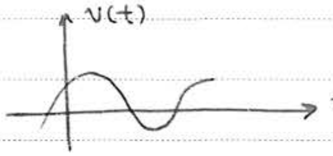
Signal: a time-varying voltage (or other quantity) that carries some info.



سیگنال ولتاژ وابسته به زمان

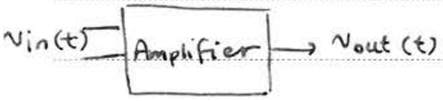
* وابستگی به یک متغیر لزومی ندارد که وابستگی زمانی باشد.

System:

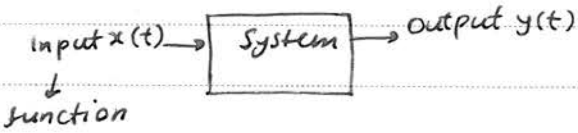
هر عاملی که باعث تغییرات در سیگنال می‌شود.

The job of a system is often to extract, modify, transform, or manipulate the carried info.

Physical System



Mathematical Model



- Signals are functions of independent variables that carry info.

$v(\underline{t})$
↓
independent variable

Electrical Signals : voltage, current

Acoustic " : voice (analog, digital)

Video " : intensity variations in an image x-ray, MRI, ... شدت روشنایی تصویر

Biological " : sequence of bases in a gene رنگ چشم، اخلاقیات

Scenarios:

Given a system, determine a signal → Transmitter

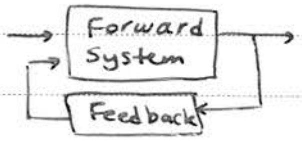
Given a type of signal, design a system → Amplifier

Design a system that will make a desired change to a signal → Equalizer

" " " " " extract desired info from a signal → Receiver

" " " (and maybe signal) that gives a desired output

→ Control System



دسته‌بندی براساس متغیر مستقل:

1. Time : {Continuous time (CT) / Discrete time → بستگی به پیوسته یا گسسته بودن متغیر مستقل دارد.

$x(t)$
↓
1 Dimensional (بعد زمان)

2. تعداد متغیرهای مستقل 1D, 2D, 3D, ...

تصویر یک سیگنال دوبعدی است : $x[\underset{\text{سطر}}{\underline{m}}, \underset{}{\overset{\text{ستون}}{\underline{n}}}]$

یک بعد در راستای افقی و یک بعد در راستای عمودی spatial وابستگی به مکان (لزوماً زمان نیست)

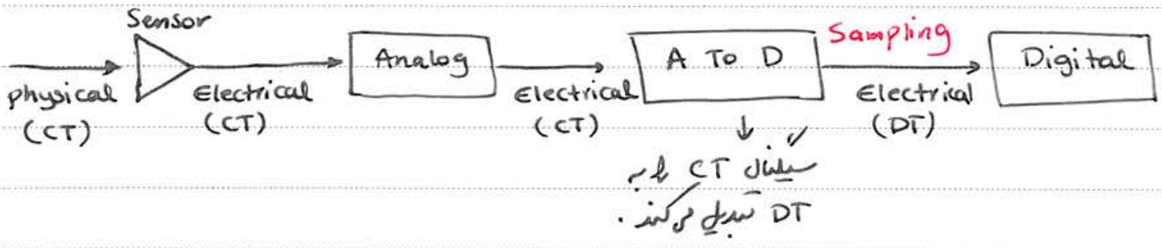
می‌توانیم بعدهای دیگر هم اضافه کنیم $x[m,n,t]$: تصویر در راستای سطر و ستون که به زمان وابستگی دارد.

$x[m,n,t,\lambda]$: وابستگی به طیف فرکانسی (رادیویی، visible، گاما، ...)

1. $x(t)$: متغیر مستقل، t، continuous می‌باشد. می‌تواند real no. (اعداد حقیقی) را بپذیرد.

$x[m]$: " " " ، discrete می‌باشد. به این معنی است که متغیر مستقل فقط integer (اعداد صحیح) را می‌پذیرد.

- هر سیگنال که تولید می‌شود، نیاز به یک sensor دارد. sensor ها عموماً CT هستند، زیرا برای sense کردن voltage برحسب زمان نیاز به CT داریم. خروجی آنها CT است.



* resolution سیگنال DT، دقت آن را نشان می‌دهد.

Sampling : خواندن اعداد در فاصله‌های معین

System : را به صورت black box می‌بینیم، component های داخل آن برای ما اهمیتی ندارند، بلکه توابع ورودی و خروجی مهم هستند.

$x(t) \rightarrow y(t)$ continuous خروجی ← continuous ورودی

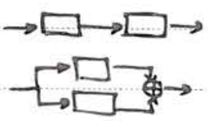
$x[n] \rightarrow y[n]$ discrete خروجی ← discrete ورودی

* در سیستم ها رابطه ی input و output برای ما مهم است } پایدار بودن
حافظ داشتن
⋮

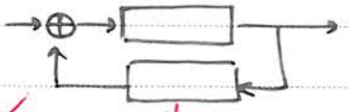
Block Diagram:

Cascade (series): خروجی اولی به عنوان ورودی دومی در نظر گرفته می شود } ترکیب این دو هم می تواند اتفاق بیفتد.

Parallel: ورودی مشترک و خروجی ها با هم جمع می شوند



Feedback: خروجی یک سیستم feed back می شود و با ورودی جمع می شود.



سیستم بالایی را کنترل می کند.

{Real-time Signal: سینوسی، کسینوسی و ...

Complex Signal: $s = j\omega +$ ~~real~~ part $\Rightarrow s = j\omega \quad (e^{st} = x(t)$ یا $z^n = x[n])$

عدد مختلط

$$z = \underbrace{\text{Real}\{z\}}_{\text{حقیقی}} + j\,\underbrace{\text{Im}\{z\}}_{\text{موهومی}}$$

در یک مدار الکتریکی:

توان : $p(t) = v(t)\, i(t) = \frac{1}{R} v^2(t)$

انرژی مصرف شده : $\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$

متوسط انرژی : $\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$

در هر سیگنال دلخواه:

انرژی کل : $E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\,dt$ Continuous $\xrightarrow{\text{متوسط}}$ $\frac{1}{t_2 - t_1}$

$E = \sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2$ discrete $\xrightarrow{\text{"}}$ $\frac{1}{n_2 - n_1 + 1}$

$x(t) \xrightarrow[\text{(time shifting)}]{\text{transition}} x(t - t_0)$ { $t_0 > 0$: Shift to right
$t_0 < 0$: " " left

(time shifting) به نقطه t_0

reflection: $x(t) \rightarrow x(-t)$: سیگنال حول محور عمودی معکوس می‌شود

time scaling: $x(t) \rightarrow x(at)$ a : مقدار ثابت

$a>1 \rightarrow$ فشرده

$a<1 \rightarrow$ منبسط

periodic : $x(t) = x(t+T)$ $T>0,\ \forall t$, period $= T$ دوره تناوب

مثل $\cos(t) = \cos(t+2\pi)$ frequency(rad/s) $\equiv \frac{2\pi}{T} = \omega$ فرکانس زاویه‌ای

$\omega = 2\pi f$ (Hz)

fundamental period: T_0 : کوچکترین عدد مثبت T

〃 frequency : ω_0

$\cos(t)$: $T_0 = 2\pi$

$x_1(t) = x_1(t+T_0) = x_1(t+mT_0)$, m : integer>0

$x_2(t) = x_2(t+T_0') = x_2(t+nT_0')$, n : integer>0

$\Rightarrow x_1(t) + x_2(t) = x_3(t)$

$x_3(t) = x_3(t+T_0'')$

$= x_1(t+mT_0) + x_2(t+nT_0')$

$\Rightarrow mT_0 = nT_0' = T_0''$

$$\boxed{\frac{T_0}{T_0'} = \frac{n}{m}}$$

برای اینکه جمع دو تابع متناوب، متناوب باشد، باید رابطه روبرو برقرار باشد :

Even Signal: اگر سیگنال معکوس شود و با سیگنال اولیه برابر باشد، سیگنال زوج است : $x(-t) = x(t)$

Odd Signal: 〃 〃 〃 〃 〃 〃 منفی سیگنال اولیه برابر باشد، سیگنال فرد است : $x(-t) = -x(t)$

— برای سیگنال‌های زمان گسسته هم به همین ترتیب است :

$\underbrace{x[n] = x[-n]}_{\text{even}}$, $\underbrace{x[-n] = -x[n]}_{\text{odd}}$

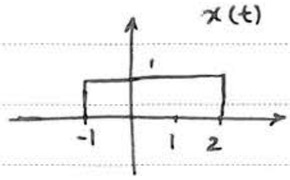
* هر سیگنالی را می‌توانیم به صورت ترکیبی از سیگنال‌های زوج و فرد بنویسیم :

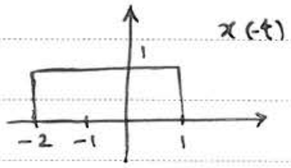
$$x(t) = \underbrace{Ev\{x(t)\}}_{\text{even part of } x(t)} + \underbrace{Odd\{x(t)\}}_{\text{odd part of } x(t)}$$

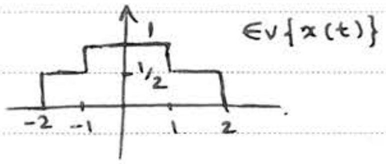
$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\}$

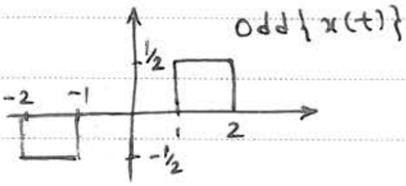
$Odd\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\}$

مثال :









Exponential: $x(t) = Ce^{at}$

C ↓ درحالت کلی عدد مختلط است

$Real\{c\}+j\,Im\{c\}$

$a>0$, $c>0$ } نمایی افزایشی

$a<0$, $c>0$ } نمایی کاهشی

$x(t) = Ce^{jw_0t}$ (Complex Exponential)

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

- برای متناوب بودن تابع نمایی باید رابطه‌ی روبرو برقرار باشد :

$e^{jw_0t} = e^{jw_0(t+T_0)}$

$= e^{jw_0t} \cdot \underbrace{e^{jw_0T_0}}_{e^{j2\pi}=1}$

پس ثابت شد که سیگنال ما periodic می باشد !

از آن جا که سیگنال نمایی نامحدود است ، در یک دوره تناوب بررسی می کنیم :

$E_{period} = \int_0^{T_0} |e^{jw_0t}|^2 dt = T_0$

$E_\infty = \infty$

$P_{period} = \frac{1}{T_0} E_{period} = 1$

* e^{jkw_0t} همان سیگنال های نمایی هستند که فرکانس آنها ($k>0$: بزرگتر ، $k<0$: کوچکتر) تغییر می کند نسبت به e^{jw_0t} ! (k عدد ثابت و صحیح است : $k=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$)

Harmonically related complex exponential signals

تعداد ارتعاشات در یک بازه زمانی یکسان افزایش پیدا می کند . یعنی با افزایش k ، نرخ نوسانات سیگنال افزایش پیدا می کند .

ویژگی‌های توابع نمایی :

1. همیشه متناوب است .
2. ω↑ ⇐ نرخ نوسانات ↑

$$c = |c|\, e^{j\phi} \to \text{phase}$$

$|c| \downarrow$ magnitude

$$a = r + j\omega_0$$

$$\Rightarrow Ce^{at} = \underbrace{|c|e^{rt}}_{\text{نمایی}} \cdot \underbrace{e^{j(\omega_0+\phi)t}}_{\text{سینوسی ، کسینوسی}}$$

اگر $r>0$ باشد ، به طور کلی سیگنال افزایشی است .

〃 $r<0$ 〃 〃 〃 〃 〃 کاهشی است . (میرا)

* برای مدارهای الکتریکی ، سیستم های مکانیکی و یا حرارتی ، عملکرد سیستم بهتر است طوری باشد که تغییرات نوسانات به مرور زمان میرا باشد .

سیگنال‌های گسسته متناوب :

$x[n] = x[n+N] \quad \forall n,\ N>0 \quad \Rightarrow x[n]$ is periodic

N = دوره تناوب

$$\cos(\pi n) \overset{?}{=} \cos(\pi(n+N))$$

$$= \cos(\pi n + \pi N) \Rightarrow \pi N = 2\pi m \quad \Rightarrow N = 2m$$ (کوچکترین عدد مثبت و صحیح) اگر $m=1$

پس $N_0 = 2$ و N_0 را دوره تناوب پایه گوییم .

$$\cos[\Omega_0 n] \xrightarrow{if} \cos[(\Omega_0+2\pi)n] = \cos[\Omega_0 n + 2\pi n] = \cos[\Omega_0 n]$$

پس با سیگنال اولیه برابر شد ، یعنی برخلاف سیگنال های C.T ، در سیگنال های D.T با افزایش فرکانس همیشه نوسانات افزایش پیدا نمی‌کند :

$\Omega_0 = 0$ نرخ نوسانات ثابت
$\Omega_0 = \pi/4$ افزایش 〃 〃
$\Omega_0 = 2\pi/4$ 〃 〃 〃
$\Omega_0 = 3\pi/4$ 〃 〃 〃
⋮
$\Omega_0 = \pi$ ماکسیمم نرخ نوسانات
$\Omega_0 = \pi + \pi/4$ نرخ نوسانات کاهش
⋮
$\Omega_0 = 2\pi$ نرخ نوسانات به حالت اولیه برمی‌گردد

مثال: $\cos[3n] = \cos[3(n+N)] \Rightarrow$ is not periodic

زیرا N ای پیدا نمی‌شود برای تساوی رابطه بالا!

for $\cos[\Omega_0 n]$ to be periodic:

$$\Omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \boxed{\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}}$$: m عدد صحیح است

عدد گویا

* برای مثال بالا، $\frac{3}{2\pi}$ یک عدد گویا نیست، پس دوره تناوب ندارد!

تفاوت های سیگنال های C.T و D.T (سینوسی، کسینوسی)

1. به ازای هر Ω_0، تناوبی نیست.
2. با افزایش Ω_0 همواره نرخ نوسانات افزایش نمی‌یابد.

سیگنال ضربه:

D.T $$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

به عنوان سیگنال پایه برای تحلیل سایر سیگنال ها و سیستم هاست. پاسخ سیستم ها به این سیگنال اهمیت دارد.

سیگنال پله:

D.T $$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

C.T $$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

discontinuity در نقطه $t=0$ دارد!

C.T $$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

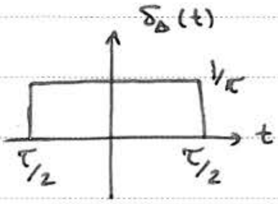
در نقطه $t=0$ تعریف نشده است!

discontinuous در نقطه $t=0$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, d(t)$$ یا $$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

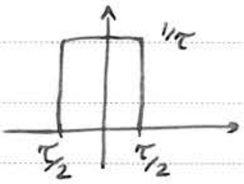
* سیگنال ضربه‌ی پیوسته با وجود اینکه در صفر تنها تعریف نشده است، مساحت زیر نمودار آن 1 است:

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$$



$\Rightarrow \tau \times 1/\tau = 1$ مساحت

if $\tau \to$ کوچکتر



... به همین ترتیب $\Rightarrow$ مساحت $= 1$ $\Rightarrow$

* پیش‌تر نشان دادیم که $u(t)$ چگونه از انتگرال $\delta(t)$ بدست می‌آید!

ضربه واحد $\delta(t)$:

$$\left.\begin{aligned} x(t)\,\delta(t) &= x(0)\,\delta(t) \\ x(t)\,\delta(t-t_0) &= x(t_0)\,\delta(t-t_0) \end{aligned}\right\} \text{sifting}$$

خاصیت غربالی: هر نقطه از سیگنال را که بخواهیم غربال کنیم، کافی است در تابع δ ضرب کنیم.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

- $e^{jk\omega_0 t}$: به ازای $k=0,\pm1,\dots$ تعداد بی‌نهایت است، متناوب (C.T)
- $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$: تعداد محدود و N تاست (D.T)

Properties of Systems:

سیستم‌ها را از روی معادله input-output می‌شناسیم و خواص آنها را در می‌یابیم.

1) memoryless Systems :

سیستمی بدون حافظه است که خروجی سیستم در هر لحظه‌ای (t : متغیر مستقل) به ورودی در همان لحظه وابسته باشد. (D.T & C.T) سیستم‌های بدون حافظه (حافظه دار)

مثال: $y(t) = R\,x(t)$: یک سیستم بدون حافظه

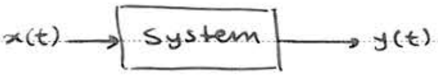
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} R\,x(\tau)\,d(\tau)$: به زمان‌های قبلی ورودی هم وابسته است، پس حافظه دار است.

مثلاً خازن یا سلف سیستم را حافظه دار می‌کند.

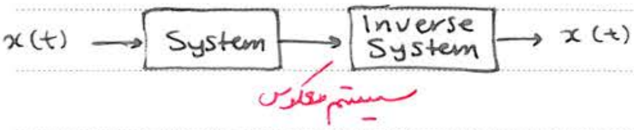
2) Invertibility & Inverse Systems :

معکوس پذیری و سیستم های معکوس

سیستمی معکوس پذیر است که بتوان با مشاهده خروجی، سیگنال ورودی را مشخص کرد.



سیستمی معکوس است که اگر آن ها را با سیستم روبرو، متوالی کنیم، ورودی اولیه را به عنوان خروجی به ما بدهد.



مثال : invertable: $y(t) = R\,x(t)$

3) Causal Systems & Causality :

سیستم های علّی

به سیستمی علّی می گوییم که خروجی در هر لحظه ای وابسته به ورودی در همان زمان یا زمان های گذشته باشد.

* فرق آن با حافظه دار این است که ممکن است سیستم های حافظه دار به زمان های آینده هم بستگی داشته باشند.
* سیستم های بدون حافظه، علّی هستند.

nonanticipative: زمان های آینده را نداریم، غیرقابل پیش بینی
anticipative: " " " داریم، قابل پیش بینی

4) Stability :

پایداری

سیستمی پایدار است (BIBO: Bounded Input, Bounded Output است) که کران ورودی باعث کران دار شدن خروجی شود.

5) Time-invarience (T.I) :

تغییرناپذیر با زمان

سیستمی T.I است که جابجایی زمانی در ورودی منجر به جابجایی زمانی (به همان اندازه) در خروجی شود.

مثال : $y(t) = R\,x(t)$: T.I است

C.T : $y(t) = \sin(x(t))$:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}x_1(t) = x(t-t_0)\\ y_1(t) = \sin(x(t-t_0))\end{cases}\\ y(t-t_0) = \sin(x(t-t_0))\end{array}\right] = \quad \Rightarrow$$ سیستم T.I است!

D.T : $y[n] = n\,x[n]$:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}x_1[n] = x[n-n_0]\\ y_1[n] = n\,x[n-n_0]\end{cases}\\ y[n-n_0] = (n-n_0)\,x[n-n_0]\end{array}\right] \neq \quad \Rightarrow$$ سیستم T.I نیست!

6) Linearity :

خطی بودن

سیستم های خطی از خاصیت جمع آثار (Superposition) پیروی می کنند .

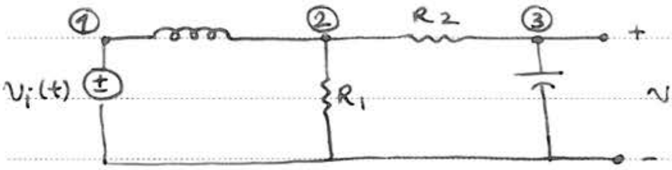
input	output
$x_1(t)$	$y_1(t)$
$x_2(t)$	$y_2(t)$

ضرایب ثابت a_2 , a_1 $\quad a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \longrightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$

اگر این رابطه را داشته باشیم ، سیستم خطی است : $\sum_i a_i x_i(t) \rightarrow \sum_i a_i y_i(t)$

پس اگر ورودی به سیستم ندهیم ، خروجی هم نباید داشته باشیم .

مثال :



ورودی : $V_i(t) \equiv x(t)$

خروجی : $V_o(t) \equiv y(t)$

$$② : \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{+\infty} (v_2(\tau) - v_1(\tau))\, d\tau + \frac{v_2(t)}{R_1} + \frac{v_2(t) - v_3(t)}{R_2} = 0$$

$$③ : \frac{v_3(t) - v_2(t)}{R_2} + C\frac{dv_3(t)}{dt} = 0$$

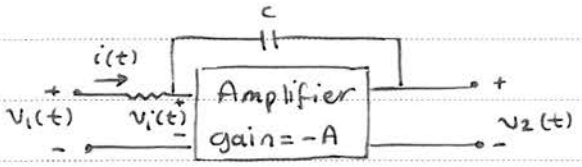
$$\left(\frac{R_2 LC}{R_1} + LC\right)\frac{d^2 v_3(t)}{dt^2} + \left(R_2 C + \frac{L}{R_1}\right)\frac{dv_3(t)}{dt} + v_3(t) = v_1(t)$$

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t)$$

معادله دیفرانسیل خطی درجه 2 با ضرایب ثابت :

$$a_2 = \frac{R_2 LC}{R_1} + LC$$
$$a_1 = R_2 C + \frac{L}{R_1}$$
$$a_0 = 1$$

مثال :



Amplifier input impedance $Z_{in} = \infty$

voltage gain $= -A$

zero output impedance $Z_{out} = 0$

$$v_1(t) = v_2(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau + Ri(t)$$

$$v_i(t) = v_1(t) - Ri(t)$$

$$v_2(t) = -Av_i(t)$$

$$\left.\begin{array}{l}(A+1)RC\dfrac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = -Av_1(t) \\ \dfrac{A}{A+1} \simeq 1 \\ (\text{large gain})\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{v_1(t)}_{x(t)} = -RC\frac{\overbrace{dv_2(t)}^{y(t)}}{dt}$$

Linear & Time - Invarient Systems (LTI) : سیستمی خطی است که بتوان آن را به وسیله جمع آثارش نشان داد.

خطی تغییر ناپذیر با زمان

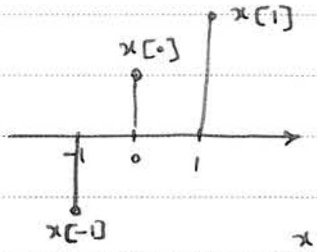
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Linear System}} \longrightarrow y[n]$$

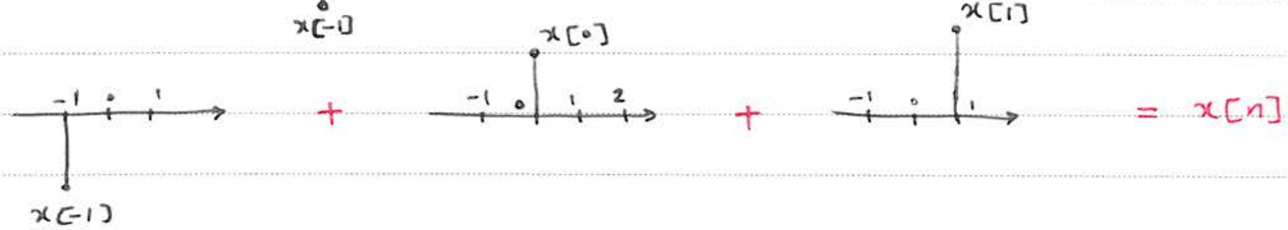
input	output
$x_1[n]$	$y_1[n]$
$\vdots$	$\vdots$
$x_N[n]$	$y_N[n]$
$\sum_k a_k x_k[n]$	$\sum_k a_k y_k[n]$

خاصیت غربالی : $x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$

$x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0]$

$x[n]$:





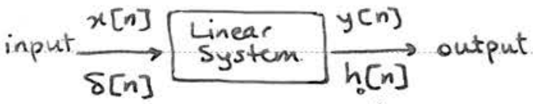
$x[-1]\,\delta[n+1]$ $\quad$ $x[0]\,\delta[n]$ $\quad$ $x[1]\,\delta[n-1]$

هر سیگنال D.T را می‌توان به این صورت نشان داد : $x[n] = \sum_k \underbrace{x[k]}_{a_k}\,\underbrace{\delta[n-k]}_{x_k[n]}$: به طور کلی

هر سیگنال " را می‌توان به صورت ترکیب وزن داری از خودش نوشت !

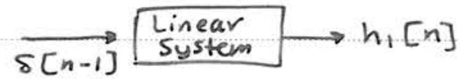
مثال : $y[n] = x[n] + 3$ ، incrementally linear است .

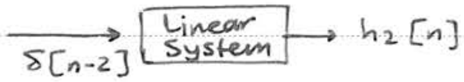
LIT Systems:

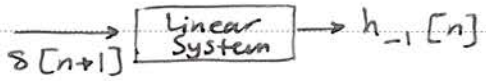


$$\Rightarrow \quad y[n] = h[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]}$$

خروجی به ازای ورودی δ[n]







In general:

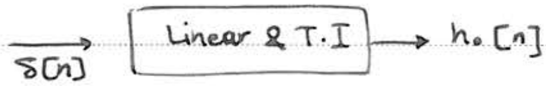
input: $x_K = \sum_K a_K x_K[n]$

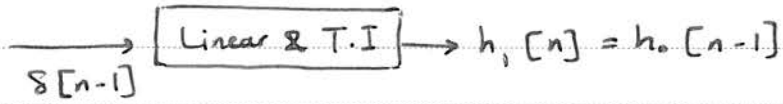
output: $y_K = \sum_K a_K y_K[n]$

$$x[n] = \sum_K \underbrace{x[K]}_{a_K} \underbrace{\delta[n-K]}_{x[K]}$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_K x[K]\, h_K[n]$$

T.I Systems:





⋮

به ازای هر ورودی کافی است $h_0[n]$ را داشته باشیم تا خروجی را بدست بیاوریم .

Linear & Time-Invarient Systems: $y[n] = \sum x[k]\, h_0[n-k]$

Convolution Sum

$h[n] =$ impulse response LIT پاسخ ضربه سیستم

Convolution: $y[n] = x[n] * h[n]$

$$= \sum_{k} x[k]\, h_{o}[n-k] \qquad \forall n$$

برای محاسبه Convolution :

1- $x[n] \rightarrow x[k]$: (تغییر متغیر) $n \rightarrow k$

$h[n] \rightarrow h[k]$

2- find $h[-k]$: reflect $h[k]$

3- find $h[n-k]$: time shift $h[-k]$ to n

4- find $x[k]h[n-k]$

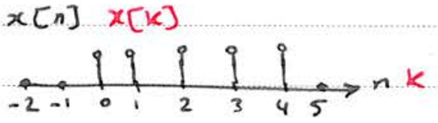
5- $\sum_{k} x[k]h[n-k]$: در بازه‌ای از مقادیر k که حاصل ضرب (4) غیر صفر است.

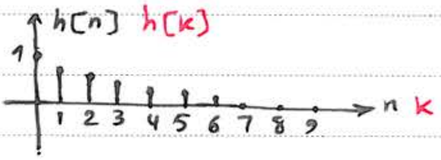
مثال:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant n \leqslant 4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

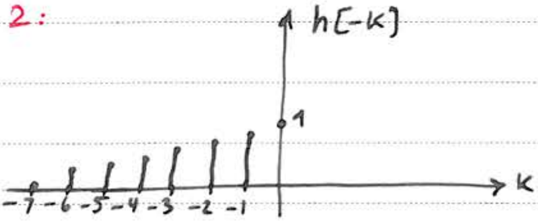
$$h[n] = \begin{cases} \alpha^{n} & 0 \leqslant n \leqslant 6 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \qquad 0<\alpha<1$$

1:

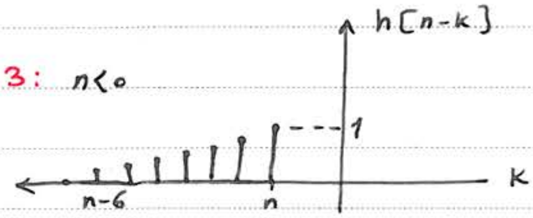




2:

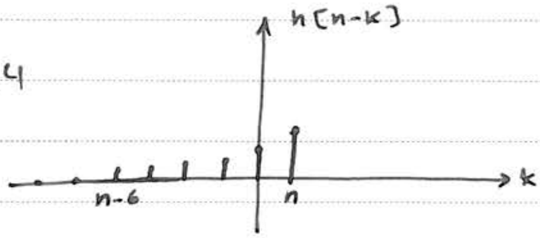


3: $n<0$



4 : $n<0 \Rightarrow x[k]\, h[n-k] = 0$

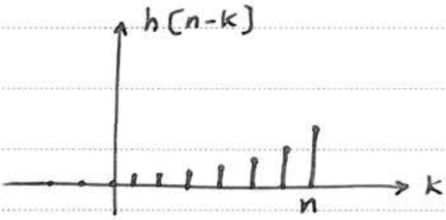
3 : $0 \leqslant n \leqslant 4$



4 : $0 \leqslant n \leqslant 4 \Rightarrow x[k]\, h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} \underset{r=n-k}{=} \sum_{n-r}^{n} \alpha^{r} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

3 : $n>4$
$n-6 \leqslant 0$



4 : $n>4$
$n-6 \leqslant 0 \Rightarrow x[k]\, h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \leqslant k \leqslant 4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$

$$\sum_{k} x_k h[n-k] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

4 : $n>6 \Rightarrow 6<n \leqslant 10$
$n-6 \leqslant 4$

$$\sum_{k=n-6}^{4} x_k h[n-k] = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{7}}{1-\alpha}$$

4 : $n-6>4 \Rightarrow n>10$

$$x_k h[n-k] = 0$$

مثال:

$x[n] = \alpha^n u[n] \qquad 0<\alpha \neq \beta<1$

$h[n] = \beta^n u[n]$

$$\left.\begin{array}{l} x[k] = \alpha^k u[k] \\ h[n-k] = \beta^{n-k} u[n-k] \end{array}\right\} \Rightarrow y_n = \sum_k x[k]h[n-k] = \sum_k \alpha^k u[k] . \beta^{n-k} u[n-k]$$

$$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases} \qquad u[n-k] = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k>n \end{cases}$$

پله‌ای واحد

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k (1) . \beta^{n-k} (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha^k . \beta^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \beta^n . \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

$$= \beta^n . \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} u[n]$$

روش سریع برای انجام Convolution:

$x[n] = 0 \quad \text{for} \quad n<N \qquad N \& M : \text{integer}$

$h[n] = 0 \quad \text{for} \quad n<M$

$$x[n] * h[n] = \begin{cases} 0 & n<N+M \\ \sum_{k=N}^{n-M} x[k]h[n-k] & n \geq N+M \end{cases}$$

سطر اول: $x[N] \quad x[N+1] \quad x[N+2] \quad \dots$

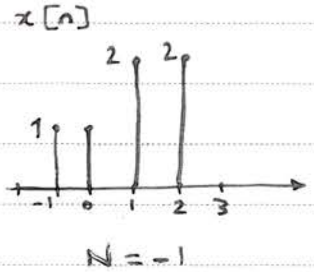
سطر دوم: $h[M] \quad h[M+1] \quad h[M+2] \quad \dots$

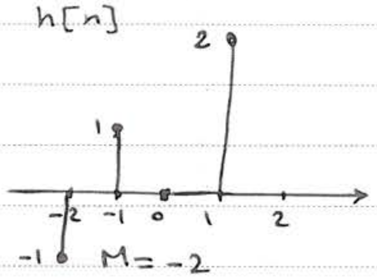
$$\begin{array}{lllll} h[M]x[N] & h[M]x[N+1] & h[M]x[N+2] & \dots & \\ & h[M+1]x[N] & h[M+1]x[N+1] & h[M+1]x[N+2] & \dots \\ & & h[M+2]x[N] & h[M+2]x[N+1] & \dots \\ + & & & & \\ \hline \end{array}$$

$y[M+N] = h[M]x[N] \qquad y[M+N+1] = h[M]x[N+1] + h[M+1]x[N] \qquad \dots$

* وقتی x[n] و h[n] تعداد نمونه های محدودی داشته باشند، این روش مناسب است.

مثال :





سطر اول x[n] :	1	1	2	2			
سطر دوم h[n] :	-1	1	0	2			
×	-1	-1	-2	-2			
		1	1	2	2		
			0	0	0	0	
				2	2	4	4
+							

$y[-3] = -1$, $y[-2]=0$, $y[-1]=-1$, $y[0]=2$, $y[1]=4$, $y[2]=4$, $y[3] = 4$

خواص Convolution :

1) Commutative جابجاپذیری

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum h[k]x[n-k]$$

2) Shift Propert جابجایی بازمان

$$y[n-n_0] = x[n] * h[n-n_0] = x[n-n_0] * h[n]$$

if $y[n] = x[n] * h[n]$

3) Convolution by $\delta[n]$ (ضرب واحد)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,\delta[n-k] = h[n]$$

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n\neq k \end{cases}$$

$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$$

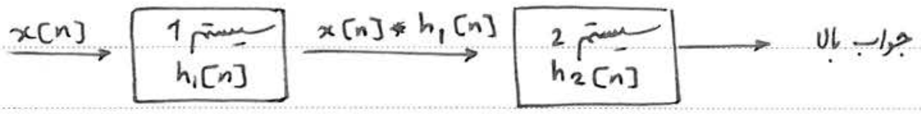
$$x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0]$$

پس داریم :

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$
$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

4) Associative شرکت پذیری

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



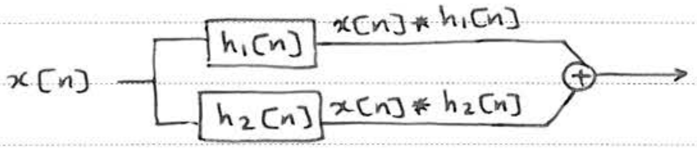
Series Cascade

=

$$* \; h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

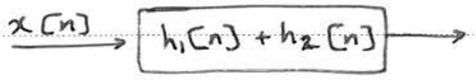
5) Distributive توزیع پذیری

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

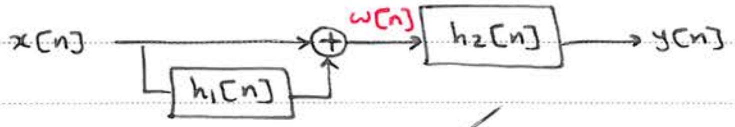


parallel

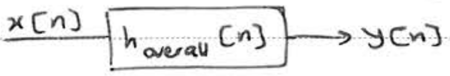
=



مثال :



می‌خواهیم سیستم روبرو را به جای معادل آن قرار دهیم ، $h_{overall}[n]$ را پیدا کنید :



$$\left.\begin{aligned} w[n] &= x[n] + x[n] * h_1[n] \\ y[n] &= w[n] * h_2[n] \end{aligned}\right\} \Rightarrow y[n] = (x[n] + x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

i) $h_{overall}[n] = y[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]}$ $\Rightarrow h_o[n] = (\delta[n] + \underbrace{\delta[n]*h_1[n]}_{h_1[n]}) * h_2[n]$

$$h_o[n] = (\delta[n] + h_1[n]) * h_2[n]$$

$$h_o[n] = \delta[n] * h_2[n] + h_1[n] * h_2[n]$$

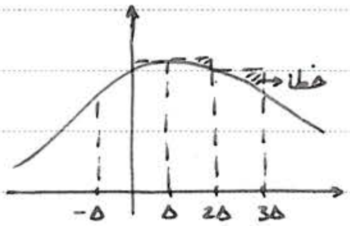
$$h_o[n] = h_2[n] + h_1[n] * h_2[n]$$

ii) $y[n] = x[n] * \underline{h_{overall}[n]}$

$$y[n] = (x[n] + x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad \Rightarrow h_o[n] = h_2[n] + h_1[n] * h_2[n]$$

$$= x[n] * \underline{(\delta[n] + h_1[n]) * h_2[n]}$$

C.T. Convolution:



$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$x(t) \sim \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\,\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{\text{Linear \& T.I System}} \longrightarrow y(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right) * h(t)$$

$$\Rightarrow x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

برای محاسبه Convolution :

1. تغییر متغیر : $x(t) \to x(\tau)$, $h(t) \to h(\tau)$
2. محاسبه $h(-\tau)$
3. time shift : $h(t-\tau)$
4. $x(\tau)\,h(t-\tau)$ محاسبه
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$ محاسبه

خواص Convolution :

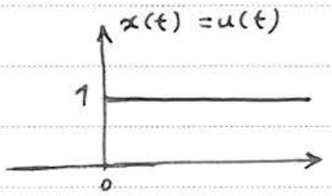
1. $x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$

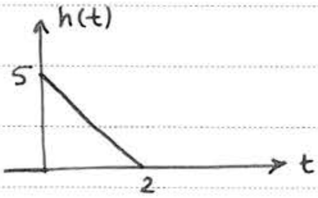
2. $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$

3. $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$

4. $x(t) * \delta(t) = x(t)$

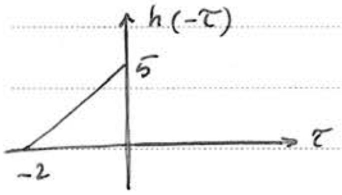
$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

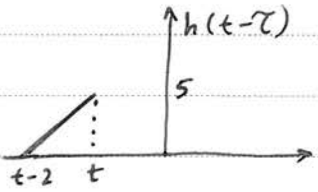




مثال : $h(t) = \begin{cases} -\frac{5}{2}t+5 & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$

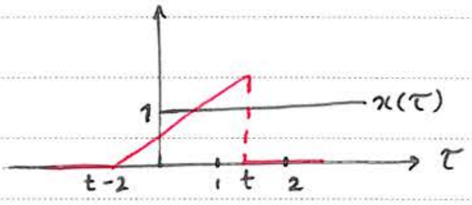
i) $t \leqslant 0$





$\Rightarrow y(t) = 0$

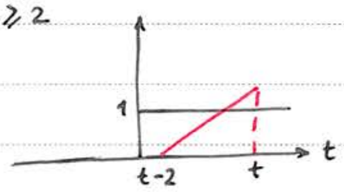
ii) $0 \leqslant t \leqslant 2$



$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \underline{h(t-\tau)}\, d\tau$

$= \int_{0}^{t} \left[-\frac{5}{2}(t-\tau)+5\right] d\tau = A$

iii) $t-2 \geqslant 0$ یا $t \geqslant 2$



$\Rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{t} \left[-\frac{5}{2}(t-\tau)+5\right] d\tau = B$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ A & 0<t<2 \\ B & t \geqslant 2 \end{cases}$$

مثال :

$f(x) = e^{-x^2} \quad \forall x$

$g(x) = 3x^2 \quad \forall x$

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \left(3(x-y)^2\right) dy$$

$$= 3x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy - 6x \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2} dy + 3 \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2} dy$$

$$= \sqrt{\pi}$$

Properties of LTI Systems :

1) memoryless / memory
input - output

خروجی در هر t وابسته به ورودی در زمان t باشد و به tهای قبلی و بعدی وابستگی نداشته باشد .

D.T. Systems (convolution) :

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

(I) $y[n] = \dots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] \dots$

پس باید داشته باشیم (برای memoryless بودن):

$h[n] = k\delta[n]$

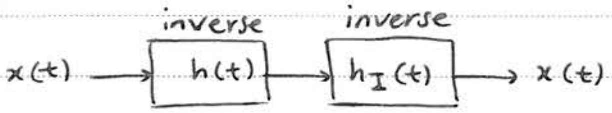
زیرا : $\underline{y[n]} = x[n] * h[n] = x[n] * k\delta[n]$

$$= k\underline{x[n]}$$

C.T. Systems :

$h(t) = k\,\delta(t)$

2) invertibility / inverse Systems



$\delta(t) = h(t) * h_I(t)$

3) Causability / Causal Systems

خروجی در زمان t به ورودی در زمان t یا زمان های گذشته وابسته باشد.

D.T : $h[n] = 0 \quad n<0$

با استفاده از معادله (I) داریم:

(برای علّی بودن باید ضرایب $x[k]$ هایی که $k>n$ بزرگتر است ، صفر شود!)

C.T : $h(t) = 0 \quad t<0$

مثال: $h(t) = u(t)$

4) Stability / Stable Systems

D.T: bounded input : $|x[n]| < B \rightarrow$ عدد ثابت

مثال: $x[n] = \sin n$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]\right| \Rightarrow |y[n]| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]\, x[n-k]|$$

$$\leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\,|x[n-k]|$$

$$\leqslant B \underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]|}_{\text{bounded}}$$

$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ پاسخ ضربه سیستم مطلقاً جمع پذیر:

C.T :

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$ پاسخ ضربه سیستم مطلقاً انتگرال پذیر:

مثال: $h[n] = (0.99)^n u[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |(0.99)^n u[n]| < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|(0.99)^n|}_{\frac{1}{1-0.99}} < \infty \Rightarrow \text{Stable}$$

Derivative Property : (for C.T.)

$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$= \int h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int h(\tau) \frac{d}{dt}\left(x(t-\tau)\right) d\tau = h(t) * x^{\circ}(t)$$

$$\Rightarrow y^{\circ}(t) = h(t) * x^{\circ}(t) = h^{\circ}(t) * x(t)$$

$$y^{\circ\circ}(t) = h(t) * x^{\circ\circ}(t) = h^{\circ\circ}(t) * x(t) = h^{\circ}(t) * x^{\circ}(t) \quad \ldots$$

* استدلال نیز به همین صورت است!

C.T. :

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{\text{LIT System}} \rightarrow h(t)$$ پاسخ ضربه

$$u(t) \rightarrow \boxed{\text{LIT System}} \rightarrow g(t)$$ پاسخ پله واحد (unit step response)

$$g(t) = x(t) * h(t) = u(t) * h(t)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = g^{\circ}(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(u(t)\right)}_{\delta(t)} * h(t) = u(t) * \frac{d}{dt}\left(h(t)\right)$$
$$= \delta(t) * h(t) = h(t)$$

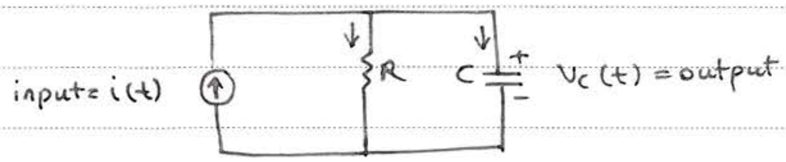
$$\boxed{h(t) = \frac{d}{dt} g(t)}$$

D.T: $x[n] = u[n] \rightarrow \boxed{\text{LIT}} \rightarrow y[n]$, $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

$$g[n] = u[n] * h[n] = \left(\delta[n] + u[n-1]\right) * h[n]$$
$$= \underbrace{\delta[n] * h[n]}_{h[n]} + \underbrace{u[n-1] * h[n]}_{g[n-1]}$$

$$\Rightarrow \boxed{h[n] = g[n] - g[n-1]}$$

مثال :



$$\text{KCL}: \quad i(t) = i_R(t) + i_c(t)$$

$$i(t) = \frac{V_c(t)}{R} + c\,\frac{d\,V_c(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow c\,\frac{dy(t)}{dt} + \frac{y(t)}{R} = x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{y(t)}{RC} = \frac{x(t)}{c}$$

درصورتی که خازن شارژ اولیه نداشته باشد :

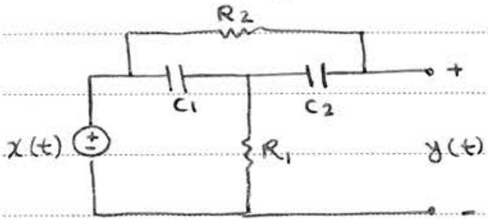
$$y(t) = \int_{0^-}^{t} \frac{1}{c}\, e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}\, x(\tau)\, d\tau \quad \text{for} \quad t \geqslant 0$$

$$\text{if} \quad x(\tau) = \delta(\tau)$$

$$h(t) = \frac{1}{c}\, e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad \underline{t \geqslant 0}$$

$$h(t) = \frac{1}{c}\, e^{-\frac{1}{RC}t}\, \underline{u(t)} \qquad \Rightarrow \ldots, \text{stable, causal, has memory}$$

مثال :



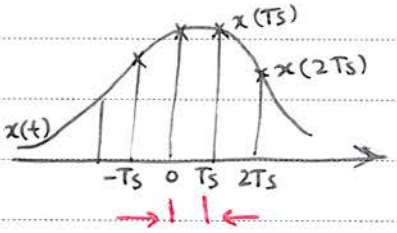
$$R_1C_1\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(1 + \frac{R_1C_1}{R_2C_2} + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{R_2C_2}\,y(t) = R_1C_2\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1C_1}{R_2C_2} + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{R_2C_2}\,x(t)$$

← در واقع داریم :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\,\frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k\,\frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad (\text{C.T})$$

a_k و b_k ضرایب ثابت هستند : معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت از درجه N (Nth order)

Sampling:



$$x(t)\Big|_{t=K\underbrace{T_s}}$$

فاصله نمونه برداری
دوره تناوب نمونه برداری (Sampling Period)

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=bx(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=nTs}+ay(t)\Big|_{t=nTs}=bx(t)\Big|_{t=nTs}$$

$$\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=nTs}+ay(nT_s)=bx(nT_s)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=nTs}\approx\underbrace{\frac{y((n+1)Ts)-y(nTs)}{Ts}}_{\text{شیب منحنی}}$$

$$\text{if}\quad Ts=1\Rightarrow\frac{dy(t)}{dt}=y[n+1]-y[n]$$
$$=y[n]-y[n-1]$$

مشتق را می توانیم با تفاضل تقریب بزنیم:

$$\Rightarrow y[n]-y[n-1]+ay[n-1]=bx[n-1]$$

$$y[n]+(a-1)y[n-1]=bx[n-1]$$ Difference Equation معادله تفاضلی

خطی درجه 1 با ضرایب ثابت

مثال:

$$c\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{R}y(t)=x(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Sampling}} y[n]-\left(1-\frac{Ts}{Rc}\right)y[n-1]=\frac{Ts}{c}x[n-1]$$

if Ts = 1, for D.T. LTI Systems in general (input-output relation):

$$\sum_{K=0}^{N}a_K\,y[n-k]=\sum_{K=0}^{M}b_k\,x[n-k]$$

حل معادله دیفرانسیل :

$y[n] - a_0 y[n-1] = -x[n]$

$y[n] = a_0 y[n-1] - x[n]$

initial value $y[0]$ is known

$n=1$: $y[1] = a_0 y[0] - x[1]$

$n=2$: $y[2] = a_0 \underbrace{y[1]} - x[2]$

$y[2] = a_0 (a_0 y[0] - x[1]) - x[2]$

$= a_0^2 y[0] - a_0 x[1] - x[2]$

$n=3$: $y[3] = a_0 y[2] - x[3]$

$= a_0 (a_0^2 y[0] - a_0 x[1] - x[2]) - x[3]$

$= a_0^3 y[0] - a_0^2 x[1] - a_0 x[2] - x[3]$

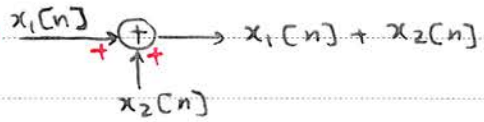
then: $y[n] = a_0^n y[0] - \sum_{k=1}^{n} a_0^{n-k} x[k]$

← در واقع داریم : $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ (D.T)

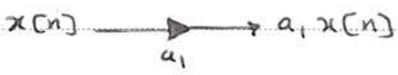
Block-diagram representation of L.T.I Systems :
نمایش بلوک

D.T. adders, multipliers, delay عناصر

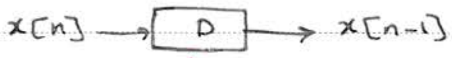
Adder:



Multiplier:



Delay:



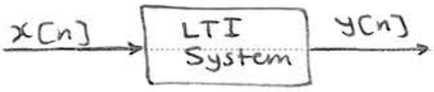
یا

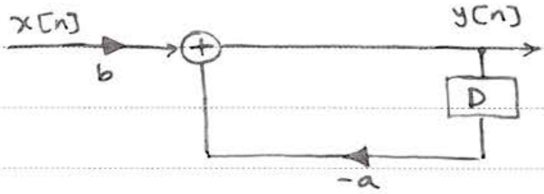
$x[n] \xrightarrow{z^{-1}} x[n-1]$

مثال:

$y[n] + a\,y[n-1] = b\,x[n]$

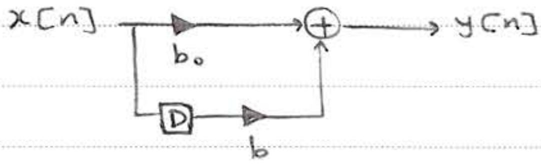
$y[n] = -a\,y[n-1] + b\,x[1]$





مثال:

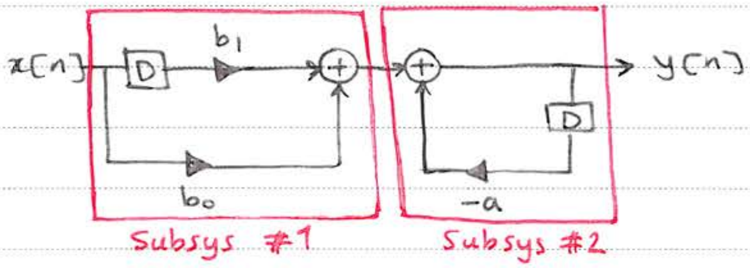
$y[n] = b_0\,x[n] + b\,x[n-1]$



مثال:

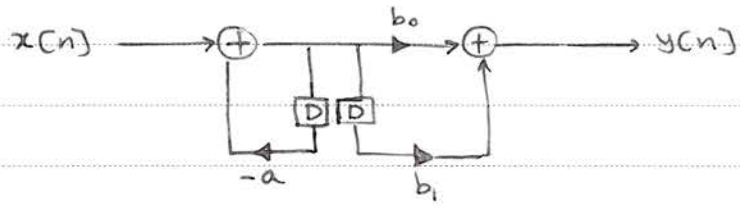
$y[n] + a\,y[n-1] = b_0\,x[n] + b_1\,x[n-1]$

$y[n] = -a\,y[n-1] + b_0\,x[n] + b_1\,x[n-1]$

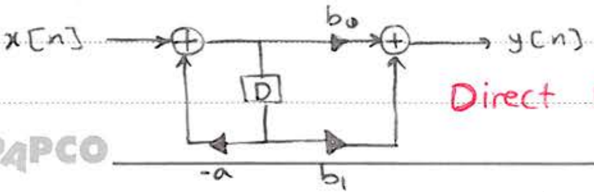


Direct Form 1

طبق خاصیت جابجایی : $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$



به لحاظ سخت افزاری، بهتر است تعداد delay کمتر باشد:

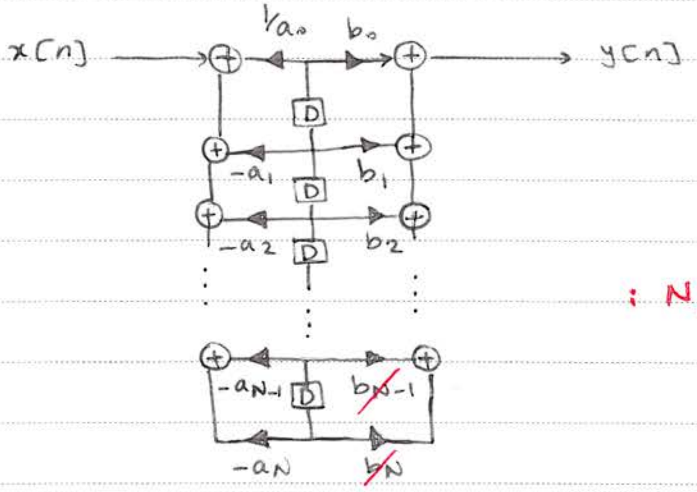


Direct Form 2

In general form 1, :

$$y[n] = 1/a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\}$$

Direct form 2, : M = N



: N>M

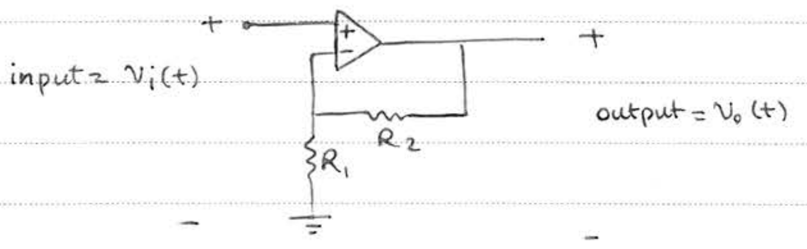
C.T. عناصر: مشتق‌گیر، ضرب‌کننده، جمع‌کننده

مشتق‌گیر:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow \frac{dx(t)}{dt}$$

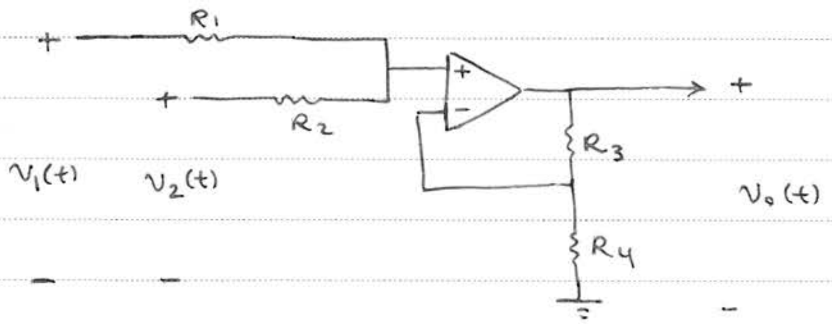
انتگرال‌گیر:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$



برای ضرب کننده Hardware :

$$V_o = \underbrace{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}_{a_0} v_i$$



جمع وزن‌دار سیگنال‌های ورودی :

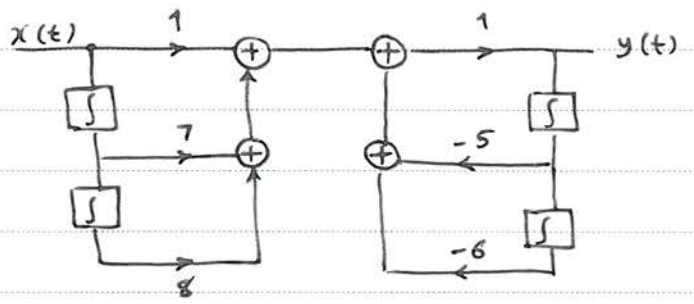
$$v_o(t) = \underbrace{\frac{R_2(R_3+R_4)}{R_4(R_1+R_2)}}_{a_1} v_1(t) + \underbrace{\frac{R_1(R_3+R_4)}{R_4(R_1+R_2)}}_{a_2} v_2(t)$$

* اگر بخواهیم ضرایب منفی شوند باید به ورودی منفی Opamp ورودی‌ها را وارد نماییم .

مثال :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 7\frac{dx(t)}{dt} + 8x(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -5\frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 7\frac{dx(t)}{dt} + 8x(t)$$

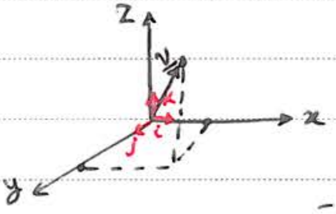


Generalized Fourier Series:

Orthogonal Functions:

Vectors: $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

3-D:



$\left\{ \underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

basis vector set مجموعه بردارهای پایه

* معنی آن این است که هر برداری را در فضای برداری (Vector space) می توانیم با استفاده از این بردارها نمایش دهیم :

$\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

$= x.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} \|i\| = \|j\| = \|k\| = 1 \\ \|i\| = i . i = 1 \end{cases}$ *

ویژگی های بردارهای پایه :

1. they are independent مستقل

هیچ کدام از این بردارها را نمی توانیم برحسب سایر بردارهای پایه بنویسیم .

2. they are mutually orthogonal متعامد

i.e. $\underline{v} . \underline{w} = 0$

(inner product) ضرب داخلی : $\|\underline{v}\| . \|\underline{w}\| . \cos\alpha = 0$

یعنی : $\underline{i}^T\underline{j} = 0$, $\underline{i}^T\underline{k} = 0$, $\underline{j}^T\underline{k} = 0$

$\underline{i}^T\underline{j} = \begin{cases} 0 & \underline{i} \neq \underline{j} \\ 1 & \underline{i} = \underline{j} \end{cases}$

T: Transpose $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \rightarrow [0 \quad 1 \quad 0]$

$\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ n-D Orthogonal set

فرض کنید یک سیگنال C.T داریم که در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ تعریف شده است. می‌خواهیم f را برحسب مجموعه سیگنال $[t_1, t_2]$: بنویسیم:

$$f(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t)$$

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(t)$$ نزدیک‌ترین تقریب به f(t)

means: $$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\,\phi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i & i = j \end{cases}$$ شرط متعامد بودن

* برای اندازه‌گیری تقریب شاخص روبرو را تعریف می‌کنیم:

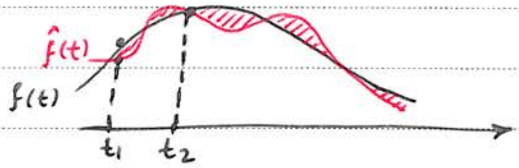
MSE ≡ mean square error

⇐ تابع $\hat{f}(t)$ به f(t) نزدیک‌تر است اگر MSE کمترین مقدار را داشته باشد:

$$e(t) = f(t) - \hat{f}(t)$$

error function

میانگین این خطا را در نظر می‌گیرند.



* اگر مساحت هاشورها نزدیک به صفر شود، تقریب دقیق‌تر است.

$$MSE \equiv \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} e^2(t)\,dt$$ کمی کردن تقریب $\hat{f}(t)$ نسبت به f(t)

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \Big(f(t) - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{c_i}\,\phi_i(t)\Big)^2 dt$$

چه ضرایبی را به کار ببریم که تقریب بهتری داشته باشیم، یعنی mse مینیمم شود!

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}\big(f(t) - (c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t))\big)\right]^2 dt$$

$$= \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\Big[f^2(t) + c_1^2\phi_1^2(t) + \cdots + c_n^2\phi_n^2(t) - 2c_1 f(t)\phi_1(t) + \cdots - 2c_n f(t)\phi_2(t) + 2c_1c_2\phi_1(t)\phi_2(t) + \cdots + 2c_{n-1}c_n\phi_{n-1}(t)\phi_n(t)\Big]dt$$

iامین ترم: $$c_i^2\int_{t_1}^{t_2}\phi_i^2(t)\,dt = c_i^2 K_i$$

$$\ast \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \varnothing_i(t)\, dt = \gamma_i$$

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} \Big[f^2(t)\, dt + c_1^2 K_1 + c_2^2 K_2 + \cdots + c_n^2 K_n^2 - 2c_1\gamma_1 - 2c_2\gamma_2 - \cdots - 2c_n\gamma_n \Big]$$

$$\ast\ c_i^2 k_i - 2c_i\gamma_i = \left(c_i\sqrt{k_i} - \frac{\gamma_i}{\sqrt{k_i}}\right)^2 - \frac{\gamma_i^2}{k_i}$$

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{t_2-t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(c_i\sqrt{k_i} - \frac{\gamma_i}{\sqrt{k_i}}\right)^2}_{} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i^2}{k_i} \right]$$

تنها قسمتی که می‌تواند باعث کم شدن mse
شود، این قسمت است چون شامل ضرایب
است :

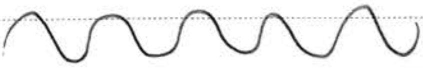
$$c_i\sqrt{k_i} = \frac{\gamma_i}{\sqrt{k_i}} \Rightarrow \bar{\varepsilon}^2 \text{ is minimized}$$

$$\boxed{c_i = \frac{\gamma_i}{k_i} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \varnothing_i(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varnothing_i^2(t)\, dt}}$$

مثال: آیا این مجموعه Orthogonal است؟

$$\left\{ \cos\frac{2\pi k t}{T} \right\} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\cos(k\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



$$\int_{\langle T\rangle} \cos\left(\frac{m2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases} \Rightarrow \text{Orthogonal}$$

درمقایسه با تعریف Orthogonal set !

Complete Set:

مجموعه‌ای کامل است که هر سیگنالی را بتوانیم با آن مجموعه نشان دهیم.

سیگنال‌های فرد → Sin

سیگنال‌های زوج → Cos

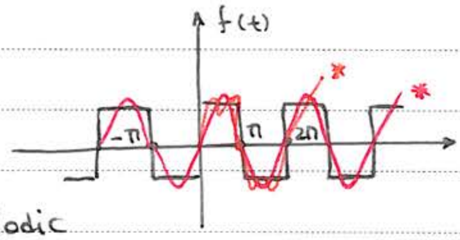
real function: به‌ازای هر t، یک عدد حقیقی بدست می‌آوریم.

if $\{\varnothing_i(t)\}$ is a complex set (توابعی که در این مجموعه استفاده می‌شوند، مختلط هستند.)

then: $$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \overset{*}{\varnothing_i}(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varnothing_i(t)\, \overset{*}{\varnothing_i}(t)\, dt}$$

$* \rightarrow$ conjugate

مثال:



periodic
$T_0 = 2\pi$

مجموعه سیگنال‌های پایه: $\{\varnothing_n(t)\} = \{\sin(n\omega_0 t)\}$

ω_0: fundamental frequency

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\int_{\langle T_0 \rangle} \sin(m\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T_0/_2 & m = n \end{cases}$$

$\langle T_0 \rangle$: فاصله به اندازه یک دوره تناوب

به همین ترتیب:

$$\int_{\langle T_0 \rangle} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T_0/_2 & m = n \end{cases}$$

$\omega_0 = 1$ $\{\varnothing_n(t)\} = \{\sin(nt)\}$

$$\int_{\langle 2\pi \rangle} \sin(nt) \sin(mt)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T_0}{2} = \frac{2\pi}{2} = \underset{K_0}{\boxed{\pi}} & m = n \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} f(t) \, \sin(nt) \, dt$$

$$c_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} (1) \sin(nt) \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin(nt) \, dt \right] = \begin{cases} 4/\pi n & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases}$$

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \sin(nt)$$

$\hat{f}(t) = c_1 \sin(t) = \frac{4}{\pi} \sin(t)$ * شکل صفحه قبل

recall:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) \, dt - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\gamma_i^2}{K_i}}_{c_i^2 K_i} \right\}$$

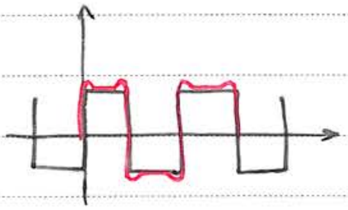
$$n=1: \quad MSE = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} f^2(t) \, dt - c_1^2 K_1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\pi - \pi (4/\pi)^2 \right\} \cong 0.19$$

$\hat{f}(t) = c_1 \sin(t) + c_3 \sin(3t)$ * شکل صفحه قبل

$$n=3: \quad MSE = 1 - 1/2 (4/\pi)^2 - 1/2 (4/3\pi)^2 \approx 0.1$$

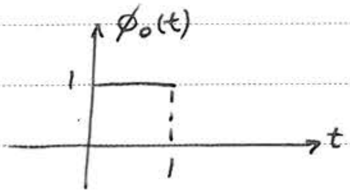
$n \to \infty$:



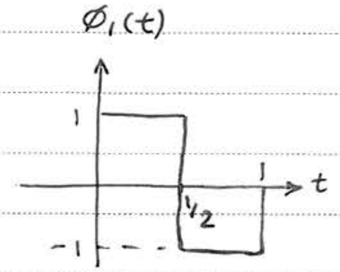
در نقاط ناپیوستگی تیزی دارد!

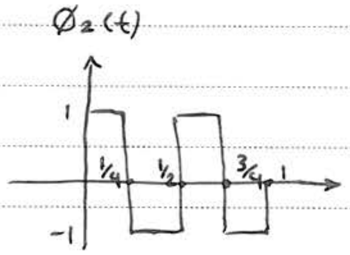
Walsh Functions:

سیگنال های walsh در فاصله [0,1] تعریف می شوند.



اولین سیگنال مجموعه





Orthogonal: $\int_0^1 \phi_i(t)\,\phi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

$$\phi_{m+1}^{(2k-1)}(t) = \begin{cases} \phi_m^{(k)}(2t) & 0 \leqslant t < 1/2 \\ (-1)^{k+1}\,\phi_m^{(k)}(2t-1) & 1/2 < t \leqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} m = 1,2,3,\ldots \\ k = 1,2,\ldots,2^{m-1} \end{array}$$

legendre Polynominals:

$[-1,1]$

$\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\phi_1(t) = t \cdot \sqrt{3/2}$

$\vdots$

$$\phi_n(t) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} P_n(t) \quad \text{where} \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

$$C_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\phi_n(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_n^2(t)\,dt} \quad \text{where} \quad f(t) = f(t') \qquad t' = \frac{t}{\pi} \rightarrow \text{scaling}$$

به عنوان مثال، در مثال قبل داریم :

$$C_0 = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)\,\phi_0(t)\,dt}{\int_{-1}^{1} \phi_0^2(t)\,dt} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{f(t')}{\sqrt{2}}\,dt}{\int_{-1}^{1} 1/2\,dt} = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\,dt = \frac{-1}{\sqrt{2}}\Big]_{-1}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big]_{0}^{1} = 0$$

$C_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$C_2 = 0$

$C_3 = \sqrt{7/16}$

$$\hat{f}(t) = \overset{0}{\cancel{C_0\,\phi_0(t)}} + C_1 \cdot t \cdot \sqrt{3/2} + \overset{0}{\cancel{C_2\,\phi_2(t)}} + C_3\sqrt{3/2}\left(3/2\,t^2 - 1/2\right) = \ldots$$

Laguerre Functions :

$$\phi_n(t) = \frac{1}{n!} e^{-t^2/2} L_n(t)$$

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n \cdot e^{-t}) \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

توابعی که تاالان معرفی شده‌اند، حقیقی بودند. در زیر چند نمونه از توابع مختلط را بیان می‌کنیم.

$\{e^{jn\omega_0 t}\}$ توابع نمایی مختلط هماهنگ

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Synthesis Ex.

$$f(t) = \sum_{\underset{\text{integer}}{\underset{\downarrow}{n=-\infty}}}^{+\infty} \underset{\text{spectral coefficients}}{\underset{\searrow}{C_n}} \; \underset{\to \text{periodic}}{e^{jn\omega_0 t}}$$

fourier series representation

نمایش سری فوریه

ضرایب طیفی

$$= \int_{\langle T_0 \rangle} e^{jn\omega_0 t} (e^{jm\omega_0 t})^* \, dt$$

$$= \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j(n-m)\omega_0 t} \, dt = \begin{cases} T_0 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Analysis Ex.

$$C_n = \frac{\int_{\langle T_0 \rangle} f(t) \phi_n^*(t) \, dt}{\int_{\langle T_0 \rangle} \phi_n(t) \phi_n^*(t) \, dt}$$

ضرایب طیفی به این طریق پیدا می‌شوند

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt}$$

مثال:

f(t) is periodic

in one period : $f(t) = e^{-t}$ $[-1, 1]$ $T_0 = 2$

$$C_K = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-t} \cdot e^{-jK\omega_0 t} \, dt = 1/2 \int_{-1}^{1} e^{-(1+jK\omega_0)t} \, dt$$

$$C_K = \frac{(-1)^K (1 + jK\pi) \sinh(1)}{1 + \pi^2 K^2} \longleftarrow \underline{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \Longrightarrow \hat{f}(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} C_K e^{jK\pi t}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

مقایسه

$$f(t) = \underbrace{d_0}_{\substack{n=0 \\ \text{DC term}}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right)$$

$$\phi_n(t) = \{\cos(n\omega_0 t) \,,\, \sin(n\omega_0 t)\}$$

اگر بخواهیم بین C_n و a_n ، b_n و d_0 ارتباطی پیدا کنیم، کافی است $e^{jk\omega_0 t}$ را به صورت ... $\sin + \dots$ بنویسیم و دو رابطه بالا را باهم مقایسه کنیم :

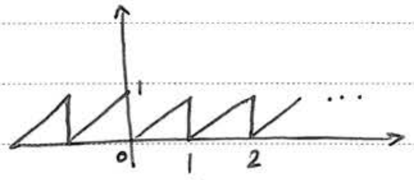
$$C_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - jb_n}{2} & n = 1, 2, \dots \\ d_0 & n = 0 \\ \dfrac{a_{-n} + jb_{-n}}{2} & n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\{C_n\}$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}\{C_n\}$$

$$\begin{cases} d_0 = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\,dt \\ a_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\ b_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \end{cases}$$

مثال :



$\underbrace{T_0 = 1}$ $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi$

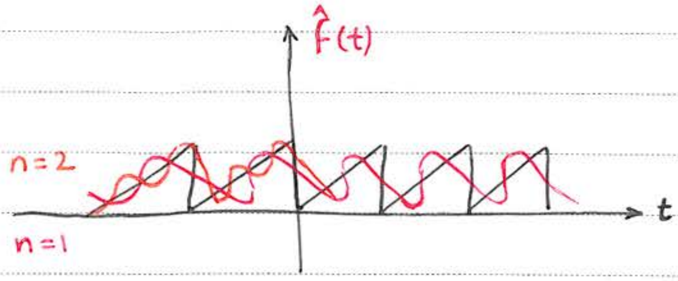
$$f(t) = d_0 + \sum_n a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$d_0 = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\,dt = 1/2$$

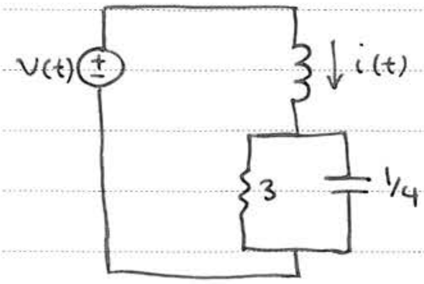
$$a_n = 0$$

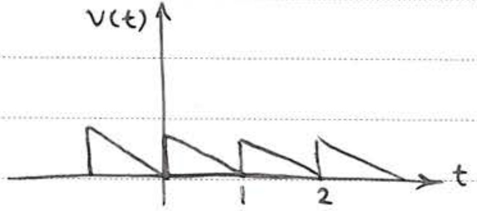
$$b_n = 2/1 \int_0^1 (t)\sin(n \times 2\pi t)\,dt = \frac{-1}{\pi n}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{\pi n}\right)\sin(2\pi n t)$$



مثال:





$T_0 = 1 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$

$$v(t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n\pi} \cdot \sin(2\pi n t)$$

$v_0(t) = 50$ $\quad i_0(t)$

$v_1(t) = \frac{100}{\pi} \sin(2\pi t)$ $\quad i_1(t)$

$\vdots$ $\quad \vdots$

$v_n(t) = \frac{100}{n\pi} \sin(2\pi n t)$ $\quad i_n(t)$

$+$ $\quad +$

$v(t)$ $\quad i(t)$

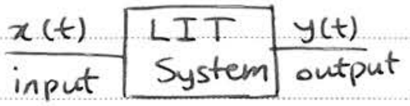
$v_0(t) \longrightarrow i_0(t) = \frac{50}{3}$

$v_1(t) \longrightarrow i_1(t) = 2.66\, e^{j(2\pi t - 89)}$

$\vdots$

$$v_n(t) \longrightarrow i_n(t) = \frac{100}{\pi n} \sqrt{\frac{an^2\pi^2+4}{144n^4\pi^4-12n^2\pi^2+36}} \cdot \sin\left(2n\pi t - \arctan\left(\frac{3}{3\pi n}\right) - \arctan\left(\frac{12n^2\pi^2-6}{8\pi n}\right)\right)$$

LIT Systems:



پاسخ ضربه h(t) → impulse response

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

when $x(t) = e^{st}$

then $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$

$$y(t) = \underbrace{e^{st}}_{\substack{\text{magnitude} \\ \text{phase}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{H(S)}$$

(اندازه فاز)

اگر s فرکانس سیگنال ورودی باشد و سیستم ما LIT باشد، فرکانس خروجی هم s است!

e^{st} : eigen function of LIT systems

$H(s)$: eigen value of LIT

جبر خطی :

$$\underset{n\times n}{[A]}\, x = \lambda x$$

λ: مقدار ثابت — eigen value: مقدار ویژه

x: eigen vector بردار ویژه

اگر این سیگنال به عنوان ورودی باشد :

Now: $x(t) = \underbrace{a_1 e^{S_1 t} + a_2 e^{S_2 t} + a_3 e^{S_3 t}}_{\text{ضرایب ثابت}}$

با توجه به خطی بودن سیستم و نتیجه قبلی

$$y(t) = a_1 e^{S_1 t} H(S_1) + a_2 e^{S_2 t} H(S_2) + a_3 e^{S_3 t} H(S_3)$$

تعمیم دادن به نتیجه قبلی : $x(t) = \sum_K a_K e^{S_K t}$

آنگاه : $y(t) = \sum_K a_K H(S_K) e^{S_K t}$

where $H(S_K) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-S_K \tau} d\tau$

if $x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} C_K e^{jK\omega_0 t}$ سری فوریه

مقایسه با روابط قبلی : $S_K = jK\omega_0$

then: $y(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \underbrace{C_K H(jK\omega_0)}_{b_K \text{ ضرایب سری فوریه}} e^{jK\omega_0 t}$

sometimes we have: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k H(j\omega) e^{j\omega t} \Big|_{\omega = k\omega_0}$

where: $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega t} d\tau \Big|_{\omega = k\omega_0}$

مثال : $x(t) = Sin(4\pi t) + Cos(6\pi t + \pi/4)$ $\begin{cases} T_0 = 1 \\ \omega_0 = 2\pi \end{cases}$

پاسخ ضربه : $h(t) = e^{-4t} u(t)$

راه اول : می‌توانیم از رابطه $y(t) = x(t) * h(t)$ استفاده کنیم و با فرمول سری فوریه جواب را مقایسه کنیم.

سری فوریه سیگنال های ورودی : $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk2\pi t}$

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

راه دوم : $x(t) = \frac{1}{2j}\left\{ e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t} \right\} + \frac{1}{2}\left\{ e^{j(6\pi t + \pi/4)} + e^{-j(6\pi t + \pi/4)} \right\}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2j} e^{j(2)2\pi t}}_{C_2} \underbrace{- \frac{1}{2j} e^{-j(2)2\pi t}}_{C_{-2}} + \underbrace{1/2\, e^{j\pi/4} e^{j(3)2\pi t}}_{C_3} + \underbrace{1/2\, e^{-j\pi/4} e^{-j(3)2\pi t}}_{C_{-3}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} k=2 & C_2 = \frac{1}{2j} \\ k=-2 & C_{-2} = \frac{-1}{2j} \\ k=3 & C_3 = e^{j\pi/4} \times 1/2 \\ k=-3 & C_{-3} = e^{j\pi/4} \times 1/2 \end{array}\right\}$$

ضرایب سری فوریه سیگنال ورودی

$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4} \Big|_{\omega = k\omega_0 = k2\pi}$ $K = 2, -2, 3, -3$

then:

$b_k = c_k H(jk\omega_0)$ ضرایب سری فوریه خروجی :

$b_2 = c_2 H(j2\underset{2\pi}{\underline{\omega_0}}) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{j4\pi+4}$

$b_{-2} = \dots$

$b_3 = \dots$

$b_{-3} = \dots$

Review :

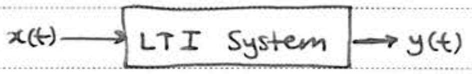
$f(t)$ is periodic with T_0

F.S. representation of $f(t)$: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{c_k} e^{jk\omega_0 t}$

$\downarrow$ ضرایب ثابت سری فوریه

complex/real

یک فاز دارند و یک اندازه : فاز نشان می دهد هر کدام از ضرایب چگونه این سیگنال ها را با هم ترکیب می کنند . هرچه اندازه بزرگتر باشد ، تاثیر ضریب بیشتر است .



$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$

if $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 (t-\tau)} d\tau$

$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \underbrace{\int h(\tau)\, e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau}_{H(j\omega)}$

$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a_k H(j\omega)}_{b_k}$

$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$

$H(\omega)$ = Frequency Response of LIT System (پاسخ فرکانسی)

خواص سری فوریه:

1. $f(t) \xleftrightarrow{F.S.C} a_k$

$f(t-t_0) \longleftrightarrow \underbrace{e^{-jk\omega_0 t_0}}_{\substack{\text{magnitude} = 1 \\ \text{phase}}} a_k$ → Shift در سیگنال فوریه، اندازه‌ی آن را تغییر نمی‌دهد فقط موجب تغییر فاز می‌شود.

2. $x(t)$ is real signal

مزدوج ← Conjugate $a_k^{\circledast} = a_{-k}$

3. Parsavel's property:

$$\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |f(t)|^2 dt}_{\text{انرژی سیگنال در یک دوره تناوب}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

4. periodic (T_0) $\begin{cases} x_1(t) \xleftrightarrow{F.S.C} a_k \\ x_2(t) \xleftrightarrow{\quad "\quad} b_k \end{cases}$ $\Rightarrow \underbrace{x_3(t)}_{\substack{\text{periodic} \\ (T_0)}} = x_1(t) \cdot x_2(t) \xleftrightarrow{F.S.C} C_k$

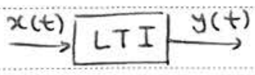
$C_k = a_k \underset{-}{*} b_k = \sum_\ell a_\ell b_{k-\ell}$

discrete Convolution

5. $f(t) \xleftrightarrow{F.S.C} a_k$

$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\quad "\quad} (j\omega)a_k$

مثال: (خاصیت 3) W را به نحوی تعیین کنید که میانگین انرژی سیگنال خروجی برابر با 90% میانگین انرژی سیگنال ورودی باشد!



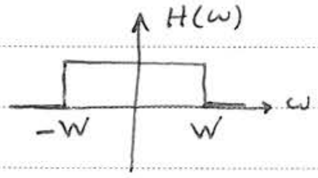
F.S. representation of $x(t)$: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|k|} e^{+jk(\pi/4)t}$, $|\alpha|<1$

فرم کلی سری فوریه: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$\Rightarrow a_k = \alpha^{|k|}$, $\omega_0 = \pi/4$

$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$

فیلتر پایین گذر
low-pass Filter



Average energy per period for $x(t)$ $= \frac{1}{T}\int |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \alpha^{|k|} \right|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{2k} + \underbrace{\sum_{k=+\infty}^{+1} \alpha^{+2k}}_{\sum_{0}^{+\infty}\alpha^{2k}-1}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{2k} - 1$$

$$= 2\frac{1}{1-\alpha^2} - 1 = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

ضرائب سری فوریه خروجی $b_k = a_k H(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$

$$\sum_{k=-N+1}^{N-1} |b_k|^2 = 0.9\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$$

$$\sum_{k=-N+1}^{N-1} |a_k \underbrace{H(jk\omega_0)}_{1}|^2 = 0.9\,\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

$$\sum_{k=-N+1}^{N-1} \alpha^{2|k|} = 0.9\,\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \Rightarrow N?$$

بحث همگرایی:

$x(t)$ باید چه سیگنالی باشد یا چه صورتی داشته باشد که وقتی ضرایب را بدست می‌آوریم، انتگرال زیر همگرا شود!

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \rightarrow \text{همگرا}$$

if: $\int_{\langle T_0\rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$ ⇒ تضمین می‌کند مقدار انتگرال ضرایب همگرا است.

but: اگر در سیگنال ناپیوستگی وجود داشته باشد. ⇒ تضمین نمی‌کند!

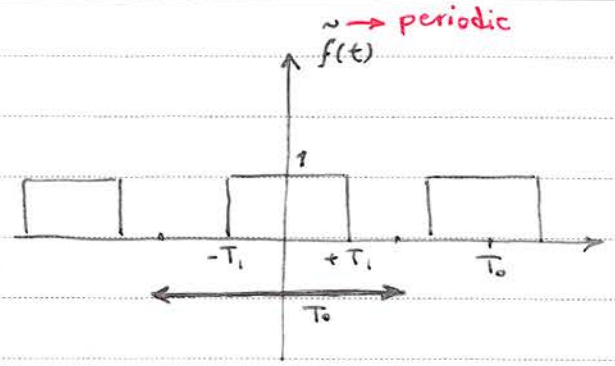
شرط دیریکله (Dirichlet)

i) $\int_{\langle T_0\rangle} |x(t)| dt < \infty$ $\quad \sin\frac{2\pi}{t}$ ✓

ii) در یک بازه محدود (دوره تناوب) تغییرات سیگنال کران‌دار باشد. ماکسیمم و مینیمم های محدودی داشته باشند. $\quad \sin\frac{2\pi}{t}$ ×

iii) [illegible]

مثال :



$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \Rightarrow a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} (1)\, dt = \frac{2T_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} (1)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0} \times \frac{-1}{jk\omega_0}\, e^{-jk\omega_0 t}\Big]_{-T_1}^{+T_1}$$

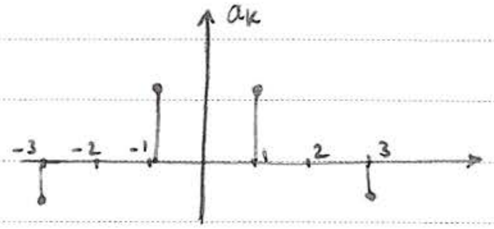
$$= \frac{2}{2} \times \frac{1}{T_0} \times \frac{-1}{jk\omega_0}\left[-e^{-jk\omega_0 T_1} + e^{jk\omega_0 T_1}\right]$$

$$= \frac{2}{T_0} \times \frac{1}{k\omega_0}\,\sin(k\omega_0 T_1)$$

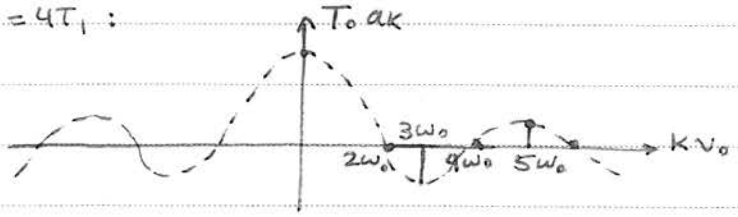
if : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $T_0 = 4T_1$

$$a_k = \overbrace{\frac{2}{\underset{\underset{\text{متغیر پیوسته}}{\downarrow}}{T_0\omega}}\,\sin(\omega T_1)}^{\text{تابع پیوسته}}\Bigg|_{\omega = k\omega_0}$$

then :



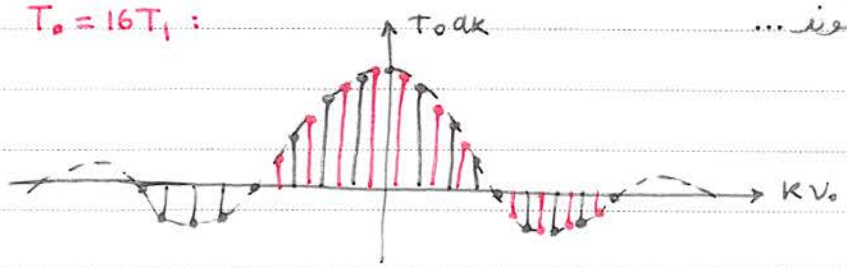
$T_0 = 4T_1$:



$T_0 = 8T_1$:

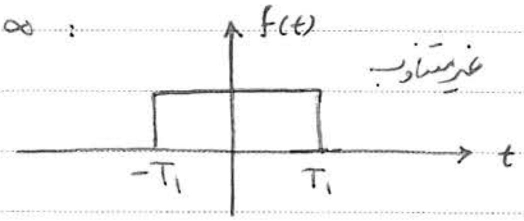
$T_0 = 16T_1$:

و باز اگر T_0 را دو برابر کنیم فاصله ها نصف می شوند ...



$T_0 \to \infty$:

در نهایت داریم :

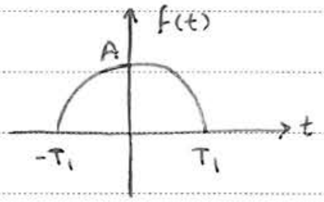


$T_0 a_k \longrightarrow F(\omega)$ تابع پیوسته = تبدیل فوریه سیگنال $f(t)$

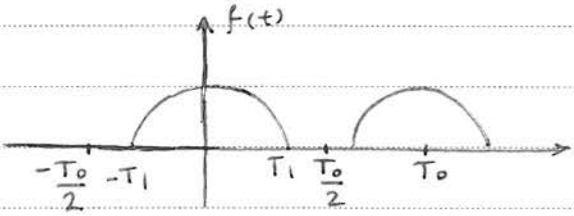
$\underbrace{T_0 a_k}_{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)}_{\downarrow} e^{-j\omega t}\, dt$ Fourier Transform of $f(t)$.
continuous (ω: continuous variable)

continuous and periodic

$F(\omega)$ را از روی $f(t)$ بدست آوردیم ، حال میخواهیم $f(t)$ را از روی $F(\omega)$ پیدا کنیم :



غیرمتناوب و پیوسته



$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (\text{II})$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

for $-T_0/2 < t < T_0/2$: $\tilde{f}(t) = f(t)$

$$a_k = \frac{1}{\enclose{circle}{T_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$T_0 a_k \longrightarrow \boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$ F.T. of $f(t)$

spectrum of $f(t)$ تجزیه

$a_k = \frac{1}{T_0} F(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$ (I)

use (I) into (II) : $\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

$\enclose{circle}{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$

$T_0 \longrightarrow \infty$: $\tilde{f}(t) \longrightarrow f(t)$, $\omega_0 \longrightarrow 0$

$$f(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \tilde{f}(t)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}$$

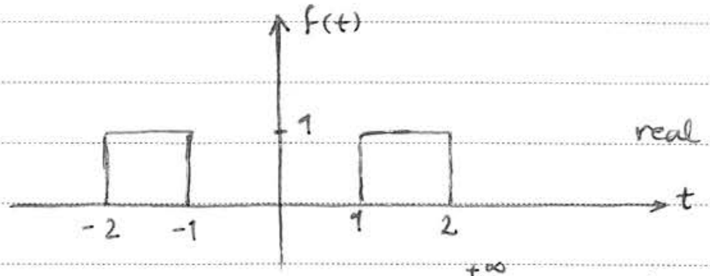
inverse Fourier transform of f(t)
(IFT)
Synthesis equation ترکیب

time domain
قلمرو زمان

frequency domain
قلمرو فرکانس

$$f(t) \xleftrightarrow{F.T} F(\omega)$$

مثال :



real & even

$$\mathcal{F}\{f(t)\} \equiv F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

F.T. operator

$$= \int_{1}^{2} (1)\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-2}^{-1} (1)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big]_{1}^{2} + \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big]_{-2}^{-1}$$

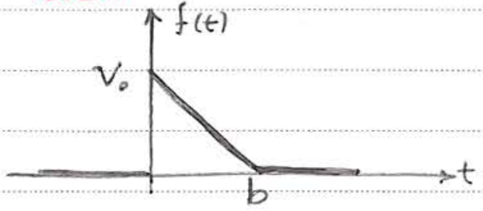
$$= \frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega 2} - e^{-j\omega}\right] + \frac{-1}{j\omega}\left[e^{j\omega} + e^{j\omega 2}\right]$$

$$= \frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega} - e^{-j\omega 2} - e^{j\omega} - e^{j\omega 2}\right]$$

$$= \frac{2}{\omega}\left[\frac{e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}}{2j}\right] + \frac{-2}{\omega}\left[\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}\right]$$

real & even :

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin(2\omega) - \frac{2}{\omega}\sin(\omega)$$



مثال :

$$f(t) = \frac{-V_0}{b}(t-b) \qquad 0<t<b$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{-V_0}{b}\int_0^b (t-b)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{-V_0}{b}\left[\int_0^b t\, e^{-j\omega t}\, dt - b\int_0^b e^{-j\omega t}\, dt\right]$$

$$F(\omega) = V_0\left[-\frac{1}{b\omega^2}e^{-j\omega b} + \frac{1}{b\omega^2} + \frac{1}{j\omega}\right]$$

$$= \text{Cos}(\omega b) - j\,\text{Sin}(\omega b) - \frac{j}{\omega} = \text{Real}\{F(\omega)\} + j\,\text{Im}\{F(\omega)\}$$

(complex)

Magnitude and Phase: $|F(\omega)| = \sqrt{(\text{Real}\{F(\omega)\})^2 + (\text{Im}\{F(\omega)\})^2}$

$$\angle F(\omega) = \text{Arctan}\,\frac{\text{Im}\{F(\omega)\}}{\text{Real}\{F(\omega)\}}$$

Overview:

C.T.

Fourier Series

$x(t)$ is periodic

$$x(t) = \sum_K C_K\, Ø_K(t)$$

$$\text{if} = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} C_K\, e^{jK\omega_0 t} \equiv \text{سری فوریه}$$

where: ضرایب ثابت $C_K = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\, e^{-jK\omega_0 t}\, dt$

C.T.

Fourier Transform تبدیل فوریه

$x(t)$ is apriodic غیرتناوب

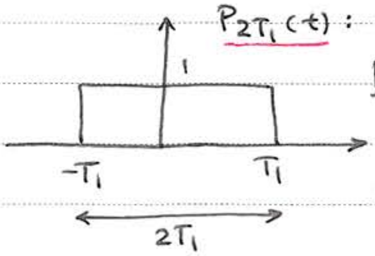
$$\mathcal{F}(t) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Inverse F.T.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega)$$

مثال :



$P_{2T_1}(t)$: پالسی که range آن $2T_1$ است

شکل خود پالس : $\Pi(t)$ یا

*  $\Lambda(t)$

$$\mathcal{F}\{P_{2T_1}(t)\} = \int_{-T_1}^{T_1} (1)\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

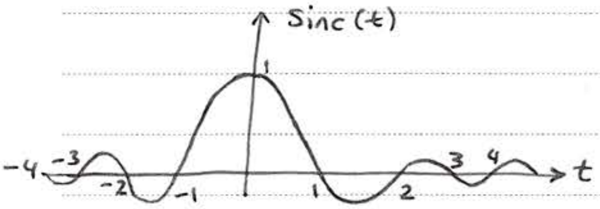
$$= \frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}\right]$$

$$= \frac{2}{\omega}\left[\frac{-e^{-j\omega T_1} + e^{j\omega T_1}}{2j}\right]$$

$$= \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$ تابع حقیقی برحسب ω و زوج

$$\mathrm{Sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\Rightarrow = \frac{2\sin\left(\pi \frac{\omega T_1}{\pi}\right)}{\frac{1}{T_1}\cdot \pi \cdot \frac{\omega T_1}{\pi}} = 2T_1 \,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$



$$P_{2T_1}(t) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

C.T. Fourier Transform Properties:

$x_1(t) \xleftrightarrow{F.T.} X_1(\omega)$ Time Domain سیگنال در حوزه زمان $\xleftrightarrow{F.T.}$ Frequency Domain

$x_2(t) \xleftrightarrow{F.T.} X_2(\omega)$

1. Linearity: خطی بودن

$$\underline{a_1}\, x_1(t) + \underline{a_2}\, x_2(t) \xleftrightarrow{F.T.} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

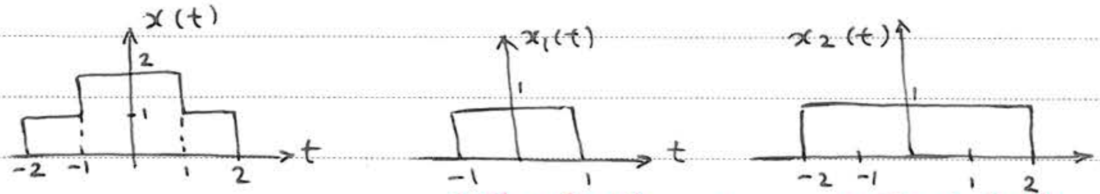
ضرایب ثابت

برای بدست آوردن تبدیل فوریه سیگنال زیر ، دو راه وجود دارد :

1) معادله سیگنال را در فرمول بگذاریم .

2) راه حل دوم :

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$



$2\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) + 4\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)$

یا

$\frac{2\,\mathrm{Sin}(\omega)}{\omega} + \frac{2\,\mathrm{Sin}(2\omega)}{\omega}$

2. Time Shift: جابجایی با زمان

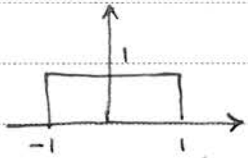
$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$x(t-t_0) \longleftrightarrow \underbrace{e^{-j\omega t_0}}_{\text{تابع مختلط}} \underbrace{X(\omega)}_{\text{تابع مختلط}}$

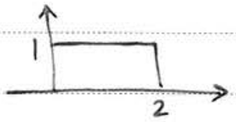
magnitude 1·1
phase ∠

} ضرب اندازه‌ها و جمع فازها : $1 \times |X(\omega)|$

$\angle x(\omega) + \omega t_0$



$\frac{2\,\mathrm{Sinc}(\omega)}{\omega}$: تبدیل فوریه سیگنال روبرو $\Rightarrow$



$e^{-j\omega} \cdot \frac{2\,\mathrm{Sinc}(\omega)}{\omega}$

3. Symmetry : تقارن

if $x(t)$ is real signal with $X(\omega)$

$X(-\omega) = X^*(\omega) \longrightarrow$ Conjugate of $X(\omega)$: درحالت کلی مختلط است

in general :

$X(\omega) = \underbrace{\mathrm{Real}\{X(\omega)\}}_{\text{جزء حقیقی}} + j\,\underbrace{\mathrm{Im}\{X(\omega)\}}_{\text{جزء موهومی}}$

$X^*(\omega) = \mathrm{Real}\{X(\omega)\} - j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}$

$X(-\omega) = \mathrm{Real}\{X(-\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(-\omega)\}$

if $X(-\omega) = X^*(\omega)$

then : $\mathrm{Real}\{X(\omega)\} = \mathrm{Real}\{X(-\omega)\} \Rightarrow$ جزء حقیقی تابع زوج است

$\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(\omega)\} \Rightarrow$ جزء موهومی تابع فرد است

i) $x(t)$ is Real & even
then $X(\omega)$ is Real & even

we have: $x(t) = x^*(t)$ is Real Signal
$x(t) = x(-t)$ is even

$X(-\omega) = X^*(\omega)$

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{+j\omega t}\, dt$$

$t = -\tau$:

$$X^*(\omega) = +\int_{\underset{-\infty}{+\infty}}^{\overset{+\infty}{-\infty}} \underbrace{x(-\tau)}_{x(\tau)} e^{-j\omega\tau}\, d\tau = X(\omega) \Rightarrow \text{Real}$$

تابع زوج

$X^*(\omega) = X(-\omega) = X(\omega) \Rightarrow$ even

ii) $x(t)$ is Real & even
then $|X(\omega)|$ is even
and $\measuredangle X(\omega)$ is odd

4. Time Scaling : مقیاس با زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega)$$

$$x(at) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right) & a>0 \\ \frac{-1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right) & a<0 \end{cases}$$

مقدار ثابت

اثبات : $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad a>0$

$$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

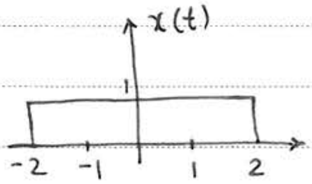
$\tau = at$: $X_1(\omega) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}\, d\tau$

$$= \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

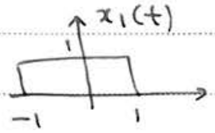
$$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\tau = at : X_1(\omega) = \frac{-1}{a} \int_{\substack{+\infty\\-\infty}}^{\substack{+\infty\\-\infty}} x(\tau)\, e^{-j\omega/a\,\tau}\, d\tau = -1/a\, X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

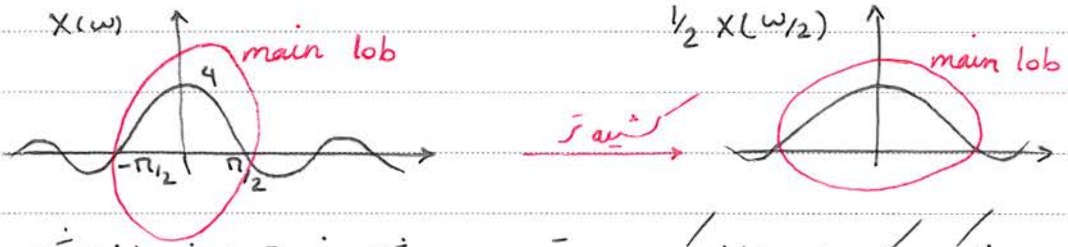
مثال :



$$X(\omega) = 2T_1 \text{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = 4\text{Sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)$$



$$x_1(t) = x(\underset{a=2}{2t}) = \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



* اگر بخواهیم در یک مدیای فیزیکی در یک بازه‌ی زمانی یکسان ، تعداد بیت بیشتری بفرستیم (پهنای باند بیشتر) باید پالس های کوچکتری بفرستیم!

5. Time Reversal

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega)$

$a=-1$

6. Convolution

$x(t) \longrightarrow X(\omega)$

$h(t) \longrightarrow H(\omega)$

$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \underset{\overset{\uparrow}{\text{ضرب}}}{.} H(\omega)$ پروسه طولانی (convolution *) تبدیل شد به عبارت روبرو:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Frequency response of LTI System پاسخ فرکانسی

System Function / Transfer Function

$h_{overall}(t) = h_1(t) * h_2(t) \Rightarrow H_{overall}(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$ فرم کلی فرکانس

مثال :

$x(t) = e^{-bt} u(t)$

$h(t) = e^{-at} u(t)$ $\quad a \& b > 0 \quad \xleftrightarrow{F.T.} H(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$

$\measuredangle H(\omega) = -\tan^{-1}(\frac{\omega}{a})$

$$F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt} u(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(b+j\omega)t}\, dt = \frac{1}{j\omega+b}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Partial Fraction Expansion (بسط کسرهای جزئی) :

$$Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega+a)(j\omega+b)} = \frac{A}{j\omega+a} + \frac{B}{j\omega+b} = \frac{A(j\omega+b)+B(j\omega+a)}{(\underbrace{j\omega}_{s}+a)(\underbrace{j\omega}_{s}+b)}$$

راه اول (تبدیل لاپلاس) :

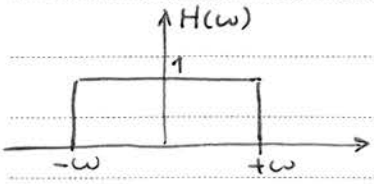
$$F^{-1}\left\{\frac{A}{j\omega+a}\right\} = Ae^{-at}u(t)$$

$$F^{-1}\left\{\frac{B}{j\omega+b}\right\} = Be^{-bt}u(t)$$

راه دوم : ($j\omega$ را s در نظر می‌گیریم)

$$A = (S+a)Y(S)\Big|_{S=-a} = \frac{1}{j\omega+b}\Big|_{j\omega=-a} = \frac{1}{-a+b}$$

مثال : پاسخ فرکانس یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل ideal low-pass filter

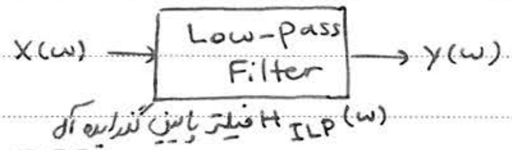


$h(t) = ?$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

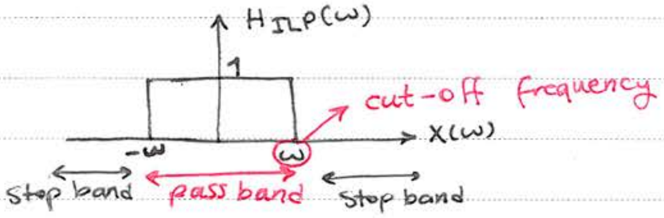
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{+\omega} (1)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jt}\, e^{j\omega t}\Big]_{-\omega}^{+\omega} = \frac{1}{\pi t} \cdot \left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\}$$

$$= \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{Sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} t\right)$$

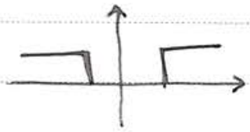


خاصیت Convolution :

$y(\omega) = H_{ILP}(\omega) \, . \, X(\omega)$

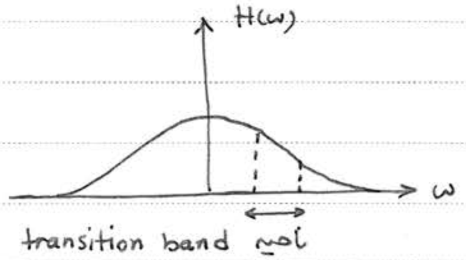


low frequency : در این بازه پس از ضرب ، $X(\omega)$ باقی می‌ماند و خارج از آن صفر می‌شود . فرکانس های پایین را عبور می دهد و بالا را حذف می کند .



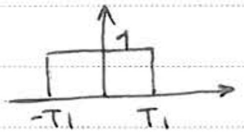
فرکانس های پایین را حذف می‌کند و بالا را نگه می دارد .

⇐ با انتخاب نوع فیلتر می توانیم مولفه‌های فرکانسی را حذف کنیم یا نگه داریم . فیلتر از این جهت ایده‌آل است که تغییرات از 1 به 0 خیلی سریع انجام می‌شود .



Time Domain

$x(t)$



Frequency Domain

$X(\omega)$

$$2\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 \, \text{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

7. Duality : دوگانی

$$f(t) \xleftrightarrow{F.T} F(\omega)$$

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

8. Differentiation & Integration:

$$x(t) \xleftrightarrow{F.T} X(\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{"}} j\omega \, X(\omega)$$

$\vdots \qquad \vdots$

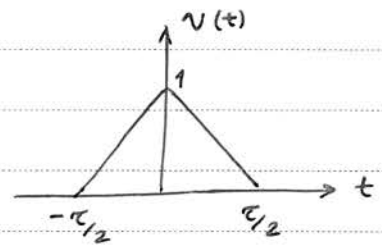
$$\frac{d^n x(t)}{dt} \longleftrightarrow (j\omega)^n \, X(\omega)$$

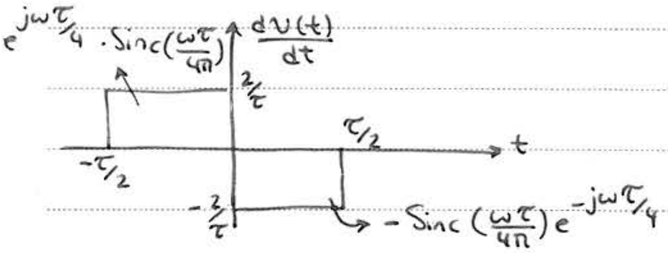
$$* \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \begin{cases} 1 & \tau<t \\ 0 & \tau>t \end{cases} = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{F}\{x(t) * u(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \cdot \mathcal{F}\{u(t)\} = X(\omega)\cdot\left\{\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right\}$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.





$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt} \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega) = j\omega V'(\omega)$$

یا $V(\omega) = \frac{1}{j\omega} X(\omega)$

از طرفی:

$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt} \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega) = \text{Sinc}\left(\frac{\omega\tau}{4\pi}\right)\left\{\frac{e^{\frac{j\omega\tau}{4}} - e^{-\frac{j\omega\tau}{4}}}{2j}\right\} \times 2j$$

$$X(\omega) = \text{Sinc}\left(\frac{\omega\tau}{4\pi}\right) \cdot 2j\,\text{Sin}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$V(\omega) = X(\omega) \times \frac{1}{j\omega} = \frac{\tau}{2}\,\text{Sin}^2\left(\frac{\omega\tau}{4\pi}\right)$$

با استفاده از خاصیت دوگانی:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$-jt\,x(t) \longleftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

یا

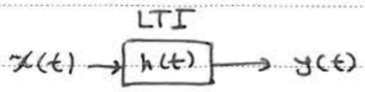
$$t x(t) \longleftrightarrow j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

$$x(t)\,e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(j(\omega \mp \omega_0))$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

مثال:



$$x(t)=t e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F.T.} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega+2}\right)=\frac{1}{(j\omega+2)^2}$$

$$h(t)=e^{-4t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{4+j\omega}$$

$$y(t)\longleftrightarrow Y(\omega)=X(\omega).H(\omega)=\frac{1}{(j\omega+2)^2.(4+j\omega)}$$

راه اول: $y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ ← راه ساده‌تر: بسط کسرهای جزئی

$$\frac{1}{(j\omega+2)^2(j\omega+4)}=\frac{A}{j\omega+4}+\frac{B}{j\omega+2}+\frac{C}{(j\omega+2)^2}$$

$$\text{if}\quad s=j\omega \Rightarrow B=\frac{d}{ds}\left\{(\overset{s}{\cancel{j\omega}}+2)Y(s)\right\}\Big|_{s=-2}=-1/4 \Rightarrow \begin{cases}A=1/4\\B=-1/4\\C=1/2\end{cases}$$

$$y(t)=\frac{1}{4}e^{-4t}u(t)-\frac{1}{4}e^{-2t}u(t)+1/2\,t\,e^{-2t}u(t)$$

یادآوری:

$$a>0\qquad e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{F.T.}\frac{1}{a+j\omega}$$

$$te^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{(a+j\omega)^n}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

Fourier Transform of Periodic Signals:

$$x(t)\xleftrightarrow{F.T.}X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

برای این که $x(t)$ تبدیل فوریه داشته باشد ، باید ① انرژی محدود داشته باشد.
② مطلقاً انتگرال پذیر باشد.

$$X(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}=x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\underbrace{\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}}_{e^{j\omega_0 t}\delta(\omega-\omega_0)}d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega_0 t}d\omega = e^{j\omega_0 t}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)d\omega}_{1} = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega\mp\omega_0)$$

از طرف دیگر:

$x(t)$ is C.T. & periodic (T_0)

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{ضرائب ثابت}}}{a_k}\, e^{jk\omega_0 t}$$

با درنظر گرفتن خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه و نتیجه بالا داریم:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow[F.T.]{} X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

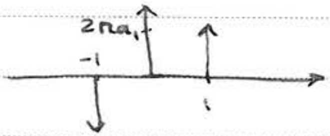
مثال: $\mathcal{F}\{\sin(t)+\cos(2\pi t+\pi/4)\} = \mathcal{F}\{\sin(t)\}+\mathcal{F}\{\cos(2\pi t+\pi/4)\}$

فقط برای $k=\pm1$ این تابع جواب دارد:

$$\sin(t)=\frac{1}{2j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)$$

$$a_1=\frac{1}{2j}\,,\quad a_{-1}=\frac{1}{-2j}$$

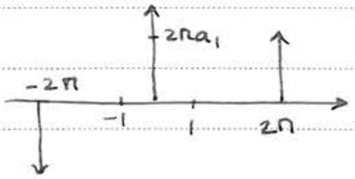
$$\mathcal{F}\{\sin(t)\} = \underset{K=1}{\frac{2\pi}{2j}\,\delta(\omega-1)} - \underset{K=-1}{\frac{2\pi}{2j}\,\delta(\omega+1)} \qquad \omega_0=1$$



$$\cos(2\pi t+\pi/4) = \tfrac{1}{2}\left(e^{j(2\pi t+\pi/4)}+e^{-j(2\pi t+\pi/4)}\right)$$
$$= \underset{K=1}{\tfrac{1}{2}\,e^{j\pi/4}\,.\,e^{j2\pi t}} + \underset{K=-1}{\tfrac{1}{2}\,e^{-j\pi/4}\,e^{-j2\pi t}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1=\tfrac{1}{2}e^{j\pi/4}\\ a_{-1}=\tfrac{1}{2}e^{-j\pi/4}\end{cases}$$

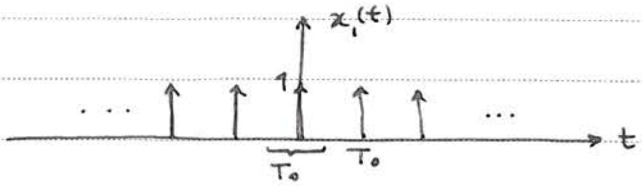
$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi t+\pi/4)\} = 2\pi a_1\,\delta(\omega-\omega_0)+2\pi a_{-1}\,\delta(\omega+\omega_0) \qquad \omega_0=2\pi$$



مثال: سیگنال ورودی یک سیگنال periodic است:

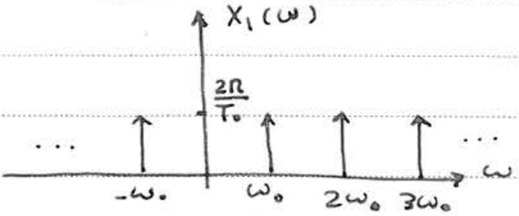
x(t) C.T. and periodic with T_0

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$



$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt \Rightarrow a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}$$

$$X_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_0} \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$



در Time Domain فاصله بین impulse ها T_0 بود
در Frequency Domain این فاصله ها ω_0 است.

$T_s = T_0$ فاصله نمونه برداری

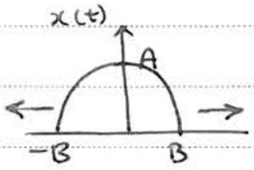
$\omega_s = \omega_0$ دوره تناوب نمونه برداری

9. Multiplication in time-domain:

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

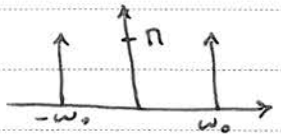
$p(t) \longleftrightarrow P(\omega)$

$x(t)\cdot p(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left(X(\omega) * P(\omega)\right)$



Band Limited به این معنا که از یک نقطه ای در سیگنال ورودی، دیگر جوابی وجود ندارد.

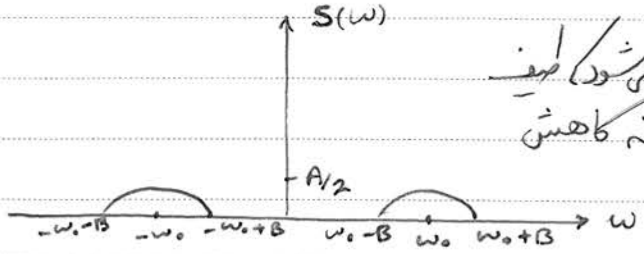
$\cos(\omega_0 t)$



$s(t) = x(t)\cdot \cos(\omega_0(t)) \xleftrightarrow{F.T.}$

$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(\omega) * \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\}\right)$

$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\,\delta(\omega+\omega_0) + \pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

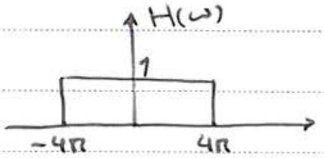


ضرب یک تابع limited در یک تابع کسینوسی باعث می‌شود که طیف فرکانسی آن به چپ و راست Shift پیدا کند و دامنه کاهش یابد.

مثال:

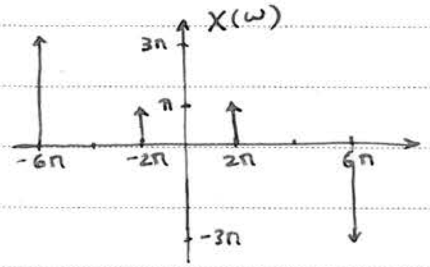
$x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$

$h(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} \Rightarrow$



$y(t) = ?$

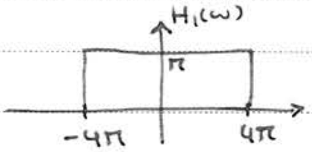
low-pass فیلتر فرکانس های بین -4π و 4π را عبور می دهد و خارج آن را حذف می کند.

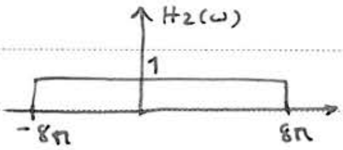


$Y(\omega) = H(\omega) . X(\omega) \Rightarrow y(t) = \cos(2\pi t)$

درصورتی که $h(t) = \frac{\sin(4\pi t) . \sin(8\pi t)}{\pi t^2}$ باشد چطور؟

$$h(t) = \pi \underbrace{\frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}}_{h_1(t)} . \underbrace{\frac{\sin(8\pi t)}{\pi t}}_{h_2(t)}$$





$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} (H_1(\omega) . H_2(\omega))$

$\Rightarrow y(t) = 4\pi \cos(2\pi t) + 3\pi \sin(6\pi t)$

Modulation:

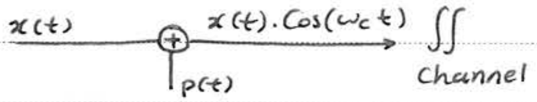
AM, FM

AM = Amplitude Modulation مدلاسیون دامنه

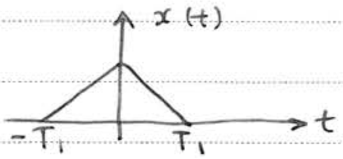
FM = Frequency " مدلاسیون فرکانس

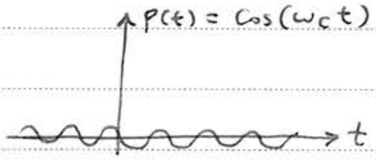
$x(t)$ = Signal (info.)

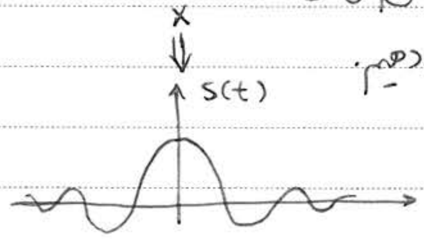
$p(t)$ = Carrier حامل , w_c = Carrier Frequency



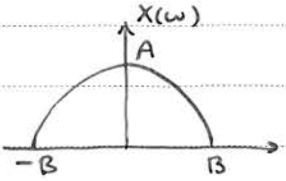
$x(t)$ is band-limited باند محدود







high power شد $S(t)$ و انتقال را با استفاده از آن انجام می دهیم.



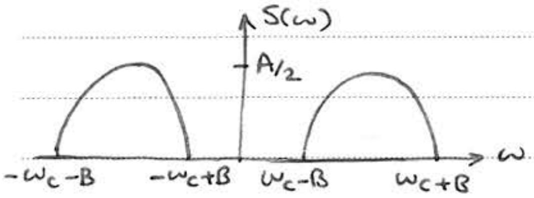
فرض band limited بودن سیگنال خیلی مهم است، زیرا درصورتی که این ویژگی را نداشته باشد، نمی‌توانیم آن را با استفاده از یک فیلتر band-limited کنیم.

$$\mathcal{F}\{\sin(t)\} = S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\{X(\omega) * \mathcal{F}\{\cos(\omega_c t)\}\}$$

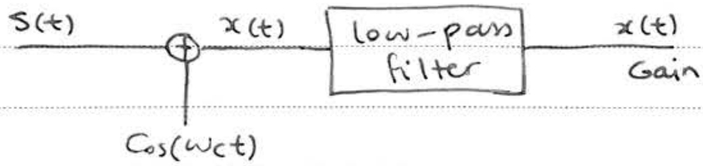
$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_c t)\} = \pi\{\delta(\omega-\omega_c) + \delta(\omega+\omega_c)\}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2}\{X(\omega-\omega_c) + X(\omega+\omega_c)\}$$

پس طیف فرکانسی سیگنال به اندازه ω_c و $-\omega_c$ شیفت پیدا می‌کند:



Demodulation:

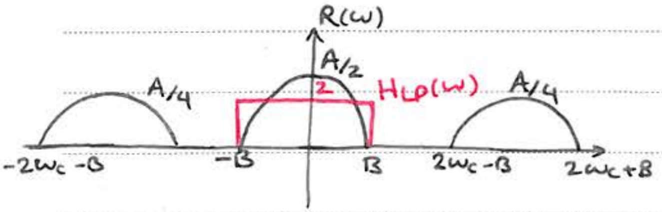


$$\text{Gain} \rightarrow H_{LP}(\omega) = \begin{cases} 2 & |\omega| < B \\ 0 & |\omega| > B \end{cases}$$

کاهش دامنه را با استفاده از این فیلتر جبران می‌کنیم.

$$\begin{aligned} r(t) &= S(t) \cdot \cos(\omega_c t) \\ &= x(t) \cdot \cos(\omega_c t) \cdot \cos(\omega_c t) \\ &= x(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) = x(t)\left(\frac{1+\cos(2\omega_c t)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t) \end{aligned}$$

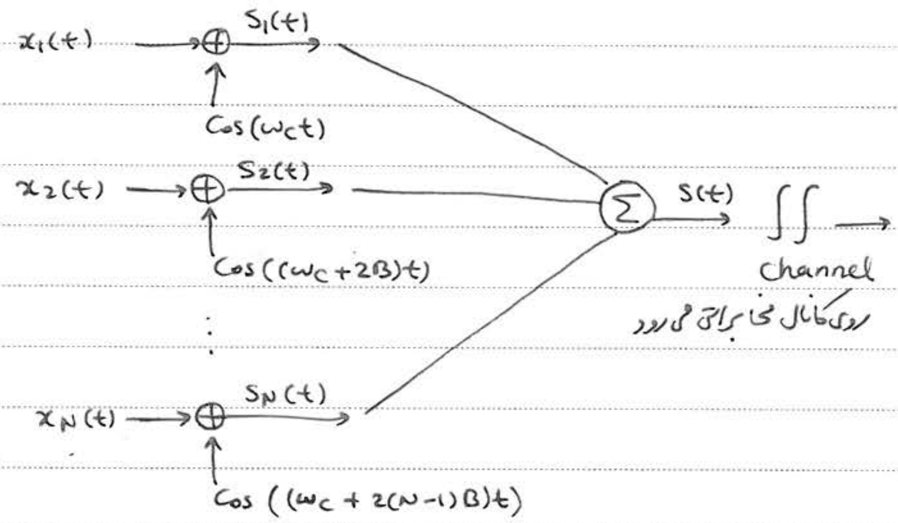
$$R(\omega) = \mathcal{F}\{r(t)\} = \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{4}\{X(\omega-2\omega_c) + X(\omega+2\omega_c)\}$$



N signals $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)$ are band-limited

اگر هم نبودند با گذاشتن فیلتری که محدوده فرکانسی آن را ما تعیین می‌کنیم، محدودشان می‌کنیم.

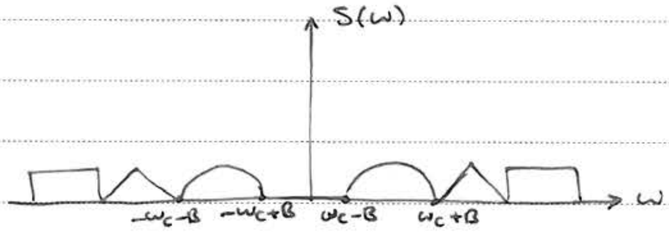
FDM = Frequency Division Multiplexing



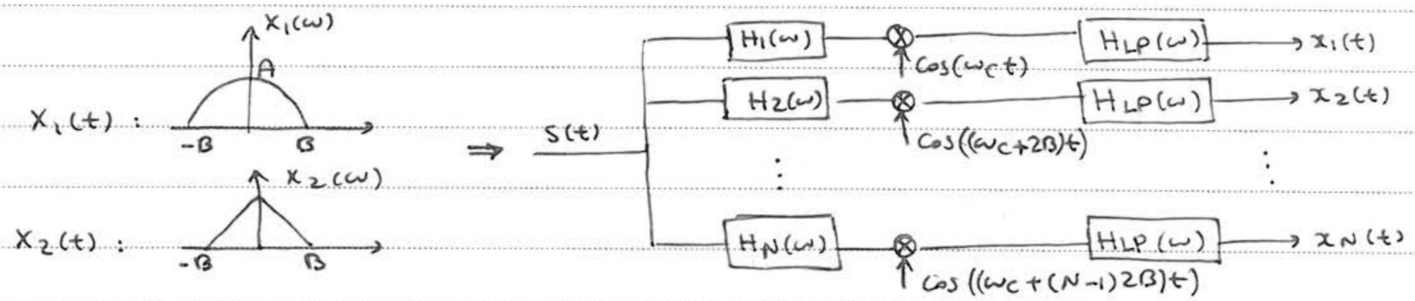
روی کانال مخابراتی می‌رود

در گیرنده می‌خواهیم سیگنال‌ها را پیدا کنیم !

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \cos[(\omega_c + 2(i-1)B)t]$$

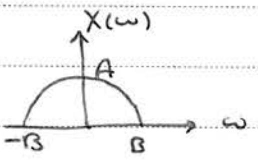


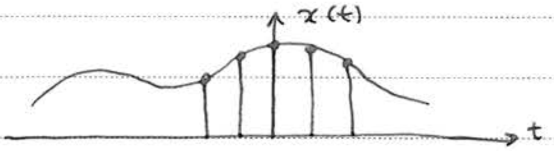
اول باید سیگنال‌ها را جدا کنیم : s_1 را جدا کنیم، بعد s_2 را جدا کنیم و ... . بعد demodulate می‌کنیم روی تک تک آنها

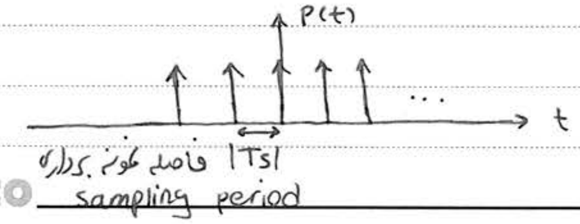


Sampling : نمونه برداری

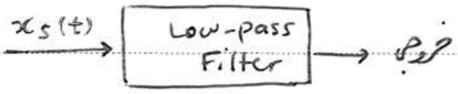
سیگنال اطلاعات $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$ is band limited

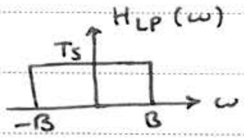






قطاری از سیگنال‌های ضربه که periodic هستند :





$$H_{LP}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < B \\ 0 & |\omega| > B \end{cases}$$

پاسخ ضربه فیلتر $\downarrow$

$$h_{LP}(t) = \frac{BT_s}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{Bt}{\pi}\right)$$

خروجی فیلتر پایین گذر $y(t) = x_s(t) * h_{LP}(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\tau) . h_{LP}(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t).p(t) = x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\, \delta(t-kT_s)$$

خروجی فیلتر $= y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\, \delta(\tau - kT_s) \right) h(t-\tau)\, d\tau$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(\tau - kT_s)\, h(t-\tau)}_{\text{خاصیت غربالی}}\, d\tau$$

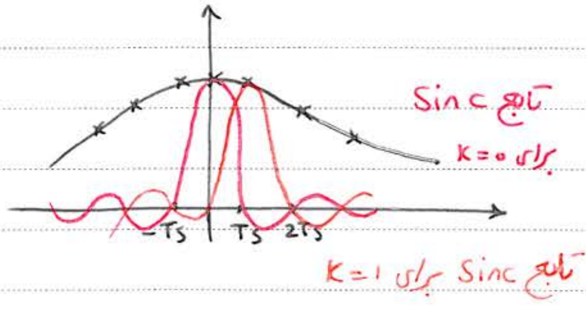
خاصیت غربالی $\Rightarrow \delta(\tau - kT_s)\, h(t-kT_s)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\, h(t-kT_s)$$

خروجی فیلتر پایین گذر $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\, h_{LP}(t-kT_s)$

$$= \frac{BT_s}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\, \text{Sinc}\left(\frac{B(t-kT_s)}{\pi} \right)$$

$\uparrow$ نمونه های سیگنال $x(t)$ هستند.



تابع Sinc در این جا کار درون یابی interpolation را برای ما انجام می دهد. یعنی کمک می کند که مقادیر میانی را پیدا کنیم.

خاصیت پارسال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

در حالت کلی :

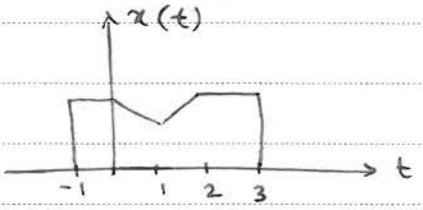
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, Y^*(\omega)\, d\omega$$

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega)$

مثال :

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, \underbrace{\frac{2\sin(\omega)}{\omega}\, e^{j2\omega}}_{Y^*(\omega)}\, d\omega = 7\pi$$

Correlation :

$f_1(t) \xleftrightarrow{F.T.} F_1(\omega)$

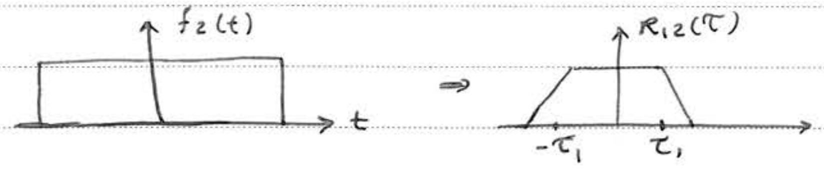
$f_2(t) \xleftrightarrow{F.T.} F_2(\omega)$

$$f_1(t) \underset{\circledast \; \odot}{**} f_2(t) = R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, f_2(t-\tau)\, dt$$

مقایسه با convolution : $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$

← شاخصی است برای سنجش شبیه بودن دو سیگنال!

: Auto Correlation



$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$

$\mathcal{F}\{R_{11}(\tau)\} = F_1(\omega)\, F_1(-\omega)$

$\mathcal{F}\{R_{12}(\tau)\} = F_1(\omega)\, F_2(-\omega)$

تبدیل فوریه چند سیگنال خاص :

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)e^{-j\omega t}}_{\text{خاصیت غربالی} \; = \delta(t)\overset{1}{\cancel{e^{0}}}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \quad \forall\omega$$

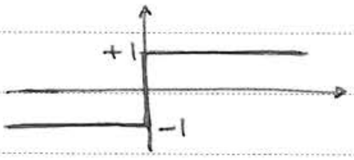
انتگرال سیگنال ضربه برای همه ω ها مقدار ۱ است . یعنی باید همه سیگنال ها را با همه فرکانس ها با وزن ۱ با هم جمع کنیم تا سیگنال ضربه بدست باید .

$$\delta(t-t_0) \xleftrightarrow{F.T.} e^{-j\omega_0 t}$$

$$\left.\begin{array}{l} F^{-1}\{\delta(\omega-\omega_0)\} \xleftrightarrow{F.T.} \delta(\omega-\omega_0) \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}}_{\text{خاصیت غربالی}} d\omega \\ = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega \mp \omega_0) \quad ① \quad \text{نتایج} \\ \cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)) \\ e^{j\omega_0 t}\Big|_{\omega_0=0} = 1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega) \\ K \text{ مقدار ثابت} \longleftrightarrow 2\pi K\,\delta(\omega) \end{array}$$

② Signum Signal:

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$



$$\mathrm{sgn}(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$\mathrm{sgn}(t) = \lim_{a\to 0}\left[e^{-at}u(t) - e^{at}u(t-1)\right]$$

$$F\{\mathrm{sgn}(t)\} = \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{j\omega+a} - \frac{1}{-j\omega+a}\right] = \frac{2}{j\omega}$$

* $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$

$$F\{u(t)\} = 2\pi\left(\tfrac{1}{2}\right)\delta(\omega) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{j\omega}\right) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Frequency Response of Systems:

C.T. LTI Systems: (input-output relationship)

$x(t)$ input

$y(t)$ output

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

تبدیل فوریه

در این فرمول از خواص خطی بودن، مشتق و convolution استفاده میشود.

از این فرمول تبدیل فوریه میگیریم:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

$$H(\omega) = H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \cdots + b_M(j\omega)^M}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \cdots + a_N(j\omega)^N}$$

چندجمله‌ای درجه M برحسب (jω)
" " N " " "

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \Rightarrow H(\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3}$$

$$= \frac{j\omega + 2}{(j\omega+3)(j\omega+1)}$$

$$H(\omega) = \frac{A}{j\omega+3} + \frac{B}{j\omega+1}$$ بسط کسرهای جزئی

$$h(t) = Ae^{-3t}u(t) + Be^{-t}u(t)$$

C.T. LTI Systems:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

use F.T. and its properties: $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \cdots + b_M(j\omega)^M}{a_0 + a_1(j\omega) + \cdots + a_N(j\omega)^N}$

frequency response of LTI Systems

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$$

مثال:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)} = \frac{A}{j\omega+3} + \frac{B}{j\omega+1} \Rightarrow A = B = 1/2$$

$$h(t) = \overset{1/2}{\cancel{A}}e^{-3t}u(t) + \overset{1/2}{\cancel{B}}e^{-t}u(t)$$

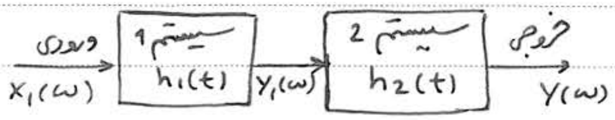
مثال: $y(t) = ?$ when $x(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$ with $H(\omega)$

$$Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+3)(j\omega+1)^2} = \frac{A}{j\omega+3} + \frac{B}{(j\omega+1)^2} + \frac{C}{j\omega+1}$$

$$A = 1/4, \quad B = 1/2, \quad C = -1/4$$

$$y(t) = 1/4\, e^{-3t}\, u(t) - 1/4\, e^{-t}\, u(t) + 1/2\, t\, e^{-t}\, u(t)$$

(1) $H(\omega) = \dfrac{j\omega+2}{j\omega+3} \cdot \dfrac{1}{j\omega+1} = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$

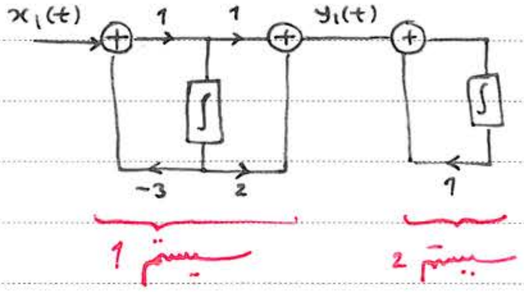


(2) $H(\omega) = \dfrac{1/2}{j\omega+3} + \dfrac{1/2}{j\omega+1} = H_1(\omega) + H_2(\omega)$

form (1) $H_1(\omega) = \dfrac{j\omega+2}{j\omega+3} = \dfrac{Y_1(\omega)}{X(\omega)}$

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 3y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} + 2x_1(t)$$

به فرم انتگرالی در می آوریم و سپس block diagram را می کشیم :



$$H(\omega) = \frac{b_M \prod_{K=1}^{M} (j\omega+\lambda_K)}{a_N \prod_{K=1}^{N} (j\omega+v_K)}$$

λ_K ، v_K : ریشه های چند جمله ای صورت و مخرج : real & distinct

اگر i امین چند جمله ای مختلط باشد :

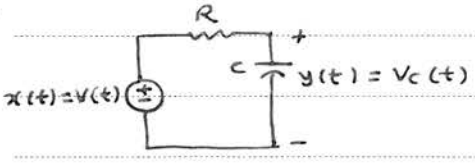
$M = N$: $H(\omega) = \left(\dfrac{b_N}{a_N}\right) + \sum_{K=1}^{N} \dfrac{A_K}{j\omega+V_K}$

$(j\omega+v_i)(j\omega+v_i^*) =$

$(j\omega)^2 + (v_i+v_i^*)j\omega + v_i v_i^* =$

$(j\omega)^2 + \underbrace{2Re\{v_i\}}_{l_i:\text{عدد مختلط}} j\omega + \underbrace{|v_i|^2}_{k_i:\text{ثابت}}$ تابع درجه 2 (برای حالتی که ریشه مختلط داریم)

مثال :



input - output :

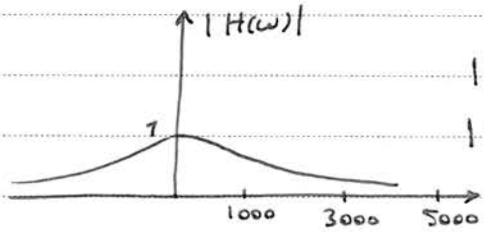
$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

$|H(\omega)| = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega^2 + (\frac{1}{RC})^2}}$ $\measuredangle H(\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$

if $\frac{1}{RC} = 1000$ و $RC = 0.001$ then:

- Low-pass Filtering -



$|H(1000)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

$|H(3000)| = 0.316$

$|H(\omega)| = 0$
$\omega \to \infty$

i) $x(t) = A\,\mathrm{Cos}(\omega_0 t + \theta)$

$y(t) = A|H(\omega)|\,\mathrm{Cos}(\omega_0 t + \theta + \measuredangle H(\omega_0))$

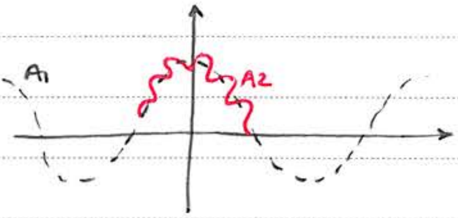
$\omega = 0$ $y(t) = A.(1)\,\mathrm{Cos}(\omega_0 t + \theta)$

$\omega = 1000$ rad/s $y(t) = A.(0.707)\,\mathrm{Cos}(\omega_0 t + \theta - 45°)$

$\omega = 3000$ rad/s $y(t) = A.(0.316)\,\mathrm{Cos}(\omega_0 t + \theta - 71.6°)$

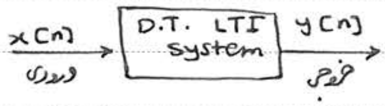
$\omega \to \infty$ $y(t) \to 0$

ii) $x(t) = A_1\,\mathrm{Cos}(\underset{\underset{100}{\downarrow}}{\omega_1} t + \theta_1) + A_2\,\mathrm{Cos}(\underset{\underset{3000}{\downarrow}}{\omega_2} t + \theta_2)$



$y(t) = A_1\,|H(\omega)|\,\mathrm{Cos}(\omega_1 t + \theta_1 + \measuredangle H(\omega)) +$
$A_2\,|H(\omega)|\,\mathrm{Cos}(\omega_2 + \theta_2 + \measuredangle H(\omega))$

Fourier Analysis for D.T. Signals & Systems:



$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\,x[n-m]$

$x[n] = \underset{\underset{\text{complex in general}}{\downarrow}}{z^n}$

then $y[n]\Big|_{x[n]=z^n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\,z^{n-m} = \underset{\text{eigenfunction for LTI}}{z^n} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[n]\,z^{-m}}_{\substack{H(z)\\ \text{eigenvalue}\\ \text{for LTI}}}$

$x[n] = \sum_{k} a_k z_k^n$ then $y[n] = \sum_{k} a_k H(z_k) z_k^n$

ترکیبی از سیگنال های نمایی

$x(n) = e^{\boxed{j\frac{2\pi}{N}}n}$ $\overset{z}{}$ z_k are periodic with N

$= e^{\boxed{jk\frac{2\pi}{N}}n}$

مجموعه سیگنال های نمایی مختلط هماهنگ

در این مجموعه تعداد محدودی از این توابع را داریم که N تا تابع مجزا وجود دارد:

$K = M, \dots, M+N-1$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad (I)$$

$\downarrow$ متناوب با دوره تناوب N

a_k ضرایب سری فوریه

ضرایب طیفی Spectral coefficient

راه اول:

برای پیدا کردن N تا مجهول (a_k ها) داریم:

$$x[0] = a_0 + \dots + a_{N-1}$$
$$x[1] = a_0 + a_1 e^{jk\frac{2\pi}{N}} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}}$$
$$\vdots$$
$$x[N-1] = a_0 + a_1 e^{jk\frac{2\pi}{N}(N-1)} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}(N-1)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}} \\ & & & \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}}_{\underline{a}} \Rightarrow \underline{a} = [A]^{-1}\underline{x}$$

راه دوم:

دو طرف معادله (I) را در $e^{jr\frac{2\pi}{N}n}$ ضرب کرده و $\sum_{n=\langle N\rangle}$ را انجام می دهیم:

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x(n) \cdot e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=\langle N\rangle} \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \underbrace{e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{jr\frac{2\pi}{N}n}}_{e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n} \qquad (II)$$

$$\text{if} \sum_{\substack{n=0 \\ n=\langle N\rangle}}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jK\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \begin{cases} N & K=0,\pm N,\pm 2N,\dots \\ \dfrac{1-e^{jK\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{jK\frac{2\pi}{N}}}=0 & K\neq 0,\pm N,\pm 2N,\dots \end{cases}$$

در معادله (II) :

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(K-r)\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & K=r \\ 0 & K\neq r \end{cases}$$

به این ترتیب معادله (II) به صورت زیر در می آید:

$$Na_r = \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\boxed{a_r = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}}$$

Synthesis Equation:

$$x[n] = \sum_{K=\langle N\rangle} a_K\, e^{jK\frac{2\pi}{N}n}$$

Analysis Equation:

$$a_K = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jK\frac{2\pi}{N}n}$$

$K: 0 \to N-1$

$$x[n] = \underset{?}{a_0}\, e^{j(0)\frac{2\pi}{N}n} + a_1 e^{j(1)\frac{2\pi}{N}n} + \dots + a_{N-1}\, e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n}$$

$K: 1 \to N$

$$x[n] = a_1 e^{j(1)\frac{2\pi}{N}n} + a_2 e^{j(2)\frac{2\pi}{N}n} + \dots + \underset{?}{a_N} e^{j(N)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\begin{tikzcd} a_1 e^{j(1)\frac{2\pi}{N}n} \arrow[dl, leftrightarrow] & a_2 e^{j(2)\frac{2\pi}{N}n} \arrow[dl, leftrightarrow] & a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \arrow[dl, leftrightarrow] & \\ a_1 e^{j(1)\frac{2\pi}{N}n} & a_2 e^{j(2)\frac{2\pi}{N}n} & \dots & \end{tikzcd}$$

$$a_0 = a_N \Rightarrow \boxed{a_K = a_{K+N}}$$

ضرایب سری فوریه سیگنال $x[N]$ متناوب هستند و دوره تناوب آنها برابر N است.

مثال : آیا سیگنال $x[n]=\sin\left[\frac{\pi(n-1)}{4}\right]$ متناوب است؟

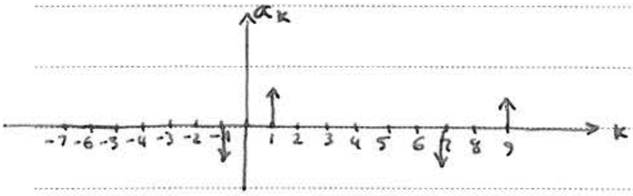
$$\text{if } x[n] = x[n+N] \quad \forall n \Rightarrow x[n] \text{ is periodic}$$

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} = \frac{1}{8} \Rightarrow N=8$$

$$x(n) = \frac{1}{2j}\left\{ e^{j\frac{\pi(n-1)}{4}} - e^{-j\frac{\pi(n-1)}{4}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot e^{-j\pi/4} \cdot e^{j\pi/4 n} - \frac{1}{2j} e^{j\pi/4} \cdot e^{-j\pi/4 n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2j} e^{-j\pi/4}}_{a_1} \cdot e^{j(1)2\pi/8 n} - \underbrace{\frac{1}{2j} e^{j\pi/4}}_{a_{-1}} \cdot e^{j(-1)2\pi/8 n}$$



مثال :

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad -2 \leqslant n \leqslant 3$$

$N=6$

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=-2}^{3} (1/2)^n e^{-jk\frac{2\pi}{6} n}$$

$$m = n+2 : \quad a_k = \frac{1}{6} \sum_{m=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{6}(m-2)}$$

$$= \frac{1}{6}(4)\, e^{jk\frac{4\pi}{6}} \sum_{m=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(e^{-jk\frac{2\pi}{6}}\right)^m$$

$$= 4/6\, e^{jk\frac{4\pi}{6}} \left(\frac{1-(1/2\, e^{-jk\frac{2\pi}{6}})^6}{1-1/2\, e^{-jk\frac{2\pi}{6}}} \right)$$

$$a_k = 2/3 \left(\frac{1-(1/2)^6}{e^{-jk\frac{4\pi}{6}} - \frac{1}{2}(-1)^k} \right)$$

D.T. LTI System:

ورودی $x(n) = z^n \quad \rightarrow y(n) = H(z) z^n$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \underbrace{e^{jk\frac{2\pi}{N}}}_{z_k}{}^{n}$$

$$y(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} \underbrace{a_k H(z_k)}_{b_k \text{ ضرایب سری فوریه خروجی}} \cdot z_k^n \Bigg|_{z_k = e^{jk\frac{2\pi}{N}}}$$

مثال :

$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

$h[n] = \alpha^n u[n] \qquad |\alpha|<1$

$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}$

to find b_K: $\quad H(z_K) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z_K^{-n}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z_K^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha z_K^{-1})^n = \frac{1}{1-\alpha z_K^{-1}}$$

$$H(z_K)\Big|_{z_K = e^{jK\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1}{1-\alpha e^{-jK\frac{2\pi}{N}}}$$

$b_K = a_K H(z_K)$

$K = 1, -1$

$$y[n] = a_1 H(z_1) z_1^n + a_{-1} H(z_{-1}) z_{-1}^n$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$y[n] = r\cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$

چند خاصیت سری فوریه سیگنال گسسته :

1. $x[n] \xleftrightarrow{F.S.} a_K$

$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F.S.} e^{-jK\frac{2\pi}{N}n_0} a_K$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n-n_0] e^{-jK\frac{2\pi}{N}n} \xrightarrow[m=n-n_0]{} \dots$$

2. $(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{F.S.} a_{K-N/2}$

$$(-1)^n = e^{j\pi n} \Rightarrow a_K = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jK\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j\pi n} \cdot x[n] e^{-jK\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-j(K-N/2)\frac{2\pi}{N}n}}_{a_{K-N/2}}$$

3. $x_1[n] \xleftrightarrow{F.S.} a_k$ N دوره‌تناوب

$x_2[n] \xleftrightarrow{F.S.} b_k$ N 〃 〃

$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] \xleftrightarrow{F.S.} c_k$

$c_k = a_k \overset{\uparrow}{*} b_k = \sum_{\ell} a_\ell b_{k-\ell}$

کانولوشن متناوب

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n\text{-even} \\ 0 & n\text{-odd} \end{cases}$$

$x[n]$ is periodic with $\underline{N}$

- if N is even : $y[n]$ is periodic with $\underline{N}$
- if N is odd : $y[n]$ is periodic with $\underline{2N}$

N even :

Recall: $y[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + \underline{(-1)^n x[n]}\}$

$= \frac{1}{2}\{x[n] + e^{\pm j\pi n} x[n]\}$

ضرایب سری فوریه y[n] $b_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} y[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

$b_k = \frac{1}{2}\{a_k + a_{k-N/2}\}$

N odd :

then $y[n]$ is periodic (period = 2N)

$b_k = \frac{1}{2N}\sum_{n=\langle 2N\rangle} y[n] e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n}$

$= \frac{1}{2N}\sum_{n=\langle 2N\rangle} \{\underbrace{x[n] + e^{j\pi n} x[n]}_{y[n]}\} e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n}$

$b_k = b_k' + b_k''$

$b_k' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2N}\sum_{n=\langle 2N\rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n}$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{N}\{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk/2\,\frac{2\pi}{N}n} + \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{x[n+N]}_{x[n]} \underbrace{e^{-jk/2\,\frac{2\pi}{N}(n+N)}}_{e^{-jk/2\cdot\frac{2\pi}{N}n}\,\cdot\,e^{-jk/2\cdot\frac{2\pi}{N}N}}\}$

$x[n] = x[n+N] \nearrow$

$$= \frac{1}{4}\left\{a_{k/2} + e^{-jk\pi} a_{k/2}\right\} = \begin{cases} 1/2\, a_{k/2} & , k = \text{even} \quad (e^{-jk\pi} = 1) \\ 0 & k = \text{odd} \quad (e^{-jk\pi} = -1) \end{cases}$$

$$b''_k = \frac{1}{4}\left\{a_{\frac{k-N}{2}} + e^{-j\pi(k-N)} a_{\frac{k-N}{2}}\right\}$$

if $k = \text{odd}$

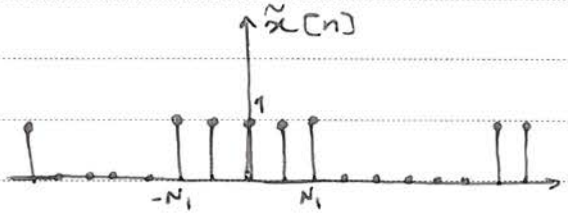
the $\underset{\text{odd}}{\underset{\downarrow}{k-N}}$ is even & $b''_k = \frac{1}{2} a_{\frac{k-N}{2}}$

if $k = \text{even}$

the $\underset{\text{odd}}{\underset{\downarrow}{k-N}}$ is odd & $b''_k = 0$

$$b_k = \begin{cases} 1/2\, a_{k/2} & k = \text{even} \\ 1/2\, a_{\frac{k-N}{2}} & k = \text{odd} \end{cases}$$

مثال:



$\tilde{x}[n]$ is periodic : period $= N$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

where $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} (1)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$m = n + N_1 \Rightarrow a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)}$$

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \cdot \frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1-N_1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

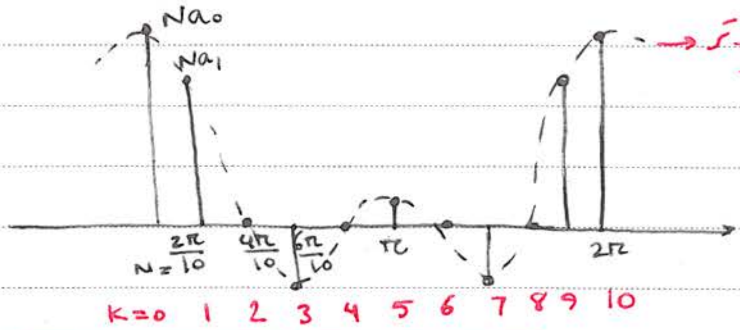
مخرج: $1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}} = 1-e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \left\{\underbrace{e^{jk\frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}}_{2j}\right\} \times 2j$

صورت $= e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \left\{\underbrace{e^{jk(\frac{2\pi}{N})(N_1+1/2)} - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})(N_1+1/2)}}_{2j}\right\} \times 2j$

$$a_K = \frac{1}{N} \cdot \frac{2j\,\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi K}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{2j\,\mathrm{Sin}\left(K\frac{2\pi}{2N}\right)} = \frac{1}{N}\,\frac{\mathrm{Sin}\left(\Omega K\left(\overset{\frac{2N_1+1}{2}}{N_1+\frac{1}{2}}\right)\right)}{\mathrm{Sin}\left(\frac{\Omega \cdot K}{2}\right)}\Bigg|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}K}$$

Ω is continous variable

$2N_1+1=5 \Rightarrow N_1=2 \;\&\; N=10$ مانند شکل



هرچه N بزرگتر شود، تابع ما به شکل پیوسته نزدیک تر خواهد شد!

$N \to \infty$ $\quad \tilde{x}[n] \to x[n]$ غیرمتناوب

$Na_K \to X(\Omega)$ تابع پیوسته

که همان تبدیل فوریه زمان گسسته $\tilde{x}[n]$ است.

و داریم :

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-jn\Omega}}$$: Discrete Time Fourier Transform

تابع پیوسته بر حسب Ω

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(\Omega)\,e^{jn\Omega}\,d\Omega}$$: Inverse Fourier Transform

Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

مقایسه شود : DFT (Discrete Fourier Transform)
FFT (Fast Fourier Transform)

$x[n]$ is D.T. Signal (aperiodic نامتناوب)

$\mathrm{DTFT}\{x[n]\} = X(\Omega) \equiv X(e^{j\Omega}) \equiv X(e^{j\omega})$ notation کتاب

$$\text{Def}: \underbrace{X(\Omega)}_{\text{C.T.}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[n]}_{\text{D.T.}}\, \underset{\downarrow \text{ periodic}}{e^{-j\Omega n}}$$ $\Omega \equiv$ Continous variable

$e^{jn\Omega} = e^{jn(\Omega+2\pi)}$

Analysis Equation: $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn\Omega}$

IDTFT: $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} e^{jn\Omega} X(\Omega)\, d\Omega$ Synthesis Equation

Convergence Issue: همگرایی

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$

یا

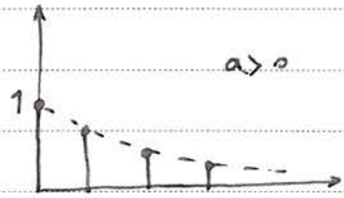
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$: تعریف انرژی

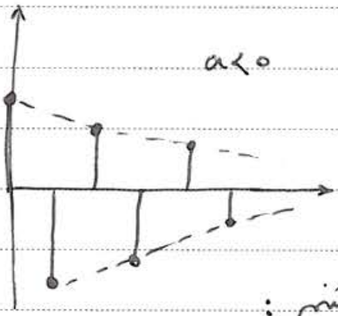
اگر سیگنال انرژی محدود داشته باشد، می توانیم برای آن تبدیل فوریه ی گسسته بدست آوریم.

* از آن جا که سیگنال متناوب انرژی محدود ندارد، این رابطه همگرا نمی شود و در نتیجه شرط تبدیل فوریه را ارضا نمی کند.

مثال: تبدیل فوریه سیگنال روبرو را بیابید:

$x[n] = a^n u[n] \qquad |a|<1$





از آن جا که تغییرات سیگنال دومی بیشتر است، محتوای فرکانسی آن بیشتر است.
اگر دو سیگنال را تجزیه فرکانسی کنیم:

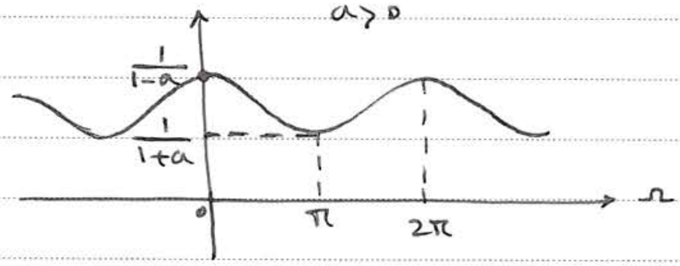
form I: $X(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\Omega n}$

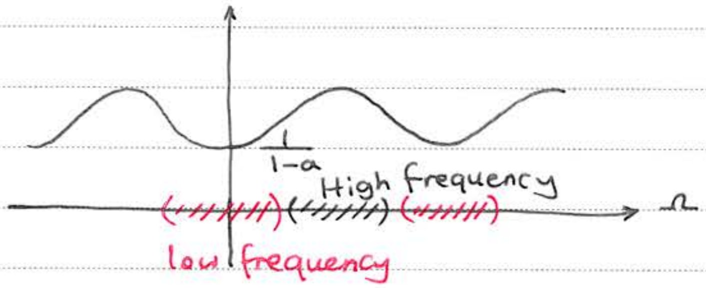
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} = \frac{1}{1-a(\cos\Omega - j\sin\Omega)}$$

$$= \frac{1}{1-a\cos\Omega + ja\sin\Omega} \Rightarrow \begin{cases} \text{Real}\{X(\Omega)\} = \frac{1-a\cos\Omega}{1+a^2-2a\cos\Omega} \\ \text{Img}\{X(\Omega)\} = \frac{-a\sin(\Omega)}{1+a^2-2a\cos\Omega} \end{cases}$$

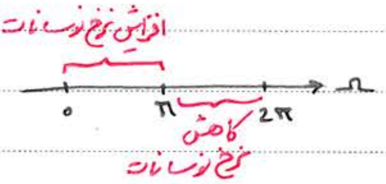
$$|X(\Omega)| = \sqrt{(1-a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega} = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\Omega+a^2}}$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$





Recall Cos(Ωn) : Ω : 0 → 2π



طبق شکل مولفه‌های فرکانسی بالاتر در a<0 دارای دامنه‌ی بیشتری هستند و در ایجاد سیگنال نقش بیشتری دارند. پس محتوای فرکانسی آن بیشتر است.

مثال :

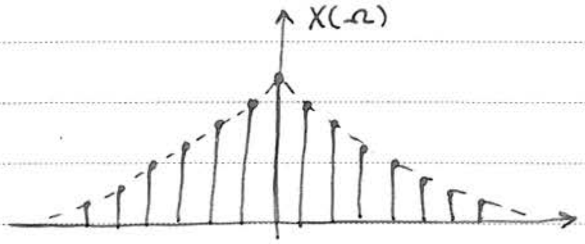
$$x[n] = a^{|n|} \quad |a|<1 \quad = \begin{cases} a^{-n} & n<0 \\ a^{n} & n\geq 0 \end{cases} \quad \text{Real \& Even} \Rightarrow \text{DTFT آن Real \& Even}$$

$$\text{DTFT}\{x[n]\} = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-jn\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-jn\Omega} +$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n} e^{-jn\Omega} = \sum_{n=1}^{+\infty} (ae^{j\Omega})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{j\Omega})^n +$$

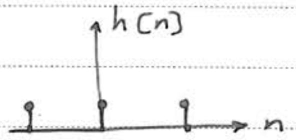
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\Omega})^n - 1$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\Omega}} - 1 = \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\Omega)+a^2} \Rightarrow \text{Real \& Even}$$



مثال : $h_{LP}[n] = [\,1/3 \quad 1/3 \quad 1/3\,]$ پاسخ ضربه فیلتر پایین گذر

$n = \quad -1 \quad 0 \quad 1$



Properties of DTFT:

1. periodicity متناوب

$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$ برای سیگنال های پیوسته این طور نبود، بعد از ۰ تا ∞ تغییر می کرد.

2. Linearity خطی بودن

$x_1[n] \longleftrightarrow X_1(\Omega)$

$x_2[n] \longleftrightarrow X_2(\Omega)$

$x_3[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \longleftrightarrow X_3(\Omega) = a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$

3. Symmetry متقارن

$x[n]$ is a real signal

$X(-\Omega) = X^*(\Omega)$

$X(\Omega) = \text{Real}\{X(\Omega)\} + j\,\text{Im}\{X(\Omega)\}$

$\text{Real}\{X(\Omega)\}$ is an even function

$\text{Im}\{X(\Omega)\}$ is an odd function

4. Time Shifting & frequency shifting

$x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$

$$\begin{cases} x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-jn_0\Omega} X(\Omega) \\ e^{\pm jn\Omega_0} x[n] \longleftrightarrow X(\Omega \mp \Omega_0) \end{cases}$$

مثال : $\underbrace{\cos(\Omega_0 n)}_{1/2\,(e^{jn\Omega_0} + e^{-jn\Omega_0})} x[n] \longleftrightarrow 1/2\,\{X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)\}$

5. Time Scaling

C.T. : $f(t) \longleftrightarrow F(w)$

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)$$

* $x[0.5n]$ doesn't mean anything. The coefficient must be integer!

$$x_k[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0 & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k \end{cases}$$

$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$

$x_k[n] \longleftrightarrow X(k\Omega)$

if $y[n] = x[2n] \longleftrightarrow Y(\Omega) = X\left(\frac{\Omega}{2}\right)$ compressed in time domain expand in frequency domain

Expansion:

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n = \text{even} \\ 0 & n = \text{odd} \end{cases} \longleftrightarrow X(2\Omega)$$

مثال :

$$y[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + \underset{\displaystyle\downarrow \atop \displaystyle e^{-jn\pi}}{(-1)^n} x[n]\}$$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2}\{X(\Omega) + X(\Omega + \pi)\}$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

PAPCO

6. Differentiation in Frequency Domain :

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn\Omega}$$

$$j\,\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = j\sum_{n=-\infty}^{+\infty} -x[n] jn\, e^{-jn\Omega} \Rightarrow j\,\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, n\, e^{-jn\Omega}$$

$$* \quad n\,x[n] \longleftrightarrow j\,\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$
$$|a|<1$$

$$(n+1)\,a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}\,a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^r}$$

7. Parseval's Relation :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \underbrace{|X(\Omega)|^2}_{\downarrow} d\Omega$$

انرژی سیگنال x[n]

Energy Density Spectrum طیف چگالی انرژی

8. Convolution

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[n-m]$$

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega)$$
$$h[n] \longleftrightarrow H(\Omega)$$
$$y[n] \longleftrightarrow Y(\Omega) = X(\Omega) . H(\Omega)$$

مثال :

$h[n] = \alpha^n u[n] \longleftrightarrow H(\Omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$

$x[n] = \beta^n u[n] \longleftrightarrow X(\Omega) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\Omega}}$

$|\alpha, \beta| < 1$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})(1-\beta e^{-j\Omega})}$$

PFE (Partial Fraction Expansion) بسط کسرهای جزئی

$$\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})(1-\beta e^{-j\Omega})} = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\Omega}}$$

$$A = Y(\Omega) \cdot (1-\alpha e^{-j\Omega}) \Big|_{e^{-j\Omega} = \frac{1}{\alpha}}$$

مثال :

i) $x[n] = (3/4)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-3/4 e^{-j\Omega}}$

$h[n] = (1/2)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-1/2 e^{-j\Omega}}$

ii) $x[n] = (n+1)(1/4)^n u[n] \longleftrightarrow X(\Omega) = \frac{1}{(1-1/4 e^{-j\Omega})^2}$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-1/4 e^{-j\Omega})^2}$$

$$= \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{B}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2} + \frac{C}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

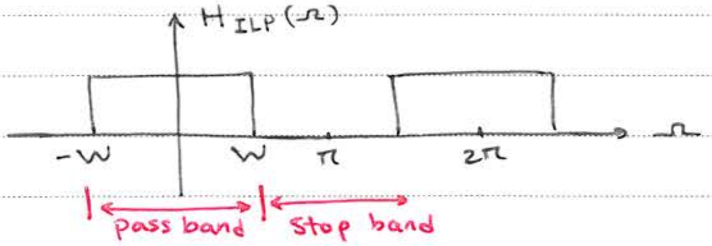
$$y[n] = \underbrace{A}_{4}(1/2)^n u[n] + \underbrace{B}_{-3}(n+1)(1/4)^n u[n] + \underbrace{C}_{-2}(1/4)^n u[n]$$

$$* \begin{cases} x[n] \longleftrightarrow X(\Omega) \\ \underbrace{\cos(\Omega_0 n)}_{1/2(e^{-j\Omega_0 n} + e^{j\Omega_0 n})} x[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2}\{X(\Omega+\Omega_0) + X(\Omega-\Omega_0)\} \\ \underbrace{\sin(\Omega_0 n)}_{j/2(e^{-j\Omega_0 n} - e^{j\Omega_0 n})} x[n] \longleftrightarrow j/2\{X(\Omega+\Omega_0) - X(\Omega-\Omega_0)\} \end{cases}$$

مثال :

$$x[n] = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Shift}}}{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}\ \underbrace{u[n]} \longrightarrow X(\Omega)$$

مثال : ideal low-pass filter

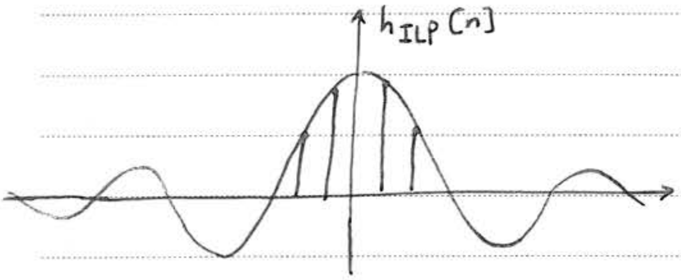


$$h_{ILP}[n] = \frac{1}{2\pi}\int H_{ILP}(\Omega)\,e^{jn\Omega}\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}(1)\,e^{jn\Omega}\,d\Omega$$

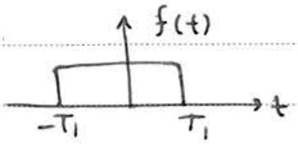
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}\,e^{jn\Omega}\Big|_{-W}^{W} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}\left[\frac{e^{jnW}-e^{-jnW}}{2j}\right]$$

$$= \frac{\sin(nW)}{\pi n}$$

$$h_{ILP}[n] = \frac{\sin(nW)}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$$

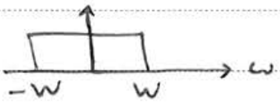


C.T.



$\longleftrightarrow \quad 2T_1\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$

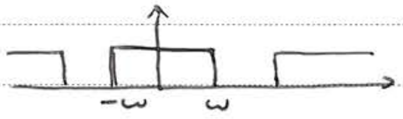
$\mathrm{Sinc}(\dots) \longleftrightarrow$

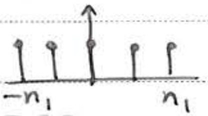


8. Duality دوگانی

D.T.

$\mathrm{Sinc}(\dots) \longleftrightarrow$





$\longleftrightarrow \quad \neq \mathrm{Sinc}(\dots)$

Fourier Transform for periodic Signals:

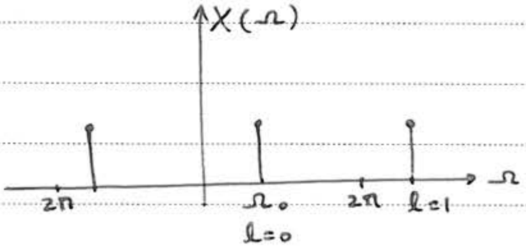
C.T. $e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

$\sum a_k e^{jk\omega_0 t} \longleftrightarrow X_1(\omega) = \sum 2\pi a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$

D.T. $X(\Omega) = 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0-\underbrace{2\pi l})$

به دلیل متناوب بودن

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(\Omega)e^{jn\Omega}\,d\Omega$$



$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0)e^{jn\Omega}\,d\Omega$$
$$= e^{jn\Omega_0}$$

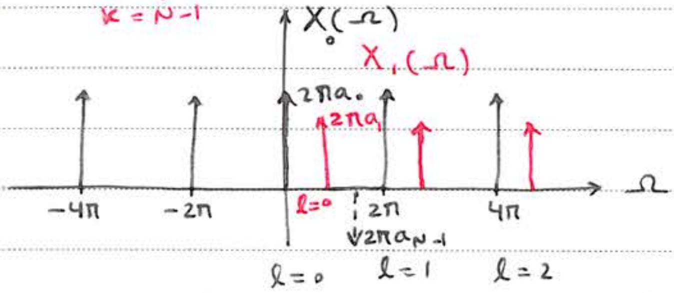
* $e^{jn\Omega_0} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l)$

$x[n]$ is periodic $(N) \Rightarrow x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

D.T.F.T. $\{x[n]\}$

$$X(\Omega) = \underbrace{a_0\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-2\pi l)}_{k=0} + \underbrace{a_1\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-\frac{2\pi}{N}-2\pi l)}_{k=1} + \dots +$$

$$\underbrace{a_{N-1}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-(N-1)\frac{2\pi}{N}-2\pi l)}_{k=N-1}$$



$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta(\Omega-k\frac{2\pi}{N})$$

مثال :

$$x[n] = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)}_{N=16} - 2\underbrace{\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}_{N=8}$$

$x_1[n]$ $x_2[n]$

$$x_1[n] \longleftrightarrow X_1(\Omega) = \sum 2\pi a_k\,\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

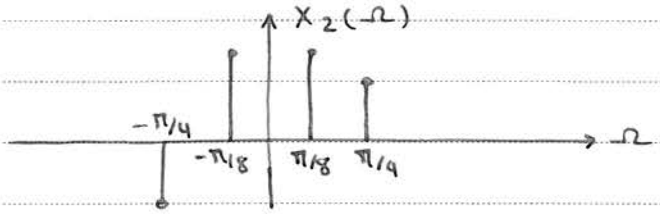
$$\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \xrightarrow[\text{سری فوریه}]{\text{ضرایب}} a_1 = \frac{1}{2j}\ ,\ a_{-1} = \frac{-1}{2j}$$

$\Rightarrow$ in one period: $X_1(\Omega) = \frac{\pi}{j}\,\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{16}\right) - \frac{\pi}{j}\,\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{16}\right)$

$$x_2[n] \longleftrightarrow X_2(\Omega) = \sum 2\pi a_k\,\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \xrightarrow[\text{سری فوریه}]{\text{ضرایب}} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$X_2(\Omega) = \pi\,\delta(n - \pi/4) + \pi\,\delta(n + \pi/4)$$



9. Modulation Property:

$$x_1[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)$$

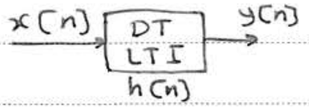
$$x_2[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_2(\Omega)$$

$$x_3[n] = x_1[n]\cdot x_2[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_3(\Omega)$$

$$X_3(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left\{\underbrace{X_1(\Omega)}_{\substack{\text{متناوب}\\ 2\pi}} * \underbrace{X_2(\Omega)}_{\substack{\text{متناوب}\\ 2\pi}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X_1(\theta)\,X_2(\Omega - \theta)\,d\theta$$

مثال :

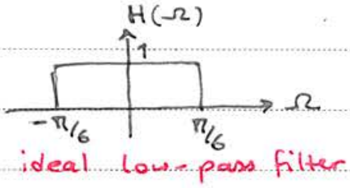


i) $h[n] = \frac{1}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)$

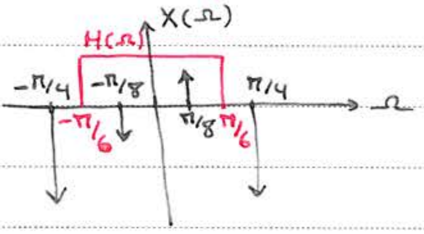
$x[n] = \sin[\frac{\pi n}{8}] - 2\cos[\frac{\pi n}{4}]$

$y[n] = ?$

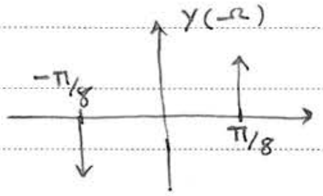
$H(\Omega) =$



$X(\Omega) =$



$Y(\Omega) = X(\Omega).H(\Omega)$

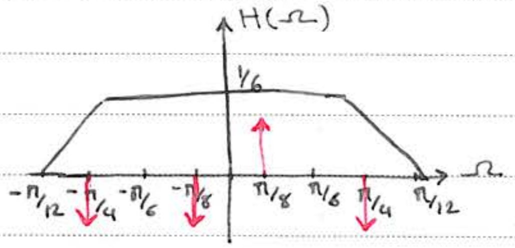


$\Rightarrow y[n] = \sin(\frac{\pi n}{8})$

ii) $h[n] = (\frac{1}{\pi n})^2 \sin(\frac{\pi n}{6}) \sin(\frac{\pi n}{3})$

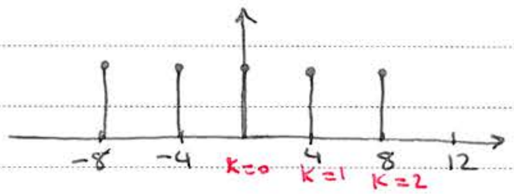
$= \underbrace{\frac{\sin(\frac{\pi n}{6})}{\pi n}}_{h_1[n]} . \underbrace{\frac{\sin(\frac{\pi n}{3})}{\pi n}}_{h_2[n]}$

$H(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\{H_1(\Omega) * H_2(\Omega)\}$



نکته : $x[n] = (-1)^n = e^{-j\pi n} \longleftrightarrow X(\Omega) = 2\pi\,\delta(\Omega-\pi)$ در یک دوره تناوب

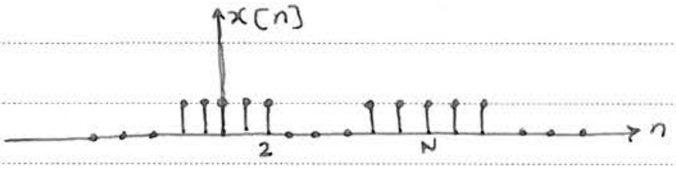
مثال : $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4k]$



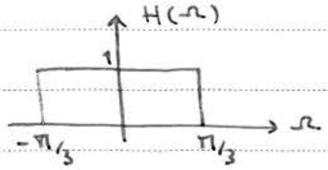
is periodic with N = 4

$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\, \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$

مثال :

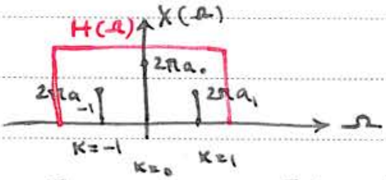


$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\, \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N} k)$



$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin(2\pi k(N_1+1/2)/N)}{\sin(\frac{2\pi k}{2N})}$$

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N} \qquad \frac{N=8}{N_1=2}:$$



$$Y(\Omega) = 2\pi a_0 \delta(\Omega) + 2\pi a_1 \delta(\Omega - \pi/4) + 2\pi a_{-1} \delta(\Omega + \pi/4)$$

$$y[n] = \frac{5}{8} + \frac{\sin(\frac{5\pi}{8})}{4\sin(\pi/8)} \cos(\frac{\pi n}{4})$$

Low-pass filter softens the sharp edges (sharp transitions) and the resulting signal is smother.

Frequency Response of LTI Systems:

$= x[n] * h[n]$ سیگنال در قلمرو زمان (مکان)

$X(\Omega) \quad H(\Omega) \quad Y(\Omega) = X(\Omega).H(\Omega)$ سیگنال در قلمرو فرکانس

(I) $\boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}}$ frequency response of DT LTI System

$$\sum_{K=0}^{N} a_K y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$ difference equation معادله تفاضلی

$$\sum_{K=0}^{N} a_K e^{-jkn} . Y(\Omega) = \sum_{K=0}^{M} b_K e^{-jk\Omega} X(\Omega)$$

تبدیل فوریه $\left\{ \right.$ خطی بودن، جابجایی با زمان، کانولوشن

use (I): $$H(\Omega) = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_K e^{-jk\Omega}}{\sum_{K=0}^{N} a_K e^{-jk\Omega}}$$

$$H(\Omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + \dots + b_M e^{-jM\Omega}}{a_0 + a_1 e^{-j\Omega} + \dots + a_N e^{-jN\Omega}}$$

$$= \left.\frac{b_0 + b_1 S + b_2 S^2 + \dots + b_M S^M}{a_0 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_N S^n}\right|_{S=e^{j\Omega}}$$

مثال :

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$$

$$H(\Omega)=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}$$

$$H(\Omega)=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$$

$$=\frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$h[n]=A(\tfrac{1}{2})^n u[n]+B(1/4)^n u[n]$$

$$X(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}$$

$$Y(\Omega)=\frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{B}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}+\frac{C}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$y[n]=A(1/2)^n u[n]+B(n+1)(1/4)^n u[n]+C(1/4)^n u[n]$$

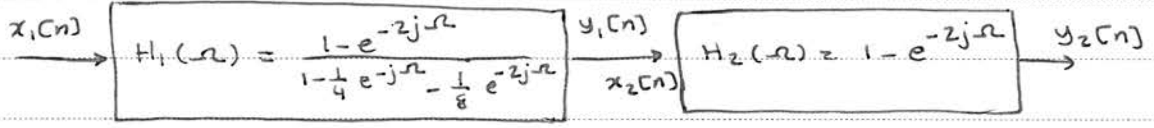
$$\left\{\begin{array}{l} H(\Omega)=\dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}} \quad \text{(II)} \\ \\ H(\Omega)=\dfrac{b_0}{a_0}\cdot\dfrac{\prod_{k=0}^{N}(1+\mu_k e^{-j\Omega})}{\prod_{k=0}^{M}(1+\eta_k e^{-j\Omega})} \quad \text{(III)} \end{array}\right.$$

مثال :

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-2x[n-2]+x[n-4]$$

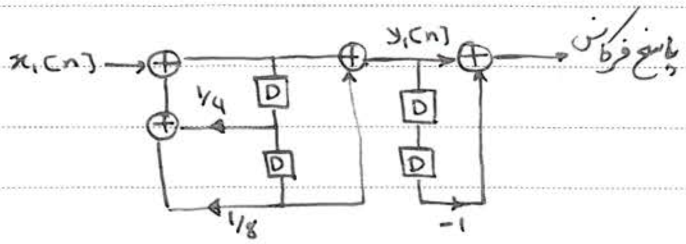
$$H(\Omega)=\frac{1-2e^{-2j\Omega}+e^{-4j\Omega}}{1-1/4\,e^{-j\Omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}$$

$$H(\Omega)=\frac{(1-e^{-2j\Omega})(1-e^{-2j\Omega})}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}$$



1 زیرسیستم : $y_1[n] - \frac{1}{4} y_1[n-1] - \frac{1}{8} y_1[n-2] = x_1[n] - x_1[n-2]$

2 زیرسیستم : $y_2[n] = x_2[n] - x_2[n-2]$



اگر سوال ازما بخواهد برحسب زیرسیستم‌های درجه ۱ بدست بیاوریم :

$$H(\Omega) = \frac{(1-e^{-j\Omega})(1+e^{-j\Omega})(1+e^{-j\Omega})(1-e^{-j\Omega})}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1+1/4\, e^{-j\Omega})}$$

اگر سوال ازما اتصال موازی بخواهد باید بسط کسرهای جزئی رابدست آوریم .

باتوجه به معادله (III) :

iامین ریشه مختلط

$$(1+\mu_i e^{-j\Omega})(1+\mu_i^* e^{-j\Omega})$$
$$= 1 + \mu_i \mu_i^* e^{-j2\Omega} + (\mu_i + \mu_i^*) e^{-j\Omega}$$
$$= 1 + 2\mathrm{Re}\{\mu i\} e^{-j\Omega} + \{\mu i\}^2 e^{-j2\Omega}$$

$H(\Omega) = H_1(\Omega) H_2(\Omega) \cdots H_N(\Omega)$ (اتصال سری)

معادله (II) رامی‌توانیم بصورت روبرو بنویسیم :

$$H(\Omega) = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1+\eta_k e^{-j\Omega}}$$

(اتصال موازی)

مثال :

$$H_i(\Omega) = \frac{\gamma_{0i} + \gamma_{1i} e^{-j\Omega}}{1+\alpha_{1i} e^{-j\Omega} + \alpha_{2i} e^{-j2\Omega}} = \frac{Y_i(\Omega)}{X_i(\Omega)}$$

$$Y_i(\Omega) + \alpha_{1i} e^{-j\Omega} Y_i(\Omega) + \alpha_{2i} e^{-j2\Omega} Y_i(\Omega) = \gamma_{0i} X_i(\Omega) + \gamma_{1i} e^{-j\Omega} X_i(\Omega)$$

↓ IDTFT

$$y_i[n] + \alpha_{1i} y_i[n-1] + \alpha_{2i} y_i[n-2] = \gamma_{0i} x_i[n] + \gamma_{1i} x_i[n-1]$$

↓

Block Diagram

مثال :

LTI: $y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]+w[n]+\frac{1}{2}w[n-1]=\frac{2}{3}x[n]$

$y[n]-\frac{5}{4}y[n-1]+2w[n]-2w[n-1]=-\frac{5}{3}x[n]$

$y[n]$ is output
$x[n]$ is input
$w[n]$

} input - output relation?

DTFT both equations:

$$(1+\frac{1}{4}e^{-j\Omega})Y(\Omega)+(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})W(\Omega)=\frac{2}{3}X(\Omega)$$

$$(1-\frac{5}{4}e^{-j\Omega})Y(\Omega)+(2-2e^{-j\Omega})W(\Omega)=-\frac{5}{3}X(\Omega)$$

from first equation we have: $W(\Omega)=\frac{1}{1+{}^1\!/_2e^{-j\Omega}}\left\{\frac{2}{3}X(\Omega)-(1+\frac{1}{4}e^{-j\Omega})Y(\Omega)\right\}$

$$\Rightarrow \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=H(\Omega)=\frac{3-{}^1\!/_2e^{-j\Omega}}{\underbrace{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}_{1-{}^3\!/_4e^{-j\Omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}}$$

$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=3x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$: معادله تفاضلی سیستم

$h[n]=?$ $\Rightarrow H(\Omega)=\frac{A}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}+\frac{B}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$ $\Rightarrow A=4,\ B=-1$

$h[n]=4({}^1\!/_2)^n u[n]-({}^1\!/_4)^n u[n]$

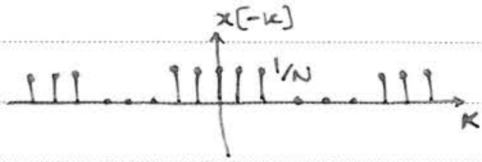
خاصیت دوگانی سری فوریه :

if $f[K]=a_K=\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

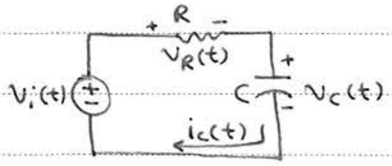
$$\begin{cases} x[n]\xleftrightarrow{F.S.}a_K=f[K] \\ f[n]\xleftrightarrow{F.S.}\frac{1}{N}x[-K]\end{cases}$$

مثال :

$x[n]=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin[(\frac{2\pi n}{N})(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\frac{2\pi n}{N})}\xleftrightarrow{F.S.}$



C.T.



i) $x(t) = V_i(t)$

$y(t) = V_c(t)$

$V_R(t) + V_c(t) = V_i(t)$

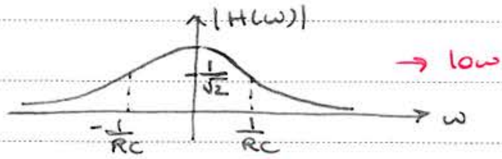
$R i_c(t) + V_c(t) = V_i(t)$

$$\Rightarrow RC \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_i(t)$$

$$\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_c(t) = \frac{1}{RC} V_i(t)$$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \Rightarrow$$



→ low-pass filter

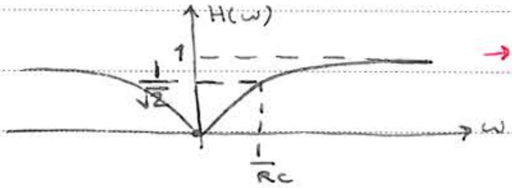
cut off frequency

ii) $y(t) = V_R(t)$

$x(t) = V_i(t)$

$$RC \frac{dV_R(t)}{dt} + V_R(t) = RC \frac{dV_i(t)}{dt} \Rightarrow H(\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

$$|H(\omega)| = \frac{|\omega RC|}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} \Rightarrow$$



→ high-pass filter

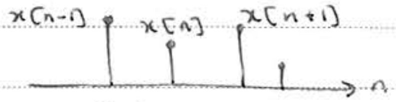
مثال :

$$y[n] = \sum_{K=-N_1}^{N_1} b_K x[n-K]$$

$N_1 = 1$

$b = 1/3$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{3} x[n-1] + \frac{1}{3} x[n] + \frac{1}{3} x[n+1]$$

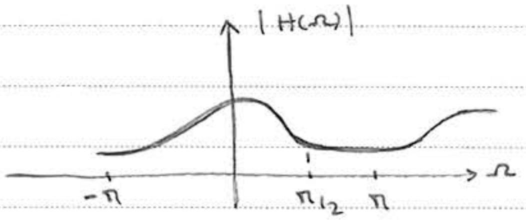


$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn\Omega}$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{3} e^{j\Omega} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-j\Omega}$$

$$= \frac{1}{3} + \cos\Omega$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(\Omega)$$



$h[n] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

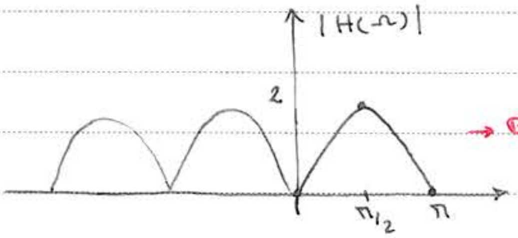
مثال:

$h[n] = \begin{bmatrix}1\\(0)\\-1\end{bmatrix}\begin{matrix}h[-1]\\h[0]\\h[1]\end{matrix}$

$H(\Omega) = 1e^{j\Omega} + 0 - 1e^{-j\Omega}$

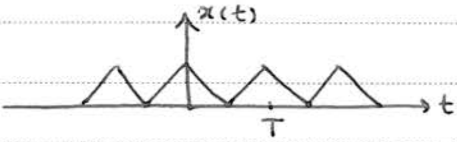
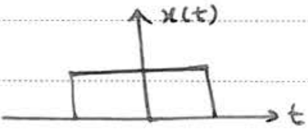
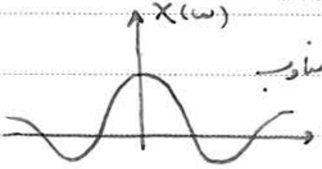
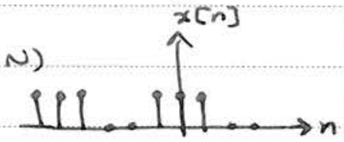
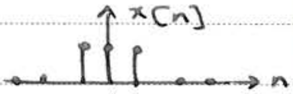
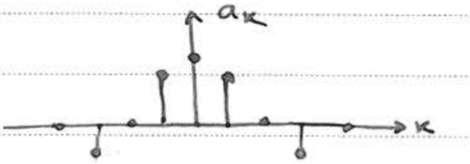
$= \frac{2j}{2j}(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}) = 2j\,Sin(\Omega)$

$|H(\Omega)| = 2Sin(\Omega)$



→ Band_pass

« جمع بندی »

Time (Spatial) Domain	Frequency Domain
$\tilde{x}(t)$ is periodic(T) and continuous 	Fourier Series Representation $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$ $C_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$  گسسته و نامتناوب
$x(t)$ is aperiodic and continuous  IFT: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	F.T{ x(t)} = X(ω) $= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$  پیوسته و نامتناوب
$\tilde{x}[n]$ is periodic (N) 	F.S. $\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ where $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$
$x[n]$ is aperiodic and discrete 	

$$DTFT\{x[n]\} = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jn\Omega}$$ تابع پیوسته و متناوب

IDTFT $$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int X(\Omega)e^{-jn\Omega}\,d\Omega$$

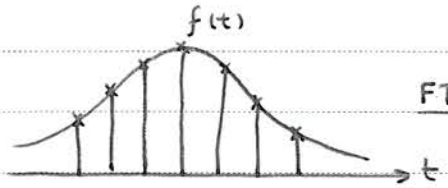
DFT ≡ Discrete Fourier Transform

$$x[n] \Rightarrow \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[n-1] \end{bmatrix} = \underset{\text{بردار}}{x} \qquad X[k] = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[n-1] \end{bmatrix}$$

$$DFT\{x[n]\} \equiv X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$IDFT: \quad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

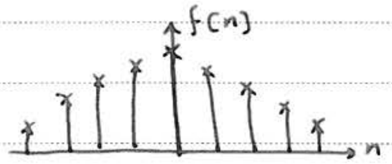
FFT ≡ Fast Fourier Transform: مجموعه الگوریتم هایی که به بدست آوردن تبدیل فوریه سرعت بخشیده اند



$$\xrightarrow{FT} F(\omega)$$

$$\underset{\frac{rad}{s}}{\omega} = 2\pi \underset{Hz}{f}$$

↓ Sampling



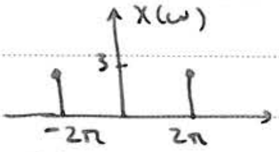
$$\xrightarrow{DTFT} F(\Omega)$$

Ω متغیر پیوسته

$$f[n] \xrightarrow{DFT} X[\underset{\text{index (unitless)}}{k}]$$

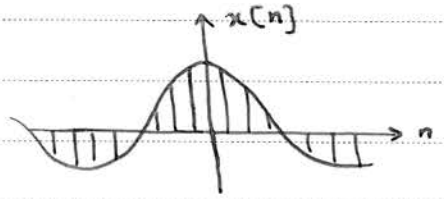
$$\Rightarrow \underset{\text{frequency index}}{k} \longrightarrow \underset{\text{digital frequency}}{\Omega_k} = \frac{2\pi}{N}k \longrightarrow \omega: \frac{k2\pi}{NT_s}$$

$$x(t) = 3\cos(2\pi t)$$



$$x(t)\Big|_{t=nT_s} = x[n] = 3\cos(2\pi nT_s)$$

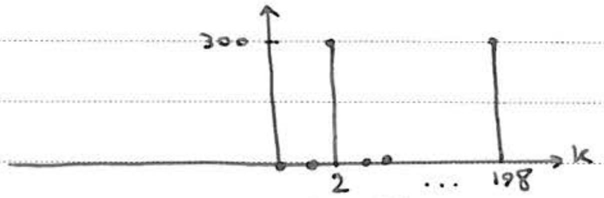
$$T_s = 0.01 \qquad x[n] = 3\cos(0.02\pi n)$$



200 Samples : 0 → 199

$x[n] : [x[0] \ \ldots \ x[199]]^T$

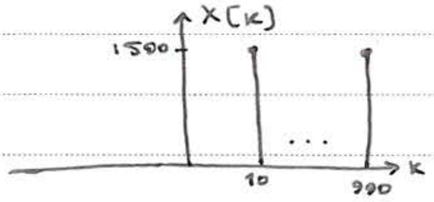
$X[k] : [X[0] \ \ldots \ X[199]]^T$



$\Omega_2 = \frac{2\pi}{200}(2)$

$\omega : \frac{2(2\pi)}{200(0.01)} = 2\pi$

$x[n] : 0 \rightarrow 999$



Z - Transform :

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \Rightarrow s = j\omega \qquad \text{مقایسه با تبدیل فوریه :}$$

تبدیل لاپلاس : یک تبدیل کلی‌تر نسبت به تبدیل فوریه است . قابلیت تعمیم پذیری آن بیشتر از تبدیل فوریه است . می‌توانیم سیگنالی داشته باشیم که تبدیل فوریه نداشته باشد ولی تبدیل لاپلاس دارد.

D.T.

DTFT of $x[n]$: $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn\Omega}$

Z.T of $x[n]$: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$ Bilateral (two-sided) Z.T.

زیرا index ، n از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند.

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$ Unilateral (one-sided) Z.T.

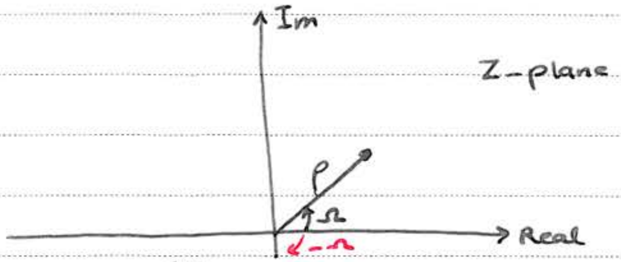
$z = e^{j\Omega}$ z : continuous variable

in general :

$z = a + jb$ magnitude : $|z| = \rho$

phase : $\measuredangle z = \Omega$

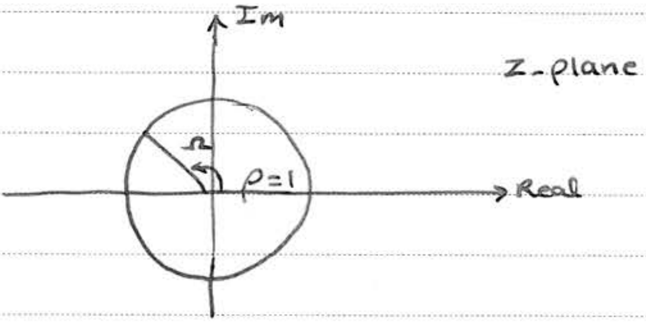
Polar form : $z = \rho e^{j\Omega}$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,(\rho e^{j\Omega})^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n].\rho^{-n})\, e^{-jn\Omega}$$

یعنی همواره می‌توانیم یک ρ ای پیدا کنیم که وقتی در x[n] ضرب می‌شود، همگرا شود.



$$X(\Omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

ROC : Region of Convergence

آن ناحیه‌ای که تبدیل z همگراست، ROC می‌نامیم (zهایی که باعث همگرا شدن می‌شوند.)

مثال : به طور مستقیم نمی‌توانیم تبدیل فوریه بگیریم زیرا همگرا نمی‌شود!

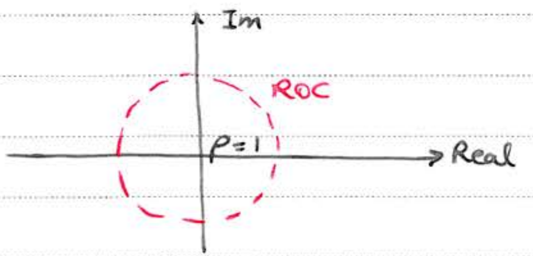
$x[n] = u[n]$

تبدیل z : $\mathfrak{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$

شرط همگرا شدن :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}\right| < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |z^{-1}|^{n} < \infty \Rightarrow |z^{-1}| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > 1$$



In ROC: we can write a closed form — ROC:

$X(z^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ — $|z|>1$

$X(z) = \frac{z}{z-1}$ — $|z|>1$

$u[n] \xrightarrow{Z.T.} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ ROC: $|z|>1$

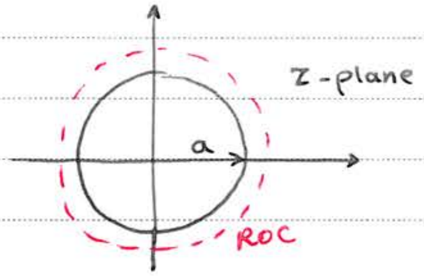
مثال:

$x[n] = a^n u[n]$

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$

$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n \xRightarrow{\text{برای همگرایی}} |a z^{-1}|<1$ یا $\frac{|a|}{|z|}<1$ یا $|z|>|a|$



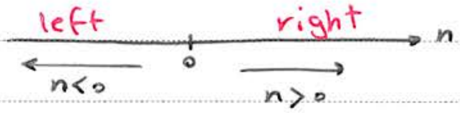
درصورتی‌که ROC، $|z|=1$ را دربگیرد، برای این حالت تبدیل فوریه نیز داریم (زیرا سیگنال همگرا می‌شود.)

In ROC:

$X(z^{-1}) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ ROC: $|z|>|a|$

$X(z) = \frac{z}{z-a}$ $|z|>|a|$

right-sided sequence (RSS):



u(n) و ضرایب آن right-sided sequence هستند زیرا برای n>0 تعریف شده‌اند. تمام سیگنال‌های right-sided sequence که هستند، ROC شان خارج یک دایره بسمت بی‌نهایت است.

$a^n u[n] \xrightarrow{Z.T.} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$ ROC: $|z|>|a|$

مثال:

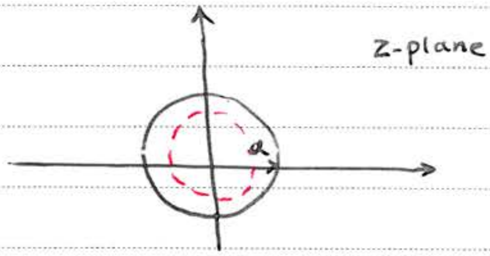
$x[n] = -a^n u[-n-1]$ Left-sided sequence (LSS)

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n}$

$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$

$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n + 1$$



ROC: $|a^{-1}z| < 1 \Rightarrow \frac{|z|}{|a|} < 1 \Rightarrow |z| < |a|$

ناحیه همگرائی left-sided sequence ها داخل دایره و به سمت مبدأ می باشد.

In Roc: Roc:

$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z}$ $|z|<|a|$

$$= \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a} - 1} = \frac{z}{z-a}$$

$-a^n u[-n-1] \xrightarrow{Z.T.} \frac{z}{z-a}$ Roc: $|z|<|a|$

با مثال قبل مقایسه شود:

* تبدیل z یکی است ولی Roc متفاوت است!

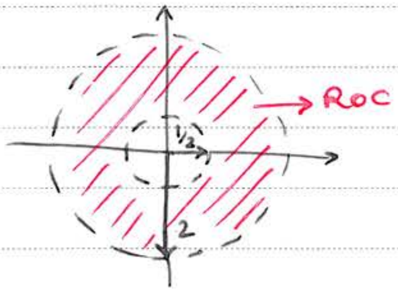
مثال:

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|} = \begin{cases} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{Z.T.} \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ Roc: $|z| > \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1] \xrightarrow{Z.T.} \frac{-z}{z-2}$ ROC: $|z|<2$



two-sided sequence

Roc آنها یک حلقه می شود!

$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-2} = \frac{-3/2\, z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}$ Roc: $1/2 < |z| < 2$

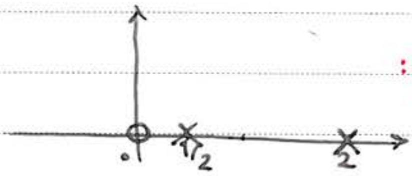
z-transform:

$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ $N(z) = 0$ ریشه‌ها : zeros صفرها

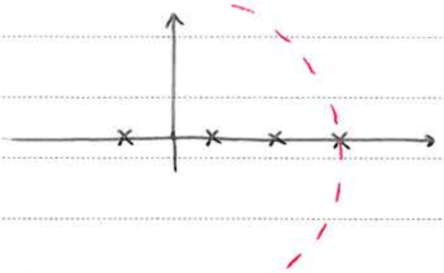
$D(z) = 0$ ریشه‌ها : poles قطب‌ها

اهمیت مشخص کردن ریشه‌ها:
در ROC هیچ قطبی نباید وجود داشته باشد زیرا در این صورت
تابع بی‌نهایت است.

برای مثال قبل:



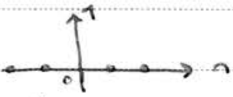
مثال: یک right-sided sequence داریم با قطب‌های روبرو:
ROC احتمالی را پیدا کنید.



right-sided sequence : دایره‌ای با بزرگترین قطر به سمت بی‌نهایت
left-sided " : " " کوچکترین قطر به سمت مبدأ
two-sided " : اشتراک قسمت right و قسمت left معتبر باشد

مثال:

$x[n] = \delta[n]$



$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n}$

$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$ $\times$ $z^{-n} = z^{-0} = 1$ ROC: کل صفحه

مثال:

$x[n] = \delta[n] + \delta[n-5]$

$\mathcal{Z}\{\delta[n] + \delta[n-5]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\delta[n] + \delta[n-5]) z^{-n}$

$X(z) = 1 + z^{-5} = 1 + \frac{1}{z^5} = \frac{z^5+1}{z^5}$ ROC: کل صفحه بجز مبدأ

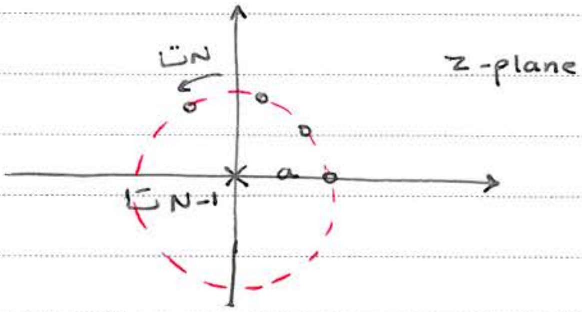
$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} (a^n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n$$

$$= \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$$

$$= \frac{1}{z^{N-1}} \cdot \frac{z^N - a}{z-a}$$



ROC: کل صفحه به جز مبدأ

Properties of z.T:

$x_1[n] \xleftrightarrow{z.T} X_1(z)$ ROC: R_{x_1}

$x_2[n] \xleftrightarrow{z.T} X_2(z)$ ROC: R_{x_2}

1. Linearity

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xleftrightarrow{z.T} X_3(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

$$R_{x_3} = R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

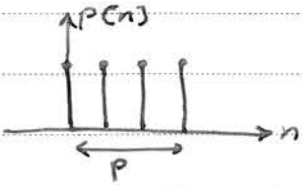
2. Time Shifting

$x_1[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X_1(z)$ ROC: R_{x_1} (except for possible addition or deletion of $z=0$ & poles)

Input - Output relationship:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

مثال:



$$p[n] = u[n] - u[n-p]$$

$$\mathcal{Z}\{p[n]\} = P(z) = \frac{z}{z-1} - z^{-p} \frac{z}{z-1} = \frac{z - z^{-p+1}}{z-1}$$

3. Multiplication by n

$$x[n] \longleftrightarrow X(z)$$

$$n\,x[n] \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz}\{X(z)\}$$

$$n^2 x[n] \longleftrightarrow z \frac{d}{dz}\{X(z)\} + z^2 \frac{d^2}{dz^2}\{X(z)\}$$

اثبات :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -n x[n] z^{-n-1}$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x[n] z^{-n}$$

مثال :

$$x[n] = n a^n u[n]$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z.T} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad ROC: |z|>|a|$$

$$n a^n u[n] \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = \frac{az}{(z-a)^2} \qquad ROC: |z|>|a|$$

4. Multiplication by $Cos[\Omega_0 n]$ & $Sin[\Omega_0 n]$

$$x[n] \longleftrightarrow X(z)$$

$$Cos(\Omega_0 n)\, x[n] = \frac{1}{2}\left\{e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n}\right\} x[n]$$

$$= \frac{1}{2} x(n) e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} x[n] e^{-j\Omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j\Omega_0 n} . z^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (e^{j\Omega_0} . z^{-1})^n$$

$$Cos(\Omega_0 n)\, x[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j\Omega_0} z) + X(e^{-j\Omega_0} z)\right]$$

$$Sin(\Omega_0 n)\, x[n] \longleftrightarrow \frac{j}{2}\left[X(e^{j\Omega_0} z) - X(e^{-j\Omega_0} z)\right]$$

مثال:

$$x[n] = Cos(n\Omega_0) . u[n]$$

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad ROC: |z|>1$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\Omega_0} z}{e^{j\Omega_0} z - 1} + \frac{e^{-j\Omega_0} z}{e^{-j\Omega_0} - z}\right]$$

$$= \frac{1 - Cos(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2Cos(\Omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$$

5. Convolution

$x[n] \longleftrightarrow X(z) \qquad \text{RoC}: R_x$

$h[n] \longleftrightarrow H(z) \qquad \text{RoC}: R_h$

$y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z) \qquad R_x \cap R_h$

اگر اشتراکی نداشته باشند، خروجی برای تبدیل فوریه نداریم!

6. Time Reversal

$x[n] \longleftrightarrow X(z) \qquad R_x$

$x[-n] \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \frac{1}{R_x}$

$R_x : \quad r_{Right} < |z| < r_{Left}$

$\frac{1}{R_x} : \quad \frac{1}{r_R} > |z| > r_L$

مثال :

$x[n] = a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$

$x[n] = a^{-n} u[-n] \longleftrightarrow \frac{1/z}{1/z - a} = \frac{1}{1-az} \qquad |z|<|a^{-1}|$

7. Multiplication by a^n

$$\mathcal{Z}\{a^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (az^{-1})^n$$

$x[n] \longleftrightarrow X(z)$

$a^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$

$p[n] = u[n] - u[n-3] \longleftrightarrow \frac{z(1-z^{-3})}{z-1}$

$$a^n p[n] \longleftrightarrow \frac{\left(\frac{z}{a}\right)\left(1-\left(\frac{z}{a}\right)^{-3}\right)}{\left(\frac{z}{a}\right)-1}$$

$$= \frac{z(1-a^3 z^{-3})}{z-a}$$

8. Summation

$$V[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k] \xleftrightarrow{Z.T} \; ?$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n]$$

$$V[n] = V[n-1] + x[n] \longleftrightarrow V(z) = \frac{z}{z-1} X(z)$$

Inverse Z.T.

1. by long division: $X(z) = \frac{z^2-1}{z^3+2z+4}$

$$= \underset{x[1]}{\textcircled{1}} z^{-1} + \underset{x[2]}{\textcircled{0}} z^{-2} + \underset{x[3]}{\textcircled{-3}} z^{-3} + \underset{x[4]}{\textcircled{-4}} z^{-4} + \cdots$$ باتقسیم صورت بر مخرج داریم :

2. partial fraction expansion :

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$ M & N order polynomials

$$X(z) = \frac{z^n \cdot \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{z^n \cdot \sum_{k=0}^{M} a_k z^{N-k}}$$

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{M} (1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1-d_k z^{-1})}$$ ریشه ها مجزا (تمایز) distinct roots

i) $M < N$ $\quad X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$ $\quad A_k = \text{Constant}$

$$A_k = (1-d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z^{-1} = \frac{1}{d_k}}$$

مثال :

$$X(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})} \qquad ROC: \frac{1}{2} < |z| < 2$$

$$= \underset{RSS}{\frac{A_1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}} + \underset{RSS}{\frac{A_2}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}} + \underset{LSS}{\frac{A_3}{(1-2z^{-1})}} + \underset{LSS}{\frac{A_4}{(1-3z^{-1})}}$$

→ برای اینکه ROC مشترک داشته باشند. وهیچ قطبی را در بر نگیرد.

$$A_1 = \frac{88}{1225}, \quad A_2 = \frac{1}{35}, \quad A_3 = \frac{1568}{1225}, \quad A_4 = \frac{2700}{1225}$$

$$\Rightarrow x[n] = A_1(-1/2)^n u[n] + A_2(n+1)(-1/2)^n u[n] + A_3(2)^n u[-n-1] + A_4(3)^n u[-n-1]$$

درصورتی که ریشه‌ها تکراری باشند و تعداد ریشه‌های تکراری s تا باشند، داریم :

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{A_m}{(1-d_1 z^{-1})^m}$$

$$A_m = \frac{1}{(s-m)!\,(-d_1)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} \left[(1-d_1 w)^s X(w) \right] \right\}$$

ii) $M \geq N$

$$X(z) = \underbrace{\sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r}}_{} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$$

خارج قسمت از تقسیم صورت بر مخرج به طوریکه چند جمله‌ای باقی مانده تقسیم از چند جمله‌ای مخرج کمتر باشد.

$$X(z) = 2z^{-1} + \underset{RSS}{\frac{A_1}{1-d_k z^{-1}}}$$

$$x[n] = 2\delta[n-1] + A_1(d_k)^n u[n]$$

مثال :

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-3/2\,z^{-1}+1/2\,z^{-2}}$$

$$X(z) = 2 + \frac{5z^{-1}-1}{1-3/2\,z^{-1}+1/2\,z^{-2}}$$

$$= 2 + \frac{5z^{-1}-1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$X(z) = 2 + \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}}$ $A=-9$, $B=8$

$A = (1-\frac{1}{2}z^{-1})L(z)\Big|_{z^{-1}=2}$

$B = (1-z^{-1})\,L(z)\Big|_{z^{-1}=1}$

$x[n] = 2\delta[n] - 9(1/_2)^n u[n] + 8u[n]$ ROC: $|z|>1$

i) ROC: $|z|>1$ right-sided sequence

ii) ROC: $|z|<1/_2$ left-sided sequence

$\Rightarrow x[n] = 2\delta[n] + 9(1/_2)^n u[-n-1] - 8u[-n-1]$

iii) ROC: $1/_2<|z|<1$ $\Rightarrow x[n] = 2\delta[n] - 9(1/_2)^n u[n] - 8u[-n-1]$

* ROC باید حتماً مشخص شود زیرا در این جا دیدیم که سه سیگنال تفاوت یک تبدیل z دارند ولی با ROC های مختلف !

Inverse Z.T. / third method:

$x[n] \xleftrightarrow{Z.T} X(z)$

$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C} X(z)\, z^{n-1}\, dz$ ROC

Stability & Causality:

از قبل می دانیم که در D.T. :

$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \Rightarrow \text{stable} \\ \mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]\ z^{-n}| \end{array}\right\} \Rightarrow |z|=1$

Stable System:

ROC H(z) must include the unit circle!

Causality:

$h[n] \neq 0 \quad n>0$ $\Rightarrow$ ROC H(z) must be right-Sided : از قبل می دانیم که در D.T.

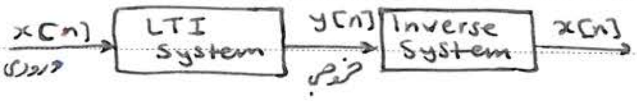
Realizable: قابل پیاده سازی

must be stable and causal

→ The poles of $H(z)$ must be inside the unit circle

and ROC of $H(z)$ must include " " "

Inverse System:



$$\left.\begin{array}{l} 3\{h[n]\} = H(z) \qquad 3\{H(z)\} = G(z) \\ h[n] * h_I[n] \xrightarrow{Z.T.} H(z)\cdot G(z) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow G(z) = \frac{1}{H(z)}$$

$$H(z) = A \cdot \frac{\prod_{k=1}^{p}(1-\alpha_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{\delta}(1-\beta_k z^{-1})} \Rightarrow G(z) = \frac{\prod_{k=1}^{\delta}(1-\beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p}(1-\alpha_k z^{-1})} \cdot A^{-1}$$

مثال:

$$H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z| > 0.8$$

↓

$$y[n] - 0.8y[n-1] = x[n] - 0.5x[n-1]$$

$$h[n] = 3^{-1}\{H(z)\} = 3^{-1}\left\{\frac{1}{1-0.8z^{-1}} - \frac{0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}\right\}$$

$$h[n] = (0.8)^n u[n] - 0.5(0.8)^{n-1} u[n-1]$$

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \begin{cases} \text{ROC: } |z| > 0.5 & \text{right-sided} \\ \text{ROC: } |z| < 0.5 & \text{left-sided} \end{cases}$$

چون $\text{ROC}_{H(z)} > 0.8$ است، ROC معتبر برای $G(z)$، $|z| > 0.5$ است زیرا باید با هم اشتراک داشته باشند تا ضربشان دهم برابر 1 شود.

$$g[n] = (0.5)^n u[n] - 0.8(0.5)^{n-1} u[n-1] \Rightarrow \text{Stable} ✓$$

مثال :

$$H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} \qquad |z| > 0.8$$

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1-0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}} = 2\,\frac{1-0.8z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$\text{Roc}: \begin{cases} |z| > 2 \\ |z| < 2 \end{cases} \rightarrow$$ هر دو اشتراک دارند

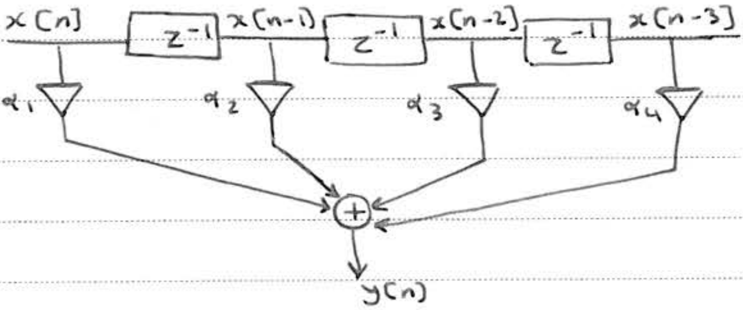
* اگر بخواهیم سیستم stable داشته باشیم $|z|<2$ را انتخاب می‌کنیم.

* 〃 〃 〃 causal 〃 〃 $|z|>2$ 〃 〃 〃.

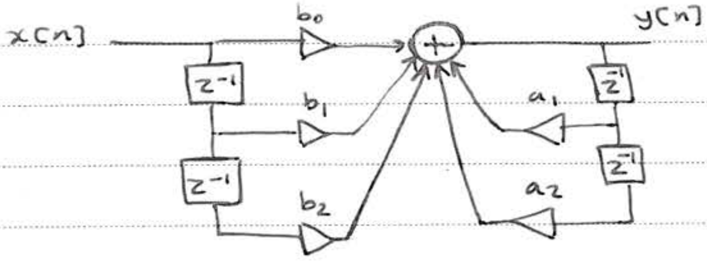
مثال :

$$y[n] = \alpha_1 x[n] + \alpha_2 x[n-1] + \alpha_3 x[n-2] + \alpha_4 x[n-3]$$

Input - Output : $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \alpha_1 + \alpha_2 z^{-1} + \alpha_3 z^{-2} + \alpha_4 z^{-3}$



$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$$



Digital Filters :

FIR : Finite Impulser Response

IIR : Infinite 〃 〃

FIR :

low-pass : $H(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-1})$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega/2} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

High-pass : $H_{HP}(z) = \frac{1}{2}(1-z^{-1})$

IIR :

$$H_{LP}(z) = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$H_{HP}(z) = \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

Band-pass Filter :

$$H_{BP}(z) = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1-z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha z^{-2}}$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )