 است. دانسیته ذرات جامد 1500 kg/m^3 می‌باشد.

الف) ضریب تخلخل (ϵ)، قطر مؤثر (D_p) و a را محاسبه کنید.

ب) همان موارد را در شرایط مشابه، اما برای استوانه‌ای به قطر $0/02\text{ m}$ و طول D $h = 1/5$ تکرار کنید.

جواب: الف) $a = 196\text{ m}^{-1}$ و $D_p = 0/02\text{ m}$ و $\epsilon = 0/3467$

۳-۱-۶. محاسبه تعداد ذرات در یک بستر استوانه‌ای: برای یک بستر پر شده حاوی استوانه‌هایی که قطر D و طول L آنها مساوی است، موارد زیر را با ضریب تخلخل ϵ محاسبه کنید:
الف) قطر مؤثر را محاسبه کنید.

ب) تعداد استوانه‌ها (n) در یک متر مکعب از بستر را محاسبه کنید.

جواب: الف) $D_p = D$

۳-۱-۷. به دست آوردن معادله بدون بعد برای بستر پر شده: با معادله $(3-1-20)$ شروع کنید و معادله بدون بعد $(3-1-21)$ را به دست آورید. تمام مراحل را نشان دهید.

۳-۱-۸. جریان و اُفت فشار گازها در بستر پر شده: هوا با دمای $394/3\text{ K}$ در یک بستر پر شده از استوانه‌هایی با طول و قطر مساوی، به قطر $0/0127\text{ m}$ جریان می‌یابد. ضریب تخلخل بستر $0/40$ و ارتفاع بستر پر شده $3/66\text{ m}$ است. هوا در فشار مطلق $2/2\text{ atm}$ و سرعت جرمی $2/45\text{ kg/m}^2\cdot\text{s}$ بر اساس حجم خالی بستر وارد آن می‌شود. اُفت فشار هوا در بستر را محاسبه کنید.

جواب: $\Delta p = 0.1547 \times 10^5 \text{ Pa}$

۳-۱-۹. جریان آب در بستر یک فیلتر: آب با دمای 24°C در اثر نیروی وزن خود از طریق بستر یک فیلتر که حاوی قطعات کوچکی به قطر معادل 0.06 m می‌باشد، عبور می‌کند. ضریب تخلخل بستر 0.42 اندازه‌گیری شده است. بستر پر شده $1/50 \text{ m}$ عمق دارد و سطح آب بالای بستر در 0.4 متری ثابت است. سرعت آب (v') براساس حجم خالی بستر چقدر است؟

۳-۱-۱۰. قطر میانگین ذرات در بستر پر شده: مخلوطی از ذرات در یک بستر پر شده با درصد حجمی و اندازه‌های زیر وجود دارد: 15% ، 10 mm ؛ 25% ، 20 mm ؛ 40% ، 40 mm ؛ 20% ، 70 mm . در صورتی که ضریب شکل 0.74 باشد قطر مؤثر میانگین D_{pm} را محاسبه کنید.

جواب: $D_{pm} = 18/34 \text{ mm}$

۳-۱-۱۱. نفوذپذیری و قانون دارسی: یک نمونه آزمایشی از یک سنگ متخلخل که از یک مخزن نفت به دست آمده است و دارای طول 8 cm و قطر 2 cm می‌باشد در یک محفظه قرار داده شده است. با اُفت فشار 1 atm ، شدت جریان حجمی آب در دمای $20/2^\circ\text{C}$ در نمونه $2/6 \text{ cm}^3/\text{s}$ اندازه‌گیری شده است. نفوذپذیری برحسب دارسی چقدر است؟

۳-۱-۱۲. حداقل سرعت سیالی شدن و انبساط بستر سیال: ذراتی که دارای اندازه 0.1 mm ، ضریب شکل 0.86 و دانسیته 1200 kg/m^3 می‌باشند، بایستی با استفاده از هوا در دمای 25°C و فشار مطلق $202/65 \text{ kPa}$ سیالی شوند. ضریب تخلخل در شرایط حداقل سیالی شدن 0.43 است. قطر بستر 0.6 m و بستر حاوی 350 kg مواد جامد می‌باشد.

الف) ارتفاع حداقل بستر سیالی شده را محاسبه کنید.

ب) اُفت فشار در شرایط حداقل سیالی شدن را محاسبه کنید.

پ) سرعت حداقل برای سیالی شدن را محاسبه کنید.

ت) با سرعتی معادل 4 برابر سرعت حداقل، تخلخل بستر را تخمین بزنید.

جواب: الف) $L_{mf} = 1/810 \text{ m}$ ب) $\Delta p = 0.1212 \times 10^5 \text{ Pa}$

پ) $v'_{mf} = 0.004374 \text{ m/s}$ ت) $\epsilon = 0.604$

۳-۱-۱۳. حداقل سرعت سیالی شدن با استفاده از یک مایع: یک برج به قطر 0.1524 m با آب در دمای $20/2^\circ\text{C}$ سیالی شده است. ذرات کروی شکل داخل برج دارای قطر $4/42 \text{ mm}$ و دانسیته 1603 kg/m^3 می‌باشند. حداقل سرعت لازم برای سیالی شدن را محاسبه کرده و آن را با مقدار تجربی 0.2307 m/s که $Wihelm$ و $(W5) Kwauk$ به دست آورده‌اند مقایسه کنید.

۱۴-۱-۳. سیالی شدن بستر فیلتر شنی: برای تمیز کردن یک فیلتر، آن را با استفاده از آب در دمای 24°C سیالی می‌کنند. ذرات شن گرد دارای دانسیته 2550 kg/m^3 و اندازه میانگین 1 mm می‌باشند. خواص شن در جدول ۲-۱-۳ داده شده است.

الف) قطر بستر 0.4 m و ارتفاع مطلوب بستر در شرایط حداقل سیالی شدن، 1.75 m است. مقدار مواد جامد مورد نیاز را محاسبه کنید.

ب) افت فشار در این شرایط و حداقل سرعت لازم برای سیالی شدن را محاسبه کنید.

پ) با سرعتی معادل ۴ برابر سرعت حداقل، تخلخل و ارتفاع بستر منبسط شده را تخمین بزنید.

۱۴-۲-۳. اندازه گیری جریان با استفاده از لوله پیتوت: یک لوله پیتوت برای اندازه گیری شدت جریان آب در دمای 20°C در مرکز یک لوله به قطر داخلی $102/3\text{ mm}$ مورد استفاده قرار گرفته است. اختلاف ارتفاع مانومتر 78 mm تراکلرید کربن است. در دمای 20°C ضریب لوله پیتوت 0.98 است.

الف) سرعت در مرکز و سرعت میانگین را محاسبه کنید.

ب) دبی حجمی آب را محاسبه کنید.

جواب: الف) $v_{\text{max}} = 0.9372\text{ m/s}$, $v_{\text{av}} = 0.773\text{ m/s}$ ب) $6/35 \times 10^{-3}\text{ m}^3/\text{s}$

۱۴-۲-۲. اندازه گیری شدت جریان گاز با استفاده از لوله پیتوت: شدت جریان هوا در دمای $37/8^{\circ}\text{C}$ در مرکز یک مجرا به قطر 800 mm به وسیله لوله پیتوت اندازه گیری شده است. اختلاف ارتفاع مانومتر ناشی از فشار $12/4\text{ mm}$ آب است. اختلاف ارتفاع ناشی از فشار استاتیک 275 mm آب بیشتر از فشار مطلق 1 atm است. ضریب لوله پیتوت 0.97 است. سرعت در مرکز و دبی حجمی هوا را محاسبه کنید.

۱۴-۲-۳. استفاده از لوله پیتوت مایل برای اندازه گیری شدت جریان: از یک لوله پیتوت مایل، که در داخل یک لوله به قطر $155/4\text{ mm}$ قرار دارد و در آن آب 20°C در جریان است، داده‌های زیر به دست آمده است.

فاصله از دیواره (mm)	اختلاف ارتفاع مانومتر (میلی متر تراکلرید کربن)
۲۶/۹	۱۲۲
۵۲/۳	۱۴۲
۷۷/۷	۱۵۷
۱۰۳/۱	۱۳۷
۱۲۸/۵	۱۱۲

ضریب لوله پیتوت $0/98$ است.

الف) سرعت حداکثر را در مرکز محاسبه کنید.

ب) سرعت میانگین را محاسبه کنید. [راهنمایی: از معادله (۱۷-۶-۲) استفاده کرده و

انتگرال گیری ترسیمی انجام دهید.]

۳-۲-۴. اندازه گیری جریان با استفاده از یک ونتوری: یک ونتوری به قطر گلوگاه $38/9 \text{ mm}$ در

مسیر یک خط به قطر داخلی $102/3 \text{ mm}$ نصب شده است. این ونتوری، شدت جریان آب

با دانسیته 999 kg/m^3 را اندازه گیری می کند. افت فشار اندازه گیری شده در ونتوری kPa

$156/2$ است. ضریب ونتوری C_v ، $0/98$ است. شدت جریان را بر حسب gal/min و m^3/s

محاسبه کنید.

جواب: $0/0208 \text{ m}^3/\text{s}$ ، 330 gal/min

۳-۲-۵. استفاده از یک ونتوری برای اندازه گیری شدت جریان آب: آب در دمای 20°C در یک لوله

فولادی به قطر اسمی 2 in و شماره 40 در جریان است. شدت جریان آب توسط یک

ونتوری به قطر گلوگاه 20 mm اندازه گیری می شود. اختلاف ارتفاع مانومتر 214 mmHg

می باشد. ضریب ونتوری $0/98$ است. شدت جریان را محاسبه کنید.

۳-۲-۶. اندازه گیری جریان نفت با استفاده از یک اریفیس: نفت سنگین با دمای 20°C با دانسیته

900 kg/m^3 و ویسکوزیته 6 cp در یک لوله فولادی 4 in و شماره 40 در جریان است.

هنگامی که شدت جریان $0/0174 \text{ m}^3/\text{s}$ است، افت فشار مطلوب در مانومتر برابر با

$10^5 \times 0/93 \text{ Pa}$ است. در صورتی که ضریب اریفیس $0/61$ فرض شود اندازه آن چقدر باید

باشد. افت فشار دائم چقدر است؟

۳-۲-۷. شدت جریان آب در یک کانال آبیاری: آب در یک کانال روباز در جریان است. از یک

سرریز مستطیل شکل که دارای طول خط الرأس $L = 1/75 \text{ ft}$ است، استفاده شده است. هد

سرریز $h_o = 0/47 \text{ ft}$ اندازه گیری شده است. شدت جریان را بر حسب ft^3/s و m^3/s محاسبه

کنید.

جواب: شدت جریان $1/776 \text{ ft}^3/\text{s} = 0/0503 \text{ m}^3/\text{s}$

۳-۳-۱. توان پمپ سانتریفوژ: با استفاده از شکل ۳-۳-۲ و شدت جریان 60 gal/min موارد زیر را

محاسبه کنید.

الف) با آب با دانسیته $62/4 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ توان پمپ را محاسبه کرده و آن را با مقدار به دست آمده

از منحنی مقایسه کنید.

ب) همچنین محاسبات را برای یک مایع غیر ویسکوز با دانسیته $۰/۸۵ \text{ g/cm}^3$ انجام دهید.

جواب: ب) $(۰/۵۱ \text{ kW})$ $(۰/۶۹ \text{ hp})$

۳-۳-۲. توان یک فن بر حسب کیلووات: یک فن سانترفوژ برای خارج کردن گازهای حاصل از

احتراق که در حالت سکون (سرعت صفر) در دمای $۳۵۲/۶ \text{ K}$ و فشار $۷۴۹/۳ \text{ mmHg}$

هستند، استفاده شده است. فشار خروجی فن $۸۰۰/۱ \text{ mmHg}$ و سرعت گاز خروجی

$۳۸/۱ \text{ m/s}$ است. دبی حجمی گاز در شرایط استاندارد، $(۷۶۰ \text{ mmHg}$ و $۲۹۴/۳ \text{ K})$ برابر با

$۵۶/۶ \text{ m}^3/\text{min}$ است. در صورتی که راندمان فن $۰/۶۵$ و وزن مولکولی گاز $۳۰/۷$ باشد، توان

فن را برحسب kW محاسبه کنید. فرض کنید جریان تراکم ناپذیر است.

۳-۳-۳. تراکم آدیاباتیک هوا: یک کمپرسور، هوا را با شدت جریان $۲/۸۳ \text{ m}^3/\text{min}$ و دمای

$۲۹/۴ \text{ }^\circ\text{C}$ به طور آدیاباتیک از $۱۰۲/۷ \text{ kN/m}^2$ تا $۳۱۱/۶ \text{ kN/m}^2$ متراکم می‌کند. توان لازم را

در صورتی که راندمان کمپرسور $۰/۷۵$ باشد محاسبه کنید. همچنین دمای خروجی هوا را

محاسبه کنید.

۳-۴-۱. توان لازم برای اختلاط مایع: می‌خواهیم یک مایع با ویسکوزیته $۱۰^{-۳} \text{ Pas}$ و

دانسیته ۹۶۹ kg/m^3 را در تانکی به قطر $۰/۹۱ \text{ m}$ هم بزنیم. همزن مربوط از نوع توربینی باز

با شش تیغه است که قطر آن $۰/۳۰۵ \text{ m}$ بوده و سرعت چرخش آن ۱۸۰ rpm است. تانک

دارای چهار بافل است که عرض J هر کدام از آنها $۰/۰۷۶ \text{ m}$ است. همچنین $W = ۰/۰۳۸۱ \text{ m}$.

توان لازم را برحسب kW محاسبه کنید. از منحنی ۲ شکل ۴-۴-۳ استفاده کنید.

جواب: $N_p = ۲/۵$ ، توان $(۰/۲۳۱ \text{ hp})$ $(۰/۱۷۲ \text{ kW})$

۳-۴-۲. توان لازم برای اختلاط و افزایش مقیاس: از یک همزن توربینی به قطر $۰/۲۰۳ \text{ m}$ با

شش تیغه صاف و یک صفحه در یک تانک به قطر و ارتفاع $۰/۶۱ \text{ m}$ استفاده شده است.

عرض $W = ۰/۰۴۰۵ \text{ m}$. چهار بافل به عرض $۰/۰۵۱ \text{ m}$ مورد استفاده قرار گرفته است.

توربین با سرعت چرخشی ۲۷۵ rpm در مایعی با دانسیته ۹۰۹ kg/m^3 و ویسکوزیته

$۰/۰۲ \text{ Pas}$ کار می‌کند.

الف) توان توربین را برحسب kW و توان در واحد حجم را برحسب kW/m^3 محاسبه کنید.

ب) این سیستم را به مخزنی به حجم ۱۰۰ برابر مخزن اولیه و با همان میزان انتقال جرم

افزایش مقیاس دهید.

جواب: الف) $P = ۰/۱۵۰۸ \text{ kW}$ ، $P/V = ۰/۸۴۵ \text{ kW/m}^3$

ب) $P_2 = ۱۵/۰۶ \text{ kW}$ ، $P_2/V_2 = ۰/۸۴۵ \text{ kW/m}^3$

۳-۴-۳. کاهش مقیاس فرایند اختلاط: یک سیستم اختلاط موجود با همزن و سیالی مشابه با سیال مثال ۳-۴-۱a کار می‌کند. می‌خواهیم یک واحد پایلوت کوچک با مخزنی به حجم ۲ لیتر طراحی کنیم، تا اثرات متغیرهای فرایندی روی سیستم در آزمایشگاه مورد مطالعه قرار گیرد. به نظر می‌رسد در این سیستم میزان انتقال جرم مهم باشد به طوری که کاهش مقیاس بایستی بر این اساس انجام گیرد. سیستم جدید را با مشخص کردن اندازه‌ها، دور و rpm و توان kW طراحی کنید.

۳-۴-۴. سیستم اختلاط لنگری: یک همزن لنگری مشابه با آنچه در مثال ۳-۴-۳ توصیف شد، برای همزدن سیالی با ویسکوزیته 100 Pa.s و دانسیته 980 kg/m^3 استفاده شده است. اندازه ظرف $D_t = 0.9 \text{ m}$ و $H = 0.9 \text{ m}$ می‌باشد. دور همزن rpm ۵۰ است. توان همزن را محاسبه کنید.

۳-۴-۵. طراحی سیستم اختلاط: یک سیستم اختلاط برای سیالی با دانسیته 950 kg/m^3 و ویسکوزیته 0.05 Pa.s قرار است طراحی شود. حجم ظرف $1/5 \text{ m}^3$ و همزن از نوع توربینی بازشش تیغه با تیغه‌هایی به زاویه 45° (منحنی ۳ شکل ۴-۴-۳) و با مشخصات $D_a/D_t = 0.35$ و $D_a/W = 8$ می‌باشد. برای طراحی اولیه از توان 0.5 kW/m^3 استفاده می‌شود. ابعاد سیستم اختلاط، دور برحسب rpm و توان برحسب kW را محاسبه کنید.

۳-۴-۶. افزایش مقیاس زمان اختلاط برای یک همزن توربینی: برای افزایش مقیاس سیستم همزن توربینی موارد زیر را انجام دهید.

(الف) معادله (۳-۴-۱۷) را به ازای $\frac{\text{توان}}{\text{واحد حجم}}$ یکسان به دست آورید.

(ب) معادله (۳-۴-۱۸) را برای زمانهای اختلاط یکسان به دست آورید.

۳-۴-۷. زمان اختلاط در یک سیستم همزن توربینی: موارد زیر را انجام دهید:

(الف) زمان اختلاط را برای سیستم توربینی مثال ۳-۴-۱a به دست آورید.

(ب) با استفاده از سیستمی مشابه با قسمت (الف)، اما برای تانکی به حجم 10 m^3 و نسبت

$\frac{\text{توان}}{\text{واحد حجم}}$ یکسان، زمان جدید اختلاط را به دست آورید.

جواب: (الف) $t_T = 17/7 \text{ s}$, $t_t = 4/1$

۳-۵-۱. آفت فشار جریان پوره موز به عنوان یک سیال پاورلا: یک سیال بیولوژیکی پاورلا (پوره

موز) در دمای $23/9^\circ \text{C}$ با سرعت $1/018 \text{ m/s}$ از طریق یک لوله صاف به طول $6/1 \text{ m}$ و

قطر داخلی $0/01267 \text{ m}$ در جریان است. خواص جریانی سیال، $K = 6 \text{ N.s}^2/\text{m}^2$ و

$n = 0/454$ می‌باشد. دانسیته سیال 976 kg/m^3 است.

الف) عدد رینولدز عمومی و همچنین افت فشار را با استفاده از معادله (۹-۵-۳) محاسبه کنید. ابتدا از تبدیل K به K' مطمئن شوید.

ب) قسمت الف) را با استفاده از روش ضریب اصطکاک تکرار کنید.

جواب: الف) $N_{Re, gen} = 636/6$ ، $\Delta p = 245/2 \text{ kN/m}^2$ ($5120 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$)

۳-۵-۲. افت فشار سیال شبه پلاستیک: یک سیال شبه پلاستیک پاورلا با دانسیته $63/2 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ در لوله‌ای به طول 100 ft و به قطر داخلی $2/067 \text{ in}$ با سرعت میانگین $0/5 \text{ ft/s}$ در جریان است. خواص جریانی سیال، $K = 0/28 \text{ lb}_f \cdot \text{s}^n/\text{ft}^2$ و $n = 0/5$ می‌باشند. عدد رینولدز عمومی و همچنین افت فشار را با استفاده از روش ضریب اصطکاک محاسبه کنید.

۳-۵-۳. جریان مغشوش سیال غیرنیوتنی سس سیب: سس سیب با خواص جریانی داده شده در جدول ۳-۵-۱ در یک لوله صاف با قطر داخلی $50/8 \text{ m}$ و طول $3/05 \text{ m}$ با سرعت $4/57 \text{ m/s}$ در جریان است.

الف) ضریب اصطکاک و افت فشار در لوله صاف را محاسبه کنید.

ب) همین اعمال را برای یک لوله از جنس فولاد تجارتي با قطر داخلی یکسان و ضریب زبری $\epsilon = 4/6 \times 10^{-5} \text{ m}$ تکرار کنید.

جواب: الف) $N_{Re, gen} = 4855$ ، $f = 0/0073$ (ب) $f = 0/0100$

۳-۵-۴. اختلاط یک مایع غیرنیوتنی: یک مایع شبه پلاستیک دارای خواص، $n = 0/53$ و $K = 26/49 \text{ N} \cdot \text{s}^n/\text{m}^2$ و $\rho = 975 \text{ kg/m}^3$ در سیستمی مشابه شکل ۳-۵-۴ که $D_1 = 0/304 \text{ m}$ و $D_2 = 0/151 \text{ m}$ و $N = 5 \text{ rev/s}$ می‌باشد، هم زده میشود. $N'_{Re, n}$ و μ_a توان برحسب kW را برای این سیستم محاسبه کنید.

جواب: $\mu_a = 4/028 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ، $N'_{Re, n} = 27/60$ ، $N_p = 3/1$ ، $P = 0/02966 \text{ kW}$

۳-۵-۵. خواص جریانی یک سیال غیرنیوتنی با استفاده از داده‌های ویسکومتر دوار: داده‌های زیر از یک ویسکومتر دوار بروکفیلد در مورد یک سیال به دست آمده است.

50	20	10	5	2/5	1	0/5	RPM
4636	2379	1365	754	402/5	168/9	86/2	گشتاور
							(dyn.cm)

قطر استوانه دوار هم مرکز درونی $25/15 \text{ mm}$ و قطر استوانه بیرونی $27/62 \text{ mm}$ و طول

مؤثر $92/39 \text{ mm}$ است. خواص جریانی این سیال غیرنیوتنی را معین کنید.

جواب: $n = 0.87$

۳-۶-۱. معادله پیوستگی در یک استوانه: سیالی با دانسیته ثابت ρ در راستای محور z در

یک لوله مدور با تقارن محوری در جریان است. امتداد شعاعی با r مشخص شده است.

الف) با استفاده از موازنه پوسته‌ای در مختصات استوانه‌ای با ابعاد dz و dr معادله پیوستگی

برای این سیستم را به دست آورید.

ب) از معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای برای به دست آوردن معادله مورد نظر

استفاده کنید.

۳-۶-۲. تغییر دستگاه مختصات برای به دست آوردن معادله پیوستگی: با استفاده از معادله عمومی

پیوستگی در مختصات دکارتی آن را به معادله (۳-۶-۲۷) که معادله پیوستگی در مختصات

استوانه‌ای می‌باشد، تبدیل کنید. برای انجام این کار از نسبت‌هایی که در معادله (۳-۶-۲۶)

داده شده، استفاده کنید.

۳-۷-۱. ترکیب معادلات پیوستگی و حرکت: با استفاده از معادله پیوستگی و معادلات

حرکت برای مؤلفه‌های α ، γ و α معادله (۳-۷-۱۳) را به دست آورید.

۳-۸-۱. سرعت میانگین در یک لوله مدور: با استفاده از معادله (۳-۸-۱۷) برای سرعت در یک لوله

مدور به صورت تابعی از شعاع r

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (r^2 - r_0^2) \quad (3-8-17)$$

معادله (۳-۸-۱۹) را برای سرعت میانگین به دست آورید.

$$v_{z,av} = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad (3-8-19)$$

۳-۸-۲. جریان آرام در یک فضای حلقوی استوانه‌ای: تمام معادلات داده شده در مثال ۳-۸-۴ را

با نشان دادن تمام مراحل به دست آورید. همچنین معادله‌ای برای سرعت میانگین $v_{z,av}$

به دست آورید. نهایتاً، برای به دست آوردن افت فشار از $z = 0$ برای $z = L$ تا $p = p_0$ برای

$p = p_L$ انتگرال بگیرید.

$$v_{z,av} = \frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} \left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)} \right] \quad \text{جواب:}$$

$$v_{z,av} = \frac{p_0 - p_L}{8\mu L} \left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)} \right]$$

۳-۸-۳. توزیع سرعت در یک برج دیواره مرطوب: در یک برج دیواره مرطوب عمودی، سیال از جداره داخلی آن به صورت یک فیلم نازک به ضخامت δ متر به طور آرام در جهت عمودی z جریان پیدا می‌کند. معادله‌ای برای توزیع سرعت v_z به صورت تابعی از x به دست آورید. x فاصله از سطح مایع به طرف دیوار است. سیال در فاصله زیادی از مدخل ورودی است. همچنین روابطی برای v_z av و v_z max به دست آورید. [راهنمایی: در $x = \delta$ در دیواره، $v_z = 0$ و در $x = 0$ سطح مایع، $v_z = v_z$ max]. تمام مراحل را نشان دهید.

$$\text{جواب: } v_z = (\rho g \delta^2 / 2\mu) [1 - (x/\delta)^2], \quad v_{z,av} = \rho g \delta^2 / 3\mu, \quad v_{z,max} = \rho g \delta^2 / 2\mu$$

۳-۸-۴. توزیع سرعت در لایه نازک در حال سقوط و موازنه دیفرانسیلی ممتوم: یک مایع نیوتنی به صورت یک لایه نازک در حال سقوط روی یک سطح شیب دار صاف، در جریان است. این سطح با راستای عمودی زاویه β می‌سازد. فرض کنید در این حالت قسمتی از سیال که مورد نظر است به اندازه کافی از دو انتهای سطح دور است و اثرات انتهایی روی توزیع سرعت وجود ندارد. ضخامت فیلم δ است. این سیستم مشابه شکل ۳-۹-۲ است. اما عمودی نیست. موارد زیر را به دست آورید:

الف) معادله‌ای برای توزیع سرعت v_z به صورت تابعی از x در این فیلم با استفاده از معادله موازنه دیفرانسیلی ممتوم به دست آورید.

ب) سرعت ماکزیمم و سرعت میانگین چقدر است؟

پ) معادله توزیع شار ممتوم (توزیع تنش) τ_{xz} چیست؟ [راهنمایی: آیا معادله (۳-۷-۱۹) در این سیستم قابل استفاده است؟]

$$\text{جواب: الف) } v_z = (\rho g \delta^2 \cos \beta / 2\mu) [1 - (x/\delta)^2]$$

$$\text{ب) } \tau_{xz} = \rho g x \cos \beta$$

۳-۸-۵. توزیع سرعت در جریان بین صفحات موازی: در مثال ۳-۸-۲ یک سیال بین دو صفحه موازی و عمودی در حالی که یکی از صفحات متحرک است در جریان می‌باشد. موارد زیر را محاسبه کنید.

الف) سرعت میانگین و سرعت حداکثر را محاسبه کنید.

ب) توزیع سرعت را برای سه حالتی که، سطح متحرک در حال حرکت به طرف بالا، به طرف پایین و ثابت است رسم کنید.

۳-۸-۶. تبدیل تنش برشی بر حسب حرکت سیال: با شروع از مؤلفه x معادله حرکت (۳-۷-۱۰) که

برحسب تنش برشی است، آن را به معادله حرکت (۳-۷-۳۶) بر حسب گرادیان سرعت برای یک سیال نیوتنی با ρ و μ ثابت تبدیل کنید. توجه کنید که در این حالت $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$. همچنین استفاده از معادلات (۳-۷-۲۰) و (۳-۷-۱۴) بایستی مد نظر باشد.

۳-۸-۷. به دست آوردن معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای: با استفاده از موازنه جرم بر روی یک المان ساکن به حجم $\Delta z \ r \ \Delta r \ \Delta \theta$ معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای را به دست آورید.

۳-۸-۸. جریان بین دو استوانه هم محور در حال چرخش: شکل هندسی دو استوانه هم محور مشابه با مثال ۳-۸-۵ است. اما در این حالت هر دو استوانه با سرعت‌های دورانی داخلی و خارجی ω_1 و ω_2 در حال چرخش‌اند. سرعت و توزیع تنش برشی را با استفاده از معادله دیفرانسیلی ممتوم به دست آورید.

$$\text{جواب: } v_{\theta} = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[r(\omega_2 - \frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2}) - \frac{R_1^2}{r} (\omega_2 - \omega_1) \right]$$

۳-۹-۱. تابع پتانسیل: تابع پتانسیل در یک موقعیت مشخص جریان $\phi = C(x^2 - y^2)$ است که C یک ثابت است. بررسی کنید که آیا این معادله، معادله لاپلاس را ارضاء می‌کند. مؤلفه‌های سرعت v_x و v_y را تعیین کنید.

$$\text{جواب: } (C \text{ یک ثابت است}) \quad v_x = 2Cx, \quad v_y = -2Cy$$

۳-۹-۲. تعیین مؤلفه‌های سرعت با استفاده از تابع پتانسیل: تابع پتانسیل برای یک جریان به صورت $\phi = Ax + By$ داده شده است که در آن A و B دو ثابت هستند. سرعت‌های v_x و v_y را معین کنید.

۳-۹-۳. تابع جریان و بردار سرعت: جریان دو بعدی یک سیال با تابع جریان $\phi = Bxy$ داده شده که در آن $B = 50 \text{ s}^{-1}$ می‌باشد و واحدهای x و y برحسب cm است. مقدار v_x ، v_y و بردار سرعت را در $x = 1 \text{ cm}$ و $y = 1 \text{ cm}$ تعیین کنید.

$$\text{جواب: } v = 70/\sqrt{2} \text{ cm/s}$$

۳-۹-۴. تابع جریان و تابع پتانسیل: یک مایع به موازات محور x در جریان است. جریان یکنواخت است و با معادلات $v_x = U$ و $v_y = 0$ مشخص می‌شود.

الف) تابع جریان ψ را برای این میدان جریان بیابید و خطوط جریان را رسم کنید.

ب) تابع پتانسیل را بیابید و خطوط هم پتانسیل را رسم کنید.

$$\text{جواب: الف) } \psi = Uy + C \text{ (یک ثابت است)}$$

۳-۹-۵. مؤلفه‌های سرعت و تابع جریان: یک مایع به طور یکنواخت با زاویه β نسبت به محور x

در جریان است. مؤلفه‌های سرعت $v_x = U \cos \beta$ و $v_y = U \sin \beta$ می‌باشند. تابع جریان و تابع پتانسیل را بیابید.

جواب: (C یک ثابت است) $\psi = Uy \cos \beta - Ux \sin \beta + C$

۳-۹-۶. میدان جریان با خطوط جریان هم مرکز: جریان سیالی که خطوط جریان هم مرکز دارد، تابع جریانی به صورت $\psi = 1/(x^2 + y^2)$ دارد. مؤلفه‌های سرعت v_x و v_y را بیابید. همچنین، تعیین کنید که آیا جریان چرخشی است؟ در این صورت سرعت چرخش جریان، $2\omega_z$ را معین کنید.

۳-۹-۷. تابع پتانسیل و میدان سرعت: در مثال ۳-۹-۲ مؤلفه‌های سرعت داده شده بود. نشان دهید که آیا پتانسیل سرعت وجود دارد؟ در این صورت ϕ را معین کنید.

جواب: (C یک ثابت است) $\phi = ax^3/3 - axy^2 + C$

۳-۹-۸. معادله حرکت اولر برای یک سیال ایده‌آل: بنا استفاده از معادلات اولر (۳-۹-۲) تا (۳-۹-۴)، برای سیالات ایده‌آل با دانسیته ثابت و ویسکوزیته صفر، معادله زیر را به دست آورید.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \rho g$$

۳-۱۰-۱. لایه مرزی آرام روی یک صفحه صاف: آب در دمای 20°C و با سرعت 0.914 m/s روی یک صفحه صاف در جریان است. عرض صفحه 0.305 m است. الف) عدد رینولدز را در فاصله 0.305 m از لبه صفحه برای تعیین رژیم جریان محاسبه کنید.

ب) ضخامت لایه مرزی را در $x = 0.152 \text{ m}$ و $x = 0.305 \text{ m}$ از لبه صفحه محاسبه کنید. پ) نیروی دراگ کل را روی صفحه‌ای به طول 0.305 m محاسبه کنید.

جواب: الف) $N_{Re, L} = 2/77 \times 10^5$ (ب) $\delta = 0.0029 \text{ m}$ در $x = 0.305 \text{ m}$

۳-۱۰-۳. لایه مرزی در جریان عبوری از روی یک صفحه صاف: آب در دمای 293 K با سرعت 0.5 m/s روی یک صفحه صاف در جریان است. موارد زیر را به دست آورید: الف) ضخامت لایه مرزی را برحسب m در نقطه‌ای به فاصله 0.1 m از لبه صفحه محاسبه کنید.

ب) در همین نقطه، تنش برشی τ را محاسبه کنید. همچنین ضریب دراگ کلی را محاسبه کنید.

۳-۱۰-۴. نقطه گذر به لایه مرزی مغشوش: هوا در فشار 101.3 kPa و دمای 293 K با سرعت

۱۰۰ ft/s روی یک صفحه صاف در جریان است. اغتشاش در جریان هوا طوری است که گذر از لایه مرزی آرام به معشوش در $10^5 \times 5 = \text{Re}_L$ اتفاق می افتد. الف) فاصله نقطه گذر را از لبه صفحه محاسبه کنید.

ب) ضخامت لایه مرزی δ در فواصل ۰/۵ ft و ۰/۳ ft از لبه صفحه، همچنین ضریب دراگ را برای هر دو فاصله ۰/۳ ft و ۰/۵ L محاسبه کنید.

۳-۱۱-۱. آنالیز ابعادی برای جریان عبوری از اطراف یک جسم: یک سیال از اطراف یک جسم جامد در جریان است. نیروی F وارده بر جسم تابعی از سرعت سیال v و دانسیته سیال ρ و ویسکوزیته سیال μ و بعد جسم L می باشد. با آنالیز ابعادی، گروههای بدون بعد متشکل از پارامترهای داده شده را به دست آورید. (توجه: از سیستم واحدهای M, L, t استفاده کنید. واحد $F, ML/t^2, \rho, v, L$ را به عنوان متغیرهای اصلی در نظر بگیرید.)

$$\text{جواب: } \pi_1 = (F/L^2)/\rho v^2, \quad \pi_2 = \mu/Lv\rho$$

۳-۱۱-۲. آنالیز ابعادی برای تشکیل حباب: داده های مربوط به پدیده تشکیل حباب هنگام عبور گاز از یک اریفیس در زیر سطح مایع می تواند توسط روش آنالیز ابعادی به یکدیگر ربط داده شود. فرض کنید که متغیرهای مؤثر، قطر حباب d ، قطر اریفیس d_c ، دانسیته مایع ρ ، کشش سطحی σ برحسب N/m ، ویسکوزیته مایع μ و g باشند. d, ρ و g را به عنوان پارامترهای اصلی در نظر بگیرید. گروههای بدون بعد را به دست آورید.

$$\text{جواب: } \pi_1 = d/v, \quad \pi_2 = \sigma/\rho d^2 g, \quad \pi_3 = \mu^2/\rho^2 d^3 g$$

منابع

- (A1) Allis Chalmers Mfg. Co. *Bull.* 1659.
 (A2) American Gas Association, "Orifice Metering of Natural Gas," *Gas Measurement Rept. 3*, New York, 1955.
 (B1) BENNETT, C. O., and MYERS, J. E. *Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1982.
 (B2) BIRD, R. B., STEWART, W. E., and LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
 (B3) BATES, R. L., FONDY, P. L., and CORPSTEIN, R. R. *I.E.C. Proc. Des. Dev.*, 2, 310 (1963).
 (B4) BROWN, G. G., et al. *Unit Operations*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1950.
 (B5) BIGGS, R. D., *A.I.Ch.E.J.*, 9, 636 (1963).
 (C1) CHARM, S. E. *The Fundamentals of Food Engineering*. 2nd ed. Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971.

- (C2) CARMAN, P. C. *Trans. Inst. Chem. Eng. (London)*, **15**, 150 (1937).
- (C3) CALDERBANK, P. H. In *Mixing: Theory and Practice*, Vol. 2, V. W. Uhl and J. B. Gray (eds.). New York: Academic Press, Inc., 1967.
- (D1) DREW, T. B., and HOOPEs, J. W., Jr. *Advances in-Chemical Engineering*. New York: Academic Press, Inc., 1956.
- (D2) DODGE, D. W., and METZNER, A. B. *A.I.Ch.E. J.*, **1**, 434 (1955).
- (E1) ERGUN, S. *Chem. Eng. Progr.*, **48**, 89 (1952).
- (F1) FOX, E. A., and GEX, V. E. *A.I.Ch.E.J.*, **2**, 539 (1956).
- (G1) GODLESKI, E. S., and SMITH, J. C. *A.I.Ch.E. J.*, **8**, 617 (1962).
- (H1) HARPER, J. C., and EL SAHRIGI. *J. Food Sci.*, **30**, 470 (1965).
- (H2) HO, F. C., and KWONG, A. *Chem. Eng.*, July 23, 94 (1973).
- (K1) KUNII, D., and LEVENSPIEL, O. *Fluidization Engineering*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- (K2) KRIEGER, I. M., and MARON, S. H. *J. Appl. Phys.*, **25**, 72 (1954).
- (L1) LEAMY, G. H. *Chem. Eng.*, Oct. 15, 115 (1973).
- (L2) LEVA, M., WEINTRAUB, M., GRUMMER, M., POLLCHIK, M., and STORCH, H. H. *U.S. Bur. Mines Bull.*, 504 (1951).
- (M1) METZNER, A. B., FEEHS, R. H., RAMOS, H. L., OTTO, R. E., and TUTHILL, J. D. *A.I.Ch.E. J.*, **7**, 3 (1961).
- (M2) McCABE, W. L., SMITH, J. C., and HARRIOTT, P. *Unit Operations of Chemical Engineering, 4th ed.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1985.
- (M3) METZNER, A. B., and REED, J. C. *A.I.Ch.E. J.*, **1**, 434 (1955).
- (M4) MOHSENI, N. N. *Physical Properties of Plant and Animal Materials*, Vol. 1, Part II. New York: Gordon & Breach, Inc., 1970.
- (M5) MOO-YUNG, TICHAR, M. K., and DULLIEN, F. A. L. *A.I.Ch.E. J.*, **18**, 178 (1972).
- (M6) McKELVEY, J. M. *Polymer Processing*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- (N1) NORWOOD, K. W., and METZNER, A. B. *A.I.Ch.E. J.*, **6**, 432 (1960).
- (P1) PERRY, R. H., and GREEN, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
- (P2) PINCHBECK, P. H., and POPPER, F. *Chem. Eng. Sci.*, **6**, 57 (1956).
- (P3) PATTERSON, W. I., CARREAU, P. J., and YAP, C. Y. *A.I.Ch.E. J.*, **25**, 208 (1979).
- (P4) PERRY, R. H., and CHILTON, C. H. *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
- (R1) RUSHTON, J. H., COSTICH, D. W., and EVERETT, H. J. *Chem. Eng. Progr.*, **46**, 395, 467 (1950).
- (R2) RAUTZEN, R. R., CORPSTEIN, R. R., and DICKEY, D. S. *Chem. Eng.*, Oct. 25, 119 (1976).
- (S1) STEVENS, W. E. Ph.D. thesis, University of Utah, 1953.
- (S2) SKELLAND, A. H. P. *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- (S3) STREETER, V. L. *Handbook of Fluid Dynamics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.
- (S4) SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.
- (T1) TREYBAL, R. E. *Liquid Extraction*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953.

- (T2) TREYBAL, R. E. *Mass Transfer Operations*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1980.
- (U1) UHL, V. W., and GRAY, J. B. (eds.), *Mixing: Theory and Practice*, Vol. I. New York: Academic, 1969.
- (W1) WEISMAN, J., and EFFERDING, L. E. *A.I.Ch.E. J.*, **6**, 419 (1960).
- (W2) WINNING, M. D. M.Sc. thesis, University of Alberta, 1948.
- (W3) WALTERS, K. *Rheometry*. London: Chapman & Hall Ltd., 1975.
- (W4) WEN, C. Y., and YU, Y. H. *A.I.Ch.E. J.*, **12**, 610 (1966).
- (W5) WILHELM, R. H., and KWAIK, M. *Chem. Eng. Progr.*, **44**, 201 (1948).
- (W6) WELTY, J. R., WICKS, C. E., and WILSON, R. E. *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1984.
- (Z1) ZLOKARNIK, M., and JUDAT, H. *Chem. Eng. Tech.*, **39**, 1163 (1967).

فصل چهارم

اصول انتقال حرارت پایدار

۴-۱ مقدمه و مکانیسمهای انتقال حرارت

۴-۱A مقدمه‌ای بر انتقال حرارت پایدار

انتقال انرژی به شکل گرما در بسیاری از فرایندهای شیمیایی و انواع دیگر فرایندها اتفاق می‌افتد. اغلب انتقال حرارت در عملیات واحدهایی مانند خشک کردن مواد غذایی یا الوار، تقطیر الکل، سوزاندن سوخت و تبخیر صورت می‌گیرد. انتقال حرارت به دلیل اختلاف دما، به عنوان نیروی محرکه، اتفاق می‌افتد و جریان گرما از ناحیه‌ای با دمای بیشتر به ناحیه‌ای با دمای کمتر برقرار می‌شود. در بخش ۲-۳ معادله‌ای برای موازنه یک خاصیت عمومی از جمله ممتنم، انرژی گرمایی، یا جرم در حالت ناپایدار با نوشتن معادله (۲-۳-۷) به دست آوردیم. با نوشتن معادله‌ای مشابه و فقط برای انتقال حرارت داریم،

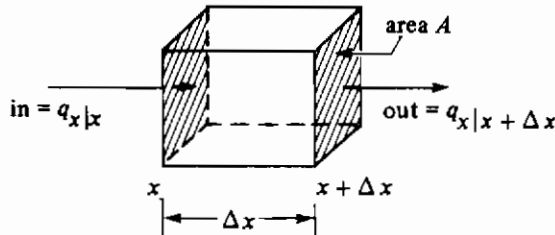
$$(4-1-1) \quad (\text{نرخ تجمع گرما}) + (\text{نرخ گرمای خروجی}) = (\text{نرخ تولید گرما}) + (\text{نرخ گرمای ورودی})$$

با فرض اینکه انتقال حرارت تنها از طریق هدایت باشد، می‌توانیم معادله (۲-۳-۱۴) را که همان قانون فوریه است به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (4-1-2)$$

با نوشتن موازنه گرمایی ناپایدار در جهت x برای یک المان حجمی یا حجم کنترل شکل ۴-۱-۱ با استفاده از معادله‌های (۴-۱-۱) و (۴-۱-۲) برای سطحی به مساحت $A \text{ m}^2$ داریم:

$$q_{x|x} + \dot{q}(\Delta x \cdot A) = q_{x|x+\Delta x} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} (\Delta x \cdot A) \quad (4-1-3)$$



شکل ۴-۱-۱. موازنه ناپایدار برای انتقال حرارت در حجم کنترل

که \dot{q} سرعت تولید گرما در واحد حجم است. با فرض این‌که تولید گرما نداشته باشیم و با فرض انتقال حرارت پایدار که در آن سرعت تجمع صفر است، معادله (۴-۱-۳) به صورت زیر در می‌آید،

$$q_{x|x} = q_{x|x+\Delta x} \quad (4-1-4)$$

این بدان معنی است که سرعت ورودی گرما از طریق هدایت برابر با سرعت خروجی گرما از طریق هدایت است، یا q_x برای سیستم پایدار انتقال حرارت با زمان ثابت است.

در این فصل با یک حجم کنترل که در آن نرخ تجمع گرما برابر با صفر است سر و کار داریم و انتقال حرارت پایدار است. نرخ انتقال حرارت نسبت به زمان ثابت است و دماها در نقاط گوناگون سیستم با زمان تغییر نمی‌کنند. برای حل مسائل انتقال حرارت در حالت پایدار روابط تجربی گوناگونی به شکل معادلات دیفرانسیل برای مکانیسمهای مختلف انتقال حرارت مانند قانون فوریه وجود دارند. روابطی برای محاسبه توزیع دما و شار گرمایی در این فصل به دست آمده‌اند.

دوباره در فصل پنجم معادلات بقای انرژی (۲-۷-۲) و (۴-۱-۳) برای شرایطی که نرخ تجمع صفر نیست در حالت ناپایدار مورد استفاده قرار خواهند گرفت. رابطه کاربردی قانون فوریه به شکل یک معادله دیفرانسیل جزئی در مواردی که دما در نقاط مختلف و نرخ انتقال حرارت با زمان تغییر کنند مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در بخش ۵-۶ یک معادله دیفرانسیل عمومی برای تغییرات انرژی در حالت‌های خاص به دست خواهد آمد که از آن برای تعیین توزیع دما و شار گرمایی انتگرال‌گیری می‌شود.

۴-۱B مکانیسمهای اساسی انتقال حرارت

انتقال حرارت به وسیله یک یا چند تا از سه مکانیسم اساسی: هدایت، جابه‌جایی و تابش صورت می‌گیرد.

۱- هدایت: انتقال حرارت هدایتی ممکن است بین جامدات، مایعات و گازها وجود داشته باشد. گرما به وسیله انتقال انرژی حرکتی بین مولکولهای مجاور هدایت می‌شود. در یک گاز، مولکولهای گرمتر که انرژی و تحرک بیشتری دارند، به مولکولهای مجاور با سطح انرژی پایین‌تر انرژی می‌دهند. این نوع انتقال تا حدی در همه جامدات، مایعات و گازهایی که در آنها اختلاف دما وجود دارد دیده می‌شود. در هدایت، انرژی به وسیله الکترونهاي آزاد نیز می‌تواند انتقال یابد، که این امر در جامدات فلزی خیلی مهم است. مثالی از انتقال حرارت عمدتاً هدایتی، انتقال حرارت از طریق دیواره‌های یک مبدل یا یک یخچال، عملیات حرارتی فولاد، سرد شدن زمین در طول زمستان و مانند آن می‌باشد.

۲- جابه‌جایی: انتقال حرارت جابه‌جایی در ارتباط با گرمای منتقل شده به وسیله توده سیال و اختلاط المانهای میکروسکوپی قسمت گرمتر با قسمت سردتر یک گاز یا مایع است. این مکانیسم همچنین انرژی مبادله شده بین یک سطح جامد و یک سیال را در بر می‌گیرد. بین انتقال حرارت به وسیله جابه‌جایی اجباری که در آن سیال توسط یک پمپ یا فن یا یک وسیله مکانیکی دیگر اجباراً به جریان می‌افتد، با جابه‌جایی آزاد که در آن به دلیل اختلاف دانسیته سیال گرمتر یا سردتر نزدیک به سطح جامد باعث جریان چرخشی می‌شود، بایستی فرق قائل شد. مثالی برای انتقال حرارت به وسیله جابه‌جایی می‌توان ارائه کرد که عبارتند از: انتقال گرما از یک رادیاتور ماشین که در آن هوا به وسیله فن در چرخش است، پختن غذا در یک ظرف همزن‌دار، سرد کردن یک فنجان قهوه داغ بوسیله دمیدن بر روی سطح آن و مانند آن.

۳- تابش: تابش با انتقال حرارت به وسیله هدایت و جابه‌جایی تفاوت دارد. زیرا این نوع انتقال حرارت برای انتشار به محیط مادی نیاز ندارد. تابش، انتقال انرژی از طریق فضا به وسیله امواج الکترومغناطیسی است. امواج الکترومغناطیسی به شکلهای مختلف وجود دارند، مثل امواج الکترومغناطیسی که برای انتقال نور مرئی به کار می‌روند. همان قوانینی که بر انتقال نور حاکم است بر تابش حرارتی نیز حاکم است. جامدات و مایعات تمایل به جذب اشعه‌های تابیده شده دارند لذا تابش فقط در انتقال از طریق فضا یا گازها مهم است. یکی از مثالهای مهم در تابش، انتقال گرما از خورشید به زمین است. مثالهای دیگر مثل پختن غذا با استفاده از المانهای گرمایی، گرم کردن سیال در لوله ماریچ داخبل یک کوره و غیره را نیز می‌توان در نظر گرفت.

۴-۱-۴ قانون فوریه در انتقال حرارت هدایتی

همچنان که در بخش ۳-۲ برای معادله عمومی انتقال مولکولی بیان شد هر سه نوع فرایند اساسی انتقال (انتقال ممتنم، انتقال حرارت و انتقال جرم) به وسیله معادله عمومی یکسانی مشخص می شوند. انتقال جریان الکتریکی هم می تواند در این دسته قرار بگیرد. این معادله مهم به صورت زیر نوشته می شود:

$$\text{نیروی رانش} = \frac{\text{نرخ فرایند انتقال}}{\text{مقاومت}} \quad (۲-۳-۱)$$

این معادله آنچه را که ما طبیعتاً می دانیم بیان می کند: به منظور انتقال یک خاصیت مانند گرما یا جرم، نیاز به یک نیروی رانش^(۱) داریم که بر مقاومت موجود غلبه کند.

انتقال حرارت به طریق هدایت نیز از این معادله اساسی تبعیت می کند و به صورت قانون فوریه برای هدایت گرمایی در سیالات یا جامدات نوشته می شود.

$$\frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (۴-۱-۲)$$

که q_x نرخ انتقال گرما در جهت x بر حسب Watt ، A سطح مقطع عمود بر جهت جریان گرمایی بر حسب m^2 ، T دما بر حسب کلوین، x فاصله بر حسب متر و k ضریب هدایت گرمایی بر حسب W/m.K در سیستم SI است. کمیت q_x/A شار گرمایی نامیده می شود و بر حسب W/m^2 است. کمیت dT/dx بیانگر تغییرات دما در جهت x است. علامت منفی در معادله (۴-۱-۲) لازم است زیرا اگر جریان گرمایی در یک جهت مثبت باشد دما در آن جهت کاهش می یابد.

واحدها در معادله (۴-۱-۲) می تواند در سیستم cgs نیز بیان شود، q_x بر حسب cal/s ، A بر حسب cm^2 ، k بر حسب $\text{cal/s} \cdot \text{cm} \cdot \text{C}$ ، T بر حسب $^{\circ}\text{C}$ و x بر حسب cm است. در سیستم انگلیسی q_x بر حسب btu/h ، A بر حسب ft^2 ، T بر حسب $^{\circ}\text{F}$ ، x بر حسب ft ، k بر حسب $\text{btu/h} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ و q_x/A بر حسب $\text{btu/h} \cdot \text{ft}^2$ است. از ضمیمه A.1 ضرایب تبدیل ضریب هدایت گرمایی به صورت زیر هستند:

$$1 \text{ btu/h} \cdot \text{ft} \cdot \text{F} = 4.1365 \times 10^{-3} \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot \text{C} \quad (۴-۱-۵)$$

$$1 \text{ btu/h} \cdot \text{ft} \cdot \text{F} = 1.73073 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad (۴-۱-۶)$$

برای شار گرمایی و توان،

$$1 \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 = 3.1546 \text{ W/m}^2 \quad (۴-۱-۷)$$

$$1 \text{ btu/h} = 0.29307 \text{ W} \quad (۴-۱-۸)$$

می توانیم از قانون فوریه، معادله (۴-۱-۲)، برای انتقال حرارت پایدار از طریق یک دیواره

صاف با سطح مقطع ثابت A انتگرال بگیریم که دمای داخلی در نقطه ۱، T_1 و در نقطه ۲، T_2 و دو نقطه به فاصله $x_2 - x_1$ از یکدیگر هستند. با مرتب کردن معادله (۴-۱-۲)،

$$\frac{q_x}{A} \int_{x_1}^{x_2} dx = -k \int_{T_1}^{T_2} dT \quad (4-1-9)$$

با انتگرالگیری و با فرض این که k یک ثابت است و با دما تغییر نمی کند و همچنین با حذف زیرنویس x از q_x برای ساده شدن داریم،

$$\frac{q}{A} = \frac{k}{x_2 - x_1} (T_1 - T_2) \quad (4-1-10)$$

مثال ۴-۱-۱ تلفات گرمایی از طریق یک دیواره عایق شده

تلفات گرمایی را به ازای هر متر مربع از سطح مفید یک دیواره که با یک لایه ایف به ضخامت $25/4$ mm عایق شده است و دمای داخلی و خارجی آن به ترتیب $352/7$ K و $297/1$ K است محاسبه کنید.

حل: از ضمیمه A.3 ضریب هدایت گرمایی ایف $0/048$ W/m.K است. ضخامت $x_2 - x_1 = 0/0254$ m است. با جایگزینی در معادله (۴-۱-۱۰)،

$$\begin{aligned} \frac{q}{A} &= \frac{k}{x_2 - x_1} (T_1 - T_2) = \frac{0/048}{0/0254} \times (352/7 - 297/1) \\ &= 105/1 \text{ W/m}^2 \\ &= 105/1 \text{ W/m}^2 \times \frac{1}{(3/1546 \text{ W/m}^2)/(\text{btu/h.ft}^2)} = 33/3 \text{ btu/h.ft}^2 \end{aligned}$$

۴-۱D ضریب هدایت گرمایی

ضریب هدایت گرمایی به صورت معادله (۴-۱-۲) تعریف شده است و بر اساس این تعریف روشهای تجربی برای اندازه گیری ضریب هدایت گرمایی فلزات مختلف به دست آمده است. در جدول ۴-۱-۱ ضرایب هدایت گرمایی تعداد کمی از مواد برای مقایسه داده شده است. اطلاعات کاملتر برای مواد آلی و غیرآلی در ضمیمه A.3 و برای مواد غذایی و بیولوژیکی در ضمیمه A.4 بیان شده است. همچنان که در جدول ۴-۱-۱ دیده می شود گازها ضریب هدایت گرمایی پایتتر، مایعات دارای ضریب هدایت گرمایی میانگین و جامدات فلزی ضریب هدایت گرمایی خیلی بالایی دارند.

۱- گازها: در گازها مکانیسم هدایت گرمایی نسبتاً ساده است. مولکولها دائم در حرکت اتفاقی هستند و با یکدیگر برخورد کرده و مبادله انرژی و ممنت می‌کنند. اگر یک مولکول از یک ناحیه با دمای بالا به ناحیه‌ای با دمای پایین حرکت کند انرژی جنبشی به این ناحیه منتقل می‌شود و این انرژی را در هنگام برخورد با مولکولهای با انرژی پایتتر از دست می‌دهد. چون مولکولهای کوچکتر سریعتر حرکت می‌کنند، گازهایی مانند هیدروژن هدایت گرمایی بالاتری باید داشته باشند که در جدول ۱-۱-۴ نیز نشان داده شده است.

تئوریهایی که ضریب هدایت گرمایی گازها را پیش‌گویی می‌کنند دقت قابل قبولی دارند و در مراجع مختلف داده شده‌اند (RI). ضریب هدایت گرمایی تقریباً با ریشه دوم دمای مطلق افزایش می‌یابد و تا حدود چند اتمسفر مستقل از فشار است. اما در فشارهای بسیار پایین ضریب هدایت گرمایی به صفر نزدیک می‌شود.

۲- مایعات: مکانیسم فیزیکی هدایت در مایعات تا حدودی مشابه گازهاست. مولکولهای پر انرژی با مولکولهای کم انرژی برخورد می‌کنند، اما مولکولها آنقدر بهم نزدیک هستند که نیروهای بین مولکولی اثر بسیار زیادی بر تبادل انرژی دارند. چون تئوری مولکولی مناسبی برای مایعات در دسترس نیست، بنابراین، بسیاری از روابط ارائه شده برای پیش‌گویی ضریب هدایت، تجربی هستند. Reid و همکارانش (RI) در زمینه جزئیات این موضوع بحث کرده‌اند. ضریب هدایت گرمایی مایعات به صورت ضعیفی با دما تغییر می‌کند و می‌تواند به صورت یک معادله خطی به صورت زیر بیان شود،

$$k = a + bT \quad (۱۱-۱-۴)$$

که در این معادله a و b ثابتهای تجربی هستند. اساساً ضرایب هدایت گرمایی مایعات مستقل از فشار هستند. آب در مقایسه با مواد آلی مثل بنزن ضریب هدایت گرمایی بالاتری دارد. همان طور که در جدول ۱-۱-۴ نشان داده شده است، ضریب هدایت گرمایی بسیاری از مواد غذایی غیر منجمد مثل سرشیر و سس سیب که مقادیر زیادی آب دارند، نزدیک به آب خالص است.

۳- جامدات: ضرایب هدایت گرمایی جامدات همگن، که تعدادی از آنها در جدول ۱-۱-۴ ارائه شده است، در محدوده وسیعی تغییر می‌کنند. جامدات فلزی مانند مس و آلومینیوم ضریب هدایت گرمایی بسیار بالا دارند و بعضی عایقها مانند پشم سنگ و چوب پنبه ضریب هدایت گرمایی بسیار پایین دارند. گرما یا انرژی بین جامدات به وسیله دو مکانیسم هدایت می‌شود، مکانیسم اول آن است که گرما مانند الکتریسته به وسیله الکترونها آزاد که در شبکه‌های فلزی حرکت می‌کنند منتقل شود. در دومین مکانیسم، که در همه جامدات وجود دارد، گرما به وسیله انتقال انرژی ارتعاشی بین اتمهای مجاور هدایت می‌شود.

جدول ۴-۱-۱. ضریب انتقال حرارت هدایتی تعدادی از مواد در فشار ۱۰۱/۳۲۵ kPa (k بر حسب W/m.K)

Substance	Temp. (K)	k	Ref.	Substance	Temp. (K)	k	Ref.
Gases				Solids			
Air	273	0.0242	(K2)	Ice	273	2.25	(C1)
	373	0.0316		Fire claybrick	473	1.00	(P1)
H ₂	273	0.167	(K2)	Paper	—	0.130	(M1)
n-Butane	273	0.0135	(P2)	Hard rubber	273	0.151	(M1)
Liquids				Cork board	303	0.043	(M1)
Water	273	0.569	(P1)	Asbestos	311	0.168	(M1)
	366	0.680		Rock wool	266	0.029	(K1)
Benzene	303	0.159	(P1)	Steel	291	45.3	(P1)
	333	0.151			373	45	
Biological materials and foods				Copper	273	388	(P1)
Olive oil	293	0.168	(P1)		373	377	
	373	0.164		Aluminum	273	202	(P1)
Lean beef	263	1.35	(C1)				
Skim milk	275	0.538	(C1)				
Applesauce	296	0.692	(C1)				
Salmon	277	0.502	(C1)				
	248	1.30					

ضریب هدایت گرمایی مواد عایق مانند پشم سنگ مشابه هواست چون مواد عایق محتوی مقدار زیادی هوا هستند که در لایه‌های خالی آنها به دام افتاده است. ابر عایقها^(۱) برای عایق کردن مواد سرمازا مانند هیدروژن مایع به کار می‌روند که ترکیبی از چند لایه مواد با بازتابش زیاد می‌باشند و این لایه‌ها به وسیله فضا‌های خالی از هوا از هم جدا شده اند. ضرایب هدایت گرمایی این مواد به مراتب کمتر از هوا هستند. ضریب هدایت گرمایی یخ بسیار بزرگتر از آب است. به همین دلیل ضریب هدایت گرمایی مواد غذایی منجمد مانند گوشت گاو و ماهی آزاد که در جدول ۴-۱-۱ داده شده است بسیار بالاتر از ضریب هدایت گرمایی مواد غیر منجمد می‌باشد.

۴-۱E ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی

کاملاً واضح است که اگر هوا توسط وسیله‌ای بر روی یک قطعه ماده گرم دمیده شود آن ماده سریعتر سرد می‌شود. هنگامی که سیال بیرون از سطح جامد به صورت اجباری یا آزاد دارای حرکت جابه‌جایی است، نرخ انتقال حرارت از جامد به سیال یا برعکس به وسیله معادله زیر بیان می‌شود،

$$q = hA(T_w - T_f) \quad (۴-۱-۱۲)$$

که نرخ انتقال حرارت بر حسب W ، A مساحت بر حسب m^2 ، T_w دمای سطح جامد بر حسب K ، T_f دمای میانگین سیال در حال جریان بر حسب K و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی بر حسب $W/m^2 \cdot K$ است. در سیستم انگلیسی، h بر حسب $btu/h \cdot ft^2 \cdot ^\circ F$ است.

ضریب h تابع شکل هندسی سیستم، خواص سیال، سرعت جریان و اختلاف دما است. چون این ضریب غالباً به صورت تئوری قابل پیش‌گویی نیست، در بسیاری از موارد از روابط تجربی موجود برای پیش‌گویی این ضریب استفاده می‌شود. چون می‌دانیم وقتی سیال روی یک سطح جامد جریان پیدا می‌کند، لایه‌ای تقریباً نازک و ساکنی از سیال در مجاورت دیواره ایجاد می‌شود که مقاومت اصلی در مقابل انتقال حرارت است، بنابراین، اغلب ضریب h را ضریب فیلمی می‌گوییم.

در جدول ۴-۱-۲ درجه بزرگی مقادیر h برای مکانیسمهای مختلف جابه‌جایی آزاد یا طبیعی، جابه‌جایی اجباری، جوش و میعان داده شده است. آب بالاترین ضریب انتقال حرارت را دارد.

برای تبدیل ضریب انتقال حرارت h از سیستم انگلیسی به SI،

$$1 \text{ } btu/h \cdot ft^2 \cdot ^\circ F = 5/6783 \text{ } W/m^2 \cdot K$$

۴-۲ انتقال حرارت هدایتی

۴-۲۸ هدایت از طریق یک ورقه صاف^(۱) یا دیواره

در این بخش معادله فوریه (۴-۱-۲) برای به‌دست آوردن معادلات مربوط به هدایت یک بُعدی و پایدار سیستمهایی با شکل هندسی ساده مورد استفاده قرار گرفته است. برای یک ورقه صاف یا دیواره با سطح مقطع ثابت A و k ثابت در معادله (۴-۱-۲)، معادله (۴-۱-۱۰) را به‌دست آوردیم که می‌توانیم آن را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{q}{A} = \frac{k}{x_2 - x_1} (T_1 - T_2) = \frac{k}{\Delta x} (T_1 - T_2) \quad (4-2-1)$$

که این رابطه در شکل ۴-۲-۱ نشان داده شده است و در آن $\Delta x = x_2 - x_1$ است. معادله (۴-۲-۱۰) نشان می‌دهد که اگر T به جای T_1 و x به جای x_2 جایگزین شود، همچنان که در شکل ۴-۲-۱b نشان داده شده است، دما با فاصله به صورت خطی تغییر می‌کند.

جدول ۴-۱-۲. درجه بزرگی تقریبی تعدادی از ضرایب انتقال حرارت

Mechanism	Range of Values of h	
	$btu/h \cdot ft^2 \cdot ^\circ F$	$W/m^2 \cdot K$
Condensing steam	1000-5000	5700-28000
Condensing organics	200-500	1100-2800
Boiling liquids	300-5000	1700-28000
Moving water	50-3000	280-17000
Moving hydrocarbons	10-300	55-1700
Still air	0.5-4	2.8-23
Moving air	2-10	11.3-55

اگر ضریب هدایت گرمایی ثابت نباشد و با دما رابطه خطی داشته باشد، با جایگزینی (۴-۱-۱۱) در معادله (۴-۱-۲) و انتگرال‌گیری از آن داریم:

$$\frac{q}{A} = \frac{a + b \frac{T_1 + T_2}{2}}{\Delta x} (T_1 - T_2) = \frac{k_m}{\Delta x} (T_1 - T_2) \quad (4-2-2)$$

که در آن:

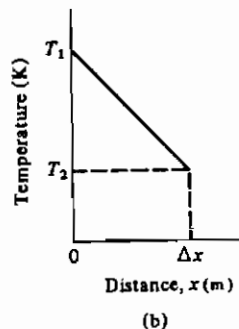
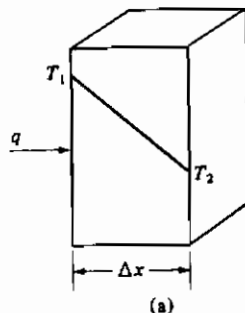
$$k_m = a + b \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (4-2-3)$$

این بدان معناست که مقدار میانگین k (یعنی k_m) در معادله (۴-۲-۲) در دمای میانگین خطی T_1 و T_2 ارزیابی می‌شود.

همچنان که در مقدمه بیان شد، در معادله (۲-۳-۱) نرخ فرایند انتقال برابر با نیروی رانش تقسیم بر مقاومت است. لذا معادله (۴-۲-۱) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x / kA} = \frac{T_1 - T_2}{R} = \frac{\text{نیروی رانش}}{\text{مقاومت}} \quad (4-2-4)$$

که مقاومت، $R = \frac{\Delta X}{kA}$ است و برحسب $^\circ F/btu$ یا K/W می‌باشد.



شکل ۴-۲-۱. هدایت حرارتی در یک دیواره صاف: (a) شکل هندسی دیوار (b) منحنی دما

۴-۲B هدایت از طریق یک استوانه توخالی

در بسیاری از موارد در فرایندهای صنعتی گرما از میان دیواره‌های ضخیم استوانه‌ای شکل منتقل می‌شود، مانند آنچه در یک لوله عایق دار یا بدون عایق اتفاق می‌افتد. استوانه توخالی شکل ۴-۲-۲ به شعاع درونی r_1 با دمای T_1 و شعاع بیرونی r_2 با دمای T_2 و طول L متر را در نظر بگیرید. گرما به شکل شعاعی از سطح درونی به بیرون می‌رود. با بازنویسی قانون فوریه، معادله (۴-۱-۲) در فاصله dr به جای dx داریم:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{dT}{dr} \quad (4-2-5)$$

سطح مقطع عمود بر جریان گرمایی به صورت زیر است:

$$A = 2\pi rL \quad (4-2-6)$$

با جایگزینی معادله (۴-۲-۶) در (۴-۲-۵) و مرتب کردن و انتگرال‌گیری از آن داریم:

$$\frac{q}{2\pi L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -k \int_{T_1}^{T_2} dT \quad (4-2-7)$$

$$q = k \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} (T_1 - T_2) \quad (4-2-8)$$

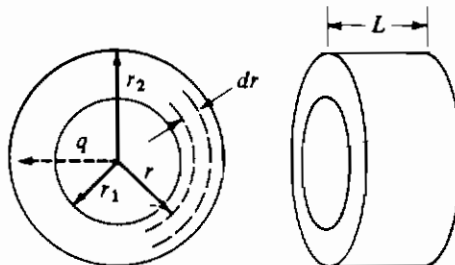
با ضرب کردن صورت و مخرج در $(r_2 - r_1)$ داریم:

$$q = kA_{lm} \frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = \frac{T_1 - T_2}{(r_2 - r_1)/(kA_{lm})} = \frac{T_1 - T_2}{R} \quad (4-2-9)$$

که در آن:

$$A_{lm} = \frac{(2\pi Lr_2) - (2\pi Lr_1)}{\ln(2\pi Lr_2/2\pi Lr_1)} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} \quad (4-2-10)$$

$$R = \frac{r_2 - r_1}{kA_{lm}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL} \quad (4-2-11)$$



شکل ۴-۲-۲. هدایت حرارتی در یک استوانه

میانگین لگاریتمی سطح را با A_{lm} نشان می‌دهیم. در کاربردهای مهندسی اگر $\frac{A_2}{A_1} < \frac{1}{5}$ باشد، میانگین حسابی سطح $\frac{A_1 + A_2}{2}$ در حدود ۱/۵٪ با میانگین لگاریتمی اختلاف دارد. اگر در معادله (۴-۲-۸) جایگزین r_2 و T جایگزین T_2 شود، دیده می‌شود که در این حالت نیز مانند دیواره صاف دمابه صورت یک تابع خطی از $\ln r$ به جای r است. اگر ضریب هدایت گرمایی بادماتابق معادله (۴-۱-۱۰) تغییر کند می‌توان نشان داد که مقدار میانگین برای استوانه هنوز همان k_m در معادله (۴-۲-۳) است.

مثال ۴-۲-۱ طول لوله‌های ماریچ خنک‌کننده

یک لوله استوانه‌ای توخالی با دیواره‌های ضخیم از جنس لاستیک سخت به قطر داخلی ۵ mm و قطر خارجی ۲۰ mm به عنوان یک سیستم سرد کننده موقتی در یک حمام استفاده می‌شود. آب یخ به سرعت در داخل لوله جریان دارد و دمای دیواره داخلی آن $274/9$ K و دمای سطح خارجی آن $297/1$ K است. کل گرمایی که از حمام توسط لوله‌های خنک‌کننده بایستی دفع شود $14/65$ W است. طول این لوله چقدر است؟

حل: از ضمیمه A.3، ضریب هدایت گرمایی در 0°C برابر با $k = 0/151$ W/m.K است. چون داده‌های دماهای دیگر در دسترس نیستند، از این مقدار در محدوده $274/9$ K تا $297/1$ استفاده می‌شود.

$$r_1 = \frac{5}{1000} = 0/005 \text{ m} \quad r_2 = \frac{20}{1000} = 0/02 \text{ m}$$

ابتدا محاسبه برای ۱ m از طول لوله انجام می‌شود. با حل معادله (۴-۲-۱۰) برای سطحهای A_1 ، A_2 و A_{lm} داریم:

$$A_1 = 2\pi L r_1 = 2\pi \times 1 \times 0/005 = 0/0314 \text{ m}^2, \quad A_2 = 0/1257 \text{ m}^2$$

$$A_{lm} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} = \frac{0/1257 - 0/0314}{2/303 \log(0/1257/0/0314)} = 0/068 \text{ m}^2$$

با جایگزینی در معادله (۴-۲-۹) و حل آن داریم:

$$q = k A_{lm} \frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = 0/151 \times 0/0682 \times \frac{274/9 - 297/1}{0/02 - 0/005}$$

$$= -15/2 \text{ W (51/9 btu/h)}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که جریان گرما از شعاع بیرونی r_2 به طرف شعاع درونی r_1 است. چون گرمای گرفته شده برای طول یک متر $15/2$ W است، طول لازم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{طول} = \frac{14/65 \text{ W}}{15/2 \text{ W/m}} = 0/964 \text{ m}$$

توجه داشته باشید که ضریب هدایت گرمایی لاستیک خیلی کم است. بنابراین عموماً از لوله‌های خنک‌کننده فلزی استفاده می‌شود. چون ضریب هدایت گرمایی فلزات زیاد است. مقاومت فیلم مایع در این مورد کم و قابل صرف‌نظر کردن است.

۴-۲-۴ هدایت گرما از طریق یک کره توخالی

هدایت گرمایی در یک کره توخالی یکی دیگر از موارد هدایت یک بعدی است. قانون فوریه را برای یک کره با ضریب هدایت گرمایی ثابت در فاصله dr که شعاع کره است می‌توان به کار برد:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{dT}{dr} \quad (4-2-5)$$

سطح مقطع عمود بر جریان گرما به صورت زیر است:

$$A = 4\pi r^2 \quad (4-2-12)$$

با جایگزینی معادله (۴-۲-۱۲) در معادله (۴-۲-۵) و مرتب کردن و سپس انتگرال‌گیری از آن داریم:

$$\frac{q}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -k \int_{T_1}^{T_2} dt \quad (4-2-13)$$

$$q = \frac{4\pi k(T_1 - T_2)}{1/r_1 - 1/r_2} = \frac{T_1 - T_2}{(1/r_1 - 1/r_2)/4\pi k} \quad (4-2-14)$$

به راحتی نشان داده می‌شود که دما با شعاع مطابق یک تابع هیپربولیک تغییر می‌کند. (مسأله ۴-۲-۵ را ببینید).

۴-۳ هدایت از طریق جامدات به صورت سری

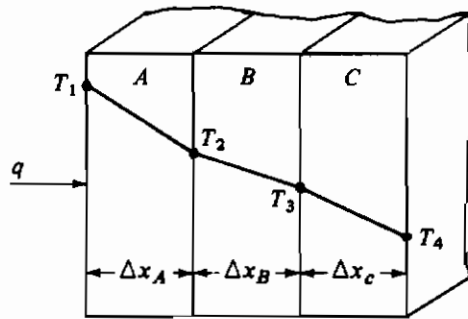
۴-۳-۱ دیوارهای صاف به صورت سری

در حالتی که یک دیواره چند لایه مانند شکل ۴-۳-۱ وجود داشته باشد توزیع دما در لایه های A، B و C نشان داده شده است. چون جریان گرما (q) باید در همه لایه‌ها مساوی باشد می‌توانیم معادله فوریه را برای هر لایه به صورت زیر بنویسیم:

$$q = \frac{k_A A}{\Delta x_A} (T_1 - T_2) = \frac{k_B A}{\Delta x_B} (T_2 - T_3) = \frac{k_C A}{\Delta x_C} (T_3 - T_4) \quad (4-3-1)$$

با حل کردن هر معادله برای ΔT داریم:

$$T_1 - T_2 = q \frac{\Delta x_A}{k_A A} \quad T_2 - T_3 = q \frac{\Delta x_B}{k_B A} \quad T_3 - T_4 = q \frac{\Delta x_C}{k_C A} \quad (4-3-2)$$



شکل ۱-۳-۴. جریان حرارتی از طریق یک دیوار چند لایه

با جمع کردن سه معادله فوق با یکدیگر دماهای داخلی T_2 و T_3 حذف می‌شوند و معادله مرتب شده نهایی به صورت زیر است:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\Delta x_A / (k_A A) + \Delta x_B / (k_B A) + \Delta x_C / (k_C A)} = \frac{T_1 - T_4}{R_A + R_B + R_C} \quad (۴-۳-۳)$$

که مقاومت در لایه A به صورت $R_A = \frac{\Delta x_A}{k_A A}$ بوده و برای بقیه لایه ها نیز به همین صورت است. بنابراین معادله نهایی برحسب اختلاف دمای کلی $T_1 - T_4$ و مقاومت کلی $R_A + R_B + R_C$ می‌باشد.

مثال ۱-۳-۴ جریان گرما از طریق یک دیواره عایق در یک اتاق سرد

یک انبار سرد از یک لایه درونی به ضخامت $12/7$ mm از جنس چوب کاج، یک لایه میانی به ضخامت $101/6$ mm از جنس چوب پنبه و یک لایه بیرونی به ضخامت $76/2$ mm از جنس بتون ساخته شده است. دمای سطح دیواره داخلی $255/4$ K و دمای سطح دیواره بیرونی بتونی $297/1$ K است. ضریب انتقال حرارت از ضمیمه ۸.3 برای چوب کاج 0.151 W/m.K برای چوب پنبه 0.433 W/m.K و برای بتون 0.762 W/m.K است. تلفات گرمایی را بر حسب وات برای هر متر مربع از سطح محاسبه کرده و دمای بین سطح چوب کاج و چوب پنبه را به دست آورید.

حل: با قراردادن $T_1 = 255/4$ K و $T_4 = 297/1$ K و چوب کاج به عنوان ماده A و چوب پنبه به عنوان ماده B و بتون به عنوان ماده C، جدول خواص و اندازه های هر کدام به صورت زیر است:

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$k_A = 0/151 \quad k_B = 0/0433 \quad k_C = 0/762$$

$$\Delta x_A = 0/0127 \text{ m} \quad \Delta x_B = 0/1016 \text{ m} \quad \Delta x_C = 0/0762 \text{ m}$$

مقاومت هر یک از مواد طبق معادله (۳-۳-۴) برای سطحی به اندازه 1 m^2 به صورت زیر است:

$$R_A = \frac{\Delta x_A}{k_{A \cdot A}} = \frac{0/0127}{0/151 \times 1} = 0/0841 \text{ K/W}$$

$$R_B = \frac{\Delta x_B}{k_{B \cdot A}} = \frac{0/1016}{0/0433 \times 1} = 2/346 \text{ K/W}$$

$$R_C = \frac{\Delta x_C}{k_{C \cdot A}} = \frac{0/0762}{0/762 \times 1} = 0/100 \text{ K/W}$$

با جایگزینی در معادله (۳-۳-۴) داریم:

$$q = \frac{T_1 - T_F}{R_A + R_B + R_C} = \frac{255/4 - 297/1}{0/0841 + 2/346 + 0/100}$$

$$= \frac{-41/7}{2/530} = -16/48 \text{ W} \quad (-56/23 \text{ btu/h})$$

چون جواب منفی است گرما از بیرون به داخل جریان می‌یابد.
برای محاسبه دمای T_F در سطح مشترک چوب پنبه و چوب:

$$q = \frac{T_1 - T_F}{R_A}$$

با جایگزینی مقادیر معلوم و حل آن:

$$-16/48 = \frac{255/4 - T_F}{0/0841} \Rightarrow T_F = 256/79 \text{ K} \quad \text{در سطح مشترک}$$

یک روش دیگر که برای محاسبه T_F به کار گرفته می‌شود، استفاده از این حقیقت است که کاهش دما متناسب با مقاومت است.

$$T_1 - T_F = \frac{R_A}{R_A + R_B + R_C} (T_1 - T_F) \quad (4-3-4)$$

با جایگزینی:

$$255/4 - T_F = \frac{0/0841 \times (255/4 - 297/1)}{2/530} = -1/39 \text{ K}$$

بنابراین، همچنان‌که قبلاً محاسبه شد: $T_F = 256/79 \text{ K}$ است.

۴-۳B استوانه‌های چند لایه

اغلب در فرایندهای صنعتی گرما از طریق استوانه‌های چند لایه منتقل می‌شود. مثالی از این حالت موقعی است که گرما از طریق دیوارهای یک لوله عایق منتقل می‌شود. شکل ۴-۳-۲ لوله‌ای را با دو لایه عایق اطراف آن نشان می‌دهد. یعنی سه استوانه هم مرکز توخالی داریم. کاهش دما در طول جسم A برابر با $T_1 - T_2$ ، در طول جسم B برابر با $T_2 - T_3$ و در طول جسم C برابر با $T_3 - T_4$ می‌باشد.

چون سیستم در شرایط پایدار است بنابراین، نرخ انتقال حرارت (q) برای هر لایه مساوی است. با نوشتن معادله‌ای مشابه با معادله (۴-۲-۹) برای هر کدام از استوانه‌های هم مرکز داریم:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{(r_2 - r_1)/(k_A A_{A1m})} = \frac{T_2 - T_3}{(r_3 - r_2)/(k_B A_{B1m})} = \frac{T_3 - T_4}{(r_4 - r_3)/(k_C A_{C1m})} \quad (4-3-5)$$

که در این روابط:

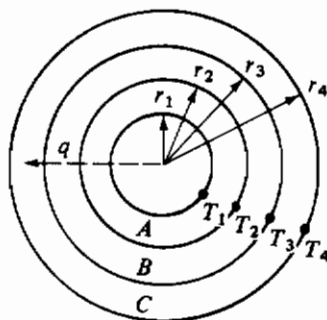
$$A_{A1m} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} \quad A_{B1m} = \frac{A_3 - A_2}{\ln(A_3/A_2)} \quad A_{C1m} = \frac{A_4 - A_3}{\ln(A_4/A_3)} \quad (4-3-6)$$

با استفاده از روش مشابه با ترکیب کردن معادلات برای حذف T_2 و T_3 که قبلاً برای یک دیواره مسطح به صورت سری انجام شد، معادله‌های نهایی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{(r_2 - r_1)/(k_A A_{A1m}) + (r_3 - r_2)/(k_B A_{B1m}) + (r_4 - r_3)/(k_C A_{C1m})} \quad (4-3-7)$$

$$q = \frac{T_1 - T_4}{R_A + R_B + R_C} = \frac{T_1 - T_4}{\sum R} \quad (4-3-8)$$

بنابراین، مقاومت کلی مجدداً برابر با مجموع مقاومتها به صورت سری است.



شکل ۴-۳-۲. جریان حرارتی شعاعی از طریق استوانه‌های چند لایه به صورت سری

مثال ۲-۳-۴ تلفات گرمایی از لوله عایق‌بندی شده

یک لوله ضخیم از جنس فولاد زنگ نزن (A) با $k = 21/63 \text{ W/m.K}$ و با قطر درونی $0/254 \text{ m}$ و قطر بیرونی $0/508 \text{ m}$ با لایه‌ای به ضخامت $0/254 \text{ m}$ از جنس آزیست (B) با $k = 0/2923 \text{ W/m.K}$ پوشیده شده است. دمای دیواره داخلی لوله 811 K و دمای سطح بیرونی عایق $310/8 \text{ K}$ می‌باشد. برای $0/305 \text{ m}$ از طول لوله، گرمای تلف شده را محاسبه کرده و همچنین دما در سطح بین فلز و عایق را به دست آورید.

حل: با قراردادن $T_1 = 811 \text{ K}$ و $T_2 = 310/8 \text{ K}$ ، دمای سطح میانی، $T_r = 310/8 \text{ K}$ ، شعاعها به صورت زیر هستند:

$$r_1 = \frac{0/254}{2} = 0/127 \quad r_2 = \frac{0/508}{2} = 0/254 \quad r_3 = 0/508$$

برای طول $0/305 \text{ m}$ سطحها نیز به صورت زیر هستند:

$$A_1 = 2\pi L r_1 = 2\pi \times 0/305 \times 0/127$$

$$A_2 = 2\pi L r_2 = 2\pi \times 0/305 \times 0/254$$

$$A_3 = 2\pi L r_3 = 2\pi \times 0/305 \times 0/508$$

با استفاده از معادله (۶-۳-۴)، میانگین لگاریتمی سطحها برای فولاد زنگ نزن (A) و آزیست

(B) عبارتند از:

$$A_{A,lm} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} = \frac{0/487 - 0/243}{\ln(0/487/0/243)} = 0/351 \text{ m}^2$$

$$A_{B,lm} = \frac{A_3 - A_2}{\ln(A_3/A_2)} = \frac{0/974 - 0/487}{\ln(0/974/0/487)} = 0/703 \text{ m}^2$$

از معادله (۷-۳-۴) مقاومتها عبارتند از:

$$R_A = \frac{r_2 - r_1}{k_A \cdot A_{A,lm}} = \frac{0/127}{21/63 \times 0/351} = 0/1673 \text{ K/W}$$

$$R_B = \frac{r_3 - r_2}{k_B \cdot A_{B,lm}} = \frac{0/254}{0/2923 \times 0/703} = 1/491 \text{ K/W}$$

بنابراین نرخ انتقال حرارت به صورت زیر است:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_A + R_B} = \frac{811 - 310/8}{0/1673 + 1/491} = 331/7 \text{ W (1132 btu/h)}$$

برای محاسبه دمای T_r :

$$q = \frac{T_1 - T_r}{R_A} \Rightarrow 331/7 = \frac{811 - T_r}{0/1673}$$

پس از حل رابطه فوق، $T_2 = 5/5 K$ و $T_1 = 805/5 K$. به دلیل بالا بودن ضریب انتقال حرارت هدایتی فلز اختلاف دمای کمی در طول دیواره فلزی اتفاق می افتد.

۴-۳C هدایت از طریق سطح اجسام به صورت موازی

فرض کنید دو سطح صاف و جامد B, A بطور موازی کنار هم گذاشته شده اند و جهت جریان گرما عمود بر سطح مقطع دو صفحه است. بنابراین جریان گرمایی کل برابر با مجموع جریان گرما از طریق صفحه A به اضافه جریان از سطح B است. با نوشتن معادله فوریه برای هر سطح و جمع کردن آنها داریم:

$$q_T = q_A + q_B = \frac{k_A A_A}{\Delta x_A} (T_1 - T_2) + \frac{k_B A_B}{\Delta x_B} (T_3 - T_4) \quad (4-3-9)$$

که q_T جریان گرمایی کل، T_1 و T_2 دماهای سطوح جلو و پشت جامد A و T_3 و T_4 دماهای همین صفحات در جامد B هستند.

اگر ما فرض کنیم که $T_1 = T_3 = T_2 = T_4$ (دماهای سطوح جلویی هر دو سطح A و B یکسان هستند) و

$T_2 = T_3 = T_4 = T_1$ (دمای سطوح پشتی هر دو سطح A و B یکسان هستند) داریم:

$$q_T = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_A / k_A A_A} + \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_B / k_B A_B} = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \right) (T_1 - T_2) \quad (4-3-10)$$

مثالی که برای این حالت می توان عنوان کرد، دیوار (A) عایق کاری شده یک کوره آجرپزی است که اجزای تقویت کننده فولادی آن (B) به طور موازی قرار دارند. اگر چه مساحت A_B مربوط به فولاد نسبت به سطح آجر عایق بندی شده A_A کوچکتر است، ضریب هدایت گرمایی بالاتر فلز (که چند صد برابر آجر است) می تواند اجازه دهد که قسمت عمده گرما از طریق هدایت توسط فولاد خارج شود.

مثال دیگر از هدایت گرمایی به صورت موازی، روش افزایش هدایت گرمایی برای تسریع در پختن گوشت منجمد می باشد. میخ های فلزی فرو شده در گوشت منجمد باعث هدایت سریعتر گرما به داخل گوشت می شود.

یادآوری این مطلب ضروری است که در برخی موارد اگر ضریب هدایتی موادی که به طور موازی قرار گرفته اند تفاوت قابل ملاحظه ای داشته باشد جریان گرمایی دو بعدی اتفاق می افتد. بنابراین نتایجی که از معادله (4-3-10) به دست می آید تا حدی تغییر خواهد کرد.

۴-۳D جابه جایی و هدایت به صورت همزمان و ضریب کلی انتقال حرارت

در بسیاری از موارد عملی دمای سطح (یا شرایط مرزی در سطح) معلوم نیست، اما در دو طرف سطح

جامد یک سیال وجود دارد. دیواره صاف شکل ۳a-۳-۴ را در نظر بگیرید که یک سیال گرم با دمای T_1 روی سطح درونی و یک سیال سرد با دمای T_4 روی سطح بیرونی آن جریان دارد. ضریب هدایتی گرمایی محیط بیرون h_o W/m.K و برای محیط درون h_i W/m.K است. (روشهای پیش‌بینی ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی h در بخش ۴-۴ همین فصل بررسی خواهد شد.)

نرخ انتقال حرارت با استفاده از معادله‌های (۴-۱-۱۲) و (۴-۳-۱) به صورت زیر است:

$$q = h_i A (T_1 - T_2) = \frac{k_A A}{\Delta x_A} (T_2 - T_3) = h_o A (T_3 - T_4) \quad (4-3-11)$$

با در نظر گرفتن عبارتهای $\frac{1}{h_o A}$ و $\frac{\Delta x_A}{k_A A}$ و $\frac{1}{h_i A}$ به عنوان مقاومت و ترکیب معادلات همانند قبل داریم:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{1/h_i A + \Delta x_A/k_A A + 1/h_o A} = \frac{T_1 - T_4}{\sum R} \quad (4-3-12)$$

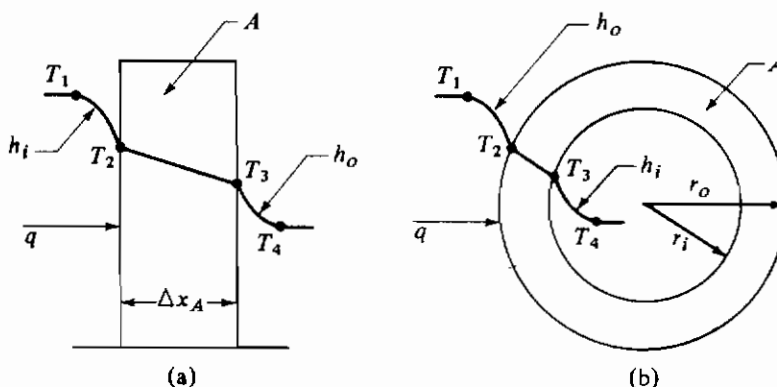
اغلب کل گرمایی که به صورت جابه‌جایی و هدایتی انتقال می‌یابد، بر حسب یک ضریب کلی انتقال حرارت (U) بیان می‌شود که به صورت زیر می‌توان آن را تعریف کرد:

$$q = U A \Delta T_{\text{overall}} \quad (4-3-13)$$

در این جا $\Delta T_{\text{overall}} = T_1 - T_4$ و U به صورت زیر است:

$$U = \frac{1}{1/h_i + \Delta x_A/k_A + 1/h_o} \frac{W}{m^2 \cdot K} \left(\frac{\text{btu}}{\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}} \right) \quad (4-3-14)$$

یک کاربرد مهمتر، انتقال حرارت از سیال خارج از یک استوانه به سیال داخل آن از طریق دیواره فلزی استوانه است. این پدیده را می‌توان در مبدل‌های حرارتی مشاهده کرد. این حالت در شکل ۳b-۳-۴ نشان داده شده است.



شکل ۳-۳-۴. جریان حرارتی با جابه‌جایی در مرزها: (a) دیواره صاف (b) دیواره استوانه‌ای شکل

مشابه قبل، نرخ کلی انتقال حرارت از طریق استوانه به صورت زیر است:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{1/h_i A_i + (r_o - r_i)/k_A A_{A1m} + 1/h_o A_o} = \frac{T_1 - T_4}{\sum R} \quad (4-3-15)$$

که A_i سطح جانبی داخل لوله فلزی است و برابر با $2\pi L r_i$ می باشد. A_{A1m} میانگین لگاریتمی سطح جانبی لوله فلزی است و A_o سطح جانبی خارجی لوله می باشد.

ضریب کلی انتقال حرارت برای استوانه ممکن است بر حسب سطح داخلی A_i و یا سطح خارجی لوله A_o بیان شود بنابراین:

$$q = U_i A_i (T_1 - T_4) = U_o A_o (T_1 - T_4) = \frac{T_1 - T_4}{\sum R} \quad (4-3-16)$$

$$U_i = \frac{1}{1/h_i + (r_o - r_i)A_i/k_A A_{A1m} + A_i/A_o h_o} \quad (4-3-17)$$

$$U_o = \frac{1}{A_o/A_i h_i + (r_o - r_i)A_o/k_A A_{A1m} + 1/h_o} \quad (4-3-18)$$

مثال ۴-۳-۳ گرمای تلف شده از طریق هدایت و جابه جایی و ضریب کلی انتقال حرارت (U)

بخار اشباع در دمای 267°F در یک لوله فولادی $\frac{3}{4}$ اینچی به قطر داخلی 0.824 in و قطر خارجی 1.050 in جریان دارد. سطح بیرونی لوله با عایقی به ضخامت $1/5$ in عایق بندی شده است. ضریب جابه جایی برای بخار روی سطح داخلی لوله (h_i) برابر با $1000 \text{ Btu/h.ft}^2\text{.}^\circ\text{F}$ و ضریب جابه جایی در محیط بیرون برابر با $2 \text{ Btu/h.ft}^2\text{.}^\circ\text{F}$ h_o تخمین زده می شود. ضریب هدایت گرمایی میانگین فلز 45 W/m.K یا $26 \text{ Btu/h.ft}^2\text{.}^\circ\text{F}$ و ضریب هدایت گرمایی عایق 0.064 W/m.K یا $0.37 \text{ Btu/h.ft}^2\text{.}^\circ\text{F}$ می باشد.

الف) اگر دمای هوای اطراف لوله 80°F باشد، تلفات گرمایی به ازای هر فوت از طول لوله را با استفاده از مقاومتها به دست آورید.

ب) قسمت (الف) را با استفاده از ضریب کلی انتقال حرارت U_i بر اساس سطح داخلی A_i تکرار کنید.

حل: r_i شعاع درونی لوله، r_1 شعاع بیرونی لوله است و r_o شعاع بیرونی عایق می باشد. بنابراین،

$$r_i = \frac{0.412}{12} \text{ ft} \quad r_1 = \frac{0.525}{12} \text{ ft} \quad r_o = \frac{2.025}{12} \text{ ft}$$

برای یک فوت از طول لوله مساحتها به صورت زیر هستند:

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$A_i = 2\pi L r_i = 2\pi \times 1 \times \frac{0.412}{12} = 0.2157 \text{ ft}^2$$

$$A_l = 2\pi L r_l = 2\pi \times 1 \times \frac{0.525}{12} = 0.2750 \text{ ft}^2$$

$$A_o = 2\pi L r_o = 2\pi \times 1 \times \frac{2.025}{12} = 1.060 \text{ ft}^2$$

بر اساس معادله (۴-۳-۶) میانگین لگاریتمی سطوح برای لوله (A) و برای عایق (B) به صورت زیر است:

$$A_{A,lm} = \frac{A_o - A_i}{\ln(A_o/A_i)} = \frac{1.060 - 0.2157}{\ln(1.060/0.2157)} = 0.245 \text{ m}^2$$

$$A_{B,lm} = \frac{A_o - A_l}{\ln(A_o/A_l)} = \frac{1.060 - 0.2750}{\ln(1.060/0.2750)} = 0.583 \text{ m}^2$$

بر اساس معادله (۴-۳-۱۵) مقاومت‌های موجود عبارتند از:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{10000 \times 0.2157} = 0.00464$$

$$R_A = \frac{r_l - r_i}{k_A A_{A,lm}} = \frac{(0.525 - 0.412)/12}{26 \times 0.245} = 0.00148$$

$$R_B = \frac{r_o - r_l}{k_B A_{B,lm}} = \frac{(2.025 - 0.525)/12}{0.37 \times 0.583} = 5/8$$

$$R_o = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{2 \times 1.060} = 0.472$$

با استفاده از معادله‌ای مشابه با معادله (۴-۳-۱۵) داریم:

$$q = \frac{T_i - T_o}{R_i + R_A + R_B + R_o} \quad (4-3-19)$$

$$= \frac{267 - 80}{0.00464 + 0.00148 + 5/8 + 0.472} = \frac{267 - 80}{6/278} = 29/8 \text{ btu/h}$$

برای قسمت (ب)، معادله‌ای که U را به q ارتباط می‌دهد معادله (۴-۳-۱۶) است که می‌توان آن را با معادله (۴-۳-۱۹) مساوی قرار داد.

$$q = U_i A_i (T_i - T_o) = \frac{T_i - T_o}{\sum R} \quad (4-3-20)$$

با حل معادله نسبت به U داریم:

$$U_i = \frac{1}{A_i \sum R} \quad (4-3-21)$$

با جایگزینی مقادیر معلوم،

$$U_j = \frac{1}{0.2157 \times 6/278} = 0.738 \text{ btu/h.ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$$

بنابراین q را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد:

$$q = U_i A_i (T_i - T_o) = 0.738 \times 0.2157 \times (267 - 80) = 29/8 \text{ btu/h (} \frac{8}{73} \text{ W)}$$

۴-۳E هدایت همراه با منبع داخلی تولید انرژی

در بعضی از سیستمها گرما در داخل یک محیط هادی تولید می‌شود. به عبارت دیگر یک منبع گرمایی^(۱) با انتشار یکنواخت موجود است. مثالهایی در این مورد، گرم‌کنها با مقاومتهای الکتریکی و همچنین میله‌های سوخته‌ای هسته‌ای می‌باشند. همچنین، اگر یک واکنش شیمیایی به صورت یکنواخت در محیطی در حال انجام باشد، گرمای واکنش دفع می‌شود. در زمینه‌های کشاورزی و بهداشتی، گرمای حاصل از فعالیتهای بیولوژیکی در توده‌های زباله و کمپوست دفع می‌شود.

مثالهای مهم دیگر در مورد فرآورش مواد غذایی است. تنفس^(۲) میوه‌ها و سبزیجات تازه ایجاد

گرما می‌کند. این گرما می‌تواند به میزان 0.3 W/kg تا 0.6 w/kg یا 0.5 تا 1 Btu/h.lb_m باشد.

۱- تولید گرما در یک دیواره صاف: در شکل ۴-۳-۴ یک دیواره صاف نشان داده شده است که در درون آن گرما تولید می‌شود. گرما فقط در جهت محور x هدایت می‌شود. فرض می‌شود سطوح دیگر دیواره عایق بندی شده‌اند. دمای T_w بر حسب کلونین در $x = L$ و $x = -L$ ثابت نگهداشته می‌شود. نرخ حجمی گرمای تولید شده $q \text{ W/m}^3$ بوده و ضریب هدایت گرمایی محیط $k \text{ W/m.K}$ است.

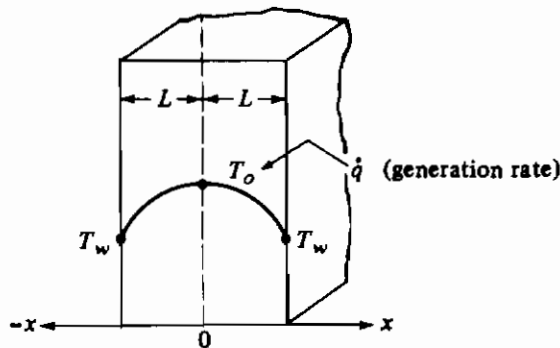
برای به دست آوردن معادله‌ای برای این حالت در شرایط پایدار، از معادله (۴-۱-۳) با حذف

عبارت مربوط به تجمع شروع می‌کنیم،

$$q_{x|x} + \dot{q}(\Delta x \cdot A) = q_{x|x+\Delta x} + 0 \quad (4-3-22)$$

که A سطح مقطع صفحه‌ای باشد. با مرتب‌کردن رابطه، تقسیم آن بر Δx و میل دادن Δx به سمت صفر داریم:

$$\frac{-dq_x}{dx} + \dot{q} \cdot A = 0 \quad (4-3-23)$$



شکل ۴-۳-۴. دیواره صاف با منبع گرمایی داخلی در حالت پایدار

با جایگزینی معادله (۴-۱-۲) برای q_x داریم:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (4-3-24)$$

پس از انتگرال‌گیری رابطه زیر برای حالت \dot{q} ثابت به دست می‌آید:

$$T = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (4-3-25)$$

که C_1 و C_2 ثابتهای انتگرال‌گیری هستند. شرایط مرزی به این صورت است که در $x = L$ یا $x = -L$ ، $T = T_w$ و در $x = 0$ داریم: $T = T_0$ (دمای مرکز). بنابراین توزیع دما به صورت زیر است:

$$T = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + T_0 \quad (4-3-26)$$

دمای مرکز عبارت است از:

$$T_0 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_w \quad (4-3-27)$$

کل گرمای تلف‌شده از این دو سطح در حالت پایدار برابر با کل گرمای تولید شده (\dot{q}_T) برحسب W است.

$$\dot{q}_T = \dot{q}(2LA) \quad (4-3-28)$$

که A سطح مقطع صفحه (سطحی که دمای آن T_w است) می‌باشد.

۲- تولید گرما در یک استوانه: به طریق مشابه می‌توان معادله‌ای برای استوانه‌ای به شعاع R که در آن منبع گرمایی یکنواختی با ضریب هدایت گرمایی ثابت وجود دارد به دست آورد. فرض می‌شود که گرما فقط در امتداد شعاع جریان می‌یابد، یعنی اثرات انتهایی ناچیزند یا این‌که دو انتها عایق شده‌اند. معادله

نهایی برای توزیع دما عبارت است از:

$$T = \frac{\dot{q}}{4k} (R^2 - r^2) + T_w \quad (4-3-29)$$

که r فاصله از مرکز می باشد. دمای مرکز (T_0) به صورت زیر است:

$$T_0 = \frac{\dot{q}R^2}{4k} + T_w \quad (4-3-30)$$

مثال ۴-۳-۴ تولید گرما در یک استوانه

یک جریان الکتریکی به میزان $A = 200$ در حال عبور از یک سیم فولادی زنگ نزن به شعاع $m = 0.01268$ است. طول سیم $L = 0.91$ m و مقاومت (R) آن 0.126Ω است. دمای سطح بیرونی سیم (T_w) در $422/1$ K ثابت نگهداشته می شود. ضریب هدایت گرمایی میانگین آن $22/5$ W/m.K است. دمای مرکز سیم را محاسبه کنید.

حل: ابتدا باید مقدار q محاسبه گردد. چون توان مساوی $I^2 R$ است، که در این رابطه I شدت جریان بر حسب آمپر و R مقاومت بر حسب اهم است، بنابراین داریم:

$$I^2 R = q\pi R^2 L \quad (4-3-31)$$

با جایگزینی مقادیر معلوم و حل آن داریم:

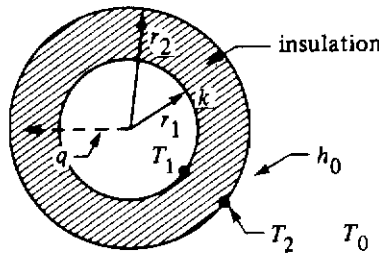
$$200^2 \times 0.126 = q\pi \times 0.01268^2 \times 0.91$$

$$q = 1/0.96 \times 10^9 \text{ W/m}^3$$

با جایگزینی در معادله (۴-۳-۳۰) و حل آن: $T_0 = 441/7$ K

۴-۳F ضخامت بحرانی عایق برای یک استوانه

در شکل ۴-۳-۵، یک لایه از عایق اطراف سطح بیرونی استوانه‌ای به شعاع r_1 و طول L را پوشانده است. استوانه دارای ضریب هدایت گرمایی بالایی است و دمای سطح خارجی استوانه (T_1) در شعاع r_1 ثابت است. مثالی از این حالت لوله‌ای فلزی است که در داخل آن بخار اشباع جریان داشته باشد. سطح بیرونی عایق به دمای T_2 در معرض محیطی به دمای T_0 است که در آنجا جابه‌جایی اتفاق می افتد. مشخص نیست با اضافه کردن ضخامت عایق با ضریب هدایت گرمایی k نرخ انتقال حرارت افزایش یا کاهش می یابد.



شکل ۴-۳-۵. شعاع بحرانی برای عایق استوانه یا لوله

در حالت پایدار نرخ انتقال حرارت (q) از طریق استوانه و عایق برابر با نرخ انتقال حرارت جابه‌جایی از سطح می‌باشد.

$$q = h_o A (T_2 - T_0) \quad (4-3-32)$$

با افزایش عایق، سطح بیرونی ($A = 2\pi r_2 L$) افزایش یافته و T_2 کاهش می‌یابد. اما مشخص نیست که q افزایش می‌یابد یا کاهش. برای تعیین این موضوع، یک معادله مشابه با معادله (۴-۳-۱۵) با در نظر گرفتن هر دو مقاومت، که مقاومت عایق از معادله (۴-۲-۱۱) به دست می‌آید، نوشته می‌شود:

$$q = \frac{2\pi L (T_1 - T_0)}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{r_2 h_o}} \quad (4-3-33)$$

برای تعیین اثر ضخامت عایق بر q ، از معادله q نسبت به r_2 مشتق می‌گیریم و نتیجه را مساوی با صفر قرار داده و جریان گرمایی حداکثر را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{dq}{dr_2} = \frac{-2\pi L (T_1 - T_0) (1/r_2 k - 1/r_2^2 h_o)}{\left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{r_2 h_o} \right]^2} = 0. \quad (4-3-34)$$

با حل رابطه داریم،

$$(r_2)_{cr} = \frac{k}{h_o} \quad (4-3-35)$$

که در این جا $(r_2)_{cr}$ اندازه شعاع بحرانی در شرایط حداکثر نرخ انتقال حرارت است. بنابراین، اگر شعاع بیرونی r_2 کمتر از اندازه بحرانی باشد افزایش لایه عایق در واقع باعث افزایش نرخ انتقال گرما خواهد شد. همچنین اگر شعاع بیرونی بزرگتر از مقدار بحرانی باشد افزایش عایق باعث کاهش نرخ انتقال گرما خواهد شد. با در نظر گرفتن مقادیر معمول k و h_o شعاع بحرانی معمولاً در حد چند میلیمتر است. در نتیجه عایق کردن سیمهای الکتریکی کوچک می‌تواند باعث افزایش اتلاف گرمایی شود. عایق کردن

لوله‌های بزرگ نرخ انتقال حرارت را کاهش می‌دهد.

مثال ۴-۳-۵ عایق‌بندی یک سیم الکتریکی و شعاع بحرانی

یک سیم برق به قطر $1/5 \text{ mm}$ با یک عایق پلاستیکی (به ضخامت $2/5 \text{ mm}$) روکش شده است و در معرض هوایی با دمای 300 K و $h_o = 20 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ قرار دارد. ضریب هدایت گرمایی عایق $0/4 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ است. فرض می‌شود که دمای سطح سیم در 400 K ثابت بوده و پوشش سیم بر دمای آن تأثیری ندارد.

(الف) شعاع بحرانی را محاسبه کنید.

(ب) تلفات گرمایی به ازای هر متر از طول سیم بدون عایق را محاسبه کنید.

(پ) قسمت (ب) را در حالتی که سیم دارای عایق باشد تکرار کنید.

حل: برای قسمت (الف) با استفاده از معادله (۴-۳-۳۵) داریم:

$$(r_r)_{cr} = \frac{k}{h_o} = \frac{0/4}{20} = 0/02 \text{ m} = 20 \text{ mm}$$

برای قسمت (ب)، $L = 1 \text{ m}$ ، $r_1 = \frac{1/5}{2 \times 1000} = 0/75 \times 10^{-3} \text{ m}$ ، $A = 2\pi r_1 L$ با جایگزینی این مقادیر در معادله (۴-۳-۳۲) داریم:

$$q = h_o A (t_r - T_o) = 20 \times (2\pi \times 0/75 \times 10^{-3} \times 1) \times (400 - 300) = 9/42 \text{ W}$$

برای قسمت (پ) با وجود عایق،

$$r_2 = (2/5 + \frac{1/5}{2}) \times \frac{1}{1000} = 3/25 \times 10^{-3} \text{ m} \text{ و } r_1 = \frac{1/5}{2 \times 1000} = 0/75 \times 10^{-3} \text{ m}$$

با جایگزینی این مقادیر در معادله (۴-۳-۳۳) داریم:

$$q = 2\pi \times 1 \times (400 - 300) \left[\frac{\ln \left(\frac{3/25 \times 10^{-3} / 0/75 \times 10^{-3}}{0/4} \right) + \frac{1}{3/25 \times 10^{-3} \times 20}}{0/4} \right]$$

$$= 32/98 \text{ W}$$

بنابراین، عایق کردن به میزان زیادی اتلاف گرما را افزایش می‌دهد.

۴-۳G مقاومت تماس در فصل مشترک

در معادلات به‌دست آمده در این بخش برای هدایت از طریق جامدات به صورت سری (شکل ۴-۳-۱) را ببینید، فرض شد که سطوح مجاور در دمای یکسان هستند، یعنی دو سطح به‌طور کامل با هم تماس

دارند. در بسیاری از طراحیهای مهندسی در صنعت، این فرض دقت قابل قبولی دارد. اما در مواردی مانند نیروگاههای هسته‌ای که در آنجا شار گرمایی زیادی وجود دارد، ممکن است در فصل مشترک اُفت قابل ملاحظه دما وجود داشته باشد. این مقاومت فصل مشترک مقاومت تماس^(۱) نامیده می‌شود. این مقاومت موقعی به وجود می‌آید که دو سطح جامد کاملاً به هم فشرده نشده باشند و یک لایه نازک از سیال ساکن بین دو سطح به دام افتاده باشد. دو سطح جامد در نقاط برجسته با یکدیگر تماس دارند و در نقاط دیگر سیال فضای خالی بین دو سطح را اشغال می‌کند.

مقاومت فصل مشترک تابع پیچیده‌ای از ناهم‌واری دو سطح، فشار اعمال شده برای تماس سطوح، دمای فصل مشترک و سیال فصل مشترک می‌باشد. انتقال حرارت به شکل تابش، هدایت و جابه‌جایی از طریق سیال به دام افتاده و همچنین به شکل هدایت از طریق نقاط تماس صورت می‌گیرد. هیچ رابطه تجربی قابل اعتماد یا تئوری برای پیش‌بینی مقاومت تماس مواد مختلف در دسترس نیست. برای پی بردن به جزئیات بیشتر مراجع (R2، C7) را ببینید.

اغلب معادله مقاومت تماس به صورت زیر بیان می‌شود:

$$q = h_c A \Delta T = \frac{\Delta T}{1/h_c A} = \frac{\Delta T}{R_c} \quad (4-3-36)$$

در این جا h_c ضریب مقاومت تماس بر حسب $W/m^2.K$ ، ΔT افت دما در مقاومت تماس بر حسب K و R_c مقاومت تماس است. برای در نظر گرفتن این خصوصیت سطوح جامد می‌توان مقاومت تماس R_c را به دیگر مقاومتها در معادله (4-3-3) افزود. برای تماس بین دو سطح فلزی مقدار h_c در حدود $10^4 \times 0.2$ تا $10^4 \times 1$ $W/m^2.K$ است.

اگر حداکثر فاصله بین دو سطح Δx را بتوان تخمین زد می‌توان مقدار تقریبی حداکثر مقاومت تماس را به دست آورد. بنابراین با فرض این‌که انتقال حرارت فقط از طریق سیال ساکن و به شکل هدایت صورت پذیرد h_c را می‌توان به صورت زیر تخمین زد:

$$h_c = \frac{k}{\Delta x} \quad (4-3-37)$$

اگر هرگونه جابه‌جایی، تابش و یا تماس نقطه به نقطه وجود داشته باشد، مقاومت فرض شده کاهش خواهد یافت.

۴-۴ هدایت پایدار و ضرایب شکل^(۱)

۴-۴A مقدمه و روش ترسیمی برای هدایت دو بعدی

در بخشهای قبلی این فصل، هدایت گرمایی پایدار در یک بعد را بررسی کردیم. اما، در بسیاری از حالتها هدایت گرمایی پایدار در دو جهت اتفاق می افتد یعنی هدایت دو بُعدی داریم. در این حالتها نیاز به روشهای حل دو بُعدی داریم که در بیشتر حالات روشهای حل تحلیلی برای مسائل دو بُعدی در دسترس نیست. یک روش تقریبی مهم برای حل اینگونه مسائل استفاده از روشهای عددی است که در بخش ۱۵-۴ به طور کامل بحث خواهد شد. روش تقریبی مهم دیگر، روش ترسیمی است که روش ساده‌ای برای به دست آوردن نرخ انتقال حرارت با دقت قابل قبول می باشد. این روش خصوصاً برای سیستمهایی که مرزهای همدمای دارند قابل استفاده است.

در روش ترسیمی ابتدا ملاحظه می کنیم که در هدایت یک بعدی گرما از طریق یک ورقه مسطح (شکل ۱-۲-۴ را ببینید)، جهت شار گرمایی یا خطوط شار همیشه عمود بر خطوط همدمای می باشند. روش ترسیمی برای هدایت دو بعدی نیز براساس این واقعیت است که خطوط شار گرمایی و خطوط همدمای یکدیگر را با زاویه‌های قائمه قطع می کنند، به طوری که همواره شبکه‌ای از مربعات خمیده تشکیل شود. مطابق شکل ۱-۴-۴ این بدین معناست که ما می توانیم خطوط همدمای و خطوط شار را طوری رسم کنیم که با زاویه قائمه یکدیگر را قطع کنند (بر یکدیگر عمود باشند). با دقت و تجربه می توانیم نتایج دقیق و قابل قبولی به دست آوریم. مراحل کلی روش ترسیمی به صورت زیر است:

۱- یک مدل با مقیاس مشخص از جامد دو بعدی رسم کنید. مرزهای همدمای را مشخص کنید. در

شکل ۱-۴-۴، T_1 و T_2 مرزهای همدمای می باشند.

۲- عددی مانند N انتخاب کنید که N تعداد تقسیمات همدمای بین خطوط همدمای است. در

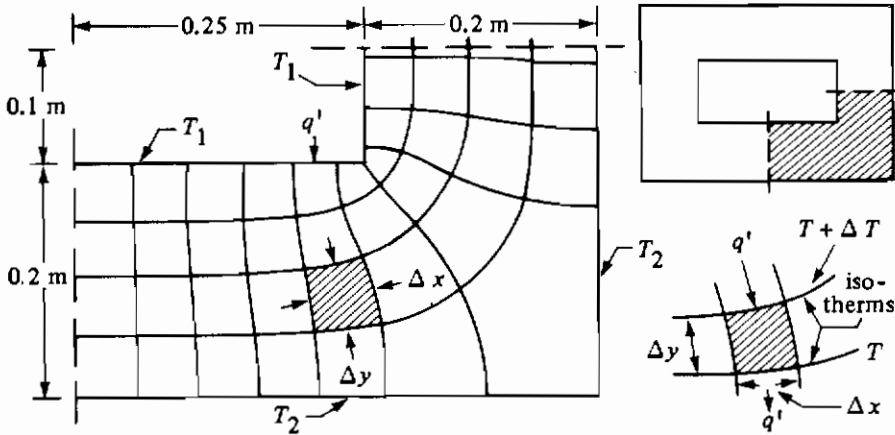
شکل ۱-۴-۴، $N=4$ تعداد تقسیمات بین T_1 و T_2 است. خطوط همدمای داخلی و خطوط

شارز گرمایی را طوری رسم کنید که در نقاط تقاطع بر یکدیگر عمود باشند. توجه کنید

که خطوط همدمای بر مرزهای آدیاباتیک (عایق شده) و نیز خطوط تقارن عمود

هستند.

۳- خطوط همدمای و شار را طوری تنظیم کنید که برای هر مربع خمیده $\Delta x = \Delta y$ باشد.



شکل ۴-۱-۴. روش ترسیمی مربعات خمیده برای هدایت حرارتی دو بُعدی در یک دودکش چهارگوش

برای محاسبه شار گرمایی از طریق نتایج به دست آمده از منحنیهای ترسیمی، ابتدا یک عمق واحد برای ماده فرض می‌کنیم. جریان گرمایی q' از طریق قسمت خمیده نشان داده شده در شکل ۴-۱-۴ توسط قانون فوریه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q' = -kA \frac{dT}{dy} = k(\Delta x \cdot 1) \frac{\Delta T}{\Delta y} \quad (4-4-1)$$

جریان گرما (q') از طریق تمام مربعات خمیده که در یک مسیر هستند با هم برابر است. چون $\Delta x = \Delta y$ ، همه تقسیمات دمایی ΔT با هم برابر خواهند بود. این تقسیمات دمایی می‌توانند برحسب اختلاف دمای کلی $T_1 - T_2$ و N که تعداد تقسیمات مساوی است بیان شوند.

$$\Delta T = \frac{T_1 - T_2}{N} \quad (4-4-2)$$

همچنین جریان گرما (q') از همه مسیرها برابر است، زیرا در رسم شکل و در معادله (۴-۴-۱)، $\Delta x = \Delta y$ است. از این رو کل انتقال حرارت از همه مسیرها به صورت زیر است:

$$q = Mq' = Mk \Delta T \quad (4-4-3)$$

که در این جا M تعداد کل مسیرهای گرمایی است که توسط روش ترسیمی تعیین می‌شود. با جایگذاری معادله (۴-۴-۲) در معادله (۴-۴-۳) خواهیم داشت:

$$q = \frac{M}{N} k(T_1 - T_2) \quad (4-4-4)$$

مثال ۴-۴-۱ هدایت دو بعدی توسط روش ترسیمی

کل گرمای منتقل شده از میان دیواره‌های دودکش نشان داده شده در شکل ۴-۴-۱ را به دست آورید. در این شکل، $T_1 = 600 \text{ K}$ ، $T_2 = 400 \text{ K}$ ، $K = 0.9 \text{ W/m.K}$ و $L = 5 \text{ m}$ (طول دودکش).

حل: در شکل ۴-۴-۱، $N = 4$ تعداد تقسیمات دمایی و $M = 9/25$ است. کل انتقال حرارت از طریق چهار بخش مساوی با عمق یا طول ۵ متر با استفاده از معادله (۴-۴-۴) به دست می‌آید:

$$q = 4 \left[\frac{M}{N} k L (T_1 - T_2) \right] = 4 \left[\frac{9/25}{4} \times 0.9 \times 5 \times (600 - 400) \right]$$

$$= 8325 \text{ W}$$

۴-۴B ضرایب شکل در هدایت

در معادله (۴-۴-۴) پارامتر $\frac{M}{N}$ ضریب شکل هدایت (S) نامیده می‌شود،

$$S = \frac{M}{N} \quad (4-4-5)$$

$$q = kS(T_1 - T_2) \quad (4-4-6)$$

واحد ضریب شکل (S) متر است و در هدایت دو بعدی در جایی که فقط با دو دما سر و کار داریم استفاده می‌شود. ضریب شکل برای برخی از اشکال هندسی به دست آمده است که تعدادی از آنها در جدول ۴-۴-۱ درج شده‌اند.

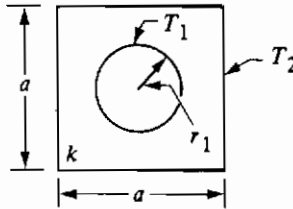
برای یک شکل هندسی سه بُعدی مانند یک کوره، ضریب شکل برای به دست آوردن جریان گرما از لبه‌ها و گوشه‌ها با هم متفاوت است. وقتی هر یک از ابعاد درونی بزرگتر از $\frac{1}{5}$ ضخامت دیواره باشند، ضرایب شکل برای ضخامت دیواره یکنواخت T_w به صورت زیر می‌باشند:

$$S_{\text{wall}} = \frac{A}{T_w} \quad S_{\text{edge}} = 0.54L \quad S_{\text{corner}} = 0.15T_w \quad (4-4-7)$$

که A سطح داخلی دیوار و L طول لبه داخلی آن است. در یک شکل هندسی کاملاً بسته، ۶ دیواره (وجه)، ۱۲ لبه و ۸ گوشه وجود دارد. توجه کنید که در یک دیواره منفرد مسطح، $q = k S_{\text{wall}} (T_1 - T_2) = k(A/T_w)(T_1 - T_2)$ می‌باشد که مشابه معادله (۴-۲-۱) برای هدایت از طریق یک ورقه مسطح^(۱) است.

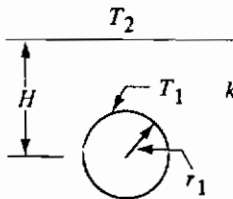
جدول ۴-۱-۴. ضرایب شکل هدایت برای $q = k S (T_1 - T_2)$ (ضریب هدایت گرمایی محیط k است).

Cylinder of length L in a square



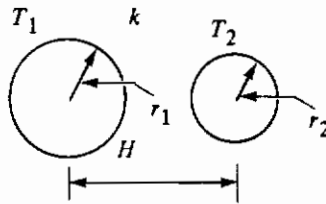
$$S = \frac{2\pi L}{\ln(0.54 a/r_1)}$$

Horizontal buried cylinder of length L



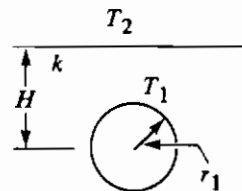
$$S = \frac{2\pi L}{\ln(2H/r_1)} \quad (H > 3r_1)$$

Two parallel cylinders of length L



$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1} \left[\frac{H^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} \right]}$$

Sphere buried



$$S = \frac{4\pi r_1}{1 - r_1/2H}$$

برای یک استوانه توخالی بلند به طول L مانند شکل ۴-۲-۲ ضریب شکل به صورت زیر

است،

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)}$$

(۴-۴-۸)

برای یک کره توخالی از معادله (۴-۲-۱۴) داریم:

$$S = \frac{4\pi r_2 r_1}{r_2 - r_1}$$

(۴-۴-۹)

۴-۵ انتقال حرارت به روش جابه‌جایی اجباری در داخل لوله‌ها

۴-۵A مقدمه و اعداد بدون بُعد

در بیشتر مواقع در انتقال حرارت وقتی با یک مایع یا گاز سر و کار داریم، معمولاً علاوه بر هدایت، انتقال حرارت جابه‌جایی نیز اتفاق می‌افتد. در اکثر فرایندهای صنعتی هنگام انتقال حرارت، گرما از سیالی به سیال دیگر با عبور از میان یک دیواره جامد انتقال می‌یابد. در شکل ۴-۵-۱ توزیع دمایی مربوط به انتقال حرارت از یک سیال گرم در حال جریان به یک سیال سرد در حال جریان نشان داده شده است. وقتی جریان سیال مغشوش است، تغییرات سرعت در نزدیکی دیواره در یک زیر لایه نازک ویسکوز که در آن اغتشاش وجود ندارد، بسیار شدید است. در این حالت، عمده‌تاً انتقال حرارت توسط هدایت با یک اختلاف دمایی بزرگ $T_f - T_w$ در جریان سیال گرم صورت می‌گیرد. همچنان‌که از دیواره فاصله می‌گیریم، به ناحیه مغشوش نزدیک می‌شویم، که در آنجا حرکت سریع گردابه‌ها باعث یکنواخت شدن دما می‌شود. از این رو اختلاف دما کمتر است و $T_1 - T_f$ کوچک می‌شود. دمای میانگین سیال T_m کمی کمتر از مقدار حداکثر T_1 می‌باشد. می‌توان توضیح مشابهی برای توزیع دما در سیال سرد ارائه کرد. ضریب جابه‌جایی برای گرمای منتقل شده از طریق یک سیال به صورت زیر بیان می‌شود:

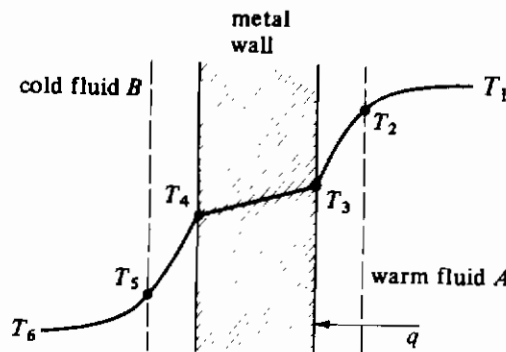
$$q = hA(T - T_w) \quad (4-5-1)$$

که h ضریب جابه‌جایی برحسب $W/m^2.K$ ، A مساحت بر حسب m^2 ، T دمای توده^(۱) یا دمای میانگین سیال برحسب K ، T_w دمای دیواره در تماس با سیال برحسب K و q نرخ انتقال حرارت برحسب W می‌باشند. در سیستم واحدهای انگلیسی q بر حسب btu/h ، h بر حسب $btu/h.ft^2.F$ ، A بر حسب ft^2 و T و T_w بر حسب F می‌باشند.

نوع جریان هر سیال خواه آرام باشد، خواه مغشوش اثر مهمی بر ضریب انتقال حرارت h که اغلب ضریب انتقال حرارت فیلمی نامیده می‌شود، دارد. زیرا بیشترین مقاومت در مقابل انتقال حرارت در لایه نازک نزدیک به دیواره می‌باشد. هر چه اغتشاش جریان بیشتر باشد ضریب انتقال حرارت بیشتر است. دو نوع عمده انتقال حرارت جابه‌جایی وجود دارد. جابه‌جایی آزاد یا طبیعی^(۲) که در این نوع جابه‌جایی حرکت سیال در اثر تغییر دانسیته ناشی از انتقال حرارت است. اثر شناوری، یک جریان گردشی طبیعی در سیال تولید می‌کند که از سطح جامد شروع می‌شود. در نوع دوم یعنی جابه‌جایی اجباری^(۳)، سیال در اثر اختلاف فشار ایجاد شده توسط یک پمپ، دمنده و مانند آن به جریان می‌افتد.

1. bulk temperature
3. forced convection

2. free or natural convection



شکل ۱-۵-۴. توزیع دما برای انتقال حرارت جابه‌جایی از یک سیال به سیال دیگر

طبیعتاً بیشتر روابط موجود برای پیشگویی ضرایب فیلمی h نیمه تجربی هستند و تحت تأثیر عواملی مانند خواص فیزیکی سیال، نوع و سرعت سیال، اختلاف دما و شکل هندسی سیستم می‌باشند. برخی مقادیر تقریبی h در جدول ۲-۱-۴ ارائه شده بودند. در روابط زیر چون معادلات بدون بُعد هستند می‌توان از سیستم‌های SI یا انگلیسی استفاده کرد.

برای ارتباط دادن این داده‌ها با ضرایب انتقال حرارت، از اعداد بدون بعدی مانند عدد رینولدز و عدد پرانتل استفاده می‌شود. عدد پرانتل نسبت مولفه برشی ضریب نفوذ ممتوم (μ/ρ) به ضریب نفوذ گرمایی $k/\rho c_p$ می‌باشد و از نظر فیزیکی رابطه بین ضخامت نسبی لایه مرزی هیدرودینامیکی و لایه مرزی گرمایی است.

$$N_{Pr} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{c_p \mu}{k} \quad (۴-۵-۲)$$

مقدار عدد پرانتل N_{Pr} برای گازها در ضمیمه ۳-A داده شده است که همان طور که مشاهده می‌شود در محدوده ۰/۵ تا ۱ است. این عدد بدون بعد برای مایعات در محدوده ۲ تا بالاتر از $۱۰^۴$ است. عدد بدون بعد ناسلت (N_{Nu}) ضریب انتقال حرارت h را به ضریب هدایت گرمایی سیال (k) و بعد مشخصه D ارتباط می‌دهد.

$$N_{Nu} = \frac{hD}{k} \quad (۴-۵-۳)$$

به عنوان مثال، برای سیالی که درون یک لوله جریان دارد، بعد مشخصه D ، قطر لوله است.

۵B-۴ ضریب انتقال حرارت برای جریان آرام درون لوله

مسئله مهم‌ترین فرایند صنعتی انتقال حرارت جابه‌جایی، سرد یا گرم کردن جریان سیال درون یک مجرای مدور بسته یا لوله می‌باشد. روابط متفاوتی برای به‌دست آوردن ضریب جابه‌جایی در جریان آرام (عدد رینولدز کمتر از ۲۱۰۰)، در جریان کاملاً مغشوش (عدد رینولدز بالاتر از 10^4) و در ناحیه گذرا (عدد رینولدز بین ۲۱۰۰ و 10^4) مورد نیاز است.

برای جریان آرام سیالات درون لوله‌های با قطر کم یا لوله‌های با قطر زیاد افقی، معادله سیدر و تیت (S1) برای $Re < 2100$ می‌تواند به کار برده شود:

$$(Nu)_a = \frac{h_a D}{k} = 1.86 \left(N_{Re} N_{Pr} \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (4-5-4)$$

که D قطر لوله بر حسب متر، L طول لوله قبل از این‌که اختلاط در لوله اتفاق بیفتد، بر حسب متر، μ_b ویسکوزیته سیال در دمای میانگین توده‌ای بر حسب Pa.s، μ_w ویسکوزیته در دمای دیواره، c_p ظرفیت گرمایی بر حسب J/kg.K، k ضریب هدایت گرمایی بر حسب W/m.K، h_a ضریب میانگین انتقال حرارت جابه‌جایی بر حسب $W/m^2.K$ و Nu عدد بدون بعد ناسلت می‌باشند. به جز μ_w همه خواص فیزیکی در دمای توده‌ای سیال محاسبه می‌شوند. عدد رینولدز به صورت زیر است:

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} \quad (4-5-5)$$

و عدد پراکتل نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N_{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} \quad (4-5-6)$$

این معادله برای $(N_{Re} N_{Pr} D/L) > 100$ صادق است. اگر معادله بالا برای $(N_{Re} N_{Pr} D/L) > 10$ به کار رود با $\pm 20\%$ خطا باز هم صدق می‌کند (B1). برای $(N_{Re} N_{Pr} D/L) < 100$ رابطه دیگری موجود است (P1).

در جریان آرام ضریب میانگین h_a شدیداً به طول گرم شده وابسته است. در معادله برای محاسبه نرخ انتقال حرارت q از اختلاف دمای میانگین (میانگین حسابی) ΔT_a استفاده می‌شود.

$$q = h_a A \Delta T_a = h_a A \frac{(T_w - T_{bi}) + (T_w - T_{bo})}{2} \quad (4-5-7)$$

که T_w دمای دیواره بر حسب K، T_{bi} دمای توده‌ای سیال ورودی و T_{bo} دمای توده‌ای سیال خروجی می‌باشند. برای لوله‌هایی با قطر بزرگ و اختلاف دمای زیاد بین دیواره و توده سیال، اثر جابه‌جایی طبیعی می‌تواند باعث افزایش h شود (P1). روابطی برای جریان آرام در لوله‌های عمودی نیز وجود دارند.

۴-۵C ضریب انتقال حرارت برای جریان مغشوش درون یک لوله

وقتی عدد رینولدز بالای ۲۱۰۰ باشد جریان مغشوش است. چون نرخ انتقال حرارت در ناحیه مغشوش زیاد است، بسیاری از فرایندهای انتقال حرارت صنعتی در ناحیه مغشوش می‌باشند.

معادله زیر برای لوله‌های با قطر کم به دست آمده است، اما برای لوله‌های با قطر بزرگ نیز قابل استفاده است. این معادله در محدوده $N_{Re} > 6000$ و $N_{Pr} < 16000$ و $L/D > 60$ برقرار است.

$$N_{Nu} = \frac{h_L D}{k} = 0.027 N_{Re}^{0.8} N_{Pr}^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (4-5-8)$$

که h_L ضریب انتقال حرارت بر اساس اختلاف دمای میانگین لگاریتمی ΔT_{lm} است (بخش ۴-۵H را ببینید). خواص سیال به جز μ_w در دمای توده‌ای میانگین ارزیابی می‌شود. اگر دمای توده‌ای میانگین از ورودی تا خروجی لوله تغییر یابد، از میانگین دماهای ورودی و خروجی استفاده می‌شود. به منظور تصحیح رابطه فوق برای محدوده $L/D < 60$ ، که در این حالت طول ورودی همراه با انقباض شدید است، می‌توانیم سمت راست معادله (۴-۵-۸) را در ضریب تصحیحی که در بخش ۴-۵F داده خواهد شد ضرب کنیم. استفاده از معادله (۴-۵-۸) ممکن است به صورت سعی و خطا باشد، چون مقدار h_L باید برای محاسبه T_w و سپس μ_w در دمای دیواره معلوم باشد. همچنین، اگر به علت انتقال حرارت دمای توده‌ای میانگین در طول لوله افزایش یا کاهش یابد، برای این‌که یک دمای توده‌ای میانگین در ورود و خروج داشته باشیم، دمای توده‌ای در طول لوله باید حدس زده شود.

در جریان مغشوش ضریب انتقال حرارت در یک لوله معمولی تا حدی بیشتر از یک لوله صاف است. این اثر از اثر اصطکاک سیال خیلی کمتر است و معمولاً در محاسبات از آن صرف نظر می‌شود. همچنین برای فلزات مایع که عدد پرانتل آنها خیلی کمتر از ۱ است باید از روابط دیگری برای محاسبه ضریب انتقال حرارت h استفاده نمود (بخش ۴-۵G را ببینید). در صورتی که مقطع لوله مدور نباشد همچنان‌که در بخش ۴-۵E بحث خواهد شد، از قطر معادل استفاده می‌شود.

برای هوا در فشار کل ۱ atm، معادله ساده‌شده زیر برای جریان مغشوش در لوله‌ها استفاده می‌شود:

$$h_L = \frac{3.52 D^{0.8}}{D^{0.2}} \quad (\text{SI}) \quad (4-5-9)$$

$$h_L = \frac{0.5 v_s^{0.8}}{(D')^{0.2}} \quad (\text{English})$$

که در این جا در سیستم SI D برحسب μm ، v برحسب m/s و h_L برحسب $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ و در سیستم انگلیسی، D' برحسب μin ، v_s برحسب ft/s و h_L برحسب $\text{btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$ می‌باشند.

معمولاً در تجهیزات انتقال حرارت از آب استفاده می‌شود. یک رابطه ساده شده برای استفاده در

محدوده دمایی ۴ تا ۱۰۵ °C (۴۰ تا ۲۲۰ °F) به صورت زیر است:

$$h_L = 1429(1 + 0.0146T^{\circ}\text{C}) \frac{v_s^{0.8}}{D^{0.2}} \quad (\text{SI}) \quad (4-5-10)$$

$$h_L = 150(1 + 0.011T^{\circ}\text{F}) \frac{v_s^{0.8}}{(D')^{0.2}} \quad (\text{English})$$

یک رابطه بسیار ساده برای محاسبات تقریبی هنگام استفاده از مایعات آلی به صورت زیر است (P3):

$$h_L = 423 \frac{v_s^{0.8}}{D^{0.2}} \quad (\text{SI}) \quad (4-5-11)$$

$$h_L = 60 \frac{v_s^{0.8}}{(D')^{0.2}} \quad (\text{English})$$

برای جریان داخل لوله‌های مارپیچ با N_{Re} بالاتر از 10^4 ، ضریب فیلمی پیش‌بینی شده برای لوله‌های مستقیم باید در عبارت $(1 + \frac{3/5D}{D_{coil}})$ ضرب شود.

مثال ۴-۵-۱ گرم کردن هوا در جریان مغشوش

هوا در شرایط ۲۰۶/۸ kPa و ۴۷۷/۶ K گرم شده و از طریق لوله‌ای به قطر داخلی ۲۵/۴ mm با سرعت ۷/۶۲ m/s جریان می‌یابد. وسیله گرم‌کننده بخار در حال مایع شدن در دمای ۴۸۸/۷K است که در خارج لوله قرار دارد. چون ضریب انتقال حرارت بخار در حال مایع شدن، چند هزار $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ است و مقاومت دیواره فلزی بسیار کم است، دمای سطح دیواره فلزی در تماس با هوا ۴۸۸/۷K فرض می‌شود. ضریب انتقال حرارت را برای حالت $\frac{L}{D} > 60$ و همچنین شار انتقال حرارت $\frac{q}{A}$ را محاسبه کنید. حل: از ضمیمه A.3 خواص فیزیکی هوا در ۴۷۷/۶ K (۲۰۴/۴ °C) به صورت زیر است:

$$k = 0.3894 \text{ W/m}, N_{Pr} = 0.686, \mu_b = 2.64 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\text{در دمای } 488/7 \text{ K یا دمای } 215/5 \text{ °C داریم، } \mu_w = 2.64 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\mu_b = 2.6 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s} = 2.6 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$$

$$\rho = 28/97 \times \left(\frac{1}{22/414}\right) \times \left(\frac{206/8}{101/33}\right) \times \left(\frac{273/2}{477/6}\right) = 1/509 \text{ kg/m}^3$$

عدد رینولدز محاسبه شده در دمای توده‌ای سیال (۴۷۷/۶ K) به صورت زیر است:

$$N_{Re} = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{0.0254 \times 7/62 \times 1/509}{2.6 \times 10^{-5}} = 1/122 \times 10^4$$

بنابراین جریان مغشوش است و از معادله (۴-۵-۸) استفاده می‌شود. با جایگزینی مقادیر معلوم در معادله (۴-۵-۸) داریم:

$$N_{Nu} = \frac{h_L D}{k} = 0.027 N_{Re}^{1/4} N_{Pr}^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{1/4}$$

$$\frac{h_L (0.0254)}{0.3894} = 0.027 \times (1/122 \times 10^4)^{1/4} \times 0.686^{1/3} \times \left(\frac{0.0260}{0.0264} \right)^{1/4}$$

پس از حل داریم: $h_L = 63/2 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} (11/13 \text{ btu/h.ft}^2 \cdot ^\circ\text{F})$

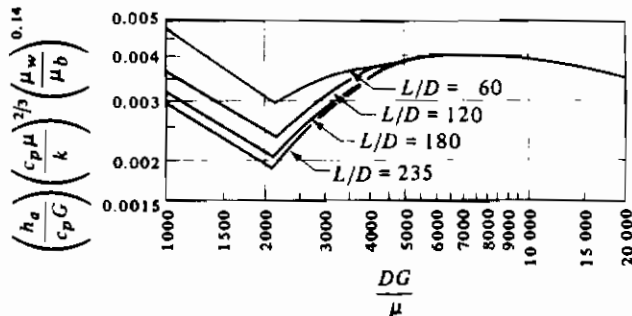
برای به دست آوردن شار $\frac{q}{A}$ داریم:

$$\frac{q}{A} = h_L (T_w - T) = 63/2 \times (488/7 - 477/6)$$

$$= 70.1/1 \text{ W/m}^2 (222/2 \text{ btu/h.ft}^2)$$

۴-۵-۵ ضریب انتقال حرارت جریان گذرا درون یک لوله

معادلات تجربی در ناحیه گذرا برای N_{Re} بین ۲۱۰۰ تا ۶۰۰۰ وضعیت ضریب اصطکاک سیال را به خوبی تشریح نمی‌کنند. هیچ معادله ساده‌ای برای انتقال حرارت در گذار از جریان آرام به مغشوش یعنی گذار از معادله (۴-۵-۴) در N_{Re} برابر ۲۱۰۰ به معادله (۴-۵-۸) در N_{Re} برابر ۶۰۰۰ موجود نیست. نمودار شکل ۴-۵-۲ یک رابطه تقریبی بین پارامترهای گوناگون انتقال حرارت و عدد رینولدز بین ۲۱۰۰ تا ۶۰۰۰ ارائه می‌کند. منحنی‌های فوق‌الذکر برای اعداد رینولدز کمتر از ۲۱۰۰، معادله (۴-۵-۴) و برای اعداد رینولدز بالاتر از 10^4 ، معادله (۴-۵-۸) را ارائه می‌کنند. میانگین ΔT_a در معادله (۴-۵-۷) باید همراه با h_a در شکل ۴-۵-۲ استفاده شود.



شکل ۴-۵-۲. رابطه بین پارامترهای انتقال حرارت در ناحیه گذار برای اعداد رینولدز بین ۲۱۰۰ تا ۶۰۰۰

(باکسب مجوز گرفته شده از: R. H. Perry and C. H. Chilton, Chemical Engineers' Handbook, 5th

۴-۵E ضریب انتقال حرارت برای مجراهای غیر مدور

یکی از سیستمهای انتقال حرارت که اغلب استفاده می شود حالتی است که سیالها در لوله های هم مرکز با دماهای متفاوت جریان داشته باشند. ضریب انتقال حرارت سیال در این فضای حلقوی می تواند با استفاده از همان معادلات موجود برای لوله های مدور تعیین شود. اما باید از قطر معادل تعریف شده در بخش است. $10^6 - 2$ استفاده گردد. برای یک فضای حلقوی، D_{eq} برابر با قطر داخلی لوله خارجی (D_o) منهای قطر خارجی لوله داخلی استفاده (D_i) برای اشکال هندسی دیگر نیز می توان از قطر معادل^(۱) نمود.

مثال ۴-۵-۲ گرم شدن آب به وسیله بخار و حل به روش حدس و خطا

آب در یک لوله افقی فولادی شماره ۴۰ به قطر اسمی ۱ in در دمای میانگین $65/6^\circ C$ با سرعت $2/44 \text{ m/s}$ جریان دارد. آب توسط بخار در حال میعان در دمای $107/8^\circ C$ در خارج لوله، گرم می شود. ضریب انتقال حرارت در طرف بخار در حدود $h_o = 10500 \text{ W/m}^2 \cdot K$ تخمین زده شده است.

الف - ضریب انتقال حرارت h_i را برای آب درون لوله محاسبه کنید.

ب - ضریب کلی انتقال حرارت U_i را بر حسب سطح داخلی محاسبه کنید.

پ - نرخ انتقال حرارت q را برای $0/305 \text{ m}$ از لوله در صورتی که آب در دمای میانگین $65/6^\circ C$ باشد، محاسبه کنید.

حل: از ضمیمه A-5 ابعاد لوله به صورت، $D_o = 0/0334 \text{ m}$ و $D_i = 0/0266 \text{ m}$ هستند. برای آب در دمای میانگین توده ای $65/6^\circ C$ از ضمیمه A.2 خواهیم داشت:

$$\mu = 4/32 \times 10^{-4} \text{ Pa.s} = 4/32 \times 10^{-4} \text{ kg/m.s}$$

به دمای دیواره فلزی داخلی نیاز است. به عنوان حدس اول، مقدار آن را یک سوم فاصله بین

$$65/6 \text{ و } 107/8 \text{ در نظر می گیریم، یعنی } T_w = 80^\circ C. \text{ در این دما } \mu_w = 3/56 \times 10^{-4} \text{ pa.s}$$

ابتدا عدد رینولدز برای آب در دمای توده ای میانگین محاسبه می شود.

$$N_{Re} = \frac{D_i v \rho}{\mu} = \frac{0/0266 \times 2/44 \times 980}{4/32 \times 10^{-4}} = 1/473 \times 10^5$$

بنابراین جریان مغشوش است. با استفاده از معادله (۴-۵-۸) و جایگزینی مقادیر معلوم داریم:

$$\frac{h_L D}{k} = 0.027 NRe^{0.18} NPr^{0.33} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

$$\frac{h_L (0.0266)}{0.663} = 0.027 \times (1/473 \times 10^5)^{0.18} \times 2/72^{0.33} \times \left(\frac{4/32 \times 10^{-4}}{3/56 \times 10^{-4}}\right)^{0.14}$$

که پس از حل رابطه داریم: $h_L = h_i = 13324 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

برای قسمت (ب)، سطوح گوناگون برای 0.305 m از طول لوله به صورت زیر هستند:

$$A_i = \pi D_i L = \pi \times 0.0266 \times 0.305 = 0.0255 \text{ m}^2$$

$$A_{lm} = \pi \frac{(0.0266 + 0.0334) \times 0.305}{2} = 0.0287 \text{ m}^2$$

$$A_o = \pi \times 0.0334 \times 0.305 = 0.0320 \text{ m}^2$$

مقدار k برای فولاد $45 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ است. مقاومت‌ها عبارتند از:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{13324 \times 0.0255} = 0.002943$$

$$R_m = \frac{r_o - r_i}{k A_{lm}} = \frac{0.0334 - 0.0266}{2} \times \frac{1}{45 \times 0.0287} = 0.002633$$

$$R_o = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{10500 \times 0.0320} = 0.002976$$

$$\Sigma R = 0.002943 + 0.002633 + 0.002976 = 0.008552$$

اختلاف دمای کل برابر با $42/2 \text{ K} = 42/2 \text{ } ^\circ\text{C} = 65/6 - 107/8$ است. افت دما در عرض لایه نازک آب برابر است با:

$$\text{افت دما} = \frac{R_i}{\Sigma R} \times 42/2 = \left(\frac{0.002943}{0.008552}\right) \times 42/2 = 14/5 \text{ K} = 14/5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

بنابراین، $T_w = 65/6 + 14/5 = 80/1 \text{ } ^\circ\text{C}$ است. این جواب کاملاً نزدیک به حدس اولیه $80 \text{ } ^\circ\text{C}$ می‌باشد. μ_w تنها خاصیت فیزیکی است که در حدس دوم تغییر می‌کند. این تغییر تأثیر بسیار ناچیزی بر h_i خواهد داشت و به همین دلیل حدس دوم لازم نیست.

برای قسمت (ب)، ضریب کلی بر اساس معادله (۱۶-۳-۴) به صورت زیر است:

$$q = U_i A_i (T_o - T_i) = \frac{T_o - T_i}{\Sigma R}$$

$$U_i = \frac{1}{A_i \Sigma R} = \frac{1}{0.0255 \times 0.008552} = 4586 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

در قسمت (پ)، برای آب در دمای میانگین $65/6^\circ\text{C}$ داریم:

$$T_o - T_i = 107/8 - 65/6 = 42/2^\circ\text{C} = 42/2\text{ K}$$

$$q = U_j A_j (T_o - T_i) = 4586 \times 0.0255 \times 42/2 = 4935\text{ W}$$

۴-۵F تأثیر ناحیه ورودی^(۱) بر ضریب انتقال حرارت

در نزدیک ورودی لوله جایی که سیال شروع به گرم شدن می‌کند، توزیع دما کاملاً توسعه یافته نیست و ضریب موضعی h بزرگتر از ضریب h_L در ناحیه کاملاً توسعه یافته در جریان مغشوش می‌باشد. در ورودی لوله جایی که تغییرات دما هنوز تثبیت نشده است، مقدار h بی‌نهایت است. مقدار h به سرعت اُفت کرده و تقریباً برابر با همان مقدار h_L در $L/D = 60$ می‌شود که L طول ورودی است. این روابط برای جریان مغشوش داخل یک لوله به صورت زیر هستند که ورودی در آن دارای یک انقباض شدید است.

$$\frac{h}{h_L} = 1 + \left(\frac{D}{L}\right)^{0.7} \quad 2 < \frac{L}{D} < 20 \quad (4-5-12)$$

$$\frac{h}{h_L} = 1 + 6 \left(\frac{D}{L}\right) \quad 20 < \frac{L}{D} < 60 \quad (4-5-13)$$

در این روابط h مقدار میانگین برای یک لوله با طول محدود L و h_L برای لوله‌های طویل می‌باشد.

۴-۵G ضریب انتقال حرارت فلزات مذاب

معمولاً در مواردی که یک سیال نیاز به محدوده دمایی وسیع و فشار نسبتاً پایین داشته باشد از فلزات مذاب به عنوان سیال منتقل‌کننده گرما استفاده می‌شود. فلزات مذاب اغلب در راکتورهای هسته‌ای استفاده می‌شوند زیرا دارای ضریب انتقال حرارت بالا و همچنین ظرفیت گرمایی (به ازای واحد حجم) بالا هستند. ضرایب انتقال حرارت بالا در فلزات مذاب به دلیل بالا بودن ضرایب هدایت گرمایی و در نتیجه پایین بودن عدد پراوتل آنها است. در جریان فلزات مذاب در لوله‌ها، به دلیل بالا بودن ضریب هدایت، انتقال حرارت هدایتی در هسته مغشوش اهمیت زیادی دارد، و اغلب از اثر جابه‌جایی مهمتر است. برای جریان مغشوش کاملاً توسعه یافته در لوله‌های با شار گرمایی یکنواخت از معادله زیر می‌توان استفاده نمود (L_1):

$$N_{Nu} = \frac{h_L D}{k} = 0.625 N_{Pe}^{0.4} \quad (4-5-14)$$

که $N_{pe} = N_{Re} N_{Pr}$ عدد پکلت است. این رابطه در محدوده $L/D > 60$ و $10^4 < N_{pe} < 10^6$ صدق می‌کند. در صورتی که دمای دیواره ثابت باشد داریم،

$$N_{Nu} = \frac{h_L D}{k} = 5.0 + 0.025 N_{pe}^{0.8} \quad (4-5-15)$$

معادله بالا در محدوده $L/D > 60$ و $N_{pe} > 1000$ صادق است. همه خواص فیزیکی در دمای میانگین توده‌ای ارزیابی می‌شوند.

مثال ۳-۵-۴ انتقال حرارت فلز مذاب در درون یک لوله

یک فلز مذاب با دبی $4/00 \text{ kg/s}$ درون یک لوله با قطر داخلی $0/05 \text{ m}$ جریان دارد. مایع در 500 K وارد شده و تا دمای 505 K گرم می‌شود. دیواره لوله در دمای 30 K بالاتر از دمای توده‌ای سیال نگهداشته می‌شود. شار گرمایی نیز ثابت نگهداشته می‌شود. طول مورد نیاز برای لوله را محاسبه کنید. خواص فیزیکی میانگین به صورت زیر هستند:

$$\mu = 7/1 \times 10^{-4} \text{ Pa.s}, \rho = 7400 \text{ kg/m}^3, c_p = 120 \text{ J/kg.K}, k = 13 \text{ W/m.K}$$

حل: سطح گرمایی به صورت زیر محاسبه می‌شود،

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (0/05)^2}{4} = 1/963 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

بنابراین داریم:

$$G = \frac{4/0}{1/963 \times 10^{-3}} = 2/038 \times 10^3 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$$

عدد رینولدز و عدد پراتل به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$N_{Re} = \frac{D G}{\mu} = \frac{0/05 \times (2/038 \times 10^3)}{7/1 \times 10^{-4}} = 1/435 \times 10^5$$

$$N_{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{120 \times (7/1 \times 10^{-4})}{13} = 0/00655$$

با استفاده از معادله (۴-۵-۱۴) داریم:

$$h_L = \frac{k}{D} (0/625) N_{pe}^{1/4} = \frac{13}{0/05} \times 0/625 \times (1/435 \times 10^5 \times 0/00655)^{1/4}$$

$$= 2512 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

با استفاده از یک موازنه گرمایی داریم:

$$q = m c_p \Delta T = 4 \times 120 \times (505 - 500) = 2400 \text{ W} \quad (4-5-16)$$

با جایگذاری در معادله (۴-۵-۱) داریم:

$$\frac{q}{A} = \frac{2400}{A} = h_L (T_w - T) = 2512 \times 30 = 75360 \text{ W/m}^2$$

$$\text{بنابراین، } A = \frac{2400}{75360} = 3/185 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ سپس:}$$

$$A = 3/185 \times 10^{-2} = \pi D L = \pi \times 0/05 \times L$$

پس از حل رابطه داریم، $L = 0/203 \text{ m}$.

۴-۵H اختلاف دمای میانگین لگاریتمی و افت دمای متغیر

معادلات (۴-۵-۱) و (۴-۳-۱۲) تنها هنگامی که افت دمای $(T_i - T_o)$ برای همه قسمت‌های سطح در حال گرم شدن یکسان باشد، می‌تواند به همان صورت نوشته شده به کار رود. بنابراین معادله زیر

$$q = U_i A_i (T_i - T_o) = U_o A_o (T_i - T_o) = UA(\Delta T) \quad (4-5-17)$$

هنگامی که سیالات در حال گرم شدن یا سرد شدن باشند، فقط در یک نقطه صدق می‌کند. اما همچنان که دو سیال از مبدل حرارتی عبور می‌کنند گرم یا سرد می‌شوند و هر دو دمای T_i و T_o تغییر می‌کنند. بنابراین $(T_i - T_o)$ یا ΔT نسبت به مکان تغییر می‌کند و باید از ΔT_m میانگین برای کل دستگاه استفاده نمود.

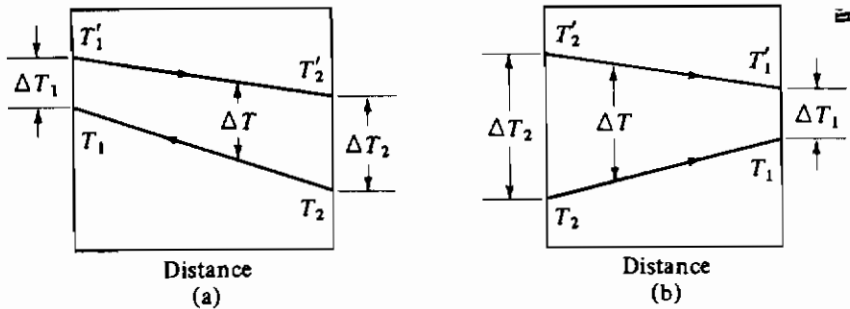
در یک مبدل حرارتی دو لوله‌ای، سیال گرم درون لوله توسط سیال سردی که در خارج لوله در جهت مخالف جریان دارد از دمای T_1' تا دمای T_2' سرد می‌شود. مطابق شکل ۴-۵-۳a سیال سرد از دمای T_1 تا T_2 گرم می‌شود. ΔT نشان داده شده با مسافت تغییر می‌کند. بنابراین همچنان که سطح A از صفر در ورودی تا مقدار A در خروجی مبدل تغییر می‌کند، ΔT در معادله (۴-۵-۱۷) نیز تغییر می‌کند.

برای جریان متقابل دو سیال در شکل ۴-۵-۳a، نرخ انتقال حرارت به صورت زیر است:

$$q = UA \Delta T_m \quad (4-5-18)$$

که در این جا ΔT_m یک اختلاف دمای میانگین مناسب است که باید تعیین شود. برای یک سطح dA موازنه گرما روی سیالات گرم و سرد به صورت زیر است:

$$dq = -m'c'_p dT' = mc_p dT \quad (4-5-19)$$



شکل ۴-۵-۳. توزیع دما برای مبدل یک گذردو لوله‌ای: (a) جریان متقابل (b) جریان هم‌بوی موازی

در این جا m دبی جرمی جریان برحسب kg/s است. مقادیر m ، m' ، c_p ، c_p' و U ثابت فرض می‌شوند. همچنین:

$$dq = U(T' - T) dA \quad (4-5-20)$$

از معادله (۴-۵-۱۹) داریم: $dT = dq/mc_p$ و $dT' = -dq/m'c_p'$ بنابراین:

$$dT' - dT = d(T' - T) = -dq \left(\frac{1}{m'c_p'} + \frac{1}{mc_p} \right) \quad (4-5-21)$$

با جایگذاری معادله (۴-۵-۲۰) در معادله (۴-۵-۲۱) داریم:

$$\frac{d(T' - T)}{T' - T} = -U \left(\frac{1}{m'c_p'} + \frac{1}{mc_p} \right) dA \quad (4-5-22)$$

با انتگرال‌گیری بین نقاط ۱ و ۲ داریم:

$$\ln \left(\frac{T_2' - T_2}{T_1' - T_1} \right) = -UA \left(\frac{1}{m'c_p'} + \frac{1}{mc_p} \right) \quad (4-5-23)$$

با نوشتن یک موازنه گرمایی بین ورودی و خروجی:

$$q = m'c_p'(T_1' - T_2') = mc_p(T_2 - T_1) \quad (4-5-24)$$

با حل معادله نسبت به $m'c_p'$ در معادله (۴-۵-۲۴) و جایگذاری در معادله (۴-۵-۲۳) داریم:

$$q = \frac{UA[(T_2' - T_2) - (T_1' - T_1)]}{\ln [(T_2' - T_2)/(T_1' - T_1)]} \quad (4-5-25)$$

با مقایسه معادلات (۴-۵-۱۸) و (۴-۵-۲۵) می‌بینیم که ΔT_m اختلاف دمای میانگین لگاریتمی ΔT_{lm} است. از این رو در حالتی که ضریب کلی انتقال حرارت U در سرتاسر مبدل و همچنین ظرفیت گرمایی

هر سیال ثابت است، اختلاف دمای مناسب در تمام مبدل، میانگین لگاریتمی آن می‌باشد.

$$q = UA\Delta T_{lm} \quad (4-5-26)$$

که در این جا:

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)} \quad (4-5-27)$$

مشاهده می‌شود که برای جریان موازی مطابق شکل ۳b-۵-۴ باید از اختلاف دمای میانگین لگاریتمی استفاده کرد. در برخی حالات که بخار در حال میعان است، T'_1 و T'_2 ممکن است مساوی باشند. معادلات فوق برای این حالت هم صادق هستند. در حالتی که U با مسافت تغییر می‌کند یا عوامل پیچیده دیگری دخالت می‌کنند، مراجع دیگر باید مورد استفاده قرار گیرد (B2, P3, W1).

مثال ۴-۵-۴ سطح انتقال حرارت و اختلاف دمای میانگین لگاریتمی

نفت خام سنگین با $c_{pm} = 2/30 \text{ kJ/kg.K}$ در یک مبدل حرارتی از دمای $371/9 \text{ K}$ تا $349/7 \text{ K}$ سرد می‌شود و با دبی جرمی 3630 kg/h وارد لوله می‌شود. آب با دبی 1450 kg/h با دمای $288/6 \text{ K}$ برای سرد کردن نفت در بیرون لوله جریان می‌یابد.

الف - در صورتی که $U_i = 340 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ باشد، دمای آب خروجی و سطح انتقال حرارت را محاسبه کنید. جریان متقابل است.

ب - محاسبات را برای جریان همسو تکرار کنید.

حل: فرض کنید برای آب، $c_{pm} = 4/187 \text{ kJ/kg.K}$ است. دمای آب ورودی (T_2) برابر با $288/6 \text{ K}$ ، دمای آب خروجی T_1 ، دمای نفت ورودی $T'_1 = 371/9 \text{ K}$ و دمای نفت خروجی $T'_2 = 349/7 \text{ K}$ است. گرمای از دست رفته نفت را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$q = 3630 \text{ kg/h} \times 2/30 \text{ kJ/kg.K} \times (371/9 - 349/7) \text{ K}$$

$$= 185400 \text{ kJ/h} \quad (51490 \text{ W}) \quad \text{یا} \quad (175700 \text{ btu/h})$$

بر اساس موازنه گرما، q باید با گرمای گرفته شده توسط آب برابر باشد.

$$q = 185400 \text{ kJ/h} = 1450 \text{ kg/h} \times 4/187 \text{ kJ/kg.K} \times (T_1 - 288/6) \text{ K}$$

پس از حل رابطه داریم: $T_1 = 319/1 \text{ K}$.

برای حل مساله بر اساس اختلاف دمای میانگین لگاریتمی داریم:

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$\Delta T_1 = T'_1 - T_1 = 371/9 - 319/1 = 52/8 \text{ K}$$

$$\Delta T_2 = T'_2 - T_2 = 349/7 - 288/6 = 61/1 \text{ K}$$

با جایگزینی در معادله (۴-۵-۲۷) داریم؛

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)} = \frac{61/1 - 52/8}{\ln(61/1/52/8)} = 56/9 \text{ K}$$

با استفاده از معادله (۴-۵-۲۶):

$$q = U_i A_i \Delta T_{lm}$$

$$51490 = 340 \times A_i \times 56/9$$

و پس از حل رابطه: $A_i = 2/66 \text{ m}^2$

برای قسمت (ب)، آب خروجی هنوز در دمای $T_1 = 319/1 \text{ K}$ است. با مراجعه به شکل ۴-۵-۳b

$$\Delta T_2 = 371/9 - 288/6 = 83/3 \text{ K} \text{ و } \Delta T_1 = 349/7 - 319/1 = 30/6 \text{ K}$$

مجدداً با استفاده از معادله (۴-۵-۲۷) و حل آن داریم: $\Delta T_{lm} = 52/7 \text{ K}$. با جایگذاری در معادله (۴-۵-۲۶) داریم: $A_i = 2/87 \text{ m}^2$. این سطح نسبت به جریان متقابل بزرگتر است. این تفاوت به این علت است که جریان متقابل، نیروی رانش بزرگتری ایجاد می‌کند و معمولاً به همین دلیل بر جریان همسو ترجیح داده می‌شود.

مثال ۴-۵-۵ انتقال حرارت آرام و حدس و خطا

نفت خام در دمای 150°F وارد یک لوله به قطر داخلی 3.3 ft و طول 15 ft با دبی 80 lbm/h می‌شود. چون بخار در خارج لوله مایع می‌شود و ضریب انتقال حرارت آن زیاد است، دمای سطح داخلی لوله در 350°F ثابت فرض می‌شود. خواص نفت عبارتند از: $c_{pm} = 0.5 \text{ btu/lbm}^\circ \text{F}$ و $k_m = 0.83 \text{ btu/h.ft}^\circ \text{F}$. تغییر ویسکوزیته نفت با دما عبارت است از: در 150°F برابر با $6/5 \text{ cp}$ ، در 200°F برابر با $5/05 \text{ cp}$ ، در 250°F برابر با $3/80 \text{ cp}$ ، در 300°F برابر با $2/82 \text{ cp}$ ، و در 350°F برابر با $1/95 \text{ cp}$. ضریب انتقال حرارت و دمای خروجی نفت (T_{bo}) را محاسبه کنید.

حل: چون دمای خروجی نفت نامعلوم است، روش حل مساله حدس و خطاست. فرض

می‌کنیم $T_{bo} = 250^\circ\text{F}$ باشد. دمای میانگین توده‌ای نفت که برای خواص فیزیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد برابر با $\frac{(150 + 250)}{2}$ یا 200°F است. ویسکوزیته نفت در دمای 200°F به صورت زیر است:

$$\mu_b = 0.5 \times 2/4194 = 12/23 \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{h}$$

در دمای دیواره یعنی 350°F داریم:

$$\mu_w = 1/95 \times 2/4191 = 4/72 \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{h}$$

سطح مقطع لوله (A) برابر است با:

$$A = \frac{\pi D_i^2}{4} = \frac{\pi \times 0.303^2}{4} = 0.000722 \text{ ft}^2$$

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \frac{80 \text{ lb}_m/\text{h}}{0.000722 \text{ ft}^2} = 111000 \text{ lb}_m/\text{ft}^2\cdot\text{h}$$

عدد رینولدز در دمای میانگین توده‌ای برابر است با:

$$N_{Re} = \frac{D_i v \rho}{\mu} = \frac{D_i G}{\mu} = \frac{0.303 \times 111000}{12/23} = 275/5$$

عدد پراتل در همین دما برابر است با:

$$N_{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{0.5 \times 12/23}{0.83} = 73/7$$

چون عدد رینولدز زیر 2100 است، جریان در ناحیه آرام است و در این حالت از معادله (4-5-4) باید استفاده شود. حتی در دمای خروجی 250°F نیز هنوز جریان آرام است. با جایگذاری داریم:

$$(N_{Nu})_a = \frac{h_a D}{k} = 1/86 \times (N_{Re} N_{Pr} \frac{D}{L})^{0.22} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

$$\frac{h_a \times 0.303}{0.83} = 1/86 \times [275/5 \times 73/7 \times \frac{0.303}{15}]^{0.22} \times \left(\frac{12/23}{4/72}\right)^{0.14}$$

پس از حل رابطه داریم: $h_a = 20/1 \text{ btu}/\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$ ($114 \text{ W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$)

حال با نوشتن یک موازنه گرمایی برای نفت خواهیم داشت:

$$q = m c_{pm} (T_{bo} - T_{bi}) = 80 \times 0.5 \times (T_{bo} - 150) \quad (4-5-28)$$

با استفاده از معادله (4-5-7) به صورت زیر:

$$q = h_{ii} A \Delta T_{ii} \quad (4-5-7)$$

برای ΔT_a به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \Delta T_{ii} &= \frac{(T_w - T_{bj}) + (T_w - T_{bo})}{2} \\ &= \frac{(350 - 150) + (350 - T_{bo})}{2} \\ &= 275 - 0.5 T_{bo} \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن معادله (۴-۵-۲۸) با (۴-۵-۷) و جایگزینی روابط داریم:

$$\begin{aligned} 80 \times 0.5 \times (T_{bo} - 150) &= h A \Delta T_{ii} \\ &= 20/1 \times [\pi \times 0.0303 \times 15] \times (275 - 0.5 T_{bo}) \end{aligned}$$

از حل این رابطه نتیجه می شود: $T_{bo} = 255^\circ F$.

این مقدار از مقدار فرض اولیه $250^\circ F$ بالاتر است. برای حدس بعدی میانگین دمای توده‌ای نفت $\frac{(150 + 255)}{2}$ یا $202.5^\circ F$ در نظر گرفته می شود. ویسکوزیته جدید در مقایسه پیا ۵/۰۵ برای حدس اول، برابر ۵/۰ cp است. چون اثر ویسکوزیته در عبارت $(N_{Re})(N_{Pr})$ حذف می شود این تغییر تنها روی عبارت $(\mu_b / \mu_w)^{1/4}$ در معادله (۴-۵-۴) اثر می گذارد. ضریب انتقال حرارت نیز کمتر از ۰/۲٪ تغییر می کند که قابل صرف نظر کردن است. از این رو دمای خروجی $T_1 = 255^\circ F (123/9^\circ C)$ صحیح است.

۴-۶ انتقال حرارت در بیرون اشکال هندسی مختلف در جابه جایی اجباری

۴-۶A مقدمه

در بسیاری حالات یک سیال از روی اجسام کاملاً غوطه‌ور مانند کره‌ها، لوله‌ها، صفحات و مانند آنها جریان می یابد و انتقال حرارت تنها بین سیال و جامد روی می دهد. بسیاری از این اشکال کاربرد عملی در فرایندهای مهندسی دارند. کره، استوانه و صفحه صاف، مهمترین نوع اشکال هندسی هستند که غالباً با انتقال حرارت بین این سطوح و یک سیال جاری روبرو هستیم.

وقتی که انتقال حرارت در یک جسم غوطه‌ور اتفاق می افتد، شار گرمایی به شکل هندسی جسم، وضعیت جریان نسبت به جسم (روبرو، کنار، پشت و غیره)، نزدیکی به اجسام دیگر،

دبی جریان و خواص سیال بستگی دارد. ضریب انتقال حرارت در روی جسم متغیر است. در روابط تجربی از ضریب انتقال حرارت میانگین استفاده می شود که در بخشهای بعدی به آن می پردازیم. به طور کلی ضریب انتقال حرارت میانگین برای جسمهای غوطه ور به صورت زیر داده می شود:

$$N_{Nu} = CN_{Re}^m N_{Pr}^{1/3} \quad (4-6-1)$$

که C و m دو ثابت هستند که به ساختارهای مختلف بستگی دارند. خواص سیال در دمای فیلم $T_f = (T_b + T_w) / 2$ مورد ارزیابی قرار می گیرند که در این جا T_w دمای دیواره یا دمای سطح و T_b دمای میانگین توده ای سیال است. سرعت در N_{Re} برابر با سرعت جریان آزاد غیر مغشوش (v) سیالی است که به جسم نزدیک می شود.

۶B-۴ جریان موازی با صفحه صاف

هنگامی که سیال به طور موازی با یک صفحه صاف جریان دارد، انتقال حرارت بین کل صفحه به طول L متر و سیال اتفاق می افتد. N_{Nu} در محدوده $N_{Re,L}$ کمتر از 3×10^5 در ناحیه آرام و $N_{Pr} > 0.7$ به صورت زیر است:

$$N_{Nu} = 0.664 N_{Re,L}^{0.5} N_{Pr}^{1/3} \quad (4-6-2)$$

که در این جا $N_{Re,L} = L v \rho / \mu$

در ناحیه کاملاً مغشوش در $N_{Re,L}$ بالاتر از 3×10^5 (مراجع K1 و K3) و $N_{Pr} > 0.7$ داریم:

$$N_{Nu} = 0.0366 N_{Re,L}^{0.8} N_{Pr}^{1/3} \quad (4-6-3)$$

اما اگر صفحه زیر باشد اغتشاش می تواند در $N_{Re,L}$ کمتر از 3×10^5 شروع شود (K3) و بنابراین معادله (4-6-3) صدق خواهد کرد و N_{Nu} به دست آمده بزرگتر از مقداری خواهد بود که توسط معادله (4-6-2) به دست می آید. در رینولدزهای کمتر از حدود 2×10^4 معادله (4-6-2) مقادیر بزرگتری از N_{Nu} را می دهد.

مثال 4-6-1 سرد کردن یک پره مسی^(۱)

پره نازک، صاف و صیقلی مسی به ابعاد 51 mm در 51 mm^2 به یک لوله وصل شده است. دمای این پره تقریباً در $82/2^\circ \text{C}$ یکنواخت است. هوای سرد در دمای $15/6^\circ \text{C}$ و فشار مطلق 1 atm به طور موازی با پره با سرعت $12/2 \text{ m/s}$ جریان دارد.

الف - برای جریان آرام، ضریب انتقال حرارت h را محاسبه کنید.

ب - اگر لبه پره زیر باشد، بطوری که همه لایه مرزی روی پره کاملاً مغشوش باشد، h را محاسبه کنید.

حل: خواص سیال در دمای فیلم محاسبه می شوند.

$$T_f = \frac{T_w + T_b}{2} = \frac{12/2 + 15/6}{2} = 48/9 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ (} 322/1 \text{ K)}$$

از ضمیمه A.3، خواص فیزیکی هوا در $48/9 \text{ } ^\circ\text{C}$ به این صورت می باشند:

$$N_{Pr} = 0.704 \mu = 1/95 \times 10^{-5} \text{ pa.s } \rho = 1.097 \text{ kg/m}^3, k = 0.0280 \text{ W/m.K}$$

عدد رینولدز برای $L = 0.051 \text{ m}$ به صورت زیر است:

$$N_{Re} = \frac{L v \rho}{\mu} = \frac{0.051 \times 12/2 \times 1.097}{1/95 \times 10^{-5}} = 3/49 \times 10^4$$

با جایگذاری در معادله (۴-۶-۲) داریم:

$$N_{Nu} = \frac{h L}{k} = 0.664 \times N_{Re}^{1/2} \times N_{Pr}^{1/3}$$

$$\frac{h \times 0.051}{0.0280} = 0.664 \times (3/49 \times 10^4)^{1/2} \times 0.704^{1/3}$$

پس از حل رابطه: $h = 60/7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ($10/7 \text{ btu/h.ft}^2 \cdot \text{ } ^\circ\text{F}$)

برای قسمت (ب)، با جایگذاری در معادله (۴-۶-۳) و حل آن داریم،

$$h = 77/2 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \text{ (} 13/6 \text{ btu/h.ft}^2 \cdot \text{ } ^\circ\text{F)}$$

۴-۶C استوانه با محور عمود بر جریان

اغلب یک استوانه حاوی یک سیال توسط سیال دیگری که عمود بر محور آن جریان دارد گرم یا سرد می شود. معادله (۳-۶-۱)، معادله مناسب جهت پیش بینی میانگین ضریب انتقال حرارت در بیرون از استوانه برای گازها و مایعات است ($K3, P3$) که ثابتهای C و m آن در جدول ۴-۶-۱ داده شده اند. عدد رینولدز عبارت است از $N_{Re} = Dv\rho/\mu$ که D قطر خارجی لوله می باشد و تمام خواص فیزیکی در دمای فیلم (T_f) به دست می آیند. سرعت نیز برابر با سرعت جریان آزاد غیر مغشوش در حال نزدیک شدن به استوانه است.

جدول ۴-۶-۱. ثابتهای معادله (۴-۶-۱) برای انتقال حرارت به استوانه‌هایی که محور آنها

عمود بر مسیر جریان است ($N_{Pr} > 0.6$)

N_{Re}	m	C
1-4	0.330	0.989
4-40	0.385	0.911
$40-4 \times 10^3$	0.466	0.683
$4 \times 10^3-4 \times 10^4$	0.618	0.193
$4 \times 10^4-2.5 \times 10^5$	0.805	0.0266

۴-۶D جریان گذرنده از روی یک کره

هنگامی که یک کره به وسیله سیالی که از روی آن عبور می‌کند گرم یا سرد می‌شود، از معادله زیر می‌توان جهت پیش‌بینی میانگین ضریب انتقال حرارت در محدوده $N_{Re} = Dv\rho/\mu$ از ۱ تا ۷۰۰۰۰ و N_{Pr} از ۰/۶ تا ۴۰۰ استفاده کرد.

$$N_{Nu} = 2.0 + 0.60N_{Re}^{0.5} N_{Pr}^{1/3} \quad (4-6-4)$$

خواص سیال در دمای فیلم (T_f) ارزیابی می‌شوند. یک رابطه تا حدی دقیق‌تر برای محدوده رینولدز ۱ تا ۱۷۰۰۰ توسط دیگران داده شده است (S2)، که اثرات جابه‌جایی آزاد را نیز در اعداد رینولدز پایین‌تر در نظر می‌گیرد.

مثال ۴-۶-۲ سرد کردن یک کره

با استفاده از همان شرایط مثال (۴-۶-۱) که در آنجا هوا در فشار مطلق ۱ atm و دمای $15/6^\circ\text{C}$ با سرعت $12/2 \text{ m/s}$ جریان داشت، میانگین ضریب انتقال حرارت برای هوای در حال جریان از روی یک کره با قطر 51 mm و دمای میانگین سطحی $82/2^\circ\text{C}$ را محاسبه کنید. همچنین این مقدار را با $h = 77/2 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ برای صفحه صاف در جریان مغشوش، مقایسه کنید.

حل: خواص فیزیکی در دمای میانگین فیلم در $48/9^\circ\text{C}$ همانند مثال ۴-۶-۱ می‌باشد. N_{Re} برابر است با:

$$N_{Re} = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{0.051 \times 12/2 \times 1.097}{1/95 \times 10^{-5}} = 3/49 \times 10^4$$

با جایگذاری در معادله (۴-۶-۴) برای یک کره، داریم:

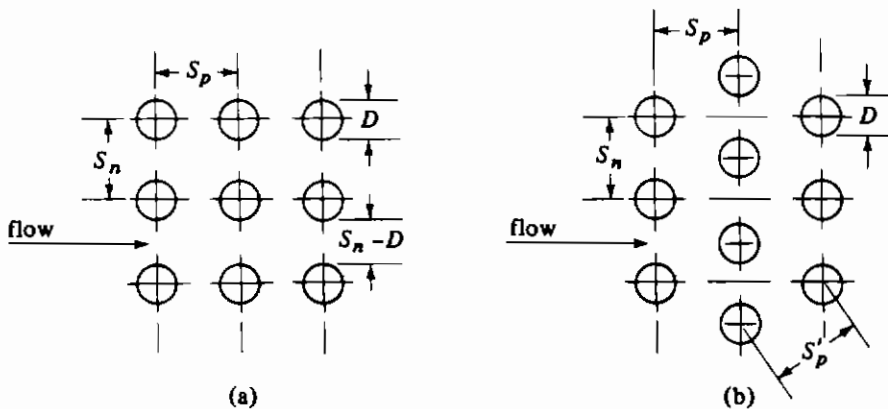
$$N_{Nu} = \frac{h D}{k} = \frac{h \times 0.051}{0.0280} = 2 + 0.6 \times N_{Re}^{0.5} \times N_{Pr}^{0.33}$$

$$= 2 + 0.6 \times (3/49 \times 10^4)^{0.5} \times 0.704^{0.33}$$

پس از حل خواهیم داشت: $h = 56/1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ($9/88 \text{ btu/h.ft}^2 \cdot \text{°F}$). این مقدار در مقایسه با ضریب انتقال حرارت سطح صاف که برابر با $13/6 \text{ btu/h.ft}^2 \cdot \text{°F}$ ($13/6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$) بود، قدری کمتر می‌باشد.

۴-۶E جریان گذرنده از روی دسته لوله‌ها یا استوانه‌ها

بیشتر انواع مبدل‌های حرارتی تجارتمی دارای ردیف‌های لوله‌ی زیادی هستند که در آن جاسیال عمود بر دسته لوله‌ها جریان دارد. یک نمونه از آن یک گرم‌کن گازی است که در آن سیال گرم داخل لوله‌ها گاز عبوری از بیرون لوله‌ها را گرم می‌کند. نمونه‌ی دیگر جریان مایع سرد درون لوله‌هاست که توسط سیال داغ بیرون لوله، گرم می‌شود. شکل ۴-۶-۱ آرایش دسته لوله‌ها را به صورت ردیفی^(۱) و متناوب^(۲) نشان می‌دهد که در این شکل D قطر خارجی لوله بر حسب متر یا فوت، S_n فاصله بین مراکز لوله‌ها در جهت عمود بر جریان بر حسب متر یا فوت و S_p همین فاصله در جهت موازی با جهت جریان می‌باشد. منطقه‌ی باز برای جریان سیال در آرایش ردیفی برابر با $(S_n - D)$ و $(S_p - D)$ ، و در آرایش متناوب $(S_n - D)$ و $(S'_p - D)$ است. مقادیر ثابت‌های C و m که در معادله (۴-۶-۱) استفاده می‌شوند، در محدوده رینولدزهای بین ۲۰۰۰ تا ۴۰۰۰۰ برای انتقال حرارت به دسته لوله‌های شامل بیشتر از ۱۰ ردیف در جهت جریان، در جدول ۴-۶-۲ داده شده‌اند. جدول ۴-۶-۳ ضرایب تصحیح را برای حالت کمتر از ۱۰ ردیف لوله می‌دهد.



شکل ۴-۶-۱. نام‌گذاری نمادهای دسته لوله‌ها در جدول ۴-۶-۲: (a) آرایش ردیفی لوله‌ها (b) آرایش متناوب لوله‌ها

جدول ۴-۶-۲. مقادیر C و m در معادله (۴-۶-۱) برای انتقال حرارت به دسته لوله‌هایی که بیشتر از ۱۰ ردیف لوله در جهت جریان دارند.

Arrangement	$\frac{S_p}{D} = \frac{S_F}{D} = 1.25$		$\frac{S_p}{D} = \frac{S_F}{D} = 1.50$		$\frac{S_p}{D} = \frac{S_F}{D} = 2.0$	
	C	m	C	m	C	m
In-line	0.386	0.592	0.278	0.620	0.254	0.632
Staggered	0.575	0.556	0.511	0.562	0.535	0.556

(منبع: (E.D.Grimison, Trans. ASME, 59, 583 (1937)

در مواردی که S_{II}/D و S_p/D با یکدیگر برابر نیستند باید برای اطلاعات بیشتر به مرجع (G1) مراجعه نمود. در مبدل‌های بافل‌دار که در آنجا به طور طبیعی نشدی وجود دارد و تمام سیال عمود بر لوله‌ها جریان نمی‌یابد، مقدار میانگین h به دست آمده باید در 0.6 ضرب شود (P3). عدد رینولدز بر اساس حداقل محدوده باز برای حرکت سیال محاسبه می‌شود. همه خواص فیزیکی در T_F به دست می‌آیند.

مثال ۴-۶-۳ گرم کردن هوا توسط یک دسته لوله

هوا در دمای $15/6^\circ\text{C}$ و فشار مطلق 1 atm از میان یک دسته لوله شامل چهار ردیف در مسیر جریان و ده ردیف عمود بر مسیر جریان با سرعت $7/62\text{ m/s}$ جریان دارد و به دسته لوله نزدیک می‌شود. سطح لوله‌ها در $57/2^\circ\text{C}$ ثابت نگهداشته می‌شود. قطر بیرونی لوله‌ها $25/4\text{ mm}$ است و آرایش لوله‌ها به صورت ردیفی است. فاصله S_{II} لوله‌ها عمود بر جهت جریان $38/1\text{ mm}$ و S_p نیز $38/1\text{ mm}$ موازی با جهت جریان است. برای 0.305 m از طول دسته لوله، نرخ انتقال حرارت را محاسبه کنید.

حل: با مراجعه به شکل ۴-۶-۱a داریم:

$$\frac{S_{II}}{D} = \frac{38/1}{25/4} = \frac{1/5}{1} \quad \text{و} \quad \frac{S_p}{D} = \frac{38/1}{25/4} = \frac{1/5}{1}$$

چون هوا با عبور از میان چهار ردیف لوله گرم می‌شود، دمای توده‌ای خروجی $21/1^\circ\text{C}$ فرض می‌شود. بنابراین میانگین دمای توده‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_b = \frac{15/6 + 21/1}{2} = 18/3^\circ\text{C}$$

میانگین دمای فیلم نیز برابر است با:

$$T_f = \frac{T_w + T_b}{2} = \frac{57/2 + 18/3}{2} = 37/7 \text{ } ^\circ\text{C}$$

از ضمیمه A.3، برای هوا در $37/7 \text{ } ^\circ\text{C}$ داریم:

$$k = 0.02700 \text{ W/m.K} \quad N_{Pr} = 0.705$$

$$c_p = 1.0048 \text{ kJ/kg.K} \quad \rho = 1/137 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1/90 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$$

نسبت حداقل سطح جریان به کل سطح جریان $(S_n - D)/S_n$ می‌باشد. بنابراین حداکثر سرعت در میان دسته لوله‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_{\max} = \frac{v S_n}{S_n - D} = \frac{7/62 \times 0.0381}{0.0381 - 0.0254} = 22/86 \text{ m/s}$$

$$N_{Re} = \frac{D v_{\max} \rho}{\mu} = \frac{0.0254 \times 22/86 \times 1/137}{1/9 \times 10^{-5}} = 3/47 \times 10^4$$

مقادیر C و m برای $\frac{S_n}{D} = \frac{S_p}{D} = \frac{1/5}{1}$ ، از جدول ۴-۶-۲ به ترتیب 0.278 و 0.620 هستند. با جایگذاری در معادله (۴-۶-۱) و حل آن نسبت به h داریم:

$$h = \frac{k}{D} C N_{Re}^m N_{Pr}^{1/3} = \left(\frac{0.02700}{0.0254} \right) \times 0.278 \times (3/47 \times 10^4)^{0.62} \times 0.705^{1/3}$$

$$= 171/8 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

جدول ۴-۶-۳. نسبت h برای N ردیف لوله در جهت جریان به h برای 10 ردیف

لوله در جهت جریان (همراه با جدول ۴-۶-۲ استفاده می‌شود).

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ratio for staggered tubes	0.68	0.75	0.83	0.89	0.92	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00
Ratio for in-line tubes	0.64	0.80	0.87	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	0.99	1.00

منبع: W. M. Kays and R. K. Lo, Stanford Univ.Tech.Rept.15, Navy Contract N6-ONR-251

این h برای 10 ردیف لوله است. برای 4 ردیف در مسیر عمود بر جریان، h باید در ضریب $0/9$ که در جدول ۳-۶-۴ داده شده است، ضرب شود.

چون 4×10 یا 40 لوله وجود دارد، سطح کل انتقال حرارت به ازای $0/305 \text{ m}$ از طول لوله عبارت است از:

$$A = 40 \pi D L = 40 \times \pi \times 0/0254 \times 0/305 = 0/973 \text{ m}^2$$

کل نرخ انتقال حرارت q بر اساس اختلاف دمای میانگین حسابی بین دیواره و توده سیال به صورت زیر است:

$$q = h A (T_w - T_b) = 0/9 \times 171/8 \times 0/973 \times (57/2 - 18/3) = 5852 \text{ W}$$

سپس موازنه گرما برای هوا به منظور به دست آوردن افزایش دمای هوا بر اساس q محاسبه شده نوشته می شود. ابتدا دبی جرمی هوا (m) باید محاسبه شود. کل سطح جلویی دسته لوله شامل 10 ردیف لوله هر کدام بطول $0/305 \text{ m}$ به صورت زیر است:

$$A_t = 10 \times S_n \times 1 = 10 \times 0/0381 \times 0/305 = 0/1162 \text{ m}^2$$

دانشیتة هوای ورودی در دمای $15/6^\circ\text{C}$ برابر با $\rho = 1/224 \text{ kg/m}^3$ است. دبی جرمی m برابر است با:

$$m = \rho A_t \times 3600 = 7/62 \times 1/224 \times 0/1162 = 1/084 \text{ kg/s}$$

برای موازنة گرما، c_p میانگین هوا در $18/3^\circ\text{C}$ برابر با $1/0048 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ می باشد و بنابراین داریم:

$$q = 5852 = m c_p \Delta T = 1/084 \times 1/0048 \times 10^3 \times \Delta T$$

که پس از حل رابطه: $\Delta T = 5/37^\circ\text{C}$ به دست می آید.

بنابراین، دمای توده ای گاز خروجی $20/97^\circ\text{C} = 15/6 + 5/37$ است که به مقدار فرض شده $^\circ\text{C}$

$21/1$ نزدیک می باشد. اگر به حدس دوم نیاز می بود، T_b میانگین جدید بایستی مقدار $^\circ\text{C}$

$$\frac{(15/6 + 20/97)}{2} = 18/28 \text{ می بود.}$$

۴-۶F انتقال حرارت در بسترهای پر شده

روابط مربوط به ضرایب انتقال حرارت بسترهای پر شده در طراحی سیستمهای بستر ثابت مانند راکتورهای کاتالیزوری، خشک کن ها و مبدل های حرارتی بستر شنی مفید می باشند. در بخش ۱C-۳ آفت

فشار در بسترهای پر شده بررسی شد و بحثهای مربوط به ضرایب هندسی در این بسترها در آنجا انجام شد. جهت تعیین نرخ انتقال حرارت در بسترهای پر شده، برای یک طول دیفرانسیلی dz از بستر بر حسب m داریم:

$$dq = h(a S dz)(T_1 - T_2) \quad (4-6-5)$$

که در این جا a سطح مفید ذره جامد به ازاء واحد حجم بستر بر حسب m^{-1} ، S سطح مقطع بستر خالی بر حسب m^2 ، T_1 دمای توده‌ای گاز بر حسب K و T_2 دمای سطح جامد است.

برای انتقال حرارت گازها در بسترهای حاوی ذرات کروی شکل ($G3, G2$) و در محدوده رینولدز بین ۱۰ تا ۱۰۰۰۰۰ داریم:

$$\varepsilon J_H = \varepsilon \frac{h}{c_p v' \rho} \left(\frac{c_p \mu}{k} \right)_f^{2/3} = \frac{2.876}{N_{Re}} + \frac{0.3023}{N_{Re}^{0.35}} \quad (4-6-6)$$

که در این جا v' سرعت ذاتی^(۱) بر اساس سطح مقطع بستر خالی و بر حسب m/s [معادله (۳-۱-۱۱)] را ببینید، ε ضریب تخلخل، $N_{Re} = D_p G' / \mu_f$ و $G' = v' \rho$ سرعت جرمی ذاتی^(۲) بر حسب $kg/m^2 \cdot s$ می‌باشد. خواصی که زیر نویس f دارند در دمای فیلم و بقیه خواص در دمای توده‌ای هستند. همچنین این رابطه می‌تواند برای بسترهای سیالی شده مورد استفاده قرار گیرد. معادله دیگر به جای معادله (۴-۶-۶) برای بسترهای سیالی شده و ثابت، معادله (۷-۳-۳۶) است که در محدوده رینولدزهای ۱۰ تا ۴۰۰۰ معتبر است. جمله J_H ضریب کولبورن^(۳) نامیده می‌شود و توسط معادله (۴-۶-۶) بر حسب h تعریف شده است.

معادلات مربوط به انتقال حرارت در استوانه‌های غیر مدور مانند شش ضلعی‌ها و غیره در مراجع دیگر داده شده‌اند (H1, P3).

۴-۷ انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد

۴-۷۸ مقدمه

انتقال حرارت به طریق جابه‌جایی آزاد زمانی روی می‌دهد که یک سطح جامد در تماس با گاز یا مایعی است که دمای آن با دمای سطح متفاوت است. اختلاف دانسیته سیال ناشی از فرایند گرم شدن باعث ایجاد نیروی شناوری لازم برای حرکت سیال می‌شود. در نتیجه حرکت سیال جابه‌جایی آزاد یا طبیعی مشاهده می‌شود. مثالی از انتقال حرارت به طریق جابه‌جایی طبیعی رادیاتور است که برای گرم کردن

1. superficial velocity

2. superficial mass velocity

3. Colburn J factor

یک اتاق از آن استفاده می‌شود. هوای سردکنار رادیاتور گرم شده و به طریق جابه‌جایی آزاد در اثر نیروی شناوری بالا می‌رود. به دست آوردن معادلات تئوری مربوط به ضرایب انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی، مستلزم حل همزمان معادلات حرکت و انرژی می‌باشد.

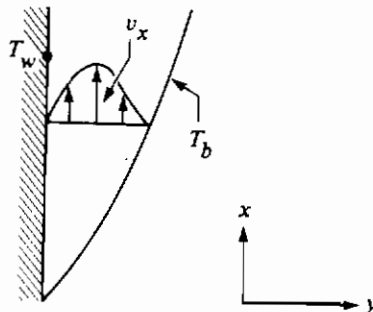
یک سیستم انتقال حرارت که در فرایندهای مهندسی عموماً اتفاق می‌افتد، حالتی است که در آن گرما به طریق جابه‌جایی آزاد از یک صفحه عمودی داغ به یک مایع یا گاز که در مجاورت آن قرار دارد منتقل می‌شود. سیال به طریق جابه‌جایی اجباری حرکت نمی‌کند و فقط بر اساس جابه‌جایی طبیعی یا آزاد حرکت می‌کند. در شکل ۴-۷-۱ صفحه صاف عمودی گرم شده است و لایه مرزی جابه‌جایی آزاد تشکیل شده است. توزیع سرعت با توزیع سرعت حاصل از جابه‌جایی اجباری متفاوت است. در جابه‌جایی طبیعی چون سرعت جریان آزاد صفر است بنابراین، سرعت در دیواره و در لبه دیگر لایه مرزی صفر است. همچنان‌که نشان داده شده است لایه مرزی در ابتدا آرام است، اما در فاصله اندکی از لبه، اغتشاش شروع می‌شود. دمای دیواره T_w بوده و برحسب K است و دمای توده T_b می‌باشد.

معادله دیفرانسیلی موازنه ممتوم در جهت‌های x و y برای حجم کنترل $(dx, dy, 1)$ نوشته می‌شود. نیروی رانش، نیروی شناوری در میدان ثقلی است و ناشی از اختلاف دانسیته سیال می‌باشد. موازنه ممتوم به صورت زیر است:

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = g(\rho_b - \rho) + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (4-7-1)$$

که در این جا ρ_b دانسیته در دمای T_b و ρ دانسیته در دمای T است. اختلاف دانسیته را می‌توان برحسب ضریب انبساط حجمی β بیان کرد. با جایگذاری در معادله (۴-۷-۱) داریم:

$$\beta = \frac{\rho_b - \rho}{\rho(T - T_b)} \quad (4-7-2)$$



شکل ۴-۷-۱. توزیع سرعت لایه مرزی برای انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد از یک صفحه عمودی گرم شده

برای گازها $\beta = \frac{1}{T}$ است. معادله موازنه انرژی می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4-7-3)$$

این معادلات بر اساس روشهای تجزیه و تحلیل انتگرالی که در بخش ۱۰-۳ بحث شده است حل می شوند. نتایج برای یک صفحه عمودی که ساده ترین حالت است، به دست آمده است. از این نتایج برای معرفی عدد بدون بُعد گراشف در قسمت بعد استفاده می شود. اما در سایر اشکال هندسی روابط بسیار پیچیده هستند و لذا از روابط تجربی برای آنها استفاده می شود. این موارد در بخشهای بعد مورد بررسی قرار می گیرند.

۲-۷B جابه جایی آزاد در اشکال هندسی مختلف

۱- جابه جایی آزاد در صفحه های عمودی و استوانه ها: برای یک سطح یا صفحه عمودی همدم با ارتفاع L کمتر از یک متر ضریب انتقال حرارت جابه جایی آزاد میانگین به وسیله معادله کلی زیر بیان می شود (P3):

$$N_{Nu} = \frac{hL}{k} = a \left(\frac{L^3 \rho^2 g \beta \Delta T}{\mu^2} \frac{c_p \mu}{k} \right)^m = a (N_{Gr} N_{Pr})^m \quad (4-7-4)$$

که در این رابطه a و m مقادیر ثابتی هستند و از جدول ۱-۷-۴ به دست می آیند. N_{Gr} عدد گراشف، ρ دانسیته بر حسب kg/m^3 ، μ ویسکوزیته بر حسب kg/m.s ، ΔT اختلاف دمای مثبت بین دیواره و توده سیال یا بالعکس بر حسب کلونین، k ضریب هدایت گرمایی بر حسب W/m.K ، c_p ظرفیت گرمایی بر حسب J/kg.K ، β ضریب انبساط حجمی سیال بر حسب $1/\text{K}$ (برای گازها β برابر است با $(1/T_f \text{ K})$ و $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ می باشد. تمام خواص فیزیکی در دمای فیلم $T_f = (T_w + T_b) / 2$ ارزیابی می شوند. معمولاً برای یک استوانه عمودی به طول L بر حسب متر از همان معادلات مربوط به صفحه عمودی می توان استفاده کرد. در سیستم واحدهای انگلیسی، β برابر با $\frac{1}{(T_f \text{ } ^\circ\text{F} + 460)}$ بوده و بر حسب $1/^\circ\text{R}$ است و $g = 32.174 \times (3600)^2 \text{ ft/h}^2$ می باشد.

تفسیر فیزیکی عدد بدون بُعد گراشف به صورت نسبت نیروی شناوری به نیروی ویسکوز در جابه جایی آزاد است و همان نقش عدد رینولدز را در جابه جایی اجباری بازی می کند.

جدول ۴-۷-۱. ثابتهای معادله (۴-۷-۴) برای جابه‌جایی طبیعی

Physical Geometry	$N_{Gr} N_{Pr}$	a	m	Ref.
Vertical planes and cylinders [vertical height $L < 1$ m (3 ft)]				
	$< 10^4$	1.36	$\frac{1}{3}$	(P3)
	$10^4 - 10^9$	0.59	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$> 10^9$	0.13	$\frac{1}{3}$	(M1)
Horizontal cylinders [diameter D used for L and $D < 0.20$ m (0.66 ft)]				
	$< 10^{-5}$	0.49	0	(P3)
	$10^{-5} - 10^{-3}$	0.71	$\frac{1}{3}$	(P3)
	$10^{-3} - 1$	1.09	$\frac{1}{6}$	(P3)
	$1 - 10^4$	1.09	$\frac{1}{3}$	(P3)
	$10^4 - 10^9$	0.53	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$> 10^9$	0.13	$\frac{1}{3}$	(P3)
Horizontal plates				
Upper surface of heated plates or lower surface of cooled plates	$10^5 - 2 \times 10^7$	0.54	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$2 \times 10^7 - 3 \times 10^{10}$	0.14	$\frac{1}{3}$	(M1)
Lower surface of heated plates or upper surface of cooled plates	$10^5 - 10^{11}$	0.58	$\frac{1}{3}$	(F1)

مثال ۴-۷-۱ جابه‌جایی آزاد از دیواره عمودی یک تنور

دیواره عمودی داغ یک تنور که از آن برای پختن غذا استفاده می‌شود به ارتفاع ۱ ft (۰/۰۳۰۵ m) و دمای سطحی 450°F ($505/4^\circ\text{K}$)، در تماس با هوای 100°F (311°K) است. ضریب انتقال حرارت و گرمای منتقل شده به ازای واحد عرض دیواره را محاسبه کنید. گرمای حاصل از تابش را در نظر نگیرید. از واحدهای انگلیسی و SI استفاده کنید.

حل: دمای فیلم برابر است با:

$$T_f = \frac{T_w + T_b}{2} = \frac{450 + 100}{2} = 275^\circ\text{F} = \frac{505/4 + 311}{2} = 408/2^\circ\text{K}$$

خواص فیزیکی هوا در 275°F به این صورت است:

$$k = 0/0198 \text{ btu/h.ft.}^\circ\text{F} = 0/0343 \text{ W/m.K}$$

$$\rho = 0/0541 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 = 0/867 \text{ kg/m}^3$$

$$N_{Pr} = 0/690$$

$$\mu = (0.0232 \text{ cp}) \times (2/4191) = 0.0562 \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{h} = 2/32 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\beta = \frac{1}{40.8/2} = 2/45 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad \text{یا} \quad \beta = \frac{1}{(460 + 275)} = 1/36 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{R}^{-1}$$

$$\Delta T = T_w - T_b = 350 \text{ }^\circ\text{F}$$

عدد گرافش در سیستم واحدهای انگلیسی به صورت زیر به دست می آید:

$$N_{Gr} = \frac{L^3 \rho^2 g \beta \Delta T}{\mu^2}$$

$$= \frac{1^3 \times 0.0541^2 \times 32/174 \times 3600^2 \times (1/36 \times 10^{-3}) \times 350}{0.0562^2} = 1/84 \times 10^8$$

در سیستم واحدهای SI:

$$N_{Gr} = \frac{0.305^3 \times 0.867^2 \times 9.806 \times (2/45 \times 10^{-3}) \times 194/4}{(2/32 \times 10^{-5})^2} = 1/84 \times 10^8$$

همان طور که مشاهده می شود عدد گرافش در سیستم واحدهای انگلیسی و SI یکسان است.

$$N_{Gr} N_{Pr} = (1/84 \times 10^8) \times 0.690 = 1/27 \times 10^8$$

بنابراین، از جدول ۴-۷-۱ ثابتهای معادله (۴-۷-۴) به صورت $a = 0.59$ و $m = \frac{1}{4}$ هستند. پس از حل معادله (۴-۷-۴) نسبت به h و جایگزینی مقادیر معلوم داریم:

$$h = \frac{k}{L} a (N_{Gr} N_{Pr})^m = \left(\frac{0.198}{1} \right) \times 0.59 \times (1/27 \times 10^8)^{1/4}$$

$$= 1/24 \text{ btu/h}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}$$

$$h = \left(\frac{0.343}{0.305} \right) \times 0.59 \times (1/27 \times 10^8)^{1/4} = 7/0.3 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$$

برای دیواره‌ای به عرض یک فوت، $A = 1 \times 1 = 1 \text{ ft}^2$ ($0.305 \times 0.305 \text{ m}^2$)، بنابراین،

$$q = h A (T_w - T_b) = 1/24 \times 1 \times (450 - 100) = 433 \text{ btu/h}$$

$$q = 7/0.3 \times (0.305 \times 0.305) \times 194/4 = 127/1 \text{ W}$$

مقدار قابل ملاحظه‌ای از گرما به وسیله تابش از دست می‌رود. این موضوع در بخش ۴-۱۰ بحث خواهد شد.

در جدول ۲-۷-۴ معادلات ساده شده مربوط به انتقال حرارت از هوا به صفحه‌های عمودی و استوانه‌ها به طریق جابه‌جایی آزاد در فشار مطلق ۱ اتمسفر نشان داده شده است. در سیستم واحدهای SI معادله‌ای که در محدوده $10^4 < N_{Gr} N_{Pr} < 10^9$ قرار دارد بیشتر مورد استفاده است. این معادله در $(L^3 \Delta T)$ حدود $4/V m^3 \cdot K$ و دمای فیلم بین ۲۵۵ و ۵۳۳ کلوین صدق می‌کند. برای تصحیح مقدار h در فشار غیر از یک اتمسفر، برای محدوده $10^4 < N_{Gr} \cdot N_{Pr} < 10^9$ مقدار h در $(\frac{P}{10.1/32})^{1/5}$ و برای محدوده $10^4 < N_{Gr} N_{Pr} < 10^9$ در $(\frac{P}{10.1/32})^{1/17}$ ضرب می‌شود، که در اینجا فشار p برحسب kN/m^2 است. در سیستم واحدهای انگلیسی هنگامی در محدوده $10^4 < N_{Pr} N_{Gr} < 10^9$ هستیم که $(L^3 \Delta T)$ کمتر از حدود $300 ft^3 \cdot F$ باشد. برای تصحیح مقدار h در فشارهای غیر از یک اتمسفر باید، در محدوده $10^4 < N_{Gr} < N_{Pr} 10^9$ مقدار h مربوط به یک اتمسفر را در $p^{1/5}$ و در محدوده $N_{Gr} N_{Pr} > 10^9$ در $p^{1/17}$ ضرب کرد که p فشار مطلق بر حسب اتمسفر است. معادلات ساده شده‌ای برای آب و مایعات آلی نیز داده شده‌اند.

جدول ۲-۷-۴. معادلات ساده شده برای جابه‌جایی طبیعی از سطوح مختلف

		Equation		
Physical Geometry	$N_{Gr} N_{Pr}$	$h = btu/h \cdot ft^2 \cdot ^\circ F$ $L = ft, \Delta T = ^\circ F$ $D = ft$	$h = W/m^2 \cdot K$ $L = m, \Delta T = K$ $D = m$	Ref.
Air at 101.32 kPa (1 atm) abs pressure				
Vertical planes and cylinders	$10^4 - 10^9$	$h = 0.28(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 1.37(\Delta T/L)^{1/4}$	(P1)
	$> 10^9$	$h = 0.18(\Delta T)^{1/3}$	$h = 1.24 \Delta T^{1/3}$	(P1)
Horizontal cylinders	$10^3 - 10^9$	$h = 0.27(\Delta T/D)^{1/4}$	$h = 1.32(\Delta T/D)^{1/4}$	(M1)
	$> 10^9$	$h = 0.18(\Delta T)^{1/3}$	$h = 1.24 \Delta T^{1/3}$	(M1)
Horizontal plates				
Heated plate facing upward or cooled plate facing downward	$10^5 - 2 \times 10^7$	$h = 0.27(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 1.32(\Delta T/L)^{1/4}$	(M1)
	$2 \times 10^7 - 3 \times 10^{10}$	$h = 0.22(\Delta T)^{1/3}$	$h = 1.52 \Delta T^{1/3}$	(M1)
Heated plate facing downward or cooled plate facing upward	$3 \times 10^5 - 3 \times 10^{10}$	$h = 0.12(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 0.59(\Delta T/L)^{1/4}$	(M1)
Water at 70°F (294 K)				
Vertical planes and cylinders	$10^4 - 10^9$	$h = 26(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 127(\Delta T/L)^{1/4}$	(P1)
Organic liquids at 70°F (294 K)				
Vertical planes and cylinders	$10^4 - 10^9$	$h = 12(\Delta T/L)^{1/4}$	$h = 59(\Delta T/L)^{1/4}$	(P1)

مثال ۲-۷-۴ جابه‌جایی آزاد و معادله ساده شده

مثال ۱-۷-۴ را با استفاده از معادله ساده شده تکرار کنید.

حل: دمای فیلم $408/2 \text{ K}$ در محدوده 255 K تا 533 K قرار دارد. همچنین،

$$L^3 \Delta T = 0/305^3 \times 194/4 = 5/5$$

این مقدار تا حدی از مقدار $4/7$ داده شده به عنوان حداکثر نسبی برای استفاده از معادله ساده شده، بزرگتر است. اما، در مثال ۱-۷-۴، مقدار $N_{Gr} N_{Pr}$ کمتر از 10^9 است، بنابراین از معادله ساده شده جدول ۲-۷-۴ می‌توان استفاده کرد.

$$h = 1/37 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/25} = 1/37 \times \left(\frac{194/4}{0/305} \right)^{1/25}$$

$$= 6/88 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \quad (1/21 \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F})$$

نرخ انتقال حرارت q برابر است با:

$$q = h A (T_w - T_b) = 6/88 \times (0/305 \times 0/305) \times 194/4 = 124/4 \text{ W} \quad (424 \text{ btu/h})$$

این مقدار به طور قابل قبولی به مقدار $127/1 \text{ W}$ در مثال ۱-۷-۴ نزدیک است.

۲- جابه‌جایی آزاد از استوانه‌های افقی: برای یک استوانه افقی به قطر بیرونی D متر، از معادله (۴-۷-۴) استفاده می‌شود که ثابت‌های آن در جدول ۱-۷-۴ داده شده است. در معادله از قطر D به جای L استفاده می‌شود. معادلات ساده شده در جدول ۲-۷-۴ داده شده‌اند. حالت معمولی برای لوله‌ها $N_{Gr} N_{Pr}$ در محدوده $10^4 - 10^9$ می‌باشد (M1).

۳- جابه‌جایی آزاد از صفحه‌های افقی: برای صفحه‌های مسطح افقی نیز از معادله (۴-۷-۴) استفاده می‌شود که ثابت‌های معادله در جدول ۱-۷-۴ داده شده‌اند و معادلات ساده شده آن نیز در جدول ۲-۷-۴ داده شده‌اند. بعد L که در معادله استفاده می‌شود، در مربع طول یک ضلع، در مستطیل میانگین خطی طول دو ضلع و در حلقه‌های مدور $0/9$ برابر قطر می‌باشد.

۴- جابه‌جایی آزاد در فضاهای بسته: جابه‌جایی آزاد در فضاهای بسته در بسیاری از فرایندها اتفاق می‌افتد. مثالی از یک محیط بسته، پنجره دو جداره است که در آن برای صرفه‌جویی انرژی دو صفحه شیشه‌ای توسط یک لایه هوا از یکدیگر جدا شده‌اند. پدیده‌های جریان در این فضاهای بسته پیچیده

است چون انواع مختلف الگوهای جریان اتفاق می‌افتد. در اعداد گراشف پایین انتقال حرارت عمدتاً به وسیله هدایت انجام می‌شود. وقتی عدد گراشف زیاد می‌شود با رژیمهای مختلف جریان مواجه هستیم.

در شکل ۲-۷-۴، سیستمی شامل دو صفحه عمودی به ارتفاع L متر که سیالی در فاصله بین این دو صفحه به اندازه δ متر قرار گرفته است، نشان داده شده است که سطح دو صفحه در دماهای T_1 و T_2 هستند. عدد گراشف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{Gr, \delta} = \frac{\delta^3 \rho^2 g \beta (T_1 - T_2)}{\mu^2} \quad (۴-۷-۵)$$

عدد ناسلت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{Nu, \delta} = \frac{h \delta}{k} \quad (۴-۷-۶)$$

شار گرمایی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{q}{A} = h(T_1 - T_2) \quad (۴-۷-۷)$$

همه خواص فیزیکی در دمای میانگین بین دو صفحه تعیین شده‌اند.

در حالتی که بین دو صفحه عمودی گاز باشد و در $L/\delta > ۳$ (مراجع H1, J1, K1, P1) داریم:

$$N_{Nu, \delta} = \frac{h \delta}{k} = 1.0 \quad (N_{Gr, \delta} N_{Pr} < 2 \times 10^3) \quad (۴-۷-۸)$$

$$N_{Nu, \delta} = 0.20 \frac{(N_{Gr, \delta} N_{Pr})^{1/4}}{(L/\delta)^{1/9}} \quad (6 \times 10^3 < N_{Gr, \delta} N_{Pr} < 2 \times 10^5) \quad (۴-۷-۹)$$

$$N_{Nu, \delta} = 0.073 \frac{(N_{Gr, \delta} N_{Pr})^{1/3}}{(L/\delta)^{1/9}} \quad (2 \times 10^5 < N_{Gr, \delta} N_{Pr} < 2 \times 10^7) \quad (۴-۷-۱۰)$$

و در حالتی که بین دو صفحه مایع باشد داریم:

$$N_{Nu, \delta} = \frac{h \delta}{k} = 1.0 \quad (N_{Gr, \delta} N_{Pr} < 1 \times 10^3) \quad (۴-۷-۱۱)$$

$$N_{Nu, \delta} = 0.28 \frac{(N_{Gr, \delta} N_{Pr})^{1/4}}{(L/\delta)^{1/4}} \quad (1 \times 10^3 < N_{Gr, \delta} N_{Pr} < 1 \times 10^7) \quad (۴-۷-۱۲)$$

برای گازها یا مایعات قرار گرفته در یک فضای حلقوی در حالت عمودی، همان معادلات مربوط به صفحه‌های عمودی صدق می‌کنند.

در حالتی که گاز بین دو صفحه افقی قرار گیرد و صفحه پایینی گرمتر از صفحه بالایی باشد،

داریم:

$$N_{Nu, \delta} = 0.21(N_{Gr, \delta} N_{Pr})^{1/4} \quad (7 \times 10^3 < N_{Gr, \delta} N_{Pr} < 3 \times 10^5) \quad (4-7-13)$$

$$N_{Nu, \delta} = 0.061(N_{Gr, \delta} N_{Pr})^{1/3} \quad (N_{Gr, \delta} N_{Pr} > 3 \times 10^5) \quad (4-7-14)$$

و برای مایعات در این حالت داریم (G5):

$$N_{Nu, \delta} = 0.069(N_{Gr, \delta} N_{Pr})^{1/3} N_{Pr}^{0.074} \quad (1.5 \times 10^5 < N_{Gr, \delta} N_{Pr} < 1 \times 10^9) \quad (4-7-15)$$

مثال ۳-۷-۴ جابه‌جایی آزاد در فضای بسته عمودی

هوادر فشارمطلق یک اتمسفر بین دو صفحه عمودی به طول $L = 0.6$ m و فاصله $\delta = 30$ mm

قرار گرفته است. عرض صفحه‌ها 0.4 m است. دمای صفحه‌ها $T_1 = 394/3$ K و

$T_2 = 366/5$ K است. نرخ انتقال حرارت در این فضا را محاسبه کنید.

حل: از دمای میانگین صفحه‌ها برای اندازه‌گیری خواص فیزیکی استفاده می‌شود.

$$T_f = \frac{(T_1 + T_2)}{2} = \frac{(394/3 + 366/5)}{2} = 380/4 \text{ K}$$

$$\delta = \frac{30}{1000} = 0.030 \text{ m}$$

از ضمیمه ۸.3 داریم:

$$\rho = 0.9295 \text{ Kg/m}^3 \quad \text{و} \quad \mu = 2/21 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$$

$$k = 0.03219 \text{ W/m.K}, \quad N_{Pr} = 0.693, \quad \beta = \frac{1}{T_f} = 2/629 \times 10^{-2} \text{ K}^{-1}$$

$$N_{Gr, \delta} = \frac{0.030^3 \times 0.9295^2 \times 9/806 \times (2/629 \times 10^{-2}) \times (394/3 - 366/5)}{(2/21 \times 10^{-5})^2}$$

$$= 3/423 \times 10^4$$

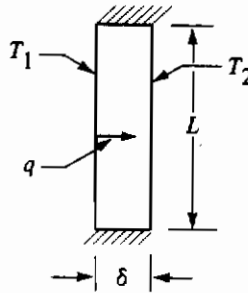
همچنین، $N_{Gr, \delta} N_{Pr} = (3/423 \times 10^4) \times 0.693 = 2/372 \times 10^4$

داریم: (۴-۷-۹)

$$h = \frac{k}{\delta} \cdot \frac{0.2(N_{Gr, \delta} N_{Pr})^{1/4}}{(L/\delta)^{1/9}} = \frac{0.03219 \times 0.2 \times (2/352 \times 10^4)^{1/4}}{0.030 \times (0.6/0.030)^{1/9}}$$

مساحت برابر است با $A = (0.6 \times 0.4) = 0.24 \text{ m}^2$ با جایگزینی در معادله (۴-۷-۷) داریم:

$$q = h A (T_1 - T_2) = 1/909 \times 0.24 \times (394/3 - 366/5) = 12/74 \text{ W}$$



شکل ۲-۷-۴. جابه‌جایی طبیعی در فضای بسته عمودی

۵- جابه‌جایی آزاد از سایر اشکال: برای کره‌ها، بلوکها و سایر انواع فضاهای بسته حاوی هوا، باید به مراجع دیگر (P1, P3), M1, K1, H1 رجوع کرد. در برخی موارد، وقتی یک سیال روی یک سطح داغ با سرعت کم و به صورت آرام به جریان انداخته می‌شود ترکیبی از انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد و اجباری اتفاق می‌افتد. برای جزئیات بیشتر به مراجع دیگر (H1, K1, M1) مراجعه کنید.

۴-۸ جوشش و چگالش

۴-۸۸ جوشش

۱- مکانیسم جوشش: انتقال حرارت به مایعی که در حال جوشیدن است در فرایندهایی مانند تبخیر، تقطیر و انواع دیگر فرایندهای شیمیایی و بیولوژیکی مانند فرآورش نفت خام، کنترل دمای واکنشهای شیمیایی، تبخیر مواد غذایی مایع و غیره بسیار مهم است. مایع در حال جوشیدن معمولاً در ظرفی قرار دارد که دارای یک سطح گرمایی شامل تعدادی لوله یا صفحات افقی یا عمودی است که گرمای لازم برای جوشش را تأمین می‌کنند. سطوح گرمایی می‌توانند به طریق الکتریکی یا به وسیله یک سیال داغ یا در حال چگالش در طرف دیگر صفحه، گرم شوند.

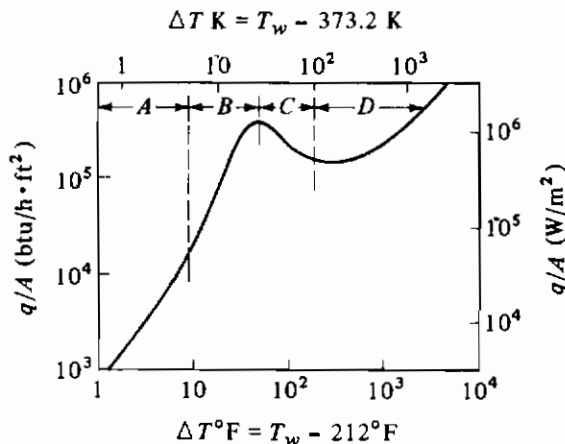
در فرایند جوشش دمای مایع، نقطه جوش آن در فشار داخل ظرف است. البته سطح داغ شده در دمای بالاتر از نقطه جوش قرار دارد. حبابهای بخار در سطح داغ تشکیل می‌شوند و از داخل مایع بسال می‌آیند. بخار در فضای بالای سطح مایع جمع می‌شود و سپس خارج می‌شود.

جوشش یک پدیده پیچیده است. فرض کنید یک لوله کوچک افقی داغ یا یک سیم، در یک ظرف آب در حال جوش در 100°C فرو برده شده است. عبارت q/A بر حسب W/m^2 شار گرمایی است و $\Delta T = T_w - 373/2\text{ K}$ است که T_w دمای دیواره لوله یا سیم و h ضریب انتقال حرارت بر حسب

$W/m^2 \cdot K$ است. با شروع از یک مقدار کم برای ΔT مقادیر q/A و h اندازه گیری می شوند. این کار با مقادیر ΔT بزرگتر تکرار شده و داده های به دست آمده در شکل ۴-۸-۱ به صورت q/A بر حسب ΔT رسم شده اند. در اولین ناحیه منحنی شکل ۴-۸-۱ (ناحیه A)، در اختلاف دماهای پایین مکانیسم جوشش به صورت انتقال حرارت به مایع به طریق جابه جایی آزاد است. تغییر h با $\Delta T^{1/4}$ تقریباً به همان صورت جابه جایی آزاد در صفحه های افقی یا استوانه هاست. جابها که تعداد آنها نیز کم است، از سطح فلز جدا شده و بالا می روند و آشفته گی محسوسی در جابه جایی آزاد ایجاد نمی کنند.

در ناحیه B یعنی ناحیه جوشش هسته ای^(۱)، در ΔT بین ۵ تا ۲۵ K (۹ تا ۴۵ °F) نرخ تولید حباب افزایش می یابد به طوری که سرعت گردش مایع زیاد می شود. ضریب انتقال حرارت h به سرعت افزایش پیدا می کند و در این ناحیه متناسب با ΔT^2 تا ΔT^3 است.

در ناحیه C یا ناحیه جوشش گذرا^(۲)، به سرعت حبابهای زیادی تشکیل می شوند که تمایل دارند بهم بپیوندند و یک لایه بخار عایق تشکیل دهند. با افزایش ΔT بر ضخامت این لایه افزوده می شود و شار گرمایی و h با افزایش ΔT ، کم می شوند. در ناحیه D یا جوشش فیلمی^(۳) جابها به طور منظم خودشان جدا می شوند و به طرف بالا می روند. در ΔT های بالاتر، تابش در لایه بخار بالای سطح به افزایش q/A و h کمک می کند.



شکل ۴-۸-۱. مکانیسم جوشش آب در شرایط اتمسفری، شار گرمایی بر حسب اختلاف دما: (A) جابه جایی طبیعی، (B) جوشش هسته ای، (C) جوشش گذرا، (D) جوشش فیلمی

نمودار h برحسب ΔT تقریباً به همان شکل نمودار ۱-۸-۴ است. مقدارهای h کاملاً بزرگ است. در ابتدای ناحیه B در شکل ۱-۸-۴ مربوط به جوشش هسته‌ای، مقدار h بین 5700 تا $11400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ یا 1000 تا $2000 \text{ btu/hr.ft}^2 \cdot \text{F}$ قرار دارد و در انتهای این ناحیه h دارای یک مقدار حداکثر $57000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ یا $10000 \text{ btu/hr.ft}^2 \cdot \text{F}$ است. این مقادیر خیلی زیاد هستند و در بیشتر موارد مقدار مقاومت ناشی از جوشش فیلمی فقط درصد کمی از کل مقاومت در مقابل انتقال حرارت است. ناحیه‌هایی که از نظر عملی مورد نظر هستند نواحی جوشش هسته‌ای و فیلمی می‌باشند (P3). جوشش هسته‌ای در جوشاننده‌های نوع کتری^(۱) و جوشاننده‌های گردش طبیعی^(۲) اتفاق می‌افتد.

۲- جوشش هسته‌ای: در ناحیه جوشش هسته‌ای شار گرمایی تحت تأثیر ΔT ، فشار، ماهیت و شکل هندسی سطح و سیستم و خواص فیزیکی بخار و مایع می‌باشد. معادلات مربوطه به وسیله Rohsenow و دیگران به دست آمده است (P1). این روابط بسیار پیچیده بوده و برای لوله‌های تکی و سطوح صاف استفاده می‌شوند.

معادلات تجربی ساده شده برای تخمین ضرایب انتقال حرارت جوشش، برای آب در حال جوش در خارج سطوح غوطه‌ور در فشار مطلق یک اتمسفر در مراجع دیگر ارائه شده است (J2). برای یک صفحه افقی (در سیستم واحدهای انگلیسی و SI) داریم:

$$h, \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F} = 151(\Delta T \text{F})^{1/3} \quad q/A, \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2, < 5000 \quad (4-8-1)$$

$$h, \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} = 1043(\Delta T \text{K})^{1/3} \quad q/A, \text{ kW/m}^2, < 16$$

$$h, \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F} = 0.168(\Delta T \text{F})^3 \quad 5000 < q/A, \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2, < 75000 \quad (4-8-2)$$

$$h, \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} = 5.56(\Delta T \text{K})^3 \quad 16 < q/A, \text{ kW/m}^2, < 240$$

برای یک صفحه عمودی:

$$h, \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F} = 87(\Delta T \text{F})^{1/7} \quad q/A, \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2, < 1000 \quad (4-8-3)$$

$$h, \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} = 537(\Delta T \text{K})^{1/7} \quad q/A, \text{ kW/m}^2, < 3$$

$$h, \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F} = 0.240(\Delta T \text{F})^3 \quad 1000 < q/A, \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2, < 20000 \quad (4-8-4)$$

$$h, \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} = 7.95(\Delta T \text{K})^3 \quad 3 < q/A, \text{ kW/m}^2, < 63$$

که در این روابط $\Delta T = T_w - T_{\text{sat}}$ بر حسب K یا °F.

اگر فشار مطلق بر حسب اتمسفر باشد، مقدار h داده شده در بالا در فشار یک اتمسفر در $(P/1)^{1/4}$ ضرب می‌شود. معادله‌های (۱-۸-۴) و (۳-۸-۴) در ناحیه جابه‌جایی آزاد هستند.

برای تعیین ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری در حال جوشش داخل لوله‌ها، رابطه

ساده شده زیر می‌تواند به کار رود (J3).

$$h = 2.55(\Delta T K)^3 e^{P/1551} \text{ W/m}^2 \cdot K \quad (\text{SI})$$

$$h = 0.077(\Delta T^\circ F)^3 e^{P/225} \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ F \quad (\text{English}) \quad (4-8-5)$$

که در این جا p بر حسب kPa (در سیستم SI) یا psia (در سیستم انگلیسی) است.

۳- جوشش فیلمی: در ناحیه جوشش فیلمی، با توجه به اختلاف دمای نسبتاً زیاد، نرخ انتقال حرارت کم است و از این اختلاف دما به طور مؤثر استفاده نمی‌شود. جوشش فیلمی تاکنون در بسیاری از تحلیلهای تئوری مورد بررسی قرار گرفته است. Bromley (مرجع B3) معادله زیر را برای پیش بینی ضریب انتقال حرارت در ناحیه جوشش فیلمی در یک لوله افقی ارائه کرده است.

$$h = 0.62 \left[\frac{k_v^3 \rho_v (\rho_l - \rho_v) g (h_{fg} + 0.4 c_{pv} \Delta T)}{D \mu_v \Delta T} \right]^{1/4} \quad (4-8-6)$$

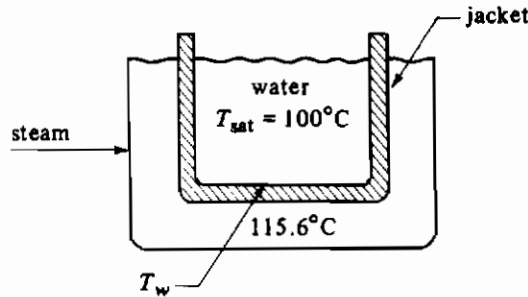
که k_v ضریب هدایت گرمایی بخار بر حسب $W/m \cdot K$ ، ρ_v دانسیته بخار بر حسب kg/m^3 ، ρ_l دانسیته مایع بر حسب kg/m^3 ، h_{fg} گرمای نهان تبخیر بر حسب J/kg ، $\Delta T = T_w - T_{sat}$ دمای بخار اشباع بر حسب $^\circ C$ ، D قطر بیرونی لوله بر حسب m و μ_v ویسکوزیته بخار بر حسب $Pa \cdot s$ و g شتاب جاذبه بر حسب m/s^2 است. خواص فیزیکی بخار در دمای فیلم $T_f = \frac{(T_w + T_{sat})}{2}$ و h_{fg} در دمای اشباع تعیین می‌شوند. اگر اختلاف دما خیلی زیاد باشد بخشی از انتقال حرارت به وسیله تابش اتفاق می‌افتد (H1).

مثال ۴-۸-۱ نرخ انتقال حرارت در یک محفظه دو جداره

آب در فشار مطلق یک اتمسفر در یک محفظه دو جداره توسط بخاری که در جداره محفظه در دمای $115/6^\circ C$ در حال چگالش است به جوش می‌آید. قطر درونی محفظه $0/656 \text{ m}$ و ارتفاع آن $0/984 \text{ m}$ است. کف محفظه مختصری حالت منحنی دارد اما آن را صاف فرض می‌کنیم. هم کف و هم دیواره‌ها تا ارتفاع $0/656$ متر دو جداره هستند. بدنه محفظه برای انتقال حرارت دارای ضخامت $3/2 \text{ mm}$ از جنس استیل ضد زنگ با $k = 16/27 \text{ W/m} \cdot K$ است. ضریب انتقال حرارت بخار در حال چگالش در داخل جداره $10200 \text{ W/m}^2 \cdot K$ تخمین زده می‌شود. ضریب انتقال حرارت (h_0) را برای سطح زیرین محفظه به دست آورید.

حل: نمودار مربوط به این محفظه در شکل ۴-۸-۲ نشان داده شده است. برای تعیین ضریب انتقال حرارت جوشش h_0 از معادلات ساده شده استفاده می‌شود. چون دمای داخلی سطح فلز (T_w) معلوم نیست روش حل براساس حدس و خطاست. فرض می‌کنیم $T_w = 110^\circ C$ باشد.

$$\Delta T = T_w - T_{sat} = 110 - 100 = 10^\circ C = 10 \text{ K}$$



شکل ۴-۸-۲. ظرف با جداره بخار و جوش آب در مثال ۴-۸-۱

با جایگزینی در معادله (۴-۸-۲) داریم:

$$h_o = 5/56 \times \Delta T^r = 5/56 \times 10^3 = 5560 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\frac{q}{A} = h \Delta T = 5560 \times 10 = 55600 \text{ W/m}^2$$

برای امتحان کردن T_w فرض شده، مقاومت‌های R_i مربوط به بخار در حال جگالش، R_w مربوط به دیواره فلزی و R_o مربوط به مایع در حال جوش باید محاسبه شوند. با فرض این‌که سطح مربوط به تمام مقاومتها برابر با $A = 1 \text{ m}^2$ باشد، براساس معادله (۴-۳-۱۲) داریم:

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = \frac{1}{10200 \times 1} = 9/8 \times 10^{-5}$$

$$R_w = \frac{\Delta x}{k A} = \frac{3/2/1000}{16/27 \times 1} = 19/66 \times 10^{-5}$$

$$R_o = \frac{1}{h_o A} = \frac{1}{5560 \times 1} = 17/98 \times 10^{-5}$$

$$\Sigma R = 9/8 \times 10^{-5} + 19/66 \times 10^{-5} + 17/98 \times 10^{-5} = 47/44 \times 10^{-5}$$

اختلاف دما در طول لایه در حال جوشش به صورت زیر است،

$$\Delta T = \frac{R_o}{\Sigma R} (115/6 - 100) = \frac{17/98 \times 10^{-5}}{47/44 \times 10^{-5}} \times 15/6 = 5/9 \text{ } ^\circ\text{C}$$

بنابراین، $T_w = 100 + 5/9 = 105/9$. این مقدار از مقدار فرض شده $110 \text{ } ^\circ\text{C}$ کمتر است.

به‌عنوان حدس دوم $T_w = 108/3 \text{ } ^\circ\text{C}$ را فرض می‌کنیم. بنابراین این داریم: $\Delta T = 108/3 - 100 = 8/3 \text{ } ^\circ\text{C}$ و از معادله (۴-۸-۲) مقدار h_o جدید برابر با 3180 است. R_o جدید برابر

با $31/44 \times 10^{-5}$ می‌باشد و همچنین،

$$\Delta T = \left(\frac{31/44 \times 10^{-5}}{60/90 \times 10^{-5}} \right) \times (115/6 - 100) = 8/1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

و در نهایت داریم:

$$T_w = 100 + 8/1 = 108/1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

این مقدار به حدس دوم ($108/3 \text{ } ^\circ\text{C}$) نزدیک است. بنابراین نیاز به حدس دیگری نیست.

۴-۸B چگالش

۱- مکانیسم چگالش: هر دو پدیده چگالش یک بخار به مایع و تبخیر مایع به بخار با تغییر فاز یک سیال سر و کار داشته و دارای ضرایب انتقال حرارت بزرگ هستند. چگالش هنگامی اتفاق می‌افتد که یک بخار اشباع مانند بخار آب در مجاورت یک سطح جامد که دمای سطحی آن پایین تر از دمای اشباع بخار است قرار گیرد. در این حالت آب مایع تشکیل می‌شود.

به‌طور طبیعی، وقتی بخار روی یک سطح، مانند لوله‌های عمودی یا افقی یا سایر سطوحها، مایع می‌شود یک لایه مایع روی سطح تشکیل می‌شود و به دلیل نیروی ثقل به سمت پایین جاری می‌شود. این لایه مایع مقاومت اصلی در مقابل انتقال حرارت بین سطح و بخار است. به این حالت، چگالش فیلمی^(۱) می‌گویند.

نوع دیگر چگالش، چگالش قطره‌ای^(۲) است که در این حالت قطرات کوچک روی سطح تشکیل می‌شوند. این قطرات رشد می‌کنند و بهم می‌پیوندند و مایع روی سطح جاری می‌شوند. در طول این نوع چگالش قسمت زیادی از سطح لوله عاری از هر مایعی می‌شود و کاملاً در معرض بخار قرار می‌گیرد. در این قسمت‌ها نرخ انتقال حرارت زیاد است. ضریب میانگین می‌تواند به بزرگی $110000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ($20000 \text{ btu/h.ft}^2 \cdot \text{ } ^\circ\text{F}$) باشد که ۵ تا ۱۰ برابر بزرگتر از ضریب فیلمی است. ضرایب چگالش فیلمی معمولاً خیلی بزرگتر از ضرایب چگالش در جابه‌جایی اجباری هستند و درجه بزرگی آنها در حد چند هزار $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ یا بیشتر است.

چگالش قطره‌ای هنگامی که سطح آلوده باشد یا ناخالصی روی سطح باشد، اتفاق می‌افتد. چگالش فیلمی قابل اعتمادتر و معمول‌تر است. از این رو در طراحیهای معمولی، چگالش از نوع فیلمی در نظر گرفته می‌شود.

۲- ضرایب چگالش فیلمی برای سطح عمودی: چگالش فیلمی روی یک دیواره عمودی یا یک لوله در صورتی که جریان لایه نازک مایع روی دیواره آرام فرض شود می تواند به طور تحلیلی بررسی شود. ضخامت فیلم در بالای دیواره یا لوله صفر است و همچنان که به دلیل چگالش، جریان به سمت پایین برقرار می شود ضخامت افزایش می یابد. ناسلت (H1, W1) فرض کرد که انتقال حرارت از بخار در حال مایع شدن در T_{sat} به دیواره در دمای T_w از طریق فیلم مایع به شکل هدایت صورت می گیرد. با معادل قرار دادن این انتقال حرارت هدایتی با انتقال حرارت حاصل از چگالش بخار، رابطه نهایی ضریب میانگین انتقال حرارت روی کل سطح به دست آمد.

در شکل ۴-۸-۳a بخار در دمای T_{sat} روی دیواره ای که دمای آن T_w است در حال چگالش است. مایع به صورت آرام به طرف پایین جریان دارد. با فرض این که ضخامت لایه مایع برابر با واحد باشد، جرم المانی از مایع با دانسیته ρ_l در شکل ۴-۸-۳b به صورت: $(\delta - y)(dx \times 1)\rho_l$ است. نیروی به سمت پایین وارد شده بر این المان برابر با اختلاف نیروی وزن و نیروی شناوری است که می توان به این صورت نوشت: $g(\delta - y)(dx) \times (\rho_l - \rho_v) \times 1$ که ρ_v دانسیته بخار اشباع است. این نیرو به وسیله نیروی برشی ویسکوز در صفحه y یعنی $(1) \mu_l (dv/dy) dx$ موازنه می شود. با مساوی قرار دادن این نیروها داریم:

$$(\delta - y)dx(\rho_l - \rho_v)g = \mu_l \left(\frac{dv}{dy} \right) dx \quad (4-8-7)$$

با انتگرال گیری و استفاده از این شرایط مرزی که: $v = 0$ در $y = 0$ داریم:

$$v = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} (\delta y - y^2/2) \quad (4-8-8)$$

دبی جرمی بخار مایع شده در هر x برای عمق واحد به صورت زیر است:

$$m = \int_0^\delta \rho_l v dy = \int_0^\delta \rho_l \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} (\delta y - y^2/2) dy \quad (4-8-9)$$

با انتگرال گیری داریم:

$$m = \frac{\rho_l g (\rho_l - \rho_v) \delta^3}{3\mu_l} \quad (4-8-10)$$

اگر در یک دیواره با مساحت $m^2 (dx \times 1)$ ، توزیع دما در مایع بین دیواره و بخار خطی فرض شود نرخ گرمای انتقال یافته به این صورت است:

$$q_x = -k_l(dx \cdot 1) \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = k_l dx \frac{T_{sat} - T_w}{\delta} \quad (4-8-11)$$

در فاصله dx نرخ حرارت منتقل شده q_x است. همچنین در این فاصله افزایش جرم ناشی از چگالش به اندازه dm است. با استفاده از معادله (۴-۸-۱۰) داریم:

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$dm = d \left[\frac{\rho_l g (\rho_l - \rho_v) \delta^3}{3\mu_l} \right] = \frac{\rho_l g (\rho_l - \rho_v) \delta^2 d\delta}{\mu_l} \quad (4-8-12)$$

با نوشتن یک موازنه گرمایی در فاصله dx ، حاصلضرب دبی جرمی dm در گرمای نهان h_{fg} باید برابر با q_x حاصل از معادله (۴-۸-۱۱) باشد،

$$h_{fg} \frac{\rho_l g (\rho_l - \rho_v) \delta^2 d\delta}{\mu_l} = k_l dx \frac{T_{sat} - T_w}{\delta} \quad (4-8-13)$$

با انتگرال‌گیری در محدوده $\delta = 0$ در $x = 0$ تا $\delta = \delta$ در $x = x$ داریم:

$$\delta = \left[\frac{4\mu_l k_l x (T_{sat} - T_w)}{gh_{fg} \rho_l (\rho_l - \rho_v)} \right]^{1/4} \quad (4-8-14)$$

با استفاده از ضریب انتقال حرارت موضعی h_x در موازنه گرما خواهد داد:

$$h_x (dx \cdot 1) (T_{sat} - T_w) = k_l (dx \cdot 1) \frac{T_{sat} - T_w}{\delta} \quad (4-8-15)$$

که در نتیجه داریم:

$$h_x = \frac{k_l}{\delta} \quad (4-8-16)$$

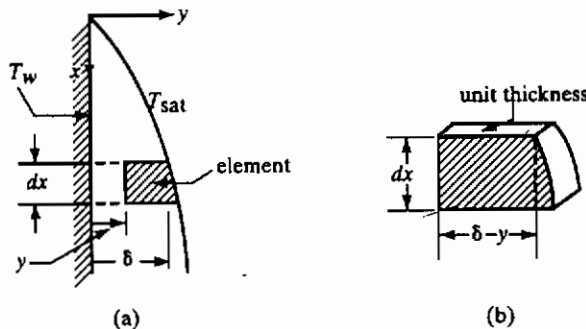
با ترکیب معادلات (۴-۸-۱۴) و (۴-۸-۱۶) داریم:

$$h_x = \left[\frac{\rho_l (\rho_l - \rho_v) gh_{fg} k_l^3}{4\mu_l x (T_{sat} - T_w)} \right]^{1/4} \quad (4-8-17)$$

با انتگرال‌گیری روی طول L مقدار میانگین h به صورت زیر به دست می‌آید:

$$h = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = \frac{4}{3} h_{x=L} \quad (4-8-18)$$

$$h = 0.943 \left[\frac{\rho_l (\rho_l - \rho_v) gh_{fg} k_l^3}{\mu_l L (T_{sat} - T_w)} \right]^{1/4} \quad (4-8-19)$$



شکل ۴-۸-۳. چگالش فیلمی روی یک صفحه عمودی: (a) افزایش ضخامت فیلم با موقعیت

(b) موازنه روی المان سیال مایع شده

اما برای جریان آرام داده‌های تجربی نشان می‌دهد که این مقادیر حدود ۲۰٪ از آنچه که از معادله (۴-۸-۱۹) به دست می‌آید بیشتر هستند.

بنابراین رابطه نهایی پیشنهادی برای سطحهای عمودی در جریان آرام معادله زیر است (M1):

$$N_{Nu} = \frac{hL}{k_f} = 1.13 \left(\frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)gh_{fg}L^3}{\mu_l k_f \Delta T} \right)^{1/4} \quad (4-8-20)$$

که ρ_l دانسیته مایع برحسب ρ_v دانسیته بخار، g برابر با 9.80665 m/s^2 ، L ارتفاع عمودی سطح یا لوله برحسب m ، μ_l ویسکوزیته مایع برحسب $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ، k_f ضریب هدایت گرمایی مایع برحسب $\text{W/m}\cdot\text{K}$ ، $\Delta T = T_{\text{sat}} - T_w$ برحسب کلین و h_{fg} گرمای نهان چگالش در دمای اشباع برحسب J/kg می‌باشد. همه خواص فیزیکی مایع به جز h_{fg} در دمای $T_f = \frac{(T_{\text{sat}} + T_w)}{2}$ اندازه‌گیری می‌شوند. عدد رینولدز در سطحهای عمودی طویل که جریان در قسمت پایینی می‌تواند مغشوش باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{Re} = \frac{4m}{\pi D \mu_l} = \frac{4\Gamma}{\mu_l} \quad (\text{vertical tube, diameter } D) \quad (4-8-21)$$

$$N_{Re} = \frac{4m}{W \mu_l} = \frac{4\Gamma}{\mu_l} \quad (\text{vertical plate, width } W) \quad (4-8-22)$$

که در این جا m جرم کل بخار مایع شده در لوله یا پایین صفحه در واحد زمان و $\Gamma = m/\pi D$ یا $\Gamma = m/W$ است. برای این که معادله (۴-۸-۲۰) صدق کند N_{Re} باید کمتر از حدود ۱۸۰۰ باشد. خواننده باید توجه داشته باشد که مراجع دیگر N_{Re} را به صورت Γ/μ تعریف می‌کنند. بنابراین، این N_{Re} باید کمتر از ۴۵۰ باشد.

برای جریان مغشوش یعنی در $N_{Re} > 1800$ خواهیم داشت (M1).

$$N_{Nu} = \frac{hL}{k_f} = 0.0077 \left(\frac{g\rho_l^2 L^3}{\mu_l^2} \right)^{1/3} (N_{Re})^{0.4} \quad (4-8-23)$$

حل این معادله به صورت حدس و خطاست چون برای محاسبه h باید مقداری برای N_{Re} فرض کرد.

مثال ۴-۸-۲ چگالش روی یک لوله عمودی

بخار اشباع در فشار مطلق $68/9 \text{ kPa}$ (10 psia) روی یک لوله عمودی به طول 0.305 m (1 ft) و به قطر خارجی 0.0254 m (1 in) مایع می‌شود. دمای سطح لوله $86/11 \text{ }^\circ\text{C}$ ($187 \text{ }^\circ\text{F}$) می‌باشد. ضریب انتقال حرارت میانگین را بر حسب واحدهای انگلیسی و SI محاسبه کنید.

حل: از ضمیمه A.2 داریم:

$$T_{\text{sat}} = 193^{\circ}\text{F} (89/44^{\circ}\text{C}) \quad T_w = 187^{\circ}\text{F} (86/11^{\circ}\text{C})$$

$$T_f = \frac{(T_w + T_{\text{sat}})}{2} = \frac{187 + 193}{2} = 190^{\circ}\text{F} (87/8^{\circ}\text{C})$$

$$h_{fg} = 1143/3 - 161 = 982/3 \text{ btu/lb}_m$$

$$= 2657/8 - 374/6 = 2283/2 \text{ kJ/kg} = 2/283 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

$$\rho_l = \frac{1}{0.01657} = 60/3 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 = 60/3 \times 16/0.18 = 966/7 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_v = \frac{1}{40/95} = 0.244 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 = 0.391 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_l = 0.324 \text{ cp} \times 2/4191 = 0.784 \text{ lb}_m/\text{ft.h} = 3/24 \times 10^{-4} \text{ Pa.s}$$

$$k_l = 0.390 \text{ btu/ft.h.}^{\circ}\text{F} = 0.390 \times 1/7307 = 0.675 \text{ W/m.K}$$

$$L = 1 \text{ ft} = 0.305 \text{ m} \quad \Delta T = T_{\text{sat}} - T_w = 193 - 187 = 6^{\circ}\text{F} (3/33 \text{ K})$$

با فرض یک لایه نازک آرام، با استفاده از معادله (۴-۸-۲۰) در سیستم واحدهای SI و انگلیسی و صرفنظر کردن از ρ_v در مقابل ρ_l داریم:

$$N_{Nu} = 1/13 \left(\frac{\rho_l^2 g h_{fg} L^3}{\mu_l k_l \Delta T} \right)^{1/25}$$

$$= 1/13 \times \left[\frac{60/3^2 \times 32/174 \times 3600^2 \times 982/3 \times 1^3}{0.784 \times 0.390 \times 6} \right]^{1/25} = 60.4$$

$$N_{Nu} = 1/13 \times \left[\frac{966/7^2 \times 9/806 \times 2/283 \times 10^3 \times 0.305^3}{3/24 \times 10^{-4} \times 0.675 \times 3/33} \right]^{1/25} = 60.4$$

$$N_{Nu} = \frac{h L}{k_l} = \frac{h \times 1}{0.390} = 60.4 \quad \text{یا} \quad \frac{h \times 0.305}{0.675} = 60.4$$

پس از حل رابطه، $h = 2350 \text{ btu/h.ft}^2.^{\circ}\text{F} = 13350 \text{ W/m}^2.\text{K}$.

سپس برای این‌که ببینیم مطابق با فرض جریان آرام است یا نه Re را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه کل حرارت منتقل شده برای یک لوله به مساحت:

$$A = \pi D L = \pi \times \frac{1}{12} \times 1 = \frac{\pi}{12} \text{ ft}^2 \quad A = \pi \times 0.0254 \times 0.305 \text{ m}^2$$

$$q = h A \Delta T \quad (4-8-24)$$

اما، این q باید برابر با گرمایی باشد که از چگالش $m \text{ lb}_m/\text{h} (\text{kg/s})$ بخار به دست آید. بنابراین داریم:

$$q = h A \Delta T = h_{fg} m \quad (4-8-25)$$

با جایگذاری مقادیر معلوم و حل معادله نسبت به m داریم:

$$2350 \times \frac{\pi}{12} \times (193 - 187) = 982/3 \times m \Rightarrow m = 3/77 \text{ lb}_m/\text{h}$$

$$13/35 \times \pi \times 0.0254 \times 0.305 \times 3/33 = 2/284 \times 10^1 \times m \Rightarrow m = 4/74 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$$

با جایگذاری در معادله (4-8-21) داریم:

$$N_{Re} = \frac{4 m}{\pi D \mu_l} = \frac{4 \times 3/77}{\pi \times (1/12) \times 0.784} = 73/5$$

$$N_{Re} = \frac{4 \times 4/74 \times 10^{-4}}{\pi \times 0.0254 \times 3/24 \times 10^{-4}} = 73/5$$

بنابراین مطابق فرض جریان آرام است.

۳- ضرایب چگالش فیلمی بیرون استوانه‌های افقی: تحلیل ناسلت می‌تواند به مورد عملی چگالش در بیرون یک لوله افقی نیز تعمیم داده شود. برای یک لوله تکی، لایه نازک مایع از بالای لوله با ضخامت صفر شروع می‌شود و همچنان که به پایین جاری می‌شود ضخامت آن نیز زیاد می‌شود تا این‌که از لوله جدا می‌شود. اگر یک دسته لوله داشته باشیم مایع از روی یک لوله به روی لوله پایینی می‌چکد. برای یک دسته لوله افقی شامل N لوله که زیر یکدیگر قرار گرفته‌اند و قطر خارجی آنها D است داریم (M1):

$$N_{Nu} = \frac{hD}{k_l} = 0.725 \left(\frac{\rho_l (\rho_l - \rho_v) g h_{fg} D^3}{N \mu_l k_l \Delta T} \right)^{1/4} \quad (4-8-26)$$

در اغلب کاربردهای عملی، جریان آرام است و معادله (4-8-26) صدق می‌کند (M1, C3).

۴-۹ مبدل‌های حرارتی

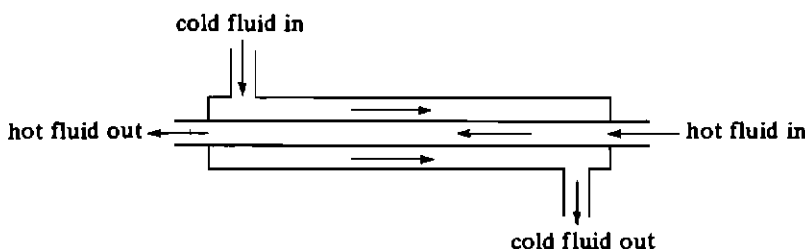
۴-۹A انواع مبدل‌ها

۱- مقدمه: در فرایندهای صنعتی انتقال حرارت بین دو سیال عموماً در مبدل‌های حرارتی انجام می‌شود. رایج‌ترین نوع، گونه‌ای است که در آن سیال گرم و سیال سرد در تماس مستقیم با یکدیگر نیستند و توسط دیواره یک لوله یا یک سطح صاف یا مدور از یکدیگر جدا شده‌اند. گرما به صورت جابه‌جایی از سیال گرم به دیواره یا سطح لوله منتقل شده و سپس از طریق دیواره لوله یا سطح به صورت هدایت

عبور کرده و در نهایت به صورت جابه‌جایی به سیال سرد انتقال می‌یابد. در بخش‌های قبلی این فصل، در مورد روشهای محاسبهٔ مراحل مختلف بحث کردیم. در این بخش در بارهٔ برخی از انواع تجهیزاتی که استفاده می‌شوند و نیز تجزیه و تحلیل گرمایی مبدلها صحبت خواهیم کرد. جزئیات روشهای طراحی مبدلهای حرارتی کاملاً توسعه یافته‌اند ولی ما در این جا در مورد آنها بحث نخواهیم کرد.

۲- مبدل حرارتی دو لوله‌ای: ساده‌ترین نوع مبدل، نوع دو لوله‌ای یا مبدل با لوله‌های هم مرکز است. این نوع مبدل در شکل ۱-۹-۴ نشان داده شده است. در این شکل یک سیال در درون یکی از لوله‌ها جریان دارد و سیال دیگر در فضای حلقوی بین دو لوله جریان دارد. این دو سیال می‌توانند در یک جهت یا در جهت مخالف یکدیگر حرکت کنند. این مبدل را می‌توان از یک جفت لوله بلند با ته بسته یا از تعدادی جفت لوله‌های هم‌مرکز به صورت سری ساخت. این نوع مبدل معمولاً برای جریانهای با دبی کم مفید است.

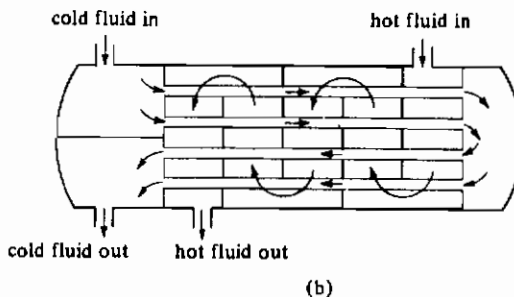
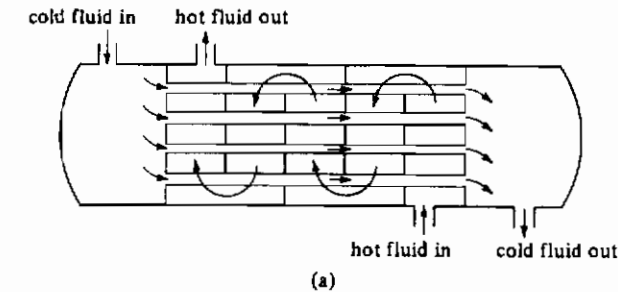
۳- مبدل پوسته و لوله: برای شدت جریانهای زیاد، از مبدل پوسته و لوله استفاده می‌شود که مهمترین نوع مبدل در صنایع فرایندی است. در این مبدلها جریانها پیوسته هستند. تعداد زیادی لوله به صورت موازی قرار گرفته‌اند که یکی از دو سیال در داخل این لوله‌ها جریان دارد. لوله‌ها به صورت یک دسته لوله با آرایش خاص هستند و در درون یک پوسته قرار دارند و سیال دیگر در بیرون لوله‌ها و درون پوسته جریان دارد. در شکل ۲۸-۹-۴، ساده‌ترین نوع مبدل پوسته و لوله با یک پوسته و یک دسته لوله نشان داده شده است که به آن مبدل ۱-۱ خلاف جهت نیز گفته می‌شود. سیال سرد وارد مبدل شده و از داخل همهٔ لوله‌ها در یک گذر^(۱) به صورت موازی حرکت می‌کند. سیال گرم از طرف دیگر وارد و به صورت خلاف جهت درعرض لوله‌ها حرکت می‌کند. از بافلها نیز عبور می‌کند. برای این‌که سیال مجبور شود به‌جای حرکت موازی عمود بر دسته لوله‌ها حرکت کند از بافل استفاده می‌شود. اغتشاش ایجاد شده توسط جریان عرضی عمود بر جهت لوله‌ها باعث افزایش ضریب انتقال حرارت در قسمت پوسته می‌شود.



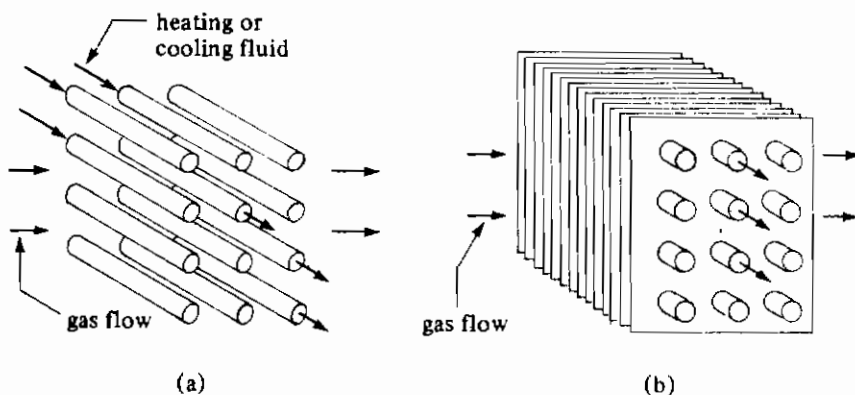
شکل ۱-۹-۴. جریان در مبدل دو لوله‌ای

در شکل ۲b-۹-۴ یک مبدل ۱-۲ خلاف جهت نشان داده شده است. مطابق شکل مایع داخل لوله در دو گذر و مایع داخل پوسته در یک گذر جریان دارد. در اولین گذر لوله سیال سرد به صورت خلاف جهت با سیال گرم داخل پوسته جریان می‌یابد و در گذر دوم سیال سرد به صورت هم‌جهت با سیال گرم جریان پیدا می‌کند. نوع دیگر مبدل دارای دو گذر پوسته و ۴ گذر لوله است. ترکیبات دیگری از تعداد گذرها نیز گاهی استفاده می‌شود. انواع ۱-۲ و ۲-۴ رایج‌ترین آنها بوده‌اند.

۴- مبدل جریان متقاطع: وقتی گازی مانند هوای گرم را می‌خواهیم سرد یا گرم کنیم، معمول‌ترین وسیله‌ای که استفاده می‌شود مبدل جریان متقاطع^(۱) است که در شکل ۳a-۹-۴ نشان داده شده است. یکی از سیالات، مثلاً یک مایع، از داخل لوله عبور می‌کند و گاز در عرض دسته لوله‌ها به صورت جابه‌جایی اجباری یا آزاد حرکت می‌کند. سیال داخل لوله‌ها با یکدیگر مخلوط نمی‌شوند چون از هنگامی که وارد لوله‌ها می‌شوند به صورت جریانهای جداگانه هستند. جریان گاز خارج لوله‌ها کاملاً مخلوط می‌شود چون می‌تواند به صورت آزادانه در بین لوله‌ها حرکت کند و همچنین گاز تمایل دارد تا دمای خود را در جهت عمود بر جریان یکنواخت کند. برای سیال مخلوط نشده داخل لوله‌ها هم در جهت جریان و هم در جهت عمود بر آن اختلاف دما وجود خواهد داشت.



شکل ۲-۹-۴. مبدلهای پوسته و لوله: (a) یک گذر لوله و یک گذر پوسته (مبدل ۱-۲) (b) یک گذر پوسته و دو گذر لوله (مبدل ۱-۲)



شکل ۳-۹-۴. الگوی جریان در مبدل‌های جریان متقاطع: (a) یک سیال مخلوط شده (گاز) و یک سیال مخلوط نشده (b) هر دو سیال مخلوط نشده

نوع دوم مبدل حرارتی جریان متقاطع در شکل ۳b-۹-۴ نشان داده شده است که معمولاً در سیستم‌های تهویه هوا و گرم کردن آن استفاده می‌شود. در این نوع مبدل، جریان گاز از میان یک دهسته لوله پره‌دار عبور می‌کند و مخلوط نمی‌شود چون سیال در کانال‌های جداگانه حرکت کرده و از روی لوله‌ها عبور می‌کند. سیال داخل لوله‌ها نیز مخلوط نمی‌شود.

بحث در مورد انواع دیگر تجهیزات انتقال حرارت به بخش ۱۳-۴ موكول میشود. در باقیمانده این بخش با مبدل‌های پوسته و لوله و جریان متقاطع سر و کار داریم.

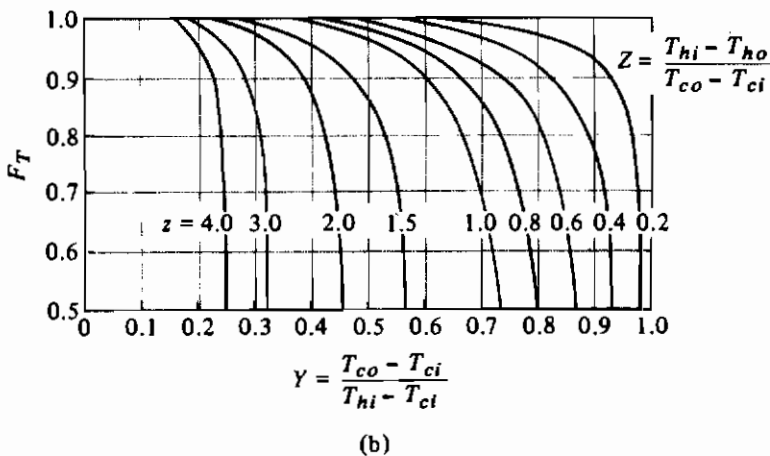
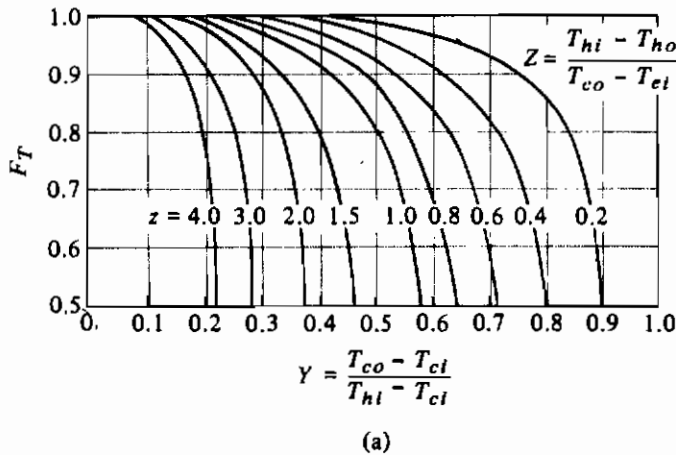
B-۹-۴ ضرایب تصحیح اختلاف دمای میانگین لگاریتمی

در بخش ۴-۵H نشان داده شد که وقتی که سیال‌های گرم و سرد در مبدل حرارتی به صورت خلاف جهت یا هم جهت جریان دارند از اختلاف دمای میانگین لگاریتمی باید استفاده شود.

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)} \quad (4-9-1)$$

که در اینجا ΔT_2 اختلاف دما در یک انتهای مبدل و ΔT_1 اختلاف دما در انتهای دیگر است. ΔT_{lm} برای یک مبدل دو لوله‌ای و یک مبدل ۱-۱ با یک پوسته و یک گذر لوله در حالت هم جهت یا خلاف جهت صدق می‌کند.

در مواردی که مبدل چند گذر داریم، بسته به آرایش لوله‌ها و پوسته‌ها لازم است که رابطه دیگری برای اختلاف دمای میانگین به دست آوریم. ابتدا تبدلی با یک پوسته و دو گذر لوله طبق شکل ۴-۹-۲b در نظر می‌گیریم. سیال سرد در اولین دسته لوله در خلاف جهت سیال گرم حرکت میکند. در دومین دسته لوله سیال سرد با سیال گرم هم جهت است. بنابراین، اختلاف دمای میانگین لگاریتمی که هم برای جریان هم جهت و هم خلاف جهت و نه برای ترکیب این دو نوع جریان استفاده می‌شود در این حالت اختلاف دمای واقعی را نخواهد داد مگر این‌که تصحیح شود.



شکل ۴-۹-۴. ضریب تصحیح F_T برای اختلاف دمای متوسط لگاریتمی: (a) مبدلهای ۱-۲ (b) مبدلهای ۲-۴ (با کسب مجوز گرفته شده از:

به دست آوردن معادله مناسب برای دمای میانگین به طریق ریاضی کاملاً پیچیده است. روش معمول استفاده از ضریب تصحیح F_T است که وقتی که در ΔT_{lm} ضرب می شود اختلاف دمای میانگین صحیح ΔT_m به دست می آید. در استفاده از ضرایب تصحیح F_T مهم نیست که سیال گرمتر از داخل لوله ها عبور کند یا از داخل پوسته (K1). ضریب F_T برای مبدل های ۲-۱ محاسبه شده و در شکل ۴-۹-۴a نشان داده شده است (B4). دو نسبت بدون بعد به صورت زیر استفاده شده اند.

$$Z = \frac{T_{hi} - T_{ho}}{T_{co} - T_{ci}} \quad (4-9-2)$$

$$Y = \frac{T_{co} - T_{ci}}{T_{hi} - T_{ci}} \quad (4-9-3)$$

که T_{hi} دمای ورودی سیال گرم برحسب K یا °F، T_{ho} دمای خروجی سیال گرم، T_{ci} دمای ورودی سیال سرد و T_{co} دمای خروجی سیال سرد است.

در شکل ۴-۹-۴b ضریب F_T برای یک مبدل ۲-۴ نشان داده شده است (B4). معمولاً استفاده از یک مبدل حرارتی در شرایط $F_T < 0.75$ توصیه نمی شود. در این حالت باید از ترکیبات دیگر پوسته و لوله استفاده کرد. ضرایب تصحیح برای دو نوع از مبدل های جریان متقاطع در شکل ۴-۹-۵ داده شده است. نمونه های دیگر در جاهای دیگر داده شده اند (B4, P1).

با استفاده از پارامترهای تعریف شده در معادلات (۴-۹-۲) و (۴-۹-۳)، ΔT_{lm} از معادله (۴-۹-۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\Delta T_{lm} = \frac{(T_{hi} - T_{co}) - (T_{ho} - T_{ci})}{\ln [(T_{hi} - T_{co}) / (T_{ho} - T_{ci})]} \quad (4-9-4)$$

بنابراین معادله مبدل حرارتی به صورت زیر است:

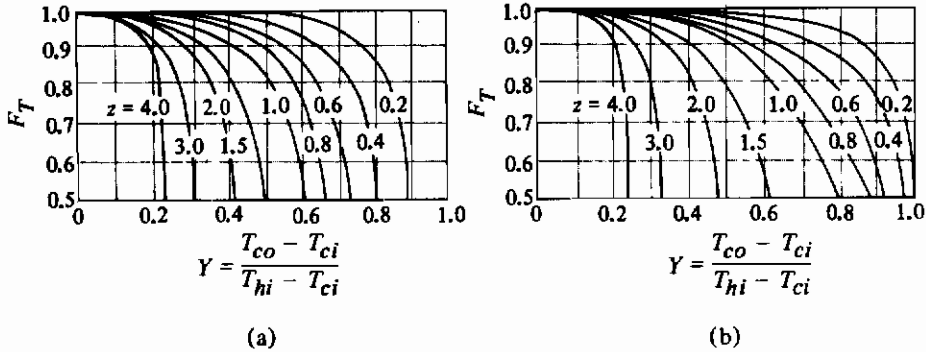
$$q = U_i A_i \Delta T_m = U_o A_o \Delta T_m \quad (4-9-5)$$

که در این جا،

$$\Delta T_m = F_T \Delta T_{lm} \quad (4-9-6)$$

مثال ۴-۹-۱ ضریب تصحیح دما برای یک مبدل حرارتی

یک مبدل حرارتی ۲-۱ شامل یک پوسته و دو گذر لوله $2/52 \text{ kg/s}$ آب را از دمای $21/1$ تا $54/4$ °C، توسط آب داغ تحت فشار با دمای ورودی $115/6$ °C و دمای خروجی $48/9$ °C، گرم می کند. سطح بیرونی لوله ها در مبدل $A_o = 9/3 \text{ m}^2$ است.



شکل ۴-۹-۵. ضریب تصحیح F_T برای اختلاف دمای میانگین لگاریتمی برای مبدل‌های جریان متقاطع
 [$Z = (T_{hi} - T_{ho}) / (T_{co} - T_{ci})$]
 (a) یک گذر، سیال داخل پوسته مخلوط شده، سیال دیگر مخلوط نشده،
 (b) یک گذر، هر دو سیال مخلوط نشده، (با کسب مجوز گرفته شده از:

R. A. Bowman, A. C. Mueller, and W. M. Nagle, Trans. ASME, 62, 288, 289, (1940)

الف - اختلاف دمای میانگین ΔT_m در مبدل و ضریب کلی انتقال حرارت U_0 را محاسبه کنید.

ب - با همان دماها و با استفاده از یک مبدل ۴-۲، ΔT_m چقدر خواهد شد.

حل: دماها به صورت زیر هستند:

$$T_{hi} = 115/6 \text{ } ^\circ\text{C}, T_{ho} = 48/9 \text{ } ^\circ\text{C}, T_{ci} = 21/1 \text{ } ^\circ\text{C}, T_{co} = 54/4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

ابتدا با نوشتن یک موازنه گرمایی روی آب سرد با فرض $c_{pm} = 4187 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ برای آب و

محاسبه اختلاف دمای سیال سرد به صورت: $T_{co} - T_{ci} = (54/4 - 21/1) \text{ } ^\circ\text{C} = 33/3 \text{ } ^\circ\text{C} = 33/3 \text{ K}$

داریم:

$$q = m c_p (T_{co} - T_{ci}) = 2/52 \times 4187 \times (54/4 - 21/1) = 348200 \text{ W}$$

اختلاف دمای میانگین لگاریتمی با استفاده از معادله (۴-۹-۴) به صورت زیر است:

$$\Delta T_{lm} = \frac{(115/6 - 54/4) - (48/9 - 21/1)}{\ln [(115/6 - 54/4) / (48/9 - 21/1)]} = 42/3 \text{ } ^\circ\text{C} = 42/3 \text{ K}$$

سپس با جایگذاری در معادلات (۴-۹-۲) و (۴-۹-۳) داریم:

$$Z = \frac{T_{hi} - T_{ho}}{T_{co} - T_{ci}} = \frac{115/6 - 48/9}{54/4 - 21/1} = 2 \quad (4-9-2)$$

$$Y = \frac{T_{co} - T_{ci}}{T_{hi} - T_{ci}} = \frac{54/4 - 21/1}{115/6 - 21/1} = 0/352 \quad (4-9-3)$$

از شکل ۴-۹-۴a داریم: $F_T = 0.74$. پس با استفاده از معادله (۴-۹-۶) داریم:

$$\Delta T_m = F_T \Delta T_{im} = 0.74 \times 42/3 = 31/3^\circ\text{C} = 31/3\text{ K} \quad (4-9-6)$$

با مرتب کردن معادله (۴-۹-۵) و حل آن نسبت به U_o و جایگذاری مقادیر معلوم داریم:

$$U_o = \frac{q}{A_o \Delta T_m} = \frac{34820}{9/3 \times 31/3} = 1196\text{ W/m}^2\cdot\text{K} \quad (211\text{ btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F})$$

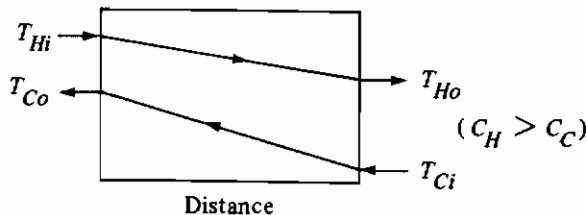
برای قسمت (ب)، با استفاده از یک مبدل ۲-۴ و شکل ۴-۹-۴b، $F_T = 0.94$ به دست می آید. پس:

$$\Delta T_m = F_T \Delta T_{im} = 0.94 \times 42/3 = 39/8^\circ\text{C} = 39/8\text{ K}$$

بنابراین، در این حالت مبدل ۲-۴ اختلاف دمای بیشتری ایجاد می کند.

۴-۹C ضریب تأثیر^(۱) مبدلهای حرارتی

۱- مقدمه: در بخش گذشته در معادله $q = U A \Delta T_{im}$ برای طراحی مبدلهای حرارتی از اختلاف دمای میانگین لگاریتمی استفاده شد. این معادله هنگامی که دمای ورودی و خروجی دو سیال معلوم باشند یا بتوان آنها را بر اساس یک موازنه گرمایی تعیین کرد، مناسب است. بنابراین اگر U معلوم باشد سطح گرمایی را می توان تعیین کرد. اما وقتی که دماهای خروجی سیالها از مبدل مشخص نباشد و مبدل مشخصی استفاده شده باشد از روش سعی و خطا باید استفاده نمود. برای حل این حالتها روشی که ضریب تأثیر مبدل حرارتی ϵ نامیده می شود مورد استفاده قرار می گیرد که در آن نیازی به دماهای خروجی نیست. ضریب تأثیر مبدل حرارتی به صورت نسبت نرخ واقعی انتقال حرارت در یک مبدل مشخص به حداکثر مقدار ممکن انتقال حرارت تعریف می شود، البته اگر سطح انتقال حرارت نامحدود باشد. در شکل ۴-۹-۶، توزیع دما در یک مبدل حرارتی خلاف جهت نشان داده شده است.



شکل ۴-۹-۶. توزیع دما برای مبدل جریان متقابل

۲- به دست آوردن معادله ضریب تأثیر: موازنه گرمایی برای دو سیال سرد (C) و گرم (H) به صورت زیر است:

$$q = (mc_p)_H(T_{Hi} - T_{Ho}) = (mc_p)_C(T_{Co} - T_{Ci}) \quad (4-9-7)$$

در شکل ۴-۹-۶، با قرار دادن $(m c_p)_H$ برابر با C_H و $(m c_p)_C$ برابر با C_C داریم: $C_H > C_C$. سیال سرد تغییرات دمایی بزرگتری را نسبت به سیال گرم تحمل می‌کند. بنابراین، C_C را به عنوان C_{min} یا ظرفیت گرمایی حداقل در نظر می‌گیریم. پس اگر سطح نامحدودی برای انتقال حرارت موجود باشد، $T_{Co} = T_{Hi}$. پس ضریب تأثیر ϵ به صورت زیر است:

$$\epsilon = \frac{C_H(T_{Hi} - T_{Ho})}{C_C(T_{Hi} - T_{Ci})} = \frac{C_{max}(T_{Hi} - T_{Ho})}{C_{min}(T_{Hi} - T_{Ci})} \quad (4-9-8)$$

اگر سیال گرم سیال حداقل^(۱) باشد بنابراین، $T_{Ho} = T_{Ci}$ و داریم:

$$\epsilon = \frac{C_C(T_{Co} - T_{Ci})}{C_H(T_{Hi} - T_{Ci})} = \frac{C_{max}(T_{Co} - T_{Ci})}{C_{min}(T_{Hi} - T_{Ci})} \quad (4-9-9)$$

در هر دو معادله مخرج‌ها یکی هستند و صورت مقدار واقعی انتقال حرارت را نشان می‌دهد.

$$q = \epsilon C_{min}(T_{Hi} - T_{Ci}) \quad (4-9-10)$$

معادله (۴-۹-۱۰) فقط از دماهای ورودی استفاده می‌کند که این یک مزیت است، خصوصاً هنگامی که دماهای ورودی معلوم باشند و بخواهیم دماهای خروجی را در یک مبدل مشخص پیش بینی کنیم. در یک مبدل یک گذر با جریان مخالف، با ترکیب معادلات (۴-۹-۸) و (۴-۹-۹) داریم:

$$\epsilon = \frac{C_H(T_{Hi} - T_{Ho})}{C_{min}(T_{Hi} - T_{Ci})} = \frac{C_C(T_{Co} - T_{Ci})}{C_{min}(T_{Hi} - T_{Ci})} \quad (4-9-11)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که سیال حداقل سیال سرد باشد. با بازنویسی معادله (۴-۵-۲۵) با استفاده از نمادگذاری موجود داریم:

$$q = C_C(T_{Co} - T_{Ci}) = UA \frac{(T_{Ho} - T_{Ci}) - (T_{Hi} - T_{Co})}{\ln [(T_{Ho} - T_{Ci})/(T_{Hi} - T_{Co})]} \quad (4-9-12)$$

با ترکیب معادله (۴-۹-۷) با طرف چپ معادله (۴-۹-۱۱) و حل آن نسبت به T_{Hi} داریم:

$$T_{Hi} = T_{Ci} + \frac{1}{\epsilon}(T_{Co} - T_{Ci}) \quad (4-9-13)$$

با کم کردن T_{Co} از دو طرف داریم:

$$T_{Hi} - T_{Co} = T_{Ci} - T_{Co} + \frac{1}{\epsilon}(T_{Co} - T_{Ci}) = \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)(T_{Co} - T_{Ci}) \quad (4-9-14)$$

از معادله (۴-۹-۷) با در نظر گرفتن $C_{\max} = C_H$ و $C_{\min} = C_C$ داریم:

$$T_{Ho} = T_{Hi} - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} (T_{Co} - T_{Ci}) \quad (4-9-15)$$

که با مرتب کردن آن معادله زیر حاصل می‌شود:

$$T_{Ho} - T_{Ci} = T_{Hi} - T_{Ci} - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} (T_{Co} - T_{Ci}) \quad (4-9-16)$$

با جایگزینی معادله (۴-۹-۱۳) در (۴-۹-۱۶) داریم:

$$T_{Ho} - T_{Ci} = \frac{1}{\varepsilon} (T_{Co} - T_{Ci}) - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} (T_{Co} - T_{Ci}) \quad (4-9-17)$$

سرانجام، با جایگزینی معادلات (۴-۹-۱۴) و (۴-۹-۱۷) در (۴-۹-۱۲) و مرتب کردن آن و گرفتن آنتی لگاریتم از طرفین معادله و حل آن نسبت به ε داریم:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp \left[-\frac{UA}{C_{\min}} \left(1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right) \right]}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp \left[\frac{UA}{C_{\min}} \left(1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right) \right]} \quad (4-9-18)$$

NTU را به عنوان تعداد واحدهای انتقال تعریف می‌کنیم و به صورت زیر است:

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} \quad (4-9-19)$$

اگر $C_H = C_{\min}$ باشد، همان نتیجه به دست خواهد آمد.

برای جریانهای موازی داریم:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp \left[-\frac{UA}{C_{\min}} \left(1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right) \right]}{1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}} \quad (4-9-20)$$

در شکل ۴-۹-۷، معادلات (۴-۹-۱۸) و (۴-۹-۲۰) به شکل نمودار رسم شده‌اند. نمودارهای دیگری نیز برای انواع دیگر مبدل‌های پوسته و لوله و جریان متقاطع در دسترس هستند (K1).

مثال ۴-۹-۲ ضریب تأثیر مبدل‌های حرارتی

آب با دبی 0.667 kg/s و دمای 308 K وارد یک مبدل حرارتی با جریان متقابل شده و به وسیله جریانی از روغن که در دمای 383 K قرار دارد و دبی آن $2/85 \text{ kg/s}$ است گرم می‌شود ($c_p = 1/89 \text{ kJ/kg.K}$). ضریب کلی انتقال حرارت $U = 300 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ و مساحت $A = 15 \text{ m}^2$

است. نرخ انتقال حرارت و دمای خروجی آب را محاسبه کنید.

حل: فرض می‌کنیم دمای خروجی آب در حدود 370 K باشد. c_p آب در دمای میانگین $\frac{(308 + 370)}{2} = 339\text{ K}$ برابر با $4/192\text{ kJ/kg.K}$ است (ضمیمه A.2). بنابراین،

$$(c_p m)_H = C_H = 2/85 (1/89 \times 10^3) = 5387\text{ W/K}$$

$$(m c_p)_C = C_C = 0/667 (4/192 \times 10^3) = 2796\text{ W/K} = C_{\min}$$

چون C_C حداقل است بنابراین، $C_{\min}/C_{\max} = \frac{2796}{5387} = 0/519$

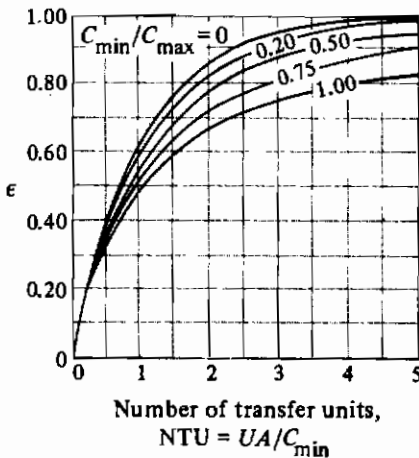
با استفاده از معادله (4-9-19)، $NTU = UA/C_{\min} = \frac{300 \times 15}{2796} = 1/607$ ، با استفاده از شکل 4-9-7a برای مبدل حرارتی با جریان متقابل، $\epsilon = 0/71$. با جایگزینی در معادله (4-9-10) داریم:

$$q = \epsilon C_{\min} (T_{Hi} - T_{Ci}) = 0/71 \times 2796 \times (383 - 308) = 148900\text{ W}$$

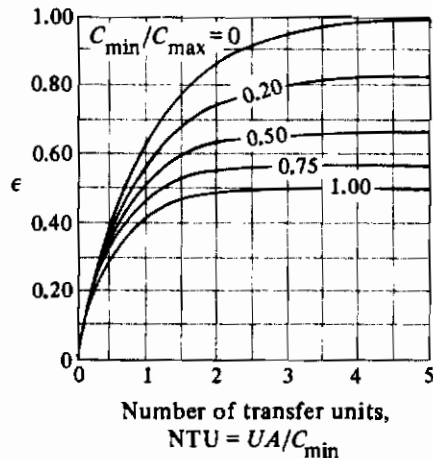
با استفاده از معادله (4-9-7) داریم:

$$q = 148900 = 2796 \times (T_{Co} - 308)$$

پس از حل معادله داریم: $T_{Co} = 361/3\text{ K}$



(a)



(b)

شکل 4-9-7. ضریب تاثیر مبدل حرارتی: (a) مبدل جریان متقابل (b) مبدل جریان موازی

۹D-۴ ضرایب جرم‌گرفتگی^(۱) و مقادیر ضریب کلی انتقال حرارت U

در عمل سطوح انتقال حرارت تمیز باقی نمی‌مانند. کثیفی، دوده، ذرات جامد ریز و رسوبات دیگر، روی یک یا دو طرف لوله‌های مبدل و روی سطوح دیگر انتقال حرارت ته نشین می‌شوند. این رسوبات در مقابل جریان گرما مقاومت اضافی ایجاد کرده و ضریب کلی انتقال حرارت U را کاهش می‌دهند. در فرایندهای نفتی، کک و مواد نفتی دیگر می‌توانند رسوب کنند. رسوباتی از گل و لای و مواد دیگر می‌توانند بوجود آیند. مواد حاصل از خوردگی ممکن است روی سطوح مقاومتهای شدیدی در مقابل انتقال حرارت به وجود آورند. در صنایع بیولوژیکی جلبکها می‌توانند در آب سرد رشد کنند.

برای جلوگیری یا کاهش مشکلات جرم‌گرفتگی، غالباً از ممانعت‌کننده‌های شیمیایی برای به حداقل رساندن خوردگی، کاهش رسوب گذاری نمکها و کاهش رشد جلبکها استفاده می‌شود. برای کاهش جرم‌گرفتگی آب از سرعتهای بالاتر از ۱ m/s استفاده می‌شود. اختلاف دمای زیاد ممکن است باعث افزایش رسوب جامدات روی سطوح شود و باید حتی الامکان از آن اجتناب شود.

تأثیر چنین رسوباتی، همیشه در طراحی با اضافه کردن یک عبارت برای مقاومت جرم‌گرفتگی داخل و خارج لوله‌ها به معادله (۱۷-۳-۴) در نظر گرفته می‌شود.

$$U_i = \frac{1}{1/h_i + 1/h_{di} + (r_o - r_i)A_i/k_A A_{im} + A_i/A_o h_o + A_i/A_o h_{do}} \quad (۲۱-۹-۴)$$

که h_{di} ضریب جرم‌گرفتگی برای داخل و h_{do} ضریب جرم‌گرفتگی برای خارج لوله بر حسب $W/m^2.K$ است. عبارت مشابهی برای U_o با استفاده از معادله (۱۸-۳-۴) می‌تواند نوشته شود.

ضرایب جرم‌گرفتگی که معمولاً در طراحی تجهیزات انتقال حرارت از آنها استفاده می‌شود در مراجع مختلف توصیه شده است (N1, P3). نمونه‌هایی از ضرایب جرم‌گرفتگی در جدول ۱-۹-۴ داده شده است. به منظور تخمین اولیه اندازه‌های مبدلهای حرارتی پوسته و لوله، در جدول ۲-۹-۴، نمونه‌هایی از ضرایب کلی انتقال حرارت داده شده است. این مقادیر برای امتحان کردن نتایج روشهای طراحی ارائه شده در این فصل مفید هستند.

۱۰-۴ مقدمه‌ای بر انتقال حرارت تابشی

۱۰A-۴ مقدمه و معادله اساسی تابش

۱- طبیعت انتقال حرارت تابشی: در بخشهای قبل این فصل انتقال حرارت جابه‌جایی و انتقال حرارت هدایتی را مطالعه کردیم. در هدایت، گرما از یک قسمت از جسم به قسمت دیگر منتقل می‌شود و ماده

واسطه نیز گرم می‌شود. در انتقال حرارت جابه‌جایی، حرارت به وسیله مخلوطی واقعی از مواد و به کمک هدایت منتقل می‌شود. در انتقال حرارت تابشی محیطی که گرما از میان آن انتقال می‌یابد، معمولاً گرم نمی‌شود. انتقال حرارت تابشی، انتقال حرارت به وسیله پرتو الکترومغناطیس است.

تابش گرمایی یک نوع از پرتو الکترومغناطیسی مانند اشعه α امواج نور، اشعه گاما و غیره می‌باشد که تفاوت آنها فقط در طول موج است. تابش از قوانین نور پیروی می‌کند. در مسیر مستقیم حرکت می‌کند و می‌تواند از میان فضا یا خلاء بگذرد. تابش یک مکانیزم مهم انتقال حرارت است، خصوصاً در جایی که اختلاف دما زیاد باشد مانند کوره دیگ‌های بخار، خشک‌کننده‌های تابشی و فرهای مخصوص پخت مواد غذایی. تابش غالباً همراه با هدایت و جابه‌جایی اتفاق می‌افتد. بحث ابتدایی انتقال حرارت تابشی در این جا انجام خواهد شد، بحث بیشتر و کاملتر در بخش ۱۱-۴ آورده می‌شود.

در یک نگاه ابتدایی، مکانیزم انتقال حرارت تابشی ترکیبی از سه مرحله یا فاز جداگانه می‌باشد:

- ۱- انرژی گرمایی یک منبع گرم، مانند دیواره یک کوره در دمای T_1 ، به انرژی از نوع امواج تابشی الکترومغناطیسی تبدیل می‌شود.
- ۲- این امواج از میان فضای واسطه و در خطوط مستقیم حرکت می‌کنند و به جسم سرد در دمای T_2 ، مانند لوله‌های حاوی آبی که می‌خواهد گرم شود، برخورد می‌کنند.
- ۳- امواج الکترومغناطیسی که به جسم برخورد می‌کنند، به وسیله جسم جذب شده و به انرژی گرمایی یا گرما تبدیل می‌شوند.

جدول ۱-۹-۴. نمونه‌هایی از ضرایب جرم‌گرفتنی (N_1 و P_3)

	h_d ($W/m^2 \cdot K$)	h_d ($btu/h \cdot ft^2 \cdot ^\circ F$)
Distilled and seawater	11 350	2000
City water	5680	1000
Muddy water	1990-2840	350-500
Gases	2840	500
Vaporizing liquids	2840	500
Vegetable and gas oils	1990	350

جدول ۲-۹-۴. نمونه‌هایی از ضرایب کلی انتقال حرارت در مبدل‌های پوسته و لوله (W1, P3, H1)

	U ($W/m^2 \cdot K$)	U ($btu/h \cdot ft^2 \cdot ^\circ F$)
Water to water	1140-1700	200-300
Water to brine	570-1140	100-200
Water to organic liquids	570-1140	100-200
Water to condensing steam	1420-2270	250-400
Water to gasoline	340-570	60-100
Water to gas oil	140-340	25-60
Water to vegetable oil	110-285	20-50
Gas oil to gas oil	110-285	20-50
Steam to boiling water	1420-2270	250-400
Water to air (finned tube)	110-230	20-40
Light organics to light organics	230-425	40-75
Heavy organics to heavy organics	55-230	10-40

۲- ضریب جذب و اجسام سیاه: وقتی که گرمای تابشی (مثل امواج نور) به جسم برخورد می‌کند، بخشی از آن به وسیله جسم به شکل گرما جذب می‌شود و قسمتی از آن در فضا برگشت داده می‌شود و قسمتی ممکن است از جسم عبور کند. در بیشتر موارد در فرایندهای مهندسی، اجسام برای عبور مات هستند، بنابراین از آن صرف‌نظر می‌شود. از این رو برای اجسام مات داریم:

$$\alpha + \rho = 1.0 \quad (4-10-1)$$

که در این جا α ضریب جذب^(۱) یا جزء جذب شده و ρ ضریب انعکاس^(۲) یا جزء انعکاس یافته است. جسم سیاه^(۳) به عنوان جسمی تعریف می‌شود که همه انرژی تابشی را جذب می‌کند. بنابراین، برای یک جسم سیاه $\rho = 0$ و $\alpha = 1$ می‌باشد. در عمل جسم سیاه کامل وجود ندارد. اما یک تقریب دقیق از این نوع جسم مانند شکل ۱-۱۰-۴، روزنه کوچک در یک جسم تو خالی است. سطح داخل جسم تو خالی به وسیله زغال سیاه شده است. تابش از طریق روزنه وارد می‌شود و به دیواره انتهایی برخورد می‌کند. در آن جا بخشی جذب می‌شود و بخشی در تمام جهات منعکس می‌شود. پرتوهای منعکس شده دوباره برخورد می‌کنند و مجدداً بخشی جذب می‌شوند و همینطور فرایند ادامه پیدا می‌کند. بنابراین، ضرورتاً همه انرژی ورودی جذب می‌شود و مساحت روزنه به عنوان یک جسم سیاه کامل عمل می‌کند. سطح داخلی دیوارها زبرند و پرتوها در همه جهات متفرق می‌شوند، برخلاف آینه که در آن جا پرتوها با یک زاویه مشخص منعکس می‌شوند.

1. absorptivity
3. black body

2. reflectivity

همان طوری که قبلاً بیان شد، جسم سیاه همه انرژی تابیده شده بر آن را جذب می‌کند و هیچ چیز آن را منعکس نمی‌کند. چنین جسم سیاهی بسته به دمای آن می‌تواند پرتو تابش کند ولی هیچ چیز را منعکس نمی‌کند. نسبت توان تابشی یک سطح به توان تابشی جسم سیاه، ضریب نشر^(۱) α (۴) نامیده می‌شود و برای جسم سیاه، برابر با یک است. قانون کیرشهف بیان می‌کند که در دمای T_1 ، مقادیر α_1 و ϵ_1 برای یک سطح مشخص با هم برابر هستند. یا:

$$\alpha_1 = \epsilon_1 \quad (4-10-2)$$

معادله (۴-۱۰-۲) برای هر سطح جامد سیاه یا غیر سیاه صدق می‌کند.

۳- تابش از یک جسم و ضریب نشر: معادله اساسی انتقال حرارت تابشی از یک جسم سیاه کامل با ضریب نشر $\epsilon = 1$ به صورت زیر است:

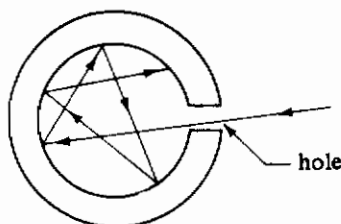
$$q = A\sigma T^4 \quad (4-10-3)$$

که q جریان گرمابرحسب وات، A سطح جسم برحسب مترمربع، σ یک ثابت که برابر $5/676 \times 10^{-8}$ برحسب $W/m^2 \cdot K^4$ و یا $0/1714 \times 10^{-8}$ برحسب $btu/h \cdot ft^2 \cdot R^4$ و T دمای جسم سیاه برحسب K یا R است. برای جسم غیر سیاه که ضریب نشر $\epsilon < 1$ دارد، توان تابشی بر اساس ϵ کاهش می‌یابد، یا:

$$q = A\epsilon\sigma T^4 \quad (4-10-4)$$

موادی که ضریب نشر کمتر از یک دارند، زمانی که ضریب نشر مستقل از طول موج است، اجسام خاکستری نامیده می‌شوند. همه مواد واقعی ضریب نشر $\epsilon < 1$ دارند.

چون ضریب نشر و ضریب جذب یک جسم در یک دما مساوی هستند، ضریب نشر همانند ضریب جذب برای سطوح صیقلی فلزات کم و برای سطح فلز اکسید شده بالاست. نمونه‌هایی از این مقادیر در جدول ۴-۱۰-۱ داده شده است که مقداری با دما تغییر می‌کنند. بیشتر مواد غیر فلزی مقادیر بالایی دارند. داده‌های بیشتری در ضمیمه ۳-۴ داده شده است.



شکل ۴-۱۰-۱. مفهوم یک جسم سیاه کامل

جدول ۴-۱۰-۱. ضریب نشر کلی سطوح مختلف

Surface	T (K)	T (°F)	Emissivity, ε
Polished aluminum	500	440	0.039
	850	1070	0.057
Polished iron	450	350	0.052
Oxidized iron	373	212	0.74
Polished copper	353	176	0.018
Asbestos board	296	74	0.96
Oil paints, all colors	373	212	0.92-0.96
Water	273	32	0.95

۴-۱۰-B تابش به یک جسم کوچک از محیط

در حالتی که یک جسم خاکستری کوچک به مساحت A_1 متر مربع و دمای T_1 در یک محیط بزرگ با دمای بالاتر T_2 قرار دارد، یک تابش خالص به جسم کوچک خواهیم داشت. جسم کوچک مقداری از تابش را بر اساس معادله (۴-۱۰-۴) به محیط منتشر می‌کند. که برابر است با $A_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4$. ضریب نشر ϵ_1 این جسم در دمای T_1 در نظر گرفته شده است. همچنین جسم کوچک مقداری از انرژی محیط در دمای T_2 را جذب می‌کند که برابر است با $A_1 \alpha_{12} \sigma T_2^4$. ضریب جذب جسم ۱ برای تابش از محیط در دمای T_2 است. مقدار α_{12} تقریباً برابر با ضریب نشر این جسم در دمای T_2 می‌باشد. بر اساس معادله استفان - بولتزمن^(۱) مقدار خالص گرمای جذب شده به این صورت است:

$$q = A_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4 - A_1 \alpha_{12} \sigma T_2^4 = A_1 \sigma (\epsilon_1 T_1^4 - \alpha_{12} T_2^4) \quad (4-10-5)$$

برای کاربردهای مهندسی معمولاً معادله (۴-۱۰-۵) با استفاده از ضریب نشر جسم کوچک در دمای T_2 ساده می‌شود. بنابراین:

$$q = A_1 \epsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4-10-6)$$

مثال ۴-۱۰-۱ تابش به لوله فلزی

یک لوله فلزی افقی اکسید شده به قطر خارجی 0.0254 m (۱ in) و طول 0.61 m (۲ ft) با دمای سطحی 588 K (600°F) در یک کوره بزرگ با دیواره آجر نسوز قرار دارد. دمای هوا در کوره 1500°F (1088 K) است. ضریب نشر لوله فلزی در دمای 1088 K برابر با 0.6 و در

دمای 588 K برابر با $0/46$ است. انتقال حرارت تابشی به لوله را بر حسب واحدهای انگلیسی و SI محاسبه کنید.

حل: چون محیط کوره در مقایسه با لوله بسیار بزرگ است، محیط حتی اگر خاکستری هم باشد، از نقطه نظر جسم کوچک جسم سیاه به نظر می‌رسد و معادله $(4-10-6)$ قابل استفاده است. با جایگزینی مقادیر داده شده در معادله $(4-10-6)$ با $0/6 = \epsilon$ در 1088 K داریم:

$$A_1 = \pi D L = \pi \times 0/0254 \times 0/61 \text{ m}^2 = \pi \times \frac{1}{12} \times 2 \text{ ft}^2$$

$$q = A_1 \epsilon \sigma (T_1^4 - T_r^4)$$

$$= (\pi \times 0/0254 \times 0/61) \times 0/6 \times (5/676 \times 10^{-8}) \times (588^4 - 1088^4)$$

$$= -2130 \text{ W}$$

$$= (\pi \times \frac{1}{12} \times 2) \times 0/6 \times (0/1714 \times 10^{-8}) \times (1060^4 - 1960^4) = -7270 \text{ btu/h}$$

مثالهای دیگری از اجسام کوچک در محیطهای بزرگ که در فرایندهای صنعتی اتفاق می‌افتد عبارتند از: یک قرص نان در یک تنور که از دیواره های اطراف تابش را دریافت می‌کند، یک بسته گوشت یا مواد غذایی که به دیواره های محفظه انجماد تابش میکند، یک قالب داغ حاوی آهن در حال سرد شدن که گرما را به محیط اتاق تابش می‌کند و یک دماسنج که در حال اندازه‌گیری دما در یک مجرای بزرگ است.

۴-۱۰C انتقال حرارت تابشی و جابه‌جایی

وقتی گرما به صورت تابشی از یک سطح انتقال می‌یابد معمولاً همراه انتقال حرارت جابه‌جایی است مگر این‌که سطح در خلاء باشد. وقتی سطح تابش‌کننده در دمای یکنواخت باشد، می‌توانیم انتقال حرارت به طریق جابه‌جایی طبیعی یا اجباری را با استفاده از روشهای ارائه شده در بخشهای قبلی این فصل، محاسبه کنیم. انتقال حرارت تابشی نیز به کمک معادله استفان-بولتزمن $(4-10-6)$ محاسبه می‌شود. پس نرخ کلی انتقال حرارت مجموع جابه‌جایی و تابش است.

همان‌طور که قبلاً بحث شد، نرخ انتقال حرارت جابه‌جایی و ضریب جابه‌جایی به صورت زیر

هستند:

$$q_{\text{conv}} = h_c A_1 (T_1 - T_2)$$

$$(4-10-7)$$

که q_{conv} نرخ انتقال حرارت جابه‌جایی برحسب وات، h_c ضریب جابه‌جایی اجباری یا طبیعی برحسب $W/m^2.K$ ، T_1 دمای سطح و T_2 دمای هوا یا محیط است. ضریب انتقال حرارت تابشی h_r برحسب $W/m^2.K$ می‌تواند به صورت زیر تعریف شود.

$$q_{rad} = h_r A_1 (T_1 - T_2) \quad (4-10-8)$$

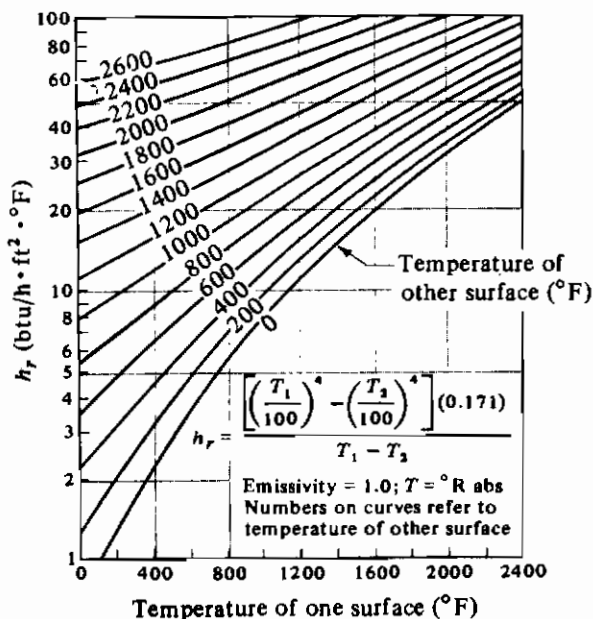
که q_{rad} نرخ انتقال حرارت تابشی برحسب وات است. انتقال حرارت کل مجموع معادلات (4-10-7) و (4-10-8) است.

$$q = q_{conv} + q_{rad} = (h_c + h_r) A_1 (T_1 - T_2) \quad (4-10-9)$$

برای به دست آوردن رابطه‌ای برای h_r معادله (4-10-6) را با (4-10-8) برابر قرار داده و آن را نسبت به h_r حل می‌کنیم.

$$h_r = \frac{\epsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{T_1 - T_2} = \epsilon (5.676) \frac{(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4}{T_1 - T_2} \quad (SI) \quad (4-10-10)$$

$$h_r = \epsilon (0.1714) \frac{(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4}{T_1 - T_2} \quad (English)$$



شکل ۴-۱۰-۲. ضریب انتقال حرارت تابشی به صورت تابعی از دما (با کسب مجوز گرفته شده از:

R. H. Perry and C. H. Chilton, Chemical Engineers' Handbook, 5th ed., New York:

(McGraw-Hill Book Company, 1973.

یک نمودار مناسب برای به دست آوردن مقادیر h_F محاسبه شده از معادله (۴-۱۰-۱۰) با $\varepsilon = 1$ بر حسب واحدهای انگلیسی در شکل ۴-۱۰-۲ داده شده است. برای استفاده از مقادیر این شکل، مقدار به دست آمده از شکل باید در ε ضرب شود تا مقدار h_F مورد استفاده در معادله (۴-۱۰-۹) به دست آید. اگر دمای هوا برابر دمای محیط T_F نباشد، معادله‌های (۴-۱۰-۷) و (۴-۱۰-۸) باید جداگانه مورد استفاده قرار گیرند و مانند معادله (۴-۱۰-۹) با یکدیگر ترکیب نمی‌شوند.

مثال ۴-۱۰-۲ جابه‌جایی و تابش از یک لوله

مثال ۴-۱۰-۱ را برای ترکیبی از تابش و جابه‌جایی طبیعی برای یک لوله افقی به طول 0.254 m مجدداً حل کنید.

حل: مساحت لوله برابر است با: $0.487 \text{ m}^2 = \pi (0.254)(0.61) = \pi \times 0.487$ برای ضریب جابه‌جایی طبیعی لوله افقی 0.254 متری از معادله ساده شده جدول ۴-۷-۲ به عنوان تقریب استفاده می‌شود، گرچه دمای فیلم خیلی زیاد است.

$$h_c = 1/32 \times \left(\frac{\Delta T}{D}\right)^{1/4}$$

با جایگزینی مقادیر معلوم داریم:

$$h_c = 1/32 \times \left(\frac{1088 - 588}{0.254}\right)^{1/4} = 15/64 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

با استفاده از معادله (۴-۱۰-۱۰) و $\varepsilon = 0.6$ داریم:

$$h_F = 0.6 \times 5/676 \times \frac{(1088/100)^4 - (588/100)^4}{1088 - 588} = 87/3 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

با جایگزینی در معادله (۴-۱۰-۹) داریم:

$$q = (h_c + h_F) A_1 (T_1 - T_F) = (15/64 + 87/3) \times 0.487 \times (588 - 1088) = -2507 \text{ W}$$

بنابراین، هنگامی که جابه‌جایی طبیعی نیز در نظر گرفته شود اتلاف گرمایی 2130 W مربوط به تابش به 2507 W افزایش پیدا می‌کند. در این حالت به دلیل اختلاف دمای زیاد، تابش مهمترین عامل است.

Green و Perry (P3, pp: ۱۰-۱۴) جدول مناسبی از ضرایب ترکیب جابه‌جایی طبیعی و تابش برای لوله‌های فولادی افقی اکسید شده به صورت تابعی از قطر خارجی و اختلاف دما ارائه کرده‌اند. ضرایب لوله‌های عایق‌بندی شده و بدون عایق تقریباً یکی هستند (بجز آنهایی که دمای سطح کمتری دارند که مربوط به لوله‌های عایق‌بندی شده هستند) چون ضریب نشر عایق در حدود ضریب نشر لوله‌های فولادی اکسید شده و تقریباً برابر $0/8$ است. جزئیات بیشتر بحث تابش در بخش ۴-۱۱ ارائه خواهد شد.

۴-۱۱ اصول انتقال حرارت تابشی پیشرفته

۴-۱۱A مقدمه و طیف تابش

۱- مقدمه: این بخش تعدادی از اصول بنیانی و چند موضوع پیشرفته در مورد تابش را که در بخش ۴-۱۰ بحث نشده است مورد بررسی قرار می‌دهد. تبادل تابش بین دو سطح به اندازه، شکل و جهت‌گیری آنها نسبت به هم و همچنین به ضرایب نشر و جذب آنها بستگی دارد. در حالت‌هایی که بررسی می‌شود، سطوح توسط محیط‌های غیرجاذب مانند هوا از هم جدا می‌شوند. وقتی گازهایی مثل CO_2 و H_2O بین دو صفحه باشند، مقداری از انرژی تابش شده توسط گازها جذب می‌شود که در این بحث در نظر گرفته نمی‌شود.

۲- طیف تابشی و تابش حرارتی: انرژی می‌تواند به شکل امواج الکترومغناطیسی منتقل شود و این امواج با سرعت نور حرکت می‌کنند. اجسام ممکن است شکل‌های مختلف انرژی تابشی را منتشر کنند، مانند اشعه‌های گاما، انرژی گرمایی، امواج رادیویی و غیره. در حقیقت طیف پیوسته‌ای از پرتوهای الکترومغناطیسی وجود دارد. طیف الکترومغناطیسی به طول موج‌های متفاوتی تقسیم می‌شود مانند اشعه‌های کیهانی ($m < 10^{-13}$), اشعه گاما ($10^{-10} m < \lambda < 10^{-13}$), تابش گرمایی ($m < 10^{-4} < \lambda < 10^{-7}$) و مانند آن. پرتو الکترومغناطیسی که فقط به خاطر دمای جسم نشر دهنده^(۱) تولید شده است، تابش گرمایی^(۲) نامیده می‌شود و بین طول موج‌های 10^{-7} و 10^{-4} متر است. این بخش از طیف الکترومغناطیسی در انتقال حرارت به کمک تابش از اهمیت زیادی برخوردار است. امواج الکترومغناطیسی با طول موج بین $10^{-7} \times 3/8$ تا $10^{-7} \times 7/6$ متر، پرتو مرئی نامیده می‌شوند که می‌توانند با چشم انسان دیده شوند. این پرتوهای مرئی در محدوده تابش گرمایی هستند. وقتی سطوح مختلف تا دماهای یکسان گرم می‌شوند همه آنها نمی‌توانند مقدار یکسان انرژی

تابش گرمایی را نشر دهند یا جذب کنند. جسمی که حداکثر جذب و نشر مقدار انرژی در آن دما را دارد، جسم سیاه نامیده می‌شود. یک جسم سیاه جسم استاندارد است که اجسام دیگر با آن مقایسه می‌شوند.

۳- قانون پلانک و توان نشر: وقتی یک جسم سیاه تا دمای T گرم می‌شود، فوتونها از سطح که توزیع انرژی مشخصی انرژی دارد منتشر می‌شوند. معادله پلانک توان نشر تک رنگ $E_{B\lambda}$ برحسب W/m^2 در دمای T برحسب کلورین را با طول موج λ برحسب متر، به صورت زیر ارتباط می‌دهد.

$$E_{B\lambda} = \frac{3.7418 \times 10^{-16}}{\lambda^5 [e^{1.4388 \cdot 10^{-2}/\lambda T} - 1]} \quad (4-11-1)$$

در شکل ۴-۱۱-۱، نمودار معادله (۴-۱۱-۱) رسم شده است و نشان می‌دهد که انرژی داده شده با دما افزایش می‌یابد. هم چنین در یک دمای معلوم T ، توان نشر به مقدار حداکثر خود در یک طول موج می‌رسد و با افزایش دما کاهش می‌یابد. در یک دمای معلوم تابش منتشر شده به صورت یک طیف با طول موجهای مختلف پخش می‌شود. طیف نور مرئی در ناحیه با طول موج پایین قرار می‌گیرد. خورشید دمایی در حدود ۵۸۰۰ کلورین دارد و طیف خورشیدی این دامنه مرئی را در بر می‌گیرد.

در یک دمای معلوم، طول موجی که در آن توان نشر یک جسم سیاه حداکثر است می‌تواند به کمک دیفرانسیل‌گیری از معادله (۴-۱۱-۱) نسبت به λ در دمای ثابت T و مساوی با صفر قرار دادن آن به دست آید. نتیجه به صورت زیر است و به قانون جابه‌جایی وین^(۱) معروف است.

$$\lambda_{max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (4-11-2)$$

مکان هندسی مقادیر حداکثر در شکل ۴-۱۱-۱ نشان داده شده است.

۴- قانون استفان بولتزمن: توان نشر کل برابر با کل مقدار انرژی تابشی در واحد سطح است که از یک سطح با دمای T منتشر می‌شود و دارای تمام طول موجهاست. برای یک جسم سیاه توان نشر کل با انتگرال‌گیری از معادله (۴-۱۱-۱) در دمای معلوم T ، به ازای تمام طول موجها به دست می‌آید و برابر با سطح زیر نمودار در شکل ۴-۱۱-۱ است.

$$E_B = \int_0^{\infty} E_{B\lambda} d\lambda \quad (4-11-3)$$

در نتیجه داریم:

$$E_B = \sigma T^4 \quad (4-11-4)$$

این نتیجه قانون استفان - بولتزمن است که در آن $\sigma = 5.676 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ می‌باشد. واحد E_B به صورت W/m^2 است.

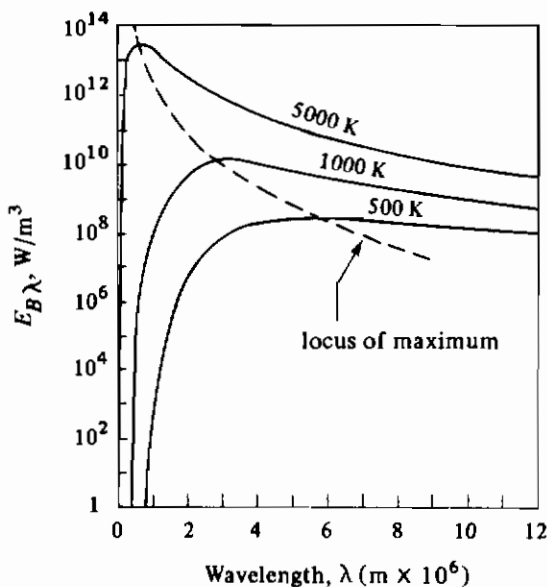
۵- ضریب نشر و قانون کیرشهف: یک خاصیت مهم در تابش، ضریب نشر یک سطح می‌باشد. ضریب نشر (ϵ) یک سطح به صورت کل انرژی منتشر شده از سطح مورد نظر به کل انرژی منتشر شده از یک جسم سیاه در همان دما تعریف می‌شود.

$$\epsilon = \frac{E}{E_B} = \frac{E}{\sigma T^4} \quad (4-11-5)$$

چون جسم سیاه بیشترین تابش را منتشر می‌کند، همیشه $\epsilon < 1$ است.

می‌توان رابطه بین ضریب جذب α_1 و ضریب نشر ϵ_1 یک ماده را با قرار دادن این ماده در یک محیط همدم و اجازه دادن تا رسیدن به تعادل گرمایی محیط و جسم و رسیدن به دمای یکسان به دست آورد. اگر G مقدار انرژی بازتابش شده به جسم باشد، انرژی جذب شده باید با انرژی منتشر شده برابر باشد.

$$\alpha_1 G = E_1 \quad (4-11-6)$$



شکل ۴-۱۱-۱. توزیع طیفی کل انرژی منتشر شده توسط یک جسم سیاه در دماهای مختلف آن جسم

اگر این جسم با یک جسم سیاه هم اندازه جایگزین شود، پس از رسیدن به حالت تعادل داریم:

$$\alpha_2 G = E_B \quad (4-11-7)$$

با تقسیم معادله (۴-۱۱-۶) بر (۴-۱۱-۷) داریم:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{E_1}{E_B} \quad (4-11-8)$$

اما برای یک جسم سیاه $\alpha_2 = 1$ است. بنابراین، چون $E_1/E_B = \epsilon_1$ داریم:

$$\alpha_1 = \frac{E_1}{E_B} = \epsilon_1 \quad (4-11-9)$$

این، قانون کیرشهف است و که بیان می‌کند که برای هر جسم در تعادل گرمایی $\alpha = \epsilon$ است. وقتی جسم در حال تعادل با محیطش نیست این نتیجه معتبر نیست.

۶- مفهوم جسم خاکستری^(۱): یک جسم خاکستری سطحی است که برای آن خواص تکرنگها در تمام طول موجها ثابت هستند. برای یک سطح خاکستری داریم:

$$\epsilon_\lambda = \text{const.}, \quad \alpha_\lambda = \text{const.} \quad (4-11-10)$$

بنابراین، ضریب جذب کل α و ضریب جذب تکرنگ α_λ برای یک سطح خاکستری با هم برابرند. به همین ترتیب ϵ و ϵ_λ نیز برابرند.

$$\alpha = \alpha_\lambda, \quad \epsilon = \epsilon_\lambda \quad (4-11-11)$$

با اعمال قانون کیرشهف برای جسم خاکستری داریم $\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda$ و سپس داریم:

$$\alpha = \epsilon \quad (4-11-12)$$

در نتیجه برای یک جسم خاکستری ضریب جذب کل و ضریب نشر کل برابر هستند حتی اگر جسم در تعادل گرمایی با محیط نباشد.

اجسام خاکستری در عمل وجود خارجی ندارند و مفهوم جسم خاکستری یک حالت ایده‌آل است. ضریب جذب یک سطح واقعی با طول موج پرتو تابیده به آن تغییر می‌کند. محاسبات مهندسی اغلب با دقت قابل قبول می‌توانند بر مبنای فرض جسم خاکستری انجام شوند. α حتی با وجود تغییر در λ پرتو تابیده شده، ثابت فرض می‌شود. همچنین در سیستمهای واقعی، سطوح مختلف ممکن است در دماهای متفاوتی باشند. در این موارد، α برای یک سطح براساس تعیین ضریب نشر در دمای سطح دیگر یا سطح نشردهنده، و نه در دمای واقعی خود سطح، به دست می‌آید. چون این دمایی است که سطح

جذب‌کننده، در حالت تعادل گرمایی بین سطح جذب‌کننده و سطح نشردهنده، به آن خواهد رسید. دمای سطح جذب‌کننده تأثیر کمی روی ضریب جذب دارد.

۴-۱۱B به دست آوردن ضریب دید^(۱) در تابش برای اجسام با شکلهای هندسی متفاوت

۱- مقدمه: مفاهیم و تعاریف ارائه شده در بخش ۴-۱۱A به عنوان پایه این بحث کافی می باشد بطوری که تبادل تابشی خالص بین سطوح را می توان تعیین کرد. اگر دو سطح طوری قرار گرفته باشند که انرژی تابشی بتواند بین آنها مبادله شود، یک جریان خالص انرژی از سطح گرمتر به سطح سردتر برقرار می شود. اندازه، شکل و جهت‌گیری دو سطح یا مجموعه سطوح تابش‌کننده، عواملی هستند که برای تعیین نرخ خالص جریان گرمایی بین صفحات مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای آسان‌تر شدن بحث، فرض می‌کنیم که سطوح به وسیله یک محیط شفاف و غیر جاذب مانند هوا از یکدیگر جدا شوند. این فرض برای بسیاری از استفاده‌های مهندسی مناسب است. اما، در مواردی مانند یک کوره، حضور CO_۲ و بخار آب انجام چنین فرضی را غیر ممکن می‌کند زیرا این مواد ضریب جذب بالایی دارند.

ابتدا ساده‌ترین شکل هندسی، یعنی تابش بین سطوح موازی نامحدود را در نظر می‌گیریم. این فرض اشاره می‌کند که اثرات لبه‌ها که در مورد سطوح محدود وجود دارد در اینجا حذف می‌شود. ابتدا ساده‌ترین حالت که در آن سطوح اجسام سیاه هستند بررسی می‌شود و سپس شکلهای هندسی پیچیده‌تر و اجسام خاکستری مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۲- ضریب دید برای سطوح موازی، نامحدود و سیاه: اگر دو سطح موازی، نامحدود و سیاه در دماهای T_۱ و T_۲ به یکدیگر تابش کنند، سطح ۱ تابشی به اندازه σT_1^4 را به سطح ۲ نشر می‌دهد که همه آن جذب می‌شود. همچنین سطح ۲ تابشی به میزان σT_2^4 را به سطح ۱ نشر می‌دهد که همه آن جذب می‌شود. بنابراین برای سطح ۱، مقدار خالص تابش از سطح ۱ به سطح ۲ برابر است با:

$$q_{12} = A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (۴-۱۱-۱۳)$$

در این حالت تمام تابش از سطح ۱ به سطح ۲، به وسیله سطح ۲ دریافت شده است. F_{۱۲} جزئی از تابش خروجی از سطح ۱ است که به وسیله سطح ۲ جذب شده است و برابر با یک است. ضریب F_{۱۲} ضریب دید هندسی یا ضریب دید نامیده می‌شود. بنابراین:

$$q_{12} = F_{12} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (۴-۱۱-۱۴)$$

که در این جا F_{12} جزئی از تابش خروجی از سطح ۱ در تمام جهات است که به وسیله سطح ۲ جذب می شود. همچنین:

$$q_{21} = F_{21} A_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4-11-15)$$

در حالت صفحات موازی، $F_{12} = F_{21} = 1$ است و برای ساده شدن کلمه هندسی حذف خواهد شد.

۳- ضریب دید برای سطوح خاکستری نامحدود و موازی: اگر هر دو سطح موازی A_1 و A_2 خاکستری باشند و دارای ضرایب نشر و جذب $\epsilon_1 = \alpha_1$ و $\epsilon_2 = \alpha_2$ باشند، می توانیم به این ترتیب عمل کنیم: چون هر کدام از سطوح از دیدگاه دیگری شفاف است، ضریب دید مساوی با یک است. در واحد زمان، سطح A_1 مقدار $A_1 \sigma T_1^4$ را به A_2 می تاباند. جزء ϵ_2 از این مقدار (که در این حالت $\epsilon_2 = \alpha_2$) جذب می شود.

$$\text{absorbed by } A_2 = \epsilon_2 (\epsilon_1 A_1 \sigma T_1^4) \quad (4-11-16)$$

همچنین جزء $(1 - \epsilon_2)$ یا مقدار $(1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 A_1 \sigma T_1^4)$ به سمت A_1 بازتابش می شود. از این مقدار، سطح A_1 جزء $(1 - \epsilon_1)$ یا مقدار $(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 A_1 \sigma T_1^4)$ را به A_2 برگشت می دهد. سطح A_2 جزء ϵ_2 را جذب می کند یا این که:

$$\text{absorbed by } A_2 = \epsilon_2 (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 A_1 \sigma T_1^4) \quad (4-11-17)$$

مقداری که از A_2 به سمت A_1 منعکس می شود، برابر با $(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 A_1 \sigma T_1^4)$ است. سپس، A_1 جزء ϵ_1 از این مقدار را جذب می کند و مقدار $(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 A_1 \sigma T_1^4)$ را به A_2 برمی گرداند. سطح A_2 مقدار زیر را جذب می کند:

$$\text{absorbed by } A_2 = \epsilon_2 (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 A_1 \sigma T_1^4) \quad (4-11-18)$$

این روند ادامه پیدا میکند و مقدار کل تابش جذب شده توسط A_2 مجموع معادلات (۴-۱۱-۱۶)، (۴-۱۱-۱۷)، (۴-۱۱-۱۸) و مانند آن است.

$$q_{1-2} = A_1 \sigma T_1^4 [\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2) + \epsilon_1 \epsilon_2 (1 - \epsilon_1)^2 (1 - \epsilon_2)^2 + \dots] \quad (4-11-19)$$

نتیجه یک سری هندسی است (M1):

$$q_{1-2} = A_1 \sigma T_1^4 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{1 - (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)} = A_1 \sigma T_1^4 \frac{1}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} \quad (4-11-20)$$

با تکرار مراحل بالا برای مقدار تابش جذب شده توسط سطح A_1 که از سطح A_2 می آید:

$$q_{2-1} = A_1 \sigma T_2^4 \frac{1}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} \quad (4-11-21)$$

تابش خالص تفاوت بین معادلات (۴-۱۱-۲۰) و (۴-۱۱-۲۱) است.

$$q_{12} = A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \frac{1}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} \quad (4-11-22)$$

اگر در اجسام سیاه $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ باشد، معادله (۴-۱۱-۲۲) به معادله (۴-۱۱-۱۳) تبدیل می‌شود.

مثال ۴-۱۱-۱ تابش بین سطوح موازی

دو سطح خاکستری موازی که خیلی بزرگ هستند دارای ضریب نشر $\epsilon_1 = 0.8$ و $\epsilon_2 = 0.7$ می‌باشند. سطح ۱ در دمای 1100°F ($866/5 \text{ K}$) و سطح ۲ در 600°F است. با استفاده از سیستم واحدهای انگلیسی و SI به موارد زیر پاسخ دهید:

الف - مقدار تابش خالص از سطح ۱ به ۲ چقدر است؟

ب - اگر هر دو سطح سیاه باشند، تابش خالص چقدر است؟

حل: در قسمت (الف) از معادله (۴-۱۱-۲۲) استفاده می‌کنیم و با جایگذاری مقادیر معلوم داریم:

$$\begin{aligned} \frac{q_{12}}{A_1} &= \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} = (0.1714 \times 10^{-8}) \times \frac{(1100 + 460)^4 - (600 + 460)^4}{1/0.8 + 1/0.7 - 1} \\ &= 4750 \text{ btu/h.ft}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{q_{12}}{A_1} = (5/676 \times 10^{-8}) \times \frac{(866/5)^4 - (588/8)^4}{1/0.8 + 1/0.7 - 1} = 15010 \text{ W/m}^2$$

برای سطوح سیاه در قسمت (ب) از معادله (۴-۱۱-۱۳) استفاده می‌کنیم،

$$q = 7960 \text{ btu/h.ft}^2 \quad \text{یا} \quad 25110 \text{ W/m}^2$$

توجه کنید هنگامی که سطوحی با ضریب نشر کمتر از یک مورد استفاده قرار می‌گیرند کاهش زیادی در مقدار تابش به وجود می‌آید.

مثال ۴-۱۱-۱ تأثیر زیاد ضرایب نشر کمتر از یک در تابش را نشان می‌دهد. از این حقیقت برای

کاهش اتلاف انرژی تابشی یا گرفتن انرژی تابشی بیشتر از یک سطح توسط سطوحی به عنوان سپر تابشی استفاده می‌شود. به عنوان مثال تبادل انرژی تابشی بین دو سطح موازی با ضریب نشر ϵ در دماهای T_1 و T_2 بر اساس معادله (۴-۱۱-۲۲) به صورت زیر است:

$$\frac{(q_{12})_0}{A} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{2/\epsilon - 1} \quad (4-11-23)$$

زیر نویس ۵ نشان می‌دهد که هیچ سطحی در فضای بین دو سطح وجود ندارد. فرض کنید یک یا چند سطح تابشی بین سطوح اصلی قرار دهیم. می‌توان نشان داد که:

$$\frac{(q_{12})_N}{A} = \frac{1}{N+1} \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{2/\epsilon - 1} \quad (4-11-24)$$

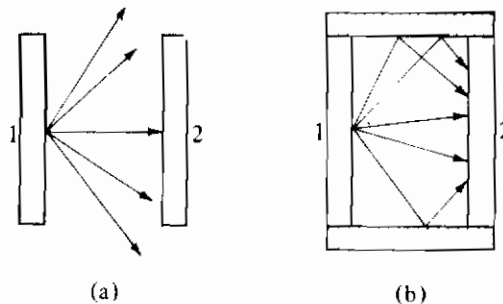
که در اینجا N تعداد سطوح تابشی یا تعداد سپرها بین سطوح اصلی است. بنابراین، با استفاده از این سپرها کاهش عمده‌ای در اتلاف انرژی تابشی بوجود خواهد آمد.

۴- به دست آوردن معادله کلی ضریب دید بین اجسام سیاه. تابش بین دو سطح سیاه موازی و محدود را مطابق شکل ۲a-۱۱-۴ در نظر بگیرید. به دلیل این که سطوح نامحدود نیستند، بخشی از تابش از سطح ۱ به سطح ۲ برخورد نمی‌کند و برعکس. بنابراین، تابش مبادله شده خالص بین دو صفحه کمتر است زیرا مقداری از آن به محیط داده می‌شود. F_{12} جزئی از تابش خروجی از سطح ۱ در تمام جهات است که سطح ۲ را قطع می‌کند و باید برای هر شکل هندسی به وسیله در نظر گرفتن المانهای سطح دیفرانسیلی و انتگرال‌گیری روی کل سطح تعیین شود.

قبل از این که بتوانیم رابطه کلی برای ضریب دید بین دو سطح محدود را به دست آوریم، باید دو کمیت را تعریف کنیم: زاویه فضایی^(۱) و شدت تابش^(۲). زاویه فضایی ω یک کمیت بدون واحد است که در هندسه فضایی معیاری برای یک زاویه است. در شکل ۳a-۱۱-۴ زاویه دیفرانسیلی $d\omega_1$ برابر با نسبت تصویر قائم dA_2 به مجذور فاصله بین نقطه P و سطح dA_1 می‌باشد.

$$d\omega_1 = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2} \quad (4-11-25)$$

واحد زاویه فضایی استرادیان یا sr است. برای یک نیمکره مقدار sr برابر با 2π است.



شکل ۲-۱۱-۴. تابش بین دو سطح سیاه: (a) دو صفحه به تنهایی (b) دو صفحه توسط دیواره‌های بازتابنده مقاوم به هم متصل هستند.

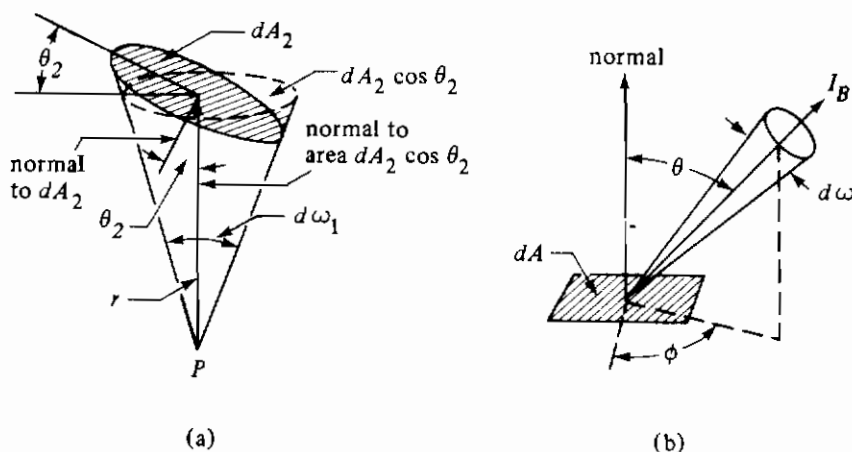
شدت یک تابش یک جسم سیاه (I_B) برابر با نرخ تابش منتشر شده در واحد سطح تصویر شده در جهت عمود بر صفحه و در واحد زاویه فضایی در یک جهت مشخص مطابق شکل ۳b-۱۱-۴ می باشد. تصویر dA روی خطی که مراکز را به هم وصل می کند برابر با $dA \cos \theta$ می باشد.

$$I_B = \frac{dq}{dA \cos d\omega} \quad (4-11-26)$$

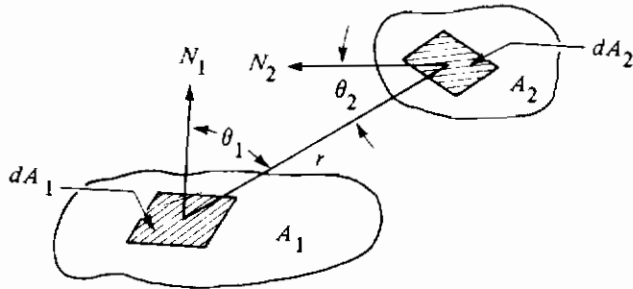
که q بر حسب W و I_B بر حسب $W/m^2 \cdot sr$ است. فرض می کنیم که جسم سیاه سطحی باشد که با شدت مساوی در همه جهات تابش خود را منتشر می کند، یعنی $I = \text{constant}$ است. توان انتشار^(۱) E_B که از سطح یک جسم سیاه خارج می شود توسط انتگرال گیری روی کل زوایای ایجاد شده توسط نیمکره ای که روی این سطح را می پوشاند تعیین می شود. نتیجه نهایی به صورت زیر است:

$$E_B = \pi I_B \quad (4-11-27)$$

که E_B بر حسب W/m^2 است.



شکل ۳-۱۱-۴. شکل هندسی یک زاویه فضایی و شدت تابش: (a) شکل هندسی زاویه فضایی (b) شدت تابش از سطح انتشار dA



شکل ۴-۱۱-۴. المان سطح برای ضریب تابش

به منظور تعیین نرخ انتقال حرارت تابشی بین دو سطح سیاه باید به طور کلی جزئی از گرمای تابش شده از یک سطح که به سطح دیگر می‌رسد را تعیین کنیم. فقط با استفاده از سطوح سیاه، حالت نشان داده شده در شکل ۴-۱۱-۴ را در نظر می‌گیریم که در آن انرژی تابش شده بین المانهای سطح dA_1 و dA_2 مبادله می‌شود. خط r فاصله بین سطوح و θ_1 و θ_2 زاویه‌های بین این خط و خطوط عمود بر دو سطح می‌باشد. نرخ انرژی منتشر شده که سطح dA_1 را در جهت مشخص شده توسط زاویه θ_1 ترک می‌کند برابر با $I_{B1} \cos \theta_1 dA_1$ است. نرخ انرژی که از dA_1 خارج می‌شود و به سطح dA_2 می‌رسد توسط معادله (۴-۱۱-۲۸) داده می‌شود:

$$dq_{1 \rightarrow 2} = I_{B1} dA_1 \cos \theta_1 d\omega_1 \quad (4-11-28)$$

که $d\omega_1$ زاویه فضایی است که به وسیله dA_2 قطع می‌شود و از سطح dA_1 دیده می‌شود. از ترکیب معادلات (۴-۱۱-۲۵) و (۴-۱۱-۲۸) داریم:

$$dq_{1 \rightarrow 2} = \frac{I_{B1} dA_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{r^2} \quad (4-11-29)$$

از معادله (۴-۱۱-۲۷)، $I_{B1} = \frac{E_{B1}}{\pi}$ با جایگذاری $\frac{E_{B1}}{\pi}$ به جای I_{B1} در معادله (۴-۱۱-۲۹) داریم:

$$dq_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{B1} \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (4-11-30)$$

انرژی که از سطح dA_2 خارج شده و به سطح dA_1 می‌رسد برابر است با:

$$dq_{2 \rightarrow 1} = \frac{E_{B2} \cos \theta_2 \cos \theta_1 dA_2 dA_1}{\pi r^2} \quad (4-11-31)$$

با جایگذاری σT_1^4 به جای E_{B1} و σT_2^4 به جای E_{B2} از معادله (۴-۱۱-۴) و کم کردن معادلات (۴-۱۱-۳۰) و (۴-۱۱-۳۱) از یکدیگر برای محاسبه جریان خالص گرمایی داریم:

$$dq_{12} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (4-11-32)$$

انتگرال گیری دوگانه روی سطوح A_1 و A_2 مقدار خالص جریان گرمایی بین سطوح محدود درخواهد داد،

$$q_{12} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (4-11-33)$$

معادله (۴-۱۱-۳۳) به صورت زیر نیز می تواند نوشته شود:

$$q_{12} = A_1 F_{12} \sigma(T_1^4 - T_2^4) = A_2 F_{21} \sigma(T_1^4 - T_2^4) \quad (4-11-34)$$

که در اینجا F_{12} ضریب دید است و مشخص کننده جزئی از کل تابش خارج شده از A_1 است که به A_2 برخورد می کند و همچنین F_{21} جزئی از کل تابش خروجی از A_2 است که به A_1 برخورد می کند. رابطه زیر نیز موجود است:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (4-11-35)$$

رابطه فوق برای سطوح سیاه و غیر سیاه برقرار است. بنابراین، ضریب دید F_{12} به صورت زیر می باشد:

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (4-11-36)$$

مقدار ضریب دید برای اشکال مختلف هندسی و یا ترکیبی از آنها می تواند محاسبه شود.

۵- ضرایب دید بین اجسام سیاه با شکلهای هندسی مختلف: تعدادی از روابط اساسی بین ضرایب دید در زیر داده شده است:

این رابطه تکرار معادله (۴-۱۱-۳۵) است که به صورت زیر می باشد:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (4-11-35)$$

این رابطه می تواند برای هر دو سطح A و B به کار رود:

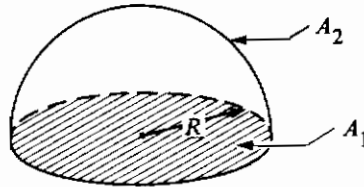
$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (4-11-37)$$

اگر سطح A_1 فقط بتواند سطح A_2 را ببیند، آنگاه: $F_{12} = 1$.

اگر سطح A_1 سطوح A_2 ، A_3 و... را ببیند و این سطوح محیط نامحدودی را تشکیل بدهند، رابطه زیر برای این محیط برقرار است.

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} + \dots = 1.0 \quad (4-11-38)$$

اگر سطح A_1 نتواند خودش را ببیند (سطح صاف یا محدب باشد) آن گاه: $F_{11} = 0$.



شکل ۴-۱۱-۵. تبادل تابشی بین یک سطح صاف و یک نیمکره در مثال ۴-۱۱-۲

مثال ۴-۱۱-۲ ضریب دید از یک سطح به یک نیمکره

ضرایب دید بین سطح صاف A_1 که به وسیله نیمکره A_2 پوشیده شده و در شکل ۴-۱۱-۵ نشان داده شده است را تعیین کنید.

حل: به دلیل این که سطح A_1 فقط می تواند A_2 را ببیند، ضریب دید $F_{12} = 1$ است. با استفاده از معادله (۴-۱۱-۳۵) داریم:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (4-11-35)$$

سطح $A_1 = \pi R^2$ و $A_2 = 2\pi R^2$ است. با جایگذاری در معادله (۴-۱۱-۳۵) و حل آن نسبت به F_{21} داریم:

$$F_{21} = F_{12} \frac{A_1}{A_2} = 1 \times \frac{\pi R^2}{2\pi R^2} = \frac{1}{2}$$

با استفاده از معادله (۴-۱۱-۳۸) برای سطح A_1 ، $F_{11} = 1 - F_{12} = 1 - 1 = 0$. همچنین با نوشتن معادله (۴-۱۱-۳۸) برای سطح A_2 داریم:

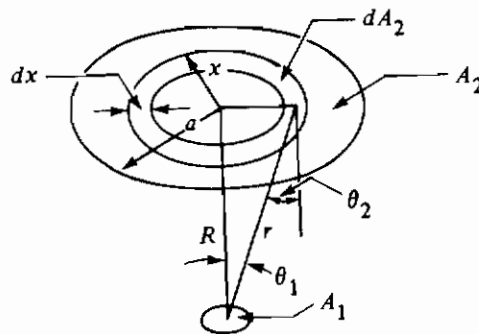
$$F_{22} + F_{21} = 1 \quad (4-11-39)$$

با حل آن نسبت به F_{22} داریم:

$$F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۴-۱۱-۳ تابش بین دیسکهای موازی

در شکل ۴-۱۱-۶ یک دیسک کوچک به مساحت A_1 با دیسک بزرگتری به مساحت A_2 موازی است و خطی که از مرکز A_1 و A_2 می گذرد، بر این دو سطح عمود است. فاصله بین مراکز دو سطح برابر با R و شعاع سطح A_2 برابر a می باشد. ضریب دید برای انتقال حرارت تابشی از A_1 به A_2 را تعیین کنید.



شکل ۴-۱۱-۶. ضرب دید برای تابش از یک المان کوچک به یک دیسک موازی
با آن در مثال ۴-۱۱-۳

حل: سطح دیفرانسیلی که برای A_2 در نظر گرفته می‌شود، حلقه‌ای است به شعاع x به طوری که
 $dA_2 = 2\pi x dx$

زاویه‌های θ_1 و θ_2 با هم برابرند. با استفاده از معادله (۴-۱۱-۳۶) داریم:

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 (2\pi x dx)}{\pi r^2}$$

در این حالت، سطح A_1 در مقایسه با A_2 بسیار کوچک است، بنابراین dA_1 پس از انتگرال‌گیری به صورت A_1 در می‌آید و بقیه عبارت‌های داخل انتگرال ثابت فرض می‌شوند. با توجه به شکل هندسی ارائه شده،

$$\cos \theta_1 = R / (R^2 + x^2)^{1/2} \quad \text{و} \quad r = (R^2 + x^2)^{1/2}$$

با قرار دادن این روابط در معادله مربوط به F_{12} خواهیم داشت:

$$F_{12} = \int_0^a \frac{2R^2 x dx}{(R^2 + x^2)^2}$$

و پس از انتگرال‌گیری داریم:

$$F_{12} = \frac{a^2}{R^2 + a^2}$$

انتگرال‌گیری از معادله (۴-۱۱-۳۶) برای اشکال هندسی مختلف انجام شده است و مقادیر F_{12}

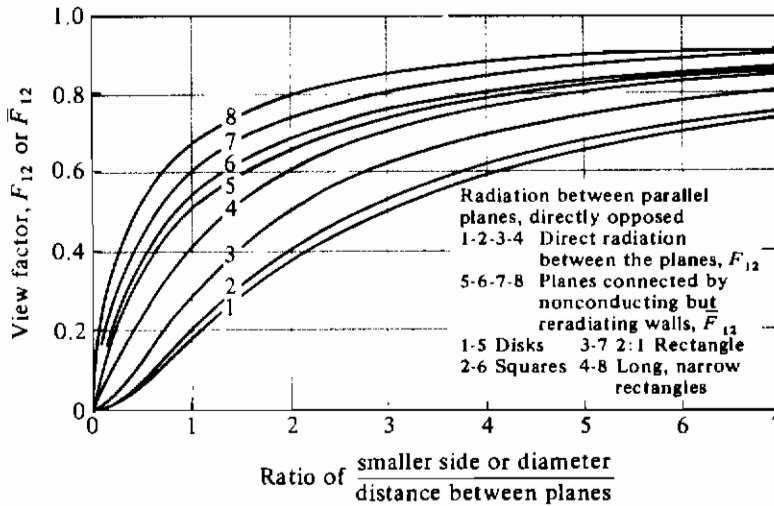
به صورت جدول موجود است. بنابراین،

$$q_{12} = F_{12} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) = F_{21} A_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4-11-34)$$

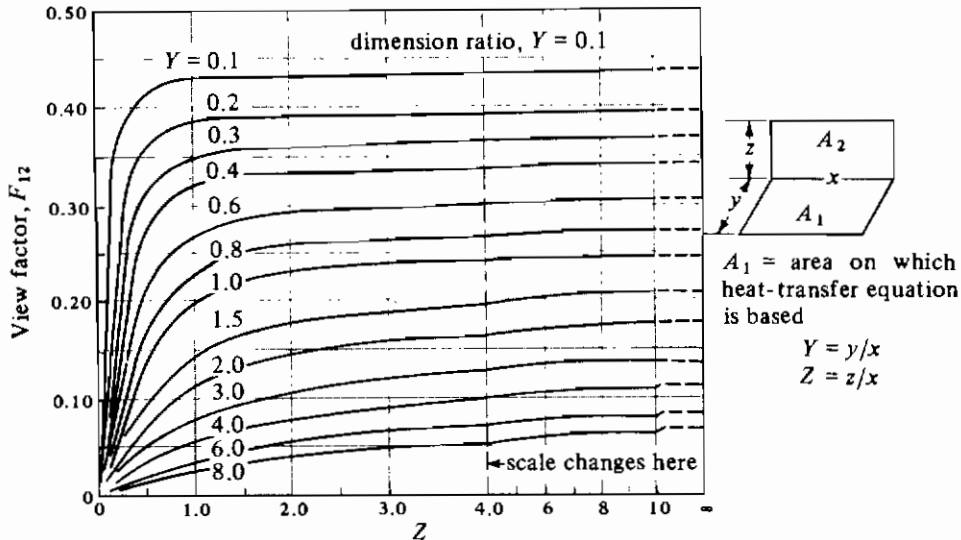
که F_{12} جزئی از انرژی منتشر شده از A_1 است که به A_2 برخورد می‌کند و F_{21} جزئی است که از A_2 به A_1 می‌رسد. چون شار گرمایی از ۱ به ۲ با شار گرمایی از ۲ به ۱ باید برابر باشد، معادله (۴-۱۱-۳۴) به معادله (۴-۱۱-۳۵) تبدیل می‌شود.

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (4-11-35)$$

بنابراین، هر سطحی انتخاب شود غالباً ضریب دید آن به راحتی تعیین می‌شود. به عنوان مثال ضریب دید F_{12} برای یک سطح کوچک A_1 که بطور کامل به وسیله یک سطح بزرگ A_2 احاطه می‌شود برابر با یک است، چون همه تابش از سطح A_1 به سطح A_2 برخورد می‌کند. در شکل ۴-۱۱-۷ ضریب دید F_{12} بین صفحه‌های موازی داده شده است و در شکل ۴-۱۱-۸ نیز ضرایب دید برای دو صفحه مستطیلی مجاور و عمود بر هم داده شده است. ضرایب دید برای دیگر اشکال هندسی در منابع دیگر آمده است (H1,K1,P3,W1).



شکل ۴-۱۱-۷. ضریب دید بین صفحات موازی که مستقیماً در مقابل هم قرار دارند. (با کسب مجوز گرفته شده از:



شکل ۸-۱۱-۴. ضریب دید مستطیلهای مجاور و عمود بر هم (با کسب مجوز گرفته شده از: (H. C. Hottel, Mech. Eng., 52, 699 (1930)

۴-۱۱-۴ ضرایب دید هنگامی که سطوح توسط دیواره‌های بازتابنده^(۱) به هم وصل شده‌اند

اگر دو سطح سیاه A_1 و A_2 به وسیله سطوح غیرهادی^(۲) ولی بازتابنده به یکدیگر متصل شوند، مانند شکل ۲ب-۱۱-۴، کسر بزرگی از تابش سطح ۱ توسط سطح ۲ دریافت می‌شود. این ضریب شکل \bar{F}_{12} نام دارد. مثال معمول این حالت، دو سطح هستند که به وسیله دیواره‌های محیط مانند دیواره‌های یک کوره به هم متصل شده‌اند. معادله کلی برای این حالت با در نظر گرفتن یک دمای بازتابش یکنواخت برای دو منبع تابشی A_1 و A_2 که مقعر نیستند و خودشان را نمی‌بینند، به صورت زیر به دست آمده است.

$$\bar{F}_{12} = \frac{A_2 - A_1 F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2A_1 F_{12}} = \frac{1 - (A_1/A_2)F_{12}^2}{A_1/A_2 + 1 - 2(A_1/A_2)F_{12}} \quad (4-11-40)$$

همچنین مانند قبل،

$$A_1 \bar{F}_{12} = A_2 \bar{F}_{21} \quad (4-11-41)$$

$$q_{12} = \bar{F}_{12} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4-11-42)$$

ضریب \bar{F}_{12} برای صفحات موازی در شکل ۷-۱۱-۴ داده شده است و برای دیگر اشکال هندسی از معادله (۴-۱۱-۳۶) محاسبه می‌شود. ضرایب دید F_{12} و \bar{F}_{12} برای لوله‌های موازی که در مجاورت یک دیواره، مثلاً دیواره کوره قرار دارند و نیز در دماهای متغیر دیواره بازتابنده را می‌توانید در مراجع دیگر ببینید (M1, P3). اگر دیواره بازتابنده وجود نداشته باشد:

$$F_{12} = \bar{F}_{12} \quad (4-11-43)$$

۴-۱۱D ضرایب دید و اجسام خاکستری

در این بحث، یک حالت کلی‌تر و کاربردی‌تر یعنی همان معادله (۴-۱۱-۴۰) در حالتی که سطوح A_1 و A_2 خاکستری هستند و ضرایب نشر آنها ϵ_1 و ϵ_2 می‌باشد در نظر گرفته می‌شود. دیواره‌های غیرهادی بازتابنده مانند قبل وجود دارند. چون دو سطح خاکستری هستند، مقداری بازتابش وجود دارد که باعث خواهد شد مقدار خالص انرژی تابشی مبادله شده بین دو سطح از حالت سطوح سیاه کمتر باشد. معادلات نهایی برای این حالت عبارتند از:

$$q_{12} = F_{12} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4-11-44)$$

$$F_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{F}_{12}} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1 \right)} \quad (4-11-45)$$

که ضریب دید جدید برای دو سطح خاکستری A_1 و A_2 است که یکدیگر را نمی‌بینند، اما به وسیله دیواره‌های بازتابنده به یکدیگر وصل شده‌اند. اگر دیواره‌های بازتابنده وجود نداشته باشند در معادله (۴-۱۱-۴۱) از F_{12} به جای \bar{F}_{12} استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (4-11-46)$$

مثال ۴-۱۱-۴ تابش بین صفحه‌های نامحدود خاکستری و موازی

با شروع از معادله کلی تابش بین دو جسم خاکستری A_1 و A_2 که صفحاتی نامحدود و موازی با ضرایب نشر ϵ_1 و ϵ_2 هستند معادله (۴-۱۱-۲۲) را به دست آورید.

حل: چون سطوح بازتابنده وجود ندارند، بنابراین بر اساس معادله (۴-۱۱-۴۳)، \bar{F}_{12} تبدیل به F_{12} می‌شود. همچنین، چون کل تابش از سطح ۱ به وسیله سطح ۲ قطع می‌شود، پس، $F_{12} = 1$ است. با قرار دادن در معادله (۴-۱۱-۴۵) و با توجه به این‌که: $A_1/A_2 = 1$ است، داریم:

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{F_{12}} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{1}{1} + 1 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1 \right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

سپس با استفاده از معادله (۴-۱۱-۴۴) داریم:

$$q_{12} = \mathcal{F}_{12} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) = A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

که معادله بالا با معادله (۴-۱۱-۲۲) یکسان است.

مثال ۴-۱۱-۵ ضریب دید ترکیبی^(۱) برای مستطیلهای عمود برهم

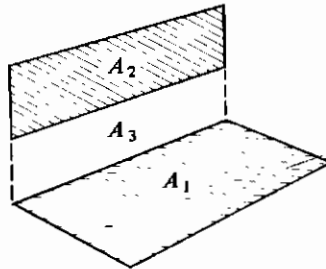
برای ساختار نشان داده شده در شکل ۴-۱۱-۹، ضریب دید F_{12} را به دست آورید. سطح A_2 از لبه مشترک با سطح A_1 جدا شده است و عمود بر سطح A_1 است. دمای A_1 برابر با T_1 و دمای A_2 و A_3 برابر با T_2 می باشد.

حل: سطح A_3 یک سطح فرضی بین سطوح A_2 و A_1 می باشد. مجموع سطوح A_2 و A_3 را A_{23} می نامیم. ضریب دید $F_{1(23)}$ بین سطوح A_1 و A_{23} می تواند از شکل ۴-۱۱-۸ برای دو مستطیل مجاور و عمود بر هم محاسبه شود. همچنین F_{13} نیز از شکل ۴-۱۱-۸ به دست می آید. تبادل تابشی بین A_1 و A_{23} برابر با مقدار تابش قطع شده به وسیله A_2 و A_3 است.

$$A_1 F_{1(23)} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) + A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4-11-47)$$

بنابراین:

$$A_1 F_{1(23)} = A_1 F_{12} + A_1 F_{13} \quad (4-11-48)$$



شکل ۴-۱۱-۹. طرز قرار گرفتن صفحات در مثال ۴-۱۱-۵

با حل رابطه برحسب F_{12} داریم:

$$F_{12} = F_{1(23)} - F_{13} \quad (4-11-49)$$

از روشهای مشابه با روش ارائه شده در این مثال می توان برای محاسبه ضریب دید صفحات مستطیلی عمود بر هم یا موازی با جهت گیریهای کلی استفاده کرد (C3, H1, K1).

مثال ۴-۱۱-۶ تابش به یک مجموعه کوچک

یک مجموعه کوچک سرد دارای سطح A_1 به ضریب نشر ϵ_1 در دمای T_1 است. این مجموعه در اتاقی گرم که دمای دیواره‌های آن T_2 و ضریب نشر آن ϵ_2 است، قرار دارد. رابطه‌ای برای ضریب دید این مجموعه با استفاده از معادله (۴-۱۱-۴۵) و معادله انتقال حرارت تابشی به دست آورید. حل: چون دیواره‌های بازتابنده وجود ندارند بنابراین برای سطح کوچک A_1 که کاملاً به وسیله محیط A_2 احاطه شده است، از معادله (۴-۱۱-۴۳) داریم: $\bar{F}_{12} = F_{12}$ ، همچنین، $\bar{F}_{12} = 1$. چون تمام تابش سطح A_1 توسط محیط A_2 دریافت می شود و A_1 هیچ سطح مقعری ندارد و نمی تواند خودش را ببیند. چون A_2 در مقایسه با A_1 بسیار بزرگ است، بنابراین $\frac{A_1}{A_2} = 0$ یا جایگذاری در معادله (۴-۱۱-۴۵) خواهیم داشت:

$$F_{12} = \frac{1}{\frac{1}{F_{12}} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1 \right)} = \frac{1}{1 + 0 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) + \frac{1}{\epsilon_1} - 1} = \epsilon_1$$

با قراردادن در معادله (۴-۱۱-۴۴) داریم:

$$q_{12} = F_{12} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) = \epsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

که این شبیه به معادله (۴-۱۰-۶) است که قبلاً به دست آمده است.

روشهای ماتریسی برای حل مسائل پیچیده تابش که شامل بیش از ۴ یا ۵ سطح انتقال حرارت هستند، در منابع دیگر توضیح داده شده‌اند (H1, K1).

۴-۱۱E تابش در گازهای جذب کننده

۱- مقدمه‌ای بر گازهای جذب کننده در تابش: همان گونه که در این بخش گفته شد، جامدات و مایعات تابش را به صورت یک طیف پیوسته نشر می دهند. با این حال بیشتر گازهای تک اتمی یا دو اتمی مانند

He, Ar, H₂, O₂ و N₂ کاملاً نسبت به تابش شفافند یعنی آنها عملاً هیچ تابشی را نشر نمی‌دهند و همچنین هیچ تابشی را جذب نمی‌کنند. گازهای دارای ممان دو قطبی و گازهای چند اتمی بزرگتر، مقدار قابل ملاحظه‌ای از تابش را منتشر می‌کنند و انرژی تابشی را در همان طول موجی که نشر می‌دهند، جذب نیز می‌کنند. این گازها شامل CO₂, H₂O, SO₂, CO, NH₃ و بخارات آلی هستند.

برای یک گاز معین، پهنای باند جذب یا نشر به فشار و دما وابسته می‌باشد. اگر گاز جاذب گرم شود انرژی را به محیط سردتر تابش می‌کند. نرخ خالص انتقال حرارت تابشی بین سطوح در این حالتها کم می‌شود زیرا گاز مقداری از انرژی تابشی را که باید بین سطوح منتقل شود جذب می‌کند.

۲- جذب تابش توسط یک گاز: جذب تابش در یک لایه گاز را می‌توان به طور تحلیلی تشریح نمود چون جذب به وسیله یک گاز مشخص به تعداد مولکولهایی که در مسیر تابش هستند بستگی دارد. با افزایش فشار جزئی گاز جاذب یا افزایش طول مسیر، مقدار جذب گاز افزایش می‌یابد. $I_{\lambda 0}$ را به عنوان شدت تابش در یک طول موج خاص قبل از این‌که وارد گاز شود تعریف می‌کنیم و $I_{\lambda L}$ نیز به عنوان شدت در همان طول موج بعد از پیمودن مسافت L در گاز تعریف می‌شود. اگر اشعه با یک لایه گاز با ضخامت dL برخورد کند کاهش شدت dI_{λ} متناسب با I_{λ} و dL است.

$$dI_{\lambda} = -\alpha_{\lambda} I_{\lambda} dL \quad (4-11-50)$$

که I_{λ} برحسب W/m^2 است. با انتگرال‌گیری داریم،

$$I_{\lambda L} = I_{\lambda 0} e^{-\alpha_{\lambda} L} \quad (4-11-51)$$

ثابت α_{λ} به نوع گاز، فشار جزئی آن و طول موج تابش بستگی دارد. این معادله قانون Beer نامیده می‌شود. گازها اکثراً در محدوده‌های کوچکی از طول موج تابش را جذب می‌کنند.

۳- طول موج میانگین مشخصه^(۱) گاز جاذب: روشهای محاسبه تابش گاز کاملاً پیچیده است. برای محاسبات مهندسی Hottel (M1) یک روش تقریبی برای محاسبه تابش و جذب گازهایی مانند CO₂ و بخار آب ارائه کرده است. لایه‌های ضخیم گاز انرژی بیشتری از لایه‌های نازک جذب می‌کنند. بنابراین علاوه بر تعیین فشار و دمای یک گاز باید یک طول مشخصه (طول میانگین اشعه) جرم‌کاز را نیز مشخص کنیم تا بتوانیم ضریب نشر و ضریب جذب گاز را تعیین کنیم. طول میانگین اشعه به شکل هندسی بستگی دارد.

برای یک سطح دیفرانسیلی سیاه که دارای سطح دریافت کننده dA است و در مرکز قاعده یک نیم

کره به شعاع L قرار گرفته است و محتوی یک گاز باز تابنده نیز هست، طول میانگین اشعه برابر با L می‌باشد. طول میانگین اشعه برای اشکال هندسی گوناگون محاسبه شده و در جدول ۴-۱۱-۱ داده شده است. برای اشکال دیگر L به‌طور تقریبی به وسیله رابطه زیر می‌تواند تعیین شود.

$$L = 3.6 \frac{V}{A} \quad (4-11-52)$$

که V حجم گاز برحسب cm^3 سطح مفید بر حسب m^2 و L برحسب m می‌باشد.

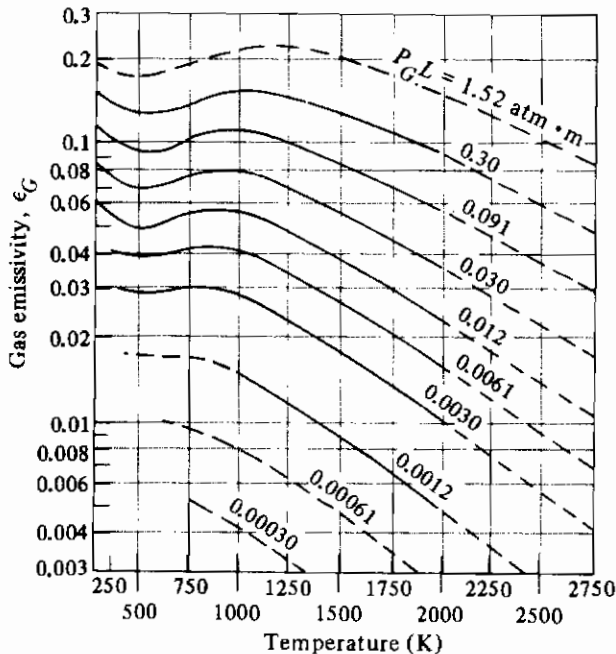
۴- ضریب نشر، ضریب جذب و تابش یک گاز: روابطی برای ضریب نشر گازها وجود دارد و شکل ۴-۱۱-۱۰ ضریب نشر گاز CO_2 یعنی ϵ_G را در فشار کل سیستم برابر با 1 atm abs می‌دهد. P_G فشار جزئی CO_2 برحسب atm است و طول موج میانگین L برحسب متر می‌باشد. ضریب نشر ϵ_G به‌صورت نسبت نرخ انتقال انرژی از جسم نیمکره‌ای حاوی گاز به یک المان سطح در نقطه میانی تقسیم بر نرخ انتقال انرژی از یک سطح نیمکره‌ای سیاه به شعاع L و دمای T_G به همان المان، می‌باشد.

نرخ تابش منتشر شده از گاز $\sigma \epsilon_G T_G^4$ برحسب W/m^2 توسط سطح المان دریافت کننده می‌باشد که ϵ_G در دمای T_G است. اگر المان سطح در نقطه میانی در دمای T_1 حرارت را به گاز باز تاباند نرخ جذب گاز برابر با $\alpha_G T_1^4$ خواهد بود که α_G ضریب جذب گاز برای تابش از سطح در دمای T_1 به‌صورت جسم سیاه است. α_G برای CO_2 در دمای T_1 از شکل ۴-۱۱-۱۰ تعیین می‌شود اما به جای استفاده از عبارت $P_G L$ از عبارت $P_G L (T_1/T_G)$ استفاده می‌شود. مقدار به دست آمده از نمودار در $(T_G/T_1)^{1/15}$ ضرب می‌شود تا α_G به دست آید. نرخ خالص انتقال حرارت تابشی بین یک گاز در دمای T_G و یک سطح سیاه محدود به مساحت A_1 در دمای T_1 به صورت زیر است:

$$q = \sigma A (\epsilon_G T_G^4 - \alpha_G T_1^4) \quad (4-11-53)$$

جدول ۴-۱۱-۱. طول میانگین اشعه برای تابش گازها به کل سطح در معرض گاز (P_3, R_2, M_1)

Geometry of Enclosure	Mean Beam Length, L
Sphere, diameter D	0.65D
Infinite cylinder, diameter D	0.95D
Cylinder, length = diameter D	0.60D
Infinite parallel plates, separation distance D	1.8D
Hemisphere, radiation to element in base, radius R	R
Cube, radiation to any face, side D	0.60D
Volume surrounding bank of long tubes with centers on equilateral triangle, clearance = tube diameter D	2.8D



شکل ۱۰-۱۱-۴. ضریب نشر کل گاز دی اکسید کربن در فشار کل ۱ atm (با کسب مجوز گرفته شده از:

W. H. McAdams, Heat Transmission, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954

وقتی فشار کل ۱ atm نباشد یک نمودار تصحیح برای اصلاح ضریب نشر CO_2 در دسترس است. همچنین، برای بخار آب نیز نمودارهایی وجود دارد (H_2O, K_1, M_1, P_3). وقتی آب و CO_2 هر دو موجودند تابش کل تا حدی کاهش می‌یابد چون هر کدام از دو گاز تا حدی نسبت به گاز دیگر در مقابل تابش کدر است. نمودارهایی برای این اثرهای متقابل نیز موجود است (H_2O, K_1, M_1, P_3).

مثال ۷-۱۱-۴ تابش گاز به محیط یک کوره

یک کوره به شکل مکعب به ضلع داخلی $0/3$ متر می‌باشد و دیواره‌های داخلی را می‌توان سطح سیاه در نظر گرفت. گاز داخل در فشار کل ۱ اتمسفر و دمای 1100 K شامل 10% مولی CO_2 و بقیه O_2 و N_2 است. مقدار بسیار کم بخار آب موجود در آن نیز قابل صرف نظر کردن است. دیواره‌های کوره به وسیله سرد کردن از بیرون در دمای 600 K ثابت نگهداشته می‌شوند. بنا صرف نظر کردن از گرمای انتقال یافته به طریق جابه‌جایی، انتقال حرارت کل به دیواره‌ها را محاسبه کنید.

حل: از جدول ۴-۱۱-۱ طول میانگین طیف در حالت تابش به یک وجه مکعب برابر است با:

$$L = 0.60 \times D = 0.60 \times 0.30 = 0.180 \text{ m}$$

فشار جزئی CO_2 برابر است با:

$$p_G = 0.10 \times 1 = 0.10 \text{ atm}$$

آن‌گاه خواهیم داشت:

$$p_G \cdot L = 0.10 \times 0.180 = 0.0180 \text{ atm.m}$$

با استفاده از شکل ۴-۱۱-۱۰ در $T_G = 1100 \text{ K}$ داریم: $\varepsilon_G = 0.064$

برای به دست آوردن α_G مقدار آن را در $T_1 = 600 \text{ K}$ تعیین می‌کنیم و داریم:

$$p_G L (T_1/T_G) = 0.0180 \times \frac{600}{1100} = 0.00982 \text{ atm.m}$$

با استفاده از شکل ۴-۱۱-۱۰ مقدار تصحیح نشده α_G برابر با 0.048 است. با ضرب کردن این

مقدار در ضریب تصحیح $(T_G/T_1)^{1/5}$ مقدار تصحیح شده نهایی عبارت است از:

$$\alpha_G = 0.048 \times \left(\frac{1100}{600}\right)^{1/5} = 0.0712$$

با جایگذاری در معادله (۴-۱۱-۵۳) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{q}{A} &= \sigma (\varepsilon_G T_G^4 - \alpha_G T_1^4) \\ &= (5/676 \times 10^{-8}) \times (0.064 \times 1100^4 - 0.0712 \times 600^4) \\ &= 4/795 \times 10^3 \text{ W/m}^2 = 4/795 \text{ kW/m}^2 \end{aligned}$$

برای هر شش وجه داریم: $A = 6 \times (0.3 \times 0.3) = 0.540 \text{ m}^2$ بنابراین:

$$q = 4/795 \times 0.54 = 2/589 \text{ kW}$$

در حالتی که دیواره‌های کوره سیاه نیستند، مقداری از تابش پس از برخورد با دیواره‌ها به سمت دیوار دیگر و به طرف گاز برمی‌گردد. به عنوان تقریب وقتی ضریب نشر دیواره‌ها از 0.7 بزرگتر باشد از ضریب نشر مؤثر ε' می‌توان استفاده کرد.

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon + 1.0}{2} \quad (4-11-54)$$

که در این جا ε ضریب نشر واقعی دیواره‌های کوره است. سپس معادله (۴-۱۱-۵۳) اصلاح می‌شود، تا معادله‌ای به صورت زیر به دست آید (M1):

$$q = \sigma A \varepsilon' (\varepsilon_G T_G^4 - \alpha_G T_1^4) \quad (4-11-55)$$

روشهای تقریبی دیگر برای گازهای موجود در مشعلهای نورانی معلق، ابرهای تشکیل شده از ذرات غیر سیاه، دیواره‌های بازتابنده و گازهای جاذب و مانند آن در دسترس می‌باشند (M1, P3).

۴-۱۲ انتقال حرارت سیالات غیرنیوتنی

۴-۱۲۸ مقدمه

بیشتر مطالعات انجام شده روی انتقال حرارت سیالات در ارتباط با سیالات نیوتنی انجام شده است. با وجود این، در گستره وسیعی از صنایع شیمیایی، بیولوژیکی و فرایندهای صنایع غذایی با سیالات غیرنیوتنی روبرو هستیم. برای طراحی تجهیزاتی که با این سیالات سروکار دارند، یا باید ثابتهای خواص جریان (ثابتهای رئولوژیکی) در دسترس باشند و یا باید به طریق تجربی اندازه‌گیری شوند. در بخش ۳-۵ بحث مفصلی در مورد ثابتهای رئولوژیکی سیالات غیرنیوتنی ارائه شد. بسیاری از سیالات غیرنیوتنی دارای ویسکوزیته مؤثر بالا هستند و غالباً جریان آنها آرام است. چون اکثر سیالهای غیرنیوتنی، سیالهای شبه پلاستیک می‌باشند، معمولاً می‌توانند توسط مدل‌های power law بیان شوند (معادله ۲-۵-۳). این بحث در ارتباط با این سیالات خواهد بود. برای دیگر سیالها به skelland مراجعه شود (S3).

۴-۱۲B انتقال حرارت داخل لوله‌ها

۱- جریان آرام در لوله‌ها: قسمت اعظم تحقیقات تجربی مربوط به انتقال حرارت سیالات غیرنیوتنی به صورت آرام در داخل لوله‌های استوانه‌ای شکل بوده است. خواص فیزیکی که برای ضرایب انتقال حرارت مورد نیاز هستند عبارتند از: دانسیته، ظرفیت گرمایی، ضریب هدایت گرمایی و ثابتهای رئولوژیکی K' و n' یا K و n .

مکانیسم انتقال حرارت در یک سیال در جریان آرام در ابتدا هدایت است. اما، برای شدت جریانهای کم و ویسکوزیته‌های کم جابه‌جایی طبیعی نیز می‌تواند وجود داشته باشد. چون بسیاری از سیالهای غیرنیوتنی کاملاً ویسکوز هستند، اثرات جابه‌جایی طبیعی به طور طبیعی کاهش می‌یابد. برای جریان آرام سیالات power law در داخل لوله‌های مدور معادله Gluck و Metzner در حالتی که سیال کاملاً ویسکوز باشد و از جابه‌جایی طبیعی در لوله‌های افقی و عمودی در عدد گریتز بالاتر از ۲۰ و $n' > 0.1$ صرف نظر شود، می‌توان استفاده نمود.

$$(N_{Nu})_o = \frac{h_o D}{k} = 1.75 \delta^{1/3} (N_{Gr})^{1/3} \left(\frac{\gamma_b}{\gamma_w} \right)^{0.14} \quad (4-12-1)$$

که در این جا:

$$\delta = \frac{3n' + 1}{4n'} \quad (۴-۱۲-۲)$$

$$N_{Gr} = \frac{mc_p}{kL} = \frac{\pi D \nu \rho c_p \mu D}{4 \mu k L} = \frac{\pi}{4} N_{Re} N_{Pr} \frac{D}{L} \quad (۴-۱۲-۳)$$

ضرایب ویسکوزیته γ_b در دمای T_b و γ_w در دمای T_w به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{\gamma_b}{\gamma_w} = \frac{K'_b 8^{n'-1}}{K'_w 8^{n'-1}} = \frac{K'_b}{K'_w} = \frac{K_b}{K_w} \quad (۴-۱۲-۴)$$

نامگذاری به این صورت است که: k برحسب $W/m.K$ ، c_p برحسب $J/kg.K$ ، ρ برحسب kg/m^3 شدت جریان m برحسب kg/s طول بخش گرم شده لوله L برحسب متر، قطر داخلی D برحسب متر، ضریب میانگین h_a برحسب $W/m^2.K$ و K و n' ثابتهای رئولوژیکی می‌باشند (بخش ۵-۳ را ببینید). خواص فیزیکی و K_b همگی در دمای میانگین توده‌ای T_b و K_w در میانگین دمای دیواره T_w تعیین شده‌اند.

مقدار ثابت رئولوژیکی n' یا n در محدوده وسیعی از دما تغییر قابل ملاحظه‌ای نمی‌کند (S3). اما

ثابت رئولوژیکی K' یا K تغییرات قابل ملاحظه‌ای دارد. نمودار لگاریتم K' برحسب $1/T_{abs}$ (مرجع C1) یا T °C (مرجع S3) را اغلب می‌توان تقریباً خط راست در نظر گرفت. غالباً اطلاعات مربوط به تأثیر دما بر K موجود نیست. چون نسبت K_b/K_w به توان 0.14 میرسد، گاهی می‌توان از آن صرف‌نظر کرد بدون این‌که خطای بزرگی ایجاد کند. اگر این نسبت $2:1$ باشد خطا حدود 10% است. نمودار لگاریتم ویسکوزیته برحسب $1/T$ برای سیالهای نیوتنی نیز اغلب به صورت خط راست است. مقدار h_a به دست آمده از معادله (۴-۱۲-۱) ضریب میانگین جابه‌جایی در لوله‌ای به طول L با اختلاف دمای عددی ΔT_a است.

$$\Delta T_a = \frac{(T_w - T_{bi}) + (T_w - T_{bo})}{2} \quad (۴-۱۲-۵)$$

که در این جا T_w میانگین دمای دیواره در کل طول لوله و T_{bi} دمای توده‌ای ورودی و T_{bo} دمای توده‌ای خروجی است. شار گرمایی q برابر است با:

$$q = h_a A \Delta T_a = h_a (\pi DL) \Delta T_a \quad (۴-۱۲-۶)$$

مثال ۴-۱۲-۱ گرم کردن جریان آرام یک سیال غیرنیوتنی

یک سیال غیرنیوتنی با نرخ $7/56 \times 10^{-2} \text{ kg/s}$ در داخل لوله‌ای به قطر داخلی $25/4 \text{ mm}$ جریان دارد و توسط بخاری که در خارج لوله در حال مایع شدن است، گرم می‌شود. سیال در دمای $37/8 \text{ }^\circ\text{C}$ وارد بخش گرم لوله که طول آن $1/524 \text{ m}$ است می‌شود. دمای دیواره داخلی T_w در $93/3 \text{ }^\circ\text{C}$ ثابت است. خواص فیزیکی میانگین سیال عبارتند از:

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$k = 1/212 \text{ W/m.K} \quad \text{و} \quad c_{pm} = 2/093 \text{ kJ/kg.K} \quad \text{و} \quad \rho = 1041 \text{ kg/m}^3$$

سیال از نوع power-law است که دارای این ثابتهای رئولوژیکی است: $n' = n = 0/40$ که در محدوده دمایی مورد بحث تقریباً ثابت است و K در $37/8^\circ\text{C}$ برابر با $139/9 \text{ N.s}^{n'}/\text{m}^2$ و در $93/3^\circ\text{C}$ برابر با $62/5$ می‌باشد. برای این سیال نمودار لگاریتم K برحسب $T^\circ\text{C}$ تقریباً خطی است. اگر جریان آرام باشد دمای توده‌ای خروجی سیال را محاسبه کنید.

حل: حل مسأله به روش حدس و خطاست چون برای محاسبه h_a از معادله (۴-۱۲-۲) دمای توده‌ای خروجی T_{bo} سیال باید معلوم باشد. با فرض این‌که T_{bo} برابر با $54/4^\circ\text{C}$ است به عنوان اولین حدس، میانگین دمای توده‌ای T_b برابر است با:

$$T_b = \frac{(54/4 + 37/8)}{2} = 46/1^\circ\text{C}$$

با رسم دو مقدار K داده شده در دماهای $37/8^\circ\text{C}$ و $93/3^\circ\text{C}$ به صورت لگاریتم K برحسب T و کشیدن یک خط مستقیم بین این دو نقطه، مقدار K_b برابر با $123/5$ در $46/1^\circ\text{C}$ خوانده می‌شود. در $T_w = 93/3^\circ\text{C}$ نیز $K_w = 62/5$ است. سپس δ با استفاده از معادله (۴-۱۲-۲) حساب می‌شود.

$$\delta = \frac{3n' + 1}{4n'} = \frac{3 \times 0/4 + 1}{4 \times 0/4} = 1/375$$

با جایگذاری در معادله (۴-۱۲-۳) داریم:

$$N_{Gz} = \frac{m c_p}{k L} = \frac{(7/56 \times 10^3) \times (2/093 \times 10^3)}{1/212 \times 1/524} = 85/7$$

از معادله (۴-۱۲-۴) داریم:

$$\frac{\gamma_b}{\gamma_w} = \frac{K_b}{K_w} = \frac{123/5}{62/5}$$

سپس با جایگذاری در معادله (۴-۱۲-۱) داریم:

$$\frac{h_a D}{k} = \frac{h_a \times 0/254}{1/212} = 1/75 \times \delta^{1/3} \times N_{Gz}^{1/3} \times \left(\frac{\gamma_b}{\gamma_w}\right)^{1/4} \quad (4-12-1)$$

$$= 1/75 \times (1/375)^{1/3} \times (85/7)^{1/3} \times \left(\frac{123/5}{62/5}\right)^{1/4}$$

از حل معادله، $h_a = 448/3 \text{ W/m}^2.\text{K}$ به دست می‌آید.

بر اساس یک موازنه گرمایی مقدار q برحسب W به صورت زیر است.

$$q = m c_{pm} (T_{bo} - T_{bi}) \quad (4-12-7)$$

این رابطه با معادله (۴-۱۲-۶) برابر قرار داده می‌شود و داریم:

$$q = m c_{pm} (T_{bo} - T_{bi}) = h_a (\pi D L) \Delta T_a \quad (4-12-8)$$

اختلاف دمای میانگین حسابی توسط معادله (۴-۱۲-۵) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \Delta T_a &= \frac{(T_w - T_{bi}) + (T_w - T_{bo})}{2} \\ &= \frac{(93/3 - 37/8) + (93/3 - T_{bo})}{2} = 74/4 - 0.5 \times T_{bo} \end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر معلوم در معادله (۴-۱۲-۸) و حل آن نسبت به T_{bo} داریم:

$$\begin{aligned} (7/56 \times 10^{-2}) \times (2/0.93 \times 10^3) \times (T_{bo} - 37/8) \\ = 448/3 \times (\pi \times 0.0254 \times 1/524) \times (74/4 - 0.5 \times T_{bo}) \end{aligned}$$

$$T_{bo} = 54/1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

مقدار $54/1 \text{ } ^\circ\text{C}$ به اندازه کافی به مقدار حدس اولیه $54/5$ نزدیک است و به حدس دوم نیازی نیست. فقط مقدار K_b قدری تغییر خواهد کرد. با جایگذاری مقادیر معلوم در معادله (۴-۵-۱۱) و محاسبه عدد رینولدز می‌توان نشان داد که مقدار آن کمتر از 2100 است و جریان آرام است.

برای سیالات غیرنیوتنی power-law با ویسکوزیته کم در جریان آرام، جابه‌جایی طبیعی ممکن است بر نرخ انتقال حرارت تأثیر بگذارد. Metzner و Gluck استفاده از یک ضریب تصحیح تجربی در معادله (۴-۱۲-۱) برای لوله‌های افقی را توصیه می‌کنند (M2).

۲- جریان مغشوش در لوله‌ها: برای جریان مغشوش سیالات power-law در لوله‌ها، Clapp معادله تجربی زیر را برای انتقال حرارت ارائه می‌کند (C4).

$$N_{Nu} = \frac{h_L D}{k} = 0.0041 (N_{Re, gen})^{0.99} \left[\frac{K' c_p}{k} \left(\frac{8V}{D} \right)^{n-1} \right]^{0.4} \quad (4-12-9)$$

که در این رابطه $N_{Re, gen}$ براساس معادله (۳-۵-۱۱) تعریف می‌شود و h_L ضریب انتقال حرارت براساس اختلاف دمای میانگین لگاریتمی است. خواص سیال در دمای میانگین توده‌ای ارزیابی می‌شوند. Metzner و Friend نیز معادلاتی برای انتقال حرارت مغشوش ارائه داده‌اند (M3).

۴-۱۲C جابه‌جایی طبیعی

Acivros روابطی برای انتقال حرارت به طریق جابه‌جایی آزاد به سیالات power-law از سطوح با

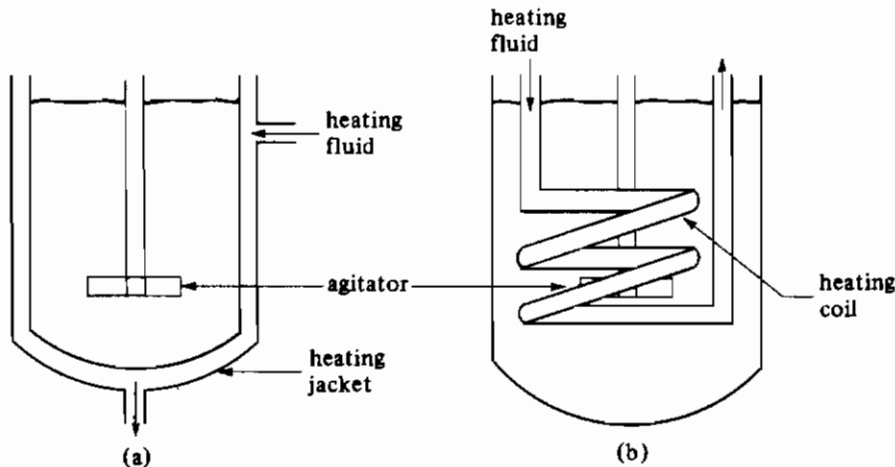
شکلهای متفاوت مانند کره‌ها، استوانه‌ها و صفحه‌ها ارائه کرده است (S3, A1).

۴-۱۳ ضرایب انتقال حرارت خاص

۴-۱۳A انتقال حرارت در ظرفهای همزن‌دار^(۱)

۱- مقدمه: بسیاری از فرایندهای شیمیایی و بیولوژیکی اغلب در ظرفهای همزن‌دار انجام می‌شوند. همچنان که در بخش ۳-۴ بحث شد مایعات معمولاً در ظرفهای استوانه‌ای شکل توسط یک پروانه که روی یک محور قرار گرفته است و محور نیز به وسیله یک موتور الکتریکی می‌چرخد، همزده می‌شوند. نمونه‌هایی از همزنها و ظروفی که روی آنها نصب می‌شوند، در شکلهای ۱-۴-۳ و ۳-۴-۳ نشان داده شده است. اغلب لازم است محتویات داخل ظرف را در حین همزدن گرم یا سرد کنیم. این کار معمولاً به وسیله سطوح انتقال حرارت انجام می‌شود که ممکن است به صورت جداره‌های گرم‌کننده یا سردکننده در دیواره‌های ظرف تعبیه شوند یا به صورت لوله‌های مارپیچ در مایع غوطه‌ور باشند.

۲- ظرف با جداره گرم‌کننده: در شکل ۴-۱۳-۱a یک ظرف دو جداره نشان داده شده است. سیال ورودی برای گرم کردن اغلب بخار است، که وارد فضای جداره شده و پس از میعان از پایین آن خارج می‌شود. ظرف مجهز به یک همزن است و در بیشتر موارد با فل نیز دارد (در شکل نشان داده نشده است).



شکل ۴-۱۳-۱. انتقال حرارت در ظروف همزن‌دار: (a) مجهز به جداره گرم‌کننده

(b) ظرف مجهز به لوله‌های مارپیچ گرم‌کننده.

روابط ضریب انتقال حرارت از مایع نیوتنی همزده شده داخل ظرف به دیوارهای دو جداره ظرف به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{hD_t}{k} = a \left(\frac{D_a^2 N \rho}{\mu} \right)^b \left(\frac{c_p \mu}{k} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^m \quad (4-13-1)$$

که h ضریب انتقال حرارت از مایع همزده شده به دیواره درونی برحسب $W/m^2.K$ ، D_t قطر داخلی منبع برحسب متر، k ضریب هدایت گرمایی برحسب $W/m.K$ ، D_a قطر همزن برحسب متر، N سرعت چرخشی بر حسب دور بر ثانیه، ρ دانسیته سیال برحسب kg/m^3 و μ ویسکوزیته مایع بر حسب Pa.s می‌باشد. همه خواص فیزیکی مایع در دمای توده‌ای مایع ارزیابی شده‌اند بجز μ_w که براساس دمای دیواره T_w است. در زیر مجموعه‌ای از روابط و محدوده اعداد رینولدز لیست شده است:

۱- همزن پارویی^(۱) بدون بافل (U1, C5)،

$$a = 0.36, \quad b = \frac{1}{3}, \quad m = 0.21, \quad N'_{Re} = 300 \text{ تا } 3 \times 10^5$$

۲- همزن توربینی با تیغه‌های صاف^(۲) بدون بافل (B4)،

$$a = 0.54, \quad b = \frac{1}{3}, \quad m = 0.14, \quad N'_{Re} = 30 \text{ تا } 3 \times 10^5$$

۳- همزن توربینی با تیغه‌های صاف با بافل (B4, B5)،

$$a = 0.74, \quad b = \frac{1}{3}, \quad m = 0.14, \quad N'_{Re} = 500 \text{ تا } 3 \times 10^5$$

۴- همزن لنگری^(۳) بدون بافل (U1)،

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad m = 0.18, \quad N'_{Re} = 10 \text{ تا } 300$$

$$a = 0.36, \quad b = \frac{1}{3}, \quad m = 0.18, \quad N'_{Re} = 300 \text{ تا } 4 \times 10^5$$

۵- همزن مارپیچی^(۴) بدون بافل (G4)،

$$a = 0.633, \quad b = \frac{1}{3}, \quad m = 0.18, \quad N'_{Re} = 8 \text{ تا } 10^5$$

نمونه‌هایی از مقادیر ضریب کلی U برای ظروف دو جداره در فرایندهای مختلف در جدول ۴-۱۳-۱ ارائه شده‌است.

1. paddle agitator
3. anchor agitator

2. flat-blade turbine agitator
4. helical ribbon agitator

مثال ۱-۱۳-۴ ضریب انتقال حرارت در ظرف دو جداره مجهز به همزن

از یک ظرف دو جداره با فل دار مجهز به همزن با قطر $1/83$ m برای گرم کردن مایعی در دمای K 300 استفاده می شود. قطر همزن $0/61$ m است و از نوع توربینی با تیغه های صاف است که با سرعت 100 rpm می چرخد. آب گرم در جداره جریان دارد. دمای سطح دیواره در $355/4$ K ثابت است. مایع در دمای توده ای دارای این خواص فیزیکی است:

$$k = 0/173 \text{ W/m.K}, c_p = 2500 \text{ J/kg.K}, \rho = 961 \text{ kg/m}^3$$

$$T = 355/4 \text{ K در } \mu = 0/084 \text{ و } T = 300 \text{ K در } \mu = 1/00 \text{ Pa.s}$$

ضریب انتقال حرارت دیواره ظرف را محاسبه کنید.

حل: مقادیر زیر معلوم هستند:

$$D_t = 1/83 \text{ m} \quad D_a = 0/61 \text{ m} \quad N = \frac{100}{60} \text{ rev/s}$$

$$\mu (300 \text{ K}) = 1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ kg/m.s}$$

$$\mu_w (355/4 \text{ K}) = 0/084 \text{ Pa.s} = 0/084 \text{ kg/m.s}$$

ابتدا، با محاسبه عدد رینولدز در 300 K به صورت زیر:

$$N_{Re} = \frac{D_a^2 N \rho}{\mu} = \frac{0/61^2 \times (100/60) \times 961}{1} = 596$$

جدول ۱-۱۳-۴. نمونه هایی از ضرایب کلی انتقال حرارت در ظروف دو جداره

Fluid in Jacket	Fluid in Vessel	Wall Material	Agitation	U		Ref.
				$\frac{\text{btu}}{\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}}$	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$	
Steam	Water	Copper	None	150	852	(P1)
				250	1420	
Steam	Paste	Cast iron	Double stirring scrapers	125	710	(P1)
Steam	Boiling water	Copper	None	250	1420	(P1)
Steam	Milk	Enameled cast iron	None	200	1135	(P1)
				300	1700	
Hot water	Cold water	Enameled cast iron	None	70	398	(P1)
Steam	Tomato purée	Metal	Agitation	30	170	(C1)

عدد پرانتل برابر است با:

$$N_{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{2500 \times 1}{0.173} = 14450$$

با استفاده از معادله (۴-۱۳-۱) با $a = 0.74$ و $b = \frac{1}{3}$ و $m = 0.14$ داریم:

$$\frac{h D_i}{k} = 0.74 \times (N_{Re}')^{2/3} (N_{Pr})^{2/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} \quad (4-13-1)$$

با جایگذاری و حل معادله نسبت به h داریم:

$$\frac{h \times 1/8}{0.173} = 0.74 \times (596)^{2/3} (14450)^{2/3} \left(\frac{1000}{84}\right)^{0.14}$$

$$h = 170/6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \quad (30 \text{ btu/h.ft}^2 \cdot \text{°F})$$

رابطه‌ای برای پیش‌بینی ضریب انتقال حرارت یک سیال غیرنیوتنی Power-law در یک ظرف دو جداره با همزن توربینی در مراجع دیگر نیز داده شده است (C6).

۳- ظرف با لوله‌های مارپیچ: در شکل ۴-۱۳-۱b یک ظرف همزن‌دار با یک لوله مارپیچ گرم‌کننده یا سردکننده نشان داده شده است. روابط ضریب انتقال حرارت در سطح خارجی لوله‌های مارپیچ در ظرف همزن‌دار برای انواع همزن‌ها در زیر لیست شده است. برای یک همزن پارویی بدون بافل (C5):

$$\frac{h D_i}{k} = 0.87 \left(\frac{D_a^2 N \rho}{\mu}\right)^{0.62} \left(\frac{c_p \mu}{k}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} \quad (4-13-2)$$

این رابطه برای اعداد رینولدز بین ۳۰۰ تا 4×10^5 صدق می‌کند.

برای یک همزن توربینی بافل دار با تیغه‌های صاف، مرجع (O1) را ببینید.

وقتی لوله مارپیچ گرم یا سردکننده به شکل لوله‌های عمودی بافل دار همراه با همزن توربینی با تیغه‌های صاف باشد، از رابطه زیر می‌توان استفاده نمود (D1).

$$\frac{h D_o}{k} = 0.09 \left(\frac{D_a^2 N \rho}{\mu}\right)^{0.65} \left(\frac{c_p \mu}{k}\right)^{1/3} \left(\frac{D_a}{D_i}\right)^{1/3} \left(\frac{2}{n_b}\right)^{0.2} \left(\frac{\mu}{\mu_f}\right)^{0.4} \quad (4-13-3)$$

که D_o قطر خارجی لوله‌های مارپیچ برحسب متر، n_b تعداد لوله‌های عمودی بافل دار و μ_f ویسکوزیته در دمای میانگین فیلمی می‌باشد.

Perry و Green نمونه‌ای از مقادیر ضریب کلی انتقال حرارت را برای مارپیچ‌های غرق شده در

مایعات مختلف در ظروف همزن‌دار و بدون همزن ارائه کرده‌اند (P3).

۱۳-۴ مبدلهای حرارتی مجهز به تیغه‌های جاروب‌کننده سطح داخلی

سوسپانسیونهای مایع - جامد، محلولهای آبی و آلی ویسکوز و شمار زیادی از محصولات غذایی متفاوت مانند مارگارین و کنسانتره آب پرتقال، غالباً در نوعی از مبدل حرارتی که مجهز به تیغه‌های جاروب‌کننده سطح داخلی است گرم یا سرد می‌شوند. این وسیله عبارت از یک مبدل حرارتی دولوله‌ای است که در جدار خارجی بخار یا مایع سردکننده در جریان است و محور داخلی دارای حرکت چرخشی است و تیغه‌های جاروب‌کننده مطابق شکل ۲-۱۳-۴ روی محور ثابت شده‌اند.

محصول که مایع ویسکوز است با سرعت کم در لوله داخلی بین محور دوار و دیواره لوله داخلی جریان می‌یابد. تیغه‌های متحرک یا تیغه‌های جاروب‌کننده به طور مداوم سطح مایع را جاروب می‌کنند و از گرم شدن بیش از حد محصول و تبادل گرمایی سریع جلوگیری می‌کنند. این وسیله در بعضی موارد مبدل حرارتی votator نیز نامیده می‌شود.

Skelland و همکارانش (S4) معادله زیر را برای تعیین ضریب انتقال حرارت داخلی votator ارائه

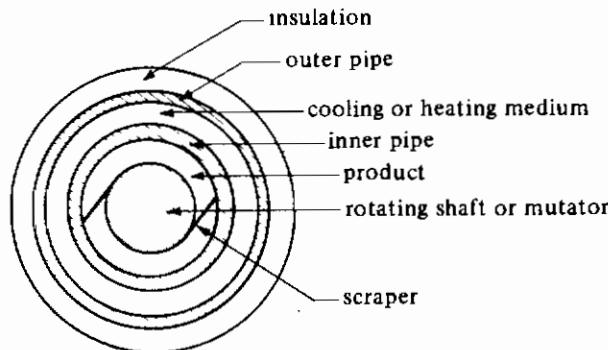
کرده‌اند.

$$\frac{hD}{k} = \alpha \left(\frac{c_p \mu}{k} \right)^\beta \left(\frac{(D - D_s) v \rho}{\mu} \right)^{1.0} \left(\frac{DN}{v} \right)^{0.62} \left(\frac{D_s}{D} \right)^{0.55} (n_B)^{0.53} \quad (4-13-4)$$

برای مایعهای ویسکوز $\alpha = 0.14$ و $\beta = 0.96$

برای مایعهای غیرویسکوز $\alpha = 0.39$ و $\beta = 0.70$

که D قطر ظرف برحسب متر، D_s قطر محور دوار برحسب متر، v سرعت محوری مایع برحسب متر بر ثانیه، N سرعت همزن برحسب دور بر ثانیه و n_B تعداد تیغه‌های همزن است. براساس داده‌های تجربی محدوده سرعت محوری جریان از 0.076 m/min تا 0.38 m/min و سرعت چرخشی از 100 تا 1750 rpm است.



شکل ۲-۱۳-۴. مبدل حرارتی با تیغه‌های جاروب‌کننده سطح داخلی

نمونه‌هایی از ضرایب کلی انتقال حرارت در کاربردهای غذایی به این صورت هستند (B6):

$$U = 1700 \text{ W/m}^2\cdot\text{K} \quad (300 \text{ btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F})$$

برای مارگارین سرد شده با آمونیاک

$$U = 2270 \text{ W/m}^2\cdot\text{K} \quad (400 \text{ btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F})$$

برای سس سیب گرم شده با بخار آب

$$U = 1420 \text{ W/m}^2\cdot\text{K} \quad (250 \text{ btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F})$$

برای چربیهای سرد شده با آمونیاک

$$U = 2270 \text{ W/m}^2\cdot\text{K} \quad (400 \text{ btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F})$$

برای سرد کردن خامه با آب

۱۳-۴ مبدل‌های با سطح گسترش یافته یا پرده‌دار

۱- مقدمه: کاربرد پرده‌ها^(۱) یا سطوح گسترش یافته روی سطح خارجی لوله یک مبدل حرارتی برای بالا بردن ضرایب انتقال حرارت یک امر معمول است. یک رادیاتور اتومبیل چنین وسیله‌ای است که در آنجا آب داغ از داخل یک دسته لوله عبور می‌کند و گرمای خود را به هوا می‌دهد. روی سطح خارجی لوله‌ها سطوح گسترش یافته گرما را از دیواره لوله‌ها دریافت می‌کنند و به طریق جابه‌جایی اجباری به هوا می‌دهند.

دو نوع معمول از پرده‌های وصل شده به دیواره خارجی لوله در شکل ۳-۱۳-۴ نشان داده شده است. در شکل ۳-۱۳-۴ تعدادی پرده طولی دور لوله نصب شده‌اند و مسیر جریان گاز موازی با محور لوله است. در شکل ۳-۱۳-۴ب گاز عمود بر لوله‌ها جریان دارد و لوله‌ها دارای تعداد زیادی پرده‌های مدور می‌باشند.

اثر کیفی استفاده از سطوح گسترش یافته را می‌توان به طور تقریبی در معادله (۴-۱۳-۵) برای سیالی که در داخل یک لوله جریان دارد و ضریب انتقال حرارت داخلی آن h_i و ضریب انتقال حرارت خارجی آن h_o می‌باشد، نشان داد:

$$\frac{1}{U_i A_i} = \sum R \approx \frac{1}{h_i A_i} + R_{\text{metal}} + \frac{1}{h_o A_o} \quad (4-13-5)$$

اغلب می‌توان از مقاومت دیواره R_{metal} صرف نظر کرد. وجود پرده‌ها روی سطح خارجی A_o را افزایش داده و در نتیجه مقاومت $\frac{1}{h_o A_o}$ سیال خارج لوله را کاهش می‌دهد. به عنوان مثال، اگر برای بخار در حال چگالش ضریب انتقال حرارت h_i باشد، که مقدار آن بسیار بزرگ است، و ضریب هوای خارج لوله h_o باشد، که خیلی کوچک است، افزایش A_o مقدار $\frac{1}{h_o A_o}$ را کاهش می‌دهد. این به نوبه خود باعث کاهش

مقدار کلی مقاومت می‌شود که در نتیجه نرخ انتقال حرارت را افزایش می‌دهد. اگر موقعیت دو سیال عوض شود یعنی هوا در داخل لوله و بخار در خارج آن قرار گیرد، استفاده از پره‌ها مقدار کمی انتقال حرارت را افزایش خواهد داد.

معادله (۴-۱۳-۵) فقط یک تقریب است، چون دمای سطح خارجی لوله بدون پره به دلیل مقاومت اضافه شده در برابر جریان گرما یعنی هدایت از نوک پره تا انتهای آن، با دمای انتهای پره برابر نیست. بنابراین یک واحد سطح از پره به اندازه یک واحد سطح از لوله در محل اتصال به پره، بازده گرمایی ندارد. بازده پره η_f به طور ریاضی براساس شکل هندسی آن به دست می‌آید.

۲- به دست آوردن معادله بازده پره: مطابق شکل (۴-۱۳-۴) پره‌ای یک بعدی که در محیط سیالی به دمای T_∞ قرار گرفته است را در نظر بگیرید. در پایه پره دما T_0 و در نقطه x دما T است. در حالت پایدار نرخ گرمای هدایت شده به داخل المان در فاصله x برابر با $q_x|x$ می‌باشد که برابر با نرخ گرمای هدایت شده به خارج از المان بعلاوه نرخ گرمای تلف شده به طریق جابه‌جایی است.

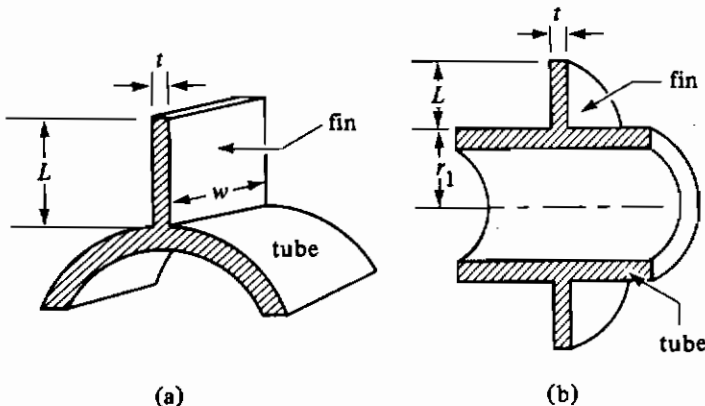
$$q_x|x = q_x|x + \Delta x + q_c \quad (4-13-6)$$

با جایگذاری معادله فوریه برای هدایت و همچنین معادله جابه‌جایی در رابطه فوق، خواهیم داشت:

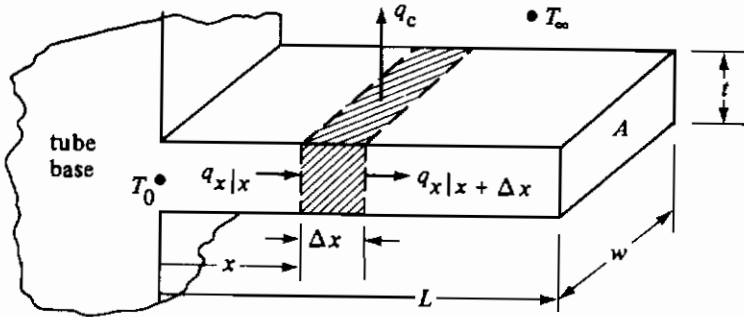
$$-kA \frac{dT}{dx} \Big|_x = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} + h(P \Delta x)(T - T_\infty) \quad (4-13-7)$$

که در آن A سطح مقطع پره بر حسب متر مربع، P محیط پره بر حسب متر و $(P \Delta x)$ سطح مربوط به جابه‌جایی است. با مرتب‌کردن معادله (۴-۱۳-۷) و تقسیم آن بر Δx و میل دادن Δx به سمت صفر داریم:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA} (T - T_\infty) = 0 \quad (4-13-8)$$



شکل ۴-۱۳-۳. دونوع معمول از پره‌ها روی برشی از لوله مدور: (a) پره طولی (b) پره مدور یا عمود بر محور جریان



شکل ۴-۱۳-۴. موازنه گرمایی برای هدایت و جابه‌جایی یک بعدی در یک پره مستطیلی با سطح مقطع ثابت

که با فرض $\theta = T - T_\infty$ معادله (۴-۱۳-۸) بدین صورت تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{hP}{kA} \theta = 0 \quad (4-13-9)$$

اولین شرط مرزی این است که در $x = 0$ داریم: $\theta = \theta_0 = T_0 - T_\infty$. با انتگرال‌گیری از معادله (۴-۱۳-۹) شرط مرزی دوم نیز مورد نیاز خواهد بود که بسته به شرایط فیزیکی در $x = L$ حالت‌های مختلفی برای آن می‌توان در نظر گرفت. در اولین حالت، انتهای پره عایق‌بندی شده است که در نتیجه در $x = L$ داریم: $d\theta/dx = 0$. در حالت دوم، گرما به طریق جابه‌جایی از نوک پره تلف می‌شود، به طوری که $-k(dT/dx)_L = h(T_L - T_\infty)$ است. حل مسأله در حالت دوم بسیار پیچیده است و در اینجا بررسی نخواهد شد. با استفاده از حالت اول که در آن نوک پره عایق‌بندی است، با انتگرال‌گیری از معادله (۴-۱۳-۹) داریم:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh [m(L-x)]}{\cosh mL} \quad (4-13-10)$$

که در این معادله $m = (hP/kA)^{1/2}$ است.

گرمای تلف شده از پره توسط معادله زیر نشان داده می‌شود:

$$q = -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \quad (4-13-11)$$

با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۴-۱۳-۱۰) نسبت به x و ترکیب آن با معادله (۴-۱۳-۱۱) داریم:

$$q = (hPkA)^{1/2} (T_0 - T_\infty) \tanh mL \quad (4-13-12)$$

در یک پره واقعی همانطور که به نوک پره نزدیک می‌شویم دمای T کاهش می‌یابد. بنابراین با افزایش فاصله از پایه پره، نرخ انتقال حرارت به ازای واحد سطح کاهش می‌یابد. برای نشان دادن این اثر پره در انتقال حرارت، بازده پره η_f تعریف می‌شود که عبارت است از نسبت گرمای انتقال یافته از پره در حالت واقعی به گرمای انتقال یافته از پره در حالتی که تمام پره در دمای پایه آن یعنی T_0 باشد.

$$\eta_f = \frac{(hPkA)^{1/2}(T_0 - T_\infty) \tanh mL}{h(PL)(T_0 - T_\infty)} = \frac{\tanh mL}{mL} \quad (4-13-13)$$

که PL کل سطح مفید پره است.

رابطه مربوط به mL به صورت زیر است:

$$mL = \left(\frac{hP}{kA}\right)^{1/2} L = \left[\frac{h(2w + 2t)}{k(wt)}\right]^{1/2} L \quad (4-13-14)$$

برای پره‌های نازک $2t$ در مقابل $2w$ بسیار کوچک است و در نتیجه داریم:

$$mL = \left(\frac{2h}{kt}\right)^{1/2} L \quad (4-13-15)$$

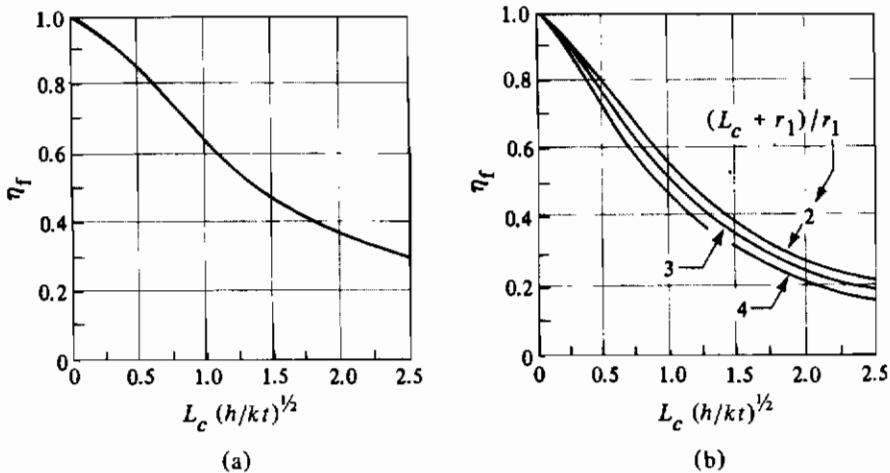
معادله (4-13-15) برای پره‌ای با نوک عایق‌بندی شده نیز صادق است. این معادله را می‌توان برای حالتی که گرما از نوک پره خارج می‌شود اصلاح کرد و مورد استفاده قرار داد. این اصلاح به صورت اضافه کردن طول پره تا مقدار $l/2$ است که در این حالت طول تصحیح شده (L_c) در معادلات (4-13-13) تا (4-13-15) باید مورد استفاده قرار گیرد و این طول به صورت زیر است:

$$L_c = L + \frac{l}{2} \quad (4-13-16)$$

بازده محاسبه شده از معادله (4-13-13) برای یک پره صاف در شکل (4-13-5a) نشان داده شده است. در شکل (4-13-5b) نیز بازده یک پره مدور ارائه شده است. توجه داشته باشید که محور افقی در نمودارهای 4-13-5 عبارت $L_c(h/kt)^{1/2}$ است و مانند معادله (4-13-15) عبارت $L_c(2h/kt)^{1/2}$ نمی‌باشد.

مثال 4-13-2 بازده پره و تلفات گرما از آن

پره مدور آلومینیومی مانند شکل 4-13-3b ($k = 222 \text{ W/m.K}$) به یک لوله مسی با شعاع خارجی 0.04 متر متصل شده است. طول پره 0.04 متر و ضخامت آن 2 میلی متر است. دمای دیواره خارجی لوله یا پایه پره $523/2 \text{ K}$ می‌باشد. هوای محیط بیرون در دمای $343/2 \text{ K}$ و ضریب جابه‌جایی هوا $30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ است. بازده پره و نرخ گرمای تلف شده از پره را محاسبه کنید.



شکل ۴-۱۳-۵. راندمان پره برای پره‌های مختلف (a) پره‌های طولی و مستقیم (b) پره‌های مدور (برای مشخص شدن ابعاد پره‌ها به شکل ۴-۱۳-۳ مراجعه کنید).

حل: داده‌های معلوم مسأله عبارتند از:

$$r_1 = 0/04 \text{ m} , t = 0/002 \text{ m} , k = 222 \text{ W/m.K} , h = 30 \text{ W/m}^2\text{.K}$$

$$T_0 = 523/2 \text{ K} , T_\infty = 343/2 \text{ K} , L = 0/04 \text{ m}$$

همچنین بر اساس معادله (۴-۱۳-۱۶) داریم:

$$L_c = L + t/2 = 0/040 + \frac{0/002}{2} = 0/041 \text{ m}$$

بنابراین:

$$L_c \left(\frac{h}{kt} \right)^{1/2} = 0/041 \times \left[\frac{30}{222 \times 0/002} \right]^{1/2} = 0/337$$

همچنین، $\frac{(L_c + r_1)}{r_1} = \frac{(0/041 + 0/040)}{0/040} = 2/025$ ، با استفاده از شکل (۴-۱۳-۵b)، $\eta_f = 0/89$ به دست می‌آید. انتقال حرارت از خود پره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$q_f = \eta_f h A_f (T_0 - T_\infty) \quad (4-13-17)$$

که A_f سطح مفید خارجی (ناحیه حلقوی) پره می‌باشد و توسط روابط زیر برای هر دو طرف پره به دست می‌آید.

$$A_f = 2\pi [(L_c + r_1)^2 - r_1^2] \quad \text{پره شعاعی} \quad (4-13-18)$$

$$A_f = 2\pi (L_c \times w) \quad \text{پره طولی}$$

بنابراین،

$$A_f = 2\pi [(0/041 + 0/040)^2 - 0/040^2] = 3/118 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

با جایگذاری در معادله (4-13-17) داریم:

$$q_f = 0/89 \times 30 \times (3/118 \times 10^{-2}) (523/2 - 343/2) = 149/9 \text{ W}$$

۳- ضریب کلی انتقال حرارت لوله‌های پره‌دار: در اینجا یک حالت کلی مانند شکل 4-13-3b را بررسی می‌کنیم که در آن گرما از سیال داخل استوانه یا لوله به دیواره فلزی استوانه A به ضخامت Δx_A رسیده و سپس به سیال خارج لوله منتقل می‌شود که لوله دارای پره‌هایی در سطح خارجی خود می‌باشد. گرما از طریق یک سری مقاومت انتقال می‌یابد. کل گرمای خروجی از سطح بیرونی لوله برابر با مجموع تلفات گرمایی به طریق جابه‌جایی از بدنه لوله (q_t) و اتلاف گرما به طریق جابه‌جایی از پره‌ها (q_f) می‌باشد.

$$q = q_t + q_f = h_o A_i (T_0 - T_\infty) + h_o A_f \eta_f (T_0 - T_\infty) \quad (4-13-19)$$

این معادله را به علت این‌که مسیرها موازی هستند، می‌توان برحسب مقاومت هم نوشت.

$$q = (h_o A_i + h_o A_f \eta_f) (T_0 - T_\infty) = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{h_o(A_i + A_f \eta_f)}} = \frac{T_0 - T_\infty}{R} \quad (4-13-20)$$

که در این معادله، A_i سطح لوله در فواصل بین پره‌ها، A_f سطح پره‌ها و h_o ضریب جابه‌جایی خارج لوله می‌باشد. برای به دست آوردن معادله کلی یک لوله پره‌دار مبدل حرارتی می‌توان مقاومت $\frac{1}{h_o A_o}$ در معادله (4-13-15) را با مقاومت ارائه شده در معادله (4-13-20) جایگزین کرد.

$$q = \frac{T_4 - T_1}{1/h_i A_i + \Delta x_A/k_A A_{A1m} + 1/h_o(A_i + A_f \eta_f)} = \frac{T_4 - T_1}{\sum R} \quad (4-13-21)$$

که در این جا T_4 دمای سیال داخل لوله و T_1 دمای سیال خارج از لوله است. بنا نوشتن معادله (4-13-21) به شکل ضریب کلی انتقال حرارت U_i براساس سطح داخلی A_i داریم: $q = U_i A_i (T_4 - T_1)$ که در این رابطه:

$$U_i = \frac{1}{1/h_i + \Delta x_A A_i/k_A A_{A1m} + A_i/h_o(A_i + A_f \eta_f)} \quad (4-13-22)$$

وجود پره‌ها در خارج لوله، مشخصات سیالی که در لوله جریان دارد را تغییر می‌دهد. (چه جریان به صورت موازی با پره صاف باشد، چه جریان عمود بر پره مدور باشد). بنابراین روابط جریان سیال به صورت موازی یا عمود بر لوله بدون پره را نمی‌توان برای پیش‌بینی ضریب جابه‌جایی محیط خارج h_o به کار برد. روابط دیگری در مراجع برای انتقال حرارت در انواع پره‌ها موجود هستند (P3, P1, M1, K4).

۴-۱۴ آنالیز ابعادی در انتقال حرارت

۴-۱۴A مقدمه

همان‌طور که دیدیم در بسیاری از معادلات انتقال حرارت و جریان سیال، تعداد زیادی از گروه‌های بدون بعد مانند عدد رینولدز و عدد پراتل ظاهر می‌شوند. آنالیز ابعادی اغلب برای مجتمع کردن متغیرهای یک پدیده فیزیکی در یک عبارت یا گروه بدون بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. این گروه‌های بدون بعد در همبسته^(۱) کردن اطلاعات آزمایشگاهی بسیار مفید هستند.

یک روش مهم برای به دست آوردن این گروه‌های بدون بعد استفاده از آنالیز ابعادی معادلات دیفرانسیل تشریح شده در بخش ۱۱-۳ است. روش مفید دیگر، روش باکینگهام است که در آن ابتدا متغیرهای مؤثر در یک پدیده فیزیکی خاص را فهرست می‌کنیم. سپس تعداد گروه‌های بدون بعدی که از ترکیب متغیرها به دست می‌آیند را تعیین می‌کنیم.

۴-۱۴B روش باکینگهام

۱- انتقال حرارت در داخل یک لوله: قضیه باکینگهام که در بخش ۱۱-۳ ارائه شد، بیانگر این است که رابطه تابعی بین تعداد q کمیت یا متغیر که واحدهای آنها ممکن است بر حسب u بعد اساسی بیان شود را می‌توان به صورت $(q - u)$ گروه بدون بعد نوشت.

به عنوان مثال دیگری از کاربرد این روش، فرض می‌کنیم که سیالی با جریان مغشوش و سرعت v در داخل لوله‌ای به قطر D جریان دارد و دیواره لوله نیز گرم می‌شود. می‌خواهیم گروه‌های بدون بعدی را مشخص کنیم که ضریب انتقال حرارت h را به متغیرهای D , ρ , μ , c_p , k و v ارتباط دهد. تعداد کل متغیرها $q = 7$ می‌باشد.

تعداد واحدها یا ابعاد اصلی $u = 4$ می‌باشد که عبارتند از جرم M ، طول L ، زمان t و دما T .

واحدهای متغیرها بر حسب این واحدهای اصلی به صورت زیر هستند:

$$h = \frac{M}{t^3 T} \quad D = L \quad \rho = \frac{M}{L^3} \quad \mu = \frac{M}{L t} \quad c_p = \frac{L^2}{t^2 T} \quad k = \frac{M L}{t^3 T} \quad v = \frac{T}{t}$$

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

بنابراین تعداد گروههای بدون بعد یا π ها برابر با $4 - 7$ یا 3 است. پس داریم:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \quad (4-14-1)$$

چهار متغیر D, k, μ و ν که در همه گروههای بدون بعد مشترک هستند را انتخاب می‌کنیم. سپس سه گروه بدون بعد اینگونه به دست می‌آیند:

$$\pi_1 = D^a k^b \mu^c \nu^d \rho \quad (4-14-2)$$

$$\pi_2 = D^e k^f \mu^g \nu^h c_p \quad (4-14-3)$$

$$\pi_3 = D^i k^j \mu^k \nu^l h \quad (4-14-4)$$

برای π_1 با جایگذاری ابعاد واقعی داریم:

$$M^0 L^0 t^0 T^0 = 1 = L^a \left(\frac{ML}{t^2 T}\right)^b \left(\frac{M}{LT}\right)^c \left(\frac{L}{T}\right)^d \left(\frac{M}{L^3}\right) \quad (4-14-5)$$

با جمع کردن همه توانها با هم داریم:

$$(L) \quad 0 = a + b - c + d - 3$$

$$(M) \quad 0 = b + c + 1 \quad (4-14-6)$$

$$(t) \quad 0 = -3b - c - d$$

$$(T) \quad 0 = -b$$

با حل کردن این معادلات به طور همزمان $a = 1, b = 0, c = -1$ و $d = 1$ به دست می‌آیند.

با جایگزین کردن این مقادیر در معادله (۴-۱۴-۲) داریم:

$$\pi_1 = \frac{D\nu\rho}{\mu} = N_{Re} \quad (4-14-7)$$

با تکرار این عمل برای π_2 و π_3 و جایگذاری ابعاد واقعی داریم:

$$\pi_2 = \frac{c_p \mu}{k} = N_{Pr} \quad (4-14-8)$$

$$\pi_3 = \frac{hD}{k} = N_{Nu} \quad (4-14-9)$$

با جایگذاری π_1, π_2 و π_3 در معادله (۴-۱۴-۱) و مرتب کردن آن داریم:

$$\frac{hD}{k} = f\left(\frac{D\nu\rho}{\mu}, \frac{c_p \mu}{k}\right) \quad (4-14-10)$$

این معادله به شکل معادله آشنای انتقال حرارت در داخل لوله هاست (معادله (۴-۵-۸)).

این نوع تجزیه و تحلیل در تعیین روابط تجربی از داده‌های انتقال حرارت مفید است. اما اهمیت

هر گروه بدون بعد باید توسط آزمایش مشخص شود (M1, B1).

۲- انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد خارج از یک سطح صاف عمودی: در حالت انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی از یک دیواره صاف عمودی به طول L به سیال مجاور آن، در مقایسه با حالت جابه‌جایی اجباری داخل یک لوله، گروه‌های بدون بعد متفاوتی نقش دارند زیرا در حالت جابه‌جایی آزاد سرعت یک متغیر است. نیروی شناوری ناشی از اختلاف دانسیته بین سیال سرد و گرم باید یک عامل مهم محسوب شود. همچنانکه در معادلات (۴-۷-۱) و (۴-۷-۲) مشاهده شد، نیروی شناوری به متغیرهای β ، g ، ρ و ΔT بستگی دارد. بنابراین، فهرست متغیرهایی که باید در نظر گرفته شوند و واحدهای اصلی آنها عبارتند از:

$$L = L \quad \rho = \frac{M}{L^3} \quad \mu = \frac{M}{L t} \quad c_p = \frac{L^2}{t^2 T} \quad \beta = \frac{1}{T}$$

$$g = \frac{L}{t^2} \quad \Delta T = T \quad h = \frac{M}{t^2 T} \quad k = \frac{M L}{t^3 T}$$

تعداد متغیرها $q = 9$ می‌باشد. چون $u = 4$ است بنابراین تعداد گروه‌های بدون بعد یا π ها $9 - 4 = 5$ می‌باشد. پس $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ می‌باشد.

چهار متغیر L ، μ ، k و g را که در همه گروه‌های بدون بعد مشترک هستند انتخاب می‌کنیم.

$$\pi_1 = L^a \mu^b k^c g^d \rho \quad \pi_2 = L^e \mu^f k^g g^h c_p \quad \pi_3 = L^i \mu^j k^k g^l \beta$$

$$\pi_4 = L^m \mu^n k^o g^p \Delta T \quad \pi_5 = L^q \mu^r k^s g^t h$$

برای π_1 ابعاد را جایگزین می‌کنیم:

$$1 = L^a \left(\frac{M}{L t}\right)^b \left(\frac{M L}{t^3 T}\right)^c \left(\frac{L}{t^2}\right)^d \left(\frac{M}{L^3}\right) \quad (4-14-11)$$

با حل کردن معادلات مانند قبل، توانها به این صورت به دست می‌آید: $a = \frac{3}{4}$ ، $b = -1$ ، $c = 0$ و $d = \frac{1}{4}$. سپس π_1 به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\pi_1 = \frac{L^{3/2} \rho g^{1/2}}{\mu} \quad (4-14-12)$$

برای حذف توانهای کسری دو طرف رابطه را توان ۲ می‌رسانیم:

$$\pi_1 = \frac{L^3 \rho^2 g}{\mu^2} \quad (4-14-13)$$

با تکرار این عمل برای هر کدام از π های دیگر داریم:

$$\pi_1 = \frac{L^3 \rho^2 g}{\mu^2} \quad \pi_2 = \frac{c_p \mu}{k} = N_{Pr} \quad \pi_3 = \frac{L \mu g \beta}{k}$$

$$\pi_4 = \frac{k \Delta T}{L \mu g} \quad \pi_5 = \frac{h L}{k} = N_{Nu}$$

با ترکیب کردن گروههای بدون بعد π_1 و π_2 و π_3 داریم:

$$\pi_1 \pi_2 \pi_3 = \frac{L^3 \rho^2 g}{\mu^2} \frac{L \mu g \beta}{k} \frac{k \Delta T}{L \mu g} = \frac{L^3 \rho^2 g \beta \Delta T}{\mu^2} = N_{Gr} \quad (4-14-14)$$

معادله (۴-۱۴-۱۴) همان گروه بدون بعد گرافشافت است که در معادله (۴-۷-۴) ارائه شد. بنابراین:

$$N_{Nu} = f(N_{Gr}, N_{Pr}) \quad (4-14-15)$$

۴-۱۵ روشهای عددی برای هدایت پایدار دو بعدی

۴-۱۵A معادله تحلیلی هدایت

در بخش ۴-۴ روشهایی را برای حل مسائل هدایت حرارت در دو بعد با استفاده از روشهای ترسیمی و ضرایب شکل بررسی کردیم. در این بخش به روشهای تحلیلی و عددی خواهیم پرداخت. معادله هدایت در جهت x به صورت زیر است:

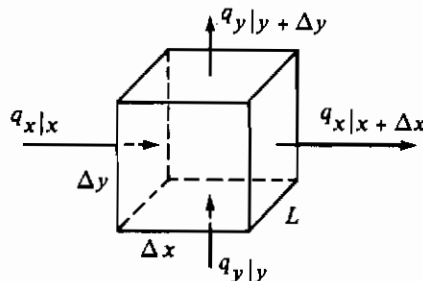
$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4-15-1)$$

اکنون معادله‌ای برای هدایت پایدار در دو جهت x و y به دست می‌آوریم. با مراجعه به شکل ۴-۱۵-۱، یک مکعب مستطیل به ابعاد Δx در Δy در L نشان داده شده است. تمام گرمای ورودی به مکعب مستطیل برابر گرمای خروجی از آن است.

$$q_{x|x} + q_{y|y} = q_{x|x+\Delta x} + q_{y|y+\Delta y} \quad (4-15-2)$$

اکنون، از معادله (۴-۱۵-۱) داریم:

$$q_{x|x} = -k(\Delta y L) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \quad (4-15-3)$$



شکل ۴-۱۵-۱. هدایت پایدار در دو بعد

با نوشتن معادلات مشابه برای سه جمله دیگر و جایگزین کردن آنها در معادله (۲-۱۵-۴) داریم:

$$-k(\Delta y L) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x - k(\Delta x L) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y = -k(\Delta y L) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - k(\Delta x L) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} \quad (۴-۱۵-۴)$$

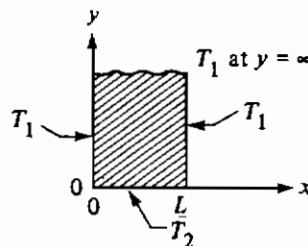
با تقسیم کردن طرفین رابطه بر $\Delta x \Delta y L$ و میل دادن Δx و Δy به سمت صفر معادله نهایی برای هدایت پایدار دو بُعدی به دست می آید:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (۴-۱۵-۵)$$

این رابطه، معادله لاپلاس نام دارد. چند روش تحلیلی برای حل این معادله موجود است. در روش جداسازی متغیرها، جواب نهایی به صورت سری نامتناهی فوریه به دست می آید ($H1, G2, K1$). حالت نشان داده شده در شکل ۲-۱۵-۴ را در نظر می گیریم. این شکل، جامد نیمه متناهی^(۱) نامیده می شود چون یکی از ابعاد آن ∞ است. دو مرز دیگر در $x = 0$ و $x = L$ در دمای مطلق T_1 ثابت نگهداشته می شوند. مرز $y = 0$ در دمای مطلق T_2 ثابت نگهداشته می شود و در $y = \infty$ دما $T = T_1$ است. پاسخی که T را به مختصات x و y مربوط می سازد، عبارت است از:

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1} e^{-(\pi/L)y} \sin \frac{1\pi x}{L} + \frac{1}{3} e^{-(3\pi/L)y} \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right] \quad (۴-۱۵-۶)$$

روشهای تحلیلی دیگری نیز در دسترس هستند و در بسیاری از مراجع مورد بحث قرار گرفته اند ($K1, G2, H1, C2$). تعداد زیادی از پاسخهای تحلیلی نیز در مراجع آورده شده اند. اما نمونه های زیادی از موارد عملی وجود دارد که در آنها شکل هندسی و شرایط مرزی پیچیده تر از آن است که بتوان برای آن پاسخ به دست آورد. بنابراین در این موارد روشهای عددی تفاضل محدود مورد استفاده قرار می گیرند که در بخش بعدی راجع به آنها بحث شده است.



شکل ۲-۱۵-۴. هدایت پایدار در دو بُعد در یک صفحه نیمه بینهایت

۴-۱۵B روشهای عددی تفاضل محدود

۱- به دست آوردن معادلات: با ظهور رایانه‌های دیجیتالی سریع، حل بسیاری از مسائل پیچیده هدایت گرمایی دو بُعدی توسط روشهای عددی امکان پذیر شده است. برای به دست آوردن معادلات مربوطه، می‌توانیم از معادله دیفرانسیل جزئی (۴-۱۵-۵) شروع کنیم. با در نظر گرفتن تفاضل محدود $\partial^2 T / \partial x^2$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial(\partial T / \partial x)}{\partial x} = \frac{\frac{T_{n+1,m} - T_{n,m}}{\Delta x} - \frac{T_{n,m} - T_{n-1,m}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{T_{n+1,m} - 2T_{n,m} + T_{n-1,m}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (4-15-7)$$

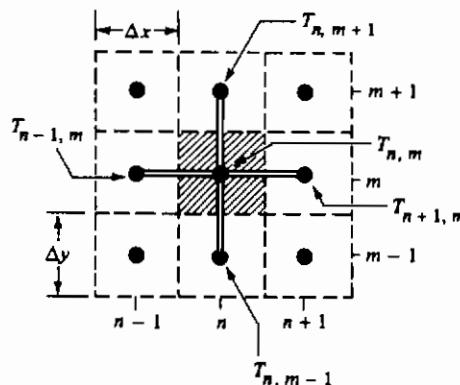
در این رابطه زیر نویس m نشان دهنده مقدار معلوم y و $(m+1)$ نشان دهنده مقدار $y + \Delta y$ است و زیر نویس n هم موقعیت T را روی محور x مشخص می‌کند. این حالت در شکل ۴-۱۵-۳ نشان داده شده است. سطح جامد دو بعدی به مربعاتی تقسیم می‌شود. جرم داخل هر مربع را در مرکز آن تصور می‌کنیم و این جرم تمرکز یافته را یک گره^(۱) می‌نامیم. فرض می‌کنیم که هر گره با گره‌های مجاور خود توسط میله‌های کوچکی ارتباط دارد که در شکل نشان داده شده است.

تفاضل محدود $\partial^2 T / \partial y^2$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{n,m+1} - 2T_{n,m} + T_{n,m-1}}{(\Delta y)^2} \quad (4-15-8)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۱۵-۷) و (۴-۱۵-۸) در معادله (۴-۱۵-۵) و قرار دادن $\Delta x = \Delta y$ خواهیم داشت:

$$T_{n,m+1} + T_{n,m-1} + T_{n+1,m} + T_{n-1,m} - 4T_{n,m} = 0 \quad (4-15-9)$$



شکل ۴-۱۵-۳. دماها و آرایش گره‌ها در هدایت گرمایی پایدار دو بُعدی

این معادله بیان می‌کند که جریان گرمایی خالص به هر نقطه یا گره در حالت پایدار صفر می‌باشد. سطح هاشور خورده در شکل ۳-۱۵-۴ نشان دهنده ناحیه‌ای است که روی آن موازنه گرمایی نوشته شده است. به طریق دیگر، معادله (۴-۱۵-۹) را می‌توان با نوشتن موازنه گرمایی روی این ناحیه هاشورخورده به دست آورد. کل گرمای ورودی به ازای واحد ضخامت عبارت است از:

$$\frac{k \Delta y}{\Delta x} (T_{n-1,m} - T_{n,m}) + \frac{k \Delta y}{\Delta x} (T_{n+1,m} - T_{n,m}) \\ + \frac{k \Delta x}{\Delta y} (T_{n,m+1} - T_{n,m}) + \frac{k \Delta x}{\Delta y} (T_{n,m-1} - T_{n,m}) = 0 \quad (4-15-10)$$

با مرتب کردن این رابطه، معادله (۴-۱۵-۹) به دست می‌آید. در شکل ۳-۱۵-۴ میله‌های ارتباطی گره‌ها مانند میله‌های فرضی هدایت‌کننده گرما عمل می‌کنند.

برای استفاده از روش عددی، معادله (۴-۱۵-۹) برای هر گره نوشته می‌شود. بنابراین، برای N گره نامعلوم، N معادله جبری خطی باید نوشته شود و دستگاه معادلات برای به دست آوردن دمای گره‌های مختلف حل شود. برای حل دستی با چند گره، روش تکرار را می‌توان برای حل دستگاه معادلات به کار برد.

۲- روش حل تکرار: در روش تکرار، طرف راست معادله (۴-۱۵-۹) با یک مقدار باقیمانده $\bar{q}_{n,m}$ برابر قرار داده می‌شود.

$$\bar{q}_{n,m} = T_{n-1,m} + T_{n+1,m} + T_{n,m+1} + T_{n,m-1} - 4T_{n,m} \quad (4-15-11)$$

چون در حالت پایدار $\bar{q}_{n,m} = 0$ است، با حل معادله نسبت به $T_{n,m}$ ، در معادلات (۴-۱۵-۱۱) یا (۴-۱۵-۹) داریم:

$$T_{n,m} = \frac{T_{n-1,m} + T_{n+1,m} + T_{n,m+1} + T_{n,m-1}}{4} \quad (4-15-12)$$

معادلات (۴-۱۵-۱۱) و (۴-۱۵-۱۲) معادلات نهایی هستند. کاربرد آنها در مثال زیر مشخص می‌شود.

مثال ۳-۱۵-۱ هدایت پایدار در دو جهت

شکا ۴-۱۵-۴ مقطعی از یک محفظه توخالی مکعبی شکل را نشان می‌دهد. ابعاد داخلی $4 \times 2 \text{ m}$ و ابعاد خارجی $8 \times 8 \text{ m}$ می‌باشد. طول محفظه 20 m است. دیواره‌های داخلی در دمای 600 K و دیواره خارجی در دمای 300 K ثابت نگهداشته شده‌اند. $k = 1/5 \text{ W/m.K}$ است. در شرایط پایدار اتلاف گرما به ازای واحد طول محفظه رابه دست آورید. از گره‌بندی

۱ m × ۱ m استفاده کنید.

حل: چون محفظه متقارن است، از $\frac{1}{4}$ محفظه (قسمت هاشور خورده) برای محاسبات استفاده می‌شود. تخمینهای اولیه برای اولین تقریب انجام می‌شود. برای گره‌ها داریم:

$$T_{1,2} = 450 \text{ K} \quad T_{2,2} = 400 \quad , \quad T_{3,2} = 400$$

$$T_{3,3} = 400 \quad , \quad T_{3,4} = 450 \quad , \quad T_{3,5} = 500$$

$$T_{4,2} = 325 \quad , \quad T_{4,3} = 350 \quad , \quad T_{4,4} = 375 \quad , \quad T_{4,5} = 400$$

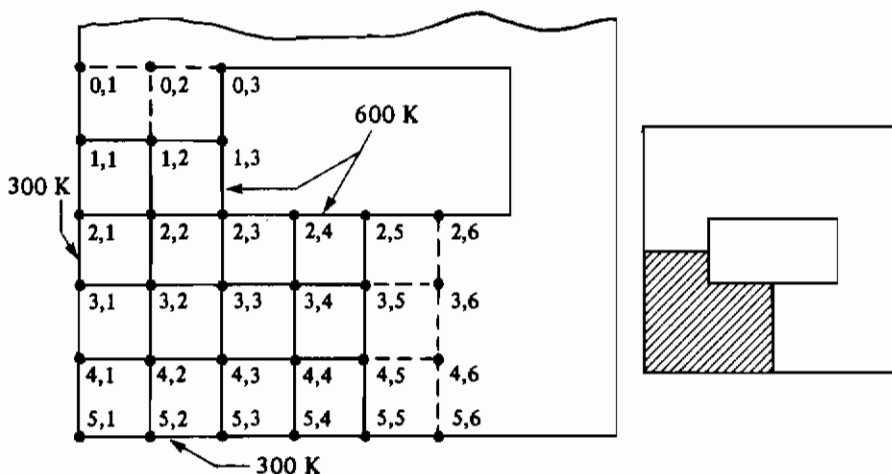
توجه داشته باشید که بر اساس تقارن: $T_{0,2} = T_{2,2}$ و $T_{3,6} = T_{3,4}$ ، $T_{4,6} = T_{4,4}$ است.

برای شروع محاسبه می‌توان هر نقطه داخلی را انتخاب کرد اما معمولاً بهتر است که از نقاط نزدیک مرز شروع کنیم. با استفاده از $T_{1,2}$ مقدار باقیمانده $\bar{q}_{1,2}$ را به وسیله معادله (۴-۱۵-۱۱) محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \bar{q}_{1,2} &= T_{1,1} + T_{1,3} + T_{0,2} + T_{2,2} - 4T_{1,2} \\ &= 300 + 600 + 400 + 400 - 4 \times 450 = -100 \end{aligned}$$

بنابراین، $T_{1,2}$ در حالت پایدار نیست. سپس با قرار دادن $\bar{q}_{1,2}$ مساوی با صفر و محاسبه مقدار جدید $T_{1,2}$ به وسیله معادله (۴-۱۵-۱۲) داریم:

$$T_{1,2} = \frac{T_{1,1} + T_{1,3} + T_{0,2} + T_{2,2}}{4} = \frac{300 + 600 + 400 + 400}{4} = 425$$



شکل ۴-۱۵-۴. الگوی گره‌بندی مربعی در مثال ۴-۱۵-۱

این مقدار جدید $T_{1,2}$ یعنی 425 K جایگزین مقدار قبلی آن یعنی 450 خواهد شد و برای محاسبه دمای گره‌های دیگر بکار خواهد رفت. سپس:

$$\bar{q}_{2,2} = T_{2,1} + T_{2,3} + T_{1,2} + T_{2,2} - 4T_{2,2}$$

$$= 300 + 600 + 425 + 400 - 4 \times 400 = 125$$

با قرار دادن $\bar{q}_{2,2}$ برابر با صفر و استفاده از معادله $(4-15-12)$ داریم:

$$T_{2,2} = \frac{T_{2,1} + T_{2,3} + T_{1,2} + T_{2,2}}{4} = \frac{300 + 600 + 425 + 400}{4} = 431$$

با ادامه دادن برای بقیه گره‌های داخلی داریم:

$$\bar{q}_{3,2} = 300 + 400 + 431 + 325 - 4 \times 400 = -144$$

با استفاده از معادله $(4-15-12)$ داریم: $T_{3,2} = 364$.

$$\bar{q}_{3,3} = 364 + 450 + 600 + 350 - 4 \times 400 = 164$$

$$T_{3,3} = 441$$

$$\bar{q}_{3,4} = 441 + 500 + 600 + 375 - 4 \times 450 = 116$$

$$T_{3,4} = 479$$

$$\bar{q}_{4,5} = 479 + 479 + 600 + 400 - 4 \times 500 = -42$$

$$T_{4,5} = 489$$

$$\bar{q}_{5,2} = 300 + 350 + 364 + 300 - 4 \times 325 = 14$$

$$T_{5,2} = 329$$

$$\bar{q}_{5,3} = 329 + 375 + 441 + 300 - 4 \times 350 = 45$$

$$T_{5,3} = 361$$

$$\bar{q}_{5,4} = 361 + 400 + 479 + 300 - 4 \times 375 = 40$$

$$T_{5,4} = 385$$

$$\bar{q}_{5,5} = 385 + 385 + 489 + 399 - 4 \times 400 = -41$$

$$T_{5,5} = 390$$

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

پس از یک بار جاروب کردن کل نقاط و گره‌ها می‌توانیم تقریب دوم را با استفاده از مقادیر جدید محاسبه شده شروع کنیم. می‌توانیم دوباره با $T_{1,2}$ شروع کنیم یا می‌توانیم گره‌ای را که بیشترین مقدار باقیمانده را دارد انتخاب کنیم. با شروع مجدد از $T_{1,2}$ داریم:

$$\bar{q}_{1,2} = 300 + 600 + 431 + 431 - 4 \times 425 = 62$$

$$T_{1,2} = 440$$

$$\bar{q}_{2,2} = 300 + 600 + 440 + 364 - 4 \times 431 = -20$$

$$T_{2,2} = 426$$

این محاسبه تا زمانی که مقدار باقیمانده به اندازه کافی کوچک شود ادامه پیدا می‌کند. مقادیر نهایی به صورت زیر هستند:

$$T_{1,2} = 441 \quad T_{2,2} = 432 \quad T_{3,2} = 384 \quad T_{3,3} = 461 \quad T_{3,4} = 485$$

$$T_{2,5} = 490 \quad T_{4,2} = 340 \quad T_{4,3} = 372 \quad T_{4,4} = 387 \quad T_{4,5} = 391$$

برای محاسبه کل گرمای تلف شده از محفظه به ازای واحد طول آن از شکل ۴-۱۵-۵ استفاده می‌کنیم. برای گره $T_{2,4}$ تا $T_{3,4}$ با $\Delta x = \Delta y$ و عمق ۱ m داریم:

$$q = \frac{k A \Delta T}{\Delta x} = \frac{k [\Delta x \times 1]}{\Delta x} (T_{2,4} - T_{3,4}) = k (T_{2,4} - T_{3,4}) \quad (4-15-13)$$

شار گرمایی گره $T_{2,5}$ تا $T_{3,5}$ و گره $T_{1,2}$ تا $T_{1,3}$ باید به دلیل تقارن در $\frac{1}{4}$ ضرب شود. کل گرمای هدایت شده مجموع پنج مسیر مربوط به $\frac{1}{4}$ از جسم است. برای چهار قسمت دیگر داریم:

$$q_1 = 4k \left[\frac{1}{4} (T_{1,3} - T_{1,2}) + (T_{2,3} - T_{2,2}) + (T_{2,3} - T_{3,3}) \right] \quad (4-15-14)$$

$$+ (T_{2,4} - T_{3,4}) + \frac{1}{4} (T_{2,5} - T_{3,5})$$

$$= 4 \times 1/5 \left[\frac{1}{4} (600 - 441) + (600 - 432) + (600 - 461) \right]$$

$$+ (600 - 485) + \frac{1}{4} (600 - 490)$$

$$= 3340 \text{ W} \quad \text{به ازای عمق یک متر}$$

همچنین کل گرمای هدایت شده را همان‌گونه که در شکل ۴-۱۵-۵ نشان داده شده است می‌توان با استفاده از گرمای خروجی از گره‌ها حساب کرد در این روش خواهیم داشت:

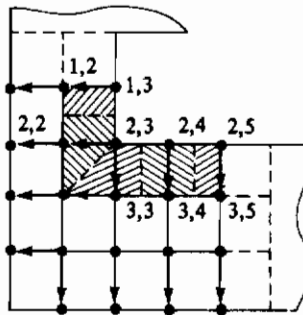
۳- مقدار میانگین به صورت زیر خواهد بود: $q_{II} = 3430 \text{ W}$

$$q_{av} = \frac{3340 + 3430}{2} = 3385 \text{ W} \text{ به ازای عمق یک متر}$$

اگر تعداد بیشتری گره داشتیم یعنی گره‌بندی را کوچکتر در نظر می‌گرفتیم حل دقیق‌تری به دست می‌آمد. با به کار بردن فاصله گره 0.5 m به جای 1 m در مثال ۱-۱۵-۴، q_{av} برابر با 3250 W به دست می‌آید. اگر از گره‌بندی خیلی کوچکتر استفاده شود دقت معادله بیشتر می‌شود اما حجم محاسبات افزایش می‌یابد و برای حل باید از کامپیوتر استفاده کرد. برای حل همزمان دستگاه معادلات در کامپیوتر از روشهای حل ماتریسی استفاده می‌شود. روش تکرار که غالباً اینجا استفاده می‌شود روش گوس-سایدل^(۱) نام دارد. Conte نیز یک سابروتین برای حل چنین دستگاه معادلاتی ارائه می‌کند (C7). اغلب کامپیوترها سابروتینهای استاندارد برای حل این معادلات دارند (K1,G2).

۳- معادلات مربوط به شرایط مرزی دیگر: در مثال ۱-۱۵-۴ شرایط در مرزها به گونه‌ای بود که گره‌ها معلوم و ثابت بودند. در حالتی که در مرز جابه‌جایی وجود دارد و دما مقدار ثابت T_{∞} است، موازنه گرما روی گره m,n در شکل ۴-۱۵-۶a به این صورت است که: گرمای ورودی = گرمای خروجی (K1)

$$\frac{k \Delta y}{\Delta x} (T_{n-1,m} - T_{n,m}) + \frac{k \Delta x}{2 \Delta y} (T_{n,m+1} - T_{n,m}) + \frac{k \Delta x}{2 \Delta y} (T_{n,m-1} - T_{n,m}) = h \Delta y (T_{n,m} - T_{\infty}) \quad (4-15-15)$$



شکل ۴-۱۵-۵. طرز محاسبه کل هدایت گرمایی

با در نظر گرفتن $\Delta x = \Delta y$ و مرتب کردن و برابر قرار دادن معادله نهایی با $\bar{q}_{n,m}$ (مقدار باقیمانده) نتایج زیر به دست می‌آید:

الف - برای جابه‌جایی در مرز:

$$\frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + \frac{1}{2}(2T_{n-1,m} + T_{n,m+1} + T_{n,m-1}) - T_{n,m} \left(\frac{h \Delta x}{k} + 2 \right) = \bar{q}_{n,m} \quad (4-15-16)$$

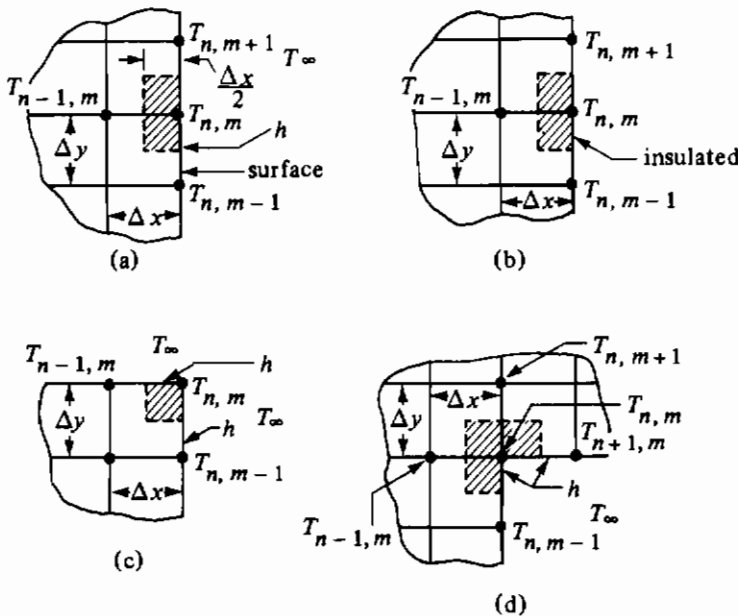
به روش مشابه برای حالت‌های ارائه شده در شکل ۴-۱۵-۶ داریم:

ب - برای مرز عایق‌بندی شده:

$$\frac{1}{2}(T_{n,m+1} + T_{n,m-1}) + T_{n-1,m} - 2T_{n,m} = \bar{q}_{n,m} \quad (4-15-17)$$

پ - برای گوشه خارجی همراه با جابه‌جایی در مرز:

$$\frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + \frac{1}{2}(T_{n-1,m} + T_{n,m-1}) - \left(\frac{h \Delta x}{k} + 1 \right) T_{n,m} = \bar{q}_{n,m} \quad (4-15-18)$$



شکل ۴-۱۵-۶. انواع دیگر شرایط مرزی: (a) جابه‌جایی در یک مرز (b) مرز عایق شده

(c) گوشه خارجی همراه با جابه‌جایی (d) گوشه داخلی با مرز جابه‌جایی

ت - برای گوشه داخلی همراه با جابه‌جایی در مرز:

$$\frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + T_{n-1,m} + T_{n,m+1} + \frac{1}{2}(T_{n+1,m} + T_{n,m-1}) - \left(3 + \frac{h \Delta x}{k}\right) T_{n,m} = \bar{q}_{n,m} \quad (4-15-19)$$

برای مرزهای منحنی شکل و دیگر انواع مرزها مراجع دیگر را ببینید (C3, K1). برای استفاده از معادلات (۴-۱۵-۱۶) تا (۴-۱۵-۱۹) ابتدا مقدار باقیمانده $\bar{q}_{n,m}$ با استفاده از معادله مناسب بایستی به دست آید. سپس $\bar{q}_{n,m} = 0$ قرار داده می‌شود و در معادله نهایی $T_{n,m}$ محاسبه می‌شود.

مسائل

۴-۱-۱. عایق‌بندی یک اتاق سرد: اتلاف گرمایی در واحد سطح از دیواره یک انبار سرد مواد غذایی را که دارای عایق‌بندی موقت می‌باشد محاسبه کنید. دمای سطح بیرونی $299/9 \text{ K}$ و دمای درونی $276/5 \text{ K}$ است. دیواره از یک لایه چوب پنبه به ضخامت $25/4 \text{ mm}$ تشکیل شده است که دارای $k = 0/0433 \text{ W/m.K}$ است.

جواب: $39/9 \text{ W/m}^2$

۴-۱-۲. تعیین ضریب هدایت گرمایی: برای تعیین ضریب هدایت گرمایی یک ماده عایق، دماهای دو طرف یک ورقه صاف به ضخامت 25 mm از همان جنس به صورت $318/4 \text{ K}$ و $303/2 \text{ K}$ اندازه‌گیری شده‌اند. شار گرمایی $35/1 \text{ W/m}^2$ است. ضریب هدایت گرمایی را بر حسب W/m.K و $\text{btu/h.ft.}^\circ\text{F}$ محاسبه کنید.

۴-۲-۱. ضریب هدایت گرمایی میانگین در یک استوانه: ثابت کنید که اگر ضریب هدایت گرمایی مطابق معادله (۴-۱-۱۱) با دما به صورت خطی تغییر کند، مقدار مناسب میانگین k_m برای معادله استوانه‌ای توسط معادله (۴-۲-۳) به دست می‌آید، همچنانکه برای یک ورقه نیز قابل استفاده است.

۴-۲-۲. دفع گرما از یک لوله ماریچ سردکننده: از یک لوله ماریچ سردکننده از جنس فولاد ضد زنگ 304 به طول 1 ft و قطر داخلی $0/25 \text{ in}$ و قطر خارجی $0/4 \text{ in}$ برای دفع گرما از یک حمام استفاده می‌شود. دما در سطح داخلی لوله 40°F و در سطح خارجی 80°F است. ضریب هدایت گرمایی فولاد ضد زنگ 304 تابعی از دما به صورت زیر است:

$$k = 7/75 + 7/78 \times 10^{-3} T$$

که k برحسب $\text{btu/h.ft.}^\circ\text{F}$ و دما برحسب $^\circ\text{F}$ می باشد. گرمای دفع شده برحسب btu/s و وات چقدر است؟

جواب: 1292 W یا $1/225 \text{ btu/s}$

۴-۲-۳. دفع گرما از یک حمام: مسأله ۲-۲-۴ را برای یک لوله ماریج سردکننده از جنس فولاد ضدزنگ 308 با ضریب هدایت گرمایی میانگین $15/23 \text{ W/m.K}$ تکرار کنید.

۴-۲-۴. تغییر ضریب هدایت گرمایی: در یک صفحه صاف به ضخامت Δx ، یک سطح در دمای T_1 و سطح دیگر در دمای T_2 ثابت نگهداشته می شوند. اگر ضریب هدایت گرمایی مطابق رابطه زیر با دما تغییر کند:

$$k = A + bT + cT^2$$

که در اینجا b, a و c سه ثابت هستند. عبارتی برای شار گرمایی یک بعدی q/A به دست آورید. ۴-۲-۵. توزیع دما در یک کره توخالی: معادله (۴-۲-۱۴) را برای هدایت گرمایی در حالت پایدار در یک کره توخالی به دست آورید. همچنین رابطه‌ای به دست آورید که نشان دهد دما با شعاع به صورت هیپربولیک تغییر می کند.

$$\frac{(T - T_1)}{(T_2 - T_1)} = \frac{r_2}{(r_2 - r_1)} \times \left(1 - \frac{r_1}{r}\right) \quad \text{جواب:}$$

۴-۳-۱. عایق کاری لازم برای سردخانه مواد غذایی: قرار است یک سردخانه مواد غذایی ساخته شود. لایه داخلی دیوار سردخانه از چوب کاج به ضخامت $19/1 \text{ mm}$ ، لایه میانی آن از جنس چوب پنبه و لایه بیرونی آن از بتون به ضخامت $50/8 \text{ mm}$ ساخته می شود. دمای سطح داخلی دیواره $17/8 \text{ }^\circ\text{C}$ و دمای سطح بیرونی $29/4 \text{ }^\circ\text{C}$ است. ضریب هدایت میانگین چوب کاج $0/151$ ، چوب پنبه $0/0433$ و بتون $0/762 \text{ W/m.K}$ است. کل سطح داخلی سردخانه تقریباً برابر 39 m^2 می باشد (از آثار انتهایی و گوشه‌ها صرف نظر می شود). ضخامت لازم چوب پنبه برای این که افت گرمایی در 586 W ثابت بماند چقدر است؟

جواب: $0/128 \text{ m}$

۴-۳-۲. عایق کردن یک کوره: دیواره یک کوره به ضخامت $0/244 \text{ m}$ از ماده‌ای که ضریب هدایتی آن $1/30 \text{ W/m.K}$ می باشد ساخته شده است. دیواره از خارج با ماده‌ای که k میانگین آن $0/346 \text{ W/m.K}$ است عایق بندی خواهد شد به طوری که اتلاف گرمایی از کوره کوچکتر یا مساوی 1830 W/m^2 بشود. دمای سطح داخلی 1588 K و سطح بیرونی 299 K است. ضخامت عایق لازم را محاسبه کنید.

جواب: $0/179 \text{ m}$

۴-۳-۳. **اُفت گرمایی از پنجره دو جداره ترموپان^(۱):** یک پنجره دو جداره ترموپان از دو لایه شیشه‌ای که به وسیله یک لایه هوای ساکن خشک جدا می‌شوند تشکیل می‌شود. ضخامت هر یک از شیشه‌ها ۶/۳۵ mm است و فاصله بین آنها نیز ۶/۳۵ mm است که از هوا پر شده است. ضریب هدایت گرمایی شیشه ۰/۸۶۹ W/m.K و ضریب هدایت هوا در بازه دمایی مورد نظر ۰/۰۲۶ W/m.K می‌باشد. برای کاهش دمای ۲۷/۸ K، افت گرمایی پنجره‌ای به ابعاد $۱/۸۳ \text{ m} \times ۰/۹۱۴$ را حساب کنید. (تذکر: این محاسبه از اثر ضریب جابه‌جایی در طرف بیرونی پنجره و طرف داخلی آن و داخل پنجره صرف نظر می‌کند).

۴-۳-۴. **اُفت گرمایی از خط لوله بخار:** یک خط لوله فولادی به قطر اسمی ۲ in و شماره ۴۰، حاوی بخار اشباع در $۱۲۱/۱^\circ\text{C}$ می‌باشد. خط لوله به وسیله یک لایه ۲۵/۴ mm از آزیست عایق‌بندی شده است. با فرض این‌که دمای سطح داخلی دیواره فلزی لوله $۱۲۱/۱^\circ\text{C}$ و دمای سطح بیرونی عایق $۲۶/۷^\circ\text{C}$ باشد، افت گرمایی در طول ۳۰/۵ m از لوله را به دست آورید. همچنین جرم بخار مایع شده در ساعت را که به دلیل افت گرمایی اتفاق می‌افتد برحسب kg محاسبه کنید. k_m برای فولاد از ضمیمه A-3 برابر با ۴۵ W/m.K و بر اساس درون‌یابی خطی در دمای میانگین $\frac{(۱۲۱/۱ + ۲۶/۷)}{۲}$ یا $۷۳/۹^\circ\text{C}$ مقدار k برای آزیست ۰/۱۸۲ است.

جواب: ۵۳۸۴ W و $۸/۸۱ \text{ kg/h}$

۴-۳-۵. **محاسبه اُفت گرمایی به روش حدس و خطا:** مجرای خروجی یک گرمکن به قطر ۱۱۴/۳ mm دارای دیواره‌های سرامیکی به ضخامت ۶/۴ mm است. k میانگین برابر $۱/۵۲ \text{ W/m.K}$ می‌باشد. پشت این دیواره به وسیله یک لایه پشم سنگ به ضخامت ۱۰۲ mm عایق‌بندی شده است. ضریب هدایت گرمایی پشم سنگ $T^\circ\text{C}$ (W/m.K) $۱۰^{-۴} \times ۱/۵۶ + ۰/۰۴۶ = k$ است. دمای سطح داخلی سرامیک $T_1 = ۵۸۸/۷ \text{ K}$ و دمای سطح خارجی عایق $T_2 = ۳۱۱ \text{ K}$ می‌باشد. اُفت گرمایی را به ازای ۱/۵ m از طول مجرا به دست آورید و T_2 دمای فصل مشترک سرامیک و عایق را حساب کنید. (راهنمایی: مقدار صحیح k_m برای عایق مقداری است که در دمای میانگین $\frac{(T_2 + T_1)}{۲}$ محاسبه شود. بنابراین، به عنوان حدس اولیه دمای میانگین را مثلاً ۴۴۸ K فرض کنید. سپس افت گرمایی و T_2 را محاسبه کنید. بعد از آن با استفاده از مقدار جدید T_2 یک دمای میانگین جدید محاسبه کرده و به همین ترتیب ادامه دهید.)

۴-۳-۶. **تلفات گرمایی از طریق جابه‌جایی و هدایت:** یک پنجره شیشه‌ای به مساحت ۵۵۷ m^2 روی

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

سطح خارجی دیواره چوبی یک اتاق نصب شده است. ابعاد دیوار $3/05 \text{ m} \times 2/44 \text{ m}$ است. مقدار k برای چوب $0/1505 \text{ W/m.K}$ و ضخامت آن $25/4 \text{ mm}$ است و برای شیشه $k = 0/692$ و ضخامت آن $3/18 \text{ mm}$ است. دمای داخل اتاق $(26/7^\circ\text{C})$ $299/9 \text{ K}$ و دمای هوای بیرون $266/5 \text{ K}$ است. ضریب جابه‌جایی روی سطح داخلی شیشه و چوب $h_i = 8/5 \text{ W/m}^2.\text{K}$ و برای سطح بیرونی $h_o = 8/5$ تخمین زده می‌شود. تلفات گرمایی از دیواره چوبی و شیشه و مقدار کل آن را محاسبه کنید.

جواب: (دیواره چوبی) $569/2 \text{ W}$ ، (دیواره شیشه‌ای) $77/6 \text{ W}$ و (کل) $646/8 \text{ W}$ ۴-۳-۷

جابه‌جایی، هدایت و ضریب کلی انتقال حرارت: یک گاز در دمای 450 K درون یک لوله 2 in شماره ۴۰ جریان دارد. لوله با عایقی به ضخامت 51 mm و k میانگین $0/623 \text{ W/m.K}$ عایق بندی شده است. ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی گاز در داخل لوله $30/7 \text{ W/m}^2.\text{K}$ می‌باشد و ضریب جابه‌جایی در خارج عایق $10/8 \text{ W/m}^2.\text{K}$ و دمای هوای بیرون 300 K است. الف - تلفات گرمایی به ازای واحد طول لوله را با استفاده از مقاومتها به دست آورید.

ب - قسمت (الف) را با استفاده از ضریب کلی U_o براساس سطح بیرونی A_o تکرار کنید. ۴-۳-۸

انتقال حرارت در یک گرمکن بخار: آب در دمای میانگین 70°F در یک لوله فولادی 2 in شماره ۴۰ جریان دارد. بخار در دمای 220°F در بیرون لوله مایع می‌شود. ضریب جابه‌جایی برای آب درون لوله $500 \text{ btu/h.ft}^2.\text{F}$ و $h = 500$ و ضریب میعان بخار در بیرون $h = 1500$ می‌باشد. الف - تلفات گرمایی به ازای واحد طول لوله را با استفاده از مقاومتها به دست آورید. ب - قسمت (الف) را با استفاده از ضریب کلی U_i براساس سطح داخلی A_i تکرار کنید. پ - قسمت (الف) را با استفاده از ضریب کلی U_o تکرار کنید.

$$q = 26710 \text{ btu/h} \quad (\text{الف}) \quad (7/828 \text{ kW}) \quad \text{جواب:}$$

$$U_i = 329/1 \text{ btu/h.ft}^2.\text{F} \quad (1869 \text{ W/m}^2.\text{K}) \quad \text{ب -}$$

$$U_o = 286/4 \text{ btu/h.ft}^2.\text{F} \quad (1626 \text{ W/m}^2.\text{K}) \quad \text{پ -}$$

تلفات گرمایی در وسایل اندازه‌گیری دما: یک لوله فولادی که از درون آن بخار عبور می‌کند دارای قطر خارجی 89 mm می‌باشد. این لوله به وسیله یک عایق گرمایی با ضریب میانگین $0/43 \text{ W/m.K}$ و ضخامت 76 mm پوشش داده شده است. دو ترموکوپل که یکی در فصل مشترک لوله و عایق و دیگری در سطح خارجی عایق قرار دارند به ترتیب دماهای 115°C و 32°C را نشان می‌دهند. تلفات گرمایی به ازای واحد طول لوله را برحسب وات محاسبه کنید.

تأثیر ضریب جابه‌جایی روی اتلاف گرمایی پنجره‌های دو جداره: مسأله ۴-۳-۳ در ۴-۳-۱۰

مورد تلفات گرمایی در پنجره‌های دو جداره را مجدداً حل کنید. ضریب جابه‌جایی در سطح خارجی شیشه بیرونی $h = 11/35 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ و در سطح خارجی شیشه درونی $h = 11/35$ را نیز در نظر بگیرید. ضریب کلی انتقال حرارت U را نیز محاسبه کنید.

جواب: $q = 106/7 \text{ W}$ و $U = 2/29 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

۴-۳-۱۱. تولید یکنواخت گرما به صورت شیمیایی: گرما توسط یک واکنش شیمیایی در یک استوانه بلند به شعاع $91/4 \text{ mm}$ به طور یکنواخت تولید می‌شود. نرخ تولید گرما $46/6 \text{ W/m}^2$ ثابت می‌باشد. دیواره‌های استوانه به گونه‌ای خنک می‌شود که دمای آن در 311 K ثابت بماند. ضریب هدایت گرمایی $0/865 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ است. دمای خط مرکزی استوانه را در حالت پایدار محاسبه کنید.

جواب: $T_0 = 311/112 \text{ K}$

۴-۳-۱۲. گرمای تنفس^(۱) یک محصول غذایی: یک محصول غذایی تازه در یک سردخانه به دمای 278 K نگهداری می‌شود. این محصول در یک ظرف به شکل مکعب مستطیل نازک بسته‌بندی شده است و تمام سطوح آن بجز سطح بالایی که در معرض هوا با دمای 278 K قرار دارد، عایق‌بندی شده است. دمای سطح به صورت تقریبی 278 K در نظر گرفته می‌شود. ضخامت ظرف $152/4 \text{ mm}$ و کل سطح مفید آن $0/186 \text{ m}^2$ است. دانسیته ماده غذایی 641 kg/m^3 است. گرمای تنفس ماده غذایی $0/070 \text{ kJ/kg}\cdot\text{h}$ و ضریب هدایت گرمایی آن $0/346 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ می‌باشد. حداکثر دمای ماده غذایی در حالت پایدار و کل حرارت دفع شده بر حسب وات چقدر است. (توجه: در این مسأله فرض شده است که هیچگونه گردش هوا در داخل ماده غذایی وجود ندارد. بنابراین، نتایج تقریبی خواهد بود چون چرخش هوا در حین تنفس باعث کاهش دما می‌شود.)

جواب: $278/42 \text{ K}$ و $0/352 \text{ W}$

۴-۳-۱۳. افزایش دما در یک سیم گرم‌کننده: یک جریان 250 آمپر از یک سیم از جنس فولاد زنگ‌نزن به قطر $5/08 \text{ mm}$ عبور می‌کند. طول سیم $2/44 \text{ m}$ و مقاومت آن $0/0843 \Omega$ می‌باشد. دمای سطح بیرونی سیم در $427/6 \text{ K}$ ثابت نگهداشته شده است. ضریب هدایت گرمایی آن $k = 22/5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ است، دمای مرکز سیم را در حالت پایدار محاسبه کنید.

۴-۳-۱۴. شعاع بحرانی عایق: یک لوله فلزی که از داخل آن بخار آب عبور می‌کند به قطر خارجی

۳۰ mm و دمای سطحی ۴۰۰ K به وسیله یک عایق به ضخامت ۲۰ mm و ضریب هدایت گرمایی 0.08 W/m.K عایق‌بندی شده است. لوله در معرض هوا به دمای ۳۰۰ K و ضریب جابه‌جایی $30 \text{ W/m}^2\text{.K}$ قرار دارد.

الف - شعاع بحرانی و تلفات گرمایی به ازای واحد طول لوله بدون عایق را محاسبه کنید.

ب - تلفات گرمایی برای لوله عایق‌بندی شده را با فرض این‌که دمای سطح لوله ثابت باقی بماند محاسبه کنید.

جواب: $q = 54/4 \text{ W}$ (ب)

۴-۴-۱. روش ترسیمی مربعات خمیده^(۱): مثال ۱-۴-۴ را با توجه به تغییرات زیر دوباره حل کنید.

الف - تعداد تقسیمات مساوی دما را بین مرزهای همدمما به جای چهار ناحیه، پنج ناحیه در نظر بگیرید. مربعات خمیده را رسم کنید و مقدار کل شار گرمایی را به دست آورید. همچنین ضریب شکل S را محاسبه کنید. هر خط همدمما را با دمای واقعی آن نامگذاری کنید.

ب - قسمت (الف) را مجدداً با ضریب هدایت گرمایی متغیر تکرار کنید. یعنی، $k = 0.085(1 + 0.00040T)$ که در این رابطه T دما بر حسب کلرین می‌باشد. (توجه: برای محاسبه q کل، از مقدار میانگین k در دمای میانگین استفاده می‌شود. فاصله بین خطوط همدمما مستقل از چگونگی تغییر k با دما می‌باشد (M1). اما، دمای متناظر با هر خط همدمما تابعی از چگونگی تغییر k با T است. معادله مربوط به \bar{q} را برای یک بخش خمیده مشخص با استفاده از مقدار میانگین k در بازه دمایی مورد نظر بنویسید. آن را با مقدار کل q تقسیم بر M یا q/M مساوی قرار دهید. سپس آن را نسبت به دمای یک خط همدمما حل کنید).

۴-۴-۲. اتلاف گرما از یک کوره: یک کوره مستطیلی با ابعاد داخلی $1 \times 1 \times 2 \text{ m}$ دارای دیواره‌ای به ضخامت 0.2 m است. ضریب هدایت گرمایی دیواره $k = 0.95 \text{ W/m.K}$ است. دمای داخل کوره در 800 K ثابت و دمای بیرون آن 350 K می‌باشد. کل گرمای تلف شده از کوره را محاسبه کنید.

جواب: $q = 25081 \text{ W}$

۳-۴-۴. اتلاف گرما از یک لوله دفن شده در زیر زمین: دمای دیواره یک لوله آب به قطر ۱۵۰ mm و طول ۱۰ m برابر با ۳۰۰ K است. این لوله به صورت افقی و در عمق ۰/۴ m (نسبت به مرکز لوله) در زیر زمین مدفون است. دمای سطح زمین ۲۸۰ K و ضریب هدایت آن $k = ۰/۸۵ \text{ W/m.K}$ است. اتلاف گرما از لوله را محاسبه کنید.

جواب: $q = ۴۵۱/۲ \text{ W}$

۱-۵-۴. گرم کردن هوا با استفاده از چگالش بخار: هوا از درون یک لوله به قطر داخلی ۳۸/۱ mm با سرعت ۶/۷۱ m/s و دمای میانگین ۴۴۹/۹ K و فشار ۱۳۸ kPa جریان دارد. دمای دیواره داخلی لوله به وسیله چگالش بخار در خارج لوله در دمای ۲۰۴/۴ °C (۴۷۷/۶ K) ثابت نگهداشته شده است. ضریب انتقال حرارت را برای یک لوله بلند و همچنین شار انتقال حرارت را محاسبه کنید.

جواب: $h = ۳۹/۲۷ \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ($۶/۹۱ \text{ btu/h.ft}^2 \cdot \text{°F}$)

۲-۵-۴. روش حل حدس و خطا برای گرم کردن آب: آب درون یک لوله افقی فولادی به قطر $1\frac{1}{4}$ in شماره ۴۰ در دمای ۳۷/۸ °C با سرعت ۱/۵۲ m/s جریان دارد. بخار با دمای ۱۰۸/۳ °C روی جداره خارجی لوله مایع می شود و ضریب بخار در $۹۱۰۰ \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ثابت فرض می شود. الف - ضریب جابه جایی h_z برای آب را محاسبه کنید. (توجه داشته باشید که روش حل حدس و خطاست. در ابتدا دمای دیواره داخلی باید حدس زده شود).

ب - ضریب کلی انتقال حرارت U_i را براساس سطح داخلی و همچنین شار گرمایی q/A_i را بر حسب W/m^2 به دست آورید.

۳-۵-۴. سطح انتقال حرارت و کاربرد اختلاف دمای میانگین لگاریتمی: یک مخلوط واکنش دارای $c_{pm} = ۲/۸۵ \text{ kJ/kg.K}$ با دبی جرمی ۷۲۶۰ kg/h جریان دارد و قرار است از دمای ۳۷۷/۶ K تا ۳۴۴/۳ K سرد شود. آب سرد کننده در دمای ۲۸۸/۸ K با دبی ۴۵۳۶ kg/h موجود است. ضریب کلی انتقال حرارت U_o برابر با $۰/۶۵۳ \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ است.

الف - در حالت جریان متقابل دمای آب خروجی و A_o سطح مبدل حرارتی را محاسبه کنید. ب - قسمت قبل را برای جریان هم جهت حل کنید.

جواب: الف) $T_1 = ۳۲۵/۲ \text{ K}$, $A_o = ۵/۴۳ \text{ m}^2$

ب) $A_o = ۶/۴۶ \text{ m}^2$

۴-۵-۴. گرم کردن آب به وسیله گازهای داغ و سطح انتقال حرارت: آب با دبی $۱۳/۸۵ \text{ kg/s}$ قرار است از دمای ۵۴/۵ °C تا ۸۷/۸ °C در یک مبدل حرارتی توسط یک جریان متقابل از یک گاز

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

داغ با دبی 54430 kg/h و دمای ورودی 427°C ($c_{pm} = 1/0.05 \text{ kJ/kg.K}$) گرم شود. ضریب کلی انتقال حرارت $U_o = 69/1 \text{ W/m}^2.\text{K}$ می باشد. دمای گاز خروجی و سطح انتقال حرارت را محاسبه کنید.

جواب: $T = 299/5^\circ\text{C}$

۴-۵-۵. سرد کردن روغن و ضریب کلی انتقال حرارت U_i : روغن با دبی 7258 kg/h و $c_{pm} = 2/0.1 \text{ kJ/kg.K}$ از دمای $394/3 \text{ K}$ تا $338/9 \text{ K}$ در یک مبدل حرارتی جریان متقابل به وسیله آب در دمای ورودی $294/3 \text{ K}$ و دمای خروجی $305/4 \text{ K}$ سرد می شود. اگر A_i برابر با $5/11 \text{ m}^2$ باشد، دبی آب و ضریب کلی انتقال حرارت U_i را محاسبه کنید.

جواب: $U_i = 686 \text{ W/m}^2.\text{K}$ و 17420 kg/h

۴-۵-۶. جریان آرام و گرم کردن روغن: نفت خام که خواص فیزیکی آن مشابه با نفت مثال ۴-۵-۵ است، در دمای 175°F وارد یک لوله به قطر داخلی 3.303 ft و طول 15 ft می شود. دمای سطح داخلی لوله در 325°F ثابت است. نفت باید تا دمای 250°F در لوله گرم شود. دبی نفت بر حسب lb_m/h چقدر باید باشد. (راهنمایی: روش حل به صورت حدس و خطاست. یک روش بدین صورت است که مقداری برای دبی فرض کنید، مثلاً $m = 75 \text{ lb}_m/\text{h}$ عدد رینولدز Re و مقدار h_a را محاسبه کنید. سپس برای به دست آوردن q بر حسب m یک موازنه گرما بنویسید. این مقدار q را با q به دست آمده از معادله $q = h_a A \Delta T_a = q$ برابر قرار دهید و آن را نسبت به m حل کنید. m جدید به عنوان حدس بعدی خواهد بود).

جواب: $m = 84/2 \text{ lb}_m/\text{h}$ ($38/2 \text{ kg/h}$)

۴-۵-۷. گرم کردن هوا به وسیله چگالش بخار: هوا در فشار $101/3 \text{ kPa}$ و دمای $288/8 \text{ K}$ و سرعت $24/4 \text{ m/s}$ وارد لوله ای به قطر داخلی $12/7 \text{ mm}$ و طول $1/52 \text{ m}$ می شود. بخار در حال چگالش در خارج لوله دمای دیواره داخلی را در $372/1 \text{ K}$ ثابت نگه می دارد. ضریب جابه جایی هوا را محاسبه کنید. (توجه: راه حل مسأله به صورت حدس و خطاست. ابتدا دمای خروجی هوا را حدس بزنید).

۴-۵-۸. انتقال حرارت در یک فلز مذاب: بیسموت مذاب با دبی 2 kg/s و دمای 425°C وارد یک لوله به قطر داخلی 35 mm می شود و تا دمای 430°C در داخل لوله گرم می شود. دمای دیواره لوله 25°C بالاتر از دمای توده ای مایع نگهداشته می شود. طول لوله مورد نیاز را محاسبه کنید. خواص فیزیکی به صورت زیر است ($H1$):

$$k = 15/6 \text{ W/m.K} \quad c_p = 149 \text{ J/kg.K} \quad \mu = 1/34 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

۴-۶-۱. انتقال حرارت از یک صفحه مسطح: هوا با فشار $101/3 \text{ kPa}$ و دمای $288/8 \text{ K}$ روی یک صفحه نازک افقی و صاف با سرعت $3/05 \text{ m/s}$ جریان دارد. طول صفحه در جهت جریان $0/305 \text{ m}$ و دمای آن $333/2 \text{ K}$ است. ضریب انتقال حرارت در حالت جریان آرام را محاسبه کنید.

$$h = 12/35 \text{ W/m}^2.\text{K} \quad (\text{جواب: } 2/18 \text{ btu/h.ft}^2.\text{°F})$$

۴-۶-۲. منجمد کردن گوشت: هوای سرد در دمای $28/9 \text{ °C}$ و فشار 1 atm با سرعت $0/61 \text{ m/s}$ از روی سطح بالایی یک تکه گوشت یخ زده عبور داده می شود. کناره ها و ته این ورقه گوشت مستطیلی عایق است و سطح بالایی آن یک مربع $254 \text{ mm} \times 254 \text{ mm}$ است. اگر سطح گوشت دمایی برابر با $6/7 \text{ °C}$ داشته باشد، ضریب میانگین انتقال حرارت به سطح را پیش بینی کنید. به عنوان تقریب فرض کنید که هم معادله (۴-۶-۲) و هم معادله (۴-۶-۳) بسته به مقدار Re می توانند استفاده شوند.

$$h = 6/05 \text{ W/m}^2.\text{K} \quad \text{جواب:}$$

۴-۶-۳. انتقال حرارت به یک سیب: مطلوب است پیش بینی ضریب انتقال حرارت برای هوایی که بر روی یک سیب می وزد و روی صفحه های با روزنه های بزرگ قرار دارد. سرعت هوا $0/61 \text{ m/s}$ ، فشار آن $101/32 \text{ kPa}$ و دما $316/5 \text{ K}$ است. سطح سیب در دمای $277/6 \text{ K}$ و قطر میانگین آن 114 mm است. فرض کنید سیب به شکل کره باشد.

۴-۶-۴. گرم کردن هوا به وسیله یک گرمکن بخار: 13610 kg/h هوا در فشار مطلق 1 atm و دمای $15/6 \text{ °C}$ با عبور از روی یک دسته لوله حاوی بخار 100 °C در حال چگالش، گرم می شود. قطر خارجی لوله ها $12/7 \text{ mm}$ و طول آنها $0/61 \text{ m}$ است و به صورت آرایش مربعی با مشخصات $S_p = S_n = 19/05 \text{ mm}$ قرار دارند. دسته لوله ها شامل ۶ ردیف در امتداد جریان و ۱۹ ردیف در جهت عمود بر جریان می باشند. فرض کنید دمای سطح لوله ها در $93/33 \text{ °C}$ ثابت می ماند. دمای خروجی هوا را محاسبه کنید.

۴-۷-۱. جابه جایی طبیعی از دیواره یک کوره: دیواره کوره مثال ۴-۷-۱ عایق بندی شده است به طوری که دمای سطح آن به جای دمای $505/4 \text{ K}$ مقدار $366/5 \text{ K}$ است. ضریب انتقال حرارت جابه جایی طبیعی و نرخ انتقال حرارت به ازای واحد عرض دیواره را حساب کنید. هم از معادله (۴-۷-۴) و هم از معادله ساده شده استفاده کنید. (توجه: از تابش در این محاسبه صرف نظر می شود) هر دو دستگاه SI و انگلیسی را به کار

ببرید.

۴-۷-۲. تلفات ناشی از جابه‌جایی آزاد از یک استوانه: دمای سطح یک استوانه عمودی به قطر $76/2 \text{ mm}$ و ارتفاع $121/9 \text{ mm}$ در $397/1 \text{ K}$ ثابت نگه داشته شده است. این استوانه گرمای خود را از طریق جابه‌جایی آزاد به هوایی با دمای $294/3 \text{ K}$ می‌دهد. گرما از طریق سطوح جانبی و سطح دایره‌ای بالایی و پایینی به هوا داده می‌شود. با صرف نظر کردن از اثرات تابش تلفات گرمایی را محاسبه کنید. از معادلات ساده شده جدول ۴-۷-۲ برای پایین‌ترین بازه $NGrNPr$ استفاده کنید. طول معادل مورد استفاده برای سطح بالایی، $0/9$ برابر قطر آن است.

جواب: $q = 26/0 \text{ W}$

۴-۷-۳. تلفات گرمایی از یک لوله افقی: یک لوله افقی حامل آب داغ، دارای دمای سطحی $355/4 \text{ K}$ و قطر خارجی $25/4 \text{ mm}$ است. لوله در معرض هوای اتاق به دمای $294/3 \text{ K}$ قرار دارد. تلفات گرمایی از طریق جابه‌جایی آزاد به ازای 1 m از طول لوله چقدر است؟

۴-۷-۴. سرد کردن یک پرتقال به طریق جابه‌جایی آزاد: یک پرتقال به قطر 102 mm دارای دمای سطحی $21/1 \text{ }^\circ\text{C}$ است و در یک قفسه درون یخچال در دمای $4/4 \text{ }^\circ\text{C}$ نگهداری می‌شود. تلفات گرمایی به وسیله جابه‌جایی آزاد بدون در نظر گرفتن اثرات تابش را محاسبه کنید. به‌عنوان یک تقریب می‌توان از معادله ساده شده برای صفحات عمودی با در نظر گرفتن شعاع کره بجای طول L استفاده کرد (M1). برای روابط دقیقتر مرجع S2 را ببینید.

۴-۷-۵. جابه‌جایی آزاد در یک فضای افقی بسته: مثال ۴-۷-۳ را برای حالتی که دو صفحه افقی هستند و صفحه پایینی گرمتر از صفحه بالایی باشد تکرار کنید و نتایج را با هم مقایسه کنید.

جواب: $q = 12/54 \text{ W}$

۴-۷-۶. تلفات گرمایی از طریق جابه‌جایی آزاد در یک پنجره دو جداره: یک پنجره دو جداره عمودی دارای فضایی به ضخامت 10 mm می‌باشد که در آن هوا محبوس شده است. ارتفاع پنجره 2 m و عرض آن $1/2 \text{ m}$ می‌باشد. یک سطح پنجره در دمای $25 \text{ }^\circ\text{C}$ و سطح دیگر در دمای $10 \text{ }^\circ\text{C}$ می‌باشد. نرخ انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد از طریق هوا در فضای خالی بین دو شیشه را محاسبه کنید.

۴-۷-۷. تلفات گرمایی جابه‌جایی آزاد آب در صفحات عمودی: دو صفحه عمودی فلزی مربعی به ابعاد $0/4 \text{ m} \times 0/4 \text{ m}$ به وسیله یک فضای خالی به ضخامت 12 mm که با آب پر شده از

هم جدا شده‌اند. دمای میانگین یک سطح $65/6^{\circ}\text{C}$ و سطح دیگر $37/8^{\circ}\text{C}$ می‌باشد. نرخ انتقال حرارت از میان فضای خالی را محاسبه کنید.

۴-۷-۸. تلفات گرمایی از یک کوره: دو صفحه فلزی افقی به ابعاد $0.8 \times 1 \text{ m}$ که روی یک کوره را می‌پوشانند در فاصله 15 mm از هم قرار دارند. صفحه پایینی در دمای 400°C و صفحه بالایی در دمای 100°C بوده و هوا در فشار مطلق 1 atm فضای خالی بین آنها را پر کرده‌است. نرخ انتقال حرارت بین دو صفحه را محاسبه کنید.

۴-۸-۱. ضریب جوشش در یک محفظه دو جداره: ضریب جوشش را برای بدنه‌های جداره‌دار محفظه داده شده در مثال ۴-۸-۱ پیش‌بینی کنید. سپس با استفاده از این ضریب بدنه‌ها و ضریب به دست آمده از مثال ۴-۸-۱ برای کف محفظه، نرخ کل انتقال حرارت را محاسبه کنید.

جواب: $T_w = 107/65^{\circ}\text{C}$ ، $\Delta T = 7/65 \text{ K}$ و $h = 3560 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

۴-۸-۲. ضریب جوشش روی یک لوله افقی. ضریب انتقال حرارت جوشش را برای آب تحت فشار و در حال جوشش در دمای 250°F روی یک سطح افقی از جنس فولاد زنگ نزن به ضخامت $1/16 \text{ in}$ و ضریب هدایت $9/4 \text{ btu/h}\cdot\text{ft}\cdot^{\circ}\text{F}$ پیش‌بینی کنید. وسیله گرم‌کننده در طرف دیگر این سطح یک سیال داغ در دمای 290°F است که دارای ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی $h = 275 \text{ btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}$ می‌باشد. از معادلات ساده شده استفاده کنید. مطمئن شوید که از h صحیح با در نظر گرفتن اثر فشار استفاده کرده‌اید.

۴-۸-۳. چگالش روی یک لوله عمودی: مثال ۴-۸-۲ را برای یک لوله عمودی به ارتفاع $1/22 \text{ m}$ مجدداً حل کنید. واحدهای SI و انگلیسی را به کار ببرید.

جواب: $h = 9438 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ($1663 \text{ btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}$) و $N_{\text{Re}} = 207/2$

۴-۸-۴. چگالش بخار روی لوله‌های عمودی: بخار در فشار مطلق 1 atm و دمای 100°C روی یک دسته لوله شامل پنج لوله عمودی به ارتفاع 0.305 m و قطر خارجی هر لوله $25/4 \text{ mm}$ مایع می‌شود. لوله‌ها طوری آرایش یافته‌اند که فاصله آنها از هم به اندازه‌ای است که روی یکدیگر تأثیری ندارند. دمای سطح لوله‌ها $97/78^{\circ}\text{C}$ است. ضریب میانگین انتقال حرارت و مقدار بخار مایع شده در هر ساعت برحسب kg را محاسبه کنید.

جواب: $h = 15240 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

۴-۸-۵. چگالش روی دسته لوله‌های افقی: بخار آب در فشار مطلق 1 atm و دمای 100°C روی یک دسته لوله شامل پنج سری لوله افقی که روی هم قرار دارند مایع می‌شود. هر سری دارای ۴

لوله می‌باشد (تعداد کل لوله‌ها $20 = 4 \times 5$ است)، که قطر خارجی هر لوله برابر با mm $19/1$ است. طول هر کدام از لوله‌ها m $0/61$ و دمای سطحی آنها برابر $^{\circ}C$ $97/78$ است. ضریب میانگین انتقال حرارت و جرم بخار مایع شده در هر ثانیه در کل لوله‌ها را محاسبه کنید. شکل ساده‌ای از دسته لوله را ترسیم کنید.

۴-۹-۱. **اختلاف دمای میانگین در یک مبدل:** از یک مبدل ۲-۱ با یک گذر پوسته و دو گذر لوله برای گرم کردن یک سیال سرد از دمای $^{\circ}C$ $37/8$ تا $^{\circ}C$ $121/1$ توسط یک سیال گرم به دمای ورودی $^{\circ}C$ $315/6$ و دمای خروجی $^{\circ}C$ $148/9$ استفاده می‌شود. ΔT_{lm} و اختلاف دمای میانگین ΔT_m برحسب کلونین را محاسبه کنید.

جواب: $\Delta T_{lm} = 148/9 K$ و $\Delta T_m = 131/8 K$

۴-۹-۲. **سرد کردن روغن به وسیله آب در یک مبدل:** جریان روغن با دبی kg/s $5/04$ سرد می‌شود. در یک مبدل ۲-۱ از دمای K $366/5$ تا K $344/3$ سرد می‌شود. این کار به وسیله آب با دمای ورودی K $283/2$ و دبی kg/s $2/02$ انجام می‌شود. ضریب کلی انتقال حرارت U_0 برابر با $W/m^2.K$ 340 است. سطح گرمایی مورد نیاز را محاسبه کنید. (راهنمایی: یک موازنه گرما برای به دست آوردن دمای خروجی آب لازم است).

۴-۹-۳. **مبادله گرما بین آب و روغن:** آب با دبی kg/s $1/13$ در یک مبدل ۲-۱ از نوع پوسته و لوله جریان دارد و به وسیله یک روغن با ظرفیت گرمایی kJ/kg $1/95$ از $^{\circ}C$ 45 تا $^{\circ}C$ 85 گرم می‌شود. روغن با دمای $^{\circ}C$ 120 وارد شده و در دمای $^{\circ}C$ 85 خارج می‌شود، اگر ضریب کلی انتقال حرارت برابر با $W/m^2.K$ 300 باشد سطح گرمایی مبدل را محاسبه کنید.

۴-۹-۴. **دمای خروجی و ضریب تأثیر یک مبدل:** روغن داغ با دبی kg/s 3 و دمای K 400 ($c_p = 1/92 kJ/kg.K$) وارد یک مبدل جریان متقابل می‌شود و به وسیله آب با دمای ورودی K 325 (تحت فشار) و دبی kg/s $0/7$ خنک می‌شود. ضریب کلی انتقال حرارت $U = 350 W/m^2.K$ و سطح A برابر با m^2 $12/9$ می‌باشد. نرخ انتقال حرارت و دمای خروجی روغن از مبدل را محاسبه کنید.

۴-۱۰-۱. **تابش به یک لوله از یک محیط بزرگ:** مثال ۱-۱۰-۴ را با استفاده از معادله دقیق‌تر (۴-۱۰-۵) با دو ضریب انتشار مختلف مجدداً حل کنید.

جواب: $q = -2171 W (-7410 \text{ btu/h})$

۴-۱۰-۲. **پخت نان در یک کوره کوچک:** یک قرص نان با دمای سطحی K 373 در یک کوره که دیواره‌ها و محیط آن در دمای K $477/4$ است پخته می‌شود. نان در روی یک تسمه نقاله

باز از میان یک کوره بزرگ عبور می‌کند. ضریب نشر نان حدود $0/85$ تخمین زده می‌شود و قرص نان به صورت مکعب مستطیلی به ابعاد $114/3 \text{ mm}$ (ارتفاع) در $114/3 \text{ mm}$ (عرض) در 330 mm (طول) در نظر گرفته می‌شود. با فرض این‌که قرص نان در مقایسه با ابعاد کوره کوچک باشد و با صرفنظر کردن از انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد، نرخ انتقال حرارت تابشی به نان را محاسبه کنید.

جواب: $q = 278/4 \text{ W (950 btu/h)}$

۳-۱۰-۴. تابش و جابه‌جایی در یک لوله بخار: یک لوله افقی از جنس فولاد اکسید شده حامل بخار آب، به قطر خارجی $0/1683 \text{ m}$ و دمای سطحی $374/9 \text{ K}$ در یک محیط بزرگ در معرض هوا به دمای $297/1 \text{ K}$ قرار دارد. تلفات گرمایی به صورت تابش و جابه‌جایی آزاد به ازای $0/305$ متر از طول لوله را محاسبه کنید. برای این لوله $\epsilon = 0/79$ است.

جواب: $q = 163/3 \text{ W (557 btu/h)}$

۴-۱۰-۴. تابش و جابه‌جایی آزاد به یک قرص نان: در مسأله ۲-۱۰-۴ کل انتقال حرارت به قرص نان به طریق جابه‌جایی آزاد و تابش را محاسبه کنید. برای تابش ابتدا مقدار h_r را محاسبه کنید. برای جابه‌جایی آزاد معادلات ساده شده را در محدوده $N_{Gr}N_{Pr}$ پایین به کار ببرید. برای چهار وجه عمودی، از معادله مربوط به صفحات عمودی با طول برابر با $114/3 \text{ mm}$ استفاده کنید. برای سطح بالایی، از معادله مربوط به صفحه سرد که روی آن بطرف بالاست و برای سطح پایینی از همین معادله هنگامی که روی آن بطرف پایین است استفاده کنید. طول مشخصه L برای یک صفحه مستطیل شکل افقی، میانگین خطی دو ضلع است.

۵-۱۰-۴. گرمای تلف شده از یک لوله: یک لوله بدون عایق از جنس فولاد ضد زنگ با قطر خارجی $76/2 \text{ mm}$ و $\epsilon = 0/55$ بطور افقی در هوایی به دمای $294/2 \text{ K}$ قرار گرفته است. دمای سطح لوله $366/4 \text{ K}$ است. مقدار $h_c + h_r$ را در حالتی که تابش و جابه‌جایی داریم به دست آورده و گرمای تلف شده را به ازای 3 متر از طول لوله پیدا کنید.

۱-۱۱-۴. سپر تابشی: دو صفحه خیلی بزرگ و موازی هر کدام دارای ضریب نشر $0/7$ می‌باشند. سطح ۱ در $866/5 \text{ K}$ و سطح ۲ در $588/8 \text{ K}$ قرار دارد. با استفاده از واحدهای SI و انگلیسی: الف - گرمای تلف شده خالص تابشی از سطح ۱ چقدر است؟

ب - برای کاهش این تلفات، دو سپر تابشی هر کدام به ضریب نشر $0/7$ بین صفحه‌های اصلی قرار داده شده است. در این حالت تلفات خالص تابشی چقدر

است؟

جواب: الف) 13565 W/m^2 و 4300 btu/hr.ft^2

ب) 4521 W/m^2 و 1433 btu/hr.ft^2

۴-۱۱-۲. تابش از یک فضایپما در فضا: یک ماهواره کروی شکل به طرف فضا می‌رود، که در آنجا دمای سطح آن مقدار ثابت $283/2 \text{ K}$ است. کره فقط فضا را می‌بیند که می‌توان فضا را به‌عنوان یک جسم سیاه با دمای 0 K در نظر گرفت. سطح صیقلی کره دارای ضریب نشر $0/1$ است. افت گرمایی تابشی به ازای هر متر مربع از سطح کره را محاسبه کنید.

جواب: $\frac{q_{\text{net}}}{A_1} = 36/5 \text{ W/m}^2$

۴-۱۱-۳. تابش و ضریب دید پیچیده: ضریب دید F_{12} را برای حالت نشان داده شده در شکل

۳-۱۱-۳-P۴ به دست آورید. سطوح A_1 و A_2 سطوح فرضی هستند (C3). سطح $A_3 + A_4$

سطح $A_{(12)}$ و سطح $A_1 + A_2$ سطح $A_{(12)}$ نامیده می‌شوند. سطوح $A_{(13)}$ و $A_{(24)}$ عمود بر یکدیگرند. (راهنمایی: از روش مثال ۵-۱۱-۴ استفاده کنید. ابتدا، معادله‌ای مشابه

معادله (۴۸-۱۱-۴) بنویسید، تا رابطه تبادل گرمایی بین A_1 و A_2 مشخص شود. سپس

تبادل بین $A_{(12)}$ ، $A_{(13)}$ را به هم ارتباط دهید و نهایتاً تبادل بین $A_{(13)}$ و A_2 را مشخص کنید).

جواب: $A_1 F_{12} = A_{(12)} F_{(12)(24)} + A_2 F_{(24)} - A_2 F_{(24)} - A_{(12)} F_{(12)4}$

۴-۱۱-۴. تابش بین صفحات موازی: دو صفحه موازی به ابعاد $1/83$ متر در $1/83$ متر به فاصله

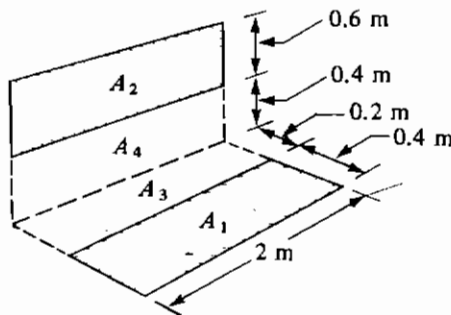
$0/91$ متر از یکدیگر قرار گرفته‌اند. دمای سطح A_1 برابر 811 K و دمای سطح A_2 برابر

533 K است. هر دو سطح سیاه هستند.

الف - انتقال حرارت تابشی بین دو صفحه را حساب کنید.

ب - قسمت (الف) را برای حالتی که دو صفحه توسط دیواره‌های نارسانای بازتاب

به یکدیگر متصل شده‌اند حل کنید.



شکل ۳-۱۱-۳-P۴. ساختار هندسی صفحات در مسأله ۳-۱۱-۴

پ - قسمت (ب) را هنگامی که A_1 دارای ضریب نشر $0/8$ و A_2 دارای ضریب نشر $0/7$ است مجدداً حل کنید.

۴-۱۱-۵. تابش بین صفحات مجاور عمود بر هم: دو مستطیل که در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند، بر هم عمود می‌باشند. اولین مستطیل دارای ابعاد $1/52 \times 2/44$ متر و دومی $1/83 \times 2/44$ متر است که ضلع مشترک آنها $2/44$ متر است. دمای سطح اول 699 K و دومی 478 K است. هر دو سطح سیاه هستند. نرخ انتقال حرارت تابشی بین دو صفحه را حساب کنید.

۴-۱۱-۶. ضریب دید برای شکل‌های هندسی پیچیده: با استفاده از ابعاد داده شده در شکل ۳-۱۱-۳ $P4$ ضریب دید هر کدام به طور جداگانه و همچنین F_{12} را محاسبه کنید.

۴-۱۱-۷. تابش از یک سطح به آسمان: یک سطح صاف به مساحت 1 m^2 از زیر عایق شده است و در شب روی سطح زمین رو به آسمان قرار گرفته است. سطح بالایی در معرض هوایی به دمای 290 K قرار دارد و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی از هوا به صفحه $12 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ می‌باشد. سطح صاف به آسمان شفاف تابش می‌کند. دمای مؤثر تابش آسمان 80 K تخمین زده می‌شود. اگر سطح جسم سیاه باشد دمای سطح را در حالت تعادل حساب کنید.

جواب: $T = 266/5 \text{ K} = -6/7^\circ \text{C}$

۴-۱۱-۸. تابش و گرم شدن صفحات: دو دیسک صاف هر کدام به قطر $1/25 \text{ m}$ مستقیماً مقابل هم و به فاصله $0/5 \text{ m}$ از هم قرار دارند. دیسک ۱ توسط یک مقاومت الکتریکی تا $833/3 \text{ K}$ گرم می‌شود. تمام قسمتهای هر دو دیسک بجز دو صفحه‌ای که در مقابل هم هستند عایق شده است. فرض کنید محیط هیچ تابشی را نشر نمی‌دهد و دیسک‌ها در فضا هستند. دمای دیسک ۲ را در حالت پایدار و همچنین انرژی الکتریکی ورودی به دیسک ۱ را محاسبه کنید. (راهنمایی: کسر گرمای تلف شده از سطح شماره ۱ به فضا $F_{12} - 1$ است).

جواب: $F_{12} = 0/45$ و $T_2 = 682/5 \text{ K}$

۴-۱۱-۹. تابش دیسک‌ها به یکدیگر و به محیط: دو دیسک هر کدام به قطر 2 m به طور موازی مقابل هم قرار گرفته‌اند و به فاصله 2 m از یکدیگر می‌باشند. دیسک ۱ توسط انرژی الکتریکی در دمای 1000 K نگهداشته می‌شود و دیسک ۲ توسط جریان آب سرد که در پشت دیسک در داخل یک جدار برقرار است در دمای 400 K قرار دارد. دیسک‌ها فقط به یکدیگر و به محیط در دمای 300 K تابش می‌کنند. انرژی الکتریکی ورودی و گرمای دفع شده به وسیله آب سرد را محاسبه کنید.

۴-۱۱-۱۰. ضریب دید به وسیله انتگرال گیری: یک دیسک سیاه کوچک به مساحت 0.002 m^2 به طور عمودی قرار گرفته است و به یک صفحه سیاه عمودی به ابعاد 0.3 m (عرض) و 2 m (ارتفاع) که به طور موازی در مقابل آن قرار گرفته است تابش می کند. دیسک تابش کننده به فاصله 2 متر از صفحه عمودی و مقابل قسمت پایین آن قرار دارد. با انتگرال گیری از معادله ضریب دید F_{12} را به دست آورید.

جواب: $F_{12} = 0.00307$

۴-۱۱-۱۱. تابش گاز به محیط خاکستری: مثال ۷-۱۱-۴ را با تغییرات زیر تکرار کنید:

الف - دیواره های داخلی بجای سطح سیاه، سطح خاکستری با ضریب نشر 0.75 هستند.
ب - همان شرایط قسمت (الف) با دیواره های خاکستری وجود دارد، به علاوه این که حرارت از طریق جابه جایی آزاد نیز به دیواره های داخلی منتقل می شود. فرض کنید ضریب میانگین جابه جایی $8 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ است.

جواب: (ب) $q = 4/426 \text{ W}$ (جابه جایی + تابش)

۴-۱۱-۱۲. تابش و جابه جایی گاز در یک دودکش: یک کوره گازهای داغ خروجی خود را که محتوی $5\% \text{ CO}_2$ می باشد در 1000 K و فشار مطلق 1 atm از طریق دودکشی به قطر داخلی 0.5 m تخلیه می کند. دیواره های داخلی لوله های تابشی در 900 K و ضریب نشر آنها 0.75 است. ضریب انتقال حرارت جابه جایی گاز $10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ تخمین زده می شود. نرخ انتقال حرارت q/A از گاز به طریق تابش و جابه جایی را تعیین کنید.

۴-۱۲-۱. انتقال حرارت آرام از یک سیال Power-Law: پوره موز به عنوان یک سیال غیرنیوتنی

Power-Law با دبی 300 lbm/hr در داخل لوله ای به قطر داخلی 1 in جریان دارد. سیال داخلی توسط یک سیال داغ که در خارج لوله جریان دارد گرم می شود. پوره موز در دمای 60°F وارد قسمت گرم لوله می شود که طول آن 5 ft است. دمای دیواره داخلی 180°F ثابت است. خواص سیال که توسط Charm داده شده است به صورت زیر می باشد (C1):

$$k = 0.320 \text{ btu/h.ft.}^\circ \text{F}, c_p = 0.875 \text{ btu/lb}_m \cdot ^\circ \text{F}, \rho = 69/9 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$$

ثابت های رئولوژیکی سیال به این صورت هستند، $n' = 0.458$ که می تواند ثابت فرض شود و $K = 0.146 \text{ lb}_m \cdot \text{ft}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}$ در 70°F و برابر با 0.417 در 190°F . منحنی $\log K$ بر حسب $T^\circ \text{F}$ خط راست فرض می شود. دمای توده ای خروجی سیال در جریان آرام را محاسبه کنید.

۴-۱۲-۲. گرم کردن یک سیال Power-Law در جریان آرام: یک سیال غیرنیوتونی Power-Law با خواص فیزیکی و ثابتهای رئولوژیکی مانند مثال ۴-۱۲-۱ به صورت آرام با نرخ $10^{-2} \times 6/3 \text{ kg/s}$ در لوله‌ای به قطر داخلی $25/4 \text{ mm}$ جریان دارد. این سیال توسط سیال داغی که در خارج لوله جریان دارد گرم می‌شود. سیال در دمای $26/7^\circ\text{C}$ وارد قسمت گرم لوله شده و در دمای توده‌ای $46/1^\circ\text{C}$ از آن خارج می‌شود. دمای دیواره داخلی در $82/2^\circ\text{C}$ ثابت است. طول لوله لازم را برحسب متر حساب کنید. (توجه: در این حالت طول مجهول لوله در معادله مربوط به h_c و در معادله موازنه گرمایی ظاهر می‌شود.)

جواب: $L = 1/722 \text{ m}$

۴-۱۳-۱. انتقال حرارت در یک ظرف دو جداره با همزن پارویی: یک ظرف با همزن پارویی و بدون بافل برای گرم کردن یک مایع در $37/8^\circ\text{C}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. گرمای لازم از طریق جداره ظرف که بخار آب وارد آن می‌شود، تأمین می‌گردد. قطر داخلی ظرف $1/22 \text{ m}$ و قطر همزن $0/406 \text{ m}$ و سرعت چرخش آن 150 rpm است. دمای سطح دیواره $93/3^\circ\text{C}$ است. خواص فیزیکی مایع به صورت زیر است:

$$\mu = 0/1 \text{ kg/m.s } (37/8^\circ\text{C}), \mu = 7/5 \times 10^{-4} (93/3^\circ\text{C})$$

$$\rho = 977 \text{ kg/m}^3, c_p = 2/72 \text{ kJ/kg.K}, k = 0/346 \text{ W/m.K}$$

ضریب انتقال حرارت از جداره ظرف به دیواره را تعیین کنید.

۴-۱۳-۲. گرمای تلف شده از پره‌های مدور: با استفاده از داده‌ها و شرایط مشابه مثال ۴-۱۳-۲ بازده

پره و نرخ گرمای تلف شده از پره‌های زیر را محاسبه کنید.

الف - پره از جنس فولاد معمولی ($k = 44 \text{ W/m.K}$).

ب - پره از جنس فولاد ضد زنگ ($k = 17/9 \text{ W/m.K}$).

جواب: الف) $\eta_c = 0/66$ و $q = 111/1 \text{ W}$

۴-۱۳-۳. گرمای تلف شده از پره‌های طولی: یک پره طولی آلومینیومی مطابق شکل ۴-۱۳-۳a

($k = 230 \text{ W/m.K}$) به یک لوله مسی به قطر خارجی $0/04 \text{ m}$ وصل شده است. طول

پره $0/08 \text{ m}$ و ضخامت آن 3 mm است. پایه پره در دمای 450 K ثابت نگهداشته

می‌شود و هوای بیرون در 300 K بوده و ضریب جابه‌جایی آن $25 \text{ W/m}^2\text{.K}$ است. بازده

پره و گرمای تلف شده به ازای 1 m از طول را محاسبه کنید.

۴-۱۳-۴. انتقال حرارت در مبدل گرمایی بالوله‌های پرده‌دار: هوا در دمای میانگین 50°C با جریان

پیدا کردن در خارج یک لوله فولادی ($k = 45/1 \text{ W/m.K}$) به قطر داخلی 35 mm و

ضخامت دیواره ۳ mm گرم می‌شود. بیرون لوله با ۱۶ پرۀ طولی فولادی به طول 13 mm و ضخامت $t = 1 \text{ mm}$ پوشیده شده است. داخل لوله، بخار در حال میعان در دمای 120°C و ضریب جابه‌جایی $7000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ جریان دارد. ضریب جابه‌جایی هوا در بیرون $30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ تخمین زده می‌شود. با صرف‌نظر کردن از ضریب رسوب‌گذاری و استفاده از لوله‌ای به طول ۱ m ضریب کلی انتقال حرارت U_i را براساس سطح داخلی A_i محاسبه کنید.

۱-۱۴-۴. آنالیز ابعادی در جابه‌جایی طبیعی: با استفاده از آنالیز ابعادی در انتقال حرارت جابه‌جایی

طبیعی، برای صفحه عمودی داده شده در بخش ۱۴-۴ موارد زیر را انجام دهید:

الف - همه مراحل ذکر شده برای به دست آوردن توانهای گروههای بدون بعد π را انجام دهید.
ب - در این حالت چهار متغیر L ، ρ ، c_p و g را که بین همه گروههای بدون بعد مشترک هستند انتخاب کنید.

۲-۱۴-۴. آنالیز ابعادی در هدایت ناپایدار: برای هدایت ناپایدار در یک جامد این متغیرها مؤثر

هستند: L ، ρ ، c_p (بعد جسم جامد)، t ، k ، z (نقطه خاصی در جسم جامد). گروههای بدون بعد مربوطه را تعیین کنید.

جواب: $\pi_1 = \frac{kt}{\rho c_p L^2}$ و $\pi_2 = \frac{z}{L}$

۱-۱۵-۴. دماها در یک صفحه نیمه بی‌نهایت: یک صفحه نیمه بی‌نهایت مشابه شکل ۱۵-۲-۱۵-۴

می‌باشد. در سطوح $x = 0$ و $x = L$ دما ثابت و برابر 200 K است. در سطح $y = 0$ دما K ۴۰۰ نگهداشته می‌شود. اگر $L = 1 \text{ m}$ ، دما را در نقطه $y = 0.5 \text{ m}$ و $x = 0.5 \text{ m}$ در حالت پایدار محاسبه کنید.

۲-۱۵-۴. هدایت گرما در یک جامد دو بُعدی: برای هدایت دو بُعدی مطابق مثال ۱۵-۴-۱، رابطه‌ای

برای محاسبه کل گرمای تلف شده از محفظه به ازای واحد طول با استفاده از گره‌های خارجی، به دست آورید. باید هشت مسیر برای یک چهارم محفظه وجود داشته باشد. دماهای واقعی را در معادله قرار دهید و گرمای تلف شده را به دست آورید.

جواب: $q = 3426 \text{ W}$

۳-۱۵-۴. تلفات گرمایی پایدار از یک کانال مستطیل شکل: محفظه‌ای که به شکل یک کانال

مستطیل شکل طویل و توخالی است دارای ابعاد خارجی $3 \times 4 \text{ m}$ و داخلی $1 \times 2 \text{ m}$ است. ضخامت دیواره‌ها 1 m است. دمای سطح داخلی ثابت و برابر 800 K و دمای سطح خارجی 200 K است. $k = 1/4 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ است. تلفات گرمایی پایدار به ازای هر متر

از طول کانال را محاسبه کنید. اندازه هر فاصله را $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ m}$ در نظر بگیرید. همچنین برای محاسبه کل هدایت گرمایی از گره‌های خارجی استفاده کنید.

جواب: $q = 7428 \text{ W}$

۴-۱۵-۴. هدایت گرمایی دو بُعدی و شرایط مرزی مختلف: یک قطعه جامد بسیار بلند با مقطع 1×1 متر مربع صفحه بالایی آن در دمای 1000 K و صفحه سمت چپ آن در 200 K ثابت نگهداشته می‌شود. صفحه پایینی و سمت راست آن با محیط به دمای 200 K و ضریب جابه‌جایی $h = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ارتباط دارد. $k = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. با به کار بردن اندازه $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{3} \text{ m}$ ، دماهای حالت پایدار گره‌های مختلف را محاسبه کنید.

۴-۱۵-۵. نقطه گرمی^(۱) در گوشه خارجی بین سطوح عایق شده: معادله تفاضل محدودی برای نقطه گرمی $T_{n,m}$ در یک گوشه خارجی بین سطوح عایق شده به دست آورید. نمودار شبیه شکل ۴-۱۵-۶c است بجز این‌که هر دو مرز عایق شده‌اند.

جواب: $T_{n,m} = \frac{1}{4} (T_{n-1,m} + T_{n,m-1})$

منابع

- (A1) ACRIOS, A. *A.I.Ch.E. J.*, **6**, 584 (1960).
 (B1) BIRD, R. B., STEWART, W. E., and LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
 (B2) BADGER, W. L., and BANCHERO, J. T. *Introduction to Chemical Engineering*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.
 (B3) BROMLEY, L. A. *Chem. Eng. Progr.*, **46**, 221 (1950).
 (B4) BOWMAN, R. A., MUELLER, A. C., and NAGLE, W. M. *Trans. A.S.M.E.*, **62**, 283 (1940).
 (B5) BROOKS, G., and SU, G. *Chem. Eng. Progr.*, **55**, 54 (1959).
 (B6) BOLANOWSKI, J. P., and LINEBERRY, D. D. *Ind. Eng. Chem.*, **44**, 657 (1952).
 (C1) CHARM, S. E. *The Fundamentals of Food Engineering*, 2nd ed. Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971.
 (C2) CARSLAW, H. S., and JAEGER, J. E. *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, Inc., 1959.
 (C3) CHAPMAN, A. J. *Heat Transfer*. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1960.
 (C4) CLAPP, R. M. *International Developments in Heat Transfer*, Part III. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1961.
 (C5) CHILTON, T. H., DREW, T. B., and JEBENS, R. H. *Ind. Eng. Chem.*, **36**, 510 (1944).
 (C6) CARREAU, P., CHAREST, G., and CORNEILLE, J. L. *Can. J. Chem. Eng.*, **44**, 3 (1966).
 (C7) CLAUSING, A. M. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **9**, 791 (1966).
 (D1) DUNLAP, I. R., and RUSHTON, J. H. *Chem. Eng. Progr. Symp.*, **49**(5), 137 (1953).
 (F1) FUJII, T., and IMURA, H. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**, 755 (1972).

- (G1) GRIMISON, E. D. *Trans. A.S.M.E.*, **59**, 583 (1937).
- (G2) GEANKOPLIS, C. J. *Mass Transport Phenomena*. Columbus, Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.
- (G3) GUPTA, A. S., CHAUBE, R. B., and UPADHYAY, S. N. *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 839 (1974).
- (G4) GLUZ, M. D., and PAVLUSHENKO, L. S. *J. Appl. Chem., U.S.S.R.*, **39**, 2323 (1966).
- (G5) GLOBE, S., and DROPKIN, D. J. *Heat Transfer*, **81**, 24 (1959).
- (H1) HOLMAN, J. P. *Heat Transfer*, 4th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1976.
- (J1) JACOB, M. *Heat Transfer*, Vol. 1. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1949.
- (J2) JACOB, M., and HAWKINS, G. *Elements of Heat Transfer*, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1957.
- (J3) JACOB, M. *Heat Transfer*, Vol. 2. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1957.
- (K1) KREITH, F., and BLACK, W. Z. *Basic Heat Transfer*. New York: Harper & Row, Publishers, 1980.
- (K2) KEYES, F. G. *Trans. A.S.M.E.*, **73**, 590 (1951); **74**, 1303 (1952).
- (K3) KNUDSEN, J. G., and KATZ, D. L. *Fluid Dynamics and Heat Transfer*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1958.
- (K4) KERN, D. Q. *Process Heat Transfer*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1950.
- (L1) LUBARSKY, B., and KAUFMAN, S. J. *NACA Tech. Note No. 3336* (1955).
- (M1) McADAMS, W. H. *Heat Transmission*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954.
- (M2) METZNER, A. B., and GLUCK, D. F. *Chem. Eng. Sci.*, **12**, 185 (1960).
- (M3) METZNER, A. B., and FRIEND, P. S. *Ind. Eng. Chem.*, **51**, 879 (1959).
- (N1) NELSON, W. L. *Petroleum Refinery Engineering*, 4th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1949.
- (O1) OLDSHUE, J. Y., and GRETTON, A. I. *Chem. Eng. Progr.*, **50**, 615 (1954).
- (P1) PERRY, R. H., and CHILTON, C. H. *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
- (P2) PERRY, J. H. *Chemical Engineers' Handbook*, 4th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1963.
- (P3) PERRY, R. H., and GREEN, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
- (R1) REID, R. C., PRAUSNITZ, J. M., and SHERWOOD, T. K. *The Properties of Gases and Liquids*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1977.
- (R2) ROHSENOW, W. M., and HARTNETT, J. P., eds. *Handbook of Heat Transfer*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
- (S1) SIEDER, E. N., and TATE, G. E. *Ind. Eng. Chem.*, **28**, 1429 (1936).
- (S2) STEINBERGER, R. L., and TREYBAL, R. E. *A.I.Ch.E. J.*, **6**, 227 (1960).
- (S3) SKELLAND, A. H. P. *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- (S4) SKELLAND, A. H. P., OLIVER, D. R., and TOOKE, S. *Brit. Chem. Eng.*, **7**(5), 346 (1962).
- (U1) UHL, V. W. *Chem. Eng. Progr. Symp.*, **51**(17), 93 (1955).
- (W1) WELTY, J. R., WICKS, C. E., and WILSON, R. E. *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1984.

فصل پنجم

اصول انتقال حرارت ناپایدار

۵-۱ به دست آوردن معادله اساسی

۵-۱A مقدمه

در فصل چهارم سیستمهای انتقال حرارت مختلفی را که در آنها دما در هر نقطه معلوم و شار گرمایی با زمان ثابت بود، یعنی حالت پایدار، مورد بررسی قرار دادیم. در این فصل می‌خواهیم فرآیندهایی را که در آنها دما در هر نقطه از سیستم با زمان تغییر می‌کند یعنی انتقال حرارت ناپایدار است، مطالعه کنیم.

قبل از این‌که در یک فرایند به حالت پایدار برسیم، پس از شروع انتقال حرارت مدت زمانی باید سپری شود تا حالت ناپایدار انتقال حرارت از بین برود. برای مثال، در بخش ۴A-۲ شار گرمایی را از طریق یک دیوار در حالت پایدار تعیین کردیم اما زمانی را که در طول آن یک طرف دیوار تا دمای مورد نظر گرم می‌شود، مورد بررسی قرار ندادیم.

انتقال حرارت ناپایدار به دلیل مشکلات زیادی که در صنعت در مسائل مربوط به گرمایش و سرمایش اتفاق می‌افتد، اهمیت دارد. در فرایندهای مربوط به استخراج و ذوب فلزات، پیش‌بینی سرعتهای گرم شدن و سرد شدن اشکال هندسی مختلف فلزات به منظور پیش‌بینی زمان لازم برای رسیدن به دماهای مشخص، ضروری است. در فرایندهای آماده‌سازی غذاهای کنسرو شده فاسد شدنی، این کنسروها به وسیله فرو بردن در حمامهای بخار گرم می‌شوند یا با فرو بردن در آب سرد، سرد می‌شوند. در صنعت کاغذسازی در شروع، چوبهای الوار شده در حمامهای بخار فرو برده می‌شوند. در

بیشتر این فرایندها ماده به طور ناگهانی در یک سیال با دماهای خیلی بالا یا پایین فرو برده می‌شود.

۵-۱B به دست آوردن معادله هدایت ناپایدار

برای به دست آوردن معادله حالت ناپایدار در یک جهت در یک جامد، به شکل ۵-۱-۱ رجوع می‌کنیم. گرما در جهت x در مکعبی به ابعاد Δx ، Δy ، Δz هدایت می‌شود. برای هدایت در جهت x داریم،

$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5-1-1)$$

عبارت $\partial T / \partial x$ یعنی مشتق جزئی T نسبت به x همراه با متغیرهای دیگر y و z و زمان t که ثابت نگهداشته می‌شوند. سپس با نوشتن موازنه گرمایی برای مکعب می‌توانیم بنویسیم،

$$\text{نرخ تجمع گرما} + \text{نرخ گرمای خروجی} = \text{نرخ تولید} + \text{نرخ گرمای ورودی} \quad (5-1-2)$$

نرخ گرمای ورودی به مکعب،

$$\text{نرخ گرمای ورودی} = q_{x|x} = -k(\Delta y \Delta z) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \quad (5-1-3)$$

همچنین،

$$\text{نرخ گرمای خروجی} = q_{x|x+\Delta x} = -k(\Delta y \Delta z) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \quad (5-1-4)$$

نرخ تجمع گرما در حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ در زمان ∂T برابر است با،

$$\text{نرخ تجمع گرما} = (\Delta x \Delta y \Delta z) \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5-1-5)$$

نرخ تولید گرما در حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ برابر است با،

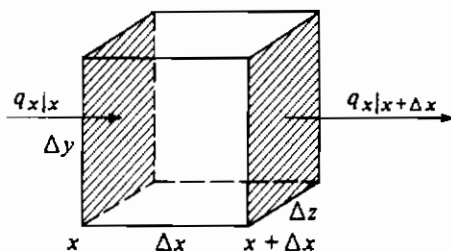
$$\text{نرخ تولید گرما} = (\Delta x \Delta y \Delta z) \dot{q} \quad (5-1-6)$$

با جانشین کردن معادلات (۵-۱-۳) تا (۵-۱-۶) در (۵-۱-۲) و تقسیم آن بر $\Delta x \Delta y \Delta z$

$$\dot{q} + \frac{-k \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \right)}{\Delta x} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5-1-7)$$

وقتی Δx را به سمت صفر میل دهیم مشتق دوم جزئی T نسبت به x یا $\partial^2 T / \partial x^2$ را در طرف دوم معادله خواهیم داشت. سپس با مرتب کردن دوباره،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (5-1-8)$$



شکل ۵-۱-۱. هدایت ناپایدار در یک جهت

که α یا ضریب نفوذگرمایی برابر با $k/\rho c_p$ است. در این مشتق‌گیری k ، ρ و c_p ثابت فرض می‌شوند. در سیستم واحدهای SI،

$$c_p = \text{J/kg}\cdot\text{K}, q = \text{W/m}^2, \rho = \text{kg/m}^3, k = \text{W/m}\cdot\text{K}, t = \text{s}, T = \text{K}, \alpha = \text{m}^2/\text{s}$$

و در سیستم واحدهای انگلیسی،

$$c_p = \text{Btu/lb}_m\cdot^\circ\text{F}, q = \text{Btu/hr}\cdot\text{ft}^2, \rho = \text{lb}_m/\text{ft}^3, k = \text{Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}, t = \text{hr}, T = ^\circ\text{F}, \alpha = \text{ft}^2/\text{hr}$$

برای هدایت در سه بُعد به طریق مشابه داریم،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (5-1-9)$$

در بسیاری از حالات هدایت گرمایی ناپایدار اتفاق می‌افتد اما نرخ تولید گرما صفر است. بنابراین معادلات (۵-۱-۸) و (۵-۱-۹) به صورت زیر در می‌آیند،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5-1-10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-1-11)$$

معادلات (۵-۱-۱۰) و (۵-۱-۱۱) دمای T را به α ، y ، z و زمان ارتباط می‌دهند. حل معادلات (۵-۱-۱۰) و (۵-۱-۱۱) برای حالت‌های خاص و حالت‌های عمومی‌تر در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۵-۲ حالت ساده شده برای سیستمهای با مقاومت داخلی ناچیز

۵-۲A معادله اساسی

بحث خود را در بارهٔ هدایت گرمایی ناپایدار به وسیلهٔ تجزیه و تحلیل یک حالت ساده شروع می‌کنیم. در این جا جامدی را بررسی می‌کنیم که قابلیت هدایت گرمایی خیلی بالا یا مقاومت هدایت داخلی خیلی پایین در مقایسه با مقاومت سطحی خارجی دارد، که در آن جابه‌جایی از سطح یک سیال خارجی به سطح جامد اتفاق می‌افتد. چون مقاومت داخلی خیلی کم است، بنابراین دما در درون جامد در هر زمان معین اساساً یکنواخت است.

به عنوان مثال، یک مکعب داغ و کوچک از فولاد در T_0 (K) در زمان $t = 0$ به طور ناگهانی در یک حمام بزرگ آب سرد که دمای آن نسبت به زمان ثابت و برابر با T_∞ است فرو برده می‌شود. فرض کنید که ضریب انتقال حرارت h بر حسب $W/m^2.K$ با زمان ثابت است. با نوشتن موازنهٔ گرمایی روی جسم جامد برای یک فاصلهٔ زمانی dt ثانیه، گرمای منتقل شده از حمام به جسم باید مساوی با تغییر در انرژی داخلی جسم باشد،

$$hA(T_\infty - T) dt = c_p \rho V dT \quad (5-2-1)$$

که A سطح مفید جسم بر حسب m^2 ، T دمای میانگین جسم در زمان t ثانیه، ρ دانسیتهٔ جسم بر حسب kg/m^3 و V حجم بر حسب m^3 است. با مرتب کردن معادله و انتگرال‌گیری بین حدود $T = T_0$ وقتی که $t = 0$ و $T = T$ وقتی که $t = t$ داریم:

$$\int_{T=T_0}^{T=T} \frac{dT}{T_\infty - T} = \frac{hA}{c_p \rho V} \int_{t=0}^{t=t} dt \quad (5-2-2)$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-(hA/c_p \rho V)t} \quad (5-2-3)$$

این معادله تغییرات دما را با زمان در جسم جامد توضیح می‌دهد. عبارت $c_p \rho V$ غالباً ظرفیت گرمایی یک تکه^(۱) سیستم نامیده می‌شود. این نوع تحلیل غالباً روش ظرفیت یک تکه^(۲) یا روش گرمایش یا سرمایش نیوتونی^(۳) نامیده می‌شود.

۵-۲B معادله‌های شکل‌های هندسی مختلف

در استفاده از معادله (۵-۲-۳) نسبت $\frac{\text{سطح}}{\text{حجم}}$ باید معلوم باشد. فرض اساسی ناچیز بودن مقاومت داخلی

1. lumped thermal capacitance

2. lumped capacity method

3. Newtonian heating or cooling method

در به دست آوردن معادله به کار گرفته می شود. منطقاً این فرض وقتی صحیح است که:

$$N_{Bi} = \frac{hx_1}{k} < 0.1 \quad (5-2-4)$$

که hx_1/k عدد بدون بعد بایوت (N_{Bi}) نامیده می شود و x_1 بعد مشخصه جسم است که از $V/A =$ به دست می آید. عدد بایوت^(۱) مقادیر نسبی مقاومت هدایت داخلی و مقاومت جابه جایی سطح را با هم مقایسه می کند.

برای یک کره،

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{4\pi r^3/3}{4\pi r^2} = \frac{r}{3} \quad (5-2-5)$$

برای یک استوانه طویل،

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{\pi D^2 L/4}{\pi DL} = \frac{D}{4} = \frac{r}{2} \quad (5-2-6)$$

و برای یک میله طویل یا مقطع مربع،

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{(2x)^2 L}{4(2x)L} = \frac{x}{2} \quad (x = \frac{1}{2} \text{ thickness}) \quad (5-2-7)$$

مثال ۵-۲-۱ سرد کردن یک گلوله فولادی

یک گلوله فولادی با شعاع 1 in ($25/4 \text{ mm}$) در دمای یکنواخت 800°F ($699/9 \text{ K}$) قرار دارد. این گلوله به طور ناگهانی در محیطی که دمای ثابت آن 250°F ($394/3 \text{ K}$) است قرار می گیرد. با فرض ضریب جابه جایی $h = 2 \text{ Btu/hr}$ ($11/36 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$) دمای گلوله را بعد از گذشت یک ساعت (3600 ثانیه) محاسبه کنید. خواص فیزیکی میانگین، $k = 25 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ \text{F}$ ($43/3 \text{ W/m} \cdot \text{K}$)، $\rho = 480 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ (784 kg/m^3) و $c_p = 0/11 \text{ Btu/lb}_m \cdot ^\circ \text{F}$ ($0/4606 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$) واحدهای SI و انگلیسی را به کار ببرید.

حل: برای یک کره از معادله (۵-۲-۵) داریم،

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{r}{3} = \frac{1/12}{3} = \frac{1}{36} \text{ ft}$$

$$= \frac{25/4}{1000 \times 3} = 8/47 \times 10^{-3} \text{ m}$$

از معادله (۵-۲-۴) برای عدد بایوت،

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$N_{Bi} = \frac{h x_1}{k} = \frac{2 \times (1/36)}{25} = 0.00222$$

$$N_{Bi} = \frac{11/36 \times (8/47 \times 10^{-3})}{43/3} = 0.00222$$

این مقدار کوچکتر از ۰/۱ است بنابراین روش ظرفیت یک تکه می تواند استفاده شود. پس،

$$\frac{h A}{c_p \rho V} = \frac{2}{0.11 \times 490 \times (1/36)} = 1/335 \text{ h}^{-1}$$

$$\frac{h A}{c_p \rho V} = \frac{11/36}{0.4606 \times 1000 \times 7849 \times (8/47 \times 10^{-3})} = 3/71 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \quad (1/335 \text{ h}^{-1})$$

با جایگزینی در معادله (۵-۲-۳) برای $t = 1 \text{ hr}$ و حل معادله نسبت به T ,

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{T - 250^{\circ}\text{F}}{800 - 250} = \exp[-(h A/c_p \rho V)t] = \exp[-1/335 \times 1]$$

$$T = 395^{\circ}\text{F}$$

$$\frac{T - 394/3 \text{ K}}{699/9 - 394/3} = \exp[-3/71 \times 10^{-4} \times 3600]$$

$$T = 474/9 \text{ K}$$

۵-۲C مقدار کل گرمای منتقل شده

دمای هر جامدی در زمان t از معادله (۵-۲-۳) می تواند محاسبه شود. در زمان t نرخ انتقال حرارت لحظه ای $q(t)$ بر حسب W از جامدی با مقاومت داخلی ناچیز از رابطه زیر محاسبه می شود،

$$q(t) = hA(T - T_{\infty}) \quad (5-2-8)$$

با جایگزینی دمای لحظه ای T از معادله (۵-۲-۳) در معادله (۵-۲-۸)،

$$q(t) = hA(T_0 - T_{\infty})e^{-(hA/c_p \rho V)t} \quad (5-2-9)$$

برای تعیین مقدار کل گرمای منتقل شده بر حسب $W.s$ یا J در زمان $t = 0$ تا $t = t$ می توانیم

انتگرال معادله (۵-۲-۹) را بگیریم،

$$Q = \int_{t=0}^{t=t} q(t)dt = \int_{t=0}^{t=t} hA(T_0 - T_{\infty})e^{-(hA/c_p \rho V)t} dt \quad (5-2-10)$$

$$Q = c_p \rho V(T_0 - T_{\infty})[1 - e^{-(hA/c_p \rho V)t}] \quad (5-2-11)$$

مثال ۵-۲-۲ مقدار کل گرما در فرآیند سرد کردن

برای شرایط مثال ۵-۲-۱ مجموع مقدار گرمای خارج شده تا $t = ۳۶۰۰$ s را محاسبه کنید.

حل: از مثال ۵-۲-۱ داریم، $V = ۳/۷۱ \times ۱۰^{-۴} \text{ s}^{-۱}$ h A/cp ρ همچنین،

$$V = 4\pi r^3 / 3 = 4\pi (0.0254)^3 / 3 = 6/864 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

با جایگزینی در معادله (۵-۲-۱۱)،

$$Q = 0.4606 \times 10000 \times 7849 \times (6/864 \times 10^{-5}) \times (699/9 - 394/3)$$

$$\times [1 - \exp[-3/71 \times 10^{-4} \times 3600]]$$

$$= 5/589 \times 10^4 \text{ J}$$

۵-۳ هدایت گرمایی ناپایدار در اشکال هندسی مختلف

۵-۳A مقدمه و روشهای تحلیلی

در بخش ۵-۲ حالت ساده‌ای را با مقاومت داخلی ناچیز مورد بحث قرار دادیم که جسم ضریب هدایت گرمایی خیلی بالا داشت. اکنون می‌خواهیم حالت عمومی‌تری که مقاومت داخلی کوچک نیست را مورد بررسی قرار دهیم که در این حالت دما در جامد ثابت نیست. اولین حالتی که بررسی خواهیم کرد سطحی است که مقاومت جابه‌جایی آن در مقایسه با مقاومت داخلی اش ناچیز است. این مورد به خاطر ضریب انتقال حرارت خیلی بزرگ در سطح یا به خاطر مقاومت هدایتی نسبتاً زیاد در جسم، می‌تواند اتفاق بیفتد.

برای تشریح یک روش تحلیلی حل این حالت، ابتدا معادله را برای هدایت ناپایدار در جهت x

فقط در یک صفحه مسطح با ضخامت $2H$ (مطابق شکل ۵-۳-۱) به دست خواهیم آورد. توزیع اولیه

دما در صفحه در $t = 0$ ثابت و به صورت $T = T_0$ است. در $t = 0$ دمای محیط به طور ناگهانی به T_1

تغییر می‌کند و ثابت نگهداشته می‌شود. چون مقاومت جابه‌جایی نداریم دمای سطح در T_1 ثابت

می‌ماند. وقتی که این هدایت در جهت x باشد معادله (۵-۱-۱۰) برقرار خواهد بود،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5-1-10)$$

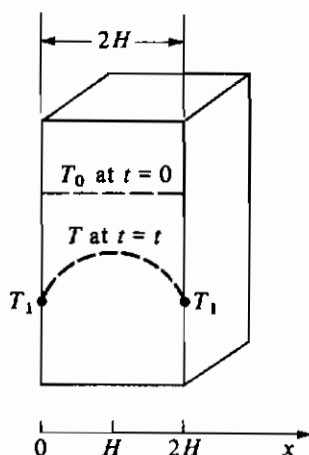
شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر هستند،

$$T = T_0, \quad t = 0, \quad x = x$$

$$T = T_1, \quad t = t, \quad x = 0$$

$$(5-3-1)$$

$$T = T_1, \quad t = t, \quad x = 2H$$



شکل ۱-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک صفحه صاف با مقاومت سطحی ناچیز

معمولاً بهتر است که یک دمای بدون بُعد Y تعریف کنیم به طوری که بین ۰ و ۱ تغییر کند، بنابراین،

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \quad (5-3-2)$$

با جایگزینی معادله (۵-۳-۲) در (۵-۱-۱۰) داریم،

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (5-3-3)$$

با تعریف مجدد شرایط مرزی و اولیه،

$$Y = \frac{T_1 - T_0}{T_1 - T_0} = 1, \quad t = 0, \quad x = x$$

$$Y = \frac{T_1 - T_1}{T_1 - T_0} = 0, \quad t = t, \quad x = 0 \quad (5-3-4)$$

$$Y = \frac{T_1 - T_1}{T_1 - T_0} = 0, \quad t = t, \quad x = 2H$$

روش مناسب مورد استفاده برای حل معادله (۵-۳-۳) روش جداسازی متغیرهاست که

حاصل ضرب زیر را می‌دهد،

$$Y = e^{-a^2 \alpha t} (A \cos ax + B \sin ax) \quad (5-3-5)$$

که A و B ثابت هستند و a یک پارامتر است. با به کار بردن شرایط مرزی و شرایط اولیه معادله (۵-۳-۴)

برای حل ثابتهای معادله (۵-۳-۳) حل نهایی یک سری نامتناهی فوریه خواهد بود،

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1} \exp \frac{-1^2 \pi^2 \alpha t}{4H^2} \sin \frac{1\pi x}{2H} + \frac{1}{3} \exp \frac{-3^2 \pi^2 \alpha t}{4H^2} \sin \frac{3\pi x}{2H} + \frac{1}{5} \exp \frac{-5^2 \pi^2 \alpha t}{4H^2} \sin \frac{5\pi x}{2H} + \dots \right) \quad (5-3-6)$$

بنابراین از معادله (۵-۳-۶) دمای T در هر نقطه x و زمان t می‌تواند تعیین شود. اما استفاده از این نوع معادلات خیلی وقت‌گیر است. منحنیهای مناسبی براساس این معادلات به دست آمده‌اند که در بخشهای ۵-۳B، ۵-۳C، ۵-۳D و ۵-۳E مورد بحث قرار می‌گیرند و در آنها مقاومت سطحی نیز به حساب آمده است.

۵-۳B هدایت ناپایدار در یک جامد نیمه بی‌نهایت^(۱)

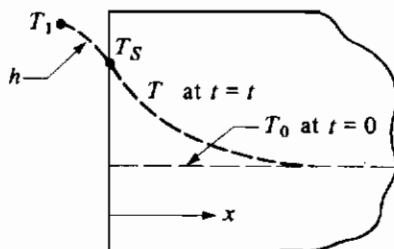
در شکل ۵-۳-۲ یک جامد نیمه بی‌نهایت نشان داده شده است که تا ∞ در جهت x مثبت توسعه یافته است. هدایت گرما فقط در جهت x اتفاق می‌افتد. در ابتدا دمای جامد در T_0 ثابت است. در زمان $t = 0$ جامد به طور ناگهانی در معرض سیالی با دمای ثابت قرار می‌گیرد یا در یک سیال با دمای ثابت T_1 فرو برده می‌شود. ضریب جابه‌جایی h بر حسب $W/m^2.K$ یا $Btu/hr.ft^2.F$ وجود دارد یعنی مقاومت سطحی موجود است. بنابراین دمای T_s در سطح با T_1 مساوی نیست.

حل معادله (۵-۱-۱۰) برای این شرایط به دست آمده است و به صورت زیر است،

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - Y = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} - \exp \left[\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h}{k} \sqrt{\alpha t} \right) \quad (5-3-7)$$

که x فاصله از سطح جامد بر حسب m ، t زمان بر حسب ثانیه، $\alpha = k/\rho c_p$ بر حسب m^2/s است و در سیستم واحدهای انگلیسی، $t = hr$ و $\alpha = ft^2/hr$ است. تابع erfc به صورت $(1 - \operatorname{erf})$ است که erf تابع خطاست و مقادیر عددی آن در جداول و کتابها موجود هستند. Y جزء تغییرات انجام نشده است. $(T_1 - T)/(T_1 - T_0)$ است و $1 - Y$ جزء تغییرات است.

شکل ۵-۳-۳ که به وسیله معادله (۵-۳-۷) محاسبه شده، منحنی مناسبی برای هدایت گرمایی ناپایدار در جامد نیمه بی‌نهایت با جابه‌جایی در سطح است. اگر هدایت در جامد به اندازه کافی آهسته باشد با h خیلی بزرگ باشد از بالاترین خط با $h\sqrt{\alpha t}/k = \infty$ استفاده می‌شود.



شکل ۲-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک جامد نیمه بی نهایت

مثال ۱-۳-۵ دمای انجماد در زیر زمین

عمقی از خاک که در آن دماهای انجماد نفوذ می کند غالباً در کشاورزی و ساختمان سازی با اهمیت است. در طول یک روز پاییزی دمای زمین در $15/6^{\circ}\text{C}$ (60°F) تا عمق چندین متر ثابت است. یک توده هوای سرد دمای هوا را از $15/6^{\circ}\text{C}$ به $17/8^{\circ}\text{C}$ (0°F) کاهش می دهد. ضریب جابه جایی بالای خاک $11/36 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ($2 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2$) است. خواص خاک به صورت زیر است:

$$k = 0/865 \text{ W/m}\cdot\text{K} \quad (0/5 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^{\circ}\text{F}) \quad \alpha = 4/65 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \quad (0/018 \text{ ft}^2/\text{hr})$$

از اثرات گرمای نهان صرف نظر کنید. واحدهای SI و انگلیسی را استفاده کنید.

الف) دمای سطح بعد از ۵ ساعت چیست؟

ب) در مدت ۵ ساعت تا چه عمقی از خاک دمای 0°C (32°F) نفوذ می کند؟

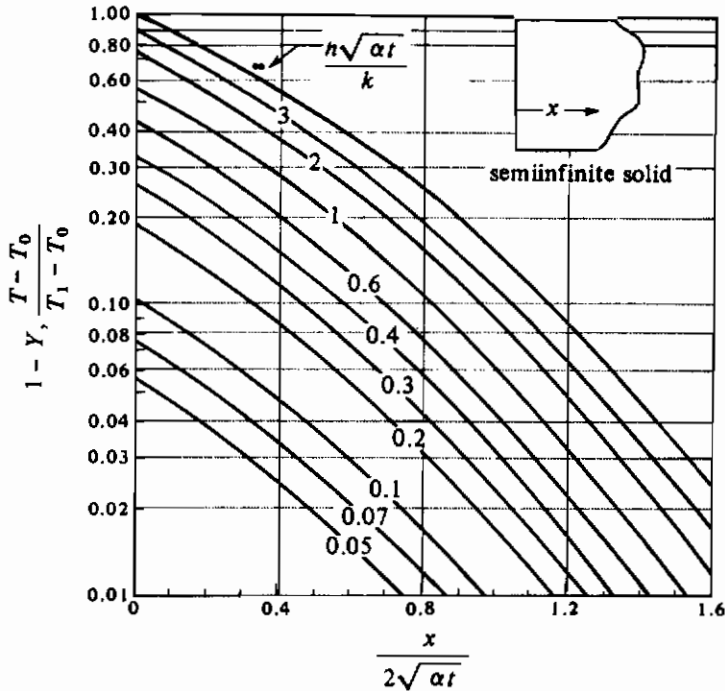
حل: این حالت، هدایت ناپایدار در جامد نیمه بی نهایت است. برای قسمت الف)، مقدار x که فاصله از سطح می باشد، صفر است ($x = 0$). سپس مقدار $x/2\sqrt{\alpha t}$ به صورت زیر برای $t = 5 \text{ hr}$ و $k = 11/36 \text{ W/m}^2\cdot^{\circ}\text{C}$ و $\alpha = 4/65 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ محاسبه می شود. با استفاده از واحدهای SI و انگلیسی،

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0}{2\sqrt{(4.65 \times 10^{-7})(5 \times 3600)}} \quad \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0}{2\sqrt{0.018(5)}}$$

همچنین،

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{11.36\sqrt{(4.65 \times 10^{-7})(5 \times 3600)}}{0.865} \quad \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{2\sqrt{0.018(5)}}{0.5}$$

$$= 1.2 \quad = 1.2$$



شکل ۳-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک جامد نیمه بی نهایت با جابه جایی در سطح. محاسبه شده از معادله (۵-۳-۷) (S1).

با استفاده از شکل ۳-۳-۵ برای $x/2\sqrt{\alpha t} = 0$ و $h\sqrt{\alpha t}/k = 1/2$ مقدار $1 - Y = 0/63$ از منحنی خوانده می شود. با تبدیل دماها به کلوین،

$$T_0 = 15/6^\circ\text{C} + 273/2 = 288/8 \text{ K } (60^\circ\text{F})$$

$$T_1 = -17/8^\circ\text{C} + 273/2 = 255/4 \text{ K } (0^\circ\text{F})$$

سپس،

$$1 - Y = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 0/63 = \frac{T - 288/8}{255/4 - 288/8}$$

با حل معادله نسبت به T در سطح پس از ۵ ساعت،

$$T = 267/76 \text{ K } (-5/44^\circ\text{C}) \text{ یا } (22/2^\circ\text{F})$$

برای قسمت (ب)، $T = 273/2 \text{ K}$ یا 0°C و فاصله x مجهول است. با جایگذاری مقادیر معلوم،

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{273/2 - 288/8}{255/4 - 288/8} = 0.467$$

از شکل ۳-۳-۵ برای $0.467 = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ و $h\sqrt{at}/k = 1/2$ مقدار 0.16 از منحنی برای $x/2\sqrt{at}$ خوانده می شود. بنابراین،

$$\frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{x}{2\sqrt{(4.65 \times 10^{-7})(5 \times 3600)}} = 0.16 \quad \frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{x}{2\sqrt{0.018(5)}} = 0.16$$

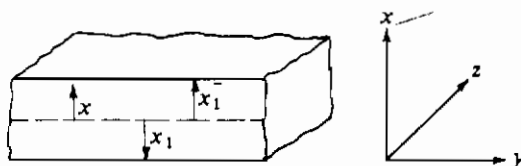
با حل معادله نسبت به x طولی که دمای انجماد در ۵ ساعت نفوذ می کند به دست می آید،

$$x = 0.293 \text{ m } (0.96 \text{ ft})$$

۳-۵ هدایت ناپایدار در یک صفحه مسطح بزرگ

یک شکل هندسی که اغلب در مسائل هدایت گرما استفاده می شود، صفحه مسطحی با ضخامت $2x_1$ در جهت x و با ابعادی بزرگ یا بی نهایت در جهت های y و z مطابق شکل ۳-۳-۲ است. گرما فقط از دو سطح موازی و صاف در جهت x هدایت می شود. دمای ثابت اولیه صفحه در لحظه $t = 0$ برابر با T_0 است. جسم جامد در معرض محیطی با دمای T_1 قرار می گیرد و هدایت ناپایدار اتفاق می افتد. مقاومت سطحی هم وجود دارد.

نتایج عددی این حالت به صورت گرافیکی در شکل های ۳-۳-۵ و ۳-۳-۶ نشان داده شده است. شکل ۳-۳-۵ که توسط Gurney و Lurie (G2) ارائه شده است یک منحنی مناسب برای تعیین دماها در هر موقعیت در صفحه و در هر زمان t است. گروه های بدون بعدی که در این منحنی و منحنی های دیگر حالت ناپایدار در این بخش استفاده می شوند در جدول ۳-۳-۱ داده شده اند (x فاصله از مرکز صفحه مسطح، شعاع استوانه و یا شعاع کره است. x برای یک جامد نیمه بی نهایت فاصله از سطح است). در شکل ۳-۳-۵ هنگامی که $n = 0$ موقعیت در مرکز صفحه است. غالباً دانستن دمای قبلی در مرکز صفحه مهم است. منحنی دقیق تر برای تعیین دمای مرکز، شکل ۳-۳-۶ یا منحنی Heisler است. Heisler همچنین نمودارهای چندگانه ای برای تعیین دما در موقعیتهای دیگر ارائه کرده است.



شکل ۳-۴. هدایت ناپایدار در یک صفحه مسطح بزرگ

جدول ۱-۳-۵. پارامترهای بدون بعد برای استفاده در منحنیهای هدایت ناپایدار

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \quad m = \frac{k}{hx_1}$$

$$1 - Y = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad n = \frac{x}{x_1}$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2}$$

SI units: $\alpha = \text{m}^2/\text{s}$, $T = \text{K}$, $t = \text{s}$, $x = \text{m}$, $x_1 = \text{m}$, $k = \text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$, $h = \text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$
 English units: $\alpha = \text{ft}^2/\text{h}$, $T = ^\circ\text{F}$, $t = \text{h}$, $x = \text{ft}$, $x_1 = \text{ft}$, $k = \text{btu}/\text{h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}$,
 $h = \text{btu}/\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$
 Cgs units: $\alpha = \text{cm}^2/\text{s}$, $T = ^\circ\text{C}$, $t = \text{s}$, $x = \text{cm}$, $x_1 = \text{cm}$, $k = \text{cal}/\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C}$,
 $h = \text{cal}/\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}$

مثال ۲-۳-۵ هدایت گرمایی در قالب کره

یک قالب مکعب مستطیلی کره که ضخامت آن $46/2 \text{ mm}$ و در دمای اولیه $277/6 \text{ K}$ ($4/4 ^\circ\text{C}$) است، از یک سرد کننده خارج می شود و در محیطی با دمای $297/1 \text{ K}$ ($23/9 ^\circ\text{C}$) قرار می گیرد. اضلاع و کف قالب کره را می توانیم به وسیله دیواره های جانبی ظرف، عایق فرض کنیم. سطح بالای کره در معرض محیط قرار دارد. ضریب جابه جایی ثابت و برابر $8/52 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ است. دما را در سطح کره در فاصله $25/4 \text{ mm}$ زیر سطح و در $46/2 \text{ mm}$ زیر سطح (در کف عایق بندی شده) بعد از ۵ ساعت قرار گرفتن در محیط محاسبه کنید.

حل: کره را می توان به عنوان یک صفحه مسطح بزرگ با هدایت عمودی در جهت x فرض کرد. نظر به این که گرما فقط از سطح بالا وارد می شود و سطح پایین عایق بندی شده است، ضخامت $46/2 \text{ mm}$ از قالب کره معادل با یک نیم صفحه با ضخامت $x_1 = 46/2 \text{ mm}$ است. در صفحه ای با دو سطح در معرض محیط مطابق شکل ۴-۳-۵، مرکز در $x = 0$ مثل یک صفحه عایق بندی شده عمل می کند و دو صفحه با یکدیگر قرینه اند.

خواص فیزیکی کره از ضمیمه A.4 به این صورت هستند،

$$\rho = 998 \text{ kg}/\text{m}^3, \quad c_p = 2/30 \text{ kJ}/\text{kg} \cdot \text{K} = 2300 \text{ J}/\text{kg} \cdot \text{K}, \quad k = 0/197 \text{ W}/\text{m} \cdot \text{K}$$

و ضریب نفوذ گرمایی برابر است با:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0/197}{998 \times 2300} = 8/58 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$x_1 = \frac{46/2}{1000} = 0.0462 \text{ m}$$

پارامترهای مورد نیاز برای استفاده در شکل ۵-۳-۵ به صورت زیر هستند،

$$m = \frac{k}{h x_1} = \frac{0.197}{1.52 \times 0.0462} = 0.5$$

$$X = \frac{\alpha l}{x_1} = \frac{(1.58 \times 10^{-8}) \times 5 \times 3600}{0.0462} = 0.72$$

برای سطح بالایی که $x = x_1 = 0.0462 \text{ m}$ است،

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0.0462}{0.0462} = 1$$

سپس با استفاده از شکل ۵-۳-۵،

$$Y = 0.25 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_s} = \frac{297/1 - T}{297/1 - 277/6}$$

پس از حل، $T = 292/9 \text{ K}$ (19°C)

در نقطه‌ای به فاصله $25/4 \text{ mm}$ از سطح بالایی یا $20/8 \text{ mm}$ از مرکز، $x = 0.0208 \text{ m}$ و،

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0.0208}{0.0462} = 0.45$$

از شکل ۵-۳-۵،

$$Y = 0.45 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_s} = \frac{297/1 - T}{297/1 - 277/6}$$

پس از حل، $T = 288/3 \text{ K}$ ($15/1^\circ \text{C}$)

برای نقطه پایینی یا 0.0462 m از بالا، $x = 0$ و،

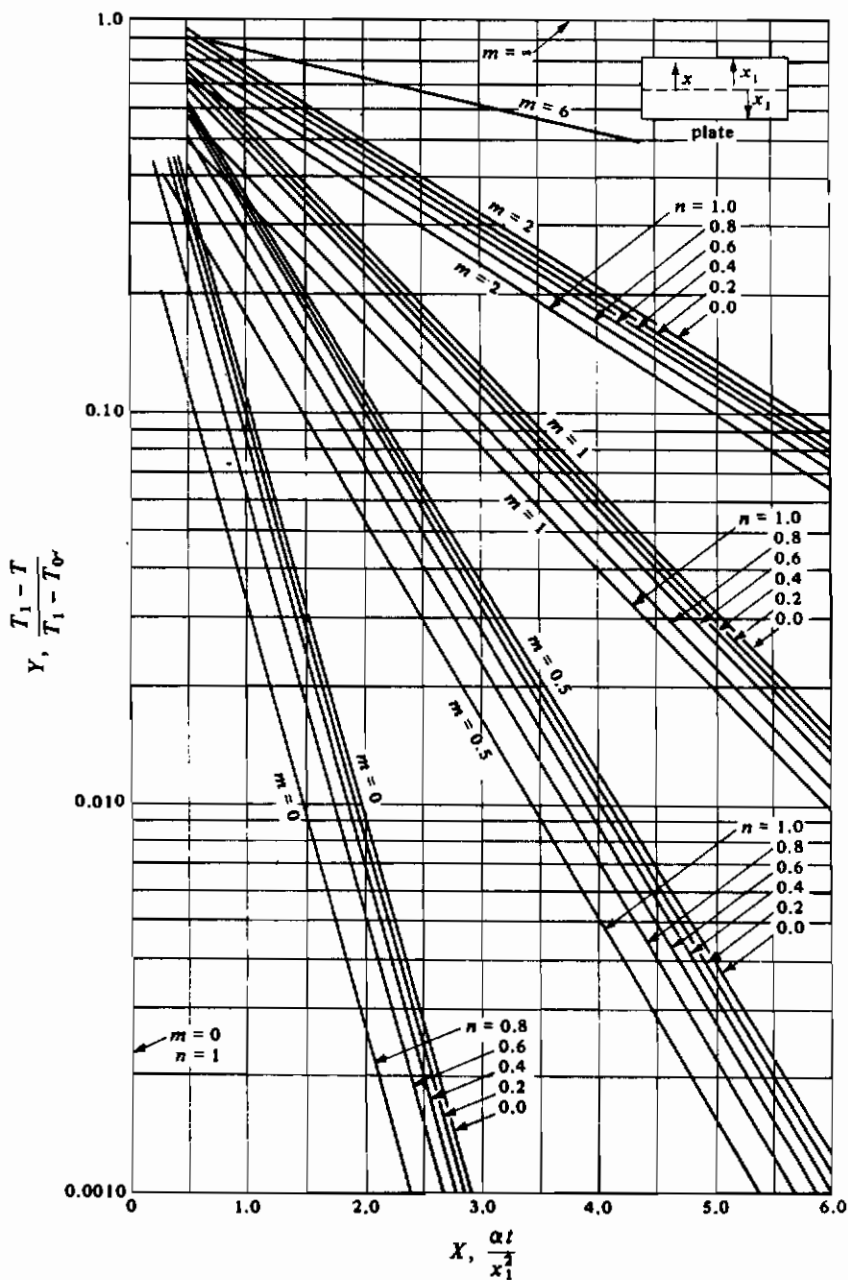
$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0$$

سپس از شکل ۵-۳-۵،

$$Y = 0.50 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_s} = \frac{297/1 - T}{297/1 - 277/6}$$

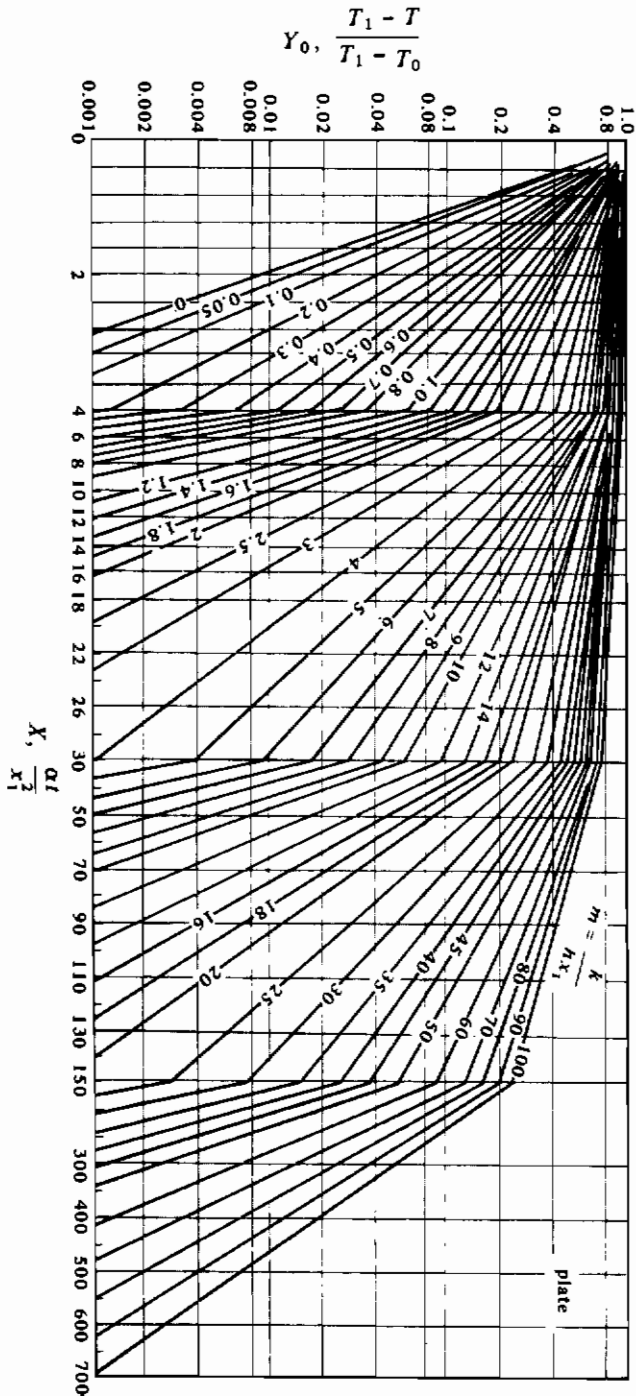
با حل معادله، $T = 287/4 \text{ K}$ ($14/2^\circ \text{C}$) به طریق دیگر، با به کار بردن شکل ۵-۳-۶ که فقط

برای مرکز است، $Y = 0.53$ و $T = 286/8 \text{ K}$ ($13/6^\circ \text{C}$) به دست می‌آید.



شکل ۵-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک صفحه مسطح بزرگ (گرفته شده از

(H. P. Gurney and J. Lurie, Ind. Eng. Chem., 15, 1170 (1923))



شکل ۵-۳-۵ منحنی تعیین دما در مرکز یک صفحه مسطح بزرگ در هدایت گرمایی ناپایدار (گرفته شده از: H. P. Heisler, Trans. ASME, 69, 227 (1947))

۵-۳D هدایت ناپایدار در یک استوانه بلند

در این بخش هدایت ناپایدار را در یک استوانه بلند در حالی در نظر می‌گیریم که هدایت فقط در جهت شعاعی اتفاق می‌افتد. استوانه بلند است، به طوری که هدایت در دو انتهای آن قابل صرفنظر کردن است و یا این‌که دو انتهای آن عایق هستند. منحنیهای این حالت، در شکل ۵-۳-۷ برای تعیین دما در هر موقعیت مکانی و در شکل ۵-۳-۸ برای تعیین دما در مرکز، ارائه شده است.

مثال ۵-۳-۳ هدایت ناپایدار گرمایی در یک قوطی کنسرو

یک قوطی کنسرو استوانه‌ای شکل به قطر $68/1 \text{ mm}$ و ارتفاع $101/6 \text{ mm}$ در ابتدا در دما $29/4^\circ\text{C}$ قرار دارد. مجموعه‌ای از قوطی‌های کنسرو در یک محفظه به طور عمودی روی هم قرار گرفته‌اند و بخار آب در $115/6^\circ\text{C}$ وارد این محفظه می‌شود. در صورتی که محفظه مدت $0/75 \text{ hr}$ در دمای $115/6^\circ\text{C}$ قرار گیرد، دمای مرکز قوطی را محاسبه کنید. فرض کنید قوطی مورد نظر در وسط قوطی‌های دیگر است و دو طرف آن توسط قوطیهای دیگر عایق شده است. ظرفیت گرمایی دیواره قلزی قوطی ناچیز است. ضریب انتقال حرارت بخار آب حدود $4540 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ است. خواص فیزیکی، $k = 0/83 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ و $\alpha = 2/007 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ است.

حل: چون قوطی از دو طرف عایق شده است می‌توانیم آن را به عنوان یک استوانه بلند در نظر

$$\text{بگیریم. شعاع آن برابر با } x_1 = \frac{0/681}{2} = 0/3405 \text{ m} \text{ است. در مرکز با } x = 0$$

$$\eta = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0$$

همچنین،

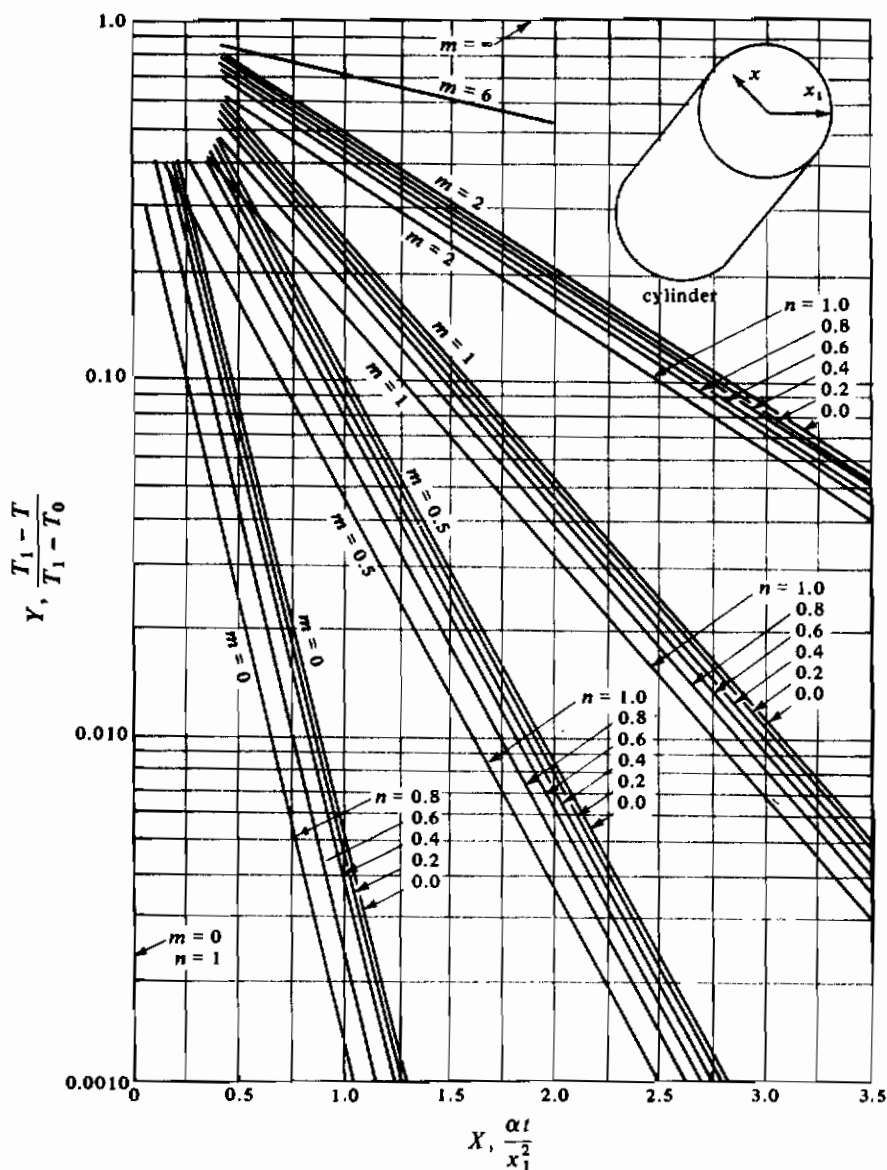
$$m = \frac{k}{h x_1} = \frac{0/83}{4540 \times 0/3405} = 0/00537$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(2/007 \times 10^{-7}) \times 0/75 \times 3600}{0/3405^2} = 0/468$$

با استفاده از شکل ۵-۳-۸ (منحنی Heister) دمای مرکز برابر خواهد بود با:

$$Y = 0/13 = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{115/6 - T}{115/6 - 29/4}$$

و با حل معادله، $T = 104/4^\circ\text{C}$.

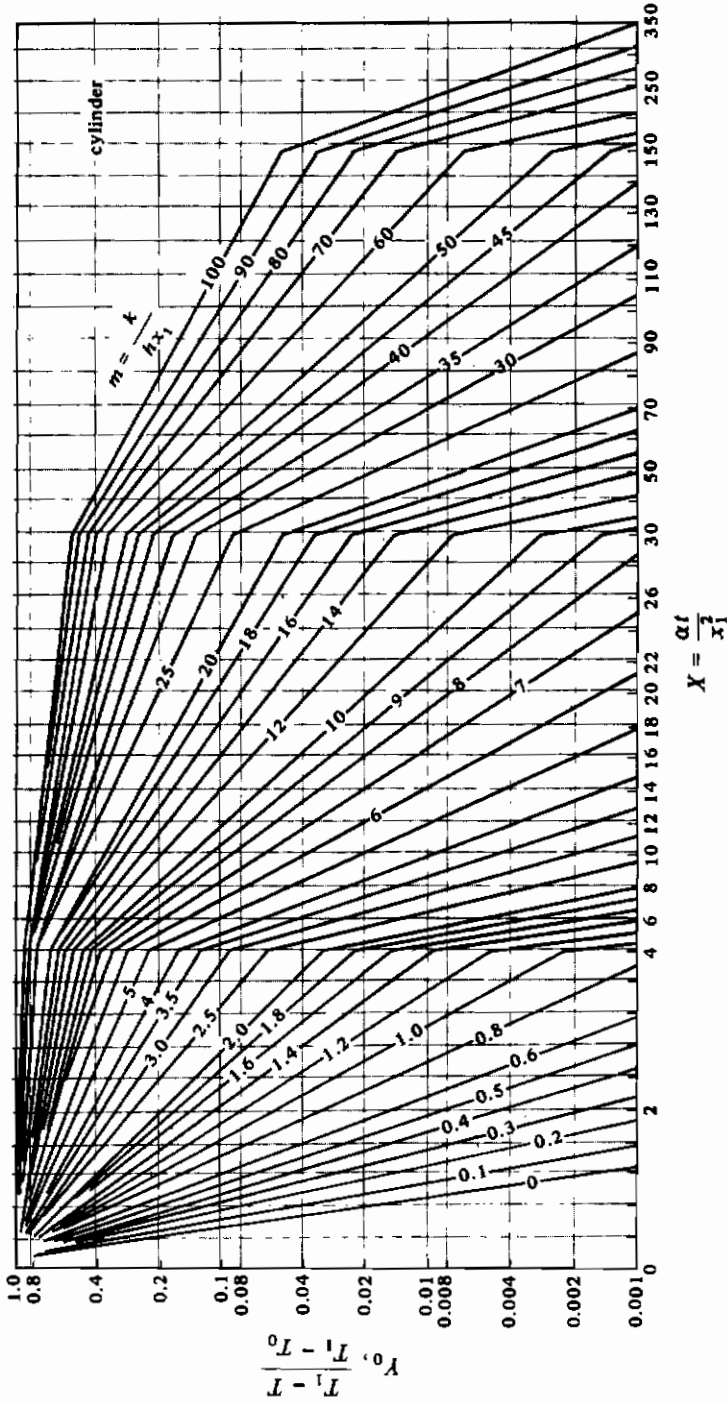


شکل ۷-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک استوانه بلند (گرفته شده از:

(H. P. Gurney and J. Lurie, Ind. Eng. Chem., 15, 1170 (1923))

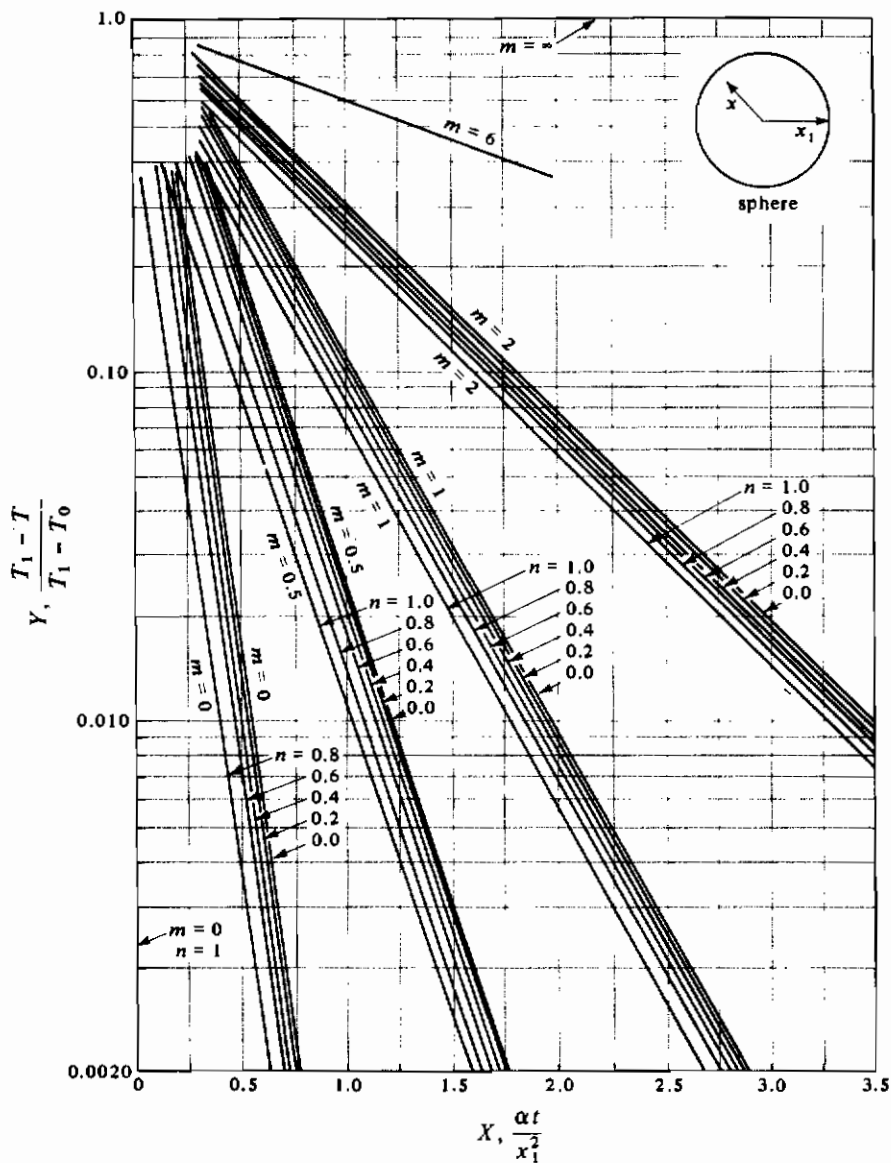
۵-۳E هدایت ناپایدار در یک کره

در شکل ۹-۳-۵ یک منحنی توسط Gurney و Lurie برای تعیین دما در هر موقعیت مکانی در یک کره داده شده است. در شکل ۱۰-۳-۵ یک منحنی توسط Heister برای تعیین دمای مرکز یک کره ارائه شده است.



شکل ۸-۳.۵. منحنی تعیین دمای مرکزی استوانه بلند در هدایت ناپایدار (گرفته شده از:

(H. P. Heisler, Trans. ASME, 69,227 (1947)

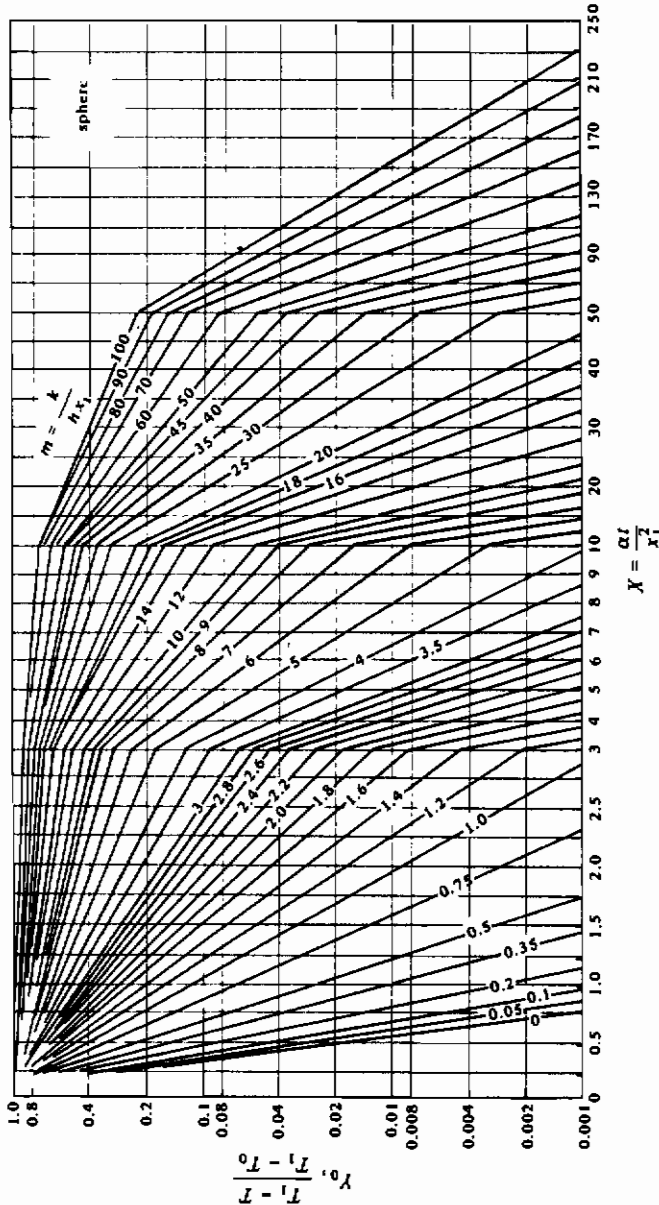


شکل ۹-۳-۵. هدایت ناپایدار در یک کره (گرفته شده از:

(H. P. Gurney and J. Lurie, Ind. Eng. Chem., 15, 1170 (1923))

۵-۳۴ هدایت ناپایدار در سیستمهای دو بُعدی و سه بُعدی

مسائل هدایت که تاکنون مطرح شد مربوط به سیستمهای یک بُعدی بود. اما بسیاری از مسائل واقعی با هدایت ناپایدار در دو و یا سه جهت رو به رو هستند. در این بخش چگونگی ترکیب روشهای یک بُعدی برای به دست آوردن راه‌حلهای مناسب برای سیستمهای چند بُعدی را تشریح خواهیم کرد.



شکل ۱۰-۳-۵. منحنی تعیین دمای مرکز یک کره در هدایت ناپایدار (گرفته شده از:

(H. P. Heister, Trans. ASME, 69, 227 (1947)

Newman با استفاده از اصل جمع آثار^(۱) به صورت ریاضی نحوه ترکیب روشهای هدایت یک بُعدی به صورت جداگانه در جهتهای x , y , z را برای به دست آوردن یک راه حل کلی برای هدایت همزمان در هر سه جهت، نشان داد. به عنوان مثال، یک قطعه مکعب مستطیل شکل به ابعاد $2x_1$, $2y_1$, $2z_1$ در شکل ۵-۳-۱۱ نشان داده شده است. مقدار Y در جهت x مانند قبل به صورت زیر است،

$$Y_x = \frac{T_1 - T_x}{T_1 - T_0} \quad (5-3-8)$$

که T_x همانند قبل دما در زمان t و فاصله x از خط مرکزی است. همچنین $m = k/hx_1$, $n = x/x_1$ و $X_x = \alpha t/x_1^2$ است. سپس برای جهت y

$$Y_y = \frac{T_1 - T_y}{T_1 - T_0} \quad (5-3-9)$$

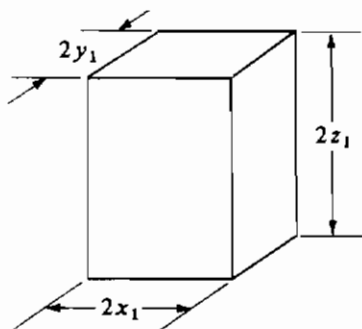
و $m = k/hy_1$, $n = y/y_1$ و $X_y = \alpha t/y_1^2$ به طور مشابه برای جهت z

$$Y_z = \frac{T_1 - T_z}{T_1 - T_0} \quad (5-3-10)$$

سپس برای انتقال همزمان در هر سه جهت،

$$Y_{x,y,z} = (Y_x)(Y_y)(Y_z) = \frac{T_1 - T_{x,y,z}}{T_1 - T_0} \quad (5-3-11)$$

که در این جا $T_{x,y,z}$ دما در نقطه ای به مختصات x , y , z از مرکز جسم مکعب مستطیل شکل است. مقدار Y_x برای دو صفحه موازی از شکلهای ۵-۳-۵ و ۵-۳-۶ برای هدایت در یک صفحه صاف به دست می آید. مقادیر Y_y , Y_z به طریق مشابه از همان شکل به دست می آیند.



شکل ۵-۳-۱۱. هدایت ناپایدار در سه بُعد در یک بلوک مکعب مستطیل شکل

برای یک استوانه کوتاه با شعاع x_1 و طول $2y_1$ ، این روش به کار برده می‌شود: ابتدا Y_x برای هدایت شعاعی از شکل‌های مربوط به استوانه بلند به دست می‌آید. سپس Y_y برای هدایت بین دو صفحه موازی از شکل ۵-۳-۵ یا ۵-۳-۶ مربوط به هدایت در یک صفحه صاف به دست می‌آید و پس از آن،

$$Y_{x,y} = (Y_x)(Y_y) = \frac{T_1 - T_{x,y}}{T_1 - T_0} \quad (5-3-12)$$

مثال ۵-۳-۴ هدایت دوبعدی در یک استوانه کوتاه

مثال ۵-۳-۳ را برای هدایت ناپایدار در یک قوطی کنسرو با این فرض که هدایت از دو صفحه انتهایی نیز اتفاق بیفتد، تکرار کنید.

حل: قوطی که قطر آن $68/1 \text{ mm}$ و ارتفاع آن $101/6 \text{ mm}$ است در شکل ۵-۳-۱۲ نشان داده شده است. مقادیر داده شده از مثال ۵-۳-۳ به صورت زیر می‌باشند،

$$\alpha = 2/0007 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}, k = 0/83 \text{ W/m}\cdot\text{K}, y_1 = \frac{0/1016}{2} = 0/0508 \text{ m}, x_1 = 0/03405 \text{ m}$$

$$t = 0/75 \times 3600 = 2700 \text{ s}, h = 4540 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$$

برای هدایت (شعاعی) در جهت x هم چنان که قبلاً محاسبه شد،

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{x_1} = 0$$

$$m = \frac{k}{h x_1} = \frac{0/83}{4540 \times 0/03405} = 0/00537$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(2/0007 \times 10^{-7}) \times 2700}{0/03405^2} = 0/468$$

از شکل ۵-۳-۸ برای محاسبه دمای مرکز،

$$Y_x = 0/13$$

با هدایت در جهت (محوری) y ، برای محاسبه دمای مرکز،

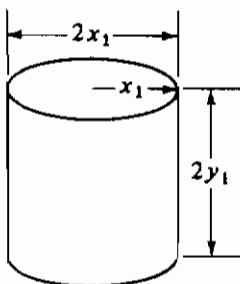
$$n = \frac{y}{y_1} = \frac{0}{0/0508} = 0$$

$$m = \frac{k}{h y_1} = \frac{0/83}{4540 \times 0/0508} = 0/0036$$

$$X = \frac{\alpha t}{y_1^2} = \frac{(2/0007 \times 10^{-7}) \times 2700}{0/0508^2} = 0/210$$

با به کار بردن شکل ۵-۳-۶ برای مرکز یک صفحه بزرگ (دو صفحه موازی مقابل هم) داریم:

$$Y_y = 0/80$$



شکل ۵-۳-۱۲. هدایت دو بُعدی در یک استوانه کوتاه در مثال ۵-۳-۴

با جایگزینی در معادله (۵-۳-۱۲) خواهیم داشت،

$$Y_{x,y} = Y_x \times Y_y = 0/13 \times 0/80 = 0/104$$

بنابراین:

$$\frac{T_1 - T_{x,y}}{T_1 - T_0} = \frac{115/6 - T_{x,y}}{115/6 - 29/4} = 0/104$$

$$T_{x,y} = 106/6^\circ\text{C}$$

این دما باید با دمای $104/4^\circ\text{C}$ در مثال ۵-۳-۳ که فقط هدایت شعاعی در نظر گرفته شده بود مقایسه شود.

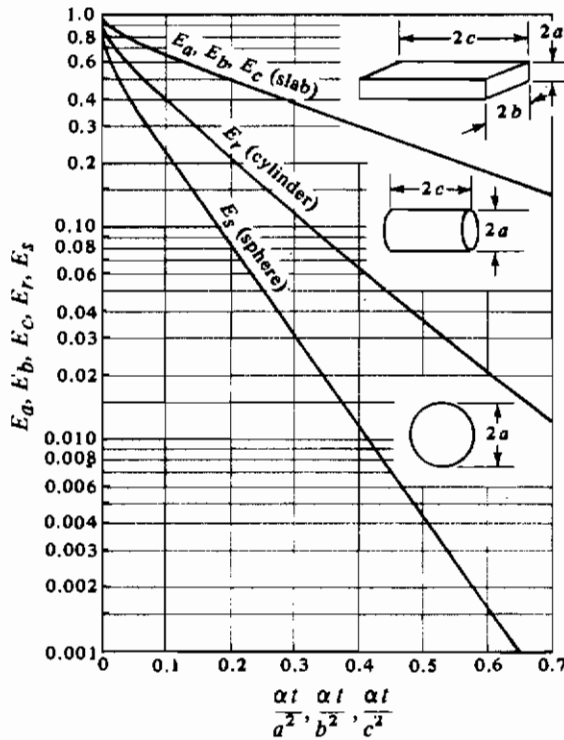
۵-۳G منحنیهای دمای میانگین در صفحه، استوانه و کره با مقاومت سطحی ناچیز

اگر مقاومت سطحی ناچیز باشد، منحنیهای شکل ۵-۳-۱۳، مقدار کل تغییر انجام نشده E را برای صفحات، استوانه‌ها و کره‌ها و در هدایت ناپایدار خواهد داد. مقدار E به صورت زیر است:

$$E = \frac{T_1 - T_{av}}{T_1 - T_0} \quad (5-3-13)$$

که در این جا T_0 دمای یکنواخت اولیه، T_1 دمای محیط که جامد به طور ناگهانی در معرض آن قرار می‌گیرد و T_{av} دمای میانگین جامد بعد از t ساعت است. مقادیر E_a و E_b و E_c برای هدایت بین یک جفت صفحه موازی نیز به کار می‌روند. به عنوان مثال برای هدایت در جهتهای a و b در یک میله با مقطع مستطیل داریم:

$$E = E_a E_b \quad (5-3-14)$$



شکل ۱۳-۳-۵. هدایت ناپایدار و دماهای میانگین برای مقاومت سطحی ناچیز (باکسب مجوز گرفته شده از: R.E. Treybal, Mass Transfer Operations, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968)

برای هدایت در هر سه جهت a و b و c همچنین داریم:

$$E = E_a E_b E_c \quad (۵-۳-۱۵)$$

و برای هدایت در استوانه‌های کوتاه به طول $2c$ و شعاع a داریم:

$$E = E_c E_r \quad (۵-۳-۱۶)$$

۴-۵ روشهای عددی تفاضل محدود برای هدایت ناپایدار

۴A-۵ هدایت ناپایدار در یک اسلب

۱- مقدمه: همان‌طور که در بخشهای قبلی این فصل بحث شد، معادلات دیفرانسیل جزئی مربوط به هدایت ناپایدار در اجسام مختلف با شکلهای هندسی ساده را در صورتی که شرایط مرزی در $T = T_1$

نسبت به زمان ثابت باشند، می‌توان با روشهای تحلیلی حل کرد. همچنین در این راه حلها، توزیع اولیه دما در $t = 0$ و $T = T_0$ یکنواخت است. منحنیهای حالت ناپایدار نیز که برای حل استفاده می‌شوند، شرایط مرزی و اولیه مشابهی دارند. اما وقتی که شرایط مرزی نسبت به زمان یا مکان ثابت نباشند، باید از روشهای عددی استفاده کرد.

روشهای محاسبه عددی برای هدایت گرمایی ناپایدار مشابه روشهای عددی برای حالت پایدار که در بخش ۱۵-۴ بحث شد، می‌باشند. سطح جامد به قسمتها یا اسلبهای با طول مساوی تقسیم می‌شود و در مرکز هر قسمت یک گره فرضی قرار می‌گیرد. سپس برای هر گره موازنه گرمایی نوشته می‌شود. تفاوت این روش با حالت پایدار در این است که در این حالت تجمع گرمایی در هر گره داریم. ۲- معادلات برای اسلب: معادله حالت ناپایدار برای هدایت در جهت x در یک اسلب به صورت زیر است،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5-1-10)$$

این معادله می‌تواند مبنای حل عددی باشد، به این صورت که هر کدام از مشتقات جزئی به صورت یک تفاضل محدود برحسب ΔT و Δt و Δx نوشته شود. اما برای رسیدن به نتیجه نهایی از موازنه گرمایی استفاده می‌شود. شکل ۱-۴-۵ یک اسلب را نشان می‌دهد که مرکز آن نقطه n است و به وسیله ناحیه خط چین نشان داده شده است. عرض اسلب m Δx و سطح مقطع آن $A \text{ m}^2$ است. گرهی که در نقطه n است با دمای T_n ، در مرکز قسمت هاشور زده قرار گرفته است و این گره نشاندنده کل جرم و ظرفیت گرمایی آن بخش یا اسلب است. فرض می‌شود که هر گره توسط یک میله کوچک فرضی به گره مجاور وصل شده است. (برای مثال شکل ۳-۱۵-۴ را ببینید).

این شکل، توزیع دما را در فاصله زمانی معلوم t ثانیه نشان می‌دهد. با نوشتن موازنه گرمایی روی این گره یا اسلب، به صورت: (نرخ گرمای ورودی - نرخ گرمای خروجی = نرخ تجمع گرما)، در فاصله زمانی Δt ثانیه داریم:

$$\frac{kA}{\Delta x} (T_{n-1} - T_n) - \frac{kA}{\Delta x} (T_n - T_{n+1}) = \frac{(A \Delta x) \rho c_p}{\Delta t} (T_{n+\Delta t} - T_n) \quad (5-4-1)$$

که در این رابطه T_n دمای نقطه n در زمان t و $T_{n+\Delta t}$ دمای نقطه n در زمان $t + \Delta t$ است. با مرتب کردن رابطه و حل آن نسبت به $T_{n+\Delta t}$ داریم:

$$T_{n+\Delta t} = \frac{1}{M} [T_{n+1} + (M-2)T_n + T_{n-1}] \quad (5-4-2)$$

که در این جا

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} \quad (5-4-3)$$

توجه کنید که در معادله (۵-۴-۲) دمای T_n در گره n در زمان جدید $t + \Delta t$ با استفاده از سه نقطه دیگر که دمای آنها در زمان t (زمان شروع) معلوم بوده، محاسبه شده است. به این روش، روش صریح^(۱) می‌گویند، به دلیل این که دما در یک زمان جدید به طور صریح با استفاده از دماهای زمان قبل محاسبه می‌شود. در این روش، محاسبه به طور مستقیم از یک زمان تا فاصله زمانی بعدی پیش می‌رود تا هنگامی که توزیع نهایی دما در مدت زمان مطلوب به دست آید. البته توزیع دما در زمان اولیه و شرایط مرزی باید معلوم باشند.

هنگامی که مقدار Δx انتخاب شد، از معادله (۵-۴-۳) مقدار M یا Δt مشخص می‌شود. برای یک مقدار مشخص M ، Δx های کوچکتر به معنای Δt های کوچکتر است. مقدار M باید به صورت زیر باشد،

$$M \geq 2 \quad (5-4-4)$$

اگر M کوچکتر از ۲ باشد، قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود. همچنین ثابت می‌شود که برای همگرایی و پایداری روش تفاضل محدود، M باید از ۲ بزرگتر یا مساوی آن باشد.

پایداری به این معناست که با پیشرفت حل مسأله، خطاها ناپیوستگی به صورت نمایی رشد نکنند، بلکه باید میرا شوند. همگرایی به این معناست که با میل کردن Δx و Δt به سمت صفر با M ثابت، حل معادله تفاضل باید به سمت حل دقیق معادله دیفرانسیل جزئی میل کند. بنا کوچکتر کردن اندازه‌های Δx و Δt دقت افزایش پیدا می‌کند. اما به صورت قابل توجهی، نرخ محاسبات لازم افزایش خواهد یافت. بنابراین غالباً برای این محاسبات نیاز به کامپیوتر است.

۳- روش ساده شده اشمیت برای یک اسلب: اگر $M = 2$ باشد معادله (۵-۴-۲) با استفاده از روش اشمیت تا حد زیادی ساده می‌شود،

$${}_{t+\Delta t}T_n = \frac{{}_tT_{n-1} + {}_tT_{n+1}}{2} \quad (5-4-5)$$

این رابطه به این معناست که، هنگامی که زمان Δt ۱ سپری شد، دمای جدید در نقطه n در زمان $t + \Delta t$ میانگین حسابی دماهای دو گره مجاور $n + 1$ و $n - 1$ در زمان t می‌باشد.

۵-۴B شرایط مرزی برای حل عددی مربوط به یک اسلب

۱- جابه‌جایی در مرز: در حالتی که یک مقاومت جابه‌جایی محدود در مرز وجود دارد و دمای محیط یا سیال خارجی به‌طور ناگهانی به T_a تغییر می‌کند، رابطه‌ای به صورتی که بیان می‌شود می‌توانیم برای اسلب به دست آوریم. باتوجه به شکل ۵-۴-۱، یک موازنه گرمایی روی نیمه بیرونی المان می‌نویسیم، نرخ گرمای ورودی به وسیله جابه‌جایی منهای نرخ گرمای خروجی به وسیله هدایت مساوی با نرخ تجمع گرما در زمان Δt ثانیه است،

$$hA({}_i T_a - {}_i T_1) - \frac{kA}{\Delta x} ({}_i T_1 - {}_i T_2) = \frac{(A \Delta x / 2) \rho c_p}{\Delta t} ({}_{i+\Delta t} T_{1.25} - {}_i T_{1.25}) \quad (5-4-6)$$

که ${}_i T_{1/2}$ دمای نقطه وسط در فاصله $\Delta x / 2$ بیرون از اسلب است. به عنوان یک تقریب، دمای T_1 سطح با دمای ${}_i T_{1/2}$ مساوی در نظر گرفته می‌شود، در نتیجه با مرتب کردن معادله داریم:

$${}_{i+\Delta t} T_1 = \frac{1}{M} [2N {}_i T_a + [M - (2N + 2)] {}_i T_1 + 2 {}_i T_2] \quad (5-4-7)$$

که،

$$N = \frac{h \Delta x}{k} \quad (5-4-8)$$

توجه کنید که مقدار M باید به صورت زیر باشد،

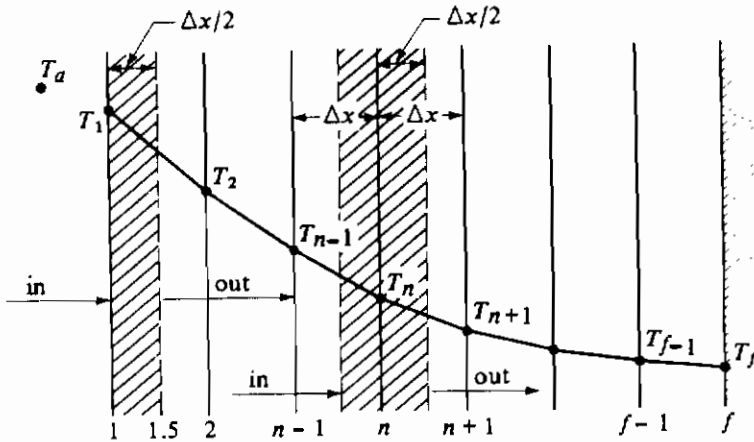
$$M \geq 2N + 2 \quad (5-4-9)$$

۲- شرط مرزی عایق: در حالتی که شرط مرزی برای جسمی است که صفحه انتهایی آن عایق شده است، موازنه گرمایی روی $\Delta x / 2$ انتهایی اسلب و روی $\Delta x / 2$ ابتدایی اسلب در شکل ۵-۴-۱ نوشته می‌شود. معادله نهایی مشابه بنا معادلات (۵-۴-۶) و (۵-۴-۷) است، اما بنا $h = 0$ یا $N = 0$ و ${}_{i+\Delta t} T_1 = {}_i T_{i+1}$ که به دلیل تقارن می‌باشد.

$${}_{i+\Delta t} T_f = \frac{1}{M} [(M - 2) {}_i T_f + 2 {}_i T_{f-1}] \quad (5-4-10)$$

۳- شرط جابه‌جایی جایگزین: برای به کار بردن معادلات فوق در یک مسأله باید از مقادیر یکسان M و Δx استفاده شود. اگر N خیلی بزرگ شود، به طوری که M نیز به طور غیر معمول بزرگ شود، شکل دیگری از معادله (۵-۴-۷) می‌تواند به دست آید. با صرف نظر کردن از تجمع گرما در نیمه جلویی اسلب در معادله (۵-۴-۶) داریم،

$${}_{i+\Delta t} T_1 = \frac{N}{N+1} {}_{i+\Delta t} T_a + \frac{1}{N+1} {}_{i+\Delta t} T_2 \quad (5-4-11)$$



شکل ۱-۴-۵. هدایت ناپایدار در یک اسلب

که در اینجا، مقدار M توسط N محدود نمی‌شود. این تقریب موقعی که تعداد فواصل Δx خیلی زیاد باشد، به طوری که مقدار گرمای اغماض شده در مقابل کل گرما ناچیز باشد، به خوبی کارآیی خواهد داشت.

۴- روشهای استفاده از دمای اولیه مرزی: هنگامی که دمای محیط بیرون به طور ناگهانی به T_a تغییر کند، روش زیر باید به کار رود:

۱- هنگامی که $M = 2$ و محاسبه برای تعداد محدودی از فواصل زمانی به صورت دستی انجام شود، روال بخصوصی در معادلات (۵-۴-۵) و (۵-۴-۷) یا (۵-۴-۱۱) باید عمل شود. برای اولین فاصله زمانی مقدار میانگین T_a به صورت $(T_a + T_1)/2$ به دست می‌آید، که T_1 دمای اولیه در نقطه ۱ است. برای تمام Δt های بعدی، مقدار T_a باید استفاده شود ($D1, K1$). این روش خاص استفاده از T_a برای اولین فاصله زمانی، دقت روش عددی را خصوصاً بعد از چند فاصله زمانی، افزایش می‌دهد. اگر T_a با زمان تغییر کند، برای هر فاصله زمانی، مقدار جدید به کار می‌رود.

۲- هنگامی که $M = 2$ و فواصل زمانی زیاد هستند و همچنین محاسبه با کامپیوتر انجام می‌شود، در این حالت به روش بخصوصی نیاز نیست و T_a برای تمام فواصل زمانی به کار می‌رود.

۳- هنگامی که $M = 3$ یا بیشتر باشد و فواصل زمانی کم باشند، محاسبه دستی و یا برای تعداد زیادی از فواصل زمانی محاسبات کامپیوتری انجام شود، از مقدار T_a برای تمام فواصل زمانی استفاده می‌شود. توجه داشته باشید که وقتی $M = 3$ یا بیشتر باشد، لازم است بسیاری از محاسبات با حالت $M = 2$ مقایسه شود. دقیق‌ترین نتایج وقتی به دست می‌آید که $M = 4$ باشد، که مناسب‌ترین روش است و دقت نتایج در حالت $M = 3$ مختصری کمتر است ($K2, K1, D1$).

مثال ۵-۴-۱ هدایت ناپایدار و روش عددی اشمیت

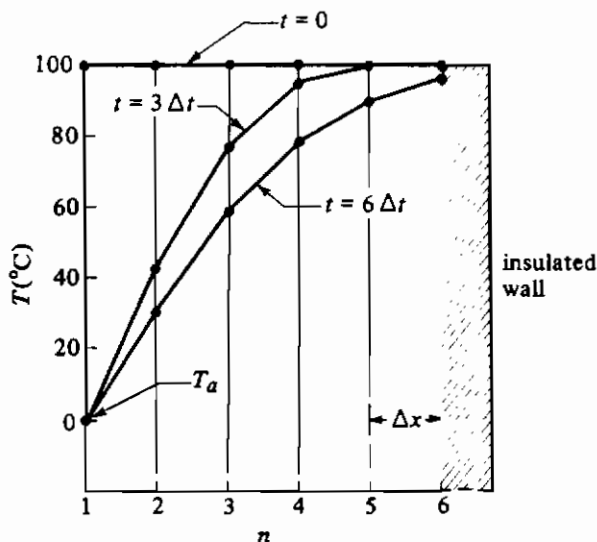
یک اسلب به ضخامت ۱ m در دمای یکنواخت 100°C قرار دارد. صفحه جلویی به طور ناگهانی در معرض محیطی با دمای ثابت 0°C قرار می‌گیرد. مقاومت جابه‌جایی صفر است ($h = \infty$). صفحه انتهایی اسلب عایق است. ضریب نفوذ گرمایی $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ است. با استفاده از پنج اسلب هر کدام به ضخامت 0.2 m و روش عددی اشمیت با $M = 2$ توزیع دما را در $t = 6000 \text{ s}$ به دست آورید. برای اولین فاصله زمانی از روش مخصوص استفاده کنید.

حل: شکل ۵-۴-۲ توزیع دما را در $t = 0$ و دمای محیط $T_a = 0^\circ\text{C}$ با استفاده از پنج اسلب نشان می‌دهد. در روش اشمیت $M = 2$ با جایگزینی در معادله (۵-۴-۳) با $\alpha = 2 \times 10^{-5}$ و $\Delta x = 0.2$ و حل معادله نسبت به Δt داریم،

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \frac{0.2^2}{(2 \times 10^{-5}) \times \Delta t} \quad \Delta t = 1000 \text{ s} \quad (5-4-3)$$

این بدین معناست که، تعداد فاصله $\frac{6000 \text{ s}}{1000 \text{ s}} = 6$ یا شش فاصله زمانی باید در نظر گرفته شود تا به 6000 s برسیم. برای سطح جلویی که $n = 1$ است، همانطور که قبلاً بیان شد، دمای T_a برای اولین فاصله زمانی به کار می‌رود، لذا داریم،

$$T_a = \frac{T_a + T_1}{2} = T_1 \quad n = 1 \quad (5-4-12)$$



شکل ۵-۴-۲. دماها در روش عددی، مثال ۵-۴-۱

که T_1 . دمای اولیه در نقطه ۱ است. برای بقیه فواصل زمانی داریم،

$$T_1 = T_a \quad n = 1 \quad (5-4-13)$$

برای محاسبه دماها در تمام فواصل زمانی برای اسلبهای $n = 2$ تا 5 با استفاده از معادله (5-4-5) داریم،

$$t + \Delta t T_n = \frac{t T_{n-1} + t T_{n+1}}{2} \quad n = 2, 3, 4, 5 \quad (5-4-14)$$

برای انتهای عایق در تمام فواصل زمانی در $n = 6$ با جایگزینی $M = 2$ و $f = 6$ در معادله (5-4-12) داریم،

$$t + \Delta t T_6 = \frac{(2 - 2) \times t T_7 + 2 \times t T_5}{2} = t T_5 \quad (5-4-15)$$

برای اولین فاصله زمانی $t + \Delta t$ و با محاسبه دما در $n = 1$ بر اساس معادله (5-4-12) داریم،

$$t + \Delta t T_1 = \frac{T_a + {}^o T_1}{2} = \frac{0 + 100}{2} = 50 \text{ } ^\circ\text{C} = {}_1 T_a$$

برای $n = 2$ با استفاده از معادله (5-4-14)،

$$t + \Delta t T_2 = \frac{t T_1 + t T_3}{2} = \frac{50 + 100}{2} = 75$$

و با ادامه دادن برای 5 و 4 و 3 n داریم،

$$t + \Delta t T_3 = \frac{t T_2 + t T_4}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t + \Delta t T_4 = \frac{t T_3 + t T_5}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t + \Delta t T_5 = \frac{t T_4 + t T_6}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

برای $n = 6$ با استفاده از معادله (5-4-15) داریم،

$$t + \Delta t T_6 = t T_5 = 100$$

پس از گذشت زمان $2 \Delta t$ با استفاده از معادله (5-4-13) برای $n = 1$ و با ادامه محاسبه برای 6 تا $n = 2$ و با استفاده از معادلات (5-4-14) و (5-4-15) داریم،

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$t+2 \Delta t T_1 = T_a = 0$$

$$t+2 \Delta t T_2 = \frac{t+\Delta t T_1 + t+\Delta t T_3}{2} = \frac{0 + 100}{2} = 50$$

$$t+2 \Delta t T_3 = \frac{t+\Delta t T_2 + t+\Delta t T_4}{2} = \frac{50 + 100}{2} = 87.5$$

$$t+2 \Delta t T_4 = \frac{t+\Delta t T_3 + t+\Delta t T_5}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t+2 \Delta t T_5 = \frac{t+\Delta t T_4 + t+\Delta t T_6}{2} = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t+2 \Delta t T_6 = t+\Delta t T_5 = 100$$

برای Δt ، ۳

$$t+3 \Delta t T_1 = 0$$

$$t+3 \Delta t T_2 = \frac{0 + 87.5}{2} = 43.75$$

$$t+3 \Delta t T_3 = \frac{50 + 100}{2} = 75$$

$$t+3 \Delta t T_4 = \frac{87.5 + 100}{2} = 93.75$$

$$t+3 \Delta t T_5 = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$t+3 \Delta t T_6 = 100$$

برای Δt ، ۴

$$t+4 \Delta t T_1 = 0$$

$$t+4 \Delta t T_2 = \frac{0 + 75}{2} = 37.5$$

$$t+4 \Delta t T_3 = \frac{43.75 + 93.75}{2} = 68.75$$

$$t+4 \Delta t T_4 = \frac{75 + 100}{2} = 87.5$$

$$t+4 \Delta t T_5 = \frac{93.75 + 100}{2} = 96.875$$

$$t+4 \Delta t T_6 = 100$$

برای Δt ، ۵

$$t+5 \Delta t T_1 = 0$$

$$t+5 \Delta t T_2 = \frac{0 + 68/75}{2} = 34/38$$

$$t+5 \Delta t T_3 = \frac{37/5 + 87/5}{2} = 62/50$$

$$t+5 \Delta t T_4 = \frac{68/75 + 96/88}{2} = 82/81$$

$$t+5 \Delta t T_5 = \frac{87/5 + 100}{2} = 93/75$$

$$t+5 \Delta t T_6 = 96/88$$

و برای $6 \Delta t$ (زمان نهایی)،

$$t+6 \Delta t T_1 = 0$$

$$t+6 \Delta t T_2 = \frac{0 + 62/5}{2} = 31/25$$

$$t+6 \Delta t T_3 = \frac{34/38 + 82/81}{2} = 58/59$$

$$t+6 \Delta t T_4 = \frac{62/5 + 93/75}{2} = 78/13$$

$$t+6 \Delta t T_5 = \frac{82/81 + 96/88}{2} = 89/84$$

$$t+6 \Delta t T_6 = 93/75$$

توزیع دما برای $3 \Delta t$ و دمای نهایی $6 \Delta t$ در شکل ۲-۴-۵ رسم شده است. این مثال چگونگی انجام یک محاسبه دستی را نشان می‌دهد. برای افزایش دقت، تعداد بیشتری از اسلها و فواصل زمانی بیشتر نیاز است. برای انجام محاسبات دقیق‌تر و مفصل‌تر استفاده از کامپیوتر ضروری است.

مثال ۲-۴-۵ هدایت ناپایدار با استفاده از محاسبات کامپیوتری

مثال ۱-۴-۵ را با استفاده از کامپیوتر تکرار کنید. $\Delta x = 0.05 \text{ m}$. یک برنامه فورتن بنویسید و دماهای نهایی را با مقادیر به دست آمده در مثال ۱-۴-۵ مقایسه کنید. از روش صریح اشمیت با $M = 2$ استفاده کنید. گرچه با به کار بردن کامپیوتر نیاز به فاصله‌های زمانی زیاد نیست، اما از روش مخصوص برای به دست آوردن T_2 ، در اولین فاصله زمانی استفاده کنید. بنابراین اثر تعداد فواصل روی دقت نتایج مربوط به مثال ۱-۴-۵ مشخص خواهد شد.

حل: تعداد اسلبها در اینجا $20 = \frac{1}{0.05}$ است. با جایگزینی در معادله (۵-۴-۳) با $M = 2$ و $\Delta x = 0.05 \text{ m}$ و $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ و حل معادله نسبت به Δt داریم،

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \frac{0.05^2}{(2 \times 10^{-5}) \times \Delta t}$$

$$\Delta t = 62/5 \text{ s}$$

بنابراین، $96 = \left(\frac{6000}{62/5}\right)$ فاصله زمانی لازم است. مقدار n از ۱ تا ۲۱ ادامه پیدا می‌کند.

معادلاتی که برای محاسبه استفاده می‌شوند، معادلات (۵-۴-۱۲) تا (۵-۴-۱۵) هستند. تنها اختلاف این است که در معادله (۵-۴-۱۴) n از ۲ تا ۲۰ است و در معادله (۵-۴-۱۵)، $n = 21$ است. به طوری که $T_{21} = T_0 + \Delta t T_{21}$.

برنامه فترن برای این معادلات به راحتی قابل نوشتن است و به خواننده واگذار می‌شود. نتایج در جدول ۵-۴-۱ آورده شده تا با مثال ۵-۴-۱ که در آنجا فقط پنج اسلب وجود داشت مقایسه شود. جدول نشان می‌دهد که نتایج با پنج اسلب خیلی نزدیک به نتایج با بیست اسلب است و نرخ انحراف آنها از یکدیگر حدود ۰.۲٪ است.

جدول ۵-۴-۱. مقایسه نتایج مثالهای ۵-۴-۱ و ۵-۴-۲

Distance from Front Face	Results Using $\Delta x = 0.20 \text{ m}$		Results Using $\Delta x = 0.05 \text{ m}$	
	Temperature		Temperature	
	m	n	$^{\circ}\text{C}$	n
0	1	0.0	1	0.0
0.20	2	31.25	5	31.65
0.40	3	58.59	9	58.47
0.60	4	78.13	13	77.55
0.80	5	89.84	17	88.41
1.00	6	93.75	21	91.87

به عنوان یک تخمین سرانگشتی در مورد محاسبات دستی، با به کار بردن حداکثر ۵ اسلب و در نهایت هشت تا ده فاصله زمانی، نتایج در بیشتر موارد دقت لازم را خواهند داشت. در مواردی که به دقت زیادتر نیاز داریم و یا حالت‌های مختلف وجود دارد، استفاده از کامپیوتر بهتر خواهد بود. در بعضی موارد، خواص فیزیکی با دقت مناسب برای استفاده در برنامه‌های کامپیوتری در دسترس نیست.

مثال ۳-۴-۵ هدایت ناپایدار با شرط مرزی جابه‌جایی

شرایط مثال ۱-۴-۵ موجود است، علاوه بر آن ضریب جابه‌جایی $h = 25 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ نیز در سطح وجود دارد. ضریب هدایت گرمایی: $k = 10 \text{ W/m} \cdot \text{K}$.

حل: معادلات (۷-۴-۵) و (۸-۴-۵) برای جابه‌جایی در سطح به کار می‌روند. از معادله (۸-۴-۵)، $N = h \Delta x / k = (25 \times 0.02) / 10 = 0.05$ سپس $2N + 2 = 2 \times 0.05 + 2 = 2.1$ ، اما براساس معادله (۹-۴-۵) مقدار M باید مساوی یا بزرگتر از $2N + 2$ باشد. این به آن معناست که M مساوی با 2.1 نمی‌تواند باشد. مقدار مناسب $M = 4$ را انتخاب می‌کنیم. (روش دیگر که دقت کمتری دارد این است که معادله (۱۱-۴-۵) را برای جابه‌جایی به کار ببریم، در این صورت مقدار M محدود به مقدار N نخواهد بود).

با جایگزینی در معادله (۳-۴-۵) و حل آن نسبت به Δt ،

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \frac{0.05^2}{(2 \times 10^{-5}) \times \Delta t} \Rightarrow \Delta t = 62/5 \text{ s}$$

بنابراین، $12 (= \frac{6000}{500})$ فاصله زمانی باید در نظر گرفته شود.

برای اولین فاصله زمانی و برای همه فواصل زمانی، مقدار دمای محیطی T_a برابر 0°C است، زیرا $M > 3$. برای جابه‌جایی در گره یا نقطه $n = 1$ از معادله (۷-۴-۵) استفاده می‌کنیم که در آن جا $M = 4$ و $N = 0.05$ است،

$$1 + \Delta t T_1 = \frac{1}{F} [2 \times 0.05 \times T_a + [4 - (2 \times 0.05 + 2)] T_1 + 2 T_1] \quad (5-4-16)$$

$$= 0.025 T_a + 0.025 T_1 + 0.05 T_1 \quad n = 1$$

برای ۲ و ۳ و ۴ و ۵، از معادله (۲-۴-۵) استفاده می‌کنیم.

$$1 + \Delta t T_n = \frac{1}{F} [T_n + 1 + (4 - 2) n T_1 + T_n - 1] \quad (5-4-17)$$

$$= 0.025 T_n + 1 + 0.05 T_n + 0.025 T_n - 1 \quad n = 2, 3, 4, 5$$

برای $n = 6$ (مرز عایق‌بندی شده) معادله (۵-۴-۱۰) را با $f = 6$ به کار می‌بریم.

$$t + \Delta t T_1 = \frac{1}{f} [(f-2)t T_1 + 2t T_5] \quad (5-4-18)$$

$$= 0.5 t T_1 + 0.5 t T_5$$

در اولین فاصله زمانی $t + \Delta t$ ، $T_5 = 0$ است. با به کار بردن معادله (۵-۴-۱۶) برای محاسبه دما در گره ۱ داریم،

$$t + \Delta t T_1 = 0.25 \times 0 + 0.25 \times 100 + 0.5 \times 100 = 75$$

برای ۵ و ۴ و ۳ و ۲ با استفاده از معادله (۵-۴-۱۷) داریم،

$$t + \Delta t T_2 = 0.25 \times t T_2 + 0.5 \times t T_2 + 0.25 \times t T_1$$

$$= 0.25 \times 100 + 0.5 \times 100 + 0.25 \times 100 = 100$$

همچنین در یک محاسبه مشابه $T_2 = T_3 = T_4 = 100$. در $n = 6$ با استفاده از معادله (۵-۴-۱۸) داریم، $T_1 = 100$.

برای زمان $2 \Delta t$ ، $T_5 = 0$. با استفاده از معادله (۵-۴-۱۶) داریم،

$$t + 2 \Delta t T_1 = 0.25 \times 0 + 0.25 \times 75 + 0.5 \times 100 = 68.75$$

با به کار بردن معادله (۵-۴-۱۷) برای ۵ و ۴ و ۳ و ۲، $n = 6$.

$$t + 2 \Delta t T_2 = 0.25 \times 100 + 0.5 \times 100 + 0.25 \times 75 = 93.75$$

$$t + 2 \Delta t T_3 = 0.25 \times 100 + 0.5 \times 100 + 0.25 \times 100 = 100$$

همچنین $T_4 = T_5 = 100$.

برای $n = 6$ با استفاده از معادله (۵-۴-۱۸)، $T_1 = 100$.

برای زمان $3 \Delta t$ ، $T_5 = 0$. با استفاده از معادله (۵-۴-۱۶) داریم،

$$t + 3 \Delta t T_1 = 0.25 \times 0 + 0.25 \times 68.75 + 0.5 \times 93.75 = 64.07$$

از معادله (۵-۴-۱۷) برای ۵ و ۴ و ۳ و ۲، $n = 6$ داریم،

$$t + 3 \Delta t T_2 = 0.25 \times 100 + 0.5 \times 93.75 + 0.25 \times 68.75 = 89.07$$

$$i+3 \Delta t T_r = 0/25 \times 100 + 0/5 \times 100 + 0/25 \times 93/75 = 98/44$$

$$i+3 \Delta t T_f = 0/25 \times 100 + 0/5 \times 100 + 0/25 \times 100 = 100$$

$$T_1 = 100, T_0 = 100 \text{ همچنین}$$

به همین ترتیب محاسبات تا Δt ۱۲ ادامه پیدا می‌کند.

۴-۵ روشهای عددی دیگر برای هدایت ناپایدار

۱- هدایت ناپایدار در یک استوانه: برای به دست آوردن معادلات عددی هدایت ناپایدار در یک اسلب صاف، سطح مقطع ثابت بود. در یک استوانه، سطحی که در معرض هدایت است به طور شعاعی تغییر می‌کند. برای به دست آوردن معادلهٔ مربوط به استوانه، به شکل ۳-۴-۵ توجه کنید که در آن استوانه به تعدادی استوانه‌های توخالی هم مرکز به ضخامت دیوارهٔ Δx متر تقسیم شده است. با فرض این‌که طول استوانه m باشد و با نوشتن موازنهٔ گرمایی روی اسلب در نقطهٔ n داریم، نرخ گرمای ورودی منهای نرخ گرمای خروجی مساوی است با نرخ تجمع گرما،

$$\frac{k[2\pi(n+1/2)\Delta x]}{\Delta x} (T_{n+1} - T_n) - k \frac{[2\pi(n-1/2)\Delta x]}{\Delta x} (T_n - T_{n-1}) \quad (5-4-19)$$

$$= \frac{2\pi m(\Delta x)^2 \rho c_p}{\Delta t} (T_{n+\Delta t} - T_n)$$

با مرتب کردن معادله فوق، معادلهٔ نهایی به صورت زیر است:

$$T_{n+\Delta t} = \frac{1}{M} \left[\frac{2n+1}{2n} T_{n+1} + (M-2) T_n + \frac{2n-1}{2n} T_{n-1} \right] \quad (5-4-20)$$

که در اینجا همانند قبل $M = (\Delta x)^2 / (\alpha \Delta t)$. همچنین در مرکز که $n = 0$ است داریم،

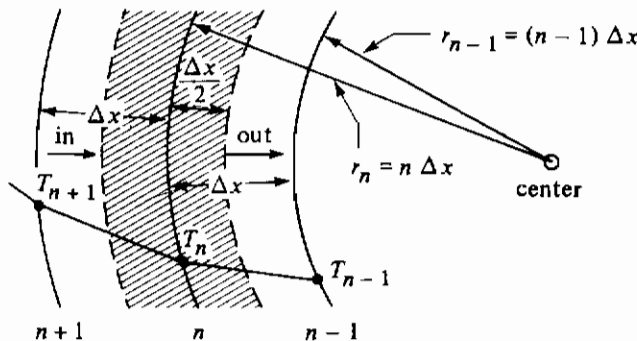
$$T_{\Delta t} = \frac{4}{M} T_1 + \frac{M-4}{M} T_0 \quad (5-4-21)$$

برای استفاده از معادلات (۵-۴-۲۰) و (۵-۴-۲۱) داریم،

$$M \geq 4 \quad (5-4-22)$$

معادلاتی برای حالت جابه‌جایی در سطح بیرونی استوانه به دست آمده‌اند (D1). اگر از ظرفیت گرمایی نیمهٔ بیرونی اسلب صرف‌نظر شود، داریم:

$$T_{n+\Delta t} = \frac{nN}{\frac{2n-1}{2} + nN} T_{n+\Delta t} + \frac{(2n-1)/2}{\frac{2n-1}{2} + nN} T_{n-1} \quad (5-4-23)$$



شکل ۳-۴-۵. هدایت ناپایدار در یک استوانه

که در اینجا T_n دمای سطح و T_{n-1} در نقطه‌ای (در قسمت جامد) به فاصله Δx زیر سطح است. معادلات مربوط به روشهای عددی برای هدایت ناپایدار دو بعدی در مراجع مختلف گزارش شده‌اند (K2,D1).

۲- هدایت ناپایدار و روش عددی ضمنی^(۱): در برخی مسائل عملی محدودیتهایی که روی شرط پایداری $M > 2$ وجود دارد، این روش را برای حل مسائل نامناسب می‌کند. همچنین برای به حداقل رساندن مشکلات مربوط به پایداری روشهای ضمنی فرمولهای تفاضل محدود مختلفی دارند. یکی از مهمترین این فرمولها مربوط به روش کرانک-نیکلسون^(۲) است که در زیر به بررسی آن می‌پردازیم. در به دست آوردن معادلات (۵-۴-۱) و (۵-۴-۲)، نرخ گرمای وارد شده به اسلب شکل ۵-۴-۱ در مدت زمان t در نظر گرفته شده بود،

$$\text{Rate of heat in at } t = \frac{kA}{\Delta x} ({}_t T_{n-1} - {}_t T_n) \quad (5-4-24)$$

سپس فرض شده بود که این نرخ در کل فاصله زمانی t تا $t + \Delta t$ وجود دارد. اما این یک تقریب است، زیرا نرخ گرما در طول این فاصله زمانی تغییر می‌کند. مقدار مناسب تر، میانگین نرخ گرما در زمانهای t و $t + \Delta t$ است.

$$\text{average rate of heat in} = \frac{kA}{\Delta x} \left[\frac{({}_t T_{n-1} - {}_t T_n) + ({}_{t+\Delta t} T_{n-1} - {}_{t+\Delta t} T_n)}{2} \right] \quad (5-4-25)$$

همچنین، برای گرمای خروجی، از میانگینی به همین شکل استفاده می‌شود. بنابراین معادله نهایی می‌شود،

$${}_{t+\Delta t}T_{n+1} - (2M + 2) {}_{t+\Delta t}T_n + {}_{t+\Delta t}T_{n-1} = - {}_tT_{n+1} + (2 - 2M) {}_tT_n - {}_tT_{n-1} \quad (5-4-26)$$

این بدین معناست که در این جا همانند معادله (۵-۴-۲) مقدار ${}_{t+\Delta t}T_n$ را نمی توان برحسب دماها در زمان t محاسبه کرد، بلکه همه مقادیر جدید T در زمان $t+\Delta t$ در همه نقاط بایستی به طور همزمان محاسبه شوند. برای انجام اینکار یک معادله مشابه معادله (۵-۴-۲۶) برای هر نقطه داخلی نوشته می شود. هر یک از این معادلات و معادلات مرزی، به شکل معادلات جبری خطی هستند. سپس این معادلات به طور همزمان توسط روشهایی مانند گوس - سایدل، ماتریس معکوس و مانند آن (K1,G1) حل می شوند.

یک مزیت مهم معادله (۵-۴-۲۶) این است که به ازای تمام مقادیر مثبت M همگراست و این بدین معناست که M مقادیر کمتر از ۲ نیز می تواند داشته باشد. یک عیب روش ضمنی این است که برای یک فاصله زمانی مشخص نرخ محاسبات بیشتری نسبت به روش صریح لازم است. روشهای صریح ساده تر هستند اما به دلیل مشکل همگرایی و پایداری خصوصاً در سیستمهای پیچیده تر، روشهای ضمنی بیشتر ترجیح داده می شوند.

۵-۵ سرد کردن و انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی

۵-۵A مقدمه

بر خلاف بسیاری از مواد آلی و غیر آلی که نسبتاً مقاوم هستند، مواد غذایی و بیولوژیکی در دمای اطاق به مرور زمان با سرعتهای متفاوت تخریب و یا فاسد می شوند. این تخریب و یا فساد عوامل مختلفی دارد. بافتهای مواد غذایی مانند میوه ها و سبزیها، بعد از جمع آوری و چیدن، هنوز به تنفس متابولیکی ادامه می دهند تا برسند و پس از آن فاسد می شوند. آنزیمهای بافتهای مرده گوشت و ماهی، فعال باقی می مانند و باعث اکسیداسیون و یا اثرات تخریبی دیگر می شوند. میکروارگانیسمها به همه نوع مواد غذایی حمله می کنند و با تجزیه آنها باعث فساد ماده غذایی می شوند. همچنین باعث ایجاد واکنشهای شیمیایی، همچون اکسیداسیون چربیها، می شوند.

در دماهای پایین، خصوصاً دماهای پایین تر از شرایط مناسب رشد، سرعت رشد میکروارگانیسمها کاهش می یابد. همچنین فعالیت آنزیم و سرعت واکنش شیمیایی نیز کم می شود. سرعت بیشتر واکنشهای شیمیایی و بیولوژیکی به ازای هر K ۱۰ ($10^\circ C$) کاهش دما، $\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{4}$ برابر کم می شود.

آب نقش مهمی در سرعت فاسد شدن مواد غذایی دارد و در بیشتر مواد بیولوژیکی وجود دارد.

برای رسیدن به پایین‌ترین دمای لازم که در آن دمای این واکنشها تقریباً متوقف شوند، بیشتر آب موجود در ماده باید منجمد شود. مواد غذایی برخلاف آب که در صفر درجه منجمد می‌شود در دماهای زیر صفر منجمد می‌شوند. اما بدلیل اثرات فیزیکی کریستالهای یخ و اثرات دیگری مانند تغلیظ شدن محلولها به جای انجماد، مواد بیولوژیکی را برای نگهداری غالباً سرد می‌کنند.

سرد کردن مواد غذایی شامل، گرفتن گرمای محسوس و گرمای متابولیسم و کاهش دما تا حدود $4/4^{\circ}\text{C}$ (40°F) تا نزدیکی انجماد است. معمولاً گرمای نهان انجماد گرفته نمی‌شود. این مواد بسته به نوع محصول و شرایط محیطی از یک هفته تا یک ماه می‌توانند انبار شوند. هر ماده‌ای دمای مناسب سرد کردن مخصوص به خود دارد.

در انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی، کاهش دما آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا بیشتر آب موجود در ماده به یخ تبدیل می‌شود. بسته به دمای نهایی انبارداری که تا 30°C - می‌تواند باشد، مواد برای حدود یکسال قابل نگهداری هستند. اغلب در تولید بسیاری از مواد غذایی منجمد، برای تخریب آنزیمها ابتدا آنها را بی‌رنگ می‌کنند و یا در آب می‌جوشانند.

۵-۵B سرد کردن مواد غذایی و بیولوژیکی

در سرد کردن مواد غذایی و بیولوژیکی دمای مواد به مقدار مناسب برای نگهداری و انبار کردن که می‌تواند حدود $1/1^{\circ}\text{C}$ - تا $4/4^{\circ}\text{C}$ (30° تا 40° درجه فارنهایت) باشد، کاهش داده می‌شود. به عنوان مثال، پس از کشتن گاو، دمای گوشت حدود $37/8^{\circ}\text{C}$ (100°F) تا 40°C (104°F) است، که تا حدود $4/4^{\circ}\text{C}$ (40°F) سرد می‌شود. شیر پس از دوشیدن بایستی به سرعت تا دماهای حدود انجماد سرد شود. گوشت ماهی در زمان بسته‌بندی در دمای حدود $7/2^{\circ}\text{C}$ (45°F) تا 10°C (50°F) است که باید تا نزدیک صفر سرد شود.

این نوع سرد کردن با سرعتهای ذکر شده تابع قوانین هدایت گرمایی ناپایدار است که در بخشهای ۱-۵ تا ۴-۵ بحث شد. گرما در داخل ماده به وسیله هدایت ناپایدار و در سطح ماده توسط جابه‌جایی خارج می‌شود. برای خارج کردن گرما از یک سیال در بیرون ماده غذایی یا بیولوژیکی استفاده می‌شود که اغلب مواقع هواست. هوا توسط سیستمهای تبرید تا محدوده $1/1^{\circ}\text{C}$ تا $4/4^{\circ}\text{C}$ بسته به نوع ماده و شرایط دیگر، سرد می‌شود. ضرایب انتقال حرارت جابه‌جایی، که معمولاً اثرات تابشی را نیز شامل می‌شود، توسط روشهای بحث شده در فصل ۴ به دست می‌آیند و برای هوا، ضرایب از حدود $8/5$ تا $40\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ($7 - 1/5\text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}$) بسته به سرعت اولیه هوا، تغییر می‌کنند.

در بعضی موارد سیال به کار برده شده برای سرد کردن، مایعی است که روی سطح مواد جریان

دارد و مقدار h از حدود $280 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ تا $1700 \text{ (} 50 - 300 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot\text{F})$ می تواند تغییر کند. همچنین در حالت‌های دیگر از کولر صفحه‌ای یا تماسی^(۱) استفاده می شود که در این کولر صفحات سرد در تماس مستقیم با مواد هستند. بنابراین فرض می شود که دمای سطح ماده مساوی یا نزدیک به دمای صفحه سرد است. از فریزرهای تماسی^(۲) نیز برای منجمد کردن مواد بیولوژیکی استفاده می شود.

در مواردی که مواد غذایی در جعبه بسته بندی می شود و یا توسط پلاستیک روکش می شود، مقاومت اضافی ناشی از این نوع بسته بندی نیز باید در نظر گرفته شود. یکی از روشهای انجام این کار اضافه کردن مقاومت پوشش بسته بندی به مقاومت فیلمی جابه جایی است،

$$R_T = R_P + R_C \quad (5-5-1)$$

که در این رابطه، R_P مقاومت پوشش، R_C مقاومت فیلمی جابه جایی بیرون و R_T مقاومت کل است. سپس هر کدام از این مقاومتها به صورت زیر است:

$$R_C = \frac{1}{h_c A} \quad (5-5-2)$$

$$R_P = \frac{\Delta x}{kA} \quad (5-5-3)$$

$$R_T = \frac{1}{hA} \quad (5-5-4)$$

که h_c ضریب جابه جایی گاز یا مایع، A مساحت، Δx ضخامت پوشش، k ضریب هدایت گرمایی پوشش و h ضریب کلی است. ضریب کلی h همان ضریبی است که در منحنیهای حالت ناپایدار استفاده می شود. در این حالت ظرفیت گرمایی پوشش ناچیز فرض می شود، که البته به نوع پوشش بستگی دارد. همچنین فرض می شود که پوشش با ماده در تماس است و هیچ مقاومتی بین ماده و پوشش وجود ندارد.

منابع اصلی خطا در استفاده از منحنیهای حالت ناپایدار، مربوط به کافی نبودن اطلاعات دانسیته، ظرفیت گرمایی و ضریب هدایت گرمایی و تخمین ضریب جابه جایی است. مواد غذایی معمولاً موادی ناهمگن و غیریکنواخت هستند و اغلب ارزیابی خواص فیزیکی آنها مشکل است. همچنین اگر در سرد کردن، تبخیر آب نیز اتفاق بیفتد، تلفات مربوط به گرمای نهان نیز روی دقت نتایج اثر خواهد گذاشت.

مثال ۵-۵-۱ سرد کردن گوشت گاو آماده شده

Hodgson (H2) خواص فیزیکی گوشت تازه را در حین سرد کردن به این صورت می‌دهد،
 $\rho = 1073 \text{ kg/m}^3$ ، $c_p = 3/48 \text{ kJ/kg.K}$ ، $k = 0/498 \text{ W/m.K}$. یک برش بزرگ از گوشت گاو به
 ضخامت $0/203 \text{ m}$ و در دمای اولیه $37/8^\circ\text{C}$ سرد می‌شود به طوری که دمای مرکز آن به 10°C
 برسد. از هوای سرد در دمای ثابت $1/7^\circ\text{C}$ و $h = 39/7 \text{ W/m}^2.\text{K}$ استفاده می‌شود. زمان لازم را
 محاسبه کنید.

حل: ضریب نفوذ گرمایی α به صورت زیر است.

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0/498}{1073 \times 3/48 \times 1000} = 1/334 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

سپس برای نصف ضخامت برش، x_1 داریم،

$$x_1 = \frac{0/203}{2} = 0/1015 \text{ m}$$

برای مرکز برش داریم،

$$n = \frac{x}{x_1} = \frac{0}{0/1015} = 0$$

همچنین،

$$m = \frac{k}{h x_1} = \frac{0/498}{39/7 \times 0/1015} = 0/123$$

$$T_1 = 1/7^\circ\text{C} + 273/2 = 274/9 \text{ K} \quad T_0 = 37/8 + 273/2 = 311 \text{ K}$$

$$T = 10 + 273/2 = 283/2 \text{ K}$$

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{274/9 - 283/2}{274/9 - 311} = 0/23$$

با استفاده از شکل ۶-۳-۵ برای مرکز یک صفحه صاف بزرگ،

$$X = 0/9 = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{1/334 \times 10^{-7} \times t}{0/1015^2}$$

و با حل آن، $t = 6/95 \times 10^4 \text{ s}$ ($19/3 \text{ h}$)

۵-۵C انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی

۱- مقدمه: در انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی ابتدا حذف گرمای محسوس برای سرد کردن و سپس
 حذف گرمای نهان به منظور انجماد انجام می‌شود. گرمای نهان انجماد آب 335 kJ/kg (144 Btu/lb_m)

است، که بخش مهمی از کل گرمای گرفته شده برای انجماد است. اثرات ناچیز دیگری همچون گرمای انحلال نمکها و مانند آن ممکن است وجود داشته باشند، اما مقادیر کوچکی هستند. در واقع، هنگامی که ماده‌ای مانند گوشت تا 29°C - منجمد می‌شود. تنها 90% آب به یخ تبدیل می‌شود و باقیمانده آن، آبی است که در ساختار ماده وجود دارد (B1).

Riedel (R1) منحنیهای انتالپی - دما - ترکیب را برای انجماد مواد غذایی مختلف ارائه کرده است. این منحنیها نشان می‌دهند که انجماد در یک دمای مشخص اتفاق نمی‌افتد، بلکه در یک محدوده چند درجه‌ای انجام می‌شود. در نتیجه نقطه انجماد مشخص با نرخ گرمای نهان انجماد منحصر به فرد وجود ندارد. چون در فرآیند ناپایدار انجماد، گرمای نهان انجماد وجود دارد، معادلات استاندارد هدایت ناپایدار که در این فصل ارائه شد، برای به دست آوردن زمان انجماد نمی‌توانند به کار روند. بدلیل تغییر خواص فیزیکی و تغییر نرخ انجماد با دما و برخی عوامل دیگر، حل دقیق تحلیلی برای به دست آوردن سرعت انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی بسیار مشکل است. یک حل تقریبی توسط پلانک ارائه شده است که غالباً از آن استفاده می‌شود.

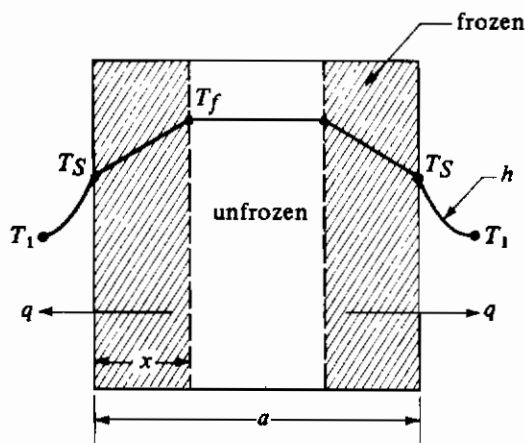
۲- حل تقریبی پلانک برای فرآیند انجماد: پلانک (P2) یک حل تقریبی برای به دست آوردن زمان فرآیند انجماد به دست آورده است که برای کارهای مهندسی دقت کافی دارد. فرضیات این روش به این صورت هستند. در ابتدا، تمام ماده غذایی در نقطه انجماد است اما منجمد نیست. ضریب هدایت گرمایی قسمت منجمد ثابت است. در نقطه انجماد تمام ماده با یک گرمای نهان ثابت منجمد می‌شود. انتقال حرارت در لایه منجمد به صورت هدایت اتفاق می‌افتد و سرعت آن طوری است که می‌توان آن را شبه پایدار در نظر گرفت.

در شکل ۵-۵-۱ یک اسلب به ضخامت a متر از دو طرف توسط جابه‌جایی سرد می‌شود. در زمان مشخص t ثانیه، ضخامت x متر از لایه منجمد روی دو طرف تشکیل شده است. دمای محیط مقدار ثابت T_1 کلون است و دمای انجماد در T_f ثابت است. یک لایه غیر منجمد در مرکز در دمای T_f وجود دارد. گرمای خروجی در زمان t مقدار q وات است. چون در حالت شبه پایدار هستیم در زمان اگر گرمای خروجی به بیرون به طریق جابه‌جایی برابر است با،

$$q = hA(T_s - T_1) \quad (5-5-5)$$

که A سطح مفید است. همچنین، گرمایی که از طریق لایه منجمد به ضخامت x در شرایط پایدار به طریق هدایت منتقل می‌شود برابر است با،

$$q = \frac{kA}{x} (T_f - T_s) \quad (5-5-6)$$



شکل ۵-۵-۱. توزیع دما در طول انجماد

که ضریب هدایت گرمایی ماده منجمد است. در یک مدت زمان مشخص dt ثانیه، لایه‌ای به ضخامت dx از ماده منجمد می‌شود. بنابراین حاصلضرب A در dx در ρ ، جرم ماده منجمد شده برحسب kg را می‌دهد. با ضرب کردن این مقدار در گرمای نهان λ برحسب J/kg و تقسیم آن بر dt داریم،

$$q = \frac{A dx \rho \lambda}{dt} = A \rho \lambda \frac{dx}{dt} \quad (5-5-7)$$

که در اینجا ρ دانسیته ماده منجمد نشده است.

سپس برای حذف T_s از معادلات (۵-۵-۵) و (۵-۵-۶)، معادله (۵-۵-۵) را نسبت به T_s حل

می‌کنیم و در معادله (۵-۵-۶) جایگزین می‌کنیم، که خواهد داد:

$$q = \frac{(T_f - T_1)A}{x/k + 1/h} \quad (5-5-8)$$

با مساوی قرار دادن معادله (۵-۵-۸) با (۵-۵-۷)،

$$\frac{(T_f - T_1)A}{x/k + 1/h} = A \rho \lambda \frac{dx}{dt} \quad (5-5-9)$$

با مرتب کردن معادله و انتگرال‌گیری بین $t = 0$ در $x = 0$ تا $t = t$ در $x = a/2$ داریم،

$$(T_f - T_1) \int_0^t dt = \lambda \rho \int_0^{a/2} \left(\frac{x}{k} + \frac{1}{h} \right) dx \quad (5-5-10)$$

با انتگرال‌گیری و حل آن نسبت به t داریم:

$$t = \frac{\lambda \rho}{T_f - T_1} \left(\frac{a}{2h} + \frac{a^2}{8k} \right) \quad (5-5-11)$$

برای این‌که معادله فوق شکل عمومی تری پیدا کند و برای شکل‌های دیگر نیز کاربرد داشته باشد، داریم:

$$t = \frac{\lambda \rho}{T_f - T_i} \left(\frac{Pa}{h} + \frac{Ra^2}{k} \right) \quad (5-5-12)$$

که در این‌جا a ضخامت اسلب بی‌نهایت (مانند شکل ۵-۵-۱)، قطر یک کره، قطر یک استوانه بلند، یا کوچکترین بعد یک بلوک مکعب مستطیل است، همچنین،

$$P = \frac{1}{4} \text{ برای اسلب بی‌نهایت، } P = \frac{1}{6} \text{ برای کره، } P = \frac{1}{4} \text{ برای استوانه بی‌نهایت}$$

$$R = \frac{1}{4} \text{ برای اسلب بی‌نهایت، } R = \frac{1}{6} \text{ برای کره، } R = \frac{1}{4} \text{ برای استوانه بی‌نهایت}$$

برای یک بلوک مکعب مستطیل به ابعاد a در $\beta_1 a$ در $\beta_2 a$ که a کوچکترین ضلع است، (B1) Ede، منحنی‌ای برای تعیین مقادیر P و R ارائه کرده است. این مقادیر برای محاسبه t در معادله (۵-۵-۱۲) به کار می‌روند. همچنین معادله (۵-۵-۱۱) با جایگزینی k ماده منجمد با k ماده ذوب شده برای محاسبه مدت زمان ذوب شدن ماده منجمد به کار می‌رود.

مثال ۵-۵-۲ منجمد کردن گوشت

صفحاتی از گوشت به ضخامت 0.0635 متر در یک فریزر که با جریان هوا کار می‌کند در دمای $244/3K$ ($-28/9^\circ C$) منجمد می‌شود. گوشت ابتدا در نقطه انجماد خود در $270/4K$ ($-2/8^\circ C$) بوده و حاوی 75% رطوبت است. ضریب انتقال حرارت $17 W/m^2.K$ است. خواص فیزیکی $\rho = 0.057 kg/m^3$ برای گوشت غیر منجمد و $k = 1/0.38 W/m.K$ برای گوشت منجمد است. زمان انجماد را حساب کنید.

حل: چون گرمای نهان ذوب آب به یخ $144 Btu/lb_m$ ($335 kJ/kg$) است، برای گوشت با 75% آب داریم،

$$\lambda = 0.75 \times 335 = 251/2 kJ/kg$$

متغیرهای معلوم دیگر، $a = 0.0635 m$ ، $T_i = 270/4 K$ ، $T_f = 244/3 K$ ، $\rho = 0.057 kg/m^3$ ، $h = 17 W/m^2.K$ هستند. با جایگزینی در معادله (۵-۵-۱۱) داریم،

$$t = \frac{\lambda \rho}{T_f - T_i} \left(\frac{a}{2h} + \frac{a^2}{\lambda k} \right) = \frac{(251/2 \times 10^3) \times 0.057}{270/4 - 244/3} \left[\frac{0.0635}{2 \times 17} + \frac{0.0635^2}{\lambda \times 1/0.38} \right]$$

$$= 2/395 \times 10^3 s \quad (6/65 h)$$

۳- روشهای دیگر برای محاسبه زمان انجماد: Neumann (C2, C1) معادله پیچیده‌ای برای انجماد در یک اسلب به دست آورده است. شرایطی که او فرض کرده است عبارتند از: دمای سطح با محیط یکی است، یعنی مقاومت سطحی وجود ندارد. دمای انجماد ثابت است. این روش این محدودیت را دارد که نمی‌تواند از یک ضریب جابه‌جایی در سطح استفاده کند. زیرا مقاومت سطحی را در نظر نمی‌گیرد. اما اثر سرد کردن از یک دمای اولیه که می‌تواند بالاتر از دمای انجماد باشد، در نظر گرفته شده است.

معادله پلانک حالتی را که ممکن است دمای اولیه بالاتر از دمای انجماد باشد، پیش‌بینی نمی‌کند و در نظر نمی‌گیرد. یک روش تقریبی برای محاسبه زمان اضافی لازم برای سرد کردن از دمای T_i تا دمای انجماد T_f به این صورت است. به وسیله منحنیهای حالت ناپایدار و با استفاده از خواص فیزیکی ماده غیر منجمد، زمان لازم برای رسیدن دمای میانگین ماده به T_f با این فرض که هیچ انجمادی اتفاق نمی‌افتد، را به دست آورید. اگر مقاومت سطحی وجود داشته باشد، دما در چند نقطه ماده با استفاده از منحنیهای حالت ناپایدار به دست می‌آید و سپس دمای بین این نقاط محاسبه می‌شود. این کار ممکن است تا حدی حدس و خطا باشد، زیرا زمان مجهول است و باید فرض شود. اگر دمای میانگین محاسبه شده برابر با نقطه انجماد نباشد، مقدار جدیدی برای زمان باید فرض شود. این روش تقریبی است زیرا در حالت واقعی مقداری از ماده منجمد خواهد شد.

۵-۶ معادله دیفرانسیل تغییر انرژی

۵-۶ا مقدمه

در بخشهای ۳-۶ و ۳-۷ معادله دیفرانسیل پیوستگی و معادله دیفرانسیل انتقال ممتوم را برای یک سیال خالص به دست آوردیم. این معادلات که با استفاده از موازنه‌های جرم، انرژی و ممتوم روی یک حجم محدود در بخشهای مختلف فصل ۲ به دست آمده‌اند، هیچ اطلاعی راجع به آنچه که در داخل حجم کنترل می‌گذرد به ما نمی‌دهند. در موازنه‌های انجام شده، برای هر سیستم مورد مطالعه، موازنه جداگانه‌ای نوشته می‌شود. اما غالباً بهتر است که از معادلات دیفرانسیل پیوستگی و انتقال ممتوم در فرم کلی شروع کنیم و سپس این معادلات را برای هر مورد خاص با حذف جملات غیرلازم ساده کنیم.

در فصل ۴ برای انتقال حرارت پایدار و در فصل ۵ برای انتقال حرارت ناپایدار موازنه‌های جداگانه‌ای روی یک حجم کنترل محدود نوشته شد. برای عمق بخشیدن به مطالعه انتقال حرارت یا انرژی در سیستمهای جریانی و غیرجریانی باید مطالعه روی یک حجم دیفرانسیلی انجام شود تا بتوانیم جزئیات آنچه را که در داخل این حجم اتفاق می‌افتد به دست آوریم. موازنه روی یک فاز انجام می‌شود و شرایط مرزی در مرز آن فاز برای انتگرال‌گیری مورد استفاده واقع می‌شود.

در بخش بعد معادلهٔ دیفرانسیل عمومی تغییر انرژی یا معادلهٔ بقای انرژی را به دست می‌آوریم. سپس این معادله برای موارد خاصی که بیشتر اتفاق می‌افتد ساده می‌شود. در نهایت موارد استفادهٔ این معادلات بحث خواهند شد. مواردی مربوط به انتقال انرژی پایدار و انتقال انرژی ناپایدار با استفاده از معادلهٔ بقای انرژی که معادله‌ای عمومی است و برای حالت‌های پایدار و ناپایدار صدق می‌کند، مطالعه خواهند شد.

۵-۶B به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل تغییر انرژی

مانند آنچه که در به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل انتقال ممتوم عمل شد، موازنه‌ای روی یک المان با حجم ثابت به ابعاد Δx ، Δy ، Δz نوشته می‌شود. سپس قانون بقای انرژی که در واقع قانون اول ترمودینامیک برای سیال داخل المان در هر زمان است، نوشته می‌شود. معادلهٔ زیر همان معادلهٔ (۲-۷-۷) است که در بخش ۷-۲ برای یک حجم کنترل نوشته شد.

(نرخ کار خارجی انجام شده توسط سیستم روی محیط) - (نرخ انرژی خروجی) - (نرخ انرژی ورودی)

$$(۵-۶-۱) \quad = (\text{نرخ تجمع انرژی})$$

همانند انتقال ممتوم، انتقال انرژی به داخل و خارج المان حجم از طریق جابه‌جایی و انتقال ملکولی یا هدایت صورت می‌گیرد. دو نوع انرژی مستقل می‌شود. ابتدا انرژی داخلی (U) که برحسب J/kg (Btu/lb_m) است. این انرژی مربوط به حرکت‌های انتقالی، اتفاقی و داخلی ملکول و همچنین نیروهای متقابل بین مولکولی است. دوم انرژی جنبشی $\rho v^2/2$ است که انرژی مربوط به حرکت تودهٔ سیال است که v سرعت موضعی سیال برحسب m/s (ft/s) است. بنابراین کل انرژی به ازای واحد حجم $(\rho U + \rho v^2/2)$ است. نرخ تجمع انرژی در المان حجم بر حسب متر مکعب (فوت مکعب) خواهد بود،

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) \quad (۵-۶-۲)$$

کل انرژی ورودی از طریق جابه‌جایی در جهت x در نقطه‌ای به طول x منهای انرژی خروجی در نقطه‌ای به طول $x + \Delta x$ به صورت زیر است.

$$\Delta y \Delta z \left[v_x \left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right]_x - \Delta y \Delta z \left[v_x \left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right]_{x+\Delta x} \quad (۵-۶-۳)$$

معادلات مشابهی برای جهت‌های y ، z به ترتیب با سرعت‌های v_y ، v_z می‌توانند نوشته شوند.

نرخ خالص انرژی ورودی به المان از طریق هدایت در جهت x برابر است با:

$$\Delta y \Delta z [(q_x)_x - (q_x)_{x+\Delta x}] \quad (۵-۶-۴)$$

معادلات مشابهی برای جهت‌های y ، z می‌توانند نوشته شوند که q_x ، q_y ، q_z مؤلفه‌های بردار شار گرمایی q هستند، که برحسب W/m^2 ($Btu/s.ft^2$) یا واحدهای مناسب دیگر است.

مجموع این سه جمله در جهت x برابر با کار خالص انجام شده توسط سیستم روی محیط است. کار خالص انجام شده بر علیه نیروی ثقل به صورت زیر است:

$$-\rho \Delta x \Delta y \Delta z (v_x g_x) \quad (5-6-5)$$

که g_x نیروی ثقل است. کار خالص انجام شده بر علیه فشار استاتیک p به صورت زیر است:

$$\Delta y \Delta z [(pv_x)_{x+\Delta x} - (pv_x)_x] \quad (5-6-6)$$

که p برحسب N/m^2 (lb_f/ft^2) است. کار خالص انجام شده بر علیه نیروهای ویسکوز به صورت زیر است:

$$(\Delta y \Delta z) [(\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z)_{x+\Delta x} - (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z)_x] \quad (5-6-7)$$

در بخش ۷-۳ نیروهای ویسکوز با جزئیات بیشتر بحث شده‌اند.

با نوشتن معادلات مشابه با معادلات (۵-۶-۳) تا (۵-۶-۷) در تمام جهات و جایگزینی این معادلات و معادله (۵-۶-۲) در معادله (۵-۶-۱)، تقسیم بر Δx ، Δy ، Δz و میل دادن Δx و Δy و Δz به سمت صفر داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) = & - \left[\frac{\partial}{\partial x} v_x \left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v_y \left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} v_z \left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right] \\ & - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} (pv_x) + \frac{\partial}{\partial y} (pv_y) + \frac{\partial}{\partial z} (pv_z) \right] \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \right] \end{aligned} \quad (5-6-8)$$

برای جزئیات بیشتر در مورد معادله فوق به مرجع (B2) مراجعه کنید.

معادله (۵-۶-۸) معادله نهایی تغییر انرژی نسبت به یک نقطه ثابت است. اما این معادله در شکل مناسبی نیست. ابتدا معادله (۵-۶-۸) را با معادله پیوستگی (۳-۶-۲۳) و با معادله حرکت (۳-۶-۴۰) ترکیب می‌کنیم و انرژی داخلی را نیز برحسب دمای سیال T و ظرفیت گرمایی می‌نویسیم.

سپس با نوشتن معادله حاصل برای یک سیال نیوتونی با ضریب هدایت گرمایی ثابت (k) خواهیم داشت:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \phi \quad (5-6-9)$$

این معادله، قانون دوم فوریه در سه جهت را به کار می‌برد. در این رابطه داریم:

$$k \nabla^2 T = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-10)$$

جمله مربوط به اتلاف ناشی از ویسکوزیته $\mu \phi$ معمولاً ناچیز است، مگر این که اختلاف سرعت شدید وجود داشته باشد. در بحثهایی که در پی می‌آید از این جمله صرف‌نظر می‌شود. معادله (5-6-9) معادله تغییر انرژی برای یک سیال نیوتونی با k ثابت و برحسب دمای سیال (T) است.

5-6C حالت‌های خاص در معادله تغییر انرژی

معمولاً با حالت‌های خاص زیر از معادله (5-6-9) برای یک سیال نیوتنی با ضریب هدایت گرمایی ثابت، بیشتر روبرو می‌شویم. ابتدا معادله (5-6-9) بدون جمله $\mu \phi$ در مختصات دکارتی نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5-6-11)$$

۱- سیال در فشار ثابت: معادلات زیر که برای سیال با دانسیته ثابت است برای سیال در فشار ثابت نیز به کار می‌روند.

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (5-6-12)$$

در مختصات دکارتی داریم:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-13)$$

در مختصات استوانه‌ای نیز داریم:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-14)$$

و در مختصات کروی هم داریم:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] \quad (5-6-15)$$

تعاریف مختصات استوانه‌ای و کروی را در بخش ۶-۳ ببینید. اگر سرعت v صفر باشد، DT/Dt به صورت $\partial T/\partial t$ در می‌آید.

۲- سیال با دانسیته ثابت،

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (5-6-16)$$

توجه کنید که این معادله با معادله (۵-۶-۱۲) برای فشار ثابت یکسان است.

۳- جامد: در این حالت ρ ثابت و $v = 0$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (5-6-17)$$

این رابطه غالباً قانون دوم هدایت گرمایی فوریه نامیده می‌شود. این رابطه برای یک سیال با سرعت صفر و در فشار ثابت نیز صدق می‌کند.

۴- تولید گرما: اگر در سیال تولید گرما توسط وسایل الکتریکی یا شیمیایی وجود داشته باشد، q به طرف راست معادله (۵-۶-۱۷) اضافه می‌شود.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + q \quad (5-6-18)$$

که q نرخ تولید گرما برحسب W/m^3 ($Btu/hr.ft^3$) است. اتلاف ناشی از ویسکوزیته نیز یک منبع گرمایی است، اما اضافه کردن این جمله باعث پیچیده‌تر شدن حل مسأله می‌شود، زیرا معادلات انرژی و حرکت باید با هم حل شوند.

۵- دستگاههای مختصات دیگر: قانون دوم فوریه در هدایت گرمایی ناپایدار به صورت زیر نیز می‌تواند نوشته شود، در مختصات دکارتی،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-19)$$

که $\alpha = k/\rho c_p$ بوده و ضریب هدایت گرمایی برحسب m^2/s (ft^2/h) است.

در مختصات استوانه‌ای،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-20)$$

و در مختصات کروی،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] \quad (5-6-21)$$

۵-۶D کاربردهای معادله تغییر انرژی

در بخش ۸-۳ برای بررسی مسائل جریان سیال از معادلات دیفرانسیل پیوستگی و حرکت استفاده کردیم. این کار را با حذف جملاتی که صفر و یا نزدیک به صفر بودند و حل باقیمانده معادلات برای به دست آوردن توزیع سرعت و فشار، انجام دادیم. این کار به جای نوشتن موازنه‌های جدید جرم و ممنتوم برای هر حالت، انجام شد.

به روش مشابه، برای حل مسائل انتقال حرارت، معادلات دیفرانسیل پیوستگی، حرکت و انرژی مورد استفاده قرار می‌گیرند و جملات غیر لازم در آنها حذف می‌شود. برای تشریح روش کلی به کار گرفته شده مثالهایی آورده می‌شود.

مثال ۵-۶-۱ توزیع دما با وجود منبع تولید گرما

یک استوانه جامد که در آن گرما به طور یکنواخت به نرخ q وات بر متر مکعب تولید می‌شود، از دو انتها عایق شده است. دمای سطح استوانه در مقدار ثابت T_w کلین ثابت نگهداشته شده است. شعاع استوانه R متر است. گرما فقط در جهت شعاعی جریان دارد. در صورتی که جامد ضریب هدایت گرمایی ثابت داشته باشد، معادله توزیع دما را در شرایط پایدار به دست آورید. حل: از معادله (۵-۶-۲۰) برای مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود. همچنین عبارت $q/\rho c_p$ مربوط به تولید گرما، به طرف راست این معادله اضافه می‌شود، که خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (5-6-22)$$

برای حالت پایدار $\partial T/\partial t = 0$ همچنین برای هدایت فقط در جهت شعاعی $\partial^2 T/\partial z^2 = 0$ و $\partial^2 T/\partial \theta^2 = 0$. لذا معادله دیفرانسیل زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{k} \quad (5-6-23)$$

که به صورت زیر می‌تواند نوشته شود،

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{k} \quad (5-6-24)$$

توجه کنید که معادله (۵-۶-۲۴) به صورت زیر هم می‌تواند نوشته شود،

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}r}{k} \quad (5-6-25)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۵-۶-۲۵) داریم،

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r^2}{2k} + K_1 \quad (5-6-26)$$

که K_1 یک ثابت است. با انتگرال‌گیری مجدد داریم،

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + K_1 \ln r + K_2 \quad (5-6-27)$$

که K_2 یک ثابت است. شرایط مرزی به صورت، $dT/dr = 0$ وقتی که $r = 0$ (براساس تقارن) و $T = T_w$ وقتی که $r = R$ است. معادله نهایی به صورت زیر است،

$$T = \frac{\dot{q}(R^2 - r^2)}{4k} + T_w \quad (5-6-28)$$

و این همان معادله (۴-۳-۲۹) است که به روش دیگری به دست آمد.

مثال ۵-۶-۲ جريان آرام و انتقال حرارت با استفاده از معادله تغییر انرژی

با استفاده از معادله دیفرانسیل تغییر انرژی، یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای همراه با شرایط مرزی لازم برای جریان آرام یک سیال با دانسیته ثابت داخل یک لوله افقی در حال گرم شدن، به دست آورید. سیال با سرعت ثابت v_z در حال جریان است. در دیواره لوله در جایی که $r = r_0$ ، شار گرمایی مقدار ثابت q است. فرایند در حالت پایدار بوده و فرض می‌شود که در ورودی ($z = 0$) توزیع سرعت وجود دارد. خواص فیزیکی ثابت فرض می‌شوند.

حل: از مثال ۳-۸-۳، معادله پیوستگی عبارت است از: $\partial v_z / \partial z = 0$. حل معادله حرکت در حالت پایدار در مختصات استوانه‌ای، معادله سهمی توزیع سرعت را به صورت زیر می‌دهد،

$$v_z = v_{z \max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (5-6-29)$$

چون، دانسیته سیال ثابت است. معادله (۵-۶-۱۴) در مختصات استوانه‌ای به عنوان معادله تغییر انرژی به کار می‌رود. برای این حالت $v_r = 0$ و $v_\theta = 0$. چون تقارن وجود دارد $\partial T / \partial \theta = 0$ و نیز هر دو صفر خواهند بود. در حالت پایدار $\partial T / \partial t = 0$. بنابراین معادله (۵-۶-۱۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود،

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-6-30)$$

معمولاً هدایت در جهت z عبارت $\partial^2 T / \partial z^2$ در مقایسه با عبارت جابه‌جایی $v \partial T / \partial z$ کوچک است و می‌تواند حذف شود. در نهایت، با جایگزینی معادله (۵-۶-۲۹) در (۵-۶-۳۰) داریم،

$$v_{z \max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5-6-31)$$

شرایط مرزی به صورت زیر هستند،

در $z = 0$ ، $T = T_0$ (به ازای همه r ها)

در $r = 0$ ، $T =$ محدود

در $r = r_0$ ، $q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$ (ثابت)

برای به دست آوردن جزئیات بیشتر در مورد حل دقیق این معادله، مرجع (S2) را ببینید.

۵-۷ جریان لایه مرزی و اغتشاش در انتقال حرارت

۵-۷۸ جریان آرام و تنوری لایه مرزی در انتقال حرارت

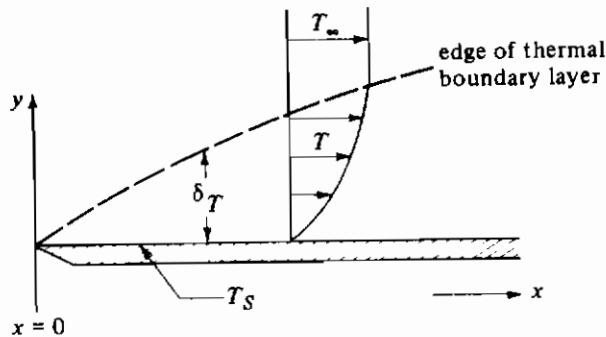
در بخش $10-3^\circ\text{C}$ حل دقیق توزیع سرعت برای یک جریان آرام همدمای روی یک صفحه صاف به دست آمد. حل بلازیوس^(۱) نیز می‌تواند به مسأله انتقال حرارت جابه‌جایی برای همان شکل هندسی و جریان آرام تعمیم داده شود. در شکل ۵-۷-۱ لایه مرزی گرمایی نشان داده شده است. دمای نیالی که به صفحه نزدیک می‌شود T_∞ و دمای صفحه در سطح آن T_s است.

با نوشتن موازنه دیفرانسیلی انرژی، معادله (۵-۶-۱۳)، شروع می‌کنیم،

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5-7-1)$$

اگر جریان در جهت‌های x و y باشد، $v_z = 0$ است. در حالت پایدار، $\partial T / \partial t = 0$. از هدایت در جهت‌های x ، z صرف‌نظر می‌شود. بنابراین $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$ و $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$. هدایت در جهت y وجود دارد. نتیجه به صورت زیر می‌شود،

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5-7-2)$$



شکل ۱-۷-۵. جریان آرام سیال گذرنده از روی یک صفحه مسطح و لایه مرزی گرمایی

معادله ساده شده موازنه ممنتوم که در به دست آوردن سرعت در لایه مرزی به کار گرفته شد، خیلی مشابه معادله فوق است و به صورت زیر می باشد،

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (۳-۱۰-۵)$$

معادله پیوستگی هم که قبلاً استفاده شد به صورت زیر است،

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (۳-۱۰-۳)$$

معادلات (۳-۱۰-۳) و (۳-۱۰-۵) توسط بلازیوس برای حل جریان لایه مرزی آرام به کار گرفته شدند. شرایط مرزی مورد استفاده به صورت زیر بودند:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{v_y}{v_\infty} = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad (۵-۷-۳)$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 1 \quad \text{at } y = \infty$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 1 \quad \text{at } x = 0$$

تشابه بین معادلات (۳-۱۰-۵) و (۵-۷-۲) کاملاً مشهود است. بنابراین اگر حل بلازیوس به صورت $k/\rho c_p = \mu/\rho$ باشد در اینجا نیز می تواند به کار گرفته شود. این بدین معناست که عدد پراتل $c_p \mu / k = 1$ است. همچنین شرایط مرزی نیز باید یکسان باشند. این کار با جایگزینی دمای T در معادله (۵-۷-۲) با متغیر بدون بُعد $(T - T_s)/(T_\infty - T_s)$ انجام می شود. شرایط مرزی به صورت زیر هستند،

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{v_y}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = 0 \quad \text{at } y = 0$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = 1 \quad \text{at } y = \infty \quad (5-7-4)$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} = 1 \quad \text{at } x = 0$$

دیدیم که معادلات و شرایط مرزی برای توزیع دما و توزیع سرعت یکسان هستند. بنابراین برای هر نقطه x و y در سیستم، جریان متغیرهای سرعت بدون بعد v_x/v_∞ و $(T - T_S)/(T_\infty - T_S)$ مساوی هستند. حل توزیع سرعت دقیقاً مشابه با حل توزیع دماست.

این بدین معناست که انتقال ممتوم و گرما به طور مستقیم همگون هستند و ضخامت لایه مرزی δ برای توزیع سرعت (لایه مرزی هیدرودینامیکی) و ضخامت لایه مرزی گرمایی (δ_T) مساوی هستند. این موضوع در گازها که عدد پرانتل نزدیک به یک است، مهم می‌باشد.

با ترکیب معادلات (۵-۷-۷) و (۵-۷-۸)، اختلاف سرعت در سطح برابر است با،

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.332 \frac{v_\infty}{x} N_{Re,x}^{1/2} \quad (5-7-5)$$

که $N_{Re,x} = xv_\infty\rho/\mu$ است. همچنین،

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S} \quad (5-7-6)$$

با ترکیب معادلات (۵-۷-۵) و (۵-۷-۶) داریم:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = (T_\infty - T_S) \left(\frac{0.332}{x} N_{Re,x}^{1/2}\right) \quad (5-7-7)$$

معادله جابه‌جایی می‌تواند به صورت زیر به معادله فوریه ارتباط داده شود که q_y برحسب J/s یا W است،

$$\frac{q_y}{A} = h_x(T_S - T_\infty) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (5-7-8)$$

با ترکیب معادلات (۵-۷-۷) و (۵-۷-۸) داریم:

$$\frac{h_x x}{k} = N_{Nu,x} = 0.332 N_{Re,x}^{1/2} \quad (5-7-9)$$

که $N_{Nu,x}$ عدد بدون بعد ناسلت و h_x ضریب انتقال حرارت موضعی در نقطه x روی صفحه است.

(K1) pohlhausen رابطه بین لایه مرزی هیدرودینامیک و گرمایی را برای سیالات با عدد پرانتل کوچکتر از ۰/۶ به دست آورد. این رابطه به طور تقریبی به صورت زیر است:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-10)$$

در نتیجه، معادله ضریب انتقال حرارت موضعی می شود:

$$h_x = 0.332 \frac{k}{x} N_{Re,x}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-11)$$

همچنین،

$$\frac{h_x x}{k} = N_{Nu,x} = 0.332 N_{Re,x}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-12)$$

معادله ضریب انتقال حرارت میانگین h از $x = 0$ تا $x = L$ برای صفحه‌ای به عرض b و مساحت

bL هست:

$$\begin{aligned} h &= \frac{b}{A} \int_0^L h_x dx \\ &= \frac{1}{L} 0.332k \left(\frac{\rho v_\infty}{\mu} \right)^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/2}} \end{aligned} \quad (5-7-13)$$

پس از انتگرال‌گیری،

$$h = 0.644 \frac{k}{L} N_{Re,L}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-14)$$

$$\frac{hL}{k} = N_{Nu} = 0.644 N_{Re,L}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-15)$$

همچنان‌که قبلاً اشاره شد، لایه مرزی آرام روی صفحات صاف تا عدد رینولدز حدود 5×10^5 صدق می‌کند. در استفاده از نتایج فوق، خواص سیال معمولاً در دمای فیلم به صورت $T_f = (T_s + T_\infty)/2$ می‌باشند.

۵-۷B تجزیه و تحلیل انتگرالی تقریبی لایه مرزی گرمایی

همچنان‌که در تجزیه و تحلیل لایه مرزی هیدرودینامیک بحث شد، حل بلازیوس در محدوده خودش دقیق است. سیستمهای پیچیده‌تر با این روش حل نمی‌شوند. یک تحلیل انتگرالی تقریبی که توسط فون کارمن^(۱) برای محاسبه لایه مرزی هیدرودینامیکی مورد استفاده قرار

گرفته بود در بخش ۳-۱۰ بررسی شد. این روش برای تحلیل لایه مرزی گرمایی نیز می‌تواند استفاده شود.

این روش مختصراً به این صورت است: ابتدا همچنان که قبلاً در شکل ۳-۱۰-۵ اشاره شد، یک حجم کنترل در نظر گرفته می‌شود و از آن برای به دست آوردن رابطه نهایی انرژی در شکل انتگرالی استفاده می‌شود،

$$\frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} v_x (T_\infty - T) dy \quad (5-7-16)$$

این معادله با معادله (۳-۱۰-۴۸) همگون است. برای تحلیل ممتوم معادله (۳-۱۰-۴۸) با معادله (۳-۱۰-۵۱) ترکیب شد تا معادله‌ای به صورت زیر به دست آمد،

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x (v_\infty - v_x) dy \quad (5-7-17)$$

معادله (۵-۷-۱۶) در صورتی که توزیع سرعت و توزیع دما معلوم باشد، قابل حل است. توزیع سرعت فرضی به کار برده شده در معادله (۳-۱۰-۵۰) به صورت زیر است:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (3-10-50)$$

همین شکل معادله برای توزیع دما نیز فرض می‌شود،

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \quad (5-7-18)$$

با جایگزینی معادلات (۳-۱۰-۵۰) و (۵-۷-۱۸) در معادله انتگرالی فوق و حل آن داریم،

$$N_{Nu, x} = 0.36 N_{Re, x}^{1/2} N_{Pr}^{1/3} \quad (5-7-19)$$

این پاسخ فقط ۸٪ بزرگتر از نتیجه دقیق به دست آمده از معادله (۵-۷-۱۱) است، که نشان می‌دهد این روش انتگرالی تقریبی در مواردی که حل دقیق امکانپذیر نیست با اطمینان می‌تواند استفاده شود.

به طریق مشابه، روش تحلیل انتگرالی ممتوم که در بخش ۳-۱۰ برای لایه مرزی هیدرودینامیکی مغشوش استفاده شد، برای لایه مرزی گرمایی مغشوش نیز استفاده می‌شود. مجدداً قانون توان $\frac{1}{\sqrt{v}}$ برای توزیع دما استفاده می‌شود. نتایج به دست آمده کاملاً مشابه با معادلات تجربی بخش ۴-۶ است.

۵-۷C طول اختلاط پراتل و ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای^(۱)

۱- ضریب نفوذ ممنتوم گردابه‌ای^(۲) در جریان مغشوش: در بخش $F=10-3$ کل تنش برشی τ_{yx}^l برای جریان مغشوش هنگامی که هر دو عامل اغتشاش و نفوذ ملکولی با هم جمع شوند به صورت زیر نوشته شد:

$$\tau_{yx}^l = -\rho \left(\frac{\mu}{\rho} + \varepsilon_t \right) \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (5-7-20)$$

ضریب نفوذ ممنتوم مولکولی μ/ρ برحسب m^2/s فقط تابعی از خواص مولکولی سیال است. اما ضریب نفوذ ممنتوم گردابه‌ای ε_t بستگی به حرکت سیال دارد. در معادله $(29-10-3)$ ، ε_t را به طول اختلاط پراتل L به صورت زیر ارتباط دادیم،

$$\varepsilon_t = L^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \quad (29-10-3)$$

۲- طول اختلاط پراتل و ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای: به روش مشابه می‌توانیم ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای را برای انتقال حرارت مغشوش به صورت زیر به دست آوریم. گردابه‌ها یا تکه‌های سیال در جهت y در فاصله‌ای به طول L حرکت می‌کنند. در نقطه L سرعت میانگین تکه سیال نسبت به سیال مجاورش به اندازه v'_x تفاوت دارد که این پارامتر همان جزء سرعت ناشی از افت و خیز است که در بخش $F=10-3$ بحث شد. انرژی نیز در فاصله L با سرعت v'_y در جهت y همراه با جرم منتقل می‌شود. دمای لحظه‌ای سیال برابر با مقدار $T = T' + \bar{T}$ است، که \bar{T} مقدار میانگین و T' انحراف از مقدار میانگین است. مقدار انحراف T' مشابه با مقدار انحراف سرعت v'_x است. طول اختلاط آن قدر کوچک است که اختلاف دما به صورت زیر می‌تواند نوشته شود،

$$T' = L \frac{dT}{dy} \quad (5-7-21)$$

نرخ انتقال انرژی در واحد سطح به صورت q_y/A است و مساوی با شار جرمی در جهت y ضرب در ظرفیت گرمایی و ضرب در اختلاف دما است.

$$\frac{q_y}{A} = \frac{-v'_y \rho c_p L dT}{dy} \quad (5-7-22)$$

در بخش $F=10-3$ فرض کردیم که $v'_x = v'_y$ و بنابراین،

$$v'_x = v'_y = L \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \quad (5-7-23)$$

با جایگزینی معادله (۵-۷-۲۳) در (۵-۷-۲۲)،

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p L^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{dT}{dy} \quad (5-7-24)$$

عبارت $L^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|$ در معادله (۳-۱۰-۲۹) ضریب نفوذ ممتوم گردابه‌ای (ϵ_1) است. هنگامی که این عبارت در معادله انتقال حرارت معشوش (۵-۷-۲۴) باشد، به آن ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای (α_1) گفته می‌شود، پس معادله (۵-۷-۲۴) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p \alpha_1 \frac{dT}{dy} \quad (5-7-25)$$

با ترکیب این رابطه با معادله فوریه بر حسب ضریب نفوذ گرمایی ملکولی α داریم:

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p (\alpha + \alpha_1) \frac{dT}{dy} \quad (5-7-26)$$

۳- تشابه میان انتقال ممتوم، حرارت و جرم: معادله (۵-۷-۲۶) مشابه معادله (۵-۷-۲۰) برای انتقال ممتوم کلی است. ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای α_1 و ضریب نفوذ ممتوم گردابه‌ای ϵ_1 در مراحل مختلف یکسان فرض شده‌اند. اطلاعات تجربی نشان می‌دهد که این تساوی فقط یک تقریب است. ضریب نفوذ جرمی گردابه‌ای نیز به روش مشابه برای انتقال جرم براساس تئوری طول اختلاط پراوتل تعریف می‌شود و فرض می‌شود که با α_1 و ϵ_1 مساوی است.

مسائل

۵-۲-۱. پاسخ دما به سرد کردن یک سیم: یک سیم مسی کوچک به قطر 0.792 mm و دمای اولیه $366/5 \text{ K}$ ناگهان در یک مایع که دمای آن در 311 K ثابت نگهداشته شده است وارد می‌شود. ضریب جابه‌جایی $h = 85/2 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ است. خواص فیزیکی ثابت هستند و $k = 374 \text{ W/m.K}$ و $c_p = 0.389 \text{ kJ/kg.K}$ و $\rho = 8890 \text{ kg/m}^3$ است.

الف - زمان لازم برای کاهش دمای سیم به دمای میانگین $338/8 \text{ K}$ (نصف اختلاف دمای اولیه) را برحسب ثانیه حساب کنید.

ب - محاسبه قسمت (الف) را با $h = 11/36 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ انجام دهید.

پ - در قسمت (ب) مقدار کل گرمای از دست داده شده به ازای یک متر از طول سیم را حساب کنید.

جواب: الف) $t = 5/66 \text{ s}$

۵-۲-۲. سرد کردن گلوله سربی در یک حمام: گلوله سربی به قطر میانگین $5/1 \text{ mm}$ در دمای اولیه $204/4^\circ\text{C}$ قرار دارد. برای سرد کردن گلوله آن را وارد یک حمام روغن با دمای ثابت $32/2^\circ\text{C}$ می کنند که به کف حمام سقوط می کند. زمان سقوط 15 s است. با فرض این که ضریب میانگین جابه جایی $h = 199 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ باشد، دمای گلوله پس از افتادن چقدر خواهد بود؟ برای سرب $\rho = 11370 \text{ kg/m}^3$ و $c_p = 0/138 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$.

۵-۲-۳. گرم کردن ناپایدار یک تانک در حال اختلاط: یک ظرف در ابتدا با $0/283 \text{ m}^3$ آب در دمای اولیه $288/8 \text{ K}$ پر شده است. ظرف که کاملاً همزده می شود، ناگهان در یک حمام بخار به دمای ثابت $377/6 \text{ K}$ غوطه ور می شود. ضریب کلی انتقال حرارت U بین بخار و آب $1136 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ و سطح $0/372 \text{ m}^2$ است. با صرف نظر کردن از ظرفیت گرمایی دیواره ها و همزن، زمان لازم برای گرم کردن آب تا $338/7 \text{ K}$ را برحسب ساعت حساب کنید. (راهنمایی: چون آب کاملاً همزده می شود، دما آن یکنواخت است، نشان دهید که معادله (۵-۲-۳) صدق می کند و از معادله (۵-۲-۱) شروع کنید).

۵-۳-۱. دما در یک جداره مقاوم: یک محفظه احتراق برای حفاظت پوسته خارجی، یک لایه مقاوم به ضخامت 2 in دارد. برای پیش بینی تنشهای گرمایی در موقع راه اندازی، دما در $0/2 \text{ in}$ زیر سطح پس از گذشت یک دقیقه از شروع راه اندازی لازم است مشخص شود. این اطلاعات در دسترس هستند، دمای اولیه $T_s = 100^\circ\text{F}$ ، دمای گاز داغ $T_1 = 3000^\circ\text{F}$ ، $h = 40 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$ ، $\alpha = 0/02 \text{ ft}^2/\text{hr}$ ، $k = 0/6 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}$ ، دما را در عمق $0/2 \text{ in}$ و $0/6 \text{ in}$ محاسبه کنید. از شکل ۵-۳-۳ استفاده کنید و در صورتی که لایه مقاوم به عنوان یک جامد نیمه بی نهایت در طول مدت زمان یک دقیقه عمل کند، نحوه عمل را توجیه کنید.

جواب: برای $0/2 \text{ in}$ $\alpha = 0/28$ ، $T = 912^\circ\text{F}$ ، $(T - T_s)/(T_1 - T_s) = 0/28$

برای $0/6 \text{ in}$ $\alpha = 0/02$ ، $T = 158^\circ\text{F}$ ، $(T - T_s)/(T_1 - T_s) = 0/02$

۵-۳-۲. دمای انجماد در خاک: دمای میانگین خاک در یک روز زمستانی تا عمق نسبتاً زیاد تقریباً $(40^\circ\text{F}) 277/6 \text{ K}$ است. اگر دمای هوای بیرونی ناگهان به $(0^\circ\text{F}) 255/4 \text{ K}$ افت کند و همین طور باقی بماند، چه مدت طول می کشد تا لوله ای به عمق $3/05 \text{ m}$ (10 ft) زیر سطح خاک به دمای $273/2 \text{ K}$ (32°F) برسد؟ ضریب انتقال حرارت $h = 8/52 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ خواص فیزیکی خاک به صورت $\alpha = 5/16 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ($\alpha = 0/02 \text{ ft}^2/\text{hr}$) و $k = 1/384 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ($k = 0/8 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}$) است. (توجه: حل مسأله به صورت حدس و خطاست، چون زمان مجهول است و دوبار در منحنی مربوط به جامد نیمه بی نهایت ظاهر می شود).

۵-۳-۳. سرد کردن یک صفحه آلومینیوم: یک قطعه بزرگ آلومینیومی که می‌تواند به عنوان یک جامد نیمه بی‌نهایت در نظر گرفته شود، در ابتدا دمای یکنواخت $505/4 \text{ K}$ دارد. سطح به‌طور ناگهانی در معرض محیطی با دمای $338/8 \text{ K}$ با ضریب جابه‌جایی سطحی $455 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ قرار می‌گیرد. زمان لازم برای این‌که دما در عمق $25/4 \text{ mm}$ به $388/8 \text{ K}$ برسد را برحسب ساعت حساب کنید. خواص فیزیکی میانگین $\alpha = 0/34 \text{ m}^2/\text{hr}$ و $k = 208 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ است.

۵-۳-۴. گرم کردن سریع یک دیوار بتونی: یک دیوار ساخته شده از بتون به ضخامت $0/305 \text{ m}$ از یک طرف عایق شده است. دیوار در دمای یکنواخت 10°C قرار دارد. طرف دیگر دیوار در معرض گازی به دمای 843°C ($1116/2 \text{ K}$) قرار می‌گیرد. ضریب جابه‌جایی $28/4 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ، ضریب نفوذ گرمایی $10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$ و $1/74 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$ و ضریب هدایت گرمایی $0/935 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ است.

الف - زمان لازم برای رسیدن دمای سطح عایق شده به 232°C را به دست آورید.

ب - دما در نقطه‌ای در فاصله $0/152 \text{ m}$ زیر سطح را در همان زمان حساب کنید.

جواب: الف) $13/4 \text{ h}$ و $t = 0/25$ و $at/x_1^2 = 0/25$

۵-۳-۵. پختن یک ورقه گوشت: یک ورقه گوشت به ضخامت $25/4 \text{ mm}$ در دمای یکنواخت اولیه 10°C در یک آون در دمای 177°C از دو طرف پخته می‌شود تا هنگامی که دمای مرکز آن به 121°C برسد. ضریب جابه‌جایی مقدار ثابت $25/6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ فرض می‌شود. با صرف نظر کردن از تغییرات گرمای نهان، زمان لازم را محاسبه کنید. ضریب هدایت گرمایی $0/69 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ و ضریب نفوذ گرمایی $5/85 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{hr}$ است. از منحنی هیسلا استفاده کنید.

جواب: $0/8$ ساعت (2880 ثانیه)

۵-۳-۶. هدایت ناپایدار در یک دیواره آجری: یک دیوار آجری صاف به ضخامت 1 ft رویه یک طرف یک کوره است. اگر دیوار در دمای یکنواخت 100°F باشد و یک طرف آن به‌طور ناگهانی در معرض گازی به دمای 1100°F قرار گیرد، زمان لازم برای این‌که دیواره کوره در نقطه‌ای به فاصله $0/5 \text{ ft}$ از سطح به دمای 500°F برسد، را حساب کنید. طرف دیگر دیوار عایق است. ضریب جابه‌جایی $2/6 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ \text{F}$ است و خواص فیزیکی آجر، $k = 0/65 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ \text{F}$ و $\alpha = 0/02 \text{ ft}^2/\text{hr}$ است.

۵-۳-۷. سرد کردن یک میله فولادی: یک میله بلند فولادی به قطر $0/305 \text{ m}$ در ابتدا در دمای 588 K

قرار دارد. این میله در یک حمام روغن به دمای ثابت 311 K غوطه‌ور می‌شود. ضریب جابه‌جایی سطحی $125\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ است. دمای مرکز میله را پس از یک ساعت حساب کنید. خواص فیزیکی میانگین فولاد، $k = 38\text{ W/m}\cdot\text{K}$ و $\alpha = 0.0381\text{ m}^2/\text{hr}$ است.

جواب: $T = 391\text{ K}$

۵-۳-۸. اثر اندازه بر فرآورش گرمایی گوشت: یک اتوکلاو در دمای ثابت $121/1\text{ }^\circ\text{C}$ برای فرآوری گوشت سوسیس به قطر $101/6\text{ mm}$ و طول $0/61\text{ m}$ که در ابتدا در دمای $21/1\text{ }^\circ\text{C}$ قرار دارد، به کار می‌رود. پس از دو ساعت دمای مرکز آن به $98/9\text{ }^\circ\text{C}$ می‌رسد. اگر قطر به $139/7\text{ mm}$ افزایش یابد، چه مدت زمان طول می‌کشد تا دمای مرکز به $98/9\text{ }^\circ\text{C}$ برسد؟ ضریب انتقال حرارت برای سطح $h = 1100\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ است که مقدار خیلی بزرگی است، به طوری که از مقاومت سطح می‌توان صرف‌نظر کرد. (این موضوع را نشان دهید). از انتقال حرارت در انتهای استوانه صرف‌نظر کنید. ضریب هدایت گرمایی $k = 0/485\text{ W/m}\cdot\text{K}$ است.

جواب: $3/78\text{ hr}$

۵-۳-۹. دمای پرتقالهای روی درخت‌ها در هوای بسیار سرد: در مدت زمان رشد پرتقال، انجماد پرتقالهای روی درخت در طول یک شب سرد از نظر اقتصادی بسیار مهم است. اگر پرتقالها در ابتدا در دمای $21/1\text{ }^\circ\text{C}$ باشند، در صورتی که در معرض هوایی به دمای $3/9\text{ }^\circ\text{C}$ قرار گیرند، دمای مرکز آنها را پس از ۶ ساعت به دست آورید. قطر پرتقالها 102 mm و ضریب جابه‌جایی $11/4\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ تخمین زده می‌شود. ضریب هدایت گرمایی $0/431\text{ W/m}\cdot\text{K}$ و ضریب نفوذ گرمایی $4/65 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{hr}$ است. از اثرات گرمای نهان صرف‌نظر کنید.

جواب: $(T_1 - T)/(T_1 - T_0) = 0/05$ و $T = -2/65\text{ }^\circ\text{C}$

۵-۳-۱۰. سخت کردن یک کره فولادی: برای سخت کردن یک کره فولادی به قطر $50/8\text{ mm}$ آن را تا دمای 1033 K گرم می‌کنند و سپس به داخل یک حمام آب بزرگ به دمای 300 K وارد می‌کنند. زمان لازم برای این که دمای مرکز کره به $366/5\text{ K}$ برسد را حساب کنید. ضریب جابه‌جایی سطحی $710\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ و $k = 45\text{ W/m}\cdot\text{K}$ و $\alpha = 0.0325\text{ m}^2/\text{hr}$ است.

۵-۳-۱۱. هدایت ناپایدار در یک استوانه کوتاه: یک استوانه آلومینیومی در ابتدا گرم می‌شود و در دمای یکنواخت $204/4\text{ }^\circ\text{C}$ قرار می‌گیرد. سپس به داخل یک حمام بزرگ با دمای ثابت $93/3\text{ }^\circ\text{C}$ وارد می‌شود که در آن $h = 568\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$. قطر استوانه $50/8\text{ mm}$ و طول آن $101/6\text{ mm}$ است. دمای مرکز استوانه را پس از 60 s حساب کنید. خواص فیزیکی، $k = 207/7\text{ W/m}\cdot\text{K}$ و $\alpha = 9/44 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ است.

۵-۳-۱۲. هدایت سه بُعدی در یک بلوک مکعب مستطیل شکل: یک بلوک مکعب مستطیل شکل فولادی به ابعاد 0.305 m در 0.457 m در 0.61 m در دمای اولیه $315/6^\circ\text{C}$ قرار دارد. این بلوک به طور ناگهانی وارد محیطی به دمای $93/3^\circ\text{C}$ می‌شود. دمای مرکز را پس از یک ساعت حساب کنید. ضریب جابه‌جایی سطح $k = 38\text{ W/m.K}$ و $\alpha = 0.379\text{ m}^2/\text{hr}$ است.

۵-۴-۱. روش عددی اشمیت برای هدایت ناپایدار: یک ماده به شکل یک صفحه بی‌نهایت به ضخامت 0.762 m در دمای اولیه $366/53\text{ K}$ قرار دارد. یک طرف صفحه عایق شده است و طرف دیگر صفحه به‌طور ناگهانی در معرض دمای $533/2\text{ K}$ قرار می‌گیرد. مقاومت جابه‌جایی در این صفحه می‌تواند صفر فرض شود. توزیع دما را پس از 0.875 hr با استفاده از روش عددی اشمیت با $M = 2$ و صفحات با ضخامت 0.1524 m محاسبه کنید. ضریب نفوذ گرمایی $0.929\text{ m}^2/\text{hr}$ است.

۵-۴-۲. هدایت ناپایدار با توزیع دمای اولیه غیریکنواخت: با استفاده از شرایط مسأله ۵-۴-۱ با تغییرات زیر مسأله را مجدداً حل کنید. توزیع دمای اولیه یکنواخت نیست. یک طرف صفحه در $366/53\text{ K}$ و طرف عایق در $422/1\text{ K}$ است و تغییرات بین دو طرف صفحه خطی است.

۵-۴-۳. هدایت ناپایدار و استفاده از کامپیوتر: مسأله ۵-۴-۲ را با کامپیوتر و با نوشتن یک برنامه فرترن انجام دهید. ضخامت صفحات 0.3048 m و $M = 2$ را به کار ببرید. توزیع دما را پس از 0.875 hr حساب کنید.

۵-۴-۴. سرد کردن گوشت و استفاده از روشهای عددی: یک ورق نازک از گوشت گاو به ضخامت $45/7\text{ mm}$ و دمای اولیه 283 K توسط یک کولر تماسی که دمای سطح روی آن $274/7\text{ K}$ است سرد می‌شود. یک طرف گوشت عایق شده است. فرض کنید مقاومت جابه‌جایی در سطح رویی صفر باشد. با به کار بردن پنج صفحه و $M = 2$ توزیع دما را پس از 0.54 hr حساب کنید. ضریب نفوذ گرمایی $4/64 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{hr}$ است.

جواب: $\Delta t = 0.09\text{ hr}$ ، شش فاصله زمانی

۵-۴-۵. سرد کردن گوشت گاو با مقاومت جابه‌جایی: یک ورقه بزرگ از گوشت گاو به ضخامت $45/7\text{ mm}$ در دمای یکنواخت اولیه $37/78^\circ\text{C}$ قرار دارد. یک طرف این قطعه گوشت در یک سیستم سردکننده با ضریب جابه‌جایی $k = 38\text{ W/m}^2\text{.K}$ به دمای $1/11^\circ\text{C}$ می‌رسد. طرف دیگر آن عایق شده است. ضریب هدایت گرمایی گوشت $k = 498\text{ W/m.K}$ و

با استفاده از یک روش عددی با در نظر گرفتن پنج صفحه و $\alpha = 4/64 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{h}$ است. $M = 4$ توزیع دما را پس از $0/278 \text{ h}$ حساب کنید. (راهنمایی: چون مقاومت جابه‌جایی وجود دارد، مقدار N باید محاسبه شود. معادله (۷-۴-۵) برای محاسبه دمای سطح $t + \Delta t T_1$ به کار می‌رود).

۵-۴-۶ سرد کردن گوشت گاو و استفاده از کامپیوتر: مسأله ۵-۴-۵ را با استفاده از کامپیوتر حل کنید. بیست برش در نظر بگیرید با $M = 4$. یک برنامه فرترن بنویسید.

۵-۴-۷ جابه‌جایی و هدایت ناپایدار: در مثال ۵-۴-۳ محاسبات را برای دوازده فاصله زمانی ادامه دهید. توزیع دما را رسم کنید.

۵-۴-۸ شرایط مرزی دیگر برای روش عددی: مثال ۵-۴-۳ را با شرایط مرزی معادله (۱۱-۴-۵) مجدداً حل کنید و $M = 4$ در نظر بگیرید. توزیع دما را برای کل دوازده فاصله زمانی محاسبه کنید.

۵-۴-۹ روش عددی برای جامد نیمه بی‌نهایت و جابه‌جایی: سطح یک جامد نیمه بی‌نهایت در دمای یکنواخت 200°C توسط جابه‌جایی سرد می‌شود. سیال سردکننده در دمای ثابت 100°C دارای $h = 250 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ است. خواص فیزیکی جامد $k = 20 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ و $\alpha = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ است. با به کار بردن یک روش عددی با $\Delta x = 0/04 \text{ m}$ و $M = 4$ توزیع دما را پس از 50 ثانیه به دست آورید.

جواب: $T_2 = 181/84^\circ\text{C}$ ، $T_1 = 157/72^\circ\text{C}$

$T_5 = 199/90^\circ\text{C}$ ، $T_4 = 198/93^\circ\text{C}$ ، $T_3 = 194/44^\circ\text{C}$

۵-۵-۱ سرد کردن ورقه گوشت گاو: مثال ۵-۵-۱ را تکرار کنید، در این مثال مرکز یک ورقه گوشت گاو تا دما 10°C سرد می‌شود. اما در این مسأله از هوایی با دمای 0°C با $h = 22/7 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ استفاده کنید.

جواب: $t = 19/74 \text{ hr}$ ، $x = 0/92$ ، $(T_1 - T)/(T_1 - T_0) = 0/265$

۵-۵-۲ سرد کردن فیله گوشت ماهی: گوشتهای فیله ماهی در دمای اولیه 10°C تا ضخامت

102 mm روی هم فشرده شده است. دو طرف بسته گوشت با یخ پوشیده شده است و یک کاغذ مقاوم در برابر رطوبت یخ و گوشت ماهی را از هم جدا می‌کند. دمای سطح گوشت ماهی را می‌توان 0°C در نظر گرفت. زمان لازم برای این که دمای مرکز گوشت به $2/22^\circ\text{C}$ برسد را حساب کنید. دمای نقطه‌ای به فاصله $25/4 \text{ mm}$ از مرکز را در همین زمان به دست آورید. همچنین منحنی دما برحسب مکان را رسم کنید. خواص فیزیکی (B1)،

$$c_p = 4/02 \text{ kJ/kg.K}, \rho = 1052 \text{ kg/m}^3, k = 0/571 \text{ W/m.K} \text{ است.}$$

۵-۵-۳ دمای میانگین در سرد کردن گوشت ماهی: گوشت فیله ماهی با خواص فیزیکی داده شده در مسأله ۵-۵-۲ در دمای اولیه 10°C قرار دارد. گوشتها تا ضخامت 102 mm فشرده می شوند و روی دو طرف آنها یخ گذاشته می شود. با فرض این که دمای سطح گوشت 0°C باشد، زمان لازم برای این که دمای میانگین به $1/39^\circ\text{C}$ برسد را حساب کنید. (توجه: در این حالت مقاومت سطحی صفر است. برای این حالت آیا می توانید از شکل ۱۳-۳-۵ استفاده کنید؟)

۵-۵-۴ زمان لازم برای انجماد یک ورقه گوشت: مثال ۵-۵-۲ را با همان شرایط مجدداً حل کنید. با این تفاوت که از یک فریزر تماسی یا صفحه‌ای استفاده می شود که در آن ضریب انتقال حرارت سطحی $h = 142 \text{ W/m}^2.\text{K}$ می تواند فرض شود.

جواب: $t = 2 \text{ hr}$

۵-۵-۵ انجماد یک قطعه گوشت به شکل استوانه: یک بسته گوشت محتوی 75% رطوبت و به شکل یک استوانه طویل به قطر 5 in در یک فریزر هوایی تا 25°F منجمد می شود. گوشت در ابتدا در دمای انجماد 27°F است. ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی برابر با $h = 3/5 \text{ Btu/hr.ft}^2.\text{F}$ خواص فیزیکی، $\rho = 64 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ برای گوشت منجمد نشده و $k = 0/6 \text{ Btu/hr.ft}^2.\text{F}$ برای گوشت منجمد شده است. زمان انجماد را محاسبه کنید.

۵-۶-۱ تولید گرما با به کار بردن معادله تغییر انرژی: یک دیوار صاف با تولید گرمای یکنواخت $q'' \text{ W/m}^2$ در داخل دیوار از چهار وجه عایق شده است و هدایت گرمایی فقط در جهت x است. ضخامت دیوار $2L$ متر است. دما در یک طرف دیوار یا $x = +L$ و در طرف دیگر آن یا $x = -L$ مقدار ثابت T_w کلون است. با استفاده از معادله دیفرانسیل تغییر انرژی، معادله (۵-۶-۱۸)، معادله‌ای برای توزیع نهایی دما به دست آورید.

$$T = \frac{q(L'' - x'')}{2k} + T_w \quad \text{جواب:}$$

۵-۶-۲ انتقال حرارت در یک جامد با استفاده از معادله تغییر انرژی: یک جامد به ضخامت L در دمای یکنواخت T کلون قرار دارد. دمای یک طرف جامد در $z = 0$ به طور ناگهانی در زمان $t = 0$ به T_1 و دمای طرف دیگر آن در $z = L$ به مقدار ثابت T_2 افزایش می یابد و در این دماها نگهداشته می شود. انتقال حرارت فقط در جهت z است. با خواص فیزیکی ثابت و با استفاده از معادله دیفرانسیل تغییر انرژی موارد زیر را انجام دهید:

الف - یک معادله دیفرانسیل جزئی برای انتقال انرژی ناپایدار همراه با شرایط مرزی

به دست آورید.

ب - همان کار را برای شرایط پایدار انجام داده و از معادله نهایی انتگرال بگیرید.

جواب: الف) $\partial T / \partial t = \alpha \partial^2 T / \partial z^2$ ، شرط مرزی ۱: در $z = z_0$ ، $t = 0$ ، $T = T_0$

شرط مرزی ۲: در $z = 0$ ، $t = t_0$ ، $T = T_1$

شرط مرزی ۳: در $z = L$ ، $t = t_0$ ، $T = T_2$

$$T = (T_2 - T_1) z/L + T_1 \quad (\text{ب})$$

۵-۶-۳ توزیع شعاعی دما با استفاده از معادله تغییر انرژی: در یک استوانه توخالی و بلند با

دو انتهای عایق انتقال حرارت شعاعی به طریق هدایت اتفاق می افتد.

الف - معادله دیفرانسیل نهایی برای هدایت پایدار چیست؟ با قانون دوم فوریه در

مختصات استوانه‌ای معادله (۵-۶-۲۰) شروع کنید.

ب - معادله به دست آمده در قسمت (الف) را با شرایط مرزی زیر برای به دست آوردن

توزیع دما حل کنید.

$$r = r_i \text{ برای } T = T_i \text{ و } r = r_o \text{ برای } T = T_o$$

پ - با استفاده از نتایج قسمت (ب) رابطه‌ای برای شدت جریان گرمایی q بر حسب وات

به دست آورید.

$$T = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln(r_o/r_i)} \ln \frac{r}{r_i} \quad (\text{ب}) \text{ جواب:}$$

۵-۶-۴ هدایت گرمایی در یک کره: در یک کره توخالی به شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o جریان

انرژی به صورت شعاعی اتفاق می افتد. در شرایط پایدار سطح داخلی کره در دمای ثابت T_i

و سطح خارجی در دمای ثابت T_o قرار دارد.

الف - توزیع دما را با حل معادله تغییر انرژی به دست آورید.

ب - به کمک قسمت (الف) رابطه‌ای برای شدت جریان گرمایی بر حسب وات به دست آورید.

۵-۶-۵ تولید متغیر گرما و معادله تغییر انرژی: یک دیوار صاف طوری عایق شده است

که هدایت فقط در جهت x اتفاق می افتد. شرایط مرزی در حالت پایدار، در $T = T_o$ در $x = 0$ و

$T = T_L$ در $x = L$ است. تولید داخلی گرما در واحد حجم وجود دارد و به صورت $e^{-bx/L}$

$q = q_o$ تغییر می کند که q_o و b دو ثابت هستند. با حل معادله عمومی تغییر انرژی توزیع

دما را به دست آورید.

۵-۷-۱ ضخامت لایه مرزی گرمایی و هیدرو دینامیکی: هوا در $294/3$ کلرین و فشار $101/3$ kPa با

سرعت آزاد $12/2 \text{ m/s}$ از روی یک صفحه صاف که دمای ثابت سطح آن 383 K است عبور می‌کند. موارد زیر را به دست آورید:

الف - در رینولدز بحرانی $5 \times 10^5 = \text{Re}_L$ طول بحرانی $x = L$ صفحه، ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی δ ، ضخامت لایه مرزی گرمایی δ_T را حساب کنید. توجه کنید که عدد پرانتل ۱ نیست.

ب - ضریب میانگین انتقال گرمای روی صفحه را که با یک لایه مرزی آرام پوشیده شده است به دست آورید.

۲-۷-۵. ضخامت لایه‌های مرزی و انتقال حرارت: هوا در $37/8^\circ \text{C}$ و یک اتمسفر مطلق با سرعت $3/05 \text{ m/s}$ موازی با یک صفحه صاف با دمای ثابت $93/3^\circ \text{C}$ جریان دارد. عرض صفحه یک متر است. موارد زیر را در فاصله $0/61 \text{ m}$ از لبه صفحه به دست آورید:

الف - ضخامت لایه مرزی گرمایی δ_T و ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی

ب - کل انتقال حرارت از سطح

منابع

- (B1) BLAKEBROUGH, N. *Biochemical and Biological Engineering Science*, Vol. 2. New York: Academic Press, Inc., 1968.
- (B2) BIRD, R. B., STEWART, W. E., and LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- (C1) CARSLAW, H. S., and JAEGER, J. C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- (C2) CHARM, S. E. *The Fundamentals of Food Engineering*, 2nd ed. Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971.
- (D1) DUSINBERRE, G. M. *Heat Transfer Calculations by Finite Differences*. Scranton, Pa.: International Textbook Co., Inc., 1961.
- (G1) GEANKOPLIS, C. J. *Mass Transport Phenomena*. Columbus, Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.
- (G2) GURNEY, H. P., and LURIE, J. *Ind. Eng. Chem.*, **15**, 1170 (1923).
- (H1) HEISLER, H. P. *Trans. A.S.M.E.*, **69**, 227 (1947).
- (H2) HODGSON, T. *Fd. Inds. S. Afr.*, **16**, 41 (1964); *Int. Inst. Refrig. Annexe*, **1966**, 633 (1966).
- (K1) KREITH, F. *Principles of Heat Transfer*, 2nd ed. Scranton, Pa.: International Textbook Company, 1965.
- (K2) KREITH, F., and BLACK, W. Z. *Basic Heat Transfer*. New York: Harper & Row, Publishers, 1980.

- (N1) NEWMAN, A. H. *Ind. Eng. Chem.*, **28**, 545 (1936).
- (P1) PERRY, R. H., and CHILTON, C. H. *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
- (P2) PLANK, R. Z. *Ges. Kalteind.*, **20**, 109 (1913); *Z. Ges. Kalteind. Bieh. Reih.*, **10** (3), 1 (1941).
- (R1) RIEDEL, L. *Kalttechnik*, **8**, 374 (1956); **9**, 38 (1957); **11**, 41 (1959); **12**, 4 (1960).
- (S1) SCHNEIDER, P. J. *Conduction Heat Transfer*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1955.
- (S2) SIEGEL, R., SPARROW, E. M., and HALLMAN, T. M. *Appl. Sci. Res.*, **A7**, 386 (1958).

فصل ششم

اصول انتقال جرم

۱-۶ مقدمه‌ای بر انتقال جرم و نفوذ

۱A-۶ نشانه فرآیندهای انتقال جرم، حرارت و ممتوم

۱- مقدمه: در فصل ۱ اشاره کردیم که عملیات واحدهای مختلف بر اساس فرآیندهای اساسی انتقال به سه گروه: انتقال ممتوم، انتقال حرارت و انتقال جرم طبقه‌بندی می‌شوند. فرآیندهای انتقال ممتوم در عملیات واحدهایی مانند جریان سیال، اختلاط، ته‌نشینی و فیلتراسیون اتفاق می‌افتد. انتقال حرارت در فرآیندهای انتقال گرما به صورت هدایت و جابه‌جایی، تبخیر، تقطیر و خشک کردن روی می‌دهد.

سومین فرآیند اساسی انتقال، یعنی انتقال جرم، در تقطیر، جذب، خشک کردن، استخراج مایع-مایع، جذب سطحی و فرآیندهای غشایی اتفاق می‌افتد. وقتی که جرم از یک فاز مجزا به فاز دیگر یا از طریق یک فاز انتقال می‌یابد، خواه فاز مربوطه گاز یا مایع یا جامد باشد، مکانیسم‌های اساسی یکسان هستند. این موضوع در انتقال حرارت هنگامی که گرما توسط هدایت در گاز، جامد و یا مایع بر طبق قانون فوریه انجام می‌گرفت، نشان داده شد.

۲- معادله عمومی انتقال مولکولی: هر سه فرآیند انتقال مولکولی ممتوم، حرارت و جرم با معادله عمومی یکسانی که قبلاً در بخش ۳A-۲ آورده شده است، مشخص می‌شوند.

$$\text{نرخ فرایند انتقال} = \frac{\text{نرخی واحد}}{\text{مقاومت}}$$

(۱-۳-۲)

این رابطه در مورد نفوذ مولکولی خاصیت ممتوم، حرارت و جرم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\psi_z = -\delta \frac{dT}{dz} \quad (2-3-2)$$

۳- معادلات نفوذ مولکولی برای انتقال جرم، حرارت و ممتوم: معادله نیوتن برای انتقال ممتوم با دانسیته ثابت، بطریق مشابه با معادله (۲-۳-۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tau_{zx} = -\frac{\mu}{\rho} \frac{d(v_x \rho)}{dz} \quad (6-1-1)$$

که در این رابطه ممتوم انتقال یافته در واحد زمان و سطح، $\frac{\mu}{\rho}$ ویسکوزیته سینماتیک بر حسب m^2/s ، z فاصله بر حسب متر، $v_x \rho$ ممتوم به ازای واحد حجم است، که ممتوم دارای واحد $kg.m/s$ است.

قانون فوریه برای هدایت گرما با ρ و c_p ثابت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{q_z}{A} = -\alpha \frac{d(\rho c_p T)}{dz} \quad (6-1-2)$$

که q_z/A شار حرارتی بر حسب W/m^2 ، α ضریب نفوذ گرمایی بر حسب m^2/s و ρc_p بر حسب J/m^3 است.

معادله مربوط به نفوذ مولکولی جرم، قانون فیک^(۱) است و مشابه معادله (۲-۳-۲) است.

معادله فیک برای غلظت کل ثابت در یک سیال، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$J_{Az}^* = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} \quad (6-1-3)$$

که J_{Az}^* شار مولی جزء A در جهت z ناشی از نفوذ مولکولی بر حسب $kg \text{ mol } A/s.m^2$ ، D_{AB} ضریب نفوذ مولکولی A در B بر حسب cm^2/s ، C_A غلظت A بر حسب $kg \text{ mol}/m^3$ و z فاصله نفوذ بر حسب متر است. در سیستم واحدهای cgs، J_{Az}^* بر حسب $g \text{ mol } A/s.cm^2$ ، D_{AB} بر حسب $cm^2.s$ و C_A بر حسب $g \text{ mol } A/m^3$ است. در سیستم انگلیسی، J_{Az}^* بر حسب $lb \text{ mol}/h.ft^2$ ، D_{AB} بر حسب ft^2/h و C_A بر حسب $lb \text{ mol}/ft^3$ می‌باشد.

تشابه معادلات (۶-۱-۱)، (۶-۱-۲) و (۶-۱-۳) برای انتقال ممتوم، حرارت و یا جرم کاملاً

آشکار است. همه شارها در طرف چپ هر سه معادله دارای واحد انتقال کمیت‌های ممتوم، حرارت و یا جرم در واحد زمان و سطح است. خواص انتقالی μ/ρ و α دارای واحدهای یکسان m^2/s هستند و غلظتها به صورت ممتوم بر متر مکعب، J/m^3 یا $kg \text{ mol}/m^3$ بیان می‌شوند.

۴- معادلات نفوذ مغشوش برای انتقال ممتوم، حرارت و جرم: معادلات بخش VC-۵ در ارتباط با

وجوه اشتراک میان انتقال حرارت، ممتوم و جرم در حالت مغشوش بحث می‌کردند. برای انتقال مغشوش با دانسیته ثابت،

$$\tau_{zx} = -\left(\frac{\mu}{\rho} + \varepsilon_t\right) \frac{d(v_x \rho)}{dz} \quad (6-1-4)$$

برای انتقال حرارت مغشوش با ρ و c_p ثابت،

$$\frac{q_z}{A} = -(\alpha + \alpha_t) \frac{d(\rho c_p T)}{dz} \quad (6-1-5)$$

برای انتقال جرم مغشوش با c ثابت،

$$J_{Az}^* = -(D_{AB} + \varepsilon_M) \frac{dc_A}{dz} \quad (6-1-6)$$

در این معادلات ε_t ضریب نفوذ گردابه‌ای یا مغشوش ممتوم بر حسب m^2/s ، α_t ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای یا مغشوش بر حسب m^2/s و ε_M ضریب نفوذ جرمی گردابه‌ای یا مغشوش بر حسب m^2/s است. مجدداً مشاهده می‌شود که این معادلات کاملاً با هم مشابهند. بسیاری از معادلات تئوری و روابط تجربی در انتقال مغشوش برای شکل‌های هندسی متفاوت با هم کاملاً مشابهند.

۱-۶ مثالهایی از فرآیندهای انتقال جرم

انتقال جرم در بسیاری از مباحث علوم و مهندسی از اهمیت زیادی برخوردار است. انتقال جرم هنگامی اتفاق می‌افتد که یک جزء از یک مخلوط بدلیل اختلاف غلظت در دو نقطه، در همان فاز و یا از فازی به فاز دیگر تغییر مکان دهد. بسیاری از پدیده‌های شناخته شده با انتقال جرم مواجه هستند. آب در یک ظرف روباز تبخیر می‌شود، که علت آن اختلاف غلظت بخار آب در سطح آب و هوای اطراف است. اصطلاحاً یک «نیروی رانش» برای انتقال از سطح آب به محیط وجود دارد. مقداری شکر که به یک فنجان قهوه اضافه می‌شود، نهایتاً در آن حل می‌شود و به داخل محیط محلول نفوذ می‌کند. هنگامی که الوار تازه و مرطوب در محیط قرار می‌گیرد، بتدریج خشک می‌شود و آب داخل الوار به سطح آن نفوذ می‌کند و سپس به صورت بخار وارد محیط می‌شود. در یک فرآیند تخمیر مواد غذایی، اکسیژن حل شده در محلول به داخل میکروارگانیسم‌ها نفوذ می‌کند. در یک واکنش کاتالیزوری واکنش‌کننده‌ها از طریق محیط اطراف به سطح کاتالیزور نفوذ می‌کنند، که در آن جا واکنش اتفاق می‌افتد.

در بسیاری از فرآیندهای خالص سازی، پدیده انتقال جرم وجود دارد. در غنی سازی اورانیوم، نمک اورانیوم موجود در محلول توسط یک حلال آلی استخراج می‌شود. جدا کردن آب از الکل توسط تقطیر با انتقال جرم سروکار دارد. حذف SO_2 از گازهای خروجی به وسیله جذب در یک محلول مایع قلیایی انجام می‌شود.

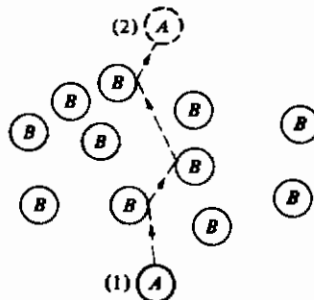
می توان انتقال جرم را تا حدی مشابه با انتقال حرارت بر اساس قانون هدایت فوریه بیان کرد. اما یک اختلاف مهم بین این دو پدیده این است که در انتقال جرم مولکولی، یک یا چند جزء از محیط در حال حرکت است. در انتقال حرارت هدایتی محیط معمولاً ساکن است و فقط انرژی به شکل گرما منتقل می شود. این اختلاف بین انتقال حرارت و جرم در این فصل بحث خواهد شد.

۱C-۶ قانون نفوذ مولکولی فیک

نفوذ مولکولی یا انتقال مولکولی را می توان به صورت انتقال یا حرکت اتفاقی مولکولهای منحصر به فرد از طریق یک سیال تعریف کرد. می توانیم تصور کنیم که مولکولها فقط در مسیر مستقیم حرکت می کنند و تغییر جهت آنها به دلیل برخوردهایی است که اتفاق می افتد. چون مولکولها در مسیرهای اتفاقی حرکت می کنند، نفوذ مولکولی غالباً فرآیند «حرکت اتفاقی»^(۱) نامیده می شود.

در شکل ۱-۶-۱ فرآیند نفوذ مولکولی به صورت شماتیک نشان داده شده است. در این شکل مسیر اتفاقی از نقطه (۱) تا (۲) که مولکول A ممکن است از میان مولکولهای B اختیار کند، نشان داده شده است. اگر تعداد مولکولهای A نزدیک نقطه (۱) بیشتر از تعداد مولکولهای A نزدیک نقطه (۲) باشد، چون مولکولها به طور اتفاقی در هر دو جهت نفوذ می کنند، تعداد مولکولهای A که از نقطه (۱) به (۲) نفوذ می کنند بیشتر از تعداد مولکولهای A خواهد بود که از نقطه (۲) به (۱) نفوذ می کنند. نفوذ خالص مولکولهای A از ناحیه با غلظت بالا به ناحیه با غلظت پایین خواهد بود.

به عنوان یک مثال دیگر، یک قطره مایع آبی رنگ به فنجان آب اضافه می شود. مولکولهای رنگ بر اساس نفوذ مولکولی به آهستگی به تمام قسمتهای آب نفوذ می کنند. برای افزایش شدت اختلاط رنگ، می توان مایع را توسط یک قاشق بهم زد، که در این صورت انتقال جرم جابه جایی اتفاق خواهد افتاد. دو مکانیسم انتقال حرارت یعنی هدایت و جابه جایی مشابه با نفوذ مولکولی و انتقال جرم جابه جایی هستند.



شکل ۱-۶-۱ نمودار شماتیک فرآیند نفوذ مولکولی

ابتدا نفوذ مولکولها را در حالتی در نظر می‌گیریم که کل توده سیال ثابت است. نفوذ مولکولها ناشی از گرادیان غلظت است. معادله عمومی قانون فیک برای یک مخلوط دو جزئی از A و B به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$J_{Az}^* = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} \quad (6-1-7)$$

که در این جا c غلظت کل A و B بر حسب $\frac{\text{kg mol A+B}}{\text{m}^3}$ و x_A جزء مولی A در مخلوط A و B است. اگر c ثابت باشد، چون $c_A = cx_A$ است پس داریم،

$$c dx_A = d(cx_A) = dc_A \quad (6-1-8)$$

با جایگزینی در معادله (6-1-7)، معادله (6-1-3) برای غلظت ثابت به صورت زیر به دست می‌آید.

$$J_{Az}^* = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} \quad (6-1-3)$$

این معادله در فرآیندهای نفوذ مولکولی معمولتر است. اگر c مقداری تغییر کند، اغلب از متوسط آن در معادله (6-1-3) استفاده می‌شود.

مثال 6-1-1 نفوذ مولکولی هلیوم در نیتروژن

مخلوطی از دو گاز N_2 و He در یک لوله در 298 K و فشار کل یک اتمسفر که در کل لوله ثابت است، ذخیره شده است. در یک انتهای لوله در نقطه ۱ فشار جزئی هلیوم برابر با مقدار $p_{A_1} = 0.6 \text{ atm}$ و در انتهای دیگر در 0.2 m آنطرفتر $p_{A_2} = 0.2 \text{ atm}$ است. شار He را در حالت پایدار اگر D_{AB} مخلوط هلیوم - نیتروژن $0.687 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ باشد، محاسبه کنید. از واحدهای SI و cgs استفاده کنید.

حل: چون فشار کل P ثابت است، پس c ثابت است، که در این جا c برای یک گاز بر اساس قانون گاز کامل به صورت زیر است:

$$PV = nRT \quad (6-1-9)$$

$$\frac{n}{V} = \frac{P}{RT} = c \quad (6-1-10)$$

در این روابط n مجموع مولهای A و B، V حجم بر حسب m^3 ، T دما بر حسب کلرین، R برابر با

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$\frac{\text{kgmol}(A+B)}{\text{m}^3}$ یا $۸۳۱۴/۳ \text{ m}^3 \cdot \text{Pa}/\text{kgmol} \cdot \text{K}$ یا $۸۲/۰۵۷ \times ۱۰^{-۳} \text{ m}^3 \cdot \text{atm}/\text{kg mol} \cdot \text{K}$ و c برابر با $\frac{\text{kgmol}(A+B)}{\text{m}^3}$ است. در سیستم واحدهای cgs، R برابر با $۸۲/۰۵۷ \text{ cm}^3 \cdot \text{atm}/\text{gmol} \cdot \text{K}$ است.

برای حالت پایدار شار J_{Az}^* در معادله (۶-۱-۳) ثابت است. همچنین، D_{AB} برای یک گاز ثابت است. با مرتب کردن معادله (۶-۱-۳) و انتگرال گیری،

$$J_{Az}^* \int_{z_1}^{z_2} dz = -D_{AB} \int_{c_{A1}}^{c_{A2}} dc_A \quad (۶-۱-۱۱)$$

$$J_{Az}^* = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1}$$

همچنین از قانون گاز کامل، $p_A V = n_A R T$ و

$$c_{A1} = \frac{p_{A1}}{RT} = \frac{n_A}{V} \quad (۶-۱-۱۲)$$

با جایگزینی معادله (۶-۱-۱۲) در (۶-۱-۱۱)،

$$J_{Az}^* = \frac{D_{AB}(p_{A1} - p_{A2})}{RT(z_2 - z_1)} \quad (۶-۱-۱۳)$$

این معادله، به شکلی است که به راحتی برای گازها قابل استفاده است. فشارهای جزئی $p_{A2} = ۰/۲ \text{ atm} = ۲/۰۲۷ \times ۱۰^۴ \text{ Pa}$ و $p_{A1} = ۰/۶ \text{ atm} = ۰/۶ \times ۱/۰۱۳۲۵ \times ۱۰^۵ = ۶/۰۸ \times ۱۰^۴ \text{ Pa}$ هستند. سپس با استفاده از واحدهای SI،

$$J_{Az}^* = \frac{۰/۶۸۷ \times ۱۰^{-۴} \times (۶/۰۸ \times ۱۰^۴ - ۲/۰۲۷ \times ۱۰^۴)}{۸۳۱۴ \times ۲۹۸ \times (۰/۲ - ۰)}$$

$$= ۵/۶۳ \times ۱۰^{-۶} \text{ kg mol A/s.m}^2$$

اگر فشارها بر حسب اتمسفر باشد و از سیستم SI استفاده شود،

$$J_{Az}^* = \frac{۰/۶۸۷ \times ۱۰^{-۴} \times (۰/۶ - ۰/۲)}{۸۲/۰۶ \times ۱۰^{-۳} \times ۲۹۸ \times (۰/۲ - ۰)} = ۵/۶۳ \times ۱۰^{-۶} \text{ kg mol A/s.m}^2$$

در سیستم واحدهای SI، با جایگزینی در معادله (۶-۱-۱۳)،

$$J_{Az}^* = \frac{۰/۶۸۷ \times (۰/۶ - ۰/۲)}{۸۲/۰۶ \times ۲۹۸ \times (۰/۲ - ۰)} = ۵/۶۳ \times ۱۰^{-۷} \text{ g mol A/s.cm}^2$$

نیروهای رانش دیگر (علاوه بر اختلاف غلظت) مانند گرادیان فشار، دما، پتانسیل الکتریکی و غیره نیز می توانند عامل نفوذ باشند. جزئیات این موارد در مراجع دیگر داده شده

است (B3).

۱D-۶ ضریب انتقال جرم جابه‌جایی

هنگامی که یک سیال روی یک سطح جامد به صورت اجباری جریان می‌یابد، شدت انتقال جرم جابه‌جایی از سطح به سیال یا بالعکس را می‌توان به وسیله معادله زیر بیان کرد.

$$N_A = k_c (c_{L1} - c_{Li}) \quad (6-1-14)$$

که K_c ضریب انتقال جرم بر حسب m/s ، c_{L1} غلظت توده سیال بر حسب $kg \text{ mol A/m}^3$ و c_{Li} غلظت سیال مجاور سطح جامد است. این ضریب انتقال جرم خیلی مشابه ضریب انتقال حرارت h بوده و تابعی از شکل هندسی سیستم، خواص سیال و سرعت جریان است. در فصل هفت، انتقال جرم جابه‌جایی را به تفصیل بحث خواهیم کرد.

۲-۶ نفوذ مولکولی در گازها

۲A-۶ نفوذ هم مولار و خلاف جهت در گازها

در شکل ۶-۲-۱ دو گاز A و B در فشار کل ثابت P در دو محفظه که توسط لوله‌ای به یکدیگر ارتباط داده شده‌اند نشان داده شده است. نفوذ مولکولی پایدار در این سیستم برقرار است. وجود همزن در هر یک از محفظه‌ها باعث یکنواختی غلظت در آنها می‌شود. فشار جزئی $PA_1 > PA_2$ و $PB_1 > PB_2$. مولکولهای A به طرف راست و مولکولهای B به طرف چپ نفوذ می‌کنند. چون فشار کل P ثابت است، مولهای خالص A که به سمت راست نفوذ می‌کنند باید برابر با مولهای خالص B باشد که به چپ نفوذ می‌کنند. اگر چنین نباشد فشار کل ثابت باقی نمی‌ماند، و بنابراین باید،

$$J_{Ax}^* = -J_{Bx}^* \quad (6-2-1)$$

غالباً زیر نویس z حذف می‌شود چون جهت معمولاً معلوم است. با نوشتن قانون فیک برای B در c ثابت،

$$J_B^* = -D_{BA} \frac{dc_B}{dz} \quad (6-2-2)$$

حال چون، ثابت $P = PA + PB$ ، بنابراین،

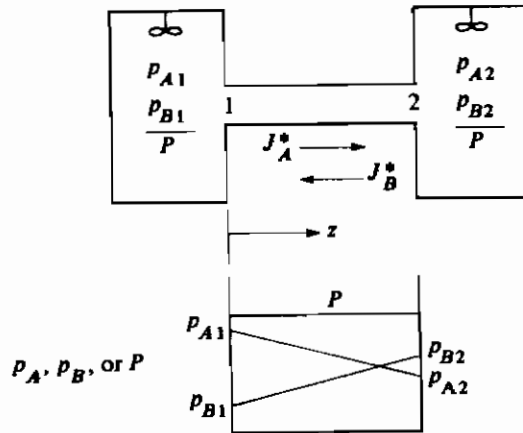
$$c = c_A + c_B \quad (6-2-3)$$

با دیفرانسیل گیری از دو طرف رابطه،

$$dc_A = -dc_B \quad (6-2-4)$$

با معادل قرار دادن معادله (۶-۱-۳) با (۶-۲-۲)

$$J_A^* = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} = -J_B^* = -(-)D_{BA} \frac{dc_B}{dz} \quad (6-2-5)$$



شکل ۶-۲-۱ نفوذ هم مولار و خلاف جهت گازهای A و B

با جایگزینی معادله (۶-۲-۴) در (۶-۲-۵) و حذف عبارتهای مشابه،

$$D_{AB} = D_{BA} \quad (۶-۲-۶)$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای یک مخلوط گازی دوتایی تشکیل شده از A و B، ضریب نفوذ A در B یعنی D_{AB} با ضریب نفوذ B در A یعنی D_{BA} مساوی است.

مثال ۶-۲-۱ نفوذ هم مولار و متقابل

گاز آمونیاک (A) از طریق یک لولهٔ یکنواخت به طول ۰/۱ متر محتوی گاز نیتروژن (B) در شرایط $10^5 \text{ Pa} \times 0.132$ و 298 K نفوذ می‌کند. سیستم مشابه شکل ۶-۲-۱ است. در نقطهٔ ۱، $p_{A1} = 10^4 \text{ Pa} \times 0.132$ و در نقطهٔ ۲، $p_{A2} = 10^4 \text{ Pa} \times 0.507$ ضریب نفوذ $D_{AB} = 0.23 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ است.

(الف) شار J_A^* را در حالت پایدار به دست آورید.

(ب) حالت قبل را برای J_B^* تکرار کنید.

حل: معادله (۶-۱-۱۳) می‌تواند استفاده شود که در این جا،

$$T = 298 \text{ K} \quad z_2 - z_1 = 0.1 \text{ m} \quad p = 10^5 \text{ Pa} \times 0.132$$

با جایگزینی در معادله (۶-۱-۱۳) برای قسمت (الف)،

$$J_A^* = \frac{D_{AB} (p_{A1} - p_{A2})}{R T (z_2 - z_1)} = \frac{0.23 \times 10^{-4} \times (10^4 \times 0.132 - 0.507 \times 10^4)}{8314 \times 298 \times (0.1 - 0)}$$

$$= 4.7 \times 10^{-7} \text{ kg mol B/s/m}^2$$

با بازنویسی معادله (۱۳-۱-۶) برای جزء B برای قسمت (ب) و توجه به این که:

$$P_{B_1} = P - P_{A_1} = 1/0.132 \times 10^5 - 1/0.13 \times 10^4 = 9/119 \times 10^4 \text{ Pa}$$

و

$$P_{B_2} = P - P_{A_2} = 1/0.132 \times 10^5 - 0/507 \times 10^4 = 9/625 \times 10^4 \text{ Pa}$$

داریم:

$$J_B^* = \frac{D_{AB} (P_{B_1} - P_{B_2})}{R T (z_2 - z_1)} = \frac{0/23 \times 10^{-2} \times (9/119 \times 10^4 - 9/625 \times 10^4)}{8314 \times 298 \times (0/1 - 0)}$$

$$= -4/7 \times 10^{-2} \text{ kg mol B/s.m}^2$$

مقدار منفی J_B^* به این معناست که شار از نقطه (۲) به (۱) است.

۶-۲B حالت عمومی نفوذ گازهای A و B همراه با جابه‌جایی

تاکنون قانون فیک را برای نفوذ در یک سیال ساکن بررسی کردیم. یعنی هیچ حرکت خالص یا جریان جابه‌جایی در تمام مخلوط دوتایی A و B وجود نداشت. شار نفوذ J_A^* بدلیل اختلاف غلظت برقرار می‌شود. نرخ عبور مولهای A از یک نقطه ثابت به طرف راست، که شار مثبت در نظر گرفته می‌شود، J_A^* و بر حسب kg mol A/s.m^2 است. این شار را می‌توان به سرعت نفوذ A به طرف راست به صورت زیر تبدیل کرد.

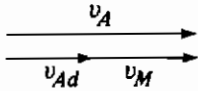
$$J_A^* (\text{kg mol A/s} \cdot \text{m}^2) = v_{Ad} c_A \left(\frac{\text{m kg mol A}}{\text{s m}^3} \right) \quad (6-2-7)$$

که v_{Ad} سرعت نفوذ A بر حسب m/s است.

اکنون آنچه را در هنگام حرکت کل توده سیال به طرف راست اتفاق می‌افتد بررسی می‌کنیم. سرعت متوسط مولی کل سیال نسبت به یک نقطه ثابت v_M متر بر ثانیه است. جزء A هنوز در حال نفوذ به سمت راست است، اما در این حالت سرعت نفوذ آن (v_{Ad}) نسبت به سیال متحرک اندازه‌گیری می‌شود. از دید یک ناظر ثابت، A سریعتر از توده سیال حرکت می‌کند، چون سرعت نفوذش (v_{Ad}) به سرعت توده سیال v_M افزوده می‌شود. به بیان ریاضی، سرعت A نسبت به نقطه ثابت، مجموع سرعت نفوذ و سرعت میانگین یا جابه‌جایی است و،

$$v_A = v_{Ad} + v_M \quad (6-2-8)$$

که v_A سرعت A نسبت به نقطه ثابت است. به شکل تصویری،



با ضرب کردن معادله (۶-۲-۸) در c_A ،

$$c_A v_A = c_A v_{Ad} + c_A v_M \quad (۶-۲-۹)$$

هر یک از سه عبارت بالا بیانگر یک شار هستند. عبارت اول $c_A v_A$ توسط شار J_A^* kg mol A/s.m بیان می‌شود، که شار کل A نسبت به نقطه ثابت است. جمله دوم J_A^* شار نفوذ نسبت به سیال متحرک است. جمله سوم شار جابه‌جایی A نسبت به نقطه ثابت است. بنابراین معادله (۶-۲-۹) می‌شود،

$$N_A = J_A^* + c_A v_M \quad (۶-۲-۱۰)$$

در نظر بگیرید که N شار کلی جابه‌جایی همه جریان نسبت به نقطه ثابت باشد. بنابراین،

$$N = c v_M = N_A + N_B \quad (۶-۲-۱۱)$$

یا با حل رابطه نسبت به v_M ،

$$v_M = \frac{N_A + N_B}{c} \quad (۶-۲-۱۲)$$

با جایگزینی معادله (۶-۲-۱۲) در (۶-۲-۱۰)،

$$N_A = J_A^* + \frac{c_A}{c} (N_A + N_B) \quad (۶-۲-۱۳)$$

چون J_A^* بر اساس قانون فیک به دست می‌آید، معادله (۶-۱-۷) می‌شود،

$$N_A = -c D_{AB} \frac{dx_A}{dz} + \frac{c_A}{c} (N_A + N_B) \quad (۶-۲-۱۴)$$

معادله (۶-۲-۱۴) معادله نهایی برای نفوذ همراه با جابه‌جایی است که در آن از N_A استفاده می‌شود و نسبت به نقطه ثابت اندازه‌گیری می‌شود. معادله مشابهی نیز برای N_B می‌تواند نوشته شود،

$$N_B = -c D_{BA} \frac{dx_B}{dz} + \frac{c_B}{c} (N_A + N_B) \quad (۶-۲-۱۵)$$

برای الحظ معادله (۶-۲-۱۴) یا (۶-۲-۱۵)، رابطه بین شمار N_A و N_B باید معلوم باشد. معادلات (۶-۲-۱۴) و (۶-۲-۱۵) برای نفوذ در یک گاز، مایع یا جامد صدق می‌کنند.

برای نفوذ هم مولار و متقابل $N_A = N_B$ و عبارت جابه‌جایی در معادله (۶-۲-۱۴) برابر با صفر

$$\text{می‌شود. بنابراین } N_A = J_A^* = -N_B = -J_B^* .$$

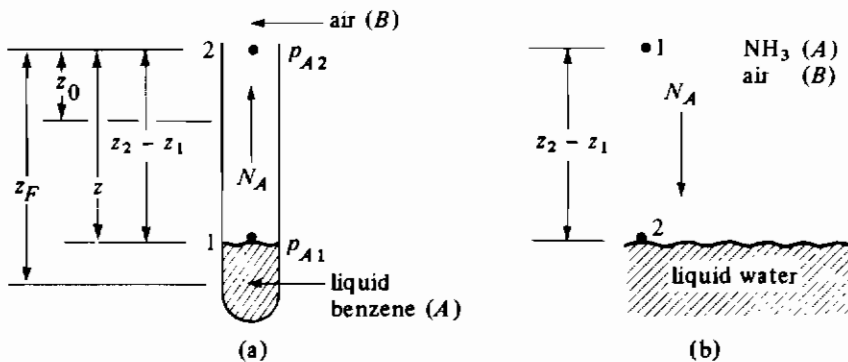
۶-۲C حالت خاص نفوذ A در جزء ساکن و غیر نفوذی B

غالباً نفوذ A در جزء ساکن یا غیر نفوذی B در حالت پایدار اتفاق می‌افتد. در این حالت در انتهای مسیر نفوذ مرزی وجود دارد که برای جزء B غیر قابل نفوذ است، به طوری که نمی‌تواند از آن عبور کند. مثالی در این زمینه در شکل ۶-۲-۲a نشان داده شده است. در این مثال یک مایع خالص مانند بنزن (A) در ته یک لوله باریک، به داخل جریان هوایی (B) که از بالای لوله عبور می‌کند تبخیر می‌شود. بخار بنزن (A) به داخل هوایی (B) که در لوله است نفوذ می‌کند. مرز موجود در سطح مایع در نقطه ۱ برای هوا غیر قابل نفوذ است، چون هوا در بنزن مایع حل نمی‌شود. بنابراین، هوا (B) نمی‌تواند به داخل سطح نفوذ کند یا در مایع فرو رود. چون حجم زیادی از هوا از نقطه ۲ عبور می‌کند، بنابراین فشار جزئی p_{A2} در آن جا صفر است.

مثال دیگر که در شکل ۶-۲-۲b نشان داده شده است، در جذب بخار آمونیاک (A) موجود در هوا (B) توسط آب اتفاق می‌افتد. سطح آب برای هوا غیر قابل نفوذ است، چون به میزان بسیار کمی در آب حل می‌شود. بنابراین چون B نمی‌تواند نفوذ کند، $N_B = 0$ است.

برای به دست آوردن معادله مربوط به حالتی که جزء A در جزء ساکن و غیر نفوذی B نفوذ می‌کند، عبارت $N_B = 0$ در معادله عمومی (۶-۲-۱۴) جایگزین می‌شود.

$$N_A = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} + \frac{c_A}{c} (N_A + 0) \quad (6-2-16)$$



شکل ۶-۲-۲c نفوذ A از طریق جزء ساکن و غیر نفوذی B: (a) بنزن در حال تبخیر شدن

به داخل هوا (b) آمونیاک موجود در هوا در حال جذب شدن به داخل آب

با ثابت نگهداشتن فشار کل P و با جایگزینی $c = P/RT$ ، $p_A = P x_A$ ، و $c_A/c = p_A/P$ در معادله (۶-۲-۱۶)،

$$N_A = -\frac{D_{AB}}{RT} \frac{dp_A}{dz} + \frac{p_A}{P} N_A \quad (6-2-17)$$

با مرتب کردن و انتگرال گیری

$$N_A \left(1 - \frac{p_A}{P}\right) = -\frac{D_{AB}}{RT} \frac{dp_A}{dz} \quad (6-2-18)$$

$$N_A \int_{z_1}^{z_2} dz = -\frac{D_{AB}}{RT} \int_{p_{A1}}^{p_{A2}} \frac{dp_A}{1 - p_A/P} \quad (6-2-19)$$

$$N_A = \frac{D_{AB} P}{RT(z_2 - z_1)} \ln \frac{P - p_{A2}}{P - p_{A1}} \quad (6-2-20)$$

معادله (۶-۲-۲۰) معادله نهایی است که برای محاسبه شار A به کار می رود. اما این معادله غالباً به شکل دیگری نوشته می شود. میانگین لگاریتمی مقدار جزء بی اثر B به صورت زیر تعریف می شود. چون $P = p_{A1} + p_{B1} = p_{A2} + p_{B2}$ و همچنین $p_{B1} = P - p_{A1}$ و $p_{B2} = P - p_{A2}$ بنابراین،

$$p_{BM} = \frac{p_{B2} - p_{B1}}{\ln(p_{B2}/p_{B1})} = \frac{p_{A1} - p_{A2}}{\ln[(P - p_{A2})/(P - p_{A1})]} \quad (6-2-21)$$

با جایگزینی معادله (۶-۲-۲۱) در (۶-۲-۲۰)،

$$N_A = \frac{D_{AB} P}{RT(z_2 - z_1) p_{BM}} (p_{A1} - p_{A2}) \quad (6-2-22)$$

مثال ۶-۲-۲ نفوذ آب در میان هوای ساکن و غیر نفوذی

آب در کف یک لوله فلزی نازک در دمای ثابت 293 K قرار دارد. فشار کل هوا (خشک فرض می شود) برابر با $1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$ و دما 293 K است. آب تبخیر می شود و به داخل هوای موجود در لوله نفوذ می کند. مسیر نفوذ $z_2 - z_1$ برابر با 0.1524 m (۰/۵ ft) است. شکل مثال مشابه با شکل ۶-۲-۲۸ است. فرض کنید سیستم همدماست. از واحدهای SI و انگلیسی استفاده کنید.

حل: ابتدا ضریب نفوذ را به ft^2/h تبدیل می کنیم. با استفاده از ضریب تبدیل ضمیمه A.1

$$D_{AB} = (0.25 \times 10^{-4}) \times (3/875 \times 10^4) = 0.969 \text{ ft}^2/\text{h}$$

از ضمیمه A.2 فشار بخار آب در 20°C برابر با $17/54 \text{ mmHg}$ یا $2/341 \times 10^4 \text{ Pa}$ atm

$p_{A_1} = 0$ و $p_{A_2} = \frac{17/54}{76} = 0/0231$ است (هوای خالص). چون دما 20°C (68°F) است
 $T = 460 + 68 = 528^\circ\text{R} = 293\text{ K}$ از ضمیمه A.1، $R = 0/73\text{ ft}^3\cdot\text{atm}/\text{lbmol}\cdot^\circ\text{R}$ ، برای
 محاسبه مقدار p_{BM} از معادله (۶-۲-۲۱) داریم،

$$p_{B_1} = P - p_{A_1} = 1 - 0/0231 = 0/9769\text{ atm}$$

$$p_{B_2} = P - p_{A_2} = 1 - 0 = 1\text{ atm}$$

$$p_{BM} = \frac{p_{B_2} - p_{B_1}}{\ln(p_{B_2}/p_{B_1})} = \frac{1 - 0/9769}{\ln(1/0/9769)} = 0/988\text{ atm} = 1/001 \times 10^5\text{ Pa}$$

چون p_{B_1} به p_{B_2} نزدیک است، میانگین خطی $(p_{B_1} + p_{B_2})/2$ می تواند استفاده شود و خیلی
 به p_{BM} نزدیک خواهد بود.

با جایگزینی در معادله (۶-۲-۲) با $z_2 - z_1 = 0/5\text{ ft}$ ($0/1524\text{ m}$)

$$N_A = \frac{D_{AB} P}{R T (z_2 - z_1) p_{BM}} (p_{A_1} - p_{A_2}) = \frac{0/969 \times 1 \times (0/0231 - 0)}{0/73 \times 528 \times 0/5 \times 0/988}$$

$$= 1/175 \times 10^{-4}\text{ lbmol}/\text{h}\cdot\text{ft}^2$$

$$N_A = \frac{(0/25 \times 10^{-4}) \times (1/01325 \times 10^5) \times (2/341 \times 10^{-3} - 0)}{8314 \times 293 \times 0/1524 \times (1/001 \times 10^5)}$$

$$= 1/595 \times 10^{-7}\text{ kg mol}/\text{s}\cdot\text{m}^2$$

مثال ۶-۲-۳ نفوذ در یک لوله با تغییر طول مسیر

همانند مثال ۶-۲-۲ بخار آب در یک لوله نازک تحت همان شرایط نفوذ می کند. اما
 همان طور که در شکل ۶-۲-۲ا نشان داده شده است، z نشان دهنده سطح مایع از
 بالای لوله بر حسب متر در زمان معین t است. همچنان که نفوذ پیش می رود، سطح مایع به
 آهستگی کم می شود. رابطه ای به دست آورید که تغییرات سطح مایع از نقطه شروع z_0 (بر حسب
 متر) در $t = 0$ تا z_f در $t = t_f$ (بر حسب ثانیه) را نشان دهد.

حل: چون افت سطح مایع خیلی آهسته است فرض می کنیم شرایط شبه پایدار باشد.

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

با گذشت زمان طول مسیر z افزایش می‌یابد. در هر زمان t معادله (۶-۲-۲۲) برقرار است اما طول مسیر z است و معادله (۶-۲-۲۲) با N_A و z متغیر به صورت زیر می‌شود:

$$N_A = \frac{D_{AB} P}{RTzP_{BM}} (P_{A1} - P_{A2}) \quad (۶-۲-۲۳)$$

با فرض این که سطح مقطع 1 m^2 باشد، اُفت سطح در dt ثانیه برابر dz متر و $P_A(dz \cdot 1)/M_A$ تعداد کیلوگرم مول A است که از مایع جدا شده و نفوذ کرده است. بنابراین،

$$N_A \cdot 1 = \frac{\rho_A (dz \cdot 1)}{M_A dt} \quad (۶-۲-۲۴)$$

با معادل قرار دادن معادله (۶-۲-۲۴) با (۶-۲-۲۳) و مرتب کردن و سپس انتگرال گیری بین حدود $z = z_0$ در $t = 0$ و $z = z_F$ در $t = t_F$ داریم،

$$\frac{\rho_A}{M_A} \int_{z_0}^{z_F} z dz = \frac{D_{AB} P (P_{A1} - P_{A2})}{RT P_{BM}} \int_0^{t_F} dt \quad (۶-۲-۲۵)$$

با حل رابطه برای t_F ،

$$t_F = \frac{\rho_A (z_F^2 - z_0^2) RT P_{BM}}{2 M_A D_{AB} P (P_{A1} - P_{A2})} \quad (۶-۲-۲۶)$$

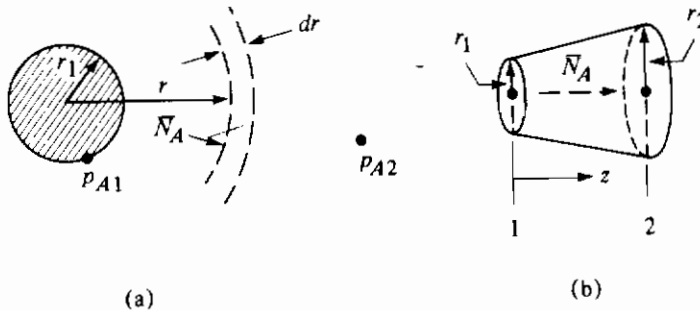
روش نشان داده شده در مثال ۶-۲-۳ برای تعیین تجربی ضریب نفوذ D_{AB} به کار می‌رود. در این آزمایش طول مسیر z_0 در زمان $t = 0$ و طول نهایی z_F در زمان t_F اندازه گیری می‌شود. سپس معادله (۶-۲-۲۶) برای محاسبه D_{AB} به کار می‌رود.

۶-۲D نفوذ در میان محیطی با سطح مقطع متغیر

در حالتی که تاکنون بررسی کردیم N_A و J_A^* در انتگرال گیری ثابت فرض می‌شدند. در این حالات سطح مقطع A که از طریق آن نفوذ انجام می‌شد، ثابت بود و طول تغییر می‌کرد. در بعضی از حالات سطح مقطع A ممکن است تغییر کند. بنابراین مناسب است که N_A به صورت زیر تعریف شود:

$$N_A = \frac{\bar{N}_A}{A} \quad (۶-۲-۲۷)$$

که در این جا \bar{N}_A کیلوگرم مولهای نفوذ کننده A در واحد زمان یا kg mol/s است. در حالت پایدار، \bar{N}_A ثابت خواهد بود اما A ثابت نیست.



شکل ۶-۲-۳. نفوذ از طریق یک سطح مقطع متغیر: (a) از کره به محیط (b) از طریق یک کانال مدور که به طور یکنواخت قطر آن کم می شود.

۱- نفوذ از یک کره: برای تشریح کاربرد معادله (۶-۲-۲۷)، یکی از حالت‌های مهم نفوذ به یا از یک کره در یک گاز است. این حالت غالباً در تبخیر یک قطره مایع، تبخیر یک گلوله نفتالین و نفوذ مواد غذایی به یک میکروارگانسیم کروی شکل در یک مایع، دیده می شود. در شکل ۶-۲-۳a کره‌ای به قطر ثابت r_1 متر در محیط بزرگ و نامحدود یک گاز قرار گرفته است. جزء (A) با فشار جزئی p_{A1} در سطح، در حال نفوذ به داخل محیط ساکن (B) است، که در آنجا در فاصله دور از کره $p_{A2} = 0$ است. نفوذ پایدار فرض می شود.

شار N_A توسط معادله (۶-۲-۲۷) بیان می شود، که در آن A سطح مقطع بوده و برابر با $4\pi r^2$ در فاصله‌ای به شعاع r از مرکز کره است. همچنین \bar{N}_A در شرایط پایدار ثابت است.

$$N_A = \frac{\bar{N}_A}{4\pi r^2} \quad (6-2-28)$$

چون در این مورد، حالتی است که A به داخل جزء ساکن و غیر نفوذی B نفوذ می کند، معادله (۶-۲-۱۸) در شکل دیفرانسیلی قابل استفاده است و از برابر قرار دادن N_A با معادله (۶-۲-۲۸) نتیجه می شود که،

$$N_A = \frac{\bar{N}_A}{4\pi r^2} = -\frac{D_{AB}}{RT} \frac{dp_A}{(1 - p_A/P) dr} \quad (6-2-29)$$

توجه کنید که dr به جای dz قرار گرفته است. با مرتب کردن و انتگرال گیری بین r_1 و نقطه‌ای به شعاع r_2 در فاصله دور،

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$\frac{\bar{N}_A}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{D_{AB}}{RT} \int_{p_{A1}}^{p_{A2}} \frac{dp_A}{(1-p_A/P)} \quad (۶-۲-۳۰)$$

$$\frac{\bar{N}_A}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{D_{AB} P}{RT} \ln \frac{P-p_{A2}}{P-p_{A1}} \quad (۶-۲-۳۱)$$

چون $r_2 \gg r_1$ و $\frac{1}{r_2} \cong 0$ و با جایگزینی p_{BM} از معادله (۶-۲-۲۱) در معادله (۶-۲-۳۱)،

$$\frac{\bar{N}_A}{4\pi r_1^2} N_{A1} = \frac{D_{AB} P}{RT r_1} \frac{p_{A1} - p_{A2}}{p_{BM}} \quad (۶-۲-۳۲)$$

این معادله می تواند ساده تر هم شود. اگر p_{A1} در مقایسه با P کوچک باشد (فاز گاز رقیق باشد)

$$p_{BM} \cong P, \quad c_{A1} = p_{A1}/RT \quad \text{و} \quad r_1 = D_1 \quad \text{در نظر گرفتن}$$

$$N_{A1} = \frac{2D_{AB}}{D_1} (c_{A1} - c_{A2}) \quad (۶-۲-۳۳)$$

این معادله برای مایعات نیز می تواند به کار رود که در آن ضریب نفوذ D_{AB} در مایع است.

مثال ۶-۲-۴ تبخیر یک کره نفتالین

یک کره از جنس نفتالین که دارای شعاع ۲ mm است در حجم زیادی از هوا در ۳۱۸ K و

$1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$ (۱ atm) غوطه ور می شود. دمای سطح نفتالین ۳۱۸ K فرض می شود و

فشار بخار آن در ۳۱۸ K برابر با ۰/۵۵۵ mmHg است. D_{AB} برای نفتالین در هوا و در ۳۱۸ K

برابر $6/92 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ است. شدت تبخیر نفتالین از سطح را حساب کنید.

حل: شکل فرآیند همانند شکل ۶-۲-۳a است.

$$D_{AB} = 6/92 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$p_{A2} = 0, \quad p_{A1} = \left(\frac{0/555}{760} \right) \times (1.01325 \times 10^5) = 74 \text{ Pa}$$

$$p_{B1} = P - p_{A1} = 1.01251 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad p_{B2} = P - p_{A2} = 1.01325 \times 10^5$$

$$R = 8314 \text{ m}^3 \cdot \text{Pa} / \text{kg mol} \cdot \text{K}, \quad r_1 = \frac{2}{1000} \text{ m}$$

چون مقادیر p_{B1} و p_{B2} نزدیک به یکدیگر هستند.

$$p_{BM} = \frac{p_{B1} + p_{B2}}{2} = \frac{(1.01251 + 1.01325) \times 10^5}{2} = 1.0129 \times 10^5 = \text{Pa}$$

با جایگزینی در معادله (۶-۲-۳۲)،

$$N_{A1} = \frac{D_{AB} P (p_{A1} - p_{A2})}{R T r_1 p_{BM}} = \frac{6/92 \times 10^{-6} \times 1.01325 \times 10^5 \times (74 - 0)}{8314 \times 318 \times 0/002 \times (1.0129 \times 10^5)}$$

$$= 9/68 \times 10^{-8} \text{ kg mol A/s} \cdot \text{m}^2$$

اگر کره نشان داده شده در شکل ۶-۲-۳a در حال تبخیر باشد، شعاع کره (r) به آهستگی نسبت به زمان کاهش می‌یابد. معادلهٔ مربوط به زمان تبخیر کامل کره با فرض حالت شبه پایدار و معادل قرار دادن معادلهٔ شار نفوذ (۶-۲-۳۲)، که در این حالت r یک متغیر است، با تعداد مولهای جامد A تبخیر شده در زمان dt در واحد سطح، که از موازنهٔ جرم محاسبه می‌شود، به دست خواهد آمد. (مسئلهٔ ۶-۲-۹ را برای این حالت ببینید.) روش موازنهٔ جرم مشابه مثال ۶-۲-۳ است. معادلهٔ نهایی عبارتست از:

$$t_F = \frac{\rho_A r_1^2 RT p_{BM}}{2M_A D_{AB} P(p_{A1} - p_{A2})} \quad (6-2-34)$$

که r_1 شعاع کره اصلی، ρ_A دانسیتهٔ کره و M_A جرم مولکولی است.

۲- نفوذ در یک کانال با مقطع غیر یکنواخت: در شکل ۶-۲-۳b، جزء A در حال نفوذ در حالت پایدار در یک کانال مدور است که مطابق شکل مخروطی است. در نقطهٔ ۱ شعاع r_1 و در نقطهٔ ۲ شعاع r_2 است. در فاصلهٔ z در کانال برای جزء A که در جزء ساکن و غیر نفوذی B، نفوذ می‌کند داریم:

$$N_A = \frac{\bar{N}_A}{\pi r^2} = - \frac{D_{AB}}{RT} \frac{dp_A}{(1 - p_A/P) dz} \quad (6-2-35)$$

با استفاده از شکل هندسی نشان داده شده، متغیر r با طول z به صورت زیر رابطه دارد:

$$r = \left(\frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1} \right) z + r_1 \quad (6-2-36)$$

سپس r در معادلهٔ (۶-۲-۳۵) جایگزین می‌شود تا حذف شود و از معادلهٔ حاصل انتگرال‌گیری می‌شود،

$$\frac{\bar{N}_A}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\left[\left(\frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1} \right) z + r_1 \right]^2} = - \frac{D_{AB}}{RT} \int_{p_{A1}}^{p_{A2}} \frac{dp_A}{1 - p_A/P} \quad (6-2-37)$$

مشابه این حالت در مسئلهٔ ۶-۲-۱۰ داده شده است.

۶-۲E ضرایب نفوذ گازها

۱- تعیین تجربی ضرایب نفوذ: چند روش تجربی برای تعیین ضریب نفوذ مولکولی مخلوطهای گازی و جزئی تاکنون مورد استفاده بوده است. تعدادی از مهمترین آنها شرح داده می‌شود. یکی از روشها تبخیر یک مایع خالص در یک لولهٔ نازک می‌باشد درحالی‌که گازی از بالای لوله مطابق شکل ۶-۲-۲a عبور می‌کند. کاهش سطح مایع نسبت به زمان اندازه‌گیری می‌شود و ضریب نفوذ از معادلهٔ (۶-۲-۲۶) به دست می‌آید. در روش دیگر، دو گاز خالص با فشارهای مساوی در دو قسمت مجزا از یک لوله قرار می‌گیرند که یک صفحهٔ جداکننده بین آنها قرار دارد. صفحهٔ جداکننده به آهستگی برداشته می‌شود و نفوذ شروع

می‌شود. ضریب نفوذ بخار جامدهایی مانند نفتالین، ید و اسید بتزوئیک در گاز با اندازه‌گیری نرخ تبخیر یک کره به دست آمده است. معادله (۶-۲-۳۲) می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به عنوان مثالی از این مورد مسأله ۶-۲-۹ را ببینید.

روش مفیدی که غالباً از آن استفاده می‌شود روش دو حباب است^(۱) (N1). وسیلهٔ مربوطه عبارت است از دو حباب شیشه‌ای به حجمهای V_1 و V_2 (بر حسب m^3) که توسط یک لولهٔ موئین به مقطع A متر مربع و طول L که حجم آن در مقایسه با حجمهای V_1 و V_2 کوچک است، به هم وصل شده‌اند (مطابق شکل ۶-۲-۴). گاز خالص A به حجم V_1 و گاز خالص B به حجم V_2 با فشار یکسان وارد می‌شوند. شیر وسط باز شده و نفوذ در یک زمان مشخص انجام می‌شود. سپس شیر بسته می‌شود و مخلوطهای موجود در هر محفظه جداگانه نمونه برداری می‌شوند.

با صرفنظر کردن از حجم لولهٔ موئین و با فرض این‌که هر یک از حبابها غلظت یکنواختی دارند، می‌توان روابطی به دست آورد. اگر نفوذ در لولهٔ موئین در حالت شبه پایدار فرض شود،

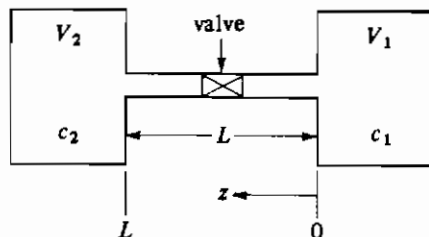
$$J_A^* = -D_{AB} \frac{dc}{dz} = -\frac{D_{AB}(c_2 - c_1)}{L} \quad (6-2-38)$$

که c_1 غلظت A در V_1 و c_2 در V_2 در زمان t است. شدت نفوذ A که به سمت V_2 می‌رود مساوی با نرخ تجمع در V_2 است.

$$AJ_A^* = -\frac{D_{AB}(c_2 - c_1)A}{L} = V_2 \frac{dc_2}{dt} \quad (6-2-39)$$

مقدار میانگین c_{av} در حالت تعادل می‌تواند به وسیلهٔ یک موازنهٔ جرم از ترکیب در زمان شروع (c_1^0 و c_2^0 در $t = 0$) محاسبه شود.

$$(V_1 + V_2)c_{av} = V_1c_1^0 + V_2c_2^0 \quad (6-2-40)$$



شکل ۶-۲-۴. اندازه‌گیری ضریب نفوذ گازها توسط روش دو حباب

موازنه مشابه در زمان t نشان می‌دهد که:

$$(V_1 + V_2)c_{av} = V_1c_1 + V_2c_2 \quad (6-2-41)$$

با جایگزینی c_1 از معادله (6-2-41) در (6-2-39) و مرتب کردن و انتگرال‌گیری بین $t = 0$ تا $t = t$ ، رابطه نهایی عبارت است از:

$$\frac{c_{av} - c_2}{c_{av} - c_2^0} = \exp \left[- \frac{D_{AB}(V_1 + V_2)}{(L/A)(V_2 V_1)} t \right] \quad (6-2-42)$$

اگر c_p توسط نمونه برداری در زمان t به دست آید، D_{AB} می‌تواند محاسبه شود.

۲- داده‌های تجربی ضریب نفوذ: نمونه‌ای از داده‌های تجربی در جدول ۶-۲-۱ داده شده است. داده‌های دیگر در (R1) و (P1) به صورت جدول داده شده است. این مقادیر از حدود $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ تا $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ برای یک مولکول بزرگ تا حدود $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ برای مولکول H_2 در دمای اتاق، تغییر می‌کند. رابطه بین ضریب نفوذ بر حسب m^2/s و ft^2/h به صورت $1 \text{ m}^2/\text{s} = 3/875 \times 10^4 \text{ ft}^2/\text{h}$ می‌باشد.

۳- پیش‌بینی ضریب نفوذ گازها: ضریب نفوذ یک مخلوط گازی دوجزئی در ناحیه گاز رقیق یعنی در فشارهای کم و نزدیک به اتمسفر می‌تواند توسط تئوری جنبشی گازها پیش‌بینی شود. فرض می‌شود گاز عبارت باشد از ذرات کروی سخت که در برخورد با مولکول دیگر کاملاً الاستیک هستند که اشاره به این دارد که اصل بقای ممتوم برقرار است.

در یک بیان ساده فرض می‌شود که هیچ نیروی جاذبه و دافعه‌ای بین مولکول‌ها وجود ندارد. برای به دست آوردن معادله از پویش آزاد میانگین λ استفاده می‌شود که میانگین فاصله‌ای است که یک مولکول بین دو برخورد طی می‌کند. رابطه نهایی به این صورت است،

$$D_{AB} = \frac{1}{3} \bar{u} \lambda \quad (6-2-43)$$

که در این جا \bar{u} سرعت میانگین مولکول‌هاست. معادله نهایی به دست آمده پس از جایگزینی روابط مربوط به \bar{u} و λ در معادله (6-2-43) تقریباً صحیح است، چون پیش‌بینی صحیحی از تناسب D_{AB} با $\frac{1}{\text{فشار}}$ دارد و اثر دما را نیز تا حدودی پیش‌بینی می‌کند.

جدول ۱-۲-۶ ضرایب نفوذگازها در فشار ۱۰۱/۳۲ kPa

System	Temperature		Diffusivity [(m ² /s)10 ⁴ or cm ² /s]	Ref.
	°C	K		
Air-NH ₃	0	273	0.198	(W1)
Air-H ₂ O	0	273	0.220	(N2)
	25	298	0.260	(L1)
	42	315	0.288	(M1)
Air-CO ₂	3	276	0.142	(H1)
	44	317	0.177	
Air-H ₂	0	273	0.611	(N2)
Air-C ₂ H ₅ OH	25	298	0.135	(M1)
	42	315	0.145	
Air-CH ₃ COOH	0	273	0.106	(N2)
Air- <i>n</i> -hexane	21	294	0.080	(C1)
Air-benzene	25	298	0.0962	(L1)
Air-toluene	25.9	298.9	0.086	(G1)
Air- <i>n</i> -butanol	0	273	0.0703	(N2)
	25.9	298.9	0.087	
H ₂ -CH ₄	25	298	0.726	(C2)
H ₂ -N ₂	25	298	0.784	(B1)
	85	358	1.052	
H ₂ -benzene	38.1	311.1	0.404	(H2)
H ₂ -Ar	22.4	295.4	0.83	(W2)
H ₂ -NH ₃	25	298	0.783	(B1)
H ₂ -SO ₂	50	323	0.61	(S1)
H ₂ -C ₂ H ₅ OH	67	340	0.586	(T1)
He-Ar	25	298	0.729	(S2)
He- <i>n</i> -butanol	150	423	0.587	(S2)
He-air	44	317	0.765	(H1)
He-CH ₄	25	298	0.675	(C2)
He-N ₂	25	298	0.687	(S2)
He-O ₂	25	298	0.729	(S2)
Ar-CH ₄	25	298	0.202	(C2)
CO ₂ -N ₂	25	298	0.167	(W3)
CO ₂ -O ₂	20	293	0.153	(W4)
N ₂ - <i>n</i> -butane	25	298	0.0960	(B2)
H ₂ O-CO ₂	34.3	307.3	0.202	(S3)
CO-N ₂	100	373	0.318	(A1)
CH ₃ Cl-SO ₂	30	303	0.0693	(C3)
(C ₂ H ₅) ₂ O-NH ₃	26.5	299.5	0.1078	(S4)

در یک بیان دقیق‌تر و اصولی‌تر، نیروهای بین مولکولی جاذبه و دافعه بین مولکولها و اندازه مولکولهای A و B باید در نظر گرفته شوند. Chapman و Enskog معادله بولتزمن را که به جای پوش آزاد میانگین λ از تابع توزیع استفاده می‌کند حل کردند. برای حل این معادله، از رابطه‌ای بین نیروهای جاذبه و دافعه بین یک جفت مولکول مشخص باید استفاده شود. برای یک جفت مولکول غیر قطبی یک رابطه تقریبی قابل قبول برای نیروها، تابع لنارد - جونز است.

رابطه نهایی برای پیش بینی ضریب نفوذ یک جفت مولکول گازی A و B به صورت زیر است.

$$D_{AB} = \frac{1.8583 \times 10^{-7} T^{3/2}}{P \sigma_{AB}^2 \Omega_{D, AB}} \left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right)^{1/2} \quad (6-2-44)$$

که در این جا D_{AB} ضریب نفوذ بر حسب m^2/s ، T دما بر حسب کلونین، M_A جرم مولکولی A بر حسب $\text{kg}/\text{kg mol}$ ، M_B جرم مولکولی B و P فشار مطلق بر حسب اتمسفر است. عبارت σ_{AB} «قطر میانگین برخورد»^(۱) و $\Omega_{D, AB}$ از منابع مختلف به دست می‌آیند ($R1, H3, G2, B3$).

انتگرال برخورد $\Omega_{D, AB}$ نسبتی است که انحراف یک گاز را در مقایسه با مدل کره‌های سخت و الاستیک می‌دهد. این مقدار برای گازی که هیچگونه تأثیر متقابل بین مولکولی ندارد برابر با ۱ است. معادله (6-2-44) ضرایب نفوذ را با انحراف میانگین حدود ۸٪ تا حدود ۱۰۰۰ K پیش بینی می‌کند (R1). معادله (6-2-44) برای یک مخلوط گازی قطبی - غیر قطبی اگر ثابت نیرو برای گاز قطبی به طور صحیح به کار رود قابل استفاده خواهد بود ($M1, M2$). برای جفت گازی قطبی - قطبی تابع انرژی پتانسیلی که معمولاً به کار می‌رود تابع پتانسیل Stockmayer است ($M2$).

اثر غلظت A بر B در معادله (6-2-44) در نظر گرفته نشده است. اما برای گازهای حقیقی که نیروهای بین مولکولی دارند بیشترین اثر غلظت بر ضریب نفوذ حدود ۴٪ است (G2). در بیشتر حالات این اثر به طور قابل ملاحظه‌ای کم است و بنابراین از آن صرف‌نظر می‌شود.

معادله (6-2-44) برای استفاده، نسبتاً پیچیده است و غالباً بعضی از ثابتهای آن مانند σ_{AB} یا در دسترس نیستند و یا تخمین آنها مشکل است. بنابراین غالباً از روش نیمه تجربی Fuller (F1) که برای استفاده راحتتر است استفاده می‌شود. این معادله بر اساس همبسته کردن مقدار زیادی از داده‌های جدید به دست آمده است و از حجمهای اتمی موجود در جدول ۲-۲ که برای هر مولکول گازی جمع شده است، استفاده می‌کند. معادله به صورت زیر است،

$$D_{AB} = \frac{1.00 \times 10^{-7} T^{1.75} (1/M_A + 1/M_B)^{1/2}}{P [(\sum v_A)^{1/3} + (\sum v_B)^{1/3}]^2} \quad (6-2-45)$$

جدول ۲-۶. حجمهای اتمی نفوذ برای استفاده در روش Fuller، Giddings و Schettler

Atomic and structural diffusion volume increments, v			
C	16.5	(CI)	19.5
H	1.98	(S)	17.0
O	5.48	Aromatic ring	-20.2
(N)	5.69	Heterocyclic ring	-20.2
Diffusion volumes for simple molecules, $\sum v$			
H ₂	7.07	CO	18.9
D ₂	6.70	CO ₂	26.9
He	2.88	N ₂ O	35.9
N ₂	17.9	NH ₃	14.9
O ₂	16.6	H ₂ O	12.7
Air	20.1	(CCl ₂ F ₂)	114.8
Ar	16.1	(SF ₆)	69.7
Kr	22.8	(Cl ₂)	37.7
(Xe)	37.9	(Br ₂)	67.2
Ne	5.59	(SO ₂)	41.1

(موارد داخل پرانتز نشان می‌دهد که مقدار داده شده بر اساس تعداد کمی داده به دست آمده است). (با کسب مجوز از:

(E. N. Fuller, P. D. Schettler, J. C. Giddings, Ind. Eng. Chem., 58, 19 (1966)

که در این جا $\sum v_A$ مساوی با مجموع حجمهای اتمی (جدول ۲-۶) و D_{AB} بر حسب m^2/s است. این روش می‌تواند برای مخلوطهای گازی غیر قطبی یا برای مخلوطهای قطبی - غیر قطبی استفاده شود. دقت آن به اندازه معادله (۲-۴۴) نیست.

معادله نشان می‌دهد که D_{AB} متناسب با $1/P$ و $T^{1/75}$ است. اگر مقدار تجربی D_{AB} در یک T و P مشخص در دسترس باشد و بخواهیم D_{AB} را در T و P دیگری به دست آوریم، مقدار تجربی برای T و P جدید به وسیله رابطه $D \propto T^{1/75}/P$ تصحیح می‌شود.

۴- عدد اشمیت گازها: عدد اشمیت یک مخلوط گازی رقیق A در B بدون بعد است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \quad (۲-۴۶)$$

که در این جا μ ویسکوزیته مخلوط گازی است که برای یک مخلوط رقیق، ویسکوزیته B بر حسب Pa.s یا $kg/m.s$ می‌باشد. D_{AB} ضریب نفوذ بر حسب m^2/s و ρ دانسیته مخلوط بر حسب kg/m^3 است. برای یک گاز، عدد اشمیت در محدوده‌های متوسط از دما و تا فشار حدود 10 atm یا 10^5 Pa مستقل از

فشار فرض می‌شود.

عدد اشمیت نسبت بدون بعد ضریب نفوذ مولکولی ممتوم μ/ρ به ضریب نفوذ مولکولی جرم D_{AB} می‌باشد. مقادیر عدد اشمیت گازها در محدوده 0.5 تا 2 است. عدد اشمیت مایعات ویسکوز از حدود 100 تا بالاتر از 10000 است.

مثال ۶-۲-۵ تخمین ضریب نفوذ یک مخلوط گازی

نرمال بوتانول (A) به داخل هوا (B) در فشار مطلق یک اتمسفر نفوذ می‌کند. با استفاده از روش Fuller et al. ضریب نفوذ D_{AB} را برای دماهای زیر تخمین بزنید و با مقدار تجربی مقایسه کنید.

الف) برای 0°C

ب) برای $25/9^\circ\text{C}$

پ) برای 0°C و فشار مطلق 2 atm

حل: برای قسمت (الف) $T = 273\text{ K}$ ، $P = 1\text{ atm}$ و $M_A(\text{بوتانول}) = 74/1$ و $M_B(\text{هوا}) = 29$. از جدول ۶-۲-۲،

$$\sum v_A = 4 \times 16/5 + 10 \times 1/98 + 1 \times 5/48 = 91/28 \text{ (بوتانول)}$$

$$\sum v_B = 20/1 \text{ (هوا)}$$

با جایگزینی در معادله (۶-۲-۴۵)،

$$D_{AB} = \frac{1 \times 10^{-7} \times 273^{1/75} \times (1/74 + 1/29)^{1/5}}{1 \times [(91/28)^{1/33} + (20/1)^{1/33}]^2}$$

$$= 7/73 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

این مقدار 10% نسبت به مقدار تجربی $7/03 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ که از جدول ۶-۲-۱ به دست آمده است انحراف دارد.

برای قسمت (ب)، $T = 273 + 25/9 = 298/9$ ، با جایگزینی در معادله (۶-۲-۴۵)، $7/03 \text{ m}^2/\text{s}$ ، این مقدار 4% نسبت به مقدار تجربی $8/70 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ انحراف دارد. برای قسمت (پ)، فشار کل $P = 2\text{ atm}$. با استفاده از مقدار پیش‌بینی شده در قسمت (الف) و تصحیح فشار داریم،

$$D_{AB} = 7/73 \times 10^{-6} \times \frac{1}{2} = 3/865 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

۶-۳ نفوذ مولکولی در مایعات

۶-۳A مقدمه

نفوذ حل شونده‌ها در مایعات در بسیاری از فرآیندهای صنعتی مهم است، خصوصاً در فرآیندهای جداسازی مانند استخراج مایع-مایع یا استخراج با حلال، جذب گاز و تقطیر. همچنین نفوذ در مایعات در بسیاری اوقات در طبیعت اتفاق می‌افتد، مانند حل شدن اکسیژن هوا در آب رودخانه‌ها و دریاچه‌ها و نفوذ نمکها در خون.

واضح است که نرخ نفوذ مولکولی در مایعات خیلی کمتر از گازهاست. مولکولها در مایع خیلی بهم نزدیک هستند. بنابراین مولکولهای نفوذکننده حل شونده A با مولکولهای مایع B برخورد بیشتری خواهند داشت و نفوذ نسبت به گاز آهسته‌تر خواهد بود. معمولاً ضرایب نفوذ در یک گاز 10^5 برابر بزرگتر از ضریب نفوذ در مایع است. اما شار نفوذ در گاز خیلی بزرگتر نیست، فقط حدود 10^6 برابر سریعتر است، زیرا غلظتها در مایعات به مراتب بزرگتر از گازها هستند.

۶-۳B معادلات مربوط به نفوذ در مایعات

چون مولکولها در مایع در مقایسه با گاز خیلی بهم نزدیکتر هستند، دانسیته و مقاومت در مقابل نفوذ در مایعات خیلی بزرگتر است. هم چنین به دلیل نزدیکی مولکولها، نیروهای جاذبه بین مولکولها نقش مهمی در نفوذ بازی می‌کنند. چون تئوری جنبشی مایعات توسعه چندانی پیدا نکرده است، بنابراین معادلات مربوط به نفوذ در مایعات را مشابه با معادلات گازها می‌نویسیم. اختلاف مهم نفوذ در مایعات با گازها در این است که ضرایب نفوذ مایعات غالباً وابسته به غلظت اجزاء نفوذکننده هستند.

۱- نفوذ متقابل و هم مولار: با شروع از معادله عمومی (۶-۲-۱۴)، برای حالت نفوذ متقابل و با مولهای مساوی که $N_A = -N_B$ می‌توانیم معادله‌ای مشابه معادله (۶-۱-۱۱) به دست آوریم.

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} = \frac{D_{AB}c_{av}(x_{A1} - x_{A2})}{z_2 - z_1} \quad (6-3-1)$$

که N_A شار A بر حسب kg mol A/s.m^2 ، D_{AB} ضریب نفوذ A در B بر حسب m^2/s ، c_{A1} غلظت A بر حسب kg mol A/m^3 در نقطه ۱، x_A جزء مولی A در نقطه ۱ و c_{av} که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$c_{av} = \left(\frac{\rho}{M} \right)_{av} = \left(\frac{\rho_1}{M_1} + \frac{\rho_2}{M_2} \right) / 2 \quad (6-3-2)$$

در این رابطه c_{av} غلظت میانگین کل A+B بر حسب kg mol/m^3 و M_1 وزن مولکولی میانگین محلول در

نقطه ۱ بر حسب kg/kg mol و ρ_1 دانسیته میانگین محلول بر حسب kg/m^3 در نقطه ۱ است. معادله (۶-۳-۱) مقدار میانگین D_{AB} و مقدار میانگین c را به کار می‌برد که هر دو ممکن است با غلظت تغییر کنند. معمولاً در معادله (۶-۳-۲) از مقدار میانگین خطی c استفاده می‌شود. حالت نفوذ متقابل هم مولار در معادله (۶-۳-۱) در مایعات بسیار کم اتفاق می‌افتد.

۲- نفوذ A در ماده غیر نفوذی B. مهمترین حالت نفوذ در مایعات حالتی است که حل‌شونده A در حال نفوذ در حلال ساکن یا غیر نفوذی B است. مثالی از این دست محلول رقیق پروپیونیک اسید (A) در آب (B) است که در تماس با تولوئن باشد. فقط پروپیونیک اسید (A) از طریق فاز آب تا مرز نفوذ می‌کند و سپس وارد فاز تولوئن می‌شود. فصل مشترک آب و تولوئن مرزی برای نفوذ B است و $N_B = 0$. چنین حالت‌هایی اغلب در صنعت اتفاق می‌افتد (T2). اگر معادله (۶-۲-۲۲) مجدداً بر حسب غلظت بازنویسی شود و جایگزینی‌هایی به صورت $c_{av} = P/RT$ ، $c_{A1} = P_{A1}/RT$ و $x_{BM} = PBM/P$ انجام شود، معادله‌ای برای مایعات در حالت پایدار به دست می‌آید.

$$N_A = \frac{D_{AB} c_{av}}{(z_2 - z_1) x_{BM}} (x_{A1} - x_{A2}) \quad (6-3-3)$$

که در آن،

$$x_{BM} = \frac{x_{B2} - x_{B1}}{\ln(x_{B2}/x_{B1})} \quad (6-3-4)$$

توجه کنید که $x_{A1} + x_{B1} = x_{A2} + x_{B2} = 1$ برای محلول‌های رقیق x_{BM} نزدیک به یک است و c ثابت است. بنابراین معادله (۶-۳-۳) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \quad (6-3-5)$$

مثال ۶-۳-۱ نفوذ متقابل اتانول (A) در آب (B)

یک محلول اتانول (A) - آب (B) به شکل یک فیلم ساکن به ضخامت 2 mm در 293 K در تماس با سطح یک حلال آلی است که اتانول در آن قابل حل و آب غیر قابل حل است. بنابراین $N_B = 0$. در نقطه ۱ غلظت اتانول $16/8\%$ وزنی و دانسیته محلول $972/8 \text{ kg/m}^3$ و ρ_1 و در نقطه ۲ غلظت اتانول $6/8\%$ وزنی و $\rho_2 = 988/1 \text{ kg/m}^3$ است (P1). ضریب نفوذ اتانول $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ است (T2). شار N_A را در حالت پایدار محاسبه کنید.

حل: ضریب نفوذ $D_{AB} = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ است. جرم مولکولی A و B به ترتیب $M_A = 46/05$

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

و $M_B = 18/0.2$ است. برای درصد وزنی $6/8$ ، جزء مولی اتانول (A) به ازای 100 kg از محلول به صورت زیر است.

$$x_{A2} = \frac{6/8 / 46/0.5}{6/8 / 46/0.5 + 93/2 / 18/0.2} = \frac{0/1477}{0/1477 + 5/17} = 0/0277$$

پس $x_{B2} = 0/9723$ با محاسبه x_{A1} به روش مشابه، $x_{A1} = 0/0732$ و $x_{B1} = 0/9268$ برای محاسبه وزن مولکولی M_2 در نقطه ۲،

$$M_2 = \frac{100 \text{ kg}}{(0/1477 + 5/17) \text{ kgmol}} = 18/75 \text{ kg/kgmol}$$

به طور مشابه، $M_1 = 20/0.7$ از معادله (۲-۳-۶)

$$c_{av} = \frac{\rho_1/M_1 + \rho_2/M_2}{2} = \frac{972/8 / 20/0.7 + 988/1 / 18/75}{2} = 50/6 \text{ kgmol/m}^3$$

برای محاسبه x_{BM} از معادله (۴-۳-۶) می توانیم از میانگین خطی استفاده کنیم، چون x_{B1} و x_{B2} نزدیک به هم هستند،

$$x_{BM} = \frac{x_{B1} + x_{B2}}{2} = \frac{0/9268 + 0/9723}{2} = 0/949$$

با جایگزینی در معادله (۳-۳-۶) و حل آن،

$$N_A = \frac{D_{AB} c_{av}}{(z_2 - z_1) x_{BM}} (x_{A1} - x_{A2}) = \frac{(0/74 \times 10^{-9}) \times 50/6 \times (0/0732 - 0/0277)}{0/002 \times 0/949} \\ = 8/99 \times 10^{-7} \text{ kgmol/s.m}^2$$

۶-۳C ضرایب نفوذ مایعات

۱- تعیین تجربی ضرایب نفوذ: چند روش مختلف برای تعیین تجربی ضرایب نفوذ مایعات وجود دارد. در یک روش، در یک لوله موئین بلند، نفوذ ناپایدار انجام می شود و از توزیع غلظت ضریب نفوذ تعیین می شود. اگر حل شونده A در B نفوذ کند، ضریب نفوذ تعیین شده D_{AB} خواهد بود. همچنین مقدار ضریب نفوذ اغلب وابستگی زیادی به غلظت حل شونده نفوذی A دارد. برخلاف گازها، در مایعات ضریب نفوذ D_{AB} با D_{BA} مساوی نیست.

در یک روش معمولتر یک محلول نسبتاً رقیق و یک محلول نسبتاً غلیظ در دو محفظه در

دو طرف یک غشاء ساخته شده از شیشه متخلخل مطابق شکل ۶-۳-۱ قرار می‌گیرد. نفوذ مولکولی از منافذ باریک غشاء اتفاق می‌افتد در حالیکه هر دو محلول هم زده می‌شوند. طول مؤثر نفوذ $K_1 \delta$ است که $K_1 > 1$ یک ثابت است و طول مسیر نفوذ را که واقعاً بیشتر از δ cm است تصحیح می‌کند. در این روش، که توسط Geankoplis و Bidstrup بحث شده است، طول مؤثر نفوذ توسط مدرج کردن با یک حل‌شونده مانند KCl که ضریب نفوذ معلومی دارد انجام می‌شود (B4).

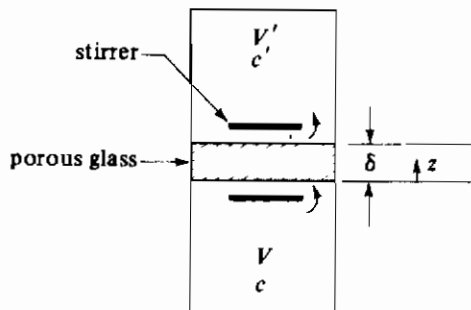
برای به دست آوردن معادله، فرض می‌شود نفوذ در غشاء، شبه پایدار^(۱) باشد،

$$N_A = \varepsilon D_{AB} \frac{c - c'}{K_1 \delta} \quad (6-3-6)$$

که c غلظت در محفظه پایینی در زمان t ، c' غلظت در محفظه بالایی و ε جری از سطح شیشه که برای نفوذ باز است، می‌باشد. با انجام یک موازنه روی حل‌شونده A در محفظه بالایی که در آنجا نرخ ورودی مساوی با مجموع نرخ خروجی و نرخ تجمع است، و همچنین موازنه مشابهی روی محفظه پایینی و با استفاده از $V = V'$ ، ترکیب و انتگرال‌گیری، معادله نهایی به صورت زیر خواهد بود.

$$\ln \frac{c_0 - c'_0}{c - c'} = \frac{2\varepsilon A}{K_1 \delta V} D_{AB} t \quad (6-3-7)$$

که $2\varepsilon A / K_1 \delta V$ ثابت دستگاه است که با استفاده از یک حل‌شونده با ضریب نفوذ معلوم مانند KCl به دست می‌آید. مقادیر c ، c' ، غلظتهای اولیه و c و c' غلظتهای نهایی هستند.



شکل ۶-۳-۱ سلول نفوذ برای تعیین ضریب نفوذ در یک مایع

۲- داده‌های تجربی ضریب نفوذ مایعات: داده‌های تجربی ضریب نفوذ مایعات برای مخلوطهای دوتایی در فاز مایع در جدول ۱-۳-۶ داده شده است. همه داده‌ها برای محلولهای رقیق هستند که حل‌شونده در حلال نفوذ می‌کند. در مایعات ضرایب نفوذ غالباً تغییر قابل ملاحظه‌ای با غلظت دارند. بنابراین مقادیر مندرج در جدول ۱-۳-۶ در خارج از محدوده رقیق بایستی با احتیاط استفاده شود. اطلاعات اضافی در مرجع (P1) داده شده است. مقادیر مربوط به حل‌شونده‌های بیولوژیکی در محلول در بخش بعد آورده شده است. همچنانکه در جدول دیده می‌شود، ضرایب نفوذ کوچک هستند و برای مایعات غیر ویسکوز در محدوده $10^{-9} \times 0.5$ تا $10^{-9} \times 5$ m^2/s می‌باشند. ضرایب نفوذ در گازها 10^4 تا 10^5 برابر بزرگتر هستند.

جدول ۱-۳-۶ ضریب نفوذ محلولهای مایع رقیق

Solute	Solvent	Temperature		Diffusivity [[m^2/s] 10^9 or $[cm^2/s]10^3$]	Ref.
		$^{\circ}C$	K		
NH ₃	Water	12	285	1.64	(N2)
		15	288	1.77	
O ₂	Water	18	291	1.98	(N2)
		25	298	2.41	(V1)
CO ₂	Water	25	298	2.00	(V1)
H ₂	Water	25	298	4.8	(V1)
Methyl alcohol	Water	15	288	1.26	(J1)
Ethyl alcohol	Water	10	283	0.84	(J1)
		25	298	1.24	(J1)
n-Propyl alcohol	Water	15	288	0.87	(J1)
Formic acid	Water	25	298	1.52	(B4)
Acetic acid	Water	9.7	282.7	0.769	(B4)
		25	298	1.26	(B4)
Propionic acid	Water	25	298	1.01	(B4)
HCl (9 g mol/liter) (2.5 g mol/liter)	Water	10	283	3.3	(N2)
		10	283	2.5	(N2)
Benzoic acid	Water	25	298	1.21	(C4)
Acetone	Water	25	298	1.28	(A2)
Acetic acid	Benzene	25	298	2.09	(C5)
Urea	Ethanol	12	285	0.54	(N2)
Water	Ethanol	25	298	1.13	(H4)
KCl	Water	25	298	1.870	(P2)
KCl	Ethylene glycol	25	298	0.119	(P2)

۶-۳D پیش‌بینی ضرایب نفوذ مایعات

معادلات مربوط به پیش‌بینی ضرایب نفوذ حل‌شونده‌های رقیق در مایعات لزوماً نیمه تجربی هستند، چون تئوری نفوذ مایعات توسعه چندانی پیدا نکرده است. معادله Stokes - Einstein یکی از اولین تئوری‌هاست که برای یک مولکول کروی خیلی بزرگ (A) که در یک حلال مایع (B) با مولکولهای کوچک نفوذ می‌کند به‌دست آمد. قانون استوکس برای تشریح نیروی کشش روی مولکول متحرک حل‌شونده به‌کار برده شد. سپس معادله با فرض این‌که همهٔ مولکولها مشابهند و در محلهای مکعبی شکل جا گرفته‌اند و با بیان شعاع مولکولی بر حسب حجم مولی (W5) اصلاح شد.

$$D_{AB} = \frac{9.96 \times 10^{-16} T}{\mu V_A^{1/3}} \quad (6-3-8)$$

که در این رابطه D_{AB} ضریب نفوذ بر حسب m^2/s ، T دما بر حسب کلوین، μ ویسکوزیتهٔ محلول بر حسب Pa.s یا $\text{kg}/\text{m.s}$ و V_A حجم مولی حل‌شونده در نقطهٔ جوش نرمال آن بر حسب $\text{m}^3/\text{kg mol}$ است. این معادله برای مولکولهای بزرگ غیر هیدراته و کروی شکل حل‌شونده با وزن مولکولی حدود ۱۰۰۰ یا بزرگتر (R1) یا جایی که V_A بزرگتر از حدود $0.5 \text{ m}^3/\text{kg mol}$ در محلولهای آبی باشد، بخوبی قابل استفاده است.

برای حل‌شونده‌های با حجم مولی کمتر معادله (6-3-8) صدق نمی‌کند. چند رابطهٔ تئوری دیگر مورد بررسی قرار گرفته است اما هیچ‌کدام ضرایب نفوذ را به خوبی پیش‌بینی نمی‌کنند. بنابراین چند رابطهٔ نیمه تئوری توسعه داده شده است (R1). رابطهٔ Wilke-Chang برای حالات عمومی که حل‌شونده (A) در حلال رقیق (B) است مورد استفاده قرار می‌گیرد (W5, T3).

$$D_{AB} = 1.173 \times 10^{-16} (\varphi M_B)^{1/2} \frac{T}{\mu_B V_A^{0.6}} \quad (6-3-9)$$

در این رابطه M_B جرم مولکولی حلال B، μ_B ویسکوزیتهٔ B بر حسب Pa.s یا $\text{kg}/\text{m.s}$ ، V_A حجم مولی حل‌شونده در نقطهٔ جوش (L2) که از جدول ۶-۳-۲ به‌دست می‌آید و φ پارامتر مربوط به پیوند هیدروژنی در حلال است که برای آب ۲/۶، برای متانول ۱/۵، برای بنزن ۱، برای هپتان ۱ و برای حلالهایی که پیوند هیدروژنی ندارند برابر با ۱ است. هنگامی که مقادیر V_A بالاتر از $0.5 \text{ m}^3/\text{kg mol}$ است از معادله (6-3-8) باید استفاده شود.

هنگامی که حل‌شونده آب است، اعداد به‌دست‌آمده از معادله (6-3-9) باید در ضریب $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ضرب شود (R1). معادله (6-3-9) ضرایب نفوذ را با انحراف ۱۰٪ تا ۱۵٪ برای محلولهای آبی و حدود

۲۵٪ برای محلولهای غیرآبی، پیش‌بینی می‌کند. معادله در خارج از محدوده ۲۷۸ تا ۳۱۳K باید با احتیاط بیشتری استفاده شود. معادله‌ای توسط Reddy و Doraiswamy برای آب به عنوان ماده حل‌شونده نفوذی پیشنهاد شده است (R2). روابط موجود را برای سیستمهای دوتایی جمع‌آوری کرده‌است (G2). Geankoplis پس از بحث، رابطه‌ای برای پیش‌بینی نفوذ در سیستم سه‌تایی می‌دهد (G2)، که در آن جا حل‌شونده رقیق A در مخلوطی از B و C به عنوان حلال نفوذ می‌کند. این حالت غالباً در فرایندهای صنعتی مشاهده می‌شود.

جدول ۲-۳-۶. حجمهای مولی و اتمی در نقطه جوش نرمال

Material	Atomic Volume (m ³ /kg mol) 10 ³	Material	Atomic Volume (m ³ /kg mol) 10 ³
C	14.8	Ring, 3-membered	- 6
H	3.7	as in ethylene	
O (except as below)	7.4	oxide	
Doubly bound as	7.4	4-membered	- 8.5
carbonyl		5-membered	- 11.5
Coupled to two		6-membered	- 15
other elements		Naphthalene ring	- 30
In aldehydes, ketones	7.4	Anthracene ring	- 47.5
In methyl esters	9.1		
In methyl ethers	9.9		
In ethyl esters	9.9		
In ethyl ethers	9.9		
In higher esters	11.0		
In higher ethers	11.0		
In acids (—OH)	12.0		
Joined to S, P, N	8.3		
N			
Doubly bonded	15.6	Air	29.9
In primary amines	10.5	O ₂	25.6
In secondary amines	12.0	N ₂	31.2
Br	27.0	Br ₂	53.2
Cl in RCHClR'	24.6	Cl ₂	48.4
Cl in RCl (terminal)	21.6	CO	30.7
F	8.7	CO ₂	34.0
I	37.0	H ₂	14.3
S	25.6	H ₂ O	18.8
P	27.0	H ₂ S	32.9
		NH ₃	25.8
		NO	23.6
		N ₂ O	36.4
		SO ₂	44.8

Source: G. Le Bas, *The Molecular Volumes of Liquid Chemical Compounds*. New York: David McKay Co., Inc., 1915.

مثال ۲-۳-۶ پیش‌بینی ضریب نفوذ مایع

ضریب نفوذ استون (CH_3COCH_3) در آب 25°C و 50°C را با استفاده از معادله Wilke-Chang پیش‌بینی کنید. مقدار تجربی آن $1/28 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ در 25°C است.

حل: از ضمیمه A.2 ویسکوزیته آب در 25°C برابر $\mu_B = 0.8937 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ و در 50°C برابر با $\mu_B = 0.5494 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ است. از جدول ۲-۳-۶ برای CH_3COCH_3 با ۳ اتم کربن، ۶ اتم هیدروژن و ۱ اتم اکسیژن،

$$V_A = 3 \times 0.0148 + 6 \times 0.0037 + 1 \times 0.0074 = 0.074 \text{ m}^3/\text{kgmol}$$

برای آب در 25°C یا 298 K پارامتر مربوط به پیوند هیدروژنی $\phi = 2/6$ است و همچنین $M_B = 18/0.2$ با جایگزینی این مقادیر در معادله (۹-۳-۶)

$$D_{AB} = \frac{(1/173 \times 10^{-16}) (\phi M_B)^{1/5} T}{\mu_B V_A^{1/3}}$$

$$= \frac{(1/173 \times 10^{-16}) \times (2/6 \times 18/0.2)^{1/5} \times 298}{(0.8937 \times 10^{-3}) \times 0.074^{1/3}}$$

$$= 1/277 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

برای 50°C یا $T = 323 \text{ K}$

$$D_{AB} = \frac{(1/173 \times 10^{-16}) \times (2/6 \times 18/0.2)^{1/5} \times 323}{(0.5494 \times 10^{-3}) \times 0.074^{1/3}}$$

$$= 2/251 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

محلولهای الکترولیت مانند KCl به کاتیونها و آنیونها تجزیه می‌شوند و با سرعت بیشتری نسبت به مولکول تجزیه نشده نفوذ می‌کنند، زیرا کوچکتر هستند. ضرایب نفوذ را می‌توان با استفاده از ضریب هدایت یونی در رقت بینهایت در آب به دست آورد. معادلات و اطلاعات مربوط در مراجع داده شده‌اند (S_5, T_2). یونهای دارای بار مثبت و منفی با نرخ یکسانی نفوذ می‌کنند به طوری که سیستم همیشه از نظر الکتریکی خنثی است.

۶-۴ نفوذ مولکولی در محلولهای بیولوژیکی و ژلها

۶-۴A نفوذ حل‌شونده‌های بیولوژیکی در مایعات

۱- مقدمه: نفوذ مولکولهای کوچک و حل‌شونده و خصوصاً ماکرومولکولها (مثلاً پروتئینها) در محلولهای آبی در آماده‌سازی سیستمهای بیولوژیکی و در فرآیندهای زیستی میکروارگانیسمها، حیوانات و گیاهان از اهمیت زیادی برخوردارند. فرآیندهای غذایی محدودۀ مهمی است که نفوذ در آن نقش مهمی بازی می‌کند. آب و غالباً بوهای فرّار یا ترکیبات معطر هنگام خشک‌کردن محلولهای مایع مانند آب میوه، قهوه و چای حذف می‌شوند. این ترکیبات در طول فرآیند تبخیر از طریق مایع نفوذ می‌کنند. در فرآیندهای تخمیر، مواد غذایی، مواد قندی، اکسیژن و مانند آن به داخل میکروارگانیسمها نفوذ می‌کنند و محصولات پساب و آنزیمها به خارج نفوذ می‌کنند. در کلیۀ مصنوعی، محصولات پساب از طریق خون نفوذ کرده وارد یک غشاء می‌شوند و سپس از طریق غشاء وارد یک محلول آبی می‌شوند. ماکرومولکولهای موجود در محلول دارای وزنهاى مولکولی چند ده هزار و یا بیشتر می‌باشند و غالباً به آنها کلوئید اطلاق می‌شود. اما اکنون می‌دانیم که آنها معمولاً محلولهای واقعی تشکیل می‌دهند. رفتار نفوذی ماکرومولکولهای پروتئین در محلول تحت تأثیر اندازه بزرگ و شکل آنهاست، که به صورتهای مختلف از جمله مارپیچهای اتفاقی، میله‌ای یا کروی شکل و مدور هستند. همچنین نیروهای بین مولکولی در مولکولهای بزرگ با مولکولهای حلال یا حل‌شونده کوچک روی نفوذ ماکرومولکولها و مولکولهای کوچک تأثیر می‌گذارند.

علاوه بر نفوذ براساس قانون فیک که در این جا بحث شد، در سیستمهای بیولوژیکی انتقال غیر مستقیم نیز اتفاق می‌افتد که در آن نیروهای بین مولکولی شیمیایی نیز وجود دارند. این نوع انتقال در این جا بحث نخواهد شد.

۲- برهم کنش^(۱) و پیوند^(۲) در نفوذ: ماکرومولکولهای پروتئین در مقایسه با مولکولهای کوچک حل‌شونده مانند اوره، KCl و کاپریلات سدیم خیلی بزرگ هستند و غالباً محللهایی برای ایجاد برهم کنش و یا ایجاد پیوند یا مولکولهای حل‌شونده دارند. مثالی از این حالت، اتصال مولکولهای اکسیژن به هموگلوبین در خون است. پروتئین تأمین شده از آلبومین^(۳) انسان بیشتر اسیدهای چرب در خون را به خود متصل کرده و حلالیت ظاهری آنها را افزایش می‌دهد. پروتئین ناشی از آلبومین گاوی که در شیر یافت می‌شود، هنگامی که غلظت آلبومین 30 kg/m^3 و غلظت سدیم کاپریلات، 0.5 مول بر لیتر باشد به ازای هر مول آلبومین ۲۳ مول سدیم کاپریلات را به خود جذب می‌کند. بنابراین نفوذ ماکرومولکولها براساس

1. interaction

2. binding

3. albumin

مدل فیک و نفوذ مولکولهای حل شونده عمدتاً تحت تأثیر هر دو نوع مولکول حتی در محلولهای رقیق، است.

۳- روشهای تجربی برای تعیین ضریب نفوذ: روشهای تعیین ضریب نفوذ حل شونده‌های بیولوژیکی مشابه با روشهای بحث شده قبل در بخش ۳-۶ البته با کمی اصلاحات می‌باشد. محفظه سلول در نفوذ دیافراگمی نشان داده شده در شکل ۱-۳-۶، به جای شیشه از لوسیت^(۱) یا تفلون ساخته شده است، چون مولکولهای پروتئین به شیشه می‌چسبند. همچنین، غشاء متخلخلی که از طریق آن نفوذ مولکولی انجام می‌شود از استات سلولز یا پلیمرهای دیگر ساخته شده است (K1, G6, G5).

۴- داده‌های تجربی حل شونده‌های بیولوژیکی: اغلب داده‌های موجود در مورد ضریب نفوذ پروتئین از برون یابی در غلظت صفر به دست آمده است چون ضریب نفوذ غالباً تابعی از غلظت است. جدول ۱-۴-۶ ضرایب نفوذ تعدادی از پروتئینها و حل شونده‌های کوچک را که در سیستمهای بیولوژیکی یافت می‌شود، نشان می‌دهد.

جدول ۱-۴-۶. ضریب نفوذ حل شونده‌های رقیق بیولوژیکی در محلولهای آبی

Solute	Temperature		Diffusivity (m ² /s)	Molecular Weight	Ref.
	°C	K			
Urea	20	293	1.20×10^{-9}	60.1	(N2)
	25	298	1.378×10^{-9}		(G5)
Glycerol	20	293	0.825×10^{-9}	92.1	(G3)
Glycine	25	298	1.055×10^{-9}	75.1	(L3)
Sodium caprylate	25	298	8.78×10^{-10}	166.2	(G6)
Bovine serum albumin	25	298	6.81×10^{-11}	67 500	(C6)
Urease	25	298	4.01×10^{-11}	482 700	(C7)
	20	293	3.46×10^{-11}		(S6)
Soybean protein	20	293	2.91×10^{-11}	361 800	(S6)
Lipoxidase	20	293	5.59×10^{-11}	97 440	(S6)
Fibrinogen, human	20	293	1.98×10^{-11}	339 700	(S6)
Human serum albumin	20	293	5.93×10^{-11}	72 300	(S6)
γ -Globulin, human	20	293	4.00×10^{-11}	153 100	(S6)
Creatinine	37	310	1.08×10^{-9}	113.1	(C8)
Sucrose	37	310	0.697×10^{-9}	342.3	(C8)
	20	293	0.460×10^{-9}		(P3)

بزرگی ضرایب نفوذ مولکولهای بزرگ پروتئین معمولاً حدود $10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$ هستند درحالی که بزرگی این ضرایب برای مولکولهای کوچک حدود $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ است (جدول ۱-۴-۶). این بدین معناست که نرخ نفوذ ماکرومولکولها حدوداً ۲۰ برابر کمتر از مولکولهای کوچک با همان غلظت است. هنگامی که غلظت ماکرومولکولها مثلاً پروتئینها افزایش یابد، ضریب نفوذ قاعدتاً باید افزایش یابد، چون ضریب نفوذ مولکولهای کوچک حل شونده با افزایش غلظت کاهش می یابد. اما داده های تجربی (G4, C7) نشان می دهد که ضریب نفوذ ماکرومولکولها مثلاً پروتئینها، با افزایش غلظت پروتئین در برخی حالات کاهش و در برخی حالات افزایش می یابد. بارهای سطحی مولکولها نیز نقش مهمی را در این پدیده بازی می کنند.

هنگامی که حل شونده های کوچک مانند اوره، KCl و کاپریلات سدیم که غالباً همراه با ماکرومولکولهای پروتئین در محلول موجود هستند، در محلول پروتئین نفوذ می کنند، ضریب نفوذ با افزایش غلظت پلیمر کاهش می یابد (G3, N3, G6, G5, C7). داده های تجربی مربوط به ضریب نفوذ حل شونده کاپریلات سدیم (A) در حالیکه در محلول پروتئین ناشی از آلبومین گاوی (P) نفوذ می کند، نشان می دهد که ضریب نفوذ A در P (D_{AP}) به میزان قابل ملاحظه ای با افزایش غلظت پروتئین (P) کاهش می یابد (G5, G6). قسمت اعظم کاهش به دلیل اتصال A به P است به طوریکه مولکول A آزاد برای نفوذ خیلی کم باقی می ماند. بقیه کاهش به دلیل بلوکه شدن سیستم به وسیله مولکولهای بزرگ است.

۵- پیش بینی ضرایب نفوذ حل شونده های بیولوژیکی: برای پیش بینی ضریب نفوذ حل شونده های کوچک به تنهایی در محلولهای آبی با وزن مولکولی کمتر از حدود ۱۰۰۰ یا حجم مولی حل شونده کمتر از $5 \text{ m}^3/\text{kg mol}$ ، معادله (۹-۳-۶) باید مورد استفاده قرار گیرد. برای حل شونده های بزرگتر معادلات استفاده شده دقیق نیستند. معادله استوکس - انیشتین (معادله (۸-۳-۶)) به عنوان یک تقریب می تواند استفاده شود.

$$D_{AB} = \frac{9.96 \times 10^{-16} T}{\mu V_A^{1/3}} \quad (6-3-8)$$

احتمالاً معادله مناسبتر، معادله نیمه تجربی پالسون^(۱) (P3) است که برای وزن مولکولی بالاتر از ۱۰۰۰ توصیه می شود. شکل اصلاح شده این معادله برای در نظر گرفتن دماهای مختلف برای محلولهای آبی رقیق به صورت زیر است.

$$D_{AB} = \frac{9.40 \times 10^{-15} T}{\mu(M_A)^{1/3}} \quad (6-4-1)$$

که M_A وزن مولکولی مولکول بزرگ A است. هنگامی که شکل مولکولی انحراف زیادی از حالت کروی داشته باشد، در استفاده از معادله باید احتیاط کرد.

مثال ۶-۴-۱ پیش‌بینی ضریب نفوذ آلبومین

ضریب نفوذ آلبومین گاوی را در آب در 298 K به عنوان یک محلول رقیق با استفاده از معادله اصلاح شده پالسون پیش‌بینی کنید و با مقدار تجربی آن در جدول ۶-۴-۱ مقایسه کنید.
 حل: وزن مولکولی آلبومین گاوی (A) از جدول ۶-۴-۱، برابر با $M_A = 67500\text{ kg/mol}$ است. ویسکوزیته آب در 25°C برابر با $0.8937 \times 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ است و $T = 298\text{ K}$ با جایگزینی در معادله (۶-۴-۱)،

$$D_{AB} = \frac{9/4 \times 10^{-10} \times T}{\mu M_A^{0.733}} = \frac{9/4 \times 10^{-10} \times 298}{(0.8937 \times 10^{-3}) \times (67500)^{0.733}}$$

$$= 7.7 \times 10^{-11}\text{ m}^2/\text{s}$$

این مقدار ۱۱٪ بزرگتر از مقدار تجربی $6.81 \times 10^{-11}\text{ m}^2/\text{s}$ است.

۶- پیش‌بینی ضریب نفوذ حل‌شونده‌های کوچک در محلول پروتئین: هنگامی که یک حل‌شونده کوچک (A) در یک محلول ماکرومولکول پروتئین (P) نفوذ می‌کند، به دلیل مسدود شدن نفوذ توسط مولکولهای بزرگ، معادله (۶-۳-۹) برای پیش‌بینی حل‌شونده‌های کوچک به کار نمی‌رود. ضریب نفوذ حل‌شونده A در آب به تنهایی (D_{AB})، آب هیدراسیون پروتئین و یک ضریب انسداد، اطلاعات لازم برای پیش‌بینی این اثرات هستند. معادله نیمه تجربی که برای محاسبه تقریبی ضریب نفوذ حل‌شونده A در محلول پروتئین کروی شکل (DAP) به کار می‌رود به صورت زیر است. در این معادله فقط اثر مسدود شدن نفوذ در نظر گرفته شده است و اثر پیوند در آن به کار نرفته است،

$$D_{AP} = D_{AB}(1 - 1.81 \times 10^{-3}c_p) \quad (6-4-2)$$

در این جا $c_p = \text{kg P/m}^3$ است. پس معادله ضریب نفوذ به شکل زیر است،

$$N_A = \frac{D_{AP}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \quad (6-4-3)$$

که c_{A1} غلظت A بر حسب kg mol A/m^3 است.

۷- پیش‌بینی ضریب نفوذ با حضور پیوند: هنگامی که A در یک محلول پروتئین P وجود دارد و به P

متصل می‌شود، شار نفوذ A مساوی با شار حل‌شونده‌های متصل نشده در محلول به‌علاوه شار کمپلکس‌های پروتئین - حل‌شونده است. روش‌های پیش‌بینی این شار در حالتی که داده‌های مولکولهای متصل شده به‌طور تقریبی موجود هستند، در دسترس می‌باشد، (G6, G5). معادله مورد استفاده به‌صورت زیر است،

$$D_{AP} = \left[D_{AB}(1 - 1.81 \times 10^{-3} c_p) \left(\frac{\% \text{ free A}}{100} \right) + D_p \left(\frac{\% \text{ bound A}}{100} \right) \right] \quad (6-4-4)$$

در این جا D_p ضریب نفوذ پروتئین به تنهایی در محلول بر حسب m^2/s است و مولکولهای A مولکولهایی هستند که توسط پروتئین محصور نشده‌اند و این مقدار از ضریب تجربی اتصال تعیین می‌شود. بنابراین معادله (6-4-3) برای محاسبه شار استفاده می‌شود که در آن c_A غلظت کل A در محلول است.

۶-۴B نفوذ در ژلهای بیولوژیکی

ژلهای را می‌توان به‌عنوان مواد شبه جامدی در نظر گرفت که متخلخل هستند. آنها از ماکرومولکولهایی تشکیل می‌شوند که معمولاً در محلول به‌صورت رقیق بوده و درصد وزنی کمی آب محلول دارند. حفره‌ها یا فضاهای باز در ساختمان ژل با آب پر می‌شوند. شدت نفوذ حل‌شونده‌های کوچک در ژلهای تا حدی کمتر از محلولهای آبی است. اثر عمده ساختار ژل، افزایش طول مسیر نفوذ است، البته با این فرض که هیچگونه اثرات الکتریکی وجود نداشته باشد (S7).

مطالعات اخیر بر اساس مشاهدات دقیق با میکروسکوپ الکترونی نشان داده است که ماکرومولکولهای آگاروس (جانشین عمده آگار) به‌صورت رشته‌های طویل و نسبتاً مستقیم هستند. از این مشاهده می‌توان نتیجه گرفت که ساختمان ژل به‌صورت ماکرومولکولهای پلی ساکارید هستند که آزادانه در هم پیچیده شده‌اند و به‌طور وسیعی دارای پیوندهای هیدروژنی می‌باشند.

نمونه‌ای از ژلهای آگاروس، آگار و ژلاتین هستند. مقداری از پلیمرهای آلی نیز در انواع مختلف محلولها به‌صورت ژل هستند. برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ حل‌شونده‌ها در ژلهای ناپایدار استفاده می‌شود. در یک روش ژل ذوب شده به‌داخل یک لوله نازک که یک انتهای آن باز است ریخته می‌شود. پس از جامد شدن، لوله در یک حمام همزن دار حاوی حل‌شونده قرار داده می‌شود تا نفوذ کند. حل‌شونده در مرز ژل از محلول جدا شده و به‌داخل ژل نفوذ می‌کند. پس از گذشت زمان مشخص مقدار حل‌شونده نفوذ کرده در ژل اندازه‌گیری می‌شود تا بر اساس آن ضریب نفوذ حل‌شونده در ژل به‌دست آید.

جدول ۲-۴-۶ نمونه‌هایی از ضرایب نفوذ حل‌شونده‌ها در ژلهای رقیق بیولوژیکی در محلولهای آبی

Solute	Gel	Wt % Gel in Solution	Temperature		Diffusivity (m ² /s)	Ref.
			K	°C		
Sucrose	Gelatin	0	278	5	0.285×10^{-9}	(F2)
		3.8	278	5	0.209×10^{-9}	(F2)
		10.35	278	5	0.107×10^{-9}	(F2)
Urea	Gelatin	5.1	293	20	0.252×10^{-9}	(F3)
		0	278	5	0.880×10^{-9}	(F2)
		2.9	278	5	0.644×10^{-9}	(F2)
		5.1	278	5	0.609×10^{-9}	(F3)
		10.0	278	5	0.542×10^{-9}	(F2)
Methanol	Gelatin	5.1	293	20	0.859×10^{-9}	(F3)
		3.8	278	5	0.626×10^{-9}	(F3)
		Urea	Agar	1.05	278	5
3.16	278	5		0.591×10^{-9}	(F3)	
5.15	278	5		0.472×10^{-9}	(F3)	
Glycerin	Agar	2.06	278	5	0.297×10^{-9}	(F3)
		6.02	278	5	0.199×10^{-9}	(F3)
Dextrose	Agar	0.79	278	5	0.327×10^{-9}	(F3)
Sucrose	Agar	0.79	278	5	0.247×10^{-9}	(F3)
Ethanol	Agar	5.15	278	5	0.393×10^{-9}	(F3)
NaCl (0.05 M)	Agarose	0	298	25	1.511×10^{-9}	(S7)
		2	298	25	1.398×10^{-9}	(S7)

تعداد محدودی از ضرایب نفوذ حل‌شونده‌ها در ژلهای مختلف در جدول ۲-۴-۶ داده شده است. در مواردی ضریب نفوذ حل‌شونده در آب خالص نیز داده شده است تا کاهش ضریب نفوذ به دلیل حضور ژل کاملاً مشخص شود. به عنوان مثال، از جدول ۲-۴-۶ در ۲۷۸ K ضریب نفوذ اوره در آب $0.88 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ است. در حالی که در محلول ۲/۹٪ وزنی ژلاتین مقدار آن $0.64 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ است که یک کاهش ۲۷٪ را نشان می‌دهد.

در آگار و ژلاتین ضریب نفوذ یک حل‌شونده مشخص تقریباً به طور خطی با افزایش درصد وزنی ژل، کاهش می‌یابد. اما برون‌یابی به غلظت صفر ژل، عددی را می‌دهد که از مقدار داده شده برای آب خالص کمتر است. باید توجه کرد که در روشهای مختلف تهیه محلولهای ژل با نوع ژل یکسان ممکن است ضرایب نفوذ ۱۰٪ تا ۲۰٪ اختلاف داشته باشند.

مثال ۲-۴-۶ نفوذ اوره در آگار

پلی از محلول ژل به غلظت ۱/۵ درصد وزنی از آگار و به طول ۰/۴ m در ۲۷۸ K دو محلول

آبی اوره را به غلظتهای $0/2 \text{ gmol/lit}$ و 0 gmol/lit به یکدیگر وصل می‌کند. شار اوره را بر حسب kg mol/s.m^2 در حالت پایدار حساب کنید.

حل: از جدول ۲-۴-۶ برای حل‌شونده اوره در 278 K ، $D_{AB} = 0/727 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$. چون اوره از طریق محیط ساکن آب در ژل نفوذ می‌کند، معادله (۳-۳-۶) می‌تواند استفاده شود. اما چون مقدار x_{A1} کمتر از حدود $0/01$ است، بنابراین، محلول کاملاً رقیق بوده و $x_{BM} \cong 1$ است. پس، معادله (۵-۳-۶) می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. غلظتها به این صورت هستند، $c_{A2} = 0$ و $c_{A1} = \frac{0/2}{1000} = 0/0002 \text{ gmol/cm}^3 = 0/2 \text{ kgmol/m}^3$ (۵-۳-۶)،

$$N_A = \frac{D_{AB} (c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} = \frac{0/727 \times 10^{-9} \times (0/2 - 0)}{0/04 - 0}$$

$$= 3/63 \times 10^{-9} \text{ kgmol/s.m}^2$$

۶-۵ نفوذ مولکولی در جامدات

۶-۵A مقدمه و انواع نفوذ در جامدات

گرچه شدت نفوذ گازها، مایعات و جامدات در جامدات کمتر از شدت نفوذ در مایعات و گازهاست، اما انتقال جرم در جامدات در فرآیندهای شیمیایی و بیولوژیکی از اهمیت زیادی برخوردار است. نمونه‌هایی از این فرآیند، استخراج روغن سویا از دانه‌های آن، استخراج فلزات از سنگ معدن، خشک کردن الوار، نمک‌ها و مواد غذایی، نفوذ و واکنش کاتالیزوری در کاتالیزورهای جامد، جداسازی سیالات توسط غشاء، نفوذ گازها در لایه‌های نازک پلیمری در آکنه و آماده‌سازی فلزات در دمای بالا بوسیله گازها، می‌باشد.

به طور کلی نفوذ در جامدات را می‌توان به دو نوع تقسیم کرد: نوع اول نفوذی که بر اساس قانون فیک انجام می‌شود و به ساختار واقعی جامد بستگی ندارد. نوع دوم نفوذ در جامدات متخلخل که در آن ساختار واقعی جامد و تخلخل محیط مهم است. این دو نوع نفوذ را شرح می‌دهیم.

۶-۵B نفوذ در جامدات بر اساس قانون فیک

۱- به دست آوردن معادلات: این نوع نفوذ در جامدات بستگی به ساختار واقعی جامد ندارد. نفوذ هنگامی اتفاق می‌افتد که سیال یا حل‌شونده در حال نفوذ برای ایجاد یک محلول همگن یا غیر همگن در جامد حل شود. به عنوان مثال، در استخراج مایع از جامد که جامد حاوی مقدار زیادی آب است و یک

حل شونده در این محلول نفوذ می‌کند، یا نفوذ روی در مس، که در این مثالها با محلولهای جامد سروکار داریم. همچنین نفوذ نیتروژن یا هیدروژن در لاستیک، یا بعضاً نفوذ آب در مواد غذایی را می‌توان در این دسته‌بندی قرار داد، زیرا از معادلات مشابهی پیروی می‌کنند. عموماً، از معادلات ساده شده استفاده می‌شود. با استفاده از معادله عمومی (۶-۲-۱۴) برای نفوذ دو جزئی،

$$N_A = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} + \frac{c_A}{c} (N_A + N_B) \quad (6-2-14)$$

عبارت مربوط به جریان توده‌ای یعنی، $(c_A/c)(N_A + N_B)$ ، حتی اگر موجود باشد، معمولاً کوچک است، چون c_A/c یا x_A خیلی کوچک است. بنابراین از آن صرف‌نظر می‌شود. همچنین c برای نفوذ در جامدات ثابت فرض می‌شود.

$$N_A = - \frac{D_{AB} dc_A}{dz} \quad (6-5-1)$$

که D_{AB} ضریب نفوذ A در B بر حسب m^2/s بوده و معمولاً به صورت ثابتی مستقل از فشار برای جامدات فرض می‌شود. توجه کنید که در جامدات $D_{AB} \neq D_{BA}$.

با انتگرال‌گیری از معادله (۶-۵-۱) برای یک اسلب جامد در حالت پایدار خواهیم داشت،

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \quad (6-5-2)$$

برای نفوذ شعاعی از طریق دیواره یک استوانه به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 و طول L ،

$$\frac{\bar{N}_A}{2\pi r L} = - D_{AB} \frac{dc_A}{dr} \quad (6-5-3)$$

$$\bar{N}_A = D_{AB}(c_{A1} - c_{A2}) \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} \quad (6-5-4)$$

این حالت مشابه با انتقال حرارت هدایتی به طریق شعاعی است که در یک استوانه تو خالی مطابق شکل ۲-۳-۴ اتفاق می‌افتد.

به طوری که قبلاً گفته شد، ضریب نفوذ D_{AB} در جامد وابسته به فشار گاز یا مایع در خارج از جامد نیست. به عنوان مثال، اگر گاز CO_2 در خارج یک اسلب لاستیکی وجود داشته باشد و به داخل آن نفوذ کند، D_{AB} مستقل از P_A (فشار جزئی گاز CO_2 در سطح) است. به هر حال حلالیت CO_2 در یک جامد مستقیماً متناسب با P_A است. این حالت مشابه با حلالیت O_2 در آب است که بر اساس قانون

هنری^(۱) مستقیماً متناسب با فشار O_2 در هوا می‌باشد.

حلالیت حل‌شونده گازی (A) در یک جامد معمولاً با نماد S بر حسب متر مکعب حل‌شونده (در شرایط 0°C و 1 atm) در هر متر مکعب از جامد و در فشار جزئی یک اتمسفر از (A) بیان می‌شود. همچنین در سیستم cgs، $c_A = \text{cm}^3(\text{stp})/\text{atm}\cdot\text{cm}^3$. برای تبدیل این مقدار به غلظت c_A جامد بر حسب $\text{kgmol A}/\text{m}^3$ با استفاده از واحدهای SI،

$$c_A = \frac{S \text{ m}^3(\text{STP})/\text{m}^3 \text{ solid} \cdot \text{atm}}{22.414 \text{ m}^3(\text{STP})/\text{kg mol A}} p_A \text{ atm} = \frac{S p_A}{22.414} \frac{\text{kg mol A}}{\text{m}^3 \text{ solid}} \quad (6-5-5)$$

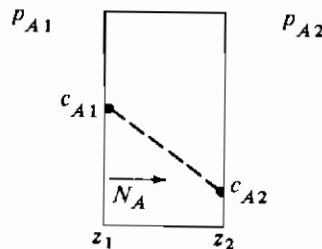
و با استفاده از واحدهای cgs،

$$c_A = \frac{S p_A}{22414} \frac{\text{g mol A}}{\text{cm}^3 \text{ solid}} \quad (6-5-6)$$

مثال ۶-۵-۱ نفوذ H_2 از میان غشاء نیوپرن

گاز هیدروژن در 17°C و فشار 0.1 atm از طریق یک غشاء ساخته شده از لاستیک نیوپرن پخته شده به ضخامت 5 mm نفوذ می‌کند. فشار H_2 در طرف دیگر نیوپرن صفر است. بنا فرض این‌که تنها مقاومت در مقابل نفوذ در غشاء باشد، شار را در حالت پایدار محاسبه کنید. حلالیت (S) گاز هیدروژن در نیوپرن در 17°C برابر با $0.51\text{ m}^3/\text{atm}$ (در شرایط 0°C و 1 atm) در هر متر مکعب جامد است و ضریب نفوذ D_{AB} برابر $10^{-10}\text{ m}^2/\text{s}$ در 17°C می‌باشد. حل: نمودار غلظت در شکل (۶-۵-۱) نشان داده شده است. غلظت تعادلی c_{A1} در داخل سطح لاستیک از معادله (۶-۵-۵) برابر است با،

$$c_{A1} = \frac{S}{22/414} p_{A1} = \frac{0.51 \times 0.1}{22/414} = 2/28 \times 10^{-5} \text{ kgmol } H_2/\text{m}^3 \text{ جامد}$$



شکل ۶-۵-۱ غلظتها در مثال ۶-۵-۱

چون p_{A2} در طرف دیگر صفر است، بنابراین، $c_{A2} = 0$ با جایگزینی در معادله (۶-۵-۲) و حل آن،

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} = \frac{1/0.3 \times 10^{-10} \times (2/28 \times 10^{-5} - 0)}{(0/5 - 0)/1000}$$

$$= 4/69 \times 10^{-12} \text{ kgmol H}_2/\text{s.m}^2$$

۲- معادلات نفوذپذیری^(۱) برای نفوذ در جامدات: در بسیاری از حالات داده‌های تجربی برای نفوذ گازها در جامدات به صورت ضرایب نفوذ و حلالیت داده نشده‌اند بلکه به صورت ضرایب نفوذپذیری P_M بر حسب متر مکعب گاز حل‌شونده A در شرایط STP (0°C و 1 atm) در واحد زمان و در واحد سطح مقطع در حال نفوذ در یک جامد به ضخامت یک متر تحت اختلاف فشار 1 atm داده شده است. این مسأله به صورت زیر با قانون فیک در ارتباط است.

$$N_A = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \quad (6-5-2)$$

از معادله (۶-۵-۵) نتیجه می‌شود،

$$c_{A1} = \frac{Sp_{A1}}{22.414} \quad c_{A2} = \frac{Sp_{A2}}{22.414} \quad (6-5-7)$$

با جایگزینی معادله (۶-۵-۷) در (۶-۵-۲) داریم،

$$N_A = \frac{D_{AB}S(p_{A1} - p_{A2})}{22.414(z_2 - z_1)} = \frac{P_M(p_{A1} - p_{A2})}{22.414(z_2 - z_1)} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2 \quad (6-5-8)$$

که در این جا نفوذپذیری P_M به صورت زیر است،

$$P_M = D_{AB}S \frac{\text{m}^3(\text{STP})}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C.S.} \cdot \text{atm/m}} \quad (6-5-9)$$

نفوذپذیری در مراجع به صورتهای دیگری نیز داده شده است. در سیستم cgs نفوذپذیری به صورت P'_M با واحد $\text{cc}(\text{STP})/(\text{s.cm}^2 \cdot \text{C.S.atm/cm})$ داده شده است، که با P_M به صورت زیر ارتباط دارد،

$$P_M = 10^{-4} P'_M \quad (6-5-10)$$

در برخی از مواقع نفوذپذیری در مراجع به صورت P''_M بر حسب $\text{cc}(\text{STP})/(\text{s.cm}^2 \cdot \text{C.S.cmHg/mm})$ داده شده است، که رابطه‌ای به این صورت با P_M دارد،

$$P_M = 7.60 \times 10^{-4} P''_M \quad (6-5-11)$$

هنگامی که چند جامد ۱ و ۲ و ۳ و ... پشت سر هم با ضخامتهای L_1 و L_2 و ... داشته باشیم معادله (۶-۵-۸) به صورت زیر در می آید،

$$N_A = \frac{P_{A1} - P_{A2}}{22.414 \left(\frac{L_1}{P_{M1}} + \frac{L_2}{P_{M2}} + \dots \right)} \quad (6-5-12)$$

که $P_{A1} - P_{A2}$ اختلاف فشارهای جزئی می باشد.

۳- ضرایب تجربی نفوذ، حلالیت و نفوذپذیری: پیش بینی دقیق ضرایب نفوذ در جامدات معمولاً به دلیل کمبود شناخت از تئوری حالت جامد ممکن نیست. بنابراین ضرایب تجربی مورد نیاز هستند. تعدادی از داده های تجربی مربوط به ضرایب نفوذ، حلالیتها و نفوذپذیری گازها در جامدات و جامدات در جامدات در جدول ۶-۵-۱ داده شده است.

جدول ۶-۵-۱. ضرایب نفوذ و نفوذپذیری در جامدات

Solute (A)	Solid (B)	T (K)	D_{AB} , Diffusion Coefficient [m^2/s]	Solubility, S [$\frac{m^3 \text{ solute (STP)}}{m^3 \text{ solid} \cdot atm}$]	Permeability, P_M [$\frac{m^3 \text{ solute (STP)}}{s \cdot m^2 \cdot atm/m}$]	Ref.
H ₂	Vulcanized rubber	298	0.85(10 ⁻⁹)	0.040	0.342(10 ⁻¹⁰)	(B5)
O ₂		298	0.21(10 ⁻⁹)	0.070	0.152(10 ⁻¹⁰)	(B5)
N ₂		298	0.15(10 ⁻⁹)	0.035	0.054(10 ⁻¹⁰)	(B5)
CO ₂		298	0.11(10 ⁻⁹)	0.90	1.01(10 ⁻¹⁰)	(B5)
H ₂	Vulcanized neoprene	290	0.103(10 ⁻⁹)	0.051		(B5)
		300	0.180(10 ⁻⁹)	0.053		(B5)
H ₂	Polyethylene	298			6.53(10 ⁻¹²)	(R3)
O ₂		303			4.17(10 ⁻¹²)	(R3)
N ₂		303			1.52(10 ⁻¹²)	(R3)
O ₂	Nylon	303			0.029(10 ⁻¹²)	(R3)
N ₂		303			0.0152(10 ⁻¹²)	(R3)
Air	English leather	298			0.15-0.68 × 10 ⁻⁴	(B5)
H ₂ O	Wax	306			0.16(10 ⁻¹⁰)	(B5)
H ₂ O	Cellophane	311			0.91 1.82(10 ⁻¹⁰)	(B5)
He	Pyrex glass	293			4.86(10 ⁻¹⁵)	(B5)
		373			20.1(10 ⁻¹⁵)	(B5)
He	SiO ₂	293	2.4-5.5(10 ⁻¹⁴)	0.01		(B5)
H ₂	Fe	293	2.59(10 ⁻¹³)			(B5)
Al	Cu	293	1.3(10 ⁻³⁴)			(B5)

برای گازهای ساده مانند He، H_۲، O_۲، N_۲ و CO_۲ تا فشار حدود ۱ الی ۲ اتمسفر حلالیت در جامداتی مانند پلیمرها و شیشه معمولاً از قانون هنری تبعیت می‌کند و معادله (۵-۵-۶) صادق است. همچنین برای این گازها ضریب نفوذ و نفوذپذیری مستقل از غلظت و بنابراین فشار هستند. در ارتباط با اثر درجه حرارت T بر حسب کلورین، lnP_M تقریباً تابع خطی از $\frac{1}{T}$ است. همچنین نفوذ یک گاز مثلاً H_۲ تقریباً مستقل از حضور گازهای دیگر مثل O_۲ و N_۲ است.

برای فلزاتی مانند Ni، Cd، Pt که گازهایی مانند H_۲ و O_۲ در آنها نفوذ می‌کنند، تقریباً مشخص است که شار متناسب با مقدار اختلاف ($\sqrt{p_{A1}} - \sqrt{p_{A2}}$) است، به طوریکه معادله (۸-۵-۶) دیگر صادق نیست (B5). هنگامی که آب در پلیمر نفوذ می‌کند، بر خلاف گازهای ساده، P_M ممکن است تا حدی به اختلاف نسبی فشار بستگی داشته باشد (C9، B5). اطلاعات اضافی در منوگرافهایی که Park و Crank و Barrer گزارش کرده‌اند، موجود می‌باشد (C9، B5).

مثال ۲-۵-۶. نفوذ در یک پوشش بسته‌بندی با استفاده از نفوذپذیری

یک لایه نازک پلی اتیلن به ضخامت ۰/۰۰۰۱۵m برای بسته‌بندی یک محصول دارویی در ۳۰ °C در نظر گرفته شده است. اگر فشار جزئی O_۲ در بیرون برابر با ۰/۲۱ atm و در داخل بسته‌بندی برابر با ۰/۰۱ atm باشد، شار نفوذ O_۲ را در حالت پایدار محاسبه کنید. از اطلاعات مربوط به نفوذپذیری در جدول ۱-۵-۶ استفاده کنید. فرض کنید مقاومت در برابر نفوذ در خارج و داخل لایه نازک در مقایسه با مقاومت خود لایه نازک ناچیز است.

حل: از جدول ۱-۵-۶، داریم، $P_M = 4/17 \times 10^{-12}$ که بر حسب $\frac{m^3 \text{ solute (STP)}}{(s \cdot m \cdot atm/m)}$ است. با جایگزینی در معادله (۸-۵-۶) داریم،

$$N_A = \frac{P_M (P_{A1} - P_{A2})}{22/414 \times (z_2 - z_1)} = \frac{4/17 \times 10^{-12} \times (0/21 - 0/01)}{22/414 \times (0/00015 - 0)}$$

$$= 2/48 \times 10^{-10} \text{ kgmol/s.m}^2$$

توجه کنید که لایه نازک نایلونی دارای نفوذپذیری P_M کمتری نسبت به O_۲ است و سد مناسبتری در مقابل نفوذ ایجاد می‌کند.

۴- فرآیندهای جداسازی غشایی: در فصل سیزدهم بحث مفصلی در زمینه انواع فرآیندهای جداسازی غشایی گازها، دیالیز، اسمز معکوس و اولترافیلتراسیون شده است.

۵C-۶ نفوذ در جامدات متخلخل که بستگی به ساختمان جامد دارد.

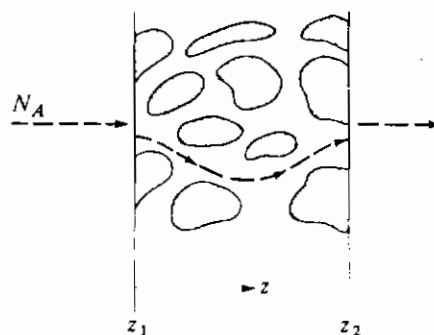
۱- نفوذ مایعات در جامدات متخلخل: در بخش ۵B-۶ با استفاده از قانون فیک جامد را به عنوان ماده‌ای یکنواخت و همگن با ضریب نفوذ تجربی D_{AB} معرفی کردیم. در این بخش با جامدات متخلخل که دارای حفره‌ها یا منافذ مرتبط بهم می‌باشند و بر نفوذ تأثیر گذار هستند، سروکار داریم. مقطعی از چنین جامدی در شکل ۲-۵-۶ نشان داده شده است.

در حالتی که منافذ به طور کامل با آب پر شده‌اند، غلظت نمک در آب در مرز ۱ برابر با c_{A1} و در نقطه ۲ برابر با c_{A2} است. نمک که از طریق آب به منافذ نفوذ می‌کند مسیر پیچ و خم داری را در پیش می‌گیرد که نامعلوم است و با یک ضریب τ که ضریب انحنا^(۱) نامیده می‌شود بزرگتر از مقدار $(z_2 - z_1)$ است. نفوذ در جامد خنثی اتفاق نمی‌افتد. در یک محلول رقیق با استفاده از معادله (۵-۳-۶) نفوذ نمک در آب در حالت پایدار برابر است با،

$$N_A = \frac{\varepsilon D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{\tau(z_2 - z_1)} \quad (6-5-13)$$

که ε ضریب تخلخل، D_{AB} ضریب نفوذ نمک در آب و τ ضریب تصحیح مربوط به طول مسیر بلندتر از $(z_2 - z_1)$ است. برای جامدات خنثی τ از حدود ۱/۵ تا ۵ تغییر می‌کند. اغلب این پارامترها با هم ترکیب می‌شوند و یک ضریب نفوذ مؤثر را به وجود می‌آورند.

$$D_{A \text{ eff}} = \frac{\varepsilon}{\tau} D_{AB} \quad \text{m}^2/\text{s} \quad (6-5-14)$$



شکل ۲-۵-۶. طرحی از یک جامد متخلخل

مثال ۳-۵-۶ نفوذ KCl در سیلیکای متخلخل

یک جامد متخلخل از جنس سیلیکا به ضخامت ۲ mm دارای ضریب تخلخل ۰/۳ و ضریب انحنای τ برابر ۰/۴ است. حفره‌ها با آب در 298 K پر شده‌اند. در یک طرف غلظت KCl در $0/1\text{ gmol/lit}$ ثابت نگهداشته می‌شود و آب تازه با سرعت از روی سطح دیگر در جریان است. با صرف نظر کردن از هرگونه مقاومت بجز مقاومت متخلخل، میزان نفوذ KCl را در حالت پایدار محاسبه کنید.

حل: ضریب نفوذ KCl در آب از جدول ۱-۳-۶، $D_{AB} = 1/87 \times 10^{-9}\text{ m}^2/\text{s}$ ، همچنین، $c_{A1} = 0/1\text{ kgmol/m}^3$ یا $c_{A1} = \frac{0/1}{1000} = 1 \times 10^{-4}$ گرم مول بر سانتی متر مکعب و $c_{A2} = 0$ جایگزینی در معادله (۱۳-۵-۶)،

$$N_A = \frac{\varepsilon D_{AB} (c_{A1} - c_{A2})}{\tau (z_2 - z_1)} = \frac{0/3 \times 1/87 \times 10^{-9} \times (0/1 - 0)}{4 \times (0/002 - 0)}$$

$$= 7/01 \times 10^{-9}\text{ kgmol KCl/s.m}^2$$

۲- نفوذگازها در جامدات متخلخل: اگر منافذ نشان داده شده در شکل ۲-۵-۶ با گازها پر شود، حالت مشابهی به وجود خواهد آمد. اگر حفره‌ها خیلی بزرگ باشند به طوری که نفوذ فقط بر اساس قانون فیک باشد، معادله (۱۳-۵-۶) برای گازها به صورت زیر است،

$$N_A = \frac{\varepsilon D_{AB} (c_{A1} - c_{A2})}{\tau (z_2 - z_1)} = \frac{\varepsilon D_{AB} (p_{A1} - p_{A2})}{\tau RT (z_2 - z_1)} \quad (15-5-6)$$

مجدداً مقدار ضریب انحنای باید بطریق تجربی تعیین شود. فرض می‌شود که نفوذ فقط از طریق حفره‌ها باشد و از طریق ذرات جامد، نفوذی نداشته باشیم.

بر اساس یک رابطه تجربی که مقدار ضریب انحنای را بر حسب ضریب تخلخل محیط‌های متخلخل مانند بسترهای پر شده از کره‌های شیشه‌ای، شن، تالک، نمک و مانند آن می‌دهد، مقادیر تقریبی برای τ به ازای مقادیر مختلف ε داده شده است، $\varepsilon = 0/2$ ، $\tau = 2$ ، $\varepsilon = 0/4$ ، $\tau = 1/75$ و $\varepsilon = 0/6$ ، $\tau = 1/65$. هنگامی که حفره‌ها خیلی کوچک هستند، نوع دیگری از نفوذ اتفاق می‌افتد که در بخش ۶-۷ بحث خواهد شد.

۶-۶ روشهای عددی نفوذ مولکولی دو بعدی در حالت پایدار

۶-۶A به دست آوردن معادلات روش عددی

۱- به دست آوردن روش حالت پایدار: در شکل ۱-۶-۶ یک جامد دو بعدی به ضخامت واحد نشان

داده شده که به مربع‌هایی تقسیم شده است. روشهای عددی نفوذ مولکولی در حالت پایدار خیلی شبیه به معادلات هدایت گرمایی پایدار هستند که در بخش ۱۵-۴ بحث شد. بنابراین تنها خلاصه مختصری در این جا آورده می‌شود. فرض می‌شود جامد داخل هر مربع در مرکز آن یعنی در نقطه $c_{n,m}$ متمرکز شده است که به آن یک «گره» می‌گویند. این گره توسط میله‌های رابطی که جرم از طریق این میله‌های رابط نفوذ می‌کند به گره‌های مجاور مرتبط است.

بر اساس یک موازنه جرم کلی در حالت پایدار، مجموع نفوذ مولکولی به ناحیه هاشور خورده به‌ازای واحد ضخامت باید مساوی صفر باشد،

$$\frac{D_{AB} \Delta y}{\Delta x} (c_{n-1,m} - c_{n,m}) + \frac{D_{AB} \Delta y}{\Delta x} (c_{n+1,m} - c_{n,m}) + \frac{D_{AB} \Delta x}{\Delta y} (c_{n,m+1} - c_{n,m}) + \frac{D_{AB} \Delta x}{\Delta y} (c_{n,m-1} - c_{n,m}) = 0 \quad (6-6-1)$$

که $c_{n,m}$ غلظت A در گره n,m برحسب kgmol/m^3 است. با در نظر گرفتن $\Delta x = \Delta y$ و مرتب کردن رابطه،

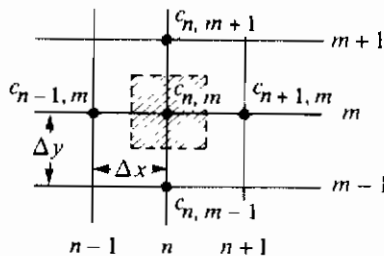
$$c_{n,m+1} + c_{n,m-1} + c_{n+1,m} + c_{n-1,m} - 4c_{n,m} = 0 \quad (6-6-2)$$

۲- روش حل عددی تکرار: به منظور حل معادله (۶-۶-۲) معادله جداگانه‌ای برای هر نقطه مجهول نوشته می‌شود که نهایتاً N معادله جبری خطی برای N نقطه مجهول به دست می‌آید. برای حل دستی این معادلات با تعداد گره‌های محدود، از روش تکرار می‌توان استفاده کرد، که در این حالت سمت راست معادله (۶-۶-۲) مساوی با مقدار باقیمانده $\bar{N}_{n,m}$ در نظر گرفته می‌شود.

$$c_{n,m+1} + c_{n,m-1} + c_{n+1,m} + c_{n-1,m} - 4c_{n,m} = \bar{N}_{n,m} \quad (6-6-3)$$

با مساوی با صفر قرار دادن معادله، در حالت پایدار، $\bar{N}_{n,m} = 0$ و $c_{n,m}$ به این صورت محاسبه می‌شود،

$$c_{n,m} = \frac{c_{n-1,m} + c_{n+1,m} + c_{n,m+1} + c_{n,m-1}}{4} \quad (6-6-4)$$



شکل ۶-۶-۱. غلظتها و فاصله گره‌ها در نفوذ مولکولی پایدار دو بُعدی

معادلات (۶-۶-۳) و (۶-۶-۴) معادلات نهایی هستند که برای محاسبه غلظت‌ها در حالت پایدار استفاده می‌شوند.

مثال ۱-۱۵-۴ برای هدایت گرمایی پایدار مراحل روش تکرار را به طور مفصل بیان می‌کند، که

برای نفوذ پایدار نیز به همان ترتیب است.

یک بار که غلظت‌ها محاسبه شد، شار برای هر المان به صورت زیر محاسبه می‌شود. با مراجعه به

شکل ۶-۶-۱ شار برای هر گره یا المان $c_{n,m}$ به $c_{n,m-1}$ هست: ($\Delta x = \Delta y$)

$$N = \frac{AD_{AB}}{\Delta y} (c_{n,m} - c_{n,m-1}) = \frac{k_c \Delta x (1)}{\Delta y} D_{AB} (c_{n,m} - c_{n,m-1}) \quad (6-6-5)$$

$$= D_{AB} (c_{n,m} - c_{n,m-1})$$

که مساحت A به صورت $1 \times \Delta x$ بوده و N بر حسب kgmol A/s است. معادلات برای المانهای مشابه دیگر نیز نوشته می‌شود و مجموع شارها محاسبه می‌گردد.

۶-۶B معادلات شرایط مرزی خاص روش عددی

۱- معادلات شرایط مرزی: هنگامی که یکی از نقاط $c_{n,m}$ در مرزی قرار گیرد که در آنجا انتقال جرم

جابه‌جایی به غلظت ثابت c_∞ در توده سیال نشان داده شده در شکل ۶-۶-۲a انجام می‌شود، معادله

کمی متفاوت خواهد بود. با نوشتن موازنه جرم روی گره n,m که در حالت پایدار جرم ورودی به آن با

جرم خروجی برابر است،

$$\frac{D_{AB} \Delta y}{\Delta x} (c_{n-1,m} - c_{n,m}) + \frac{D_{AB} \Delta x}{2 \Delta y} (c_{n,m+1} - c_{n,m}) \quad (6-6-6)$$

$$+ \frac{D_{AB} \Delta x}{2 \Delta y} (c_{n,m-1} - c_{n,m}) = k_c \Delta y (c_{n,m} - c_\infty)$$

که k_c ضریب انتقال جرم جابه‌جایی بر حسب m/s تعریف شده بر اساس معادله (۶-۱-۱۴) می‌باشد.

با در نظر گرفتن $\Delta x = \Delta y$ ، و با مرتب کردن و مساوی قرار دادن معادله نهایی با $\bar{N}_{n,m}$ ، حالت‌های

زیر نتیجه می‌شود.

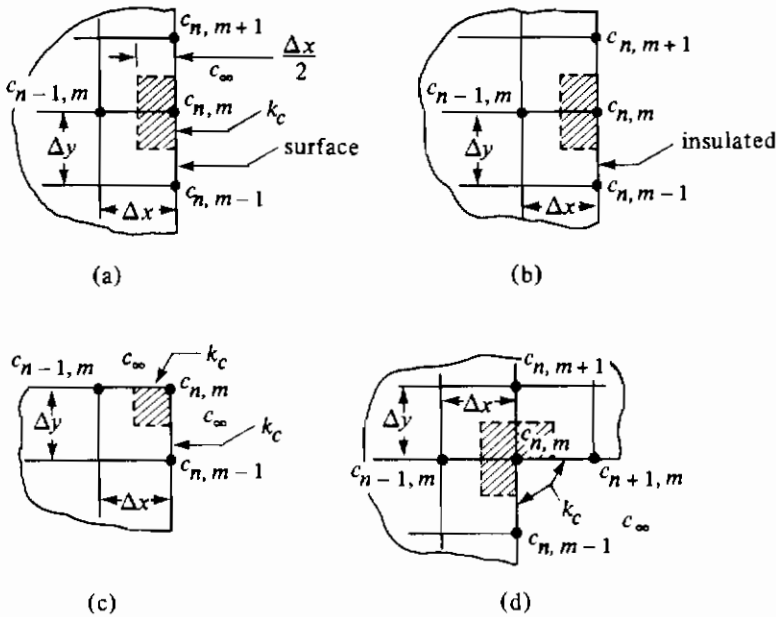
۱- جابه‌جایی در مرز (شکل ۶-۶-۲a)،

$$\frac{k_c \Delta x}{D_{AB}} c_\infty + \frac{1}{2}(2c_{n-1,m} + c_{n,m+1} + c_{n,m-1}) - c_{n,m} \left(\frac{k_c \Delta x}{D_{AB}} + 2 \right) = \bar{N}_{n,m} \quad (6-6-7)$$

این معادله مشابه با معادله (۴-۱۵-۱۶) در جابه‌جایی و هدایت گرما است که به جای $h \Delta x/k$ عبارت

$k_c \Delta x / D_{AB}$ قرار گرفته است. به طریق مشابه، معادلات (۶-۶-۸) تا (۶-۶-۱۰) برای شرایط مرزی دیگر

نشان داده شده در شکل ۶-۶-۲ به دست آمده‌اند.



شکل ۶-۶-۲ شرایط مرزی متفاوت نفوذ پایدار: (a) جابه‌جایی در یک مرز (b) مرز عایق شده (c) گوشه خارجی با جابه‌جایی در مرز (d) گوشه داخلی با جابه‌جایی در مرز

۲- برای یک مرز عایق بندی شده (شکل ۶-۶-۲b)،

$$\frac{1}{2}(c_{n,m+1} + c_{n,m-1}) + c_{n-1,m} - 2c_{n,m} = \bar{N}_{n,m} \quad (6-6-8)$$

۳- برای یک گوشه بیرونی با جابه‌جایی در مرز (شکل ۶-۶-۲c)،

$$\frac{k_c \Delta x}{D_{AB}} c_\infty + \frac{1}{2}(c_{n-1,m} + c_{n,m-1}) - \left(\frac{k_c \Delta x}{D_{AB}} + 1 \right) c_{n,m} = \bar{N}_{n,m} \quad (6-6-9)$$

۴- برای یک گوشه درونی با جابه‌جایی در مرز (شکل ۶-۶-۲d)،

$$\frac{k_c \Delta x}{D_{AB}} c_\infty + c_{n-1,m} + c_{n,m+1} + \frac{1}{2}(c_{n+1,m} + c_{n,m-1}) - \left(3 + \frac{k_c \Delta x}{D_{AB}} \right) c_{n,m} = \bar{N}_{n,m} \quad (6-6-10)$$

۲- شرایط مرزی با ضریب توزیع: هنگامی که معادله (۶-۶-۷) به دست آمد، ضریب توزیع K بین مایع و جامد در سطح تماس برابر با ۱ بود. ضریب توزیع همچنان‌که در شکل ۶-۶-۳ نشان داده شده است، به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$K = \frac{c_{n,mL}}{c_{n,m}} \quad (6-6-11)$$

که $c_{n,mL}$ غلظت در لایهٔ مایع مجاور سطح و $c_{n,m}$ غلظت در لایهٔ جامد مجاور سطح است. بنابراین برای به دست آوردن معادلهٔ (۶-۶-۶)، سمت راست یعنی $k_c \Delta y (c_{n,m} - c_\infty)$ به صورت زیر در می آید:

$$k_c \Delta y (c_{n,mL} - c_\infty) \quad (۶-۶-۱۲)$$

که c_∞ غلظت تودهٔ سیال است. با جایگزینی $Kc_{n,m}$ به جای $c_{n,mL}$ از معادلهٔ (۶-۶-۱۱) در معادلهٔ (۶-۶-۱۲) و ضرب کردن و تقسیم کردن بر K ،

$$Kk_c \Delta y \left(\frac{Kc_{n,m}}{K} - \frac{c_\infty}{K} \right) = Kk_c \Delta y \left(c_{n,m} - \frac{c_\infty}{K} \right) \quad (۶-۶-۱۳)$$

بنابراین در معادلهٔ (۶-۶-۷) هر جا k_c ظاهر می شود باید Kk_c جایگزین شود و هرگاه c_∞ ظاهر می شود باید از $\frac{c_\infty}{K}$ استفاده کرد. بنابراین معادلهٔ (۶-۶-۷) به یکی از صورتهای زیر خواهد شد:

۱- برای جابه جایی در یکی از مرزها (شکل ۶-۶-۲a)،

$$\left(\frac{Kk_c \Delta x}{D_{AB}} \right) \frac{c_\infty}{K} + \frac{1}{2}(2c_{n-1,m} + c_{n,m+1} + c_{n,m-1}) - c_{n,m} \left(\frac{Kk_c \Delta x}{D_{AB}} + 2 \right) = \bar{N}_{n,m} \quad (۶-۶-۱۴)$$

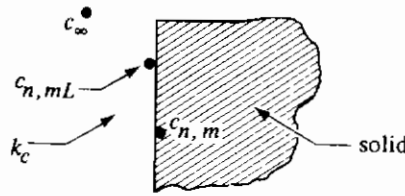
معادلات (۶-۶-۹) و (۶-۶-۱۰) به روش مشابه به صورت زیر نوشته می شوند.

۲- برای یک گوشهٔ بیرونی با جابه جایی در مرز (شکل ۶-۶-۲c)،

$$\left(\frac{Kk_c \Delta x}{D_{AB}} \right) \frac{c_\infty}{K} + \frac{1}{2}(c_{n-1,m} + c_{n,m-1}) - \left(\frac{Kk_c \Delta x}{D_{AB}} + 1 \right) c_{n,m} = \bar{N}_{n,m} \quad (۶-۶-۱۵)$$

۳- برای یک گوشهٔ درونی با جابه جایی در مرز (شکل ۶-۶-۲d)،

$$\left(\frac{Kk_c \Delta x}{D_{AB}} \right) \frac{c_\infty}{K} + c_{n-1,m} + c_{n,m+1} + \frac{1}{2}(c_{n+1,m} + c_{n,m-1}) - \left(3 + \frac{Kk_c \Delta x}{D_{AB}} \right) c_{n,m} = \bar{N}_{n,m} \quad (۶-۶-۱۶)$$



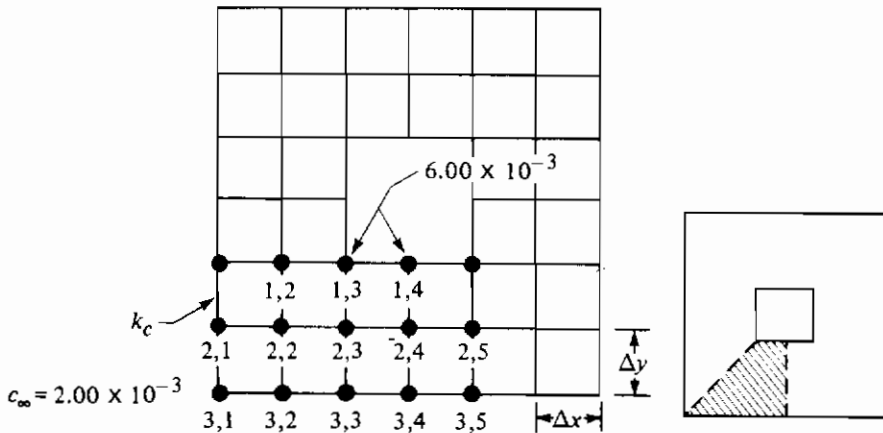
شکل ۶-۶-۳ غلظت‌های فصل مشترک برای انتقال جرم جابه‌جایی در یک سطح جامد

و ضریب توزیع تعادلی $K = c_{n,mL}/c_{n,m}$

مثال ۶-۶-۱ روش عددی برای جابه‌جایی و نفوذ پایدار

برای محفظه جامد توخالی و دو بعدی نشان داده شده در شکل ۶-۶-۴ غلظت حالت پایدار را در گره‌های نشان داده شده تعیین کنید. در سطوح داخلی غلظت در مقدار $6 \times 10^{-3} \text{ kgmol/m}^3$ ثابت است. در سطوح خارجی ضریب جابه‌جایی $k_c = 2 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ و $c_\infty = 2 \times 10^{-3} \text{ kgmol/m}^3$ است. همچنین نرخ نفوذ در هر متر از عمق را به دست آورید. ضریب توزیع $K = 1$ است.

حل: برای ساده کردن محاسبات همه غلظتها در 10^{-3} ضرب می‌شود. چون محفظه متقارن است، محاسبه را برای $\frac{1}{8}$ آن که در شکل هاشور خورده است انجام می‌دهیم. مقادیر معلوم به قرار $c_{1,3} = 6$ ، $c_{1,4} = 6$ و $c_{1,5} = 6$ هستند. به دلیل تقارن، روابط $c_{2,3} = c_{2,5}$ و $c_{3,3} = c_{3,5}$ و $c_{2,1} = c_{2,2}$ و $c_{3,1} = c_{3,2}$ برقرار است. برای سرعت دادن به محاسبات، غلظتهای نامعلوم را به‌این صورت تخمین می‌زنیم: $c_{2,2} = 3/8$ ، $c_{2,3} = 4/20$ ، $c_{2,4} = 4/40$ ، $c_{2,5} = 4/5$ ، $c_{3,1} = 2/5$ ، $c_{3,2} = 2/7$ ، $c_{3,3} = 3/2$ و $c_{3,4} = 3$.



شکل ۶-۶-۴ غلظتها در محفظه توخالی مثال ۶-۶-۱

برای نقاط داخلی $c_{۲,۲}$ ، $c_{۲,۳}$ و $c_{۲,۴}$ معادلات (۶-۶-۳) و (۶-۶-۴) و برای نقطه گوشه‌ای $c_{۳,۱}$ که جابه‌جایی دارد معادله (۶-۶-۹) به کار می‌رود. عبارت $k_c \Delta x/D_{AB}$ دارای مقداری برابر با $1 = \frac{(0/0.05)(2 \times 10^{-7})}{(1 \times 10^{-9})}$ است.

تقریب اول: با شروع از نقطه $c_{۲,۲}$ و استفاده از معادله (۶-۶-۳) پارامتر باقیمانده $\bar{N}_{۲,۲}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$c_{۱,۲} + c_{۳,۲} + c_{۲,۱} + c_{۲,۳} - 4c_{۲,۲} = \bar{N}_{۲,۲}$$

$$4/2 + 2/7 + 2/7 + 4/2 - 4 \times 3/8 = -1/4$$

بنابراین $c_{۲,۲}$ در حالت پایدار نیست. سپس $\bar{N}_{۲,۲}$ را صفر در نظر گرفته و مقدار جدیدی برای $c_{۲,۲}$ از معادله (۶-۶-۴) محاسبه می‌کنیم،

$$c_{۲,۲} = \frac{c_{۱,۲} + c_{۳,۲} + c_{۲,۱} + c_{۲,۳}}{4} = \frac{4/2 + 2/7 + 2/7 + 4/2}{4} = 3/45$$

این مقدار جدید $c_{۲,۲}$ به جای مقدار قبلی جایگزین می‌شود.

برای $c_{۲,۳}$ داریم،

$$c_{۲,۲} + c_{۲,۴} + c_{۱,۳} + c_{۳,۳} - 4c_{۲,۳} = \bar{N}_{۲,۳}$$

$$3/45 + 4/4 + 6 + 3 - 4 \times 4/2 = 0/05$$

$$c_{۲,۳} = \frac{c_{۲,۲} + c_{۲,۴} + c_{۱,۳} + c_{۳,۳}}{4} = \frac{3/45 + 4/4 + 6 + 3}{4} = 4/21$$

برای $c_{۲,۴}$ داریم،

$$c_{۲,۳} + c_{۲,۵} + c_{۱,۴} + c_{۳,۴} - 4c_{۲,۴} = \bar{N}_{۲,۴}$$

$$4/21 + 4/21 + 6 + 3/2 - 4 \times 4/4 = 0/02$$

$$c_{۲,۴} = \frac{c_{۲,۳} + c_{۲,۵} + c_{۱,۴} + c_{۳,۴}}{4} = \frac{4/21 + 4/21 + 6 + 3/2}{4} = 4/41$$

برای $c_{۳,۱}$ معادله (۶-۶-۹) را استفاده می‌کنیم:

$$1 \times c_{00} + \frac{1}{7}(c_{۳,۱} + c_{۳,۲}) - (1 + 1)c_{۳,۱} = \bar{N}_{۳,۱}$$

$$1 \times 2 + \frac{1}{7}(2/7 + 2/7) - 2 \times 2/5 = -0/3$$

با مساوی صفر قرار دادن معادله (۶-۶-۹) و حل آن برای $c_{۳,۱}$ داریم،

$$1 \times 2 + \frac{1}{7}(2/7 + 2/7) - 2 \times c_{۳,۱} = 0 \quad c_{۳,۱} = 2/35$$

برای $c_{p,2}$ از معادله (۶-۶-۷) استفاده می‌کنیم،

$$1 \times c_{\infty} + \frac{1}{\gamma} (2 \times c_{p,2} + c_{p,1} + c_{p,3}) - (1 + 2) c_{p,2} = \bar{N}_{p,2}$$

$$1 \times 2 + \frac{1}{\gamma} (2 \times 3/45 + 2/35 + 3) - 3 \times 2/7 = 0/03$$

$$1 \times 2 + \frac{1}{\gamma} (2 \times 3/45 + 2/35 + 3) - 3 \times c_{p,2} = 0 \quad c_{p,2} = 2/71$$

برای $c_{p,3}$

$$1 \times c_{\infty} + \frac{1}{\gamma} (2 \times c_{p,3} + c_{p,2} + c_{p,4}) - 3 c_{p,3} = \bar{N}_{p,3}$$

$$1 \times 2 + \frac{1}{\gamma} (2 \times 4/21 + 2/71 + 3/2) - 3 \times 3 = 0/17$$

$$1 \times 2 + \frac{1}{\gamma} (2 \times 4/21 + 2/71 + 3/2) - 3 \times c_{p,3} = 0 \quad c_{p,3} = 3/06$$

برای $c_{p,4}$

$$1 \times c_{\infty} + \frac{1}{\gamma} (2 \times c_{p,4} + c_{p,3} + c_{p,5}) - 3 c_{p,4} = \bar{N}_{p,4}$$

$$1 \times 2 + \frac{1}{\gamma} (2 \times 4/41 + 3/06 + 3/06) - 3 \times 3/2 = -0/13$$

$$1 \times 2 + \frac{1}{\gamma} (2 \times 4/41 + 3/06 + 3/06) - 3 \times c_{p,4} = 0 \quad c_{p,4} = 3/16$$

با داشتن یک سری اعداد از تمام نقاط و گره‌ها می‌توانیم تقریب دوم را شروع کنیم که از مقادیر به دست آمده در مرحله قبل استفاده می‌کنیم. این عمل تا آنجا ادامه پیدا می‌کند که مقدار باقی‌مانده تا میزان مطلوب کوچک شود. مقادیر نهایی پس از سه مرحله تقریب $c_{p,2} = 3/47$ ، $c_{p,3} = 4/24$ ، $c_{p,4} = 4/41$ ، $c_{p,1} = 2/36$ ، $c_{p,2} = 2/72$ ، $c_{p,3} = 3/06$ و $c_{p,4} = 3/16$ هستند.

برای محاسبه نرخ نفوذ، ابتدا نرخ نفوذ جابه‌جایی را در خروج از سطح پایینی از گره‌های $c_{p,1}$ ، $c_{p,2}$ ، $c_{p,3}$ و $c_{p,4}$ با عمق ۱ متر محاسبه می‌کنیم،

$$\begin{aligned} N &= k_c (\Delta x \times 1) \left[\frac{c_{p,1} - c_{\infty}}{\gamma} + (c_{p,2} - c_{\infty}) + (c_{p,3} - c_{\infty}) + \frac{c_{p,4} - c_{\infty}}{\gamma} \right] \\ &= (2 \times 10^{-7}) \times (0/005 \times 1) \times \left[\frac{2/36 - 2}{\gamma} + (2/72 - 2) \right. \\ &\quad \left. + (3/06 - 2) + \frac{3/16 - 2}{\gamma} \right] \times 10^{-3} \\ &= 2/54 \times 10^{-12} \text{ kgmol/s} \end{aligned}$$

توجه کنید که مسیرهای اول و چهارم فقط $\frac{1}{\gamma}$ سطح را در بر می‌گیرند. سپس نرخ کل نفوذ در جامد در ورود به سطح بالایی با استفاده از معادله‌ای مشابه با معادله (۶-۶-۵) محاسبه می‌شود،

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{D_{AB} (\Delta x \times 1)}{\Delta y} [(c_{1,r} - c_{2,r}) + \frac{c_{1,E} - c_{2,E}}{\gamma}] \\
 &= \frac{(1 \times 10^{-11}) \times (0.005 \times 1)}{0.005} [(6 - 4/24) + \frac{6 - 4/41}{\gamma}] \times 10^{-3} \\
 &= 2/555 \times 10^{-12} \text{ kgmol/s}
 \end{aligned}$$

در حالت پایدار، نرخ نفوذ خروجی به طریق جابه‌جایی باید مساوی با نرخ ورودی به طریق نفوذ باشد. این نتایج به طور قابل قبولی این مسأله را مورد تأیید قرار می‌دهد. با به کار بردن فواصل کوچکتر دقت نتایج بیشتر خواهد شد. توجه داشته باشید که نتایج مربوط به شدت نفوذ باید در ۸ ضرب شود تا برای کل محفظه به دست آید.

مسائل

۶-۱-۱. نفوذ متان در هلیوم: گاز CH_4 و H_2 در لوله‌ای تحت فشار $101/32 \text{ kPa}$ و دمای 298 K قرار گرفته‌اند. در یک نقطه فشار جزئی متان $p_{A1} = 60/79 \text{ kPa}$ و در نقطه‌ای به فاصله 0.02 m دورتر از نقطه اول $p_{A2} = 20/26 \text{ kPa}$. اگر فشار کل در کل لوله ثابت باشد، شار متان را در حالت پایدار با نفوذ متقابل و هم مولار محاسبه کنید.

جواب: $(5/52 \times 10^{-11} \text{ gmol A/s.cm}^2) (5/52 \times 10^{-5} \text{ kg mol A/s.m}^2)$

۶-۱-۲. نفوذ CO_2 در یک مخلوط گازی دوجزئی: گاز CO_2 در حالت پایدار در حال نفوذ به داخل گاز N_2 موجود در یک لوله به طول 0.2 m و قطر 0.01 m در دمای 198 K است. فشار کل مقدار ثابت $101/32 \text{ kPa}$ است. فشار جزئی CO_2 در یک انتها 456 mmHg و در انتهای دیگر 76 mmHg است. ضریب نفوذ D_{AB} برابر $1/67 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ در 298 K است. شار CO_2 را بر حسب واحدهای SI و cgs در شرایط نفوذ متقابل و هم مولار محاسبه کنید.

۶-۲-۱. نفوذ متقابل و هم مولار در یک مخلوط گازی دوجزئی: هلیوم و نیتروژن در کانالی به قطر 5 mm و طول 0.1 m در 298 K و فشار ثابت و مطلق 1 atm محبوس شده‌اند. فشار جزئی هلیوم در یک انتها لوله 0.06 atm و در انتهای دیگر 0.02 atm است. ضریب نفوذ از جدول ۶-۲-۱ به دست می‌آید. موارد زیر را در حالت پایدار و نفوذ متقابل و هم مولار محاسبه کنید.

(الف) شار هلیوم بر حسب kg mol/s.m^2 و g mol/s.cm^2 .

(ب) شار N_2 .

(پ) فشار جزئی هلیوم در نقطه‌ای به فاصله 0.05 m از هر انتها.

۶-۲-۲. نفوذ متقابل N_2 و NH_3 به صورت هم مولار در حالت پایدار: گاز آمونیاک (A) و گاز نیتروژن (B) در یک لوله شیشه‌ای مستقیم به طول ۲ ft (۰/۶۱ m) و قطر داخلی ۰/۰۸ (۲/۲۴ mm) در ۲۹۸ K و ۱۰۱/۳۲ kPa در یکدیگر نفوذ می‌کنند. دو انتهای لوله به محفظه بزرگ و کاملاً مخلوط شده‌ای وصل است که فشار آنها در ۱۰۱/۳۲ kPa است. فشار جزئی NH_3 در یک محفظه مقدار ثابت ۲۰ kPa و در محفظه دیگر ۶/۶۶۶ kPa است. ضریب نفوذ در ۲۹۸ K و ۱۰۱/۳۲ kPa برابر $۲/۳ \times ۱۰^{-۵} m^2/s$ است.

(الف) نفوذ NH_3 را بر حسب $kg\ mol/s$ و $lb\ mol/h$ حساب کنید.

(ب) نفوذ N_2 را محاسبه کنید.

(پ) فشار جزئی را در نقطه‌ای به فاصله ۱ ft در لوله محاسبه کنید و p_A و p_B و P را بر حسب فاصله z رسم کنید.

جواب: (الف) نفوذ NH_3 برابر است با: $۹/۴۸ \times ۱۰^{-۱۱} kg\ mol\ A/s = ۷/۵۲ \times ۱۰^{-۷} lb\ mol\ A/h$

$$p_A = ۱/۳۳۳ \times ۱۰^۴ Pa$$

۶-۲-۳. نفوذ A در جزء ساکن B و اثر نوع مرز روی شار: گاز آمونیاک در شرایط پایدار در N_2 ساکن نفوذ می‌کند. چون N_2 در یک مرز غیر قابل حل است. فشار کل $۱/۰۱۳ \times ۱۰^۵ Pa$ و دما ۲۹۸ K است. فشار جزئی NH_3 در یک نقطه $۱/۳۳۳ \times ۱۰^۴ Pa$ و در نقطه دیگری به فاصله ۲۰ mm آن طرف تر $۶/۶۶۶ \times ۱۰^۳ Pa$ است. D_{AB} مخلوط در $۱/۰۱۳ \times ۱۰^۵ Pa$ و ۲۹۸ K برابر با $۲/۳ \times ۱۰^{-۵} m^2/s$ است.

(الف) شار NH_3 را بر حسب $kg\ mol/s.m^2$ حساب کنید.

(ب) قسمت (الف) را با این فرض که N_2 هم نفوذ می‌کند حل کنید. یعنی هر دو مرز قابل نفوذ برای هر دو گاز هستند و شار به صورت متقابل و هم مولار است. آیا در این حالت شار بیشتر است؟

جواب: (الف) $N_A = ۳/۴۴ \times ۱۰^{-۶} kg\ mol/s.m^2$

۶-۲-۴. نفوذ متان در هلیوم ساکن: گاز متان در یک لوله به طول ۱ m که محتوی هلیوم در ۲۹۸ K و فشار کل $۱/۰۱۳۲۵ \times ۱۰^۵ Pa$ است نفوذ می‌کند. فشار جزئی متان در یک انتهای لوله $۱/۴ \times ۱۰^۴ Pa$ و در انتهای دیگر $۱/۳۳۳ \times ۱۰^۳ Pa$ است. هلیوم در مرز غیر قابل حل است و بنابراین در متان نفوذ نمی‌کند و ساکن است. ضریب نفوذ در جدول ۱-۲-۶ داده شده است. شار متان را در حالت پایدار بر حسب $kgmol/s.m^2$ حساب کنید.

۶-۲-۵. انتقال جرم از گلوله نفتالین به هوا: از یک گلوله نفتالین به شعاع ۱۰ mm انتقال جرم به هوا

صورت می‌گیرد. گلوله در حجم زیادی از هوای تمیز در شرایط $52/6^\circ\text{C}$ و فشار مطلق 1 atm قرار دارد. فشار بخار نفتالین در $52/6^\circ\text{C}$ برابر 1 mmHg است. ضریب نفوذ نفتالین در هوا در 0°C برابر با $10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ است. نرخ تبخیر نفتالین را بر حسب kg mol/s.m^2 حساب کنید. [توجه: ضریب نفوذ برای هر دمای خاص می‌تواند بر اساس ضریب تصحیح دمای فولر، معادله (۴۵-۲-۶) تصحیح شود.]

۶-۲-۶. تخمین ضریب نفوذ یک گاز دوجزئی: برای مخلوطی از بخار اتانول ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$) و متان (CH_4) ضریب نفوذ را با استفاده از روش فولر در شرایط زیر پیش بینی کنید.
الف) در 10^5 Pa و $1/0.132 \times 10^5$ و 298 و 373 کلوین.
ب) در 10^5 Pa و $2/0.265 \times 10^5$ و 298 K .

جواب: الف) $D_{AB} = 1/43 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ (298 K)

۶-۲-۷. شار نفوذ و اثر دما و فشار: در لوله‌ای به طول 11 m محتوی گازهای N_2 و CO در فشار کل 1 atm مطلق نفوذ متقابل و هم مولار در حالت پایدار اتفاق می‌افتد. فشار جزئی N_2 در یک انتها برابر 80 mmHg و در انتهای دیگر 10 mmHg است. بر اساس روش فولر D_{AB} را پیش‌بینی کنید.

الف) شار N_2 را بر حسب kg mol/s.m^2 در 298 K حساب کنید.

ب) شار قسمت (الف) را در 473 K محاسبه کنید. آیا شار افزایش می‌یابد؟

پ) قسمت (الف) را برای فشار کل 3 atm حل کنید. فشار جزئی N_2 در 80 و 10 ثابت می‌ماند. آیا شار تغییر می‌کند؟

جواب: الف) $D_{AB} = 2/0.5 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ و $D_{A_2} = 7/0.2 \times 10^{-7}\text{ kg mol/s.m}^2$

ب) $N_A = 9/92 \times 10^{-7}\text{ kg mol/s.m}^2$

پ) $N_A = 2/34 \times 10^{-7}\text{ kg mol/s.m}^2$

۶-۲-۸. تلفات آب در کانال آبیاری به دلیل تبخیر: آب در 25°C در یک کانال در زیر سطح زمین در جریان است. در فاصله هر 100 ft یک خط تخلیه گازهای اضافی وجود دارد که قطر داخلی آن 1 in و ارتفاع آن 1 ft است و گازها را به محیط که دمای آن 25°C است هدایت می‌کند. در طول 1000 ft حدود 10 خط تخلیه وجود دارد. هوای بیرون خشک فرض می‌شود. کل افت تبخیر آب را بر حسب lb_m/d حساب کنید. فرض کنید فشار جزئی بخار آب در سطح آب برابر فشار بخار آن یعنی $23/76\text{ mmHg}$ در 25°C است. ضریب نفوذ را از جدول ۱-۲-۶ به دست آورید.

۹-۲-۶. زمان لازم برای تبخیر کامل یک کره: یک کره تولوئن مایع در دمای-یکنواخت $25/9^{\circ}\text{C}$ توسط یک سیم نازک در هوا معلق نگهداشته می‌شود. شعاع اولیه $r_1 = 2\text{ mm}$ است. فشار بخار تولوئن در $25/9^{\circ}\text{C}$ برابر $3/84\text{ kPa}$ و دانسیته تولوئن مایع 866 kg/m^3 است. الف) برای پیش بینی زمان ۱F یعنی مدت زمانی که قطره به طور کامل در حجم زیادی از هوا تبخیر می‌شود، معادله (۳۴-۲-۶) را به دست آورید. همه مراحل را نشان دهید. ب) زمان تبخیر کامل را بر حسب ثانیه به دست آورید.

جواب: (ب) 1338 s

۱۰-۲-۶. نفوذ در یک سطح مقطع غیر یکنواخت: گاز آمونیاک (A) در حالت پایدار به صورت متقابل و هم مولار در گاز ازت (B) در کانالی به طول $1/22\text{ m}$ در شرایط 25°C و فشار کل $101/32\text{ kPa}$ نفوذ می‌کند. فشار جزئی آمونیاک در انتهای سمت چپ $25/33\text{ kPa}$ و در انتهای دیگر $5/66\text{ kPa}$ است. سطح مقطع کانال به شکل یک مثلث متساوی الاضلاع است که طول هر ضلع آن در انتهای سمت چپ $0/610\text{ m}$ بوده و تا انتهای سمت راست به صورت کاهشی به $0/305\text{ m}$ می‌رسد. شار مولی آمونیاک را محاسبه کنید. ضریب نفوذ $D_{AB} = 0/23 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$ است.

۱-۳-۶. نفوذ A در جزء ثابت B در یک مایع: حل شونده HCl (A) در لایه نازکی از آب (B) به ضخامت 2 mm در 283 K نفوذ می‌کند. غلظت HCl در نقطه ۱ در یک مرز لایه نازک 12% وزنی (دانسیته HCl، $\rho_1 = 1060/7\text{ kg/m}^3$) و در مرز دیگر در نقطه ۲، برابر 6% وزنی (دانسیته HCl، $\rho_2 = 1030/3\text{ kg/m}^3$) می‌باشد. ضریب نفوذ HCl در آب $2/5 \times 10^{-9}\text{ m}^2/\text{s}$ است. با فرض حالت پایدار و مرز غیر قابل نفوذ برای آب، شار HCl را بر حسب kg mol/s.m^2 محاسبه کنید.

جواب: $N_A = 2/732 \times 10^{-6}\text{ kg mol/s.m}^2$

۲-۳-۶. نفوذ آمونیاک در یک محلول آبی: محلولی از آب و آمونیاک در 278 K و به ضخامت 4 mm سطح مشترکی با یک مایع آلی دارد. غلظت آمونیاک در فاز آلی ثابت نگهداشته می‌شود و طوری است که غلظت تعادلی آمونیاک در آب در فصل مشترک 2% وزنی (دانسیته محلول آبی $991/7\text{ kg/m}^3$ است) و غلظت آمونیاک در آب در انتهای دیگر لایه نازک در فاصله 4 mm آن طرف تر 10% وزنی (دانسیته $961/7\text{ kg/m}^3$) می‌باشد. آب و ماده آلی در یکدیگر غیرقابل حل هستند. ضریب نفوذ NH_3 در آب $1/24 \times 10^{-9}\text{ m}^2/\text{s}$ است. الف) در حالت پایدار، شار N_A را بر حسب kg mol/s.m^2 حساب کنید.

ب) شار N_B را محاسبه کنید. توضیح دهید.

۶-۳-۳. تخمین ضریب نفوذ مایع: مطلوب است پیش بینی ضریب نفوذ اسید استیک رقیق (CH_3COOH) در آب در $282/9\text{ K}$ و 298 K با استفاده از روش Wilke-Chang. مقدار به دست آمده را با مقدار تجربی در جدول ۶-۳-۱ مقایسه کنید.

$$D_{AB} = 0/897 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s} \quad (282/9) \quad \text{جواب:}$$

$$D_{AB} = 1/396 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s} \quad (298)$$

۶-۳-۴. تخمین ضریب نفوذ متانول در آب: ضریب نفوذ متانول رقیق در آب به طریق تجربی در 288 K برابر $1/26 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ است.

الف) ضریب نفوذ را در 293 K با استفاده از معادله Wilke-Chang به دست آورید.

ب) ضریب نفوذ را در 293 K بر اساس تصحیح مقدار تجربی به دست آورید. (راهنمایی: این قسمت را با کمک نسبت $D_{AB} \propto T/\mu_B$ حل کنید).

۶-۴-۱. پیش بینی ضریب نفوذ آنزیم Urease در محلول: ضریب نفوذ آنزیم Urease را در یک محلول آبی رقیق در 298 K با استفاده از معادله اصلاح شده Polson به دست آورید و نتیجه را با مقدار تجربی جدول ۶-۴-۱ مقایسه کنید.

$$D_{AB} = 3/995 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{مقدار پیش بینی شده:} \quad \text{جواب:}$$

۶-۴-۲. نفوذ ساکاروز در ژلاتین: یک لایه نازک ژلاتین به ضخامت 5 mm در آب محتوی $1/5\%$

وزنی ژلاتین در 293 K است که دو محلول ساکاروز را از هم جدا می کند. غلظت ساکاروز در محلول در یک سطح ژلاتین، ثابت و برابر $\frac{2\text{ gr}}{100\text{ ml}}$ و در طرف دیگر $\frac{0/2\text{ gr}}{100\text{ ml}}$ است. شار ساکاروز از طریق ژل را در حالت پایدار بر حسب kg/s.m^2 محاسبه کنید.

۶-۴-۳. ضریب نفوذ اکسیژن در محلول پروتئین: اکسیژن از میان یک محلول پروتئین گاوی (BSA)

در 298 K نفوذ می کند. بر اساس مشاهدات اکسیژن به BSA متصل نمی شود. ضریب نفوذ D_{AB} اکسیژن در محلول پروتئین با غلظت $\frac{11\text{ gr}}{100\text{ ml}}$ را پیش بینی کنید. (توجه: در جدول ۶-۳-۱ ضریب نفوذ O_2 در آب را ببینید).

$$D_{AB} = 1/930 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{جواب:}$$

۶-۴-۴. نفوذ اسید اوریک در محلول پروتئین و پیوند: اسید اوریک (A) در 37°C در یک محلول

آبی پروتئین (B) محتوی $\frac{1\text{ gr}}{100\text{ ml}}$ نفوذ می کند. اسید اوریک به پروتئین متصل می شود و در محدوده غلظت موجود، میزان اتصال، 1 gmol به ازای هر 3 gmol کل اسید موجود در محلول می باشد. ضریب نفوذ D_{AB} اسید اوریک در آب $1/21 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ و $0/91 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

است.

(الف) با فرض وجود داشتن اثرات اتصال و بلوکه شدن، نسبت D_{AP}/D_{AB} را به دست آورید.

$$\frac{D_{AP}}{D_{AB}} = 0.616 \text{ مقایسه کنید (C8).}$$

(ب) با صرف نظر کردن از اتصال، نسبت D_{AP}/D_{AB} را فقط با در نظر گرفتن اثرات بلوکه شدن به دست آورید.

(پ) شار اسید اوریک را در غلظت ثابت 0.05 g/L در نقطه (۱) و 0 g/L در نقطه (۲) که به فاصله $1/5 \text{ mm}$ از یکدیگر هستند، بر حسب g/s.cm^2 محاسبه کنید.

$$N_A = 2/392 \times 10^{-6} \text{ g/s.cm}^2 \text{ (پ) جواب:}$$

۶-۵-۱. نفوذ CO_2 در لاستیک: یک درپوش صاف به ضخامت 30 mm دارای مساحت $4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ از لاستیک پخته شده ساخته شده است و برای بستن روزنه یک ظرف به کار می رود. گاز CO_2 در 25°C و فشار 2 atm داخل ظرف است. میزان نشدی یا نفوذ CO_2 را از طریق درپوش به بیرون بر حسب kg mol/s در حالت پایدار محاسبه کنید. فرض کنید که فشار جزئی CO_2 در بیرون صفر است. Barrer (B5) حلالیت CO_2 را برابر با 0.09 m^3 در هر متر مکعب لاستیک و به ازای هر اتمسفر فشار CO_2 در شرایط STP داده است. ضریب نفوذ $0.11 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ است.

$$1/178 \times 10^{-13} \text{ kg mol CO}_2/\text{s} \text{ جواب:}$$

۶-۵-۲. نشد هیدروژن از طریق لاستیک نئوپرن: گاز هیدروژن خالص در فشار مطلق 2 atm و دمای 27°C از روی یک اسلب از جنس لاستیک نئوپرن پخته شده به ضخامت 5 mm عبور می کند. با استفاده از داده های جدول ۶-۵-۱، شار نفوذ را بر حسب kgmol/s.m^2 در حالت پایدار محاسبه کنید. فرض کنید در خارج از اسلب هیچ مقاومتی در مقابل نفوذ وجود ندارد و فشار جزئی H_2 را در بیرون صفر فرض کنید.

۶-۵-۳. نسبت بین ضریب نفوذ و نفوذ پذیری: گاز هیدروژن از طریق یک صفحه لاستیکی پخته شده به ضخامت 20 mm در 25°C نفوذ می کند. فشار جزئی H_2 در داخل $1/5 \text{ atm}$ و در بیرون صفر است. با استفاده از جدول ۶-۵-۱ موارد زیر را محاسبه کنید.

(الف) ضریب نفوذ D_{AB} را بر حسب نفوذ پذیری P_M در حلالیت S محاسبه کرده و با مقدار جدول ۶-۵-۱ مقایسه کنید.

(ب) شار H_2 را در حالت پایدار به دست آورید.

$$N_A = 1/144 \times 10^{-10} \text{ kg mol/s.m}^2 \text{ (ب) جواب:}$$

۴-۵-۶. **افت از طریق لوله نئوپرن:** گاز هیدروژن در فشار ۲ atm و دمای 27°C از طریق یک لوله نئوپرن به قطر داخلی ۳ mm و قطر خارجی ۱۱ mm جریان دارد. نشد H_2 را از لوله‌ای به طول ۱ متر بر حسب $\text{kg mol } H_2/\text{s}$ در حالت پایدار محاسبه کنید.

۵-۵-۶. **نفوذ از طریق غشاءهای سری:** گاز نیتروژن در فشار ۲ atm و 30°C از طریق یک غشاء نایلونی به ضخامت ۱ mm و یک غشاء پلی اتیلنی به ضخامت ۸ mm به طور سری نفوذ می‌کند. فشار جزئی در طرف دیگر غشاءها ۰ atm است. با فرض وجود نداشتن مقاومت، شار N_2 را در حالت پایدار محاسبه کنید.

۶-۵-۶. **نفوذ CO_2 در یک بستر پر شده از شن:** مطلوب است محاسبه نرخ نفوذ گاز CO_2 در هوا در حالت پایدار از طریق یک بستر کاملاً پر شده شنی در 276 K و فشار کل $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$. عمق بستر ۱/۲۵ m و تخلخل آن ۰/۳ است. فشار جزئی CO_2 در بالای بستر 1.0^3 Pa و در پایین آن صفر است. t برابر ۱/۸۷ است.

$$N_A = 1/609 \times 10^{-9} \text{ kg mol } \text{CO}_2/\text{s.m}^2 \quad \text{جواب:}$$

۷-۵-۶. **بسته‌بندی برای حفظ رطوبت مواد غذایی:** سلفون برای حفظ رطوبت مواد غذایی در 38°C به کار می‌رود. میزان افت بخار آب را در حالت پایدار برای پوششی به ضخامت ۱ mm و مساحت 0.2 m^2 هنگامیکه فشار بخار آب در داخل ۱۰ mmHg و هوای بیرون حاوی بخار آب در فشار ۵ mmHg باشد بر حسب g/d محاسبه کنید. برای نفوذپذیریهای بزرگتر از جدول ۶-۵-۱ استفاده کنید.

$$0.1667 \text{ g } H_2O/\text{day} \quad \text{جواب:}$$

۸-۵-۶. **نشد هلیوم و نفوذپذیری:** پنجره‌ای از جنس SiO_2 به ضخامت ۲ mm و مساحت $1 \times 10^{-4}\text{ m}^2$ برای دیدن محتویات داخل یک ظرف در دمای 20°C به کار می‌رود. گاز هلیوم در $20.2/6\text{ kPa}$ در ظرف قرار دارد. از جدول ۶-۵-۱ داریم، $D_{AB} = 5/5 \times 10^{-14}\text{ m}^2/\text{s}$. الف) میزان نشد هلیوم را در حالت پایدار بر حسب kg mol/h محاسبه کنید. ب) نفوذپذیری P_M و P'_M را محاسبه کنید.

$$8/833 \times 10^{-15} \text{ kg mol He/hr} = \text{الف) افت} \quad \text{جواب:}$$

۱-۶-۶. **روش عددی در نفوذ پایدار:** با استفاده از نتایج مثال ۶-۶-۱ نرخ کل نفوذ در جامد با استفاده از گره‌های پایینی و مسیرهای $C_{2,2}$ به $C_{2,3}$ و $C_{3,3}$ به $C_{3,4}$ و مانند آن محاسبه کنید. نتیجه را با نرخهای نفوذ دیگر در مثال ۶-۶-۱ مقایسه کنید.

$$N = 2/555 \times 10^{-12} \text{ kg mol/s} \quad \text{جواب:}$$

- ۶-۶-۲. روش عددی در نفوذ پایدار با ضریب توزیع: با استفاده از شرایط مثال ۶-۶-۱ با این تفاوت که ضریب توزیع تعریف شده در معادله (۶-۶-۱۱) بین غلظت در مایع مجاور سطح خارجی و غلظت در جامد مجاور سطح خارجی $K = 1/2$ باشد، غلظتها و شار نفوذ را در حالت پایدار به دست آورید.
- ۶-۶-۳. روش حل کامپیوتری برای نفوذ در حالت پایدار: شرایط مثال ۶-۶-۱ را با $\Delta y = \Delta x = 0.01 \text{ m}$ به جای $\Delta x = 0.05 \text{ m}$ در نظر بگیرید. ابعاد کلی محفظه خالی مانند مثال ۶-۶-۱ است. تنها اختلاف این است که تعداد گره‌ها بیشتر خواهد شد. با نوشتن یک برنامه کامپیوتری غلظتهای حالت پایدار را به دست آورید. نرخ را به دست آورده و با مثال ۶-۶-۱ مقایسه کنید.
- ۶-۶-۴. روش عددی با غلظتهای سطحی ثابت: در جامد دو بعدی نشان داده شده در شکل ۶-۶-۴ در حالت پایدار نفوذ انجام می‌شود. فواصل $\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$ است. ضریب نفوذ $D_{AB} = 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ است. در داخل محفظه غلظت سطحی در $2 \times 10^{-2} \text{ kgmol/m}^3$ ثابت نگهداشته می‌شود. در سطوح خارجی غلظت مقدار ثابت $8 \times 10^{-2} \text{ kgmol/m}^3$ است. غلظتهای حالت پایدار و میزان نفوذ را در هر متر از عمق پیدا کنید.

منابع

- (A1) AMDUR, I., and SHULER, L. M. *J. Chem. Phys.*, **38**, 188 (1963).
 (A2) ANDERSON, D. K., HALL, J. R., and BABB, A. L. *J. Phys. Chem.*, **62**, 404 (1958).
 (B1) BUNDE, R. E. *Univ. Wisconsin Naval Res. Lab. Rept. No. CM-850*, August 1955.
 (B2) BOYD, C. A., STEIN, N., STEINGRIMSSON, V., and RUMPEL, W. F. *J. Chem. Phys.*, **19**, 548 (1951).
 (B3) BIRD, R. B., STEWART, W. E., and LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
 (B4) BIDSTRUP, D. E., and GEANKOPLIS, C. J. *J. Chem. Eng. Data*, **8**, 170 (1963).
 (B5) BARRER, R. M. *Diffusion in and Through Solids*. London: Cambridge University Press, 1941.
 (C1) CARMICHAEL, L. T., SAGE, B. H., and LACEY, W. N. *A.I.Ch.E.J.*, **1**, 385 (1955).
 (C2) CARSWELL, A. J., and STRYLAND, J. C. *Can. J. Phys.*, **41**, 708 (1963).
 (C3) CHAKRABORTI, P. K., and GRAY, P. *Trans. Faraday Soc.*, **62**, 3331 (1961).
 (C4) CHANG, S. Y. M. S. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1959.
 (C5) CHANG, PIN, and WILKE, C. R. *J. Phys. Chem.*, **59**, 592 (1955).
 (C6) CHARLWOOD, P. A. *J. Phys. Chem.*, **57**, 125 (1953).
 (C7) CAMERON, J. R. M. S. thesis, Ohio State University, 1973.
 (C8) COLTON, C. K., SMITH, K. A., MERRILL, E. W., and REECE, J. M. *Chem. Eng. Progr. Symp.*, **66**(99), 85 (1970).

- (C9) CRANK, J., and PARK, G. S. *Diffusion in Polymers*. New York: Academic Press, Inc., 1968.
- (F1) FULLER, E. N., SCHESSLER, P. D., and GIDDINGS, J. C. *Ind. Eng. Chem.*, **58**, 19 (1966)
- (F2) FRIEDMAN, L., and KRAMER, E. O. *J. Am. Chem. Soc.*, **52**, 1298 (1930).
- (F3) FRIEDMAN, L. *J. Am. Chem. Soc.*, **52**, 1305, 1311 (1930).
- (G1) GILLILAND, E. R. *Ind. Eng. Chem.*, **26**, 681 (1934)
- (G2) GEANKOPLIS, C. J. *Mass Transport Phenomena*. Columbus, Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.
- (G3) GARNER, G. H., and MARCHANT, P. J. M. *Trans. Inst. Chem. Eng. (London)*, **39**, 397 (1961).
- (G4) GOSTING, L. S. *Advances in Protein Chemistry*, Vol. 1. New York: Academic Press, Inc., 1956.
- (G5) GEANKOPLIS, C. J., OKOS, M. R., and GRULKE, E. A. *J. Chem. Eng. Data*, **23**, 40 (1978).
- (G6) GEANKOPLIS, C. J., GRULKE, E. A., and OKOS, M. R. *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **18**, 233 (1979).
- (H1) HOLSEN, J. N., and STRUNK, M. R. *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **3**, 143 (1964).
- (H2) HUDSON, G. H., MCCOUBREY, J. C., and UBBELOHDE, A. R. *Trans. Faraday Soc.*, **56**, 1144 (1960).
- (H3) HIRSCHFELDER, J. O., CURTISS, C. F., and BIRD, R. B. *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1954.
- (H4) HAMMOND, B. R., and STOKES, R. H. *Trans. Faraday Soc.*, **49**, 890 (1953).
- (J1) JOHNSON, P. A., and BABB, A. L. *Chem. Revs.*, **56**, 387 (1956).
- (K1) KELLER, K. H., and FRIEDLANDER, S. K. *J. Gen. Physiol.*, **49**, 68 (1966).
- (L1) LEE, C. Y., and WILKE, C. R. *Ind. Eng. Chem.*, **46**, 2381 (1954).
- (L2) LE BAS, G. *The Molecular Volumes of Liquid Chemical Compounds*. New York: David McKay Co., Inc., 1915.
- (L3) LONGSWORTH, L. G. *J. Phys. Chem.*, **58**, 770 (1954).
- (L4) LANGDON, A. G., and THOMAS, H. C. *J. Phys. Chem.*, **75**, 1821 (1971).
- (M1) MASON, E. A., and MONCHICK, L. *J. Chem. Phys.*, **36**, 2746 (1962).
- (M2) MONCHICK, L., and MASON, E. A. *J. Chem. Phys.*, **35**, 1676 (1961).
- (N1) NEY, E. P., and ARMISTEAD, F. C. *Phys. Rev.*, **71**, 14 (1947).
- (N2) National Research Council, *International Critical Tables*, Vol. V. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929.
- (N3) NARVARI, R. M., GAINER, J. L., and HALL, K. R. *A.I.Ch.E.J.*, **17**, 1028 (1971).
- (P1) PERRY, R. H., and GREEN, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
- (P2) PERKINS, L. R., and GEANKOPLIS, C. J. *Chem. Eng. Sci.*, **24**, 1035 (1969).
- (P3) POLSON, A. *J. Phys. Colloid Chem.*, **54**, 649 (1950).
- (R1) REID, R. C., PRAUSNITZ, J. M., and SHERWOOD, T. K. *The Properties of Gases and Liquids*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1977.
- (R2) REDDY, K. A., and DORAISWAMY, L. K. *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **6**, 77 (1967).
- (R3) ROGERS, C. E. *Engineering Design for Plastics*. New York: Reinhold Publishing Co., Inc., 1964.
- (S1) SCHAFER, K. L. *Z. Electrochem.*, **63**, 111 (1959).
- (S2) SEAGER, S. L., GEERTSON, L. R., and GIDDINGS, J. C. *J. Chem. Eng. Data*, **8**, 168 (1963).
- (S3) SCHWERTZ, F. A., and BROW, J. E. *J. Chem. Phys.*, **19**, 640 (1951).

- (S4) SRIVASTAVA, B. N., and SRIVASTAVA, I. B. *J. Chem. Phys.*, **38**, 1183 (1963).
- (S5) SKELLAND, A. H. P. *Diffusional Mass Transfer*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1974.
- (S6) SORBER, H. A. *Handbook of Biochemistry, Selected Data for Molecular Biology*. Cleveland: Chemical Rubber Co., Inc., 1968.
- (S7) SPALDING, G. E. *J. Phys. Chem.*, **73**, 3380 (1969).
- (S8) SATTERFIELD, C. N. *Mass Transfer in Heterogeneous Catalysis*. Cambridge, Mass: The MIT Press, 1978.
- (T1) TRAUTZ, M., and MULLER, W. *Ann. Physik*, **22**, 333 (1935).
- (T2) TREYBAL, R. E. *Liquid Extraction*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1963.
- (T3) TREYBAL, R. E. *Mass Transfer Operations*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1980.
- (V1) VIVIAN, J. E., and KING, C. J. *A.I.Ch.E.J.*, **10**, 220 (1964).
- (W1) WINTERGERST, V. E. *Ann. Physik*, **4**, 323, (1930).
- (W2) WESTENBERG, A. A., and FRAZIER, G. J. *J. Chem. Phys.*, **36**, 3499 (1962).
- (W3) WALKER, R. E., and WESTENBERG, A. A. *J. Chem. Phys.*, **29**, 1139 (1958).
- (W4) WALKER, R. E., and WESTENBERG, A. A. *J. Chem. Phys.*, **32**, 436 (1960).
- (W5) WILKE, C. R., and CHANG, PIN. *A.I.Ch.E.J.*, **1**, 264 (1955).

فصل هفتم

اصول انتقال جرم جابه‌جایی و ناپایدار

۷-۱ نفوذ ناپایدار

۷-۱۸ به دست آوردن معادله اساسی

در فصل ششم سیستم‌های مختلف انتقال جرم را در حالتی در نظر گرفتیم که غلظت یا فشار جزئی در هر نقطه و شار نفوذ نسبت به زمان ثابت بودند و یا به عبارت دیگر سیستم پایدار بود. قبل از رسیدن به حالت پایدار مدت زمانی باید سپری شود تا شرایط ناپایدار از بین برود.

در بخش ۲-۳ موازنه کلی خاصیت برای نفوذ ناپایدار مولکولی در مورد خواص ممتوم، گرما و جرم نوشته شد. در صورتی که تولید وجود نداشته باشد این رابطه به صورت زیر بود،

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \quad (۲-۳-۱۲)$$

در بخش ۵-۱ معادله هدایت گرمایی ناپایدار به دست آمد،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (۵-۱-۱۰)$$

در انتقال جرم روش به دست آوردن معادله نفوذ ناپایدار در یک جهت مشابه با معادله (۵-۱-۱۰) در انتقال حرارت است. به شکل ۷-۱-۱ توجه کنید. در این شکل جرم در حال نفوذ در جهت x در یک مکعب ساخته شده از جامد، گاز ساکن یا مایع ساکن به ابعاد Δx ، Δy و Δz است. برای

نفوذ در جهت x می‌توانیم بنویسیم،

$$N_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x} \quad (V-1-1)$$

عبارت $\partial c_A / \partial x$ به معنای مشتق جزئی c_A نسبت به x یا نرخ تغییر c_A نسبت به x در هنگام ثابت بودن متغیر زمان (t) است.

سپس یک موازنهٔ جرم برای جزء A بر حسب مول در حالتی که تولید نداشته باشیم می‌نویسیم.

$$\text{نرخ ورودی} = \text{نرخ خروجی} + \text{نرخ تجمع} \quad (V-1-2)$$

نرخ ورودی و نرخ خروجی بر حسب kg mol A/s به صورت زیر است،

$$\text{نرخ ورودی} = N_{Ax}|_x = -D_{AB} \left. \frac{\partial c_A}{\partial x} \right|_x \quad (V-1-3)$$

$$\text{نرخ خروجی} = N_{Ax}|_{x+\Delta x} = -D_{AB} \left. \frac{\partial c_A}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \quad (V-1-4)$$

نرخ تجمع در جسم با حجم $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ متر مکعب به صورت زیر است،

$$\text{نرخ تجمع} = (\Delta x \Delta y \Delta z) \frac{\partial c_A}{\partial t} \quad (V-1-5)$$

از جایگزینی معادلات (V-1-3)، (V-1-4) و (V-1-5) در معادلهٔ (V-1-2) و تقسیم آن بر $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ نتیجه می‌شود که:

$$-D_{AB} \frac{\left. \frac{\partial c_A}{\partial x} \right|_x - \left. \frac{\partial c_A}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\partial c_A}{\partial t} \quad (V-1-6)$$

و با میل دادن Δx به سمت صفر،

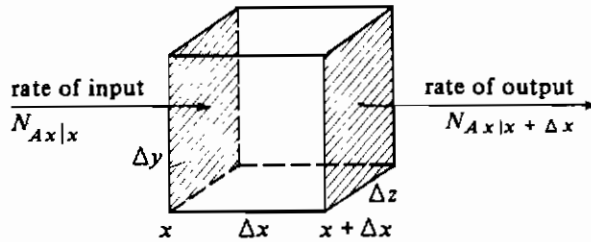
$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (V-1-7)$$

رابطهٔ فوق برای ضریب نفوذ (D_{AB}) ثابت کاربرد دارد. اگر D_{AB} متغیر باشد،

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \frac{\partial(D_{AB} \partial c_A / \partial x)}{\partial x} \quad (V-1-8)$$

معادلهٔ (V-1-7) غلظت c_A را به مکان x و زمان t ربط می‌دهد. با روش مشابه برای نفوذ در سه جهت داریم،

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) \quad (V-1-9)$$



شکل ۷-۱-۱. نفوذ ناپایدار در یک جهت

در بقیه این بخش، جوابهای معادلات (۷-۱-۷) و (۷-۱-۹) بررسی خواهند شد. با در نظر گرفتن تشابه ریاضی معادله هدایت گرما،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (۵-۱-۶)$$

و معادله (۷-۱-۷) در مورد نفوذ، روشهای ریاضی به کار برده شده برای حل معادله هدایت گرمایی ناپایدار برای انتقال جرم ناپایدار نیز به کار می‌رود. این موضوع به طور کامل‌تر در بخشهای ۷-۱B و ۷-۷ بحث شده است.

۷-۱B نفوذ در یک صفحه صاف با مقاومت سطحی ناچیز

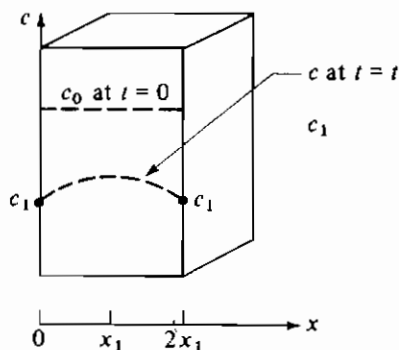
برای تشریح روش حل عددی معادله (۷-۱-۷)، حل این معادله را برای حالت نفوذ ناپایدار در جهت x برای صفحه‌ای به ضخامت $2x_1$ مطابق شکل ۷-۱-۲ به دست می‌آوریم. برای نفوذ در یک جهت،

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (۷-۱-۷)$$

با حذف زیرنویسهای A و B داریم،

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (۷-۱-۱۰)$$

توزیع اولیه غلظت در صفحه در $t = 0$ برای همه مقادیر x در $c = c_0$ یکنواخت است که در شکل ۷-۱-۲ نشان داده شده است. به طور ناگهانی در زمان $t = 0$ غلظت سیال در محیط بیرون به c_1 تغییر می‌کند. در صورتی که ضریب انتقال جرم بیرونی خیلی زیاد باشد، مقاومت سطحی ناچیز بوده و غلظت در سطح مساوی با غلظت در سیال خواهد بود که مقدار آن c_1 است.



شکل ۷-۱-۲. نفوذ ناپایدار در یک صفحه صاف با مقاومت سطحی ناچیز

شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر هستند،

$$c = c_0, \quad t = 0, \quad x = x_1, \quad Y = \frac{c_1 - c_0}{c_1 - c_0} = 1$$

$$c = c_1, \quad t = t, \quad x = 0, \quad Y = \frac{c_1 - c_1}{c_1 - c_0} = 0 \quad (V-1-11)$$

$$c = c_1, \quad t = t, \quad x = 2x_1, \quad Y = \frac{c_1 - c_1}{c_1 - c_0} = 0$$

با تعریف مجدد غلظت بین صفر و یک،

$$Y = \frac{c_1 - c}{c_1 - c_0} \quad (V-1-12)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (V-1-13)$$

حل معادله (۷-۱-۱۳) یک سری نامتناهی فوریه است و با حل معادله (۵-۱-۶) برای انتقال حرارت یکسان است.

$$Y = \frac{c_1 - c}{c_1 - c_0} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1} \exp\left(-\frac{1^2 \pi^2 X}{4}\right) \sin \frac{1\pi x}{2x_1} + \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{3^2 \pi^2 X}{4}\right) \sin \frac{3\pi x}{2x_1} + \frac{1}{5} \exp\left(-\frac{5^2 \pi^2 X}{4}\right) \sin \frac{5\pi x}{2x_1} + \dots \right] \quad (V-1-14)$$

که

$X = Dt/x_1^2$ بدون بُعد، بدون بُعد،

غلظت در نقطه x و زمان t در اسلب c

$$Y = \frac{c_1 - c}{c_1 - c_0} = \text{جزء تغییر نیافته (بدون بعد)}$$

$$1 - Y = \frac{c - c_0}{c_1 - c_0} = \text{جزء تغییر یافته}$$

حل معادلاتی مشابه با معادله (۷-۱-۱۴) بسیار وقت‌گیر است. منحنیهای مناسبی برای شکل‌های هندسی مختلف در دسترس می‌باشند که در بخش بعد در مورد آنها بحث خواهد شد.

۷-۱C نفوذ ناپایدار در شکل‌های هندسی مختلف

۱- شرایط مرزی و جابه‌جایی در سطح: در شکل ۷-۱-۲ هیچ‌گونه مقاومت جابه‌جایی در سطح وجود نداشت. اما در بسیاری حالات هنگامی که یک سیال در خارج از جامد است انتقال جرم جابه‌جایی در سطح اتفاق می‌افتد. ضریب انتقال جرم جابه‌جایی (k_c) مشابه با ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$N_A = k_c (c_{L1} - c_{Li}) \quad (7-1-15)$$

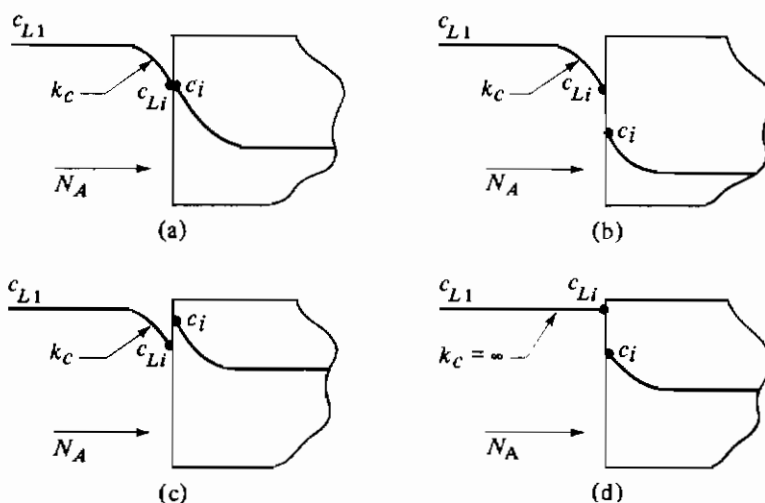
که k_c ضریب انتقال جرم بر حسب c_{L1} ، m/s ، غلظت توده سیال بر حسب c_{Li} و kgmolA/m^3 غلظت توده سیال مجاور و بسیار نزدیک به سطح جامد است. ضریب k_c یک ضریب تجربی بوده و به طور کامل در بخش ۷-۲ بحث خواهد شد.

در شکل ۷-۱-۳a یکی از حالات موجود ضریب انتقال جرم در مرز نشان داده شده است. اُفت غلظت در سیال برابر با $c_{L1} - c_{Li}$ است. غلظت در جامد (c_i) در سطح در حال تعادل با c_{Li} است.

در شکل ۷-۱-۳a، غلظت c_{Li} در مایع مجاور با سطح جامد و c_i در جامد در سطح با یکدیگر در تعادل و مساوی هستند. اما برخلاف انتقال حرارت که در آنجا دماها مساوی بودند، در این جا غلظتها در تعادل هستند و به صورت زیر رابطه دارند،

$$K = \frac{c_{Li}}{c_i} \quad (7-1-16)$$

که K ضریب توزیع تعادلی^(۱) (مشابه با قانون هنری برای یک گاز و مایع) می‌باشد. مقدار K در شکل ۷-۱-۳a برابر با یک است.



شکل ۷-۱-۳. شرایط فصل مشترک برای انتقال جرم جابه‌جایی و ضریب توزیع تعادلی $K = c_{Li}/c_i$:

$$k_c = \infty \text{ و } K > 1 \text{ (d) } K < 1 \text{ (c) } K > 1 \text{ (b) } K = 1 \text{ (a)}$$

در شکل ۷-۱-۳b ضریب توزیع K بزرگتر از یک و $c_{Li} > c_i$ است، گرچه آنها در تعادلند. حالت‌های دیگر در شکل‌های ۷-۱-۳c و ۷-۱-۳d نشان داده شده است. این موضوع در بخش ۶-۶B نیز بحث شده است.

۲- رابطه بین پارامترهای انتقال حرارت و جرم: به منظور استفاده از نمودارهای هدایت گرمایی ناپایدار در فصل پنجم برای حل مسایل نفوذ ناپایدار، متغیرها یا پارامترهای بدون بعد مربوط به انتقال حرارت بایستی به پارامترهای انتقال جرم ربط داده شوند. در جدول ۷-۱-۱ روابط بین این متغیرها داده شده است. برای $K \neq 1$ ، پارامتر k_c به صورت Kk_c و c_i به صورت c_i/K نشان داده شده است.

۳- منحنیهای نفوذ در شکلهای هندسی مختلف: منحنیهای مختلف انتقال حرارت در هدایت ناپایدار می‌تواند برای نفوذ ناپایدار نیز به صورت زیر استفاده شود،

۱- جامد نیمه بی‌نهایت، شکل ۵-۳-۳.

۲- صفحه صاف، شکل‌های ۵-۳-۵ و ۵-۳-۶.

۳- استوانه بلند، شکل‌های ۵-۳-۷ و ۵-۳-۸.

۴- کره، شکل‌های ۵-۳-۹ و ۵-۳-۱۰.

۵- غلظت‌های میانگین، مقاومت جابه‌جایی صفر، شکل ۵-۳-۱۳.

جدول ۷-۱-۱. رابطه بین پارامترهای انتقال حرارت و جرم در نفوذ ناپایدار

Heat Transfer	Mass Transfer	
	$K = c_1/c = 1.0$	$K = c_1/c \neq 1.0$
$Y, \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}$	$\frac{c_1 - c}{c_1 - c_0}$	$\frac{c_1/K - c}{c_1/K - c_0}$
$1 - Y, \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$	$\frac{c - c_0}{c_1 - c_0}$	$\frac{c - c_0}{c_1/K - c_0}$
$X, \frac{\alpha t}{x_1^2}$	$\frac{D_{AB} t}{x_1^2}$	$\frac{D_{AB} t}{x_1^2}$
$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$	$\frac{x}{2\sqrt{D_{AB} t}}$	$\frac{x}{2\sqrt{D_{AB} t}}$
$m, \frac{k}{hx_1}$	$\frac{D_{AB}}{k_c x_1}$	$\frac{D_{AB}}{Kk_c x_1}$
$\frac{h}{k} \sqrt{\alpha t}$	$\frac{k_c}{D_{AB}} \sqrt{D_{AB} t}$	$\frac{Kk_c}{D_{AB}} \sqrt{D_{AB} t}$
$n, \frac{x}{x_1}$	$\frac{x}{x_1}$	$\frac{x}{x_1}$

* x is the distance from the center of the slab, cylinder, or sphere; for a semiinfinite slab, x is the distance from the surface. c_0 is the original uniform concentration in the solid, c_1 the concentration in the fluid outside the slab, and c the concentration in the solid at position x and time t .

مثال ۷-۱-۱. نفوذ ناپایدار در یک اسلب از ژل آگار

یک اسلب جامد با $15/5$ درصد وزنی ژل آگار در 278 K به ضخامت $10/16 \text{ mm}$ محتوی اوره به غلظت یکنواخت $0/1 \text{ kgmol/m}^3$ است. نفوذ فقط در جهت x از طریق دو صفحه صاف موازی به فاصله $10/16 \text{ mm}$ از یکدیگر انجام می‌شود. اسلب به طور ناگهانی در آب خالص با جریان مغشوش غوطه‌ور می‌شود به طوری که مقاومت سطحی را می‌توان ناچیز فرض کرد. یعنی ضریب جابه‌جایی k_c خیلی بزرگ است. ضریب نفوذ اوره در آگار از جدول ۲-۴-۶ برابر با $4/72 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ است.

(الف) غلظت را در وسط اسلب ($5/08 \text{ mm}$ از سطح) و $2/54 \text{ mm}$ از سطح پس از 10 ساعت محاسبه کنید.

(ب) اگر ضخامت اسلب نصف شود، غلظت نقطه وسط پس از 10 ساعت چقدر خواهد بود؟
حل: برای قسمت (الف)، $c_0 = 0/1 \text{ kgmol/m}^3$ و برای آب خالص $c_1 = 0$ و غلظت در فاصله

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

x از خط مرکزی و در زمان t ثانیه. ضریب توزیع تعادلی K در معادله (۷-۱-۱۶) می تواند یک فرض شود، چون آب در محلول آبی ژل و خارج آن خواص مشابهی دارد. از جدول ۷-۱-۱،

$$Y = \frac{c_1/k - c}{c_1/k - c_0} = \frac{(0/0/1) - c}{(0/0/1) - 0/1}$$

همچنین، $x_1 = \frac{10/16}{(10000 \times 2)m} = 5/08 \times 10^{-3}$ (نصف ضخامت اسلب) و $x = 0$ (مرکز)

$$X = D_{AB} t / x_1^2 = \frac{(4/72 \times 10^{-10})(10 \times 3600)}{(5/08 \times 10^{-3})^2} = 0/658$$

موقعیت نسبی به صورت: $n = x/x_1 = \frac{0}{5/08 \times 10^{-3}} = 0$ و چون Kc خیلی بزرگ است مقاومت نسبی به صورت: $D_{AB}/Kk_c x = 1 = 0$ است (مقاومت صفر).

از شکل ۵-۳-۵ برای $X = 0/658$ و $m = 0$ و $n = 0$ داریم،

$$Y = 0/275 = \frac{0 - c}{0 - 0/1}$$

با حل رابطه فوق برای $\alpha = 0$ داریم: $c = 0/0275 \text{ kgmol/m}^3$.

برای نقطه‌ای به فاصله ۲/۵۴ mm از سطح یا ۲/۵۴ mm از مرکز،

$$x = \frac{2/54}{1000} = 2/54 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad X = 0/658, \quad m = 0$$

$$n = x/x_1 = \frac{2/54 \times 10^{-3}}{5/08 \times 10^{-3}} = 0/5$$

بنابراین، از شکل ۵-۳-۵، داریم: $Y = 0/172$. پس از حل، $c = 0/0172 \text{ kgmol/m}^3$.

برای قسمت (ب) و نصف ضخامت، $X = \frac{0/658}{(0/5)^2} = 2/632$ و $n = 0$ و $m = 0$. بنابراین

$$c = 2 \times 10^{-4} \text{ kgmol/m}^3$$

مثال ۷-۱-۲ نفوذ ناپایدار در یک اسلب نیمه بی‌نهایت

یک اسلب بسیار نازک دارای غلظت یکنواخت حل شونده A به میزان $c_0 = 1 \times 10^{-2} \text{ kgmolA/m}^3$

است. به طوار ناگهانی وجه بالایی اسلب در معرض جریان سیالی به غلظت $c_1 = 0/1 \text{ kgmolA/m}^3$

و ضریب جابه‌جایی $k_c = 2 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ قرار می‌گیرد. ضریب توزیع تعادلی $K = c_{Li}/c_i = 2$

است. با فرض این‌که اسلب یک جامد نیمه بی‌نهایت باشد، غلظت را در سطح جامد ($x = 0$) و در

$D_{AB} = 4 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ از سطح پس از $t = 3 \times 10^4 \text{ s}$ محاسبه کنید. ضریب نفوذ در جامد

است.

حل: برای استفاده از شکل ۳-۳-۵،

$$\frac{K c_c}{D_{AB}} \sqrt{D_{AB} t} = \frac{2 \times (2 \times 10^{-7})}{4 \times 10^{-9}} \sqrt{(4 \times 10^{-9}) \times (3 \times 10^4)} = 1/0.95$$

برای $x = 0.01$ m، جامد،

$$\frac{x}{2 \sqrt{D_{AB} t}} = \frac{0.01}{2 \sqrt{(4 \times 10^{-9}) \times (3 \times 10^4)}} = 0.457$$

از نمودار، $1 - Y = 0.26$. سپس با جایگزینی در معادله برای $1 - Y$ از جدول ۱-۱-۷ و حل آن،

$$1 - Y = \frac{c - c_s}{c_1/K - c_s} = \frac{c - 1 \times 10^{-2}}{(10 \times 10^{-2})/2 - (1 \times 10^{-2})} = 0.26$$

$$c = 2/0.4 \times 10^{-2} \text{ hgmol/m}^3 \quad (x = 0.01 \text{ m برای})$$

برای $x = 0$ m (یعنی در سطح جامد)،

$$\frac{x}{2 \sqrt{D_{AB} t}} = 0$$

از نمودار، $1 - Y = 0.62$. پس از حل، $c = 3/48 \times 10^{-2}$. این مقدار همان c_1 است که در شکل

۳b-۱-۷ نشان داده شده است. برای محاسبه غلظت c_{Li} در مایع در فصل مشترک،

$$c_{Li} = K c_1 = 2 \times 3/48 \times 10^{-2} = 6/96 \times 10^{-2} \text{ kgmol/m}^3$$

منحنی این مقادیر مشابه با شکل ۳b-۱-۷ خواهد بود.

۴- نفوذ ناپایدار در بیش از یک جهت: در بخش ۳F-۵ روشی برای هدایت گرمایی ناپایدار و ترکیب پاسخهای یک بعدی و رسیدن به پاسخ سیستمهای چند بعدی ارائه شد. همان روش برای نفوذ ناپایدار در بیش از یک جهت می‌تواند استفاده شود. با بازنویسی معادله (۳-۱-۵) برای نفوذ در یک بلوک مکعب شکل در جهت‌های x و y و z

$$Y_{x,y,z} = (Y_x)(Y_y)(Y_z) = \frac{c_1/K - c_{x,y,z}}{c_1/K - c_0} \quad (7-1-17)$$

که $c_{x,y,z}$ غلظت در نقطه‌ای به مختصات x و y و z از مرکز بلوک است. مقدار Y_x برای دو وجه موازی از شکل ۳-۵ یا ۳-۶ برای یک صفحه صاف در جهت x به دست می‌آید. به طریق مشابه مقادیر Y_y و Y_z از همان نمودارها به دست می‌آیند. برای یک استوانه کوتاه، از معادله‌ای مشابه با معادله (۳-۱۲-۵) استفاده می‌شود و برای غلظتهای میانگین معادلاتی مشابه با معادلات (۳-۱۴-۵)، (۳-۱۵-۵) و

(۱۶-۳-۵) به کار می‌روند.

۲-۷ ضریب انتقال جرم جابه‌جایی

۲۸-۷ مقدمه‌ای بر انتقال جرم جابه‌جایی

در بخش‌های قبلی این فصل و فصل ۶ تأکید کردیم که در سیالات ساکن یا سیالاتی که حرکت آرام دارند نفوذ مولکولی وجود دارد. در حالات زیادی نرخ نفوذ آرام است و لازم است که انتقال سریعتر صورت پذیرد. برای این منظور سرعت سیال باید افزایش داده شود تا هنگامی که انتقال جرم مغشوش شود.

معمولاً برای این‌که جریان یک سیال به صورت جابه‌جایی انجام شود لازم است که توسط یک سیال غیر قابل امتزاج دیگر یا یک سطح جامد به جریان افتد. مثالی از این حالت سیالی است که در یک لوله جریان دارد، و قسمتی از دیواره لوله از جامدی ساخته شده است که حلالیت کمی در سیال دارد مانند بنزوئیک اسید. اسید بنزوئیک حل می‌شود و عمود بر جریان اصلی از دیواره منتقل می‌شود. وقتی جریان یک سیال مغشوش است و از روی یک سطح جامد می‌گذرد سرعت واقعی ذرات کوچک سیال، مانند جریان آرام به روشنی قابل تشریح نیست. در جریان آرام سیال بر روی خطوط جریان حرکت می‌کند و رفتار آن به صورت ریاضی قابل بررسی است. اما در جریان مغشوش هیچ خط جریانی وجود ندارد و تنها گردابه‌های بزرگی وجود دارند که به صورت اتفاقی و با سرعت زیاد حرکت می‌کنند.

هنگامی که حل شونده A از سطح جامد شروع به حل شدن می‌کند، غلظت آن در جریان سیال در مجاورت سطح زیاد می‌شود و معمولاً هرچه از سطح دورتر می‌شویم غلظت کاهش آن می‌یابد. اما همیشه قسمتهایی از سیال که مجاور هم هستند غلظتهای نزدیک بهم ندارند. زیرا گردابه‌هایی که حل شونده نیز در آنها وجود دارد، به سرعت از نقطه‌ای به نقطه دیگر حرکت می‌کنند و مقادیر نسبتاً زیادی از حل شونده را جابجا می‌کنند. این نفوذ مغشوش یا انتقال گردابه‌ای در مقایسه با نفوذ مولکولی بسیار سریعتر است.

سه ناحیه انتقال جرم می‌توان مشخص کرد. در اولین ناحیه، که در مجاورت سطح است، یک زیرلایه ویسکوز وجود دارد. چون تقریباً هیچ گردابه‌ای وجود ندارد بیشتر انتقال جرم در این ناحیه بر اساس مکانیسم نفوذ مولکولی اتفاق می‌افتد. بر اثر نرخ کم نفوذ، تغییرات غلظت در این ناحیه زیاد است.

ناحیه گذرا یا بافر^(۱) مجاور ناحیه اول است. در این ناحیه تعدادی گردابه وجود دارد و انتقال جرم از مجموع نفوذ مولکولی و نفوذ مغشوش تشکیل می‌شود. از ابتدای این ناحیه تا انتهای آن یک انتقال تدریجی از نفوذ مولکولی به نفوذ مغشوش دیده می‌شود.

در ناحیه مغشوش که مجاور ناحیه بافر است، انتقال عمدتاً بر اساس نفوذ مغشوش است و میزان نفوذ مولکولی بسیار کم است. اختلاف غلظت در این جا بسیار کوچک است زیرا گردابه‌ها غلظت را در سیال یکنواخت نگه می‌دارند. بحث مفصلتر در مورد این سه ناحیه در بخش ۱۰G-۳ آورده شده است. نمودار مربوط به انتقال جرم برای یک جامد حل شونده از طریق یک سطح جامد در جریان سیال در یک کانال، در شکل ۱-۲-۷ نشان داده شده است. افت غلظت از c_{A1} مجاور سطح جامد خیلی زیاد است و بعداً این تغییرات آرامتر می‌شود. این نمودار بسیار شبیه به شکل‌های مربوط به انتقال حرارت و ممتوم است. غلظت میانگین \bar{c}_A در شکل نشان داده شده است و کمی بزرگتر از حداقل c_{A2} می‌باشد.

۱-۲-۷ انواع ضرایب انتقال جرم

۱- تعریف ضریب انتقال جرم: چون فهم ما از جریان مغشوش کامل نیست تلاش می‌کنیم معادلاتی به روشی مشابه با نفوذ مولکولی به دست آوریم. در انتقال جرم مغشوش با \bar{c} ثابت، معادله (۱-۶-۶) به صورت زیر نوشته می‌شود،

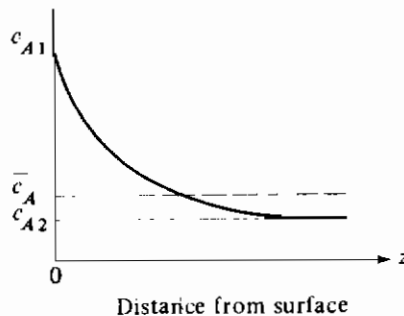
$$J_A^* = -(D_{AB} + \varepsilon_M) \frac{dc_A}{dz} \quad (۷-۲-۱)$$

که در این رابطه D_{AB} ضریب نفوذ مولکولی بر حسب m^2/s و ε_M ضریب نفوذ گردابه‌ای جرمی بر حسب m^2/s است. مقدار ε_M متغیر بوده و در فصل مشترک یا سطح تماس نزدیک به صفر است و با افزایش فاصله از دیواره زیاد می‌شود. چون تغییر ε_M معمولاً مشخص نیست بنابراین، از مقدار میانگین $\bar{\varepsilon}_M$ استفاده می‌شود. با انتگرال‌گیری از معادله (۷-۲-۱) بین نقاط ۱ و ۲،

$$J_{A1}^* = \frac{D_{AB} + \bar{\varepsilon}_M}{z_2 - z_1} (c_{A1} - c_{A2}) \quad (۷-۲-۲)$$

شار J_{A1}^* بر اساس سطح A_1 است زیرا سطح مقطع ممکن است تغییر کند. مقدار $z_2 - z_1$ یا طول مسیر، اغلب نامعلوم است. بنابراین، معادله (۷-۲-۲) ساده می‌شود و با کمک یک ضریب انتقال جرم k'_c داریم،

$$J_{A1}^* = k'_c (c_{A1} - c_{A2}) \quad (۷-۲-۳)$$



شکل ۱-۲-۷. توزیع غلظت در انتقال جرم مغشوش از یک سطح به یک سیال

که در این جا J_{A1} شار A از سطح A_1 نسبت به کل توده فاز مربوطه، k'_c یک ضریب انتقال جرم تجربی برابر با $\bar{\epsilon}_M / (z + (D_{AB2} - z_1))$ بر حسب $(\text{kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^2) \times (\text{kgmol}/\text{m}^3)$ یا به طور ساده شده m/s و c_{A2} غلظت در نقطه ۲ بر حسب kgmol/m^3 یا به طور معمول تر غلظت توده‌ای میانگین \bar{c}_{A2} می‌باشد. این تعریف ضریب انتقال جرم جابه‌جایی (k'_c) کاملاً مشابه با ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی h است.

۲- ضریب انتقال جرم در نفوذ متقابل و هم مولار: معمولاً علاقمند هستیم که N_A ، یعنی شار A نسبت به مختصات ساکن، را به دست آوریم. از روشی مشابه روش نفوذ مولکولی می‌توانیم استفاده کنیم با این تفاوت که پارامتر ϵ_M نیز به آن اضافه می‌شود.

$$N_A = -c(D_{AB} + \epsilon_M) \frac{dx_A}{dz} + x_A(N_A + N_B) \quad (V-2-4)$$

در حالت نفوذ متقابل و هم مولار که در آن $N_A = -N_B$ است و با انتگرال‌گیری در حالت پایدار و

$$k'_c = \frac{(D_{AB} + \bar{\epsilon}_M)}{(z_2 - z_1)}$$

$$N_A = k'_c(c_{A1} - c_{A2}) \quad (V-2-5)$$

معادله (۷-۲-۵) تعریف ضریب انتقال جرم است. اما غالباً غلظت بر حسب جزء مولی در

مایعات و فشار جزئی در گازها تعریف می‌شود. بنابراین ضریب انتقال جرم را می‌توان به چند روش تعریف کرد. اگر y_A جزء مولی در فاز گاز و x_A در فاز مایع باشد، معادله (۷-۲-۵) در حالت نفوذ متقابل با مولهای مساوی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\text{Gases: } N_A = k'_c(c_{A1} - c_{A2}) = k'_c(p_{A1} - p_{A2}) = k'_c(y_{A1} - y_{A2}) \quad (V-2-6)$$

$$\text{Liquids: } N_A = k'_c(c_{A1} - c_{A2}) = k'_c(x_{A1} - x_{A2}) \quad (V-2-7)$$

همه این ضرایب انتقال جرم با یکدیگر رابطه دارند. به عنوان مثال، با استفاده از معادله (۷-۲-۶) و جایگزینی $Y_{A1} = c_{A1}/c$ و $Y_{A2} = c_{A2}/c$ در معادله،

$$N_A = k_c(c_{A1} - c_{A2}) = k_y(y_{A1} - y_{A2}) = k_y' \left(\frac{c_{A1}}{c} - \frac{c_{A2}}{c} \right) = \frac{k_y'}{c} (c_{A1} - c_{A2}) \quad (7-2-8)$$

بنابراین،

$$k_c = \frac{k_y'}{c} \quad (7-2-9)$$

روابط بین ضرایب انتقال جرم و معادلات مختلف شار در جدول ۷-۲-۱ داده شده‌اند.

جدول ۷-۲-۱. معادلات شار و ضرایب انتقال جرم

Flux equations for equimolar counterdiffusion

$$\text{Gases: } N_A = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) = k_G(p_{A1} - p_{A2}) = k_y'(y_{A1} - y_{A2})$$

$$\text{Liquids: } N_A = k_c'(c_{A1} - c_{A2}) = k_L'(c_{A1} - c_{A2}) = k_x'(x_{A1} - x_{A2})$$

Flux equations for A diffusing through stagnant, nondiffusing B

$$\text{Gases: } N_A = k_c(c_{A1} - c_{A2}) = k_G(p_{A1} - p_{A2}) = k_y(y_{A1} - y_{A2})$$

$$\text{Liquids: } N_A = k_c(c_{A1} - c_{A2}) = k_L(c_{A1} - c_{A2}) = k_x(x_{A1} - x_{A2})$$

Conversions between mass-transfer coefficients

Gases:

$$k_c' c = k_c' \frac{P}{RT} = k_c \frac{p_{BM}}{RT} = k_G' P = k_G p_{BM} = k_y y_{BM} = k_y' = k_c y_{BM} c = k_G y_{BM} P$$

Liquids:

$$k_c' c = k_L' c = k_L x_{BM} c = k_L' \rho / M = k_x' = k_x x_{BM}$$

(where ρ is density of liquid and M is molecular weight)

Units of mass-transfer coefficients

	SI Units	Cgs Units	English Units
k_c, k_L, k_c', k_L'	m/s	cm/s	ft/h
k_x, k_y, k_x', k_y'	$\frac{\text{kg mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol frac}}$	$\frac{\text{g mol}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{mol frac}}$	$\frac{\text{lb mol}}{\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{mol frac}}$
k_G, k_G'	$\frac{\text{kg mol}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Pa}}$ (preferred)	$\frac{\text{g mol}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{atm}}$	$\frac{\text{lb mol}}{\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{atm}}$

۳- ضریب انتقال جرم هنگامی که جزء A در جزء ساکن و غیر نفوذی B نفوذ می‌کند: هنگامی که جزء A در جزء ساکن و غیر نفوذی B نفوذ می‌کند $N_B = 0$ است. معادله (۷-۲-۴) در حالت پایدار:

$$N_A = \frac{k'_c}{x_{BM}} (c_{A1} - c_{A2}) = k_c (c_{A1} - c_{A2}) \quad (7-2-10)$$

که x_{BM} و y_{BM} مشابه با معادله (۶-۲-۲۱) و k_c ضریب انتقال جرم برای نفوذ A در B می‌باشد. همچنین،

$$x_{BM} = \frac{x_{B2} - x_{B1}}{\ln(x_{B2}/x_{B1})} \quad y_{BM} = \frac{y_{B2} - y_{B1}}{\ln(y_{B2}/y_{B1})} \quad (7-2-11)$$

با بازنویسی معادله (۷-۲-۱۰) و استفاده از واحدهای دیگر،

$$(Gases): \quad N_A = k_c(c_{A1} - c_{A2}) = k_G(p_{A1} - p_{A2}) = k_y(y_{A1} - y_{A2}) \quad (7-2-12)$$

$$(Liquids): \quad N_A = k_c(c_{A1} - c_{A2}) = k_L(c_{A1} - c_{A2}) = k_x(x_{A1} - x_{A2}) \quad (7-2-13)$$

مجدداً باید یاد آور شد که تمام ضرایب انتقال جرم با هم رابطه دارند که در جدول ۷-۲-۱ داده شده است. به عنوان مثال، با مساوی قرار دادن معادله (۷-۲-۱۰) با (۷-۲-۱۳)،

$$N_A = \frac{k'_c}{x_{BM}} (c_{A1} - c_{A2}) = k_x(x_{A1} - x_{A2}) = k_x \left(\frac{c_{A1}}{c} - \frac{c_{A2}}{c} \right) \quad (7-2-14)$$

بنابراین،

$$\frac{k'_c}{x_{BM}} = \frac{k_x}{c} \quad (7-2-15)$$

مثال ۷-۲-۱ تبخیر A و انتقال جرم جابه‌جایی

حجم زیادی از گاز خالص B در فشار ۲ atm از روی صفحه‌ای که مایع خالص A از آن در حال تبخیر است عبور می‌کند. مایع A به طور کامل سطح را خیس می‌کند. بنابراین فشار جزئی A در سطح برابر با فشار بخار آن در ۲۹۸ K است که معادل با ۰/۲ atm می‌باشد. k'_y برابر با $\frac{\text{kgmol}}{\text{s.m}^2.\text{molfrac}} \times 10^5 \times 6/78$ حدس زده می‌شود. نرخ تبخیر و N_A را محاسبه کنید. k_y و k_G را نیز محاسبه نمایید.

حل: در این حالت A در B نفوذ می‌کند و چون B در A حل نمی‌شود بنابراین شار B عمود بر سطح صفر است. در گاز خالص B، $p_{A1} = 0/2$ و $p_{A2} = 0$. همچنین $\frac{p_{A1}}{P} = \frac{0/2}{0/2} = 1$ و $y_{A1} = 0$. $y_{A2} = 0$ می‌توانیم معادله (۷-۲-۱۲) را با کسرهای مولی استفاده کنیم.

$$N_A = k_y (y_{A1} - y_{A2}) \quad (7-2-12)$$

اما مقداری برای k'_c داریم که با k_y رابطه‌ای به صورت زیر دارد، (مطابق جدول 7-2-1)

$$k_y y_{BM} = k'_y \quad (7-2-16)$$

عبارت y_{BM} مشابه x_{BM} است و از معادله (7-2-11) داریم،

$$y_{BM} = \frac{y_{B2} - y_{B1}}{\ln (y_{B2}/y_{B1})} \quad (7-2-11)$$

$$y_{B1} = 1 - y_{A1} = 1 - 0/1 = 0/9 \quad y_{B2} = 1 - y_{A2} = 1 - 0 = 1$$

با جایگزینی در معادله (7-2-11)،

$$y_{BM} = \frac{1 - 0/9}{\ln (0/1 / 0/9)} = 0/95$$

سپس از معادله (7-2-16)،

$$k_y = \frac{k'_y}{y_{BM}} = \frac{6/78 \times 10^{-5}}{0/95} = 7/138 \times 10^{-5} \text{ kgmol/s.m}^2 \cdot \text{molfrac}$$

همچنین از جدول 7-2-1،

$$k_G y_{BM} P = k_y y_{BM} \quad (7-2-17)$$

بنابراین با حل رابطه نسبت به k_G و جایگزینی مقادیر معلوم،

$$k_G = \frac{k_y}{P} = \frac{7/138 \times 10^{-5}}{2 \times 1/0.1325 \times 10^5 \text{ Pa}} = 3/522 \times 10^{-10} \text{ kgmol/s.m}^2 \cdot \text{Pa}$$

$$k_G = \frac{k_y}{P} = \frac{7/138 \times 10^{-5}}{2 \text{ atm}} = 3/569 \times 10^{-5} \text{ kgmol/s.m}^2 \cdot \text{atm}$$

برای محاسبه شار با استفاده از معادله (7-2-12)،

$$N_A = k_y (y_{A1} - y_{A2}) = 7/138 \times 10^{-5} \times (0/1 - 0) = 7/138 \times 10^{-5} \text{ kgmol/s.m}^2$$

همچنین

$$p_{A1} = 0/2 \text{ atm} = 0/2 \times (1/0.1325 \times 10^5) = 2/0.26 \times 10^4 \text{ Pa}$$

مجدداً با استفاده از معادله (7-2-17) داریم،

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

$$N_A = k_G (P_{A1} - P_{A2}) = 3/522 \times 10^{-10} \times (2/0.26 \times 10^3 - 0)$$

$$= \sqrt{138} \times 10^{-6} \text{ kgmol/s.m}^2$$

$$N_A = k_G (P_{A1} - P_{A2}) = 3/569 \times 10^{-5} \times (0/2 - 0)$$

$$= \sqrt{138} \times 10^{-6} \text{ kgmol/s.m}^2$$

توجه داشته باشید که چون در این حالت غلظتها رقیق بودند، y_{BM} نزدیک به ۱ و k_y و k'_y اختلاف کمی دارند.

۲-۲C روشهای تعیین ضرایب انتقال جرم

روشهای تجربی متفاوتی برای تعیین ضرایب انتقال جرم تاکنون به کار گرفته شده است. برای تعیین ضریب انتقال جرم یک کره، Geankoplis و Steele (S3) از یک کره از جنس اسید بنزوئیک استفاده کردند که در انتهای یک لوله قرار گرفته بود. قبل از انجام آزمایش کره وزن شده بود. پس از عبور سیال در یک مدت زمان مشخص، کره از سیال خارج شده، خشک شد و مجدداً وزن شده تا میزان جرم منتقل شده به سیال تعیین شود. این مقدار در مقایسه با وزن کره کم بود. با استفاده از جرم منتقل شده و سطح کره، شار N_A محاسبه شد. سپس نیروی رانش ($c_{AS} - 0$) برای محاسبه k_L مورد استفاده قرار گرفت، که در این جا c_{AS} حلالیت آب بدون اسید بنزوئیک است.

روش دیگر، جاری کردن گاز از روی شکلهای هندسی مختلف و خیس شده با مایع در حال تبخیر است. در انتقال جرم روی یک صفحه صاف، یک سطح متخلخل خیس شده با مایع نقش صفحه را دارد.

۲-۳ ضرایب انتقال جرم برای شکلهای هندسی مختلف

۲-۳A اعداد بدون بعد مورد استفاده برای همبسته کردن^(۱) دادههای تجربی

دادههای تجربی مربوط به ضرایب انتقال جرم که با انواع مختلف سیالات در سرعتهای مختلف و با شکلهای هندسی متفاوت به دست آمده اند، با استفاده از اعداد بدون بعد مشابه با انتقال حرارت و انتقال ممتوم همبسته می شوند. روشهای آنالیز ابعادی در بخشهای ۱۱-۳، ۱۴-۴ و ۸-۷ بحث شده است. مهمترین گروه بدون بعد عدد رینولدز (N_{Re}) است که میزان اغتشاش را نشان می دهد.

$$N_{Re} = \frac{L v \rho}{\mu} \quad (V-3-1)$$

که L همان قطر (D_p) برای یک کره، قطر لوله (D) یا طول (L) برای یک صفحه صاف است. v سرعت جرمی میانگین در یک لوله است. اغلب در یک بستر پر شده سرعت ذاتی v' در سطح مقطع خالی به کار می‌رود و گاهی از سرعت v به صورت $v = \frac{v'}{\epsilon}$ استفاده می‌شود. که در این رابطه v سرعت بین ذرات و ϵ تخلخل بستر است.

عدد اشمیت به صورت زیر است.

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \quad (7-3-2)$$

ویسکوزیته μ و دانسیته ρ خواص فیزیکی مخلوط تشکیل شده از حل شونده A و سیال B هستند. اگر مخلوط رقیق باشد می‌توان از خواص سیال خالص B استفاده کرد. عدد پراوتل $(c_p \mu / k)$ در انتقال حرارت معادل با عدد اشمیت در انتقال جرم است. عدد اشمیت نسبت ضریب نفوذ ممتوم (μ / ρ) به ضریب نفوذ انتقال جرم (D_{AB}) است و به صورت فیزیکی ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی را به ضخامت لایه مرزی غلظتی ارتباط می‌دهد.

عدد بدون بُعد شروود به صورت زیر است،

$$N_{Sh} = k'_c \frac{L}{D_{AB}} = k_c y_{BM} \frac{L}{D_{AB}} = \frac{k'_x}{c} \frac{L}{D_{AB}} = \dots \quad (7-3-3)$$

می‌توان مقادیر دیگری را برای k'_c از جدول ۷-۲-۱ جایگزین کرد.

عدد استانتون که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر است:

$$N_{St} = \frac{k'_c}{v} = \frac{k'_y}{G_M} = \frac{k'_G P}{G_M} = \dots \quad (7-3-4)$$

مجدداً می‌توان مقادیر دیگری برای k'_c جایگزین کرد. $G_M = \frac{v \rho}{M_{av}} = v c$.

اغلب ضریب انتقال جرم به صورت یک ضریب بدون بعد J_D همبسته می‌شود که با k'_c و N_{Sh} به صورت زیر ارتباط دارد.

$$J_D = \frac{k'_c}{v} (N_{Sc})^{2/3} = \frac{k'_G P}{G_M} (N_{Sc})^{2/3} = \dots = N_{Sh} / (N_{Re} N_{Sc}^{1/3}) \quad (7-3-5)$$

در انتقال حرارت پارامتر بدون بعد J_H به صورت زیر است:

$$J_H = \frac{h}{c_p G} (N_{Pr})^{2/3} \quad (7-3-6)$$

۷-۳B تشابه میان انتقال حرارت، ممتوم و جرم

۱- مقدمه: در انتقال مولکولی ممتوم، حرارت یا جرم تشابه زیادی وجود دارد که در فصلهای ۲ تا ۶

مورد اشاره قرار گرفته‌اند. معادلات نفوذ مولکولی نیوتون در ارتباط با ممتوم، معادلات فوریه در انتقال حرارت و معادلات فیک در انتقال جرم بسیار شبیه بهم هستند و می‌توانیم بگوییم که تشابهی میان این سه فرایند انتقالی مولکولی وجود دارد. همچنین تشابهاتی در انتقال مغشوش وجود دارد که همچنانکه در بخشهای VC-۵ و ۱A-۶ بحث شد، معادلات شار با استفاده از ضریب نفوذ ممتوم گردابه‌ای مغشوش^(۱) (ϵ_t)، ضریب نفوذ حرارتی گردابه‌ای^(۲) (α_t) و ضریب نفوذ جرمی گردابه‌ای مغشوش^(۳) (ϵ_M) نوشته می‌شوند. اما این تشابهات به خوبی از نظر فیزیکی و ریاضی تعریف نشده‌اند و ربط دادن آنها به یکدیگر مشکل است.

بررسی منابع نشان می‌دهد که تلاشهای زیادی برای بسط تشابه میان این سه فرایند در حالت مغشوش انجام گرفته است به طوریکه می‌توان خصوصیات یک فرایند را نسبت به فرایندهای دیگر پیش‌بینی کرد. چند نمونه از این تشابهات را بررسی می‌کنیم.

۲- تشابه رینولدز^(۴). رینولدز اولین کسی بود که به تشابهات موجود در فرایندهای انتقال توجه کرد و انتقال حرارت مغشوش را به ممتوم مغشوش مرتبط کرد. سپس انتقال جرم نیز به انتقال ممتوم و حرارت ارتباط داده شد. این تشابه را از معادلات (۶-۱-۴) تا (۶-۱-۶) برای انتقال مغشوش به دست می‌آوریم. در جریان سیال در یک لوله، برای انتقال حرارت از سیال به دیواره لوله معادله (۶-۱-۵) به صورت زیر نوشته می‌شود، که z فاصله از دیواره است:

$$\frac{q}{A} = -\rho c_p (\alpha + \alpha_t) \frac{dT}{dz} \quad (7-3-7)$$

معادله (۶-۱-۴) برای انتقال ممتوم به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\tau = -\rho \left(\frac{\mu}{\rho} + \epsilon_t \right) \frac{dv}{dz} \quad (7-3-8)$$

سپس فرض می‌کنیم که α و μ/ρ ناچیز هستند و $\alpha_t = \epsilon_t$ بنابراین از تقسیم معادله (۷-۳-۷) بر (۷-۳-۸) داریم،

$$\left(\frac{\tau}{q/A} \right) c_p dT = dv \quad (7-3-9)$$

اگر فرض کنیم که شار گرمایی q/A در یک سیستم مشابه با شار ممتوم τ باشد نسبت $\frac{\tau}{q/A}$ باید در تمام موقعیتهای شعاعی ثابت باشد. اکنون بین شرایط دیواره که در آن $T = T_i$ و $v = 0$ و نقطه‌ای در سیال که در آن نقطه T برابر با دمای توده سیال است انتگرال گیری می‌کنیم و فرض می‌کنیم که سرعت در این نقطه

1. turbulent eddy momentum diffusivity

2. turbulent eddy thermal diffusivity

3. turbulent eddy mass diffusivity

4. Reynolds analogy

همان سرعت توده سیال (v_{av}) است. همچنین نسبت q/A برابر با شار دیواره در نظر گرفته می‌شود. τ تنش در دیواره است و به صورت τ_s نوشته می‌شود. بنابراین،

$$\frac{\tau_s}{q/A} c_p(T - T_i) = v_{av} - 0 \quad (V-3-10)$$

با جایگزینی $\frac{q}{A} = h(T - T_i)$ و $\tau_s = f v_{av}^2 \rho / 2$ از معادله (۲-۱۰-۴) در معادله (۷-۳-۱۰)،

$$\frac{f}{2} = \frac{h}{c_p v_{av} \rho} = \frac{h}{c_p G} \quad (V-3-10)$$

به روش مشابه با استفاده از معادله (۶-۱-۶) برای $J^* A$ و همچنین $J^* A = K'_c(C_A - C_{Ai})$ می‌توانیم این رابطه را به معادله (۷-۳-۸) برای انتقال ممتوم ارتباط دهیم. بنابراین تشابه کامل رینولدز به صورت زیر است،

$$\frac{f}{2} = \frac{h}{c_p G} = \frac{k'_c}{v_{av}} \quad (V-3-12)$$

داده‌های تجربی در مورد جریان گازها با معادله (۷-۳-۱۲) تقریباً توافق دارد. این موضوع در صورتی صادق است که اعداد پراتل و اشمیت نزدیک به یک باشند و در جریان گذرنده از روی یک سطح صاف یا از داخل یک لوله فقط اصطکاک پوسته‌ای وجود داشته باشد. هنگامی که جریان مایع داشته باشیم که در آن نیروی دراگ شکلی موجود است، تشابه معتبر نیست.

۳- تشابهات دیگر: تشابه رینولدز فرض می‌کند که ضرایب نفوذ مغشوش ϵ_1 ، ϵ_1 و ϵ_M همه مساوی هستند و ضرایب نفوذ مولکولی μ/ρ و α و D_{AB} در مقایسه با ضرایب نفوذ مغشوش ناچیز می‌باشند. هنگامی که عدد پراتل $\frac{(\mu/\rho)}{\alpha}$ برابر یا یک است بنابراین، $\mu/\rho = \alpha$ همچنین در شرایط $N_{Sc} = 1$ ، $\mu/\rho = D_{AB}$ بنابراین $(\mu/\rho + \epsilon_1) = (\alpha + \alpha_1) = (D_{AB} + \epsilon_M)$ و تشابه رینولدز با عبارات مولکولی موجود به دست می‌آید. اما هنگامی که زیر لایه ویسکوز مهم می‌شود تشابه دیگر برقرار نیست چون ضریب نفوذ گرذابه‌ای به سمت صفر می‌رود و ضریب نفوذ مولکولی مهم می‌شود.

پراتل تشابه رینولدز را با نوشتن معادله نفوذ مولکولی معمولی برای زیر لایه ویسکوز تغییر داد و یک معادله تشابه رینولدز برای ناحیه مغشوش به دست آورد. سپس چون این فرایندها به صورت سری هستند، بنابراین این معادلات برای به دست آوردن یک معادله کلی ترکیب شده‌اند (GI). این نتایج برای سیالاتی که اعداد پراتل و اشمیت آنها برابر با یک نیست قابل اعتماد نیستند.

ون کارمن تشابه پراتل را با در نظر گرفتن ناحیه بافر علاوه بر زیر لایه ویسکوز و لایه مغشوش، تغییر داد. این سه ناحیه در توزیع عمومی سرعت در شکل ۴-۱۰-۳ نشان داده شده‌اند. مجدداً معادله‌ای برای نفوذ مولکولی در زیر لایه ویسکوز با استفاده از ضریب نفوذ مولکولی نوشته می‌شود و

معادله تشابه رینولدز برای هسته مغشوش نوشته می‌شود. هم ضریب نفوذ مولکولی و هم ضریب نفوذ گردابه‌ای برای معادله لایه بافر در نظر گرفته می‌شوند، که سرعت در این لایه برای به دست آوردن معادله ضریب نفوذ گردابه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. این سه معادله برای به دست آوردن تشابه ون کارمن با هم ترکیب می‌شوند. تشابهات بی‌شمار دیگری نیز در مراجع وجود دارد (S4, P1).

۴- تشابه ضریب J چیلتون و کولبورن^(۱). موفق‌ترین و وسیع‌ترین تشابه مورد استفاده تشابه ضریب J چیلتون و کولبورن است (C2). این تشابه بر اساس داده‌های تجربی برای گازها و مایعات در رژیمهای جریان آرام و مغشوش است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{f}{2} = J_H = \frac{h}{c_p G} (N_{pr})^{2/3} = J_D = \frac{k'_c}{v_{rv}} (N_{sc})^{2/3} \quad (7-3-13)$$

گورچه این معادله بر اساس داده‌های تجربی برای جریانهای آرام و مغشوش است اما می‌توان نشان داد که در راه‌حلهای دقیق به دست آمده از جریان آرام روی یک صفحه صاف در بخشهای ۱۰-۳ و ۷-۵ نیز صادق است. معادله (۷-۳-۱۳) در همبسته کردن داده‌های انتقال ممتوم، حرارت و جرم کاملاً مفید است. با این رابطه می‌توان یک ضریب نامعلوم انتقال را هنگامی که ضرایب دیگر معلوم باشند پیش بینی کرد. در انتقال ممتوم ضریب اصطکاک از نیروی دراگ کل یا افت اصطکاک به دست می‌آید که شامل نیروی دراگ شکلی یا افت ممتوم ناشی از اجسام زیر و همچنین نیروی دراگ پوسته‌ای است. برای جریان گذرنده از روی یک صفحه صاف یا جریان در یک لوله که نیروی دراگ شکلی موجود نیست $f/2 = J_H = J_D$. وقتی نیروی دراگ شکلی موجود باشد مانند جریان در بسترهای پر شده یا جریان روی بعضی از اجسام زیر، $f/2$ بزرگتر از J_H یا J_D بوده و $J_H \cong J_D$

۷-۳C به دست آوردن ضرایب انتقال جرم در جریان آرام

۱- مقدمه: هنگامی که سیال به صورت آرام جریان دارد و انتقال جرم بر اساس نفوذ مولکولی اتفاق می‌افتد، معادلات خیلی شبیه به معادلات انتقال حرارت به طریق هدایت در جریان آرام هستند. پدیده‌های انتقال حرارت و جرم همیشه به طور کامل مشابه نیستند چون چند جزء در انتقال جرم ممکن است در حال نفوذ باشند. همچنین شار جرم عمود بر جهت جریان بایستی کوچک باشد تا توزیع سرعت آرام را برهم نزنند.

از نظر تئوری نیازی به ضرایب تجربی انتقال جرم برای جریان آرام نیست، چون معادلات مربوط به انتقال ممتوم و نفوذ با روشهای تحلیلی حل می‌شوند. اما در بسیاری از حالات واقعی تفسیر ریاضی

جریان آرام روی اجسام با شکل‌های هندسی مختلف مانند جریان گذرنده از روی یک استوانه یا جریان در یک بستر پر شده بسیار مشکل است. به این دلیل غالباً ضرایب انتقال جرم تجربی مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک روش تئوری ساده شده برای دو حالت جریان آرام در زیر توضیح داده می‌شود.

۲- انتقال جرم در جریان آرام در یک لوله: حالتی را در نظر می‌گیریم که انتقال جرم از دیواره لوله به سیال داخل آن که جریان آرام دارد، صورت می‌گیرد. در این حالت دیواره به عنوان مثال از اسید بنزوئیک جامد ساخته شده است که در آب حل می‌شود. این حالت مشابه با انتقال حرارت از یک دیواره به سیال در حال جریان است که در آنجا جابه‌جایی آزاد ناچیز است. در جریان کاملاً توسعه یافته توزیع سرعت سهمی شکل که با معادلات (۱۸-۶-۲) و (۲۰-۶-۲) بیان می‌شوند به صورت زیر است:

$$v_x = v_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = 2v_{av} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (7-3-14)$$

که v_x سرعت در جهت x در فاصله x از مرکز است. برای نفوذ پایدار در یک استوانه، موازنه جرم روی یک المان دیفرانسیلی نوشته می‌شود که در آن نرخ ورودی جرم از طریق جابه‌جایی و نفوذ، مساوی با نرخ خروجی جرم به صورت شعاعی و از طریق نفوذ است.

$$v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} = D_{AB} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial c_A}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \right) \quad (7-3-15)$$

پس اگر نفوذ در جهت x ناچیز باشد $\partial^2 c_A / \partial x^2 = 0$ با ترکیب معادلات (۱۴-۳-۷) و (۱۵-۳-۷)، حل نهایی معادله (S1) به صورت سری‌های پیچیده‌ای مشابه با حل گریتز^(۱) برای انتقال حرارت و توزیع سرعت سهمی به دست می‌آید.

اگر فرض شود که توزیع سرعت مانند جریان میله‌ای صاف است، پاسخ ساده‌تری به دست می‌آید (S1). سومین حل که حل تقریبی لویک^(۲) نامیده می‌شود مربوط به حالتی است که توزیع سرعت خطی نزدیک دیواره وجود دارد و حل شونده فقط در فاصله کوتاهی از دیواره به داخل سیال نفوذ می‌کند. این حالت مشابه با توزیع سهمی سرعت در جریان‌هایی با نرخ بالاست. معادلات تجربی طراحی در بخش ۷-۳D برای این حالت ارائه شده‌اند.

۳- نفوذ در یک فیلم در حال سقوط آرام: در بخش ۹C-۲ معادله توزیع سرعت در یک فیلم در حال سقوط راکه در شکل ۱۸-۳-۷ نشان داده شده است به دست آوردیم. انتقال جرم حل شونده A به داخل فیلم در حال سقوط آرام را در نظر می‌گیریم که این حالت در ستون‌های دیواره مرطوب، در بسط تئوریهای

مربوط به انتقال جرم در بسته‌های سیال ساکن و در انتقال جرم مغشوش کاربرد دارد. حل شونده A در فصل مشترک جذب گاز می‌شود و سپس فاصله کوتاهی در مایع نفوذ می‌کند که به اندازه تمامی فاصله $x = \delta$ نیست. در حالت پایدار غلظت ورودی $c_A = 0$ است. در شکل ۷-۳-۱a توزیع غلظت c_A در نقطه‌ای به فاصله z از ورودی نشان داده شده است.

موازنه جرم روی المان نشان داده شده در شکل ۷-۳-۱b برای حالت پایدار نوشته می‌شود.

$$N_{Ax}|x(\Delta z) + N_{Az}|z(\Delta x) = N_{Ax}|x+\Delta x(\Delta z) + N_{Az}|z+\Delta z(\Delta x) \quad (7-3-16)$$

در یک محلول رقیق معادله نفوذ A در جهت x برابر است با:

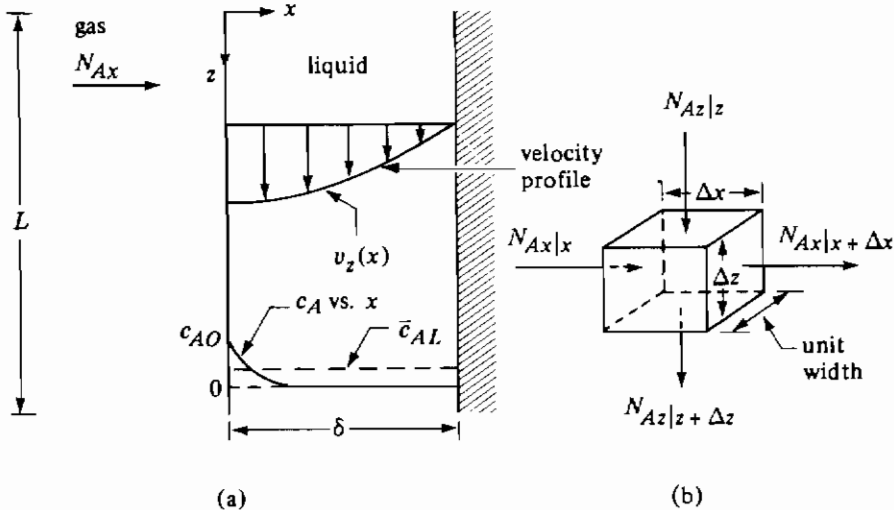
$$N_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x} + \text{zero convection} \quad (7-3-17)$$

نفوذ در جهت z ناچیز است.

$$N_{Az} = 0 + c_A v_z \quad (7-3-18)$$

با تقسیم معادله (۷-۳-۱۶) بر $\Delta x \Delta z$ و میل دادن Δx و Δz به سمت صفر و با جایگزینی معادلات (۷-۳-۱۷) و (۷-۳-۱۸) در نتیجه به دست آمده داریم،

$$v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (7-3-19)$$



شکل ۷-۳-۱. نفوذ حل شونده A در یک فیلم در حال سقوط آرام: (a) توزیع سرعت و توزیع غلظت (b) المان کوچک برای موازنه جرم

توزیع سرعت براساس معادلات (۲۴-۹-۲) و (۲۵-۹-۲) سهمی است و $v_z = v_{z \max} [1 - (x/\delta)^2]$ نیز $v_{z \max} = \left(\frac{3}{2}\right) v_{z \text{ av}}$ است. اگر حل شونده فقط فاصله کوتاهی در سیال نفوذ کرده باشد، زمان تماس کوتاه t ثانیه مساوی با z/v_{\max} است و جزء نفوذکننده A با سرعتی برابر $v_{z \max}$ یا v_{\max} (با حذف زیرنویس z) حرکت کرده است. پس معادله (۱۹-۳-۷) به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\frac{\partial c_A}{\partial (z/v_{\max})} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (7-3-20)$$

می‌توانیم از معادله (۲۰-۳-۷) با استفاده از شرایط مرزی $c_A = 0$ در $z = 0$ و $c_A = c_{A0}$ در $x = 0$ و $c_A = 0$ در $x = \infty$ برای به دست آوردن رابطه زیر انتگرال بگیریم،

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4D_{AB} z/v_{\max}}} \right) \quad (7-3-21)$$

که در این جا $\operatorname{erfc} y$ تابع خطاست و $\operatorname{erfc} y = 1 - \operatorname{erf} y$. مقادیر $\operatorname{erf} y$ در جداول آمده است.

برای تعیین شار مولی موضعی در سطح $x = 0$ در فاصله z از بالا یا ورودی، می‌توانیم بنویسیم:

(B1):

$$N_{Ax}(z) \Big|_{x=0} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x} \Big|_{x=0} = c_{A0} \sqrt{\frac{D_{AB} v_{\max}}{\pi z}} \quad (7-3-22)$$

کل مولهای A منتقل شده در ثانیه به مایع در کل طول $z = 0$ تا $z = L$ به ازای واحد عرض برابر است با:

$$\begin{aligned} N_A(L \cdot 1) &= (1) \int_0^L (N_{Ax}|_{x=0}) dz \\ &= (1) \int_0^L c_{A0} \left(\frac{D_{AB} v_{\max}}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{z^{1/2}} dz \\ &= (L \cdot 1) c_{A0} \sqrt{\frac{4D_{AB} v_{\max}}{\pi L}} \end{aligned} \quad (7-3-23)$$

عبارت L/v_{\max} برابر با t_L زمان تماس مایع با حل شونده A در فاز گاز می‌باشد. این بدین معناست که نرخ انتقال جرم متناسب با $D_{AB}^{1/2}$ و $\frac{1}{t_L^{1/2}}$ است. این، مبنای تئوری نفوذ در انتقال جرم مغشوش است که در آن بسته‌های مایع در معرض نفوذ پایدار در زمانهای تماس کوتاه قرار دارند.

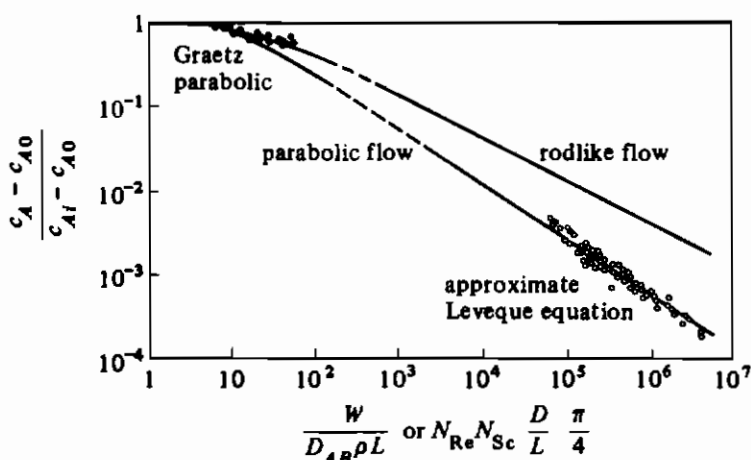
۷-۳D انتقال جرم در جریان داخل لوله‌ها

۱- انتقال جرم برای جریان آرام داخل لوله‌ها: هنگامی که یک مایع یا گاز در داخل یک لوله در جریان است و عدد رینولدز $Dv\rho/\mu$ کمتر از ۲۱۰۰ است، جریان آرام است. داده‌های تجربی در مورد انتقال جرم از دیواره‌ها برای گازها به دست آمده است (L1, G2) و در شکل ۷-۳-۲ برای مقادیر $\rho L W/D_{AB}$ کمتر از ۷۰ رسم شده است. محور عمودی $(c_A - c_{A0})/(c_{Ai} - c_{A0})$ است که در آن c_A غلظت خروجی، c_{A0} غلظت ورودی و c_{Ai} غلظت در فصل مشترک بین دیوار و گاز است. محور افقی پارامتر بدون بُعد $\rho W/D_{AB} L$ یا $(\pi/4) N_{Re} N_{Sc} (D/L)$ است که W جریان بر حسب kg/s و L طول ناحیه انتقال جرم بر حسب متر است. چون داده‌های تجربی با نمودار جریان میله‌ای توافق دارد بنابراین از آن نمودار باید استفاده کرد. توزیع سرعت در ابتدای لوله با فرض این‌که جریان کاملاً توسعه یافته باشد به شکل سهمی است. برای مایعاتی که D_{AB} آنها کوچک است، داده‌های تجربی با خط مربوط به جریان سهمی توافق دارد که برای $\rho L W/D_{AB}$ بزرگتر از ۴۰۰ به صورت زیر است،

$$\frac{c_A - c_{A0}}{c_{Ai} - c_{A0}} = 5.5 \left(\frac{W}{D_{AB} \rho L} \right)^{-2/3} \quad (7-3-24)$$

۲- انتقال جرم جریان مغشوش داخل لوله‌ها: برای جریان مغشوش گازها یا مایعات با $Dv\rho/\mu$ بزرگتر از ۲۱۰۰ که در داخل یک لوله جریان دارند،

$$N_{Sh} = k_c \frac{D}{D_{AB}} = \frac{k_c P_{BM}}{P} \frac{D}{D_{AB}} = 0.023 \left(\frac{Dv\rho}{\mu} \right)^{0.83} \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right)^{0.33} \quad (7-3-25)$$



شکل ۷-۳-۲. داده‌های نفوذ در یک سیال در جریان آرام در داخل یک لوله: دایره‌های توپر داده‌های تبخیر از Sherwood و Gilliland، دایره‌های توخالی داده‌های انحلال جامدات از Linton و Sherwood. (باکسب مجوز از: (W.H. Linton, and T.K. Sherwood, Chem. Eng. Progr. 46, 258 (1950)

این معادله برای عدد اشمیت 0.6 تا 3000 صادق است ($G2, L1$). توجه کنید که N_{Sc} گازها در محدوده 0.5 تا 3 است و برای مایعات معمولاً بالاتر از 100 است. معادله $(7-3-25)$ برای انتقال جرم و معادله $(8-5-4)$ برای انتقال حرارت در داخل یک لوله کاملاً با هم مشابهند.

۳- انتقال جرم برای جریان در داخل ستونهای دیواره مرطوب: هنگامی که یک گاز در وسط یک برج جداره مرطوب در جریان است، می‌توان از همان روابطی که برای انتقال جرم یک گاز در جریان آرام یا مغشوش در یک لوله استفاده شد، در این‌جا نیز استفاده کرد. این بدین معناست که معادلات $(7-3-24)$ و $(7-3-25)$ برای پیش‌بینی انتقال جرم در گاز قابل استفاده هستند. معادلات $(7-3-22)$ و $(7-3-23)$ برای انتقال جرم در فیلم مایع نزولی در برج جداره مرطوب تا عدد رینولدز $4\Gamma/\mu$ حدود 1200 تعریف شده بر اساس معادله $(2-9-29)$ قابل استفاده هستند. از نظر تئوری مقادیر پیش‌بینی شده باید در $1/5$ ضرب شوند زیرا پارامترهایی مانند موج دار بودن جریان و عوامل دیگر باید در نظر گرفته شوند. این معادلات برای زمانهای کوتاه یا اعداد رینولدز بالاتر از 100 صادق هستند ($S1$).

مثال ۷-۳-۱ انتقال جرم در داخل یک لوله

داخل یک لوله با نفتالین پوشش داده شده است و قطر داخلی آن 20 mm و طول آن $1/1 \text{ m}$ است. هوا در 318 K و فشار میانگین $101/3 \text{ kPa}$ از طریق این لوله با سرعت $0/8 \text{ m/s}$ جریان دارد. با فرض این‌که فشار مطلق ثابت بماند غلظت نفتالین را در هوای خروجی محاسبه کنید. خواص فیزیکی در مثال ۴-۲-۶ داده شده است.

حل: از مثال ۴-۲-۶، $D_{AB} = 6/92 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ و فشار بخار برابر با $p_{Ai} = 74 \text{ Pa}$ است که براساس آن می‌توان غلظت را به این صورت به دست آورد:

$$c_{Ai} = \frac{p_{Ai}}{RT} = \frac{74}{(8314/3 \times 318)} = 2/799 \times 10^{-5} \text{ kgmol/m}^3$$

برای هوا از ضمیمه A.3، $\mu = 1/932 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ و $\rho = 1/114 \text{ kg/m}^3$ عدد اشمیت برابر است با:

$$N_{Sc} = \frac{\rho D_{AB}}{\mu} = \frac{1/114 \times 6/92 \times 10^{-6}}{1/932 \times 10^{-5}} = 2/506$$

عدد رینولدز به صورت زیر است،

$$N_{Re} = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{0/02 \times 0/8 \times 1/114}{1/932 \times 10^{-5}} = 922/6$$

بنابراین جریان آرام است. پس،

$$N_{Re} N_{Sc} \frac{D}{L} \frac{\pi}{4} = 922/6 \times 2/506 \times \frac{2/0.2 \pi}{1/1} \frac{\pi}{4} = 33/0.2$$

با استفاده از شکل ۲-۳-۷ و خط مربوط به جریان میله‌ای، $\frac{(C_A - C_{Ae})}{(C_{Ai} - C_{Ae})} = 0/55$ همچنین، $0 = (C_A - C_{Ae})$ (ورودی) C_{Ae} سپس، $\frac{(C_A - 0)}{(2/799 \times 10^{-5} - 0)} = 0/55$ پس از حل رابطه، C_A در خروجی برابر است با $1/539 \times 10^{-5} \text{ kgmol/m}^3$.

۷-۳E انتقال جرم در جریان خارج از سطح جامد

۱- انتقال جرم در جریان موازی با سطوح صاف: انتقال جرم و تبخیر مایعات از یک صفحه یا سطح صاف به داخل یک جریان از موادی است که در فرایند خشک کردن مواد معدنی و بیولوژیکی، تبخیر حلالها از رنگ، برای صفحات داخل تونل باد و در جریان داخل کانالها در فرایندهای شیمیایی کاربرد دارد.

هنگامی که سیال در فضای باز و به صورت جریان آزاد از روی یک صفحه صاف عبور می‌کند لایه مرزی کاملاً توسعه یافته نیست. برای گازها یا تبخیر مایعات در فاز گاز در ناحیه آرام با عدد رینولدز $(N_{Re,L} = \frac{\rho v L}{\mu})$ کمتر از ۱۵۰۰۰، اطلاعات لازم می‌تواند بر اساس معادله زیر (S4) با خطای حدود $\pm 25\%$ ارائه شود.

$$J_D = 0.664 N_{Re,L}^{-0.5} \quad (7-3-26)$$

با نوشتن معادله (۷-۳-۲۶) بر حسب عدد شرود،

$$\frac{k_c L}{D_{AB}} = N_{Sh} = 0.664 N_{Re,L}^{-0.5} N_{Sc}^{1/3} \quad (7-3-27)$$

که L طول صفحه در جهت جریان است. همچنین برای این حالت $J_H = J_D = \frac{f}{\gamma}$ است. برای گازها در محدوده عدد رینولدز ۱۵۰۰۰ تا ۳۰۰۰۰۰، اطلاعات با حدود $\pm 30\%$ خطا از رابطه $J_D = J_H = \frac{f}{\gamma}$ به صورت زیر به دست می‌آید،

$$J_D = 0.036 N_{Re,L}^{-0.2} \quad (7-3-28)$$

داده‌های تجربی مایعات به وسیله رابطه زیر با حدود $\pm 40\%$ خطا برای محدوده عدد رینولدز ۶۰۰ تا ۵۰۰۰۰ (L2) می‌شود،

$$J_D = 0.99 N_{Re,L}^{-0.5} \quad (7-3-29)$$

مثال ۲-۳-۷ انتقال جرم از یک صفحه صاف

حجم زیادی از آب خالص در $26/1^\circ\text{C}$ موازی با یک صفحه صاف جامد از جنس اسید بنزوئیک در جریان است. سرعت آب $0/061\text{ m/s}$ است. حلالیت اسید بنزوئیک در آب $0/02948\text{ kgmol/m}^3$ است. ضریب نفوذ اسید بنزوئیک $1/245 \times 10^{-9}\text{ m}^2/\text{s}$ است. ضریب انتقال جرم k_L و شار N_A را محاسبه کنید.

حل: چون محلول کاملاً رقیق است، خواص فیزیکی آب در $26/1^\circ\text{C}$ از ضمیمه A.2 به صورت زیر است،

$$\mu = 8/71 \times 10^{-4}\text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\rho = 996\text{ kg/m}^3$$

$$D_{AB} = 1/254 \times 10^{-9}\text{ m}^2/\text{s}$$

عدد اشمیت برابر است با،

$$N_{Sc} = \frac{8/71 \times 10^{-4}}{996 \times 1/254 \times 10^{-9}} = 702$$

و همچنین عدد رینولدز به صورت زیر است،

$$N_{Re,L} = \frac{L v \rho}{\mu} = \frac{0/244 \times 0/061 \times 996}{8/71 \times 10^{-4}} = 1/7 \times 10^4$$

با استفاده از معادله (۲۹-۳-۷)،

$$J_D = 0/99 N_{Re,L}^{-1/5} = 0/99 \times (1/7 \times 10^4)^{-1/5} = 0/00758$$

تعریف J_D از معادله (۵-۳-۷) به صورت زیر است،

$$J_D = \frac{k'_c}{v} (N_{Sc})^{2/3} \quad (7-3-5)$$

پس از حل رابطه نسبت به k'_c داریم، $k'_c = J_D v (N_{Sc})^{-2/3}$. با جایگزینی مقادیر معلوم و حل آن،

$$k'_c = 0/00758 \times 0/061 \times (702)^{-2/3} = 5/85 \times 10^{-6}\text{ m/s}$$

در این حالت، A در جزء ثابت B نفوذ می‌کند، بنابراین از k_c در معادله (۱۰-۲-۷) باید استفاده شود،

$$N_A = \frac{k'_c}{x_{BM}} (c_{A1} - c_{A2}) = k_c (c_{A1} - c_{A2}) \quad (7-2-10)$$

چون محلول خیلی رقیق است، $x_{BM} \cong 1$ و $k'_c \cong k_c$. همچنین، $c_{A1} = 2/948 \times 10^{-2} \text{ kgmol/m}^3$ ، و $c_{A2} = 0$ (حجم زیاد آب تازه). با جایگزینی در معادله (۷-۲-۱۰)،

$$N_A = (5/85 \times 10^{-1}) \times (0/02948 - 0) = 1/726 \times 10^{-2} \text{ kgmol/s.m}^2$$

۲- انتقال جرم در جریان عبوری از روی یک کره: عدد شروود که به صورت $\frac{k'_c D_p}{D_{AB}}$ است، در جریان عبوری از روی یک کره با عدد رینولدز بسیار کم $Re = D_p \rho v / \mu$ که v سرعت میانگین سیال قبل از رسیدن به کره است، باید به سمت مقدار ۲ میل کند. این مسأله از رابطه (۶-۲-۳۳) نیز به دست می‌آید، که این معادله برای یک محیط ساکن به دست آمده است. با بازنویسی معادله (۶-۲-۳۳) به صورت زیر، که D_p قطر کره است خواهیم داشت،

$$N_A = \frac{2D_{AB}}{D_p} (c_{A1} - c_{A2}) = k_c (c_{A1} - c_{A2}) \quad (7-3-30)$$

ضریب انتقال جرم k_c که برای محلول رقیق k'_c است به صورت زیر است،

$$k'_c = \frac{2D_{AB}}{D_p} \quad (7-3-31)$$

که پس از مرتب کردن،

$$\frac{k'_c D_p}{D_{AB}} = N_{Sh} = 2.0 \quad (7-3-32)$$

البته اثرات جابه‌جایی طبیعی می‌تواند باعث افزایش k'_c شود.

برای گازها با عدد اشمیت $0/6$ تا $2/7$ و محدوده عدد رینولدز ۱ تا ۴۸۰۰۰ از معادله اصلاح شده زیر (G1) استفاده می‌شود،

$$N_{Sh} = 2 + 0.552 N_{Re}^{0.53} N_{Sc}^{1/3} \quad (7-3-33)$$

این معادله همچنین برای انتقال حرارت وقتی که عدد پراتل جایگزین عدد اشمیت و عدد ناسلت جایگزین عدد شروود شود قابل استفاده است.

برای مایعات (G3) در محدوده رینولدز ۲ تا ۲۰۰۰، از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد.

$$N_{Sh} = 2 + 0.95 N_{Re}^{0.50} N_{Sc}^{1/3} \quad (7-3-34)$$

برای مایعات در محدوده رینولدز ۲۰۰۰ تا ۱۷۰۰۰ از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$N_{Sh} = 0.347 N_{Re}^{0.62} N_{Sc}^{1/3} \quad (7-3-35)$$

مثال ۷-۳-۳ انتقال جرم از یک کره

ضریب انتقال جرم و شار انتقال جرم از یک کره نفتالین به هوا در 45°C و فشار مطلق یک اتمسفر را حساب کنید. سرعت هوا 0.305 m/s و قطر کره $25/4\text{ mm}$ است. ضریب نفوذ نفتالین در هوا برابر $10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ و $6/92 \times 10^{-6}$ و فشار بخار نفتالین جامد 0.555 mmHg است. از واحدهای انگلیسی و SI استفاده کنید.

حل: در سیستم واحدهای انگلیسی:

$$D_{AB} = 6/92 \times 10^{-6} \times (3/875 \times 10^4) = 0.2682\text{ ft}^2/\text{hr}$$

قطر بر حسب واحدهای انگلیسی برابر است با:

$$D_p = 0.0254\text{ m} = 0.0254 \times (3/2808) = 0.0833\text{ ft}$$

از ضمیمه A.3 خواص فیزیکی هوا به دست می‌آید چون غلظت نفتالین کم است.

$$\mu = 1/93 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s} = 1/93 \times 10^{-5} \times 2/4191 \times 10^3 = 0.0467\text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{h}$$

$$\rho = 1/113\text{ kg/m}^3 = \frac{1/113}{16/0.185} = 0.0695\text{ lb}_m/\text{ft}^3$$

$$v = 0.305\text{ m/s} = 0.305 \times (3600 \times 3/2808) = 3600\text{ ft/h}$$

عدد اشمیت به صورت زیر است،

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{0.0467}{0.0695 \times 0.2682} = 2/505$$

$$N_{Sc} = \frac{1/93 \times 10^{-5}}{1/113 \times 6/92 \times 10^{-6}} = 2/505$$

و عدد رینولدز به صورت زیر است،

$$N_{Re} = \frac{D_p v \rho}{\mu} = \frac{0.0833 \times 3600 \times 0.0695}{0.0467} = 446$$

$$N_{Re} = \frac{0.0254 \times 0.305 \times 1/113}{1/93 \times 10^{-5}} = 446$$

از معادله (۷-۳-۳۳) برای گازها استفاده می‌شود.

$$N_{Sh} = 2 + 0.552 (N_{Re})^{1/5} (N_{Sc})^{1/3} = 2 + 0.552 \times 446^{1/5} \times 2/505^{1/3} = 21$$

از معادله (۷-۳-۳)،

$$N_{Sh} = k'_c \frac{L}{D_{AB}} = k'_c \frac{D_p}{D_{AB}}$$

با جایگزینی مقادیر معلوم و حل رابطه،

$$21 = \frac{k'_c \times 0.0833}{0.2682} \Rightarrow k'_c = 67/6 \text{ ft/h}$$

$$21 = \frac{k'_c \times 0.0254}{6/92 \times 10^{-3}} \Rightarrow k'_c = 5/72 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

از جدول ۷-۲-۱،

$$k'_c c = k'_c \frac{P}{R T} = k'_G P$$

بنابراین، در $T = 45 + 273 = 318 \text{ K} = 318 \times 1/8 = 574 \text{ }^\circ\text{R}$

$$k'_G = \frac{k'_c}{R T} = \frac{67/6}{0.73 \times 573} = 0.1616 \text{ lbmol/h.ft}^2.\text{atm}$$

$$k'_G = \frac{5/72 \times 10^{-3}}{8314 \times 318} = 2/163 \times 10^{-9} \text{ kgmol/s.m}^2.\text{Pa}$$

چون گاز خیلی رقیق است بنابراین، $1 \cong y_{BM}$ و $k_G \cong k'_G$. با جایگزینی در معادله (۷-۲-۱۲) که

$$P_{A1} = \frac{0.555}{0.76} = 7/303 \times 10^{-2} \text{ atm} = 74 \text{ Pa}$$

و $P_{A2} = 0$ (هوای خالص)،

$$N_A = k_G (P_{A1} - P_{A2}) = 0.1616 \times (7/303 \times 10^{-2} - 0)$$

$$= 1/18 \times 10^{-2} \text{ lbmol/h.ft}^2$$

$$= 2/163 \times 10^{-9} \times (74 - 0) = 1/599 \times 10^{-7} \text{ kgmol/s.m}^2$$

مساحت کره برابر است با،

$$A = \pi D_p^2 = \pi \times 0.0833^2 = 2/18 \times 10^{-2} \text{ ft}^2$$

$$= (2/18 \times 10^{-2}) \times \left(\frac{1}{3/2808}\right)^2 = 2/025 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\text{مقدار کل تبخیر شده} = N_A \cdot A = (1/18 \times 10^{-2}) \times (2/18 \times 10^{-2})$$

$$= 2/572 \times 10^{-6} \text{ lbmol/h}$$

$$= (1/599 \times 10^{-7}) \times (2/025 \times 10^{-2}) = 3/328 \times 10^{-10}$$

۳- انتقال جرم در بسترهای پر شده: انتقال جرم به و یا از بسترهای پر شده غالباً در فرایندهایی مانند خشک کردن، جذب سطحی گازها یا مایعات توسط ذرات جامد مانند زغال یا دفع سطحی از آنها و

همچنین انتقال جرم گازها یا مایعات با ذرات کاتالیزور، اتفاق می‌افتد. با استفاده از یک بستر پر شده می‌توان در یک حجم کوچک سطح انتقال جرم زیادی ایجاد کرد.

جزء خالی در یک بستر (ε)، حجم فضای خالی تقسیم بر کل حجم بستر است (فضای خالی به علاوه جامد). معمولاً مقدار آن بین ۰/۳ تا ۰/۵ تغییر می‌کند. به دلیل کانالیزه شدن جریان، غیر یکنواخت بودن آرایش پرکن‌ها و عوامل دیگر به دست آوردن داده‌های آزمایشی دقیق مشکل است و داده‌های تجربی محققین مختلف کاملاً با یکدیگر تفاوت دارد.

رابطه پیشنهاد شده در محدوده عدد رینولدز ۱۰ تا ۱۰۰۰۰ برای گازها در بستر پر شده‌ای از ذرات کروی شکل (D4) با خطای میانگین حدود ۰/۲۰± و خطای حداکثر حدود ۰/۵± به صورت زیر است،

$$J_D = J_H = \frac{0.4548}{\varepsilon} N_{Re}^{-0.4069} \quad (V-3-36)$$

نشان داده شده است که J_D و J_H تقریباً مساوی هستند (G5, G4). عدد رینولدز به صورت $N_{Re} = v' D_p \rho / \mu$ تعریف می‌شود که در آن D_p قطر ذرات کروی شکل و v' سرعت ذاتی میانگین در بستر خالی بدون پرکن است. در معادلات (V-3-36) تا (V-3-39) و معادلات (V-3-5) و (V-3-6) از v' استفاده می‌شود، در انتقال جرم مایعات در بسترهای پر شده باید از روابط Wilson و Geankoplis استفاده شود (W1). معادله مورد استفاده در محدوده عدد رینولدز $v' D_p \rho / \mu$ بین ۰/۰۱۶ تا ۵۵ و محدوده عدد اشمیت ۱۶۵ تا ۷۰۶۰۰ به صورت زیر است:

$$J_D = \frac{1.09}{\varepsilon} N_{Re}^{-2/3} \quad (V-3-37)$$

برای مایعات در محدوده عدد رینولدز ۵۵ تا ۱۵۰۰ و محدوده عدد اشمیت ۱۶۵ تا ۱۰۶۹۰ داریم،

$$J_D = \frac{0.250}{\varepsilon} N_{Re}^{-0.31} \quad (V-3-38)$$

یا به عنوان روش دیگر، معادله (V-3-36) می‌تواند برای مایعات در محدوده عدد رینولدز ۱۰ تا ۱۵۰۰ به کار رود.

معادله (V-3-36) برای گازها و مایعات در بسترهای سیالی شده با ذرات کروی شکل در محدوده عدد رینولدز ۱۰ تا ۴۰۰۰ به کار می‌رود. برای مایعات در بسترهای سیالی شده در محدوده عدد رینولدز ۱ تا ۱۰ داریم (D4)،

$$\varepsilon J_D = 1.1068 N_{Re}^{-0.72} \quad (V-3-39)$$

اگر از بسترهای پر شده با جامدات غیرکروی استفاده شود، باید در معادلات (۷-۳-۳۶) تا (۷-۳-۳۸) از ضرایب تصحیح تقریبی استفاده کرد. به عنوان مثال، انجام این کار برای یک ذره غیرکروی به این صورت است که قطر ذره برای استفاده در معادلات برای پیش بینی J_D قطر کره‌ای با سطح مفید برابر با سطح مفید ذره جامد در نظر گرفته می‌شود و شار این ذرات در بستر با استفاده از سطح ذرات محاسبه می‌شود. روش تقریبی دیگری نیز در مراجع داده شده است (G6).

۴- روش محاسبه برای بسترهای پر شده: ابتدا J_D برای محاسبه شار کلی در یک بستر پر شده، محاسبه می‌شود و سپس k_c بر حسب m/s با استفاده از J_D به دست می‌آید. سپس با معلوم بودن حجم کل بستر (V_b) (حجم خالی بعلاوه جامد) کل سطح تماس (A) ذرات جامد که همان سطح انتقال جرم می‌باشد با استفاده از معادلات (۷-۳-۴۰) و (۷-۳-۴۱) محاسبه می‌شود.

$$a = \frac{6(1-\varepsilon)}{D_p} \quad (7-3-40)$$

که در این رابطه a (بر حسب متر مربع) سطح مفید به ازای واحد حجم بستر با ذرات کروی می‌باشد.

$$A = aV_b \quad (7-3-41)$$

میانگین لگاریتمی اختلاف غلظت در ورودی و خروجی برای محاسبه نرخ انتقال جرم باید استفاده شود.

$$N_A A = Ak_c \frac{(c_{A1} - c_{A1}) - (c_{A1} - c_{A2})}{\ln \frac{c_{A1} - c_{A1}}{c_{A1} - c_{A2}}} \quad (7-3-42)$$

که عبارت نهایی، میانگین لگاریتمی اختلاف غلظت است. c_{A1} غلظت در سطح جامد بر حسب $kgmol/m^3$ ، c_{A1} غلظت توده‌ای سیال در ورودی و c_{A2} غلظت توده‌ای سیال در خروجی است. معادله موازنه جرم توده جریان، به صورت زیر است.

$$N_A A = V(c_{A2} - c_{A1}) \quad (7-3-43)$$

که در این رابطه، V نرخ حجمی جریان سیال ورودی بر حسب m^3/s است. معادلات (۷-۳-۴۲) و (۷-۳-۴۳) باید صادق باشند. کاربرد این دو معادله مشابه با کاربرد میانگین لگاریتمی اختلاف دما و موازنه گرمایی در مبدل‌های حرارتی است. این دو معادله همچنین برای یک سیال جاری در یک لوله یا سیالی که از روی یک صفحه صاف عبور می‌کند، می‌توانند به کار روند. که در این حالت A مساحت جانبی دیواره لوله یا مساحت صفحه صاف است.

مثال ۴-۳-۷ انتقال جرم یک مایع در یک بستر پر شده

آب خالص در $۲۶/۱\text{ }^\circ\text{C}$ با نرخ حجمی $۵/۵۱۴ \times ۱۰^{-۷}\text{ m}^3/\text{s}$ از یک بستر پر شده با ذرات کروی اسید بنزوئیک به قطر $۶/۳۷۵\text{ mm}$ عبور می‌کند. سطح کل ذرات در بستر $۰/۰۱۱۹۸\text{ m}^2$ و جزء خالی بستر $۰/۴۳۶$ است. قطر برج $۰/۰۶۶۷\text{ m}$ است. حلالیت اسید بنزوئیک در آب $۲/۹۴۸ \times ۱۰^{-۲}\text{ kgmol/m}^3$ است.

(الف) ضریب انتقال جرم k_c را پیش بینی کنید. آن را با مقدار تجربی $۴/۶۶۵ \times ۱۰^{-۶}\text{ m/s}$ توسط Wilson و Geankoplis داده شده است مقایسه کنید (W1).

(ب) با استفاده از مقدار تجربی k_c ، غلظت خروجی اسید بنزوئیک در آب را به دست آورید. حل: چون محلول رقیق است، بنابراین خواص فیزیکی آب در $۲۶/۱\text{ }^\circ\text{C}$ از ضمیمه A.2 برابر است با،

$$\text{در } ۲۶/۱\text{ }^\circ\text{C} \quad \rho = ۹۹۶/۷\text{ kg/m}^3 \quad \text{و} \quad \mu = ۰/۸۷۱۸ \times ۱۰^{-۳}\text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\text{در } ۲۵\text{ }^\circ\text{C} \quad \mu = ۰/۸۹۴ \times ۱۰^{-۳}\text{ Pa}\cdot\text{s}$$

و از جدول ۱-۳-۶، $D_{AB} = ۱/۲۱ \times ۱۰^{-۹}\text{ m}^2/\text{s}$. برای تصحیح D_{AB} در $۲۶/۱\text{ }^\circ\text{C}$ با استفاده از معادله (۹-۳-۶) می‌توانیم بنویسیم: $D_{AB} \propto \frac{T}{\mu}$. بنابراین،

$$D_{AB}(۲۶/۱\text{ }^\circ\text{C}) = ۱/۲۱ \times ۱۰^{-۹} \times \left(\frac{۲۹۹/۱}{۲۹۸}\right) \left(\frac{۰/۸۹۴ \times ۱۰^{-۳}}{۰/۸۷۱۸ \times ۱۰^{-۳}}\right) \\ = ۱/۲۵۴ \times ۱۰^{-۹}\text{ m}^2/\text{s}$$

سطح مقطع برج $۳/۴۹۴ \times ۱۰^{-۳}\text{ m}^2 = (\pi/۴)(۰/۰۶۶۷)^2$ ، سپس،

$$v' = \frac{(۵/۵۱۴ \times ۱۰^{-۷})}{(۳/۴۹۴ \times ۱۰^{-۳})} = ۱/۵۷۸ \times ۱۰^{-۴}\text{ m/s}$$

بنابراین،

$$N_{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{۰/۸۷۱۸ \times ۱۰^{-۳}}{۹۹۶/۷ \times (۱/۲۴۵ \times ۱۰^{-۹})} = ۷۰۲/۶$$

عدد رینولدز به صورت زیر است،

$$N_{Re} = \frac{D v' \rho}{\mu} = \frac{۰/۰۰۶۳۷۵ \times (۱/۵۷۸ \times ۱۰^{-۴}) \times ۹۹۶/۷}{۰/۸۷۱۸ \times ۱۰^{-۳}} = ۱/۱۵۰$$

با استفاده از معادله (۳۷-۳-۷) و فرض $k_c = k'_c$ برای محلولهای رقیق،

$$J_D = \frac{1/0.9}{\varepsilon} (N_{Re})^{-2/3} = \frac{1/0.9}{0.436} (1/15)^{-2/3} = 2/277$$

سپس با استفاده از معادله (۷-۳-۵) و حل آن،

$$J_D = \frac{k'_c}{v'} (N_{Sc})^{2/3} \quad 2/277 = \frac{k'_c}{1/578 \times 10^{-4}} (70.2/6)^{2/3}$$

مقدار پیشن‌بینی شده، $k'_c = 4/447 \times 10^{-6}$ m/s است. این مقدار با مقدار تجربی $4/665 \times 10^{-6}$ m/s مقایسه می‌شود.

برای قسمت (ب) با استفاده از معادلات (۷-۳-۴۲) و (۷-۳-۴۳)،

$$A k_c \frac{(c_{Ai} - c_{A1}) - (c_{Ai} - c_{A2})}{\ln [(c_{Ai} - c_{A1})/(c_{Ai} - c_{A2})]} = V (c_{A2} - c_{A1}) \quad (7-3-44)$$

مقادیر جایگزین در معادله (۷-۳-۴۲) عبارتند از، $c_{A1} = 0$ ، $c_{Ai} = 2/948 \times 10^{-2}$ و $A = 0/01198$ و $V = 5/514 \times 10^{-7}$

$$\frac{0/01198 \times (4/665 \times 10^{-6}) \times (c_{A2} - 0)}{\ln [(2/948 \times 10^{-2} - 0)/(2/948 \times 10^{-2} - c_{A2})]} = (5/514 \times 10^{-7}) \times (c_{A2} - 0)$$

که پس از حل، $c_{A2} = 2/842 \times 10^{-3}$ kgmol/m³

۵- انتقال جرم در جریان عبوری از روی یک استوانه: در مورد انتقال جرم در جریانی که عمود بر یک استوانه حرکت می‌کند داده‌های تجربی به دست آمده است. استوانه‌ها بلند بوده و انتقال جرم در دو انتهای استوانه در نظر گرفته نمی‌شود. داده‌های زیادی برای گازها در محدوده عدد اشمیت ۰/۶ تا ۲/۶ و برای مایعات در محدوده ۱۰۰۰ تا ۳۰۰۰ و محدوده عدد رینولدز ۵۰ تا ۵۰۰۰۰ رسم شده است و رابطه به دست آمده به صورت زیر است (V1, S4, M1, L1, B3):

$$J_D = 0.600(N_{Re})^{-0.487} \quad (7-3-45)$$

داده‌ها در محدوده ۳۰٪ ± پراکنده هستند. این رابطه همچنین برای انتقال حرارت نیز با $J_H = J_D$ کاربرد دارد.

۶- انتقال جرم فلزات مایع: در سالهای اخیر چند رابطه برای ضریب انتقال جرم فلزات مایع در مراجع داده شده است. دیده شده است که می‌توان با اطمینان روابطی را که برای انتقال جرم مایعات معمولی داده شده است برای فلزات مایع نیز استفاده کرد. از این مسئله باید اطمینان حاصل کرد که سطح جامد از سیال خیس شده باشد. همچنین اگر جامد آلیاژ است، ممکن است مقاومت نفوذ در جامد نیز وجود داشته باشد.

۴-۷ انتقال جرم در سوسپانسیونهای ذرات کوچک

۲۸-۷ مقدمه

در تعدادی از فرایندها انتقال جرم از و یا به ذرات کوچک معلق در یک محلول هم زده شده اتفاق می‌افتد. در هیدروژناسیون فاز مایع، هیدروژن از حبابهای گاز نفوذ می‌کند و از طریق یک مایع آلی به ذرات کوچک معلق کاتالیزور می‌رسد. در تخمیر، اکسیژن از حبابهای کوچک گاز نفوذ می‌کند و از طریق محیط آبی به میکروارگانیسمهای کوچک معلق می‌رسد.

برای یک مخلوط مشخص مایع - جامد، همزدن بیش از مقدار لازم برای معلق نگهداشتن ذرات کوچک، تأثیر کمی روی ضریب انتقال جرم ذرات k_L دارد (B2). هنگامی که ذرات در یک ظرف اختلاط به طور کامل معلق هستند، نیروهای ناشی از اغتشاش و وزن با هم در تعادل هستند و نرخ انتقال جرم برای ذراتی که تحت تأثیر وزن خود حرکت می‌کنند یکسان است. ذرات خیلی کوچک اندازه‌ای در حد چند میکرون دارند که بسیاری از میکروارگانیسمها در فرایند تخمیر و بسیاری از ذرات کاتالیزور نیز همین اندازه را دارند که به این ترتیب از گردابه‌ها کوچکتر هستند. اندازه گردابه‌ها در حدود ۱۰۰ میکرون است. بنابراین افزایش اختلاط تأثیر کمی روی انتقال جرم مگر در همزدن شدید خواهد داشت.

در حالتی که مخلوط گاز - مایع - جامد داریم، مانند تخمیر، همان اصول قبلی صادق است. اما افزایش اختلاط باعث افزایش تعداد حبابهای گاز می‌شود و بنابراین سطح تماس افزایش می‌یابد. ضرایب انتقال جرم از حبابهای گاز به مایع و از مایع به جامد نسبتاً تحت تأثیر قرار نمی‌گیرند.

۲B-۷ معادلات انتقال جرم به ذرات کوچک

۱- انتقال جرم به ذرات کوچکتر از 0.6 mm : معادلاتی که برای پیش بینی انتقال جرم ذرات کوچک در سوسپانسیون ارایه شده‌اند، سه محدوده اندازه ذرات را پوشش می‌دهند. ابتدا معادله مربوط به ذرات کوچکتر از ۶۰۰ میکرون را بررسی می‌کنیم.

نشان داده شده است که معادله زیر برای پیش بینی ضرایب انتقال جرم از حبابهای کوچک گاز مانند اکسیژن یا هوا به فاز مایع یا از فاز مایع به سطح ذرات کوچک کاتالیزور، میکروارگانیسمها، جامدات دیگر یا قطرات مایع صادق است (B2, C3).

$$k_L = \frac{2D_{AB}}{D_p} + 0.31 N_{Sc}^{-2/3} \left(\frac{\Delta \rho \mu_c \theta}{\rho_c^2} \right)^{1/3} \quad (7-4-1)$$

که در این رابطه D_{AB} ضریب نفوذ حل شونده A در محلول بر حسب cm^2/s قطر حباب گاز یا ذره جامد بر حسب متر، μ_c ویسکوزیته محلول بر حسب $\text{kg/m}\cdot\text{s}$ و $g = 9/80665 \text{ m}^2/\text{s}$ و $\Delta\rho = (\rho_c - \rho_p)$ یا $(\rho_p - \rho_c)$ که ρ_c دانسیته فاز پیوسته بر حسب kg/m^3 و ρ_p دانسیته گاز یا ذرات جامد می باشد. مقدار $\Delta\rho$ همیشه مثبت است.

اولین عبارت سمت راست معادله (۷-۴-۱) عبارت نفوذ مولکولی و عبارت دوم مربوط به سقوط آزاد یا بالا رفتن کره در اثر نیروهای ثقلی می باشد. این معادله در مورد پخش شدن جامدات با دانسیته کم در سیستمهای همزن دار و همچنین پخش حبابهای گاز در سیستمهای همزن دار با نتایج تجربی مقایسه شده است.

مثال ۷-۴-۱ انتقال جرم از حبابهای هوا در فرایند تخمیر

حداکثر نرخ جذب O_2 از حبابهای هوا را در فشار مطلق یک اتمسفر در یک فرماتور به قطر $100 \mu\text{m}$ در 37°C به داخل آبی که غلظت O_2 در آن صفر است، محاسبه کنید. حلالیت O_2 از هوا در آب در 37°C برابر $2/26 \times 10^{-2} \text{ kgmol } O_2/\text{cm}^3$ یا $2/26 \times 10^{-4} \text{ kgmol } O_2/\text{m}^3$ است. برای تولید حبابهای هوا سیستم هم زده می شود.

حل: مقاومت انتقال جرم از داخل حباب گاز به بیرون فصل مشترک حباب قابل صرف نظر کردن است (B2). بنابراین ضریب انتقال جرم k'_c در خارج از حباب گاز لازم است. اطلاعات داده شده عبارتند از،

$$D_p = 100 \mu\text{m} = 1 \times 10^{-4} \text{ m} \quad D_{AB} = 3/25 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

در 37°C

$$\mu_c (\text{آب}) = 6/947 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s} = 6/947 \times 10^{-4} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$$

$$\rho_c (\text{آب}) = 994 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_p (\text{هوا}) = 1/13 \text{ kg/m}^3$$

$$N_{Sc} = \frac{\mu_c}{\rho_c D_{AB}} = \frac{6/947 \times 10^{-4}}{994 \times (3/25 \times 10^{-9})} = 215$$

$$N_{Sc}^{2/3} = 215^{2/3} = 35/9 \quad \Delta\rho = \rho_c - \rho_p = 994 - 1/13 = 993 \text{ kg/m}^3$$

با جایگزینی در معادله (۷-۴-۱)،

$$k'_L = \frac{2 D_{AB}}{D_p} + 0.31 N_{Sc}^{-2/3} \left(\frac{\Delta \rho \mu_c \beta}{\rho_c} \right)^{1/3}$$

$$= \frac{2 \times 3/25 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-2}} + \frac{0.31}{35/9} \left[\frac{994 \times 6/947 \times 10^{-4} \times 9/806}{994/2} \right]^{1/3}$$

$$= 6/5 \times 10^{-5} + 16/4 \times 10^{-5} = 2/29 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

با فرض $k_c = k'_c$ برای محلولهای رقیق، شار به صورت زیر است،

$$N_A = k_L (c_{A1} - c_{Ar}) = 2/29 \times 10^{-4} \times (2/26 \times 10^{-2} - 0)$$

$$= 5/18 \times 10^{-6} \text{ kgmol } O_2/\text{s.m}^2$$

حداکثر نرخ ممکن انتقال جرم O_2 به مایع در حال تخمیر با مشخص بودن تعداد کل حبابها و مساحت آنها قابل محاسبه است.

در مثال ۷-۴-۱، مقدار k_L کوچک بود. در انتقال جرم O_2 به یک میکروارگانسیم با $1 \mu\text{m}$ $D_p \cong$ در یک محلول، عبارت $2D_{AB}/D_p$ صد برابر بزرگتر است. توجه کنید که در قطرهای بزرگ عبارت دوم معادله (۷-۴-۱) کوچک می‌شود و ضریب انتقال جرم k_L مستقل از D_p خواهد بود. در ظروف همزن دار با محلولهای آبی وقتی گاز از زیر همزن وارد می‌شود یا وقتی که مایعات توسط صفحات متخلخل هوادهی می‌شوند اندازه حبابهای گاز غالباً در محدوده پوشش داده شده توسط معادله (۷-۴-۱) می‌باشند (T1, C3, B2). در ظروف همزن دار با سیستم هوادهی، ضرایب انتقال جرم ضرورتاً مستقل از توان ورودی هستند. اما، با افزایش توان اندازه حبابها کاهش می‌یابد و ضریب انتقال جرم همچنان از معادله (۷-۴-۱) تبعیت می‌کند. انتشار و پخش شامل محلولهایی می‌شود که در آنها ذرات جامد در آن به طور کامل در ظرف اختلاط معلق هستند. افزایش نرخ اختلاط بیشتر از میزان لازم برای تعلیق کامل، فقط کمی k_L را افزایش می‌دهد (C3).

معادله (۷-۴-۱) برای انتقال حرارت نیز به کار می‌رود و می‌تواند به صورت زیر نوشته شود (C3, B2)

$$N_{Nu} = \frac{h D_p}{k} = 2.0 + 0.31 N_{Pr}^{1/3} \left(\frac{D_p^3 \rho_c \Delta \rho \beta}{\mu_c^2} \right)^{1/3} \quad (7-4-2)$$

۲- انتقال جرم به حبابهای بزرگ گاز با قطر بزرگتر از ۳/۵ mm. برای حبابهای بزرگ گاز یا قطرات مایع بزرگتر از ۲/۵ mm ضریب انتقال جرم توسط رابطه زیر پیش بینی می شود،

$$k'_L = 0.42 N_{Sc}^{-0.3} \left(\frac{\Delta \rho \mu_c \theta}{\rho_c^2} \right)^{1/3} \quad (7-4-3)$$

حبابهای بزرگ گاز وقتی تولید می شوند که مایعات خالص در ظروف اختلاط و ستونهایی با صفحات غربالی هوادهی شوند (C1). در این حالت ضریب انتقال جرم k'_L یا k_L مستقل از اندازه ذره است و در یک مجموعه خواص فیزیکی مشخص می باشد. در خواص فیزیکی یکسان حباب بزرگ از معادله (۷-۴-۳) مقادیری از k_L را می دهد که حدود سه یا چهار برابر بزرگتر از ضرایب داده شده توسط معادله (۷-۴-۱) برای ذرات کوچک است. مجدداً معادله (۷-۴-۳) نشان می دهد که k_L مستقل از نرخ اختلاط در ظرف همزن دار و سرعت گاز در یک برج با صفحات غربالی می باشد.

۳- انتقال جرم ذرات در ناحیه گذرا: در انتقال جرم در ناحیه گذرا بین حبابهای کوچک و بزرگ در محدوده اندازه ۰/۶ تا ۲/۵ میلی متر، ضریب انتقال جرم با فرض افزایش خطی آن با قطر حباب می تواند تخمین زده شود (B2, C3).

۴- انتقال جرم به ذرات در مخلوط کنهای شدیداً مغشوش: در سه ناحیه قبلی اختلاف دانسیته بین فازها به اندازه کافی بزرگ است به طوریکه نیروی ثقل تعیین کننده ضریب انتقال جرم است. این مسئله شامل جامداتی که به طور کامل در ظرف اختلاط معلق هستند نیز می شود. وقتی که توان اختلاط بیش از مقدار لازم برای تعلیق جامدات افزایش یابد و نیروهای مغشوش از نیروهای ثقل بزرگتر شوند، معادله (۷-۴-۱) دیگر صدق نمی کند و از معادله (۷-۴-۴) باید استفاده شود که در آن افزایش کمی در k'_c مشاهده می شود (B2, C3).

$$k'_L N_{Sc}^{2/3} = 0.13 \left(\frac{(P/V) \mu_c}{\rho_c^2} \right)^{1/4} \quad (7-4-4)$$

که در این رابطه P/V توان ورودی به ازای واحد حجم تعریف شده در بخش ۴-۳ است. داده های تجربی تا حدود ۶۰٪ از این رابطه انحراف دارند. در حالت پخش گاز در مایع غلبه کردن بر نیروهای ثقلی کاملاً غیر عملی است و نیروهای ثقلی نیروهای غالب هستند.

داده های تجربی به این حقیقت اشاره دارند که ذرات خیلی کوچک به راحتی معلق می شوند و اگر اندازه آنها از مرتبه کوچکترین گردابه ها باشد، ضریب انتقال جرم تا هنگامی که افزایش زیادی در توان (بیش از مقدار لازم برای تعلیق) داده نشود، ثابت می ماند.

۷-۵ نفوذ مولکولی همراه با جابه‌جایی و واکنش شیمیایی

۷-۵A انواع مختلف شار و قانون فیک

در بخش ۲B-۶ شار J_A^* به صورت شار مولی A بر حسب kgmol A/s.m^2 نسبت به سرعت میانگین مولی v_M کل توده جریان تعریف شد. همچنین N_A به صورت شار مولی A نسبت به مختصات ساکن تعریف شد. شارها و سرعتها نیز به همین صورت می‌توانند تعریف شوند. جدول ۷-۵-۱ انواع مختلف شارها و سرعتها را که اغلب در سیستمهای دو جزئی به کار می‌روند فهرست کرده است.

سرعت v_M سرعت میانگین جرمی جریان نسبت به مختصات ساکن است و بر اساس وزن جریان در یک فاصله زمانی مشخص می‌تواند به دست آید. و با سرعتهای v_A و v_B به صورت زیر رابطه دارد:

$$v = w_A v_A + w_B v_B = \frac{\rho_A}{\rho} v_A + \frac{\rho_B}{\rho} v_B \quad (7-5-1)$$

که در این رابطه w_A بیانگر کسر وزنی A و برابر با ρ_A/ρ و w_B جزء وزنی B و v_A سرعت A نسبت به مختصات ساکن و بر حسب m/s است. سرعت میانگین مولی v_M بر حسب m/s نسبت به مختصات ساکن است.

$$v_M = x_A v_A + x_B v_B = \frac{c_A}{c} v_A + \frac{c_B}{c} v_B \quad (7-5-2)$$

شار نفوذ مولی نسبت به سرعت میانگین مولی v_M قبلاً تعریف شده است،

$$J_A^* = c_A(v_A - v_M) \quad (7-5-3)$$

شار نفوذ مولی J_A نسبت به سرعت میانگین جرمی v به صورت زیر است،

$$J_A = c_A(v_A - v) \quad (7-5-4)$$

قانون فیک (از جدول ۷-۵-۱) همچنانکه قبلاً بیان شد نسبت به v_M است و به صورت زیر است،

$$J_A^* = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} \quad (7-5-5)$$

قانون فیک همچنین می‌تواند بر حسب شار جرمی نسبت به v نیز تعریف شود،

$$j_A = -\rho D_{AB} \frac{dw_A}{dz} \quad (7-5-6)$$

جدول ۷-۵-۱. انواع مختلف شارها و سرعتها در سیستمهای دو جزئی

	Mass Flux (kg A/s·m ²)	Molar Flux (kg mol A/s·m ²)
Relative to fixed coordinates	$n_A = \rho_A v_A$	$N_A = c_A v_A$
Relative to molar average velocity v_M	$j_A^* = \rho_A(v_A - v_M)$	$J_A^* = c_A(v_A - v_M)$
Relative to mass average velocity v	$j_A = \rho_A(v_A - v)$	$J_A = c_A(v_A - v)$
Relations Between Fluxes Above		
$N_A + N_B = cv_M$	$N_A = n_A/M_A$	$N_A = J_A + c_A v$
$J_A^* + J_B^* = 0$	$J_A = j_A/M_A$	$n_A + n_B = \rho v$
$j_A + j_B = 0$	$N_A = J_A^* + c_A v_M$	$n_A = j_A + \rho_A v$
Different Forms of Fick's Law for Diffusion Flux		
$J_A^* = -cD_{AB} dx_A/dz$	$j_A = -\rho D_{AB} dw_A/dz$	

مثال ۷-۵-۱. اثبات معادله شار جرمی

جدول ۷-۵-۱ معادله زیر را می‌دهد،

$$j_A + j_B = 0 \quad (7-5-7)$$

این رابطه را با استفاده از تعریف شار بر حسب سرعتها ثابت کنید.

حل: از جدول ۷-۵-۱ با جایگزینی $\rho_A(v_A - v)$ به جای j_A و $\rho_B(v_B - v)$ به جای j_B و مرتب کردن معادله،

$$\rho_A v_A - \rho_A v + \rho_B v_B - \rho_B v = 0 \quad (7-5-8)$$

$$\rho_A v_A + \rho_B v_B - v(\rho_A + \rho_B) = 0 \quad (7-5-9)$$

با جایگزینی معادله (۷-۵-۱) به جای v و جایگزینی ρ به جای $\rho_A + \rho_B$ رابطه ثابت می‌شود.

۷-۵B معادله پیوستگی برای مخلوط دو جزئی

یک معادله عمومی می‌توان برای مخلوط دو جزئی A و B برای حالت نفوذ و جابه‌جایی که شامل عبارات نفوذ ناپایدار و واکنش شیمیایی نیز باشد به دست آورد. موازنه جرم را برای جزء A روی المانی به ابعاد $\Delta x \Delta y \Delta z$ که در فضا ثابت است و در شکل ۷-۵-۱ نشان داده شده است می‌نویسیم. موازنه عمومی جرم به صورت زیر است،

$$(7-5-10) \quad (\text{نرخ جرم تولید شده از } A) + (\text{نرخ جرم خروجی } A) - (\text{نرخ جرم ورودی } A) \\ = (\text{نرخ تجمع جرم } A)$$

نرخ جرم A ورودی در جهت x نسبت به مختصات ساکن به صورت $(n_{Ax}|x)\Delta y \cdot \Delta z$ A/s و kg خروجی $(n_{Ax}|x+\Delta x)\Delta y \Delta z$ می‌باشد. روابط مشابهی برای جهت‌های y و z می‌توان نوشت. نرخ تولید شیمیایی A برابر با r_A بر حسب کیلوگرم A تولید شده در واحد زمان و واحد حجم است. نرخ کلی تولید برابر $r_A(\Delta x \Delta y \Delta z)$ بر حسب کیلوگرم A در واحد زمان می‌باشد. نرخ تجمع A به صورت $(\partial \rho_A / \partial t) \Delta x \Delta y \Delta z$ است. با جایگزینی در معادله (7-5-10) و میل دادن Δx ، Δy و Δz به سمت صفر،

$$(7-5-11) \quad \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial n_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial n_{Az}}{\partial z} \right) = r_A$$

و به شکل برداری،

$$(7-5-12) \quad \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{n}_A) = r_A$$

با تقسیم هر دو طرف معادله (7-5-11) بر M_A ،

$$(7-5-13) \quad \frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) = R_A$$

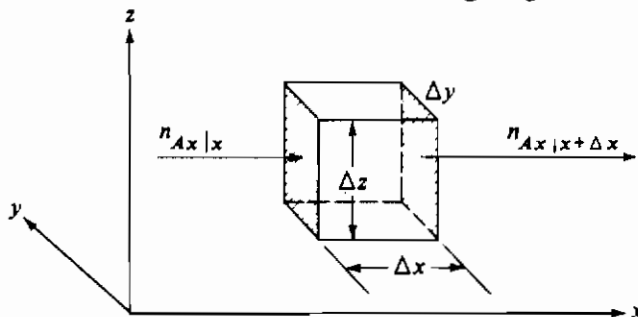
که در این جا R_A کیلوگرم مول A تولید شده در واحد زمان و واحد حجم است. با جایگزینی N_A و قانون فیک از جدول 7-5-1،

$$(7-5-14) \quad N_A = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} + c_A v_M$$

و نوشتن معادله در سه جهت، معادله (7-5-13) می‌شود،

$$(7-5-15) \quad \frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot c_A v_M) - (\nabla \cdot cD_{AB} \nabla x_A) = R_A$$

که معادله فوق معادله عمومی نهایی است.



شکل 7-5-1. موازنه جرم برای A در یک مخلوط دو جزئی

۷-۵C حالت‌های خاص معادله پیوستگی

۱- معادله در حالت c و D_{AB} ثابت: اغلب در نفوذ گازها فشار کل (P) ثابت است. چون $c = P/RT$ ، بنابراین c در دمای ثابت مقداری ثابت است. با شروع از معادله عمومی (۷-۵-۱۵) و جایگزینی $\nabla x_A = \nabla c_A/c$ داریم،

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + c_A(\nabla \cdot \mathbf{v}_M) + (\mathbf{v}_M \cdot \nabla c_A) - D_{AB} \nabla^2 c_A = R_A \quad (7-5-16)$$

۲- نفوذ متقابل و هم مولار در گازها: در حالت خاص در نفوذ متقابل و هم مولار در گازها با فشار ثابت و عدم وجود واکنش شیمیایی: $c = \text{ثابت}$ ، $\mathbf{v}_M = 0$ ، $D_{AB} = \text{ثابت}$ ، $R_A = 0$ و معادله (۷-۵-۱۵) می‌شود،

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) \quad (7-1-9)$$

این معادله قبلاً به دست آمده است و برای نفوذ ناپایدار حل شونده A در یک جامد یا یک مایع هنگامی که D_{AB} ثابت است نیز استفاده می‌شود.

۳- معادله مربوط به حالت ρ و D_{AB} ثابت (مایعات): در محلولهای مایع رقیق دانسیته جرمی ρ و D_{AB} اغلب ثابت در نظر گرفته می‌شوند. با شروع کردن از معادله (۷-۵-۱۲) رابطه $\rho_A \mathbf{v}_A = -\rho D_{AB} \nabla w_A + \rho_A \mathbf{v}$ را از جدول ۷-۵-۱ در این معادله جایگزین می‌کنیم. سپس با استفاده از این حقیقت که ρ ثابت، $\nabla w_A = \nabla \rho_A / \rho$ و همچنین $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ ، با جایگزین کردن این موارد در معادله حاصل و تقسیم هر دو طرف بر M_A داریم،

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla c_A) - D_{AB} \nabla^2 c_A = R_A \quad (7-5-17)$$

۷-۵D حالت‌های خاص معادله عمومی نفوذ در حالت پایدار

۱- مقدمه و شرایط فیزیکی در مرزها: معادله عمومی نفوذ و جابه‌جایی یک مخلوط دوجزئی در یک جهت بدون واکنش شیمیایی قبلاً ارائه شده است.

$$N_A = -c D_{AB} \frac{dx_A}{dz} + \frac{c_A}{c} (N_A + N_B) \quad (6-2-14)$$

برای انتگرال‌گیری از این معادله در حالت پایدار لازم است که شرایط مرزی را در z_1 و z_2 تعیین کنیم. غالباً در بسیاری از مسائل انتقال جرم نسبت مولی N_A/N_B بر اساس شرایط فیزیکی موجود در دو مرز تعیین می‌شود.

به عنوان مثال، یکی از مرزهای مسیر نفوذ ممکن است نسبت به گونه B غیر تراوا^(۱) باشد، زیرا B در این مرز در فاز نامحلول است. نفوذ آمونیاک (A) و نیتروژن (B) از طریق فاز گاز به آب در مرز، چنین حالتی است زیرا نیتروژن در آب نامحلول است. بنابراین، $N_B = 0$ ، چون در حالت پایدار N_B باید همان مقداری را داشته باشد که در همه نقاط مسیر $z_1 - z_2$ دارد. در بعضی حالات، موازنه گرمایی در فاز مجاور در مرز می‌تواند نسبت شار را تعیین کند. به عنوان مثال، اگر جزء A در مرز مایع شود و گرمای نهان خود را به جزء B بدهد که باعث تبخیر و نفوذ آن به عقب شود، نسبت‌های گرمای نهان نسبت شار را تعیین می‌کند.

در مثال دیگر، غلظت در مرز می‌تواند با داشتن حجم زیادی از یک فاز جاری با سرعت زیاد با غلظت مشخص x_{A1} ثابت نگهداشته شود. در بعضی حالات غلظت x_{A1} ممکن است توسط شرایط تعادلی مشخص شود که در این صورت x_{A1} در تعادل با تعدادی ترکیب درصد‌های ثابت در مرز می‌باشد. واکنش‌های شیمیایی می‌توانند سرعت‌های نفوذ و شرایط مرزی را تحت تأثیر قرار دهند.

۲- نفوذ متقابل و هم مولار: در حالت خاصی که $N_A = -N_B$ باشد، معادله (۶-۲-۱۴) همچنانکه قبلاً نشان داده شد برای حالت پایدار با c ثابت به صورت زیر می‌شود،

$$N_A = J_A^* = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} = \frac{D_{AB}(c_{A1} - c_{A2})}{z_2 - z_1} \quad (7-5-18)$$

۳- نفوذ A در جزء ساکن و غیر نفوذی B: در هنگامی که گاز A در گاز ساکن و غیر نفوذی B نفوذ می‌کند، $N_B = 0$ و معادله (۶-۲-۲۲) از انتگرال‌گیری از معادله (۶-۲-۱۴) به دست می‌آید.

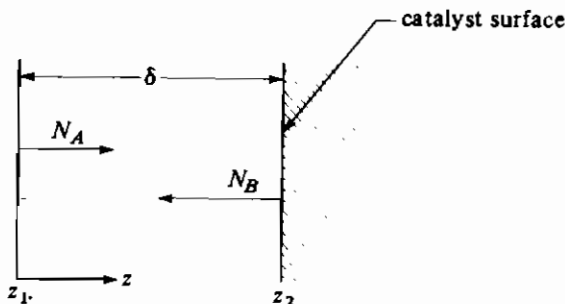
$$N_A = \frac{D_{AB}P}{RT(z_2 - z_1)p_{BM}} (p_{A1} - p_{A2}) \quad (6-2-22)$$

بعداً چند حالت پیچیده‌تر دیگر از انتگرال‌گیری معادله (۶-۲-۱۴) بررسی می‌شود.

۴- نفوذ و واکنش شیمیایی در یک مرز: غالباً رابطه بین شار N_A و N_B در حالت پایدار در یک مرز در واکنش‌های شیمیایی کاتالیزوری که A و B در حالت نفوذ به و یا از سطح یک کاتالیست هستند، به وسیله استوکیومتری واکنش کنترل می‌شود. مثالی از این حالت نفوذ گاز A از توده فاز گاز به سطح کاتالیزور است، که در این حالت گاز A به صورت آبی و بازگشت ناپذیر در یک واکنش غیر همگن به صورت زیر شرکت می‌کند:



سپس گاز B به عقب نفوذ می‌کند که در شکل ۷-۵-۲ نشان داده شده است.



شکل ۷-۵-۲. نفوذ A و واکنش غیر همگن در یک سطح

در حالت پایدار به ازای هر یک مول A که به سطح کاتالیزور نفوذ می‌کند دو مول B از آن دور می‌شود، یا $N_B = -2N_A$. علامت منفی نشان می‌دهد که شارها در جهت‌های مخالف هستند. با بازنویسی معادله (۶-۲-۱۴) بر حسب جزء مولی،

$$N_A = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} + x_A(N_A + N_B) \quad (7-5-20)$$

سپس، با جایگزینی $N_B = -2N_A$ در معادله (۷-۵-۲۰)،

$$N_A = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} + x_A(N_A - 2N_A) \quad (7-5-21)$$

با مرتب کردن و انتگرال گیری با c ثابت (ثابت = P)، حالت‌های زیر به دست می‌آید:

۱- واکنش سطحی آنی:

$$N_A \int_{x_1=0}^{x_2=\delta} dz = -cD_{AB} \int_{x_{A1}}^{x_{A2}} \frac{dx_A}{1+x_A} \quad (7-5-22)$$

$$N_A = \frac{cD_{AB}}{\delta} \ln \frac{1+x_{A1}}{1+x_{A2}} \quad (7-5-23)$$

چون واکنش آنی است، و A نمی‌تواند روی سطح کاتالیزور وجود داشته باشد، بنابراین، $x_{A2} = 0$. معادله (۷-۵-۲۳) سرعت کلی فرایند نفوذ همراه با واکنش شیمیایی آنی را تشریح می‌کند.

۲- واکنش سطحی آهسته: اگر واکنش غیر همگن سطحی $A \rightarrow 2B$ آهسته و درجه اول باشد، بنابراین،

$$N_{A2=\delta} = k'_1 c_A = k'_1 c x_{A1} \quad (7-5-24)$$

که در آن k'_1 ثابت سرعت واکنش درجه اول غیر همگن بر حسب m/s است. معادله (۷-۵-۲۳) هنوز برای این حالت صادق است، اما شرط مرزی x_{A2} در $z = \delta$ به وسیله حل معادله (۷-۵-۲۴) نسبت به x_{A1}

به دست می‌آید.

$$x_A = x_{A2} = \frac{N_{Az=\delta}}{k'_1 c} = \frac{N_A}{k'_1 c} \quad (7-5-25)$$

در حالت پایدار، $N_{Az=0} = N_A$ با جایگزینی معادله (7-5-25) در (7-5-23)،

$$N_A = \frac{c D_{AB}}{\delta} \ln \frac{1 + x_{A1}}{1 + N_A/k'_1 c} \quad (7-5-26)$$

نرخ در معادله (7-5-26) کمتر از مقدار آن در معادله (7-5-23) است، زیرا مخرج معادله (7-5-23) به صورت $1 + x_{A2} = 1 + 0$ است و مخرج معادله (7-5-26) به صورت $\frac{1 + N_A}{k'_1 c}$ است.

مثال 7-5-2 نفوذ و واکنش شیمیایی در یک مرز

گاز خالص A از نقطه 1 با فشار جزئی $101/32 \text{ kPa}$ تا نقطه 2 در فاصله 2 mm دورتر نفوذ می‌کند. در نقطه 2 در سطح کاتالیزور واکنش شیمیایی $A \rightarrow 2B$ را انجام می‌دهد. جزء B در حالت پایدار به عقب نفوذ می‌کند و از سطح کاتالیزور دور می‌شود. فشار کل $P = 101/32 \text{ kPa}$ است. دما 300 K و D_{AB} برابر $0/15 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ است.

(الف) N_A و x_{A2} را در حالت واکنش آتی محاسبه کنید.

(ب) N_A و x_{A2} را در حالت واکنش آهسته با $k'_1 = 5/63 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ محاسبه کنید.

حل: در قسمت (الف)، چون A در مجاورت سطح کاتالیزور نمی‌تواند وجود داشته باشد بنابراین، $p_{A2} = x_{A2} P$. به دلیل این‌که $N_B = -2N_A$ ، معادله (7-5-23) به صورت زیر به کار برده خواهد شد،

$$x_{A1} = p_{A1}/P = \frac{101/32 \times 10^3}{101/32 \times 10^3} = 1 \quad T = 300 \text{ K} \quad \delta = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$c = P/RT = \frac{101/32 \times 10^3}{(83/4 \times 300)} = 4/062 \times 10^{-2} \text{ kgmol/m}^3$$

$$N_A = \frac{c D_{AB}}{\delta} \ln \frac{1 + x_{A1}}{1 + x_{A2}} = \frac{(4/062 \times 10^{-2}) \times (0/15 \times 10^{-4})}{2 \times 10^{-3}} \ln \frac{1 + 1}{1 + 0}$$

$$= 2/112 \times 10^{-6} \text{ kgmol A/s.m}^2$$

در قسمت (ب)، از معادله (7-5-25)،

$$x_{A2} = N_A/k'_1 c = \frac{N_A}{(5/63 \times 10^{-3} \times 4/062 \times 10^{-2})}$$

با جایگزینی در معادله (۷-۵-۲۶)،

$$N_A = \frac{(4/0.62 \times 10^{-2}) \times (0/15 \times 10^{-4})}{2 \times 10^{-2}} \ln \frac{1+1}{1 + N_A / (5/63 \times 10^{-3} \times 4/0.62 \times 10^{-2})}$$

با حل مسأله به روش حدس و خطا، $N_A = 1/004 \times 10^{-2} \text{ kgmol A/s.m}^2$ سپس،

$$x_{A2} = \frac{(1/004 \times 10^{-2})}{(5/63 \times 10^{-3} \times 4/0.62 \times 10^{-2})} = 0/4390$$

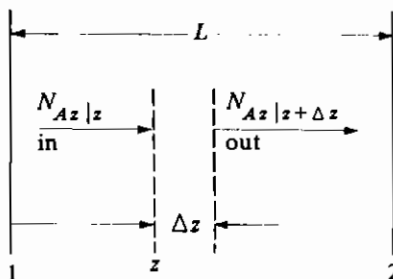
گرچه در قسمت (الف) مثال (۷-۵-۲) سرعت واکنش آنی است، اما شار N_A توسط نفوذ کنترل می شود. وقتی که سرعت واکنش آهسته می شود، شار N_A هم کاهش می یابد.

۵- نفوذ و واکنش همگن در یک فاز: معادله (۷-۵-۲۳) برای حالتی که واکنش شیمیایی در مرز روی سطح یک کاتالیزور اتفاق می افتد به دست آمد. در برخی حالات جزء A در طی یک واکنش شیمیایی بازگشت ناپذیر از طریق فاز همگن B پس از نفوذ به C تبدیل می شود، $A \rightarrow C$. فرض کنید که جزء A در فاز B خیلی رقیق است، فاز B می تواند یک گاز و یا یک مایع باشد. پس در حالت پایدار معادله نفوذ A با حذف عبارت مربوط به جریان توده ای به صورت زیر است:

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} + 0 \quad (7-5-27)$$

با نوشتن موازنه جرم روی A برای المان Δz در حالت پایدار که در شکل ۷-۵-۳ نشان داده شده است،

$$\text{نرخ تجمع A} + \text{نرخ خروجی A} + \text{نرخ تولید A} + \text{نرخ ورودی A} \quad (7-5-28)$$



شکل ۷-۵-۳. واکنش شیمیایی همگن و نفوذ در یک سیال

سرعت واکنش درجه اول A به ازای واحد حجم (m^3) برابر است با:

$$-k'c_A = \text{نرخ تولید} \quad (7-5-29)$$

که k' ثابت سرعت واکنش و بر حسب s^{-1} است. با جایگزینی در معادله (7-5-28) برای مقطع $1 m^2$ با نرخ تجمع صفر در حالت پایدار،

$$N_{A|x}(1) - k'c_A(1)(\Delta z) = N_{A|x+\Delta z}(1) + 0 \quad (7-5-30)$$

سپس با تقسیم کردن بر Δz و میل دادن آن به سمت صفر،

$$-\frac{dN_{A,z}}{dz} = k'c_A \quad (7-5-31)$$

با جایگزینی معادله (7-5-27) در (7-5-31)،

$$\frac{d^2c_A}{dz^2} = \frac{k'}{D_{AB}} c_A \quad (7-5-32)$$

شرایط مرزی به صورت $c_A = c_{A1}$ در $z = 0$ و $c_A = c_{A2}$ در $z = L$ می‌باشد، با حل معادله،

$$c_A = \frac{c_{A2} \sinh\left(\sqrt{\frac{k'}{D_{AB}}} z\right) + c_{A1} \sinh\left[\sqrt{\frac{k'}{D_{AB}}}(L-z)\right]}{\sinh\left(\sqrt{\frac{k'}{D_{AB}}} L\right)} \quad (7-5-33)$$

این معادله در حالت پایدار برای محاسبه c_A در هر z استفاده می‌شود. همچنین برای واکنشهای گازها، مایعات و یا جامدات وقتی که حل شونده A رقیق باشد قابل استفاده است.

به عنوان روش دیگر برای به دست آوردن معادله (7-5-32)، می‌توانیم از معادله (7-5-17) با ρ و D_{AB} ثابت استفاده کنیم.

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (v \cdot \nabla c_A) - D_{AB} \nabla^2 c_A = R_A \quad (7-5-17)$$

در حالت پایدار اولین عبارت برابر با صفر است ($\partial c_A / \partial t = 0$). چون فرض می‌کنیم محلولها رقیق هستند و از عبارت مربوط به جریان توده‌ای صرف‌نظر می‌کنیم، پس $v=0$. یعنی عبارت دوم معادله (7-5-17) صفر می‌شود. اگر واکنش نسبت به A درجه اول باشد که در آن A از بین می‌رود، $R_A = -k'c_A$ بر حسب $kgmol$ از A تولید شده به ازای واحد زمان و حجم ($s.m^3$). با نوشتن عبارت نفوذ $c_A - D_{AB} \nabla^2$ در جهت z داریم،

$$D_{AB} \frac{d^2c_A}{dz^2} = k'c_A \quad (7-5-34)$$

که البته با معادله (۷-۵-۳۲) یکی است.

۷-۵E نفوذ ناپایدار و واکنش در یک محیط نیمه بی نهایت

حالتی را در نظر می گیریم که در آن ماده رقیق A جذب یک فاز جامد یا فاز سیال ساکن می شود و سپس نفوذ ناپایدار و واکنش در آن فاز اتفاق می افتد. فاز سیال یا جامد B نیمه بی نهایت در نظر گرفته می شود. در سطحی که در آن $z=0$ است غلظت c_A در c_{A0} ثابت نگهداشته می شود. حل شونده رقیق A بر اساس یک مکانیسم درجه اول واکنش می دهد،



و نرخ تولید $c_A k'$ است. همان نمودار شکل ۷-۵-۳ صدق می کند. با استفاده از معادله (۷-۵-۳۰) با جایگزینی $(1)(\partial c_A / \partial t)(\Delta z)$ به جای نرخ تجمع،

$$N_{A,z}|_z(1) - k'c_A(1)(\Delta z) = N_{A,z}|_{z+\Delta z}(1) + \left(\frac{\partial c_A}{\partial t}\right)(\Delta z)(1) \quad (7-5-36)$$

که معادله بالا به صورت زیر در می آید،

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} - k'c_A \quad (7-5-37)$$

شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر هستند،

$$\begin{aligned} t = 0, \quad c_A = 0 & \quad \text{for } z > 0 \\ z = 0, \quad c_A = c_{A0} & \quad \text{for } t > 0 \\ z = \infty, \quad c_A = 0 & \quad \text{for } t > 0 \end{aligned} \quad (7-5-38)$$

حل معادله که توسط Danckwerts (D1) ارائه شده است به این صورت می باشد،

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{1}{2} \exp(-z\sqrt{k'/D_{AB}}) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{tD_{AB}}} - \sqrt{k't}\right) \quad (7-5-39)$$

$$+ \frac{1}{2} \exp(z\sqrt{k'/D_{AB}}) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{tD_{AB}}} + \sqrt{k't}\right)$$

مقدار کل Q از A جذب شده تا زمان t برابر است با،

$$Q = c_{A0} \sqrt{D_{AB}/k'} [(k't + \frac{1}{2}) \operatorname{erf} \sqrt{k't} + \sqrt{k't/\pi} e^{-k't}] \quad (7-5-40)$$

که در این جا Q بر حسب A kgmol جذب شده به ازای واحد سطح (m^2) است. بسیاری از حالات واقعی با این حالت تقریب زده می شوند. این معادله برای وقتی که جذب در یک سطح جامد یا سیال ساکن

انجام می‌شود و نفوذ ناپایدار و واکنش در سیال ساکن یا جامد وجود دارد، به کار برده می‌شود. نتایج به‌دست آمده برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ یک گاز در یک محلول، تعیین ثابتهای سرعت واکنش k' گازهای حل شده و تعیین حلالیت گاز در مایعی که با آنها واکنش می‌دهند، قابل استفاده است. جزئیات بیشتر در مراجع دیگر (D3) آمده است.

مثال ۳-۵-۷ واکنش و نفوذ ناپایدار

گاز خالص CO_2 در فشار $101/32 \text{ kPa}$ جذب یک محلول رقیق بافر قلیایی حاوی یک کاتالیزور می‌شود. حل‌شونده رقیق CO_2 یک واکنش درجه اول با $k' = 35 \text{ s}^{-1}$ و $D_{AB} = 1/5 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ انجام می‌دهد. حلالیت CO_2 برابر $2/961 \times 10^{-7} \text{ kgmol/m}^3 \cdot \text{Pa}$ است (D3). سطح برای مدت $0/01 \text{ s}$ در معرض گاز قرار دارد. مقدار CO_2 جذب شده در واحد سطح را بر حسب kgmol به‌دست آورید.

حل: برای استفاده از معادله $(7-5-40)$ ، $0/35 = k't = 35 \times (0/01)$ همچنین،

$$c_{A0} = 2/961 \times 10^{-7} (\text{kgmol/m}^3 \cdot \text{Pa}) \times (101/32 \times 10^3 \text{ Pa})$$

$$= 3 \times 10^{-2} \text{ kgmol CO}_2/\text{m}^3$$

$$Q = (3 \times 10^{-2}) \times \sqrt{(1/5 \times 10^{-9} / 35)} \left[(0/35 + \frac{1}{2}) \operatorname{erf} \sqrt{0/35} + \sqrt{0/35} / \pi e^{-1/35} \right]$$

$$= 1/458 \times 10^{-7} \text{ kgmol CO}_2/\text{m}^2$$

۷-۵F نفوذ چند جزئی گازها

معادلات به دست آمده در این فصل برای سیستم دو جزئی A و B است که احتمالاً مهمترین و مفیدترین سیستم است. اما گاهی نفوذ چند جزئی نیز اتفاق می‌افتد که در آن سه جزء A و B و C و یا بیشتر حضور دارند. ساده‌ترین حالت، نفوذ A در یک گاز از طریق یک مخلوط غیر نفوذی ساکن از B و C و D و ... در فشار کل ثابت است. بنابراین $N_B = 0$ ، $N_C = 0$ و ... معادله نهایی به دست آمده با استفاده از روش Stefan - Maxwell برای نفوذ پایدار برابر است با (G1):

$$N_A = \frac{D_{Am} P}{RT(z_2 - z_1)P_{iM}} (p_{A1} - p_{A2}) \quad (7-5-41)$$

که P_{iM} میانگین لگاریتمی $P_{i1} = P - p_{A1}$ و $P_{i2} = P - p_{A2}$ می‌باشد. همچنین،

$$D_{Am} = \frac{1}{x'_B/D_{AB} + x'_C/D_{AC} + \dots} \quad (V-5-42)$$

که $x'_B = \frac{\text{mol B}}{\text{mol inerts}} = x_B/(1-x_A)$ و $x'_C = x_C/(1-x_A)$ و ...

مثال ۷-۵-۴ نفوذ A در اجزاء غیر نفوذی B و C

در ۲۹۸ K و فشار کل ۱ atm، متان (A) در حالت پایدار به داخل اجزاء غیر نفوذی آرگون (B) و هلیوم (C) نفوذ می‌کند. در $z_1 = 0$ فشارهای جزئی برحسب atm عبارتند از: $p_{A1} = 0/4$ ، $p_{B1} = 0/4$ و $p_{C1} = 0/2$ در $z_2 = 0/05$ m، $p_{A2} = 0/1$ ، $p_{B2} = 0/6$ و $p_{C2} = 0/3$. ضرایب نفوذ دو جزئی از جدول ۱-۲-۶ به دست می‌آیند، $D_{AB} = 2/02 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ، $D_{AC} = 6/75 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ و $D_{BC} = 7/29 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ را محاسبه کنید.

حل: در نقطه ۱،

$$x'_B = x_B/(1-x_A) = \frac{0/4}{(1-0/4)} = 0/667$$

و در نقطه ۲،

$$x'_B = \frac{0/6}{(1-0/1)} = 0/667$$

مقدار x'_B در کل مسیر ثابت است. همچنین $x'_C = x_C/(1-x_A) = 0/333$ با جایگزینی در معادله (۷-۵-۴۲)،

$$D_{Am} = \frac{1}{x'_B/D_{AB} + x'_C/D_{AC}} = \frac{1}{0/667 / 2/02 \times 10^{-5} + 0/333 / 6/75 \times 10^{-5}} = 2/635 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

برای محاسبه p_{iM} ، $p_{A1} = P - p_{A1} = 1 - 0/4 = 0/6 \text{ atm}$ ، $p_{i1} = P - p_{A1} = 1 - 0/4 = 0/6 \text{ atm}$ ، $p_{i2} = P - p_{A2} = 1 - 0/1 = 0/9 \text{ atm}$ ، سپس

$$P_{iM} = \frac{p_{i2} - p_{i1}}{\ln(p_{i2}/p_{i1})} = \frac{0/9 - 0/6}{\ln(0/9/0/6)} = 0/74 \text{ atm} = 7/496 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$p_{A1} = 0/4 \times (1/0.1325 \times 10^5) = 4/053 \times 10^4$$

$$p_{A2} = 0/1 \times (1/0.1325 \times 10^5) = 1/013 \times 10^4$$

با جایگزینی در معادله (۷-۵-۴۱)،

$$N_A = \frac{D_{Am} P}{R T (z_2 - z_1) P_{iM}} (P_{A1} - P_{A2})$$

$$= \frac{(2/635 \times 10^{-5}) \times (1/0.1325 \times 10^5) \times (4/0.53 - 1/0.13) \times 10^4}{8314 \times 298 \times (0/0.05 - 0) \times (7/496 \times 10^4)}$$

$$= 8/74 \times 10^{-5} \text{ kgmol A/s.m}^2$$

با استفاده از واحدهای اتمسفر،

$$N_A = \frac{P D_{Am}}{R T (z_2 - z_1) P_{iM}} (P_{A1} - P_{A2}) = \frac{(2/635 \times 10^{-5}) \times 1 \times (0/4 - 0/1)}{82/06 \times 10^{-3} \times 298 \times (0/0.05 - 0) \times 0/74}$$

$$= 8/74 \times 10^{-5} \text{ kgmol A/s.m}^2$$

چند روش تحلیلی برای حالت‌های دیگر همچون نفوذ مولکولی با مولهای مساوی به صورت سه‌جزئی، نفوذ اجزای A و B از طریق جزء ساکن C، و حالت عمومی نفوذ دو یا چند جزئی در یک مخلوط چند جزئی به دست آمده است. جزئیات این روشها همراه با مثال توسط Geankoplis (G1) مورد بحث قرار گرفته است.

۶-۷ نفوذ گازها در جامدات متخلخل و لوله‌های مویین

۶-۶۸ مقدمه

در بخش ۶-۵C نفوذ مایعات و گازها در جامدات متخلخل که بستگی به ساختمان جامد دارد مورد بحث قرار گرفت. برای گازها فرض شد که حفره‌ها خیلی بزرگ هستند و نفوذ بر اساس قانون فیک صورت می‌گیرد. اما غالباً این حفره‌ها قطر کمی دارند و مکانیسم نفوذ عمدتاً تغییر می‌کند.

نفوذ گازها در حفره‌های کوچک غالباً در سیستمهای کاتالیزوری غیر همگن اتفاق می‌افتد، که در این موارد گازها برای انجام واکنش روی سطح کاتالیزور باید به داخل حفره‌های خیلی کوچک نفوذ کنند. در خشک کردن مواد غذایی مانند گوشت بوقلمون از طریق انجماد، بخار آب به داخل حفره‌های بسیار ریز در یک ساختار متخلخل نفوذ می‌کند.

چون حفره‌ها یا کانالهای مویین داخل جامد متخلخل غالباً کوچک هستند، ممکن

است نفوذگازها به قطر حفره‌ها بستگی داشته‌باشد. ابتدا یک مسیر پویش آزاد λ تعریف می‌کنیم، که فاصله متوسطی است که یک مولکول گاز قبل از برخورد با مولکول دیگر طی می‌کند.

$$\lambda = \frac{3.2\mu}{P} \sqrt{\frac{RT}{2\pi M}} \quad (7-6-1)$$

که در این رابطه λ بر حسب متر، ویسکوزیته μ بر حسب Pa.s، فشار P بر حسب N/m^2 ، دمای T بر حسب کلوین، جرم مولکولی M بر حسب $kg/kgmol$ و $R = 8.3143 \times 10^3 N.m/kgmol.K$ است. توجه کنید که در فشارهای کم مقدار λ بیشتر است. برای مایعات چون λ خیلی کوچک است، نفوذ از قانون فیک تبعیت می‌کند.

در بخشهای بعدی تغییرات مکانیسمهای اساسی نفوذ در اثر تغییر فاصله پویش آزاد در مقایسه با قطر حفره مورد بررسی قرار خواهد گرفت. فشار کل P در سیستم ثابت خواهد بود اما فشارهای جزئی A و B ممکن است تغییر کنند.

۷-۶B نفوذ گازها بر اساس تئوری نودسن^(۱)

در شکل ۷-۶-۱a یک مولکول گاز A در حال نفوذ در یک مجرای مویین با قطر d است. فشار جزئی در ورودی PA_1 می‌باشد. فشار کل P در سراسر مجرا ثابت است. مسیر پویش آزاد λ در مقایسه با قطر d بزرگ است. در نتیجه مولکول با دیواره برخورد می‌کند و برخوردهای مولکول - دیواره اهمیت پیدا می‌کنند. این حالت نفوذ نودسن نامیده می‌شود.

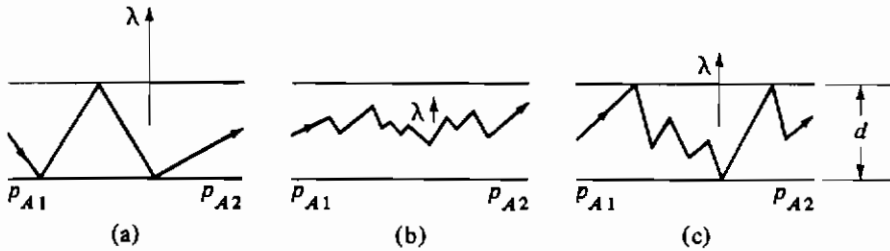
ضریب نفوذ نودسن مستقل از فشار P بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$D_{KA} = \frac{2}{3} \bar{v} \bar{V}_A \quad (7-6-2)$$

که D_{KA} ضریب نفوذ بر حسب \bar{v} cm²/s شعاع میانگین حفره بر حسب متر و \bar{V}_A سرعت میانگین مولکولی برای جزء A بر حسب m/s است. بر اساس تئوری جنبشی گازها در مورد محاسبه \bar{v}_A معادله نهایی برای D_{KA} خواهد بود:

$$D_{KA} = 97.0 \bar{v} \left(\frac{T}{M_A} \right)^{1/2} \quad (7-6-3)$$

که M_A وزن مولکولی A بر حسب $kg/kgmol$ و T دما بر حسب کلوین است.



شکل ۷-۶-۱. انواع نفوذ گازها در لوله‌های موئین کوچک: (a) نفوذ نودسن گاز (b) نفوذ مولکولی یا فیک گاز (c) نفوذ گذرای گاز

مثال ۷-۶-۱ ضریب نفوذ نودسن برای هیدروژن

مخلوط گازی شامل H_2 (A) و C_2H_6 (B) در حال نفوذ در حفره‌های کاتالیزور نیکل می‌باشد. این کاتالیزور برای فرایند هیدروژناسیون در فشار $1.3 \times 10^5 \text{ Pa}$ و دمای 373 K به کار می‌رود. شعاع حفره 60 \AA است. ضریب نفوذ نودسن D_{KA} را برای هیدروژن محاسبه کنید.

حل: با جایگزینی در معادله (۷-۶-۳)، $\bar{r} = 6 \times 10^{-9} \text{ m}$ ، $M_A = 2.016$ و $T = 373 \text{ K}$

$$D_{KA} = 9V \times \bar{r} \left(\frac{T}{M_A} \right)^{1/5} = 9V \times (6 \times 10^{-9}) \times \left(\frac{373}{2.016} \right)^{1/5}$$

$$= 7.92 \times 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$$

معادله شار برای نفوذ نودسن در یک حفره برابر است با:

$$N_A = -D_{KA} \frac{dc_A}{dz} = -\frac{D_{KA}}{RT} \frac{dp_A}{dz} \quad (7-6-4)$$

با انتگرال‌گیری بین $z_1 = 0$ که $p_A = p_{A1}$ و $z_2 = L$ که $p_A = p_{A2}$ داریم:

$$N_A = \frac{D_{KA} P}{RTL} (x_{A1} - x_{A2}) = \frac{D_{KA}}{RTL} (p_{A1} - p_{A2}) \quad (7-6-5)$$

در نفوذ نودسن نفوذ A کاملاً مستقل از B است، چون A با دیواره‌های حفره برخورد می‌کند (با B برخورد نمی‌کند). معادله مشابهی می‌تواند برای B نوشته شود.

هنگامی که عدد نودسن N_{Kn} که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$N_{Kn} = \frac{\lambda}{2\bar{r}} \quad (7-6-6)$$

بزرگتر یا مساوی $10/1$ باشد، نفوذ در ابتدا نودسن است و معادله (۷-۶-۵) شار را با خطای حدود 10% پیش‌بینی می‌کند. با بزرگتر شدن عدد نودسن، خطا کاهش می‌یابد چون نفوذ

به سمت نفوذ نودسن میل می‌کند.

۷-۶C نفوذ مولکولی گازها

همچنان‌که در شکل ۷-۶-۱b نشان داده شده است هنگامی که مسیر پویش آزاد λ در مقایسه با قطر حفره d کوچک است یا هنگامی که $\frac{\lambda}{d} \leq \frac{1}{100}$ است، برخوردهای مولکول - مولکول غالب هستند و برخوردهای مولکول - دیواره کم اتفاق می‌افتد، نفوذ فیک یا نفوذ مولکولی معمولی صدق می‌کند و قانون فیک نفوذ را با خطای حدود ۱۰٪ پیش بینی می‌کند. هنگامی که $\frac{\lambda}{d}$ کوچکتر می‌شود خطا کاهش می‌یابد چون نفوذ به سمت نفوذ فیک میل می‌کند.

معادله نفوذ مولکولی ارائه شده در بخشهای قبل به صورت زیر است،

$$N_A = -\frac{D_{AB} P}{RT} \frac{dx_A}{dz} + x_A(N_A + N_B) \quad (7-6-7)$$

ضریب نسبت شار α می‌تواند به صورت زیر تعریف شود،

$$\alpha = 1 + \frac{N_B}{N_A} \quad (7-6-8)$$

با ترکیب معادلات (۷-۶-۷) و (۷-۶-۸) و انتگرال گیری برای مسیری به طول L سانتیمتر،

$$N_A = \frac{D_{AB} P}{\alpha R T L} \ln \frac{1 - \alpha x_{A2}}{1 - \alpha x_{A1}} \quad (7-6-9)$$

اگر نفوذ با مولهای مساوی باشد، $N_A = -N_B$ و معادله (۷-۶-۷) همان قانون فیک می‌شود. ضریب نفوذ مولکولی D_{AB} به طور معکوس متناسب با فشار کل P می‌باشد.

۷-۶D نفوذ گازها در ناحیه گذرا

همچنان‌که در شکل ۷-۶-۱c نشان داده شده است، هنگامی که مسیر پویش آزاد λ و قطر حفره در یک محدوده میانی بین حد مشخص شده برای نفوذ نودسن و نفوذ مولکولی قرار گیرند، نفوذ گذرا اتفاق می‌افتد که در این حالت، هر دو نوع برخورد مولکول - مولکول و مولکول - دیواره در نفوذ مهم هستند. معادله نفوذ ناحیه گذرا می‌تواند با اضافه کردن افت ممتوم ناشی از برخورد مولکول به دیواره در معادله (۷-۶-۴) و همچنین افت ناشی از برخوردهای مولکول - مولکول در معادله (۷-۶-۷) روی یک برش از مجرای موین، به دست آید. هیچ واکنش شیمیایی اتفاق نمی‌افتد و معادله دیفرانسیل نهایی به صورت زیر است (G1)،

$$N_A = -\frac{D_{NA} P}{RT} \frac{dx_A}{dz} \quad (7-6-10)$$

که در آن،

$$D_{NA} = \frac{1}{(1 - \alpha x_A)/D_{AB} + 1/D_{KA}} \quad (7-6-11)$$

ضریب نفوذ ناحیه‌گذرا D_{NA} مختصری بستگی به غلظت دارد.

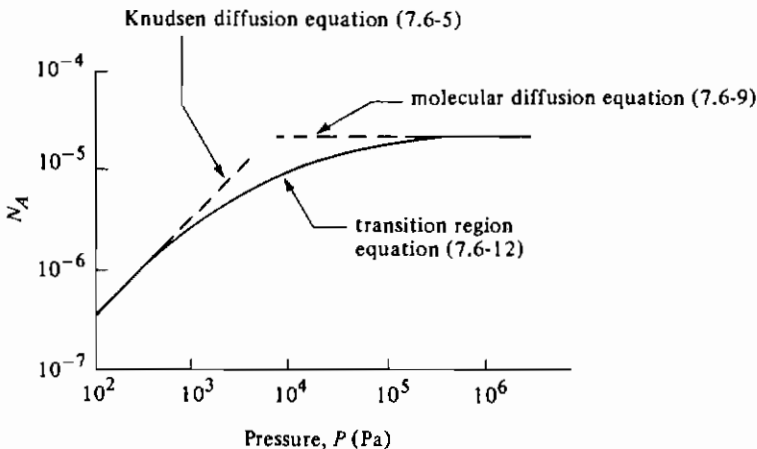
با انتگرال‌گیری از معادله (7-6-10)،

$$N_A = \frac{D_{AB} P}{\alpha R T L} \ln \frac{1 - \alpha x_{A2} + D_{AB}/D_{KA}}{1 - \alpha x_{A1} + D_{AB}/D_{KA}} \quad (7-6-12)$$

به‌طور تجربی نشان داده شده است که این معادله در کل ناحیه‌گذرا معتبر است (R1). این رابطه در فشارهای کم به معادله نودسن و در فشارهای بالا به معادله نفوذ مولکولی منتهی می‌شود. معادله‌ای مشابه معادله (7-6-12) می‌تواند برای جزء B نوشته شود.

عبارت D_{AB}/D_{KA} متناسب با $1/P$ است. بنابراین هم‌چنانکه فشار کل P افزایش می‌یابد، عبارت D_{AB}/D_{KA} خیلی کوچک می‌شود و N_A در معادله (7-6-12) مستقل از فشار کل P می‌شود چون $D_{AB}P$ مستقل از P است. معادله (7-6-12) در فشار کل پایین تبدیل به معادله نفوذ نودسن (7-6-5) می‌شود و شار N_A برای x_{A1} و x_{A2} ثابت مستقیماً متناسب با P می‌شود.

این مسأله در شکل 7-6-2 برای یک مجرای موئین به قطر ثابت که در آن شار با افزایش فشار کل افزایش می‌یابد و در فشارهای بالا تقریباً ثابت می‌شود، تشریح شده است. البته موقعیت نسبی منحنی بستگی به قطر مجرای موئین و ضرایب نفوذ مولکولی و نودسن دارد. فقط با استفاده از قطر کمتر، D_{KA} کوچکتر می‌شود و خط شار نودسن موازی با خط موجود در فشارهای کم می‌شود. در فشارهای بالا خط شار به‌طور مجانب به خط افقی موجود نزدیک می‌شود چون نفوذ مولکولی مستقل از قطر مجرای موئین است.



شکل 7-6-2. اثر فشار کل P روی شار نفوذ N_A در ناحیه‌گذرا

اگر A در حال نفوذ به حفرهٔ یک کاتالیزور باشد و در سطح کاتالیزور و در انتهای حفره واکنش $A \rightarrow B$ را انجام دهد، در حالت پایدار، نفوذ متقابل و هم مولار خواهیم داشت یعنی $N_A = -N_B$. بنابراین از معادله (۷-۶-۸)، $\alpha = 1 - 1 = 0$ ، ضریب نفوذ مؤثر DNA از معادله (۷-۶-۱۱) می‌شود،

$$D'_{NA} = \frac{1}{1/D_{AB} + 1/D_{KA}} \quad (7-6-13)$$

ضریب نفوذ مستقل از غلظت بوده و ثابت است. با انتگرال‌گیری از معادله (۷-۶-۱۰) داریم،

$$N_A = \frac{D'_{NA} P}{RTL} (x_{A1} - x_{A2}) = \frac{D'_{NA}}{RTL} (p_{A1} - p_{A2}) \quad (7-6-14)$$

این ضریب نفوذ ساده شده اغلب برای نفوذ در کاتالیزورهای متخلخل حتی در صورت عدم وجود نفوذ متقابل و هم مولار به کار می‌رود. با استفاده از این ضریب نفوذ ساده شده معادلات نفوذ و واکنش به میزان زیادی ساده می‌شوند.

به عنوان ضریب نفوذ ساده شده دیگر می‌توان از مقدار میانگین x_A در معادله (۷-۶-۱۱) استفاده کرد که عبارتست از:

$$D''_{NA} = \frac{1}{(1 - \alpha x_{A,av})/D_{AB} + 1/D_{KA}} \quad (7-6-15)$$

که $x_{A,av} = \frac{(x_{A1} + x_{A2})}{2}$ این ضریب نفوذ دقیق‌تر از D'_{NA} است. با انتگرال‌گیری از معادله (۷-۶-۱۰) داریم،

$$N_A = \frac{D''_{NA} P}{RTL} (x_{A1} - x_{A2}) = \frac{D''_{NA}}{RTL} (p_{A1} - p_{A2}) \quad (7-6-16)$$

۷-۶E نسبت‌های شار برای نفوذ گازها در مجراهای مویین

۱- نفوذ در سیستم باز: اگر نفوذ در جامدات متخلخل یا کانالها بدون واکنش شیمیایی اتفاق بیفتد و فشار کل ثابت باقی بماند، بنابراین در یک سیستم باز دو جزئی با نفوذ متقابل نسبت N_A/N_B در هر سه رژیم نفوذ ثابت می‌ماند و خواهیم داشت (G1)،

$$\frac{N_B}{N_A} = -\sqrt{\frac{M_A}{M_B}} \quad (7-6-17)$$

بنابراین،

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{M_A}{M_B}} \quad (7-6-18)$$

در این حالت، گاز از هر دو انتهای باز سیستم جریان پیدا می‌کند. اما وقتی واکنش شیمیایی وجود داشته باشد، نسبت N_B/N_A را استوکیومتری واکنش تعیین می‌کند نه معادله (۷-۶-۱۷).

۲- نفوذ در سیستم بسته: هنگامی که مطابق شکل ۱-۲-۶ در یک سیستم بسته در فشار کل ثابت P نفوذ مولکولی انجام شود، به صورت نفوذ متقابل و هم مولار خواهد بود.

مثال ۲-۶-۷ نفوذ He و N_2 در ناحیه‌گذرا

یک مخلوط گازی در فشار کل 0.1 atm و دمای 298 K از گاز N_2 (A) و He (B) تشکیل شده است. این مخلوط گازی در حال نفوذ از طریق یک مجرای موئین باز به طول 0.1 m و قطر $5 \times 10^{-6} \text{ m}$ است. جزء مولی N_2 در یک انتها $x_{A1} = 0.8$ و در انتهای دیگر $x_{A2} = 0.2$ است. ضریب نفوذ مولکولی D_{AB} در فشار 0.1 atm برابر $6/98 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ است که میانگین ضرایب نفوذ ارائه شده توسط چند تن از محققان است.

الف) شار N_A را در حالت پایدار محاسبه کنید.

ب) از معادلات تقریبی (۷-۶-۱۴) و (۷-۶-۱۶) استفاده کنید.

حل: مقادیر معلوم عبارتند از: $T = 273 + 25 = 298 \text{ K}$ ، $\bar{r} = \frac{5 \times 10^{-6}}{2} = 2.5 \times 10^{-7} \text{ m}$ ، $P = 0.1 \times (1.01325 \times 10^5) = 1.013 \times 10^4 \text{ Pa}$ ، $L = 0.1$ و $x_{A2} = 0.2$ ، $x_{A1} = 0.8$ ، $D_{AB} = 6/98 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ در فشار اتمسفر. مقادیر لازم دیگر: $M_A = 28/0.2 \text{ kg/kgmol}$ و $M_B = 4/0.8$.

ضریب نفوذ مولکولی در فشار 0.1 atm برابر $6/98 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ است. با جایگزینی در معادله (۷-۶-۳) برای ضریب نفوذ نودسن داریم،

$$D_{KA} = 97 \times (2/5 \times 10^{-7}) \times \left(\frac{298}{28/0.2}\right)^{1/5} = 7/91 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$$

از معادله (۷-۶-۱۷)،

$$\frac{N_B}{N_A} = -\left(\frac{M_A}{M_B}\right)^{1/5} = -\left(\frac{28/0.2}{4/0.8}\right)^{1/5} = -2/645$$

از معادله (۷-۶-۸)،

$$\alpha = 1 + \frac{N_B}{N_A} = 1 - 2/645 = -1/645$$

با جایگزینی در معادله (۷-۶-۱۲) برای قسمت (الف)،

$$N_A = \frac{(6/98 \times 10^{-4}) \times (1/0.13 \times 10^4)}{-1/645 \times 8314 \times 298 \times 0/01} \ln \frac{1 + 1/645 \times 0/2 + (6/98 / 7/91)}{1 + 1/645 \times 0/8 + (6/98 / 7/91)}$$

$$= 6/4 \times 10^{-5} \text{ kgmol/s.m}^2$$

برای قسمت (ب) از معادله تقریبی (۷-۶-۱۳) استفاده می‌شود.

$$D'_{NA} = \frac{1}{1/D_{AB} + 1/D_{KA}} = \frac{1}{1/6/98 \times 10^{-4} + 1/7/91 \times 10^{-4}}$$

$$= 3/708 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

با جایگزینی در معادله (۷-۶-۱۴) شار تقریبی برابر است با،

$$N_A = \frac{D'_{NA} P}{R T L} (x_{A1} - x_{A2}) = \frac{3/708 \times 10^{-4} \times 1/0.13 \times 10^4}{8314 \times 298 \times 0/01} \times (0/8 - 0/2)$$

$$= 9/1 \times 10^{-5} \text{ kgmol/s.m}^2$$

بنابراین، شار محاسبه شده تقریباً ۴۰٪ بالاتر از وقتی است که از تقریب نفوذ متقابل و هم مولار ($\alpha = 0$) استفاده می‌کنیم.

حال از معادله تقریبی دقیق‌تر (۷-۶-۱۵) استفاده می‌کنیم. غلظت میانگین به این صورت محاسبه می‌شود: $x_{A \text{ av}} = \frac{(x_{A1} + x_{A2})}{2} = \frac{(0/8 + 0/2)}{2} = 0/5$

$$D''_{NA} = \frac{1}{(1 - \alpha x_{A \text{ av}}) / D_{AB} + 1 / D_{KA}}$$

$$= \frac{1}{(1 + 1/645 \times 0/5) / 6/98 \times 10^{-4} + 1 / 7/91 \times 10^{-4}}$$

$$= 2/581 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

با جایگزینی در معادله (۷-۶-۱۶)،

$$N_A = \frac{D''_{NA} P}{R T L} (x_{A1} - x_{A2})$$

$$= \frac{2/581 \times 10^{-4} \times 1/0.13 \times 10^4}{8314 \times 298 \times 0/01} \times (0/8 - 0/2)$$

$$= 6/33 \times 10^{-5} \text{ kgmol/s.m}^2$$

در این حالت شار به دست آمده فقط ۱/۱-٪ کمتر است.

۷-۶F نفوذ گازها در جامدات متخلخل

در نفوذ واقعی در جامدات متخلخل، حفره‌ها مستقیم و استوانه‌ای نبوده و شکل نامنظمی دارند. بنابراین معادله نفوذ در حفره‌ها باید تا حدی برای جامدات متخلخل واقعی اصلاح شود. مشکل قدری پیچیده‌تر است به این ترتیب که قطر حفره‌ها نیز تغییر می‌کند و ضریب نفوذ نودسن هم تابعی از قطر است.

به دلیل این پیچیدگیها، متخصصین اغلب در محیطهای متخلخل از ضریب نفوذ مؤثر $D_{A \text{ eff}}$ استفاده می‌کنند که در آن،

$$N_A = \frac{D_{A \text{ eff}} P}{RTL} (x_{A1} - x_{A2}) \quad (7-6-19)$$

اگر در معادله (۷-۶-۱۶) برای تصحیح طول l از یک ضریب انحناء τ (۱) استفاده شود و سمت راست در یک جزء خالی ϵ ضرب شود، معادله (۷-۶-۱۶) می‌شود،

$$N_A = \frac{\epsilon D''_{NA}}{\tau} \frac{P}{RTL} (x_{A1} - x_{A2}) \quad (7-6-20)$$

با مقایسه معادلات (۷-۶-۱۹) و (۷-۶-۲۰)،

$$D_{A \text{ eff}} = \frac{\epsilon D''_{NA}}{\tau} \quad (7-6-21)$$

در برخی حالات از $D_{A \text{ eff}}$ استفاده می‌شود، اما در معادله (۷-۶-۲۱) به جای ضریب دقیق‌تر D''_{NA} از D'_{NA} استفاده می‌شود.

داده‌های تجربی (S6, S2, C4) نشان می‌دهد که τ از حدود ۱/۵ تا بالاتر از ۱۰ تغییر می‌کند. محدوده قابل قبول برای بسیاری از جامدات متخلخل تجارتي حدود ۲ تا ۶ است (S2). اگر جامد متخلخل به جای حفره‌های یکسان، دو نوع حفره متشکل از حفره‌های ریز و حفره‌های درشت داشته باشد، روش فوق باید اصلاح شود (S6, C4).

بحثها و مراجع مربوط به نفوذ در جامدات متخلخل غیر آلی، آلی و مواد غذایی با انجماد خشک مانند گوشت و میوه در جاهای دیگر آورده شده است (S2, S6).

نوع دیگر نفوذ که ممکن است صورت گیرد، نفوذ سطحی است. هنگامی که روی یک جامد، جذب مولکولی لایه‌ای اتفاق افتد، مولکولها می‌توانند روی سطح مهاجرت کنند. جزئیات این بحث در مراجع دیگر آمده است (S6, S2).

۷-۷ روشهای عددی در نفوذ مولکولی ناپایدار

۷-۷۸ مقدمه

نفوذ ناپایدار غالباً در جامدات آلی، غیر آلی و بیولوژیکی صورت می‌گیرد. اگر شرایط مرزی نسبت به زمان ثابت باشند و این شرایط در تمامی سطوح جامد یکسان باشند و اگر توزیع غلظت اولیه در سراسر جامد یکنواخت باشد روشهای ارائه شده در بخش ۷-۱ می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. اما این شرایط همیشه برقرار نیستند. بنابراین از روشهای عددی باید استفاده کرد.

۷-۷B روشهای عددی برای نفوذ ناپایدار

۱- به دست آوردن رابطه حالت ناپایدار برای یک اسلب: معادله (۷-۱-۹) برای نفوذ ناپایدار در یک جهت به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (7-7-1)$$

چون این معادله از نظر ریاضی با معادله هدایت ناپایدار (۱۰-۱۰-۵) یکسان است بنابراین،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5-10-10)$$

از روش ریاضی یکسانی برای حل هر دو معادله استفاده می‌شود.

شکل ۷-۷-۱ یک اسلب به عرض Δx که مرکز آن در نقطه n است را با خطوط هاشور زده نشان می‌دهد. با نوشتن موازنه مولی A روی این اسلب در زمان t یعنی هنگامی که اختلاف نرخ ورودی و خروجی برابر با نرخ تجمع در فاصله زمانی Δt ثانیه است، داریم:

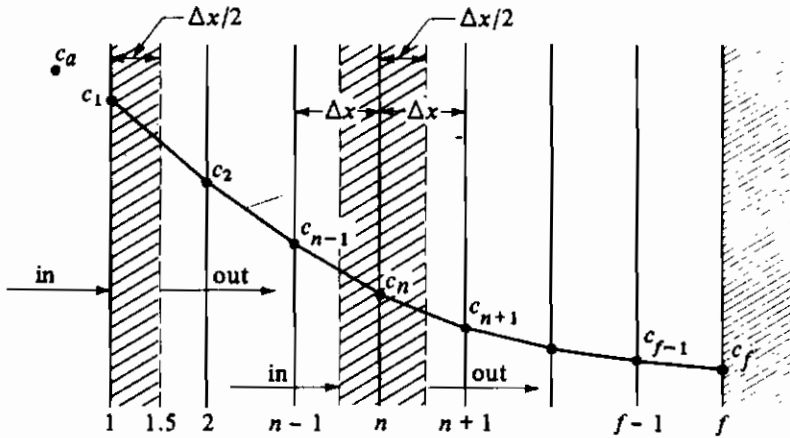
$$\frac{D_{AB} A}{\Delta x} (c_{n-1} - c_n) - \frac{D_{AB} A}{\Delta x} (c_n - c_{n+1}) = \frac{(A \Delta x)}{\Delta t} (c_{n+1} - c_n) \quad (7-7-2)$$

که A سطح مقطع و c_{n+1} غلظت در نقطه n به اندازه Δt بعد است. با مرتب کردن رابطه،

$$c_{n+1} = \frac{1}{M} [c_{n+1} + (M-2)c_n + c_{n-1}] \quad (7-7-3)$$

که M یک ثابت است.

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{D_{AB} \Delta t} \quad (7-7-4)$$



شکل ۷-۷-۱. نفوذ ناپایدار در یک اسلب

مشابه با هدایت گرمایی، $M \geq 2$.

با استفاده از معادله (۷-۷-۳)، غلظت c_{n+1} در n و زمان جدید $t + \Delta t$ به طور صریح از سه نقطه معلوم در زمان t به دست می‌آید. در این روش محاسبه با شروع از غلظتهای معلوم در $t = 0$ ، به طور مستقیم از یک فاصله زمانی تا فاصله بعدی پیش می‌رود تا وقتی که به زمان نهایی برسد.

۲- روش ساده شده اشمیت برای یک اسلب: اگر $M = 2$ باشد، معادله (۷-۷-۳) با استفاده از روش اشمیت ساده می‌شود.

$$c_{n+1} = \frac{c_{n-1} + c_{n+1}}{2} \quad (7-7-5)$$

۷-۷C شرایط مرزی در روش عددی برای یک اسلب

۱- جابه‌جایی در یک مرز: در حالتی که در سیال مجاور جابه‌جایی روی می‌دهد و غلظت سیال مجاور ناگهان به c_a تغییر می‌کند، مطابق شکل ۷-۷-۱ می‌توانیم موازنه جرم را روی نیمه‌ای از اسلب که در طرف خروجی قرار دارد به این صورت بنویسیم: نرخ جرم ورودی توسط جابه‌جایی منهای نرخ جرم خروجی توسط نفوذ برابر است با نرخ تجمع جرم در Δt ساعت.

$$k_c A (c_a - c_1) - \frac{D_{AB} A}{\Delta x} (c_1 - c_2) = \frac{A \Delta x / 2}{\Delta t} (c_{1.25} - c_{1.25}) \quad (7-7-6)$$

که در این جا $c_{1/25}$ غلظت در نقطه وسط $\Delta x / 5$ در طرف خروجی اسلب است. به عنوان یک تقریب با

استفاده از c_1 برای محاسبه $c_1/25$ و مرتب کردن معادله (۷-۷-۶) داریم،

$$t_{+ \Delta t} c_1 = \frac{1}{M} [2N_t c_a + [M - (2N + 2)] c_1 + 2_t c_2] \quad (7-7-7)$$

$$N = \frac{k_c \Delta x}{D_{AB}} \quad (7-7-8)$$

که k_c ضریب انتقال جرم جابه‌جایی بر حسب m/s است. مجدداً توجه داشته باشید که $M \geq (2N + 2)$ است.

۲- شرط مرزی عایق: برای مرز عایق بندی شده در نقطه f در شکل ۷-۷-۱ با در نظر گرفتن $k_c = 0$ ($N = 0$) در معادله (۷-۷-۷) داریم،

$$t_{+ \Delta t} c_f = \frac{1}{M} [(M - 2)_t c_f + 2_t c_{f-1}] \quad (7-7-9)$$

۳- معادله جابه‌جایی دیگر در مرز: اگر N خیلی بزرگ باشد با صرف نظر از تجمع در نیمه جلویی اسلب در معادله (۷-۷-۶)، شکل دیگری از کاربرد معادله (۷-۷-۷) به دست می‌آید.

$$t_{+ \Delta t} c_1 = \frac{N}{N+1} t_{+ \Delta t} c_a + \frac{1}{N+1} t_{+ \Delta t} c_2 \quad (7-7-10)$$

در این معادله مقدار M به وسیله N محدود نمی‌شود. وقتی که تعداد Δx ها زیاد باشد مقدار جرم صرف نظر شده در مقابل با کل جرم کوچک خواهد بود.

۴- روشی برای استفاده از غلظت مرزی اولیه: برای اولین فاصله زمانی باید از مقدار میانگین c_a یا $\frac{(c_a + c_1)}{2}$ استفاده کنیم، که c_1 غلظت اولیه در نقطه ۱ است. برای زمانهای بعدی از مقدار کامل c_a باید استفاده شود. این روش خاص برای مقدار c_a خصوصاً پس از چند فاصله زمانی باعث افزایش دقت روش عددی می‌شود.

در بخش ۴B-۵ در روشهای عددی انتقال حرارت، بحث مفصلی در مورد بهترین مقدار M برای استفاده در معادله (۷-۷-۳) ارائه شده است. دقیق‌ترین نتایج برای $M = 4$ به دست می‌آید.

۵- شرایط مرزی با ضریب توزیع: معادلات مربوط به شرایط مرزی در معادلات (۷-۷-۷) و (۷-۷-۱۰) برای وقتی است که ضریب توزیع K برابر یک باشد. هنگامی که K برابر یک نیست، مانند شرایط مرزی حالت پایدار، Kk_c جانشین k_c در معادله (۷-۷-۸) می‌شود و به صورت زیر در می‌آید. (بخشهای ۶B-۶ و ۷-۱C را ببینید).

$$N = \frac{Kk_c \Delta x}{D_{AB}} \quad (7-7-11)$$

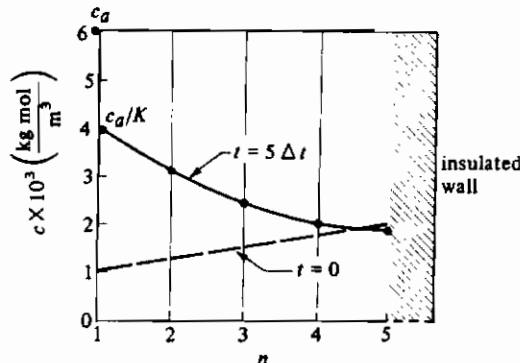
همچنین، در معادلات (۷-۷-۷) و (۷-۷-۱۰) عبارت c_a/K باید جانشین c_a شود. حالت‌های دیگر مانند نفوذ بین اسلب‌های سری غیر مشابه، مقاومت بین اسلب‌های سری، و مانند آن در مراجع دیگر به تفصیل بحث شده‌اند (G1) و مثال‌های عددی واقعی نیز ارائه شده است. در مرجع (G1) روش عددی ضمنی نیز بحث شده است.

مثال ۷-۷-۱ حل عددی نفوذ ناپایدار با یک ضریب توزیع

ماده‌ای به شکل اسلب به ضخامت 0.004 m دارای توزیع غلظت حل شونده A به صورت زیر است، که در آن x فاصله از سطح بر حسب متر است.

x (m)	غلظت (kg mol A/m^3)	مکان (n)
0	1×10^{-3}	۱ (سطح در معرض)
0.001	$1/25 \times 10^{-3}$	۲
0.002	$1/5 \times 10^{-3}$	۳
0.003	$1/75 \times 10^{-3}$	۴
0.004	2×10^{-3}	۵ (سطح عایق شده)

ضریب نفوذ $D_{AB} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ است. سطح بالایی به طور ناگهانی در معرض سیالی با غلظت ثابت $c_a = 6 \times 10^{-3} \text{ kg mol A/m}^3$ قرار می‌گیرد. ضریب توزیع $K c_a/c_n = 1/5$ است. توزیع غلظت را بعد از 2500 s محاسبه کنید. ضریب انتقال جرم جابه‌جایی k_c می‌تواند به صورت بی‌نهایت فرض شود. از $\Delta x = 0.001$ و $M = 2$ استفاده کنید.



شکل ۷-۷-۲. غلظتها در روش عددی برای نفوذ ناپایدار، مثال ۷-۷-۱

فرایندهای انتقال و عملیات واحدها

حل: شکل ۷-۷-۲ توزیع غلظت اولیه را در چهار فاصله نشان می‌دهد و $c_a = 6 \times 10^{-3}$. چون $M = 2$ ، با جایگزینی در معادله (۷-۷-۴) با $\Delta x = 0.001 \text{ m}$ و حل معادله نسبت به Δt خواهیم داشت،

$$M = 2 = \frac{(\Delta x)^2}{D_{AB} \Delta t} = \frac{0.001^2}{(1 \times 10^{-9}) \times \Delta t}$$

$$\Delta t = 500 \text{ s}$$

چون $\frac{2500}{500} = 5$ بنابراین به پنج فاصله زمانی نیاز هست.

برای سطح جلویی که $n = 1$ غلظتی که برای اولین فاصله زمانی باید استفاده شود به صورت زیر است،

$$c_a = \frac{c_a/K + c_1}{2} = c_1 \quad (n = 1) \quad (7-7-12)$$

که در آن c_1 غلظت اولیه در $n = 1$ است. برای فواصل زمانی باقیمانده داریم،

$$c_1 = \frac{c_a}{K} \quad (7-7-13)$$

برای محاسبه غلظت در تمام فواصل زمانی برای اسلبهای $n = 2, 3, 4$ با استفاده از معادله (۷-۷-۵) برای $M = 2$ داریم،

$$1 + \Delta t c_n = \frac{1 c_{n-1} + 1 c_{n+1}}{2} \quad (n = 2, 3, 4) \quad (7-7-14)$$

برای انتهای عایق بندی شده در $n = 5$ با جایگزینی $M = 2$ و $f = n = 5$ در معادله (۷-۷-۹)،

$$1 + \Delta t c_5 = \frac{(2-2)c_5 + 2c_6}{2} = c_6 \quad (n = 5) \quad (7-7-15)$$

برای $1 \Delta t$ یا $(1+1)\Delta t$ یعنی اولین فاصله زمانی با محاسبه غلظت برای $n = 1$ بر اساس معادله (۷-۷-۱۲)،

$$1 + \Delta t c_1 = \frac{c_a/K + c_1}{2} = \frac{(6 \times 10^{-3})/1/5 + 1 \times 10^{-3}}{2} = 2/5 \times 10^{-3}$$

برای $n = 2, 3, 4$ با استفاده از معادله (۷-۷-۱۴)،

$$1 + \Delta t c_2 = \frac{1 c_{n-1} + 1 c_{n+1}}{2} = \frac{1 c_1 + 1 c_6}{2} = \frac{2/5 \times 10^{-3} + 1/5 \times 10^{-3}}{2} = 2 \times 10^{-3}$$

$$1 + \Delta t c_3 = \frac{1 c_2 + 1 c_6}{2} = \frac{1/25 \times 10^{-3} + 1/75 \times 10^{-3}}{2} = 1/5 \times 10^{-3}$$

$$1 + \Delta t c_4 = \frac{1 c_3 + 1 c_6}{2} = \frac{1/5 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-3}}{2} = 1/75 \times 10^{-3}$$

برای $n = 5$ با استفاده از معادله (۷-۷-۱۵)،

$$t + \Delta t c_b = t c_p = 1/75 \times 10^{-3}$$

برای Δt ۲ یا به کار بردن معادله (۷-۷-۱۳) برای $n = 1$ و استفاده از معادله (۷-۷-۱۴) برای n از ۲ تا ۴ و معادله (۷-۷-۱۵) برای $n = 5$ داریم،

$$t + 2\Delta t c_1 = \frac{c_a}{K} = \frac{6 \times 10^{-3}}{1/5} = 4 \times 10^{-3} \quad (\text{برای بقیهٔ زمانها ثابت است})$$

$$t + 2\Delta t c_2 = \frac{t + \Delta t c_1 + t + \Delta t c_p}{2} = \frac{4 \times 10^{-3} + 1/75 \times 10^{-3}}{2} = 2/75 \times 10^{-3}$$

$$t + 2\Delta t c_3 = \frac{t + \Delta t c_2 + t + \Delta t c_p}{2} = \frac{2 \times 10^{-3} + 1/75 \times 10^{-3}}{2} = 1/875 \times 10^{-3}$$

$$t + 2\Delta t c_4 = \frac{t + \Delta t c_3 + t + \Delta t c_b}{2} = \frac{1/875 \times 10^{-3} + 1/75 \times 10^{-3}}{2} = 1/625 \times 10^{-3}$$

$$t + 2\Delta t c_5 = t + \Delta t c_p = 1/75 \times 10^{-3}$$

برای Δt ۳،

$$t + 3\Delta t c_1 = 4 \times 10^{-3}$$

$$t + 3\Delta t c_2 = \frac{4 \times 10^{-3} + 1/875 \times 10^{-3}}{2} = 2/938 \times 10^{-3}$$

$$t + 3\Delta t c_3 = \frac{2/938 \times 10^{-3} + 1/625 \times 10^{-3}}{2} = 2/188 \times 10^{-3}$$

$$t + 3\Delta t c_4 = \frac{1/875 \times 10^{-3} + 1/75 \times 10^{-3}}{2} = 1/813 \times 10^{-3}$$

$$t + 3\Delta t c_5 = 1/625 \times 10^{-3}$$

برای Δt ۴،

$$t+4\Delta t C_1 = 4 \times 10^{-3}$$

$$t+4\Delta t C_2 = \frac{4 \times 10^{-3} + 2/188 \times 10^{-3}}{2} = 3/094 \times 10^{-3}$$

$$t+4\Delta t C_3 = \frac{2/938 \times 10^{-3} + 1/813 \times 10^{-3}}{2} = 2/376 \times 10^{-3}$$

$$t+4\Delta t C_4 = \frac{2/188 \times 10^{-3} + 1/625 \times 10^{-3}}{2} = 1/906 \times 10^{-3}$$

$$t+4\Delta t C_5 = 1/813 \times 10^{-3}$$

برای Δt ،

$$t+5\Delta t C_1 = .4 \times 10^{-3}$$

$$t+5\Delta t C_2 = \frac{4 \times 10^{-3} + 2/376 \times 10^{-3}}{2} = 3/188 \times 10^{-3}$$

$$t+5\Delta t C_3 = \frac{3/094 \times 10^{-3} + 1/906 \times 10^{-3}}{2} = 2/500 \times 10^{-3}$$

$$t+5\Delta t C_4 = \frac{2/376 \times 10^{-3} + 1/813 \times 10^{-3}}{2} = 2/095 \times 10^{-3}$$

$$t+5\Delta t C_5 = 1/906 \times 10^{-3}$$

توزیع غلظت نهایی در شکل ۷-۷-۲ رسم شده است. برای افزایش دقت باید تعداد فواصل بیشتر باشد که در نتیجه به کامپیوتر نیاز است.

۷-۸ آنالیز ابعادی در انتقال جرم

۷-۸۸ مقدمه

آنالیز ابعادی ما را قادر می‌کند تا بتوانیم گروههای بدون بعدی را به دست آوریم که در همبسته کردن داده‌های تجربی انتقال جرم بسیار مفید و ضروری هستند. همچنان‌که در جریان سیال و انتقال حرارت گروههای بدون بعد مانند عدد رینولدز، عدد گرافش، عدد ناسلت را داریم که در همبسته کردن داده‌های

تجربی غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرند. قضیهٔ باکینگهام که در بخشهای ۱۱-۳ و ۱۴-۴ مورد بحث قرار گرفت بیان می‌کند که رابطهٔ تابعی بین q مقدار یا متغیر که واحدهای آنها بر حسب u واحد اساسی بیان شده است می‌تواند به صورت $(q-u)$ گروه بدون بعد نوشته شود.

۷-۸B آنالیز ابعادی در انتقال جرم جابه‌جایی

حالتی از انتقال جرم جابه‌جایی را در نظر می‌گیریم که سیالی در اثر جابه‌جایی اجباری در یک لوله در جریان است و انتقال جرم از دیواره به سیال صورت می‌گیرد. سیال با سرعت v در داخل لوله‌ای به قطر D جریان دارد و ما می‌خواهیم ضریب انتقال جرم k'_c را به متغیرهای D ، ρ ، μ و v ارتباط دهیم. تعداد کل متغیرها $q = 6$ است. تعداد واحدها یا ابعاد اساسی $3 = u$ است که جرم (M) ، طول (L) و زمان (t) هستند. واحدهای متغیرها به این صورت است،

$$k'_c = \frac{L}{t} \quad \rho = \frac{M}{L^3} \quad \mu = \frac{M}{Lt} \quad v = \frac{L}{t} \quad D_{AB} = \frac{L^2}{t} \quad D = L$$

تعداد گروه‌های بدون بعد یا π' برابر $3 = 6 - 3$ است. پس،

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \quad (7-8-1)$$

متغیرهای D_{AB} ، ρ و D را انتخاب می‌کنیم که باید متغیرهای مشترک در هر سه گروه بدون بعد باشند. این سه گروه به صورت زیرند،

$$\pi_1 = D_{AB}^a \rho^b D^c k'_c \quad (7-8-2)$$

$$\pi_2 = D_{AB}^d \rho^e D^f v \quad (7-8-3)$$

$$\pi_3 = D_{AB}^g \rho^h D^i \mu \quad (7-8-4)$$

برای π_1 ابعاد واقعی را به صورت زیر جایگزین می‌کنیم،

$$1 = \left(\frac{L^2}{t}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b (L)^c \left(\frac{L}{t}\right) \quad (7-8-5)$$

با جمع کردن توانهای هر بعد،

$$(L) \quad 0 = 2a - 3b + c + 1$$

$$(M) \quad 0 = b \quad (7-8-6)$$

$$(t) \quad 0 = a - 1$$

و با حل این معادلات به طور همزمان، $a = -1$ ، $b = 0$ و $c = 1$ به دست می‌آید. با جایگزینی این مقادیر

در معادله (۷-۸-۲)،

$$\pi_1 = \frac{k_c D}{D_{AB}} = N_{Sh} \quad (7-8-7)$$

با تکرار این عمل برای π_2 و π_3

$$\pi_2 = \frac{vD}{D_{AB}} \quad (7-8-8)$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = N_{Sc} \quad (7-8-9)$$

اگر π_2 را بر π_3 تقسیم کنیم عدد رینولدز به دست می‌آید،

$$\frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{vD}{D_{AB}} \left/ \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right) \right. = \frac{Dv\rho}{\mu} = N_{Re} \quad (7-8-10)$$

بنابراین با جایگزینی در معادله (۷-۸-۱)،

$$N_{Sh} = f(N_{Re}, N_{Sc}) \quad (7-8-11)$$

۷-۹ جریان لایه مرزی و اغتشاش در انتقال جرم

۷-۹A جریان لایه‌ای و تئوری لایه مرزی در انتقال جرم

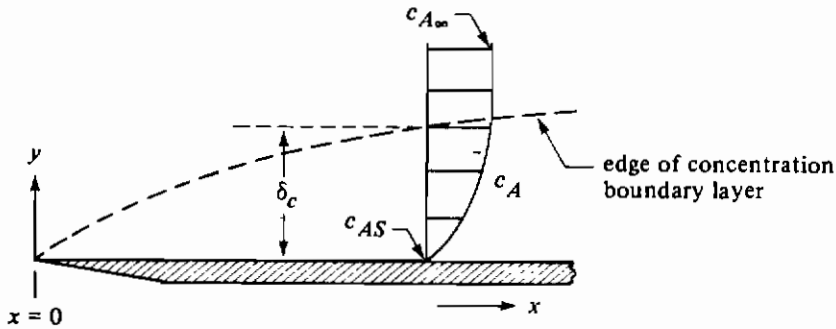
در بخش ۳-۱۰C حل دقیقی برای لایه مرزی هیدرودینامیک در جریان آرام و همدمای گذرنده از روی یک صفحه ارائه شد و در بخش ۵-۷A حل بلازیوس برای به دست آوردن رابطه‌ای برای انتقال حرارت جابه‌جایی تعمیم داده شد. در یک روش مشابه حل بلازیوس را برای انتقال جرم جابه‌جایی با همان شکل هندسی و در جریان آرام مورد استفاده قرار می‌دهیم. در شکل ۷-۹-۱ لایه مرزی غلظتی نشان داده شده است که در آن غلظت سیالی که به سطح صاف نزدیک می‌شود c_A و در مجاورت سطح c_{AS} است.

با موازنه جرم دیفرانسیلی، معادله (۷-۵-۱۷) شروع می‌کنیم و با ساده کردن آن برای حالت پایدار یعنی $\frac{\partial c_A}{\partial t} = 0$ و همچنین $R_A = 0$ و جریان دوبعدی در جهتهای x و y و $v_z = 0$ و صرفنظر کردن از نفوذ در جهتهای x و z داریم،

$$v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (7-9-1)$$

معادله لایه مرزی ممتوم نیز خیلی به این معادله شبیه است.

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (3-10-5)$$



شکل ۷-۹-۱. جریان آرام سیال گذرنده از روی یک صفحه صاف و لایه مرزی غلظتی

معادله لایه مرزی گرمایی نیز به همین صورت است،

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۵-۷-۲)$$

معادله پیوستگی که قبلاً مورد استفاده قرار گرفت به این صورت است،

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (۳-۱۰-۳)$$

شرایط مرزی غلظتی بدون بعد به صورت زیرند،

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{c_A - c_{AS}}{c_{A\infty} - c_{AS}} = 0 \quad \text{at } y = 0$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{c_A - c_{AS}}{c_{A\infty} - c_{AS}} = 1 \quad \text{at } y = \infty$$

تشابه بین سه معادله (۷-۹-۱)، (۳-۱۰-۵) و (۵-۷-۲) کاملاً مشهود است. این تشابه بین

شرایط مرزی در معادله (۷-۹-۲) نیز دیده می‌شود. در بخش ۷-۵A حل بلازیوس در مورد انتقال

حرارت جابه‌جایی در حالیکه $\frac{(\mu/\rho)}{\alpha} = N_{Pr} = 1$ است به کار رفت. حال همان نوع حل را برای انتقال

جرم آرام وقتی که $\frac{(\mu/\rho)}{D_{AB}} = N_{Sc} = 1$ باشد به کار می‌بریم.

گرا دیان سرعت روی سطح قبلاً به دست آمده است.

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.332 \frac{v_\infty}{x} N_{Re,x}^{1/2} \quad (۵-۷-۵)$$

که $N_{Re,x} = x v \rho / \mu$ همچنین از معادله (۷-۹-۲)،

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{c_A - c_{AS}}{c_{A\infty} - c_{AS}} \quad (۷-۹-۳)$$

با دیفرانسیل گیری از معادله (۷-۹-۳) و ترکیب نتیجه با معادله (۵-۷-۵)،

$$\left(\frac{\partial c_A}{\partial y}\right)_{y=0} = (c_{A\infty} - c_{AS}) \left(\frac{0.332}{x} N_{Re,x}^{1/2}\right) \quad (7-9-4)$$

معادله انتقال جرم جابه‌جایی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود و برای محلولهای رقیق به معادله فیک ربط داده شود.

$$N_{Ay} = k'_c(c_{AS} - c_{A\infty}) = -D_{AB} \left(\frac{\partial c_A}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (7-9-5)$$

با ترکیب معادلات (۷-۹-۴) و (۷-۹-۵)،

$$\frac{k'_c x}{D_{AB}} = N_{Sh,x} = 0.332 N_{Re,x}^{1/2} \quad (7-9-6)$$

این رابطه برای گازها با $NSc = 1$ می‌باشد.

نسبت بین ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی (δ) و لایه مرزی غلظتی (δ_c) در حالتی که عدد اشمیت برابر با یک نباشد عبارت است از،

$$\frac{\delta}{\delta_c} = N_{Sc}^{1/3} \quad (7-9-7)$$

در نتیجه معادله ضریب انتقال جرم جابه‌جایی موضعی خواهد بود،

$$\frac{k'_c x}{D_{AB}} = N_{Sh,x} = 0.332 N_{Re,x}^{1/2} N_{Sc}^{1/3} \quad (7-9-8)$$

با استفاده از یک انتگرال گیری روی صفحه‌ای به عرض b از $x = 0$ تا $x = L$ می‌توانیم معادله ضریب انتقال جرم میانگین k' را به دست آوریم:

$$k'_c = \frac{b}{bL} \int_0^L k'_c dx \quad (7-9-9)$$

که در نتیجه،

$$\frac{k'_c L}{D_{AB}} = N_{Sh} = 0.664 N_{Re,L}^{1/2} N_{Sc}^{1/3} \quad (7-9-10)$$

این معادله مشابه با معادله انتقال حرارت برای یک صفحه صاف است (معادله (۷-۱۵-۵)) و همچنین معادله تجربی انتقال جرم برای یک صفحه صاف (معادله (۷-۳-۲۷)) را تأیید می‌کند.

در بخش ۳-۱۰ یک تحلیل انتگرالی تقریبی برای لایه مرزی هیدرودینامیکی آرام و مغشوش انجام شد. این کار هم چنین در بخش ۷-۵ برای لایه مرزی حرارتی انجام شد. این تحلیل انتگرالی

تقریبی دقیقاً به همان روش می‌تواند برای لایه مرزی آرام و مغشوش انجام شود.

۷-۹B طول اختلاط پراتل و ضریب نفوذ جرمی گردابه‌ای مغشوش

در بسیاری از موارد، جریان در انتقال جرم مغشوش است. جریان مغشوش یک سیال کاملاً پیچیده است و سیال یک سری حرکت‌های گردابه‌ای اتفاقی در هسته مغشوش انجام می‌دهد. وقتی که انتقال جرم هم صورت می‌گیرد، به آن نفوذ جرمی گردابه‌ای گفته می‌شود. در بخش‌های ۱۰-۳ و ۷-۵ معادلاتی را برای ضریب نفوذ حرارتی گردابه‌ای مغشوش و ضریب نفوذ ممنتوم گردابه‌ای مغشوش با استفاده از تئوری طول اختلاط پراتل به دست آوردیم.

به روش مشابه می‌توانیم رابطه‌ای برای ضریب نفوذ جرمی گردابه‌ای مغشوش ϵ_M به دست آوریم. گردابه‌ها در فاصله‌ای به طول L که طول اختلاط پراتل نامیده می‌شود در جهت y حرکت می‌کنند. در نقطه L گردابه‌ها در یک سیال با گردابه‌های سیال مجاور اختلاف سرعتی به میزان v'_x پیدا می‌کنند که همان جزء نوسانی سرعت در بخش $F=10-3$ می‌باشد. نرخ آبی انتقال جرم A با سرعت v'_y برای یک فاصله L در جهت y هست،

$$J_{Ay}^* = c'_A v'_y \quad (7-9-11)$$

که c'_A غلظت نوسانی لحظه‌ای است. غلظت لحظه‌ای سیال $\bar{c}_A = c'_A + \bar{c}_A$ است که \bar{c}_A مقدار میانگین و c_A انحراف از مقدار میانگین است. طول اختلاط L به اندازه کافی کوچک است به طوری که اختلاف غلظت برابر است با،

$$c'_A = L \frac{d\bar{c}_A}{dy} \quad (7-9-12)$$

J_{Ay}^* نرخ جرم منتقل شده در واحد سطح است. با ترکیب معادلات (۷-۹-۱۱) و (۷-۹-۱۲)،

$$J_{Ay}^* = -v'_y L \frac{d\bar{c}_A}{dy} \quad (7-9-13)$$

از معادله (۷-۹-۲۳) داریم،

$$v'_y = v'_x = L \left| \frac{d\bar{c}_x}{dy} \right| \quad (7-9-14)$$

با جایگزینی معادله (۷-۹-۱۴) در (۷-۹-۱۳)،

$$J_{Ay}^* = -L^2 \left| \frac{d\bar{c}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{c}_A}{dy} \quad (7-9-15)$$

عبارت $L^2 |d\bar{v}_x/dy|$ ضریب نفوذ جرمی گردابه‌ای مغشوش ϵ_M نامیده می‌شود. از ترکیب معادله (۷-۹-۱۵) با معادله نفوذ بر حسب D_{AB} ، شار کل برابر است با،

$$J_{A_y}^* = -(D_{AB} + \epsilon_M) \frac{d\bar{c}_A}{dy} \quad (7-9-16)$$

به تشابه بین معادله (۷-۹-۱۶) برای انتقال جرم و معادلات مربوط به انتقال حرارت و ممنتوم در بخش ۱۸-۶ اشاره شده است.

۷-۹C مدل‌های ضرایب انتقال جرم

۱- مقدمه: برای سالها ضرایب انتقال جرمی که از روابط تجربی به دست می‌آمدند در طراحی تجهیزات فرایندی مورد استفاده قرار می‌گرفتند. برای توضیح تئوری ضریب انتقال جرم جابه‌جایی به یک مکانیسم قابل فهم‌تر برای اغتشاش نیاز است. تئوریهایی مانند تئوری ضریب نفوذ گردابه‌ای برای بیان انتقال جرم جابه‌جایی در این فصل ارائه شد. در این بخش به طور مختصر تعدادی از این تئوریا را ارائه می‌کنیم و راجع به این‌که چگونه این تئوریا می‌توانند برای بسط روابط تجربی به کار روند، بحث می‌کنیم.

۲- تئوری انتقال جرم فیلمی: تئوری فیلم، که ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین تئوری است، یک فیلم آرام فرضی در مجاورت مرز در نظر می‌گیرد. این فیلم که در آن فقط نفوذ مولکولی صورت می‌گیرد همان مقاومتی را در مقابل انتقال جرم ایجاد می‌کند که نواحی ویسکوز، گذرا و مغشوش ایجاد می‌کنند. پس ضریب انتقال جرم واقعی k'_c با ضخامت این فیلم δ رابطه دارد،

$$J_A^* = k'_c(c_{A1} - c_{A2}) = \frac{D_{AB}}{\delta} (c_{A1} - c_{A2}) \quad (7-9-17)$$

$$k'_c = \frac{D_{AB}}{\delta} \quad (7-9-18)$$

ضریب انتقال جرم متناسب با D_{AB}^1 است. اما چون نشان داده‌ایم که در معادله (۷-۳-۱۳) J_D متناسب با $(\mu/\rho D_{AB})^{2/3}$ است، پس $k'_c \propto D_{AB}^{2/3}$ است. بنابراین، تئوری فیلم صحیح نیست. مزیت بزرگ تئوری فیلم ساده بودن آن است که در حالت‌های پیچیده مانند نفوذ و واکنش شیمیایی به صورت همزمان می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۳- تئوری نفوذ: تئوری نفوذ که توسط Higbie ارائه شد و بعداً Danckwerts (D3) آن را اصلاح کرد، برای نفوذ به داخل یک فیلم آرام در حال سقوط برای زمانهای تماس کوتاه در معادله (۷-۳-۲۳)

می‌باشد و به صورت زیر است،

$$k'_c = \sqrt{\frac{4D_{AB}}{\pi t_L}} \quad (7-9-19)$$

که در این جا t_L زمان نفوذ حل‌شونده برحسب ثانیه است. این تئوری به وسیله Danckwerts بسط داده شد. او این تئوری را برای انتقال جرم مغشوش اصلاح کرد و فرض کرد که یک گردابه از سیال غلظت یکنواختی در ناحیه مغشوش دارد و از طریق یک نفوذ ناپایدار به طرف سطح جاروب می‌شود. سپس گردابه به طرف ناحیه گردابی رانده می‌شود و گردابه‌های دیگر جای آن را در سطح می‌گیرند و در طول یک مدت زمان کاملاً اتفاقی در آن جا مقیم می‌شوند. ضریب میانگین تکرار سطح s برحسب s^{-1} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$k'_c = \sqrt{D_{AB}s} \quad (7-9-20)$$

ضریب انتقال جرم k'_c متناسب با $D_{AB}^{1/5}$ است. در برخی سیستمها، مانند عبور جریان مایع از روی آکنه و بسترهای نیمه ساکن، که در آن سطح مرتباً تجدید می‌شود، نتایج تجربی از معادله (7-9-20) تبعیت نمی‌کنند. مقدار s باید به صورت تجربی به دست آید. دیگران (D3, T2) روابط پیچیده‌تری از تئوری سطح نازک تجدیدشونده^(۱) به دست آورده‌اند که می‌توانند تغییر تدریجی توان D_{AB} را از ۰/۵ تا ۱ بسته به اغتشاش و عوامل دیگر، پیش بینی کنند. تئوریهای نفوذ در حالت‌هایی به کار می‌روند که در آنها نفوذ و واکنش شیمیایی صورت می‌گیرد (D3).

۴- تئوریهای لایه مرزی: تئوری لایه مرزی به تفصیل در بخش ۹-۷ بحث شد و در پیش بینی و همبسته کردن اطلاعات مربوط به جریان سیالات گذرنده از روی سطوح جامد مفید است. در جریان آرام و مغشوش ضریب انتقال جرم $k'_c \propto D_{AB}^{2/3}$ است. این مسئله در بسیاری حالات به طریق تجربی ثابت شده است.

مسائل

۷-۱-۱. نفوذ ناپایدار در یک اسلب ضخیم: مثال ۲-۱-۷ را با استفاده از یک ضریب توزیع $K = 0/5$ به جای ۲ حل کنید. داده‌ها را رسم کنید.

جواب: $c = 2/78 \times 10^{-2}$ ($x = 0/01$ m), $c = c_i = 5/75 \times 10^{-2}$ ($x = 0$)

$c_{Li} = 2/87 \times 10^{-2}$ kgmol/m³

۷-۱-۲. **منحنی توزیع غلظت در نفوذ ناپایدار:** با استفاده از همان شرایط مثال ۷-۱-۲ غلظت را در نقاط ۰/۰۲، ۰/۰۱۵، ۰/۰۱، ۰/۰۰۵ و ۰/۰۰۵ متر از سطح محاسبه کنید. همچنین c_L را در مایع فصل مشترک حساب کنید. غلظتها را به روشی مشابه شکل ۷-۱-۳b با نشان دادن غلظت در فصل مشترک رسم کنید.

۷-۱-۳. **نفوذ ناپایدار در چند جهت:** با استفاده از همان شرایط مثال ۷-۱-۱ با این تفاوت که جامد یک بلوک چهارگوش به ضخامت $10/16$ mm در جهت α و $7/62$ mm در جهت γ و 1 mm در جهت z است و نفوذ در هر شش وجه صورت می‌گیرد، غلظت را در وسط پس از 10 ساعت محاسبه کنید.

جواب: $c = 6/20 \times 10^{-2} \text{ kgmol/m}^3$

۷-۱-۴. **خشک کردن خاک رس مرطوب:** یک اسلب خیلی نازک از خاک رس دارای رطوبت اولیه $c_0 = 14\% \text{ wt}$ است. برای خشک کردن خاک رس هوا از روی سطح آن عبور می‌کند. فرض کنید مقاومت نسبی گاز در سطح صفر است. میزان رطوبت تعادلی در سطح مقدار ثابت $c_1 = 3\%$ است. نفوذ رطوبت در خاک رس دارای ضریب نفوذ تقریبی $D_{AB} = 1/29 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ است. پس از یک ساعت، غلظت آب را در فواصل $0/05$ متر، $0/01$ متر و $0/02$ متر زیر سطح محاسبه کنید. فرض کنید خاک رس جامد نیمه بی‌نهایت است و مقدار Y به جای kgmol/m^3 بر اساس درصد وزنی غلظت است. مقادیر را بر حسب x رسم کنید.

۷-۱-۵. **نفوذ ناپایدار در یک استوانه از ژل آگار:** یک استوانه مرطوب از ژل آگار در 278 K حاوی اوره با غلظت یکنواخت $0/1 \text{ kgmol/m}^3$ است. استوانه مذکور دارای قطر $30/48 \text{ mm}$ و طول $38/1 \text{ mm}$ یا دو انتهای موازی است. ضریب نفوذ $10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ است. اگر استوانه به طور ناگهانی در آب خالص مغشوش وارد شود، غلظت در نقطه وسط استوانه را پس از 100 ساعت برای حالت‌های زیر حساب کنید:

الف) فقط نفوذ شعاعی

ب) نفوذ شعاعی و محوری

۷-۱-۶. **خشک کردن چوب:** یک اسلب صاف چوبی به ضخامت $50/8 \text{ mm}$ با رطوبت $30\% \text{ wt}$ ، از دو طرف خشک می‌شود (از لبه‌ها و دو انتها صرف‌نظر می‌شود). رطوبت تعادلی در سطح چوب به دلیل وزش هوای خشک از روی آن در $0/5 \text{ wt}$ ثابت نگهداشته می‌شود. ضریب نفوذ در این عملیات خشک کردن $3/72 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ فرض می‌شود. زمان لازم برای این‌که رطوبت مرکز به 10% برسد را محاسبه کنید.

۷-۲-۱. شار و تبدیل ضریب انتقال جرم: برای نفوذ A در جزء ساکن B، k_G به طریق تجربی حدود $1/0.8 \text{ lbmol/hr.ft}^2.\text{atm}$ تعیین شده است. در صورتی که نفوذ متقابل و هم مولار داشته باشیم با همان جریان و غلظتها k'_G و شار A را محاسبه کنید. فشارهای جزئی $p_{A1} = 0/2 \text{ atm}$ ، $p_{A2} = 0/0.5 \text{ atm}$ و $P = 1 \text{ atm}$ مطلق است. از واحدهای SI و انگلیسی استفاده کنید.

جواب: $k'_G = 0/942 \text{ kgmol/s.m}^2.\text{Pa}$ و $1/261 \times 10^{-8} \text{ kgmol/s.m}^2.\text{Pa}$

$N_A = 0/141 \text{ lbmol/h.ft}^2$ و $1/912 \times 10^{-4} \text{ kgmol/s.m}^2$

۷-۲-۲. تبدیل ضریب انتقال جرم: موارد زیر را با شروع از معادلات شار اثبات کنید:

الف) k'_c را به k_y و k_G تبدیل کنید.

ب) k_L را به k_x و k'_x تبدیل کنید.

پ) k_G را به k_y و k_c تبدیل کنید.

۷-۲-۳. جذب H_2S توسط آب: در یک برج دیواره مرطوب مخلوطی از هوا و H_2S در کنار لایه نازکی

از آب که به طرف پایین می‌آید، در جریان است. می‌خواهیم H_2S در فشار کل مطلق

$1/5 \text{ atm}$ و دمای 30°C جذب آب شود. مقدار k'_c برابر $9/567 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ تخمین زده

می‌شود که ضریب انتقال جرم در فاز گاز است. در یک نقطه مشخص جزء مولی H_2S در

مایع در فصل مشترک گاز - مایع برابر $2/5 \times 10^{-5}$ و p_A برای H_2S در گاز $0/0.5 \text{ atm}$ است.

بر اساس قانون هنری نسبت تعادلی (جزء مولی در مایع) $p_A = 609 x_A$ است (p_A بر حسب

اتمسفِر). نرخ جذب H_2S را محاسبه کنید. (راهنمایی: نقطه ۱ را در فصل مشترک و نقطه ۲

را در فاز گاز در نظر بگیرید. سپس p_{A2} را از قانون هنری در x_A معلوم به دست آورید. مقدار

p_{A2} برابر $0/0.5 \text{ atm}$ است.)

جواب: $N_A = -1/485 \times 10^{-6} \text{ kgmol/s.m}^2$

۷-۳-۱. انتقال جرم از یک صفحه صاف به یک مایع: با استفاده از اطلاعات و خواص فیزیکی مثال

۷-۳-۲ و با دانستن اینکه سرعت آب $0/152 \text{ m/s}$ و طول صفحه $L = 0/137 \text{ m}$ است،

مقدار شار را محاسبه کنید. به جای این که x_{BM} را مساوی یک فرض کنید مقدار واقعی آن را

محاسبه کنید.

۷-۳-۲. انتقال جرم از دیواره یک لوله: آب خالص با دمای $26/1^\circ \text{C}$ و با سرعت $0/305 \text{ m/s}$ در

لوله‌ای به قطر داخلی $6/35 \text{ mm}$ در جریان است. طول لوله $1/829 \text{ m}$ است و $1/22$ متر

انتهای آن دیواره‌ای از جنس اسید بنزوئیک دارد. با فرض اینکه توزیع سرعت کاملاً توسعه

یافته باشد، غلظت میانگین اسید بنزوئیک را در خروجی محاسبه کنید. از خواص فیزیکی

مثال ۷-۳-۲ استفاده کنید. [راهنمایی: ابتدا عدد رینولدز را محاسبه کنید $D \nu \rho / \mu$. سپس $N_{Re} N_{Sc} (D/L) (\pi/4)$ را محاسبه کنید که همان $W/D_{AB} \rho L$ است.]

جواب: $c_A = 2/193 \times 10^{-3} \text{ kgmol/m}^3$ و $(c_A - c_{A0})/(c_{Ai} - c_{A0}) = 0/0744$

۷-۳-۳ ضریب انتقال جرم برای شکلهای هندسی مختلف: مطلوبست تخمین ضریب انتقال جرم

k_G بر حسب $\text{kgmol/s.m}^2.\text{Pa}$ برای بخار آب موجود در هوا در شرایط $338/6 \text{ K}$ و $101/32 \text{ kPa}$ که در داخل یک کانال بزرگ از روی اجسام جامدی با شکلهای هندسی مختلف عبور می‌کند. سرعت در کانال $3/66 \text{ m/s}$ است. غلظت بخار آب در هوا کم است به طوری که می‌توان از خواص فیزیکی هوا استفاده کرد. بخار آب باید به جامدات منتقل شود. برای شکلهای هندسی زیر مسأله را حل کنید.
الف) یک کره به قطر $25/4 \text{ mm}$.

ب) یک بستر پر شده با ذرات کروی به قطر $25/4 \text{ mm}$ یا $0/35 \text{ m}$

جواب: الف) $k_G = 1/98 \times 10^{-8} \text{ kgmol/s.m}^2.\text{Pa}$ ($1/48 \text{ lbmol/h.ft}^2.\text{atm}$)

۷-۳-۴ انتقال جرم به اجسام جامد با شکلهای مشخص: ضریب انتقال جرم در جریان هوایی

به دمای $325/6 \text{ K}$ که در یک کانال ساخته شده از نفتالین جامد به شکلهای زیر جریان دارد را تعیین کنید. سرعت هوا $1/524 \text{ m/s}$ در $325/6 \text{ K}$ و $202/6 \text{ kPa}$ است. D_{AB} نفتالین در هوا $5/16 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ در 273 K و $101/32 \text{ kPa}$ است.

الف) جریان هوا موازی با صفحه صافی به طول $0/152 \text{ m}$.

ب) جریان هوا از روی کره‌ای به قطر $12/7 \text{ mm}$.

۷-۳-۵ انتقال جرم به بستر پر شده و نیروی رانش: آب خالص در $26/1^\circ \text{C}$ با دبی $0/071 \text{ ft}^3/\text{hr}$ از

بستر پر شده‌ای با ذرات کروی از جنس اسید بنزوئیک به قطر $0/251 \text{ in}$ که دارای سطح مفید کل $0/129 \text{ ft}^2$ است، می‌گذرد. حلالیت اسید بنزوئیک در آب $0/00184 \text{ lbmol/ft}^3$ است. غلظت خروجی c_{A2} برابر $1/8 \times 10^{-4} \text{ lbmol/ft}^3$ است. ضریب انتقال جرم k_c را محاسبه کنید.

۷-۳-۶ انتقال جرم در فلزات مایع: جیوه در $26/5^\circ \text{C}$ از بستر پر شده‌ای از ذرات سربی به قطر

$2/066 \text{ mm}$ با ضریب تخلخل $0/499$ می‌گذرد. سرعت داتی $0/2198 \text{ m/s}$ است.

حلالیت سرب در جیوه $1/721 \text{ wt}\%$ است، عدد اشمیت $124/1$ ، ویسکوزیته محلول

$1/577 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ و دانسیته آن 13530 kg/m^3 است.

الف) J_D را پیش بینی کنید. در صورت امکان از معادله (۷-۳-۳۸) استفاده کنید.

مقدار به دست آمده را با مقدار تجربی $J_D = 0.076$ مقایسه کنید (D2).

(ب) مقدار k_c را برای حالتی که A در جزء غیر نفوذی B نفوذ می‌کند پیش بینی کنید.

الف: $J_D = 0.0784$ جواب:

ب: $k_c = 6/986 \times 10^{-5} \text{ m/s}$

۷-۳-۷. انتقال جرم از یک لوله و میانگین لگاریتمی نیروی رانش: با استفاده از همان شرایط فیزیکی مسأله ۷-۳-۲ و این که سرعت در لوله در این حالت $3/05 \text{ m/s}$ است موارد زیر را به دست آورید.

(الف) ضریب انتقال جرم k'_c را پیش بینی کنید. (آیا جریان مغشوش است؟)

(ب) غلظت میانگین اسید بنزوئیک را در خروجی محاسبه کنید. [توجه: در این حالت، معادلات (۷-۳-۴۲) و (۷-۳-۴۳) با میانگین لگاریتمی نیروی رانش باید استفاده شود: که در این جا A سطح مفید لوله است].

(پ) مول کل اسید بنزوئیک حل شده در ثانیه را به دست آورید.

۷-۳-۸. به دست آوردن رابطه بین J_D و N_{Sh} : معادله (۷-۳-۳) تعریف عدد شروود و معادله

(۷-۳-۵) تعریف ضریب J_D است. رابطه بین N_{Sh} و J_D را برحسب N_{Re} و N_{Sc} حساب کنید.

جواب: $N_{Sh} = J_D \cdot N_{Re} \cdot N_{Sc}^{1/3}$

۷-۳-۹. نیروی رانش در انتقال جرم: معادله (۷-۳-۴۲) را که میانگین لگاریتمی نیروی رانش برای

جریان سیال عبوری از یک بستر پر شده یا از یک لوله است، به دست آورید. [راهنمایی: با موازنه جرم و موازنه نرخ نفوذ روی یک سطح دیفرانسیلی dA به صورت زیر شروع کنید:

$$N_A dA = k_c (c_{A1} - c_A) dA = v dc_A$$

که در این جا $v = m^3/s$ دبی است. فرض کنید محلولها رقیق هستند].

۷-۴-۱. حداکثر نرخ اکسیژن خروجی از یک میکروارگانیسم: حداکثر ممکن مقدار اکسیژن

خروجی از یک میکروارگانیسم به قطر $2 \mu\text{m}$ در 37°C که در یک محلول آبی همزده شده معلق است را محاسبه کنید. فرض شده است که محیط مایع با O_2 موجود در هوا در فشار مطلق یک اتمسفر اشباع شده است. فرض می‌شود که مصرف اکسیژن توسط میکروارگانیسم سریعتر از نفوذ اکسیژن به آن است. دانسیته میکروارگانیسم خیلی نزدیک به آب است. از خواص فیزیکی مثال ۷-۴-۱ استفاده کنید. [راهنمایی: چون مصرف اکسیژن سریعتر از جذب آن است، غلظت c_{A2} در سطح صفر است. غلظت c_{A1} در محلول در حالت اشباع است].

جواب: $k_c = 9/75 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ و $N_A = 2/2 \times 10^{-1} \text{ kgmol } O_2/s \cdot m^2$

۷-۴-۲. انتقال جرم O_2 در فرایند تخمیر: ۵ گرم میکروارگانیسم مرطوب با دانسیته 1100 kg/m^3 و قطر $667 \mu\text{m}$ به 0.1 L از محلول آبی در یک فلاسک لرزشی جهت انجام عمل تخمیر اضافه شده است. هوا می‌تواند از طریق یک چوب پنبه متخلخل وارد شود. از خواص فیزیکی مثال ۷-۴-۱ استفاده کنید.

الف) حداکثر نرخ انتقال جرم اکسیژن به سطح میکروارگانیسم را با فرض این‌که محلول با هوای $101/32 \text{ kPa}$ اشباع شده باشد، بر حسب $\text{kgmol } O_2/\text{s}$ محاسبه کنید.

ب) با نوشتن موازنه جرم روی مواد غذایی دیگر موارد مصرفی واقعی O_2 توسط میکروارگانیسم $\text{kgmol } O_2/\text{s}$ $6/30 \times 10^{-6}$ است. غلظت واقعی O_2 در محلول به صورت درصد اشباع در طول تخمیر چقدر باید باشد؟

جواب: الف: $k'_L = 9/82 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ و $N_A A = 9/07 \times 10^5 \text{ kgmol } O_2/\text{s}$

ب: $6/95\%$ اشباع

۷-۵-۱. مجموع شارهای مولی: معادله زیر را با استفاده از تعاریف جدول ۷-۵-۱ ثابت کنید.

$$N_A + N_B = c v_M$$

۷-۵-۲. اثبات رابطه به دست آمده: با استفاده از تعاریف جدول ۷-۵-۱ رابطه زیر را اثبات کنید.

$$j_A = n_A - w_A (n_A + n_B)$$

۷-۵-۳. شکلهای مختلف قانون فیک: با استفاده از معادله (۱)، معادله (۲) را ثابت کنید.

$$j_A = -\rho D_{AB} \frac{dw_A}{dz} \quad (1)$$

$$j_A = -\frac{c^2}{\rho} M_A M_B D_{AB} \frac{dx_A}{dz} \quad (2)$$

[راهنمایی: ابتدا رابطه بین w_A و x_A را به دست آورید. سپس از این رابطه دیفرانسیل بگیرید تا رابطه بین dw_A و dx_A مشخص شود. در نهایت، از رابطه $M = x_A M_A + x_B M_B$ برای ساده‌سازی استفاده کنید.]

۷-۵-۴. شکل دیگری از قانون فیک: نشان دهید که شکل زیر از قانون فیک نیز معتبر است.

$$c (v_A - v_B) = -\frac{c D_{AB}}{x_A x_B} \frac{dx_A}{dz}$$

[راهنمایی: از رابطه $N_A = J_A^* + c_A v_A$ شروع کنید. رابطه مربوط به J_A^* را از جدول ۷-۵-۱ جایگزین کرده و ساده کنید.]

۷-۵-۵. شکل دیگری از معادله پیوستگی: با شروع از معادله (۷-۵-۱۲)،

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot n_A) = r_A \quad (7-5-12)$$

آن را به رابطه زیر با ρ ثابت تبدیل کنید.

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (v \cdot \nabla \rho_A) - (\nabla \cdot D_{AB} \nabla \rho_A)' = r_A \quad (1)$$

[راهنمایی: از جدول ۷-۵-۱، رابطه $n_A = j_A + \rho_A v$ را در معادله (۷-۵-۱۲) جایگزین کنید. توجه کنید که در ρ ثابت، $(\nabla \cdot v) = 0$ است. سپس قانون فیک را در جملات j_A جایگزین کنید].

۷-۵-۶. نفوذ و واکنش در یک سطح: در یک جریان گازی، گاز A از نقطه ۱ تا سطح کاتالیزور در نقطه ۲ نفوذ می‌کند و در آنجا واکنش آتی و بازگشت ناپذیر زیر را انجام می‌دهد.



گاز B سپس برمی‌گردد و وارد جریان گاز اصلی می‌شود. رابطه نهایی N_A را در P ثابت و در حالت پایدار بر حسب فشارهای جزئی به دست آورید.

$$N_A = \frac{2D_{AB}P}{RT(z_2 - z_1)} \ln \frac{1 - p_{A2}/2P}{1 - p_{A1}/2P} \quad \text{جواب:}$$

۷-۵-۷. نفوذ ناپایدار و واکنش: حل شونده A در حال نفوذ در حالت ناپایدار در یک محیط نیمه بی‌نهایت از B خالص است و یک واکنش درجه اول نیز با B انجام می‌دهد. حل شونده A رقیق است. غلظت c_A را در فواصل $z = 0$ و $z = 4$ و $z = 10$ میلی‌متر از سطح در مدت $t = 1 \times 10^5$ s حساب کنید. خواص فیزیکی $D_{AB} = 1 \times 10^{-9}$ m²/s، $k' = 1 \times 10^{-4}$ s⁻¹ و $c_{A0} = 1$ kgmol/m³ است. همچنین کیلوگرم مول ماده جذب شده را در هر متر مربع حساب کنید.

۷-۵-۸. نفوذ چند جزئی: در فشار کل ۲۰۲/۶ kPa و ۳۵۸ K، گاز آمونیاک (A) در حالت پایدار در حال نفوذ در یک مخلوط خنثی و غیر نفوذی از نیتروژن (B) و هیدروژن (C) است. اجزاء مولی در $z_1 = 0$ به صورت $x_{A1} = 0/8$ ، $x_{B1} = 0/15$ و $x_{C1} = 0/05$ و در $z_2 = 4$ mm به صورت $x_{A2} = 0/2$ ، $x_{B2} = 0/6$ و $x_{C2} = 0/2$ است. ضرایب نفوذ در ۳۵۸ K و ۱۰۱/۳۲ kPa برابر $D_{AB} = 3/28 \times 10^{-5}$ m²/s، $D_{AC} = 1/093 \times 10^{-4}$ m²/s هستند. شار آمونیاک را محاسبه کنید.

جواب: $4/69 \times 10^{-4} \text{ kgmol A/s.m}^2$

۷-۵-۹. نفوذ در فلزات مایع و ضریب نفوذ متغیر: با استفاده از یک لوله موئین به طول ۱۰ mm و نگهداشتن جزء مولی قلع در x_{A1} در انتهای سمت چپ و x_{A2} در انتهای سمت راست لوله، قلع (A) در سرب مایع (B) در دمای 510°C نفوذ کرده است. در محدوده غلظتهای $0/4 \leq x_A \leq 0/2$ ضریب نفوذ قلع در سرب تابع خطی از x_A به صورت زیر است (S7)،

$$D_{AB} = A + B x_A$$

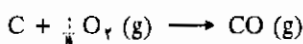
که A و B ثابت و D_{AB} بر حسب m^2/s است.

الف) با فرض این که دانسیته مولی در $c = c_A + c_B = c_{av}$ ثابت باشد، معادله انتگرال نهایی شار N_A را با فرض حالت پایدار و این که A در جزء ساکن B نفوذ می کند، به دست آورید.

ب) در این آزمایش $c_A = 4/8 \times 10^{-9}$ ، $c_B = -6/5 \times 10^{-9}$ ، $c_{av} = 50 \text{ kgmol/m}^3$ ، $x_{A1} = 0/4$ و $x_{A2} = 0/2$ را محاسبه کنید.

جواب: $N_A = 4/0.55 \times 10^{-6} \text{ kgmol A/s.m}^2$

۷-۵-۱۰. نفوذ و واکنش شیمیایی آهن مذاب در فرایند متالورژی: در یک فرایند فولادسازی با استفاده از قالب ریخته گری آهن مذاب محتوی کربن، ذرات آهن مذاب که ۴ wt % کربن دارد به داخل محیطی از اکسیژن خالص پاشیده می شود. کربن از طریق آهن مذاب به سطح قطره نفوذ می کند که در آنجا بر اساس فرض یک واکنش آتی انجام می دهد. چون دما بالاست. واکنش به صورت زیر و درجه اول است،



حداکثر اندازه مجاز قطره را محاسبه کنید به طوریکه قطره پس از ۲ ثانیه سقوط به طور میانگین محتوی ۱ wt % کربن باشد. فرض کنید نرخ انتقال جرم گازها در سطح خیلی زیاد است و مقاومتی در بیرون وجود ندارد. از گردش داخل مایع نیز صرف نظر می شود. بنابراین، نرخ کربنیزه کردن به وسیله نرخ نفوذ کربن به سطح قطره کنترل می شود. ضریب نفوذ کربن در آهن $7/5 \times 10^{-9} \text{ m/s}$ است (S7). [راهنمایی: برای این حالت آیا می توان از شکل ۱۳-۵-۳ استفاده کرد؟]

جواب: شعاع ۰/۲۱۷ mm

۷-۵-۱۱ اثر سرعت واکنش آهسته روی نفوذ: گاز A از نقطه (۱) تا روی سطح کاتالیست، نقطه (۲)، نفوذ می‌کند و در آنجا واکنش $B \rightarrow 2A$ را انجام می‌دهد. گاز B به نقطه (۱) به فاصله δ به عقب برمی‌گردد.

الف) رابطه‌ای برای N_A برای یک واکنش خیلی سریع با استفاده از واحدهای جزء مولی x_{A1} و مانند آن به دست آورید.

ب) با $D_{AB} = 0.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ، $x_{A1} = 0.97$ ، $P = 101325 \text{ Pa}$ ، $\delta = 1/3 \text{ mm}$ و $T = 298 \text{ K}$ را به دست آورید.

پ) قسمت الف) را با یک واکنش آهسته درجه اول که k'_1 ثابت سرعت واکنش است حل کنید.

ت) در قسمت پ)، N_A و x_{A2} را با $k'_1 = 0.53 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ به دست آورید.

جواب: ب: $N_A = 8/35 \times 10^{-4} \text{ kgmol/s.m}^2$

۷-۵-۱۲ نفوذ و واکنش غیر همگن روی سطح: در یک لوله به شعاع R بر حسب متر که از یک مایع رقیق پر شده است، جزء A در حال نفوذ در فاز مایع ساکن بر اساس رابطه زیر است،

$$N_A = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz}$$

که فاصله در طول محور لوله است. دیواره داخلی لوله یک اثر کاتالیزوری اعمال می‌کند و A را تجزیه می‌کند بطوریکه نرخ تجزیه غیر همگن روی دیواره بر حسب kgmol A/s مساوی با $k c_A A_w$ است، که در آن k ثابت واکنش درجه اول و A_w مساحت دیواره بر حسب m^2 است. از تغییرات شعاعی صرف‌نظر کنید (غلظت شعاعی یکنواخت است). معادله دیفرانسیل نفوذ ناپایدار و واکنش شیمیایی را برای این سیستم به دست آورید. راهنمایی: ابتدا موازنه جرم را روی A و برای طول Δz از لوله به این صورت بنویسید: نرخ ورودی (از طریق نفوذ) + نرخ تولید (غیر همگن) = نرخ خروجی (نفوذ) + نرخ تجمع.]

جواب:
$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} - \frac{2k}{R} c_A$$

۷-۶-۱ ضرایب نفوذ نودسن: مخلوطی از هلیوم (A) و آرگون (B) در شرایط 10^5 Pa و $1/0.13$ و 298 K در حال نفوذ از طریق لوله موئینی به شعاع 100 \AA است.

الف) ضریب نفوذ نودسن هلیم (A) را محاسبه کنید.

ب) ضریب نفوذ نودسن آرگون (B) را محاسبه کنید.

پ) با ضریب نفوذ مولکولی D_{AB} مقایسه کنید.

الف: $D_{KA} = 8/37 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ جواب:

پ: $D_{AB} = 7/29 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

۷-۶-۲. نفوذ ناحیه گذرا: مخلوطی از هلیم (A) و آرگون (B) در 298 K در حال نفوذ از طریق یک

لوله موئین باز به طول 15 mm و شعاع 1000 \AA است. فشار کل 10^5 Pa است. $1/0.13$ است.

ضریب نفوذ مولکولی D_{AB} در فشار 10^5 Pa برابر $7/29 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ است.

الف) ضریب نفوذ نودسن هلیم (A) را محاسبه کنید.

ب) شار N_A را با استفاده از معادلات (۷-۶-۱۸) و (۷-۶-۱۲) اگر $x_{A1} = 0/8$ و

$x_{A2} = 0/2$ باشد به دست آورید. سیستم را پایدار فرض کنید.

پ) شار N_A را با استفاده از معادلات تقریبی (۷-۶-۱۴) و (۷-۶-۱۶) به دست آورید.

۷-۶-۳. نفوذ در یک سوراخ ریز در ناحیه گذرا: گاز H_2 خالص (A) در یک انتهای یک روزنه

کاتالیزور به شعاع 50 \AA و طول 1 mm ($x_{A1} = 1$) در حال نفوذ از طریق این روزنه است. گاز

اتان (C_2H_6) خالص (B) در انتهای دیگر در $x_{A2} = 0$ است. فشار کل در $101/32 \text{ kPa}$ ثابت

است. ضریب نفوذ مولکولی پیش بینی شده $\text{H}_2\text{-C}_2\text{H}_6$ برابر $8/60 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ در شرایط

$101/32 \text{ kPa}$ و 373 K است. ضریب نفوذ نودسن H_2 و شار N_A را برای H_2 در مخلوط در

373 K و حالت پایدار محاسبه کنید.

جواب: $D_{KA} = 6/6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ و $N_A = 1/472 \times 10^{-3} \text{ kgmol A/s.m}^2$

۷-۶-۴. نفوذ در لوله موئین در ناحیه گذرا: مخلوطی از گاز نیتروژن (A) و هلیم (B) در 298 K در

حال نفوذ از طریق یک لوله موئین به طول $0/1 \text{ m}$ با سیستم باز و به قطر 10 \mu m است.

اجزاء مولی ثابت و به صورت $x_{A1} = 1$ و $x_{A2} = 0$ هستند. از خواص فیزیکی مثال ۷-۶-۲

استفاده کنید.

الف) ضریب نفوذ نودسن D_{KA} و D_{KB} را در فشار کل $0/001$ ، $0/1$ و 10 اتمسفر حساب

کنید.

ب) شار N_A را در حالت پایدار در این فشارها حساب کنید.

پ) N_A را بر حسب P روی منحنی لگاریتمی رسم کنید. خطوط محدود کننده در فشارهای

پایین تر و فشارهای خیلی بالا چه هستند؟

۷-۷-۱. روش عددی برای نفوذ ناپایدار: یک اسلب جامد به ضخامت 0.01 mm دارای غلظت حل‌شونده یکنواخت اولیه A به میزان 1 kgmol/m^3 است. ضریب نفوذ A در جامد $D_{AB} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ است. همه سطوح اسلب به جز سطح بالا عایق بندی هستند. غلظت سطح به طور ناگهانی به صفر افت می‌کند و در همان مقدار ثابت می‌ماند. نفوذ ناپایدار فقط در جهت x صورت می‌گیرد و سطح عقبی عایق است. با استفاده از روش عددی، غلظتها را پس از 12×10^4 ثانیه به دست آورید. از $\Delta x = 0.002$ و $M = 2$ استفاده کنید. مقدار K برابر یک است.

جواب: $c_1 = 0$ ($x = 0 \text{ m}$ سطح بالایی)

$$c_2 = 0.3125 \text{ kgmol/m}^3 \quad (x = 0.002 \text{ m})$$

$$c_3 = 0.5859 \quad (x = 0.004 \text{ m})$$

$$c_4 = 0.7812 \quad (x = 0.006 \text{ m})$$

$$c_5 = 0.8984 \quad (x = 0.008 \text{ m})$$

$$c_6 = 0.9375 \quad (x = 0.01 \text{ m} \text{ سطح ایزوله})$$

۷-۷-۲. کامپیوتر و نفوذ ناپایدار: با استفاده از شرایط مثال ۷-۷-۱، مسئله را با کامپیوتر حل کنید. $\Delta x = 0.0005$ در نظر بگیرید. یک برنامه کامپیوتری بنویسید و غلظتهای نهایی را رسم کنید. از روش صریح استفاده کنید $M = 2$.

۷-۷-۳. روش عددی و شرایط مرزی متفاوت: از شرایط مثال ۷-۷-۱، با این تفاوت که سطح

عایق بندی شده نیست، استفاده کنید. در زمان $t = 0$ غلظت در سطح عقبی ناگهان به $c_0 = 0$ تغییر می‌کند و در همان مقدار ثابت می‌ماند. توزیع غلظت را پس از 2500 s به دست آورید. توزیع غلظت اولیه و نهایی را رسم کنید و با توزیع غلظت نهایی مثال ۷-۷-۱ مقایسه کنید.

۷-۸-۱. آنالیز ابعادی در انتقال جرم: سیالی در یک لوله عمودی در جریان است و انتقال جرم از

دیواره لوله به سیال صورت می‌گیرد. رابطه‌ای بین ضریب انتقال جرم جابه‌جایی k'_c و متغیرهای D ، μ ، ν ، D_{AB} ، g و $\Delta\rho$ به دست آورید، که D قطر لوله، L طول لوله و $\Delta\rho$ اختلاف دانسیته است.

$$\text{جواب: } \frac{k'_c D}{D_{AB}} = f\left(g \frac{L^3 \rho \Delta\rho}{\mu^2}, \frac{D \nu \rho}{\mu}, \frac{\mu}{\rho D_{AB}}\right)$$

۷-۹-۱. انتقال جرم و مدل‌های اغتشاش: آب خالص با سرعت 0.11 m/s در دمای $26/1^\circ \text{C}$ از روی

یک صفحه صاف اسید بنزوئیک جامد به طول $L = 0.4 \text{ m}$ جاری است. موارد زیر را انجام

دهید:

الف) با فرض رقیق بودن محلولها، ضریب انتقال جرم k_c را به دست آورید. از اطلاعات خواص فیزیکی مثال ۲-۳-۷ استفاده کنید.

ب) بر اساس تئوری فیلم، ضخامت فیلم معادل را به دست آورید.

پ) بر اساس تئوری نفوذ، زمان لازم برای نفوذ را به دست آورید.

ت) با استفاده از مدل اصلاح شده نفوذ ضریب میانگین تجدید شوندهگی سطح را به دست آورید.

جواب: ب: $\delta_f = 0.2031 \text{ mm}$

ت: $s = 3/019 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

منابع

- (B1) BIRD, R. B., STEWART, W. E., and LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- (B2) BLAKEBROUGH, N. *Biochemical and Biological Engineering Science*, Vol. 1. New York: Academic Press, Inc., 1967.
- (B3) BEDDINGTON, C. H., Jr., and DREW, T. B. *Ind. Eng. Chem.*, **42**, 1164 (1950).
- (C1) CARMICHAEL, L. T., SAGE, B. H., and LACEY, W. N. *A.I.Ch.E. J.*, **1**, 385 (1955).
- (C2) CHILTON, T. H., and COLBURN, A. P. *Ind. Eng. Chem.*, **26**, 1183 (1934).
- (C3) CALDERBANK, P. H., and MOO-YOUNG, M. B. *Chem. Eng. Sci.*, **16**, 39 (1961).
- (C4) CUNNINGHAM, R. S., and GEANKOPLIS, C. J. *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **7**, 535 (1968).
- (D1) DANCKWERTS, P. V. *Trans. Faraday Soc.*, **46**, 300 (1950).
- (D2) DUNN, W. E., BONILLA, C. F., FERSTENBERG, C., and GROSS, B. *A.I.Ch.E. J.*, **2**, 184 (1956).
- (D3) DANCKWERTS, P. V. *Gas-Liquid Reactions*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1970.
- (D4) DWIVEDI, P. N., and UPADHYAY, S. N. *Ind. Eng. Chem., Proc. Des. Dev.*, **16**, 157 (1977).
- (G1) GEANKOPLIS, C. J. *Mass Transport Phenomena*. Columbus, Ohio: Ohio State University Bookstores, 1972.
- (G2) GILLILAND, E. R., and SHERWOOD, T. K. *Ind. Eng. Chem.*, **26**, 516 (1934).
- (G3) GARNER, F. H., and SUCKLING, R. D. *A.I.Ch.E. J.*, **4**, 114 (1958).
- (G4) GUPTA, A. S., and THODOS, G. *Ind. Chem. Eng. Fund.*, **3**, 218 (1964).
- (G5) GUPTA, A. S., and THODOS, G. *A.I.Ch.E. J.*, **8**, 609 (1962).
- (G6) GUPTA, A. S., and THODOS, G. *Chem. Eng. Progr.*, **58** (7), 58 (1962).
- (L1) LINTON, W. H., Jr., and SHERWOOD, T. K. *Chem. Eng. Progr.*, **46**, 258 (1950).
- (L2) LITT, M., and FRIEDLANDER, S. K. *A.I.Ch.E. J.*, **5**, 483 (1959).
- (M1) MCADAMS, W. H. *Heat Transmission*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954.
- (P1) PERRY, R. H., and GREEN, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

- (R1) REMICK, R. R., and GEANKOPLIS, C. J. *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **12**, 214 (1973).
- (S1) SEAGER, S. L., GEERTSON, L. R., and GIDDINGS, J. C. *J. Chem. Eng. Data*, **8**, 168 (1963).
- (S2) SATTERFIELD, C. N. *Mass Transfer in Heterogeneous Catalysis*. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1970.
- (S3) STEELE, L. R., and GEANKOPLIS, C. J. *A.I.Ch.E. J.*, **5**, 178 (1959).
- (S4) SHERWOOD, T. K., PIGFORD, R. L., and WILKE, C. R. *Mass Transfer*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1975.
- (S5) STEINBERGER, W. L., and TREYBAL, R. E. *A.I.Ch.E. J.*, **6**, 227 (1960).
- (S6) SMITH, J. M. *Chemical Engineering Kinetics*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1970.
- (S7) SZEKELY, J., and THEMELIS, N. *Rate Phenomena in Process Metallurgy*. New York: Wiley-Interscience, 1971.
- (T1) TREYBAL, R. E. *Mass Transfer Operations*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1980.
- (T2) TOOR, H. L., and MARCHELLO, J. M. *A.I.Ch.E. J.*, **1**, 97 (1958).
- (V1) VOGTLANDER, P. H., and BAKKER, C. A. P. *Chem. Eng. Sci.*, **18**, 583 (1963).
- (W1) WILSON, E. J., and GEANKOPLIS, C. J. *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **5**, 9 (1966).

ضمائم

ضمیمه A.1

ثابتهای اساسی و ضرایب تبدیل

A.1-1 ثابت قانون گازها R

Numerical Value	Units
1.9872	g cal/g mol · K
1.9872	btu/lb mol · °R
82.057	cm ³ · atm/g mol · K
8314.34	J/kg mol · K
82.057 × 10 ⁻³	m ³ · atm/kg mol · K
8314.34	kg · m ² /s ² · kg mol · K
10.731	ft ³ · lb _f /in. ² · lb mol · °R
0.7302	ft ³ · atm/lb mol · °R
1545.3	ft · lb _f /lb mol · °R
8314.34	m ³ · Pa/kg mol · K

A.1-2 حجم و دانسیته

1 g mol ideal gas at 0°C, 760 mm Hg = 22.4140 liters = 22.414 cm³

1 lb mol ideal gas at 0°C, 760 mm Hg = 359.05 ft³

1 kg mol ideal gas at 0°C, 760 mm Hg = 22.414 m³

Density of dry air at 0°C, 760 mm Hg = 1.2929 g/liter

= 0.080711 lb_m/ft³

Molecular weight of air = 28.97 lb_m/lb mol = 28.97 g/g mol

1 g/cm³ = 62.43 lb_m/ft³ = 1000 kg/m³

1 g/cm³ = 8.345 lb_m/U.S. gal

1 lb_m/ft³ = 16.0185 kg/m³

A.1-3 طول

$$\begin{aligned}
 1 \text{ in.} &= 2.540 \text{ cm} \\
 100 \text{ cm} &= 1 \text{ m (meter)} \\
 1 \text{ micron} &= 10^{-6} \text{ m} = 10^{-4} \text{ cm} = 10^{-3} \text{ mm} = 1 \mu\text{m (micrometer)} \\
 1 \text{ \AA (angstrom)} &= 10^{-10} \text{ m} = 10^{-4} \mu\text{m} \\
 1 \text{ mile} &= 5280 \text{ ft} \\
 1 \text{ m} &= 3.2808 \text{ ft} = 39.37 \text{ in}
 \end{aligned}$$

A.1-4 جرم

$$\begin{aligned}
 1 \text{ lb}_m &= 453.59 \text{ g} = 0.45359 \text{ kg} \\
 1 \text{ lb}_m &= 16 \text{ oz} = 7000 \text{ grains} \\
 1 \text{ kg} &= 1000 \text{ g} = 2.2046 \text{ lb}_m \\
 1 \text{ ton (short)} &= 2000 \text{ lb}_m \\
 1 \text{ ton (long)} &= 2240 \text{ lb}_m \\
 1 \text{ ton (metric)} &= 1000 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

A.1-5 شتاب استاندارد ثقل

$$\begin{aligned}
 g &= 9.80665 \text{ m/s}^2 \\
 g &= 980.665 \text{ cm/s}^2 \\
 g &= 32.174 \text{ ft/s}^2 \\
 g_c \text{ (gravitational conversion factor)} &= 32.1740 \text{ lb}_m \cdot \text{ft/lb}_f \cdot \text{s}^2 \\
 &= 980.665 \text{ g}_m \cdot \text{cm/g}_f \cdot \text{s}^2
 \end{aligned}$$

A.1-6 حجم

$$\begin{aligned}
 1 \text{ L (liter)} &= 1000 \text{ cm}^3 & 1 \text{ m}^3 &= 1000 \text{ L (liter)} \\
 1 \text{ in.}^3 &= 16.387 \text{ cm}^3 & 1 \text{ U.S. gal} &= 4 \text{ qt} \\
 1 \text{ ft}^3 &= 28.317 \text{ L (liter)} & 1 \text{ U.S. gal} &= 3.7854 \text{ L (liter)} \\
 1 \text{ ft}^3 &= 0.028317 \text{ m}^3 & 1 \text{ U.S. gal} &= 3785.4 \text{ cm}^3 \\
 1 \text{ ft}^3 &= 7.481 \text{ U.S. gal} & 1 \text{ British gal} &= 1.20094 \text{ U.S. gal} \\
 1 \text{ m}^3 &= 264.17 \text{ U.S. gal} & 1 \text{ m}^3 &= 35.313 \text{ ft}^3
 \end{aligned}$$

A.1-7 نیرو

$$\begin{aligned}
 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 \text{ (dyn)} &= 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 10^{-5} \text{ N (newton)} \\
 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 &= 7.2330 \times 10^{-5} \text{ lb}_m \cdot \text{ft/s}^2 \text{ (poundal)} \\
 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 &= 1 \text{ N (newton)} \\
 1 \text{ lb}_f &= 4.4482 \text{ N} \\
 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 &= 2.2481 \times 10^{-6} \text{ lb}_f
 \end{aligned}$$

A.1-8 فشار

$$\begin{aligned}
 1 \text{ bar} &= 1 \times 10^5 \text{ Pa (pascal)} = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\
 1 \text{ psia} &= 1 \text{ lb}_f/\text{in.}^2 \\
 1 \text{ psia} &= 2.0360 \text{ in. Hg at } 0^\circ\text{C} \\
 1 \text{ psia} &= 2.311 \text{ ft H}_2\text{O at } 70^\circ\text{F}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \text{ psia} &= 51.715 \text{ mm Hg at } 0^\circ\text{C} (\rho_{\text{Hg}} = 13.5955 \text{ g/cm}^3) \\
 1 \text{ atm} &= 14.696 \text{ psia} = 1.01325 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.01325 \text{ bar} \\
 1 \text{ atm} &= 760 \text{ mm Hg at } 0^\circ\text{C} = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa} \\
 1 \text{ atm} &= 29.921 \text{ in. Hg at } 0^\circ\text{C} \\
 1 \text{ atm} &= 33.90 \text{ ft H}_2\text{O at } 4^\circ\text{C} \\
 1 \text{ psia} &= 6.89476 \times 10^4 \text{ g/cm} \cdot \text{s}^2 \\
 1 \text{ psia} &= 6.89476 \times 10^4 \text{ dyn/cm}^2 \\
 1 \text{ dyn/cm}^2 &= 2.0886 \times 10^{-3} \text{ lb}_f/\text{ft}^2 \\
 1 \text{ psia} &= 6.89476 \times 10^3 \text{ N/m}^2 = 6.89476 \times 10^3 \text{ Pa} \\
 1 \text{ lb}_f/\text{ft}^2 &= 4.7880 \times 10^2 \text{ dyn/cm}^2 = 47.880 \text{ N/m}^2 \\
 1 \text{ mm Hg} (0^\circ\text{C}) &= 1.333224 \times 10^2 \text{ N/m}^2 = 0.1333224 \text{ kPa}
 \end{aligned}$$

A.1-9 توان

$$\begin{aligned}
 1 \text{ hp} &= 0.74570 \text{ kW} & 1 \text{ watt (W)} &= 14.340 \text{ cal/min} \\
 1 \text{ hp} &= 550 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{s} & 1 \text{ btu/h} &= 0.29307 \text{ W (watt)} \\
 1 \text{ hp} &= 0.7068 \text{ btu/s} & 1 \text{ J/s (joule/s)} &= 1 \text{ W}
 \end{aligned}$$

A.1-10 گرما، انرژی و کار

$$\begin{aligned}
 1 \text{ J} &= 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \\
 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 &= 1 \text{ J (joule)} = 10^7 \text{ g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2 \text{ (erg)} \\
 1 \text{ btu} &= 1055.06 \text{ J} = 1.05506 \text{ kJ} \\
 1 \text{ btu} &= 252.16 \text{ cal (thermochemical)} \\
 1 \text{ kcal (thermochemical)} &= 1000 \text{ cal} = 4.1840 \text{ kJ} \\
 1 \text{ cal (thermochemical)} &= 4.1840 \text{ J} \\
 1 \text{ cal (IT)} &= 4.1868 \text{ J} \\
 1 \text{ btu} &= 251.996 \text{ cal (IT)} \\
 1 \text{ btu} &= 778.17 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f \\
 1 \text{ hp} \cdot \text{h} &= 0.7457 \text{ kW} \cdot \text{h} \\
 1 \text{ hp} \cdot \text{h} &= 2544.5 \text{ btu} \\
 1 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f &= 1.35582 \text{ J} \\
 1 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{lb}_m &= 2.9890 \text{ J/kg}
 \end{aligned}$$

A.1-11 ضریب هدایت گرمایی

$$\begin{aligned}
 1 \text{ btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F} &= 4.1365 \times 10^{-3} \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C} \\
 1 \text{ btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F} &= 1.73073 \text{ W/m} \cdot \text{K}
 \end{aligned}$$

A.1-12 ضریب انتقال حرارت

$$\begin{aligned}
 1 \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F} &= 1.3571 \times 10^{-4} \text{ cal/s} \cdot \text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C} \\
 1 \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F} &= 5.6783 \times 10^{-4} \text{ W/cm}^2 \cdot ^\circ\text{C} \\
 1 \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F} &= 5.6783 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \\
 1 \text{ kcal/h} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{F} &= 0.2048 \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}
 \end{aligned}$$

A.1-13 ویسکوزیته

$$\begin{aligned}
 1 \text{ cp} &= 10^{-2} \text{ g/cm} \cdot \text{s} \text{ (poise)} \\
 1 \text{ cp} &= 2.4191 \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{h} \\
 1 \text{ cp} &= 6.7197 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{s} \\
 1 \text{ cp} &= 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s} = 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2 \\
 1 \text{ cp} &= 2.0886 \times 10^{-5} \text{ lb}_f \cdot \text{s/ft}^2 \\
 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} &= 1 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2 = 1 \text{ kg/m} \cdot \text{s} = 1000 \text{ cp} = 0.67197 \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{s}
 \end{aligned}$$

A.1-14 ضریب نفوذ

$$\begin{aligned}
 1 \text{ cm}^2/\text{s} &= 3.875 \text{ ft}^2/\text{h} & 1 \text{ m}^2/\text{s} &= 3.875 \times 10^4 \text{ ft}^2/\text{h} \\
 1 \text{ cm}^2/\text{s} &= 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} & 1 \text{ centistoke} &= 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s} \\
 1 \text{ m}^2/\text{h} &= 10.764 \text{ ft}^2/\text{h}
 \end{aligned}$$

A.1-15 شار جرمی و مولی

$$\begin{aligned}
 1 \text{ g/s} \cdot \text{cm}^2 &= 7.3734 \times 10^3 \text{ lb}_m/\text{h} \cdot \text{ft}^2 \\
 1 \text{ g mol/s} \cdot \text{cm}^2 &= 7.3734 \times 10^3 \text{ lb mol/h} \cdot \text{ft}^2 \\
 1 \text{ g mol/s} \cdot \text{cm}^2 &= 10 \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2 = 1 \times 10^4 \text{ g mol/s} \cdot \text{m}^2 \\
 1 \text{ lb mol/h} \cdot \text{ft}^2 &= 1.3562 \times 10^{-3} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}$$

A.1-16 شار گرمایی و جریان گرما

$$\begin{aligned}
 1 \text{ btu/h} \cdot \text{ft}^2 &= 3.1546 \text{ W/m}^2 \\
 1 \text{ btu/h} &= 0.29307 \text{ W} \\
 1 \text{ cal/h} &= 1.1622 \times 10^{-3} \text{ W}
 \end{aligned}$$

A.1-17 ظرفیت گرمایی و انتالپی

$$\begin{aligned}
 1 \text{ btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{F} &= 4.1868 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \\
 1 \text{ btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{F} &= 1.000 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C} \\
 1 \text{ btu/lb}_m &= 2326.0 \text{ J/kg} \\
 1 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{lb}_m &= 2.9890 \text{ J/kg} \\
 1 \text{ cal (IT)/g} \cdot ^\circ\text{C} &= 4.1868 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \\
 1 \text{ kcal/g mol} &= 4.1840 \times 10^3 \text{ kJ/kg mol}
 \end{aligned}$$

A.1-18 ضریب انتقال جرم

$$\begin{aligned}
 1 k_c \text{ cm/s} &= 10^{-2} \text{ m/s} \\
 1 k_c \text{ ft/h} &= 8.4668 \times 10^{-5} \text{ m/s} \\
 1 k_x \text{ g mol/s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{mol frac} &= 10 \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol frac} \\
 1 k_x \text{ g mol/s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{mol frac} &= 1 \times 10^4 \text{ g mol/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol frac} \\
 1 k_x \text{ lb mol/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{mol frac} &= 1.3562 \times 10^{-3} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol frac} \\
 1 k_x a \text{ lb mol/h} \cdot \text{ft}^3 \cdot \text{mol frac} &= 4.449 \times 10^{-3} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol frac} \\
 1 k_G \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{atm} &= 0.98692 \times 10^{-5} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Pa} \\
 1 k_G a \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{atm} &= 0.98692 \times 10^{-5} \text{ kg mol/s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{Pa}
 \end{aligned}$$

ضمیمهٔ A.2

خواص فیزیکی آب

A.2-1 گرمای نهان آب در $273/15\text{ K}$ ($0\text{ }^{\circ}\text{C}$)

$$\begin{aligned}\text{Latent heat of fusion} &= 1436.3 \text{ cal/g mol} \\ &= 79.724 \text{ cal/g} \\ &= 2585.3 \text{ btu/lb mol} \\ &= 6013.4 \text{ kJ/kg mol}\end{aligned}$$

Source: O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles*, Part I, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1954.

Latent heat of vaporization at 298.15 K (25°C)

Pressure (mm Hg)	Latent Heat
23.75	44 020 kJ/kg mol, 10.514 kcal/g mol, 18 925 btu/lb mol
760	44 045 kJ/kg mol, 10.520 kcal/g mol, 18 936 btu/lb mol

Source: National Bureau of Standards, *Circular 500*.

A.2-2 فشار بخار آب

Temperature		Vapor Pressure		Temperature		Vapor Pressure	
K	°C	kPa	mm Hg	K	°C	kPa	mm Hg
273.15	0	0.611	4.58	323.15	50	12.333	92.51
283.15	10	1.228	9.21	333.15	60	19.92	149.4
293.15	20	2.338	17.54	343.15	70	31.16	233.7
298.15	25	3.168	23.76	353.15	80	47.34	355.1
303.15	30	4.242	31.82	363.15	90	70.10	525.8
313.15	40	7.375	55.32	373.15	100	101.325	760.0

Source: Physikalisch-technische, Reichsanalt, Holborn, Scheel, and Henning, *Wärmehandbuchen*. Brunswick, Germany: Friedrich Viewig and Son, 1909.

A.2-3 دانسیته آب مایع

Temperature		Density		Temperature		Density	
K	C	g/cm ³	kg/m ³	K	C	g/cm ³	kg/m ³
273.15	0	0.99987	999.87	323.15	50	0.98807	988.07
277.15	4	1.00000	1000.00	333.15	60	0.98324	983.24
283.15	10	0.99973	999.73	343.15	70	0.97781	977.81
293.15	20	0.99823	998.23	353.15	80	0.97183	971.83
298.15	25	0.99708	997.08	363.15	90	0.96534	965.34
303.15	30	0.99568	995.68	373.15	100	0.95838	958.38
313.15	40	0.99225	992.25				

Source: R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973. With permission.

A.2-4 ویسکوزیته آب مایع

Temperature		Viscosity [(Pa·s) 10 ³ , (kg/m·s) 10 ³ , or cp]	Temperature		Viscosity [(Pa·s) 10 ³ , (kg/m·s) 10 ³ , or cp]
K	°C		K	°C	
273.15	0	1.7921	323.15	50	0.5494
275.15	2	1.6728	325.15	52	0.5315
277.15	4	1.5674	327.15	54	0.5146
279.15	6	1.4728	329.15	56	0.4985
281.15	8	1.3860	331.15	58	0.4832
283.15	10	1.3077	333.15	60	0.4688
285.15	12	1.2363	335.15	62	0.4550
287.15	14	1.1709	337.15	64	0.4418
289.15	16	1.1111	339.15	66	0.4293
291.15	18	1.0559	341.15	68	0.4174
293.15	20	1.0050	343.15	70	0.4061
293.35	20.2	1.0000	345.15	72	0.3952
295.15	22	0.9579	347.15	74	0.3849
297.15	24	0.9142	349.15	76	0.3750
298.15	25	0.8937	351.15	78	0.3655
299.15	26	0.8737	353.15	80	0.3565
301.15	28	0.8360	355.15	82	0.3478
303.15	30	0.8007	357.15	84	0.3395
305.15	32	0.7679	359.15	86	0.3315
307.15	34	0.7371	361.15	88	0.3239
309.15	36	0.7085	363.15	90	0.3165
311.15	38	0.6814	365.15	92	0.3095
313.15	40	0.6560	367.15	94	0.3027
315.15	42	0.6321	369.15	96	0.2962
317.15	44	0.6097	371.15	98	0.2899
319.15	46	0.5883	373.15	100	0.2838
321.15	48	0.5683			

Source: Bingham, *Fluidity and Plasticity*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1922. With permission.

A.2-5 ظرفیت گرمایی آب مایع در ۱۰۱/۳۲۵ kPa (۱ atm)

Temperature		Heat Capacity, c_p		Temperature		Heat Capacity, c_p	
°C	K	cal/g·°C	kJ/kg·K	°C	K	cal/g·°C	kJ/kg·K
0	273.15	1.0080	4.220	50	323.15	0.9992	4.183
10	283.15	1.0019	4.195	60	333.15	1.0001	4.187
20	293.15	0.9995	4.185	70	343.15	1.0013	4.192
25	298.15	0.9989	4.182	80	353.15	1.0029	4.199
30	303.15	0.9987	4.181	90	363.15	1.0050	4.208
40	313.15	0.9987	4.181	100	373.15	1.0076	4.219

Source: N. S. Osborne, H. F. Stimson, and D. C. Ginnings, *Bur. Standards J. Res.*, **23**, 197 (1939).

A.2-6 ضریب هدایت گرمایی آب مایع

Temperature			Thermal Conductivity	
°C	°F	K	btu/h · ft · °F	W/m · K
0	32	273.15	0.329	0.569
37.8	100	311.0	0.363	0.628
93.3	200	366.5	0.393	0.680
148.9	300	422.1	0.395	0.684
215.6	420	588.8	0.376	0.651
326.7	620	599.9	0.275	0.476

Source : D. L. Timrot and N. B. Vargaftik, *J. Tech. Phys. (U.S.S.R.)*, 10, 1063 (1940); 6th International Conference on the Properties of Steam, Paris, 1964.

A.2-7 فشار بخار یخ - بخار آب اشباع شده و گرمای تصعید

Temperature			Vapor Pressure			Heat of Sublimation	
K	°F	°C	kPa	psia	mm Hg	btu/lb _m	kJ/kg
273.2	32	0	6.107×10^{-1}	8.858×10^{-2}	4.581	1218.6	2834.5
266.5	20	-6.7	3.478×10^{-1}	5.045×10^{-2}	2.609	1219.3	2836.1
261.0	10	-12.2	2.128×10^{-1}	3.087×10^{-2}	1.596	1219.7	2837.0
255.4	0	-17.8	1.275×10^{-1}	1.849×10^{-2}	0.9562	1220.1	2838.0
249.9	-10	-23.3	7.411×10^{-2}	1.082×10^{-2}	0.5596	1220.3	2838.4
244.3	-20	-28.9	3.820×10^{-2}	6.181×10^{-3}	0.3197	1220.5	2838.9
238.8	-30	-34.4	2.372×10^{-2}	3.440×10^{-3}	0.1779	1220.5	2838.9
233.2	-40	-40.0	1.283×10^{-2}	1.861×10^{-3}	0.09624	1220.5	2838.9

Source : ASHRAE, *Handbook of Fundamentals*. New York: ASHRAE, 1972.

A.2-8 ظرفیت گرمایی یخ

Temperature		c_p		Temperature		c_p	
°F	K	btu/lb _m · °F	kJ/kg · K	°F	K	btu/lb _m · °F	kJ/kg · K
32	273.15	0.500	2.093	-10	249.85	0.461	1.930
20	266.45	0.490	2.052	-20	244.25	0.452	1.892
10	260.95	0.481	2.014	-30	238.75	0.442	1.850
0	255.35	0.472	1.976	-40	233.15	0.433	1.813

Source : Adapted from ASHRAE, *Handbook of Fundamentals*. New York: ASHRAE, 1972.

A.2-9 خواص بخار اشباع و آب (جدول بخار) واحد SI

Temperature (°C)	Vapor Pressure (kPa)	Specific Volume (m ³ /kg)		Enthalpy (kJ/kg)		Entropy (kJ/kg·K)	
		Liquid	Sat'd Vapor	Liquid	Sat'd Vapor	Liquid	Sat'd Vapor
0.01	0.6113	0.0010002	206.136	0.00	2501.4	0.0000	9.1562
3	0.7577	0.0010001	168.132	12.57	2506.9	0.0457	9.0773
6	0.9349	0.0010001	137.734	25.20	2512.4	0.0912	9.0003
9	1.1477	0.0010003	113.386	37.80	2517.9	0.1362	8.9253
12	1.4022	0.0010005	93.784	50.41	2523.4	0.1806	8.8524
15	1.7051	0.0010009	77.926	62.99	2528.9	0.2245	8.7814
18	2.0640	0.0010014	65.038	75.58	2534.4	0.2679	8.7123
21	2.487	0.0010020	54.514	88.14	2539.9	0.3109	8.6450
24	2.985	0.0010027	45.883	100.70	2545.4	0.3534	8.5794
25	3.169	0.0010029	43.360	104.89	2547.2	0.3674	8.5580
27	3.567	0.0010035	38.774	113.25	2550.8	0.3954	8.5156
30	4.246	0.0010043	32.894	125.79	2556.3	0.4369	8.4533
33	5.034	0.0010053	28.011	138.33	2561.7	0.4781	8.3927
36	5.947	0.0010063	23.940	150.86	2567.1	0.5188	8.3336
40	7.384	0.0010078	19.523	167.57	2574.3	0.5725	8.2570
45	9.593	0.0010099	15.258	188.45	2583.2	0.6387	8.1648
50	12.349	0.0010121	12.032	209.33	2592.1	0.7038	8.0763
55	15.758	0.0010146	9.568	230.23	2600.9	0.7679	7.9913
60	19.940	0.0010172	7.671	251.13	2609.6	0.8312	7.9096
65	25.03	0.0010199	6.197	272.06	2618.3	0.8935	7.8310
70	31.19	0.0010228	5.042	292.98	2626.8	0.9549	7.7553
75	38.58	0.0010259	4.131	313.93	2635.3	1.0155	7.6824
80	47.39	0.0010291	3.407	334.91	2643.7	1.0753	7.6122
85	57.83	0.0010325	2.828	355.90	2651.9	1.1343	7.5445
90	70.14	0.0010360	2.361	376.92	2660.1	1.1925	7.4791
95	84.55	0.0010397	1.9819	397.96	2668.1	1.2500	7.4159
100	101.35	0.0010435	1.6729	419.04	2676.1	1.3069	7.3549

A.2-9 واحد SI (ادامه)

Temperature (°C)	Vapor Pressure (kPa)	Specific Volume (m ³ /kg)		Enthalpy (kJ/kg)		Entropy (kJ/kg·K)	
		Liquid	Sat'd Vapor	Liquid	Sat'd Vapor	Liquid	Sat'd Vapor
105	120.82	0.0010475	1.4194	440.15	2683.8	1.3630	7.2958
110	143.27	0.0010516	1.2102	461.30	2691.5	1.4185	7.2387
115	169.06	0.0010559	1.0366	482.48	2699.0	1.4734	7.1833
120	198.53	0.0010603	0.8919	503.71	2706.3	1.5276	7.1296
125	232.1	0.0010649	0.7706	524.99	2713.5	1.5813	7.0775
130	270.1	0.0010697	0.6685	546.31	2720.5	1.6344	7.0269
135	313.0	0.0010746	0.5822	567.69	2727.3	1.6870	6.9777
140	316.3	0.0010797	0.5089	589.13	2733.9	1.7391	6.9299
145	415.4	0.0010850	0.4463	610.63	2740.3	1.7907	6.8833
150	475.8	0.0010905	0.3928	632.20	2746.5	1.8418	6.8379
155	543.1	0.0010961	0.3468	653.84	2752.4	1.8925	6.7935
160	617.8	0.0011020	0.3071	675.55	2758.1	1.9427	6.7502
165	700.5	0.0011080	0.2727	697.34	2763.5	1.9925	6.7078
170	791.7	0.0011143	0.2428	719.21	2768.7	2.0419	6.6663
175	892.0	0.0011207	0.2168	741.17	2773.6	2.0909	6.6256
180	1002.1	0.0011274	0.19405	763.22	2778.2	2.1396	6.5857
190	1254.4	0.0011414	0.15654	807.62	2786.4	2.2359	6.5079
200	1553.8	0.0011565	0.12736	852.45	2793.2	2.3309	6.4323
225	2548	0.0011992	0.07849	966.78	2803.3	2.5639	6.2503
250	3973	0.0012512	0.05013	1085.36	2801.5	2.7927	6.0730
275	5942	0.0013168	0.03279	1210.07	2785.0	3.0208	5.8938
300	8581	0.0010436	0.02167	1344.0	2749.0	3.2534	5.7045

Source: Abridged from J. H. Keenan, F. G. Keyes, P. G. Hill, and J. G. Moore, *Steam Tables—Metric Units*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969. Reprinted by permission of John Wiley & Sons, Inc.

A.2-9 خواص بخار اشباع و آب (جدول بخار) واحد انگلیسی

Temperature (°F)	Vapor Pressure (psia)	Specific Volume (ft ³ /lb _m)		Enthalpy (btu/lb _m)		Entropy (btu/lb _m ·°F)	
		Liquid	Sat'd Vapor	Liquid	Sat'd Vapor	Liquid	Sat'd Vapor
32.02	0.08866	0.016022	3302	0.00	1075.4	0.000	2.1869
35	0.09992	0.016021	2948	3.00	1076.7	0.00607	2.1764
40	0.12166	0.016020	2445	8.02	1078.9	0.01617	2.1592
45	0.14748	0.016021	2037	13.04	1081.1	0.02618	2.1423
50	0.17803	0.016024	1704.2	18.06	1083.3	0.03607	2.1259
55	0.2140	0.016029	1431.4	23.07	1085.5	0.04586	2.1099

A.2-9 ادامهٔ واحد انگلیسی

Temperature (°F)	Vapor Pressure (psia)	Specific Volume (ft ³ /lb _m)		Enthalpy (btu/lb _m)		Entropy (btu/lb _m ·°F)	
		Liquid	Sat'd Vapor	Liquid	Sat'd Vapor	Liquid	Sat'd Vapor
60	0.2563	0.016035	1206.9	28.08	1087.7	0.05555	2.0943
65	0.3057	0.016042	1021.5	33.09	1089.9	0.06514	2.0791
70	0.3622	0.016051	867.7	38.09	1092.0	0.07463	2.0642
75	0.4300	0.016061	739.7	43.09	1094.2	0.08402	2.0497
80	0.5073	0.016073	632.8	48.09	1096.4	0.09332	2.0356
85	0.5964	0.016085	543.1	53.08	1098.6	0.10252	2.0218
90	0.6988	0.016099	467.7	58.07	1100.7	0.11165	2.0083
95	0.8162	0.016114	404.0	63.06	1102.9	0.12068	1.9951
100	0.9503	0.016130	350.0	68.05	1105.0	0.12963	1.9822
110	1.2763	0.016166	265.1	78.02	1109.3	0.14730	1.9574
120	1.6945	0.016205	203.0	88.00	1113.5	0.16465	1.9336
130	2.225	0.016247	157.17	97.98	1117.8	0.18172	1.9109
140	2.892	0.016293	122.88	107.96	1121.9	0.19851	1.8892
150	3.722	0.016343	96.99	117.96	1126.1	0.21503	1.8684
160	4.745	0.016395	77.23	127.96	1130.1	0.23130	1.8484
170	5.996	0.016450	62.02	137.97	1134.2	0.24732	1.8293
180	7.515	0.016509	50.20	147.99	1138.2	0.26311	1.8109
190	9.343	0.016570	40.95	158.03	1142.1	0.27866	1.7932
200	11.529	0.016634	33.63	168.07	1145.9	0.29400	1.7762
210	14.125	0.016702	27.82	178.14	1149.7	0.30913	1.7599
212	14.698	0.016716	26.80	180.16	1150.5	0.31213	1.7567
220	17.188	0.016772	23.15	188.22	1153.5	0.32406	1.7441
230	20.78	0.016845	19.386	198.32	1157.1	0.33880	1.7289
240	24.97	0.016922	16.327	208.44	1160.7	0.35335	1.7143
250	29.82	0.017001	13.826	218.59	1164.2	0.36772	1.7001
260	35.42	0.017084	11.768	228.76	1167.6	0.38193	1.6864
270	41.85	0.017170	10.066	238.95	1170.9	0.39597	1.6731
280	49.18	0.017259	8.650	249.18	1174.1	0.40986	1.6602
290	57.33	0.017352	7.467	259.44	1177.2	0.42360	1.6477
300	66.98	0.017448	6.472	269.73	1180.2	0.43720	1.6356
310	77.64	0.017548	5.632	280.06	1183.0	0.45067	1.6238
320	89.60	0.017652	4.919	290.43	1185.8	0.46400	1.6123
330	103.00	0.017760	4.312	300.84	1188.4	0.47722	1.6010
340	117.93	0.017872	3.792	311.30	1190.8	0.49031	1.5901
350	134.53	0.017988	3.346	321.80	1193.1	0.50329	1.5793
360	152.92	0.018108	2.961	332.35	1195.2	0.51617	1.5688
370	173.23	0.018233	2.628	342.96	1197.2	0.52894	1.5585
380	195.60	0.018363	2.339	353.62	1199.0	0.54163	1.5483
390	220.2	0.018498	2.087	364.34	1200.6	0.55422	1.5383
400	247.1	0.018638	1.8661	375.12	1202.0	0.56672	1.5284
410	276.5	0.018784	1.6726	385.97	1203.1	0.57916	1.5187
450	422.1	0.019433	1.1011	430.2	1205.6	0.6282	1.4806

Source: Abridged from J. H. Keenan, F. G. Keyes, P. G. Hill, and J. G. Moore, *Steam Tables—English Units*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969. Reprinted by permission of John Wiley & Sons, Inc.

A.2-10 خواص بخار اشباع (جدول بخار) واحد SI، (v حجم مخصوص m^3/kg)

H انتالپی kJ/kg ، s انتروپی $kJ/kg.K$

Absolute Pressure, kPa (Sat. Temp., °C)	Temperature (°C)								
	100	150	200	250	300	360	420	500	
10 (45.81)	v	17.196	19.512	21.825	24.136	26.445	29.216	31.986	35.679
	H	2687.5	2783.0	2879.5	2977.3	3076.5	3197.6	3320.9	3489.1
	s	8.4479	8.6882	8.9038	9.1002	9.2813	9.4821	9.6682	9.8978
50 (81.33)	v	3.418	3.889	4.356	4.820	5.284	5.839	6.394	7.134
	H	2682.5	2780.1	2877.7	2976.0	3075.5	3196.8	3320.4	3488.7
	s	7.6947	7.9401	8.1580	8.3556	8.5373	8.7385	8.9249	9.1546
75 (91.78)	v	2.270	2.587	2.900	3.211	3.520	3.891	4.262	4.755
	H	2679.4	2778.2	2876.5	2975.2	3074.9	3196.4	3320.0	3488.4
	s	7.5009	7.7496	7.9690	8.1673	8.3493	8.5508	8.7374	8.9672
100 (99.63)	v	1.6958	1.9364	2.172	2.406	2.639	2.917	3.195	3.565
	H	2672.2	2776.4	2875.3	2974.3	3074.3	3195.9	3319.6	3488.1
	s	7.3614	7.6134	7.8343	8.0333	8.2158	8.4175	8.6042	8.8342
150 (111.37)	v		1.2853	1.4443	1.6012	1.7570	1.9432	2.129	2.376
	H		2772.6	2872.9	2972.7	3073.1	3195.0	3318.9	3487.6
	s		7.4193	7.6433	7.8438	8.0720	8.2293	8.4163	8.6466
400 (143.63)	v		0.4708	0.5342	0.5951	0.6548	0.7257	0.7960	0.8893
	H		2752.8	2860.5	2964.2	3066.8	3190.3	3315.3	3484.9
	s		6.9299	7.1706	7.3789	7.5662	7.7712	7.9598	8.1913
700 (164.97)	v			0.2999	0.3363	0.3714	0.4126	0.4533	0.5070
	H			2844.8	2953.6	3059.1	3184.7	3310.9	3481.7
	s			6.8865	7.1053	7.2979	7.5063	7.6968	7.9299
1000 (179.91)	v			0.2060	0.2327	0.2579	0.2873	0.3162	0.3541
	H			2827.9	2942.6	3051.2	3178.9	3306.5	3478.5
	s			6.6940	6.9247	7.1229	7.3349	7.5275	7.7622
1500 (198.32)	v			0.13248	0.15195	0.16966	0.18988	0.2095	0.2352
	H			2796.8	2923.3	3037.6	31692	3299.1	3473.1
	s			6.4546	6.7090	6.9179	7.1363	7.3323	7.5698
2000 (212.42)	v				0.11144	0.12547	0.14113	0.15616	0.17568
	H				2902.5	3023.5	3159.3	3291.6	3467.6
	s				6.5453	6.7664	6.9917	7.1915	7.4317
2500 (223.99)	v				0.08700	0.09890	0.11186	0.12414	0.13998
	H				2880.1	3008.8	3149.1	3284.0	3462.1
	s				6.4085	6.6438	6.8767	7.0803	7.3234
3000 (233.90)	v				0.07058	0.08114	0.09233	0.10279	0.11619
	H				2855.8	2993.5	3138.7	3276.3	3456.5
	s				6.2872	6.5390	6.7801	6.9878	7.2338

A.2-10 خواص بخار اشباع (جدول بخار) واحد انگلیسی، (v حجم مخصوص ft^3/lb_m)

H انتالپی btu/lb_m ، s انتروپی $\text{btu}/\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}$

Absolute Pressure, psia (Sat. Temp., $^\circ\text{F}$)	Temperature ($^\circ\text{F}$)								
	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
v	392.5	452.3	511.9	571.5	631.1	690.7	750.3	809.9	869.5
1.0 H	1150.1	1195.7	1241.8	1288.5	1336.1	1384.5	1433.7	1483.8	1534.8
(101.70) s	2.0508	2.1150	2.1720	2.2235	2.2706	2.3142	2.3550	2.3932	2.4294
v	78.15	90.24	102.24	114.20	126.15	138.08	150.01	161.94	173.86
5.0 H	1148.6	1194.8	1241.2	1288.2	1335.8	1384.3	1433.5	1483.7	1534.7
(162.21) s	1.8715	1.9367	1.9941	2.0458	2.0930	2.1367	2.1775	2.2158	2.2520
v	38.85	44.99	51.03	57.04	63.03	69.01	74.98	80.95	86.91
10.0 H	1146.6	1193.7	1240.5	1287.7	1335.5	1384.0	1433.3	1483.5	1534.6
(193.19) s	1.7927	1.8592	1.9171	1.9690	2.0164	2.0601	2.1009	2.1393	2.1755
v		30.52	34.67	38.77	42.86	46.93	51.00	55.07	59.13
14.696 H		1192.6	1239.9	1287.3	1335.2	1383.8	1433.1	1483.4	1534.5
(211.99) s		1.8157	1.8741	1.9263	1.9737	2.0175	2.0584	2.0967	2.1330
v		22.36	25.43	28.46	31.47	34.77	37.46	40.45	43.44
20.0 H		1191.5	1239.2	1286.8	1334.8	1383.5	1432.9	1483.2	1534.3
(227.96) s		1.7805	1.8395	1.8919	1.9395	1.9834	2.0243	2.0627	2.0989
v		7.260	8.353	9.399	10.425	11.440	12.448	13.452	14.454
60.0 H		1181.9	1233.5	1283.0	1332.1	1381.4	1431.2	1481.8	1533.2
(292.73) s		1.6496	1.7134	1.7678	1.8165	1.8609	1.9022	1.9408	1.9773
v			4.934	5.587	6.216	6.834	7.445	8.053	8.657
100.0 H			1227.5	1279.1	1329.3	1379.2	1429.6	1480.5	1532.1
(327.86) s			1.6517	1.7085	1.7582	1.8033	1.8449	1.8838	1.9204
v			3.221	3.679	4.111	4.531	4.944	5.353	5.759
150.0 H			1219.5	1274.1	1325.7	1376.6	1427.5	1478.8	1530.7
(358.48) s			1.5997	1.6598	1.7110	1.7568	1.7989	1.8381	1.8750
v			2.361	2.724	3.058	3.379	3.693	4.003	4.310
200.0 H			1210.8	1268.8	1322.1	1373.8	1425.3	1477.1	1529.3
(381.86) s			1.5600	1.6239	1.6767	1.7234	1.7660	1.8055	1.8425
v				2.150	2.426	2.688	2.943	3.193	3.440
250.0 H				1263.3	1318.3	1371.1	1423.2	1475.3	1527.9
(401.04) s				1.5948	1.6494	1.6970	1.7401	1.7799	1.8172
v				1.766	2.004	2.227	2.442	2.653	2.860
300.0 H				1257.5	1314.5	1368.3	1421.0	1473.6	1526.5
(417.43) s				1.5701	1.6266	1.6751	1.7187	1.7589	1.7964
v				1.2843	1.4760	1.6503	1.8163	1.9776	2.136
400 H				1245.2	1306.6	1362.5	1416.6	1470.1	1523.6
(444.70) s				1.5282	1.5892	1.6397	1.6884	1.7252	1.7632

A.2-11 خواص انتقال حرارت آب مایع، واحد SI

T (°C)	T (K)	ρ (kg/m ³)	c_p (kJ/kg·K)	$\mu \times 10^3$ (Pa·s, or kg/m·s)	k (W/m·K)	N_{Pr}	$\beta \times 10^4$ (1/K)	$(g\beta\rho^2/\mu^2) \times 10^{-8}$ (1/K·m ³)
0	273.2	999.6	4.229	1.786	0.5694	13.3	-0.630	
15.6	288.8	998.0	4.187	1.131	0.5884	8.07	1.44	10.93
26.7	299.9	996.4	4.183	0.860	0.6109	5.89	2.34	30.70
37.8	311.0	994.7	4.183	0.682	0.6283	4.51	3.24	68.0
65.6	338.8	981.9	4.187	0.432	0.6629	2.72	5.04	256.2
93.3	366.5	962.7	4.229	0.3066	0.6802	1.91	6.66	642
121.1	394.3	943.5	4.271	0.2381	0.6836	1.49	8.46	1300
148.9	422.1	917.9	4.312	0.1935	0.6836	1.22	10.08	2231
204.4	477.6	858.6	4.522	0.1384	0.6611	0.950	14.04	5308
260.0	533.2	784.9	4.982	0.1042	0.6040	0.859	19.8	11030
315.6	588.8	679.2	6.322	0.0862	0.5071	1.07	31.5	19260

A.2-11 خواص انتقال حرارت آب مایع، واحد انگلیسی

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (btu/lb _m ·°F)	$\mu \times 10^3$ (lb _m /ft·s)	k (btu/h·ft·°F)	N_{Pr}	$\beta \times 10^4$ (1/°R)	$(g\beta\rho^2/\mu^2) \times 10^{-6}$ (1/°R·ft ³)
32	62.4	1.01	1.20	0.329	13.3	-0.350	
60	62.3	1.00	0.760	0.340	8.07	0.800	17.2
80	62.2	0.999	0.578	0.353	5.89	1.30	48.3
100	62.1	0.999	0.458	0.363	4.51	1.80	107
150	61.3	1.00	0.290	0.383	2.72	2.80	403
200	60.1	1.01	0.206	0.393	1.91	3.70	1010
250	58.9	1.02	0.160	0.395	1.49	4.70	2045
300	57.3	1.03	0.130	0.395	1.22	5.60	3510
400	53.6	1.08	0.0930	0.382	0.950	7.80	8350
500	49.0	1.19	0.0700	0.349	0.859	11.0	17350
600	42.4	1.51	0.0579	0.293	1.07	17.5	30300

A.2-12 خواص انتقال حرارت بخار آب در $101/32$ kPa (یک اتمسفر مطلق)، واحد SI

T (°C)	T (K)	ρ (kg/m^3)	c_p ($kJ/kg \cdot K$)	$\mu \times 10^5$ ($Pa \cdot s$, or $kg/m \cdot s$)	k ($W/m \cdot K$)	N_{Pr}	$\beta \times 10^3$ ($1/K$)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ ($1/K \cdot m^3$)
100.0	373.2	0.596	1.888	1.295	0.02510	0.96	2.68	0.557×10^8
148.9	422.1	0.525	1.909	1.488	0.02960	0.95	2.38	0.292×10^8
204.4	477.6	0.461	1.934	1.682	0.03462	0.94	2.09	0.154×10^8
260.0	533.2	0.413	1.968	1.883	0.03946	0.94	1.87	0.0883×10^8
315.6	588.8	0.373	1.997	2.113	0.04448	0.94	1.70	52.1×10^5
371.1	644.3	0.341	2.030	2.314	0.04985	0.93	1.55	33.1×10^5
426.7	699.9	0.314	2.068	2.529	0.05556	0.92	1.43	21.6×10^5

A.2-12 خواص انتقال حرارت بخار آب در $101/32$ kPa (یک اتمسفر مطلق)،
واحد انگلیسی

T (°F)	ρ ($\frac{lb_m}{ft^3}$)	c_p ($\frac{btu}{lb_m \cdot ^\circ F}$)	$\mu \times 10^5$ ($\frac{lb_m}{ft \cdot s}$)	k ($\frac{btu}{h \cdot ft \cdot ^\circ F}$)	N_{Pr}	$\beta \times 10^3$ ($1/^\circ R$)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ ($1/^\circ R \cdot ft^3$)
212	0.0372	0.451	0.870	0.0145	0.96	1.49	0.877×10^6
300	0.0328	0.456	1.000	0.0171	0.95	1.32	0.459×10^6
400	0.0288	0.462	1.130	0.0200	0.94	1.16	0.243×10^6
500	0.0258	0.470	1.265	0.0228	0.94	1.04	0.139×10^6
600	0.0233	0.477	1.420	0.0257	0.94	0.943	82×10^3
700	0.0213	0.485	1.555	0.0288	0.93	0.862	52.1×10^3
800	0.0196	0.494	1.700	0.0321	0.92	0.794	34.0×10^3

Source: D. L. Timrot and N. B. Vargaftik, *J. Tech. Phys. (U.S.S.R.)*, 10, 1063 (1940); R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973; J. H. Keenan, F. G. Keyes, P. G. Hill, and J. G. Moore, *Steam Tables*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969; National Research Council, *International Critical Tables*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929; L. S. Marks, *Mechanical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951.

ضمیمه A.3

خواص فیزیکی ترکیبات آلی و معدنی

A.3-1 گرمای تشکیل استاندارد در ۲۹۸/۱۵ K (۲۵ °C) و

۱۰۱/۳۲۵ kPa (یک اتمسفر مطلق)، (c) = بلور، (g) = گاز، (l) = مایع

Compound	ΔH_f°		Compound	ΔH_f°	
	(kJ/kg mol) 10^{-3}	kcal/g mol		(kJ/kg mol) 10^{-3}	kcal/g mol
NH ₃ (g)	-46.19	-11.04	CaCO ₃ (c)	-1206.87	-288.45
NO(g)	+90.374	+21.600	CaO(c)	-635.5	-151.9
H ₂ O(l)	-285.840	-68.3174	CO(g)	-110.523	-26.4157
H ₂ O(g)	-241.826	-57.7979	CO ₂ (g)	-393.513	-94.0518
HCN(g)	+130.1	+31.1	CH ₄ (g)	-74.848	-17.889
HCl(g)	-92.312	-22.063	C ₂ H ₆ (g)	-84.667	-20.236
H ₂ SO ₄ (l)	-811.32	-193.91	C ₃ H ₈ (g)	-103.847	-24.820
H ₃ PO ₄ (c)	-1281.1	-306.2	CH ₃ OH(l)	-238.66	-57.04
NaCl(c)	-411.003	-98.232	CH ₃ CH ₂ OH(l)	-277.61	-66.35
NH ₄ Cl(c)	-315.39	-75.38			

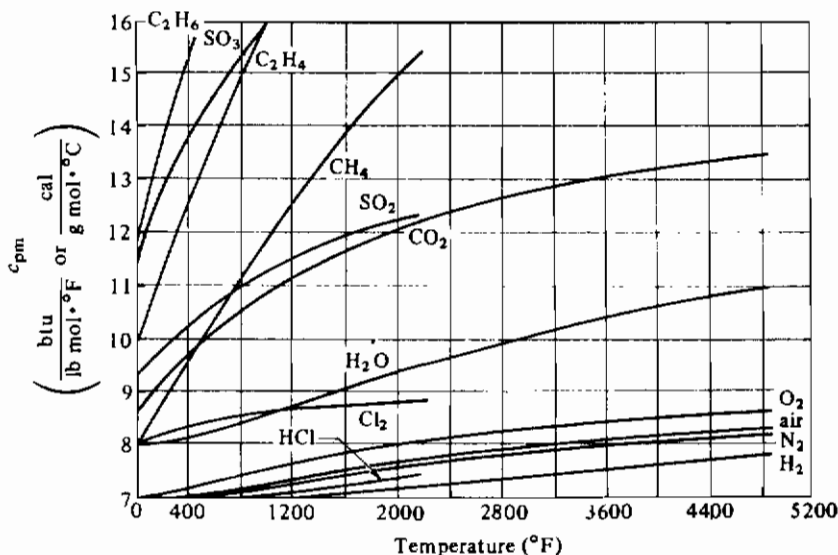
Source: J. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973; and O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles*, Part 1, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1954.

A.3-2 گرمای احتراق استاندارد در ۲۹۸/۱۵ K و ۱۰۱/۳۲۵ kPa

(یک اتمسفر مطلق)، (g) = گاز، (l) = مایع، (s) = جامد

Compound	Combustion Reaction	ΔH_c°	
		kcal/g mol	(kJ/kg mol) 10^{-3}
C(s)	$C(s) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow CO(g)$	-26.4457	-110.523
CO(g)	$CO(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$	-67.6361	-282.989
C(s)	$C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$	-94.0518	-393.513
H ₂ (g)	$H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow H_2O(l)$	-68.3174	-285.840
H ₂ (g)	$H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow H_2O(g)$	-57.7979	-241.826
CH ₄ (g)	$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$	-212.798	-890.346
C ₂ H ₆ (g)	$C_2H_6(g) + \frac{7}{2}O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) + 3H_2O(l)$	-372.820	-1559.879
C ₃ H ₈ (g)	$C_3H_8(g) + 5O_2(g) \rightarrow 3CO_2(g) + 4H_2O(l)$	-530.605	-2220.051
d-Glucose (dextrose)			
C ₆ H ₁₂ O ₆ (s)	$C_6H_{12}O_6(s) + 6O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g) + 6H_2O(l)$	-673	-2816
Lactose (anhydrous)			
C ₁₂ H ₂₂ O ₁₁ (s)	$C_{12}H_{22}O_{11}(s) + 12O_2(g) \rightarrow 12CO_2(g) + 11H_2O(l)$	-1350.1	-5648.8
Sucrose			
C ₁₂ H ₂₂ O ₁₁ (s)	$C_{12}H_{22}O_{11}(s) + 12O_2(g) \rightarrow 12CO_2(g) + 11H_2O(l)$	-1348.9	-5643.8

Source: R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973; and O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles*, Part 1, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1954



شکل A.3-1: ظرفیتهای گرمایی میانگین مولی از ۷۷°F تا ۲۵°C (۱°F در فشار ثابت

۱۰۱/۳۲۵ kPa (یک اتمسفر مطلق)

گرفته شده با کسب مجوز از:

A.3-3 خواص فیزیکی هوا در ۱۰۱/۳۲۵ kPa (یک اتمسفر مطلق)، واحد SI

T (C)	T (K)	ρ (kg/m ³)	c_p (kJ/kg·K)	$\mu \times 10^5$ (Pa·s, or kg/m·s)	k (W/m·K)	N_{Pr}	$\beta \times 10^3$ (1/K)	$g\beta\rho^3/\mu^2$ (1/K·m ³)
-17.8	255.4	1.379	1.0048	1.62	0.02250	0.720	3.92	2.79×10^8
0	273.2	1.293	1.0048	1.72	0.02423	0.715	3.65	2.04×10^8
10.0	283.2	1.246	1.0048	1.78	0.02492	0.713	3.53	1.72×10^8
37.8	311.0	1.137	1.0048	1.90	0.02700	0.705	3.22	1.12×10^8
65.6	338.8	1.043	1.0090	2.03	0.02925	0.702	2.95	0.775×10^8
93.3	366.5	0.964	1.0090	2.15	0.03115	0.694	2.74	0.534×10^8
121.1	394.3	0.895	1.0132	2.27	0.03323	0.692	2.54	0.386×10^8
148.9	422.1	0.838	1.0174	2.37	0.03531	0.689	2.38	0.289×10^8
176.7	449.9	0.785	1.0216	2.50	0.03721	0.687	2.21	0.214×10^8
204.4	477.6	0.740	1.0258	2.60	0.03894	0.686	2.09	0.168×10^8
232.2	505.4	0.700	1.0300	2.71	0.04084	0.684	1.98	0.130×10^8
260.0	533.2	0.662	1.0341	2.80	0.04258	0.680	1.87	0.104×10^8

A.3-3 خواص فیزیکی هوا در ۱۰۱/۳۲۵ kPa (یک اتمسفر مطلق)، واحد انگلیسی

T (F)	ρ ($\frac{lb_m}{ft^3}$)	c_p ($\frac{btu}{lb_m \cdot F}$)	μ (centipoise)	k ($\frac{btu}{h \cdot ft \cdot F}$)	N_{Pr}	$\beta \times 10^3$ (1/°R)	$g\beta\rho^3/\mu^2$ (1/°R·ft ³)
0	0.0861	0.240	0.0162	0.0130	0.720	2.18	4.39×10^6
32	0.0807	0.240	0.0172	0.0140	0.715	2.03	3.21×10^6
50	0.0778	0.240	0.0178	0.0144	0.713	1.96	2.70×10^6
100	0.0710	0.240	0.0190	0.0156	0.705	1.79	1.76×10^6
150	0.0651	0.241	0.0203	0.0169	0.702	1.64	1.22×10^6
200	0.0602	0.241	0.0215	0.0180	0.694	1.52	0.840×10^6
250	0.0559	0.242	0.0227	0.0192	0.692	1.41	0.607×10^6
300	0.0523	0.243	0.0237	0.0204	0.689	1.32	0.454×10^6
350	0.0490	0.244	0.0250	0.0215	0.687	1.23	0.336×10^6
400	0.0462	0.245	0.0260	0.0225	0.686	1.16	0.264×10^6
450	0.0437	0.246	0.0271	0.0236	0.674	1.10	0.204×10^6
500	0.0413	0.247	0.0280	0.0246	0.680	1.04	0.163×10^6

Source: National Bureau of Standards, Circular 461C, 1947; 564, 1955; NBS-NACA, Tables of Thermal Properties of Gases, 1949; F. G. Keyes, Trans. A.S.M.E., 73, 590, 597 (1951); 74, 1303 (1952); D. D. Wagman, Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties. Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1953.

A.3-4 ویسکوزیته گازها در ۱۰۱/۳۲۵ kPa (یک اتمسفر مطلق)

[ویسکوزیته بر حسب 10^{-3} (Pa.s) ، 10^3 (kg/m.s) یا cp]

Temperature			H_2	O_2	N_2	CO	CO_2
K	$^{\circ}F$	$^{\circ}C$					
255.4	0	-17.8	0.00800	0.0181	0.0158	0.0156	0.0128
273.2	32	0	0.00840	0.0192	0.0166	0.0165	0.0137
283.2	50	10.0	0.00862	0.0197	0.0171	0.0169	0.0141
311.0	100	37.8	0.00915	0.0213	0.0183	0.0183	0.0154
338.8	150	65.6	0.00960	0.0228	0.0196	0.0195	0.0167
366.5	200	93.3	0.0101	0.0241	0.0208	0.0208	0.0179
394.3	250	121.1	0.0106	0.0256	0.0220	0.0220	0.0191
422.1	300	148.9	0.0111	0.0267	0.0230	0.0231	0.0203
449.9	350	176.7	0.0115	0.0282	0.0240	0.0242	0.0215
477.6	400	204.4	0.0119	0.0293	0.0250	0.0251	0.0225
505.4	450	232.2	0.0124	0.0307	0.0260	0.0264	0.0236
533.2	500	260.0	0.0128	0.0315	0.0273	0.0276	0.0247

Source: National Bureau of Standards, Circular 461C, 1947; 564, 1955; NBS-NACA, Tables of Thermal Properties of Gases, 1949; F. G. Keyes, Trans. A.S.M.E., 73, 590, 597 (1951); 74, 1303 (1952); D. D. Wagman, Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties. Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1953.

ضریب هدایت گرمایی گازها در ۱۰۱/۳۲۵ kPa (یک اتمسفر مطلق) A.3-5

Temperature		H_2		O_2		N_2		CO		CO_2	
K	C	$W/m \cdot K$	$btu/h \cdot ft \cdot ^\circ F$	$W/m \cdot K$	$btu/h \cdot ft \cdot ^\circ F$	$W/m \cdot K$	$btu/h \cdot ft \cdot ^\circ F$	$W/m \cdot K$	$btu/h \cdot ft \cdot ^\circ F$	$W/m \cdot K$	$btu/h \cdot ft \cdot ^\circ F$
253.4	-17.8	0	0.1592	0.0920	0.0228	0.0132	0.0228	0.0132	0.0222	0.0128	0.0076
273.2	0	32	0.1667	0.0963	0.0246	0.0142	0.0239	0.0138	0.0233	0.0135	0.0084
283.2	10.0	50	0.1720	0.0994	0.0253	0.0146	0.0248	0.0143	0.0239	0.0138	0.0088
311.0	37.8	100	0.1852	0.107	0.0277	0.0160	0.0267	0.0154	0.0260	0.0150	0.0100
338.8	65.6	150	0.1990	0.115	0.0299	0.0173	0.0287	0.0166	0.0279	0.0161	0.0110
366.5	93.3	200	0.2111	0.122	0.0320	0.0185	0.0303	0.0175	0.0296	0.0171	0.0125
394.3	121.1	250	0.2233	0.129	0.0343	0.0198	0.0329	0.0190	0.0318	0.0184	0.0138
422.1	148.9	300	0.2353	0.136	0.0363	0.0210	0.0348	0.0201	0.0338	0.0195	0.0150
449.9	176.7	350	0.2458	0.142	0.0382	0.0221	0.0365	0.0211	0.0355	0.0205	0.0165
477.6	204.4	400	0.2579	0.149	0.0398	0.0230	0.0382	0.0221	0.0369	0.0213	0.0178
505.4	232.2	450	0.2683	0.155	0.0422	0.0244	0.0400	0.0231	0.0384	0.0222	0.0193
533.2	260.0	500	0.2786	0.161	0.0438	0.0253	0.0419	0.0242	0.0407	0.0235	0.0205

Source: National Bureau of Standards, Circular 461C, 1947; 564, 1955; NBS-NACA, Table of Thermal Properties of Gases, 1949; F. G. Keyes, Trans. A.S.M.E., 73, 590, 597 (1951); 74, 1303 (1952); D. D. Wagman, Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties, Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1953.

ظرفیت گرمایی گازها در فشار ثابت در ۱۰۱/۳۲۵ KPa (یک اتمسفر مطلق)

A-3-6

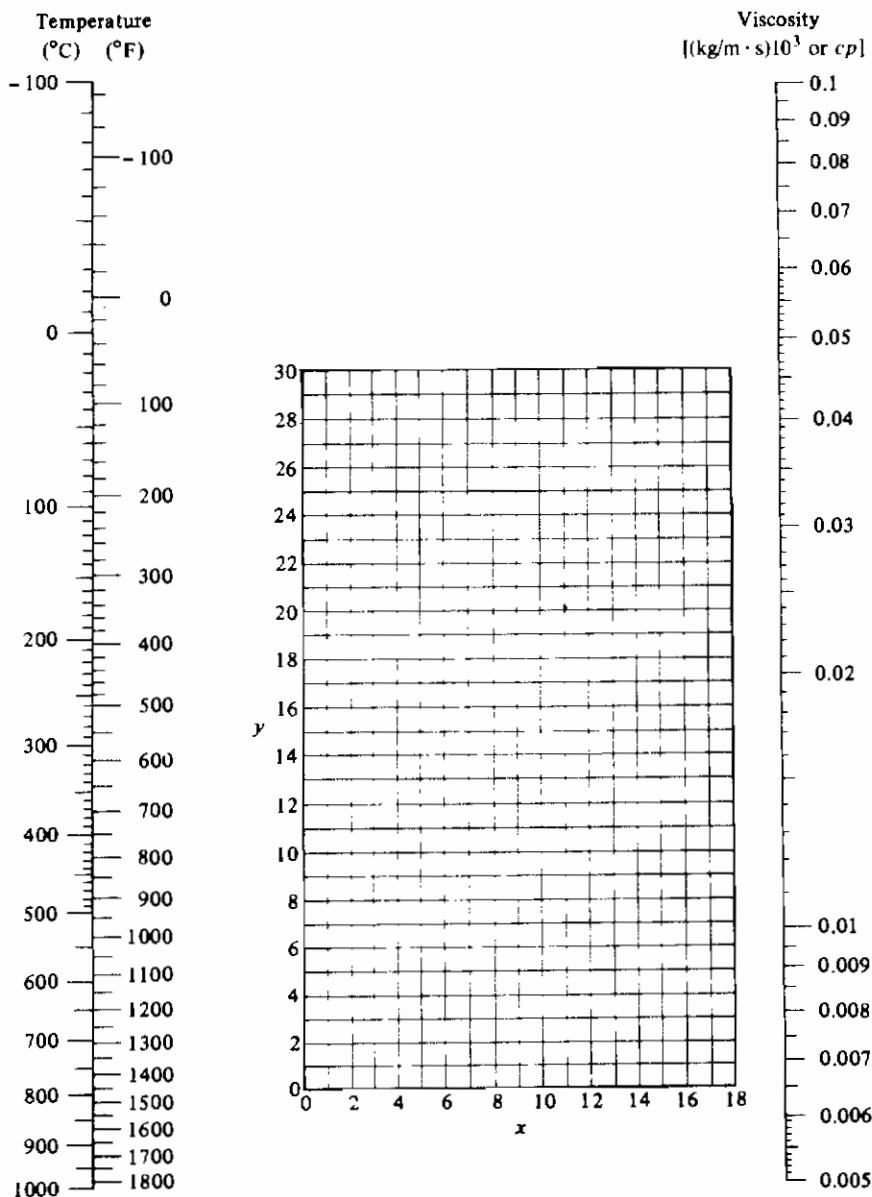
Temperature K	C	H ₂		O ₂		N ₂		CO		CO ₂		
		F	kJ/kg · K Btu/lb _m · F	F	kJ/kg · K Btu/lb _m · F	F	kJ/kg · K Btu/lb _m · F	F	kJ/kg · K Btu/lb _m · F	F	kJ/kg · K Btu/lb _m · F	
255.4	-17.8	0	14.07	3.36	0.969	0.217	1.034	0.247	1.034	0.247	0.800	0.191
273.2	0	32	14.19	3.39	0.913	0.218	1.038	0.248	1.038	0.248	0.816	0.195
283.2	10.0	50	14.19	3.39	0.917	0.219	1.038	0.248	1.038	0.248	0.825	0.197
311.0	37.8	100	14.32	3.42	0.921	0.220	1.038	0.248	1.043	0.249	0.854	0.204
338.8	65.6	150	14.36	3.43	0.925	0.221	1.038	0.248	1.043	0.249	0.883	0.211
366.5	93.3	200	14.40	3.44	0.929	0.222	1.043	0.249	1.047	0.250	0.904	0.216
394.3	121.1	250	14.44	3.45	0.938	0.224	1.043	0.249	1.047	0.250	0.929	0.222
422.1	148.9	300	14.49	3.46	0.946	0.226	1.047	0.250	1.051	0.251	0.950	0.227
449.9	176.7	350	14.49	3.46	0.955	0.228	1.047	0.250	1.055	0.252	0.976	0.233
477.6	204.4	400	14.49	3.46	0.963	0.230	1.051	0.251	1.059	0.253	0.996	0.238
505.4	232.2	450	14.52	3.47	0.971	0.232	1.055	0.252	1.063	0.254	1.017	0.243
533.2	260.0	500	14.52	3.47	0.976	0.233	1.059	0.253	1.068	0.255	1.030	0.246

Source: National Bureau of Standards Circular 461C, 1947; 564, 1955; NBS NACA, Tables of Thermal Properties of Gases, 1949; F. G. Keyes, Trans. A.S.M.E., 73, 590, 597 (1951); 74, 1303 (1952); D. D. Wagman, Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties, Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1953.

A.3-7 عدد پراوتل گازها در ۱۰۱/۳۲۵ kPa (یک اتمسفر مطلق)

Temperature			H_2	O_2	N_2	CO	CO_2
$^{\circ}C$	$^{\circ}F$	K					
-17.8	0	255.4	0.720	0.720	0.720	0.740	0.775
0	32	273.2	0.715	0.711	0.720	0.738	0.770
10.0	50	283.2	0.710	0.710	0.717	0.735	0.769
37.8	100	311.0	0.700	0.707	0.710	0.731	0.764
65.6	150	338.8	0.700	0.706	0.700	0.727	0.755
93.3	200	366.5	0.694	0.703	0.700	0.724	0.752
121.1	250	394.3	0.688	0.703	0.696	0.720	0.746
148.9	300	422.1	0.683	0.703	0.690	0.720	0.738
176.6	350	449.9	0.677	0.704	0.689	0.720	0.734
204.4	400	477.6	0.670	0.706	0.688	0.720	0.725
232.2	450	505.4	0.668	0.702	0.688	0.720	0.716
260.0	500	533.2	0.666	0.700	0.688	0.720	0.702

Source : National Bureau of Standards, *Circular 461C*, 1947; **564**, 1955; NBS-NACA, *Tables of Thermal Properties of Gases*, 1949; F. G. Keyes, *Trans. A.S.M.E.*, **73**, 590, 597 (1951); **74**, 1303 (1952); D. D. Wagman, *Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties*. Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1953.



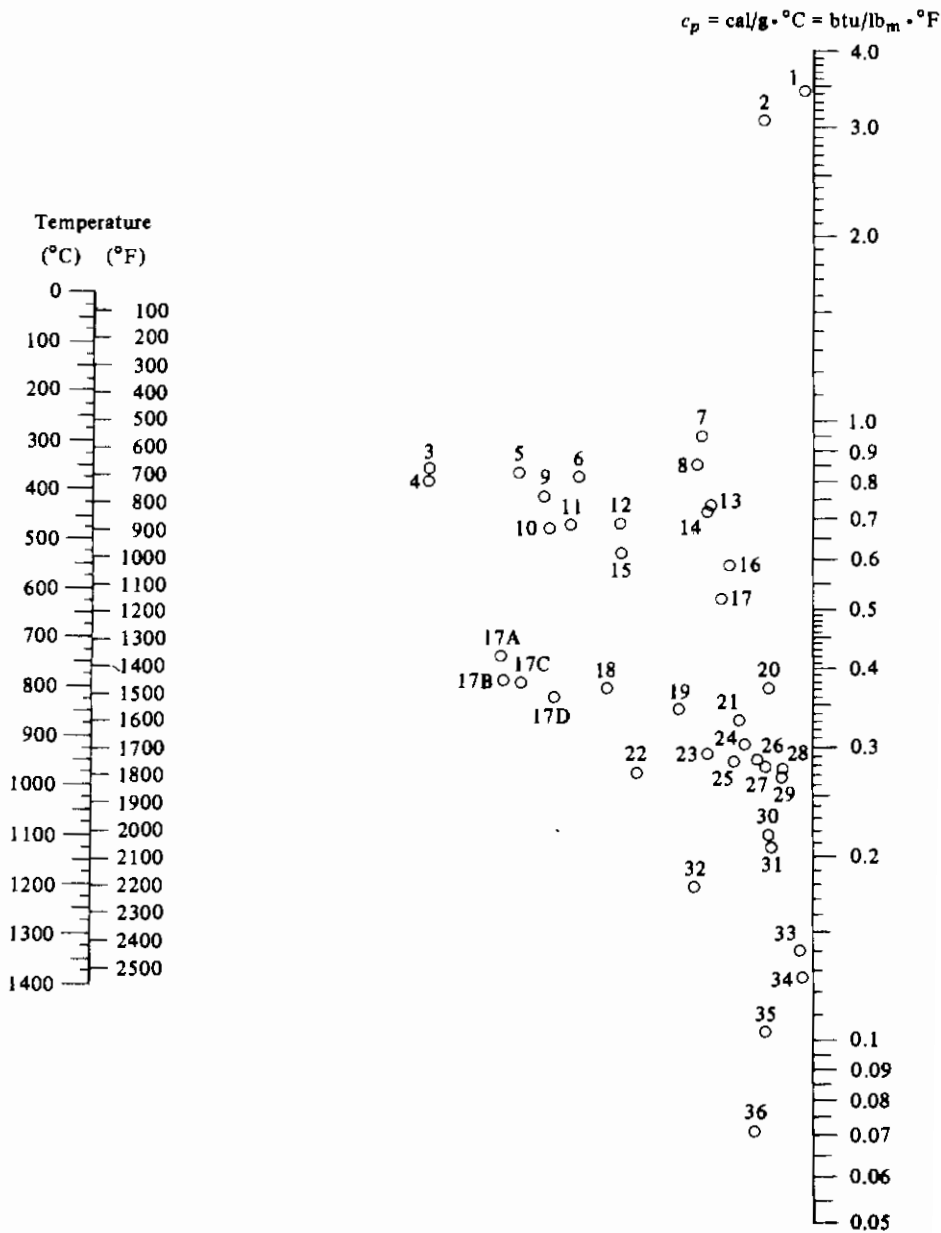
شکل A.3-2: ویسکوزیته گازها در $101/325 \text{ kPa}$ (یک اتمسفر مطلق)، برای تعیین مختصات

مورد استفاده در این شکل از جدول A.3-8 استفاده کنید.

گرفته شده با کسب مجوز از:

A.3-8 ویسکوزیته گازها (مختصات مربوط به شکل A.3-2)

No.	Gas	X	Y	No.	Gas	X	Y
1	Acetic acid	7.7	14.3	29	Freon-113	11.3	14.0
2	Acetone	8.9	13.0	30	Helium	10.9	20.5
3	Acetylene	9.8	14.9	31	Hexane	8.6	11.8
4	Air	11.0	20.0	32	Hydrogen	11.2	12.4
5	Ammonia	8.4	16.0	33	3H ₂ + 1N ₂	11.2	17.2
6	Benzene	10.5	22.4	34	Hydrogen bromide	8.8	20.9
7	Benzene	8.5	13.2	35	Hydrogen chloride	8.8	18.7
8	Bromine	8.9	19.2	36	Hydrogen cyanide	9.8	14.9
9	Butene	9.2	13.7	37	Hydrogen iodide	9.0	21.3
10	Butylene	8.9	13.0	38	Hydrogen sulfide	8.6	18.0
11	Carbon dioxide	9.5	18.7	39	Iodine	9.0	18.4
12	Carbon disulfide	8.0	16.0	40	Mercury	5.3	22.9
13	Carbon monoxide	11.0	20.0	41	Methane	9.9	15.5
14	Chlorine	9.0	18.4	42	Methyl alcohol	8.5	15.6
15	Chloroform	8.9	15.7	43	Nitric oxide	10.9	20.5
16	Cyanogen	9.2	15.2	44	Nitrogen	10.6	20.0
17	Cyclohexane	9.2	12.0	45	Nitrosyl chloride	8.0	17.6
18	Ethane	9.1	14.5	46	Nitrous oxide	8.8	19.0
19	Ethyl acetate	8.5	13.2	47	Oxygen	11.0	21.3
20	Ethyl alcohol	9.2	14.2	48	Pentane	7.0	12.8
21	Ethyl chloride	8.5	15.6	49	Propane	9.7	12.9
22	Ethyl ether	8.9	13.0	50	Propyl alcohol	8.4	13.4
23	Ethylene	9.5	15.1	51	Propylene	9.0	13.8
24	Fluorine	7.3	23.8	52	Sulfur dioxide	9.6	17.0
25	Freon-11	10.6	15.1	53	Toluene	8.6	12.4
26	Freon-12	11.1	16.0	54	2,3,3-Trimethylbutane	9.5	10.5
27	Freon-21	10.8	15.3	55	Water	8.0	16.0
28	Freon-22	10.1	17.0	56	Xenon	9.3	23.0



شکل A.3-3: ظرفیت گرمایی گازها در فشار ثابت ۱۰۱/۳۲۵ kPa (یک اتمسفر مطلق)

برای تعیین مختصات مورد استفاده در این شکل از جدول A.3-9 استفاده کنید.

گرفته شده با کسب مجوز از:

A.3-9 ظرفیت گرمایی گازها در فشار ثابت
(مختصات مربوط به شکل A.3-3)

No.	Gas	Range (°C)
10	Acetylene	0-200
15	Acetylene	200-400
16	Acetylene	400-1400
27	Air	0-1400
12	Ammonia	0-600
14	Ammonia	600-1400
18	Carbon dioxide	0-400
24	Carbon dioxide	400-1400
26	Carbon monoxide	0-1400
32	Chlorine	0-200
34	Chlorine	200-1400
3	Ethane	0-200
9	Ethane	200-600
8	Ethane	600-1400
4	Ethylene	0-200
11	Ethylene	200-600
13	Ethylene	600-1400
17B	Freon-11 (CCl ₃ F)	0-150
17C	Freon-21 (CHCl ₂ F)	0-150
17A	Freon-22 (CHClF ₂)	0-150
17D	Freon-113 (CCl ₂ F-CClF ₂)	0-150
1	Hydrogen	0-600
2	Hydrogen	600-1400
35	Hydrogen bromide	0-1400
30	Hydrogen chloride	0-1400
20	Hydrogen fluoride	0-1400
36	Hydrogen iodide	0-1400
19	Hydrogen sulfide	0-700
21	Hydrogen sulfide	700-1400
5	Methane	0-300
6	Methane	300-700
7	Methane	700-1400
25	Nitric oxide	0-700
28	Nitric oxide	700-1400
26	Nitrogen	0-1400
23	Oxygen	0-500
29	Oxygen	500-1400
33	Sulfur	300-1400
22	Sulfur dioxide	0-400
31	Sulfur dioxide	400-1400
17	Water	0-1400

A.3-10 ضریب هدایت گرمایی گازها و بخارات در ۱۰۱/۳۲۵ kPa

$k = W/m.K$ ، (یک اتمسفر مطلق)

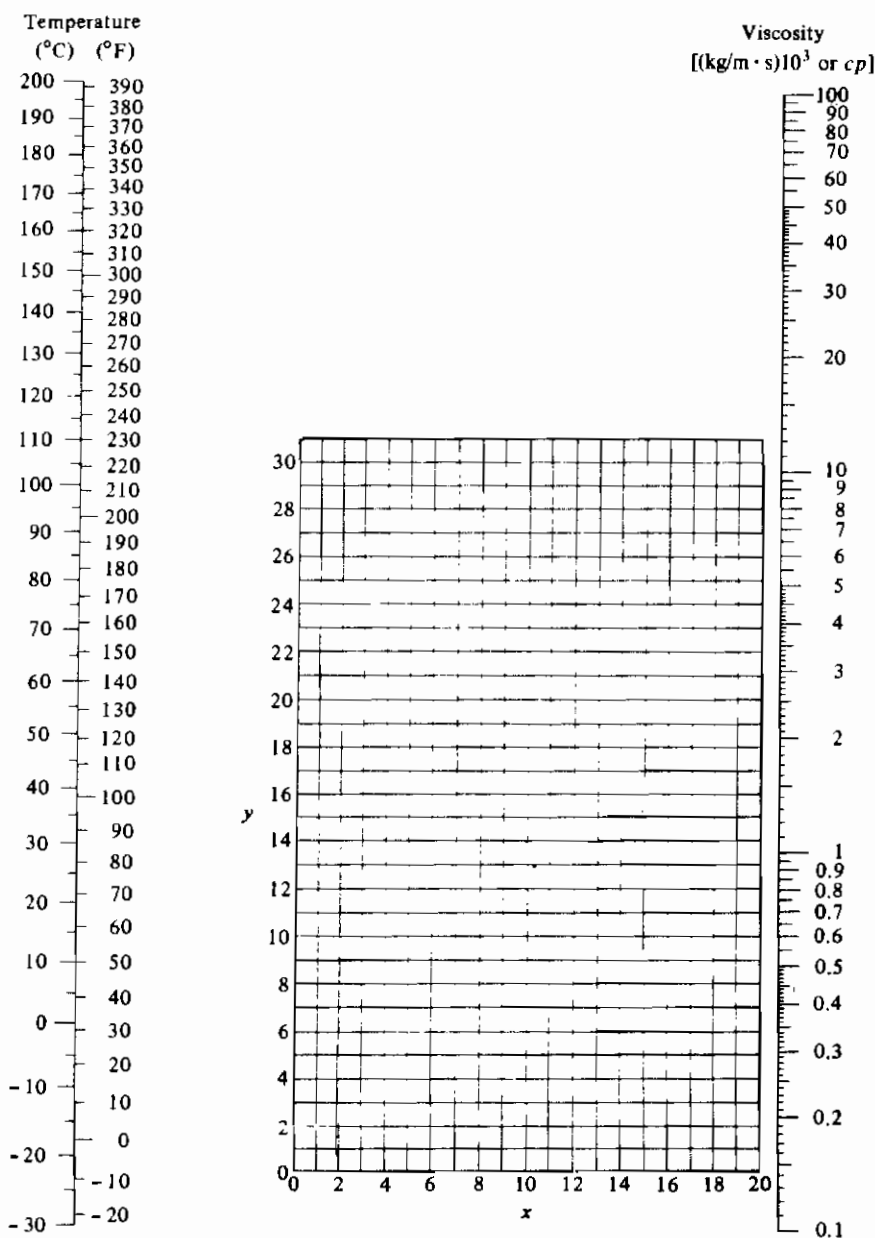
Gas or Vapor	K	k	Gas or Vapor	K	k
Acetone ⁽¹⁾	273	0.0099	Ethane ^(5, 6)	239	0.0149
	319	0.0130		273	0.0183
	373	0.0171		373	0.0303
Ammonia ⁽²⁾	457	0.0254	Ethyl alcohol ⁽¹¹⁾	293	0.0154
	273	0.0218		373	0.0215
	373	0.0332		Ethyl ether ⁽¹¹⁾	273
473	0.0484	319	0.0171		
Butane ⁽³⁾	273	0.0135	Ethylene ⁽⁶⁾	373	0.0227
	373	0.0234		273	0.0175
Carbon monoxide ⁽²⁾	173	0.0152	<i>n</i> -Hexane ⁽³⁾	323	0.0227
	273	0.0232		373	0.0279
	373	0.0305		273	0.0125
Chlorine ⁽⁴⁾	273	0.00744	Sulfur dioxide ⁽⁷⁾	293	0.0138
				273	0.0087
				373	0.0119

Source : (1) Moser, dissertation, Berlin, 1913; (2) F. G. Keyes, *Tech. Rept.* 37, Project Squid, Apr. 1, 1952; (3) W. B. Mann and B. G. Dickens, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A134**, 77 (1931); (4) *International Critical Tables*, New York: McGraw-Hill Book Company, 1929; (5) T. H. Chilton and R. P. Genereaux, personal communication, 1946; (6) A. Eucken, *Physik, Z.*, **12**, 1101 (1911); **14**, 324 (1913); (7) B. G. Dickens, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A143**, 517 (1934).

A.3-11 ظرفیت گرمایی مایعات ($c_p = kJ/kg.K$)

Liquid	K	c_p	Liquid	K	c_p
Acetic acid	273	1.959	Hydrochloric acid (20 mol %)	273	2.43
	311	2.240		293	2.474
Acetone	273	2.119	Mercury	293	0.01390
	293	2.210	Methyl alcohol	293	2.512
Aniline	273	2.001	Nitrobenzene	313	2.583
	323	2.181		283	1.499
Benzene	293	1.700	303	1.419	
	333	1.859	363	1.436	
Butane	273	2.300	Sodium chloride (9.1 mol %)	293	3.39
<i>i</i> -Butyl alcohol	303	2.525	330	3.43	
Ethyl alcohol	273	2.240	Sulfuric acid (100%)	293	1.403
	298	2.433		Toluene	273
Formic acid	273	1.825	<i>o</i> -Xylene	323	1.763
	289	2.131		303	1.721
Glycerol	288	2.324			
	305	2.412			

Source : N. A. Lange, *Handbook of Chemistry*, 10th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1967; National Research Council, *International Critical Tables*, Vol. V. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929; R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.



شکل A.3-4: ویسکوزیته مایعات. (برای تعیین مختصات مورد استفاده

در این شکل از جدول A.3-12 استفاده کنید).

گرفته شده با کسب مجوز از:

R.H.Perry and C.H.Chilton, Chemical Engineer's Handbook, 5th ed. New York:

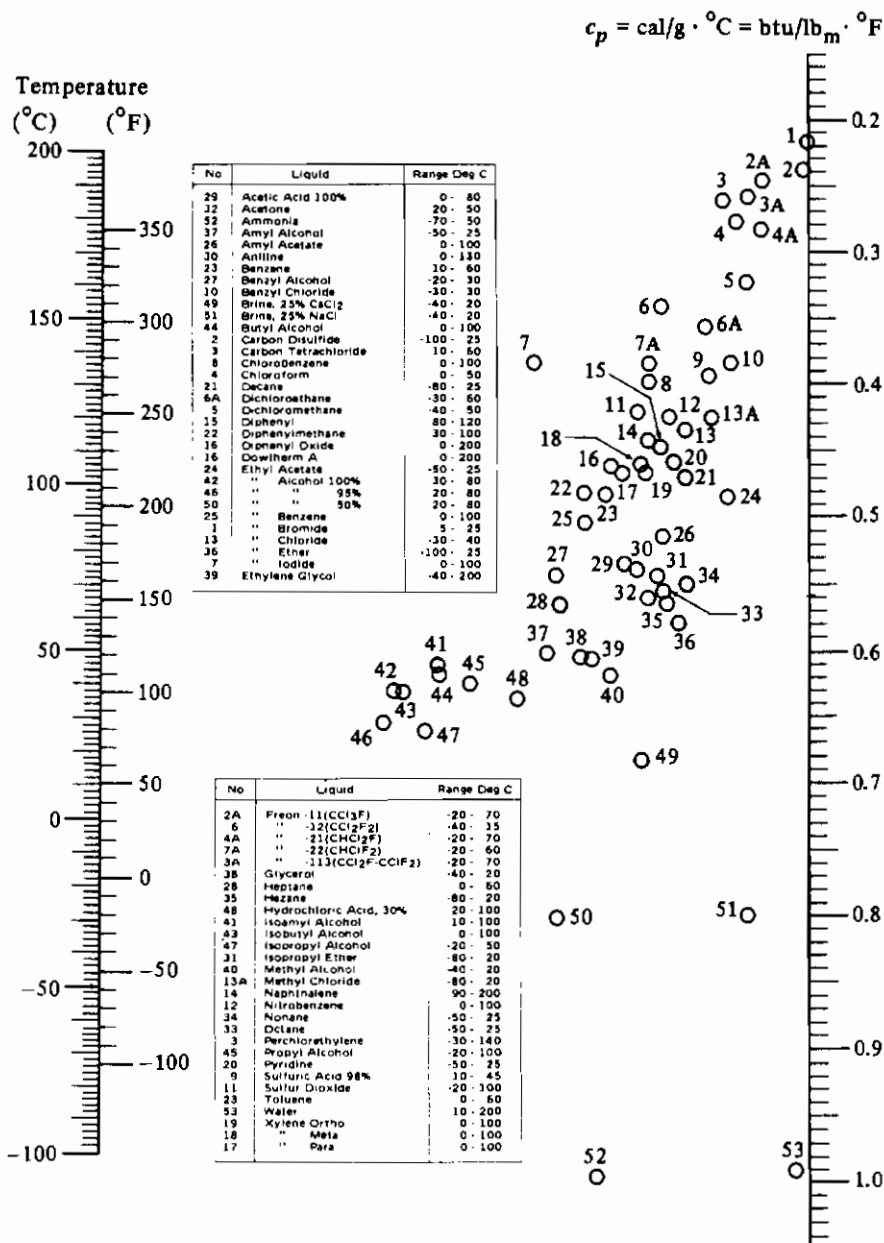
McGraw-Hill book Company, 1973

A.3-12 ویسکوزیته مایعات. (مختصات مربوط به شکل A.3-4)

Liquid	X	Y	Liquid	X	Y
Acetaldehyde	15.2	4.8	Cyclohexanol	2.9	24.3
Acetic acid, 100%	12.1	14.2	Cyclohexane	9.8	12.9
Acetic acid, 70%	9.5	17.0	Dibromomethane	12.7	15.8
Acetic anhydride	12.7	12.8	Dichloroethane	13.2	12.2
Acetone, 100%	14.5	7.2	Dichloromethane	14.6	8.9
Acetone, 35%	7.9	15.0	Diethyl ketone	13.5	9.2
Acetonitrile	14.4	7.4	Diethyl oxalate	11.0	16.4
Acrylic acid	12.3	13.9	Diethylene glycol	5.0	24.7
Allyl alcohol	10.2	14.3	Diphenyl	12.0	18.3
Allyl bromide	14.4	9.6	Dipropyl ether	13.2	8.6
Allyl iodide	14.0	11.7	Dipropyl oxalate	10.3	17.7
Ammonia, 100%	12.6	2.0	Ethyl acetate	13.7	9.1
Ammonia, 26%	10.1	13.9	Ethyl acrylate	12.7	10.4
Amyl acetate	11.8	12.5	Ethyl alcohol, 100%	10.5	13.8
Amyl alcohol	7.5	18.4	Ethyl alcohol, 95%	9.8	14.3
Aniline	8.1	18.7	Ethyl alcohol, 40%	6.5	16.6
Anisole	12.3	13.5	Ethyl benzene	13.2	11.5
Arsenic trichloride	13.9	14.5	Ethyl bromide	14.5	8.1
Benzene	12.5	10.9	2-Ethyl butyl acrylate	11.2	14.0
Brine, CaCl ₂ , 25%	6.6	15.9	Ethyl chloride	14.8	6.0
Brine, NaCl, 25%	10.2	16.6	Ethyl ether	14.5	5.3
Bromine	14.2	13.2	Ethyl formate	14.2	8.4
Bromotoluene	20.0	15.9	2-Ethyl hexyl acrylate	9.0	15.0
Butyl acetate	12.3	11.0	Ethyl iodide	14.7	10.3
Butyl acrylate	11.5	12.6	Ethyl propionate	13.2	9.9
Butyl alcohol	8.6	17.2	Ethyl propyl ether	14.0	7.0
Butyric acid	12.1	15.3	Ethyl sulfide	13.8	8.9
Carbon dioxide	11.6	0.3	Ethylene bromide	11.9	15.7
Carbon disulfide	16.1	7.5	Ethylene chloride	12.7	12.2
Carbon tetrachloride	12.7	13.1	Ethylene glycol	6.0	23.6
Chlorobenzene	12.3	12.4	Ethylidene chloride	14.1	8.7
Chloroform	14.4	10.2	Fluorobenzene	13.7	10.4
Chlorosulfonic acid	11.2	18.1	Formic acid	10.7	15.8
Chlorotoluene, ortho	13.0	13.3	Freon-11	14.4	9.0
Chlorotoluene, meta	13.3	12.5	Freon-12	16.8	15.6
Chlorotoluene, para	13.3	12.5	Freon-21	15.7	7.5
Cresol, meta	2.5	20.8	Freon-22	17.2	4.7

A.3-12 ویسکوزیته مایعات، (ادامه)

<i>Liquid</i>	X	Y	<i>Liquid</i>	X	Y
Freon-113	12.5	11.4	Octyl alcohol	6.6	21.1
Glycerol, 100%	2.0	30.0	Pentachloroethane	10.9	17.3
Glycerol, 50%	6.9	19.6	Pentane	14.9	5.2
Heptane	14.1	8.4	Phenol	6.9	20.8
Hexane	14.7	7.0	Phosphorus tribromide	13.8	16.7
Hydrochloric acid, 31.5%	13.0	16.6	Phosphorus trichloride	16.2	10.9
Iodobenzene	12.8	15.9	Propionic acid	12.8	13.8
Isobutyl alcohol	7.1	18.0	Propyl acetate	13.1	10.3
Isobutyric acid	12.2	14.4	Propyl alcohol	9.1	16.5
Isopropyl alcohol	8.2	16.0	Propyl bromide	14.5	9.6
Isopropyl bromide	14.1	9.2	Propyl chloride	14.4	7.5
Isopropyl chloride	13.9	7.1	Propyl formate	13.1	9.7
Isopropyl iodide	13.7	11.2	Propyl iodide	14.1	11.6
Kerosene	10.2	16.9	Sodium	16.4	13.9
Linseed oil, raw	7.5	27.2	Sodium hydroxide, 50%	3.2	25.8
Mercury	18.4	16.4	Stannic chloride	13.5	12.8
Methanol, 100%	12.4	10.5	Succinonitrile	10.1	20.8
Methanol, 90%	12.3	11.8	Sulfur dioxide	15.2	7.1
Methanol, 40%	7.8	15.5	Sulfuric acid, 110%	7.2	27.4
Methyl acetate	14.2	8.2	Sulfuric acid, 100%	8.0	25.1
Methyl acrylate	13.0	9.5	Sulfuric acid, 98%	7.0	24.8
Methyl <i>i</i> -butyrate	12.3	9.7	Sulfuric acid, 60%	10.2	21.3
Methyl <i>n</i> -butyrate	13.2	10.3	Sulfuryl chloride	15.2	12.4
Methyl chloride	15.0	3.8	Tetrachloroethane	11.9	15.7
Methyl ethyl ketone	13.9	8.6	Thiophene	13.2	11.0
Methyl formate	14.2	7.5	Titanium tetrachloride	14.4	12.3
Methyl iodide	14.3	9.3	Toluene	13.7	10.4
Methyl propionate	13.5	9.0	Trichloroethylene	14.8	10.5
Methyl propyl ketone	14.3	9.5	Triethylene glycol	4.7	24.8
Methyl sulfide	15.3	6.4	Turpentine	11.5	14.9
Naphthalene	7.9	18.1	Vinyl acetate	14.0	8.8
Nitric acid, 95%	12.8	13.8	Vinyl toluene	13.4	12.0
Nitric acid, 60%	10.8	17.0	Water	10.2	13.0
Nitrobenzene	10.6	16.2	Xylene, ortho	13.5	12.1
Nitrogen dioxide	12.9	8.6	Xylene, meta	13.9	10.6
Nitrotoluene	11.0	17.0	Xylene, para	13.9	10.9
Octane	13.7	10.0			



شکل 5-3.A: ظرفیت گرمایی مایعات

گرفته شده با کسب مجوز از:

A.3-13 ضریب هدایت گرمایی مایعات، $(k = W/m.K)^*$

Liquid	K	k	Liquid	K	k
Acetic acid			Ethylene glycol	273	0.265
100%	293	0.171	Glycerol, 100%	293	0.284
50%	293	0.346	n-Hexane	303	0.138
Ammonia	243-258	0.502		333	0.135
n-Amyl alcohol	303	0.163	Kerosene	293	0.149
	373	0.154		348	0.140
Benzene	303	0.159	Methyl alcohol		
	333	0.151	100%	293	0.215
Carbon tetrachloride	273	0.185	60%	293	0.329
	341	0.163	20%	293	0.492
n-Decane	303	0.147	100%	323	0.197
	333	0.144	n-Octane	303	0.144
Ethyl acetate	293	0.175		333	0.140
Ethyl alcohol			NaCl brine		
100%	293	0.182	25%	303	0.571
60%	293	0.305	12.5%	303	0.589
20%	293	0.486	Sulfuric acid		
100%	323	0.151	90%	303	0.364
			60%	303	0.433
			Vaseline	332	0.183

* A linear variation with temperature may be assumed between the temperature limits given.
Source: R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973. With permission.

A.3-14 ظرفیت گرمایی جامدات، ($c_p = \text{kJ/kg.K}$)

<i>Solid</i>	<i>K</i>	c_p	<i>Solid</i>	<i>K</i>	c_p
Alumina	373	0.84	Benzene	273	1.570
	1773	1.147	Benzoic acid	293	1.243
Asbestos		1.05	Camphene	308	1.591
Asphalt		0.92	Caprylic acid	271	2.629
Brick, fireclay	373	0.829	Dextrin	273	1.218
	1773	1.248	Formic acid	273	1.800
Cement, portland		0.779	Glycerol	273	1.382
Clay		0.938	Lactose	293	1.202
Concrete		0.63	Oxalic acid	323	1.612
Corkboard	303	0.167	Tartaric acid	309	1.202
Glass		0.84	Urea	293	1.340
Magnesia	373	0.980			
	1773	0.787			
Oak		2.39			
Pine, yellow	298	2.81			
Porcelain	293-373	0.775			
Rubber, vulcanized		2.01			
Steel		0.50			
Wool		1.361			

Source: R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973; National Research Council, *International Critical Tables*, Vol. V. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929; L. S. Marks, *Mechanical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951; F. Kreith, *Principles of Heat Transfer*, 2nd ed. Scranton, Pa.: International Textbook Co., 1965.

ضریب هدایت گرمایی مصالح ساختمانی و مواد عایقکاری A.3-15

Material	ρ ($\frac{kg}{m^3}$)	t^* ($^{\circ}C$)	$k(W/m \cdot K)$	
Asbestos	577		0.151 (0 $^{\circ}C$)	0.168 (37.8 $^{\circ}C$) 0.190 (93.3 $^{\circ}C$)
Asbestos sheets	889	51	0.166	
Brick, building		20	0.69	
Brick, fireclay			1.00 (200 $^{\circ}C$)	1.47 (600 $^{\circ}C$) 1.64 (1000 $^{\circ}C$)
Clay soil, 4% H ₂ O	1666	4.5	0.57	
Concrete, 1:4 dry			0.762	
Corkboard	160.2	30	0.0433	
Cotton	80.1		0.055 (0 $^{\circ}C$)	0.061 (37.8 $^{\circ}C$) 0.068 (93.3 $^{\circ}C$)
Felt, wool	330	30	0.052	
Fiber insulation board	237	21	0.048	
Glass, window			0.52-1.06	
Glass wool	64.1	30	0.0310 (-6.7 $^{\circ}C$)	0.0414 (37.8 $^{\circ}C$) 0.0549 (93.3 $^{\circ}C$)
Ice	921	0	2.25	
Magnesia, 85%	271		0.068 (37.8 $^{\circ}C$)	0.071 (93.3 $^{\circ}C$) 0.080 (204.4 $^{\circ}C$)
	208		0.059 (37.8 $^{\circ}C$)	0.062 (93.3 $^{\circ}C$) 0.066 (148.9 $^{\circ}C$)
Oak, across grain	825	15	0.208	
Pine, across grain	545	15	0.151	
Paper			0.130	
Rock wool	192		0.0317 (-6.7 $^{\circ}C$)	0.0391 (37.8 $^{\circ}C$) 0.0486 (93.3 $^{\circ}C$)
	128		0.0296 (-6.7 $^{\circ}C$)	0.0395 (37.8 $^{\circ}C$) 0.0518 (93.3 $^{\circ}C$)
Rubber, hard	1198	0	0.151	
Sand soil				
4% H ₂ O	1826	4.5	1.51	
10% H ₂ O	1922	4.5	2.16	
Sandstone	2243	40	1.83	
Snow	559	0	0.47	
Wool	110.5	30	0.036	

* Room temperature when none is noted.

Source: L. S. Marks, *Mechanical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951; W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954; F. H. Norton, *Refractories*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1949; National Research Council, *International Critical Tables*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929; M. S. Kersten, *Univ. Minn. Eng. Ex. Sta., Bull.* 28, June 1949; R. H. Heilman, *Ind. Eng. Chem.*, 28, 782 (1936).

A.3-16 ضریب هدایت گرمایی، دانسیته و ظرفیت گرمایی فلزات

Material	t (°C)	ρ $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	c_p $\left(\frac{kJ}{kg \cdot K}\right)$	$k(W/m \cdot K)$	
Aluminum	20	2707	0.896	202 (0°C) 230 (300°C)	206 (100°C) 215 (200°C)
Brass (70-30)	20	8522	0.385	97 (0°C)	104 (100°C) 109 (200°C)
Cast iron	20	7593	0.465	55 (0°C)	52 (100°C) 48 (200°C)
Copper	20	8954	0.383	388 (0°C)	377 (100°C) 372 (200°C)
Lead	20	11 370	0.130	35 (0°C)	33 (100°C) 31 (200°C)
Steel 1%C	20	7801	0.473	45.3 (18°C) 43 (300°C)	45 (100°C) 45 (200°C)
308 stainless	20	7849	0.461	15.2 (100°C)	21.6 (500°C)
304 stainless	0	7817	0.461	13.8 (0°C)	16.3 (100°C) 18.9 (300°C)
Tin	20	7304	0.227	62 (0°C)	59 (100°C) 57 (200°C)

Source: L. S. Marks, *Mechanical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951; E. R. G. Eckert and R. M. Drake, *Heat and Mass Transfer*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959; R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973; National Research Council, *International Critical Tables*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929.

A.3-17 ضریب نشر کلی سطوح

Surface	K	ϵ	Surface	K	ϵ
Aluminum			Lead, unoxidized	400	0.057
highly oxidized	366	0.20	Nickel, polished	373	0.072
highly polished	500	0.039	Nickel oxide	922	0.59
	850	0.057	Oak, planed	294	0.90
Aluminum oxide	550	0.63	Paint		
Asbestos board	296	0.96	aluminum	373	0.52
Brass, highly	520	0.028	oil (16 different,		
polished	630	0.031	all colors)	373	0.92-0.96
Chromium,			Paper	292	0.924
polished	373	0.075	Roofing paper	294	0.91
Copper			Rubber (hard, glossy)	296	0.94
oxidized	298	0.78	Steel		
polished	390	0.023	oxidized at 867 K	472	0.79
Glass, smooth	295	0.94	polished stainless	373	0.074
Iron			304 stainless	489	0.44
oxidized	373	0.74	Water	273	0.95
tin-plated	373	0.07		373	0.963
Iron oxide	772	0.85			

Source: R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973; W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954; E. Schmidt, *Gesundh.-Ing. Beheft*, 28, Reihe 1, 1 (1927).

A.3-18 ثابت قانون هنری برای گازها در آب ($H \times 10^{-6}$)

T°											
K	$^{\circ}\text{C}$	CO_2	CO	C_2H_6	C_2H_4	He	H_2	H_2S	CH_4	N_2	O_2
273.2	0	0.0728	3.52	1.26	0.552	12.9	5.79	0.0268	2.24	5.29	2.55
283.2	10	0.104	4.42	1.89	0.768	12.6	6.36	0.0367	2.97	6.68	3.27
293.2	20	0.142	5.36	2.63	1.02	12.5	6.83	0.0483	3.76	8.04	4.01
303.2	30	0.186	6.20	3.42	1.27	12.4	7.29	0.0609	4.49	9.24	4.75
313.2	40	0.233	6.96	4.23		12.1	7.51	0.0745	5.20	10.4	5.35

* $p_A = Hx_A$, p_A = partial pressure of A in gas in atm, x_A = mole fraction of A in liquid, H = Henry's law constant in atm/mole frac.

Source: National Research Council, *International Critical Tables*, Vol. III. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929.

اطلاعات تعادلی برای سیستم آب - SO_۲ A.3-19

Mole Fraction SO ₂ in Liquid, x _A	Partial Pressure of SO ₂ in Vapor, p _A (mm Hg)		Mole Fraction SO ₂ in Vapor, y _A ; P = 1 Atm	
	20°C (293 K)	30°C (303 K)	20°C	30°C
	0	0	0	0
0.0000562	0.5	0.6	0.000658	0.000790
0.0001403	1.2	1.7	0.00158	0.00223
0.000280	3.2	4.7	0.00421	0.00619
0.000422	5.8	8.1	0.00763	0.01065
0.000564	8.5	11.8	0.01120	0.0155
0.000842	14.1	19.7	0.01855	0.0259
0.001403	26.0	36	0.0342	0.0473
0.001965	39.0	52	0.0513	0.0685
0.00279	59	79	0.0775	0.1040
0.00420	92	125	0.121	0.1645
0.00698	161	216	0.212	0.284
0.01385	336	452	0.443	0.594
0.0206	517	688	0.682	0.905
0.0273	698		0.917	

Source: T. K. Sherwood, *Ind. Eng. Chem.*, 17, 745 (1925).

اطلاعات تعادلی برای سیستم آب - متانول A.3-20

Mole Fraction Methanol in Liquid, x _A	Partial Pressure of Methanol in Vapor, p _A (mm Hg)	
	39.9°C (313.1 K)	59.4°C (332.6K)
0	0	0
0.05	25.0	50
0.10	46.0	102
0.15	66.5	151

Source: National Research Council, *International Critical Tables*, Vol. III. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929.

A.3-21 اطلاعات تعادلی برای سیستم آب - استون
 در 20°C (293 K)

Mole Fraction Acetone in Liquid, x_A	Partial Pressure of Acetone in Vapor, p_A (mm Hg)
0	0
0.0333	30.0
0.0720	62.8
0.117	85.4
0.171	103

Source: T. K. Sherwood, *Absorption and Extraction*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1937. With permission.

A.3-22 اطلاعات تعادلی برای سیستم آب - آمونیاک

Mole Fraction NH_3 in Liquid, x_A	Partial Pressure of NH_3 in Vapor, p_A (mm Hg)		Mole Fraction NH_3 in Vapor, y_A ; $P = 1$ Atm	
	20°C (293 K)	30°C (303 K)	20°C	30°C
0	0	0	0	0
0.0126		11.5		0.0151
0.0167		15.3		0.0201
0.0208	12	19.3	0.0158	0.0254
0.0258	15	24.4	0.0197	0.0321
0.0309	18.2	29.6	0.0239	0.0390
0.0405	24.9	40.1	0.0328	0.0527
0.0503	31.7	51.0	0.0416	0.0671
0.0737	50.0	79.7	0.0657	0.105
0.0960	69.6	110	0.0915	0.145
0.137	114	179	0.150	0.235
0.175	166	260	0.218	0.342
0.210	227	352	0.298	0.463
0.241	298	454	0.392	0.597
0.297	470	719	0.618	0.945

Source: J. H. Perry, *Chemical Engineers' Handbook*, 4th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1963. With permission.

اطلاعات تبادلی برای سیستم آب-اتنول در ۱۰۱/۳۲۵ kPa (یک اتمسفر) A-3-23

Temperature		Vapor-Liquid Equilibria, Mass Fraction Ethanol		Temperature		Vapor-Liquid Equilibria, Mass Fraction Ethanol		Temperature		Enthalpy (Btu/lb _m of mixture)		Enthalpy (kJ/kg of mixture)		
°C	°F	x _A	y _A	°C	°F	x _A	y _A	°C	°F	Mass Fraction	Liquid	Vapor	Liquid	Vapor
100.0	212	0	0	81.0	177.8	0.600	0.794	100.0	212	0	180.1	1150	418.9	2675
98.1	208.5	0.020	0.192	80.1	176.2	0.700	0.822	91.8	197.2	0.1	159.8	1082	371.7	2517
95.2	203.4	0.050	0.377	79.1	174.3	0.800	0.858	84.7	184.5	0.3	135.0	943	314.0	2193
91.8	197.2	0.100	0.527	78.3	173.0	0.900	0.912	82.0	179.6	0.5	122.9	804	285.9	1870
87.3	189.2	0.200	0.656	78.2	172.8	0.940	0.942	80.1	176.2	0.7	111.1	664	258.4	1544
84.7	184.5	0.300	0.713	78.1	172.7	0.960	0.959	78.3	173.0	0.9	96.6	526	224.7	1223
83.2	181.7	0.400	0.746	78.2	172.8	0.980	0.978	78.3	173.0	1.0	89.0	457.5	207.0	1064
82.0	179.6	0.500	0.771	78.3	173.0	1.00	1.00							

* Reference state for enthalpy is pure liquid at 273 K or 0°C.
 Source: Data from L. W. Cornell and R. E. Montonna, *Ind. Eng. Chem.*, **25**, 1331 (1933); and W. A. Noyes and R. R. Warfel, *J. Am. Chem. Soc.*, **23**, 463 (1901), as given by G. G. Brown, *Unit Operations*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1950. With permission.

A.3-24 سیستم اسید استیک - آب - ایزوپروپیل اتر،

تبادل مایع - مایع در 20°C (293 K)

Water Layer (wt %)			Isopropyl Ether Layer (wt %)		
Acetic Acid	Water	Isopropyl Ether	Acetic Acid	Water	Isopropyl Ether
0	98.8	1.2	0	0.6	99.4
0.69	98.1	1.2	0.18	0.5	99.3
1.41	97.1	1.5	0.37	0.7	98.9
2.89	95.5	1.6	0.79	0.8	98.4
6.42	91.7	1.9	1.93	1.0	97.1
13.30	84.4	2.3	4.82	1.9	93.3
25.50	71.1	3.4	11.40	3.9	84.7
36.70	58.9	4.4	21.60	6.9	71.5
44.30	45.1	10.6	31.10	10.8	58.1
46.40	37.1	16.5	36.20	15.1	48.7

Source: *Trans. A.I.Ch.E.*, 36, 601, 628 (1940). With permission.

A.3-25 اطلاعات تعادلی مایع - مایع برای سیستم

استن - آب - متیل ایزوبوتیل کتون (MIK)

در $25-26^{\circ}\text{C}$ یا $298-299\text{ K}$

Composition Data (wt %)			Acetone Distribution Data (wt %)	
MIK	Acetone	Water	Water Phase	MIK Phase
98.0	0	2.00	2.5	4.5
93.2	4.6	2.33	5.5	10.0
77.3	18.95	3.86	7.5	13.5
71.0	24.4	4.66	10.0	17.5
65.5	28.9	5.53	12.5	21.3
54.7	37.6	7.82	15.5	25.5
46.2	43.2	10.7	17.5	28.2
12.4	42.7	45.0	20.0	31.2
5.01	30.9	64.2	22.5	34.0
3.23	20.9	75.8	25.0	36.5
2.12	3.73	94.2	26.0	37.5
2.20	0	97.8		

Source: Reprinted with permission from D. F. Othmer, R. E. White, and E. Trueger, *Ind. Eng. Chem.*, 33, 1240 (1941). Copyright by the American Chemical Society.

A.4 ضمیمه

خواص فیزیکی مواد غذایی و بیولوژیکی

A.4-1 ظرفیت گرمایی مواد غذایی

(c_p میانگین در ۲۷۳-۳۷۳ K یا ۰-۱۰۰ °C)

Material	H ₂ O (wt %)	c_p (kJ/kg·K)
Apples	75-85	3.73-4.02
Apple sauce		4.02*
Asparagus		
Fresh	93	3.94†
Frozen	93	2.01‡
Bacon, lean	51	3.43
Banana purée		3.66§
Beef, lean	72	3.43
Bread, white	44-45	2.72-2.85
Butter	15	2.30¶
Cantaloupe	92.7	3.94†
Cheese, Swiss	55	2.68†
Corn, sweet		
Fresh		3.32†
Frozen		1.77‡
Cream, 45-60% fat	57-73	3.06-3.27
Cucumber	97	4.10
Eggs		
Fresh		3.18†
Frozen		1.68‡
Fish, cod		
Fresh	70	3.18
Frozen	70	1.72‡
Flour	12-13.5	1.80-1.88
Ice	100	1.958

A.4-1
(ادامه)

Material	H ₂ O (wt %)	c _p (kJ/kg·K)
Ice cream		
Fresh	58-66	3.27†
Frozen	58-66	1.88‡
Lamb	70	3.18*
Macaroni	12.5-13.5	1.84-1.88
Milk, cows'		
Whole	87.5	3.85
Skim	91	3.98-4.02
Olive oil		2.01**
Oranges		
Fresh	87.2	3.77†
Frozen	87.2	1.93‡
Peas, air-dried	14	1.84
Peas, green		
Fresh	74.3	3.31†
Frozen	74.3	1.76‡
Pea soup		4.10
Plums	75-78	3.52
Pork		
Fresh	60	2.85†
Frozen	60	1.34‡
Potatoes	75	3.52
Poultry		
Fresh	74	3.31†
Frozen	74	1.55‡
Sausage, franks		
Fresh	60	3.60†
Frozen	60	2.35‡
String beans		
Fresh	88.9	3.81†
Frozen	88.9	1.97‡
Tomatoes	95	3.98†
Veal	63	3.22
Water	100	4.185**

* 32.8°C.

† Above freezing.

‡ Below freezing.

§ 24.4°C.

¶ 4.4°C.

|| -20°C.

** 20°C.

Source: W. O. Ordianz, *Food Ind.*, 18, 101 (1946); G. A. Reidy, Department of Food Science, Michigan State University, 1968; S. E. Charm, *The Fundamentals of Food Engineering*, 2nd ed. Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971; R. L. Earle, *Unit Operations in Food Processing*. Oxford: Pergamon Press, Inc., 1966; ASHRAE, *Handbook of Fundamentals*. New York: ASHRAE, 1972, 1967; H. C. Mannheim, M. P. Steinberg, and A. I. Nelson, *Food Technol.*, 9, 556 (1955).

A.4-2 ضرایب هدایت گرمایی، دانسیته، و ویسکوزیته مواد غذایی

Material	H ₂ O (wt %)	Temp- erature (K)	k (W/m·K)	ρ (kg/m ³)	μ [(Pa·s)10 ³ , or cp]
Apple sauce		295.7	0.692		
Butter	15	277.6	0.197	998	
Cantaloupe			0.571		
Fish					
Fresh		273.2	0.431		
Frozen		263.2	1.22		
Flour, wheat	8.8		0.450		
Honey	12.6	275.4	0.50		
Ice	100	273.2	2.25		
	100	253.2	2.42		
Lamb	71	278.8	0.415		
Milk					
Whole		293.2		1030	2.12
Skim		274.7	0.538		
		298.2		1041	1.4
Oil					
Cod liver		298.2		924	
Corn		288.2		921	
Olive		293.2	0.168	919	84
Peanut		277.1	0.168		
Soybean		303.2		919	40
Oranges	61.2	303.5	0.431		
Pears		281.9	0.595		
Pork, lean					
Fresh	74	275.4	0.460		
Frozen		258.2	1.109		
Potatoes					
Raw			0.554		
Frozen		260.4	1.09	977	
Salmon					
Fresh	67	277.1	0.50		
Frozen	67	248.2	1.30		
Sucrose solution	80	294.3		1073	1.92
Turkey					
Fresh	74	276.0	0.502		
Frozen		248.2	1.675		
Veal					
Fresh	75	335.4	0.485		
Frozen	75	263.6	1.30		
Water	100	293.2	0.602		
	100	273.2	0.569		

Source: R. C. Weast, *Handbook of Chemistry and Physics*, 48th ed. Cleveland: Chemical Rubber Co., Inc., 1967; C. P. Lentz, *Food Technol.*, 15, 243 (1961); G. A. Reidy, Department of Food Science, Michigan State University, 1968; S. E. Charm, *The Fundamentals of Food Engineering*, 2nd ed. Westport, Conn.: Avi Publishing Co., Inc., 1971; R. Earle, *Unit Operations in Food Processing*, Oxford: Pergamon Press, 1966; R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973; V. E. Sweat, *J. Food Sci.*, 39, 1080 (1974).

ضمیمه A.5

خواص لوله‌ها و صفحات مشبک

A.5-1 ابعاد لوله‌های فولادی استاندارد

Nominal Pipe Size (in.)	Outside Diameter		Sched- ule Number	Wall Thickness		Inside Diameter		Inside Cross- Sectional Area	
	in.	mm		in.	mm	in.	mm	ft ²	m ² × 10 ⁴
⅜	0.405	10.29	40	0.068	1.73	0.269	6.83	0.00040	0.3664
			80	0.095	2.41	0.215	5.46	0.00025	0.2341
½	0.540	13.72	40	0.088	2.24	0.364	9.25	0.00072	0.6720
			80	0.119	3.02	0.302	7.67	0.00050	0.4620
¾	0.675	17.15	40	0.091	2.31	0.493	12.52	0.00133	1.231
			80	0.126	3.20	0.423	10.74	0.00098	0.9059
1	0.840	21.34	40	0.109	2.77	0.622	15.80	0.00211	1.961
			80	0.147	3.73	0.546	13.87	0.00163	1.511
1¼	1.050	26.67	40	0.113	2.87	0.824	20.93	0.00371	3.441
			80	0.154	3.91	0.742	18.85	0.00300	2.791
1½	1.315	33.40	40	0.133	3.38	1.049	26.64	0.00600	5.574
			80	0.179	4.45	0.957	24.31	0.00499	4.641
1¾	1.660	42.16	40	0.140	3.56	1.380	35.05	0.01040	9.648
			80	0.191	4.85	1.278	32.46	0.00891	8.275
2	1.900	48.26	40	0.145	3.68	1.610	40.89	0.01414	13.13
			80	0.200	5.08	1.500	38.10	0.01225	11.40
2½	2.375	60.33	40	0.154	3.91	2.067	52.50	0.02330	21.65
			80	0.218	5.54	1.939	49.25	0.02050	19.05
3	2.875	73.03	40	0.203	5.16	2.469	62.71	0.03322	30.89
			80	0.276	7.01	2.323	59.00	0.02942	27.30
3½	3.500	88.90	40	0.216	5.49	3.068	77.92	0.05130	47.69
			80	0.300	7.62	2.900	73.66	0.04587	42.61
4	4.000	101.6	40	0.226	5.74	3.548	90.12	0.06870	63.79
			80	0.318	8.08	3.364	85.45	0.06170	57.35
5	4.500	114.3	40	0.237	6.02	4.026	102.3	0.08840	82.19
			80	0.337	8.56	3.826	97.18	0.07986	74.17
6	5.563	141.3	40	0.258	6.55	5.047	128.2	0.1390	129.1
			80	0.375	9.53	4.813	122.3	0.1263	117.5
8	6.625	168.3	40	0.280	7.11	6.065	154.1	0.2006	186.5
			80	0.432	10.97	5.761	146.3	0.1810	168.1
8	8.625	219.1	40	0.322	8.18	7.981	202.7	0.3474	322.7
			80	0.500	12.70	7.625	193.7	0.3171	294.7

ابعاد لوله‌های میدلهای حرارتی A.5-2

Outside Diameter		BWG Number	Wall Thickness		Inside Diameter		Inside Cross-Sectional Area	
in.	mm		in.	mm	in.	mm	ft ²	m ² × 10 ⁴
$\frac{5}{8}$	15.88	12	0.109	2.77	0.407	10.33	0.000903	0.8381
		14	0.083	2.11	0.459	11.66	0.00115	1.068
		16	0.065	1.65	0.495	12.57	0.00134	1.241
		18	0.049	1.25	0.527	13.39	0.00151	1.408
$\frac{3}{4}$	19.05	12	0.109	2.77	0.532	13.51	0.00154	1.434
		14	0.083	2.11	0.584	14.83	0.00186	1.727
		16	0.065	1.65	0.620	15.75	0.00210	1.948
		18	0.049	1.25	0.652	16.56	0.00232	2.154
$\frac{7}{8}$	22.23	12	0.109	2.77	0.657	16.69	0.00235	2.188
		14	0.083	2.11	0.709	18.01	0.00274	2.548
		16	0.065	1.65	0.745	18.92	0.00303	2.811
		18	0.049	1.25	0.777	19.74	0.00329	3.060
1	25.40	10	0.134	3.40	0.732	18.59	0.00292	2.714
		12	0.109	2.77	0.782	19.86	0.00334	3.098
		14	0.083	2.11	0.834	21.18	0.00379	3.523
		16	0.065	1.65	0.870	22.10	0.00413	3.836
$1\frac{1}{4}$	31.75	10	0.134	3.40	0.982	24.94	0.00526	4.885
		12	0.109	2.77	1.032	26.21	0.00581	5.395
		14	0.083	2.11	1.084	27.53	0.00641	5.953
		16	0.065	1.65	1.120	28.45	0.00684	6.357
$1\frac{1}{2}$	38.10	10	0.134	3.40	1.232	31.29	0.00828	7.690
		12	0.109	2.77	1.282	32.56	0.00896	8.326
		14	0.083	2.11	1.334	33.88	0.00971	9.015
2	50.80	10	0.134	3.40	1.732	43.99	0.0164	15.20
		12	0.109	2.77	1.782	45.26	0.0173	16.09

مقیاس تیلور برای صفحات مشبک استاندارد A.5-3

Sieve Opening		Nominal Wire Diameter		Tyler Equivalent Designation
mm	in. (approx. equivalents)	mm	in. (approx. equivalents)	
26.9	1.06	3.90	0.1535	1.050 in.
25.4	1.00	3.80	0.1496	
22.6	0.875	3.50	0.1378	0.883 in.
19.0	0.750	3.30	0.1299	0.742 in.
16.0	0.625	3.00	0.1181	0.624 in.
13.5	0.530	2.75	0.1083	0.525 in.
12.7	0.500	2.67	0.1051	
11.2	0.438	2.45	0.0965	0.441 in.
9.51	0.375	2.27	0.0894	0.371 in.
8.00	0.312	2.07	0.0815	2½ mesh
6.73	0.265	1.87	0.0736	3 mesh
6.35	0.250	1.82	0.0717	
5.66	0.223	1.68	0.0661	3½ mesh
4.76	0.187	1.54	0.0606	4 mesh
4.00	0.157	1.37	0.0539	5 mesh
3.36	0.132	1.23	0.0484	6 mesh
2.83	0.111	1.10	0.0430	7 mesh
2.38	0.0937	1.00	0.0394	8 mesh
2.00	0.0787	0.900	0.0354	9 mesh
1.68	0.0661	0.810	0.0319	10 mesh
1.41	0.0555	0.725	0.0285	12 mesh
1.19	0.0469	0.650	0.0256	14 mesh
1.00	0.0394	0.580	0.0228	16 mesh
0.841	0.0331	0.510	0.0201	20 mesh
0.707	0.0278	0.450	0.0177	24 mesh
0.595	0.0234	0.390	0.0154	28 mesh
0.500	0.0197	0.340	0.0134	32 mesh
0.420	0.0165	0.290	0.0114	35 mesh
0.354	0.0139	0.247	0.0097	42 mesh
0.297	0.0117	0.215	0.0085	48 mesh
0.250	0.0098	0.180	0.0071	60 mesh
0.210	0.0083	0.152	0.0060	65 mesh
0.177	0.0070	0.131	0.0052	80 mesh
0.149	0.0059	0.110	0.0043	100 mesh
0.125	0.0049	0.091	0.0036	115 mesh
0.105	0.0041	0.076	0.0030	150 mesh
0.088	0.0035	0.064	0.0025	170 mesh
0.074	0.0029	0.053	0.0021	200 mesh
0.063	0.0025	0.044	0.0017	250 mesh
0.053	0.0021	0.037	0.0015	270 mesh
0.044	0.0017	0.030	0.0012	325 mesh
0.037	0.0015	0.025	0.0010	400 mesh

علايم

ابتدا واحدهای SI نوشته شده است و واحدهای انگلیسی یا cgs نیز در پرانتز هستند.

شعاع ذره، m (ft)	a
مساحت، m^2 (ft ²)، همچنین نسبت سطح (m^2) به حجم بستر یا آکنه‌ها (m^3) (ft ³ /ft ²)	a
شتاب حاصل از نیروی گریز از مرکز، m/s^2 (ft/s ²)	a _e
سطح مفید مخصوص ذره، m^{-1} (ft ⁻¹)	a _v
سطح مقطع، m^2 (cm ² , ft ²) همچنین مساحت، m^2 (ft ²)	A
ضریب جذب = L/mV ، بدون بُعد، همچنین سطح فیلتر، m^2 (ft ²)	A
سطح غشاء، m^2 (cm ² , ft ²)	A _m
ثابت نفوذپذیری حلال، $kg/s \cdot m^2 \cdot atm$	A _w
ثابت نفوذ پذیری حل شونده، m/s (ft/h)	A _s
طول، m (cm, ft)	b
شدت جریان جامد خشک، kg/h (lb _m /h)، همچنین ثابت فیلتراسیون، s/m^2 (s/ft ²)	B
خاصیت فیزیکی غشاء، atm^{-1}	B
غلظت، kg/m^3 ، $kgmol/m^3$ (lb _m /ft ³)، $gmol/cm^3$	c

غلظت ماده جذب شده در سیال، kg/m^3 (lb_m/ft^3)	c
غلظت A ، kgmol/m^3 (lbmol/ft^3)، gmol/cm^3	c_A
غلظت نهایی، kg/m^3 (lb_m/ft^3)	c_b
غلظت حل شونده در ژل، $\text{kg solute}/\text{m}^3$ (lb_m/ft^3)، g/cm^3	c_g
غلظت حل شونده در سطح غشاء، $\text{kg solute}/\text{m}^2$ (lb_m/ft^2)، g/cm^2	c_s
غلظت A در جامد، kgmol/m^3 (lb_m/ft^3)، gmol/cm^3	c_S
غلظت جامدات در محلول دوغاب، kg/m^3 (lb_m/ft^3)	c_s
گرمای مرطوب، $\text{kJ}/\text{kg dry air.K}$ ($\text{btu}/\text{lb}_m \text{ dry air.}^\circ\text{F}$)	c_S
غلظت جامدات در محلول دوغاب، کسر جرمی	c_x
ظرفیت گرمایی در فشار ثابت، $\text{kJ}/\text{kg.K}$ ، $\text{J}/\text{kg.K}$ ، $\text{kJ}/\text{kgmol.K}$	c_p
($\text{cal}/\text{g.}^\circ\text{C}$ ، $\text{btu}/\text{lb}_m.^\circ\text{F}$)	
غلظت متوسط حلال در غشاء، kg/m^3 (lb_m/ft^3)	\bar{c}_w
انحراف غلظت از غلظت متوسط \bar{c}_A ، kgmol/m^3	c'_A
غلظت P ، kgmol/m^3	c_P
ظرفیت گرمایی در حجم ثابت، $\text{J}/\text{kg.K}$	c_v
ثابت فیلتراسیون، N/m^2 (lb_f/ft^2)، همچنین تعداد اجزاء	C
ظرفیت گرمایی سیال، W/K ($\text{btu}/\text{h.}^\circ\text{F}$)	C
ارتفاع پایین همزن از کف مخزن، m (ft)	C
ضریب لوله پیتوت، بدون بُعد	C_p
ضریب دراگ، بدون بُعد	C_D
ضریب اریفیس، ضریب ونتوری، بدون بُعد	C_v ، C_o
ضریب نفوذ مولکولی، m^2/s (cm^2/s ، ft^2/h) همچنین قطر، m (ft)	D
زمان احیاء دهدهی، min همچنین شدت جریان محصول بالای برج	D
تقطیر، kg/h ، kgmol/h (lb_m/h)	
ضریب نفوذ مولکولی، m^2/s (cm^2/s ، ft^2/h)	D_{AB}
قطر ذره، m (ft)	D_p
ضریب نفوذ نودسن، m^2/s (cm^2/s ، ft^2/h)	D_{KA}
ضریب نفوذ ناحیه گذرا، m^2/s (cm^2/s ، ft^2/h)	D_{NA}

ضریب نفوذ مؤثر، m^2/s ، $(cm^2/s, ft^2/h)$	$D_{A\text{ eff}}$
قطر میانگین مؤثر برای مخلوط، m ، (ft)	$D_{p,m}$
قطر همزن، m ، (ft)	D_a
قطر مخزن، m ، (ft)	D_t
قطر بحرانی، m ، (ft)	D_{pc}
ضریب نفوذ A در محلول پروتئین، m^2/s	D_{AP}
انرژی فعالیت، $J/kgmol$ ، $(cal/gmol)$	E
انرژی لازم برای کوچک کردن اندازه، $kW.h/ton$ ، همچنین راندمان سینی، بدون بُعد	E
انرژی کل، J/kg ، $(ft.lbf/lb_m)$	E
جزء تغییر نیافته، بدون بُعد	E
انرژی تابشی منتشر شده، W/m^2 ، $(btu/h.ft^2)$	E
ضریب پراکندگی محوری، m^2/s ، (ft^2/h)	E
توان انتشار تکرنگ، W/m^2 ، $(btu/h.ft^2)$	$E_{B\lambda}$
جزء تبخیر شده خوراکی، همچنین کسر سیکل، بدون بُعد	f
ضریب اصطکاک فیننگ، بدون بُعد	f
پارامتر اختلاط، بدون بُعد	f_t
تعداد درجات آزادی	F
اُفت اصطکاکی، J/kg ، $(ft.lbf/lb_m)$	F
شدت جریان، kg/h ، (lb_m/h)	F
نیرو، N ، (dyn, lb_f)	F
ضریب تصحیح اختلاف دما، بدون بُعد	F_T
مدت زمان فرآیند در $1^\circ C$ یا $1^\circ F$ ، $(25^\circ F)$ ، min	F_o
ضریب دید هندسی برای اجسام خاکستری، بدون بُعد	F_{ν}
ضریب دید هندسی، بدون بُعد	F_{ν}
شتاب ثقل استاندارد (ضمیمه A.1 را ببینید)	g
ضریب تبدیل ثقلی (ضمیمه A.1 را ببینید)	g_c
سرعت جرمی، $kg/s.m^2$ ، $(lb_m/h.ft^2)$ ، $\nu\rho$	G

ثابت رشد، mm/h	G
سرعت جرمی = $v'\rho$ ، kg/s.m^2 ، kg/h.m^2 ، $(\text{lb}_m/\text{h.ft}^2)$	G'
بازتابش روی یک جسم، W/m^2 ، (btu/h.ft^2)	G
فاصله ثابت در جهت x در روش سیمپسون	h
هد، J/kg ، $(\text{ft.lb}_p/\text{lb}_m)$ ، همچنین ارتفاع سیال، m (ft)	h
ضریب انتقال حرارت، $\text{W/m}^2.\text{K}$ ، $(\text{btu/h.ft}^2.\text{°F})$	h
انتالپی مایع، J/kg ، kJ/kg ، (btu/lb_m)	h
گرمای نهان تبخیر، J/kg ، kJ/kg ، (btu/lb_m)	h_{fg}
ضریب مقاومت تماس، $\text{W/m}^2.\text{K}$ ، $(\text{btu/h.ft}^2.\text{°F})$	h_c
فاصله، m (ft)	H
ثابت قانون هنری، atm/mol frac	H
هد، J/kg ، $(\text{ft.lb}_p/\text{lb}_m)$ ، همچنین ارتفاع سیال، m (ft)	H
انتالپی، kJ/kg ، kJ/kgmol ، (btu/lb_m) ، همچنین انتالپی، kJ/kg dry air	H
$(\text{btu/lb}_m \text{ dry air})$	
رطوبت، $\text{kg water vapor/kg dry air}$ ، $(\text{lb}_m \text{ water vapor/lb}_m \text{ dry air})$	H
انتالپی بخار، J/kg ، kJ/kg ، (btu/lb_m)	H
نسبت تعادلی، $\text{kgmol/m}^3.\text{atm}$	H
طول بستر، m (ft)، همچنین طول مؤثر میله، m (ft)	H
انتالپی، kJ/kg dry solid ، (btu/lb_m) ، همچنین انتالپی، kJ/kg dry air	H'
$(\text{btu/lb}_m \text{ dry air})$	
طول بستر بکار برده شده تا نقطه شکست، m (ft)	H_B
ارتفاع واحد انتقال، m (ft)	H_G, H_L
ارتفاع واحد انتقال، m (ft)	H_{OG}, H_{OL}
درصد رطوبت، درصد رطوبت نسبی (به ترتیب)	H_R, H_P
طول کل بستر، m (ft)	H_T
طول استفاده نشده بستر، m (ft)	H_{UNB}
بردار واحد در جهت محور x	i
شدت اغتشاش، بدون بُعد، همچنین جریان، amp	I

شدت تابش جسم سیاه، $(\text{btu}/\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot\text{sr}) \text{ W}/\text{m}^2\cdot\text{sr}$	I_B
شدت تابش، $(\text{btu}/\text{h}\cdot\text{ft}^2) \text{ W}/\text{m}^2$	I_λ
بردار واحد در جهت محور y	j
عرض بافل، $(\text{ft}) \text{ m}$	J
شار جرمی A نسبت به سرعت میانگین جرمی $\text{kg}/\text{s}\cdot\text{m}^2$	J_A
شار جرمی A نسبت به سرعت میانگین مولی $\text{kg}/\text{s}\cdot\text{m}^2$	J_A^*
شار جرمی A نسبت به سرعت میانگین جرمی $\text{kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^2$	J_A
بردار شار مولی A نسبت به سرعت میانگین مولی $\text{kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^2$	J_A^*
$(\text{gmol}/\text{s}\cdot\text{cm}^2, \text{lbmol}/\text{h}\cdot\text{ft}^2)$	
پارامترهای انتقال جرم و انتقال حرارت، بدون بُعد	J_H, J_D
بردار واحد در جهت محور z	k
ثابت سرعت واکنش، $\text{s}^{-1}, \text{min}^{-1}, \text{h}^{-1}$	k', k
ضریب هدایت گرمایی، $(\text{btu}/\text{h}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}) \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$	k
ثابت سرعت واکنش درجه اول غیر همگن، $(\text{cm}/\text{s}) \text{ m}/\text{s}$	k'_1
ضریب انتقال جرم، $\text{kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{conc diff}$	$\dots, k_x, k_G, k_c, k'_c$
$(\text{gmol}/\text{s}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{conc diff}, \text{lbmol}/\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot\text{conc diff})$	
$(\text{lbmol}/\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot\text{atm}) \text{ kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{atm}, \text{ kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{Pa}$	
(جدول ۱-۲-۷ را ببینید)	
ضریب انتقال جرم، $(\text{cm}/\text{s}, \text{ft}/\text{h}) \text{ m}/\text{s}$	k_c
ضریب انتقال جرم حجمی، $\text{kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^3\cdot\text{conc diff}$	$\dots, k_y, a, k_x, a, k_G, a$
$\text{kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^3\cdot\text{Pa}, (\text{gmol}/\text{s}\cdot\text{cm}^3\cdot\text{conc diff}, \text{lbmol}/\text{h}\cdot\text{ft}^3\cdot\text{conc diff})$	
ضریب واکنش سطحی، $\text{kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{molfrac}$	k_s
ثابت‌های دیواره، بدون بُعد	k'_w, k_w
ضریب کلی انتقال جرم، $(\text{lbmol}/\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot\text{molfrac}) \text{ kgmol}/\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{molfrac}$	k'_x, K'_y
$(\text{gmol}/\text{s}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{molfrac})$	
شاخص یکنواختی، $(\text{lb}_m\cdot\text{s}^n/\text{ft}^n) \text{ N}\cdot\text{s}^n/\text{m}^n$	K
ثابت معادله (۳۹-۱-۳)، $(\text{ft}/\text{s}) \text{ m}/\text{s}$	K_1
ضریب توزیع تعادلی، بدون بُعد	K_s, K'

شاخص یکنواختی، $(\text{lb}_m \text{s}^{n'} / \text{ft}^v) \text{N} \cdot \text{s}^{n'} / \text{m}^v$	K'
ضریب توزیع تعادلی، بدون بُعد	K
ثابت فیلتراسیون، $(\text{s}/\text{ft}^v) \text{s}/\text{m}^v$	K_p
ثابت فیلتراسیون، $(\text{lb}_m / \text{ft}^5) \text{N}/\text{m}^5$	K_V
ضریب افت اصطکاکی مربوط به انقباض، انبساط و اتصال، بدون بُعد	K_f, K_{ex}, K_c
طول، $(\text{ft}) \text{m}$ ، همچنین مقدار، $(\text{lb}_m) \text{kgmol}$ ، همچنین $\text{kg}/\text{h} \cdot \text{m}^2$	L
شدت جریان مایع، $(\text{lb}_m / \text{h}) \text{kgmol}/\text{h}$ ، kg/h	L
طول اختلاط پراوتل، $(\text{ft}) \text{m}$	L
طول میانگین طیف، $(\text{ft}) \text{m}$	L
وزن جامد خشک، $(\text{lb}_m \text{ dry solid}) \text{kg dry solid}$	L_s
شدت جریان، $(\text{lb}_m \text{ inert}/\text{h}) \text{kgmol inert}/\text{h}$ ، $\text{kg inert}/\text{h}$	L'
شیب خط تعادل، بدون بُعد	m'' ، $\Delta m'$ ، Δm
شدت جریان، $(\text{lb}_m / \text{s}) \text{kg}/\text{h}$ ، kg/s	m
نسبت بدون بُعد $k/hx_1 =$ ، همچنین موقعیت، m	m
پارامتر در جدول ۱-۱-۷، بدون بُعد، همچنین پارامتر موقعیت	m
نسبت، $(\text{lb wet cake}/\text{lb dry cake}) \text{kg wet cake}/\text{kg dry cake}$	m
وزن مولکولی، $(\text{lb}_m / \text{lbmol}) \text{kg}/\text{kgmol}$	M
کل جرم، $(\text{lb}_m) \text{kg}$ ، همچنین یک پارامتر به صورت $(\Delta x)^2 / \alpha \Delta t$ ، بدون بُعد	M
مدول به صورت $(\Delta x)^2 / D_{AB} \Delta t$ ، بدون بُعد	M
شدت جریان، $(\text{lb}_m / \text{h}) \text{kgmol}/\text{h}$ ، kg/h	M
مقدار جاذب سطحی، $(\text{lb}_m) \text{kg}$	M
توان، بدون بُعد، همچنین شاخص رفتار جریان، بدون بُعد	n
شیب خط برای سیال پاورلا، بدون بُعد	n'
پارامتر موقعیت، همچنین نسبت بدون بُعد x/x_1	n
مقدار کل، $(\text{gmol dbmol}) \text{kgmol}$	n
شار A نسبت به مختصات ساکن، $\text{kg}/\text{s} \cdot \text{m}^2$	n_A
سرعت چرخش، rpm ، rpm ، همچنین تعداد سپرهای تابشی	N
پارامتر $h \Delta x / k$ ، بدون بُعد، همچنین تعداد موجودات ریز زنده، بدون بُعد	N

شار کل نسبت به مختصات ساکن، $(\text{kgmol/s.m}^2) \text{ dbmol/h.ft}^2$	N
(gmol/s.cm^2)	
مدول به صورت $k_c (\Delta x)/D_{AB}$ ، همچنین تعداد مراحل	N
غلظت جامد B، $\text{kg solid B/kg solution}$ ، $\text{lb solid B/lb solution}$	N
تعداد تقسیمات مساوی دما، بدون بُعد	N
شار حل‌شونده، $(\text{kg/s.m}^2) \text{ (lb}_m\text{/h.ft}^2)$	N_s
شار حلال، $(\text{kg solvent/s.m}^2) \text{ (lb}_m\text{/h.ft}^2)$	N_w
مقدار باقیمانده تعریف شده بر اساس معادله (۳-۶-۶)، kgmol/m^3	$\bar{N}_{n,m}$
(lbmol/ft^3)	
بردار شار مولی A نسبت به مختصات ساکن، kgmol/s.m^2	N_A
$(\text{gmol/s.cm}^2) \text{ dbmol/h.ft}^2$	
انتقال جرم A نسبت به مختصات ساکن، kgmol/s ، (gmol/s dbmol/h)	\bar{N}_A
تعداد واحدهای انتقال، بدون بُعد	N_{OL}, N_{OG}, N_L, N_G
عدد گرافش تعریف شده توسط معادله (۴-۷-۴)، بدون بُعد	N_{Gr}
عدد بایوت dh_x/k ، بدون بُعد	N_{Bi}
عدد گریتز تعریف شده توسط معادله (۳-۱۲-۴)، بدون بُعد	N_{Gz}
عدد گرافش تعریف شده توسط معادله (۴-۷-۵)، بدون بُعد	$N_{Gr,\delta}$
عدد ماخ تعریف شده توسط معادله (۵-۱۱-۲)، بدون بُعد	N_{Ma}
عدد پکلت $N_{Re} \cdot N_{Pr}$ ، بدون بُعد	N_{Pe}
عدد ناسلت $dh\delta/k$ ، بدون بُعد	$N_{Nu,\delta}$
عدد فرود v^2/gL ، بدون بُعد	N_{Fr}
عدد نودسن $\bar{\Gamma} = \lambda/\bar{v}$ ، بدون بُعد	N_{Kn}
عدد ناسلت hL/k ، بدون بُعد	N_{Nu}
عدد ناسلت dh_x/k ، بدون بُعد	$N_{Nu,x}$
عدد پراتل $c_p\mu/k$ ، بدون بُعد	N_{Pr}
عدد رینولدز $Dv\rho/\mu$ ، بدون بُعد	N_{Re}
عدد رینولدز $D_a^2 N\rho/\mu$ ، بدون بُعد	N'_{Re}
عدد رینولدز تعریف شده توسط معادله (۱۱-۵-۳)، بدون بُعد	$N_{Re,gen}$

عدد رینولدز Lv_{∞}/μ ، بدون بُعد	$N_{Re,L}$
عدد رینولدز $\alpha v_{\infty}/\mu$ ، بدون بُعد	$N_{Re,x}$
عدد رینولدز تعریف شده توسط معادله (۳-۵-۲۰)، بدون بُعد	$N'_{Re,u}$
عدد رینولدز تعریف شده توسط معادله (۳-۱-۱۵)، بدون بُعد	$N_{Re,p}$
عدد رینولدز در حداقل سیالی شدن تعریف شده توسط معادله (۳-۱-۳۵)، بدون بُعد	$N_{Re,mf}$
عدد اولر $p/\rho v^2$ ، بدون بُعد	N_{Eu}
عدد اشمیت $\mu/\rho D_{AB}$ ، بدون بُعد	N_{Sc}
عدد شرود $k'_c D/D_{AB}$ ، بدون بُعد	N_{Sh}
عدد توان تعریف شده توسط معادله (۳-۴-۲)، بدون بُعد	N_p
عدد جریان، بدون بُعد	N_O
عدد استاتون k'_c/v ، بدون بُعد	N_{St}
تعداد واحدهای انتقال، بدون بُعد	NTU
شدت جریان، (lb_m/h) $kgmol/h$ kg/h	O
فشار، $(mmHg, psia, atm, lb_f/ft^2)$ Pa N/m^2	P
فشار جزئی A، $(mmHg, psia, atm, lb_f/ft^2)$ Pa N/m^2	P_A
میانگین لگاریتمی فشار جزئی جزء خشی B در معادله (۶-۲-۲۱)، $(mmHg, psia, atm, lb_f/ft^2)$ Pa N/m^2	P_{BM}
فشار کل در طرف فشار بالا (خوراک)، (atm) Pa $cmHg$	P_h
فشار کل در طرف فشار پایین (نفوذ)، (atm) Pa $cmHg$	P_l
نفوذپذیری در جامد، (ft/h) cm/s	P_M
پارامتر معادله (۵-۵-۱۲)، بدون بُعد	P
فشار کل، $(mmHg, psia, atm, lb_f/ft^2)$ Pa N/m^2	P
توان، $(hp, ft.lb_f/s)$ W	P
شدت جریان، kg/min ، kg/h ، همچنین تعداد فازهای در حال تعادل	P
بردار ممتوم، $(lb_m.ft/s)$ $kg.m/s$	P
فشار بخار جزء خالص A، $(mmHg, psia, atm, lb_f/ft^2)$ Pa N/m^2	P_A
نفوذپذیری A، $cm^2(STP).cm/s.cm^2.cmHg$	P'_A

نفوذپذیری حلال در غشاء، $(\text{lb}_m/\text{h.ft.atm}) \text{ kg solvent/s.m.atm}$	P_w
نفوذپذیری، $(\text{lbmol/h.ft.atm}) \text{ kgmol/s.m.atm}$	P_m
نفوذپذیری، $\text{m}^3(\text{STP}).\text{cm}/(\text{s.m}^3\text{C.S.atm/m})$	P_M
نفوذپذیری، $\text{cm}^3(\text{STP}).\text{cm}/(\text{s.cm}^3\text{C.S.atm/cm})$	P'_M
نفوذپذیری، $\text{cm}^3(\text{STP}).\text{cm}/(\text{s.cm}^3\text{C.S.cmHg/mm})$	P''_M
نرخ انتقال حرارت، $(\text{btu/h}) W$ ، همچنین مقدار خالص انرژی اضافه شده به سیستم، $(\text{btu/h}) W$ ، همچنین L (btu)	q
شدت جریان، $(\text{ft}^3/\text{s}) \text{ m}^3/\text{s}$	q
بردار شار گرمایی، $(\text{btu/h.ft}^2) W/\text{m}^2$	q
نرخ تولید گرما، $(\text{btu/h.ft}^3) W/\text{m}^3$	q
شرایط خوراک تعریف شده توسط معادله (۱۲-۴-۱۱)	q
شدت جریان در قانون دارسی، cm^3/s	q'
$(\text{lb}_m/\text{lb}_m) \text{ kg adsorbate/kg adsorbant}$	q
دبی جریان باقیمانده، $(\text{cm}^3/\text{s ft}^3/\text{h}) \text{ m}^3/\text{s}$	q_1
دبی جریان نفوذکننده، $(\text{cm}^3/\text{s ft}^3/\text{h}) \text{ m}^3/\text{s}$	q_2
دبی A در جریان نفوذکننده، $(\text{ft}^3/\text{h}) \text{ m}^3/\text{s} \text{ cm}^3(\text{STP})/\text{s}$	q_A
قدرت-کندانسور، $(\text{btu/h}) \text{ kW} \text{ kJ/h}$	q_c
شدت جریان خوراک، $(\text{ft}^3/\text{h}) \text{ m}^3/\text{s} \text{ cm}^3(\text{STP})/\text{s}$	q_f
مقدار باقیمانده تعریف شده توسط معادله (۱۱-۵-۴)، $(^\circ\text{F}) \text{ K}$	$\bar{q}_{n,m}$
شدت جریان عبور نکرده، $(\text{ft}^3/\text{h}) \text{ m}^3/\text{s} \text{ cm}^3(\text{STP})/\text{s}$	q_o
شدت جریان نفوذکننده، $(\text{ft}^3/\text{h}) \text{ m}^3/\text{s} \text{ cm}^3(\text{STP})/\text{s}$	q_p
قدرت ریبویلر، $(\text{btu/h}) \text{ kW} \text{ kJ/h}$	q_R
نرخ چرخش مواد در سیکل، $(\text{ft}^3/\text{h}) \text{ m}^3/\text{s}$	Q
مقدار جذب شده، kgmol/m^3 همچنین افت گرمایی، $(\text{btu/h}) W$	Q
همچنین گرمای جذب شده، $(\text{ft.lbf/lb}_f, \text{btu/lb}_m) \text{ J/kg}$	
شعاع، (ft) m	r
نرخ تولید، $(\text{lb}_m \text{ A/h.ft}^3) \text{ kg A/s.m}^3$	r_A
شعاع هیدرولیک، (ft) m	r_H

مقدار بحرانی شعاع، m (ft)	$(r_r)_{cr}$
نرخ خشک کردن، $kg/h.m^2$ ($lb_m/h.ft^2$)	R
حل شونده عبور نکرده، بدون بُعد	R
نسبت افزایش مقیاس، بدون بُعد	R
شعاع، m (ft)، همچنین مقاومت، K/W ($h.^{\circ}F/btu$)	R
پارامتر معادله $(5-5-12)$ ، بدون بُعد، همچنین مقاومت، ohm	R
ثابت گاز (ضمیمه A.1 را ببینید)، همچنین نسبت برگشتی d_n/D بدون بُعد	R
نرخ تولید، $kgmol A/s.m^2$ ($lbmol A/h.ft^2$)	R_A
شعاع میله چرخنده، m (ft)	R_b
شعاع استوانه خارجی، m (ft)	R_c
مقاومت تماس، K/W ($h.^{\circ}F/btu$)	R_c
مقاومت لایه زل، $s.m^2.atm/kg$	R_g
مقاومت توری فیلتر، m^{-1} (ft^{-1})	R_m
نرخ تولید i ، kg/s (lb_m/h)	R_i
مؤلفه x نیرو، N (dyn lb_f)	R_x
ثابت تراکم پذیری، بدون بُعد	s
میانگین ضریب سطح تجدید شونده، s^{-1}	s
ضریب شکل هدایت، m (ft)	S
حلالیت یک گاز، m^3 solute(STP)/ m^3 solid.atm	S
$(cc$ solute(STP)/ cc solid.atm)	
فاصله بین مراکز، m (ft)، همچنین شدت جریان بخار، $kgmol/h$ (kg/h)	S
(lb_m/h)	
حجم محلول خوراکی، m^3 (ft^3)	S
سطح مقطع برج، m^2 (ft^2)، همچنین ضریب دفع، $1/A$	S
سطح مقطع ویژه، m^2/m^3 volume (ft^2/ft^3 volume)	S_o
سطح مفید ذره، m^2 (ft^2)	S_p
ضخامت پره، m (ft)	t
زمان، h min s	t

دما، °C، K، °F)	t
ضخامت غشاء، m، cm (ft)	t
زمان اتمام، h	t _b
زمان معادل با ظرفیت کل، h	t _l
زمان اختلاط، s	t _T
زمان معادل با ظرفیت قابل استفاده تا زمان اتمام، h	t _u
گشتاور، kg.m ² /s ²	T
دما، °C، K، °F، °R)، همچنین نرخ خوراک، ton/min	T
انحراف دما از دمای میانگین \bar{T} ، K (°F)	T'
سرعت میانگین، m/s (ft/s)	\bar{u}
ضریب کلی انتقال حرارت، K.W/m ² .°F (btu/h.ft ² .°F)	U
انرژی داخلی، J/kg (btu/lb _m)	U
سرعت، m/s (ft/s)	v
بردار سرعت، m/s (ft/s)	v
سرعت A نسبت به مختصات ثابت، m/s (ft/s، cm/s)	v _A
سرعت نفوذ A نسبت به سرعت میانگین مولی، m/s (ft/s، cm/s)	v _{Ad}
سرعت میانگین مولی جریان نسبت به مختصات ثابت، m/s (ft/s، cm/s)	v _M
حجم مرطوب، m ³ /kg dry air (ft ³ /lb _m dry air)	v _H
سرعت حد ته‌نشینی، m/s (ft/s)	v _t
سرعت بدون بُعد تعریف شده توسط معادله (۳-۱۰-۳۴)،	v ⁺
سرعت تعریف شده توسط معادله (۳-۱۰-۴۲)، بدون بُعد	v [*]
انحراف سرعت در جهت x از سرعت میانگین \bar{v}_x ، m/s (ft/s)	v' _x
سرعت ذاتی بر اساس سطح مقطع لوله خالی، m/s (ft/s، cm/s)	v'
سرعت در حداقل سیالی شدن، m/s (ft/s)	v' _{mf}
سرعت حد ته‌نشینی، m/s (ft/s)	v' _t
حجم مولی حل شونده، m ³ /kgmol	V _A
شدت جریان، kg/h، kgmol/h، m ³ /s (ft ³ /s، lb _m /h)	V
حجم، m ³ (ft ³ ، cm ³)، همچنین حجم مخصوص، m ³ /kg (ft ³ /lb _m)	V

سرعت، $(ft/s) m/s$ ، همچنین مقدار کل، $(lb_m) kgmol/kg$	V
شدت جریان خنثی، $(lb_m/h) kgmol/h$ kg/s kg/h	V
کسر جرمی A	w_A
کار انجام شده روی محیط، $(ft.lb_p/s) W$	W
آب آزاد، $(lb_m) kg$	W
کار محوری مکانیکی انجام شده روی محیط، $(ft.lb_p/s) W$	W_s
شدت جریان، $(lb_m/h) kgmol/h$ kg/h	W
کار انجام شده روی محیط، $(ft.lb_p/lb_m) J/kg$	W
وزن جامد مرطوب، $(lb_m) kg$	W
ارتفاع یا عرض، $(ft) m$ ، همچنین توان، $(hp) W$ ، همچنین جرم کیک خشک، $(lb_m) kg$	W
عرض پارو، $(ft) m$	W
کار محوری مکانیکی انجام شده روی محیط، $(ft.lb_p/lb_m) J/kg$	W_S
کار محوری داده شده به پمپ، $(ft.lb_p/lb_m) J/kg$	W_P
کسر جرمی یا مولی، همچنین کسر باقیمانده از رطوبت آزاد اولیه	X
فاصله در جهت α ، $(ft) m$	X
کسر مولی A، بدون بُعد	x_A
نسبت مولی جزء خنثی، $mol B/mol inert$	x'_B
کسر مولی A در خوراک، بدون بُعد	x_f
کسر مولی A در خروجی، بدون بُعد	x_o
کسر مولی A در محلول خروجی با حداقل غلظت، بدون بُعد	x_{oM}
میانگین لگاریتمی کسر مولی جزء خنثی یا جزء ساکن B در معادله (۶-۳-۴)	x_{BM}
میانگین لگاریتمی کسر مولی جزء خنثی تعریف شده توسط معادله (۱۰-۴-۲۷)	$(1 - x_A)_{*M}$
میانگین لگاریتمی کسر مولی جزء خنثی تعریف شده توسط معادله (۱۰-۴-۷)	$(1 - x_A)_{iM}$
اندازه ذره، $(ft) m$ ، همچنین برابر با پارامتر $\alpha t/x_1^2$ بدون بُعد	X

kg water/kg dry solid، همچنین رطوبت آزاد، (lb water/lb dry solid)	X
فاصله در جهت y، m (ft)، همچنین کسر مولی	y
کسر مولی A یا کسر جرمی A، kg A/kg solution (lbA/lb solution)	y _A
میانگین لگاریتمی کسر مولی جزء خنثی یا جزء ساکن B در معادله (۷-۲-۱۱)	y _{BM}
عدد بدون بُعد تعریف شده توسط معادله (۳-۱۰-۳۵)	y ⁺
کسر مولی A در نفوذکننده در خروجی جریان باقیمانده، بدون بُعد	y _i
کسر مولی A در نفوذکننده، بدون بُعد	y _p
میانگین لگاریتمی نیروی رانش تعریف شده توسط معادله (۱۰-۶-۲۴)	(y - y _i) _M
میانگین لگاریتمی کسر مولی جزء خنثی تعریف شده توسط معادله (۱۰-۴-۶)	(1 - y _A) _{iM}
نسبت دما تعریف شده توسط معادله (۴-۱۰-۲)، بدون بُعد	Y
جزء تغییر انجام نشده در جدول ۱-۳-۵ یا معادله (۷-۱-۱۲)	Y
ضریب تصحیح انبساط تعریف شده در معادلات (۳-۲-۹) و (۳-۲-۱۱)	Y
فاصله در جهت z، m (ft)، همچنین ارتفاع برج، m (ft)	z
محدوده دما برای نسبت تغییر ۱۰:۱ در D _T ، °C (°F)	z
ارتفاع، m (ft)، همچنین نسبت دما در معادله (۴-۱۰-۲)	Z
علائم یونانی	
ضریب تصحیح = ۱ در جریان مغشوش و برابر با ۰/۵ در جریان آرام	α
ضریب جذب، بدون بُعد، همچنین نسبت شار = ۱ + N _A /N _B	α
ضریب نفوذ گرمایی، k/ρc _p ، m ^۲ /s (ft ^۲ /h)	α
فراریت نسبی A نسبت به B، بدون بُعد	α _{AB}
مقاومت ویژه کیک، m/kg (ft/lb _m)	α
زاویه، rad	α
ضریب تصحیح سرعت در انرژی جنبشی، بدون بُعد	α
ضریب جداسازی ایده آل = P' _A /P' _B ، بدون بُعد	α*
ضریب جذب گاز، بدون بُعد	α _G

ضریب نفوذ گرمایی گردابه‌ای، $(\text{ft}^2/\text{h}) \text{m}^2/\text{s}$	α_T
قطبیت غلظت، نسبت غلظت نمک در سطح غشاء به غلظت نمک در جریان توده خوراک، بدون بُعد	β
ضریب تصحیح سرعت در معادله ممتوم، بدون بُعد	β
ضریب انبساط حجمی، $(1/^\circ\text{R}) 1/\text{K}$	β
ضریب ویسکوزیته، $(\text{lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}^{2-n}) \text{N}\cdot\text{s}^n/\text{m}^2$	γ
نسبت ظرفیتهای گرمایی $c_p/c_v =$ ، بدون بُعد	γ
شدت جریان، $(\text{lb}_m/\text{h}\cdot\text{ft}) \text{kg}/\text{s}\cdot\text{m}$	Γ
غلظت خاصیت، amount of ropery/ m^3	Γ
ضریب نفوذ مولکولی، m^2/s	δ
ضخامت لایه مرزی، $(\text{ft}) \text{m}$ ، همچنین فاصله، $(\text{ft}) \text{m}$	δ
ثابت معادله $(2-12-4)$ ، بدون بُعد	δ
اختلاف، همچنین اختلاف شدت جریان در نقطه کاری، $(\text{lb}_m/\text{h}) \text{kg}/\text{h}$	Δ
اختلاف دمای حسابی، $^\circ\text{C}$ ، K ، $^\circ\text{F}$	ΔT_a
میانگین لگاریتمی نیروی رانش دمایی، $^\circ\text{C}$ ، K ، $^\circ\text{F}$	ΔT_{lm}
تغییر انتالپی، $(\text{btu}/\text{lbmol} \text{btu}/\text{lb}_m) \text{kJ}/\text{kgmol}$ ، kJ/kg ، J/kg	ΔH
معیار ظراحی برای استریل کردن، بدون بُعد	∇
اُفت فشار، $(\text{lb}_f/\text{ft}^2) \text{Pa}$ ، N/m^2	Δp
پارامتر زبری، $(\text{ft}) \text{m}$ یا ضریب تخلخل، بدون بُعد	ε
ضریب نشر، بدون بُعد، همچنین کسر حجمی، بدون بُعد	ε
ضریب نفوذ جرمی گردابه‌ای، $(\text{cm}^2/\text{s} \text{ft}^2/\text{h}) \text{m}^2/\text{s}$	ε_M
ضریب تاثیر مبدل حرارتی، بدون بُعد	ε
ضریب نشر گاز، بدون بُعد	ε_G
ضریب نفوذ ممتوم گردابه‌ای، $(\text{ft}^2/\text{s}) \text{m}^2/\text{s}$	ε_t
ضریب تخلخل در حداقل سیالی شدن، بدون بُعد	ε_{mf}
راندمان پره، بدون بُعد	η_f
ویسکوزیته گردابه‌ای مغشوش، $(\text{lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}) \text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ ، $\text{Pa}\cdot\text{s}$	η_t
راندمان، بدون بُعد	η

زاویه، rad	θ
پارامتر معادله (۱۹-۷-۱۱)	θ
کسری از خوراک که نفوذ کرده است، بدون بُعد	θ
کسر نفوذ کرده تا مقدار $q/q_f = 1 - \alpha$ بدون بُعد	θ°
طول موج، (ft) m	λ
گرمای نهان، (btu/lb _m) kJ/kg، همچنین فاصله میانگین پوش آزاد، (ft) m	λ
گرمای نهان در نقطه جوش نرمال، (btu/lb _m) kJ/kgmol	λ_{Ab}
ویسکوزیته، (cp) lb _m /ft.h، (lb _m /ft.s) N.s/m ² ، kg/m.s، Pa.s	μ
ویسکوزیته ظاهری، (lb _m /ft.s) kg/m.s، Pa.s	μ_a
ضریب نفوذ ممتوم μ/ρ (cm ² /s، ft ² /s) m ² /s	ν
گروه بدون بُعد، بدون بُعد	π_1
فشار اسمزی، (atm) lb _f /ft ² N/m ² ، Pa	π
دانسیته، (lb _m /ft ³) kg/m ³ ، همچنین ضریب انعکاس، بدون بُعد	ρ
ثابت، (0/1714 × 10 ⁻⁸ btu/h.ft ² .°R ⁴)، (5/676 × 10 ⁻⁸ W/m ² .K ⁴)	σ
همچنین قطر برخورد، Å	
مقدار سیکما برای ساتریفیوژ، (ft ³) m ³	Σ
شار ممتوم اعمال شده در جهت α انتقال یافته در جهت α	τ_{zx}
(kg.m/s)/s.m ²	
(dyn/cm ²) lb _f /ft ² N/m ²	
تنش برشی، (dyn/cm ²) lb _f /ft ² N/m ²	τ
ضریب انحناء، بدون بُعد	τ
پتانسیل سرعت، (ft ² /h) m ² /s	ϕ
زاویه، rad، همچنین پارامتر پیوند هیدروژنی، بدون بُعد	ϕ
ضریب اسمزی، بدون بُعد	ϕ
ضریب شکل ذره، بدون بُعد	ϕ_s
شار خاصیت، amount of property/s.m ²	Ψ_z
ضریب تصحیح، بدون بُعد	ψ

تابع جریان، $(\text{ft}^2/\text{h}) \text{ m}^2/\text{s}$ ψ

پارامتر تعریف شده توسط معادله (۱۳-۳-۱۴)، بدون بُعد ψ_p

سرعت زاویه‌ای، rad/s ω

زاویه فضایی، sr $\dot{\omega}$

انتگرال برخورد، بدون بُعد $\Omega_{D,AB}$

راهنمای مطالب

الف

- اختلاف دمای میانگین حسابی، ۳۳۷
انتقال حرارت هدایتی (همچنین انتقال حرارت
ناپایدار را ببینید)،
ترکیب هدایت و جابجایی، ۳۲۱
در استوانه‌ها، ۳۱۴، ۳۱۹
اثر ضریب انتقال حرارت هدایتی متغیر،
۳۱۳
معادلات مربوط به انتقال حرارت هدایتی
در مختصات استوانه‌ای، ۵۱۴
معادلات مربوط به انتقال حرارت هدایتی
در مختصات دکارتی، ۵۱۴
معادلات مربوط به انتقال حرارت هدایتی
در مختصات کروی، ۵۱۵
قانون فوریه در، ۷۴، ۳۰۵، ۳۰۸، ۵۱۴
روش ترسیمی مربعات خمیده در،
۳۳۱-۳۳۲
- با تولید گرما، ۳۲۵
در کره‌های تو خالی، ۳۱۶
از طریق اجسامی که به صورت موازی قرار
دارند، ۳۲۱
مکانیسم، ۳۰۷
ضرایب شکل، ۳۳۳
انتقال حرارت هدایتی ناپایدار در دو بعد
معادله لاپلاس، ۴۳۷
روش عددی، ۴۴۳-۴۳۸
با شرایط مرزی دیگر، ۴۴۳
از طریق یک دیواره، ۳۱۲
از طریق دیواره‌ها به صورت سری، ۳۱۶
انتقال حرارت جابجایی (همچنین ضریب انتقال
حرارت و جابجایی طبیعی را نیز ببینید)
بحث کلی، ۳۰۷، ۳۱۱، ۳۲۱
مکانیسم فیزیکی، ۳۳۵
انتقال جرم به مکعب‌ها، ۶۲۶

- استوانه‌ها، استاتیک سیال، ۶۰
- ضریب دراگ، ۱۷۴
- انجماد مواد غذایی و بیولوژیکی، ۵۰۶
- جریان عبوری از روی، ۳۵۴
- اصول موازنه‌های گرمایی، ۴۱
- ضرایب انتقال حرارت برای، ۳۵۲
- آنالیز انتگرالی لایه مرزی،
- ضرایب انتقال جرم برای، ۶۲۸
- برای موازنه انرژی، ۵۲۰
- آنالیز ابعادی،
- برای موازنه ممتوم، ۲۸۴
- انرژی داخلی، ۳۷، ۹۴
- قضیهٔ باکینگهام، ۲۸۸، ۴۳۳، ۶۶۰
- انرژی جنبشی،
- در معادلات دیفرانسیل، ۲۸۷
- ضریب تصحیح سرعت در انرژی جنبشی، ۹۶
- در انتقال حرارت، ۴۳۳
- تعریف انرژی جنبشی، ۹۳
- در انتقال جرم، ۶۶۰
- انتقال جرم فلز-مایع، ۶۲۹
- در انتقال ممتوم، ۲۸۸
- انتقال جرم، شرایط مرزی، ۶۳۶
- انتقالی، ۹۴
- اختلاط (همزدن را نیز ببینید)
- انتقال جرم در فرایند تخمیر، ۶۳۰-۶۲۹
- بحث در مورد، ۲۰۸، ۲۲۴
- اندازه‌گیرهای جریان (اریفیس متر، لوله پیتوت،
- تجهیزات، ۲۲۴
- و تنوری متر و سرریزها را ببینید)
- خمیرها، ۲۲۵
- اصطکاک سیال،
- پودرها، ۲۲۴
- منحنی مربوط به سیالات نیوتنی، ۱۳۴
- انتقال مولکولی (نفوذ را ببینید)
- منحنی مربوط به سیالات غیرنیوتنی، ۲۳۴
- انتقال حرارت جابجایی طبیعی،
- اثر انتقال حرارت روی، ۱۳۹
- به‌دست آوردن معادلات، ۳۵۸
- در مقطع ورودی لوله، ۱۴۸
- معادلات برای شکل‌های هندسی مختلف،
- در شیرها و اتصالات، ۱۳۹
- ۳۶۰
- در جریان گازها، ۱۳۷
- مقدمه‌ای بر، ۳۵۸
- ضریب اصطکاک در لوله‌ها، ۱۳۳
- انتخاب اندازه لوله، ۱۵۰
- برای کانالهای غیر مدور، ۱۴۷
- انرژی پتانسیل، ۹۳
- برای سیالات غیر نیوتنی، ۲۳۲-۲۲۶
- افت فشار (همچنین اصطکاک سیال را ببینید)
- اثر زبری بر روی، ۱۳۵
- در جریان تراکم‌پذیر، ۱۳۷، ۱۵۰
- ناشی از انقباض ناگهانی، ۱۴۰
- در جریان آرام، ۱۲۹
- ناشی از انبساط ناگهانی، ۱۱۷، ۱۴۰

- در بسترهای پر شده، ۱۸۰
در لوله‌ها، ۱۳۲
در جریان مغشوش، ۱۳۳
انتقال حرارت تابشی،
در گازهای جاذب، ۴۱۳
ضریب جذب، ۳۹۰
جسم سیاه، ۳۹۰
ترکیب تابش و جابجایی، ۳۹۳
ضریب نشر، ۳۹۱
جسم خاکستری، ۳۹۱
ضرایب انتقال حرارت، ۳۹۳
مقدمه‌ای بر، ۳۰۷، ۳۸۸، ۳۹۶
قانون کیرشهف، ۳۹۱
قانون پلانک برای توان نشر، ۳۹۷
سپرها در، ۴۰۳
قانون استفان بولتزمان، ۳۹۷
به اجسام کوچک، ۳۹۲
ضریب دید بین اجسام سیاه، ۴۰۰
معادله کلی برای ضریب دید، ۴۰۳
ضریب دید برای اجسام خاکستری، ۴۰۱
اصطکاک پوسته‌ای، ۱۷۲
انتقال حرارت پایدار (انتقال حرارت هدایتی را
بینید)
انرژی کل، ۹۳
اغتشاش، ۲۷۶
انتقال حرارت ناپایدار (هدایت) (همچنین
روشهای عددی را ببینید)
معادلات تحلیلی برای، ۴۷۱
- دمای میانگین برای، ۴۸۸
در مواد بیولوژیکی، ۵۰۳
در استوانه، ۴۸۱
به دست آوردن معادله در، ۴۶۵
در صفحه صاف، ۴۷۱، ۴۷۶
پارامترهای انتقال جرم و حرارت
برای، ۴۷۷
روش ظرفیت یک تکه برای، ۴۶۸
روش برای مقاومت داخلی ناچیز، ۴۶۸
در جامد نیمه بی نهایت، ۴۷۳
در کره، ۴۸۲
در سه جهت، ۴۸۵
- ب**
بسترهای سیالی شده،
انبساط، ۱۸۸
حداقل سرعت لازم برای سیالی شدن، ۱۸۵
حداقل تخلخل، ۱۸۴
بسترهای پر شده،
قانون دارسی برای جریان در، ۱۸۳
ضریب انتقال حرارت در، ۳۵۷
ضریب انتقال جرم در، ۶۲۵
انتقال جرم در، ۶۲۵
ضریب انحاء در، ۵۷۶، ۶۵۳
افت فشار در جریان آرام در، ۱۷۷، ۱۸۳
افت فشار در جریان مخشوش، ۱۷۹
ضرایب شکل برای ذرات، ۱۸۱
سطح مفید، ۱۷۸، ۶۲۵

- بردارها، ۲۴۱
- تعریف، ۷۵
- معادلات اولر، ۲۶۶
- سیالات ایده‌آل، ۲۶۶
- در جریان آرام روی یک صفحه صاف، ۲۷۵
- در جریان آرام در یک لوله، ۱۲۲
- عمودی، ۲۴۸
- در جریان پتانسیل، ۲۶۶
- در تابع جریان، ۲۶۵
- تابع جریان، ۲۶۵
- توزیع عمومی سرعت، ۲۸۱
- تخلخل (بسترهای پر شده و سیالی شده)، ۱۷۷، ۶۲۵، ۱۸۴
- پ
- پمپهای گریز از مرکز، ۲۰۰
- پویش آزاد میانگین، ۶۴۶
- پمپها،
- گریز از مرکز، ۲۰۰
- هد توسعه یافته، ۱۹۹
- راندمان، ۲۰۰
- جابجایی مثبت، ۲۰۳
- توان لازم، ۱۹۹
- نیروی مکش، ۲۰۰

ج

- جریان آدیاباتیک تراکم‌پذیر، ۱۵۴
- جوشش،
- جوشش فیلمی، ۳۷۰
- جوشش جابجایی طبیعی، ۳۶۷-۳۶۸
- مکانیسم فیزیکی، ۳۶۷-۳۶۸
- جوشش هسته‌ای، ۳۶۹
- جریان تراکم‌پذیر گازها،
- شرایط آدیاباتیک،
- معادله دیفرانسیل اساسی، ۱۵۰
- شرایط همدم، ۱۵۱
- عد ماخ در جریان تراکم‌پذیر گازها، ۱۵۵
- شرایط حداکثر جریان، ۱۵۳
- جریان خزشی، ۲۷۰
- جداسازی جریان، ۲۷۳

ت

- تئوری بلازیوس، ۲۷۵
- تئوری Enskog و Chapman، ۵۵۳
- تئوری فیلم، ۶۶۶
- تابش گاز، ۴۱۳
- تعادل گاز - جامد، ۵۷۳
- معادله عمومی انتقال مولکولی برای تشابه
- بین ممتوم، حرارت و جرم، ۷۰، ۵۳۳
- تابع لنارد - جونز، ۵۵۳
- تعداد واحدهای انتقال در مبدل‌های حرارتی،
- ۳۸۶
- تئوری نفوذ، ۶۶۶
- تششهای رینولدز، ۲۷۸
- تنش یرشی (همچنین موازنه ممتوم را ببینید)
- مؤلفه‌ها، ۲۵۰

تئوری لایه مرزی انتقال ممنتوم در، ۲۷۴،

۲۸۴

انحراف سرعتها در، ۲۷۷

بحث در مورد، ۸۱، ۲۷۶

روی صفحه صاف، ۲۷۲

سرعت حداکثر در، ۱۲۸

طول اختلاط پرائتل در انتقال حرارت در،

۵۲۲

طول اختلاط پرائتل در انتقال جرم در، ۶۶۵

طول اختلاط پرائتل در انتقال ممنتوم در،

۵۲۲، ۲۷۹

عدد رینولدز در، ۸۳

در لوله‌ها، ۸۳، ۱۲۸، ۱۳۳

برش مغشوش در، ۲۷۸

نفوذ مغشوش در، ۵۳۴

توزیع سرعت در، ۱۲۸، ۲۸۱

چ

چگالش،

به‌دست آوردن معادلات، ۳۷۴-۳۷۳

مکانیسم، ۳۷۲

بیرون استوانه‌های افقی، ۳۷۷

بیرون سطوح عمودی، ۳۷۳

ح

حجم کنترل، ۸۷

حجم‌های مولی Le Bas، ۵۶۲

حلالیت گازها،

جداکننده نقلی، ۶۹

جریان تراکم پذیر همدما، ۱۵۱

جریان آرام،

لایه مرزی، ۲۷۴، ۲۸۴

تعریف، ۸۱

روی صفحه صاف، ۲۷۵

معادلات Hagen-Poiseuille برای، ۱۲۴،

۲۵۹

ضریب تصحیح سرعت در انرژی جنبشی

در، ۹۶

انتقال جرم در، ۶۱۴

ضریب تصحیح سرعت در ممنتوم در، ۱۱۳

سیالات غیر نیوتونی در، ۲۲۹

افت فشار در، ۱۲۹

عدد رینولدز برای، ۸۳

توزیع سرعت در لوله‌ها برای، ۱۲۶، ۱۲۷

جامدات متخلخل،

ضریب نفوذ مؤثر، ۵۷۶، ۶۵۳

مقدمه‌ای بر، ۵۷۰، ۵۷۶، ۶۴۵

نفوذ نودسن در، ۶۴۶

نفوذ مولکولی در، ۵۷۶، ۶۴۸

نفوذ گذرا در، ۶۴۸

جریان پتانسیل، ۲۶۶

جسم دوکی شکل، ۱۷۳

جریان مغشوش (همچنین لایه مرزی را ببینید)

جدایی لایه مرزی در، ۲۷۱

تئوری لایه مرزی انتقال حرارت در، ۵۲۰

تئوری لایه مرزی انتقال جرم در، ۶۶۲

روش اشمیت،	در جامدات، ۵۷۴
برای انتقال حرارت، ۴۹۱	
برای انتقال جرم، ۶۵۵	۵
	دمنده‌ها، ۲۰۵
	دمای فیلم، ۳۵۱
	دراگ شکلی، ۱۷۲، ۲۷۳
	دمنده‌های توربینی، ۲۰۵
ز	
زمان اختلاط (همزدن را ببینید)	
زیری در لوله‌ها، ۱۳۳	
س	ر
سیالات بینگهام پلاستیک، ۲۲۶	روش مربعات خمیده، ۳۳۱-۳۳۲
سیستم واحدهای $\alpha\beta$ ، ۲۰	روشهای ترسیمی،
سرد کردن مواد غذایی و بیولوژیکی، ۵۰۴	انتگرال‌گیری ترسیمی، ۴۶
سیالات دیلاتانت، ۲۲۸	روشهای ترسیمی در هدایت دو بُعدی، ۳۳۱
سیستم واحدهای انگلیسی، ۲۰	روشهای عددی،
سیالات ایده‌آل، ۲۶۶	برای انتگرال‌گیری به روش سیمپسون، ۴۶
سرعت جرمی، ۸۵	برای هدایت پایدار با شرایط مرزی متفاوت،
سیالات نیوتونی، ۷۹، ۲۲۶	۵۷۹
سیالات غیرنیوتونی،	برای هدایت پایدار در دو بعد، ۴۳۶
همزدن، ۲۳۸	برای نفوذ پایدار با شرایط مرزی متفاوت،
ثابتهای خواص جریان، ۲۳۰	۵۷۹
افت اصطکاک در اتصالات، ۲۳۳	برای نفوذ پایدار در دو بعد، ۵۷۷
انتقال حرارت در، ۴۱۸	برای شرایط مرزی انتقال حرارت ناپایدار، ۴۹۲
جریان آرام، ۲۲۹	برای انتقال حرارت ناپایدار در یک
ویسکومتر دوار، ۲۳۶	استوانه، ۵۰۱
جریان مغشوش، ۲۳۴	روش ضمنی، ۵۰۲
انواع، ۲۲۶	روش اشمیت، ۴۹۱
توزیع سرعت، ۲۳۶	در یک اسلب، ۴۹۱
سیالات شبه پلاستیک، ۲۲۷	رابطه لایه مرزی Polhausen، ۵۲۰

ص

- صفحهٔ صاف،
معادلات لایهٔ مرزی برای انتقال حرارت،
۵۱۷
معادلات لایهٔ مرزی برای انتقال جرم، ۶۶۲
معادلات لایهٔ مرزی برای دراگ کل، ۲۷۲
ضرب دراگ برای، ۱۷۱، ۲۷۶
انتقال حرارت به، ۳۵۱
انتقال جرم به، ۶۲۱-۶۲۰

ض

- ضرب جذب، ۳۹۲-۳۹۰، ۴۰۰-۳۹۸
ضخامت بحرانی عایق، ۳۲۷
ضرایب انتقال حرارت جابجایی (ضرایب انتقال
حرارت را ببینید)
ضرایب انتقال جرم جابجایی (ضرایب انتقال
جرم را ببینید)
ضرب نفوذ جرمی،
در ژلهای بیولوژیکی، ۵۶۸
در حل شونده‌های بیولوژیکی، ۵۶۶
ضرب نفوذ مؤثر در لوله‌های موئین،
۶۴۸-۶۵۰
ضرب نفوذ مؤثر در جامدات متخلخل،
۶۵۳، ۵۷۶
تخمین برای حل شونده‌های بیولوژیکی،
۵۶۶
تخمین در گازها، ۵۴۹
تخمین در مایعات، ۵۶۱

- سیالات رئوپکتیک، ۲۲۸
سیستم واحدهای SI، ۱۸
سوسپانسیون،
انتقال جرم به، ۶۲۹
سیستم اساسی واحدها، ۱۸
سیالات تیکسوتروپیک، ۲۲۸
سرعت،
میانگین، ۹۱، ۱۲۳، ۱۲۶
بین ذرات، ۶۱۱
حداکثر، ۱۲۸

- توزیع سرعت در جریان آرام،
۱۲۶
توزیع سرعت در جریان مغشوش،
۱۲۶
رابطهٔ بین سرعتها، ۱۲۹
محدودهٔ سرعتها در لوله‌ها، ۱۵۰
سرعت ذاتی، ۱۷۸، ۶۱۱
انواع سرعت در انتقال جرم، ۵۴۱
سرعت عمومی در لوله‌ها، ۲۸۱
سیالات ویسکوالاستیک، ۲۲۸
سرریزها، ۱۹۷

ش

- شار جرمی،
نسبتهای شار جرمی، ۶۵۰
انواع شار جرمی، ۶۳۳
شدت اغتشاش، ۲۷۶
شار انتقال جرم، ۶۳۳

- ضریب اصطکاک (اصطکاک سیال را ببینید)
ضرایب انتقال حرارت،
برای ظروف همزن دار، ۴۲۳
مقادیر تقریبی، ۳۱۳
ضریب متوسط، ۳۳۷
برای دسته لوله‌ها، ۳۵۴
برای چگالش، ۳۷۷-۳۷۲
تعریف، ۳۱۱، ۳۳۵
اثر ناحیه ورودی روی، ۳۴۳
برای جوشش فیلمی، ۳۷۰
برای مبدل‌های پره دار، ۴۳۲
برای جریان موازی با صفحه صاف، ۳۵۱
برای جریان گذرنده از روی یک استوانه،
۳۵۳
برای بسترهای سیالی شده، ۳۵۷
برای جرم گرفتگی، ۳۸۸
برای جریان آرام در لوله‌ها، ۳۳۷
برای فلزات مذاب، ۳۴۳
برای جابجایی طبیعی، ۳۶۷-۳۵۸
در کانال‌های غیر مدور، ۳۴۱
برای سیالات غیر نیوتونی، ۴۲۱-۴۱۸
برای جوشش هسته‌ای، ۳۶۹
برای شکلهای هندسی دیگر، ۳۶۰
ضرایب کلی، ۳۲۱، ۳۸۸
برای بسترهای پر شده، ۳۵۷، ۶۲۵
برای تابش و جابجایی، ۳۹۳
برای مبدل‌های با تیغه جاروب کننده
سطح داخلی، ۳۵۳
- تعیین تجربی در ژلهای بیولوژیکی، ۵۶۷
تعیین تجربی در حل شونده‌های
بیولوژیکی، ۵۶۷
تعیین تجربی در گازها، ۵۴۹
تعیین تجربی در مایعات، ۵۵۸
مقادیر تجربی برای ژلهای بیولوژیکی، ۵۶۹
مقادیر تجربی برای حل شونده‌های
بیولوژیکی، ۵۶۵
مقادیر تجربی برای گازها، ۵۵۲
مقادیر تجربی برای مایعات، ۵۶۰
مقادیر تجربی برای جامدات، ۵۷۴
ضریب نفوذ نودسن، ۶۴۶
ضریب نفوذ مولکولی و گردابه‌ای، ۵۲۲
ضریب نفوذ حالت گذرا، ۶۴۸
ضریب نفوذ ممتوم، ۵۲۲، ۵۳۴
ضریب نفوذ گرمایی، ۴۶۷، ۵۲۲، ۵۳۴
ضریب توزیع در انتقال جرم، ۵۹۹، ۶۵۶
ضریب دراگ،
تعریف، ۱۷۱، ۲۸۵
برای دیسک‌ها، ۱۷۴
برای صفحه‌های صاف، ۱۷۲، ۲۷۶
در دراگ شکلی، ۱۷۲، ۲۷۱
برای استوانه‌های بلند، ۱۷۴
در دراگ پوسته‌ای، ۱۷۲
برای کره‌ها، ۱۷۲، ۲۷۱
ضریب نشر،
تعریف، ۳۹۱، ۳۹۸
ضریب جرم گرفتگی، ۳۸۸

- برای کره‌ها، ۳۵۳
 برای جریان گذرا در لوله، ۳۴۰
 برای جریان مغشوش در لوله، ۳۳۸
 ضریب k ، ۶۱۱، ۶۱۴
 ضرایب انتقال جرم،
 همگونی، ۶۱۱
 برای جزء A از میان جزء ساکن B، ۶۰۸
 برای مکعب‌ها در بسترهای پر شده، ۶۲۶
 برای استوانه‌ها، ۶۲۸
 برای استوانه‌ها در بسترهای پر شده، ۶۲۶
 تعریف، ۶۰۵
 اعداد بدون بعد برای ضرایب انتقال جرم،
 ۶۱۰
 برای نفوذ متقابل و هم مولار، ۶۰۶
 تعیین تجربی، ۶۱۰
 برای فیلم در حال سقوط، ۶۱۵
 برای صفحه صاف، ۶۲۰
 برای بسترهای سیالی شده، ۶۲۶
 در داخل لوله‌ها، ۶۱۵
 مقدمه‌ای بر، ۶۰۴
 برای فلزات مایع، ۶۲۸
 مدل‌های ضرایب انتقال جرم، ۶۶۶
 برای بسترهای پر شده، ۶۲۴
 برای سوسپانسیون‌های حاوی ذرات معلق،
 ۶۲۹
 برای کره‌ها، ۶۲۲
 انواع، ۶۰۵
 برای برج دیواره مرطوب، ۶۱۵
- ضرایب شکل در هدایت، ۳۳۳
 ضرایب شکل برای ذرات، ۱۸۱
 ضریب هدایت گرمایی،
 تعریف، ۳۰۹
 گازها، ۳۱۰
 مایعات، ۳۱۰
 جامدات، ۳۱۰
 ضریب انحناء، ۵۷۶، ۶۵۳
 ضرایب دید در تابش، ۴۰۰
- ط**
 طول اختلاط پراتنل (جریان مغشوش را ببینید)
- ظ**
 ظرفیت گرمایی، ۳۴
 ظرفیت یک تکه، ۴۶۸
- ع**
 عدد بایوت، ۴۶۹
 عملیات دیفرانسیلی،
 مشتقات زمان، ۲۴۱
 با مقادیر عددی، ۲۴۲
 با بردارها، ۲۴۲
 عدد اولر، ۲۸۸
 عدد فرود، ۲۸۷
 عدد گراشف، ۳۶۰
 عدد نودسن، ۶۴۷
 عدد ماخ، ۱۵۵

در لایهٔ مرزی، ۵۱۷	عدد ناسلت، ۳۳۷
طبقه‌بندی، ۱۵	عدد پراتل،
تشابه، ۷۰، ۵۳۳، ۵۹۵، ۶۰۰، ۶۱۱	تعریف، ۳۳۶
فشار بخار، بحث، ۲۷	عدد رینولدز،
	در همزدن، ۲۱۳
	برای چگالش، ۳۷۵
	تعریف، ۸۳، ۲۸۸، ۶۱۰
	برای صفحات صاف، ۲۷۶
	برای جریان در لوله، ۸۳، ۳۳۷، ۶۱۰
	برای سیالات غیر نیوتونی، ۲۳۱
	عدد اشمیت، ۵۵۴، ۶۱۱
	عدد شروود، ۶۱۱
	عدد استانتون، ۶۱۱
	عملیات واحد،
	طبقه‌بندی، ۱۶
ق	ف
قضیهٔ باکینگهام، ۲۸۸، ۴۳۳، ۶۶۱	فشارسنج بردون، ۶۸
قانون دالتون، ۲۶	فیلم پایین‌رونده،
قانون دارسی، ۱۸۳	نفوذ در، ۶۱۵
قطر معادل،	موازنهٔ پوسته‌ای مستقیم در، ۱۲۴
در جریان سیال، ۱۴۷	توزیع سرعت در، ۱۲۶
در انتقال حرارت، ۳۴۱	فن‌ها، ۲۰۳
قانون فیک (همچنین نفوذ را ببینید)	فشار،
شکلهای قانون فیک، ۶۳۳	وسایل اندازه‌گیری، ۶۵
برای حالت پایدار، ۵۳۶	فشار و هد، ۶۴
برای حالت ناپایدار، ۵۹۵	واحدها، ۶۲
قانون اول ترمودینامیک، ۹۳	فرایندهای انتقال،
قانون فوریه (همچنین انتقال حرارت هدایتی را ببینید)، ۷۴، ۳۰۵، ۳۰۸، ۵۱۴، ۵۳۴	
قانون کیرشهف، ۳۹۱	
قانون نیوتون،	
در انتقال ممتوم، ۷۵	
قانون دوم نیوتون، ۱۱۰	
قانون ویسکوزیتهٔ نیوتونی، ۷۵	
قانون پلانک، ۳۹۷	
قانون استوکس، ۱۷۴، ۲۷۱	
قانون تابش استفان بولتزمان، ۳۹۲	

- معادلهٔ ممتوم برای، ۲۸۴-۲۸۶
جدایی در، ۱۷۳، ۲۷۳
ثوری انتقال جرم در، ۶۶۶-۶۶۷
wake در، ۱۷۳، ۲۷۳
لوله‌های مدور،
جریان تراکم‌پذیر در، ۱۵۵-۱۵۱
ضرایب اصطکاک در، ۱۳۸-۱۳۱
ضرایب انتقال حرارت در، ۳۴۳-۳۳۷
جریان آرام در، ۱۲۴-۱۲۱
انتقال جرم در، ۶۱۵
جریان مغشوش در، ۱۲۸-۱۲۷، ۱۳۷-۱۳۳
توزیع سرعت عمومی در، ۲۸۱
لولهٔ پیتوت، ۱۹۰
- ک**
کمپروسورها،
معادلات، ۲۰۶
تجهیزات، ۲۰۵
کار تلف شده، ۱۰۲
کره‌ها،
نفوذ به کره‌ها، ۵۴۷
ضریب دراگ، ۱۷۲
انتقال حرارت به، ۳۵۳
انتقال جرم به، ۶۲۲، ۶۲۹
قانون استوکس، ۱۷۴، ۲۷۱
کار، ۹۵، ۱۰۲
- گ**
گرمای تنفس، ۳۲۵
گازها،
معادلهٔ گازها، ۲۴
ثابت قانون گاز، ۲۴
قانون گاز ایده‌آل، ۲۵
گرمای واکنش، ۳۸
گرمای نهان، ۳۷
- م**
معادلهٔ برنولی، ۱۰۶
مواد بیولوژیکی،
سرد کردن مواد بیولوژیکی، ۵۰۴
نفوذ مواد بیولوژیکی، ۵۶۸-۵۶۴
مقاومت تماس در فصل مشترک، ۳۲۹
معادلهٔ پیوستگی،
برای مخلوط دوتایی، ۶۳۴
برای لایهٔ مرزی، ۲۷۴
برای سیال خالص، ۸۵، ۲۴۰، ۲۴۵-۲۴۳،
۲۵۴
مختصات استوانه‌ای، ۲۴۶، ۲۵۲، ۵۱۴
موازنهٔ انرژی،
برای لایهٔ مرزی، ۵۱۷
- ن**
گرمای تنفس، ۳۲۵
گازها،
معادلهٔ گازها، ۲۴
ثابت قانون گاز، ۲۴
قانون گاز ایده‌آل، ۲۵
گرمای واکنش، ۳۸
گرمای نهان، ۳۷
- ل**
لایهٔ مرزی (جریان مغشوش را نیز ببینید)
معادلهٔ پیوستگی برای، ۲۷۴-۲۷۵
معادلهٔ انرژی برای، ۵۱۷-۵۲۰
جریان آرام در، ۲۷۴
معادلهٔ انتقال جرم برای، ۶۶۴-۶۶۲

- در جریان تراکم پذیر، ۱۵۰
- موازنه انرژی ديفرانسیلی، ۵۱۲
- موازنه انرژی مکانیکی، ۱۰۱
- موازنه کلی انرژی، ۹۳
- معادلات اولر، ۲۶۶
- مبدلهای حرارتی با سطح پره‌دار،
- راندمان، ۴۲۸
- ضرایب کلی، ۴۳۲
- انواع، ۴۲۷
- مفادله فولر و همکاران، ۵۵۳
- معادله عمومی انتقال مولکولی،
- برای انتقال حرارت، ۳۰۵-۳۰۶
- برای حالت پایدار، ۷۰
- برای حالت ناپایدار، ۷۲
- موازنه کلی خاصیت، ۷۰
- معادله Hagen-poiseuille، ۱۲۴، ۳۵۹
- مبدلهای حرارتی (همچنین ضرایب انتقال حرارت را ببینید)
- جریان متقاطع، ۳۷۹، ۳۸۳
- دو لوله‌ای، ۳۷۸
- ضریب تاثیر، ۳۸۴
- سطح گسترش یافته، ۴۲۷
- ضریب جرم گرفتگی، ۳۸۸
- اختلاف دمای میانگین لگاریتمی در، ۳۴۵، ۳۸۰
- مبدلهای مجهز به تیغه‌های جاروب‌کننده
- سطح داخلی، ۴۲۶
- پوسته و لوله، ۳۷۸
- ضرایب تصحیح دما، ۳۸۰
- مکانیسمهای انتقال حرارت، ۳۰۷
- معادله لاپلاس،
- در انتقال حرارت، ۴۳۷
- برای جریان پتانسیل، ۲۶۷
- برای تابع جریان، ۲۶۷
- مقدار میانگین لگاریتمی،
- مساحت، ۳۱۹
- اختلاف غلظت، ۶۲۶
- تصحیح برای مبدل حرارتی، ۳۸۰
- اختلاف دما، ۳۴۵، ۳۸۰
- مانومترها، ۶۶
- موازنه کلی جرم، ۸۵
- مدلهای انتقال جرم، ۶۶۶
- موازنه جرم،
- واکنش شیمیایی و، ۳۱
- روشهای محاسبه، ۲۸
- موازنه کلی، ۸۵
- جریان برگشتی و، ۳۰
- موازنه انرژی مکانیکی، ۱۰۱
- مستوم،
- تعریف، ۷۸، ۱۰۹
- مقدمه‌ای بر، ۵۹
- ضریب تصحیح سرعت در، ۱۱۳
- موازنه مستوم،
- کاربردها، ۲۵۴
- برای لایه مرزی، ۲۷۴، ۲۸۴
- در لوله‌های مدوره، ۲۵۸

- نیروی محرکه حاصل از چرخش در، ۲۵۳
 معادلات دیفرانسیل، ۲۴۰، ۲۴۷
 معادلات اولر، ۲۶۶
 سیال ایده‌آل، ۲۶۶
 برای جت سیال که به یک تیغه برخورد می‌کند، ۱۱۹
 معادلات لاپلاس در، ۲۶۷
 برای سیالات نیوتونی، ۲۴۷
 موازنه کلی، ۱۰۹
 بین صفحات موازی، ۲۵۴
 در جریان پتانسیل، ۲۶۶
 در استوانه‌های در حال چرخش، ۲۶۱
 موازنه پوسته‌ای ممتوم، ۱۲۱
 در تابع جریان، ۲۶۵
 در انتقال ممتوم، ۷۸، ۱۲۲
 مخلوط‌کن‌های ثابت (همزدن را ببینید)
 معادلات ناویر استوکس، ۲۵۲
 معادله ناسلت، ۳۷۵
 مختصات کروی، ۲۴۶، ۵۱۵
 مقیاس‌های دما، ۲۱
 معادله Wilke-Change، ۵۶۱
- ن**
- نفوذ بیولوژیکی،
 در ژلها، ۵۶۸
 در محلولها، ۵۶۷-۵۶۴
 نیروی محرکه حاصل از چرخش، ۲۵۳
 نفوذ (نفوذ پایدار و ناپایدار را نیز ببینید)
- A از طریق B ساکن، ۵۴۳، ۶۳۷
 در ژلهای بیولوژیکی، ۵۶۸
 حل شونده‌های بیولوژیکی، ۵۶۴
 و انسداد توسط پروتئین‌ها، ۵۶۷
 در لوله‌های موئین، ۶۴۵، ۶۵۰
 با واکنش شیمیایی، ۶۴۱-۶۳۷
 و جابجایی، ۵۴۱
 و معادله پیوستگی، ۶۳۶-۶۳۴
 نفوذ هم مولار و خلاف جهت، ۵۳۹، ۶۳۷
 قانون فیک در، ۷۴، ۵۳۶، ۶۳۳، ۶۴۸
 در گازها، ۵۳۹
 حالت کلی نفوذ A و B، ۵۴۱
 مقدمه‌ای بر، ۷۳، ۵۳۳
 نفوذ نودسن، ۶۴۶
 در مایعات، ۵۵۶
 نفوذ مولکولی، ۶۴۸
 نفوذ چند جزئی گازها، ۶۴۳
 نفوذ چند جزئی مایعات، ۵۶۲
 نفوذ در جامدات متخلخل، ۵۷۶، ۶۴۵
 تشابه در انتقال جرم، حرارت و ممتوم
 به صورت نفوذ، ۷۰، ۵۳۳
 نفوذ در جامدات،
 طبقه‌بندی، ۵۷۰
 قانون فیک در، ۵۷۱
 معادلات نفوذ پذیری در جامدات، ۵۷۳
 نفوذ به یک کره، ۵۴۷
 نفوذ پایدار در دو بعد، ۵۷۷
 نفوذ در حالت گذرا، ۶۴۸

واحدها،	نفوذ با سطح مقطع متغیر، ۵۴۶
سیستم CGS، ۲۰	نمودارهای هیسلر، ۴۸۵، ۴۸۳، ۴۸۰
وابعاد، ۲۱	نفوذ نودسن، ۶۴۶
سیستم انگلیسی، ۲۰	نفوذ مولکولی (نفوذ را ببینید)
سیستم SI، ۱۹	نفوذ چند جزئی، ۶۴۳
ونتوری متر، ۱۹۳	نفوذ پذیری در جامدات، ۵۷۳
ویسکوزیته،	نفوذ پایدار (همچنین نفوذ، ضریب نفوذ و
بحث، ۷۵	روشهای عددی را ببینید)
قانون ویسکوزیته نیوتونی، ۷۵	در محلولهای بیولوژیکی و ژلها، ۵۶۴
	در گازها، ۵۳۹
ه	در مایعات، ۵۵۶
همزدن (همچنین اختلاط را ببینید)	در دو بعد، ۵۷۷
یاقلها برای، ۲۲۲	در جامدات، ۵۷۰
سرعت چرخش جریان در،	نفوذ ناپایدار (همچنین روشهای عددی را ببینید)
۲۲۲-۲۲۳	معادلات تحلیلی برای صفحه صاف، ۵۹۷
تجهیزات مربوط به، ۲۰۹	معادلات اساسی برای، ۵۹۵
عدد جریان در، ۲۲۲-۲۲۳	شرایط مرزی برای، ۵۹۷
الگوی جریان در، ۲۱۲	نمودارهایی برای شکلهای هندسی
انتقال حرارت در، ۴۲۲	مختلف، ۶۰۰
زمان اختلاط در، ۲۲۱	و واکنشهای شیمیایی، ۶۴۲
مخلوط کن های ثابت، ۲۲۴	پارامترهای انتقال جرم و حرارت برای، ۶۰۱
سیالات غیرنیوتونی، ۲۳۸	در سه جهت، ۶۰۳
توان مصرفی در، ۲۱۳	و
هدف از، ۲۰۸	واکنش شیمیایی و نفوذ، ۶۳۷
افزایش مقیاس در، ۲۱۷	واحدهای غلظت، ۲۳
سیستمهای همزدن خاص، ۲۲۳	واحدهای جرم، ۲۲
طراحی استاندارد سیستم، ۲۱۲	واحدهای مول، ۲۳
انواع همزن ها، ۲۰۹-۲۱۲	ویسکومتر دوار، ۲۳۶

همگونی،

در لایهٔ مرزی، ۵۱۷-۵۱۹

بین انتقال ممتوم، حرارت و جرم، ۷۳-۷۵،

۵۲۳، ۵۳۵-۵۳۳، ۶۰۰، ۶۱۴-۶۱۱، ۶۶۵

چیلتون و کولبورن، ۶۱۴

همگونی ابعادی، ۲۱

همگونی پراختل، ۶۱۳

همگونی رینولدز، ۶۱۲

همگونی ون کارمن، ۶۱۳

هدایت دو بُعدی، ۳۳۱



FERDOWSI UNIVERSITY OF MASHHAD

Publication No. 338

Transport Processes and Unit Operations

Christi J. Geankoplis

by

M. Akhavan Mahdavi

FERDOWSI UNIVERSITY PRESS

2002