دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

اصول مهندسی زلزله

استاد :

جناب آقای دکتر تهرانی‌زاده

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(کارشناس ارشد عمران گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی دکترا گرایش سازه North Carolina State University)

تابستان ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

اصول مهندسی زلزله

استاد :

جناب آقای دکتر تهرانی زاده

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

«بسم الله الرحمن الرحیم»

دکتر تهرانی زاده

حمید کاظم

حمید کاظم

فهرست منابع و مراجع:

1) Rosenbluth, Design of Earthquake Resistant structure.

2) Green, N.B. Earthquake Resistant Building Design & Construction

3) Borg. Earthquake Engineering, Damage Assessment and Structural Design.

4) Newmark & Rosenbluth. Fundamental of Earthquake Engineering.

5) Clough & Pensien. Dynamics of structures.

6) Krisha. Elements Of Earthquake Engineering.

7) Wiegel. Earthquake Engineering.

۱) محاسبه طراحی

۲) محاسبه طراحی و اجرا

۳) تئوری مهندسی زلزله

۴) تحلیل و تئوری

۵) دینامیک سازه

۶) تئوری و طراحی

۷) جمع آوری کپی سری مقالات مربوط به مهندسی زلزله

حمید کاظم

نحوه ارزیابی:

۱) تکلیف 15%

۲) امتحان میان ترم 25%

۳) امتحان پایان ترم 50%

۴) پروژه 10%

بخش اول: مهندسی زلزله   بخش دوم: زلزله شناسی مهندسی

زلزله: واقعه طبیعی به علت حرکات پوسته زمین است.

زلزله شناسی مهندسی: به بحث از نقطه‌ای می‌پردازد که تحول ایجاد می‌شود (کانون) تا نقطه‌ای که امواج روی زمین انتقال پیدا می‌کند.

مهندسی زلزله: بررسی رفتار سازه مقابل تکان‌های ناشی از زلزله می‌باشد.

---

* $g = 9.81 \frac{m}{s^2} = 386.06 \frac{in}{s^2} = 32.17 \frac{ft}{s^2}$

* 1 kips = 1000 lb وزنی   1 ft = 12 in

* lb وزنی را اگر بر g تقسیم کنیم lb جرمی بوجود می‌آید.

* psi = Pound per Square inch = $\frac{lb_{\text{وزنی}}}{in^2}$

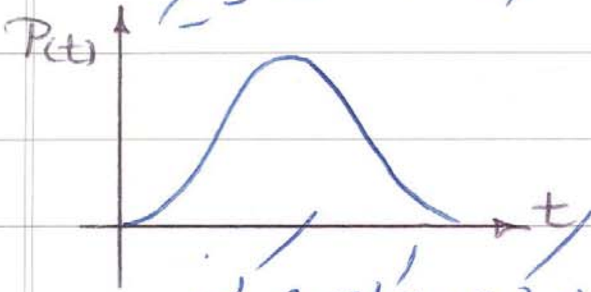
* kpsi = 1000 psi

$\frac{lb_{\text{جرمی}} . in}{sec^2} = lb_{\text{وزنی}}$

حمیده کاظم

فصل اول :
مقدمه ای بر دینامیک سازه :

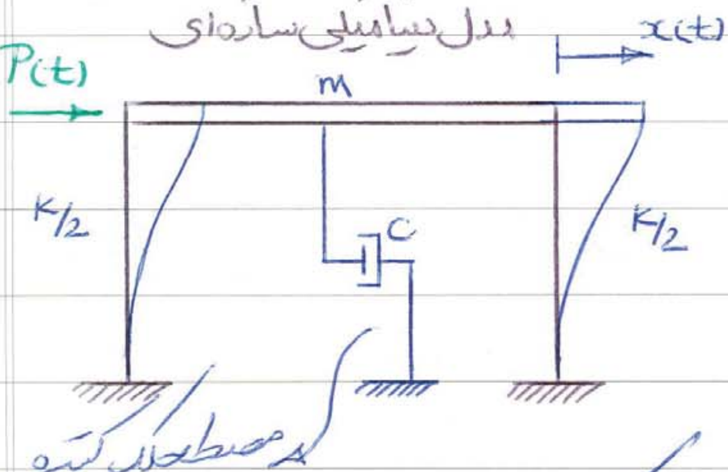
بار دینامیکی باری است که اندازه، جهت و نقطه اثرش با زمان تغییر کند.



هدف : تحمل سازه در مقابل بار.

در مسائل استاتیکی نیروها و تنش ها را در المان ها محاسبه کرده و طراحی می کنیم
در مسائل دینامیکی آنچه اهمیت دارد تغییر مکان است. با تغییر مکان نیروها و تنش ها را محاسبه کرده، طراحی صورت می گیرد.

مدل دینامیکی سازه ای

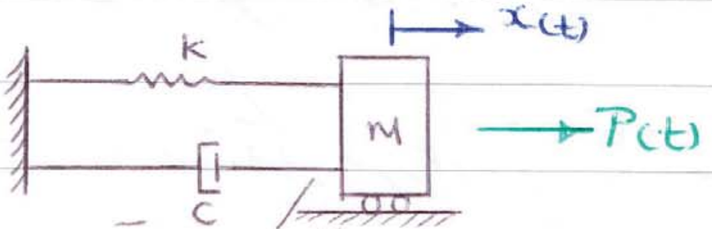


سختی ستون:
- ارتفاع
- جنس
- صلبیت
- مقطع
- تکیه گاه

مقدار تغییر مکان به سختی ستون بستگی دارد

یکی از عوامل بسیار مهم سختی ستون است.
عامل مهم دیگر میرایی سازه است که به اصطکاک کریستال های مصالح سازه بستگی دارد.

ابتدا باید معادله حرکت را تعیین کنیم.
معادله حرکت معادله‌ای است که از حل آن بتوان تابع حرکت (تغییر مکان) را بدست آورد.
مدل دینامیکی سازه‌ی قبل را به صورت زیر می‌توان نشان داد:



مدل دینامیکی سیستم یک درجه آزادی

$x(t)$ تابع حرکت جرم

چون سقف صلب است تنها در یک جهت حرکت داریم. پس یک درجه آزادی دارد.
هر مدل سیستم یک درجه آزادی را باید به صورت بالا درآورد. اگر این کار نشود اشتباه شده است.
قدم بعدی روش تعیین معادله حرکت می‌باشد. (معادله حرکت معادله‌ای است برحسب تابع حرکت، که از حل مستقیم این تابع حرکت بدست می‌آید)

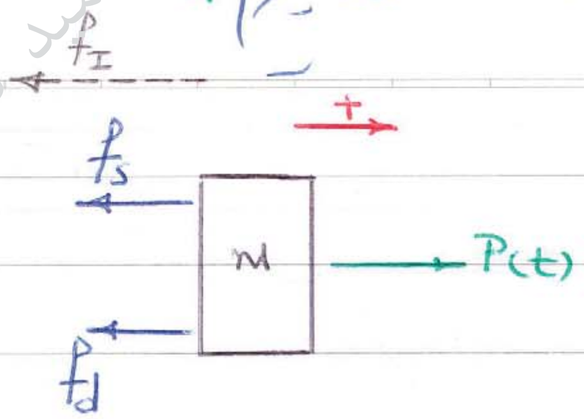
روش‌های تعیین معادله حرکت:

روش مستقیم:

این روش از کاربرد اعمال قانون دوم نیوتن بدست می‌آید.
قانون دوم نیوتن: کلیه نیروهای اعمالی بر جرم برابر است با جرم جسم ضربدر شتاب در جهت برآیند نیروها.

وقتی $x(t)$ در جهت مثبت است $\dot{x}(t)$ و $\ddot{x}(t)$ هم در همان جهت مثبت است.

* اینرسی را همیشه نیرویی در خلاف جهت حرکت در نظر می‌گیریم *



جرم را در جهت $x(t)$ حرکت می‌دهیم. با این کار نیروهای داخلی و جهتشان مشخص می‌گردد.

اعمال قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = m a_x = f_I \quad (1)$$

$$-f_d - f_s + P(t) = f_I \quad (2)$$

$$f_I + f_d + f_s = P(t) \quad (3)$$

f_I: نیروی اینرسی

معادله تعادل دینامیکی ⟵

این معادله، معادله حرکت است.

$$f_s = k\,x(t) \quad (4)$$

$$f_d = c\,\dot{x}(t) \quad (7)$$

$$f_I = m\,\ddot{x}(t) \quad (5)$$

اگر کمک فنر ماشین را با سرعت بیشتری نیرو وارد کنیم عکس العمل بیشتری داریم

پس $f_d \propto \dot{x}(t)$ (6)

ضریب استهلاک ⟵ c

بنابراین با جایگزینی روابط 4، 5، 7 در رابطه 3 خواهیم داشت:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (8)$$

این معادله، معادله‌ای حرکت است. از نظر ریاضی هم معادله‌ی دیفرانسیل درجه دوم خطی است. علت خطی بودن آن این است که پارامترهای سمت چپ معادله ثابت هستند.

فرضاً اگر k تابعی از سرعت بود معادله غیرخطی می‌شد.

حل معادله حرکت:

حمید کاظمی

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (9)$$
$\boxed{1) \text{ حالت اول } \quad P_{(t)} = 0}$:

این حالت، حالتی است که به سیستم تغییر مکان اولیه اعمال کنیم. این ارتعاش ارتعاشی است که در اثر حذف نیرو ایجاد می‌شود. در این صورت ارتعاش آزاد داریم.

به این دستگاه، دستگاه یک درجه آزادی با ارتعاش آزاد می‌گویند.

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (10)$$

تعریف‌های زیر را داریم :

$$\begin{cases} \frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad (11) \quad \omega_n = \text{فرکانس طبیعی} \\ \frac{c}{m} = 2\xi\omega_n \quad (12) \quad \xi = \text{نسبت استهلاک بحرانی} \end{cases}$$

پس از جایگزین کردن روابط 11 و 12 در رابطه 10 خواهیم داشت :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (13)$$

این معادله، معادله حرکت ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی است.

حل :
$$x_{(t)} = Xe^{\lambda t} \quad (14)$$

فرض می‌کنیم $x_{(t)}$ جواب معادله باشد. (X عدد ثابت است)

$$\dot{x}_{(t)} = X\lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot{x}_{(t)} = X\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow Xe^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2) = 0$$

اگر $Xe^{\lambda t} = 0$ باشد یعنی حرکتی نداریم. پس داخل پرانتز باید صفر باشد.

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (15)$$

$$\rightarrow \lambda_1 , \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (16)$$

$$\rightarrow x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (17)$$

شرایط مرزی مربوط به مکان است. اما چون زمانی با زمان سروکار داریم با شرایط اولیه مواجه هستیم:

$$\begin{cases} x(t=0) = X_0 & \text{تغییر مکان اولیه} \\ \dot{x}(t=0) = \dot{X}_0 & \text{سرعت اولیه} \end{cases} \quad (18)$$

اگر تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه صفر باشد حرکت اولیه نداریم. در غیر اینصورت حرکت اولیه را داریم.

۱) حالت اول (ارتعاش آزاد بدون استهلاک (هارمونیک ساده)):

با فرض اینکه استهلاک قابل صرفنظر کردن باشد: $c = \xi = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$$

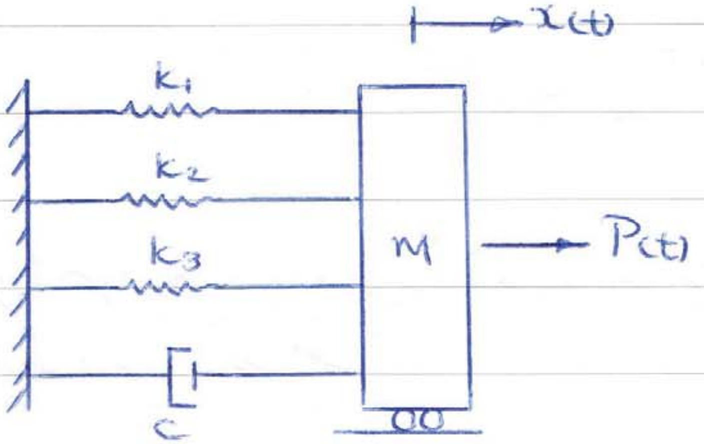
$$\begin{cases} x(t) = Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t} \\ x(t) = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t \end{cases}$$

حرکت نوسانی هارمونیک ساده:

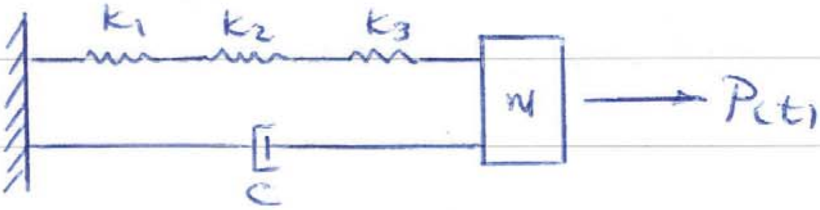
ω_n فرکانس طبیعی سیستم است. یعنی همواره اگر نیرویی به سازه اعمال شود و حرکت داشته باشیم این فرکانس همیشه وجود دارد.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

مسئله اول ۱: در صورتی که مدل یک درجه آزادی سیستم سازه‌ای به صورت زیر باشد، مطلوبست تعیین معادله حرکت و همچنین تابع تغییر مکان اگر $P(t)=0$ و $k_1=k_2=k_3=k$ و $c=0$ باشد.

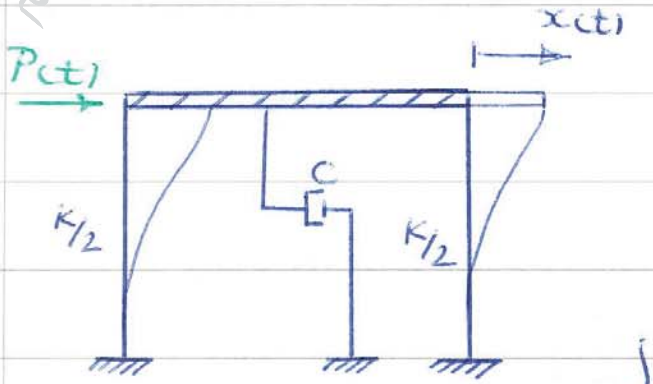


مسئله دوم ۲: مدل دینامیکی سیستم یک درجه آزادی بصورت شکل مقابل می‌باشد. مطلوبست تعیین معادله حرکت و همچنین تابع تغییر مکان در صورتیکه $P(t)=0$ ، $k_1=k_2=k_3=k$ و $c=0$ باشد.



یادآوری: $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \qquad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a} \quad (b'=b/2) \end{cases}$$



$$x(t) = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

اعمال شرایط اولیه:

$$\begin{cases} x(0) = X_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{X}_0 \end{cases}$$

$$x(0) = X_0 = C \implies C = X_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{X}_0 = D\omega_n \implies D = \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}$$

$$\implies x(t) = X_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

زمانی که هم سرعت اولیه و هم تغییر مکان اولیه صفر باشند حرکت نداریم.

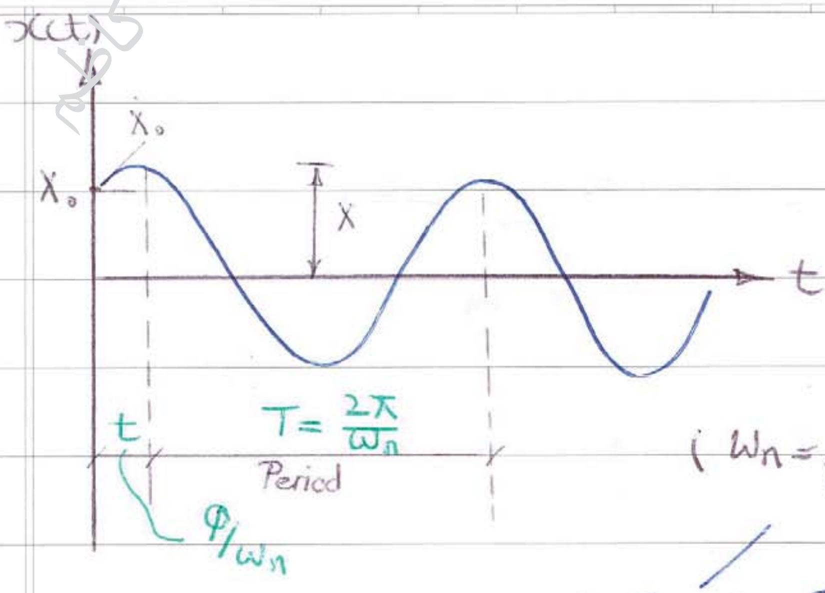
فرض:

$$x(t) = X\cos(\omega_n t - \varphi)$$

اگر رابطه بالا را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2} & \text{دامنه نوسان} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) & \text{زاویه فاز} \end{cases}$$

تمرین: مطلوبست تایید روابط فوق.



$$x(t) = X\cos(\omega_n t - \varphi)$$
$$X = X\cos(\omega_n t - \varphi)$$
$$\omega_n t - \varphi = 0$$
$$\rightarrow t = \varphi/\omega_n$$

$(\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}})$

اگر مقدار $c=0$ باشد تا بی نهایت این حرکت را داریم.
فرکانس طبیعی به سختی و جرم بستگی دارد.

ساختمان های بلند سختی کمتری دارند پس فرکانس آن ها کم و پریودشان بالاست.

نواحی اطراف کانون، نوسان های ایجاد شده دارای فرکانس زیادی است
پس Period شان کم است و این امکان پدیده تشدید را ایجاد می کند.
(وقتی فرکانس زلزله با فرکانس سازه برابر باشد تشدید رخ می دهد)

فرکانس ↑ $\Rightarrow$ Period ↓

۲) حالت دوم (ارتعاش آزاد با استهلاک)؛ $c \neq 0 \; , \; \xi < 1$

$$\lambda_1 , \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$
$$\lambda_1 , \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

فرکانس استهلاکی $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

حمید کاظم

$$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{-\xi\omega_n t + i\omega_d t} + Be^{-\xi\omega_n t - i\omega_d t}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(C\cos\omega_d t + D\sin\omega_d t)$$

بنابراین حرکت، حرکت نوسانی میرا می‌باشد. با گذشت زمان حرکت، دامنه حرکت نوسانی کاهش می‌یابد.

اعمال شرایط اولیه

$$x(0) = X_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{X}_0$$

پس از جایگزین کردن شرایط اولیه در رابطه اصلی خواهیم داشت:

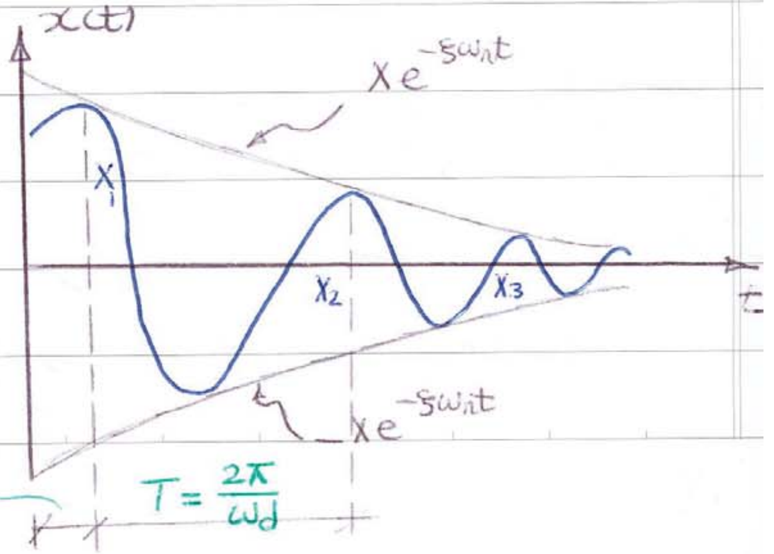
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(X_0\cos\omega_d t + \frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

$$x(t) = \underbrace{Xe^{-\xi\omega_n t}}_{\text{دامنه}}\cos(\omega_d t - \varphi)$$

$\Rightarrow \omega_d \simeq \omega_n$ در بازه‌ی $2\% < \xi < 7\%$ تغییر دارد.

$$\begin{cases} X = \left[\left(\dfrac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d}\right)^2 + X_0^2\right]^{1/2} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d X_0}\right) \end{cases}$$

* پریود ثابت است فقط دامنه کاهش می‌یابد.



حمید کاظم

ضریب کاهش لگاریتمی :

$$\frac{X_k}{X_{k+1}} = \frac{X e^{-\xi\omega_n (kT)}}{X e^{-\xi\omega_n (k+1)T}} = \frac{1}{e^{-\xi\omega_n T}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X_k}{X_{k+1}} = e^{\xi\omega_n \left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right)}$$

ضریب کاهش $\delta = \ln \frac{X_k}{X_{k+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega_n}{\omega_d}$

$$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\cdot\omega_n \quad \Rightarrow \quad \delta = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\delta \simeq 2\pi\xi$ برای ξ های کوچک :

$$\Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{X_k}{X_{k+1}}\right)$$

اگر بخواهیم رابطه فوق را برای حالتی عمومی تر، یعنی برای حالتی که n سیکل کامل بعد از دامنهٔ X_k مورد نظر باشد، خواهیم داشت :

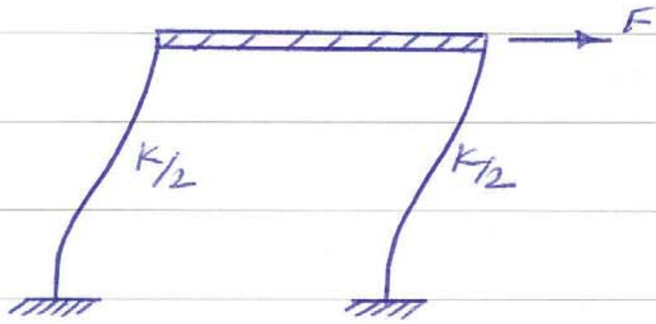
$$\xi = \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{X_k}{X_{k+1}}$$

تمرین ۳: قاب یک طبقه شکل زیر مفروض است. درصورتیکه وزن قاب $W=200\,kips$ $(1\,kips = 1000\,lb)$ و پریود سازه $T=0.2s$ باشد مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان درحالتیکه تغییر مکان اولیه $x_0 = 2in$، سرعت اولیه بصورت $\dot{x}_0 = 1.5\,in/sec$ باشد. مقدار حداکثر برش پایه را حساب کنید. حداکثر شتاب نیز را بدست آورید.

حمید کاظم

تمرین ۴) درصورتیکه در تمرین شماره ۱ مقدار نسبت استهلاک بحرانی ۱٪ و تغییر مکان اولیه 5 inch و سرعت اولیه صفر باشد مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان و رسم تابع و دامنه تغییر مکان بعد از دو سیکل کامل

مثال ۶) قاب شکل زیر مفروض است. درصورتیکه نیروی F مطابق شکل به آن اعمال گردد و پس از آن نیرو حذف شود دامنه حرکت پس از یک رفت و برگشت 0.16 in باشد، مطلوبست تعیین:



۱) W وزن موثر

۲) فرکانس استهلاکی ω_d

۳) C و ξ

۴) دامنه پس از ۶ سیکل کامل.

$T = 1.4\ sec \qquad F = 20,000\ lb \qquad X_0 = 0.20\ in$

۱) فرض $\omega_n \simeq \omega_d$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{kg}{mg}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{gk}{W}}}$$

$$\Rightarrow W = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 k.g$$

$$F = kX_0 \Rightarrow k = \frac{F}{X_0} = \frac{20,000}{0.2} = 100,000\ lb/in$$

$$W = \left(\frac{1.4}{2\pi}\right)^2 (100000)(380) = 1.92 \times 10^6\ lb$$

۲) $$\omega_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.4} \rightarrow \omega_d = 4.48\ rad/s$$

۳) $$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{X_k}{X_{k+1}} \rightarrow \xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{X_0}{X_1} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{0.2}{0.16}$$

$$= 0.0355 \rightarrow \xi = 3.55\%$$

$$X_n = X_0\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^n$$ ؛ دامنه‌ی n ام سیکل

$$C = 2\xi m\omega_n = 2(0.0355)\left(\frac{1.92\times10^6}{386}\right)(4.48)$$
$$= 1.58\times10^3 \ \mathrm{lb/in/s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-(0.0355)^2} = \omega_n(0.999)^{1/2} \simeq \omega_n$$

فرض مان صحیح است.

۴)

$$\xi = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{X_k}{X_{k+1}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{X_0}{X_1}$$
$$\xi = \frac{1}{2\pi n}\ln\frac{X_k}{X_{k+n}} = \frac{1}{2\pi(6)}\ln\frac{X_0}{X_6} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{X_0}{X_1} = \frac{1}{2\pi(6)}\ln\frac{X_0}{X_6} \Rightarrow \left(\frac{X_0}{X_1}\right)^6 = \frac{X_0}{X_6}$$

$$\Rightarrow X_6 = X_0\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^6 \Rightarrow X_6 = 0.2\left(\frac{0.16}{0.2}\right)^6 = 0.054\ \mathrm{in}$$

۳) حالت سوم $\xi \geq 1$ (ارتعاش آزاد با استهلاک کرانی و فوق کرانی)

الف) $\xi = 1$ ؛

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$
$$\xi = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\xi\omega_n$$ ریشه مضاعف
$$\Rightarrow x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} + Bte^{-\xi\omega_n t}$$

این تابع نوسانی نمی‌باشد. در این حالت جرم m دیگر نوسان ندارد به این دلیل به این حالت ارتعاش آزاد با استهلاک کرانی می‌گویند

$\xi = 1 \longrightarrow$ ثابت استهلاک کرانی

(Critical Damped)

ب) $\xi > 1$:

$\lambda_{1,2} =$ ریشه‌های حقیقی

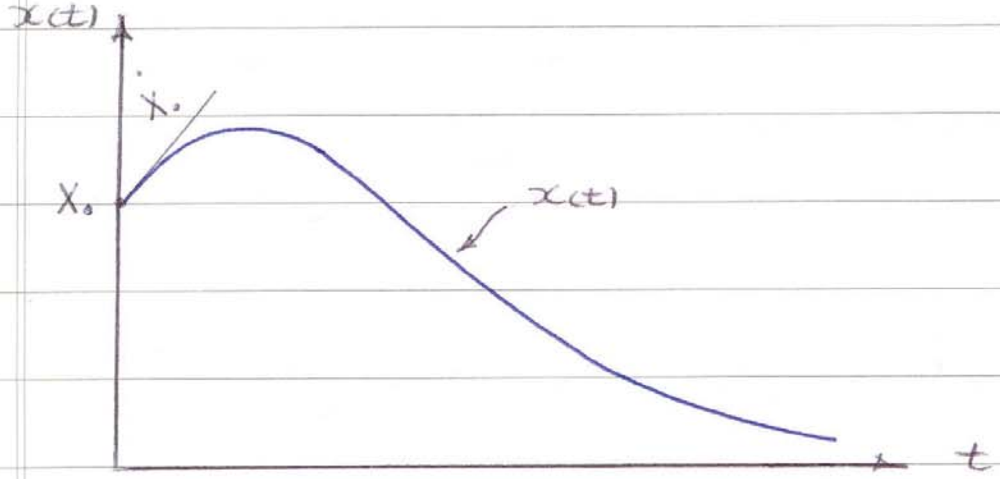
$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

(Over Damped) در این حالت حرکت نوسانی نداریم.

علت نوسانی نبودن وجود نیروی میرایی در C است که بسیار زیاد بود.

به این حالت ارتعاش آزاد با استهلاک فوق بحرانی گویند.

تعیین ضرایب A, B :



$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad \xi = 1 = \xi_c \Rightarrow C_c$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{C_c}{2m\omega_n} \Rightarrow C_c = 2m\omega_n$$

برحسب تعریف که ξ نسبت استهلاک بحرانی است پس داریم: $\xi = \frac{c}{C_c}$

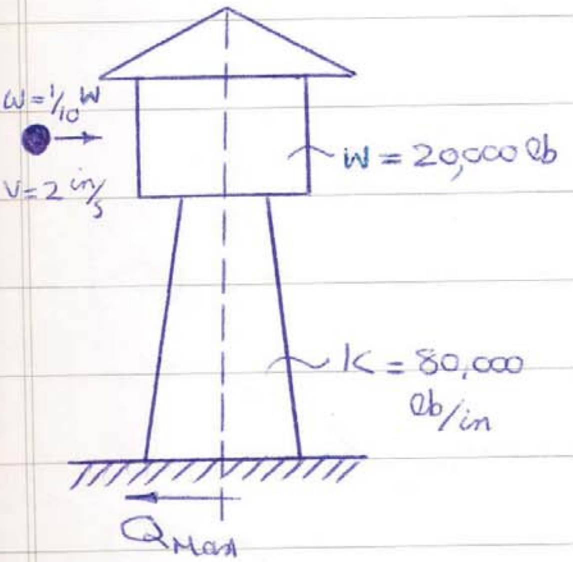
$$\rightarrow \xi = \frac{c}{2m\omega_n}$$

ξ ضریب استهلاک محدود به ضریب استهلاک بحرانی است.

اگر ضریب استهلاک c بزرگتر از ضریب استهلاک بحرانی (C_c) باشد سیستم را فوق بحرانی (Over Damped) می نامیم و اگر کوچکتر از C_c باشد سیستم را نوسانی (Under Damped) می گویند و حرکت سیستم نوسانی خواهد بود

در حالتیکه $c > C_c$ باشد حرکت سیستم دیگر حرکتی ارتعاشی یا نوسانی نخواهد بود زیرا تابع حرکت یک تابع نمایی بوده و دامنه نوسان رو به صفر میل می بود و در نهایت بدون هیچ حرکت نوسانی به صفر می رسد. این حالت را حالت فوق بحرانی می نامند.

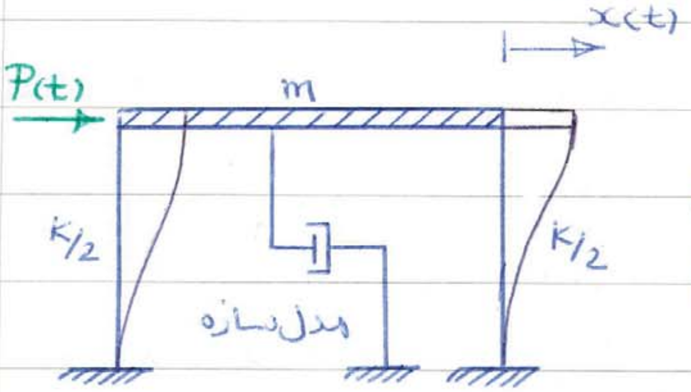
تمرین ۱ [۵]: منبع آبی مطابق شکل مفروض است اگر وزن این منبع 20,000 lb و سختی پایه‌های منبع 80,000 (lb/in) فرض شود و این منبع تحت اثر نیرویی قرار گیرد که مقدار آن F = 16,000 lb باشد، مطلوبست تعیین دامنه حرکت پس از 3، 5، 10 سیکل. نسبت استهلاک بحرانی منبع، ضریب استهلاک، فرکانس طبیعی و فرکانس استهلاکی درصورتیکه دامنه نوسان پس از یک رفت و برگشت به 2/3 حالت اولیه کاهش یابد.

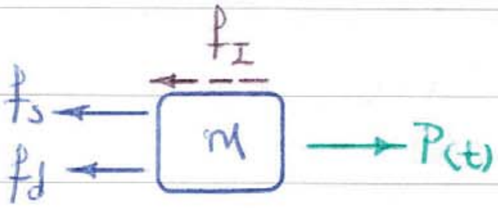


تمرین ۲ [۶]: درصورتیکه در تمرین ۱ گلوله‌ای به وزن $w = 0.1W$ با سرعت $V = 2\ in/s$ به منبع اصابت کند و نوع تصادم الاستیک فرض شود مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان، مقدار Max برش پایه و رسم منحنی درصورتیکه $\xi = 5\%$

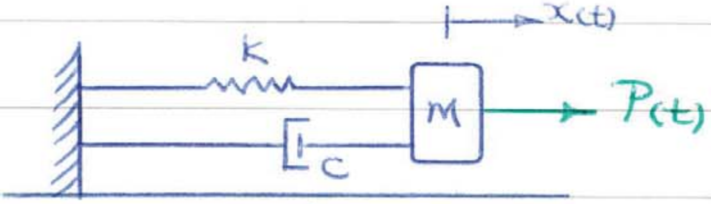
در نظر گرفته شود.

معادله حرکت قاب یک طبقه تحت اثر حرکت زمین:



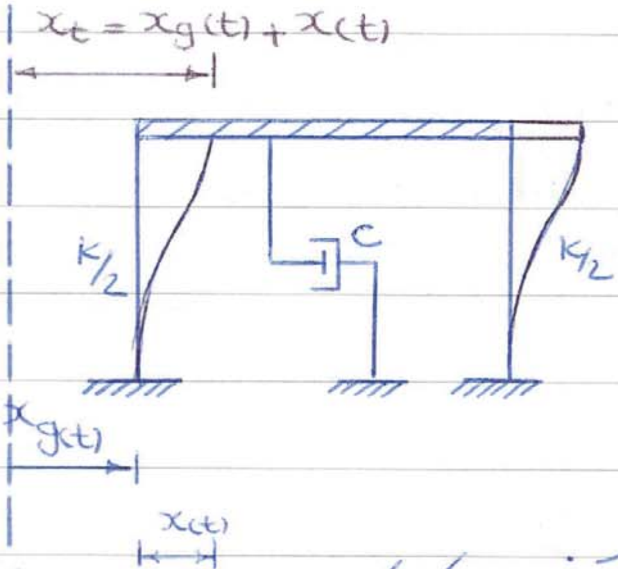


$$\sum F_{(x)} = 0 \quad (1) \quad \Rightarrow \quad -f_I - f_d - f_s + P(t) = 0 \quad (2)$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (3)$$

مدل دینامیکی سیستم یک درجه آزادی



$$P(t) = 0 \quad (4)$$

$$f_I + f_d + f_s = 0 \quad (5)$$

$$f_s = kx(t) \quad (6)$$

$$f_d = c\dot{x}(t) \quad (7)$$

f_s و f_d فرقی با حالت قبل ندارند.

زمانی نیرو در فنر یا مستهلک کننده ذخیره می شود که یک انتها نسبت به انتهای دیگر حرکت

داشته باشد.

$f_I = m\ddot{x}_t$ (8) نیروی اینرسی

شتابی که توسط زمین وارد می‌شود + شتاب ناشی از حرکت نسبی سقف به پایه = شتاب مطلق جرم

$$m\ddot{x}_t + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (9)$$

$$x_t = x(t) + x_g(t) \quad (10)$$

$$\ddot{x}_t = \ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t) \quad (11)$$

$\ddot{x}_g(t)$ شتاب پایه است که در هر لحظه تغییر می‌کند.

از جایگذاری رابطه 11 در 9 داریم:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g(t) \quad (12)$$

(x همان $x(t)$ است)

اگر رابطه 12 را با 3 مقایسه کنیم این طور تلقی می‌شود که $m\ddot{x}_g(t)$ یک نیروی خارجی است.

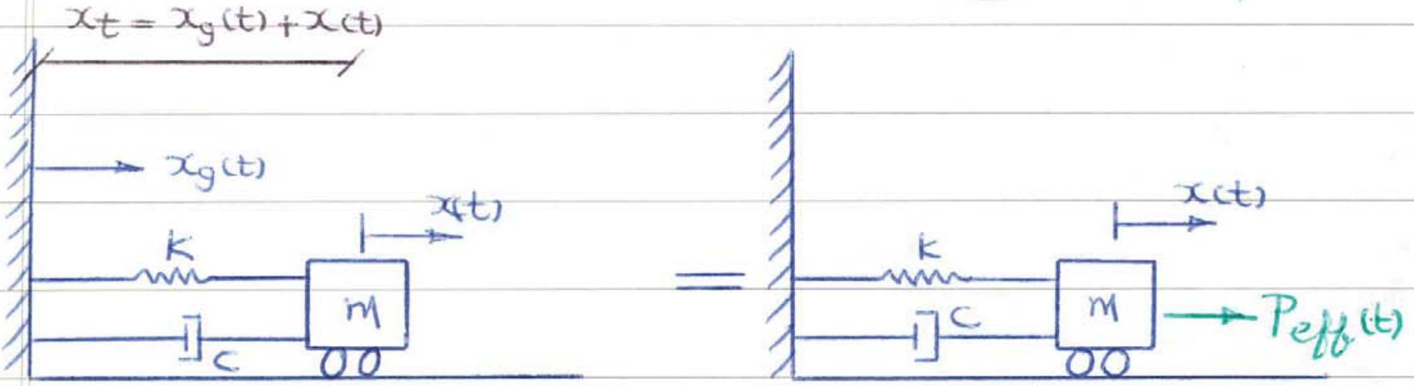
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_{eff}(t) \quad (13)$$

$P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$ نیروی موثر (14)

نیروی زلزله به جرم ساختمان بستگی دارد. هر چه جرم سازه بیشتر باشد نیروی وارد به سازه بیشتر خواهد بود. لذا تغییرمکان سازه در حرکت زلزله بسیار اهمیت دارد. Drift تغییرمکان نسبی طبقات است. اگر یک طبقه نسبت به دیگری زیاد شد، آن طبقه اصطلاحاً طبقه نرم می‌گردد و احتمال تخریب زیاد می‌گردد.

تغییرشکل سازه یک محدوده‌ای دارد که بیشتر از آن ساختمان دچار انعطاف‌پذیری و تغییرشکل بالا می‌گردد.

ساختمان هایی که طبقه اول آن پیلوت دارد مثل دیوارهای برشی و باربر که را برای افزایش فضای پارکینگ برشی دارند. طبقه نرم ایجاد شده ساختمان در هنگام زلزله روی طبقه اول تخریب می گردد.



مدل مکانیکی سیستم تحت اثر حرکت زمین

کافی است همان سیستم fix را حفظ کنیم و فقط نیروی موثر زلزله را اضافه کنیم.

$x(t)$ حرکت جرم است نسبت به پایه.

سقف نسبت به پایه می تواند حرکت کند. جرم در طبقات متمرکز است. نیرو بین طبقات توزیع می شود.

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}P_{eff}(t) \qquad (15)$$

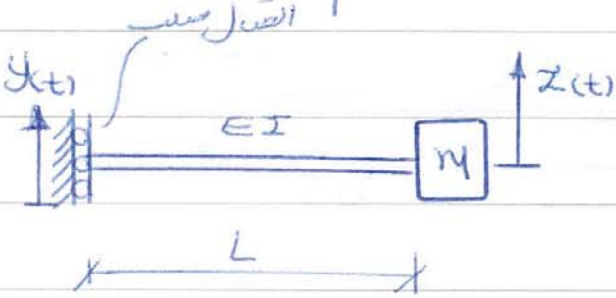
$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{1}{m}P_{eff}(t) \qquad (16)$$

(نیروی زلزله علاوه بر جرم به شتاب زمین هم بستگی دارد. این شتاب وابسته به لرزه خیزی منطقه است. باید سازه ها را نوعی مقاوم سازی کرد تا بتوانند در مقابل زلزله مقاومت کنند)

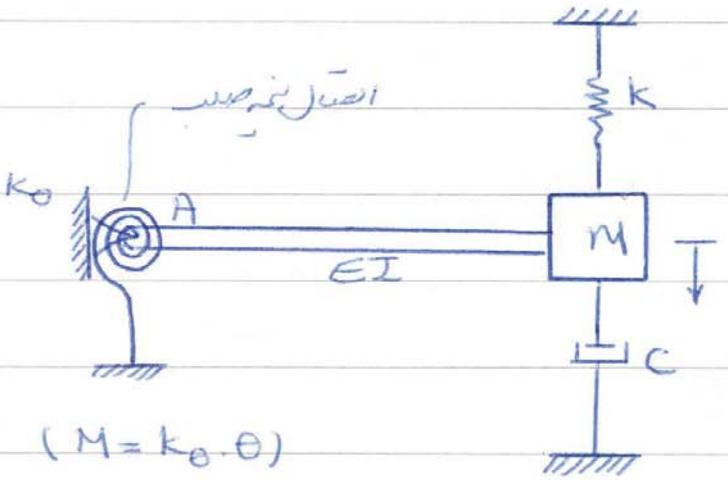
(زمان کل ثبت زلزله شامل دو قسمت است. ۱) زمانی که امواج جنبش زمین را قطع می کنند. ۲) زمانی که انرژی آن را به سازه منتقل می کنند)

سمت دوم معمولاً بیشتر از ۱۵ ثانیه است. این زمان (سمت دوم) مدت دوام زلزله است که هر چه بیشتر باشد قدرت تخریب هم بیشتر است.

۷ تمرین ۱: تیر یک سر گیردار شکل زیر مفروض است. در صورتیکه تکیه‌گاه این تیر تحت اثر حرکت $y(t)$ قرار گیرد، مطلوبست معادله حرکت جرم m برحسب تابع $z(t)$

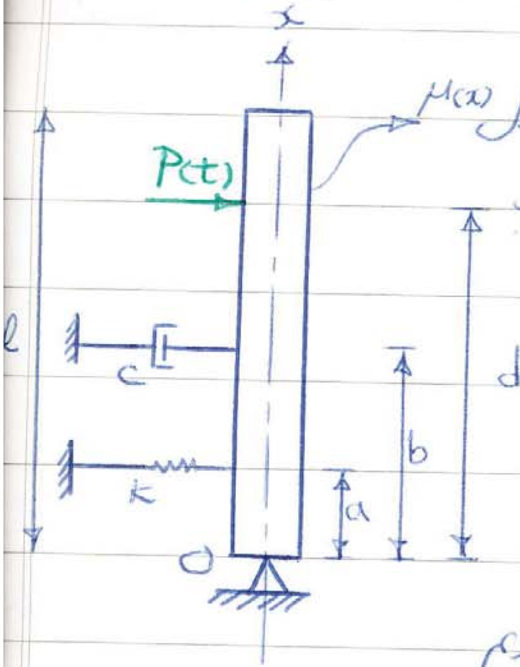


۸ تمرین ۲: سازه شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه تیر AB بی‌وزن بوده و در تکیه‌گاه A علاوه بر لولا توسط فنر پیچشی مقید شده باشد، معادله حرکت جرم m را برحسب $y(t)$ بدست آورید. (سختی فنر k_θ است)



$(M = k_\theta \cdot \theta)$

معادله حرکت در سیستم مختصات زمان برای اجسام با جرم گسترده:



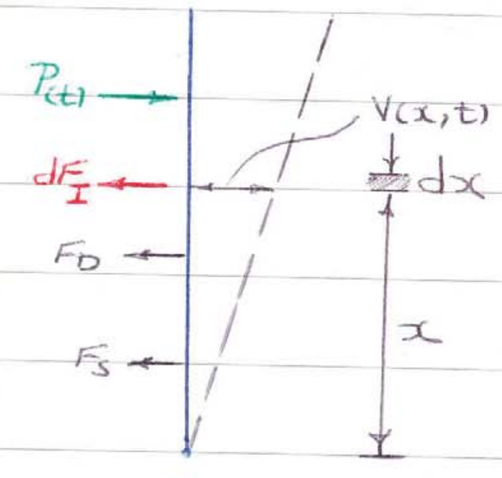
الف) جسم صلب:

اگر می‌خواهیم معادله حرکت جسم در حالت حرکت جانبی است.

در حالت کلی تابع تغییر مکان x و همچنین t بود.

حال اولین قدم تعیین تابع تغییر مکان است. در نقطه O، تغییر مکان صفر است هر چه بالاتر می‌رویم بیشتر می‌شود. پس تابع تغییر مکان وابسته به مکان و زمان است. این تابع تغییر مکان را با V نشان می‌دهند.

$V(x,t)$ ← تابع تغییر مکان



$$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$$

$\psi(x) =$ تابع شکلی یا مکانی

$Y(t) =$ تابع زمانی

تابع مکانی را بصورتی می‌گیرند که مقدار ماکزیمم آن واحد باشد. $\psi(L) = 1$

$$\Longrightarrow \psi(x) = x/L$$

آنچه لازم است بدست بیاید $Y(t)$ است

$$V(x,t) = x/L \cdot Y(t)$$

تعیین معادله حرکت: (روش المان)

در حالت جرم متمرکز داشتیم:

$$F_I + F_D + F_S = P(t)$$

برای جرم گسترده داریم:

حول O ممان می گیریم:

$$M_I + M_D + M_S = M_{p(t)} \qquad (6)$$

$$M_{p(t)} = P_{(t)} \cdot d \qquad M_D = F_D \cdot b \qquad -M_S = F_S \cdot a$$

M_I از حاصل اینرسی است. چون جرم گسترده است پس باید المان dx, dm را بگیریم.

جرم: $dm = \mu(x) \cdot dx \qquad (10)$

$$dF_I = dm \cdot \ddot{V}(x,t) \overset{(11)}{=} \mu(x)\, dx\, \ddot{V}(x,t) \qquad (12)$$

$$\Rightarrow dM_I = dF_I \cdot x = \mu(x) \cdot x\, \ddot{V}(x,t)\, dx \qquad (13)$$

$$\Rightarrow M_I = \int_0^L \mu(x) \cdot x \cdot \ddot{V}(x,t)\, dx \qquad (14)$$

$$M_{p(t)} = P_{(t)} \cdot d \qquad (7)$$

$$M_D = F_D \cdot b = C\dot{V}(b,t) \cdot b \rightarrow M_D = C\frac{b^2}{L}\dot{Y}(t) \qquad (8)$$

$$M_S = F_S \cdot a = kV(a,t) \cdot a \rightarrow M_S = k\frac{a^2}{L}Y(t) \qquad (9)$$

$$M_I = \ddot{Y}(t)\int \mu(x)\frac{x^2}{L}\,dx \qquad (15)$$

پس از جایگزینی روابط 7، 8، 9 و 15 در رابطه 6 خواهیم داشت:

(دو طرف را بر L تقسیم کرده ام)

$$\underbrace{\ddot{Y}\int_0^L \mu(x)\left(\frac{x}{L}\right)^2 dx}_{M^* \text{ (جرم)}} + \underbrace{C\left(\frac{b}{L}\right)^2}_{C^*}\dot{Y}(t) + \underbrace{k\left(\frac{a}{L}\right)^2}_{k^*}Y(t) = P_{(t)} \cdot d/L$$

$$M^*\ddot{Y}(t) + C^*\dot{Y}(t) + k^*Y(t) = P^*_{(t)}$$

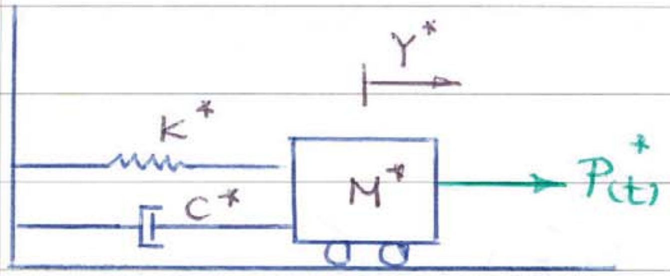
$$M^* = \int_0^L \mu(x) \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx$$ جرم معادل

$$C^* = C\left(b/L\right)^2$$ ضریب استهلاک معادل

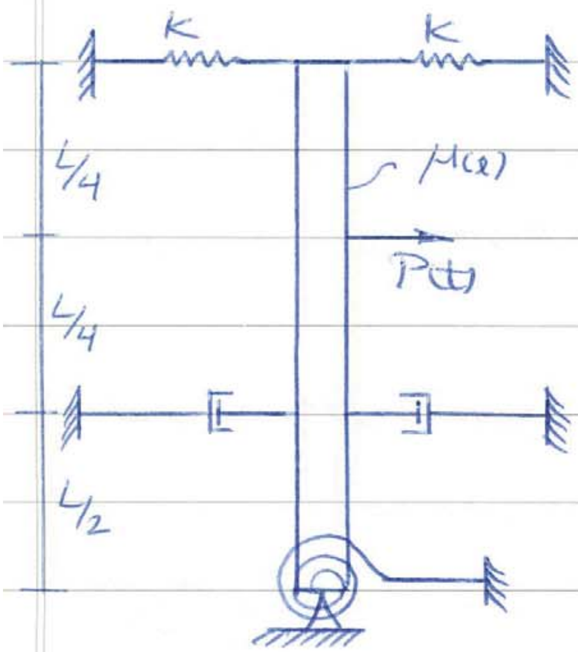
$$k^* = k\left(a/L\right)^2$$ ضریب سختی معادل

$$P^*_{(t)} = P_{(t)}\, d/L$$ نیروی معادل

بر این اساس سیستم معادل به شکل حالت زیر است:

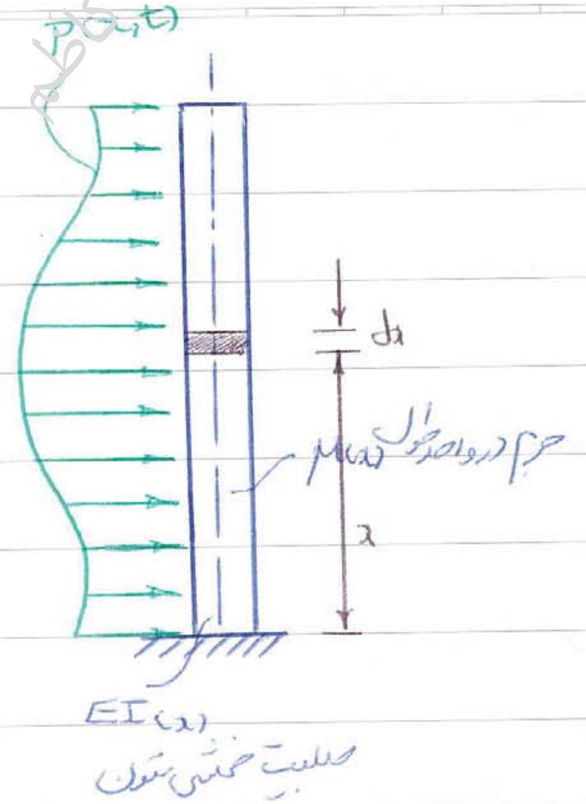


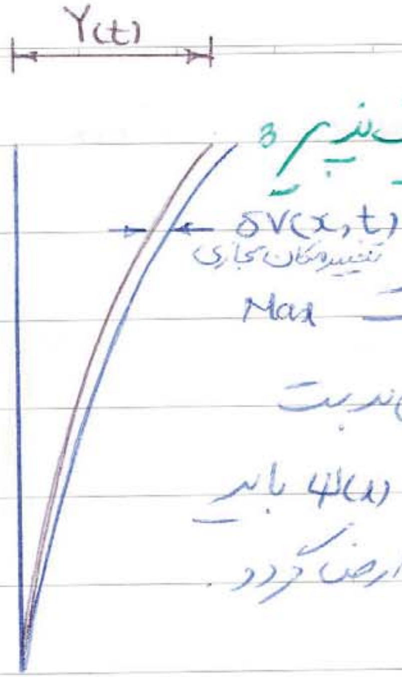
باز هم این یک سیستم دو بعدی است ولی یک درجه آزادی داریم



*تمرین ۹: ستون صلبی دارای تکیه‌گاه نیمه‌صلب می‌باشد که توسط فنرهایی در دو انتهای آن (آزاد آن) قرار دارند مهار شده است. مطلوبست تعیین معادله حرکت این سیستم درصورتیکه $\mu(x)$ جرم در واحد طول این ستون صلب باشد. در حالتی که $\mu(x)=\mu$ باشد معادله حرکت را بدست آورید و سیستم معادل یک درجه آزادی آن را نشان دهید

حمید کاظمی





ب) جسم انعطاف پذیر :

مقدار ψ(x) در حالت Max واحد است. برای بدست آوردن معادله ψ(x) باید شرایط مرزی ارضا گردد.

در نقطه $x=0$ تابع و مشتق اش صفر است و در $x=L$ تابع برابر یک است.

پس معادله بصورت مقابل می گردد:

$$\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$$

پس بدست آوردن ψ(x) ساده است. مهم Y(t) است.

تعیین معادله حرکت : (روش کار مجازی)

بی نهایت جرم
بی نهایت تغییر مکان
} ← بی نهایت درجه آزادی

حالا می خواهیم مسئله را بصورت یک سیستم معادل تک درجه آزادی حل کنیم. روش ساده تری علاوه بر روش المان وجود دارد.

روش تغییر مکان مجازی (کار مجازی) :

اصل کار مجازی برابر این است که اگر سیستمی دارای تعادل استاتیکی باشد برای تغییر مکان مجازی کل کار انجام شده برابر صفر است.

ویژگی تغییر مکان مجازی بصورت زیر است.

حمید کاظم

۱) با قیود زیر هم‌ساز باشد (جای که صفر شود و جای Max، Max باشد)
۲) تغییر مکان کوچک باشد تا سیستم در حال تعادل بماند.

(Internal) (External)

δW_I کار مجازی نیروهای داخلی = δW_E کار مجازی نیروهای خارجی

براساس اصل کار مجازی، کار مجازی انجام شده توسط نیروهای داخلی را می‌توان برابر کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی دانست.

$p(x,t)$ نیرو در واحد طول است. شدت نیرو است.
تنش دو نوع است ← تنش فشاری (فشار)، تنش کششی.

کار مجازی نیروهای خارجی $\delta W_E = \int_0^L \underbrace{p(x,t)\,dx}_{\text{نیرو}}\ \underbrace{\delta v(x,t)}_{\text{تغییر مکان}}$ (3)

کار ناشی از برش در مقابل خمش در تیرهای بلند بسیار کم است. بنابراین قابل اغماض است.

(4) به علت خمش ← کار مجازی نیروهای داخلی $\delta W_{I_1} = \int m(x)\ \delta d\theta$

چون حالت مجازی $d\theta$ را حساب می‌کنیم پس $\delta d\theta$ داریم. (کار مجازی به علت $\delta v(x,t)$ بوده است)

(5) به علت نیروی اینرسی ← کار مجازی نیروهای داخلی $\delta W_{I_2} = \int f_I(x,t)\,dx\ \ \delta v(x,t)$

$f_I(x,t)$ = شدت نیروی اینرسی (در نقطه x در لحظه t)

$$\theta = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \rightarrow d\theta = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,dx \quad (6)$$

$$\delta d\theta = \frac{\partial^2 \delta v(x,t)}{\partial x^2}\, dx \qquad (7)$$

$$\frac{M(x)}{EI(x)} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \Rightarrow M(x) = EI(x)\, \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \qquad (8)$$

$$1)\ \begin{cases} \delta v(x,t) = \psi(x) \cdot \delta Y(t) & (1) \\ v(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t) & (2) \end{cases}$$

$$\delta W_{I_1} = \int EI(x) \frac{d^2\psi}{dx^2}\, Y(t) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\, \delta Y(t)\right] dx$$

$$\Rightarrow \delta W_{I_1} = Y(t) \cdot \delta Y(t) \int_0^L EI(x) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \qquad (9)$$

2) $f_I(x,t) =$ شدت نیروی اینرسی $\qquad f_I(x,t) \cdot dx \rightarrow$ نیروی اینرسی

$$f_I(x,t) = \mu(x)\, \ddot{v}(x,t) = \mu(x)\, \psi(x)\, \ddot{Y}(t) \qquad (12)$$

$$\delta W_{I_2} = \ddot{Y}(t) \int \mu(x) \cdot \psi(x) \left[\psi(x) \cdot \delta Y(t)\right] dx$$

$$\delta W_{I_1} = \ddot{Y}(t)\, \delta Y(t) \int_0^L \mu(x) \left[\psi(x)\right]^2 dx \qquad (10)$$

$$3)\qquad \delta W_E = \delta Y(t) \int_0^L p(x,t)\, \psi(x)\, dx \qquad (11)$$

با استفاده از اصل کار مجازی خواهیم داشت:

$$\delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} = \delta W_E \qquad (13)$$

$$\ddot{Y}(t)\cdot\delta Y(t)\int_0^l \mu(x)\,(\psi(x))^2\,dx + Y(t)\cdot\delta Y(t)\int_0^l EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx = \delta Y(t)\int_0^l p(x,t)\,\psi(x)\,dx \qquad (14)$$

از آنجا که $\delta v(x,t)$ مقداری اختیاری و غیر صفر می‌باشد بنابراین می‌توان در رابطه 14 $\delta Y(t)$ را از دو طرف معادله حذف نمود. در نتیجه خواهیم داشت:

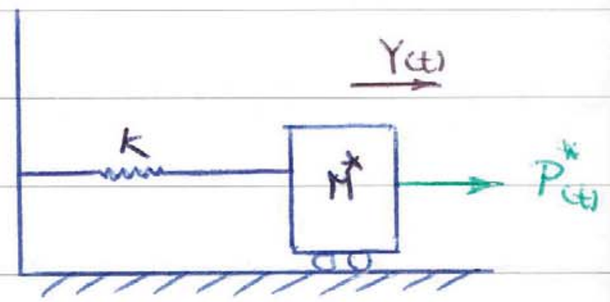
$$\ddot{Y}\int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + Y\int_0^l EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx = \int_0^l p(x,t)\,\psi(x)\,dx$$

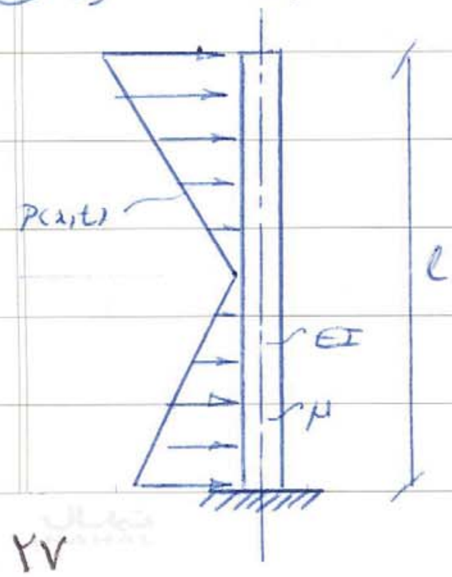
$$M^*\ddot{Y} + K^*Y = P^*_{(t)} \qquad (15)$$

جرم معادل $M^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx$

سختی معادل $K^* = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx$

نیروی معادل $P^*_{(t)} = \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx$

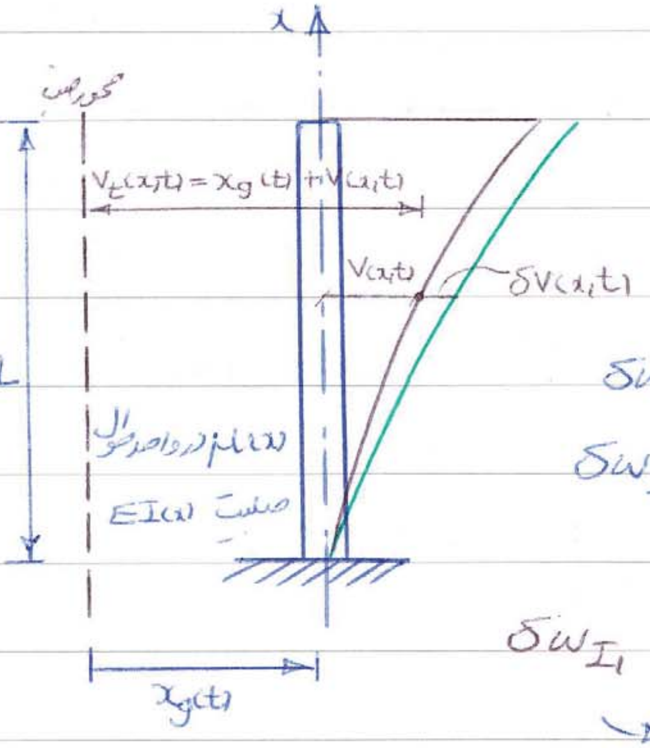




تمرین 1: ستون طره‌ای در شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه EI و μ در طول ستون ثابت فرض شود، مطلوبست تعیین معادله حرکت، جرم و سختی و نیروی معادل. تابع شکلی $\psi(x)$ را بصورت $1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

معادله حرکت اجسام الاستیک با جرم گسترده تحت اثر حرکت زمین :

(با استفاده از روش کار مجازی)



$$\begin{cases} V(x,t) = \psi(x) . Y(t) & (16) \\ \delta V(x,t) = \psi(x) . \delta Y(t) & (17) \end{cases}$$

$$\delta W_E = \delta W_I \quad (18)$$

چون نیروی خارجی نداریم : $\delta W_E = 0$ (19)

$\delta W_I = \delta W_{I_1} + \delta W_{I_2}$ (20) کار مجازی نیروهای داخلی

$$\delta W_{I_1} = Y . \delta Y \int_0^L EI(x) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \quad (21)$$

کار مجازی نیروهای داخلی (ناشی از خمش) ←

$\delta W_{I_2} = \int_0^L f_I(x,t)\, \delta V(x,t)\, dx$ (22) کار مجازی نیروهای اینرسی :

شدت نیروی اینرسی $f_I(x,t) = \mu(x) . \ddot{V}_t(x,t)$ (23)

شتاب مطلق نقطه ←

$$V_t(x,t) = V(x,t) + x_g(t) \quad (24)$$

$$\delta W_{I_2} = \int_0^L \mu(x) \left[\ddot{V}(x,t) + \ddot{x}_g(t)\right] \psi(x)\, \delta Y . dx \quad (25)$$

$$= \int_0^L \mu(x) . \ddot{Y}(t) [\psi(x)]^2 \delta Y . dx + \int_0^L \mu(x)\, \ddot{x}_g(t)\, \psi(x)\, \delta Y . dx \quad (26)$$

$$= \ddot{Y}(t) . \delta Y \int_0^L \mu(x) [\psi(x)]^2 dx + \ddot{x}_g\, \delta Y(t) \int_0^L \mu(x)\, \psi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \delta W_{I_2} = \ddot{Y}(t) . \delta Y \int_0^L \mu(x) [\psi(x)]^2 dx + \ddot{x}_g\, \delta Y(t) \int_0^L \mu(x)\, \psi(x)\, dx \quad (27)$$

$$\delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} = \delta W_E \qquad (28)$$

$$\ddot{Y}\,\delta Y \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + Y\,\delta Y \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx = -\delta Y\,\ddot{x}_g \int_0^L \mu(x)\,\psi\,dx \qquad (29)$$

در رابطه 29 چون مقدار تابع $\delta Y(t)$ اختیاری و مخالف صفر می‌باشد بنابراین خواهیم داشت.

سختی

$$\ddot{Y} \underbrace{\int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx}_{M^*} + Y \underbrace{\int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx}_{k^*} = -\ddot{x}_g(t) \underbrace{\int_0^L \mu(x)\,\psi(x)\,dx}_{\bar{k}} \qquad (30)$$

$$M^* \ddot{Y}(t) + k^* Y(t) = P^*_{eff}(t) \qquad (31)$$

$$M^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx \qquad (32)$$ جرم معادل

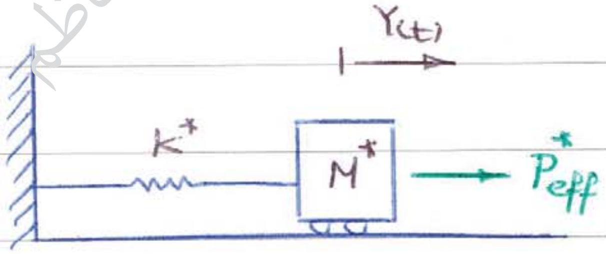
$$k^* = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \qquad (33)$$ سختی معادل

$$\bar{k} = \int_0^L \mu(x)\,.\,\psi(x)\,.\,dx \qquad (34)$$ ضریب تحریک زلزله

$$P^*_{eff} = -\bar{k}\,\ddot{x}_g(t) \qquad (35)$$

هرچه $\bar{k}$ بیشتر باشد نیروی ورودی بیشتر است.

اگر خاک نرم و شل داشته باشیم اثرش بیشتر از خاک سفت است. (اثر زلزله)



اثر استهلاک در معادله حرکت:

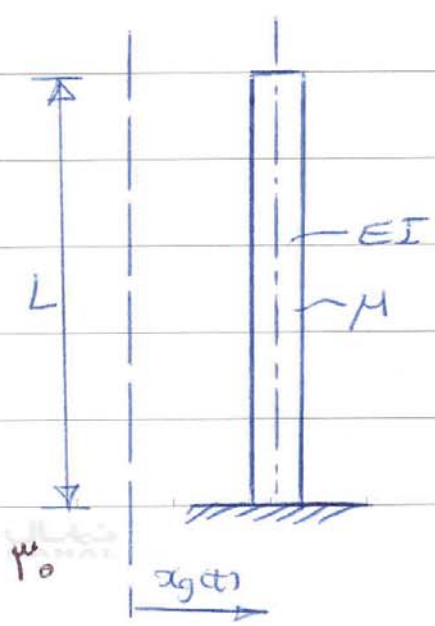
اگر در سیستم استهلاک موجود باشد رابطه ۶ معادله حرکت (31) در حالت کلی بصورت رابطه زیر در خواهد آمد.

$$M^*\ddot{Y}(t)+C^*\dot{Y}(t)+K^*Y(t)=P^*_{eff}(t) \qquad (36)$$

که ξ نسبت استهلاک بحرانی از رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$\xi=\frac{C^*}{2M^*\omega} \quad (37) \qquad \text{فرکانس طبیعی } \omega=\sqrt{\frac{K^*}{M^*}} \quad (38)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Y}(t)+2\xi\omega\dot{Y}(t)+\omega^2Y(t)=\frac{1}{M^*}P^*_{eff}(t) \qquad (39)$$



مثال: برجی به شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه M جرم در واحد طول و جرم جسم EI صلبیت خمشی در طول آن ثابت و یکنواخت باشد و تابع شکلی بصورت زیر باشد $\psi(x)=1-\cos\frac{\pi x}{2L}$ مطلوبست معادله حرکت سیستم نشان داده شده در اثر حرکت زمین.

حمید کاظم

حل همین تمرین: جرم معادل، سختی معادل و نیروی معادل.

$$V(x,t) = \psi(x)\, Y(t) \qquad \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$M^{*}\ddot{Y}(t) + k^{*}Y(t) = P^{*}_{eff}(t)$$

$$M^{*} = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx = \mu\int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228\,\mu L$$

$$k^{*} = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx = EI\int_0^L \left[\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right]^2 dx$$

$$= \frac{\pi^4}{32}\,\frac{EI}{L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L \mu(x)\,\psi(x)\,dx$$ ضریب تحریک زلزله

$$\bar{k} = \mu\int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = 0.364\,\mu L$$

$$P^{*}_{eff} = -\bar{k}\,\ddot{x}_g = -0.364\,\mu L\,\ddot{x}_g(t)$$

پس از جایگزین کردن مقادیر جرم معادل، سختی معادل و نیروی موثر معادل در رابطه ۶ اصلی خواهیم داشت.

$$0.228\,\mu L\,\ddot{Y}(t) + \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3}\,Y(t) = -0.364\,\mu L\,\ddot{x}_g(t)$$

تابع شکلی دیگر

$$\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$$

$$k^{*} = EI\int_0^L \left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

$$M^{*} = \mu\int_0^L \frac{x^4}{L^4}\,dx = \frac{\mu L}{5} = 0.2\,\mu L$$

$$\bar{k} = \mu\int_0^L \frac{x^2}{L^2}\,dx = \frac{\mu L}{3}$$

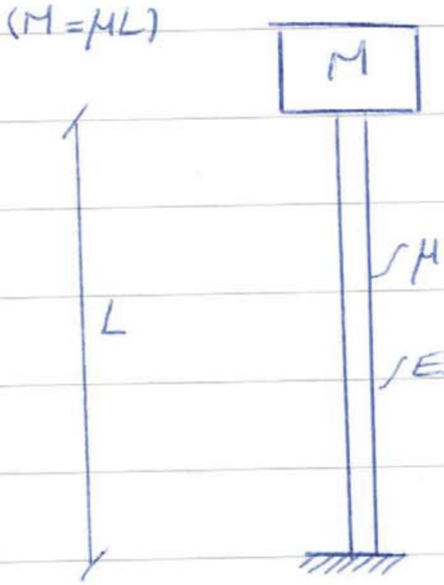
$$0.2\,\mu L\,\ddot{Y}(t) + \frac{4EI}{L^3}\,Y = -\frac{\mu L}{3}\,\ddot{x}_g(t)$$

اگر برای توابع شکلی مختلف داریم چه معیاری برای انتخاب بهترین $\psi(x)$ وجود دارد؟

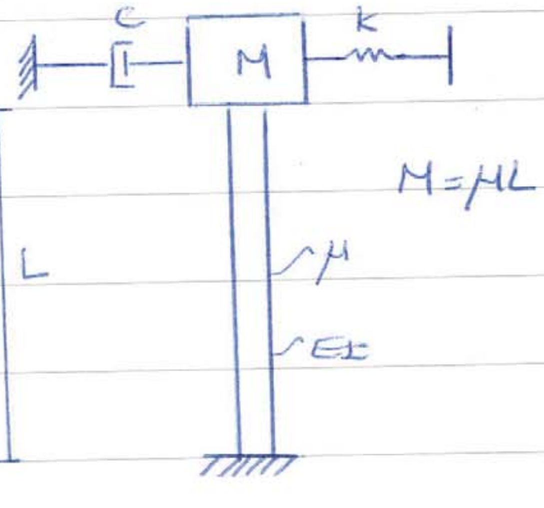
$$\omega_1^2 = \frac{K_1^*}{M_1^*} = \frac{3.044}{0.228}\,\frac{EI}{\mu L^4} = 13.35\,\frac{EI}{\mu L^4} \rightarrow \omega_1 = 3.65\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{K_2^*}{M_2^*} = \frac{4\,EI}{0.2\,\mu L^4} = 20\,\frac{EI}{\mu L^4} \rightarrow \omega_2 = 4.47\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

* اگر تابع، تابعی دقیق نباشد فرکانس بیشتر می‌گردد. پس اگر تابع دقیق داشته باشیم کمترین فرکانس را با توجه به تابع خواهیم داشت.

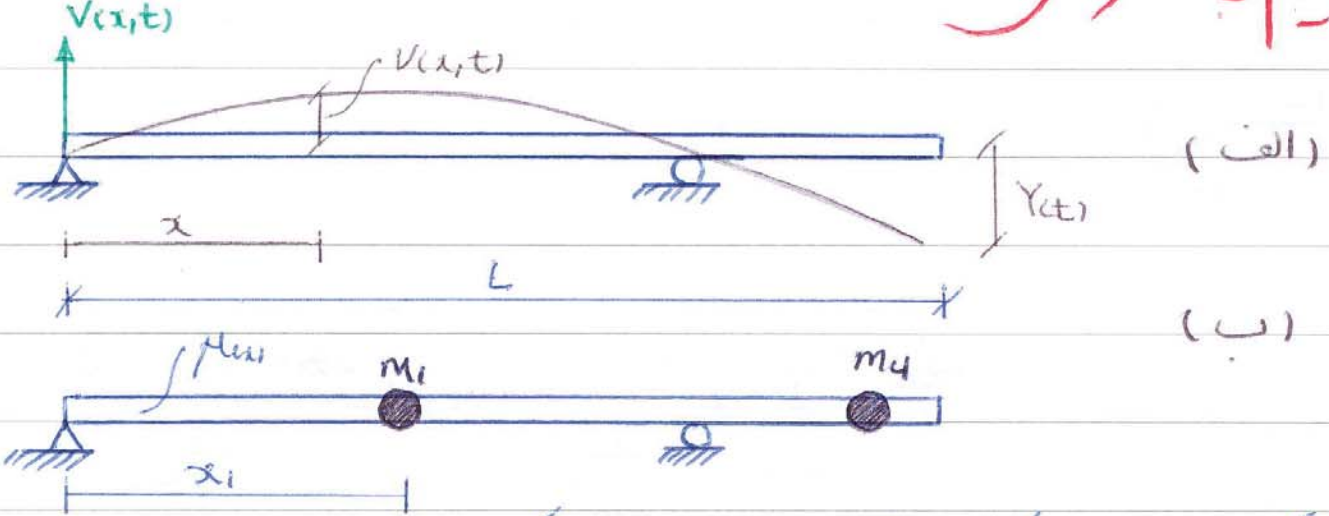


تمرین ۱۱: سازه‌ای به صورت شکل مقابل مدل شده است. درصورتیکه EI و μ در طول برج ثابت در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین معادله حرکت، جرم معادل و سختی معادل، جرم، ضریب تحریک زلزله و نیروی مؤثر معادل. اگر این برج تحت اثر حرکت زمین با شتاب $\ddot{x}_g(t)$ قرار گرفته باشد.



تمرین ۱۲: سازه‌ای به شکل مقابل مدل شده است. مطلوبست تعیین معادله حرکت، سختی، جرم و نیروی مؤثر معادل و ضریب استهلاک معادل درصورتیکه سازه تحت اثر حرکت زمین قرار گرفته باشد.

تعمیم پارامترهای معادله حرکت در حالت کلی



معادله حرکت هر سیستم یک درجه آزادی را هر اندازه که بغرنج و پیچیده باشد همواره می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$M^*\ddot{Y}(t)+C^*\dot{Y}(t)+K^*Y(t)=P^*(t)$$

که در این رابطه $Y(t)$ مختصات تعمیم یافته منحصری است که حرکت سیستم را تبیین می‌کند.

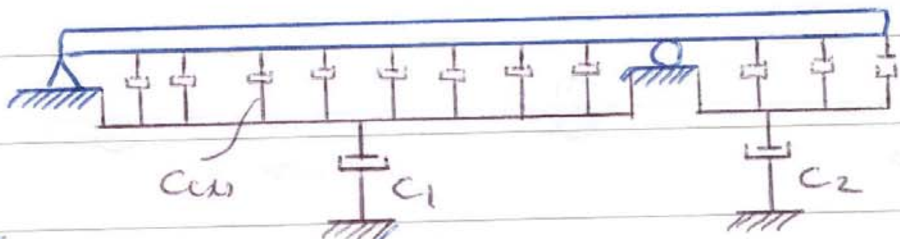
یک سیستم یک درجه آزادی را در نظر بگیرید که دارای یک شکل تغییر مکان فرضی باشد. تغییر مکان سازه را در هر لحظه برحسب مختصات تعمیم یافته $Y(t)$ می‌توان از رابطه $V(x,t)=\psi(x)\cdot Y(t)$ محاسبه کرد.

از همان انرژی جنبشی حاصل از جرم‌ها را هم باید همراه با اثر بارهای متمرکز در M^* لحاظ کرد.

$$M^*=\int_0^L \mu(x)[\psi(x)]^2dx+\sum_i m_i\psi_i^2+\sum I_{o_i}(\psi_i')^2$$

همان انرژی را وقتی استفاده می‌کنیم که سازه سنگین و بسیار بلند باشد (مثل برج میلاد)

(ج)

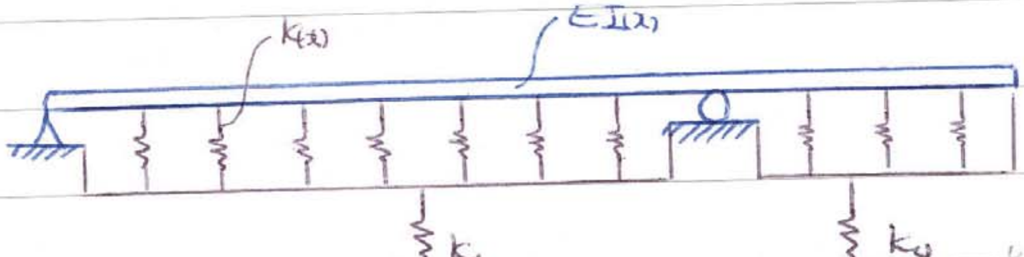


سازه (ج) بستری را نشان می‌دهد که بستر دارای استهلاک گسترده و موضعی است

استهلاک تعمیم یافته که ناشی از استهلاک یک بستر و دو مستهلک کننده‌های موضعی c_i در شکل (ج) می‌باشند:

$$C^* = \int_0^L c(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + \sum_i c_i\,\psi_i^2$$

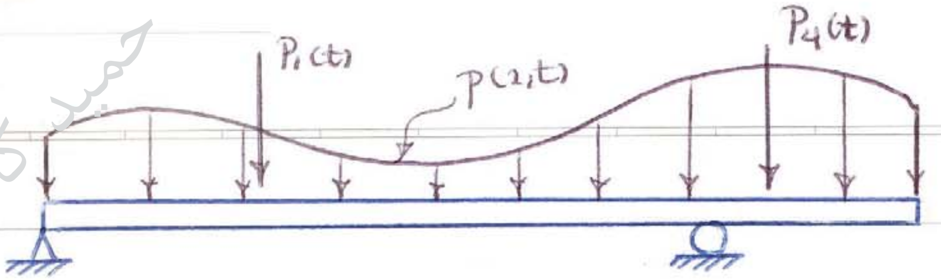
(د)



آیا این فنرها سری هستند یا موازی؟

برای بستر، بستر الاستیک گویند. سختی تعمیم یافته از بستر الاستیک، سختی خمش و فنرهای موضعی برابر است با:

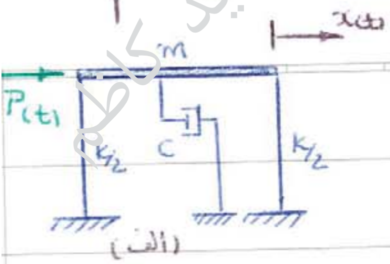
$$K^* = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx + \int_0^L k(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + \sum k_i\,\psi_i^2 + \sum k_\theta\,(\psi_i')^2$$



$$P^* = \int_0^L P(x,t)\, \psi(x)\, dx + \sum_i P_i \psi_i$$

$$\bar{K} = \int_0^L \mu(x) \cdot \psi(x)\, dx + \sum m_i \psi_i$$

حمید کاظم

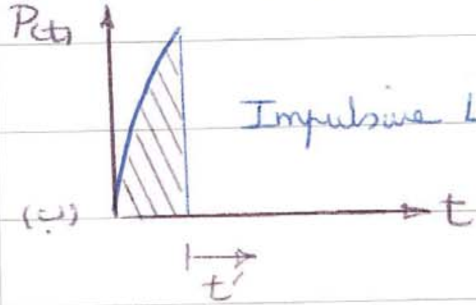


«فصل دوم»

۱) پاسخ سیستم تک‌درجه آزادی تحت اثر نیروهای دینامیکی :

الف) پاسخ سیستم تک‌درجه آزادی تحت اثر بارگذاری ضربه‌ای :

مشخصه بارگذاری ضربه‌ای آن است که در زمان کوتاهی نیروی زیادی در سازه اعمال گردد. (کمتر از ۱/۵ پریود سازه)



مقدار ضربه = مساحت زیر منحنی بارگذاری ضربه‌ای.

$\int p(t)\,dt$ = مقدار ضربه

(معادل ضربه ← نیرو × زمان)

در این حالت به سیستم سرعت اولیه‌ای وارد می‌کنیم

$$P(t) = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow P(t)\,dt = m\,dv \rightarrow \int P(t)\,dt = \int m\,dv$$

$$\rightarrow \int P(t)\,dt = mv = m\dot{X}_0 \Rightarrow \dot{X}_0 = \frac{1}{m}\int P(t)\,dt$$

** در اثر ضربه سرعت به سیستم القا می‌گردد. سپس سیستم به سیستم با ارتعاش آزاد تبدیل می‌گردد

فرض ← $\xi = 0$ (بدون استهلاک)

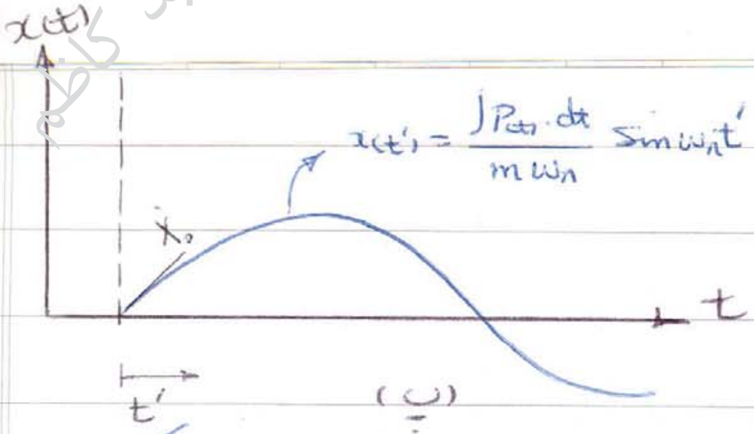
$X_0 = 0$ است.

$$x(t) = X_0 \cos\omega_n t + \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$ (حرکت نوسانی با ارتعاش آزاد)

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\int P(t)\,dt}{m\,\omega_n}\sin\omega_n t'$$

* t' در رابطه $x(t)$ از زمانی است که اثر ضربه تمام شده است.

* اگر زمان اعمال نیرو در حد $t_d < 1/5\,T$ باشد اثر نیرو را ضربه‌ای در نظر می‌گیریم.



واکنش نیروی بار با فاصله زمانی خیلی کم از طریق روش ارتعاش آزاد بدست می‌آید. درصورتیکه نیروی $P(t)$ در فاصله زمانی بسیار کم یعنی $(t_1 \ll T)$ که T پریود سازه است به سیستم اعمال گردد، می‌توان فرض کرد که هیچگونه تغییر اساسی در تغییرات سازه در فاصله زمانی کم بوجود نمی‌آید $(X_0=0)$ ولی در عوض تغییری در سرعت سیستم بوجود می‌آید که با استفاده از رابطه اندازه حرکت می‌توان آن را بدست آورد.

درصورتیکه در این حالت استهلاک موجود باشد پاسخ سازه در اثر شرایط اولیه $\dot{X}_0 = \frac{1}{m}\int P dt$ ، $X_0 = 0$ به صورت زیر در خواهد آمد.

$$x(t) = \frac{\int P(t)\, dt}{m\,\omega_d} e^{-\xi\omega_n t'} \cdot \sin\omega_d t' \qquad \text{(ارتعاش آزاد با استهلاک)}$$

تمرین ۱۳: برج مخابراتی شهری بصورت سازه مقابل مدل شده است. درصورتیکه

$W = Mg = 100\ \text{kips}$, $L = 100\ \text{ft}$

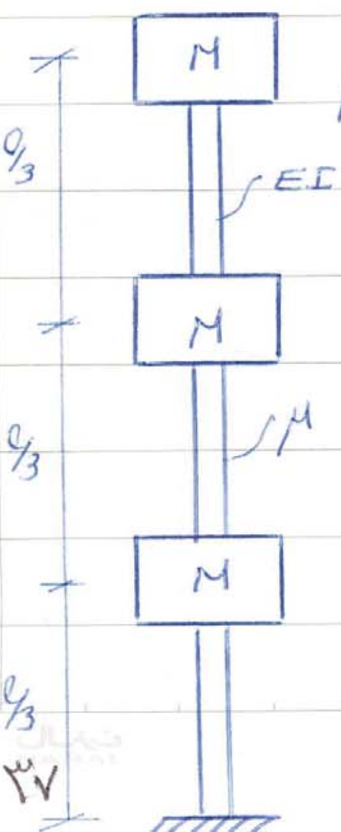
$EI = 3\times10^8\ \text{lb.in}^2$

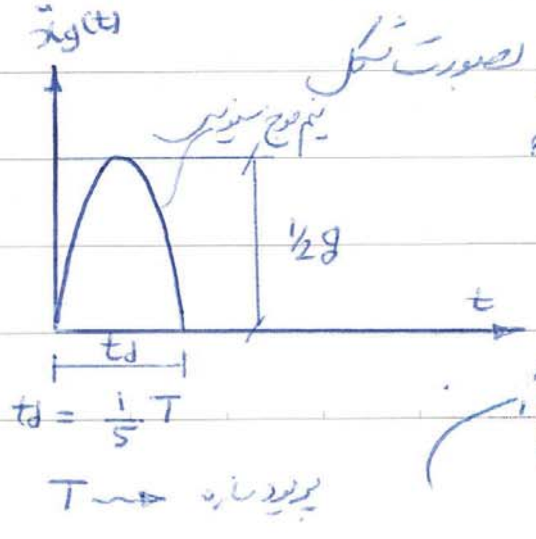
وزن سازه تحت اثر حرکت زمین بصورت شکل زیر قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

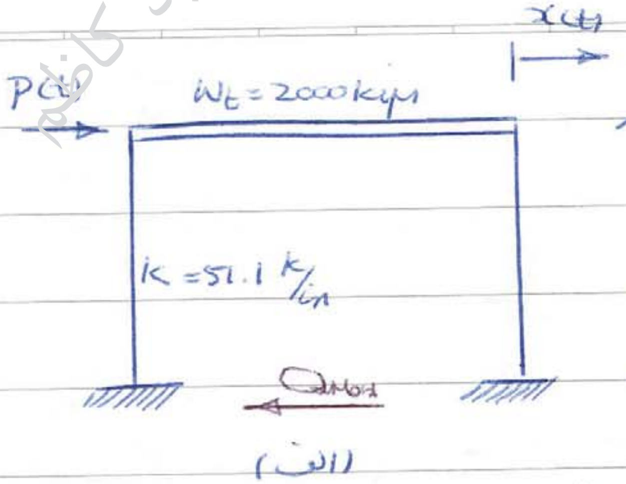
۱) Max تغییر مکان

۲) Max برش پایه

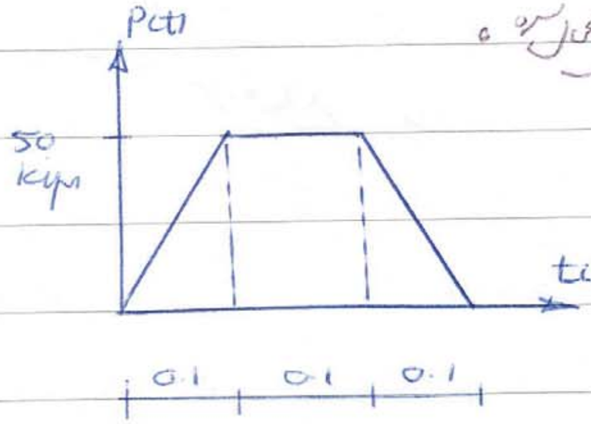
۳) معادله تابع تغییر مکان و رسم آن







مثال: قاب یک طبقه شکل زیر مفروض است. در صورتی که نیروی p(t) مطابق منحنی نشان داده شده در شکل مقابل اعمال گردد، مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان و هم چنین تعیین Max نیروی برش پایه.



حل: تعیین زمان تناوب به منظور تعیین نوع بارگذاری اعمال شده.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2000}{51.1 \times 386}} = 2.\ sec$$

$$2.0\ sec >> t_d = 0.3$$

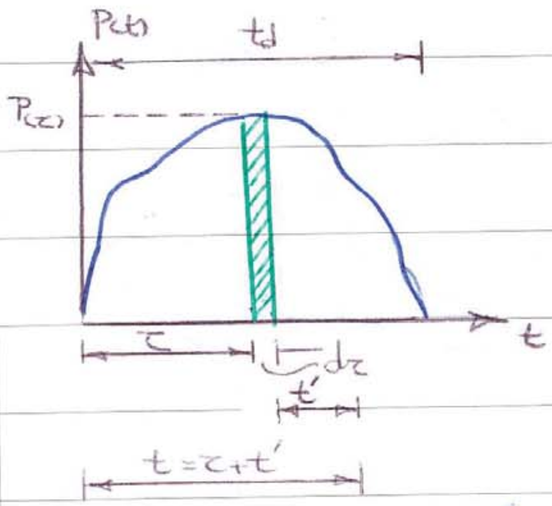
بارگذاری را می توان ضربه ای در نظر گرفت.

$$\int p\,dt = \int_0^{t_1} p\,dt = \frac{0.3+0.1}{2} \times 50 = 10\ k.sec$$

$$x_{(t)} = \frac{\int p\,dt}{m\omega_n}\sin\omega_n t = \frac{10(386)(2)}{2000 \times 2\pi}\sin\omega_n t = 0.614\sin\omega_n t$$

$$X_{max} = 0.614\ in$$

$$Q_{max} = K X_{max} = 51.1(0.614) = 31.4\ kips$$

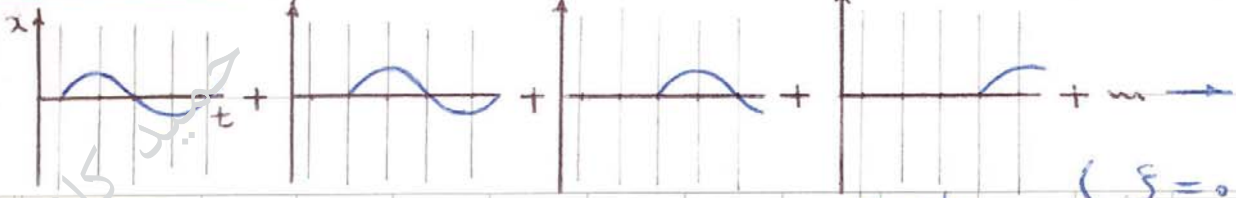


ب) پاسخ سازه تحت اثر بارگذاری اختیاری:

این بارگذاری ضربه ای نمی باشد اما آن را می توان به قسمت های ضربه ای دامنه تقسیم نمود.

می خواهیم ببینیم سهم تغییر مکان از ضربه نشان داده شده چه می باشد.

$dx_{(t)}$: تغییر مکان حاصل از ضربه (سهم المان از تغییر مکان کل)



انتگرال دوهامل

(با فرض $\xi = 0$)

سهم تغییر مکان کلی سازه به علت ضربه آن $(P(\tau)d\tau)$

$$dx_{(t)} = \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega_n}\sin\omega_n t' \qquad (1)$$

چون از لحظهٔ τ به بعد ضربه اتفاق می‌افتد پس $\sin\omega_n t'$ داریم.

$$t = \tau + t' \;(2) \Rightarrow t' = t - \tau \qquad (3)$$

$$\Rightarrow dx(t) = \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau) \qquad (4)$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau \qquad (5)$$ انتگرال دوهامل

(Duhamel Integral)

t در اینجا مقدار ثابت است. می‌توان برحسب t هم بدست آورد.

* این انتگرال از $0 \le t \le t_d$ برقرار است. از $t = t_d$ به بعد یک حرکت با ارتعاش آزاد داریم که

$\rightarrow X_0 = X(t_d)$, $\dot{X}_0 = \dot{X}(t_d)$

با توجه به شکل بار ضربه‌ای و واکنش سیستم در مقابل آن، این امکان بوجود می‌آید که با استفاده از این شکل بتوان در وجود واکنش سازه در مقابل بارهای اختیاری کمک کرد. اگر فرض شود که بارگذاری اختیاری به ضربان‌های ضلعی کوتاه تقسیم گردد، تعریف این تقسیمات را می‌توان به عنوان یک ضربه در نظر گرفت. اگر به یکی از این تقسیمات که به طوری که در شکل نشان داده شده است توجه گردد، می‌توان دریافت که در زمان τ پس از شروع بارگذاری زمانی که فاصله زمانی $d\tau$ مقدار ضربه برابر با $P(\tau)d\tau$ می‌شود. که واکنش سازه مقابل این ضربه قابل محاسبه می‌باشد.

واکنش سازه به علت بارگذاری کامل با استفاده از اصل جمع آثار برابر است با

واکنش مجموعه ضربه‌های دیفرانسیل در بازه شده از تعریف انتگرال تغییر مکان سازه در لحظه t از روابط 5 قابل محاسبه می‌باشد.

* این انتگرال به نام دوهامل معروف است و واکنش هر سازه الاستیک را تحت هر بارگذاری اختیاری نشان می‌دهد.

* چون که در به دست آوردن این انتگرال با استفاده از اصل انطباق صورت گرفته بنابراین کاربرد این انتگرال برای سیستم‌های خطی صدق است.

کاربرد انتگرال دوهامل برای سیستم یک درجه آزادی (با استهلاک):

پاسخ سازه به علت بارگذاری ضربه‌ای:

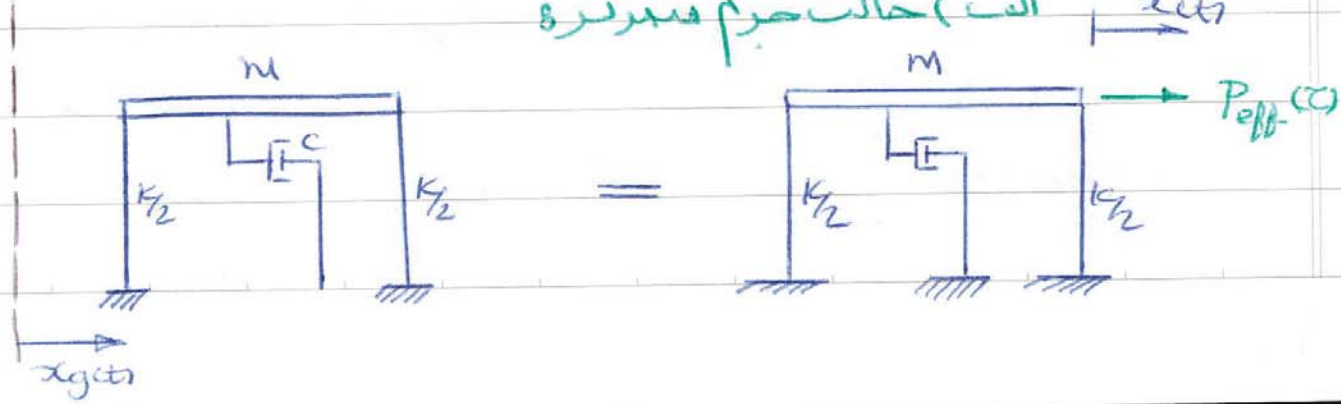
$$x(t) = \frac{\int P(t)dt}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_D t \quad (6)$$

واکنش سیستم یک درجه آزادی شامل استهلاک شده برای بار به طور مستقیم مطابق آنچه قبلاً توضیح داده شد از روابط قبل با همین روش به دست آورد. در این صورت انتگرال دوهامل در حالت کلی برابر است با:

$$x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau \quad (7)$$

۲) پاسخ سازه یک درجه آزادی تحت اثر حرکت زمین:

الف) حالت جرم متمرکز:



به این علت که زمان اثر نیروی زلزله بر سازه زیاد است آن را بصورت بارگذاری اختیاری در نظر می‌گیریم.

$$x(t) = \int_0^t \frac{P_{eff}(\tau)}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau \quad (8)$$

$$P_{eff(t)} = m\ddot{x}_g(\tau) \quad (9)$$

پس از جایگزینی رابطه (۹) در (۸) خواهیم داشت

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\omega_D}\displaystyle\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau & (10) \\ V(t) = \displaystyle\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau & (11) \end{cases}$$

$V(t)$ رایج شبه سرعت است.

$$x(t) = \frac{1}{\omega} V(t)$$

شتاب زلزله، میرایی سیستم و فرکانس سازه ۳ عامل مهم در شبه سرعت است.

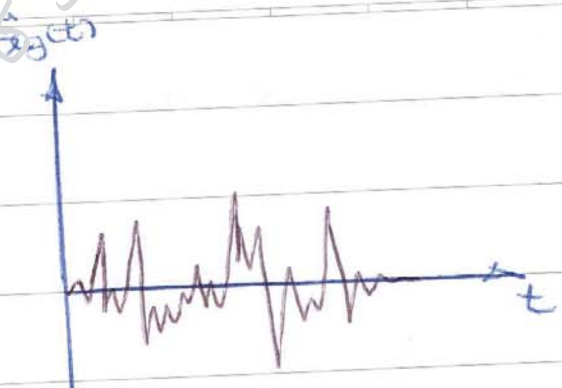
۱) شتاب زلزله: اگر شتاب برای یک زلزله مشخص و معلوم باشد.
۲) میرایی: میرایی را هم ۵٪ فرض می‌گیریم
۳) فرکانس: به سختی و جرم بستگی دارد.

در این حالت برای هر فرکانس سازه یک $V(t)$ خاص داریم. پس مثلاً برای زلزله بم تنها فرکانس پیش می‌رود.

ب) حالت جرم گسترده

$$V(x,t) = \psi(x).Y(t)$$

$$M^*\ddot{Y}(t) + C^*\dot{Y}(t) + K^*Y(t) = P^*_{eff}(t)$$



از مزایای اصلی روش دوهامل بوجود شدن انتگرال بوده است که توان شتاب زمین را اعمال کند

$$\ddot{Y}(t)=\int_0^t \frac{P^*_{eff}(\tau)}{M^*\omega}\cdot e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

(در حالت جرم الاستیک با جرم گسترده تحت اثر حرکت زمین) ← $P^*_{eff}=\bar{k}\,\ddot{x}_g(t)$

$$Y(t)=\frac{\bar{k}}{m^*\omega}\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow Y(t)=\frac{\bar{k}}{M^*\omega}V(t)$$

$$v(x,t)=\psi(x)\cdot Y(t)\Rightarrow v(x,t)=\psi(x)\cdot\frac{\bar{k}}{m^*\omega}V(t)$$

$$\bar{k}=\int_0^L\psi(x)\,\mu(x)\,dx \qquad M^*=\int_0^L\mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx$$

نیروی وارده بر سازه در زمان حرکت زمین: الف) جرم متمرکز

این معادله یکی از معادلات اصلی طراحان می باشد. این نیرو را می توان در حالت کاملاً قابل اطمینان از محاسبه شتاب موثر بدست آورد

$$m\ddot{x}_t+c\dot{x}+kx=0 \rightarrow \ddot{x}_t+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0$$

در حالت تغییر مکان Max (سرعت صفر) و یا حالتی که مقدار نسبت استهلاک بحرانی کم باشد جمله دوم را می توان صرف نظر نمود. $(x_t=x_g(t)+x)$

فرضیات: ۱) تغییرشکل ماکزیمم (سرعت صفر)، یا ۲) c بسیار کم

$$\Rightarrow \ddot{x}_t + \omega_n^2 x \cong 0$$

$$\ddot{x}_t = \ddot{x}_e \rightarrow$$ شتاب موثر سازه

$$\Rightarrow \ddot{x}_e + \omega_n^2 x(t) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_e = -\omega_n^2 x(t)$$

بنابراین نیروی موثر وارد بر سازه برابر است با:

$$Q(t) = m\ddot{x}_e = m\omega^2 x(t)$$

علامت منفی را از این جهت می‌توان حذف نمود که قدر مطلق Max نیروی زلزله مورد نظر می‌باشد.

$$x(t) = \frac{1}{\omega} V(t)$$

با استفاده از رابطه $V(t)$ داریم:

$$\boxed{Q(t) = m\omega V(t)} \rightarrow$$ نیروی برش پایه

این نیرو تاریخچه زمانی را به ما می‌دهد

ب) جرم گسترده:

مطابق حالت قبل در این حالت شتاب موثر بصورت زیر است.

$$m^*\ddot{Y}(t) + c^*\dot{Y}(t) + k^*Y(t) = P^*_{eff}(t)$$

$$\ddot{Y}_t + \omega_n^2 Y \cong 0$$

$$\ddot{Y}_t = \ddot{Y}_e$$

$$\ddot{Y}_e(t) = \omega_n^2 Y(t)$$ شتاب موثر

نیروی موثر اینرسی در واحد طول $q(x,t)$ بصورت زیر است:

$$q(x,t) = \mu(x)\cdot\psi(x)\cdot\ddot{Y}_e(t)$$

$$(\ddot{v}(x,t) = \psi(x) \times \ddot{Y}_e(t))$$

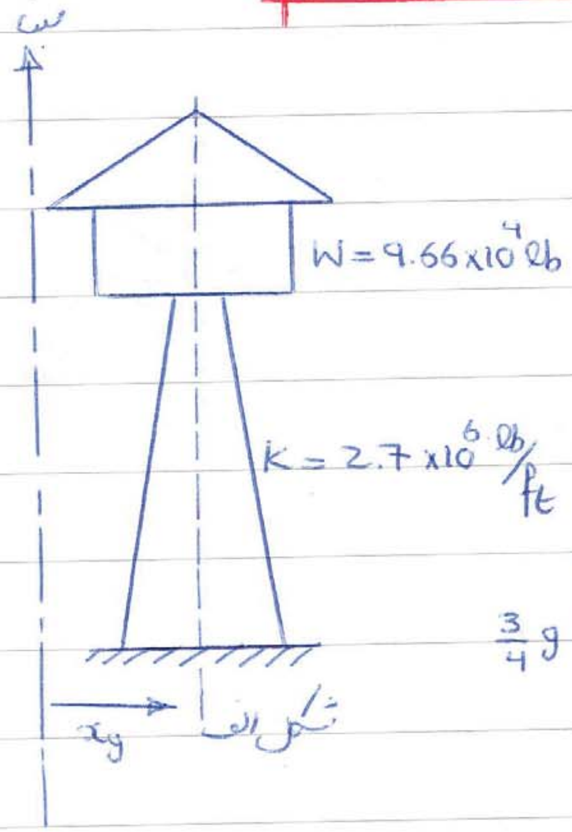
$$q(x,t) = \psi(x)\cdot\mu(x)\cdot(\omega^2 Y(t)) \quad , \quad Y(t) = \frac{\bar{k}}{M^*\omega} V(t)$$

$$q(x,t) = \mu(x)\cdot\psi(x)\cdot\frac{\bar{K}}{M^*}\,\omega V(t)$$

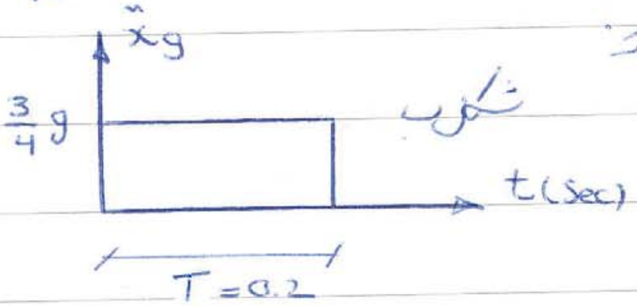
برای است با استفاده از این رابطه می‌توان هر نیروی داخلی و تنش مربوطه را بدست آورد. یکی از نیروهای مهم در زمان زلزله نیروی برش در پایه‌های باشد که در حقیقت کل نیروی وارده از سوی زلزله به سازه می‌باشد. در این حالت نیروی برش پایه برابر است با:

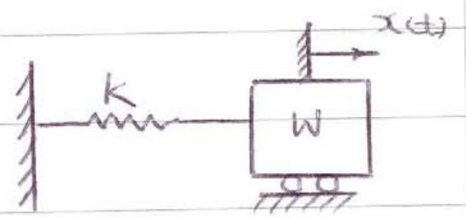
$$Q(t) = \int_0^L q(x,t)\,dx = \frac{\bar{K}}{M^*}\,\omega V(t)\int_0^L \mu(x)\,\psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = \frac{\bar{K}^2}{M^*}\,\omega V(t)}$$



مثال: منبع آبی مطابق شکل مفروض است. درصورتیکه این منبع تحت اثر زلزله‌ای با دیاگرام شتاب شکل ب قرار گیرد، مطلوبست تعیین Max تغییرمکان و هم‌چنین حداکثر برش پایه. استهلاک را صفر در نظر بگیرید.





$$m\ddot{x} + kx = P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$$

حالت اول: $0 < t \leq T = 0.2$

تعیین تابع تغییر مکان با استفاده از انتگرال دوهامل : $0 \le t \le T$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t P_{eff}(\tau)\,\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g = -m\left(\frac{3}{4}g\right) = -\frac{3}{4}W = P_0$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}P_0\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \frac{P_0}{m\omega_n^2}\cos(t-\tau)\Big]_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) \qquad 0 \le t \le T$$

بعد از این تازه شروع به نوسان آزاد می کند.

حالت دوم : $t > T = 0.2$

در این حالت $P_{eff} = 0$ بوده. لیکن به علت سرعت و تغییر مکان اولیه سیستم به سیستم ارتعاش آزاد با شرائط اولیه فوق تبدیل می شود.

$$X_0 = x(T) \qquad \dot{X}_0 = \dot{x}(T)$$

$$x(t) = x(T)\cos\omega_n(t-T) + \frac{\dot{x}(T)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-T) \qquad t>T$$

مهم

* تعیین ماکزیمم تغییر مکان :

باید ببینیم آیا تغییر مکان Max بین صفر تا 0.2 است یا پس از 0.2 است.

حالت اول : $x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)$

$$\rightarrow x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{\omega_n t}{2}\right)\right) = \frac{2P_0}{m\omega_n^2}\sin^2\frac{\omega_n t}{2}$$

$$= \frac{2P_0}{k}\sin^2\frac{\omega_n t}{2}$$

P_0/k یعنی تغییر مکان استاتیکی

$X_{Max} = \frac{2P_0}{k}$ به شرط $\rightarrow \sin^2\frac{\omega_n t}{2} = 1 \rightarrow \frac{\omega_n t}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_n}$

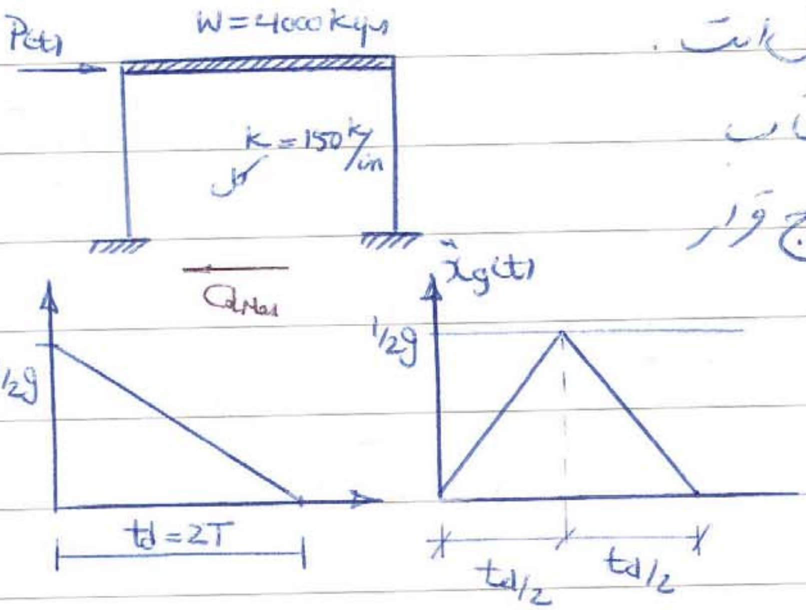
حمید کاظم

درصورتیکه زمان دوام نیرو یعنی $T > \frac{\pi}{\omega_n}$ باشد مقدار ماکزیمم تغییرمکان برابر است با

$$X_{Max} = \frac{2P_0}{K}$$

تمرین ۱۴: قاب شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه این قاب تحت اثر شتاب زمین بصورت دیاگرام های پیوست قرار گیرد، مطلوبست تعیین تغییرمکان ورش پایه Max.

td دو برابر پریود سازه می باشد



ادامه حل:

تعیین ماکزیمم تغییرمکان:

الف)
$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) \qquad (0 \le t \le T)$$
$$x(t) = \frac{2P_0}{K}\sin^2\frac{\omega_n t}{2}$$
$$X_{Max} = \frac{2P_0}{K} \xrightarrow{if} \sin^2\frac{\omega_n t}{2} = 1 \rightarrow \frac{\omega_n t}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_n}$$

ب) $(t > T)$

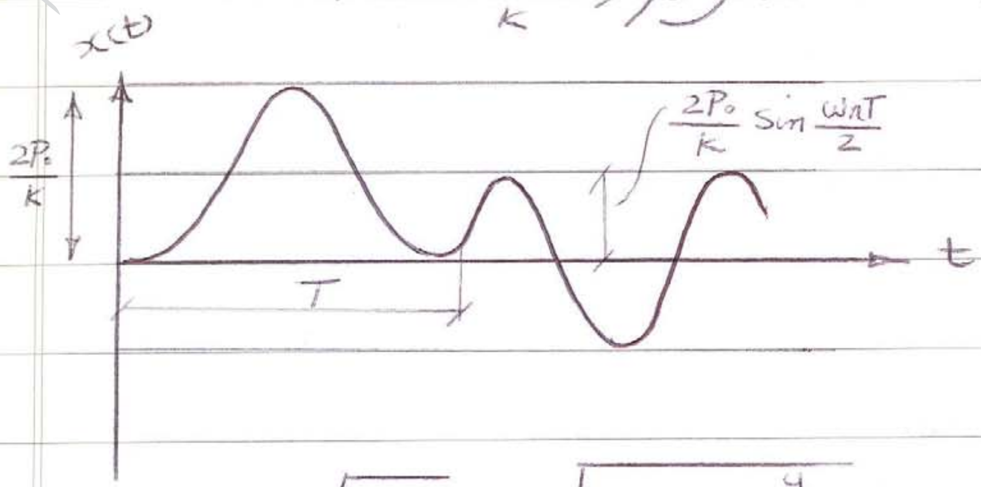
ارتعاش آزاد

$$P_0 = -\frac{3}{4}W$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} x(T) = X_0 \\ \dot{x}(T) = \dot{X}_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = X_{Max}\cos(\omega_n(t-T))$$

$$X_{Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$$
$$X_{Max} = \frac{P_0}{K}\left[(1-(\cos\omega_n T)\times 2 + \cos^2\omega_n T) + \sin^2\omega_n T\right]^{1/2}$$
$$X_{Max} = \frac{P_0}{K}\left[2(1-\cos\omega_n T)\right]^{1/2} \Rightarrow X_{Max} = \frac{2P_0}{K}\sin\frac{\omega_n T}{2}$$

مقدار مطلق Max اگر $t > T$ شد مقدار ثابت $\frac{2P_0}{k}$ است.



$$\frac{\pi}{\omega_n} = \pi\sqrt{\frac{W}{kg}} = \pi\sqrt{\frac{9.66\times10^4}{2.7\times10^6\times32.2}} = 0.104 < T = 0.2\ \text{sec}$$

$$\Rightarrow X_{Max} = \frac{2P_0}{k} = \frac{3}{2}\frac{W}{k} = \frac{3}{2}\frac{9.66\times10^4}{2.7\times10^6} = 0.054\ ft = 0.64\ in$$

$$Q_{Max} = kX_{Max} = 2.7\times10^6 \times \frac{3\times9.66\times10^4}{2\times2.7\times10^6} = 145{,}800\ lb$$

* آیا Max تغییر مکان همیشه در هنگام بارگذاری است؟ در زمان زلزله اتفاق می‌افتد؟ در حالت ضربه همیشه Max در هنگام بارگذاری است. معمولاً وقتی زلزله اتفاق می‌افتد چون زمان وقوع زلزله زیاد است بنابراین Max تغییر مکان در هنگام بارگذاری صورت می‌گیرد (حین وقوع زلزله)

پس Max تغییر مکان به نوع بارگذاری و زمان بارگذاری بستگی دارد.

این کارهایی که کردیم تحلیل بار ضربه‌ای بود که اطلاعاتش برای مهندس طراح آنقدر سودمند نیست. پس احتیاج به تحلیل بهتری داریم که تحلیل طیفی (آنالیز طیفی) گویند

حمید کاظم

«فصل سوم»

تحلیل طیفی سازه‌ها در مقابل حرکت زمین

(Earthquake Response Spectra)

با توجه به انتگرال دوهامل واکنش در هر زمان t در سیستم یک درجه آزادی تحت اثر حرکت زمین به راحتی قابل محاسبه می‌باشد. ولی بدست آوردن تاریخچه نیرو و تغییر مکان در هر زمان کار ضروری نخواهد بود.

در طراحی از لحاظ عملی بدست آوردن مقدار Max نیرو و تغییر مکان با اهمیت تلقی می‌شود. با استفاده از روابط قبل واضح است که زمانی نیرو و تغییر مکان Max می‌باشد که تابع $V(t)$ (شبه سرعت) مقدار خود Max را دارا باشد.

$$V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

سرعت طیفی

$$S_V = V_{Max} = \left[\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau\right]_{Max} \qquad (2)$$

$$(S_V = V_{Max}) \qquad (3)$$

نکته مهم: این مقدار Max بنام سرعت طیفی و یا شبه سرعت طیفی معروف است و با S_V نشان داده می‌شود.

(Spectral Velocity)

همانطوریکه از روابط قبل مشخص گردید در سیستم‌های جرم متمرکز، تغییر مکان سازه برابر است با تابع شبه سرعت تقسیم بر فرکانس سازه.

$$x(t) = \frac{V(t)}{\omega} \quad (4)$$

با استفاده از این تعریف تغییر مکان طیفی (S_d) عبارتست از:

تغییر مکان طیفی

$$S_d = \frac{S_V}{\omega} \qquad (5)$$

بنابراین تغییر مکان طیفی برابر است با حاصل تقسیم سرعت طیفی بر فرکانس طبیعی سازه.

به همین ترتیب نیروی Max با استفاده از روابط پیشین شکلی به جرم و مجذور فرکانس طبیعی سیستم و سرعت طیفی دارد.

کمیت حاصلضرب فرکانس طبیعی و سرعت طیفی را شتاب طیفی می نامند و با S_a نشان می دهند.

$$Q(t) = m\omega V(t) \qquad (6)$$

$$Q_{Max} = m\omega S_v \qquad (7)$$

شتاب طیفی $S_a = \omega S_v \qquad (8)$

$$Q_{Max} = m S_a$$

تعیین مقادیر پاسخ های طیفی:

الف) سیستم های با جرم متمرکز:

$x_{Max} = S_d$ تغییر مکان طیفی

برش پایه در زمان های مختلف $Q(t) = m\omega V(t)$

$$Q_{Max} = m\omega S_v \Rightarrow Q_{Max} = m S_a$$

ب) سیستم های با جرم گسترده:

$$V(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t) = \psi(x)\cdot \frac{\bar{K}}{M^*\omega} V(t)$$

$$V_{Max}(x,t) = \psi(x)\, Y_{Max}(t)$$

$\rightarrow V_{Max}(x,t) = \psi(x)\frac{\bar{K}}{M^*\omega} S_v = \psi(x)\frac{\bar{K}}{M^*} S_d$ تغییر مکان ماکزیمم

$$q(x,t) = \mu(x)\,\psi(x)\frac{\bar{K}}{M^*}\omega V(t)$$

$q_{Max} = \mu(x)\cdot\psi(x)\frac{\bar{K}}{M^*} S_a$ شدت نیروی اینرسی ماکزیمم

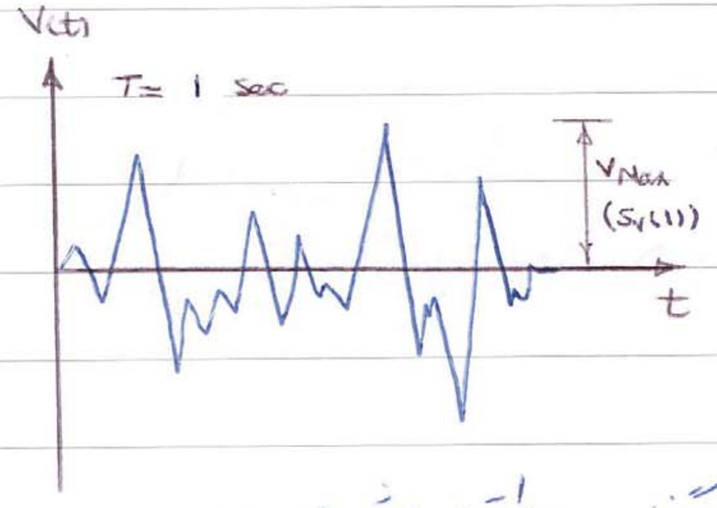
$Q(t) = \frac{\bar{K}^2}{M^*}\omega V(t)$ برش پایه در زمان های مختلف

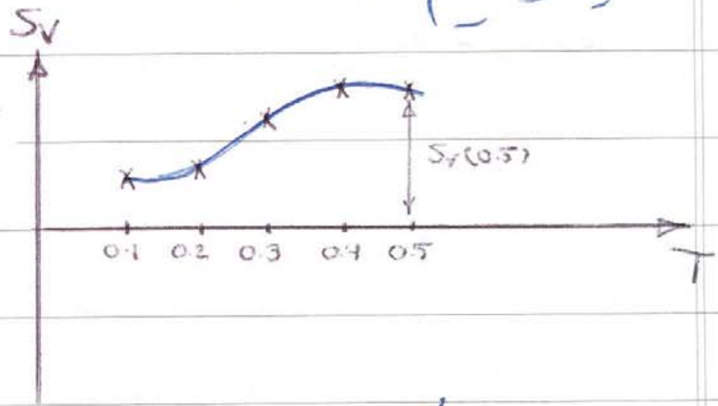
$$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a$$

$$V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau \qquad (a)$$

زلزله ورودی سه شتاب‌نگاشت زلزله

میرایی سیستم $\xi = 2\%$





* 0.1 را در n ضرب کنیم معادل پریود سازه می‌گذارد. n طبقه می‌باشد (حدودی)

($T=2s \rightarrow 0.1n=2 \rightarrow n=20$ طبقه)

با این منحنی بزرگ و متوسط‌گیری می‌آیند و حرکت سازه را به صورت هموار می‌کنند تا اثرات تشدید موضعی ایجاد شده را کم کنند و آن را برای تمام سازه‌ها قابل استفاده کنند.

طیف‌های زلزله به صورت زیر هستند.

۱) طیف تغییرمکان (S_d) ۲) طیف سرعت (S_v) ۳) طیف شتاب (S_a)

از رابطه (a) می‌توان دریافت که طیف سرعت بستگی به سه پارامتر دارد:

۱) طبیعت شتاب زمین $(\ddot{x}_g(t))$

۲) نسبت استهلاک بحرانی (ξ) طیف سرعت به چه پارامترهایی بستگی دارد؟

۳) فرکانس طبیعی سازه

بنابراین برای هر شتاب زلزله ورودی و برای هر نسبت استهلاک بحرانی مشخص

می‌توان طیف سرعت را به صورت تابعی از پریود ($T = \frac{2\pi}{\omega_n}$) بدست آورد و برای نسبت ضریب استهلاک بحرانی یک سری از منحنی‌ها قابل رسم می‌باشند. به عبارت دیگر، برای ترکیب یک پریود و نسبت استهلاک بحرانی مشخص برای شتاب ورودی خاص یک نقطه از منحنی بدست می‌آید که با به هم پیوستن این نقاط توسط خطوط مستقیم منحنی‌های مورد نظر ایجاد می‌گردد. این منحنی‌ها را در این فصل مخصوص طیف‌های سرعت می‌نامند.

(نقاط Max و Min در طیف سرعت به علت تشدیدهای محلی حرکت زمین بوجود آمده است. این نوع ناهمواری‌ها اولاً بایست توسط شتابنگاشت‌های ایستگاه‌های مختلف هموار شده و ثانیاً میانگین آن‌ها بدست آید و سپس به عنوان طیف زلزله مورد بهره‌برداری قرار گیرد.)

* برای بدست آوردن طیف شتاب زلزله کافیست حاصلضرب این طیف را در فرکانس طبیعی حساب کرده و نتیجه را رسم نماییم. و برای بدست آوردن طیف تغییر مکان حاصل تقسیم طیف سرعت را بر فرکانس طبیعی محاسبه می‌نماییم.

$S_a = \omega S_v$ $\qquad$ $S_d = \frac{S_v}{\omega}$

طیف‌های پاسخ، طیف‌های ویژه هستند چون طیف‌های زلزله‌های رخ داده هستند. ما نیاز به طیف‌های طراحی برای طراحی سازه‌ها داریم.

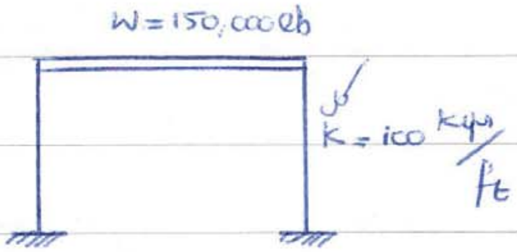
ایران به دو ایالت تقسیم می‌شود:

۱) مرکزی، شرقی ← زاگرس

۲) شمالی ← البرز (دوره بازگشت بالا و شدت زیاد)

نوع زلزله به وضعیت تکتونیکی زمین ساختی منطقه بستگی دارد. عامل بعدی

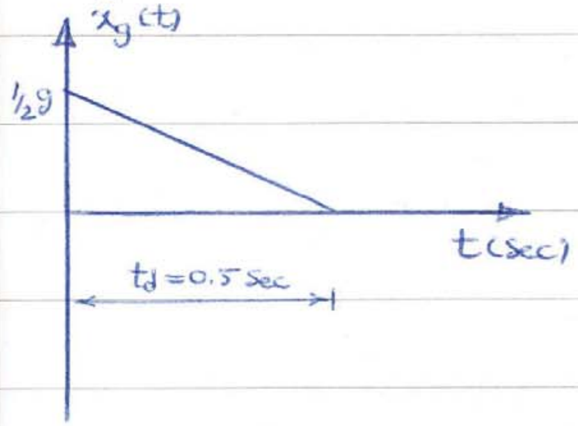
حامل زلزله تشکیلی (خاک) است.

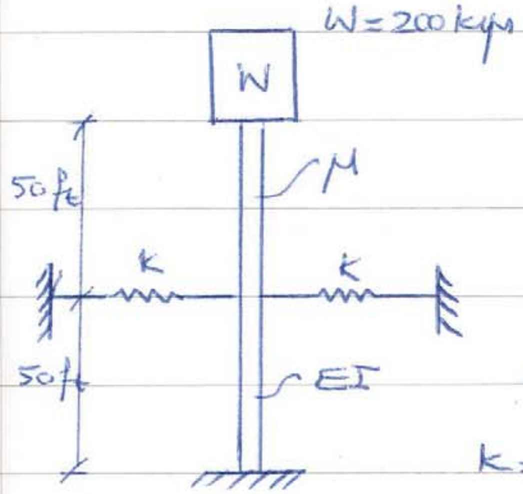


تمرین ۱۵: قاب یک طبقه شکل مفروض است. در صورتیکه این قاب تحت اثر زلزله‌ای با منحنی شتاب مقابل قرار گیرد، مطلوبست تعیین

۱) تابع تغییرمکان ۲) رسم آن

۳) تعیین مقدار Max تغییرمکان و Max برش پایه.





تمرین ۱۶: برج مخابرات شهر بصورت شکل مقابل مدل شده است. در صورتیکه این سازه تحت اثر شتاب ثابت بصورت زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین

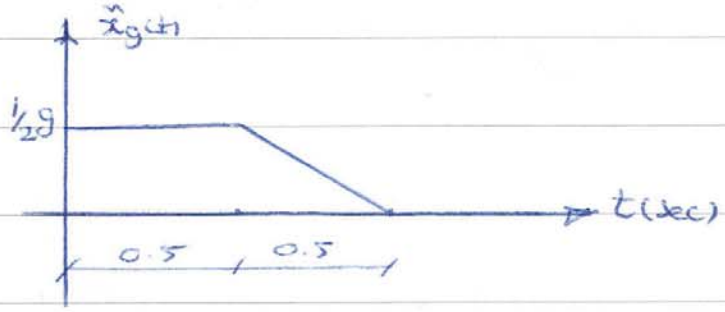
$\mu L g = 2W$ ۱) تابع تغییرمکان

$EI = 2.1 \times 10^8\ lb.in^2$ ۲) مقدار Max تغییرمکان

$k = 50\ kip/ft$ ۳) شدت نیروی برشی

۴) Max برش پایه.

استهلاک را در نظر نگیرید.



طیف‌های طرح (Design Spectra):

منحنی‌های ثبت شده شتاب زمین هنگام وقوع زلزله‌های مختلف و طیف‌هایی که از آن‌ها بدست می‌آید اساس یک روش منطقی را برای طرح لرزه‌ای سازه‌ها فراهم می‌کند. با وجود اینکه طیف‌های مختلف با یکدیگر اختلاف دارند ولی در هر منطقه می‌توان بعضی خصوصیات مشترک را در آن‌ها یافت.

با استفاده از خصوصیات مشترک و هموار کردن منحنی‌ها می‌توان برای هر منطقه‌ای طیف‌های طرح را بدست آورد که با کاربرد آن می‌توان سازه‌های مقاوم در مقابل زلزله را طراحی کرد.

این منحنی‌ها اساس تحلیل لرزه‌ای سازه‌ها به روش طیفی را تشکیل می‌دهند.

هاوزنر بر اساس منحنی‌های شتاب ثبت شده در چهار زلزله بزرگ در امریکا (ال سنترو 1940، تفت 1953، المپیا 1949، واشنگتن 1965) منحنی‌های ایده‌آل و هموار شده‌ای را برای طیف‌های تغییر مکان، سرعت و شتاب رسم نموده است. شکل منحنی‌های مذکور با حرکات زمین در محل‌ها و مناطق دیگر جهان ممکن است سازگاری نداشته باشد به همین جهت برای هر منطقه باید طیف طرح آن را بدست آورد.

این منحنی‌ها برای مقدار حداکثر شتاب Max زمین (شتاب در $T=0$) هم‌اندازه و مقیاس می‌شوند.

(فرض شده صفت زلزله طرح در ایران به گونه‌ای است که شتاب Max زمین $0.35g$ است)

در $T=0$ یعنی خود زمین.

به جای رسم سه طیف متفاوت با استفاده از روابط از یک نمودار طیف به نام طیف لگاریتمی سه‌جانبه بدست می‌آید.

به علت اینکه روابط خاصی بین S_d، S_v و S_a وجود دارد، منحنی‌های مربوطه را

حمید کاظم

می توان بر روی یک نمودار لگاریتمی سه جانبه رسم نمود. از روابط قبل داریم.

$$\begin{cases} S_v = \omega S_d = S_d \dfrac{2\pi}{T} \\ \\ S_v = \dfrac{S_a}{\omega} = S_a \dfrac{T}{2\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \log S_v = \log S_d + \log 2\pi - \log T \\ \\ \log S_v = \log S_a + \log T - \log 2\pi \end{array}$$

رابطه (I) نشان می دهد که به ازای یک مقدار ثابت S_d ، تغییرات لگاریتم S_v برحسب لگاریتم T برحسب $y=-x+c_1$ می باشد.

رابطه (II) نشان می دهد به ازای مقدار ثابت S_a ، تغییرات $\log S_v$ برحسب $\log T$ به صورت $y=x+c_2$ می باشد.

شکل (A) منحنی های ترکیب شده طیف طرح به صورت تابعی از پریود سازه را نشان می دهد.

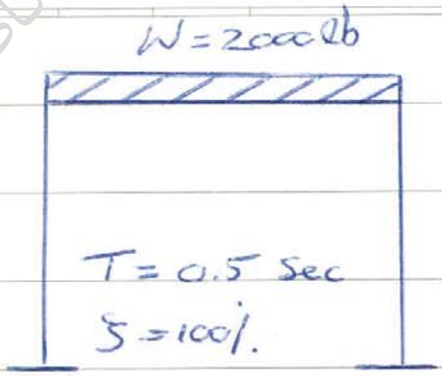
این منحنی ها طوری بدست آمده می شود برای Max شتاب زمین PGA=0.2g (Pick Ground Acceleration) (شتاب در $T=0$) میزان شده است.

$$\log S_v = \log S_d + \log 2\pi - \log T \Rightarrow y=-x+c_1$$
$$\log S_v = \log S_d - \log 2\pi + \log T \Rightarrow y=x+c_2$$

Damping در نمودار به صورت درصد است.

برای شتاب 0.35g باید مقادیر S_v و S_d را در $\frac{0.35}{0.2}$ ضرب کنیم.

(حالت جرم متمرکز)



مثال: قاب یک طبقه مفروض است. درصورتیکه زمان تناوب این قاب 0.5 sec و نسبت استهلاک بحرانی 10% در نظر گرفته شده باشد و این قاب در منطقه ای باشد که بتوان برای مقادیر آن از شکل (A) استفاده کرد، مطلوبست تعیین Max تغییر مکان و هم چنین Max برش پایه.

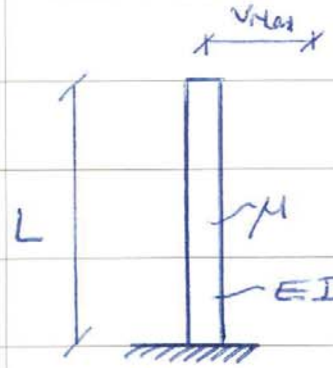
$S_v = 6 \ in/sec \qquad S_a = 0.2g \qquad S_d = 0.48 \ in$

این مقادیر با استفاده از نمودار شکل A بدست آمد.

$$x_{Max} = S_d = 0.48 \ in$$

$$Q_{Max} = m \cdot S_a = \frac{2000}{g} \times 0.2g = 400 \ lb$$

(حالت جرم گسترده)



مثال: ستون طره ای در شکل زیر مفروض است. درصورتیکه جرم در واحد طول μ بصورت یکنواخت و ثابت فرض شود و هم چنین صلبیت خمشی EI ثابت باشد و از تابع شکل $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ بتوان استفاده کرد. مطلوبست تعیین Max تغییر مکان. Max نیروی برشی ستون و هم چنین Max برش پایه. درصورتیکه بتوان از شکل A برای تعیین مقادیر طیفی استفاده کرد. (ضمنا $T = 0.5s$ ، $\xi = 10\%$ است)

$T = 0.5s, \ \xi = 10\% \longrightarrow S_v = 6 \ in/sec \qquad S_a = 0.2g \qquad S_d = 0.48 \ in$

$$V_{Max}(x) = \frac{\bar{k}}{m^*} S_d \, \psi(x)$$

$$m^* = \int_0^L \mu(x)\,(\psi(x))^2\,dx = \mu \int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228\,\mu L$$

$$\bar{L} = \int_0^L \mu(x)\cdot\psi(x)\,dx = \int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx\cdot\mu = 0.364\,\mu L$$

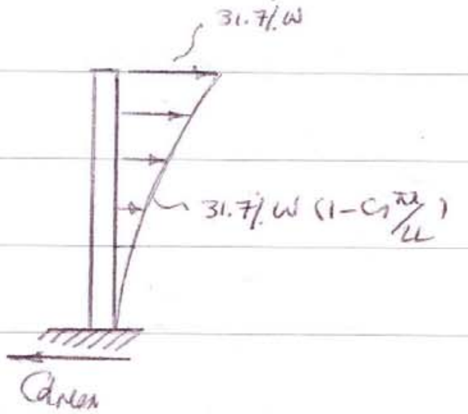
$$V_{Max}(x) = \frac{0.364\,\mu L}{0.228\,\mu L}\,(0.48)\,\psi(x) \rightarrow V_{Max}(x) = 0.77\,\psi(x) = 0.77\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\Rightarrow V_{Max} = 0.77\ in$$

$$q_{Max}(x) = \frac{\bar{K}}{m^*}\,S_a\,\mu(x)\,\psi(x) = \frac{0.364\,\mu L}{0.228\,\mu L}\,(0.2g)\,\mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$\mu = \frac{W}{g}$ w وزن واحد طول $W = wL$ کل وزن ستون

$$\Rightarrow q_{Max} = \frac{0.364}{0.228}\,0.2g \times \frac{w}{g}\,\psi(x) = 31.7\%\ w\,\psi(x)$$

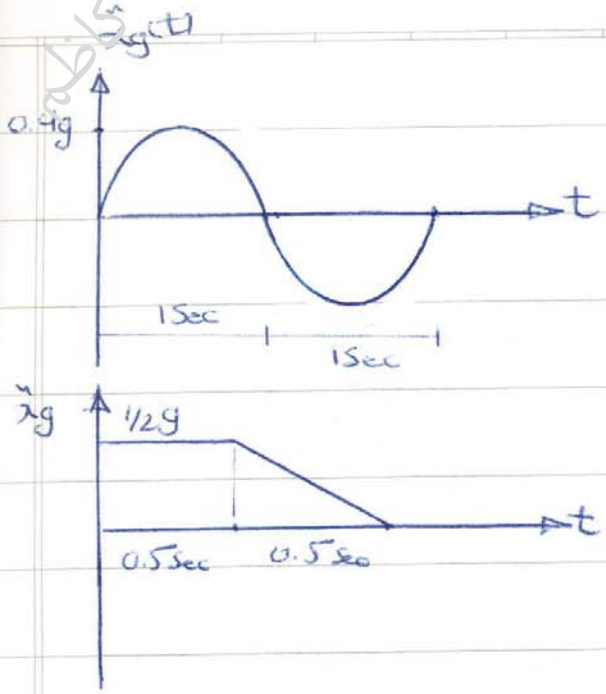


$$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{m^*}\,S_a$$

$$\Rightarrow Q_{Max} = \frac{0.364^2\,\mu L}{0.228}\,(0.2g)$$

$$Q_{Max} = \frac{0.364^2}{0.228}\,\frac{W}{g} \times 0.2g = 11.5\%\ W$$

تمرین ۱۷: درصورتیکه شتاب ثبت شده زمین در زلزله کنتف مطابق اشکال الف و ب باشد، مطلوبست تعیین طیف پاسخ الاستیک دوره‌ای برای تغییر مکان، سرعت و شتاب.

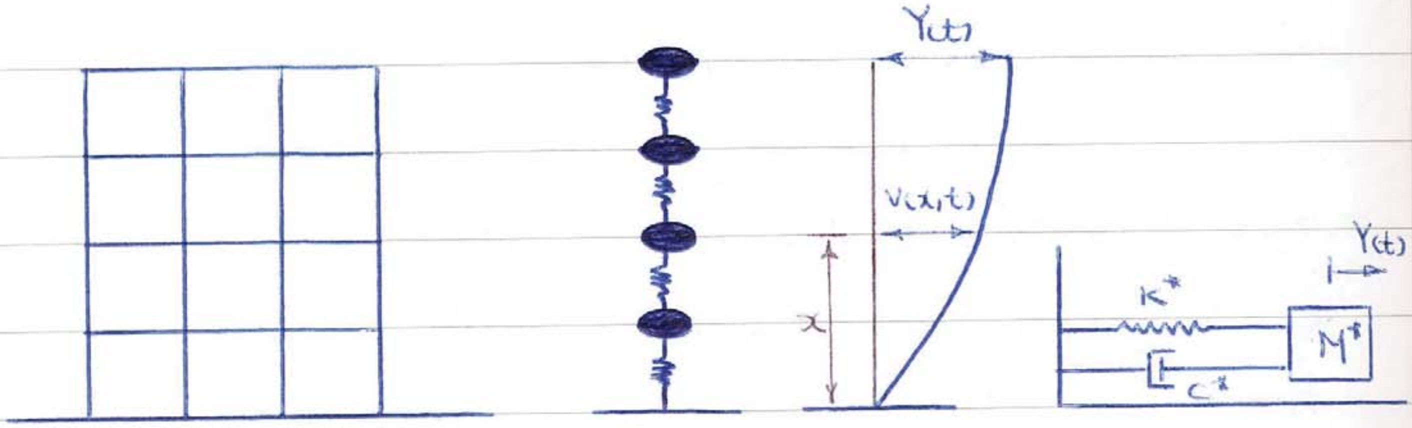


طیف های سرعت را برای ۳ میرایی $\xi_1 = 0$

$\xi_2 = 5\%$ ، $\xi_3 = 10\%$ بدست آورید

(دوره رسم تا 4s برود)

پاسخ سازه های چند طبقه تحت اثر حرکت زمین :



قاب واقعی

مدل جرم متمرکز

سختی جرم متمرکز اول همان سختی طبقه اول است .

$$- V(x,t) = Y(t) \cdot \psi(x) \qquad (1)$$

$$- \dot{V}(x,t) = \psi(x) \cdot \dot{Y}(t) \qquad (2)$$

$$- \Delta V(x,t) = \Delta\psi(x) \cdot Y(t) \qquad (3)$$ ← تغییر مکان نسبی در طبقه

$$\Rightarrow \Delta V(x,t) = \Delta\psi(x_i)\, Y(t) - \Delta\psi(x_j)\, Y(t) \qquad (4)$$

$$- \delta V(x,t) = \psi(x)\, \delta Y(t) \qquad (6)$$ تغییر مکان مجازی

برای بدست آوردن معادلات حرکت کافیست معادله حرکت سیستم تک درجه آزادی را

بصورت زیر نوشت.

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (5)$$

برای حالت کلی و ساختمان چند طبقه این معادلات را می توان با استفاده از روش کار مجازی محاسبه نمود. در این حالت تغییرمکان مجازی باید هم ساز با شرایط حدی سیستم باشد. با به کار بردن تغییرمکان مجازی، معادله (5) به معادله زیر تبدیل می شود.

$$\delta W = f_I \, \delta v(x,t) + f_D \cdot \delta \Delta v + f_S \cdot \delta \Delta v - p(t)\, \delta v(x,t) = 0 \quad (7)$$

تغییرمکان نسبی مجازی طبقه $\longleftarrow \delta \Delta v(x,t)$

$$\delta \Delta v(x,t) = \Delta \psi(x) \cdot \delta Y(t) \quad (8)$$

نیروهای اینرسی، استهلاک و فنر برابر خواهند بود با:

$$f_I = m \ddot{v}(x,t) = m\, \psi(x) \cdot \ddot{Y}(t) \quad (9)$$

$$f_d = c \cdot \Delta \dot{v}(x,t) = c \cdot \Delta \psi(x) \cdot \dot{Y}(t) \quad (10)$$

$$f_s = k \cdot \Delta v(x,t) = k \Delta \psi(x) \cdot Y(t) \quad (11)$$

پس از جانشین کردن روابط (3)، (6)، (8)، (9)، (10)، (11) در رابطه (7) و نتیجه را بصورت معادله حرکت تعمیم یافته نوشتن داریم:

$$M^* \ddot{Y} + C^* \dot{Y} + K Y = P^*_{(t)}$$

در این روابط مقادیر M^*، C^*، K^* و P^* به عنوان پارامترهای تعمیم یافته می باشند که بصورت زیر تعریف می شوند

$M^* = \sum m_i \psi_i^2$ جرم معادل

$C^* = \sum c_i \Delta\psi_i^2$ ضریب استهلاک معادل

$K^* = \sum k_i \Delta\psi_i^2$ سختی معادل

حمید کاظم

$\Sigma p^* = \Sigma p_i \psi_i$ نیروی معادل

این در حالت اعمال p_i بود. در حالتی که سیستم تحت اثر حرکت زمین قرار گیرد نیروی معادل موثر P^*_{eff} به صورت زیر است.

$$P_{eff} = \bar{K}\,\ddot{x}_g(t) \quad (17)$$

$$\bar{K} = \Sigma m_i \psi_i \quad (18)$$ ضریب تحریک

معمولاً ضریب استهلاک معادل برحسب نسبت استهلاک بحرانی بیان می گردد که در این حالت:

$$C^* = \Sigma C_i \Delta\psi_i^2 = 2\xi m^* \omega$$

که در این رابطه ω فرکانس زاویه ای سیستم تعمیم یافته می باشد که مقدار آن برابر است با:

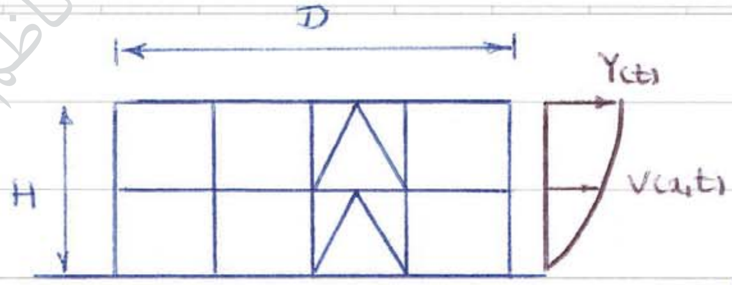
$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (20)$$

همانطور که مشاهده می شود، این فرکانس به مقادیر سختی معادل و جرم معادل بستگی دارد که هر کدام از آنها بستگی به تابع شکل تعیین شده (ψ) خواهند داشت بنابراین هر قدر تابع شکل به تابع واقعی نزدیکتر باشد، فرکانس بدست آمده دقیق تر خواهد بود. به عبارت دیگر در حالتی این وضعیت بوجود خواهد آمد که مقدار فرکانس کوچکتر شود.

چرا فرکانس واقعی سازه، فرکانس کوچکتر است؟

(فرکانس کوچکتر به علت است که سیستم می خواهد حداقل انرژی را مصرف کند. پس انواع قیدهای اضافی ایجاد نمی شود. سازه ها با زیر قیدهای اضافی ایجاد می کنند.)

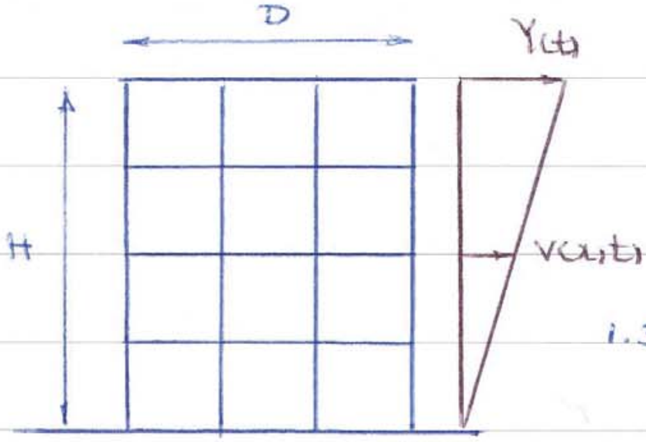
توابع شکلی پیشنهادی برای ساختمان ها با طبقات مختلف:



۱) ساختمان‌های کوتاه مرتبه:

(LOW H/D)

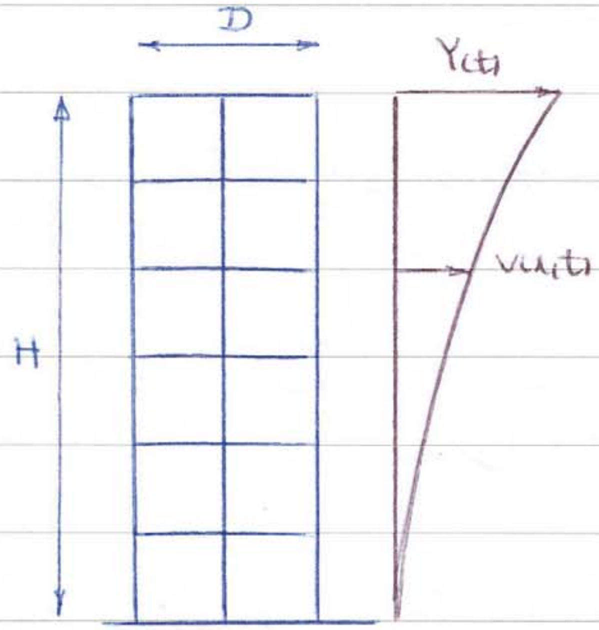
$$\frac{H}{D} < 1.5 \rightarrow \psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2H}$$



۲) ساختمان‌های میان مرتبه:

(MID H/D)

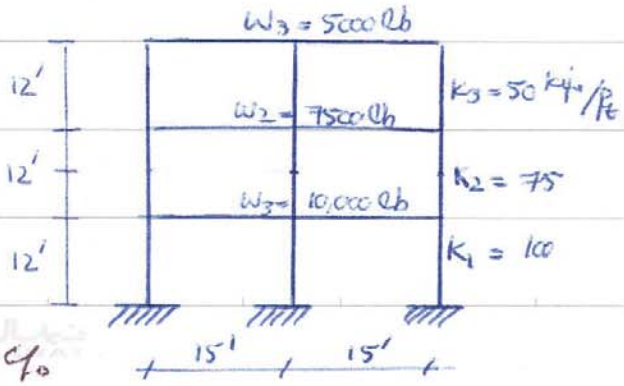
$$1.3 < \frac{H}{D} < 3 \rightarrow \psi(x) = \frac{x}{H}$$



۳) ساختمان‌های بلند مرتبه:

(HIGH)

$$\frac{H}{D} > 3 \Rightarrow \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2H}$$

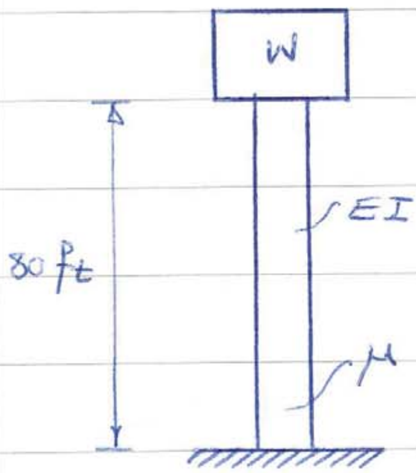


تمرین ۱۸: قاب سه طبقه شکل مفروض است. مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل و فرکانس پایه قاب در صورتیکه قاب دارای نسبت استهلاک بحرانی ($\xi = 2\%$) باشد و در

منطقه‌ای است که شتاب ماکزیمم زمین $0.35g$ می‌باشد قرار داشته باشد و برای طراحی آن در مقابل زلزله بتوان از نمودارهای شکل "A" استفاده کرد مطلوبست تعیین تغییرمکان Max و هم‌چنین برش پایه Max .

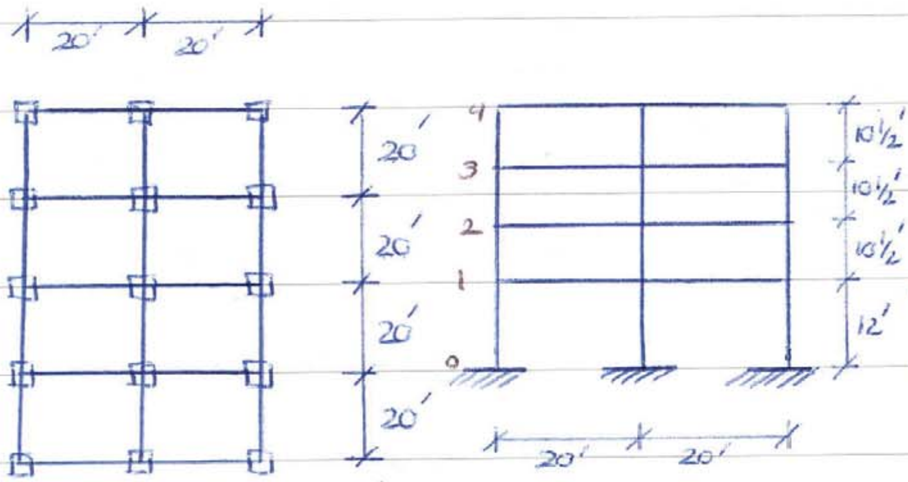
تمرین ۱۹: برج مخابرات شهری به صورت شکل زیر مدل شده است. در صورتیکه $W=100\ kips$ وزن پایه برابر $150\ kips$ و صلبیت خمشی $EI = 9.1\times10^{8}\ lb.in^2$ باشد مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل و فرکانس پایه برج. هم‌چنین تعیین کنید مقدار Max تغییرمکان، شدت نیروی برشی و برش پایه Max در صورتیکه این برج در منطقه‌ای قرار دارد که شتاب Max آن $0.3g$ باشد و بتوان از نمودارهای شکل A برای طراحی آن استفاده کرد.

$\mu Lg = 150\ kips$



$\xi = 7\%$

مثال: ساختمان ۴ طبقه بتنی شکل مفروض است. در صورتیکه ابعاد ستون‌های بتنی $14\ in \times 14\ in$ و مدول الاستیسیته بتن $3.6\times10^{6}\ psi$ بوده و مجموع بار مرده در بام $390\ kips$ در طبقه دوم و سوم $445\ kips$ و طبقه اول $448\ kips$ و شدت بار زنده در بام $30\ lb/ft^2$ و در طبقات $80\ lb/ft^2$ در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل و هم‌چنین پریود



حمید کاظم

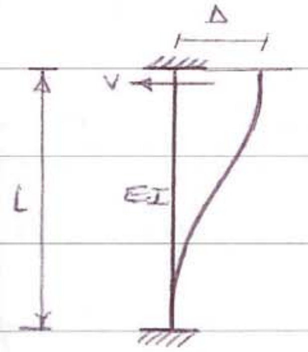
a) $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$ (الف

عرض ساختمان برای حالات

b) $\psi(x) = x/L$ (ب

(مشارکت بارزنده در طبقات 35٪ و در بام 85٪ است)

ابتدا به سختی مربوط به ستون می‌پردازیم.



$$V = \frac{12EI}{L^3}\Delta \rightarrow k_i = \frac{V}{\Delta} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$I = \frac{1}{12}\times 14\times 14^3 = 3201\ in^4$$

$$k_{story\text{ طبقه}} = \sum_{i=1}^{3} k_i = 3k_i$$

$$k_{4\text{ طبقه}} = k_3 = k_2 \neq k_1$$

* محاسبات مربوط به یک قاب می‌باشد *

$$k_2 = k_3 = k_4 = 3\times(3.6\times10^3\times3201)\frac{1}{126^3} = 209\ kip/in$$

$$k_1 = 3\times(3.6\times10^3\times3201)\frac{1}{144^3} = 140\ kip/in$$

برای $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

تراز	K	$M_{\text{جرم}}$ ($\frac{kip\cdot sec^2}{in}$)	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
4		0.252	1		0.252	
	209			0.071		1.054
3		0.288	0.929		0.249	
	209			0.203		8.613
2		0.288	0.726		0.152	
	209			0.306		19.570
1		0.290	0.420		0.51	
	140			0.420		24.696
0						
Σ					$M^* = 0.704$	$K^* = 53.933$

M جرم تراز طبقه است و K بین دو طبقه است.

5 قاب بار هر کدام یکی را می‌گیرد.

برای بار زنده هم درصدی در نظر می‌گیریم. علت هم احتمال کم حضور بار زنده در تراز است.

بار زنده نسبت به بتن حرکت می‌کند. بنابراین بار زنده به طرف منتقل می‌شود. بنابراین درست

نیست که مقدار زیادی از بار زنده را به وزن ببریم .

علت زیاد بودن درصد بار زنده بام برف است .

حالت الف

$$\omega_a = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{53.933}{0.704}} = 8.75 \ rad/sec$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 0.72$$

ب برای $\psi_{(x)} = x/L$

تراز	K	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
4		0.252	1		0.252	
3	209	0.288	0.759	0.241	0.166	12.139
2	209	0.288	0.517	0.242	0.077	12.24
1	209	0.290	0.276	0.241	0.022	12.139
0	140			0.276		10.665
Σ					$M^* = 0.517$	$K^* = 47.183$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{47.183}{0.517}} = 9.55 \ rad/s$$

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b} = 0.66$$

با اینکه این بار $\psi_{(x)} = x/L$ می‌گیریم اما $\psi_{(x)} = \sin\frac{\pi x}{2L}$ دقیق‌تر است .

نظر به اینکه $\omega_a < \omega_b$ می‌باشد بنابراین $\psi_{a(x)} = \sin\frac{\pi x}{2L}$ تقریب دقیق‌تری نسبت به حالت $\psi_{b(x)} = x/L$ می‌باشد .

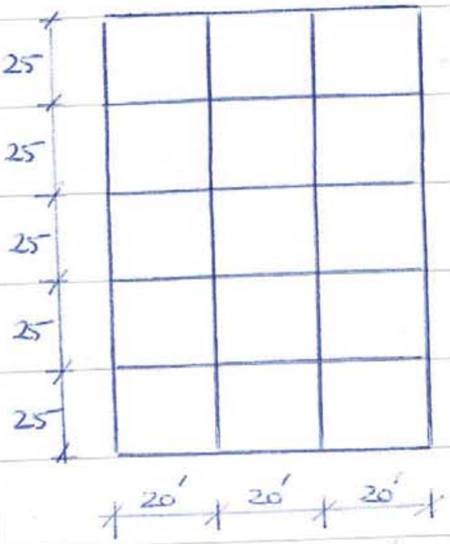
حمید کاظم

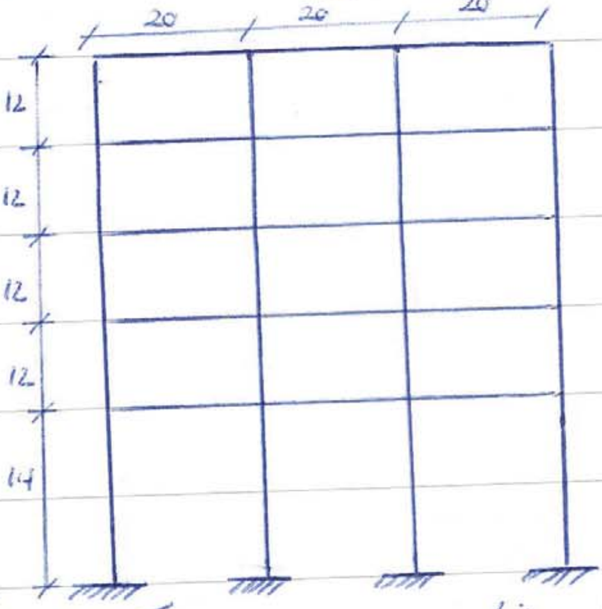
تمرین ۲۰: ساختمان ۵ طبقه‌ای شکل زیر مفروض است. در صورتیکه ابعاد مقطع کلیه ستون‌ها یکسان و برابر $16in \times 16in$ باشد، مدول الاستیسیته بتن به صورت $E = 3.6 \times 10^6 psi$ و شدت بار مرده در طبقات $90 \, lb/ft^2$ و در بام $60 \, lb/ft^2$ و حجم جمعیت شدت بار زنده در طبقات $70 \, lb/ft^2$ و بام $30 \, lb/ft^2$ در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل برای ۳ حالت:

الف) $$\psi_a(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$$

ب) $$\psi_b(x) = x/L$$

ج) $$\psi_c(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$$

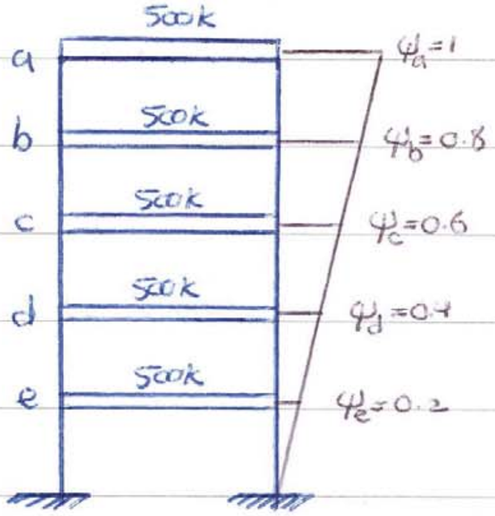




ضریب بار زنده بام 0.65

ضریب بار زنده طبقات 0.35

مثال: ساختمان ۵ طبقه شکل مفروض است. با فرض این مکانیک انگار ساختمان که فرض می‌شود کلیه جرم که حداکثر طبقات به صورت متمرکز در نظر گرفته شود. در صورتیکه فرض شود تابع شکل در این حالت x/L باشد جرم موثر و حجم جمعیت ضریب تحریک زلزله را محاسبه نمایید. اگر فرض شود پریود این سازه $T=0.5s$ و $\xi = 10\%$ باشد و بتوان از نمودار شکل A برای طراحی این ساختمان معادل زلزله استفاده کرد، مطلوبست تعیین Max تغییر مکان، M نیروی برشی در پایه ساختمان (برش پایه) و حجم جمعیت



نیروی برشی (نیروی وارده در تراز هر یک از طبقات).

$$M^* = \sum m_i \varphi_i^2$$

$$= \frac{500}{g}\left(1^2 + 0.8^2 + 0.6^2 + 0.4^2 + 0.2^2\right)$$

$$= \frac{1100}{g} \quad \left(\frac{kip \cdot s^2}{in}\right)$$

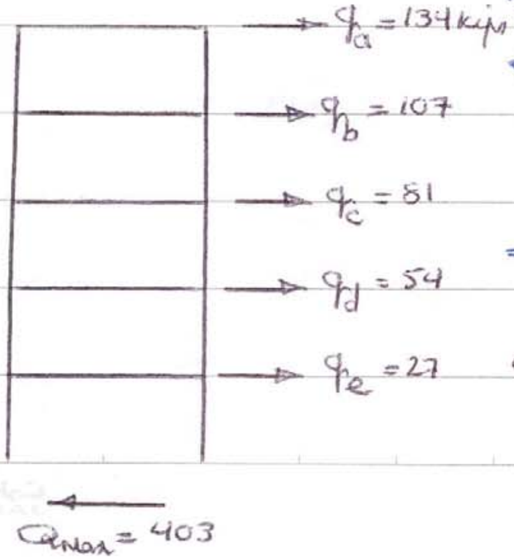
$$\bar{k} = \sum m_i \varphi_i = \frac{500}{g}(1 + 0.8 + 0.6 + 0.4 + 0.2) = \frac{1500}{g}$$

$T = 0.5\ sec$, $\xi = 10\%$ از $A.C \longrightarrow$ $S_d = 0.48\ in$ $\quad S_v = 6\ in/sec$ $\quad S_a = 0.2g$

$$V_{i\,(max)} = \frac{\bar{k}}{M^*} S_d\, \varphi_i = \frac{\frac{1500}{g}}{\frac{1100}{g}}(0.48)\,\varphi_i = 0.65\,\varphi_i$$

$$\longrightarrow V_{i\,max} = 0.65\ in$$

$$Q_{max} = \frac{\bar{k}^2}{M^*} S_a = \frac{(1500)^2}{1100} \times \frac{0.2g}{g} = 403\ kips$$



شدت نیرو　　　　　　　　　　　　نیرو طبقه

$$\begin{cases} q_{max} = \dfrac{\bar{k}}{M^*} S_a\, M_{(x)} \cdot \varphi_{(x)} \longrightarrow q_{i\,max} = \dfrac{\bar{k}}{M^*} S_a \cdot M_i \cdot \varphi_{(x)} \\ Q_{max} = \dfrac{\bar{k}^2}{M^*} S_a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow q_{i\,max} = \frac{Q_{max}}{\bar{k}} M_i \varphi_i$$

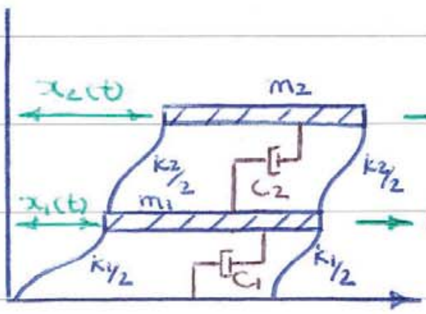
$$q_{i\,max} = \frac{403}{1500/g}\,\frac{500}{g}\,\varphi_i = 134.2\,\varphi_i$$

حمید کاظم

فصل چهارم:

پاسخ دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی:

الف) سیستم دو درجه آزادی:

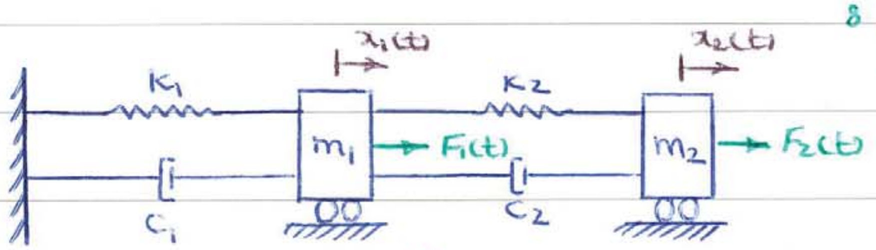


ساختمان دو طبقه شکل مقابل را در نظر بگیرید اگر سقف ها را بی‌نهایت صلب در نظر گرفت و ضریب استهلاک طبقات اول و دوم به ترتیب c_1 و c_2 باشند. معادله حرکت این سیستم دو طبقه مورد نظر می باشد.

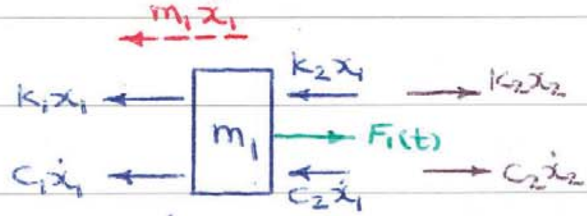
درجات آزادی ما در جهت x است. اما معمولا در حالت عقب و جلو می تواند حرکت کند سیستم دو درجه آزادی دارد. (تعداد طبقات همان تعداد درجات آزادی هستند)

در ابتدا مدل دینامیکی این سیستم دو درجه آزادی را تعیین می کنیم.

تعیین مدل دینامیکی سیستم:



دیاگرام آزاد M_1:

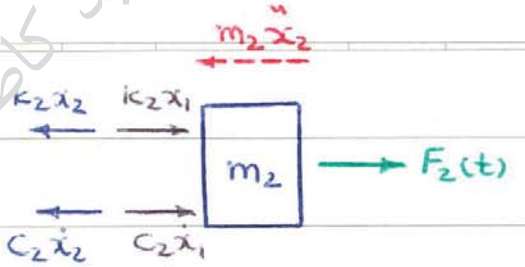


اول فرض کنید جرم M_2 حرکت ندارد. جرم M_1 را به اندازه x_1 حرکت دهید. سپس نیروهای هر عامل را بدست آورید.

در مرحله بعد حرکت M_1 را صفر کرده، M_2 را به اندازه x_2 حرکت دهید.

دیاگرام آزاد M_2:

اول نیروهای خارجی. بعد هر حالت مثل عمل می کنیم. اول M_2 ثابت است M_1 حرکت کند



سپس M_2 حرکت کند و M_1 ثابت باشد

* اینرسی بصورت نیرویی در خلاف جهت حرکت دارد

$$m_1: \sum F_x = 0 \rightarrow -m_1\ddot{x}_1 - c_1\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_1x_1 + k_2x_2 - k_2x_1 + F_1(t) = 0 \quad (1)$$

$$m_2: \sum F_x = 0 \rightarrow -m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + k_2x_1 - k_2x_2 + F_2(t) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = F_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

سیستم معادلات درجه دوم خطی بدست آمد. دستگاه معادلات فوق یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه دوم خطی می باشد که می توان آن را بصورت ماتریسی به صورت زیر نوشت.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (5)$$

$[m]$: ماتریس جرم $= [M]^T$ $\{x\}$: بردار تغییر مکان

$[C]$: ماتریس استهلاک $= [C]^T$ $\{F\}$: بردار نیرو

$[K]$: ماتریس سختی $= [K]^T$

همانطور که از رابطه ۴ مشهود است ماتریس های $[m]$، $[C]$ و $[K]$ ماتریس های متقارن می باشند.

تمرین ۲۱: در صورتیکه در تمرین حل شده بتوان فرض نمود که برای طراحی سازه می‌توان از دیاگرام‌های شکل A با شتاب Max 0.35g استفاده کرد، مطلوبست نقش Max تغییر مکان، برش پایه Max و نیروهای جانبی در تراز طبقات از سوی زلزله.

- بدون استهلاک (سیستم دو درجه آزادی):

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0 \qquad (6)$$

برای قاب ساختمان دو طبقه داریم:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

فرض: حل دستگاه معادلات فوق دارای جواب زیر است.

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t \qquad (8)$$

پس از جایگزین کردن رابطه (8) در رابطه (7) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2X_1 + (k_1+k_2)X_1 - k_2X_2)\sin\omega t = 0 \\ (-m_2\omega^2X_2 - k_2X_1 + k_2X_2)\sin\omega t = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

اگر $\sin\omega t = 0$ باشد نقش جواب نداریم. پس جمله داخل پرانتز صفر است.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

دستگاه معادلات فوق یک دستگاه معادلات همگن خطی می‌باشد که همواره جواب بدیهی $X_1 = X_2 = 0$ در آن صدق می‌کند. برای داشتن جواب غیر از صفر لازم است دترمینان ضرایب آن برابر صفر باشد.

حمید کاظم

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2 = 0 \qquad (11)$$

برای سادگی در عملیات فرض می‌کنیم $k_1 = k_2 = k \quad , \quad m_1 = m_2 = m$. (12)

پس از جایگزینی (12) در (11) خواهیم داشت :

$$m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0 \qquad (13)$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}\right)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}\right)^{1/2} & (14) \\ \omega_2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}\right)^{1/2} & (15) \end{cases}$$

فرکانس‌های طبیعی

X_1, X_2 که می‌خواهیم نسبت آورم مستقل نیستند

۱) با قرار دادن $\omega = \omega_1$ در رابطه ۱۰ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} X_1 - X_2 = 0 \\ -X_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} X_2 = 0 \end{cases} \qquad (16) \qquad \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 1.62$$

دو رابطه کاملاً یکی هستند

۲) با قرار دادن $\omega = \omega_2$ در رابطه ۱۰ خواهیم داشت :

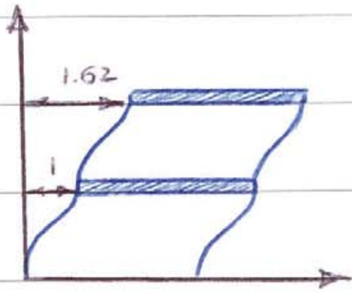
$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} X_1 - X_2 = 0 \\ -X_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} X_2 = 0 \end{cases} \qquad (17) \qquad \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = -0.62$$

خلاصه مباحث :

۱) $\omega_1 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.618\sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی مود اول

$\bar{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.62 \end{Bmatrix}$ $\left(\omega_1 = 0.618\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

بردار مود اول

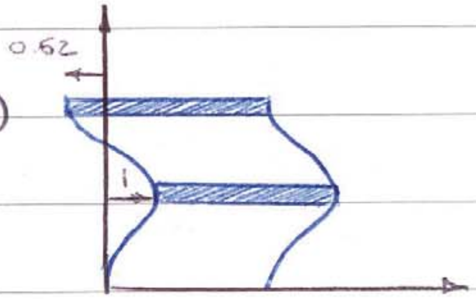


نمایش اولین مد ارتعاشی

۲) $\omega_2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1.618\sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی مود دوم

$\bar{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.62 \end{Bmatrix}$ $\left(\omega_2 = 1.618\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

بردار مد دوم



نمایش دومین مد ارتعاشی

برای فرکانس کوچکتر مود اول داریم. این مود اول مودی است که سازه‌ها به طور طبیعی دارند. طبقه اول نیز دارای تغییر مکان کمتر است و در اکثر مسائل سازه‌ای مود اول مود غالب است

چون سازه‌ها بر اساس اصل Min انرژی خواستار مصرف کمترین انرژی هستند بنابراین به دنبال مود اول هستند. البته بعداً خواهیم دید که ترکیب این مودها تغییر مکان‌های واقعی را می‌دهد.

در ساختمان ۱۰ طبقه ۱۰ فرکانس و ۱۰ مود داریم.

* برای بدست آوردن بردار مود اول و دوم، فرض در هر دو $X_1 = 1$ قرار می‌دهیم تا X_2 بدست آید. (دقت شود اگر X_n را عدد فرض کردی برای بقیه مودها هم X_n را همین عدد بگذارید)

خاصیت تعامد مُدها:

$$X_1^T [m] \{X_2\} = 0$$

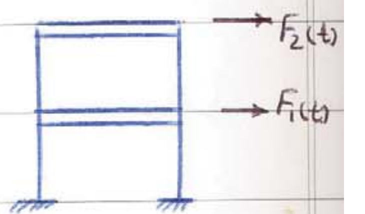
$$\left(1 \quad \frac{1+\sqrt5}{2}\right) \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt5}{2} \end{Bmatrix} = \left(m \quad \frac{1+\sqrt5}{2}m\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt5}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= m + \frac{1+\sqrt5}{2} \cdot \frac{1-\sqrt5}{2} m = m - m = 0$$

$$X_i^T [m] \{X_j\} = 0 \qquad \forall i \neq j$$

ب) محاسبه پاسخ دینامیکی سیستم n درجه آزادی تحت اثر بار دینامیکی (بدون استهلاک):

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \qquad (18)$$



تعریف:

ماتریس مُدی $[A] = \left[X_1 \,|\, X_2 \right]_{2\times2}$ (19)

ماتریس A ماتریسی است که هر ستون یک بردار مُدی است.

دو درجه آزادی $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2} \end{bmatrix}$

(از دو طرف رابطه 18 در حاصلضرب ماتریس $[A]^T[m]$ پیش ضرب می‌نمائیم خواهیم داشت.) ← انتقال

قبل از اینکار تعریف زیر را خواهیم داشت:

بردار تغییر مکان $\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\}$ تغییر متغیر (20)

برای شکل ساختمان دو طبقه $\{x(t)\} = [\bar{X}_1 \mid \bar{X}_2]\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix}$ (21)

$$= \bar{X}_1 Y_1(t) + \bar{X}_2 Y_2(t)$$

اینجا می‌بینیم که تغییر مکان ترکیبی از مدها هستند. حال اگر توابع زمانی را بدست آوریم مسئله حل است. (اینجا هم تبدیل با $\Phi_{(t)} = Y_{(t)}$ داریم)

پس از جایگزین کردن رابطه (20) در (18) خواهیم داشت:

$$[m][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [k][A]\{Y(t)\} = \{F(t)\} \qquad (22)$$

دو طرف رابطه (22) را در ماتریس $[A]^T$ پیش ضرب می‌کنیم

$$[A]^T[m][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [A]^T[k][A]\{Y(t)\} = \{A\}^T\{F(t)\} \qquad (23)$$

$$[A]^T[m][A] = \begin{bmatrix} \bar{X}_1^T \\ \\ \bar{X}_2^T \end{bmatrix}[m]\begin{bmatrix}\bar{X}_1 & \bar{X}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1^T \\ \\ \bar{X}_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix}[m]\bar{X}_1 & [m]\bar{X}_2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{X}_1^T[m]\bar{X}_1 & \cancel{\bar{X}_1^T[m]\bar{X}_2}^{\,0} \\ \\ \cancel{\bar{X}_2^T[m]\bar{X}_1}^{\,0} & \bar{X}_2[m]\bar{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \bar{X}_1^T[m]\bar{X}_1 = M_1 \\ \bar{X}_2^T[m]\bar{X}_2 = M_2 \end{cases}$$

جرم مدی مد اول

جرم مدی مد دوم

$$M_1 = \bar{X}_1^T[m]\bar{X}_1$$

$$M_2 = \bar{X}_2^T[m]\bar{X}_2$$

حمید کاظمی

بردار تغییر مکان $\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\}$ تغییر متغیر (20)

بردار قبل تغییر در صفحه $\{x(t)\} = [\Phi_1 \mid \Phi_2]\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix}$ (21)

$= \Phi_1 Y_1(t) + \Phi_2 Y_2(t)$

اینجا می‌بینیم که تغییر مکان ترکیبی از مدها هست. حال اگر توابع زمانی را بدست آوریم مسئله حل است. (اینجا یک شبیه‌سازی با $V = \psi_{(x)} \cdot Y_{(t)}$ داریم)

پس از جایگذاری کردن رابطه (20) در (18) خواهیم داشت:

$$[m][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [k][A]\{Y(t)\} = \{F(t)\} \qquad (22)$$

دو طرف رابطه (22) را در ماتریس $[A]^T$ پیش ضرب می‌کنیم.

$$[A]^T[m][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [A]^T[k][A]\{Y(t)\} = \{A\}^T\{F(t)\} \qquad (23)$$

$$[A]^T[m][A] = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \\ \\ \Phi_2^T \end{bmatrix}[m]\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \\ \\ \Phi_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [m]\Phi_1 & [m]\Phi_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_1^T[m]\Phi_1 & \cancel{\Phi_1^T[m]\Phi_2} \\ \\ \cancel{\Phi_2^T[m]\Phi_1} & \Phi_2[m]\Phi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Phi_1^T[m]\Phi_1 = M_1 \\ \Phi_2^T[m]\Phi_2 = M_2 \end{cases}$$

جرم مدی مد اول

جرم مدی مد دوم

$M_1 = \Phi_1^T[m]\Phi_1$

$M_2 = \Phi_2^T[m]\Phi_2$

$$[A]^T[m][A] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = [M] \qquad (24)$$

$$(M_1 = \bar{X}_1^T m \bar{X}_1 \quad , \quad M_2 = \bar{X}_2 m \bar{X}_2^T) \qquad (25)$$

ارتعاش آزاد $\longrightarrow$ $[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$ (26)

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t = \bar{X} \sin\omega t \qquad (27)$$

$$\ddot{x}_{(t)} = -\omega^2 \bar{X} \sin\omega t$$

پس از جایگزین کردن رابطه (27) در (26) داریم:

$$-\omega^2 [m] \bar{X} \sin\omega t + [k] \bar{X} \sin\omega t = \{0\} \qquad (28)$$

$$\omega_k^2 [m] \bar{X}_k = [k] \bar{X}_k \qquad k=1,2 \qquad (29)$$

$$[A]^T[k][A] = \begin{bmatrix} \bar{X}_1^T \\ \bar{X}_2^T \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1^T \\ \bar{X}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k]\bar{X}_1 & [k]\bar{X}_2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه 29 خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1^T \\ \bar{X}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 [m] \bar{X}_1 & \omega_2^2 [m] \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \bar{X}_1^T [m] \bar{X}_1 & \omega_2^2 \bar{X}_1^T [m] \bar{X}_2 \\ \omega_1^2 \bar{X}_2^T [m] \bar{X}_1 & \omega_2^2 \bar{X}_2^T [m] \bar{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [A]^T[k][A] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 M_2 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

$$[A]^T\{F(t)\} = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \\ X_2^T \end{bmatrix}\{F(t)\} = \begin{bmatrix} X_1^T\{F(t)\} \\ \\ X_2^T\{F(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

پس از جایگزین کردن روابط (24)، (30)، (31) در رابطه (23)

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{Y}_1(t) \\ \ddot{Y}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\omega_1^2 M_1 & 0 \\ 0 & +\omega_2^2 M_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

در معادله (32) در هر سطر فقط یک مجهول داریم که می‌توانیم در هر سطر از آن، مجهول را حل کنیم. یعنی یک سیستم n درجه آزادی را به n سیستم یک درجه آزادی تبدیل کردیم.

اما در معادله (18) در هر سطر چند مجهول و مشتقات آن را داشتیم.

با مقایسه دو رابطه (18) و (32) مشخص می‌گردد که با استفاده از مختصات نرمال می‌توان سیستم n درجه آزادی را به تعداد n سیستم یک درجه آزادی تبدیل نمود که هر یک از آن‌ها به تنهایی قابل حل می‌باشد. به عنوان مثال سطر kام رابطه (32) برابر است با:

$$M_k \ddot{Y}_k(t) + \omega_k^2 M_k Y_k(t) = f_k(t) \qquad k=1,2 \quad (33)$$

دو طرف معادله (33) را به M_k تقسیم می‌کنیم

$$\ddot{Y}_k(t) + \omega_k^2 Y_k(t) = \frac{f_k(t)}{M_k} \quad (34)$$

معادله بالا را با انتگرال دوهامل حل می‌کنیم.

$$Y_k(t) = \frac{1}{M_k \omega_k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau \quad (35)$$

$$\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\} = [X_1 \quad X_2]\{Y(t)\}$$
$$= X_1 Y_1(t) + X_2 Y_2(t) = \sum_{k=1}^{2} X_k Y_k(t)$$

$$\Rightarrow \{x(t)\} = \sum_{k=1}^{n} X_k \left\{ \frac{1}{M_k \omega_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin \omega_k (t-\tau) d\tau \right\} \quad (36)$$

تحلیل تاریخچه زمانی ـ تحلیل دینامیکی تاریخچه زمانی

تعیین پاسخ دینامیکی سیستم n درجه آزادی تحت اثر نیروهای دینامیکی (با استهلاک) 8

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \quad (37)$$

با استفاده از روش مختصات نرمال $\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\}$ (20)

با جایگزین کردن رابطه (20) در (37) و پیش ضرب کردن ماتریس $[A]^T$ در دو طرف معادله خواهیم داشت.

$$[A]^T[m][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [A]^T[c][A]\{\dot{Y}(t)\} + [A]^T[k][A]\{Y(t)\} = [A]^T\{F(t)\} \quad (38)$$

درصورتیکه در رابطه (38) حاصلضرب $[A]^T[c][A]$ یک ماتریس قطری شود هر یک از سطرهای رابطه 38 نیز مستقل از سطرهای دیگر خواهد بود

$$[A]^T[c][A] = \text{Diagonal} \quad \text{ماتریس قطری} \quad (39)$$

رابطه (39) درصورتی برقرار است که شرایط یعنی نظیر شرایط زیر برقرار باشد

1) $[c] = \alpha[k] + \beta[m]$

2) درحالت کلی $([M]^{-1}[C])([M]^{-1}[K]) = ([M]^{-1}[K])([M]^{-1}[C])$

درعمل نظر به اینکه مقدار استهلاک سازه کم می باشد عناصر غیرقطری در رابطه (39) نسبت به عنصر

قطری مقادیر ثابت ناچیز بوده، قابل صرفنظر کردن می‌باشند. در نتیجه رابطه (39) را
می‌توان در خصوص سازه که صدق فرض نمود.
سطر K ام رابطه ماتریسی (38) برابر خواهد بود با:

$$M_k \ddot{Y}_k + C_k \dot{Y}_k + \omega_k^2 M_k Y_k = f_k(t) \qquad (40)$$

دو طرف رابطه (40) را به M_k تقسیم نموده خواهیم داشت:

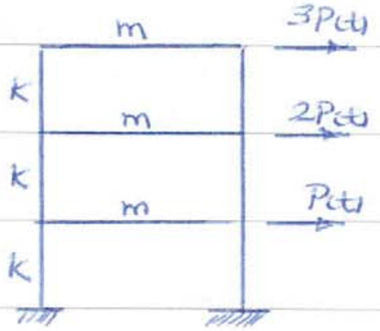
$$\ddot{Y}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \frac{1}{M_k} f_k(t) \qquad (41)$$

ξ_k نسبت استهلاک بحرانی مد K ام نامیده می‌شود.

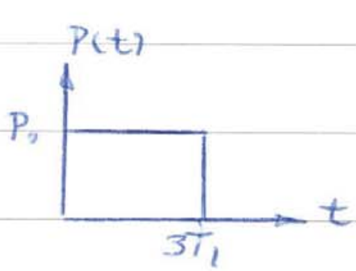
$$Y_k(t) = \frac{1}{M_k \omega_{d_k}} \int_0^t f_k(\tau)\, e^{-\xi_k \omega_k (t-\tau)} \sin \omega_{d_k}(t-\tau)\, d\tau \qquad (42)$$

$$\omega_{d_k} = \omega_k \sqrt{1-\xi_k^2} \qquad (43)$$

$$\{x(t)\} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \left\{ \frac{1}{M_k \omega_{d_k}} \int_0^t f_k(\tau)\, e^{-\xi_k \omega_k (t-\tau)} \sin \omega_{d_k}(t-\tau)\, d\tau \right\}$$

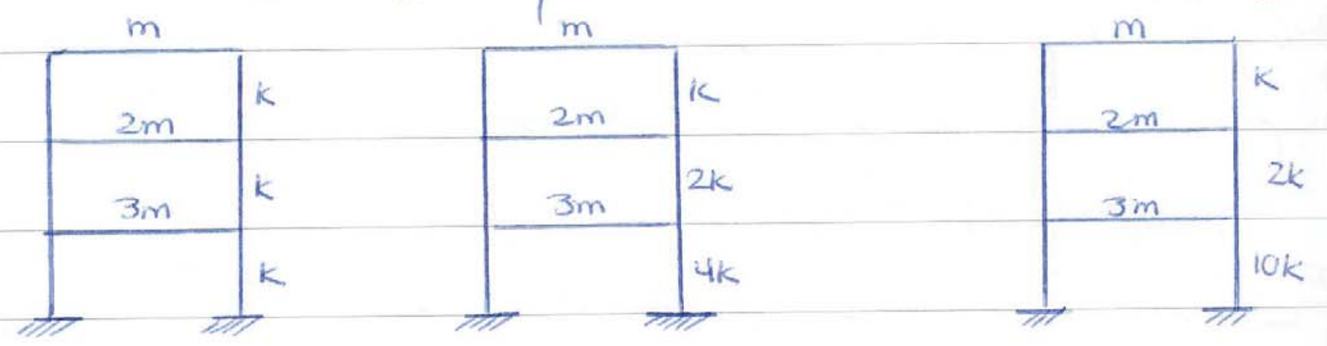


تمرین ۲۲: ساختمان ۳ طبقه شکل تحت اثر نیروهای نشان داده شده در شکل قرار گرفته است. اولاً سیستم معادلات حرکت را بدست آورید، فرض کنید که بردارهای مدی متعلق به آن را می‌شناسید. توابع تغییر مکان را در حرکت طبقات بدست آورید. (T_1 پریود مد اول سیستم می‌باشد.)



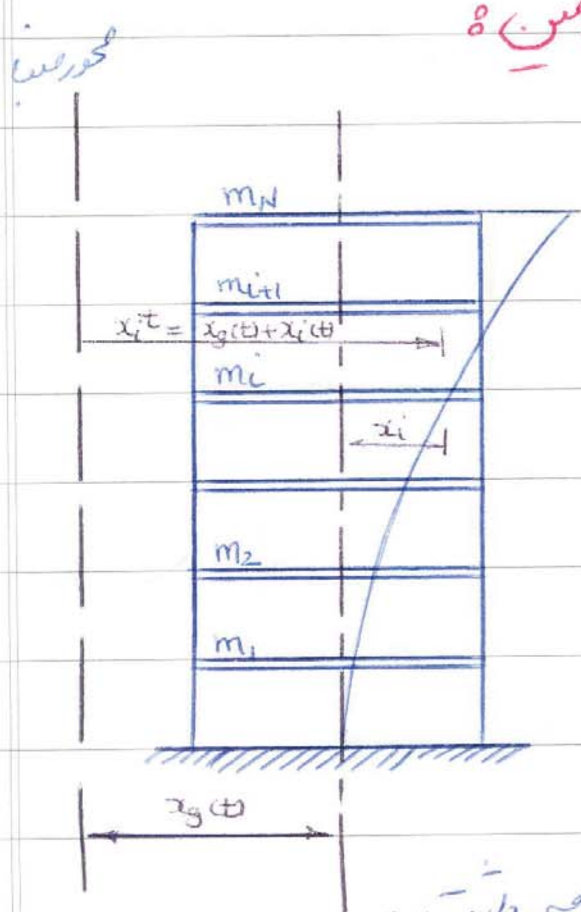
حمید کاظمی

تمرین ۲۳: در حرکت ارتعاش های سه طبقه سیستم معادلات حرکت را نوشته و فرکانس های طبیعی و مودهای شکل را بدست آورده با هم مقایسه نمایید.



طبقه نرم: طبقه‌ای است که سختی اش از طبقات دیگر خیلی کمتر است.

پاسخ سیستم چند درجه آزادی در مقابل حرکت زمین:



$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{F(t)\} \quad (1)$$

$$\{F(t)\}=\{0\} \quad (2)$$
آزاد

نسبی

$$[m]\{\ddot{x}^t\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\} \quad (3)$$

$$x_i^t = x_g(t)+x_i \quad (4)$$

$$\{x^t\} = x_g(t)\cdot\{I\}+\{x(t)\} \quad (5)$$

$$\{\ddot{x}^t\} = \ddot{x}_g(t)\{I\}+\{\ddot{x}(t)\} \quad (6)$$

پس از جایگزین کردن رابطه (6) در رابطه (3) خواهیم داشت:

$$[m]\left[\ddot{x}_g(t)\{I\}+\{\ddot{x}(t)\}\right]+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\} \quad (7)$$

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=-[m]\{I\}\ddot{x}_g(t)=\{P_{eff}(t)\} \quad (8)$$

$$\{I\} = \begin{Bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{Bmatrix}_{n\times1}$$

دو عامل مهم در ارتباط با نیروی زلزله شتاب زمین و جرم ساختمان است

$$\{P_{eff}(t)\} = -[m]\{I\}\ddot{x}_g(t) \qquad (9)$$

از آنجا که در قسمت قبل در خصوص پاسخ دینامیکی سیستم N درجه آزادی با استهلاک انجام گرفت، در خصوص رابطه 8 نیز بکار برده شود خواهیم داشت.

$$\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\} \qquad (10)$$

پس از جایگزین کردن رابطه 10 در رابطه 8 و پیش ضرب نمودن آن در ماتریس $[A]^T$ و بدست آوردن سطر kام آن خواهیم داشت.

$$M_k\ddot{Y}_k + C_k\dot{Y}_k + \omega_k^2 M_k Y_k = X_k^T\{P_{eff}(t)\} = f_{ke}(t) \qquad (11)$$

$$\ddot{Y}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \frac{1}{M_k} f_{ke}(t) \qquad (12)$$

$$M_k = X_k^T m_k X_k \qquad (13)$$

$$f_{ke}(t) = X_k^T\{P_{eff}(t)\} = -X_k^T[m]\{I\}\ddot{x}_g(t)$$

$$\bar{K}_k = X_k^T[m]\{I\} \qquad (15)$$ ضریب تحریک مودی زلزله

$$\Rightarrow f_{ke}(t) = \bar{K}_k\cdot\ddot{x}_g(t) \qquad (16)$$

* $\bar{K}_k$ اسکالر است.

با استفاده از روابط مربوط به شبه سرعت با یک درجه آزادی $Y(t)$ برابر خواهد بود با:

$$\begin{cases} Y_k(t) = \dfrac{\bar{K}_k}{M_k\omega_k}V_k(t) & (17)\\[2ex] V_k(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_k(t-\tau)}\sin\omega_{dk}(t-\tau)\,d\tau & (18)\end{cases}$$

در رابطه (18)، ξ_k نسبت استهلاکی مود kام، ω_k فرکانس مود kام و فرکانس مود kام ارتعاش می باشد. بدین ترتیب بردار تغییر مکان نسبی ایجاد شده در

این مود برابر است با : $\{x_k(t)\} = \Phi_k Y_k(t) = \Phi_k \dfrac{\bar{k}_k}{M_k\omega_k} V_k(t)$ (19)

برای تمام بردار تغییرمکان نسبی ناشی از تمام واکنش های مودی با استفاده از رابطه (10) برابر است با :

$$\{x(t)\} = [A]\{Y(t)\} = [A]\left\{\frac{\bar{k}_k}{M_k\omega_k} V_k\right\} \qquad (20)$$

عبارت داخل { } یک بردار است که شامل عبارات مربوط به تمام مودهای در نظر گرفته شده در تحلیل می باشد.

تعیین نیروهای الاستیک در تراز طبقات :

$$\{f_s(t)\} = [K]\{x(t)\} = [K][A]\{Y(t)\} \qquad (21)$$

از آن جایی که اغلب بهتر خواهد بود که این نیروها بر حسب نیروهای اینرسی معادل اعمال شده بیان گردد می توان با استفاده از روابط مقابل نوشت :

$$[K]\Phi_k = \omega_k^2 [m]\Phi_k \quad (22) \longrightarrow [K][A] = [M][A][\Omega^2] \quad (23)$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

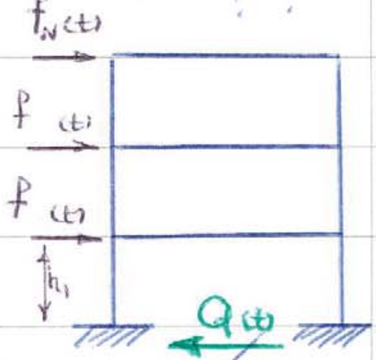
پس از جایگزین کردن رابطه (23) در (21) خواهیم داشت :

$$\{f_s(t)\} = [m][A][\Omega^2]\{Y(t)\}$$

$$\Rightarrow f_s(t) = [m][A]\left\{\frac{\bar{k}_k}{M_k}\omega_k V_k(t)\right\} \qquad (25)$$

برای است با استفاده از رابطه (13) بردار رابطه الاستیک مربوط به k امین مد برابر است با :

$$\{f_{s_k}(t)\} = [m]\,\Phi_k \cdot \frac{\bar{K}_k}{M_k}\,\omega_k \cdot V_k(t) \qquad (26)$$



$\{f_{s_k}(t)\}$ مربوط به طبقه i ام نیست، بلکه مربوط به مد k ام است که نیروی تمام طبقات در آن مد را در بر دارد.

پس از اینکه توزیع نیروهای الاستیکی مؤثر پس از زمان t در طول وقوع زلزله تعیین گردید به کمک روش های متداول استاتیکی می توان مقدار نیروی سازه را در هر زمان تعیین کرد. به عنوان مثال نیروی برش پایه که $Q(t)$ برابر است با مجموع تمام نیروهای طبقات یعنی :

$$Q(t) = \sum_{1}^{N} f_i(t) = [I]^T \{f_s(t)\} \qquad (27)$$

$\{I\}^T$ در این رابطه بیانگر بردار افقی از اعداد واحد است. با جایگزین کردن رابطه (25) در (27) خواهیم داشت. $[I]^T = \langle 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; \dots \;\; 1 \rangle$

$$Q(t) = \sum \frac{\bar{K}_k^2}{M_k}\,\omega_k V_k(t) \qquad (28)$$

برای بدست آوردن رابطه (28) از تساوی زیر استفاده شده است.

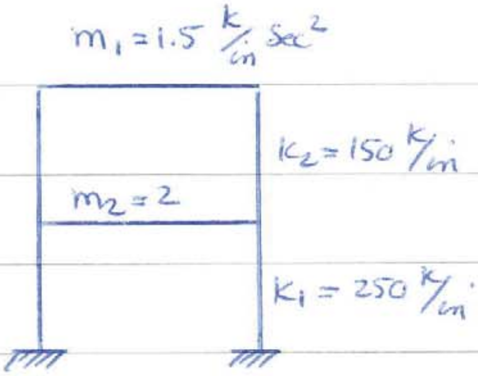
$$[I]^T[m][A] = [\bar{K}_1 \;\; \bar{K}_2 \;\; \dots \;\; \bar{K}_N] \qquad (29)$$

همچنین واژگونی در تکیه گاه برابر است با :

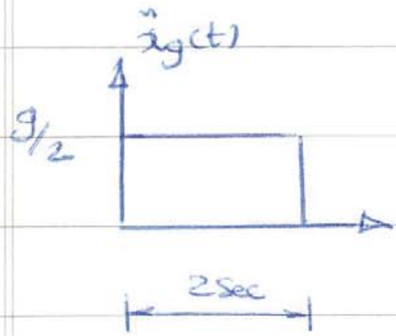
$$M(t) = \sum h_k f_i(t) = [h]\{f_s(t)\} \qquad (30)$$

در این حالت [h] بردار افقی از ارتفاع هر یک از طبقات تا تراز پایه می باشد
با جایگزین کردن رابطه (25) در رابطه (30) خواهیم داشت:

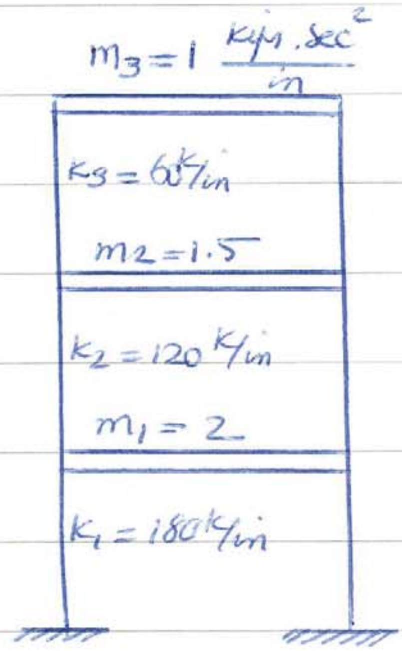
$$M(t) = [h][m][A][-\Omega^2-]\{Y(t)\} = [h][m][A]\left\{\frac{\bar{k}_k}{M_k}\,\omega_k\, V_k(t)\right\}$$



تمرین ۲۴: قاب دو طبقه شکل تحت اثر شتاب زمین به صورت دیاگرام نشان داده شده در شکل قرار گرفته است. مطلوبست تعیین فرکانس های مودی، جرم های مودی، بردار تغییر مکان در هر یک از مودها، بردار تغییر مکان کل، بردار برش های الاستیک در هر یک از مودها و بردار برش الاستیک کل، برش پایه و همچنین واژگونی و رسم تغییر مکان طبقات.



مثال: ساختمان سه طبقه شکل مقابل مفروض است. اولاً مشخصه های ارتعاش، جرم های مودی و ضرایب تحریک مودی را محاسبه نمایید. مقدار استهلاک در هر مود را ۵٪ استهلاک بحرانی بگیرید. به صورتی که این ساختمان تحت اثر زلزله ای قرار گیرد که در زمان $t_1 = 3.08\,sec$ مقدار تابع شبه سرعت $V_1(t)$ به حداکثر خود برسد و در این زمان مقادیر تابع شبه سرعت برای مودهای مختلف به صورت زیر باشد. مطلوبست تعیین بردار



تغییر مکان و مقادیر تغییر مکان در هر تراز، همچنین مقدار نیروی الاستیک موجود در هر تراز طبقات و مقدار برش پایه ای در این لحظه:

$$V(t_1) = \begin{Bmatrix} 1.74 \\ 1.22 \\ 0.77 \end{Bmatrix} \ ft/sec$$

$$\det|k - \omega^2 m| = 0 \longrightarrow \{\omega_n\} = \begin{Bmatrix} 4.58 \\ 9.82 \\ 14.59 \end{Bmatrix}$$

$$[k - \omega_n^2 m]\,\Phi_n = \{0\}$$

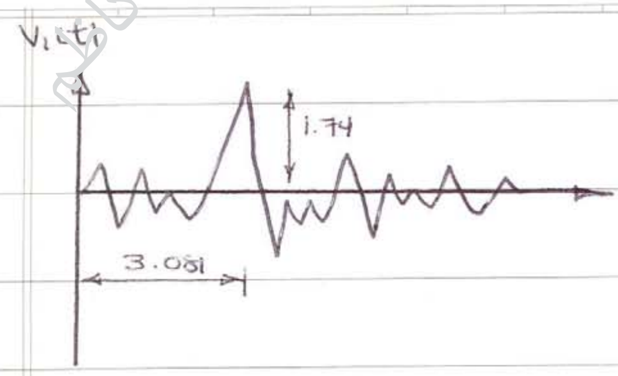
$$\begin{array}{cc} \longrightarrow [A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.644 & -0.601 & -2.57 \\ 0.3 & -0.676 & 2.47 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{طبقه } 3 \\ \text{طبقه } 2 \\ \text{طبقه } 1 \end{array} \end{array}$$

$$\Phi_k^T m \Phi_k = M_k \longrightarrow \{M_n\} = \begin{bmatrix} 1.801 \\ 2.455 \\ 23.1 \end{bmatrix}$$ جرم های مودی

مد اول محور قائم را یک جا قطع می کند. مد دوم دو جا را قطع می کند. مد n ام n جا را قطع می کند

$$\bar{K}_k = \Phi_k^T m \{I\} \longrightarrow \{\bar{K}_n\} = \begin{bmatrix} 2.56 \\ -1.254 \\ 2.08 \end{bmatrix}$$ ضریب تحریک زلزله

این یک مشخصه ذاتی سیستم است (مشخصه دینامیکی) که به بارگذاری بستگی ندارد.



نمودار رسم شده در $t_1 = 3.081$ ، $V_2(t)$, $V_3(t)$ را مشخص کرده اند. در همین زمان مقادیر خواسته شده را بر اساس شبه سرعت ها می خواهیم.

$$\{Y_k(t_1)\} = \left\{ \frac{\bar{k}_k}{M_k \omega_k} V_k(t_1) \right\} = \begin{bmatrix} 0.541 \\ 0.0635 \\ 0.00475 \end{bmatrix} ft$$

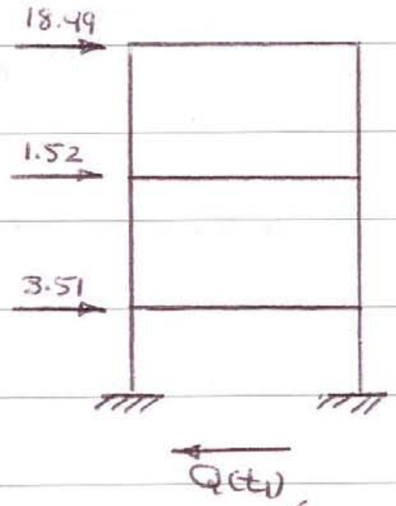
$$\{x(t_1)\} = [A]\{Y(t_1)\}$$

$$\longrightarrow \{x(t)\} = \begin{bmatrix} 0.541 + 0.0635 + 0.00475 \\ 0.348 - 0.038 - 0.018 \\ 0.163 - 0.043 + 0.012 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.298 \\ 0.131 \end{bmatrix} ft$$

چون $V_1(t_1)$ طیف سرعت در جدول است پس تغییر مکان هم طیف تغییر مکان در جدول است.

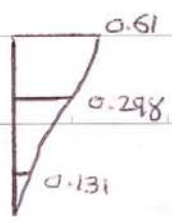
$$\{f_s(t)\} = \underbrace{[m][A]}_{3\times3} \underbrace{\left\{ \frac{\bar{k}_n}{M_n} \omega_n V_n(t_1) \right\}}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 11.35 + 6.13 + 1.01 \\ 10.95 - 5.53 - 3.90 \\ 6.8 - 8.29 + 5.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.49 \\ 1.52 \\ 3.51 \end{bmatrix} kips$$

معمولاً انتظار داریم که از پایین به بالا f_s طبقه زیاد می شود. علت این است که در لحظات مختلف که کل شبیه مقادیر Max در هر مود را محاسبه می کند. اما اینجا در زمان t_1 کشف شده.



نیروی برش پایه که حاصل از جمع جبری نیروهای طبقات بدست می آید.

$$Q(t_1) = 18.49 + 1.52 + 3.51 = 23.52 \ kips$$



حمید کاظم

کاربرد تحلیل طیفی در سیستم‌های n درجه آزادی .

محاسبه واکنش سازه‌ای یک سیستم چند درجه آزادی با جرم متمرکز برای هر زمانی مانند t مستلزم محاسبه انتگرال واکنش زلزله در آن زمان برای هر یک از مودهای مهم واکنش می‌باشد. بنابراین محاسبه واکنش Max مستلزم آن است که واکنش هر مود برای هر زمان در طول زلزله محاسبه گردد تا بتوان مقدار Max را تعیین نمود. واضح است که این کار نیازمند عملیات محاسباتی بسیار زیاد بوده و به همین جهت وقتگیر می‌باشد. لذا توجه به روشی که براساس طیف واکنش حرکت زمین استوار باشد بیشتر مورد تأکید قرار گرفته است.

با استفاده از مشخصات تشابهی می‌توانیم برای هر یک از مودهای سازه واکنش Max را مشابه آنچه که برای سیستم‌های یک درجه آزادی شرح داده شد از طیف واکنش بدست آورد.

با استفاده از مشخصات Max مقدار تغییرمکان در مود k را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\{x_k(t)\}_{n\times1} = \bar{X}_k \frac{\bar{K}_k}{M_k\omega_k} V_k(t) \qquad (1)$$

$$\{x_{k,Max}\} = \bar{X}_k \frac{\bar{K}_k}{N_k} S_{d_k} \qquad (2)$$

که در این رابطه S_{d_k} تغییرمکان طیفی مربوط به استهلاک و دوره تناوب مود k ام ارتعاش می‌باشد.

همچنین مقدار نیروی الاستیک در مود k ام با استفاده از مشخصات برابر است با:

$$\{F_{s_k}(t)\}_{n\times1} = [M]\,\bar{X}_k \frac{\bar{K}_k}{M_k}\omega_k V_k(t) \qquad (3)$$

$$\{F_{s_k,Max}\}_{n\times1} = [M]\,\bar{X}_k \frac{\bar{K}_k}{N_k} S_{a_k} \qquad (4)$$

در این رابطه S_a شتاب طیفی مود ik ام مربوط به استهلاک و دوره تناوب مود ik ام ارتعاش است.

(در حالت کلی Max واکنش کل را نمی توان صرفاً از جمع کردن ماکزیمم های مودی بدست آورد. زیرا این مقادیر Max معمولاً در یک زمان اتفاق نمی افتند. در اغلب حالات هنگامی که یک مود در حد Max خودش باشد دیگر واکنش های مودی در حدی کمتر از Max های مربوط به خودشان باشند. بنابراین از جمع ترکیب کردن مقادیر طیفی مودها حد بالایی از واکنش کل را بدست می دهد، لیکن معمولاً از حد Max واکنش کل بسیار بیشتر است)

ساده ترین و متداول ترین فرمول که برای این منظور جذر مجموع مربعات واکنش های مودی است. بنابراین اگر Max تغییر مکان های مودی داده شده باشد، Max تغییر مکان کل را به طور تقریب نسبتاً خوبی می توان با رابطه زیر برابر دانست:

بردار

$$\underset{N\times1}{\vec{\underset{\sim}{x}}_{Max}} = \left[(x_1)^2_{Max} + (x_2)^2_{Max} + (x_3)^2_{Max} + \dots + (x_N)^2_{Max}\right]^{1/2} \quad (5)$$

کمیات زیر رادیکال بیانگر بردارهای تغییر مکان های مودی است که به توان 2 رسیده است.

در صورتیکه ماکزیمم نیروی طبقات را بتوان بصورت ترکیبی از Max های مودی بدست آورد.

$$\underset{N\times1}{\underset{\sim}{f}_{S\,Max}} = \left[(f_{S_1})^2_{Max} + (f_{S_2})^2_{Max} + (f_{S_3})^2_{Max} + \dots + (f_{S_N})^2_{Max}\right]^{1/2} \quad (6)$$

مثال: یک ساختمان ۳ طبقه مثال قبل را در نظر بگیرید (کلیه مشخصات دینامیکی همان است) در صورتیکه با فرض ۵٪ استهلاک بحرانی برای کلیه مودها و شکل ها ...

$$Q_{Max} = \sqrt{\sum\left(\frac{\bar{K}_k^2}{M_k}\cdot \omega_k \cdot Sv_k\right)^2}$$

دوره‌های تناوب داده شده در مقابل مش، از طیف سرعتی استفاده نمود که در آن منحنی بکار می‌رود و مقادیر سرعت طیفی برای هر یک از مودها به صورت زیر باشد. مطلوبست تعیین: Max تغییرمکان مودی هر یک از مودها، Max دوران تغییرمکان کل، Max نیروهای طبقات در هر یک از مودها و Max نیروی کل وارده در طبقات و سهم برش Max نیروی برش مودی و Max برش تکیه‌گاهی کل.

$$\{S_v\} = \begin{bmatrix} 1.73 \\ 1.41 \\ 1.2 \end{bmatrix} ft/s \qquad T_n = \begin{bmatrix} 1.37 \\ 0.64 \\ 0.431 \end{bmatrix} \qquad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 5\%$$

با توجه به T_n و ξ طیف S_v بدست می‌آید (البته صورت سؤال بعنوان فرض خودش S_v را داده)

- تعیین تغییرمکان Max:

$$\{x_{n,Max}\} = \Phi_n \frac{\bar{L}_n}{M_n} \frac{S_{v_n}}{\omega_n}$$

$$\{x_{1,Max}\} = \begin{bmatrix} 0.541 \\ 0.348 \\ 0.169 \end{bmatrix} \qquad \{x_{2,Max}\} = \begin{bmatrix} 0.074 \\ 0.044 \\ 0.05 \end{bmatrix} \qquad \{x_{3,Max}\} = \begin{bmatrix} 0.008 \\ 0.019 \\ 0.018 \end{bmatrix}$$

با ترکیب کردن Max های مودی به روش جذر مجموع مربعات، Max تغییرمکان کل بطور تقریبی بدست می‌آید.

$$\{x_{Max}\} \cong \begin{bmatrix} ((0.541)^2 + (0.074)^2 + (0.008)^2)^{1/2} \\ ((0.348)^2 + (0.044)^2 + (0.019)^2)^{1/2} \\ ((0.169)^2 + (0.05)^2 + (0.018)^2)^{1/2} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.546 \\ 0.351 \\ 0.17 \end{bmatrix} ft$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، مودهای بالاتر سهم اندکی در مقدار Max دارند و مود اول بیشترین سهم را در مقدار تغییرمکان دارا است.

- تعیین نیروهای الاستیک :

$$\{f_{S_n,Max}\} = [M]\{\Phi_n\} \frac{\bar{K}_n}{M_n} \omega_n \cdot S_{v_n}$$

$$\{f_{S_1,Max}\} = \begin{bmatrix} 11.35 \\ 10.95 \\ 6.8 \end{bmatrix} kips \quad \{f_{S_2,Max}\} = \begin{bmatrix} 7.08 \\ 6.39 \\ 9.58 \end{bmatrix} kips \quad \{f_{S_3,Max}\} = \begin{bmatrix} 1.57 \\ 6.08 \\ 7.79 \end{bmatrix} kips$$

با ترکیب کردن بردارهای فوق به روش جذر مجموع مربعات مقدار ترکیبی نیروی کل زلزله در طبقات بدست می آید.

$$\{f_{S,Max}\} = \begin{bmatrix} 13.47 \\ 14.06 \\ 14.1 \end{bmatrix}$$

برای نیروی برشی طبقه (برش پایه) با استفاده از روابط زیر بدست می آید.

$$Q_{on,Max} = \frac{\bar{K}_n^2}{M_n} \cdot \omega_n S_{v_n} \begin{cases} Q_{01,Max} = 29.13 \text{ kips} \\ Q_{02,Max} = 8.77 \text{ ''} \\ Q_{03,Max} = 3.28 \text{ ''} \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

با استفاده جذر مجموع مربعات آن را مقدار ترکیبی Max برش پایه را بدست می آوریم.

$$Q_{0,Max} = (29.13^2 + 8.77^2 + 3.28^2)^{1/2} = 30.6 \text{ kips}$$

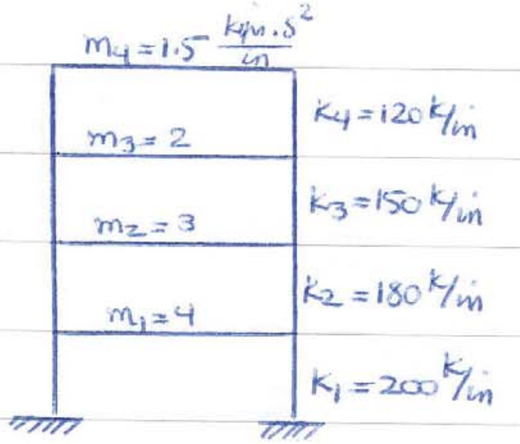
این یک مثال کاملاً نشان می دهد که Max برش پایه را نمی توان از جمع کردن نیروهای Max طبقات (الف) بدست آورد. زیرا این نیروها همزمان نمی باشند.

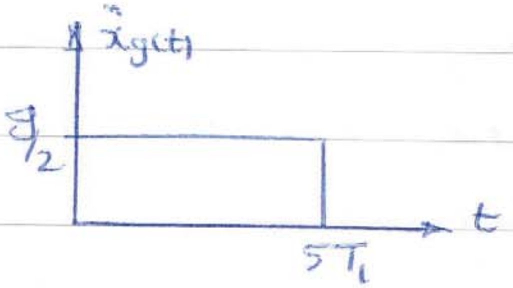
$$M_n^* = \frac{\bar{K}_n^2}{M_n} \longrightarrow \text{جرم موثر مود n ام}$$

$M_1^* = 3.656 \qquad M_2^* = 0.641 \qquad M_3^* = 0.187$

مجموع جرم های موثر $M_1^* + M_2^* + M_3^*$ برابر است با عدد 4.48 . که برابر مجموع جرم کل سازه است.

اگر سازه ۵۰ طبقه بود این نامه اشاره دارد که مودهایی را بررسی کنید که جمع جرم‌های مؤثر مودی کمتر از ۹۰٪ وزن کل سازه نباشد.





تمرین ۲۵: ساختمان چهار طبقه شکل مقابل مفروض است. اولاً فرکانس‌ها و مودهای متعلق به آن را پیدا کنید. ثانیاً جرم‌های مودی و ضریب تحریک زلزله را بدست آورید. ثالثاً در صورتیکه این ساختمان تحت اثر زلزله‌ای قرار گیرد که نمودار شتاب آن بصورت مقابل باشد $(\xi = 0)$ مطلوبست تعیین:

۱) تابع تغییرمکان در هریک از طبقات.

۲) مقدار Max تغییرمکان در مود اول.

۳) بردار نیروهای الاستیک برای هریک از مودها و برای ترکیب آن‌ها

۴) تابع برش پایه برای هریک از مودها و مقدار Max برش پایه در مود اول.

تمرین ۲۶: اگر برای طراحی ساختمان تمرین ۲۵ بتوان از نمودار شکل A استفاده کرد و نسبت استهلاک بحرانی را برای کلیه مودها ۵٪ در نظر گرفت بردار تغییرمکان Max را برای هریک از مودها بدست آورید و تغییرمکان کل را حساب کنید. همچنین نیروهای الاستیک در تراز طبقات و برش پایه را در حرکت مودها و مقدار کل آن‌ها را بدست آورید.

حمید کاظم

مبانی تئوری آیین نامه را توضیح دهید؟ با هم مقایسه کنید؟

فصل پنجم:

مبانی تئوری آیین نامه های زلزله:

مقایسه روابطی که در مباحث قبلی برای نیروهای ایجاد شده بر اثر زلزله بدست آمد با ضوابط طراحی یک نمونه از آیین نامه های ساختمانی می تواند مبانی علمی و تئوری آیین نامه ها را روشن سازد.

به عنوان مثال در آیین نامه عمومی ساختمان UBC نیروی موثر زلزله طراحی به صورت Max نیروی برشی حاصل از زلزله در تکیه گاه ساختمان بیان می شود.

رابطه نیروی برشی تکیه گاه (Q) مطابق این آیین نامه برابر است با:

$$Q_{Max} = K\hat{C}W \qquad (1)$$

در این رابطه W وزن ساختمان، $\hat{C}$ ضریب برش تکیه گاهی و K ضریبی است که بستگی به نوع سیستم سازه ای دارد. این ضریب به ظرفیت نسبی جذب انرژی سیستم سازه ای وابسته است.

ضریب برش تکیه گاهی ($\hat{C}$) به صورت تابعی از دوره تناوب اصلی ارتعاش سازه (T) به صورت زیر بیان می گردد.

$$\hat{C} = \frac{0.05}{\sqrt[3]{T}} \qquad (2)$$

البته آیین نامه های ساختمانی من جمله UBC دارای ضریب منطقه است که این ضریب بستگی به مناطق لرزه خیزی از نظر شدت زمین دارد. در این رابطه ضریب منطقه واحد در نظر گرفته شده است که برای مناطقی است که دارای بیشترین خطر زلزله خیزی می باشد.

رابطه تحلیلی متناظر با فرمول (1) را می توان با استفاده از روابط قبل به صورت زیر نوشت.

$$Q_{(t)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{K}_n^2}{M_n} \omega_n V_n(t) \qquad (3)$$

حمید کاظم

$$Q_1(t) = \frac{\bar{K_1}^2}{M_1} W_1 \cdot V_1(t) \longrightarrow Q_{1(t)Max} = \frac{\bar{K_1}^2}{M_1} \cdot Sa_1$$

$$\longrightarrow Q_{1Max} = \frac{\bar{K_1}^2}{M_1} g \cdot \frac{Sa_1}{g} \qquad (4)$$

مقایسه رابطه (4) و (1) معادل بودن جملات زیر را نمایان می سازد:

$\hat{C}$ $\bar{W}$

$\frac{Sa_1}{g}$ $\frac{\bar{K_1}^2}{M_1} g$

بنابراین ضریب برش پایه کاهش معادل شتاب طیفی است که به صورت نسبتی از شتاب زمین بیان شده است و وزن کل به صورت معادل با وزن موثر مود اول در نظر گرفته شده است. معمولاً وزن موثر مود اول کمتر از وزن کل می باشد.

از مقایسه دو رابطه به سادگی ملاحظه می شود که نیروی زلزله ای که توسط آیین نامه تعیین می شود شکل اساسی به رابطه ضریب برش پایه کاهشی (رابطه (2)) دارد.

* اهم ترین عامل در بدست آوردن نیروی برشی پریود ساختمان است.

* اگر در جهت تئوری پیش برویم چون تنها قاب را می سنجیم لذا پریود سازه ها بیشتر از حالت واقعی آن می باشد. پس برش پایه کمتر می شود را این در جهت اطمینان نیست.

دیگر مقررات آیین نامه عموماً ساختمان معمولی توزیع نیروی برشی پایه کاهشی کل را در ارتفاع ساختمان تعیین می نمایند.

$$f'_{si,Max} = \frac{W_i x_i}{\sum W_i x_i} Q_{Max} \qquad (5)$$

f'_{si}: نیروی جانبی در طبقه i (با مسائل مطرح شده در فصل قبل فرق دارد)

W_i: وزن طبقه i

x_i: ارتفاع طبقه i از تکیه گاه ساختمان

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \vdots \\ \psi_{1n} \end{bmatrix}$$ سازه n طبقه

رابطه کلی متناظر را می توان از رابطه تحلیل مثل بصورت زیر نوشت

$$\{f_{s_n}(t)\} = [m]\,\Phi_n \frac{\bar{K}_n}{M_n}\,\omega_n \cdot V_n(t) \qquad (6)$$

با جایگزین کردن n = 1 برای مود اول خواهیم داشت :

$$\{f_{s_1,Max}\} = [m]\,\Phi_1 \cdot \frac{\bar{K}_1}{M_1} \cdot S_{a_1} \qquad (7)$$

رابطه (7) برای تراز i برابر است با :

نیروی طبقه i ام از مود اول $$f_{s_i,Max} = m_i\,\psi_{1i} \times \frac{\bar{K}_1^2}{K_1} \cdot \frac{S_{a_1}}{M_1} \qquad (8)$$

Φ_1 i ام بردار عنصر

$$\rightarrow f_{s_i,Max} = m_i \cdot \psi_{1i} \frac{1}{K_1} \cdot Q_{Max} \qquad (9)$$

$$\rightarrow f_{s_i,Max} = \frac{m_i\,\psi_{1i}}{\sum m_i\,\psi_{1i}}\,Q_{Max} \qquad (10)$$

با مقایسه روابط 10 و 5 مشخص می شود که رابطه آیین نامه بر اساس واکنش یک سیستم جرم متمرکز قرار دارد که مقید به تغییر مکانی بصورت خط مستقیم است یعنی :

$$\psi_{1i} = \frac{x_i}{L}$$

این شکل فرضی بدین دلیل در آیین نامه بکار رفته است که بررسی های انجام شده روی ارتعاش بسیاری از ساختمانها نشان داده است که معمولاً شکل مود اول به خط مستقیم تقریباً نزدیک است .

بطور خلاصه ملاحظه می شود که ضوابط تعیین شده در آیین نامه های ساختمانی من جمله در آیین نامه UBC برای تعیین نیروی زلزله مشابه با نتایج حاصل از آنالیز مود اول طیف واکنش که شکل مود اول آن بصورت خط مستقیم فرض شده است و ضریب برش پایه گاهی بصورت شتاب طیفی مود اول اختیار شده باشد ، در نظر گرفته است .

برای منظور کردن تأثیر واکنش مودهای بالاتر این نامه UBC دارای ضوابطی است که مطابق آن در ساختمان های بلند مقدار بیشتری از نیروهای جانبی در بالاترین تراز ساختمان اعمال می گردد. (نیروی شلاقی)

واکنش خطی و غیر خطی سازه ها در مقابل زلزله:

در مباحث قبل در خصوص آنالیز واکنش زلزله، سازه بصورت یک سیستم خطی فرض شده بود. ولی هنگامی که سازه تحت اثر زلزله های متوسط تا شدید قرار گیرد، می توان انتظار داشت که چنین حرکات شدیدی باعث ایجاد آسیب هایی می شود. واضح است که چنین شرایطی واکنش غیر خطی زلزله را موجب می گردد. هم چنین دستگاهی می توان نشان داد که حتی زلزله های با شدت های متوسط می توانند باعث ایجاد تنش های اضافی هایی در سازه هایی که بر اساس ضوابط طراحی زلزله یک آیین نامه طراحی شده باشند، گردند.

همانطور که در شکل «نک» ملاحظه می شود، مقایسه بین ضریب برش پایه که تعیین شده توسط آیین نامه و طیف های واکنش که برای سه زلزله محاسبه شده اند نشان دهنده این واقعیت هستند که حتی یک زلزله متوسط می تواند باعث ایجاد نیروهایی در سازه شوند که چندین بار بزرگتر از ضوابط طراحی آیین نامه هستند. مقایسه کاملتری بین اثرات نیروی آیین نامه با واکنش نسبت به یک زلزله متوسط برای یک ساختمان 20 طبقه مطابق شکل «دو» به عمل آمده است. تنش ها و تغییر مکان های این سازه در اثر نیروهای جانبی زلزله مطابق آیین نامه UBC توسط یک برنامه کامپیوتری آنالیز استاتیکی قاب محاسبه شده است. و واکنش این سازه نسبت به مولفه شرق غرب زلزله ال سنترو که در شکل «سه» نشان داده شده است توسط یک برنامه آنالیز دینامیکی قاب بر طبق ترکیب مودها نیز محاسبه گردیده است.

دقت روش های غیرخطی و خطی در کدام است؟

نتایج مقایسه واکنش دینامیکی غیرخطی چه چیزی را در تیر و ستون نشان می دهد؟

تغییرمکان های طبقات حاصل های تیرها و ستون های مشخصی است که توسط دو روش فوق بدست آمده اند در شکل "چهار" نشان داده شده است. شایان یادآوری است که نتایج واکنش دینامیکی حاصل مقادیر پوش هستند، یعنی مقادیر بدست آمده در هر زمان در طول واکنش دینامیکی مقادیر Max می باشد بنابراین مقادیر صحیح مذکور کاملاً متوافق نمی باشند.

(تغییرمکان های Max سیستم غیرخطی است همانند تغییرمکان های Max تیر خطی بوده و فقط درصد اندکی از آن بیشتر است. اما تغییر شکل ستون ها و تیرها در مکانیسم تسلیم غیرالاستیک بسیار متفاوت است.) این نتایج به صورت نسبت شکل پذیری بیان می شود که تعریف آن در خصوص تیرها نسبت Max چرخش انتهایی به چرخش انتهایی در حالت اولیه تسلیم می باشد

DR → Ductivity Ratio

نسبت شکل پذیری $DR = \frac{\theta_{Max}}{\theta_y}$

$$\rightarrow DR = \frac{\theta_y + \gamma_{Max}}{\theta_y} \Rightarrow DR = 1 + \frac{\gamma_{Max}}{\theta_y}$$

* اگر از حالت تسلیم عبور کنیم نسبت شکل پذیری از یک بیشتر می شود.

قابل توجه است که نسبت شکل پذیری کمتر از یک به معنی آن است که عضو به حالت تسلیم نرسیده است.

(نتایج آنالیز واکنش الاستیکی نیز در شکل "پنج" به صورت نسبت Max چرخش انتهایی به چرخش تسلیم عضوشان داده شده است.

شکل "پنج" نشان می دهد که حالت تسلیم به طور عمده در تیرها مخصوصاً در طبقات پایین و بالا توسعه پیدا کرده است. در حالیکه ستون ها به جز طبقات بالا همچنان الاستیک باقی مانده اند. وقوع حالت تسلیم در طبقات پایین نتیجه مستقیم شدت زیاد حرکت

مشخصات طرح ستون قوی وتیر ضعیف چیست؟

کلیه کافی است. در صورتیکه وقوع حالت تسلیم در طبقات بالا ناشی از اثر مودهای دیگر
یا به عبارت دیگر بازتاب مودهای (اثر شلاقی) می باشد)

تأثیر تغییرات مقاومت تیر وستون را در رفتار سازه تشریح کنید.

۶-۹ تأثیر تغییرات مقاومت:

(این واقعیت که در بیشتر حالات مورد بحث تقریباً تمام تیرها به حالت تسلیم می رسند لکن ستونها که عمدتاً الاستیک باقی می مانند ناشی از توزیع نسبی مقاومت اعضا است. (در واقع انرژی جذب شده توسط تیرها در هنگام حالت تسلیم آنها باعث جلوگیری از ازدیاد تنش در ستونها می گردد) هرگونه تغییری در مقاومت نسبی ستونها و تیرها می تواند باعث انتقال حالت تسلیم از یک عضو به عضو دیگر بشود. نتایج حاصل از آنالیزهای انجام شده برای مقاومتهای مختلف در تیرها در شکل "هفت" نشان داده شده است. در این حالت کلیه ستونها دارای مقاومت شکل "پنج" می باشند. لکن تیرها علاوه بر حالت ضریب مقاومت استاندارد 2 برای حالتهای 1.5 و 4 برابر مقادیر حالتهای طراحی نیز در نظر گرفته شده اند. همانطور که انتظار می رفت مشاهده می شود که نسبتهای شکل پذیری تیر دارای تغییراتی معکوس با مقاومت هستند. به همین صورت تغییر مکانهای جانبی طبقات بالا با افزایش مقاومت تیرها افزایش می یابد.

این نتیجه نسبتاً غیر منتظره را می توان براساس رفتار حالت تسلیم توضیح داد. واضح است که هرگونه افزایشی در نیروی مقاوم تیر باعث ایجاد تسلیم بیشتر در ستونهای طبقات بالاتر می گردد و این افزایش در تغییر شکل ستونها که باعث تأثیر مستقیم در تغییر مکانهای طبقات می شود.

در شکل "هشت" مقاومت تیرها همانند حالت شکل پنج است لکن مقاومت ستونها علاوه بر حالت ضریب مقاومت استاندارد، 5 برای حالتهای 2 و 10 برابر مقادیر

همان‌ها طراحی نیز در نظر گرفته شده اند.

از این شکل ملاحظه می شود که افزایش مقاومت ستون اثر اندکی بر رفتار سختی دارد، زیرا ستون‌ها به سختی مذکور، تقریباً قوی هستند که فقط در میزان کمی دچار افزایش تسلیم می شوند.

از سوی دیگر در حالت کاهش مقاومت ستون (به 2) حالت تسلیم در تیرها نیز به دلیل افزایش شدید تسلیم ستون‌ها به میزان زیادی کاهش می یابد.

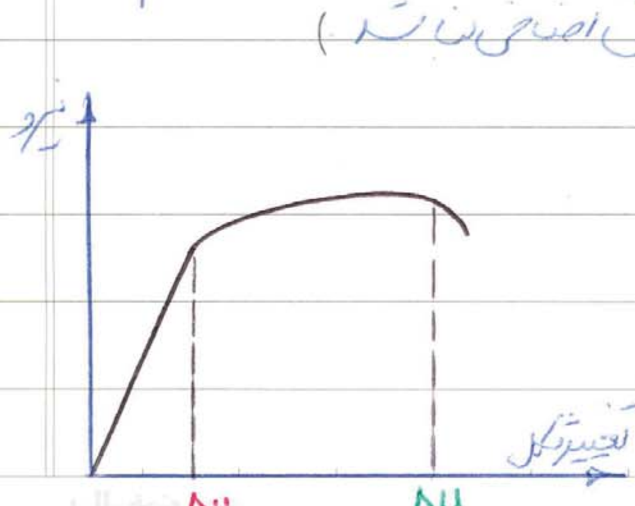
(از نتایج حاصله از این آنالیزهای غیرخطی می توان چند دستاورد مفید را مطرح کرد:

اولاً واضح است که بایستی یک تعادل معقول بین مقاومت ستون‌ها و تیرها برقرار باشد. به همین جهت اتخاذ تصمیم بر مبنای تیر ضعیف و ستون قوی توصیه می گردد.

در حالیکه تسلیم موضعی تیرها تأثیر شدیدی بر ظرفیت باربری قائم سازه ندارد، لکن تسلیم موضعی ستون به راحتی می تواند باعث خرابی سازه گردد (مفصل ایجاد می گردد که در ستون باعث تخریب می گردد)

ثانیاً می توان چنین استنباط کرد که بایستی از ایجاد نواحی ضعیف موضعی در قاب سازه احتراز کرد، زیرا انرژی که باعث خرابی می شود به آن نواحی سوق داده شده و در نتیجه بقیه قسمت‌های سازه با ظرفیت‌های کمتری کار خواهند کرد.

کارآمدترین طرح دارای حالت تعادل مقاومت‌ها می باشد به طوریکه حالت تسلیم به طور یکنواخت توزیع شده و هیچ نقطه سازه تحت تأثیر تنش اضافی نباشد.)



«شکل 11»

تعریف شکل پذیری:

یعنی نمودار نیرو ـ تغییر شکل برای یک عضو شکل پذیر در شکل (11) رسم شده است. Δy در این شکل، تغییر شکل نظیر

حمید کاظمی

هر تسلیم فولاد در یک مقطع با تغییر شکل نقطه‌ای می‌باشد که در آن منحنی نیرو - تغییر شکل از حالت خطی به غیر خطی در می‌آید. Δu تغییر شکل نهایی می‌باشد که بعد از آن منحنی نیرو - تغییر شکل دارای شیب منفی می‌گردد.

متداول‌ترین روش سنجش شکل پذیری $\mu = \frac{\Delta u}{\Delta y}$ تعریف می‌شود.

در مورد تیرها و عناصر خمشی نسبت شکل پذیری برحسب انحنا تعریف می‌شود.

$$\mu = \frac{\theta u}{\theta y}$$

شکل پذیری همگن است به تمام و یا فقط قسمتی از آن اشاره کند، به همین جهت مقدار شکل پذیری در هر حالت فرق دارد.

تقسیم بندی ضرایب شکل پذیری: ضرایب شکل پذیری بر چند دسته اند؟ توضیح دهید؟

(شکل پذیری (ضرایب شکل پذیری) را می‌توان به ۳ دسته زیر تقسیم نموده

۱) ضریب شکل پذیری برای عضو مانند ظرفیت دورانی یک گره در اتصال عضو خمشی

۲) ضریب شکل پذیری برای طبقه و یا کف از یک ساختمان

۳) ضریب شکل پذیری کلی ساختمان

ضریب شکل پذیری برای هر ۳ دسته از قسمت‌های فوق توسط رابطه نیرو - تغییر مکان تعیین می‌گردد. این تغییر مکان برای عضو می‌تواند تغییر طول محوری عضو، دوران یک اتصال در عضو خمشی و یا تغییر شکل برشی از دیوار برشی باشد.

تغییر مکان برای طبقه، تغییر مکان نسبی بین دو طبقه در نظر گرفته می‌شود و تغییر مکان برای ساختمان یک نوع متوسط گیری شکل پذیری طبقات با استفاده از توابع وزنی تعیین می‌گردد.

بدین ترتیب ضریب شکل پذیری عضو معمولاً بزرگتر از ضریب شکل پذیری طبقه است.

و ضریب شکل پذیری طبقه بزرگتر از ضریب شکل پذیری کلی ساختمان است به طور مثال ضریب شکل پذیری عضو از 5 تا 15 تغییر می کند و ضریب شکل پذیری طبقه از 3 تا 8 تغییر نموده است. (درصورتیکه ضریب شکل پذیری کل ساختمان از 3 تا 5 در نظر گرفته می شود.)

(با توجه به تقسیم بندی فوق، تعریف ضریب شکل پذیری نسبت تغییر شکل مجاز حداکثر به تغییر شکل در تغییر مکان تسلیم مؤثر می باشد)

(ضریب شکل پذیری فولاد نسبت به بتن مسلح معمولاً بیشتر است و ضرایب شکل پذیری برای فولاد در تغییر شکل کششی بزرگتر از تغییر شکل خمشی و تغییر شکل خمشی بیشتر از تغییر شکل فشاری می باشد و ضرایب برای برش مقادیری بین خمش و فشار است)

(برای بتن ضریب شکل پذیری تابع ترتیب و مقدار تنش آرماتورها می باشد. با در نظر گرفتن آرماتور فشاری شکل پذیری 10 نیز قابل حصول است. برای ستون های بتنی با استفاده از فولادگذاری مارپیچ ضرایب بین 4 تا 6 امکان پذیر است و برای دیوارهای برشی با آرماتورهای افقی، عمودی و مایل ضرایب بین 4 تا 6 تغییر می کند.)

تعریف ضریب شکل پذیری به طور دقیق چیست؟

شکل پذیری را تعریف کرده اقسامش را معرفی کنید.

به چه علت آنالیز غیرخطی کمتر انجام می‌شود؟
فرض اصلی روش ضریب شکل پذیری چیست؟

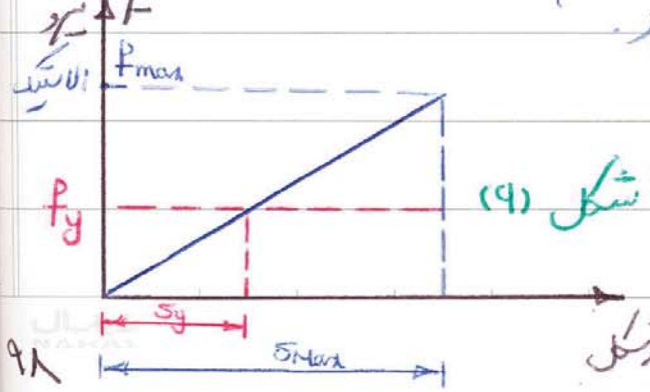
روش ضریب شکل پذیری ۵

روش ضریب شکل پذیری را تعریف کرده مفاد آن را بیان کنید.

(اگرچه آنالیز غیرخطی که در این فصل به کار برده شده است از نظر مفهوم مشکل نمی‌باشد لکن کاربرد آن حتی برای سازه‌های خیلی ساده نیز مستلزم عملیات محاسباتی بسیار زیاد است زیرا ماتریس سختی در هر مرحله از این فرآیند متوالی بایستی اصلاح و تجزیه شود. انتگرال تفاضلی سختی و مقاومت اعضاء مستلزم یک روش تکراری است به طوری که لازم است چندین طرح مختلف متوالیاً آنالیز شوند تا بتوان به طرح نهایی و قابل قبول دست یافت. به همین جهت آنالیز غیرخطی کامل به ندرت انجام می‌شود مگر در مواردی که برای کنترل نهایی دقت یک طرح تکمیل شده انجام گردد.

* در هر مرحله سختی را ثابت گرفته آنالیز خطی می‌کند. سپس برای هر مرحله بعد شرایط اولیه را شرایط مرحله قبل می‌گیرند و سختی را عوض می‌کنند.)

به منظور دستیابی به اندازه معقول از رفتار غیرخطی سازه در هنگام زلزله بدون انجام یک آنالیز غیرخطی واقعی روش ضریب شکل پذیری ارائه شده است.
(فرض اصلی در این روش این است که تغییرمکان‌های ایجاد شده بر اثر یک زلزله مشخص صرف‌نظر از اینکه سازه به صورت الاستیک عمل کند و یا اینکه به میزان زیادی تسلیم شود تقریباً یکسان هستند.) این رفتار در شکل پنج نشان داده شده است و تغییرمکان‌های غیرالاستیک مشابه تغییرمکان‌های الاستیک می‌باشند. بنابراین اگر تغییرشکل‌های غیرخطی عضو را مشابه تغییرشکل‌های واکنش الاستیک فرض کنیم رفتار غیرالاستیک آن را می‌توان مستقیماً از آنالیز واکنش الاستیکی بدست آورد.



شکل (۹)

در شکل (۹) اگر Max تغییرمکان (δ_{Max}) بدون توجه به مشخصات مقاومت آن با تغییرمکان غیرخطی یکسان باشد است

Max تغییر شکل (δ_{Max}) به تغییر شکل حدی الاستیک (δ_y) برابر خواهد بود با نیروی ایجاد شده در واکنش الاستیک متناظر به نیروی تسلیم عضو.

$$\frac{\delta_{Max}}{\delta_y} = \frac{f_{Max}}{f_y} \quad (1)$$

از طرف دیگر ضریب شکل پذیری برابر است با:

$$\mu = \frac{\delta_{Max}}{\delta_y} \quad (2)$$

بنابراین مقاومت طراحی مورد نیاز برای هر عضو را می توان برحسب نیروی واکنش الاستیکی را به صورت زیر بدست آورد.

مقاومت طراحی $$f_y = \frac{1}{\mu} f_{Max} \quad (3)$$

بنابراین به راحتی می توان تصویب واکنش غیرخطی را در طراحی در نظر گرفت. در ابتدا یک آنالیز واکنش خطی را انجام شده پس مقاومت های کاهش یافته را از نیروهای الاستیک حاصل شده و با اعمال کاهشی توسط ضریب شکل پذیری تعیین می گردد.

از سوی دیگر پاسخ غیرالاستیک یک طرح داده شده را می توان از ضرایب شکل پذیری اعضا که توسط نسبت Max نیروی الاستیک عضو به مقاومت محتوم عضو تعیین می شود.

$$\bar{\mu} = \frac{f_{Max}}{f_y} \quad (4)$$

این روش آنالیز تقریبی واکنش غیرالاستیک را می توان با استفاده از نتایج حاصل از واکنش الاستیک ساختمان 20 طبقه در شکل "چهار" نشان داده شده است تشریح کرد.

روش های تعیین طیف های طراحی :

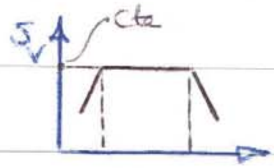
(برای زلزله های متوسط که احتمال وقوع آن ها در طول عمر مفید سازه چندین بار می باشد، سازه باید به نحوی طراحی شود که ارتعاشات ناشی از این زلزله ها در حد الاستیک تا الاستو پلاستیک قابل قبول بوده و هیچ گونه صدمه دائمی به سازه وارد نگردد. در خصوص زلزله های شدید رفتار سازه می تواند پلاستیک باشد به شرطی که سازه ویران نگردد و باعث صدمات جانی نشود.)

طیف های طرح اساس و پایه ای برای طراحی مناسب و منطقی سازه های مقاوم در برابر زلزله می باشند. اگرچه طیف های مربوط به زلزله های مختلف با یکدیگر کاملا متفاوت می باشند ولی تکیه بر رفتار استاندارد در تمام آن ها حاکم است که می توان به صورت زیر آن ها را دسته بندی نمود.

$\omega \to \infty \; (T \to 0) \Rightarrow S_a = PGA$

$\omega \to 0 \; (T \to$ زیاد $) \Rightarrow S_d = PGD$

ω و $T \to$ متوسط $\Rightarrow S_v \simeq cte$



در روابط بالا ω فرکانس، T پریود، PGD ، PGV و PGA به ترتیب حداکثر تغییر مکان، حداکثر سرعت و حداکثر شتاب زمین می باشد.

روش نیومارک :

این روش بر اساس سه پارامتر حداکثر تغییر مکان، سرعت و شتاب زمین تدوین شده است. نیومارک نیز از شکل کلی طیف پاسخ زلزله ها نتیجه گرفته که:

۱) در محدوده فرکانس کوچک پاسخ سازه ها برای تمام ضرایب میرایی به مقدار ثابتی که برابر حداکثر تغییر مکان زمین است می رسند.

$\lim_{\omega \to 0} S_D(\omega) = PGD$

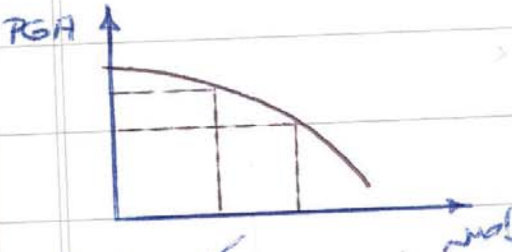
۲) در محدودهٔ میانی فرکانس طیف پاسخ در مقایسه با حداکثر شتاب، سرعت و تغییر مکان زمین بزرگتر شده و این بزرگ شدن برای شتاب بیشتر از سرعت و برای سرعت بیشتر از تغییر مکان می باشد.

۳) در محدودهٔ فرکانس بالا (سازه صلب) شتاب پاسخ به حداکثر شتاب زمین نزدیک می شود.

$\lim_{\omega \to \text{بزرگ}} S_a(\omega) = PGA$

بنابراین روش بدست آوردن طیف الاستیک طراحی به ترتیب ذیل خواهد بود.

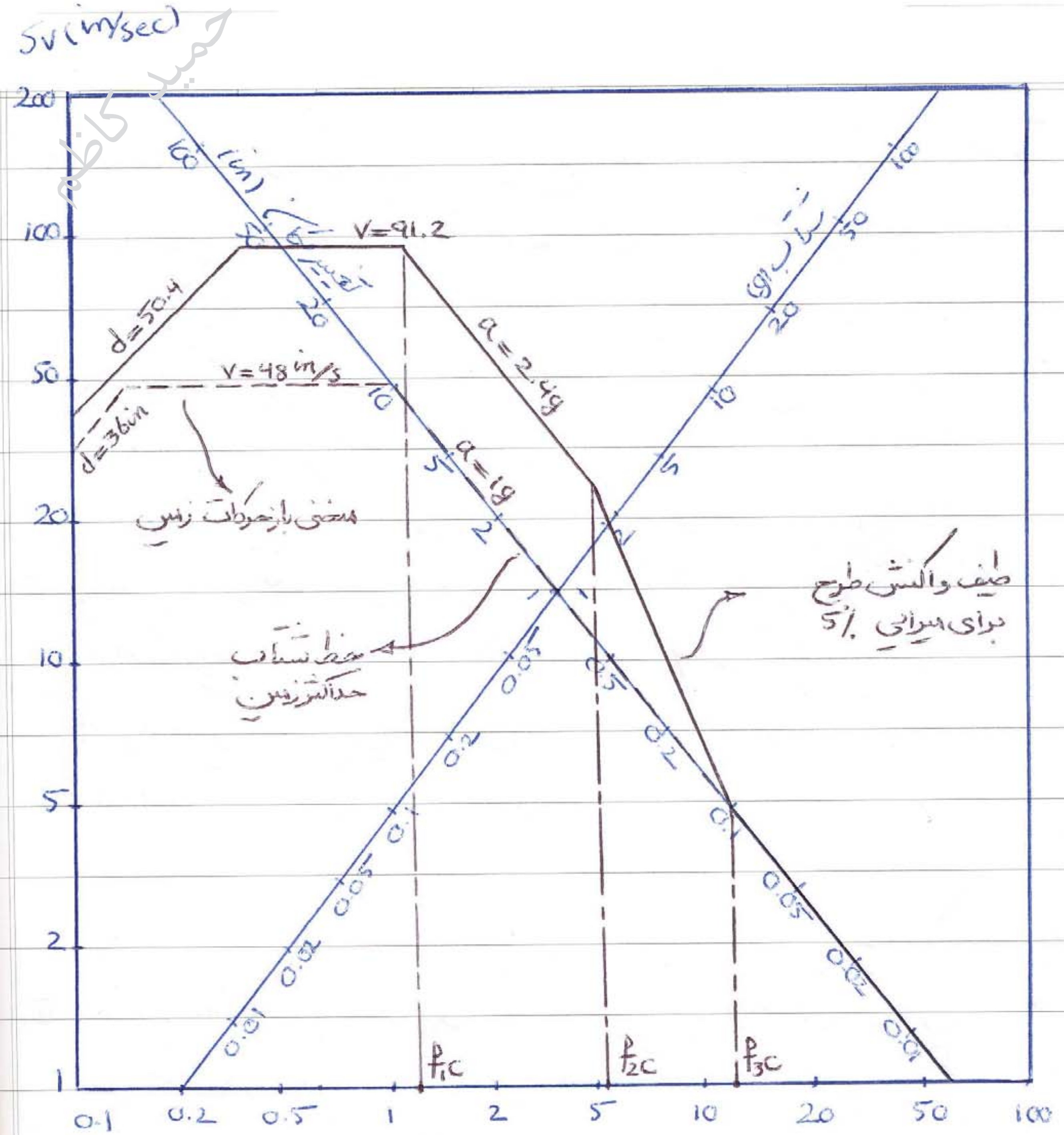
I) مقادیر حداکثر تغییر مکان زمین و بطور کلی حرکت زمین در سنگ پایه (Base Rock) را انتخاب کرده. (PGA، PGV، PGD) این حرکت حداکثر نیز از کاهش حداکثر مقادیر حرکت زمین در گسل با استفاده از قوانین کاهش و با در نظر گرفتن فاصله ناحیه مورد نظر تا گسل فعال بدست می آید.



II) مقادیر حداکثر انتخاب شده برای حرکت سنگ پایه را بر اساس پروفیل محلی خاک مطابق جدول پیشنهادی نیومارک تشدید نموده و حداکثر حرکت زمین در سطح خاک بدست می آید.

III) مقادیر تشدید شده حداکثر حرکت زمین در سطح خاک را روی کاغذ لگاریتمی سه جانبه رسم نموده بطوریکه برای بزرگترین محدوده فرکانس خط مستقیمی برای مقدار ثابت S_a برابر PGA بوجود آمده و برای کوچکترین محدودهٔ فرکانس خط مستقیمی برای مقدار ثابت $S_d = PGD$ بوجود آید.

با رسم نمودن خط مستقیمی برای مقدار ثابت $S_v = PGV$ در محدودهٔ متوسط فرکانس و به هم متصل کردن خطوط رسم شده، یک منحنی پایه نمایان می شود که Max حرکت زمین را نشان می دهد.



برای تعیین طیف واکنش طراحی کافیست طیف Max حرکت زمین را در یک ضرایب
ضرایب تشدید نمود. این ضرایب به ضریب میرایی که در حد تغییر شکل های غیر الاستیک
سازه که در آن اعضای سازه بستگی دارد.

ضرایب تشدید مناسب برای سازه‌هایی که روی خاک سخت و یا سنگ بنا شده‌اند
برای مقادیر مختلف میرایی سازه مطابق جدول زیر می‌باشد.

با انتخاب ضرایب تشدید، اینک می توان طیف واکنش طرح را با دنبال کردن گام های زیر بدست آورد

نسبت میرایی ٪ξ	ضرایب تشدید		
	شتاب	سرعت	تغییر مکان
0	6.4	4	2.5
0.5	5.8	3.6	2.2
1	5.2	3.2	2
2	4.3	2.8	1.8
5	2.6	1.9	1.4
7	1.9	1.5	1.2
10	1.5	1.3	1.1
20	1.2	1.1	1

۱) برای مقادیر کوچک فرکانس که محور موازی با تغییر مکان حرکت زمین رسم کنید.

۲) برای مقادیر کوچک فرکانس کمتر از ۰.۱، دامنه طیف واکنش به حرکت زمین نزدیک می شود.

۳) برای محدوده متوسط فرکانس، محدوده طیف واکنش به موازات سرعت Max حرکت زمین منحنی دیگری رسم نمایید.

۴) برای مقادیر فرکانس بالا که دارای ۳ قسمت می باشد به شرح زیر عمل نمایید.

الف) فرکانس نقطه تقاطع خط شتاب Max با سرعت Max را f_{1c} بنامید

ب) خط شتاب حداکثر را تا f_{2c} که $f_{2c} = 4f_{1c}$ است ادامه دهید

ج) برای فرکانس های $f_c > 4f_{1c}$ خط مستقیمی از f_{2c} رسم نمایید تا محور شتاب حداکثر زمین را در فرکانس f_{3c} که $f_{3c} = 10f_{1c}$ است قطع کند

د) برای فرکانس های $f_c > 10f_{1c}$ حد طیف واکنش همان خط شتاب زمین است.

مثال : مطلوبست رسم دیاگرام طیف طرح برای منطقه‌ای که مقادیر حرکات حداکثر زمین بشرح زیر بوده

$PGA = 1g \quad PGV = 48 \frac{in}{s} \quad PGD = 36\ in$

و نسبت میرایی سیستم ٪5 می‌باشد.

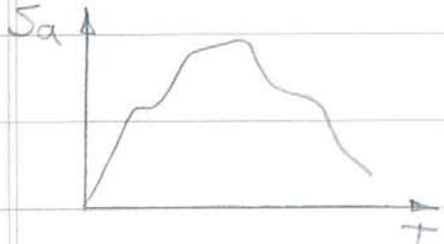
$a = 2.6 \times (1g) = 2.6g$

$\bar{V} = 1.9 \times (48) = 91.2$

$\bar{d} = 1.4 \times (36) = 50.4$

$f_{1c} = 1.3 \qquad f_{2c} = 4 \times 1.3 = 5.2 \qquad f_{3c} = 10 \times 1.3 = 13$

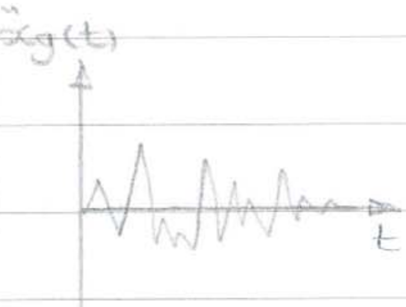
در روش تحلیل طیفی براساس ساختگاه و فاصله از گسل طیف شتاب - پریود سازه را بدست می‌آوریم. در سازه مورد نظر (فرضاً 3 طبقه) پریودهای مربوط به ۳ مد را بدست آورده شتاب‌های طیفی متناظر را از نمودار پیدا می‌کنیم. سپس از طریق روش SRSS طیف شتاب سازه را محاسبه می‌نماییم.



$$S_a = (S_{a_1}^2 + S_{a_2}^2 + S_{a_3}^2)^{1/2}$$

براساس این S_a، برش طبقات را محاسبه کرده طراحی را انجام می‌دهیم.

در روش تاریخچه زمانی شتاب را که مربوط به زلزله اتفاق افتاده است برحسب زمان به ما می‌دهند. این شتاب را به سازه اعمال می‌کنیم و برش طبقات را در تاریخچه زمانی (در زمان‌های مختلف) بدست می‌آوریم. بنابراین نیروها و تنش‌های اعضا برحسب زمان قابل محاسبه است.



روش طیفی دقیق‌تر می‌باشد چون احتمال شتاب منطقه را با تقریب بالایی بدست آورده‌ایم درصورتیکه در تاریخچه زمانی یک زلزله اتفاق افتاده را بررسی می‌کنیم (که ممکن است هیچ وقت دیگر دوباره اتفاق نیفتد)

در واقع تحلیل تاریخچه زمانی نوعی تحلیل برای کنترل سازه در اثر شتاب‌های مختلف و بررسی پاسخ آن در اثر این شتاب‌هاست.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

حل تمرین درس :

اصول مهندسی زلزله

استاد :

جناب آقای دکتر تهرانی زاده

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

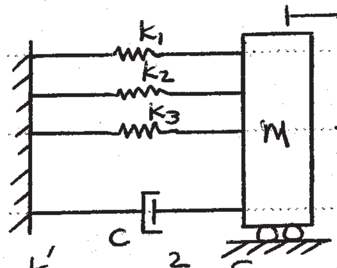
(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

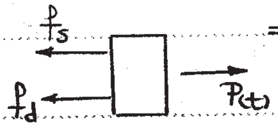
حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

«اصول مهندسی زلزله»

۱) درصورتی که مدل یک درجه آزادی سیستم سازه‌ای به صورت زیر باشد، مطلوبست تعیین معادله حرکت و هم چنین تابع تغییر مکان اگر $P(t)=0$ ، $k_1=k_2=k_3=k$ و $C=0$ باشد.



$$\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow -f_s - f_d + P(t) = m\ddot{x}(t)$$



$$\Rightarrow -k'x - c\dot{x} + P(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k'x(t) = 0$$

$$k'/m = \omega_n^2 \quad c/m = 2\xi\omega_n \Rightarrow \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + 3\omega_n^2 x(t) = 0$$

فرض: $x(t) = Xe^{\lambda t} \Rightarrow Xe^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2) = 0$

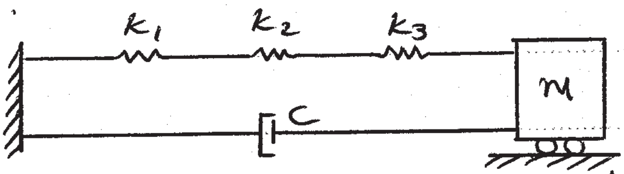
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \xRightarrow{c=0} \lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$$

$$\Rightarrow x(t) = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t \qquad \omega_n = \sqrt{k'/m} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$x(0) = X_0 = C \qquad \dot{x}(0) = \dot{X}_0 = D\omega_n \Rightarrow D = \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow x(t) = X_0\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\right)t + \frac{\dot{X}_0\sqrt{m}}{\sqrt{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\right)t$$

۲) مدل مکانیکی سیستم یک درجه آزادی به صورت شکل مقابل می‌باشد. مطلوبست تعیین معادله حرکت و هم چنین تابع تغییر مکان در صورتیکه $P(t)=0$ ، $k_1=k_2=k_3=k$ ، $C=0$ باشد.



حل این مثال کاملاً شبیه بالا می‌باشد با این تفاوت که $k'=k/3$ است پس:

$$x(t) = X_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\right)t + \frac{\dot{X}_0\sqrt{3m}}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}\right)t$$

(تمارین ۸-۱)

این تمرین‌ها را یک مرتبه تحویل داده‌ام. اما برای تکمیل و تصحیح بعضی از اشتباهاتی که در مرتبه اول رخ داده بود تصمیم به حل دوباره آن‌ها گرفتم.

*

کامل

ترتیب — مرتب

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

۳) قاب یک طبقه شکل زیر مفروض است. درصورتیکه وزن قاب $W=200\,kips$ $(1kips = 10^3 lb)$ و پریود سازه $T=0.2^s$ باشد مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان درحالتیکه تغییر مکان اولیه بصورت $X_0 = 2in$ و سرعت اولیه $\dot{X}_0 = 1.5\ in/sec$ باشد. مقدار حداکثر برش پایه را محاسبه کنید. حداکثر شتاب کف را بدست آورید.

$W = 200{,}000\ lb$ $\quad T = 0.2\,s$ $\quad \xi = 0$ فرض :

تابع تغییر مکان $\quad x(t) = X_0 \cos\omega_n t + \dfrac{\dot{X}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t = X\cos(\omega_n t - \varphi)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{Kg}{mg}} \Rightarrow Kg = W\cdot\omega_n^2 \Rightarrow K\,(386.06)^{(in/s^2)} = 2\times10^5 \times (10\pi)^2\ (rad/s)^2$$

$$\Rightarrow K = 511299\ lb/in$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{X_0^2 + \left(\dfrac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{2^2 + \left(\dfrac{1.5}{10\pi}\right)^2} = 2.001 \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) = tg^{-1}\left(\dfrac{1.5}{10\pi\times 2}\right) = 1.368^\circ \end{cases} \Rightarrow x(t) = 2.001\cos(10\pi t - 7.6\times10^{-3}\pi)$$

حداکثر برش $\quad F = KX_0 = 511299\times 2 = 1022.598\times10^3\ lb$

$$x(t) = 2.001\cos(10\pi t - 7.6\times10^{-3}\pi) \rightarrow \dot{x}(t) = -2.001(10\pi)\sin(10\pi t - 7.6\times10^{-3}\pi)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -2.001(10\pi)^2\cos(10\pi t - 7.6\times10^{-3}\pi)$$

$$\Rightarrow (\ddot{x}(t))_{Max} = 2.001\times(10\pi)^2 = 1974.91\ in/s^2$$

۴) در تمرین ۳ درصورتیکه مقدار نسبت استهلاک بحرانی ۲٪ و تغییر مکان اولیه 5in و سرعت اولیه صفر باشد، مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان و رسم تابع و دامنه تغییر مکان بعد از ۶ سیکل کامل.

$\xi = 2\%$ $\quad X_0 = 5\,in$ $\quad \dot{X}_0 = 0$ $\quad T = 0.2\,s$ $\quad W = 200{,}000\ lb$

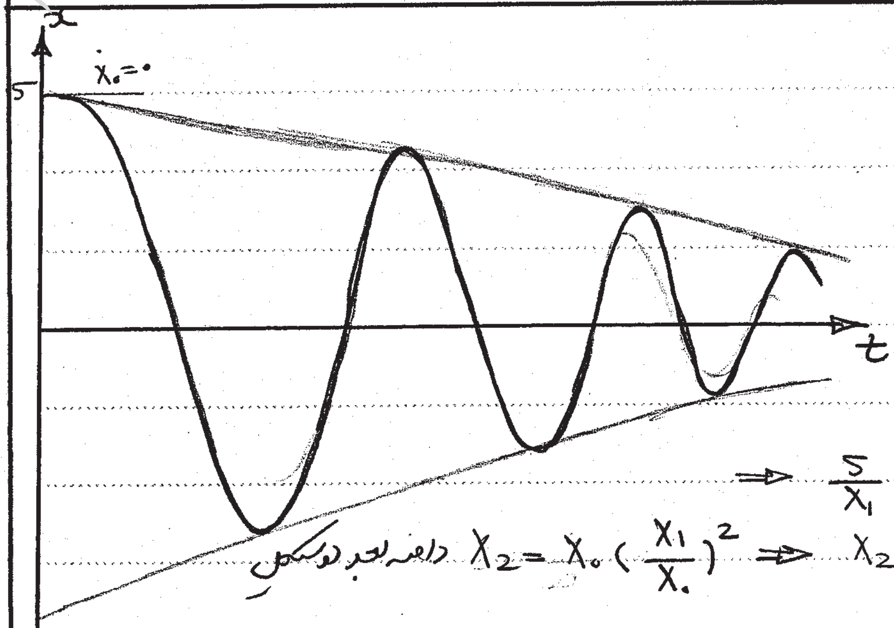
تابع تغییر مکان $\quad x(t) = X e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \varphi)$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = 10\pi \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 10\pi\sqrt{1-0.02^2} = 9.998\pi$$

$$\begin{cases} X = \left[\left(\dfrac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d}\right)^2 + X_0^2\right]^{1/2} = \left[\left(\dfrac{0 + 0.02\times10\pi\times5}{9.998\pi}\right)^2 + 5^2\right]^{1/2} = 5.001 \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d X_0}\right) = tg^{-1}\left(\dfrac{0 + 0.02\times10\pi\times5}{9.998\pi\times5}\right) = \cancel{5.712}^{\,0.02^\circ} \simeq \cancel{0.0317\pi}^{\,0.0064\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = 5e^{-0.2t}\cos(9.998\pi t - \cancel{0.0317\pi}^{\,0.0064\pi})$$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱



$t=0 \rightarrow x(0)=5$

$t\rightarrow\infty \Rightarrow x\rightarrow 0$

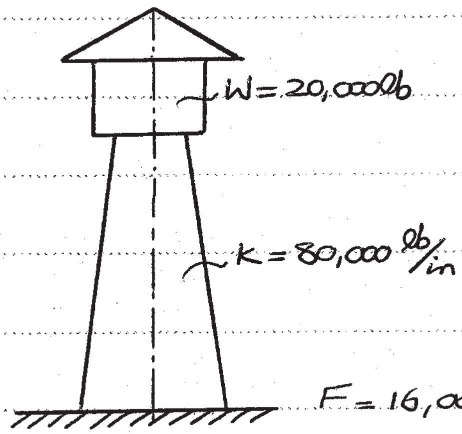
$\xi = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{X_0}{X_1}\right)$

$\Rightarrow 0.02 = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{5}{X_1}\right)$

$\Rightarrow \frac{5}{X_1} = e^{0.04\pi} \Rightarrow X_1 = 4.4096\ in$

دامنه بعد از دو سیکل $X_2 = X_0\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 \Rightarrow X_2 = 5\left(\frac{4.4096}{5}\right)^2 = 3.889\ in$

۵) منبع آبی مطابق شکل موجود است. اگر وزن این منبع 20,000lb و سختی پایه‌های منبع 80,000 lb/in فرض شود و این منبع تحت اثر نیرویی قرار گیرد که مقدار آن F=16,000 lb باشد، مطلوبست تعیین دامنه حرکت پس از 3، 5 و 10 سیکل، نسبت استهلاک بحرانی، ضریب استهلاک، فرکانس طبیعی و فرکانس استهلاکی. (دامنه نوسان پس از یک رفت و برگشت به 2/3 حالت اولیه کاهش می‌یابد)



F=16,000lb

$F = kX_0 \Rightarrow 16{,}000 = 80{,}000\,X_0 \Rightarrow X_0 = 0.2\ in \quad , \quad X_1 = 0.133\ in$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{mg}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{80{,}000\times 386.06}{20{,}000}} = 39.297\ rad/s$ فرکانس طبیعی

$\xi = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{X_0}{X_1}\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{0.2}{0.133}\right) = 0.0649 = 6.49\%$ نسبت استهلاک بحرانی

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 39.297\sqrt{1-0.0649^2} = 39.214\ rad/s$ فرکانس استهلاکی

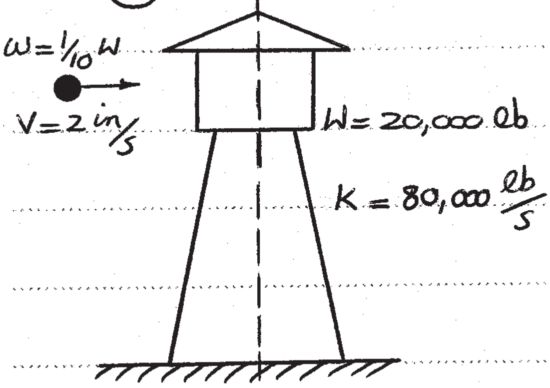
$c = 2\xi\omega_n m = 2\times\frac{6.49}{100}\times 39.297\times\frac{20{,}000}{386.06} = 264.25\ \frac{lb}{in/s}$ ضریب استهلاک

$n=3 \rightarrow X_3 = X_0\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^3 = 0.2\left(\frac{0.133}{0.2}\right)^3 = 0.0588$ تعیین دامنه پس از n سیکل

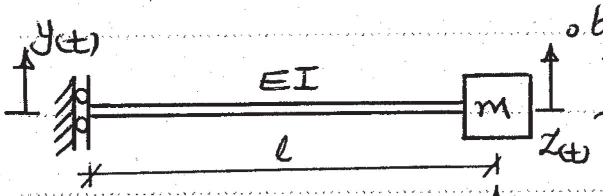
$n=5 \rightarrow X_5 = 0.2\left(\frac{0.133}{0.2}\right)^5 = 0.026 \quad , \quad n=10 \rightarrow X_{10} = 0.2\left(\frac{0.133}{0.2}\right)^{10} = 3.38\times 10^{-3}$

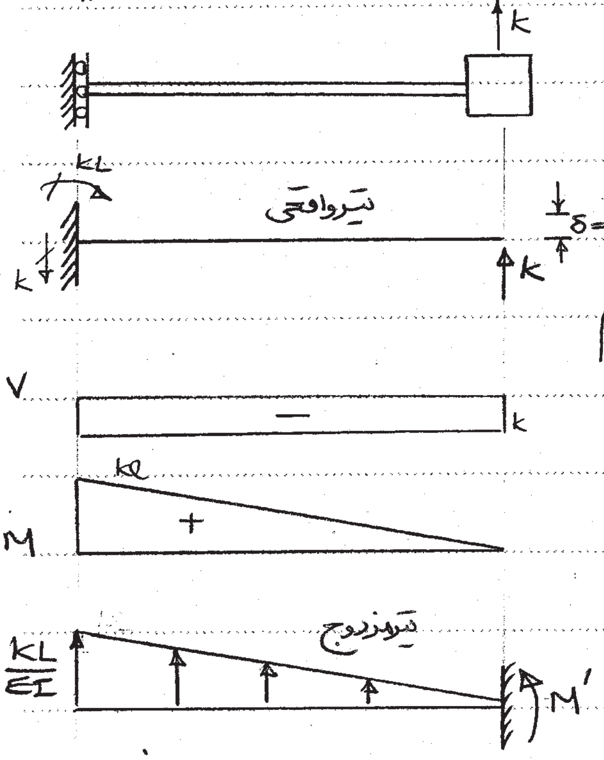
حمید کاظم ۸۴۲۲۴۰۴۱

۶) در صورتیکه در تمرین ۵ گلوله‌ای به وزن $w=0.1W$ با سرعت $V=2\ in/s$ به منبع اصابت کند و نوع تصادم الاستیک فرض شود، مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان، مقدار Max برش پایه و رسم منحنی در صورتیکه $\xi=5\%$ در نظر گرفته شود.



۷) تیر یکسر گیردار شکل زیر مفروض است. درصورتیکه تکیه‌گاه این تیر تحت اثر حرکت $y(t)$ قرار گیرد، مطلوبست معادله حرکت جرم m برحسب $z(t)$.





$$M' = 1 = \delta$$

$$\rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\,\frac{kL}{EI}\times L\right)\left(\tfrac{2}{3}L\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{kL^3}{3EI} = 1 \Rightarrow k = \frac{3EI}{L^3}$$

* برای بدست آوردن سختی k یک تغییر مکان واحد اعمال می‌کنیم و نیروی متناظر آن را بدست آورده سختی می‌نامیم.

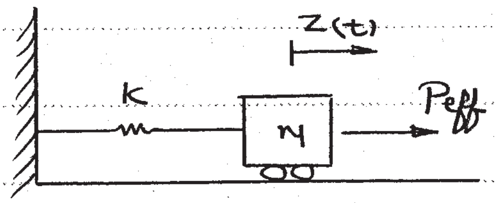
$$m\ddot{x}_t + c\dot{z} + kz = P(z)$$

$$x_t = z(t) + y(t)$$

$$\rightarrow \ddot{x}_t = \ddot{z}(t) + \ddot{y}(t)$$

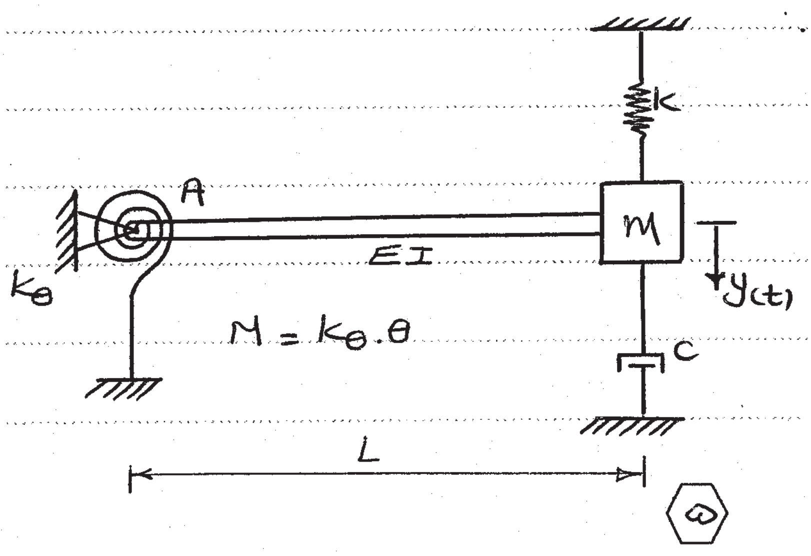
$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}(t)$$

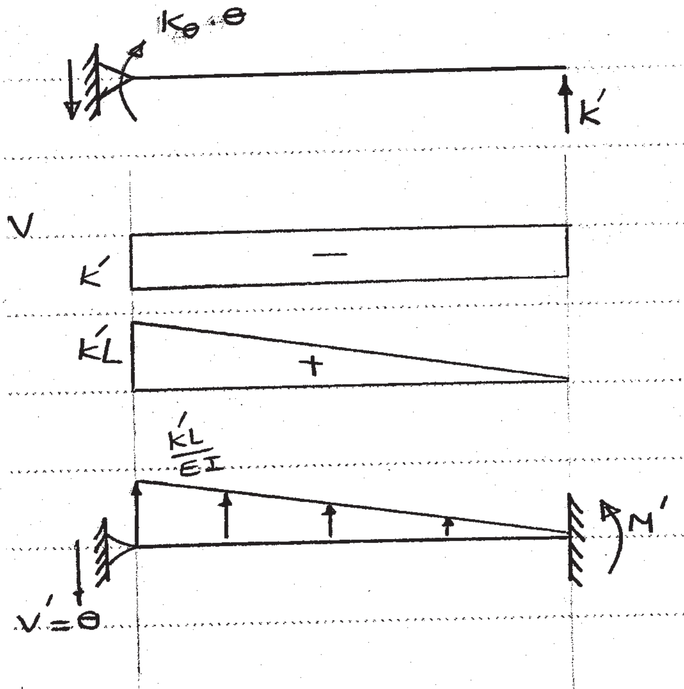
$$c\dot{z}(t) = 0 \qquad P_{eff} = -m\ddot{y}(t)$$



$$m\ddot{z}(t) + \frac{3EI}{L^3}z(t) = -m\ddot{y}(t) + mg$$

۸) سازه شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه تیر AB بی‌وزن بوده و در تکیه‌گاه A علاوه بر لولا توسط فنر پیچشی مقید شده باشد، معادله حرکت جرم m را برحسب $y(t)$ بدست آورید. (سختی فنر k_θ می‌باشد.)





$$k'L = k_\theta . \theta \quad (1)$$

$$M' = \delta = 1$$

$$M' - \tfrac{1}{2} L \frac{k'L}{EI} \left(\frac{2}{3} L\right) + \theta L = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{k' L^3}{3EI} + \theta L \quad (2)$$

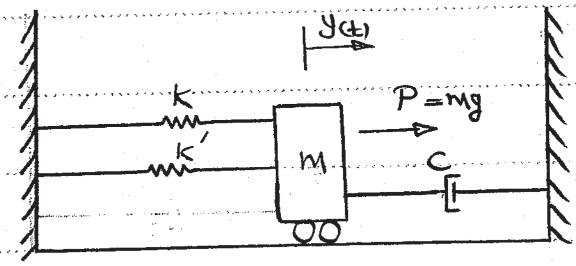
(1) , (2) :

$$1 = \frac{k' L^3}{3EI} + \frac{k' L^2}{k_\theta}$$

$$\Rightarrow k' \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{L^2}{k_\theta} \right) = 1$$

$$\Rightarrow k' \left(L^2 \left(\frac{L k_\theta + 3EI}{3EI\, k_\theta} \right) \right) = 1$$

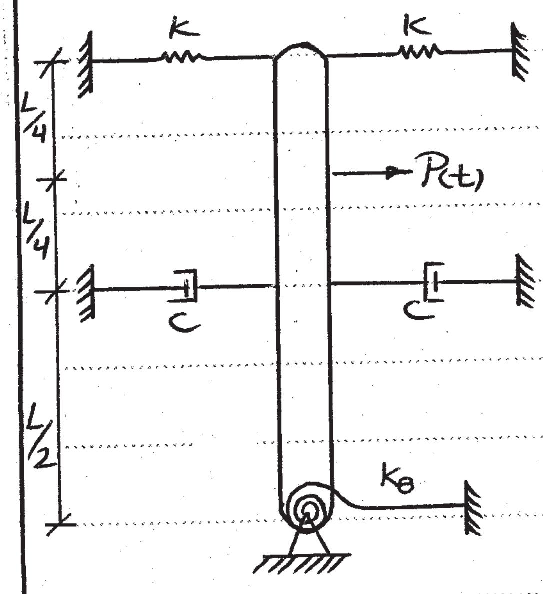
$$\Rightarrow k' = \frac{3EI\, k_\theta}{L^2 (L k_\theta + 3EI)}$$



سیستم معادل بصورت مقابل می باشد :

$$m\ddot{y}_{(t)} + c\dot{y}_{(t)} + (k + k') y_{(t)} = mg$$

۹) ستون صلبی دارای تکیه گاه نیمه صلب می باشد که توسط فنرهایی که در انتهای آزاد آن قرار دارند مهار شده است. مطلوبست تعیین معادله حرکت این سیستم درصورتیکه $\mu(x)$ جرم در واحد طول این ستون صلب باشد، درحالتی که $\mu(x) = \mu$ باشد معادله حرکت را بدست آورید و سیستم چند درجه آزادی آن را نشان دهید.



روش دوم (سؤال ۹)

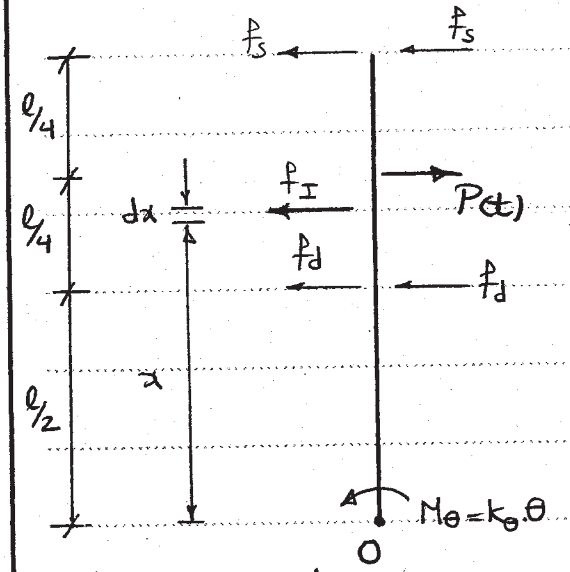
$$M^* = \int_0^L \mu \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \mu \int_0^L \left(x/L\right)^2 dx = 1/3\, L\mu$$

$$C^* = \sum c_i \psi_i^2 = 2c\left(\frac{L/2}{L}\right)^2 = c/2$$

$$K^* = \sum k_i \psi_i + \sum k_\theta (\psi_i')^2 = 2k + k_\theta / L^2$$

$$P^* = \sum P_i \cdot \psi_i = P_{(t)} \frac{3L/4}{L} = 3/4\, P_{(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} L\mu \ddot{Y}_{(t)} + \frac{c}{2} \dot{Y}_{(t)} + \left(2k + \frac{k_\theta}{L^2}\right) Y_{(t)} = \frac{3}{4} P_{(t)}$$



$$V(x,t) = \psi(x) . Y(t)$$

$$\Longrightarrow V(x,t) = x/L . Y(t)$$

$\Sigma M_O = 0$ رابطه زیر برقرار است.

$$M_I + M_D + M_S + M_\theta = M_{P(t)} \qquad (1)$$

$$dM_I = df_I . x$$

$$df_I = dm . \ddot{V}(x,t)$$

$$dm = \mu(x)\, dx \Longrightarrow df_I = \mu(x) . \ddot{V}(x,t)\, dx$$

$$\Longrightarrow dM_I = \mu(x) . \ddot{V}(x,t) . x . dx$$

$$\Longrightarrow M_I = \ddot{Y}(t) \int_0^L \mu(x) \frac{x^2}{L} dx = \ddot{Y}(t) . \mu \int_0^L \frac{x^2}{L} . dx$$

$$\Longrightarrow M_I = \frac{1}{3} L^2 \mu . \ddot{Y}(t) \qquad (2)$$

$$M_D = 2 f_d . L/2 = \cancel{2}\, c \dot{V}(L/2, t) . L/\cancel{2} = c\left(\frac{L/2}{L}\right) \dot{Y}(t) . L = \frac{1}{2} Lc . \dot{Y}(t) \qquad (3)$$

$$M_S = 2 f_S . L = 2k V(L,t) . L = 2Lk\, Y(t) \qquad (4)$$

$$M_{P(t)} = \frac{3}{4} L P(t) \qquad (5)$$

$$M_\theta = k_\theta . \theta \qquad \theta = \frac{V(L,t)}{L} = \frac{L/L . Y(t)}{L} = \frac{1}{L} . Y(t)$$

$$\Longrightarrow M_\theta = \frac{k_\theta}{L} . Y(t) \qquad (6)$$

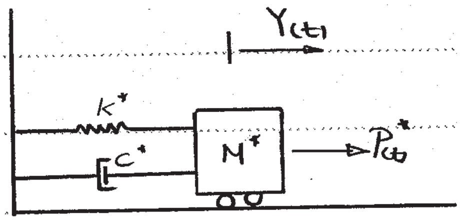
با قرار دادن روابط 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 در رابطه (1) خواهیم داشت.

$$\frac{1}{3} L^2 \mu . \ddot{Y}(t) + \frac{1}{2} Lc . \dot{Y}(t) + 2Lk\, Y(t) + \frac{k_\theta}{L} . Y(t) = \frac{3}{4} L P(t)$$

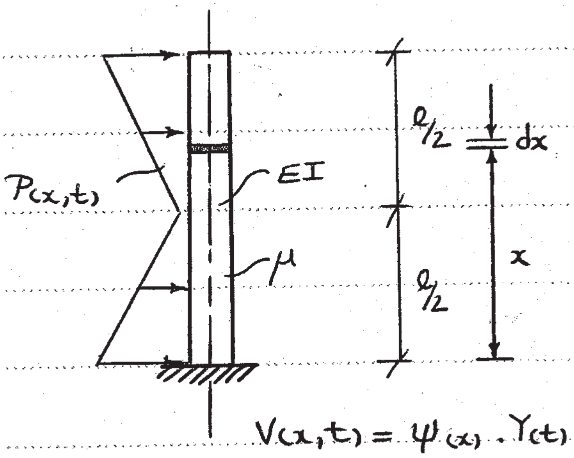
طرفین را بر L تقسیم می‌کنیم پس:

$$\left(\frac{1}{3} L \mu\right) \ddot{Y}(t) + \left(\frac{1}{2} c\right) \dot{Y}(t) + \left(2k + \frac{k_\theta}{L^2}\right) Y(t) = \frac{3}{4} P(t)$$

$$\begin{cases} M^* = \frac{1}{3} L\mu & \text{جرم معادل} \\ C^* = \frac{1}{2} C & \text{ضریب استهلاک معادل} \\ K^* = 2K + \frac{K_\theta}{L^2} & \text{ضریب سختی معادل} \\ P^* = \frac{3}{4} P(t) & \text{نیروی معادل} \end{cases}$$



۱۰) ستون تیر شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه EI و μ طول ستون ثابت فرض شوند، مطلوبست تعیین معادله حرکت، جرم، سختی و نیروی معادل. (تابع شکل را بصورت $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ در نظر بگیرید).



$$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t) \qquad \delta V(x,t) = \psi(x) \cdot \delta Y(t)$$

$$\begin{cases} \delta W_E = \int_0^L p(x,t)\, dx\ \delta V(x,t) \\ \delta W_{I_1} = \int_0^L m(x)\ \delta d\theta & \text{حاصل از ممان} \\ \delta W_{I_2} = \int_0^L f_I(x,t)\, dx\ \delta V(x,t) & \text{حاصل از اینرسی} \end{cases}$$

کار مجازی نیروی داخلی حاصل از ممان:

$$\theta = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \rightarrow d\theta = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} dx \rightarrow \delta d\theta = \frac{\partial^2 \delta V(x,t)}{\partial x^2} dx$$

$$\frac{m(x)}{EI} = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \rightarrow m(x) = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \cdot EI$$

$$\rightarrow \delta W_{I_1} = \int_0^L m(x)\ \delta d\theta = \int_0^L \left(\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\right) \cdot EI \cdot \frac{\partial^2 \delta V(x,t)}{\partial x^2} dx$$

$$= \int_0^L Y(t) \left(\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right) EI \cdot \delta Y(t) \left(\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right) \cdot dx$$

سوال ۱۰) روش دوم ← راه حل ساده‌تر) :

$$M^* = \int_0^L \mu(x)\,(\psi(x))^2\,dx = \mu\int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \mu\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)L = 0.2268\,\mu L$$

$$K^* = \int_0^L EI\,(\psi''(x))^2\,dx = \int_0^L EI\left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{16L^4}EI\int_0^L \left(\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi^4 EI}{16L^4}\left(\frac{L}{2}\right) = 3.044\,\frac{EI}{L^3}$$

$$P^* = \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx \qquad P(x,t) = \begin{cases} \dfrac{2P}{L}\left(\dfrac{L}{2}-x\right) & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2} \\[2ex] \dfrac{2P}{L}\left(x-\dfrac{L}{2}\right) & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

$$\Rightarrow P^* = 2\int_0^{L/2} \frac{2}{l}P\left(\frac{L}{2}-x\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = \frac{4P}{l}\left(\frac{L^2}{8}-\frac{4L^2}{\pi^2}+\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}L^2\right)$$
$$= 0.101\,PL$$

$$\Rightarrow \quad 0.2268\,\mu L\,\ddot{Y}(t) + 3.044\,\frac{EI}{L^3}\,Y(t) = 0.101\,PL$$

$$= Y(t)\,.\,\delta Y(t)\,.\,EI\int_0^l \left(\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$\psi(x)=1-\cos\frac{\pi}{2L}x \rightarrow \frac{d\psi(x)}{dx}=\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi}{2L}x \rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos\frac{\pi}{2L}x$$

$$\Rightarrow \delta w_{I_1}=Y(t)\,.\,\delta Y(t)\,.\,EI\int_0^l \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4\cos^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)dx$$

$$\int_0^l \cos^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)dx=\int_0^l\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{L}x}{2}\right)dx=\frac12\int_0^l\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right)dx$$

$$=\frac12\left(x+\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}x\right)\Big|_0^l=\frac12\left(l+\frac{l}{\pi}\sin(\pi-0)\right)=l/2$$

$$\Rightarrow \delta w_{I_1}=l/2\,.\,Y(t)\,.\,\delta Y(t)\,.\,EI$$

کار مجازی نیروی داخلی حاصل از نیروی اینرسی :

$$f_I(x,t)=\mu\,.\,\ddot v(x,t)=\mu\,.\,\psi(x)\,.\,\ddot Y(t)$$

$$\delta w_{I_2}=\int_0^L f_I(x,t)\,dx\,\delta v(x,t)=\int_0^L\mu\,.\,\psi(x)\,.\,\ddot Y(t)\,dx\,.\,\psi(x)\,.\,\delta Y(t)$$

$$=\mu\,.\,\ddot Y(t)\,.\,\delta Y(t)\int_0^L\left(1-\cos\frac{\pi}{2L}x\right)^2dx$$

$$\int_0^L\left(1-\cos\frac{\pi}{2L}x\right)^2dx=\int_0^L\left(1-2\cos\frac{\pi}{2L}x+\cos^2\frac{\pi}{2L}x\right)dx$$

$$=\int_0^L\left(1-2\cos\frac{\pi}{2L}x+\frac12+\frac12\cos\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$=\left[\frac32x-2\,\frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi}{2L}x+\frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi}{L}x\right]_0^L=\frac32L-\frac{4L}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{L}{2\pi}\sin(\pi-0)$$

$$=\frac32L-\frac4\pi L=L\left(\frac32-\frac4\pi\right)$$

$$\Rightarrow \delta w_{I_2}=\left(\frac32-\frac4\pi\right)L\,.\,\mu\,.\,\ddot Y(t)\,.\,\delta Y(t)$$

کار مجازی خارجی :

$$p(x,t)=\begin{cases}P(t)\left(l/2-x\right) & 0\leqslant x\leqslant l/2\\ P(t)\,.\,\left(x-l/2\right) & l/2\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

$$\delta w_E=\int_0^L p(x,t)\,dx\,\delta v(x,t)=2\int_0^{l/2}P(t)\left(l/2-x\right).\,\delta Y(t)\,\psi(x)\,.\,dx$$

$$=2P(t)\,.\,\delta Y(t)\,.\int_0^{l/2}\left(l/2-x\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{2L}x\right)$$

$$\int_0^{l/2}\left(l/2-l/2\cos\frac{\pi}{2L}x-x+x\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\right)dx=$$

$$\int_0^{l/2}\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{2l}x-x\right)dx+\int_0^{l/2}\left(x\cdot\cos\frac{2\pi}{l}x\right)dx$$

$$1)\ \int_0^{l/2}\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{2l}x-x\right)dx=\frac{l}{2}x-\frac{l}{2}\times\frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi}{2l}x-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^{l/2}$$

$$=\frac{l^2}{4}-\frac{l^2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-\frac{l^2}{8}=\frac{l^2}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l^2}{\pi}=l^2\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\right)$$

$$2)\ \int_0^{l/2}x\cdot\cos\frac{2\pi}{l}x\cdot dx$$

$\int u\,dv=uv-\int v\,du$ ← روش جزء به جزء

$$dv=\cos\frac{2\pi}{l}x\cdot dx\rightarrow v=\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}x\qquad u=x\rightarrow du=dx$$

$$\Rightarrow\int_0^{l/2}x\cdot\cos\frac{2\pi}{l}x\cdot dx=\frac{l}{2\pi}\cdot x\sin\frac{2\pi}{l}x-\int\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}x\cdot dx$$

$$=\frac{l}{2\pi}x\sin\frac{2\pi}{l}x-\frac{l}{2\pi}\cdot\frac{l}{2\pi}\left(-\cos\frac{2\pi}{l}x\right)\Big]_0^{l/2}$$

$$=\frac{l^2}{4\pi}\sin(\pi-0)+\frac{l^2}{4\pi^2}\cos(\pi-0)=-\frac{l^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow\int_0^{l/2}\left(\frac{l}{2}-x\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{2l}x\right)=l^2\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}-\frac{1}{4\pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow\delta W_E=2l^2\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}-\frac{1}{4\pi^2}\right)P_{(t)}\,\delta Y_{(t)}$$

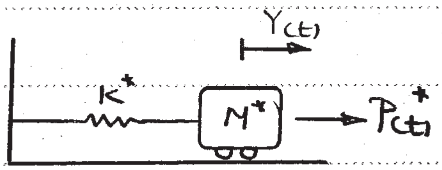
با استفاده از اصل کار مجازی داریم:

$$\delta W_{I_1}+\delta W_{I_2}=\delta W_E$$

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)L\cdot\mu\cdot\ddot{Y}_{(t)}\cdot\delta Y_{(t)}+\frac{l}{2}\cdot EI\cdot Y_{(t)}\cdot\delta Y_{(t)}=l^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}-\frac{1}{2\pi^2}\right)P_{(t)}\cdot\delta Y_{(t)}$$

دو طرف را بر $\delta Y_{(t)}$ تقسیم می کنیم.

$$\underbrace{\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)L\cdot\mu\right)}_{M^*}\ddot{Y}_{(t)}+\underbrace{\left(\frac{l}{2}\cdot EI\right)}_{K^*}Y_{(t)}=\underbrace{\left(l^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}-\frac{1}{2\pi^2}\right)P_{(t)}\right)}_{P_{(t)}^*}$$



تمرین ۱۱ (ادامه حل):

$$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$$

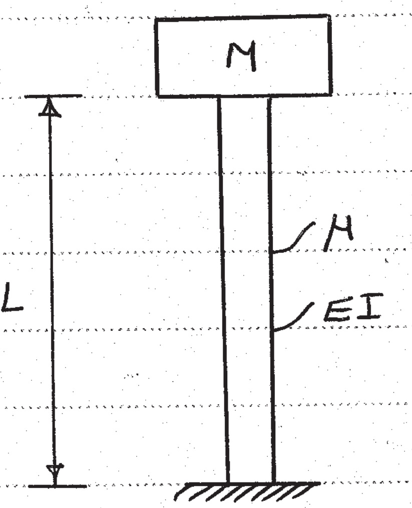
$$M^* = \int_0^L \mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + M\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = 0.2268\,\mu L + M$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 3.044\,\frac{EI}{L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L \mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx + M\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right) = 0.3634\,\mu L + M$$

$$\Rightarrow (0.2268\,\mu L + M)\,\ddot{Y}(t) + 3.044\,\frac{EI}{L^3}\,Y(t) = -(0.3634\,\mu L + M)\,\ddot{x}_g(t)$$

$M = \mu L$



تمرین ۱۱.۸: سازه برجی بصورت شکل مقابل مدل شده است. درصورتیکه EI و μ در طول برج ثابت درنظر گرفته شود، مطلوبست تعیین:

الف) معادله حرکت ب) جرم معادل

ج) سختی معادل د) نیروی موثر معادل

هـ) ضریب تحریک زلزله

اگر این برج تحت اثر حرکت زمین با شتاب $\ddot{x}_g(t)$ قرار گرفته باشد.

$$V(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t) \longrightarrow \delta V(x,t) = \psi(x)\cdot \delta Y(t)$$

$$\delta W_E = \delta W_I \longrightarrow 0 = \delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} \qquad (1)$$

۱) کارمجازی نیروهای داخلی:

$$\delta W_{I_1} = \int M(x)\, \delta d\theta$$

$$= \int EI \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta V(x,t)}{\partial x^2} dx = Y(t)\cdot \delta Y(t)\cdot EI \int_0^L \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \qquad (2)$$

۲) کارمجازی نیروهای اینرسی:

$$\delta W_{I_2} = \int f_I(x,t)\cdot \delta V(x,t)\cdot dx + M\cdot \ddot{V}_t(L,t)\cdot \delta V(L,t)$$

$$f_I(x,t) = \mu(x)\cdot \ddot{V}_t(x,t)$$

$$V_t(x,t) = V(x,t) + x_g(t) \longrightarrow \begin{cases} \ddot{V}_t(x,t) = \ddot{V}(x,t) + \ddot{x}_g(t) \\ \ddot{V}_t(L,t) = \ddot{V}(L,t) + \ddot{x}_g(t) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \delta W_{I_2} = \int \mu(x)\cdot \ddot{V}_t(x,t)\cdot \delta V(x,t)\, dx + M\cdot \ddot{V}_t(L,t)\cdot \delta V(L,t)$$

$$= \mu \int (\ddot{V}(x,t) + \ddot{x}_g(t))\cdot \psi(x)\cdot \delta Y(t)\, dx + M\,(\ddot{V}(L,t) + \ddot{x}_g(t))\cdot \psi(L)\cdot \delta Y(t)$$

$$= \mu\cdot \ddot{Y}(t)\cdot \delta Y(t)\cdot \int_0^L \psi^2(x)\cdot dx + \mu\cdot \delta Y(t)\cdot \ddot{x}_g(t) \int_0^L \psi(x)\cdot dx$$

$$+ M\cdot \ddot{Y}(t)\cdot \delta Y(t)\cdot \psi^2(L) + M\cdot \delta Y(t)\cdot \ddot{x}_g(t)\cdot \psi(L)$$

$$= \ddot{Y}(t)\cdot \delta Y(t) \left[\mu \int_0^L \psi^2(x)\cdot dx + M\,\psi^2(L)\right] + \ddot{x}_g(t)\cdot \delta Y(t) \left[\mu \int_0^L \psi(x)\cdot dx + M\cdot \psi(L)\right] \qquad (3)$$

ازقرار دادن روابط (2) و (3) دررابطه (1) خواهیم داشت:

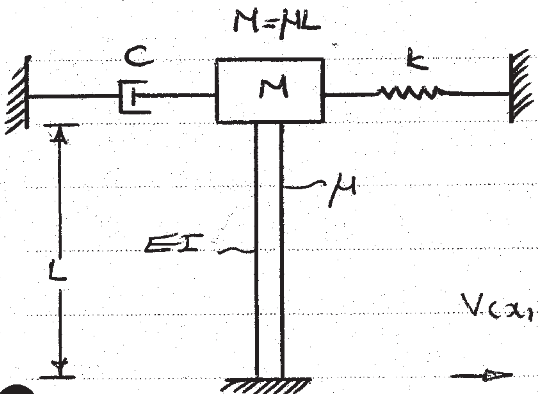
$$\ddot{Y}(t)\cdot\delta Y(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x)^2\cdot dx + M\,\psi(L)^2\right] + Y(t)\cdot\delta Y(t)\cdot EI\int_0^L \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2\cdot dx$$
$$= -\ddot{x}_g(t)\cdot\delta Y(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x)\cdot dx + M\,\psi(L)\right]$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x)^2\cdot dx + M\psi(L)^2\right] + Y(t)\cdot EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2\cdot dx = -\ddot{x}_g(t)\left[\mu\int_0^L\psi(x)\cdot dx + M\psi(L)\right]$$

جرم معادل $M^* = \mu\int_0^L \psi(x)^2\cdot dx + M\psi(L)^2$ سختی معادل $k^* = EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2$

ضریب تحریک $\bar{k} = \mu\int_0^L \psi(x)\cdot dx + M\psi(L)$ نیروی موثر معادل $P^*_{eff} = -\bar{k}\cdot\ddot{x}_g(t)$

معادله حرکت $M^*\ddot{Y}(t) + k^*Y(t) = P^*_{eff}(t)$



تمرین ۱۲: سازه زیر به شکل مقابل مدل شده است. مطلوبست تعیین معادله حرکت، سختی معادل، جرم معادل، نیروی موثر معادل و ضریب استهلاک معادل در صورتیکه سازه تحت اثر حرکت زمین قرار گرفته باشد.

$$V(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t)$$
$$\rightarrow \delta V(x,t) = \psi(x)\cdot\delta Y(t)$$

روش کار نیروی مجازی:

$$\delta W_E = \delta W_I \rightsquigarrow 0 = \delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} \qquad (1)$$

۱) کار نیروی داخلی:

$$\delta W_{I_1} = \int m(x)\cdot\delta d\theta + C\dot{V}(L,t)\cdot\delta V(L,t) + kV(L,t)\cdot\delta V(L,t)$$
$$= \int EI\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta V(x,t)}{\partial x^2}\cdot dx + \psi^2(L)\cdot\delta Y(t)\left(c\cdot\dot{Y}(t) + k\cdot Y(t)\right)$$
$$= Y(t)\cdot\delta Y(t)\cdot EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx + \psi^2(L)\cdot\delta Y(t)\left(c\cdot\dot{Y}(t) + k\cdot Y(t)\right)$$
$$= Y(t)\cdot\delta Y(t)\left[EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx + k\cdot\psi^2(L)\right] + \dot{Y}(t)\cdot\delta Y(t)\cdot c\cdot\psi^2(L) \qquad (2)$$

۲) کار نیروی اینرسی:

$$\delta W_{I_2} = \int f_I(x,t)\cdot\delta V(x,t)\cdot dx + M\ddot{V}(L,t)\,\delta V(L,t)$$

این رابطه در مثال قبل ساده شده است. از نوشتن مراحل آن خودداری می‌کنیم. جواب آخر بصورت

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

$\rightarrow X_{Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2} = 13.29$

$\Rightarrow$ Max تغییر مکان $= 33.94$ in

Max برش پایه $Q_{Max} = k\,x_{Max} = 150 \times 33.94 = 5091$ kips

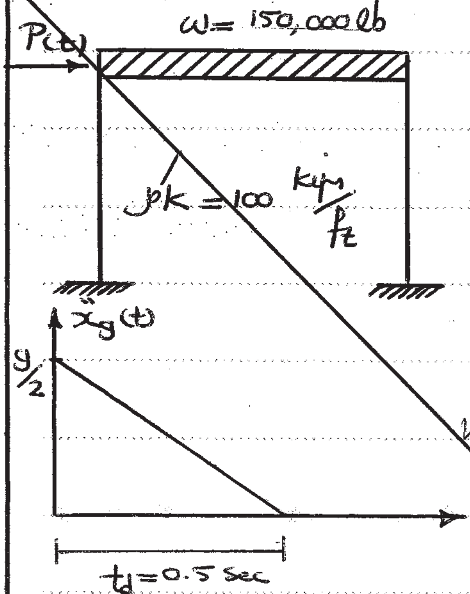
غلط دارد

تمرین ۱۵) قاب یک طبقه شکل مقابل مفروض است.

درصورتیکه این قاب تحت اثر نیروی زلزله‌ای با منحنی شتاب زیر قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) تابع تغییر مکان ۲) رسم تابع تغییر مکان

۳) تعیین مقدار Max تغییر مکان و Max برش پایه.



$W = 150{,}000\ lb = 150$ kips

$m\ddot{x}(t) + kx(t) = P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{mg}} = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{100 \times 32.17}{150}} = 4.631\ rad/s$

$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.357\ s$

چون $t_d > \frac{T}{5}$ پس بارگذاری انجام شده بارگذاری اختیاری می‌باشد.

قسمت اول ($0 < t \leq 0.5$): تعیین تابع تغییر مکان بکمک انتگرال دوهامل

$x_1(t) = \frac{1}{\omega} V(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega(t-\tau)\,d\tau$

$\ddot{x}_g(\tau) = -g\tau + \frac{1}{2}g$

$\Rightarrow V(t) = \int_0^t (-32.17\tau + 16.085) \sin(4.631(t-\tau))\,d\tau$

$\Rightarrow V(t) = 6.947t - 3.473 \cos(4.631t) + 1.5 \sin(4.631t) + 3.473$

$\Rightarrow x_1(t) = 1.5t - 0.75 \cos(4.631t) + 0.324 \sin(4.631t) + 0.75$

$t = 0.5 \rightarrow x_{1Max}(0.5) = 2.247$

حمید کاظم

قسمت دوم : حالت ارتعاش آزاد $(t > 0.5)$

$$x_2(t) = X_{Max} \cos(\omega_n t - \varphi)$$

$$X_0 = x(0.5) = 2.247$$

$$\dot{X}_0 = \dot{x}(0.5) \longrightarrow \dot{x}(t) = 1.5 + 3.473 \sin(4.631t) + 1.5\cos(4.631t)$$

$$\longrightarrow \dot{X}_0 = 3.037$$

$$\longrightarrow \begin{cases} X_{Max} = \left[X_0^2 + \left(\dfrac{\dot{X}_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} = \left[2.247^2 + \left(\dfrac{3.037}{4.631}\right)^2\right]^{1/2} = 2.341 \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) = tg^{-1}\left(\dfrac{3.037}{4.631 \times 2.247}\right) = 0.284 \text{ rad} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x_2(t) = 2.341 \cos(4.631t - 0.284)$$

نتیجه :

Max تغییر مکان $= 2.341$ ft

Max برش پایه $= 100 \left(\frac{kips}{ft}\right) \times 2.341 \text{ (ft)} = 234.1$ kips

ادامه تمرین ۱۲)

فرض $\psi(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2L}$

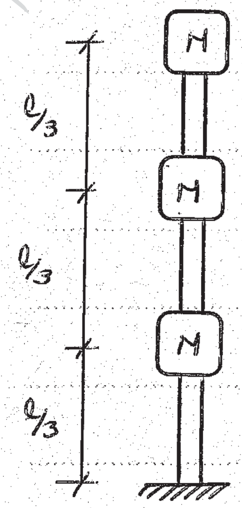
$$M^* = \int_0^L \mu \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx + M\left(\sin\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = \frac{L}{2}\mu + \mu L = 1.5\mu L$$

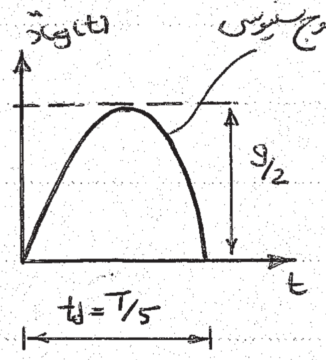
$$k^* = \int_0^L EI\left(-\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + k = \frac{\pi^4}{16L^4} \times \frac{L}{2} EI = 3.044\frac{EI}{L^3} + k$$

$$\bar{K} = \int_0^L \mu\left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right) dx + M\left(\sin\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = \frac{2}{\pi}L\mu + \mu L = 1.637 L\mu$$

$$c^* = c\left(\sin\frac{\pi L}{2L}\right) = c$$

$$\Longrightarrow 1.5\mu L\, \ddot{Y}(t) + c\dot{Y}(t) + \left(3.044\frac{EI}{L^3} + k\right)Y(t) = -1.637\mu L\, \ddot{x}_g(t)$$





آیدیال سازه

حل مجدد و تصحیح (تمرین ۱۴)

برج مخابراتی شهری بصورت سازه مقابل مدل شده است. (رجوع شود)

$W = Mg = 100\ kips \quad L = 100\ ft$

$EI = 3\times10^{8}\ lb.in^2 \qquad \mu L = 3M$

و این سازه تحت اثر حرکت زمین بصورت شکل قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) Max تغییر مکان ۲) Max برش پایه

۳) محاسبه تابع تغییر مکان و رسم آن.

$$\begin{cases} L = 1200\ in \qquad Mg = 100\ kips \Rightarrow W = Mg = 10^5\ lb_{\text{وزنی}} \\ \Rightarrow M = \dfrac{10^5}{386.06} = 259.03\ lb_{\text{جرمی}} \\ \mu L = 3M \Rightarrow \mu = \dfrac{3M}{L} = \dfrac{3\times259.03}{1200} = 0.648\ {}^{\text{جرمی}}lb/in \end{cases}$$

$$\ddot{x}_g(t) = \frac{g}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{T}\right)t = 193.03\sin\left(\frac{5\pi}{T}\right)t$$

$$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$$

می‌توان از دو رابطه زیر که کاملاً یکسان هستند تابع تغییر مکان را بدست آورد.

1) $x(t) = \dfrac{\int P^*_{eff}(t)\,dt}{\omega m^*}\sin\omega(t) \qquad P^*_{eff}(t) = -\bar{k}\,\ddot{x}_g(t)$ بارگذاری ضربه‌ای

2) $Y(t) = \dfrac{\bar{k}}{\omega m^*}V(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$ بارگذاری اختیاری

حال چون $t_d = T/5$ می‌باشد و بارگذاری ضربه‌ای است پس از همین رابطه ۱ استفاده می‌کنیم

$$M^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + \sum m_i\,\psi_i^2$$

$$= \int_0^{1200} 0.648\left(1-\cos\frac{\pi x}{2400}\right)^2 dx + 259.03\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)^2\right] = 504.77\ lb_{\text{جرمی}}$$

$$k^* = \int_0^L EI\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx = \int_0^{1200} 3\times10^8\times\left(\frac{\pi}{2400}\right)^4\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2400}\right)\right)^2 dx = \cancel{5.85\times10^{-2}}\ 0.528\ {}^{\text{وزنی}}lb/in$$

$\bar{K} = \int_0^L \mu(x)\,\psi(x)\,dx + \sum m_i \psi_i = \int_0^{1200} 0.648\left(1-\cos\frac{\pi x}{\cancel{1200} \rightarrow 2400}\right)dx + 259.03\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)+\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)+\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)\right] = \cancel{1200.85}\ lb$ یا 682.21

$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{5.35\times10^{-2}}{504.77}} = 1.03\times10^{-2}\ rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 610.3\ s$

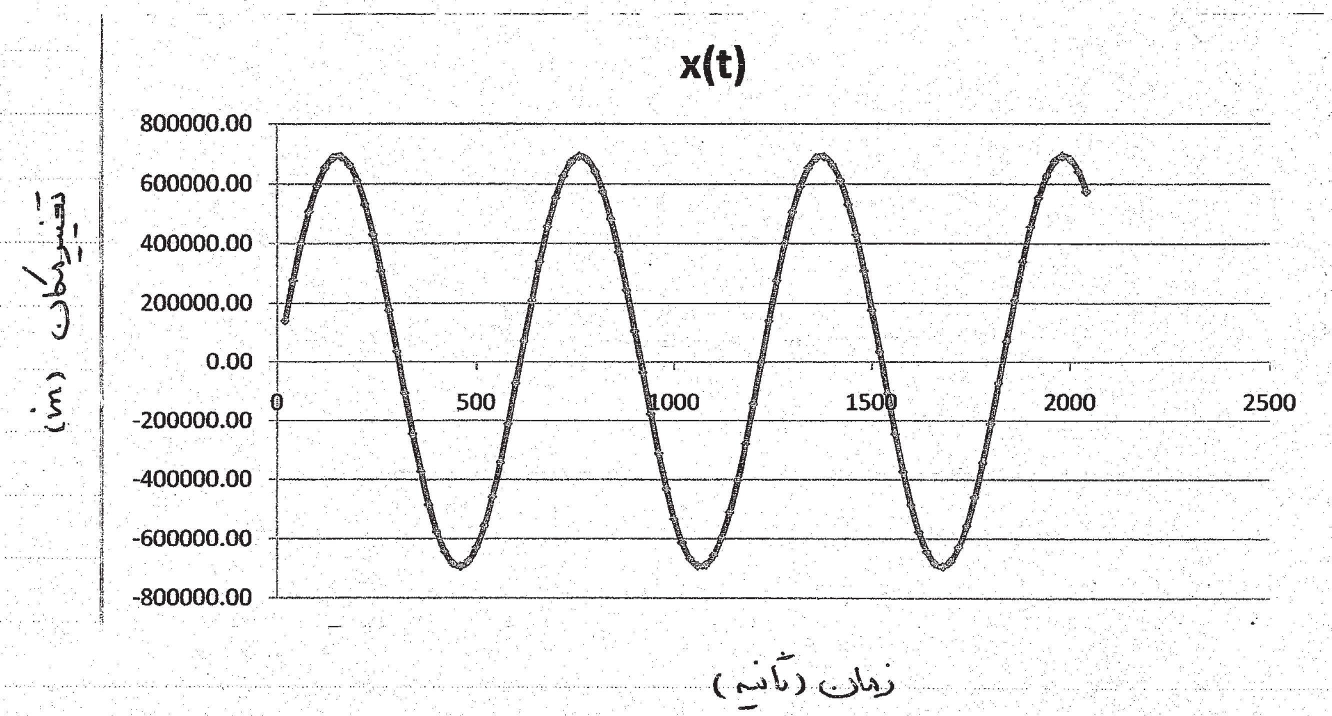
$\int_0^{t_d} P_{eff}(t)\,dt = \int_0^{T/5} -k\,\ddot{x}_g(t) = \int_0^{T/5} -k\left(193.03\sin\left(\frac{5\pi}{T}\right)t\right)dt$
$= \int_0^{122.06} -1200.85\times193.03\sin\left(\left(\frac{5\pi}{122.06}\right)t\right)dt = 3602{,}442.5$

$\Rightarrow x(t) = \frac{3{,}602{,}442.5}{1.03\times10^{-2}\times504.77}\sin(1.03\times10^{-2}t) = 692{,}893.2\sin(0.0103\,t)$ $(t-t_d)$

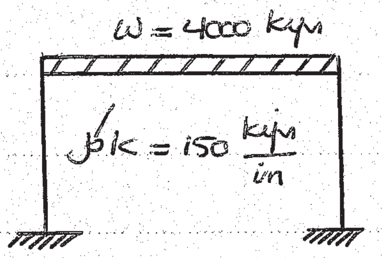
$\longrightarrow x_{Max} = 692893.2\ in$

$Q(t) = \frac{\bar{k}^2}{m^*}\,\omega\,V(t) = \frac{\bar{k}}{m^*\omega}V(t)\times\bar{k}\omega^2 = x(t)\cdot\bar{k}\,\omega^2$ ⟶ بررسی شود

$\longrightarrow Q_{Max} = 692893.2\times1200.85\times(1.03\times10^{-2})^2 = 88{,}273.3\ lb$



حل مسئله دو صحیح (تمرین ۱۴)

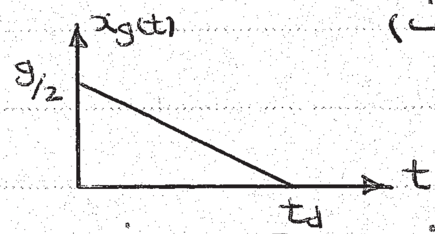


قاب شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه این قاب تحت اثر شتاب زمین بصورت دیاگرام های الف و ب قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) تغییر مکان Max　　۲) برش پایه Max

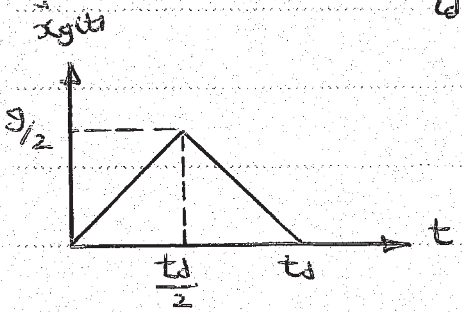
(t_d دو برابر پریود سازه است)　　$t_d = 2T$

الف)



بارگذاری اضطراری می باشد.

ب)



$$m\ddot{x}(t) + Kx(t) = P_{eff} = -m\ddot{x}_g(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{Kg}{mg}} = \sqrt{\frac{150 \times 386.06}{4000}} = 3.805 \ \text{rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.805} = 0.526\pi = 1.651 \ \text{rad}$$

حالت الف)

فاز اول ($0 < t \leq 2T$): تعیین تابع تغییر مکان به کمک انتگرال دوهامل.

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega} V_1(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$\ddot{x}_g(\tau) = \frac{-g}{4T}\tau + \frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow V_1(t) = \int_0^t \left(\frac{-g}{4T}\tau + \frac{1}{2}g\right)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$V_1(t) = \int_0^t (-58.46\tau + 193.03)\sin(3.805(t-\tau))\,d\tau$$

$$V_1(t) = -15.36t - 50.73\cos(3.805t) + 4.04\sin(3.805t) + 50.7$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -4.04t - 13.32\cos(3.805t) + 1.062\sin(3.805t) + 13.32$$

$$\Rightarrow t = 0.784 < 2T = 3.303 \longrightarrow x_{1\,Max} = 23.47$$

فاز دوم $(t>2T)$ ؛ حالت ارتعاش آزاد

$x_2(t) = X_{2Max}\cos(\omega_n(t-2T)-\phi)$ $\qquad 2T = 3.303\ s$

$X_0 = x_1(3.303) = -13.36\ in$

$\dot{X}_0 = \dot{x}_1(3.303) \rightarrow \dot{x}_{(t)} = -4.04 + 50.6\sin(3.805t) + 4.03\cos(3.805t)$

$\Rightarrow \dot{X}_0 = \dot{x}(3.303) = 0.068\ in/s$

$\Rightarrow X_{2Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = 13.36\ in$

$\Rightarrow$ تغییر مکان ماکزیمم $x_{Max} = x_1(t=0.784) = 23.47$

برش ماکزیمم را برای مقایسه از دو رابطه زیر بدست می آوریم.

1) $Q_{Max} = k\,x_{Max} = 150 \times 23.47 = 3520.5\ kips$

2) $Q_{Max} = m\omega V_{Max} = m\omega(x_{Max}\cdot\omega) = \frac{4000}{386.06} \times 3.805^2 \times 23.47 = 3520.7\ kips$

حالت ب)

$x(t) = \frac{1}{\omega}V(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} \frac{g}{2T}\tau & 0 \leq t \leq T \\ \frac{-g}{2T}\tau + g & T < t \leq 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

فاز اول $(0<t\leq T)$

$V_1(t) = \int_0^t \frac{g}{2T}\tau\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t 116.92\,\tau\sin(3.805(t-\tau))\,d\tau$

$= 30.73t - 8.076\sin(3.805t)$

$x_1(t) = 8.076t - 2.122\sin(3.805t)$

$\rightarrow \quad t = T \quad \Rightarrow \quad x_{1Max} = 13.34\ in$

فاز دوم $(T<t\leq 2T)$

$V_2(t) = \int_0^T \frac{g}{2T}\tau\sin\omega(t-\tau)\,d\tau + \int_T^t \left(\frac{-g}{2T}\tau + g\right)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$

$= \int_0^{1.651} 116.92\,\tau\sin(3.805(t-\tau))\,d\tau + \int_{1.651}^t (-116.92\tau + 386.06)\sin(3.805(t-\tau))\,d\tau$

$= -30.73t + 101.46\cos(3.805t - 6.28) + 16.15\sin(3.805t - 6.28)$

$- 101.46\cos(3.805(t-1.651)) - 8.08\sin(3.805t) + 101.46$

$$\Rightarrow x_2(t) = -8.08\,t + 26.66\cos(3.805t - 6.28) + 4.24\sin(3.805t - 6.28)$$
$$- 26.66\cos(3.805(t-1.651)) - 2.12\sin(3.805t) + 26.66$$

$t = T \rightarrow x_{2\,Max} = 13.34\ in$

فاز سوم ($t > 2T$) حالت ارتعاش آزاد

$$x_3(t) = X_{Max}\cos(\omega_n(t-2T) + \phi)$$

$X_0 = x_2(3.303) = -0.011$

$\dot{X}_0 = \dot{x}_2(3.303)$

$$\dot{x}_2(t) = -8.08 - 101.44\sin(3.805t - 6.28) + 16.13\cos(3.805t - 6.28)$$
$$+ 101.44\sin(3.805(t-1.651)) - 8.07\cos(3.805t)$$

$\dot{X}_0 = \dot{x}_2(3.303) = 0.157$

$$\Rightarrow x_{3\,Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = 0.043$$

$\Rightarrow$ Max تغییر مکان $= 13.34\ in$

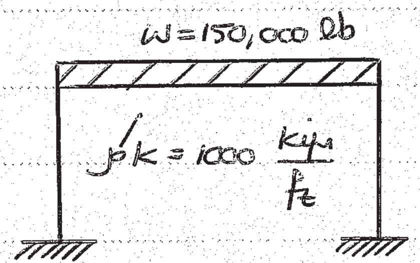
$Q_{Max} = K\,x_{Max} = 150 \times 13.34 = 2001\ kips$

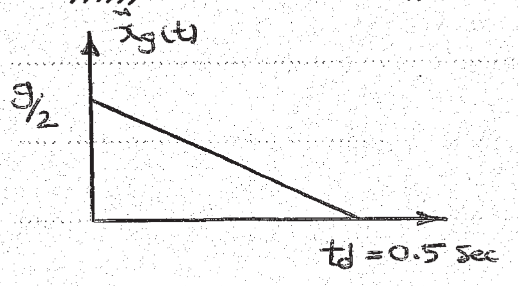
حل مجدد و صحیح (تمرین ۱۵)

قاب یک طبقه شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه این قاب تحت اثر نیروی زلزله ای با منحنی زیر قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) تابع تغییر مکان   ۲) رسم تابع تغییر مکان

۳) تعیین مقدار Max تغییر مکان و Max برش پایه.





حمید کاظم

$W = 150{,}000\, lb = 150\, kips$

$m\ddot{x}(t) + kx(t) = P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$

$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{kg}{mg}\right)^{1/2} = \left(\frac{100 \times 32.17}{150}\right)^{1/2} = 4.631\ rad/s$

$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.357$

چون $t_d > \frac{T}{4}$ (0.5 > 0.34) پس بارگذاری انجام شده اضطراری است.

فاز اول ؛ ($0 < t \leq 0.5$)

$x_1(t) = \frac{1}{\omega} V_1(t)$

$\ddot{x}_g(t) = -g\tau + \frac{1}{2}g$

$V_1(t) = \int_0^t (-32.17\tau + 16.085)\, \sin(4.631(t-\tau))\, d\tau$

$= 6.947t - 3.473\cos(4.631t) + 1.5\sin(4.631t) + 3.473$

$\Rightarrow x_1(t) = 1.5t - 0.75\cos(4.631t) + 0.324\sin(4.631t) + 0.75$

$t = 0.5 \rightarrow x_{1\,Max}(0.5) = 2.247\, ft$

فاز دوم ؛ ($t > 0.5$)

$x_2(t) = X_{Max}\cos(\omega_n(t-0.5) - \varphi)$

$X_0 = x_1(0.5) = 2.247$

$\dot{X}_0 = \dot{x}_1(0.5) \rightarrow \dot{x}(t) = 1.5 + 3.473\sin(4.631t) + 1.5\cos(4.631t)$

$\rightarrow \dot{X}_0 = 3.037$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{2\,Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = \left[2.247^2 + \left(\frac{3.037}{4.631}\right)^2\right]^{1/2} = 2.341\ ft \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X}\right) = tg^{-1}\left(\frac{3.037}{4.631 \times 2.247}\right) = 0.284\ rad \end{cases}$$

$\rightarrow x_2(t) = 2.341\cos(4.631t - 0.284)$

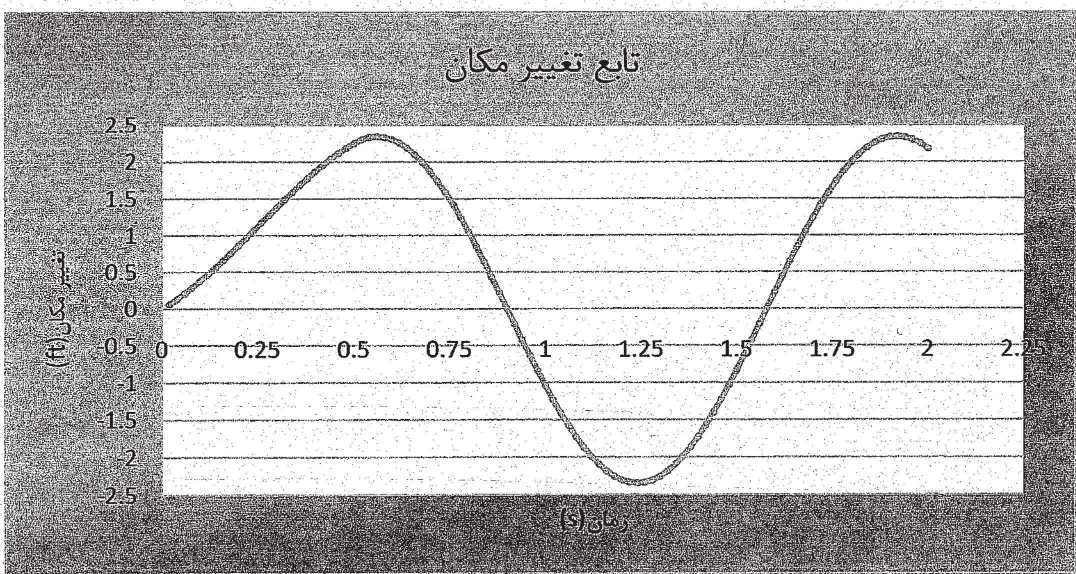
نتیجه ؛

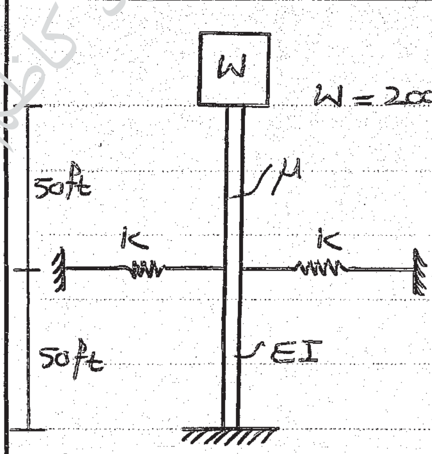
Max تغییر مکان $= 2.341\ ft$

Max برش پایه $= 2.341 \times 100 = 234.1\ kips$

حمید کاظم

t(s)	x(t)	t(s)	x(t)	t(s)	x(t)	t(s)	x(t)
0.02	0.06318	0.52	2.29826	1.02	-1.23024	1.52	-0.63066
0.04	0.13251	0.54	2.329593	1.04	-1.40917	1.54	-0.41945
0.06	0.20764	0.56	2.340956	1.06	-1.57602	1.56	-0.20464
0.08	0.28819	0.58	2.332252	1.08	-1.72937	1.58	0.011918
0.1	0.37373	0.6	2.303554	1.1	-1.86788	1.6	0.228378
0.12	0.46379	0.62	2.25511	1.12	-1.99039	1.62	0.44288
0.14	0.55784	0.64	2.187335	1.14	-2.09583	1.64	0.653585
0.16	0.65533	0.66	2.100809	1.16	-2.18331	1.66	0.858688
0.18	0.75570	0.68	1.996274	1.18	-2.25207	1.68	1.056429
0.2	0.85833	0.7	1.874626	1.2	-2.30153	1.7	1.245115
0.22	0.96260	0.72	1.736908	1.22	-2.33126	1.72	1.423127
0.24	1.06789	0.74	1.584301	1.24	-2.341	1.74	1.58894
0.26	1.17353	0.76	1.418113	1.26	-2.33067	1.76	1.74113
0.28	1.27888	0.78	1.239769	1.28	-2.30037	1.78	1.878398
0.3	1.38330	0.8	1.050796	1.3	-2.25034	1.8	1.999561
0.32	1.48615	0.82	0.852816	1.32	-2.18103	1.82	2.103584
0.34	1.58681	0.84	0.647525	1.34	-2.09302	1.84	2.189575
0.36	1.68466	0.86	0.436684	1.36	-1.98706	1.86	2.256795
0.38	1.77913	0.88	0.222099	1.38	-1.86408	1.88	2.30467
0.4	1.86966	0.9	0.00561	1.4	-1.72511	1.9	2.332788
0.42	1.95574	0.92	-0.21093	1.42	-1.57135	1.92	2.340909
0.44	2.03688	0.94	-0.42566	1.44	-1.40413	1.94	2.328962
0.46	2.11265	0.96	-0.63674	1.46	-1.22487	1.96	2.297051
0.48	2.18265	0.98	-0.84236	1.48	-1.0351	1.98	2.245449
0.5	2.24655	1	-1.04076	1.5	-0.83647	2	2.174598





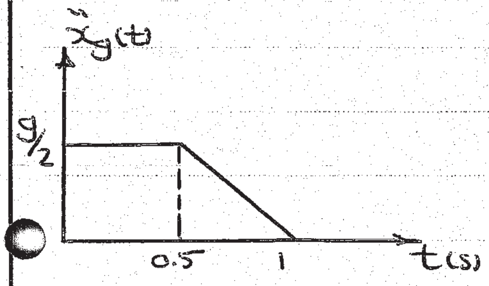
حل مجدد و صحیح (تمرین ۱۶)

برج مخابرات شهری بصورت شکل مقابل مدل شده است.
درصورتیکه این سازه تحت اثر شتاب نگاشت زیر قرار گیرد،
مطلوبست تعیین:

۱) تابع تغییر مکان   ۲) مقدار Max تغییر مکان

۳) شدت نیروی برشی   ۴) Max برش پایه

(استهلاک را صفر در نظر بگیرید)



$\mu L g = 2W$ $EI = 2.1 \times 10^8 \ lb.in^2$ وزنی

$K = 50 \ kip/ft = \frac{50{,}000}{12} = 4166.7 \ \frac{lb}{in}$ وزنی

$L = 1200 \ inch$ $W = 200{,}000 \ lb$ وزنی

$\Rightarrow M = \frac{200{,}000}{386.06} = 518.1 \ lb$ جرمی

$\mu L g = 2W \Rightarrow \mu L = 2\frac{W}{g} \Rightarrow \mu L = 2M \Rightarrow \mu = \frac{2 \times 518.1}{1200} = 0.863 \ lb/in$ جرمی

$V(x,t) = \psi(x) . Y(t)$ $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

$$M^* = \int_0^L \mu(x) \left[\psi(x)\right]^2 dx + \sum m_i \psi_i^2$$
$$= \int_0^{1200} 0.863 \times \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2400}\right)^2 dx + 518.1\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)^2 = 752.9 \ lb$$ جرمی

$$K^* = \int_0^L EI(x) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx + \sum k_i \psi_i^2$$
$$= \int_0^{1200} 2.1 \times 10^8 \left(\frac{\pi}{2400}\right)^4 \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2400}\right)\right)^2 dx + 2 \times 4166.7\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)^2$$
$$= 715.26 \ lb/in$$ وزنی

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{715.26}{752.9}} = 0.975 \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 6.45$$

$$\bar{L} = \int_0^L \mu(x) . \psi(x) . dx + \sum m_i \psi_i = \int_0^{1200} 0.863\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2400}\right) dx + 518.1\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 894.42 \ lb$$ جرمی

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} g/2 & 0 < t \leqslant 0.5 \\ -g(t-1) & 0.5 < t \leqslant 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

فاز اول ($0 < t \leqslant 0.5$) :

$$Y(t) = \frac{\bar{k}}{N^* \omega} V(t) \longrightarrow V_1(x,t) = \varphi(x) \cdot \frac{\bar{k}}{N^* \omega} V_1(t)$$

$$V_1(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t 193.03 \sin(0.975(t-\tau))\, d\tau$$

$$= -197.98 \cos(0.975t) + 197.98$$

$$Y_1(t) = \frac{894.42}{752.9 \times 0.975}(-197.98 \cos(0.975t) + 197.98)$$

$$= -241.22 \cos(0.975t) + 241.22$$

$$t = 0.5 \qquad Y_{1\,Max} = 28.1 \text{ in}$$

فاز دوم ($0.5 < t \leqslant 1$) :

$$V_2(t) = \int_0^{0.5} \frac{g}{2} \sin\omega(t-\tau)\, d\tau + \int_{0.5}^t -g(\cancel{t}^{\,\tau}-1) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^{0.5} 193.03 \sin 0.975(t-\tau)\, d\tau + \int_{0.5}^t -386.06(\cancel{t}^{\,\tau}-1) \sin 0.975(t-\tau)\, d\tau$$

$$= -395.96t + 395.96t \cos(0.975(t-0.5)) - 197.98 \cos(0.975(t-0.5))$$

$$-197.98 \cos(0.975t) + 395.96 \leftarrow (\text{غلط})$$

$$Y_2(t) = -482.45t + 482.45t \cos(0.975(t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975(t-0.5))$$

$$-241.22 \cos(0.975t) + 482.45$$

$$t = 1 \longrightarrow Y_{2\,Max} = \cancel{77.76} \rightarrow 96.38 \text{ in}$$

فاز سوم ($t \geqslant 1$)

$$Y_3(t) = Y_{Max}(\cos(t-1) - \varphi)$$

$$Y_0 = Y_2(1) = 77.76 \text{ in}$$

$$\dot{Y}_0 = \dot{Y}_2(1) \longrightarrow \dot{Y}_2(t) = -482.45 + 482.45 \cos(0.975(t-0.5))$$

$$-482.45t \sin(0.975(t-0.5)) + 241.22 \sin(0.975(t-0.5)) + 241.22 \sin(0.975t)$$

$$\Rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{Y}_2(1) = 30.46 \ \frac{in}{s}$$

171.59

$$\rightarrow \underset{3}{Y_{Max}} = \left[Y_0^2 + \left(\frac{\dot{Y}_0}{\omega}\right)^2 \right]^{1/2} = \left[77.76^2 + \left(\frac{30.46}{0.975}\right)^2 \right]^{1/2} = \cancel{83.8} \ in$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{30.46}{0.975 \times 77.76}\right) = 0.38$$

— تابع تغییر مکان :

$$V(x,t) = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2400}\right) \times \begin{cases} -241.22 \cos(0.975t) + 241.22 & 0 < t \leqslant 0.5 \\ -482.45t + 482.45t \cos(0.975(t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975 \times (t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975t) + 482.45 & 0.5 < t \leqslant 1 \\ 83.8 \cos(0.975(t-1) + 0.38) & t > 1 \end{cases}$$

— مقدار Max تغییر مکان :

171.59

$$Y_{Max} = \cancel{83.8} \ in$$

— شدت نیروی برشی :

$$Q = \frac{\bar{K}^2}{M^*} \omega V(t) = \left(\frac{\bar{K}}{M^* \omega}\right) \bar{K} . \omega^2 V(t)$$

$$\rightarrow Q = \bar{K} . \omega^2 . Y(t) = 850.26 \, Y(t)$$

$$Q(t) = 850.26 \times \begin{cases} -241.22 \cos(0.975t) + 241.22 & 0 < t \leqslant 0.5 \\ -482.45t + 482.48t \cos(0.975(t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975 \times (t-0.5)) - 241.22 \cos(0.975t) + 482.45 & 0.5 < t \leqslant 1 \\ 83.8 \cos(0.975(t-1) + 0.38) & t > 1 \end{cases}$$

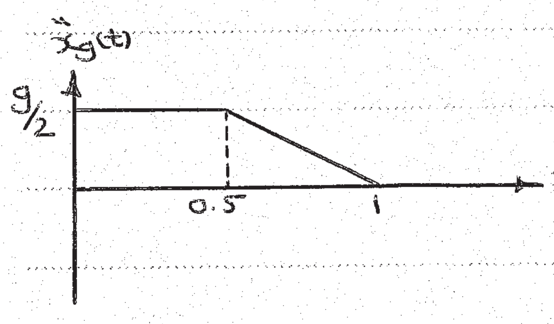
— Max برش پایه

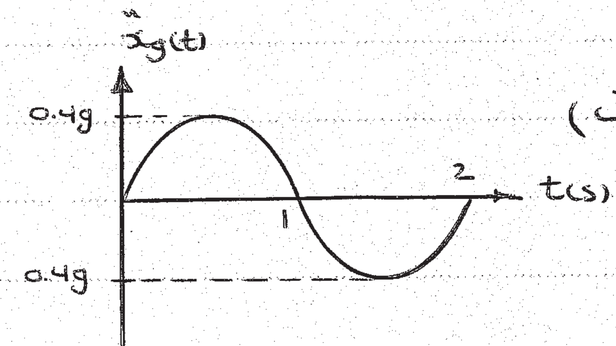
$$Q_{Max} = 850.26 \times 83.8 = 71251.79 \ lb$$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

تمرین ۱۷) در صورتیکه شتاب ثبت شده زمین در دو زلزله مختلف مطابق اشکال الف و ب باشد، مطلوبست تعیین طیف پاسخ این دو زلزله برای تغییر مکان، سرعت و شتاب. طیف های مزبور را برای سه میرایی زیر بدست آورید. (برای رسم تا 4s پیش بروید)

$\xi_1 = 0\%$ $\xi_2 = 5\%$ $\xi_3 = 10\%$





قسمت الف)

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} 0.4g \sin \pi\tau & 0<\tau\leq 2 \\ 0 & \tau>2 \end{cases}$$

$$0<t\leq 2 \rightarrow V(t) = \int_0^t 0.4g \sin\pi t \,.\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$$

با فرض $(T\leq 4)$ همواره $t_d > T/4$ می باشد پس پاسخ سازه اجباری است، و چون $t_d > T/2$ می باشد حداکثر پاسخ سازه در ارتعاش اجباری است.

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2} \qquad g = 32.17\ ft/s^2$$

$$V(t) = \int_0^t 12.868 \sin\pi\tau \,.\, e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

بازای $\xi = 0$ داریم:

$$V(t) = \int_0^t 12.868 \sin\pi\tau \,.\, \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right) d\tau$$
$$= 12.868\left(\frac{\sin(\pi t) + \sin(\frac{2\pi t}{T})}{2(\frac{2\pi}{T}+\pi)} + \frac{\sin(\pi t) - \sin(\frac{2\pi t}{T})}{2(\frac{2\pi}{T}-\pi)}\right)$$

برای $\xi = 5\%$ داریم :

$$A = \frac{9.873}{100T^2} + \left(\frac{6.274}{T} + \pi\right)^2 \qquad B = \frac{9.873}{100T^2} + \left(\frac{6.274}{T} - \pi\right)^2$$

$$V(t) = \Bigg[\frac{1}{A}\bigg[\frac{0.1571\cos(\pi t)}{T} + \frac{1}{2}\left(\frac{6.274}{T} + \pi\right)\sin(\pi t) - \frac{0.1571}{T}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\cos\left(\frac{6.274}{T}t\right)$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\left(\frac{6.274}{T} + \pi\right)\sin\left(\frac{6.274t}{T}\right)\bigg] + \frac{1}{B}\bigg[-\frac{0.1571\cos(\pi t)}{T}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{6.274}{T} - \pi\right)\sin(\pi t) + \frac{0.1571}{T}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\cos\left(\frac{6.274t}{T}\right)$$

$$- \frac{1}{2}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\left(\frac{6.274}{T} - \pi\right)\sin\left(\frac{6.274t}{T}\right)\bigg]\Bigg] \times 12.868$$

برای $\xi = 10\%$ داریم :

$$C = \frac{0.394}{100T^2} + \left(\frac{6.283}{T} + \pi\right)^2 \qquad D = \frac{0.394}{100T^2} + \left(\frac{6.283}{T} - \pi\right)^2$$

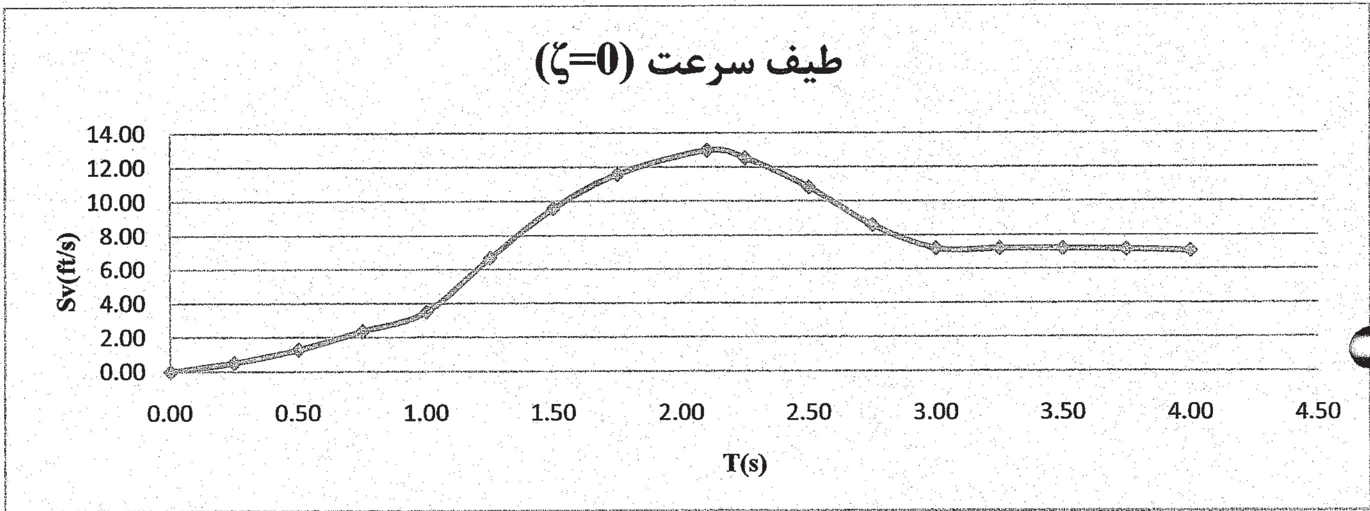
$$V(t) = \Bigg[\frac{1}{C}\bigg[\frac{+0.314\cos(\pi t)}{10T} + \frac{1}{2}\left(\frac{6.283}{T} + \pi\right)\sin(\pi t) - \frac{0.314}{10T}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\cos\left(\frac{6.283t}{T}\right)$$

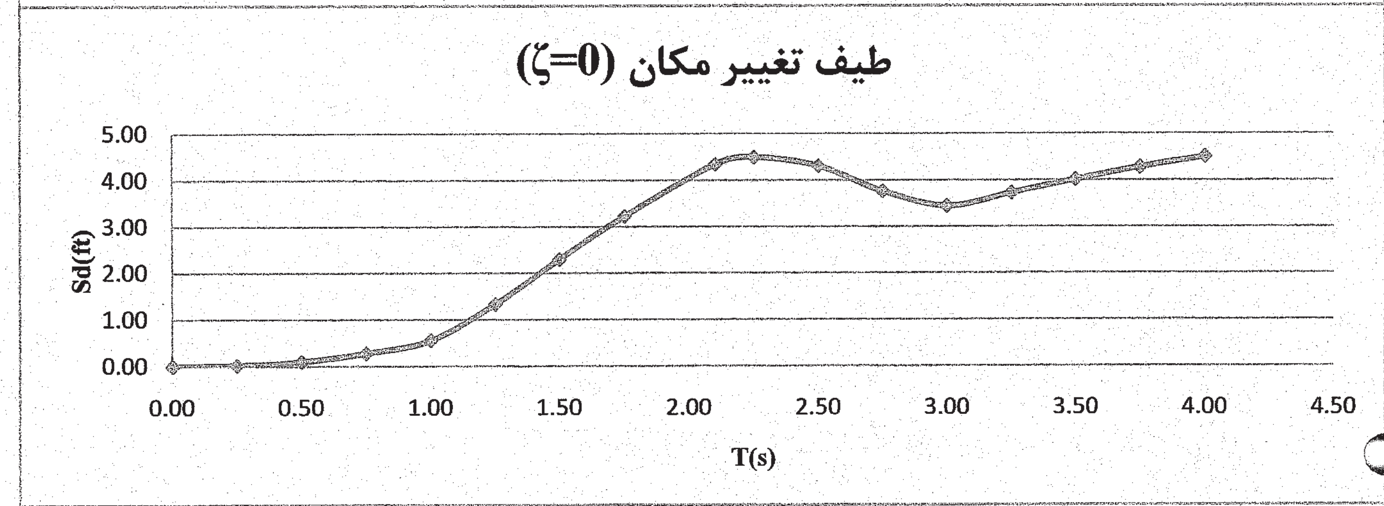
$$+ \frac{1}{2}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\left(\frac{6.283}{T} + \pi\right)\sin\left(\frac{6.283t}{T}\right)\bigg] + \frac{1}{D}\bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{6.283}{T} - \pi\right)\sin(\pi t)$$

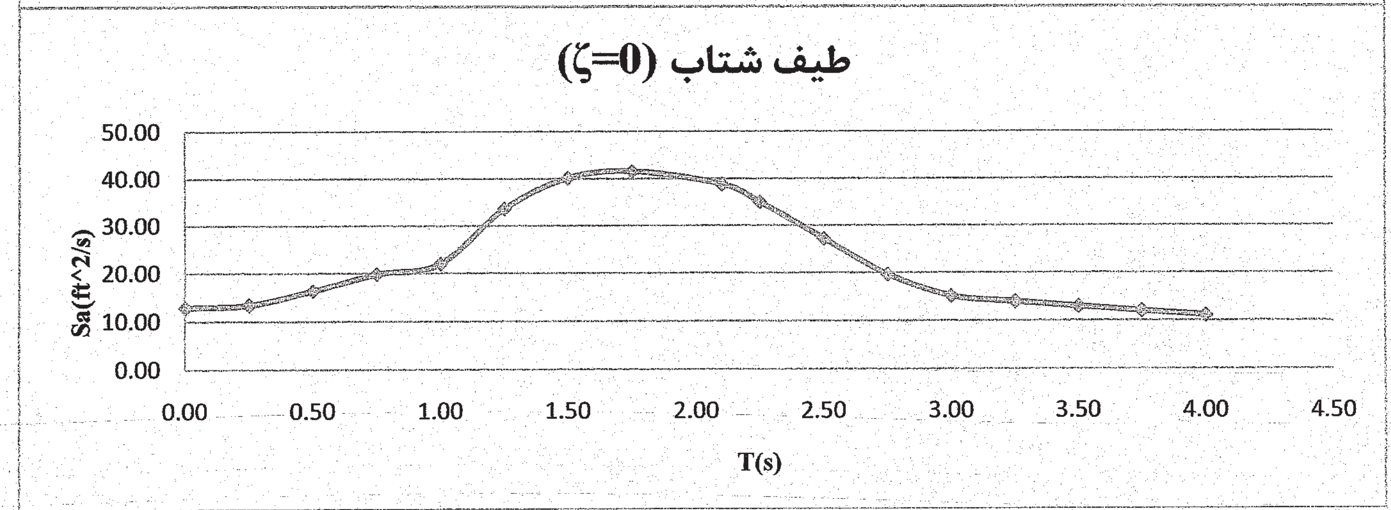
$$+ \frac{0.314}{10T}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\cos\left(\frac{6.283t}{T}\right) - \frac{1}{2}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\left(\frac{6.283}{T} - \pi\right)\sin\left(\frac{6.283t}{T}\right)$$

$$- \frac{0.314\cos(\pi t)}{10T}\bigg]\Bigg] 12.868$$

ζ=0																	
T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.10	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
S_v	0.00	0.53	1.30	2.37	3.51	6.70	9.59	11.59	12.99	12.54	10.82	8.61	7.22	7.21	7.21	7.17	7.08
S_d	0.00	0.02	0.10	0.28	0.56	1.33	2.29	3.23	4.34	4.49	4.31	3.77	3.45	3.73	4.01	4.28	4.50
S_a	12.87	13.39	16.32	19.84	22.04	33.67	40.19	41.61	38.85	35.03	27.20	19.66	15.13	13.94	12.94	12.01	11.11

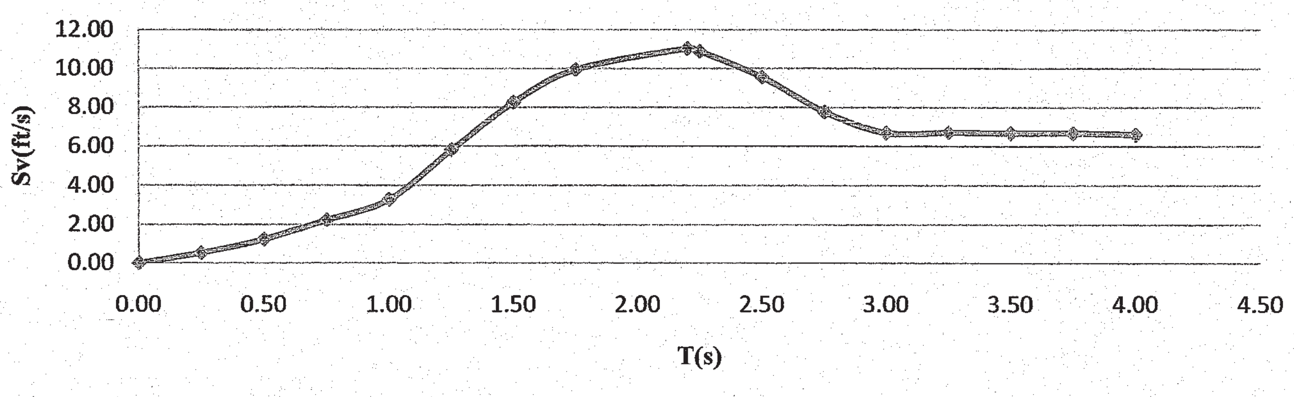




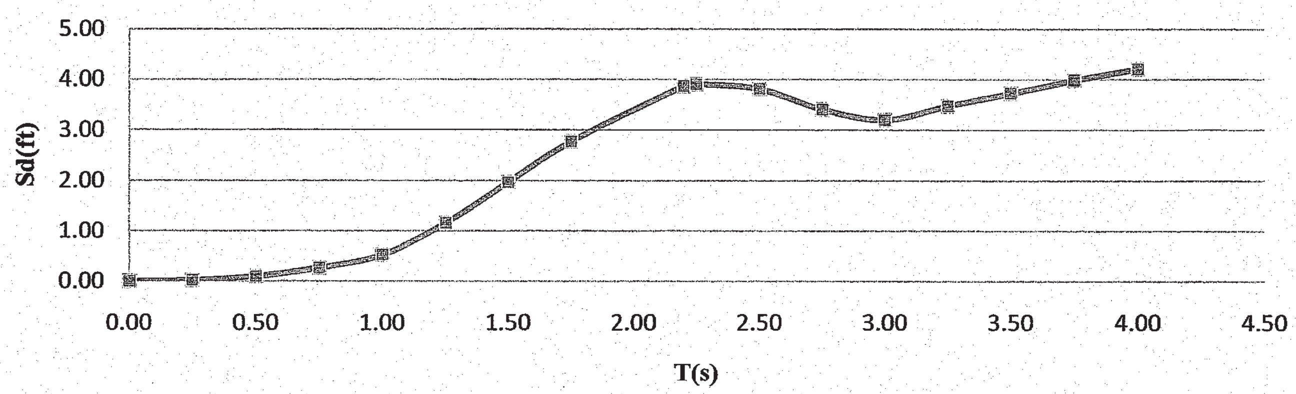


$\zeta=0.05$																	
T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.20	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
S_v	0.00	0.52	1.24	2.23	3.29	5.83	8.26	9.96	11.05	10.90	9.58	7.78	6.70	6.72	6.68	6.68	6.62
S_d	0.00	0.02	0.10	0.27	0.52	1.16	1.97	2.78	3.87	3.90	3.81	3.41	3.20	3.48	3.72	3.99	4.21
S_a	12.85	13.16	15.53	18.69	20.65	29.31	34.59	35.78	31.57	30.44	24.07	17.78	14.03	12.99	12.00	11.19	10.39

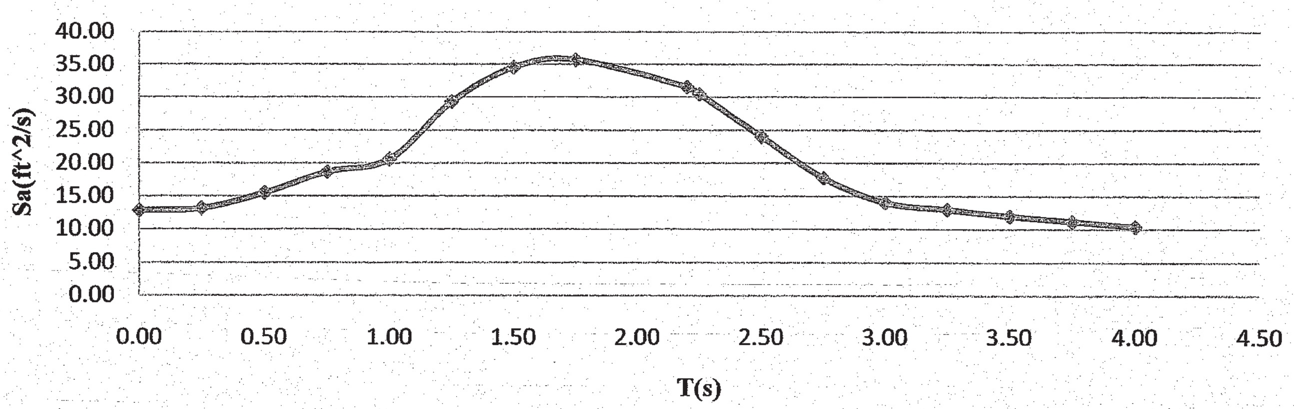
طیف سرعت ($\zeta=0.05$)



طیف تغییر مکان($\zeta=0.05$)

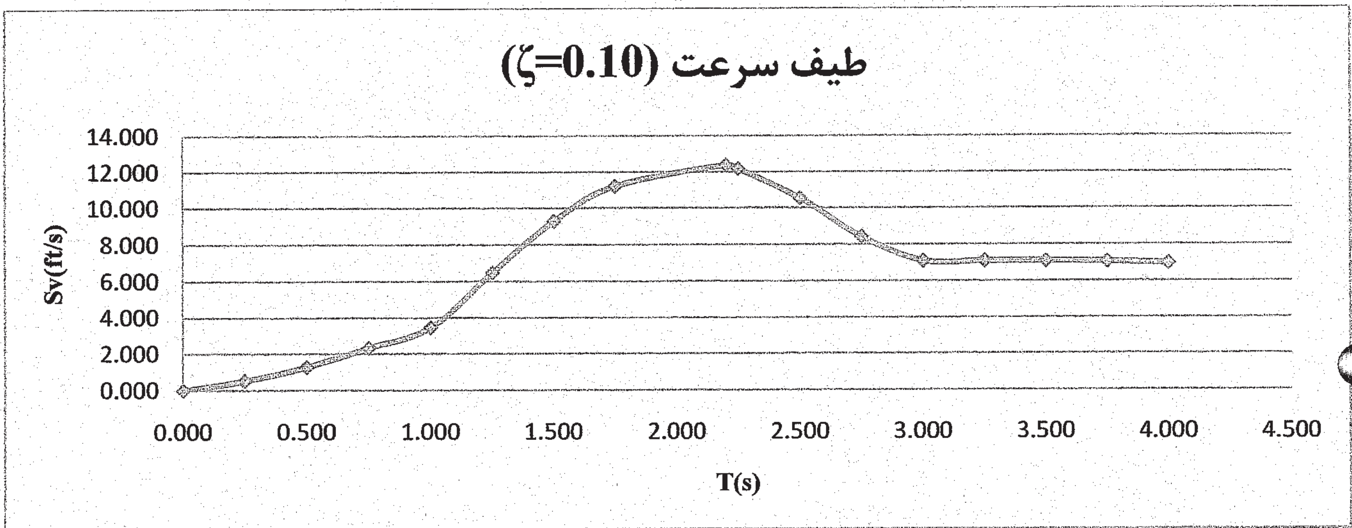


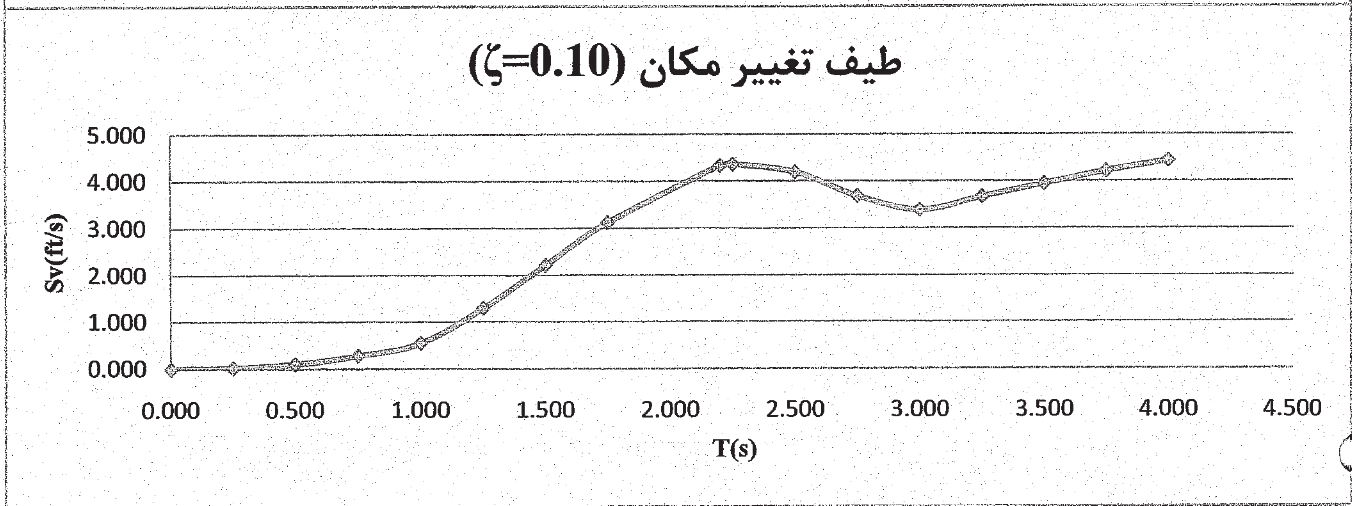
طیف شتاب ($\zeta=0.05$)

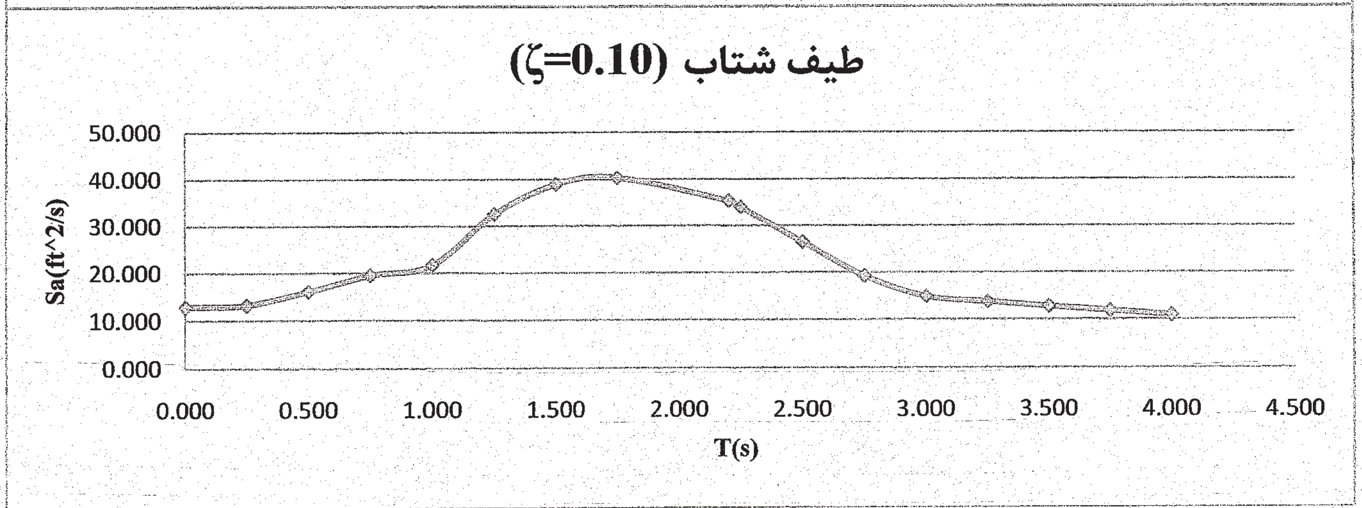


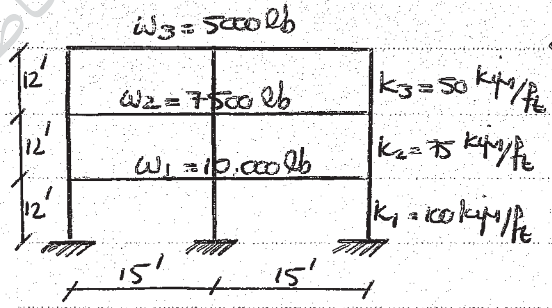
حمید کاظم

ζ=0.10																	
T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.20	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
S_v	0.00	0.53	1.29	2.34	3.46	6.49	9.30	11.23	12.39	12.19	10.56	8.44	7.11	7.11	7.10	7.07	6.98
S_d	0.00	0.02	0.10	0.28	0.55	1.29	2.22	3.13	4.34	4.37	4.20	3.69	3.40	3.68	3.95	4.22	4.44
S_a	12.87	13.27	16.15	19.57	21.75	32.61	38.97	40.33	35.40	34.05	26.54	19.28	14.90	13.75	12.75	11.85	10.97









تمرین ۱۸) قاب ۳ طبقه شکل مفروض است. مطلوبست تعیین:

۱) جرم معادل ۲) سختی معادل ۳) فرکانس پایه قاب

درصورتیکه قاب دارای نسبت استهلاک بحرانی $\xi = 2\%$ باشد و در منطقه تهران که شتاب Max زمین $0.35g$ می‌باشد قرار داشته باشد و برای طراحی آن در مقابل زلزله بتوان از نمودارهای شکل "A" استفاده کرد. هم چنین مطلوبست تعیین: ۴) تغییر مکان Max ۵) برش پایه Max

$$M_1 = \frac{10000}{386.06} = 25.9\ lb\text{جرمی} \qquad k_1 = 100\ \frac{kips}{ft} \times \frac{10^3\ lb}{kips} \times \frac{1\ ft}{12\ in} = 8333.3\ \frac{lb}{in}\ \text{وزنی}$$

$$M_2 = \frac{7500}{386.06} = 19.43\ lb \qquad K_2 = 75 \times \frac{10^3}{12} = 6250\ lb/in$$

$$M_3 = \frac{5000}{386.06} = 12.95\ lb \qquad k_3 = 50 \times \frac{10^3}{12} = 4166.7\ lb/in$$

$12\ ft = 144\ in \qquad 15\ ft = 180\ in$

$$\frac{H}{D} = \frac{3 \times 144}{2 \times 180} = 1.2 < 1.5 \Rightarrow \psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2H} = \sin\frac{\pi x}{864}$$

تراز	$K\ (\frac{lb}{in})$	جرم M (lb جرمی)	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
3		12.56	1		12.56	
2	4166.7	19.43	0.866	0.134	14.57	74.817
1	6250	25.9	0.5	0.366	6.475	837.225
0	8333.3			0.5		2083.333
Σ					$M^* = 33.605$	$K^* = 2995.375$

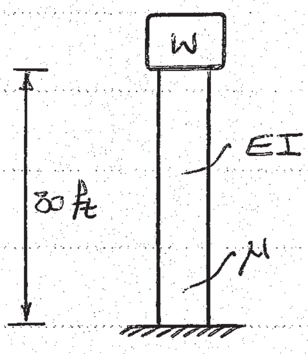
$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{2995.375}{33.605}} = 9.44 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.666\ s$$

$$S_d = \frac{0.35}{0.2} \times 1.4 = 2.45\ in \qquad Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a$$

$$\bar{K} = \Sigma m_i \psi_i = 42.73\ lb\text{جرمی} \qquad S_a = 0.3 \times \frac{0.35}{0.2} g = 0.525 g$$

$$Q_{Max} = \frac{42.73^2}{33.605} \times 0.525 g = 11012.2\ lb\ \text{وزنی}$$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱



تمرین ۱۹) برج مخابرات شهری بصورت شکل مقابل مدل شده است. درصورتیکه $W = 100\ kips$ وزن پایه برابر 150kips و صلبیت خمشی $EI = 9.1\times10^8\ lb.in^2$ باشد، مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل و فرکانس پایه برج

هم چنین تعیین کنید مقدار Max تغییرمکان، شدت نیروی برشی و برش پایه Max درصورتیکه این برج در منطقه ای قرار دارد که شتاب Max آن $0.35g$ باشد و بتوان از طیف های شکل A برای طراحی آن استفاده کرد.

$\xi = 7\%$ $\quad$ $MLg = 150kips$

$$M = \frac{100\times10^3}{32.17} = 3108.5 \ \text{lb جرم} \qquad \mu = \frac{150\times10^3}{80\times32.17} = 58.28\ \frac{\text{lb جرم}}{ft}$$

$$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{160}$$

$$M^* = \int_0^{80} 58.28\left(1-\cos\frac{\pi x}{160}\right)^2 + 3108.5 = 4165.7 \ \text{lb جرم}$$

$$K^* = \int_0^{80} 9.1\times10^8\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\left(\frac{\pi}{160}\right)^2\cos\frac{\pi x}{160}\right)^2 dx = 37.57\ \frac{\text{lb نیرو}}{ft}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{37.57}{4165.7}} = 0.095 \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 66$$

تمرین ۱۷ :

قسمت ب)

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} g/2 & 0 < \tau \leq 0.5 \\ -g\tau + g & 0.5 < \tau \leq 1 \\ 0 & \tau > 1 \end{cases}$$

: $0 < t \leq 0.5$

$$V(t) = \int_0^t 16.085\, e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

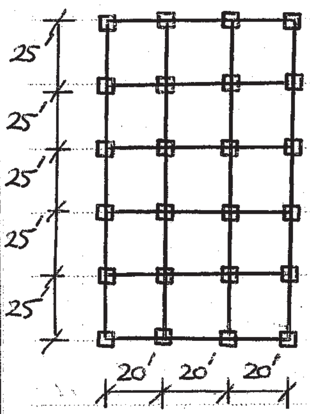
: $0.5 < t \leq 1$

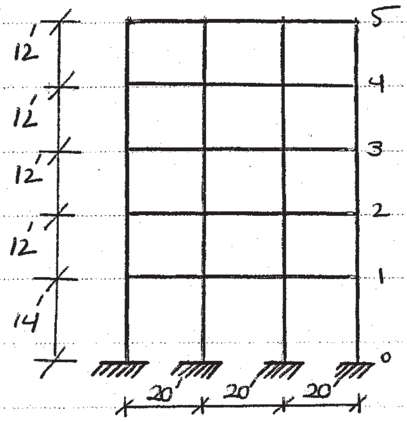
$$V(t) = \int_0^{0.5} 16.085\, e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau + \int_{0.5}^{t} (-32.17\tau + 32.17) \times$$

$$e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

تمرین ۲۰) ساختمان 5 طبقه شکل زیر مفروض است. درصورتیکه ابعاد مقاطع کلیه ستون ها یکسان و برابر $16\times16\ in^2$ باشد، مدول الاستیسیته بتن به صورت $E=3.6\times10^6\ psi$، شدت بار مرده در طبقات $90\ lb/ft^2$ و در بام $60\ lb/ft^2$ و هم چنین شدت بار زنده در طبقات $70\ lb/ft^2$ و در بام $30\ lb/ft^2$ در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل برای ۳ حالت.

الف) $\psi_a(x)=\sin\frac{\pi x}{2L}$ ب) $\psi_b(x)=\frac{x}{L}$ ج) $\psi_c(x)=1-\cos\frac{\pi x}{2L}$





* مشارکت بار زنده در طبقات 35% و در بام 65% می باشد.

$E=3.6\times10^6\ \frac{lb}{in^2}$ وزنی

هر ستون $k_a=\frac{12EI}{L^3}$ $\quad I=\frac{16^4}{12}=5461.33\ in^4$

طبقه $k_{story}=\sum_1^4 k_i=4k_a$

$$k_{1-2}=k_{2-3}=k_{3-4}=k_{4-5}=4\times\frac{12\times3.6\times10^6\times5461.33}{(12\times12)^3}=316049.2\ \frac{lb}{in}$$ وزنی

$$k_{0-1}=4\times\frac{12\times3.6\times10^6\times5461.33}{(14\times12)^3}=199028.1\ lb/in$$

جرم هر قاب در طبقه $M=\frac{A}{g}(DL+0.35LL)=\frac{25\times60}{386.06}(90+0.35(70))=444.88\ lb$ جرمی

جرم هر قاب در بام $M=\frac{A}{g}(DL+0.65LL)=\frac{25\times60}{386.06}(60+0.65(30))=308.89\ lb$ جرمی

A ← سطح بارگیر قاب میانی

الف) $\psi_a(x)=\sin\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow \psi_a(x)=\sin\frac{\pi}{2\times62}x=\sin\frac{\pi}{124}x$$

تراز	$K(\frac{lb}{in})$	$M(lb)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
5		308.89	1		308.89	
4	316049.2	444.88	0.954	0.046	404.89	668.76
3	316049.2	444.88	0.821	0.133	299.88	5590.59
2	316049.2	444.88	0.612	0.209	166.63	13805.35
1	316049.2	444.88	0.347	0.265	53.57	22194.56
0	199028.1		0	0.347		23964.77
Σ					$M^*=1233.86$	$K^*=66224.03$

$$\Rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{66224.03}{1233.86}} = 7.326 \ \frac{rad}{s} \longrightarrow T_a = 0.858 \ s$$

ب) $\psi_b(x) = \frac{x}{L}$

تراز	$K(lb/in)$	$M(lb)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
5		308.89	1		308.89	
4	316049.2	444.88	0.806	0.194	289.01	11894.83
3	316049.2	444.88	0.613	0.193	167.17	11772.52
2	316049.2	444.88	0.419	0.194	78.1	11894.83
1	316049.2	444.88	0.226	0.193	22.72	11772.52
0	199028.1		0	0.226		10165.56
Σ					$M^*=865.89$	$K^*=57500.26$

$$\Rightarrow \omega_b = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{57500.26}{865.89}} = 8.149 \ \frac{rad}{s} \longrightarrow T_b = 0.771 \ s$$

ج) $\psi_c(x) = 1 - C_1 \frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow \psi_c(x) = 1 - C_1 \frac{\pi}{2\times 62} x = 1 - C_1 \frac{\pi}{124} x$$

تراز	$K(lb/in)$	$M(lb)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
5		308.89	1		308.89	
4	316049.2	444.88	0.701	0.299	218.61	28255.11
3	316049.2	444.88	0.429	0.272	81.88	23382.58
2	316049.2	444.88	0.209	0.22	19.43	15296.78
1	316049.2	444.88	0.062	0.147	1.71	6829.51
0	199028.1		0	0.062		765.06
Σ					$M^*=630.52$	$K^*=74529.04$

$$\Rightarrow W_c=\sqrt{\frac{K^*}{M^*}}=\sqrt{\frac{74529.04}{630.52}}=10.87 \rightarrow T=0.578$$

بنابراین تابع شکلی $\sin\frac{\pi x}{2L}$ به این علت که فرکانس طبیعی کمتری می دهد مناسب تر است.

تمرین ۲۱) در صورتیکه در تمرین 20 بتوان فرض نمود که برای طراحی سازه می توان از دیاگرام طیف شکل A با شتاب Max 0.35g استفاده کرد، مطلوبست تعیین Max تغییر مکان، Max برش پایه و Max نیروهای جانبی تراز طبقات از سوی نیروی زلزله. (فرض $\xi=10\%$)

$M^*=1233.86\ lb$ الف) $\psi_a(x)=\sin\frac{\pi x}{2L}$

$$\bar{k}=\sum M_i\psi_i=308.89+444.88(0.954+0.821+0.612+0.347)=1525.2\ lb$$

$T=0.858\ ,\ \xi=10\% \rightarrow S_d=1.7\ in \qquad S_v=7.6\ \frac{in}{sec} \qquad S_a=0.14g\ \frac{in}{sec^2}$

۱) تغییر مکان Max:

$$V(x,t)=\psi(x)\ \frac{\bar{k}}{M^*}\ S_d=\frac{1525.2}{1233.86}\times 1.7\ \psi_i=2.1\psi_i$$

$$V_{Max}(x,t)=2.1\ in$$

۲) برش پایه Max:

$$Q_{Max}=\frac{\bar{k}^2}{M^*}S_a=\frac{1525.2^2}{1233.86}(0.14g)=263.95g=101900.54\ \frac{lb.in}{sec^2}$$

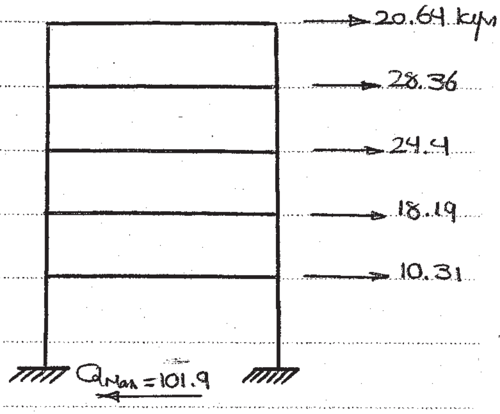
$$=101900.54\ lb_{وزنی}=101.9\ kip$$

حمید کاظم

۳) نیروهای جانبی Max در تراز طبقات :

$$\text{تراز نیرو } q_{Max} = \frac{\bar{K}}{M^*} S_a \, \mu(x) \, \psi(x) \longrightarrow \text{نیرو طبقه } q_i(x) = \frac{\bar{K}}{M^*} S_a \, M_i \, \psi(x) = \frac{Q_{Max}}{\bar{K}} M_i \psi_i$$

$$\longrightarrow q_{i\,Max} = \frac{101900.54}{1525.2} M_i \psi_i = 66.81 \, M_i \psi_i$$



ب) $\psi_b(x) = \frac{x}{L}$

$M^* = 865.89 \, lb$

$\bar{K} = \sum M_i \psi_i = 308.89 + 444.88(0.806 + 0.613 + 0.419 + 0.226) = 1227.12 \, lb$

$T = 0.771s \; , \; \xi = 10\% \longrightarrow S_d = 0.9 \, in \qquad S_v = 7.3 \, in/_{sec} \qquad S_a = 0.15g \; \frac{in}{sec^2}$

۱) تغییر مکان Max :

$$V(x,t) = \psi(x) \frac{\bar{K}}{M^*} S_d = \frac{1227.12}{865.89} \times 0.9 \times \psi_i = 1.275 \, \psi_i$$

$$V_{Max}(x,t) = 1.275 \; in$$

۲) برش پایه Max :

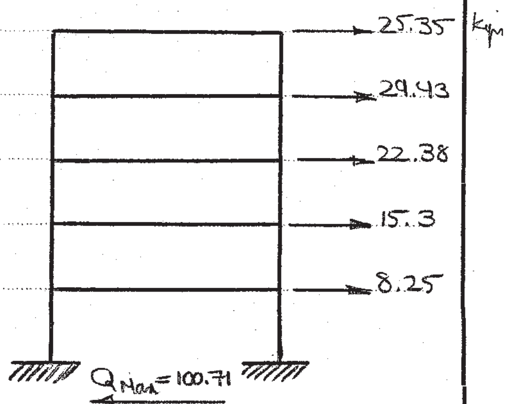
$$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a = \frac{1227.12^2}{865.89} (0.15g) = 260.86 \, g = 100706.5 \; \frac{lb \, in}{sec^2}$$

$$= 100706.5 \underset{\text{تن}}{lb} = 100.71 \; kips$$

۳) نیروهای جانبی Max در تراز طبقات :

$$q_{i\,Max} = \frac{Q_{Max}}{\bar{K}} M_i \psi_i = \frac{100706.5}{1227.12} M_i \psi_i$$

$$= 82.07 \, M_i \, \psi_i$$



ج) $\psi_c(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$M^* = 630.52\ lb$

$\bar{K} = \sum M_i\psi_i = 308.89 + 444.88(0.701+0.429+0.209+0.062) = 932.17\ lb$

$T = 0.578$ $\quad \xi = 10\% \rightarrow S_d = 0.62\ in$ $\quad S_v = 6.7\ \frac{in}{sec}$ $\quad S_a = 0.185g\ \frac{in}{sec^2}$

۱) تغییرمکان Max:

$$V(x,t) = \psi(x)\cdot\frac{\bar{K}}{M^*}S_d = \frac{932.17}{630.52}\cdot 0.62\,\psi_i = 0.917\,\psi_i$$

$$V_{Max}(x,t) = 0.917\ in$$

۲) برش پایه Max:

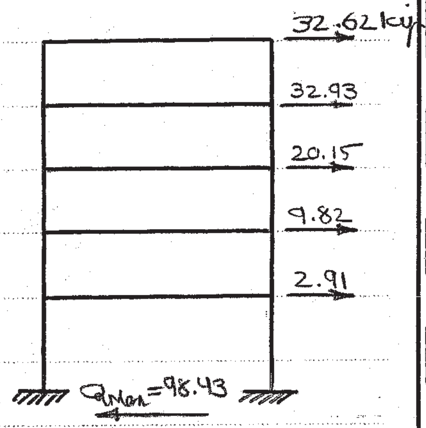
$$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*}S_a = \frac{932.17^2}{630.52}(0.185g) = 254.95g = 98427.8\ \frac{lb.in}{sec^2}$$

$$= 98427.8\ lb = 98.43\ kips$$

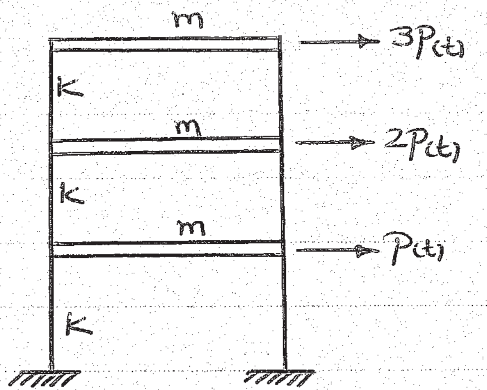
۳) نیروهای جانبی Max در تراز طبقات:

$$q_i\,Max = \frac{Q_{Max}}{\bar{K}}M_i\psi_i = \frac{98427.8}{932.17}M_i\psi_i$$

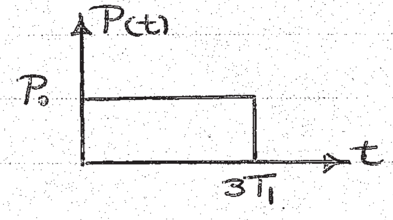
$$= 105.59\,M_i\psi_i$$



* در روابط ضریب $\frac{0.35}{0.2}$ فراموش شده است. تمام نیروها و تغییرمکان باید در این ضریب ضرب گردند

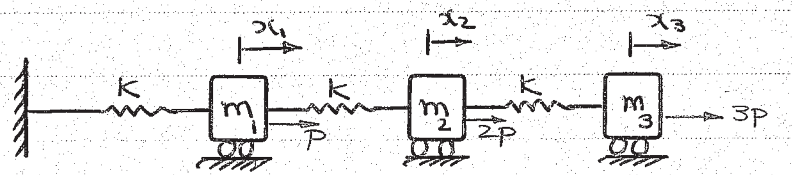


تمرین ۲۲ : ساختمان سه طبقه شکل تحت اثر نیروهای نشان داده شده در شکل قرار گرفته است. اولاً سیستم معادلات حرکت را بدست آورید، ثانیاً فرکانس‌ها و مدهای مودی متعلق به آن‌ها را محاسبه کنید.
توابع تغییر مکان را در هر یک از طبقات بدست آورید.
(T_1 پریود مد اول ساختمان می‌باشد).

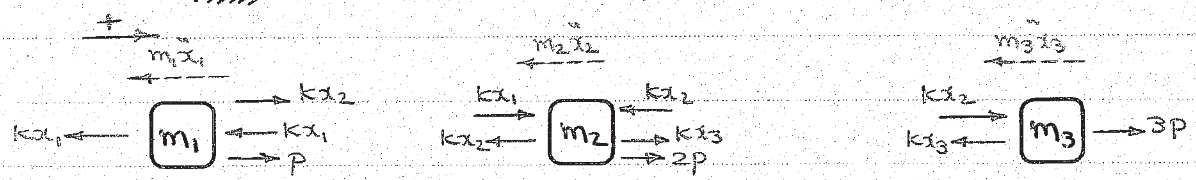


$$f_{(\tau)} = P_{(t)}$$

تعیین مدل دینامیکی :



$$m_1 = m_2 = m_3 = m$$



$$m_1 : \sum F_x = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}_1 - 2kx_1 + kx_2 + P = 0$$

$$m_2 : \sum F_x = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}_2 + kx_1 - 2kx_2 + kx_3 + 2P = 0$$

$$m_3 : \sum F_x = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}_3 + kx_2 - kx_3 + 3P = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = P \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = 2P \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 3P \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 2P \\ 3P \end{bmatrix}$$

$$[M][\ddot{x}] + [k][x] = [F]$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

فرض : $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \sin\omega t$

$$\begin{cases} (-m\omega^2 X_1 + 2kX_1 - kX_2)\sin\omega t = 0 \\ (-m\omega^2 X_2 - kX_1 + 2kX_2 - kX_3)\sin\omega t = 0 \\ (-m\omega^2 X_3 - kX_2 + kX_3)\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2+2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2+k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} -m\omega^2+2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2+k \end{vmatrix} = 0$$

$$(-m\omega^2+2k)\left((-m\omega^2+2k)(-m\omega^2+k) - k^2\right) + (-1)(-k)\left(-k(-m\omega^2+k)\right) = 0$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2+2k)^2(-m\omega^2+k) - k^2(-m\omega^2+2k) - k^2(-m\omega^2+k) = 0$$

$$\Rightarrow m^3\omega^6 - 5km^2\omega^4 + 6k^2m\omega^2 - k^3 = 0$$

$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 3.25k \\ m\omega_2^2 = 1.55k \\ m\omega_3^2 = 0.198k \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_1 &= 1.8\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 &= 1.24\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 &= 0.445\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1.25 & -1 & 0 \\ -1 & -1.25 & -1 \\ 0 & -1 & -2.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow X^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.25 \\ 0.56 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0.45 & -1 & 0 \\ -1 & 0.45 & -1 \\ 0 & -1 & -0.55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow X^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.45 \\ -0.82 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.802 & -1 & 0 \\ -1 & 1.802 & -1 \\ 0 & -1 & 0.802 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow X^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{Bmatrix}$$

حمید کاظم

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \rightarrow [A]^T[M][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [A]^T[K][A]\{Y(t)\} = [A]^T\{F(t)\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.25 & 0.45 & 1.802 \\ 0.56 & -0.82 & 2.247 \end{bmatrix} \qquad [M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = m[I]_{3\times 3}$$

$$[K] = K\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [F(t)] = P\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^T[M][A] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \qquad [A]^T[K][A] = \begin{bmatrix} 3.25k & 0 & 0 \\ 0 & 1.55k & 0 \\ 0 & 0 & 0.198k \end{bmatrix}$$

$$[A]^T\{F(t)\} = \begin{bmatrix} 0.058p \\ -0.277p \\ 1.219p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{Y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.25k & 0 & 0 \\ 0 & 1.55k & 0 \\ 0 & 0 & 0.198k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.058p \\ -0.277p \\ 1.219p \end{bmatrix}$$

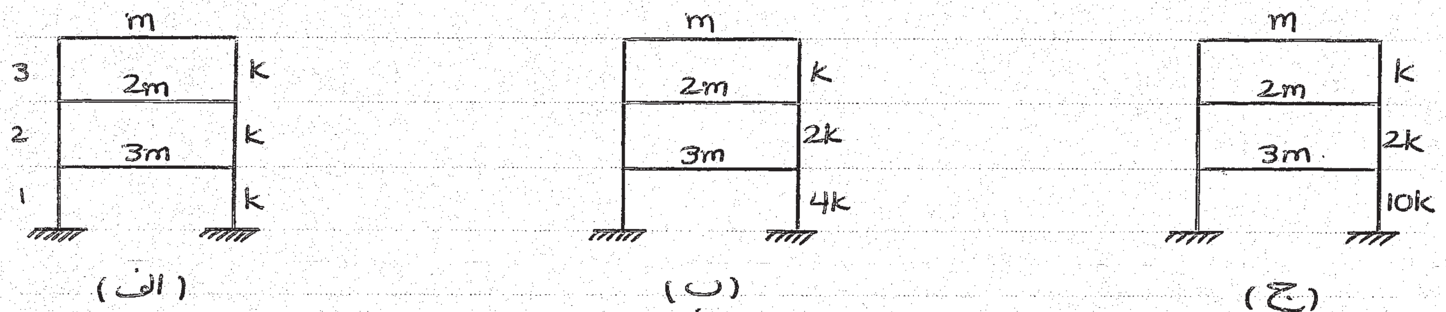
تابع تغییر مکان هر طبقه :

$$Y_1(t) = \frac{1}{1.8\sqrt{km}} \int_0^t P_0 \ \sin\left(1.8\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau$$

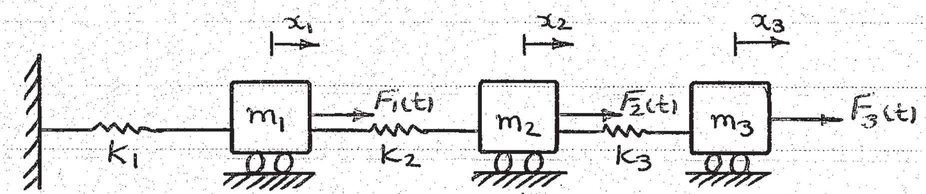
$$Y_2(t) = \frac{1}{1.24\sqrt{km}} \int_0^t 2P_0 \ \sin\left(1.24\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau$$

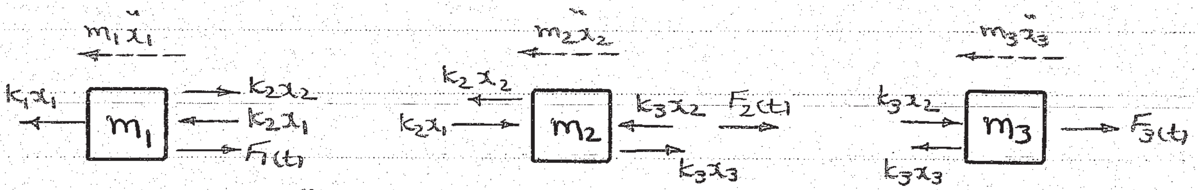
$$Y_3(t) = \frac{1}{0.445\sqrt{km}} \int_0^t 3P_0 \ \sin\left(0.445\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau$$

تمرین ۲۳ : در حرکت ارتعاش قاب های سه (۳) طبقه سیستم معادلات حرکت را نوشته و فرکانس های طبیعی و بردارهای مودی را بدست آورده با هم مقایسه کنید.



تعیین مدل دینامیکی (حالت کلی) :





$m_1 : \sum F_x = 0 \longrightarrow +m_1\ddot{x}_1 + x_1(k_1+k_2) - x_2(k_2) - F_1(t) = 0$

$m_2 : \sum F_x = 0 \longrightarrow +m_2\ddot{x}_2 + x_1(-k_2) + x_2(k_2+k_3) + x_3(-k_3) - F_2(t) = 0$

$m_3 : \sum F_x = 0 \longrightarrow +m_3\ddot{x}_3 + x_2(-k_3) + x_3(k_3) - F_3(t) = 0$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix}$$

فرض : $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \sin\omega t$

حمید کاظم

$$\begin{cases} 3m\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2+k_3)x_2 - k_3 x_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-3m\omega^2 X_1 + (k_1+k_2)X_1 - k_2 X_2)\sin\omega t = 0 \\ (-2m\omega^2 X_2 - k_2 X_1 + (k_2+k_3)X_2 - k_3 X_3)\sin\omega t = 0 \\ (-m\omega^2 X_3 - k_3 X_2 + k_3 X_3)\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -3m\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & -2m\omega^2+k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & -m\omega^2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0$$

دترمینان ماتریس چپ باید صفر باشد:

$$(-3m\omega^2+k_1+k_2)\left[(-2m\omega^2+k_2+k_3)(-m\omega^2+k_3)-k_3^2\right] + k_2\left(k_2(m\omega^2-k_3)\right) = 0$$

الف)

$k_1 = k_2 = k_3 = k$

$$\rightarrow (-3m\omega^2+2k)\left[(-2m\omega^2+2k)(-m\omega^2+k)-k^2\right] + k^2(m\omega^2-k) = 0$$

$$+6m^3\omega^6 - 16km^2\omega^4 + 10k^2m\omega^2 - k^3 = 0$$

$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 0.123k \\ m\omega_2^2 = 0.758k \\ m\omega_3^2 = 1.786k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0.351\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 0.871\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = 1.336\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.631 & -1 & 0 \\ -1 & 1.754 & -1 \\ 0 & -1 & 0.877 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.631 \\ 1.86 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -0.274 & -1 & 0 \\ -1 & 0.484 & -1 \\ 0 & -1 & 0.242 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.274 \\ -1.132 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \rightarrow \begin{bmatrix} -3.358 & -1 & 0 \\ -1 & -1.572 & -1 \\ 0 & -1 & -0.786 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.358 \\ 4.272 \end{bmatrix}$$

ب)

$k_1 = 4k \qquad k_2 = 2k \qquad k_3 = k$

$$(-3m\omega^2 + 6k)\left[(-2m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2\right] + 4k^2(m\omega^2 - k) = 0$$

$$6m^3\omega^6 - 27km^2\omega^4 + 32k^2m\omega^2 - 8k^3 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m\omega_1^2 = 0.34k \\ m\omega_2^2 = 1.441k \\ m\omega_3^2 = 2.719k \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_1 = 0.583\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1.2\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = 1.649\sqrt{\frac{k}{m}} \end{array}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 4.98 & -2 & 0 \\ -2 & 2.32 & -1 \\ 0 & -1 & 0.66 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.49 \\ 3.773 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.677 & -2 & 0 \\ -2 & 0.118 & -1 \\ 0 & -1 & -0.441 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.839 \\ -1.901 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \rightarrow \begin{bmatrix} -2.157 & -2 & 0 \\ -2 & -2.438 & -1 \\ 0 & -1 & -1.719 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.079 \\ 0.627 \end{bmatrix}$$

ج)

$k_1 = 10k \qquad k_2 = 2k \qquad k_3 = k$

$$(-3m\omega^2 + 12k)\left[(-2m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2\right] + 4k^2(m\omega^2 - k) = 0$$

$$6m^3\omega^6 - 39km^2\omega^4 + 62k^2m\omega^2 - 20k^3 = 0$$

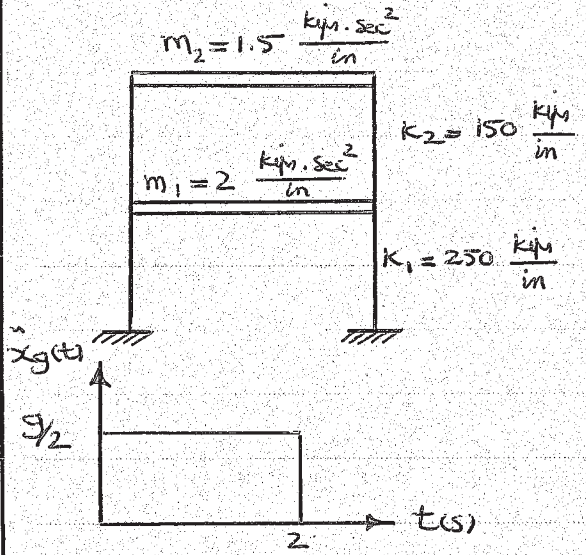
$$\left\{\begin{array}{l} m\omega_1^2 = 0.432k \\ m\omega_2^2 = 1.812k \\ m\omega_3^2 = 4.256k \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_1 = 0.657\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1.346\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = 2.063\sqrt{\frac{k}{m}} \end{array}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 10.704 & -2 & 0 \\ -2 & 2.136 & -1 \\ 0 & -1 & 0.568 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5.352 \\ 9.422 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 6.564 & -2 & 0 \\ -2 & -0.624 & -1 \\ 0 & -1 & -0.812 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.282 \\ -4.042 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} -0.765 & -2 & 0 \\ -2 & -5.512 & -1 \\ 0 & -1 & -3.256 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.38 \\ 0.117 \end{bmatrix}$$

تمرین ۲۴: قاب دو طبقه شکل تحت شتاب زمین بصورت دیاگرام نشان داده شده می باشد.
مطلوبست تعیین:



۱) فرکانس ها
۲) مودها
۳) جرمهای مودی
۴) بردار تغییر مکان در هر مود
۵) بردار تغییر مکان کل
۶) بردار نیروی الاستیک در هر مود
۷) بردار نیروی الاستیک کل
۸) برش پایه
۹) ممان واژگونی
۱۰) رسم تغییر مکان طبقات

حل:

۱) فرکانس ها:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با فرض $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2 = 0$$

$$\rightarrow (-2\omega^2 + 400)(-1.5\omega^2 + 150) - 150^2 = 0 \rightarrow 3(\omega^2)^2 - 900\omega^2 + 37500 = 0$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 50 \rightarrow \omega_1 = 7.071 \ \text{rad/s} \rightarrow T_1 = 0.89\,s \\ \omega_2^2 = 250 \rightarrow \omega_2 = 15.811 \ \text{rad/s} \rightarrow T_2 = 0.4\,s \end{cases}$$

۲) مودها:

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 300 & -150 \\ -150 & 75 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0 \longrightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -100 & -150 \\ -150 & -225 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0 \longrightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{Bmatrix}$$

حمید کاظم

۳) جرم های مودی :

$$M_k = \Phi_k^T [m]\, \Phi_k$$

$$M_1 = \Phi_1^T [m]\, \Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 8 \quad \frac{\text{kips.sec}^2}{\text{in}}$$

$$M_2 = \Phi_2^T [m]\, \Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2.67 \quad \frac{\text{kips.sec}^2}{\text{in}}$$

۴) بردار تغییر مکان هر مود :

$$\{x_k(t)\} = \Phi_k \cdot \frac{\bar{k}_k}{M_k\, \omega_k}\; V_k(t)$$

الف) بردار تغییر مکان مود اول : $(k=1)$

$$V_1(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, \sin\omega_1(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{g}{2}\, \sin(7.071(t-\tau))\, d\tau$$
$$= -27.3 \cos(7.071t) + 27.3$$

$$\bar{k}_1 = \Phi_1^T [m][I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 5$$

$$\{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} 5 \times \frac{1}{8 \times 7.071} \left(-27.3 \cos(7.071t) + 27.3\right)$$

$$\{x_1(t)\} = \begin{Bmatrix} -2.41 \cos(7.071t) + 2.41 \\ -4.825 \cos(7.071t) + 4.825 \end{Bmatrix}$$

ب) بردار تغییر مکان مود دوم : $(k=2)$

$$V_2(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, \sin\omega_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{g}{2}\, \sin(15.811(t-\tau))\, d\tau$$
$$= -12.21 \cos(15.811t) + 12.21$$

$$\bar{k}_2 = \Phi_2^T [m][I] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 1$$

$$\{x_2(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} 1 \times \frac{1}{2.66 \times 15.811} \left(-12.21 \cos(15.811t) + 12.21\right)$$

$$\{x_2(t)\} = \begin{Bmatrix} -0.29 \cos(15.811t) + 0.29 \\ +0.194 \cos(15.811t) - 0.194 \end{Bmatrix}$$

۵) بردار تغییر مکان کل :

$$\{x(t)\} = X_1 Y_1(t) + X_2 Y_2(t) = \{x_1(t)\} + \{x_2(t)\}$$

$$\Rightarrow \{x(t)\} = \begin{bmatrix} -2.41\, C_1(7.071t) - 0.29\, C_1(15.811t) + 2.7 \\ -4.825\, C_1(7.071t) + 0.194\, C_1(15.811t) + 4.631 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{تغییر مکان طبقه اول} \\ \longrightarrow \text{تغییر مکان طبقه دوم} \end{matrix}$$

۶) بردار نیروهای الاستیک در هر مود :

$$\{f_{Sk}\} = [m]\, X_k \cdot \frac{\bar{K}_k}{M_k}\, \omega_k \cdot V_k(t)$$

الف) بردار نیروی الاستیک مود اول :

$$\{f_{S_1}\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{5}{8}\; 7.071\; (-27.3\, C_1(7.071t) + 27.3)$$

$$= \begin{bmatrix} -241.3\, C_1(7.071t) + 241.3 \\ -361.95\, C_1(7.071t) + 361.95 \end{bmatrix}$$

ب) بردار نیروی الاستیک مود دوم :

$$\{f_{S_2}\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} \frac{1}{2.67}\; 15.811\; (-12.21\, C_1(15.811t) + 12.21)$$

$$= \begin{bmatrix} -144.61\, C_1(15.811t) + 144.61 \\ 72.304\, C_1(15.811t) - 72.304 \end{bmatrix}$$

۷) بردار نیروی الاستیک کل :

$$\{f_S\} = \{f_{S_1}\} + \{f_{S_2}\} = \begin{bmatrix} -241.3\, C_1(7.071t) - 144.61\, C_1(15.811t) + 385.91 \\ -361.95\, C_1(7.071t) + 72.3\, C_1(15.811t) + 289.65 \end{bmatrix}$$

۸) برش پایه :

$$Q(t) = \sum \frac{\bar{K}_k^2}{M_k}\, \omega_k\, V_k(t)$$

$$Q(t) = \frac{5^2}{8} \times 7.071\, (-27.3\, C_1(7.071t) + 27.3) + \frac{1^2}{2.67} \times 15.811\, (-12.21\, C_1(15.811) + 12.21) = -603.24\, C_1(7.071t) - 72.39\, C_1(15.811) + 675.55$$

۹) لنگر واژگونی :

بافرض ارتفاع كل طابق 3m يعني 118.11 in لذا :

$$M(t) = \sum h_k \cdot f_{s_k}(t) = [h]\{f_s(t)\}$$

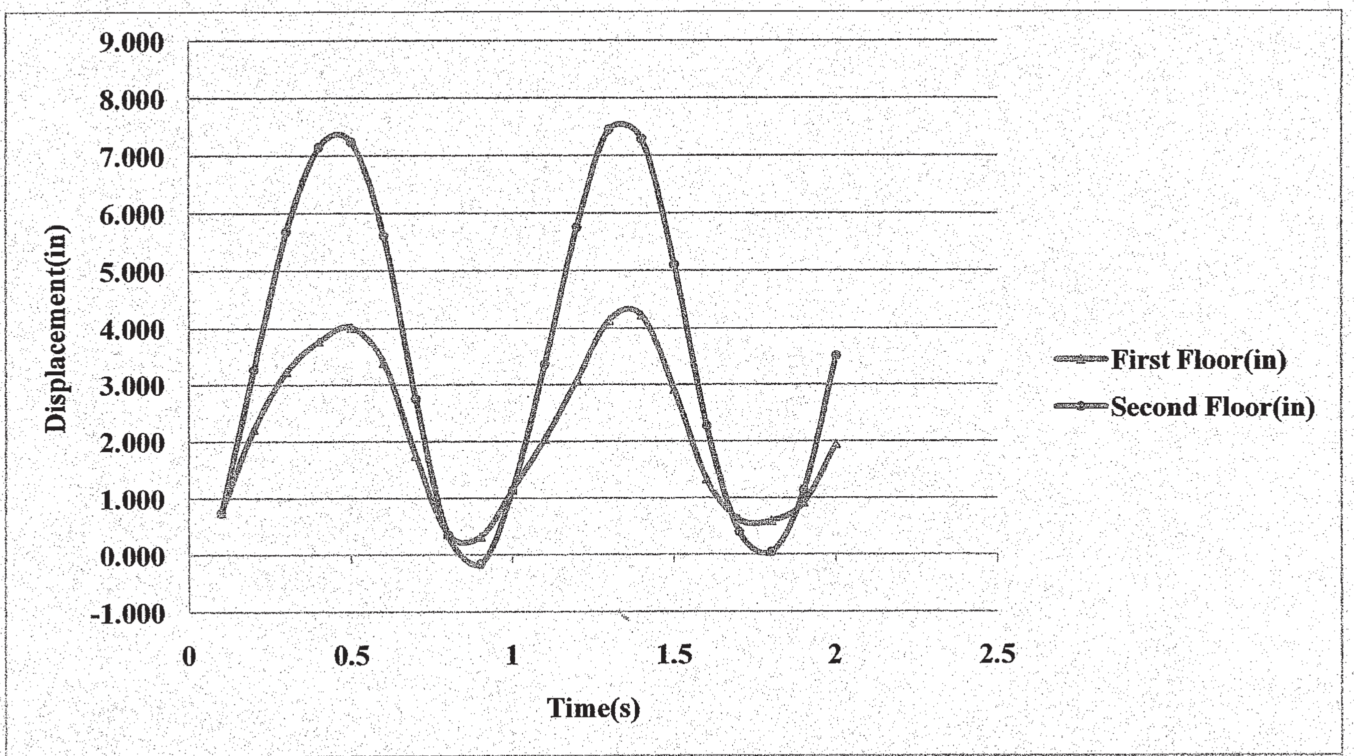
$$= \begin{bmatrix} 118.11 & 236.22 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -241.3\, C_1(7.071t) - 144.61\, C_1(15.811t) + 385.91 \\ -361.95\, C_1(7.071t) + 72.3\, C_1(15.811t) + 289.65 \end{bmatrix}$$

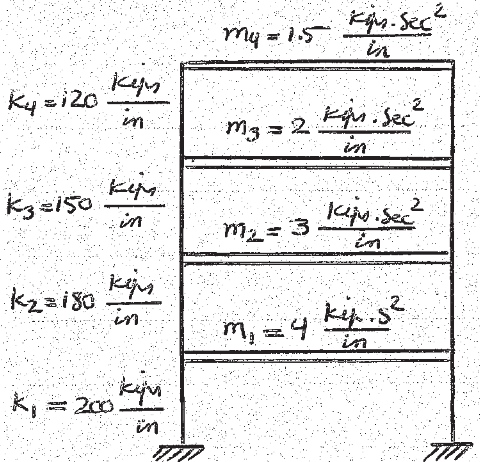
$$= -113999.77\, C_1(7.071t) - 1.18\, C_1(15.811t) + 114000.95 \text{ kip.in}$$

١٠) رسم تغير مكان طبقات :

حمید کاظم

t(s)	First Floor(in)	Second Floor(in)
0.1	0.756	0.737
0.2	2.209	3.262
0.3	3.221	5.683
0.4	3.766	7.148
0.5	4.017	7.244
0.6	3.383	5.611
0.7	1.745	2.749
0.8	0.367	0.349
0.9	0.323	-0.159
1	1.147	1.140
1.1	2.041	3.355
1.2	3.071	5.755
1.3	4.137	7.452
1.4	4.224	7.295
1.5	2.907	5.104
1.6	1.330	2.272
1.7	0.621	0.404
1.8	0.600	0.051
1.9	0.917	1.139
2	1.945	3.499





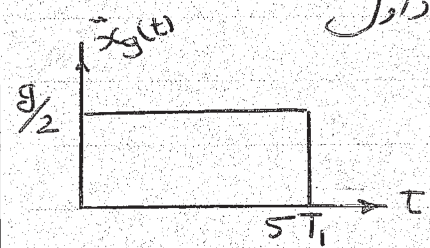
تمرین ۲۵: ساختمان چهار طبقه شکل مقابل مفروض است. اولاً فرکانس‌ها و مودهای متعلق به آن را محاسبه کنید. ثانیاً جرم‌های مودی و ضرایب تحریک آنها را بدست آورید. ثالثاً درصورتیکه این ساختمان تحت اثر زلزله‌ای قرار گیرد که نمودار شتاب آن بصورت زیر باشد مطلوبست: $(\xi = 0)$

الف) تابع تغییر مکان در هر یک از طبقات

ب) مقدار Max تغییر مکان در مود اول

ج) بردارهای الاستیک برای هر یک از مودها و برای ترکیب آنها (برای ترکیب مودها)

د) تابع برش پایه برای هر یک از مودها و مقدار Max برش پایه در مود اول



فرکانس‌ها:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & -m_3\omega^2+k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & -m_4\omega^2+k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -4\omega^2+380 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & -3\omega^2+330 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & -2\omega^2+270 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & -1.5\omega^2+120 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 36(\omega^2)^4 - 15120(\omega^2)^3 + 1946700(\omega^2)^2 - 80640000\,\omega^2 + 648\times10^6 = 0$$

$\omega_1^2 = 10.47 \rightarrow \omega_1 = 3.236 \ rad/s \rightarrow T_1 = 1.94\ s$

$\omega_2^2 = 59.12 \rightarrow \omega_2 = 7.689 \ rad/s \rightarrow T_2 = 0.82\ s$

$\omega_3^2 = 134.88 \rightarrow \omega_3 = 11.614 \ rad/s \rightarrow T_3 = 0.54\ s$

$\omega_4^2 = 215.53 \rightarrow \omega_4 = 14.681 \ rad/s \rightarrow T_4 = 0.43\ s$

مودها:

$$\omega = \omega_1 = 3.236 \rightarrow \begin{bmatrix} 338.11 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & 298.58 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & 249.06 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & 104.29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.878 \\ 2.538 \\ 2.92 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 = 7.689 \rightarrow \begin{bmatrix} +143.52 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & 152.64 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & 151.76 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & 31.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ +0.797 \\ -0.389 \\ -1.49 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 = 11.614 \rightarrow \begin{bmatrix} -159.54 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & -74.65 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & 0.23 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & -82.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \Phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.886 \\ -0.759 \\ 1.106 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_4 = 14.681 \rightarrow \begin{bmatrix} -482.13 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & -316.6 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & -161.06 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & -203.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \Phi_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.679 \\ 4.454 \\ -2.629 \end{Bmatrix}$$

جرم های مودی:

$$M_k = \Phi_k^T [m] \Phi_k$$

$M_1 = 40.253$ $\qquad M_2 = 9.538$ $\qquad M_3 = 9.342$ $\qquad M_4 = 75.575$

ضرایب تحریک زلزله :

$$\bar{k}_k = X_k^T [m][I]$$

$k_1 = 19.09$ $\qquad k_2 = 3.378$ $\qquad k_3 = 1.483$ $\qquad k_4 = 0.928$

الف) تابع تغییر مکان در هر طبقه :

$$\{x_k(t)\} = X_k \cdot \frac{\bar{k}_k}{M_k \omega_k} V_k(t)$$

الف-۱) بردار تغییر مکان مود اول :

$$V_1(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_1 (t-\tau) d\tau = \int_0^t g/_2 \sin(3.236(t-\tau))d\tau$$
$$= 59.65(-\cos(3.236t)+1)$$

$$\Rightarrow \{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} 8.742 \\ 16.417 \\ 22.187 \\ 25.527 \end{bmatrix} (-\cos(3.236t)+1)$$

الف-۲) بردار تغییر مکان مود دوم :

$$V_2(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_2 (t-\tau) d\tau = \int_0^t g/_2 \sin(7.689(t-\tau))d\tau$$
$$= 25.1(-\cos(7.689t)+1)$$

$$\Rightarrow \{x_2(t)\} = \begin{bmatrix} 1.156 \\ 0.921 \\ -0.45 \\ -1.723 \end{bmatrix} (-\cos(7.689t)+1)$$

الف-۳) بردار تغییر مکان مود سوم :

$$V_3(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_3 (t-\tau) d\tau = \int_0^t g/_2 \sin(11.614(t-\tau))d\tau$$
$$= +16.62(-\cos(11.614t)+1)$$

$$\Rightarrow \{x_3(t)\} = \begin{bmatrix} 0.227 \\ -0.201 \\ -0.192 \\ 0.251 \end{bmatrix} (-\cos(11.614t)+1)$$

حمید کاظم

الف – ٤) بردار تغییر مکان مود چهارم:

$$V_4(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, \sin\omega_4(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t g/2\, \sin(14.681(t-\tau))\, d\tau$$
$$= 13.15\,(-\cos(14.681t)+1)$$

$$\{x_4(t)\} = \begin{bmatrix} 0.011 \\ -0.029 \\ 0.049 \\ -0.029 \end{bmatrix} (-\cos(14.681t)+1)$$

ب) Max تغییر مکان در مود اول:

$$\{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} 8.742 \\ 16.417 \\ 22.187 \\ 25.527 \end{bmatrix} (-\cos(3.236t)+1) \qquad 0 < t < 5\times 1.94$$

$$t = 0.971 \rightarrow -\cos(3.236\times 0.971)+1 = 2 \Rightarrow \{x_{1,Max}\} = \begin{bmatrix} 17.484 \\ 32.834 \\ 44.374 \\ 51.054 \end{bmatrix} in$$

ج) بردار نیروهای الاستیک برای هر مود و برای ترکیب آن ها:

$$\{f_{S_k}\} = [m]\, X_k\, \frac{\bar{K}_k}{M_k} \cdot \omega_k \cdot V_k(t)$$

ج – ١) مود اول:

$$\{f_{S_1}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5.634 \\ 5.076 \\ 4.38 \end{bmatrix} \times \frac{19.09}{40.253} \times 3.236 \times 59.65\,(-\cos(3.236t)+1)$$

$$\Rightarrow \{f_{S_1}\} = \begin{bmatrix} 366.17 \\ 515.76 \\ 464.67 \\ 400.96 \end{bmatrix} (-\cos(3.236t)+1) \quad (kip)$$

ج-٢) مود دوم:

$$\{f_{s_2}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.391 \\ -0.778 \\ -2.235 \end{bmatrix} \frac{3.378}{9.538} \times 7.689 \times 25.1\,(-\cos(7.689t)+1)$$

$$\Longrightarrow \{f_{s_2}\} = \begin{bmatrix} 273.4 \\ 163.43 \\ -53.18 \\ -152.76 \end{bmatrix} (-\cos(7.689t)+1)$$

ج-٣) مود سوم:

$$\{f_{s_3}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2.658 \\ -1.518 \\ 1.659 \end{bmatrix} \frac{1.483}{9.342} \times 11.614 \times 16.62\,(-\cos(11.614t)+1)$$

$$\Longrightarrow \{f_{s_3}\} = \begin{bmatrix} 122.57 \\ -81.45 \\ -46.51 \\ 50.83 \end{bmatrix} (-\cos(11.614t)+1)$$

ج-٤) مود چهارم:

$$\{f_{s_4}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8.037 \\ 8.908 \\ -3.944 \end{bmatrix} \frac{0.928}{75.575} \times 14.681 \times 13.15\,(-\cos(14.681t)+1)$$

$$\Longrightarrow \{f_{s_4}\} = \begin{bmatrix} 9.48 \\ -19.05 \\ 21.12 \\ -9.35 \end{bmatrix} (-\cos(14.681t)+1)$$

ج-ه) ترکیب مودها:

$$\{f_s\} = \{f_{s_1}\} + \{f_{s_2}\} + \{f_{s_3}\} + \{f_{s_4}\}$$

$$\{f_s\} = \begin{Bmatrix} -366.17\cos(3.236t) - 273.4\cos(7.689t) - 122.57\cos(11.614t) - 9.48\cos(14.681t) + 771.62 \\ -515.76\cos(3.236t) - 163.43\cos(7.689t) + 81.45\cos(11.614t) + 19.05\cos(14.681t) + 578.69 \\ -164.67\cos(3.236t) + 53.18\cos(7.689t) + 46.51\cos(11.614t) - 21.12\cos(14.681t) + 386.1 \\ -400.96\cos(3.236t) + 152.76\cos(7.689t) - 50.83\cos(11.614t) + 9.35\cos(14.681t) + 289.68 \end{Bmatrix}$$

د) تابع برش پایه هر مود - Max برش پایه مود اول.

$$Q_{(t)} = \sum \frac{\bar{K}_k^2}{M_k} \omega_k V_k(t)$$

د-۱) مود اول:

$$Q_1(t) = \frac{19.09^2}{40.253} \times 3.236 \times 59.65 \left(-C_1(3.236t)+1\right)$$

$$= 1747.56 \left(-C_1(3.236)+1\right) \text{ (kips)}$$

د-۲) مود دوم:

$$Q_2(t) = \frac{3.378^2}{9.538} \times 7.689 \times 25.1 \left(-C_1(7.689t)+1\right)$$

$$= 230.89 \left(-C_1(7.689t)+1\right) \text{ (kips)}$$

د-۳) مود سوم:

$$Q_3(t) = \frac{1.488^2}{9.342} \times 11.614 \times 16.62 \left(-C_1(11.614t)+1\right)$$

$$= 45.44 \left(-C_1(11.614t)+1\right) \text{ (kips)}$$

د-٤) مود چهارم:

$$Q_4(t) = \frac{0.928^2}{75.575} \times 14.681 \times 13.15 \left(-C_1(14.681t)+1\right)$$

$$= 2.2 \left(-C_1(14.681t)+1\right) \text{ (kips)}$$

د-ص) Max برش پایه مود اول:

$$Q_{1,Max} = 1747.56 \times 2 = 3495.12 \text{ (kips)}$$

تمرین ۲۶ : اگر برای طراحی ساختمان تمرین 25 بتوان از نمودار شکل A استفاده کرد، نسبت بحرانی را برای کلیه مودها 5% در نظر گرفت، مطلوبست تعیین:

الف) بردار تغییر مکان Max برای حرکت از مودها و بردار تغییر مکان کل

ب) نیروهای الاستیک در هر از طبقات و مقدار کل نیروی الاستیک

ج) برش پایه در هر مود و مقدار کل آن

$$\omega_1 = 3.236 \ rad/s \longrightarrow T_1 = 1.94\,s$$
$$\omega_2 = 7.689 \ rad/s \longrightarrow T_2 = 0.82\,s$$
$$\omega_3 = 11.614 \ rad/s \longrightarrow T_3 = 0.54\,s$$
$$\omega_4 = 14.681 \ rad/s \longrightarrow T_4 = 0.43\,s$$

$$\Longrightarrow \{S_V\} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8.7 \\ 7.6 \end{bmatrix} in/s$$

الف)

$$\{x_{k,Max}\} = \Phi_k \frac{\bar{k}_k}{M_k \omega_k} S_{v_k}$$

$$\{x_{1,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.878 \\ 2.538 \\ 2.92 \end{bmatrix} \frac{19.09}{40.253 \times 3.236} \times 12 = \begin{bmatrix} 1.759 \\ 3.303 \\ 4.463 \\ 5.135 \end{bmatrix} in$$

$$\{x_{2,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.797 \\ -0.389 \\ -1.49 \end{bmatrix} \frac{3.378}{9.538 \times 7.689} \times 10 = \begin{bmatrix} 0.461 \\ 0.367 \\ -0.179 \\ -0.686 \end{bmatrix} in$$

$$\{x_{3,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.866 \\ -0.759 \\ 1.106 \end{bmatrix} \frac{1.483}{9.342 \times 11.614} \times 8.7 = \begin{bmatrix} 0.119 \\ -0.103 \\ -0.09 \\ 0.132 \end{bmatrix} in$$

$$\{x_{4,Max}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.679 \\ 4.454 \\ -2.629 \end{Bmatrix} \frac{0.928}{75.575 \times 14.681} \times 7.6 = \begin{Bmatrix} 0.006 \\ -0.017 \\ 0.028 \\ -0.017 \end{Bmatrix}$$

$$\{x_{Max}\} = \begin{bmatrix} (1.759^2 + 0.461^2 + 0.119^2 + 0.006^2)^{1/2} \\ (3.303^2 + 0.367^2 + 0.103^2 + 0.017^2)^{1/2} \\ (4.463^2 + 0.179^2 + 0.09^2 + 0.028^2)^{1/2} \\ (5.135^2 + 0.686^2 + 0.132^2 + 0.017^2)^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.822 \\ 3.325 \\ 4.468 \\ 5.182 \end{bmatrix} (in)$$

ب)

$$\{f_{sk}\} = [m]\, \Phi_k \frac{\bar{L}_k}{M_k} \omega_k \cdot S_v$$

$$\{f_{s_1,Max}\} = \begin{bmatrix} 73.66 \\ 103.76 \\ 93.48 \\ 80.66 \end{bmatrix} \qquad \{f_{s_2,Max}\} = \begin{bmatrix} 108.96 \\ 65.13 \\ -21.19 \\ -60.88 \end{bmatrix}$$

$$\{f_{s_3,Max}\} = \begin{bmatrix} 64.16 \\ -42.63 \\ -24.35 \\ 26.61 \end{bmatrix} \qquad \{f_{s_4,Max}\} = \begin{bmatrix} 5.48 \\ -11.01 \\ 12.2 \\ -5.4 \end{bmatrix}$$

$$\{f_{s\,Max}\} = \begin{bmatrix} (73.66^2 + 108.96^2 + 64.16^2 + 5.48^2)^{1/2} \\ (103.76^2 + 65.13^2 + 42.63^2 + 11.01^2)^{1/2} \\ (93.48^2 + 21.19^2 + 24.35^2 + 12.2^2)^{1/2} \\ (80.66^2 + 60.88^2 + 26.61^2 + 5.4^2)^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 146.44 \\ 130.18 \\ 99.65 \\ 104.64 \end{bmatrix} \text{ kips}$$

ج)

$$Q(t) = \sum \frac{\bar{K}_k^2}{M_k} \omega_k V_k(t)$$

$$Q_{1_{Max}}(t) = \frac{19.09^2}{40.253} \times 3.236 \times 12 = 351.56 \text{ kips}$$

$$Q_{2_{Max}}(t) = \frac{3.378^2}{9.538} \times 7.689 \times 10 = 91.99 \text{ kips}$$

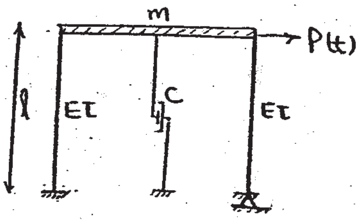
$$Q_{3_{Max}}(t) = \frac{1.483^2}{9.342} \times 11.614 \times 8.7 = 23.79 \text{ kips}$$

$$Q_{4_{Max}}(t) = \frac{0.928^2}{75.575} \times 14.681 \times 7.6 = 1.27 \text{ kips}$$

$$Q_{Max}(t) = (351.56^2 + 91.99^2 + 23.79^2 + 1.27^2)^{1/2} = 364.18 \text{ kips}$$

① سری ۸۱۲۴۰۲۰ مریم شکیبا

- معادله حرکت قاب شکل زیر را بدست آورید. در صورتیکه نیروی $P(t)$ و نیز استهلاک مساوی صفر باشد.
مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان و اگر در لحظه صفر $x = X_0$ و $\dot{X}_0 = 0$ باشد تابع تغییر مکان را رسم نمائید.



$$k_1 = \frac{3EI}{L^3} \qquad k_2 = \frac{12EI}{L^3}$$

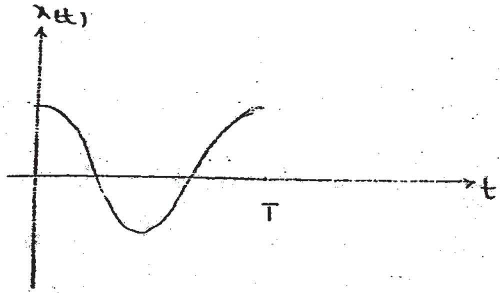
$$\Rightarrow k = \frac{15EI}{L} = k_1 + k_2$$

$$\xi = 0 \quad P(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(t) = X\cos(\omega_n t - \phi) \\ X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad , \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) \end{cases}$$

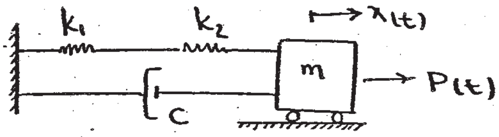
$$\dot{X}_0 = 0 \qquad \phi = 0$$

$$X_0 = x \qquad X = x \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x\cos\omega_n t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15EI}{mL^3}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

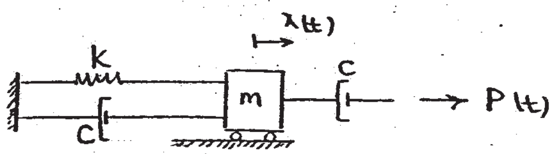


ـ معادله حرکت سیستم های زیر را بدست آورید.



$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2} \Rightarrow k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \quad , \quad x=x_1+x_2$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=p(t) \Rightarrow m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)+c(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(x_1+x_2)=p(t)$$

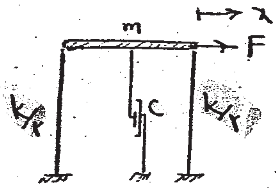


دمپرها موازی $\quad c=c_1+c_2=2c$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+2c\dot{x}+kx=p(t)$$

مریم شکیبا   ۸۱۲۴۰۳۰   سری ۲

ـ قاب نشان داده شده در شکل تحت تاثیر نیروی افقی 1000 kgf تغییر مکان استاتیکی ۱.۵cm را می‌دهد اگر نیرو یکباره برداشته شود قاب با پریود ۰.۸s ارتعاش کرده و بعد از ۵ سیکل کامل تغییر مکان به ۱cm می‌رسد بعد از این آزمایش مطلوبست تعیین وزن موثر قاب نسبت استهلاک ξ بنسبت استهلاک بحرانی و ضریب استهلاک هم چنین دامنه پس از ۱۰ سیکل کامل.



$$k = \frac{F}{X_0} = \frac{1000}{1.5} = 666.67 \ \mathrm{kgf/cm} \times 10^2 \ \mathrm{kgf/m}$$

فرض $\omega_D \approx \omega_n$ $\qquad T = \frac{2\pi}{\omega_D} \simeq \frac{2\pi}{\omega_n} \Rightarrow 0.8 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{666.67 \times 10^2 \times 10}{W}}}$

$$\Rightarrow W = 10807.59 \ \mathrm{kgf}$$

$$\Rightarrow \omega_D = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.8} = 7.85 \ \mathrm{rad/s}$$

$$\frac{X_k}{X_{k+5}} = \frac{X e^{-\xi\omega_n k\left(\frac{2\pi}{\omega_D}\right)}}{X e^{-\xi\omega_n (k+5)\left(\frac{2\pi}{\omega_D}\right)}} = e^{5\xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_D}} = e^{10\pi\xi\frac{\omega_n}{\omega_D}}$$

$$\Rightarrow Ln\left(\frac{X_k}{X_{k+5}}\right) = 10\pi\xi\frac{\omega_n}{\omega_D} = 10\pi\xi\cancel{\frac{\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}_{\to 1} \simeq 10\pi\xi$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{10\pi} Ln\left(\frac{X_k}{X_{k+5}}\right) = \frac{1}{10\pi} Ln\left(\frac{1.5}{1}\right) = 0.0129 = 1.29\%$$

$$C = 2\xi m\omega_n = 2 \times 0.0129 \times \frac{10807.59}{10} \times 7.85 = 218.89 \ \mathrm{kg.s/m}$$

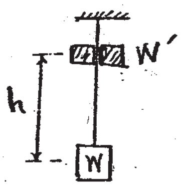
$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_n \times \sqrt{1 - 0.0129^2} = 0.99992\,\omega_n \approx \omega_n$$

$$\frac{1}{5 \times 2\pi} Ln\left(\frac{X_0}{X_5}\right) = \frac{1}{2\pi \times 10} Ln\left(\frac{X_0}{X_{10}}\right) \Rightarrow 2Ln\left(\frac{X_0}{X_5}\right) = Ln\left(\frac{X_0}{X_{10}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X_0}{X_5}\right)^2 = \left(\frac{X_0}{X_{10}}\right) \Rightarrow \left(\frac{1.5}{1}\right)^2 = \frac{1.5}{X_{10}} \Rightarrow X_{10} = \frac{1}{1.5} = 0.667 \ \mathrm{cm}$$

$1\ CPM = 0.033\pi\ \frac{rad}{s}$

ـ وزنه W به کابلی متصل است فرکانس طبیعی سیستم در این حالت $94\ CPM$ اندازه گیری شده است هرگاه وزنه $W' = 1\ lb$ به W افزوده شود فرکانس سیستم به $۷۶/۷۵\ CPM$ تقلیل می یابد ۱) مقدار W و k را تعیین نمائید ۲) هرگاه وزنه W' از ارتفاع $h = 6 in$ رها گردیده و به وزنه W متصل باشد مقدار max و min نیروی کابل را محاسبه نمائید در این حالت $\xi = 10\%$ فرض گردد توجه شود کابل تنها نیروی کششی را تحمل می کند.



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \begin{cases} ۹۴\ CPM = ۳/۱۳۳\pi\ rad/s \\ ۷۶/۷۵\ CPM = ۲/۵۵۸\pi\ rad/s \end{cases}$$

حالت اول $\Rightarrow \omega_n = ۳/۱۳۳\pi = \sqrt{\frac{k\times g}{W}} \Rightarrow \frac{k}{W} = ۳/۰۲۸$

حالت دوم $\Rightarrow \omega_n = ۲/۵۵۸\pi = \sqrt{\frac{k\times g}{W+W'}} \Rightarrow \frac{k}{W+1} = ۲/۰۱۸۷$

$$\Rightarrow \frac{۳/۰۲۸W}{W+1} = ۲/۰۱۸۷ \Rightarrow W = ۲\ lb \ ,\ k = ۶/۰۵۶\ lb/ft$$

$$m'gh = \frac{1}{2}(m+m')v^2 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{32}}\times\cancel{32}\times\frac{6}{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{32}\right)v^2$$

$$\Rightarrow v_0 = ۳/۲۶۶\ ft/s \qquad \dot{x}_0 = ۳/۲۶۶\ ft/s \qquad \xi = 10\%$$

کابل تنها نیروی کششی تحمل می کند $\Leftarrow$ min نیروی کابل $= 0$

$$X = \left[\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_D}\right)^2 + x_0^2\right]^{1/2}$$ سیستم دارای استهلاک $\xi < 1$

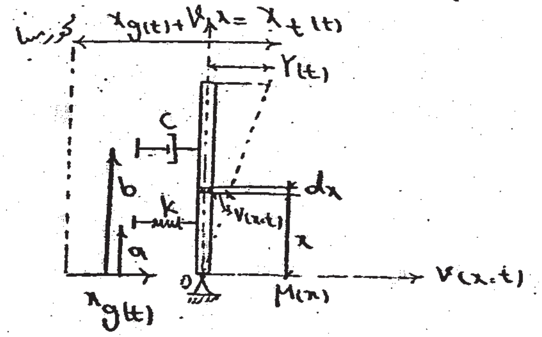
$$\Rightarrow X = \left[\left(\frac{۳/۲۶۶ + ۰/۱\times۸/۰۳۶\times۰}{۷/۹۹۶}\right)^2 + ۰\right]^{1/2} = ۰/۴۰۸\ ft$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = ۲/۵۵۸\pi \Rightarrow \omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = ۷/۹۹۶$$

$$\Rightarrow F_{max} = kX = ۶/۰۵۶\times۰/۴۰۸ = ۲/۴۷\ lb$$

مریم تسلیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ۳

- در صورتیکه مثال فوق تحت اثر حرکت زمین $x_g(t)$ قرار گیرد مطلوبست تعیین معادله حرکت الف) بدون در نظر گرفتن $P(t)$ ب) با در نظر گرفتن $P(t)$.



الف) $\Sigma M_0=0 \Rightarrow M_I+M_D+M_S=\cancel{M_{P(t)}}$

$V(x,t)=\psi(x)\cdot Y(t) \qquad \psi(L)=1 \Rightarrow \psi(x)=\frac{x}{L}$

$\Rightarrow V(x,t)=\frac{x}{L}\cdot Y(t)$

$M_S=f_S\cdot a \quad , \quad f_S=k\cdot\frac{a}{L}Y(t) \qquad M_D=f_D\cdot b \quad , \quad f_D=c\cdot\frac{b}{L}\dot{Y}(t)$

$M_I=\int_0^L M(x)x\cdot\ddot{x}_t(t)\cdot dx \qquad x_t(t)=x_g(t)+v(x,t)$

$\Rightarrow \ddot{x}_t(t)=\ddot{x}_g(t)+\ddot{v}(x,t)=\ddot{x}_g(t)+\frac{x}{L}\ddot{Y}(t)$

$\Rightarrow M_I=\int_0^L M(x)x\left(\ddot{x}_g(t)+\frac{x}{L}\ddot{Y}(t)\right)dx=\ddot{x}_g(t)\cancel{\int_0^L M(x)x\,dx}+\ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x^2}{L}dx$

$M_I=\ddot{x}_g(t)\int_0^L M\cdot x\,dx+\ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x^2}{L}dx$

$\ddot{x}_g(t)\int_0^L Mx\,dx+\ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x}{L}dx+c\cdot\frac{b^2}{L}\dot{Y}+k\frac{a^2}{L}Y=0$

$\Rightarrow \ddot{Y}\int_0^L M(x)\left(\frac{x}{L}\right)^2dx+\dot{Y}c\left(\frac{b}{L}\right)^2+Y\cdot k\left(\frac{a}{L}\right)^2=-\ddot{x}_g(t)\int_0^L M(x)\frac{x}{L}dx$

$\Rightarrow M^*\ddot{Y}+C^*\dot{Y}+K^*Y=-M^*\ddot{x}_g(t)$

ب) $V(x,t)=\frac{x}{L}Y(t) \qquad \Sigma M_0=0 \Rightarrow M_I+M_D+M_S=M_{P(t)}$

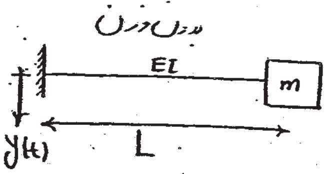
$M_I=\ddot{x}_g(t)\int_0^L M(x)x\,dx+\ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x}{L}dx \qquad M_D=c\frac{b^2}{L}\dot{Y}(t) \qquad M_S=k\frac{a^2}{L}Y(t)$

$, M_{P(t)}=P(t)\cdot d$

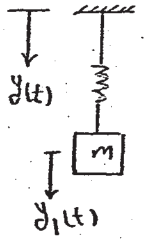
$\Rightarrow \bar{M}^*\ddot{x}_g(t)+\ddot{Y}\int_0^L M(x)\frac{x}{L}dx+\dot{Y}c\frac{b^2}{L}+Yk\frac{a^2}{L}=P(t)\cdot d$

$\Rightarrow \ddot{Y}\int_0^L M(x)\left(\frac{x}{L}\right)^2dx+\dot{Y}c\left(\frac{b}{L}\right)^2+Yk\left(\frac{a}{L}\right)^2=P(t)\cdot\frac{d}{L}-\bar{M}^*\ddot{x}_g(t)$

ـ تیر یک سر گیردار بدون وزن که انتهای آن جرم m متصل است دارای تکیه گاهی است که مطابق شکل می تواند حرکت کند مطلوبست تعیین معادله حرکت سیستم.



mg



$$y_t(t) = y_1(t) + y(t)$$

$$f_I + f_D + f_S = 0$$

$$f_S = k\,y_1(t) \qquad f_D = c\,\dot{y}_1(t) \quad , f_I = m\,\ddot{y}_t(t)$$

$$\ddot{y}_t(t) = \ddot{y}_1(t) + \ddot{y}(t) \quad \Rightarrow \quad f_I = m\ddot{y}_1(t) + m\ddot{y}(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{y}_1(t) + m\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}_1(t) + k\,y_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{y}_1 + \cancel{c\dot{y}_1} + k\,y_1 = -m\ddot{y}(t)$$

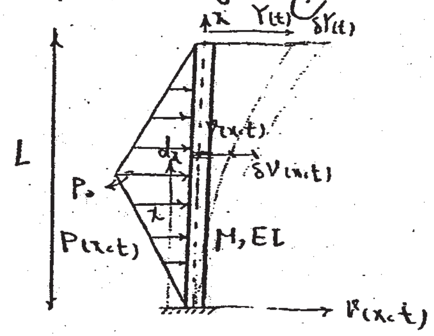
$$mg = k.\Delta \qquad \Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{3\cancel{mg}.EI}{\cancel{P}L^3} = \frac{3EI}{L^3}$$

$$c = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y}_1 + \frac{3EI}{L^3}\,y_1 = -m\ddot{y}(t)$$

حریم تسلیما ۸۱۲۴۰۳۰ سری ④

_ سازه شکل زیر مفروض است مطلوبست تعیین معادله حرکت برای سه حالت از تابع شکلی.



$$v(x,t)=\psi(x)\cdot Y(t)$$

جسم غیرصلب

اصل تغییر مکان مجازی $\delta W_t=0 \Rightarrow \delta W_E=\delta W_I$

$$\delta v(x,t)=\psi(x)\cdot\delta Y(t)$$

$$\delta W_E=\int_0^L p(x,t)\cdot\delta v(x,t)\cdot dx$$ کار مجازی نیروهای خارجی

$$\delta W_I=\int m(x)\,\delta d\theta+\int_0^L f_I(x)\,\delta v(x,t)\,dx$$

$$f_I(x)=m(x)\ddot v(x,t)\ ,\quad \theta=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\ ,\quad d\theta=\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}dx\ ,\quad m(x)=EI\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \delta W_I=\int_0^L EI\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\cdot\delta\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}dx+\int_0^L m(x)\,\ddot v(x,t)\cdot\delta v(x,t)\,dx$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{d^2\psi}{dx^2}\cdot Y(t) \qquad \delta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{d^2\psi}{dx^2}\cdot\delta Y(t)$$

$$\Rightarrow \delta W_I=\int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2\cdot Y(t)\cdot\delta Y(t)\cdot dx+\int_0^L m(x)\,\psi(x)^2\,\frac{d^2Y}{dt^2}\cdot\delta Y(t)\,dx$$

$$\delta W_I=\delta W_E \Rightarrow Y(t)\cdot\cancel{\delta Y(t)}\int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2dx+\frac{d^2Y}{dt^2}\cdot\cancel{\delta Y(t)}\int_0^L m(x)\,\psi(x)^2dx=\cancel{\delta Y(t)}\int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ddot Y\int_0^L m(x)\,\psi(x)^2dx+Y\int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2dx=\int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow M^*\ddot Y+K^*Y=P^*(t)$$

$$P(x,t)=\begin{cases}\dfrac{2P_0}{L}x & 0\leq x\leq\dfrac{L}{2}\\[2mm] -\dfrac{2P_0}{L}x+2P_0 & \dfrac{L}{2}\leq x\leq L\end{cases}$$

الف) $\psi(x)=1-\cos\dfrac{\pi x}{2L}$ $\qquad \dfrac{d^2\psi}{dx^2}=\dfrac{\pi^2}{4L^2}\cos\dfrac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^*=\int_0^L m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2dx=m_0\left(-\frac{4L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L}+\frac{L}{4\pi}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{3\pi x L}{4\pi L}\Big]_0^L\right)=0{,}227\,mL$$

$$K^*=\int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2dx=EI\times\frac{\pi^4}{16L^4}\times\left(\frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{x}{2}\Big]_0^L\right)=EI\cdot\frac{\pi^4}{32L^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^{L/2} \frac{2P_0}{L}\, x \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx + \int_{L/2}^{L} \left(-\frac{2P_0}{L}x + 2P_0\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx$$

$$\Rightarrow P^*(t) = \frac{2P_0}{L}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2Lx}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} - \frac{4L^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\Big]_0^{L/2}\right) + 2P_0\left(x - \frac{x^2}{2L} + \frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} - \frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} + \frac{4L}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\Big]_{L/2}^{L}\right) = 2P_0L\left(\frac{1}{4} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\right) = 0.164\, P_0 L$$

$$\Rightarrow 0.227\, ML\ddot{Y} + 3.04\,\frac{EI}{L^3}\, Y = 0.164\, P_0 L$$

ب) $\psi(x) = \dfrac{x^2}{L^2}$ $\qquad \dfrac{d^2\psi}{dx^2} = \dfrac{2}{L^2}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{M}{L^4}\times\frac{L^5}{5} = \frac{1}{5}ML$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^{L/2}\frac{2P_0}{L}\, x \cdot \frac{x^2}{L^2}\, dx + \int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2P_0}{L}x + 2P_0\right)\cdot\frac{x^2}{L^2}\, dx = 0.146\, P_0 L$$

$$\Rightarrow 0.2\, ML\ddot{Y} + \frac{4EI}{L^3}\, Y = 0.146\, P_0 L$$

ج) $\psi(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2L}\right)$ $\qquad \dfrac{d^2\psi}{dx^2} = -\dfrac{\pi^2}{4L^2}\sin\dfrac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = M\times\left(-\frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{x}{2}\Big]_0^L\right) = 0.5\, ML$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{16L^4}\left(-\frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{x}{2}\Big]_0^L\right) = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^{L/2}\frac{2P_0}{L}\, x \cdot \sin\frac{\pi x}{2L}\, dx + \int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2P_0}{L}x + 2P_0\right)\cdot\sin\frac{\pi x}{2L}\, dx =$$

$$\Rightarrow P^*(t) = \frac{2P_0}{L}\left(-\frac{2Lx}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\Big]_0^{L/2}\right) + 2P_0\left(\frac{2x}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L} - \frac{2L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L} - \frac{4L}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\Big]_{L/2}^{L}\right)$$

$$\Rightarrow P^*(t) = -0.114\, P_0 L$$

$$\Rightarrow 0.5\, ML\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}\, Y = -0.114\, P_0 L$$

۸۱۲۴۰۳۰ مریم سلیمیا

_ روابط سیستم دارای استهلاک $\xi<1$ را اثبات نمایید.

$$x_{(t)}=e^{-\xi\omega_n t}(C\cos\omega_D t+D\sin\omega_D t) \qquad x_{(0)}=X_0 \quad , \quad \dot{x}_{(0)}=\dot{X}_0$$

$$\Rightarrow x_{(0)}=e^{0}\times(C\times\cos 0+D\sin 0)=1\times C=X_0 \Rightarrow C=X_0$$

$$\dot{x}_{(t)}=-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}(C\cos\omega_D t+D\sin\omega_D t)+e^{-\xi\omega_n t}(\overset{X_0}{\cancel{C}}\cdot\omega_D\sin\omega_D t-D\omega_D\cos\omega_D t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{(0)}=-\xi\omega_n\times 1\times(X_0+0)+1\times(-X_0\cdot\omega_D\times 0+D\cdot\omega_D\times 1)$$

$$\Rightarrow -\xi X_0\omega_n+D\omega_D=\dot{X}_0 \Rightarrow D\omega_D=+\xi X_0\omega_n+\dot{X}_0$$

$$\Rightarrow D=+\frac{\xi\omega_n X_0+\dot{X}_0}{\omega_D}$$

$$\Rightarrow x_{(t)}=e^{-\xi\omega_n t}\left(X_0\cos\omega_D t+\frac{\xi\omega_n X_0+\dot{X}_0}{\omega_D}\sin\omega_D t\right)$$

۲/ $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{۲L}$

$\Rightarrow M^{*} = ۰/۵\,\mu L \qquad K^{*} = \frac{\pi^{۴} EI}{۳۲ L^{۳}}$

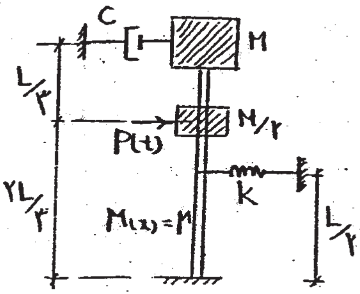
$P = -۰/۱۱۴\,P_{۰} L \quad , \qquad \int_{۰}^{L} \mu_x \sin\frac{\pi x}{۲L}\,dx = \frac{۲L}{\pi}\mu$

$\Rightarrow ۰/۵\,\mu L\,\ddot{Y} + \frac{\pi^{۴} EI}{۳۲ L^{۳}}\,Y = -۰/۱۱۴\,P_{۰} L - \frac{۲}{\pi}\mu L\,\ddot{x}_g(t)$

حمید کاظم

سری ⑤ ۸۱۲۴۰۳۰ مریم شکیبا

ـ سازه مربوط به برج مخابراتی شهری را بصورت شکل ۱ مدل کرده اند مطلوبست تعیین معادله حرکت.



$$M^*\ddot{Y} + C^*\dot{Y} + K^*Y = P^*(t)$$

$$v(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t) \qquad \psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$M^* = \int_0^L \mu(\psi(x))^2 dx + \sum_i m_i\psi_i^2 + \sum I_{o_i}(\psi_i')^2$$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L \mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + \frac{M}{2}\times\left(1-\cos\frac{\pi\times \cancel{2L}/3}{2\cancel{L}}\right)^2 + M\times\left(1-\cos\frac{\pi \cancel{L}}{2\cancel{L}}\right)^2 + \frac{ML^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{M}{2}\frac{L^2}{4}$$

$$\Rightarrow M^* = 0.228\mu L + \frac{M}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + M = 0.228\mu L + 1.009M + \frac{ML^2}{2}\left(\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi\times L}{2L}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}\times\frac{4L^2}{9}$$

$$\times\left(\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi\times \cancel{2L}/3}{2\cancel{L}}\right)^2 = 0.228\mu L + 1.009M + \frac{\pi^2 M}{8} + \frac{1}{2}\times\frac{M}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4L^2}}{3\cancel{9}}\times\frac{\cancel{\pi^2}}{\cancel{4L^2}}\times\frac{\cancel{3}}{4} = \frac{\pi^2 M}{48}$$

$$C^* = \int_0^L c(x)[\psi(x)]^2 dx + \sum_i c_i\psi_i^2 = c\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = c$$

$$K^* = \int_0^L EI(\psi''(x))^2 dx + \int_0^L k(x)(\psi(x))^2 dx + \sum k_i\psi_i^2 =$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + \int_0^L k(x)(\psi(x))^2 dx + \sum k_i\psi_i^2$$

$$K^* = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} + k\left(1-\cos\frac{\pi\times \cancel{L}/2}{2\cancel{L}}\right)^2 = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} + 0.086k$$

$$P^*(t) = P(t)\left[1-\cos\frac{\pi}{3}\right] = 0.5P(t)$$

(1)

$\frac{\pi}{2\ell}\sin\frac{\pi x}{2\ell}$

$\int y\cdot dA \qquad \int y^2 dA$

$\int x\cdot dA$

$(\frac{\pi}{2\ell})^2$

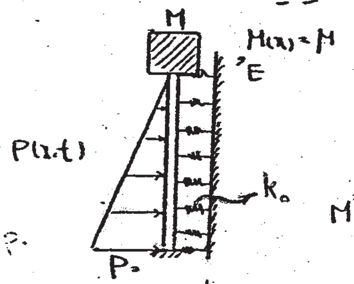
$\frac{\pi}{\ell}$

$I_o \quad \frac{1}{2}\,(\ldots)^2$

(۳) $\ell \quad \frac{1}{3}m\ell^2$

$I_o = \frac{1}{3}m\ell^2$

۷. در صورتیکه ستون نشان داده شده در شکل دارای صلبیت خمشی EI و جرم در واحد طول M تحت اثر بارگذاری خطی مطابق شکل قرار گرفته و بعلاوه روی تکیه گاه الاستیک قرار داشته باشد مطلوبست تعیین معادله حرکت.



$$M^* \ddot{Y} + C^* \dot{Y} + K^* Y = P^*(t) \qquad \psi_{(x)} = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$M^* = \int_0^L M\,(\psi_{(x)})^2 dx + \sum_i m_i \psi_i^2 + \sum I_{0_i} (\psi_i')^2$$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + M\left(1-\cos\frac{\pi \times L}{2L}\right)^2 = ۰/۲۲۸\,ML + M + \frac{1}{2} ML^2 \left(+\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2$$

$$C^* = \int_0^L C_{(x)}\,(\psi_{(x)})^2 dx + \sum_i C_i \psi_i^2 = 0$$

$$K^* = \int_0^L EI\,(\psi''_{(x)})^2 dx + \int_0^L k_{(x)}\,(\psi_{(x)})^2 dx + \sum K_i \psi_i^2$$

$$\Rightarrow K^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + \int_0^L k_0\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} + ۰/۲۲۸\,kL$$

$$P^*(t) = \int_0^L P(x,t)\,\psi_{(x)}\,dx + \sum P_i \psi_i$$

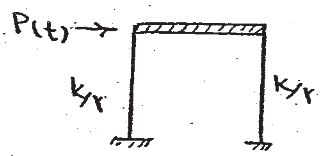
$$\Rightarrow P^*(t) = \int_0^L \left(P_0 - P_0\frac{x}{L}\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx = P_0 \int_0^L \left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx$$

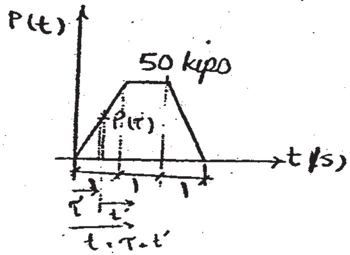
$$\Rightarrow P^*(t) = \frac{LP_0}{2} - \frac{4LP_0}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow P^*(t) = ۰/۰۹۵\,P_0 L$$

ـ در مثال حل شده اگر زمان اعمال نیرو به صورت شکل مقابل تغییر یابد باشد مطلوبست تعیین تاریخ $x(t)$ و مقادیر آن در لحظات $t = 1s, 2s, 3s$

$W_t = 2000\ \text{kips}$ و $k = 51.1\ k/in$





$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2000}{386\times 51.1}} = 2s < 4s = t_d$$

← اثر نیرو به صورت ضربه نبوده و تابع تحت یک بارگذاری اختیاری قرار دارد.

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{51.1\times 386}{2000}} = 3.14\ \text{rad/s} \qquad m = \frac{W}{386} = \frac{2000}{386} = 5.18$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{\underbrace{5.18\times 3.14}_{16.27}}\sin\pi(t-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{16.27}\sin\pi(t-\tau)\,d\tau$$

$$t = 1s \rightarrow x(1) = \int_0^1 \frac{50\tau}{16.27}\sin\pi(1-\tau)\,d\tau = \frac{50}{16.27}\times 0.318 = 0.977$$

$$t = 2s \rightarrow x(2) = \int_0^1 \frac{50\tau}{16.27}\sin\pi(1-\tau)\,d\tau + \int_1^2 \frac{50}{16.27}\sin\pi(2-\tau)\,d\tau = 2.93\ in$$

$$t = 3s \rightarrow x(3) = \int_0^1 \frac{50\tau}{16.27}\sin\pi(1-\tau)\,d\tau + \int_1^2 \frac{50}{16.27}\sin\pi(2-\tau)\,d\tau + \int_2^3 \frac{(-50\tau + 50)}{16.27}\sin\pi(3-\tau)\,d\tau$$

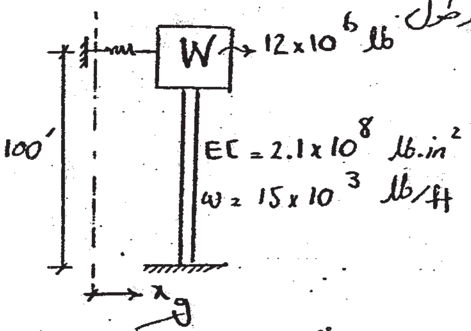
$$\Rightarrow x(3) = 2.91\ in$$

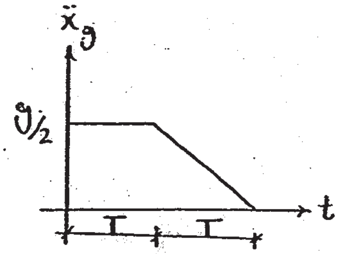
$$\frac{50}{2.62}\int_0^{0.5} \sin 2.62\tau \ \sin(2.62 - 5.24\tau)$$

مریم شکیبا   ۸۱۲۴۰۳۰   سری (۶)

- سازه شکل زیر مفروض است درصورتیکه این سازه تحت اثر حرکت زمین قرار بگیرد که دیاگرام شتاب زمین بصورت شکل دوم باشد مطلوبست تعیین: معادله حرکت، تابع تغییر مکان، مقدار تغییر مکان در لحظه $t=0.2s$ و نیروی وارده در همین لحظه، ماکزیمم تغییر مکان و برش پایه و برش در واحد طول

$k=4\times10^4\ lb/ft$





$T=0.2s$

$V_{(x,t)}=\psi_{(x)}\cdot Y_{(t)}$

$\psi_{(x)}=1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$\ddot{x}_{g(t)}=-2.5gt+g$

معادله حرکت $M^*\ddot{Y}+C^*\dot{Y}+k^*Y=P^*_{(t)}$

$M^*=\int_0^L M(x)[\psi(x)]^2dx+\sum_i m_i\psi_i^2+\sum I_{0i}\cdot\psi_i'^2=\int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2dx+\frac{W}{g}\times1+0$

$\rightarrow M^*=0.2267ML+\frac{W}{g}=0.2267\times\frac{15\times10^3\times100}{32.2}+\frac{12\times10^6}{32.2}=\cancel{712720.81}$ ۳۸۳۲۹۱٫۹۳ $lb/ft/s^2$

$k^*=\int_0^L EI(\psi''(x))^2dx+\int_0^L k(x)(\psi(x))^2dx+\sum k_i\psi_i^2=\int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2+k\times1^2$

$\rightarrow k^*=EI\times\frac{\pi^4}{16L^4}\times\frac{L}{2}+k=\frac{2.1\times10^8}{12^2}\times\frac{\pi^4}{32\times L^3}+4\times10^4=40004.439$

$\bar{k}=\int_0^L M(x)\psi(x)dx+m=\int_0^L M\times\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx+\frac{W}{g}=0.363\overset{\frac{w}{g}}{M}L+\frac{W}{g}=\cancel{917741.15}$ ۳۸۹۵۸۰٫۷۸

$\rightarrow P^*(t)=-\bar{k}\ddot{x}_{g(t)}$

تعیین تابع تغییر مکان:

$V_{(t)}=\int_0^t\ddot{x}_{g(\tau)}e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)d\tau$

$V(x,t)=\frac{\psi_{(x)}\cdot\bar{k}}{M^*\cdot\omega_D}\cdot V_{(t)}$, $\omega=\sqrt{\frac{k^*}{M^*}}=\sqrt{\frac{40004.439}{712720.81}}=0.237s\rightarrow T=26.52s$

$V_{(t),1}=\int_0^t\frac{g}{2}\times\sin\omega(t-\tau)d\tau=\frac{g}{2}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)$ $0\leqslant t\leqslant0.2s$

$V(t=0.2)=\frac{32.2}{2}\left(\frac{1}{0.237}-\frac{\cos(0.237\times0.2)}{0.237}\right)=0.0763$

$\dot{V}_{(t)}=\frac{g}{2}\times\sin\omega t\rightarrow\dot{V}_{(t=0.2)}=0.763$

$$V_{(t)_2} = V_{(t=0.2)} \cos\omega(t-0.2) + \frac{\dot V_{(t=0.2)}}{\omega} \sin\omega(t-0.2) + \int_{0.2}^{t} (-2.5g\tau + g) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow V_{(t)_2} = 0.0763\cos\omega(t-0.2) + 3.22\sin\omega(t-0.2) + g\left(-2.5\frac{t}{\omega} - \frac{\cos\omega(t-0.2)}{2\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{5\sin\omega(t-0.2)}{2\omega^2}\right.$$

$$0.2 \leqslant t \leqslant 0.4s$$

$$V_{(t=0.4)_2} = .0763\cos(0.237\times0.2) + 3.22\sin(0.237\times0.2) + 32.2\left(-2.5\times\frac{0.4}{0.237} - \right.$$

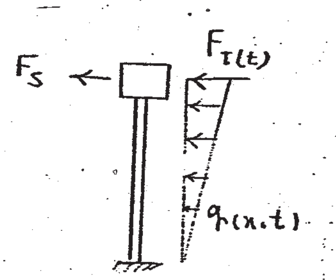
$$\left. - \frac{\cos(0.237\times0.2)}{2\times0.237} + \frac{1}{0.237} + \frac{5\sin(0.237\times0.2)}{2\times0.237^2}\right) = 0.28$$

$$\dot V_{(t)_2} = -0.0763\omega\sin\omega(t-0.2) + 3.22\omega\cos\omega(t-0.2) + g\left(\frac{-2.5}{\omega} + \frac{\sin\omega(t-0.2)}{2} + \frac{5\cos\omega(t-0.2)}{2\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \dot V(t=0.4)_2 = 1.143$$

$$\Rightarrow V_{(t)_3} = V_{(t=0.4)} \cos\omega(t-0.4) + \frac{\dot V_{(t=0.4)}}{\omega} \sin\omega(t-0.4) \qquad t \geqslant 0.4s$$

$$\Rightarrow V_{(t)_3} = 0.28\cos\omega(t-0.4) + 4.823\sin\omega(t-0.4)$$



$$q_{(x,t)} = \mu\omega^2 \varphi_{(x)} \cdot Y_{(t)} \qquad \ddot Y_{(t)} = \omega^2 Y_{(t)}$$

$$F_{I(H,t)} = M\omega^2 \psi_{(L)} Y_{(t)}$$

$$F_{S(H,t)} = k_S \times \psi_{(L)} Y_{(t)}$$

$$Q_{B(x=0,t)} = \int_0^L q_{(x,t)}\, dx + F_I(L,t) + F_{S(L,t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B(x=0,t)} = \int_0^L \mu \cdot \psi_{(x)} \cdot \ddot Y_{(t)} + M\psi_{(L)} \cdot \ddot Y_{(t)} + k_s \times \psi_{(L)} \cdot Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^L \mu \times \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) \ddot Y_{(t)}\, dx + M\ddot Y_{(t)} + k_S Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B(x=0,t)} = \mu \ddot Y_{(t)} \underbrace{\int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx}_{0.363L} + M\ddot Y_{(t)} + k_S Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B(x=0,t)} = 0.363\mu L \ddot Y_{(t)} + M\ddot Y_{(t)} + k_S Y_{(t)} \qquad Y_{(t)} = \frac{\bar{L}}{M^* \omega_D} \cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B(x=0,t=0.2s)} = 0.363\times15\times10^3\times100\times\frac{32.2}{2} + 12\times10^6 \times \frac{32.2}{2} + 4\times10^4 \times \frac{917741.15\times.076}{712720.81\times0.237}$$

$$\Rightarrow Q_{B(0,0.2s)} = 2.0198\times10^8$$

$$\begin{cases} V_{(t)} = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\cos\omega t}{\omega}\right) & 0 \leq t \leq 0.2s \\ V_{(t)} = .0763\cos\omega(t-0.2) + 3.22\sin\omega(t-0.2) + g\left(\frac{-2.5t}{\omega} - \frac{\cos\omega(t-0.2)}{2\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{5\sin\omega(t-0.2)}{2\omega^2}\right) & 0.2 \leq t \leq 0.4 \\ V_{(t)} = 0.28\cos\omega(t-0.4) + 4.823\sin\omega(t-0.4) & t \geq 0.4s \end{cases}$$

$$\dot{V}_{(t)_1} = \frac{g}{2}\sin\omega t = 0 \quad \omega t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega} \xrightarrow{13.26s} \rightarrow V_{(t)} = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\cos\pi}{\omega}\right) = \frac{g}{\omega} = 135.86'$$

$$\dot{V}_{(t)_2} = -.0763\omega\sin\omega(t-0.2) + 3.22\omega\cos\omega(t-0.2) + g\left(-\frac{2.5}{\omega} + \frac{\sin\omega(t-0.2)}{2} + \frac{5\cos\omega(t-0.2)}{2\omega}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{(t)_2} = -.0181\sin\omega(t-0.2) + 0.763\cos\omega(t-0.2) + g\left(-10.55 + \frac{\sin\omega(t-0.2)}{2} + \frac{5\cos\omega(t-0.2)}{2\omega}\right) = 0$$

$$\rightarrow \dot{V}_{(t)_2} = 16.0819\sin\omega(t-0.2) + 340.426\cos\omega(t-0.2) - 339.662 = 0 \quad 10.55$$

$$\Rightarrow t = 0.72s \quad > 0.4s$$

$$\dot{V}_{(t)_3} = -0.28\omega\sin\omega(t-0.4) + 4.823\omega\cos\omega(t-0.4) = 0$$

$$\rightarrow \dot{V}_{(t)_3} = -0.06636\sin\omega(t-0.4) + 1.743\cos\omega(t-0.4) = 0$$

$$\rightarrow t = 6.58s \sim V_{max_3} = 4.83'$$

$$V_{(t)_2} = -67.256\cos\omega(t-0.2) + 1436.394\sin\omega(t-0.2) + 135.86 - 339.865t$$

$$Q_{(x,t)} = \int_0^L q(x,t)dx + F_I(L,t) + F_S(L,t)$$

$$q_{(x,t)} = \mu_{(x)}\varphi_{(x)} \cdot \frac{\bar{k}\omega}{m^*} V_{(t)} = \mu_{(x)} \cdot \varphi_{(x)} \cdot \frac{\int_0^L \mu_{(x)}\varphi_{(x)}dx \cdot \omega}{m^*} V_{(t)}$$

$$F_I(L,t) = M \cdot \omega^2 \cdot \phi_{(H)} \cdot Y_{(t)} = M\omega^{\cancel{2}} \cdot \phi_{(L)} \cdot \frac{\overset{M\phi_{(L)}}{\bar{k}}}{m^*\cancel{\omega}} V_{(t)} = M\omega \cdot \phi_{(L)} \cdot \frac{M}{m^*} V_{(t)}$$

$$F_S(L,t) = k_{s_1} \cdot \phi_{(L)} \cdot Y_{(t)} = k_s \cdot \phi_{(L)}^{1} \cdot \frac{\bar{k}}{m^*\omega} V_{(t)}$$

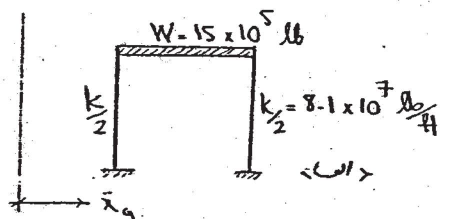
$$\Rightarrow Q_B(x=0,t) = \left[\int_0^L \mu_{(x)}\varphi_{(x)}dx + M\right]\underset{\omega^2 Y_{(t)}}{\ddot{Y}_{(t)}} + k_s \cdot \phi_{(L)} \cdot Y_{(t)}$$

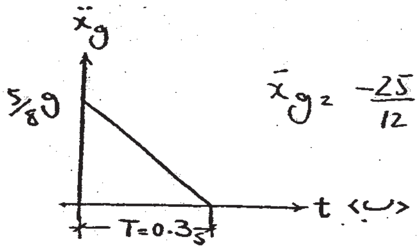
$$\Rightarrow Q_B(0,t) = \left[\left(\int_0^L \mu_{(x)}\varphi_{(x)}dx + M\right)\omega^2 + k_s\right]Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_B(0,t) = \left[(0.363\mu L + \frac{W}{g})\omega^2 + k_s\right] \times \frac{\bar{k}}{M^*\omega_D} \cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_B(0, 6.58s) = \left[917741.15 \times 0.237^2 + 4\times10^4\right] \times \frac{917741.15}{712720.81 \times 0.237} \times 4.83' = 2.4\times10^6\ lb$$

۹ـ قاب یک طبقه شکل زیر تحت اثر زلزله‌ای با دیاگرام شتاب شکل ب قرار گرفته است مطلوبست
تعیین معادله حرکت، تابع تغییر مکان، تابع برش پایه و هم چنین مقادیر ماکزیمم هریک از آنها.





$$\ddot{x}_g = \frac{-25}{12} g t + \frac{5}{8} g$$

$$x_{(t)} = \int_0^t \frac{P_{eff}(\tau)}{m\omega_D} \underbrace{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}_{1} \sin \underbrace{\omega_D}_{\omega_n} (t-\tau)\, d\tau \qquad \xi = 0$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t P_{eff}(\tau) \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau$$

$$P_{eff}(\tau) = -m\ddot{x}_g = -mg\left(\frac{-25}{12} t + \frac{5}{8}\right) \qquad 0 \leq t \leq 0.3s$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{1}{\cancel{m}\omega_n} \int_0^{0.3} -\cancel{m}g\left(\frac{-25}{12}\tau + \frac{5}{8}\right) \sin\omega_n (0.3-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{-g}{\omega_n} \int_0^t \left(\frac{-25}{12}\tau + \frac{5}{8}\right) \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{-g}{\omega_n^2} \left(\frac{-25}{12}\tau \cos\omega(t-\tau) + \frac{5}{8}\cos\omega(t-\tau) - \frac{25}{12\omega} \sin\omega(t-\tau) \Big]_0^t \right)$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{-g}{\omega_n^2} \left(\frac{5}{8}(1-\cos\omega t) - \frac{25}{12}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\right) \qquad 0 \leq t \leq 0.3s$$

$X_0 = x_{(T)}$, $\dot{X}_0 = \dot{x}_{(T)}$ بعد از صفر شدن شتاب ارتعاش آزاد خواهیم داشت.

$$x_{(t)} = x_{(T)} \cos\omega_n (t-T) + \frac{\dot{x}_{(T)}}{\omega_n} \sin\omega_n (t-T) \qquad t \geq 0.3s$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_n^2 x = -m\ddot{x}_{g(t)} & 0 \leq t \leq 0.3s \\ \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 & 0.3 \leq t \end{cases}$$ معادله حرکت

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 8.1\times 10^7 \times 32.2}{15\times 10^5}} = 58.97 \ rad/s$$

تعیین تغییرمکان max x از معادله

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{-g}{\omega^2}\left(\frac{5}{8}(1-\cos\omega t) - \frac{25}{12}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\right)$$

$$\rightarrow \dot{x}_{(t)} = \frac{-g}{\omega^2}\left(-\frac{25}{12} + \frac{5}{8}\omega \sin\omega t + \frac{25}{12}\cos\omega t\right) = 0 \quad \rightarrow t = 0, 0.6s > 0.3$$

$\rightarrow$

$$x_{(t)} = X_{(T)}\cos\omega_n(t-T) + \frac{\dot{X}(T)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-T)$$

$$X_{(0.3)} = \frac{-g}{\omega^2}\left(\frac{5}{8}(1-\cos 0.3\times 58.97) - \frac{25}{12}\left(0.3 - \frac{\sin(0.3\times 58.97)}{58.97}\right)\right) = 2.618\times 10^{-3}$$

$$\dot{X}_{(T=0.3)} = \frac{-g}{\omega^2}\left(-\frac{25}{12} + \frac{5}{8}\times 58.97\times \sin(0.3\times 58.97) + \frac{25}{12}\times\cos(0.3\times 58.97)\right) = 0.324$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = 2.618\times 10^{-3}\cos\omega(t-\overset{0.3}{T}) + \frac{0.324}{58.97}\times\sin\omega(t-\overset{0.3}{T}) \qquad t \geq 0.3s$$

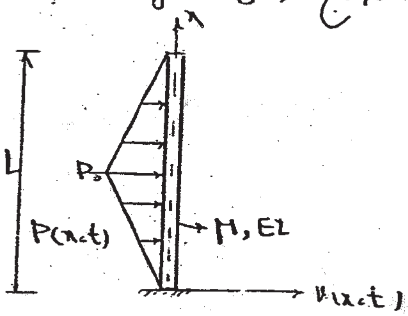
$$\rightarrow \dot{x}_{(t)} = -2.618\times 10^{-3}\omega\sin\omega(t-0.3) + \frac{0.324\omega}{58.97}\cos\omega(t-0.3) = 0 \rightarrow t = 0.319s$$

$$\rightarrow x_{(0.319)} = 6.0861\times 10^{-3}$$

$$Q_{max} = k.x_{max} = 2\times 8.1\times 10^7 \times 6.0861\times 10^{-3} = 1111,482\ lb = 1,11\times 10^6\ lb$$

ـ درصورتیکه سازه تمرین ۱ تحت اثر حرکت زمین قرار گیرد مطلوبست تعیین معادله حرکت برای دو حالت

الف) موجود بودن بارگذاری جانبی ب) با حذف بارگذاری جانبی برای سه تابع حدسی شکلی.



ب) $M^* = \int_0^L M(x)\,\psi^2(x)\,dx$ $\qquad M^*\ddot{Y} + k^* Y = P^*_{eff}(t)$

$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx$ $\qquad P^*_{eff} = -\ddot{x}_{g(t)}\,\bar{k}$

$\bar{k} = \int_0^L M(x)\,\psi(x)\,dx$

۱) $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M \times \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.227\,ML$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = EI \times \frac{\pi^4}{32L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L M \times \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx = M\left(-\frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} + x\Big]_0^L\right) = 0.364\,ML$$

$$\Rightarrow 0.227\,ML\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}Y = -0.363\,ML\,\ddot{x}_{g(t)}$$

۲) $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$

$$M^* = \int_0^L M\left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{1}{5}ML$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L M \times \frac{x^2}{L^2}\,dx = \frac{M}{L^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_0^L = \frac{1}{3}ML$$

$$\Rightarrow 0.2\,ML\ddot{Y} + \frac{4EI}{L^3}Y = -\frac{1}{3}ML\,\ddot{x}_{g(t)}$$

۳) $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

$$M^* = \int_0^L M\left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.5\,ML$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{-\pi^2}{4L^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L M \cdot \sin\frac{\pi x}{2L}\,dx = M \times \frac{-2L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L}\Big]_0^L = M \times \frac{2L}{\pi}$$

$$\Rightarrow 0.5\,ML\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}Y = -\frac{2}{\pi}ML\,\ddot{x}_{g(t)}$$

الف)

$$\delta W_E = \int_0^L P(x,t)\cdot\delta V(x,t)\,dx$$ کار مجازی نیروهای خارجی

$$\delta W_I = \int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 Y(t)\cdot\delta Y(t)\,dx + \ddot{Y}\cdot\delta Y\int_0^L M(x)\,\psi^2(x)\,dx + \delta Y\,\ddot{x}_g(t)\int_0^L M(x)\,\psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \delta W_E = \int_0^L P(x,t)\cdot\psi(x)\,\delta Y(t)\,dx$$

$$\delta W_E = \delta W_I$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}\int_0^L M(x)\,\psi^2(x)\,dx + Y\int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx = \int_0^L P(x,t)\,\psi(x)\,dx - \ddot{x}_g(t)\int_0^L M(x)\,\psi(x)\,dx$$

1) $\psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.227\,ML$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$\int_0^{L/2}\frac{2P_0}{L}x\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx + \int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2P_0}{L}x+2P_0\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = 0.164\,P_0L$$

$$\int_0^L M\times\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = 0.364\,ML$$

$$\Rightarrow 0.227\,ML\,\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}\,Y = 0.164\,P_0L - 0.364\,ML\,\ddot{x}_g(t)$$

2) $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$

$$M^* = \int_0^L M\times\left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = 0.2\,ML$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

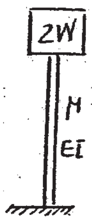
$$\int_0^{L/2}\frac{2P_0}{L}x\left(\frac{x^2}{L^2}\right)dx + \int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2P_0}{L}x+2P_0\right)\left(\frac{x^2}{L^2}\right)dx = 0.146\,P_0L$$

$$\int_0^L M\left(\frac{x^2}{L^2}\right)dx = \frac{1}{3}ML$$

$$\Rightarrow 0.2\,ML\,\ddot{Y} + \frac{4EI}{L^3}\,Y = 0.146\,P_0L - \frac{1}{3}ML\,\ddot{x}_g(t)$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ⑦

- سازه شکل زیر مفروض است درصورتیکه بتوان برای طراحی این سازه در مقابل زلزله از شکل 8 استفاده کرد و برای سازه ۵٪ میرایی آن را درنظر گرفته شود مطلوبست تعیین ماکزیمم تغییرمکان، برش، برش در واحد طول برای حالتی که ماکزیمم شتاب زمین $0.35g$ درنظر گرفته شود.



$ML = \frac{W}{g}$

$\xi = 5\%$, $T = 1s$ $\rightarrow S_a = 0.17g$, $S_d = 1.7\ in$, $S_v = 105\ in/s$ $\quad a = 0.2g$

شتاب زمین $= 0.35g \rightarrow \times \frac{0.35}{0.2} \rightarrow S_a = 0.2975g$, $S_d = 2.975\ in$, $S_v = 183.75\ in/s$

$$V(x,t) = \frac{\psi(x)\bar{k}}{m^* \omega_D} \cdot V(t) \rightarrow V_{max}(x) = \psi(x) \cdot \frac{\bar{k}}{m^* \omega_D} \cdot S_v = \psi(x) \cdot \frac{\bar{k}}{m^*} S_d$$

$$\bar{k} = \int_0^L M(x)\psi(x)\,dx + m = \int_0^L M(1-\cos\frac{\pi x}{2L})\,dx + \frac{2W}{g} = 0.363ML + \frac{2W}{g}$$

$$M^* = \int_0^L M(x)(\psi(x))^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 = \int_0^L M(1-\cos\frac{\pi x}{2L})^2 dx + \frac{2W}{g} \times 1 = 0.2267ML + \frac{2W}{g}$$

$$k^* = \int_0^L EI(\psi''(x))^2 dx = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$\rightarrow V_{max}(x) = (1-\cos\frac{\pi x}{2L}) \times \frac{0.363ML + \frac{2W}{g}}{0.2267ML + \frac{2W}{g}} \times 2.975 = \frac{0.363 \times \frac{W}{g} + \frac{2W}{g}}{0.2267\frac{W}{g} + \frac{2W}{g}} \times 2.975$$

$$\Rightarrow V_{max} = 3.157''$$

$$q_{max}(x) = M(x)\psi(x)\frac{\bar{k}}{m^*} \cdot S_a = M(1-\cos\frac{\pi x}{2L}) \times \frac{\bar{k}}{M^*} \cdot 0.2975g$$

$$q_{max}(x) = M(1-\cos\frac{\pi x}{2L}) \cdot \frac{0.363ML + \frac{2W}{g}}{0.2267ML + \frac{2W}{g}} \cdot 0.2975g = 0.316Mg$$

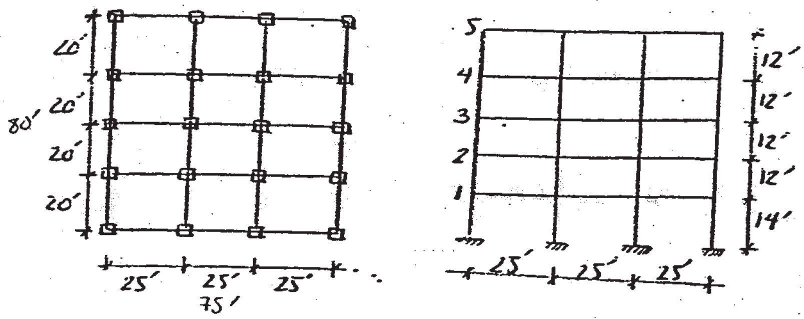
$$Q_{max} = \frac{\bar{k}^2}{m^*} S_a = \frac{(2.363\,W/g)^2}{2.2267\frac{W}{g}} \times 0.2975g = 0.746W$$

$$Q_B(x,t) = \int_0^L q(x,t)\,dx + F_I(L,t) = \frac{\bar{k}^2}{m^*} \cdot \omega V(t) + M \cdot \frac{\bar{k}}{m^*}\omega V(t)$$ ✓

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۸)

- ساختمان ۵ طبقه بتنی شکل زیر مفروض است در صورتیکه بار مرده در بام 150 psf و در طبقات دیگر 250 psf (lb/ft^2) و بار زنده در بام 30 psf و در طبقات دیگر 80 psf در نظر گرفته شود و ابعاد ستون ها $16"\times16"$ ، $E_c = 3.6\times10^6$ psi (lb/in^2) فرض شود مطلوبست تعیین جرم معادل ، سختی معادل ، پریود اصلی سازه و معادله حرکت آن در مقابل زلزله

برای سه حالت تابع شکلی a) $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$ ، b) $\psi(x) = \frac{x}{L}$ ، c) $\psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$



$k_i = \frac{12EI}{L^3}$

$k_{story} = \sum k_i = 20k_i$

$I = \frac{16^4}{12} = 5461.33\ in^4$

$$k_{2,3,4,5} = 20\times\frac{12\times(3.6\times10^3)\times5461.33}{(12\times12)^3} = 1580.25\ kips/in$$

$$k_1 = 20\times\frac{12\times3.6\times10^3\times5461.33}{(12\times14)^3} = 995.14\ kips/in$$

بام $M = 150\times3\times25\times4\times20 + 0.2\times30\times3\times25\times4\times20 = 936000\ lb = 936\ kips$

طبقات $M = 250\times75\times80 + 0.2\times80\times75\times80 = 1596000\ lb = 1596\ kips$

$L = 62'$ $\qquad$ a) $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

تراز	k	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		936	1		936	
	1580.25			.046		3.344
4		1596	0.959		1452.55	
	1580.25			0.133		27.953
3		1596	0.821		1075.77	
	1580.25			0.209		69.03
2		1596	0.612		597.77	
	1580.25			0.265		110.97
1		1596	0.397		192.17	
	995.14			0.397		119.824
0			0			
					4254.26	$k^* = 331.121$

$m^* = \frac{4254.26}{12\times32.2} = 11.01$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{331.121}{11.01}} = 5.48\ rad/s \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.146\ s$$

معادله حرکت $\qquad 11.01\ddot{Y} + 331.121Y = 0$

$\psi_{(x)} = \frac{x}{L}$ (b

تراز	k	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		936	1		936	
	1580.25			0.194		59.47
4		1596	0.806		-1036.82	
	1580.25			0.193		58.86
3		1596	0.613		559.73	
	1580.25			0.194		59.47
2		1596	0.419		280.2	
	1580.25			0.193		58.86
1		1596	0.226		81.52	
	995.14			0.226		50.83
0					2894.27	$k^* =$ 287.49

$\Rightarrow m^* = \frac{2899.27}{12 \times 32.2} = 7.49$

$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{287.49}{7.49}} = 6.195 \ rad/s \Rightarrow T = 2\pi/\omega = 1.014 s$

$\Rightarrow \quad 7.49\ddot{Y} + 287.49Y = 0$

$\psi_{(x)} = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ (C

تراز	k	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		936	1		936	
	1580.25			0.299		141.276
4		1596	0.701		784.276	
	1580.25			0.272		116.913
3		1596	0.429		293.729	
	1580.25			0.22		76.484
2		1596	0.209		69.715	
	1580.25			0.147		34.148
1		1596	0.062		+ 6.135	
	995.14			0.062		+ 3.826
0					2089.86	$k^* =$ 372.646

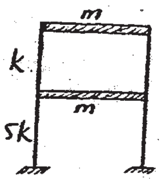
$\Rightarrow m^* = \frac{2089.86}{12 \times 32.2} = 5.409$

$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{372.646}{5.409}} = 8.3 \ rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.757 s$

$\rightarrow \quad 5.409\ddot{Y} + 372.646Y = 0$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ⑨

سازه های دو طبقه شکل زیر مفروضند مطلوبست تعیین فرکانس ها و مدهای متعلق به آنها و مقایسه فرکانس ها و مدهای مربوطه با جوابات مثال حل شده در کلاس.



$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\} \quad (I)$$

$$\{x(t)\}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \quad (II)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{vmatrix}=(-m_1\omega^2+k_1+k_2)(-m_2\omega^2+k_2)-k_2^2=0$$

$$m_1=m_2=m \qquad k_1=5k \qquad k_2=k$$

$$\Rightarrow(-m\omega^2+6k)(-m\omega^2+k)-k^2=0 \Rightarrow m^2\omega^4-km\omega^2-6mk\omega^2+6k^2-k^2=0$$

$$\Rightarrow m^2\omega^4-7km\omega^2+5k^2=0 \rightarrow \omega^2=\frac{7\pm\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases}\omega_2=\left(\frac{7+\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\\ \omega_1=\left(\frac{7-\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\end{cases}$$

با قرار دادن $\omega=\omega_2$ در رابطه (II) خواهیم داشت

$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{7+\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}+6k\right)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-m\times\frac{7+\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0\end{cases}$$

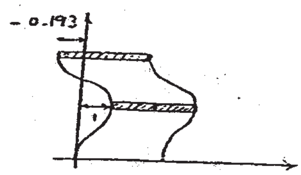
$$\Rightarrow\begin{cases}\left(-\frac{7+\sqrt{29}}{2}+6\right)kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-\frac{7+\sqrt{29}}{2}+1\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=-0.193 \;<\; -0.62$$

با قرار دادن $\omega=\omega_1$ در رابطه II خواهیم داشت.

$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{7-\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}+6k\right)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-m\times\frac{7-\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0\end{cases}$$

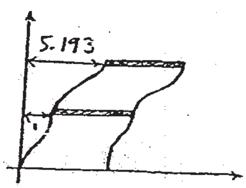
$$\rightarrow\begin{cases}\left(6-\frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(1-\frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=5.193 \;>\; 1.62$$

$$\omega_2=2.488\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}_2=\begin{Bmatrix}1\\-0.193\end{Bmatrix}$$

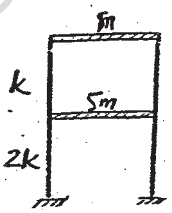


شکل مود دوم ارتعاش

$$\omega_1=0.9\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}_1=\begin{Bmatrix}1\\5.193\end{Bmatrix}$$



شکل مود اول ارتعاش



$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (I)$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t \rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad m_1 = 5m \quad k_1 = 2k \quad m_2 = m \quad k_2 = k$$

$$\Rightarrow (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow (-5m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0 \Rightarrow 5m^2\omega^4 - 5mk\omega^2 - 3mk\omega^2 + 3k^2 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5m^2\omega^4 - 8mk\omega^2 + 2k^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5} \cdot \frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{k}{m}\right)^{1/2} \\ \omega_2 = \left(\frac{4+\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{k}{m}\right)^{1/2} \end{cases}$$

با قرار دادن $\omega = \omega_1$ در رابطه II خواهیم داشت:

$$\rightarrow \begin{cases} \left(-5m \times \frac{4-\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{k}{m} + 3k\right) X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(-m \times \frac{4-\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{k}{m} + k\right) X_2 = 0 \end{cases}$$

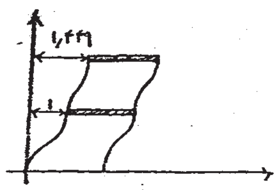
$$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{6} - 4 + 3)kX_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(1 - \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)kX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 1.449 < 1.62$$

با قرار دادن $\omega = \omega_2$ در رابطه II خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \left(-5m \times \frac{4+\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{k}{m} + 3k\right) X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(-m \times \frac{4+\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{k}{m} + k\right) X_2 = 0 \end{cases}$$

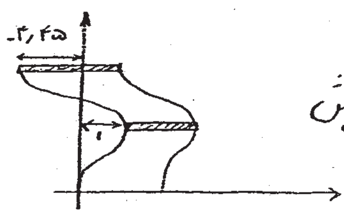
$$\Rightarrow \begin{cases} (-4 - \sqrt{6} + 3)kX_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(1 - \frac{4+\sqrt{6}}{5}\right)kX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = -3.449$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.56\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \bar{X}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.449 \end{Bmatrix}$$

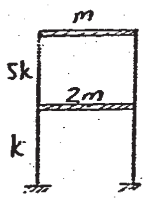


شکل اول مد ارتعاش

$$, \ \omega_2 = 1.135\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \bar{X}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.449 \end{Bmatrix}$$



شکل دوم مد ارتعاش



$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

$$x_{(t)}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \quad \text{II}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{vmatrix}=(-m_1\omega^2+k_1+k_2)(-m_2\omega^2+k_2)-k_2^2=0$$

$$m_1=2m\ ,\quad k_1=k$$

$$m_2=m\ ,\quad k_2=5k \Rightarrow (-2m\omega^2+6k)(-m\omega^2+5k)-25k^2=0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^4-10mk\omega^2-6mk\omega^2+30k^2-25k^2=0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^4-16mk\omega^2+5k^2=0 \rightarrow \omega^2=\frac{8\pm\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases}\omega_1=\left(\frac{8-\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\\ \omega_2=\left(\frac{8+\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\end{cases}$$

با قرار دادن $\omega=\omega_1$ در رابطه II خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\left(-2m\times\frac{8-\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+6k\right)X_1-5kX_2=0\\ -5kX_1+\left(-m\times\frac{8-\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+5k\right)X_2=0\end{cases}$$

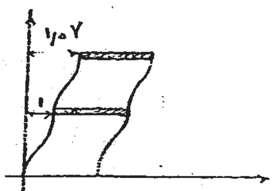
$$\rightarrow \begin{cases}(6-8+\sqrt{54})kX_1-5kX_2=0\\ -5kX_1+\left(5-\frac{8-\sqrt{54}}{2}\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=1.07<1.62$$

با قرار دادن $\omega=\omega_2$ در رابطه II خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\left(-2m\times\frac{8+\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+6k\right)X_1-5kX_2=0\\ -5kX_1+\left(-m\times\frac{8+\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+5k\right)X_2=0\end{cases}$$

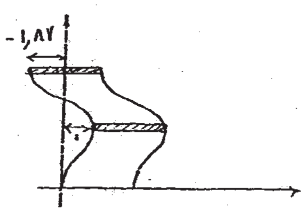
$$\rightarrow \begin{cases}(6-8-\sqrt{54})kX_1-5kX_2=0\\ -5kX_1+\left(5-\frac{8+\sqrt{54}}{2}\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=-1.87>-0.62$$

$$\omega_1=0.571\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\quad X^1=\begin{Bmatrix}1\\1.07\end{Bmatrix}$$

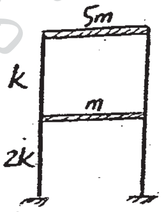


شکل مد اول ارتعاش:

$$\omega_2=2.77\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\quad X^2=\begin{Bmatrix}1\\-1.87\end{Bmatrix}$$



شکل مد دوم ارتعاش



$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

$$\{x(t)\}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$m_1=m \;,\; m_2=5m \qquad k_1=2k \;,\; k_2=k$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2+3k)(-5m\omega^2+k)-k^2=0 \rightarrow 5m^2\omega^4-mk\omega^2-15mk\omega^2+3k^2-k^2=0$$

$$\Rightarrow 5m^2\omega^4-16mk\omega^2+2k^2=0 \Rightarrow \omega^2=\frac{16\pm\sqrt{216}}{10}\cdot\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases}\omega_1=\left(\frac{8-\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\\ \omega_2=\left(\frac{8+\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\end{cases}$$

$$\rightarrow \omega=\omega_1$$

$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{8-\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+3k\right)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-5m\times\frac{8-\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0\end{cases}$$

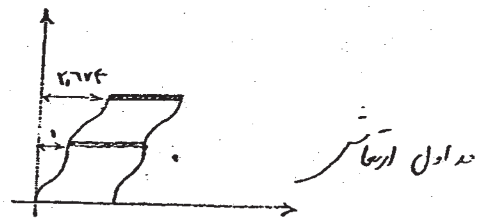
$$\rightarrow\begin{cases}\left(3-\frac{8-\sqrt{54}}{2}\right)kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(1-\frac{5}{2}(8-\sqrt{54})\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=2.674>1.62$$

$$\omega=\omega_2$$

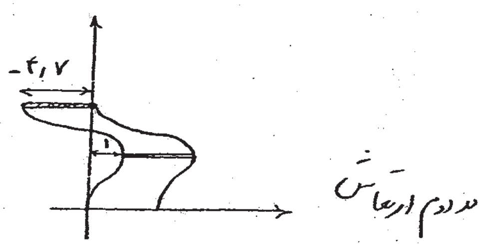
$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{8+\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+3k\right)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-5m\times\frac{8+\sqrt{54}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(3-\frac{8+\sqrt{54}}{2}\right)kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(1-\frac{5}{2}(8+\sqrt{54})\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=-4.674>-0.62$$

$$\Rightarrow \omega_1=0.571\sqrt{\frac{k}{m}} \;,\; \bar{X}^1=\begin{Bmatrix}1\\2.674\end{Bmatrix}$$

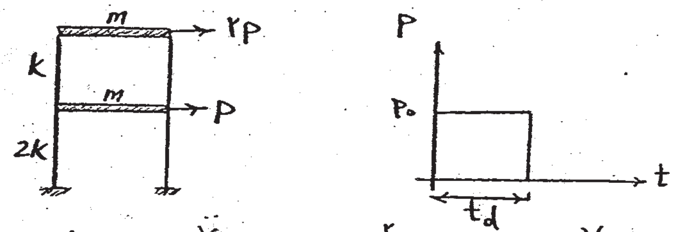


$$\omega_2=2.77\sqrt{\frac{k}{m}} \;,\; \bar{X}^2=\begin{Bmatrix}1\\-4.674\end{Bmatrix}$$



مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۱۰)

تمرین: ساختمان دو طبقه شکل زیر مفروض است اگر این ساختمان تحت تاثیر نیروهای وارده قرار گیرد مطلوب است تعیین: تغییرمکان طبقات در هر یک از مدها و هم چنین تغییرمکان کل طبقات در صورتیکه t_d برابر با پریود مود اول ارتعاش باشد.



$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Y}_{1(t)} \\ \ddot{Y}_{2(t)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_{1(t)} \\ Y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 2P \end{bmatrix} \qquad M_1 = X_1^T m X_1 ,\quad M_2 = X_2^T m X_2$$

تعیین فرکانس های سیستم:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -m\omega^2 + 3k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = (-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{cases} \left[-m(2-\sqrt{2})\frac{k}{m} + 3k\right]X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left[-m(2-\sqrt{2})\frac{k}{m} + k\right]X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 2.4$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.766\sqrt{\frac{k}{m}} ,\quad X^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.4 \end{Bmatrix} ,\quad T_1 = 8.2\sqrt{\frac{m}{k}} = t_d$$

$$,\quad \omega_2 = 1.848\sqrt{\frac{k}{m}} ,\quad X^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{Y}_{k(t)} + \omega_k^2 Y_k = \frac{1}{M_k} f_{k(t)} ,\quad Y_{k(t)} = \frac{1}{M_k\omega_k}\int_0^t f_{k(\tau)} \sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau$$

$$\{x_{(t)}\} = \sum_{k=1}^{N} X_k Y_{k(t)} \overset{N=2}{=} [X_1 \vdots X_2]\begin{Bmatrix} Y_{1(t)} \\ Y_{2(t)} \end{Bmatrix} = X_1 Y_{1(t)} + X_2 Y_{2(t)}$$

$$f_{k(t)} = X_k^T F_{(t)} \qquad F_{(t)} = \begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_{1(t)} = \{1 \quad 2.4\}\begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix} = P + 4.8P = 5.8P$$

$$f_{2(t)} = \{1 \quad -0.4\}\begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix} = P - 0.8P = 0.2P$$

جرم مودی مود اول $M_1 = X_1^T m X_1 = \{1 \quad 2.4\} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.4 \end{Bmatrix} = 6.76m$

جرم مودی مود دوم $M_2 = X_2^T m X_2 = \{1 \quad -0.4\} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{Bmatrix} = 1.16m$

$$\Rightarrow Y_{1(t)} = \frac{1}{M_1 \omega_1} \int_0^{t_d} f_1(\tau) \sin\omega_1(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{6.76m \times 0.766\sqrt{\frac{k}{m}}} \int_0^{t_d} 5.8P \sin\omega_1(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow Y_{1(t)} = \frac{5.8P}{5.17\sqrt{km}} \int_0^{t_d} \sin\omega(t-\tau)\, d\tau = \frac{5.8P}{5.17\sqrt{km}} \times \frac{1}{\omega_1}(1-\cos\omega_1 t_d) \qquad 0 \leq t \leq t_d$$

$$\Rightarrow Y_{1(t)} = \frac{5.8P}{5.17\sqrt{k\cancel{m}} \times 0.766 \times \sqrt{\frac{k}{\cancel{m}}}}(1-\cos\omega_1 t_d) = 1.46\frac{P}{k}(1-\cos 2\pi) = 1.46 P/k \times 0$$

$$\Rightarrow Y_{1(t)} = 0 \qquad 0 \leq t \leq t_d$$

$$Y_{2(t)} = \frac{1}{M_2 \omega_2} \int_0^{t_d} f_2(\tau) \sin\omega_2(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{1.16m \times 1.848 \times \sqrt{\frac{k}{m}}} \int_0^{t_d} 0.2P \times \sin\omega_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow Y_{2(t)} = \frac{0.2P}{1.16m \times \omega_2} \int_0^{t_d} \sin\omega_2(t-\tau) = \frac{0.2P}{1.16m\,\omega_2} \times \frac{1}{\omega_2}(1-\cos\omega_2 t_d) \qquad 0 \leq t \leq t_d$$

$$\Rightarrow Y_{2(t)} = \frac{0.2P}{1.16\cancel{m} \times 3.4 \times \frac{k}{\cancel{m}}}\left(1-\cos\left(1.848\sqrt{\frac{k}{m}} \times 8.2 \times \sqrt{\frac{m}{k}}\right)\right) =$$

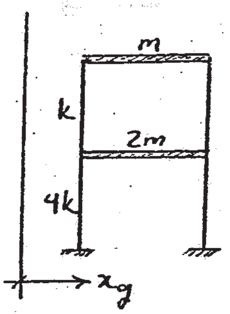
$$\rightarrow Y_{2(t)} = 0.0507\frac{P}{k}(1.85) = 0.0938\frac{P}{k} \qquad 0 \leq t \leq t_d$$

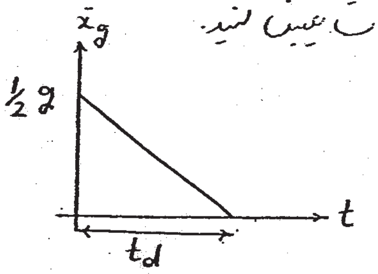
$$\{x_{(t)}\} = [X_1 \vdots X_2] \begin{Bmatrix} Y_{1(t)} \\ Y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.4 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0938\frac{P}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0938 P/k \\ -0.0375\frac{P}{k} \end{Bmatrix}$$ ط ۱ ، ۲

$$\{x_{(t)}\} = [X_1]\{Y_{1(t)}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.4 \end{bmatrix}\{0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ۱۰-۲

- ساختمان دوطبقه شکل زیر تحت اثر شتاب زمین مطابق با دیاگرام نشان داده شده می باشد در صورتیکه t_d مساوی با دو برابر پریود مد اول سازه باشد مطلوبست تعیین تغییر مکان ها در هر یک از مدها و تغییر مکان کلی، نیروهای الاستیک در هر یک از مدها، نیروی الاستیک کلی و مقدار برش پایه در هر یک از مدها و برش پایه کلی ضمناً درصد مشارکت مد اول را در هر یک از محاسبات تعیین کنید.





$$\ddot{x}_g(t) = -\frac{g}{2t_d}t + \frac{g}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{-1}{t_d}\cdot t + 1\right)$$

تعیین فرکانس های سازه:

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=0 \quad , \quad \{x(t)\}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2m\omega^2+5k & -k \\ -k & -m\omega^2+k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow (-2m\omega^2+5k)(-m\omega^2+k)-k^2=0 \rightarrow 2m^2\omega^4-2mk\omega^2-5mk\omega^2+5k^2-k^2=0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^4-7mk\omega^2+4k^2=0 \Rightarrow \omega^2=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases} \omega_1=\left(\frac{7-\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2} \\ \omega_2=\left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2} \end{cases}$$

$$\omega=\omega_1 \Rightarrow \begin{cases} \left(-2m\times\frac{7-\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}+5k\right)X_1-kX_2=0 \\ -kX_1+\left(-m\times\frac{7-\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=\frac{3+\sqrt{17}}{2}=3.562$$

$$\omega=\omega_2 \Rightarrow \begin{cases} \left(-2m\times\frac{7+\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}+5k\right)X_1-kX_2=0 \\ -kX_1+\left(-m\times\frac{7+\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=\frac{3-\sqrt{17}}{2}=-0.562$$

$$\Rightarrow \omega_1=0.848\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 3.562 \end{Bmatrix} \quad , \quad T_1=7.409\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{t_d}{2}$$

$$\omega_2=1.67\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \bar{X}_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.562 \end{Bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=-[M][\iota]\ddot{x}_g$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}_k+\omega_k^{۲}Y_k=\frac{1}{M_k}f_k(t) \qquad M_k=\Phi_k^T m\,\Phi_k$$

$$,\ f_k(t)=\bar{k}_k\,\ddot{x}_g(t) \qquad \bar{k}_k=-\Phi_k^T[m][\iota]$$ ضریب مشارکت مودی

$$Y_k(t)=\frac{\bar{k}_k}{M_k\,\omega_k}\cdot V_k(t) \qquad V_k(t)=\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\,e^{\cancel{-\xi\omega_n(t-\tau)}}\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow V_1(t)=\int_0^{t_d}\left(\frac{-g}{۲t_d}\tau+\frac{g}{۲}\right)\times\sin\omega_1(t_d-\tau)\,d\tau=\frac{g}{۲}\int_0^{t_d}\left(-\frac{1}{t_d}\tau+1\right)\sin\omega_1(t_d-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow V_1(t)=\frac{g}{۲}\left(\frac{\overset{۰}{\cancel{\sin(t_d\cdot\omega_1)}}}{t_d\cdot\omega_1^{۲}}-\frac{\overset{1}{\cancel{\cos(t_d\cdot\omega_1)}}}{\omega_1}\right)=-\frac{g}{۲\omega_1}=-۰٫۵۹\,g\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad ۰\leq t\leq t_d$$

$$\rightarrow V_{۲}(t)=\int_0^{t_d}\left(\frac{-g}{۲t_d}\tau+\frac{g}{۲}\right)\sin\omega_{۲}(t_d-\tau)\,d\tau=\frac{g}{۲}\int_0^{t_d}\left(-\frac{1}{t_d}\tau+1\right)\sin\omega_{۲}(t_d-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow V_{۲}(t)=\frac{g}{۲}\left(\frac{\sin(t_d\cdot\omega_{۲})}{t_d\cdot\omega_{۲}^{۲}}-\frac{\cos(t_d\cdot\omega_1)}{\omega_{۲}}\right)=-۰٫۲۸۲\,g\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad ۰\leq t\leq t_d$$

$$\bar{k}_1=-\Phi_1^T[m][\iota]=-\langle 1\quad ۳٫۵۶۲\rangle\begin{bmatrix}۲m & ۰\\ ۰ & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=-\langle ۲m\quad ۳٫۵۶۲m\rangle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1=-۵٫۵۶۲m$$

$$\bar{k}_1=-\Phi_{۲}^T[m][\iota]=-\langle 1\quad -۰٫۵۶۲\rangle\begin{bmatrix}۲m & ۰\\ ۰ & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=-\langle ۲m\quad -۰٫۵۶۲m\rangle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{۲}=-۱٫۴۳۸m$$

$$M_1=\langle 1\quad ۳٫۵۶۲\rangle\begin{bmatrix}۲m & ۰\\ ۰ & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ ۳٫۵۶۲\end{Bmatrix}=\langle ۲m\quad ۳٫۵۶۲m\rangle\begin{Bmatrix}1\\ ۳٫۵۶۲\end{Bmatrix}=۱۴٫۶۹m$$

$$M_{۲}=\langle 1\quad -۰٫۵۶۲\rangle\begin{bmatrix}۲m & ۰\\ ۰ & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -۰٫۵۶۲\end{Bmatrix}=\langle ۲m\quad -۰٫۵۶۲m\rangle\begin{Bmatrix}1\\ -۰٫۵۶۲\end{Bmatrix}=۲٫۳۱۶m$$

$$\Rightarrow Y_1(t)=\frac{\bar{k}_1}{M_1\omega_1}V_1(t)=\frac{-۵٫۵۶۲\cancel{m}}{۱۴٫۶۹\cancel{m}\times ۰٫۸۴۸\times\sqrt{\frac{k}{m}}}\times -۰٫۵۹g\times\sqrt{\frac{m}{k}}=۰٫۲۶۳g\,\frac{m}{k}$$

$$Y_{۲}(t)=\frac{\bar{k}_{۲}}{M_{۲}\omega_{۲}}V_{۲}(t)=\frac{-۱٫۴۳۸\cancel{m}}{۲٫۳۱۶\cancel{m}\times ۱٫۶۷\times\sqrt{\frac{k}{m}}}\times -۰٫۲۸۲g\times\sqrt{\frac{m}{k}}=۰٫۱۰۵g\cdot\frac{m}{k}$$

$$\{x(t)\}_k = \Phi_k \cdot Y_{k(t)}$$

$$\Rightarrow \{x(t)\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3{,}562 \end{Bmatrix} \times \left(0{,}263\, g\frac{m}{k}\right) = \begin{Bmatrix} 0{,}263\, g\frac{m}{k} \\ 0{,}937\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix}$$

$$\{x(t)\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}562 \end{Bmatrix} \times \left(0{,}105\, g\frac{m}{k}\right) = \begin{Bmatrix} 0{,}105\, g\frac{m}{k} \\ -0{,}059\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{x(t)\}_{\text{کل}} = \Phi_1 Y_{1(t)} + \Phi_2 Y_{2(t)} = \begin{Bmatrix} 0{,}263\, g\frac{m}{k} \\ 0{,}937\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}105\, g\frac{m}{k} \\ -0{,}059\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}368\, g\frac{m}{k} \\ 0{,}878\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s(t)}\}_k = [M]\{\Phi_k\} \cdot \frac{\bar{L}_k}{M_k} \cdot \omega_k \cdot V_{k(t)}$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_1 = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3{,}562 \end{Bmatrix} \cdot \frac{-5{,}562\cancel{m}}{14{,}69\cancel{m}} \cdot 0{,}848 \times \sqrt{\frac{k}{m}} \times -0{,}59\, g \times \sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_1 = \begin{Bmatrix} 2m \\ 3{,}562m \end{Bmatrix} \cdot \frac{2{,}783\, g}{14{,}69} = \begin{Bmatrix} 2m \\ 3{,}562m \end{Bmatrix} \times 0{,}189\, g = \begin{Bmatrix} 0{,}379\, mg \\ 0{,}673\, mg \end{Bmatrix}$$

$$, \{f_{s(t)}\}_2 = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}562 \end{Bmatrix} \cdot \frac{-1{,}438\cancel{m}}{2{,}316\cancel{m}} \cdot 1{,}67\sqrt{\frac{k}{m}} \times -0{,}282\, g \times \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_2 = \begin{bmatrix} 2m \\ -0{,}562m \end{bmatrix} \times 0{,}292\, g = \begin{Bmatrix} 0{,}585\, mg \\ -0{,}164\, mg \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_{\text{کل}} = \begin{Bmatrix} 0{,}379\, mg \\ 0{,}673\, mg \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}585\, mg \\ -0{,}164\, mg \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}964\, mg \\ 0{,}509\, mg \end{Bmatrix}$$

$Q_{1(t)} = 0{,}379\, mg + 0{,}673\, mg = 1{,}052\, mg$ برش پایه در مد اول

$Q_{2(t)} = 0{,}585\, mg - 0{,}164\, mg = 0{,}421\, mg$ برش پایه در مد دوم

$\Rightarrow$ کل $Q_{(t)} = 1{,}052\, mg + 0{,}421\, mg = 1{,}473\, mg$ $\rightarrow$ درصد مشارکت مدال : $71{,}42\%$

$$M^* = \frac{\bar{L}_k^2}{M_k} = \begin{Bmatrix} \dfrac{(-5{,}562m)^2}{14{,}69m} \\[2ex] \dfrac{(-1{,}438m)^2}{2{,}316} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2{,}106m \\ 0{,}893m \end{Bmatrix}$$

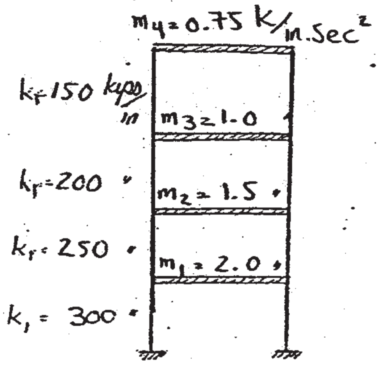
$\rightarrow$ درصد مشارکت $= 70\%$

30%

$\sum M = 2{,}999$

سری (۱-۱۱)　　۸۱۲۴۰۳۰　　مریم شلیبا

- ساختمان ۴ طبقه شکل زیر مفروض است در صورتیکه بردار تغییر مکان طیفی در لحظه $t_1 = 2s$ مقدار ماکزیمم خود را داشته باشد برای مدل اول و این مقدار برای سایر مدها بصورت بردار نشان داده شده در زیر باشد مطلوب است تعیین تغییر مکان طبقات و هم چنین بردار نیروی الاستیک و نیروی برش پایه.



$$S_d = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{Bmatrix} ft \qquad \{x_k\}_{max} = \Phi_k \cdot \frac{L_k}{M_k} \cdot S_{dk}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & -m_3\omega^2 + k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & -m_4\omega^2 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2\omega^2 + 550 & -250 & 0 & 0 \\ -250 & -1.5\omega^2 + 450 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & -\omega^2 + 350 & -150 \\ 0 & 0 & -150 & -0.75\omega^2 + 150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 5.4 \qquad \omega_2 = 12.7 \qquad \omega_3 = 19.14 \qquad \omega_4 = 23.82 \ rad/s$$

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{cases} (-2\omega_1^2 + k_1 + k_2)X_1 - k_2X_2 = 0 \\ -k_2X_1 + (-1.5\omega_1^2 + k_2 + k_3)X_2 - k_3X_3 = 0 \\ -k_3X_2 + (-\omega_1^2 + k_3 + k_4)X_3 - k_4X_4 = 0 \\ -k_4X_3 + (-0.75\omega_1^2 + k_4)X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-2\times 5.4^2 + 550)X_1 - 250X_2 = 0 & \Rightarrow \dfrac{X_2}{X_1} = 1.967 \\ -250X_1 + (-1.5\times 5.4^2 + 450)X_2 - 200X_3 = 0 & \Rightarrow \dfrac{X_3}{X_1} = 2.746 \\ -200X_2 + (-5.4^2 + 350)X_3 - 150X_4 = 0 & \Rightarrow \dfrac{X_4}{X_1} = 3.251 \end{cases}$$

$$\omega_1 = 5.4 \ rad/s \qquad \Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.967 \\ 2.746 \\ 3.251 \end{Bmatrix}$$

$$\omega=\omega_2=12.7 \Rightarrow \begin{cases} (-2\times 12.7^2+550)X_1-250X_2=0 & \Rightarrow \dfrac{X_2}{X_1}=0.91 \\ -250X_1+(-1.5\times 12.7^2+450)X_2-200X_3=0 & \Rightarrow \dfrac{X_3}{X_1}=-0.4 \\ -200X_2+(-1\times 12.7^2+350)X_3-150X_4=0 & \Rightarrow \dfrac{X_4}{X_1}=-1.59 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_2=12.7\ \text{rad/s} \qquad \Rightarrow \underline{X}_2=\begin{Bmatrix}1\\0.91\\-0.4\\-1.59\end{Bmatrix}$$

$$\omega=\omega_3=19.14\ \text{rad/s} \Rightarrow \begin{cases} (-2\times 19.14^2+550)X_1-250X_2=0 & \Rightarrow \dfrac{X_2}{X_1}=-0.741 \\ -250X_1+(-1.5\times 19.14^2+450)X_2-200X_3=0 & \Rightarrow \dfrac{X_3}{X_1}=-0.887 \\ -200X_2+(-19.14^2+350)X_3-150X_4=0 & \Rightarrow \dfrac{X_4}{X_1}=1.07 \end{cases}$$

$$\omega=\omega_4=23.82\ \text{rad/s} \Rightarrow \begin{cases} (-2\times 23.82^2+550)X_1-250X_2=0 & \Rightarrow \dfrac{X_2}{X_1}=-2.24 \\ -250X_1+(-1.5\times 23.82^2+450)X_2-200X_3=0 & \Rightarrow \dfrac{X_3}{X_1}=3.441 \\ -200X_2+(-23.82^2+350)X_3-150X_4=0 & \Rightarrow \dfrac{X_4}{X_1}=-1.868 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_3=19.14\ \text{rad/s}$$

$$\underline{X}_3=\begin{Bmatrix}1\\-0.741\\-0.887\\1.07\end{Bmatrix}$$

$$\omega_4=23.82\ \text{rad/s}$$

$$\underline{X}_4=\begin{Bmatrix}1\\-2.24\\3.441\\-1.868\end{Bmatrix}$$

$$\bar{k}_k=-\underline{X}_k^T[m][\iota] \qquad m=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1.5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0.75\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1=-\langle 1 \quad 1.967 \quad 2.746 \quad 3.251\rangle \begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1.5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0.75\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1=-\{2 \quad 2.951 \quad 2.746 \quad 2.438\}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}=-10.135$$

$$\bar{k}_2 = -\langle 1 \quad 0.91 \quad -0.3 \quad -1.59 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -1.8725$$

$$\bar{k}_3 = -\langle 1 \quad -0.731 \quad -0.877 \quad 1.07 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.829$$

$$\bar{k}_4 = -\langle 1 \quad -2.24 \quad 3.441 \quad -1.868 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.54$$

$$M_k = X_k^T \, m \, X_k$$

$$\Rightarrow M_1 = \langle 1 \quad 1.967 \quad 2.746 \quad 3.251 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.967 \\ 2.746 \\ 3.251 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1 = \{2 \quad 2.951 \quad 2.746 \quad 2.438\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.967 \\ 2.746 \\ 3.251 \end{Bmatrix} = 23.27$$

$$\Rightarrow M_2 = \langle 1 \quad 0.91 \quad -0.3 \quad -1.59 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.91 \\ -0.3 \\ -1.59 \end{Bmatrix} =$$

$$\Rightarrow M_2 = \langle 2 \quad 1.365 \quad -0.3 \quad -1.1925 \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.91 \\ -0.3 \\ -1.59 \end{Bmatrix} = 5.23$$

$\vdots$

$$\Rightarrow M_3 = \langle 1 \quad -0.731 \quad -0.877 \quad 1.07 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.731 \\ -0.877 \\ 1.07 \end{Bmatrix} =$$

$$\Rightarrow M_3 = \langle 2 \quad -1.0965 \quad -0.877 \quad 0.8025 \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.731 \\ -0.877 \\ 1.07 \end{Bmatrix} = 4.43$$

$$M_۴ = \langle ۱ \quad -۲/۳۴ \quad ۳/۴۴۱ \quad -۱/۸۶۸ \rangle \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۲/۳۴ \\ ۳/۴۴۱ \\ -۱/۸۶۸ \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_۴ = \langle ۲ \quad -۳/۵۱ \quad ۳/۴۴۱ \quad -۱/۴۰۱ \rangle \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۲/۳۴ \\ ۳/۴۴۱ \\ -۱/۸۶۸ \end{Bmatrix} = ۲۴/۶۸$$

$$\{x_k\}_{max} = \bar{X}_k \cdot \frac{\bar{K}_k}{M_k} \cdot S_{dk}$$

$$\Rightarrow \{x_۱\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱/۹۶۷ \\ ۲/۷۴۶ \\ ۳/۲۵۱ \end{Bmatrix} \cdot \frac{-۱۰/۱۳۵}{۳۴/۲۷} \times ۰/۸ = \begin{Bmatrix} -۰/۴۴۸ \\ -۰/۶۸۵ \\ -۰/۹۵۶ \\ -۱/۱۳۱ \end{Bmatrix} \times ۱۲$$

$$\Rightarrow \{x_۲\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰/۹۱ \\ -۰/۳ \\ -۱/۵۹ \end{Bmatrix} \times \frac{-۱/۸۷۲۵}{۵/۲۴} \times ۰/۶ = \begin{Bmatrix} -۰/۲۱۵ \\ -۰/۱۹۶ \\ ۰/۰۶۴۵ \\ ۰/۳۴۲ \end{Bmatrix} \times ۱۲$$

$$\Rightarrow \{x_۳\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰/۷۴۱ \\ -۰/۸۷۷ \\ ۱/۰۷ \end{Bmatrix} \times \frac{-۰/۸۲۹}{۴/۴۳} \times ۰/۴ = \begin{Bmatrix} -۰/۰۷۴۹ \\ ۰/۰۵۴۷ \\ ۰/۰۶۶ \\ -۰/۰۸۰ \end{Bmatrix} \times ۱۲$$

$$, \{x_۴\}_{max} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۲/۳۴ \\ ۳/۴۴۱ \\ -۱/۸۶۸ \end{Bmatrix} \times \frac{-۰/۵۳}{۲۴/۶۸} \times ۰/۳ = \begin{Bmatrix} -۶/۴۴ \times ۱۰^{-۳} \\ ۰/۰۱۵۱ \\ -۰/۰۲۲۲ \\ ۰/۰۱۲ \end{Bmatrix} \times ۱۲$$

نیروی الاستیک :

$$\{f_{sk}\}_{max} = [m][\bar{X}_k] \frac{\bar{K}_k}{M_k} \cdot S_{ak}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_۱}\}_{max} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۷۵ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱/۹۶۷ \\ ۲/۷۴۶ \\ ۳/۲۵۱ \end{Bmatrix} \cdot \underbrace{\frac{-۱۰/۱۳۵}{۳۴/۲۷}}_{} \overset{-۴/۱۸}{\cancel{\times ۰/۸}} \times ۱۲ = \begin{Bmatrix} -۸/۳۶ \\ -۱۲/۳۳ \\ -۱۱/۴۸ \\ -۱۰/۱۹ \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s_2}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix}1\\0.91\\-0.3\\-1.59\end{Bmatrix} \times \frac{\overset{-2.578}{-1.8725}}{5.23} \times 0.6 \times 12 = \begin{Bmatrix}-5.156\\-3.52\\0.77\\3.074\end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s_3}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix}1\\-0.741\\-0.887\\1.07\end{Bmatrix} \times \frac{\overset{-0.898}{-0.829}}{4.43} \times 0.4 \times 12 = \begin{Bmatrix}-1.796\\0.985\\0.797\\-0.741\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_4}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix}1\\-2.34\\3.441\\-1.868\end{Bmatrix} \times \frac{\overset{-0.077}{-0.053}}{24.68} \times 0.3 \times 12 = \begin{Bmatrix}-0.154\\0.27\\-0.265\\0.108\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix}\left(f_{s_{1m}}^2 + f_{s_{2m}}^2 + f_{s_{3m}}^2 + f_{s_{4m}}^2\right)^{1/2}\\ '' \\ '' \\ ''\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}9.986\\12.86\\11.54\\10.67\end{Bmatrix}$$

نیروی برش پایه :

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{L}_k^2}{M_k}\,\omega_k S_{vk} = \frac{\bar{L}_k^2}{M_k}\,\omega_k^2 S_{dk}$$

$$\Rightarrow Q_{1max} = \frac{(-10.135)^2}{23.27} \times 5.4^2 \times 0.8 = 102.97 \times 12$$

$$Q_{2max} = \frac{(-1.8725)^2}{5.23} \times 13.7^2 \times 0.6 = 64.89 \times 12$$

$$Q_{3max} = \frac{(-0.829)^2}{4.43} \times 19.14^2 \times 0.4 = 22.74 \times 12$$

$$Q_{4max} = \frac{(-0.053)^2}{24.68} \times 23.82^2 \times 0.3 = 1.94 \times 12$$

$$\Rightarrow Q_{max} = \sqrt{102.97^2 + 64.89^2 + 22.74^2 + 1.94^2} = 124.83 \times 12$$

مریم تسلیا ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۲_۱۱)

- اگر سازه تمرین ۱ تحت اثر شتاب زمین لرزه قرار گیرد که در لحظه $t=2s$ بردار تندی سرعت آن برای کلیه مودها به صورت زیر باشد مطلوبست تعیین تغییرمکان طبقات در این لحظه. نیروی الاستیک در این لحظه، و هم چنین برش پایه در لحظه یاد شده.

$$V(t_2)=\begin{Bmatrix}2\\1.7\\1.5\\1.2\end{Bmatrix} ft/s \qquad \omega_n=\begin{Bmatrix}5.4\\12.7\\19.14\\24.82\end{Bmatrix} rad/s$$

$$\bar{K}_n=\begin{Bmatrix}-10.135\\-1.8725\\-0.829\\-0.534\end{Bmatrix} \qquad M_n=\begin{Bmatrix}24.27\\5.24\\4.43\\24.68\end{Bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1.967 & 0.91 & -0.731 & -2.24\\2.746 & -0.3 & -0.887 & 3.441\\3.251 & -1.59 & 1.07 & -1.868\end{bmatrix}$$

$$\{x_k\}_{max}=X_k\,\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot S_{dk}=X_k\cdot\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot\frac{V_{(t)}}{\omega_k}$$

$$\Rightarrow \{x_1\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\1.967\\2.746\\3.251\end{Bmatrix}\times\underbrace{\frac{-10.135}{24.27}\times\frac{2}{5.4}}_{-0.161}=\begin{Bmatrix}-0.161\\-0.317\\-0.442\\-0.524\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_2\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\0.91\\-0.3\\-1.59\end{Bmatrix}\times\frac{-1.8725}{5.24}\times\frac{1.7}{12.7}=\begin{Bmatrix}-0.0479\\-0.0436\\0.0144\\0.0762\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_3\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-0.731\\-0.887\\1.07\end{Bmatrix}\times\frac{-0.829}{4.43}\times\frac{1.5}{19.14}=\begin{Bmatrix}-0.0147\\0.0107\\0.013\\-0.0157\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_4\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-2.24\\3.441\\-1.868\end{Bmatrix}\times\frac{-0.534}{24.68}\times\frac{1.2}{24.82}=\begin{Bmatrix}-1.081\times10^{-3}\\2.534\times10^{-3}\\-3.722\times10^{-3}\\2.021\times10^{-3}\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow x_{max}=\begin{Bmatrix}0.169\\0.32\\0.442\\0.529\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\{f_{s_k}\}_{max} = [M][X_k]\,\frac{\bar{k}_k}{M_k}\cdot S_{a_k} = [M][X_k]\cdot\frac{\bar{k}_k}{M_k}\cdot\omega\cdot v_{(t)}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_1}\}_{max} = [M][X_k]\times\frac{\overset{-۴٫۷۰۴}{-۱۰٫۱۳۵}}{۲۳٫۲۷}\times ۵٫۴\times ۲ = \begin{Bmatrix}-۹٫۴۰۸\\-۱۳٫۸۸\\-۱۲٫۹۱۷\\-۱۱٫۴۷۹\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_2}\}_{max} = [M][X_2]\times\frac{\overset{-۰٫۷۲}{-۱٫۸۷۲۵}}{۵٫۳۲}\times ۱۲٫۷\times ۱٫۷ = \begin{Bmatrix}-۱۵٫۴۶\\-۱۰٫۵۵\\۲٫۴۱۹\\۹٫۲۲\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_3}\}_{max} = [M][X_3]\times\frac{\overset{-۵٫۴۷}{-۰٫۸۲۹}}{۴٫۴۴}\times ۱۹٫۱۴\times ۱٫۵ = \begin{Bmatrix}-۱۰٫۷۵\\۵٫۸۹\\۴٫۷۶\\-۴٫۳۱\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_4}\}_{max} = [M][X_4]\times\frac{\overset{-۰٫۱۱۴}{-۰٫۵۳}}{۴۴٫۶۸}\times ۲۳٫۸۲\times ۱٫۲ = \begin{Bmatrix}-۱٫۲۴\\۲٫۱۶\\-۲٫۱۱\\۰٫۸۶\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix}۲۱٫۰۸۵\\۱۸٫۵۲\\۱۴٫۱۱\\۱۵٫۲۶\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{k}_k^{۲}}{M_k}\cdot\omega_k\cdot v_{(t)}$$

درس ایمنی:

$$\rightarrow Q_{1\,max} = \frac{(-۱۰٫۱۳۵)^{۲}}{۲۳٫۲۷}\times ۵٫۴\times ۲ = ۴۷٫۶۷\times ۱۲$$

$$Q_{1\,max} = \frac{(-۱٫۸۷۲۵)^{۲}}{۵٫۳۲}\times ۱۲٫۷\times ۱٫۷ = ۱۴٫۴۷\times ۱۲$$

$$Q_{2\,max} = \frac{(-۰٫۸۲۹)^{۲}}{۴٫۴۴}\times ۱۹٫۱۴\times ۱٫۵ = ۴٫۴۵\times ۱۲$$

$$Q_{4\,max} = \frac{(-۰٫۵۳)^{۲}}{۴۴٫۶۸}\times ۲۳٫۸۲\times ۱٫۲ = ۰٫۳۴\times ۱۲$$

$$\Rightarrow Q_{max} = ۵۰٫۰۲\times ۱۲$$

○ ماکزیمم برش پایه :

$$\left\{ Q_{k,max} \right\} = \frac{\bar{k}_k^{\,٢}}{m_k} \cdot S_{ak}$$ برش پایه ماکزیمم در مد k ام

$$Q_{١,max} = \frac{١١,٢٩٢^{٢}}{٢٤,٥٨٥} \times ١٢١,٠١ = ٦٢٧,٦١٤$$

$$Q_{٢,max} = \frac{٢^{٢}}{٦} \times ٢٤٩,١١ = ١٦٦,٠٧٣$$

$$Q_{٣,max} = \frac{٠,٧٠٨^{٢}}{٣,٤١٧} \times ٢٨٩,٩٦ = ٤٢,٥٣٦$$

$$Q_{max} = \left(٦٢٧,٦١٤^{٢} + ١٦٦,٠٧٣^{٢} + ٤٢,٥٣٦^{٢} \right)^{١/٢} = ٦٥٠,٦٠٧ \quad \text{kips}$$

○ جرم موثر :

$$m_k^{*} = \frac{\bar{k}_k^{\,٢}}{m_k}$$

$$m_١^{*} = \frac{١١,٢٩٢^{٢}}{٢٤,٥٨٥} = ٥,١٨٦$$

$$m_٢^{*} = \frac{٢^{٢}}{٦} = ٠,٦٦٧$$

$$m_٣^{*} = \frac{٠,٧٠٨^{٢}}{٣,٤١٧} = ٠,١٤٧$$

$$m_١^{*} + m_٢^{*} + m_٣^{*} = ٦ = m_١ + m_٢ + m_٣ \longrightarrow \text{ok}$$

نمونه سؤال امتحان اصول مهندسی زلزله / جناب آقای دکتر تهرانی زاده

تهیه و تنظیم: A. Dayani

A. Dayani

* یک تیر نیمه صلب با شرایط مربوطه مطابق شکل مفروض است.

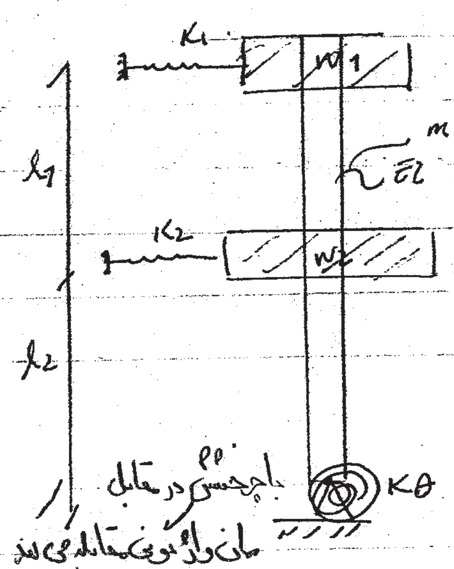
چنانچه این تیر در انتها دارای یک فنر پیچشی با سختی K_θ باشد و تحت بارگذاری زلزله با نمودار شتاب نگاشت زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین:

1. K^* ، M^* و $\bar{K}$ دینامیکی — جرم در واحد طول: ۱٫۳

2. معادله حرکت، ماکزیمم تغییر مکان و نقطه مربوط به آن

3. معادله برش پایه در واحد طول و ماکزیمم آن

4. ماکزیمم برش پایه و لنگر ماکزیمم پایه (یا لنگر واژگونی)



$l_1 = 40'$ (ft) = ۴۸۰ in

$l_2 = 60'$ (ft) = ۷۲۰ in

$K_1 = 200$ Kips/in

$K_2 = 400$ Kips/in

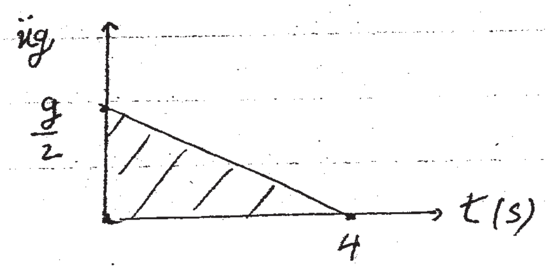
$w_1 = 50$ Kips $\Rightarrow m = ۰٫۱۳۰$ lb

$w_2 = 100$ Kips $\Rightarrow m = ۰٫۲۶$ lb

$m = 500$ lb/in (واحد فرض می‌کنیم)

$EI = 2\times10^5$ lb.in^2 = ۲×۱۰۲ kips.in۲

$K_\theta = 1000$ Kips.in/Rad



نمودار شتاب نگاشت زلزله

$g = ۳۸۶ \, in/s^2 = ۳۲,۲ \, ft/s^2$

$1 \, ft = 12 \, in$

تبدیل می‌کنیم به : سختی $k = \frac{kips}{ft}$

حل) برای حل ابتدا می‌بایستی تابع شکل مناسب را تعیین کرد. تعیین این تابع مستلزم یک راه حل طولانی است اما

با توجه به ارتفاع سازه بین توابع زیر، اما $\psi_1(x)$ را انتخاب می‌کنیم چراکه مقدار $\psi_1'(0)=0$ اثر پیچشی را که ابهام دارد تا انتها خنثی می‌کند. چون سازه بلند است $\psi = \frac{x}{L}$ جواب می‌دهد

$$\begin{cases} \psi_1(x) = 1 - \cos \pi x/2l \quad ✓ \\ \psi_2(x) = \sin \pi x/2l \end{cases}$$

تابع شکل مناسب تر است که ترم k_θ حذف شود l

یعنی مشتق آن در $(x=0)$ باید صفر باشد $k^* = \dots + k_\theta \psi'^2$

در مرحله بعد جدول تشکیل داده و مقادیر ψ' و ψ را برای اجرام فرضی مشخص کنیم. توجه شود که اوزان $(w_1 \, \& \, w_2)$

حتما می‌بایستی به جرم تبدیل شود و واحد فنرهای اتکا همگن بشوند، این موضوع فوق العاده حیاتی است!

Item	x (ft)	ψ	ψ'
w_1	100	1	$(200/\pi)^{-1}$ $(63.7)^{-1}$
w_2	60	0.4	$(250/\pi)^{-1}$ (50.9)
K_1	100	1	$200/\pi$
K_2	60	0.4	$(250/\pi)^{-1}$

همگن واحدها $\rightarrow K_1 = 200 \times 12 = 2400 \; kips/ft$

$K_2 = 400 \times 12 = 480 \; kips/ft$

جرم در واحد طول $m = \frac{0.500}{\cancel{9.81} \; ۳۲,۲} \times 12 = 0.63 \; \frac{kips \cdot s^2}{m \cdot ft} \simeq 0.21 \; kips \cdot \frac{s^2}{ft^2}$.

متر $3 ft$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{50}{\cancel{9.81} \; ۳۲} = 5.2 \\ m_2 = \frac{100}{\cancel{9.81} \; ۳۲} = 9.2 \end{cases}$$

$EI = 2 \times 10^6 \times 10^{-3} \times \frac{1}{12}^2 = M$ (kips·ft)

تعیین $\bar{K}, M^*, K^*$

$$m^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2 + \sum m_i \psi_i^2$$

$$m^* = \int_0^L 0.21\left[1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right]^2 dx + m_1\psi_1^2 + m_2\psi_2^2$$

ازمثن دوم $m^* = 0.21 \times 0.228\,(100)^L + 5.2\times 1^2 + 9.2\times 0.4^2 = 11.2 \; \frac{Kips.s^2}{ft^2}$

$$K^* = \int_0^L EI\,\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\,dx + \sum K_i\psi_i^2 + \cancel{K_\theta\,\theta^2}\;0$$

$$K^* = \frac{\pi^4}{32}\times 14/_{100^3} + 2400\times\frac{1}{63.7}^2 + 4800\times\frac{1}{80}^2 \simeq 1.34$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{1.34}{11.2}} = 0.35\ \frac{rad}{s} \rightarrow T \simeq 12^S$$

$$\bar{K} = \int_0^L \mu(x)\,\psi(x) + \sum m_i\psi_i$$

$$\bar{K} = 0.21\times 0.364\times 100 + 5.1\times 1 + 9.2\times 0.4 \simeq 8$$

$$\frac{\bar{K}}{m^*} = \frac{8}{11.2} \simeq 0.73$$ ضریب تحریک زلزله

$1g$

قسمت اول حل شد!

اگر $t_d \le \frac{T}{5}$ ← بار ضربه‌ای ← ساده است ← احتمالاً نمی‌دهد

داشتن انتگرال دوهامل نمی‌خواهد

2. معادله حرکت

$T \simeq 12^s$, $t = 4^s$, $t > T/10 \to$ No Impulse Loading

آنالیز ضربه‌ای چندان صحیح نیست.

$$v(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$$

فرض $\xi \simeq 0$,
$\omega_d = \omega_n = \omega^* = 0.35$

$$\ddot{x}_g(t) = -\frac{g}{8}t + \frac{g}{2} = \frac{g}{2}\left(-\frac{t}{4}+1\right)$$

$$v(t) = \frac{g}{2}\int_0^t\left(-\frac{\tau}{4}+1\right)\sin 0.35(t-\tau)\,d\tau$$

$$v(t) = \frac{g}{2}\times\frac{1}{0.35}\cos(t-\tau)\,d\tau\Big]_0^t - \frac{g}{8}\int_0^t t\sin 0.35(t-\tau)\,d\tau$$

انتگرال گیری با تکنیک کتاب $\to$ $v(t) = g(1-\cos t + 2\sin t)$

* دقت برای انتگرال گیری هدر ندهید، فرض کنید و جلو بروید!

$v'(t) = 0 \to t = 2.4s \to v_{max}(2.4) \simeq 2$

$$x(t) = \psi(x)\frac{K}{m\omega}v(t) \to x(t) = 2\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)g(1-\cos t + 2\sin t)$$

← معادله تغییر مکان

$x_{max}(t) = 2\times1\times2 \simeq 4$ inch $\to$ ماکزیمم تغییر مکان

* زمان تغییر مکان: 2.4^s *

تهیه و تنظیم: A. Dayani

A. Dayani

نمونه سؤال امتحان اصول مهندسی زلزله / جناب آقای دکتر تهرانی زاده

* یک تیر طره صلب با شرایط مربوطه مطابق شکل مفروض است.

چنانچه این تیر در انتها دارای یک فنر پیچشی با سختی $K\theta$ باشد و تحت بارگذاری زلزله با نمودار شتاب نگاشت زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین:

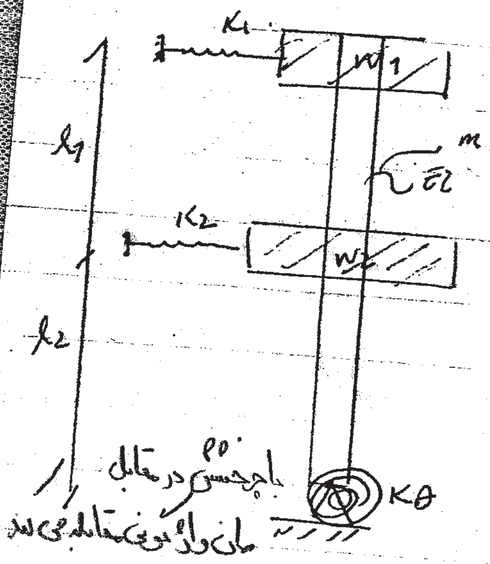
جرم در واحد طول: 1,3

1. K^* ، M^* و $\bar{K}$ و فرکانس

2. معادله حرکت ، ماکزیمم تغییر مکان و لحظه مربوط به آن

3. معادله برش پایه در واحد طول و ماکزیمم آن

4. ماکزیمم برش پایه و ممان مقاوم پایه (یا ممان واژگونی)



$l_1 = 40'$ (ft) = 480 in

$l_2 = 60'$ (ft) = 720 in

$K_1 = 200$ Kips/in

$K_2 = 400$ Kips/in

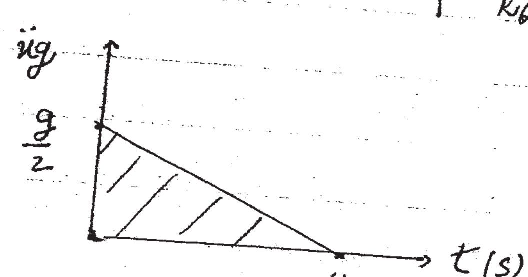
$W_1 = 50$ Kips $\Rightarrow m = 0.13$ lb

$W_2 = 100$ Kips $\Rightarrow m = 0.26$ lb

$m = 500$ lb/in (ثابت فرض می‌کنیم)

$EI = 2\times10^5$ lb. in^2 $= 2\times10^2$ kips. in^2

$K\theta = 1000$ Kips. in/Rad



نمودار شتاب نگاشت زلزله

$M = K\theta$

$Q_m = Q_{m1} + Q_{m2}$

$Q_m = \frac{\bar{K}}{M^*} \omega^2 S_d \sum m_i \varphi_i$

$Q_m = 0.73 \times 0.35^2 \times 0.04 \left[5.2 \times 1 + 9.2 \times 0.4\right] = 0.03$ ③

$Q_{Total} = Q_B + Q_S + Q_m$

$Q_T = ① + ② + ③ = 0.02 + 173 + 0.03 = 173.05 \text{ Kips}$

* تعیین ممان واژگونی

دو راه حل وجود دارد : ① روش مستقیم (عامل حاصل از روش دارای ابهام و فرضیات زیاد)

روش دوم راحت‌تر است

② روش ممان مقاوم یعنی استفاده از ممان قابل تحمل در سطح سنجش $K\theta$

روش مستقیم به دلیل طولانی‌تر است .

روش دوم برگزیده می‌شود

②

$\underset{\text{واژگونی}}{M_{OT}} = \underset{\text{مقاوم}}{M_R} = \underset{\text{خمشی}}{M_s} = K\theta \quad , \quad \theta = \psi(x,t)'$

$\psi(x,t) = \varphi(x)\, \psi(t) \quad , \quad \psi(t)$: قبلاً تعریف شده است

$M_{R\,max} = ? \rightarrow \theta' = 0 \rightarrow \psi''(x,t) = 0 \rightarrow \psi''(t) = 0$

کافی است از معادلات مشتق دوم $\psi''(t) = 0$ ، t را حساب می‌کنیم ← θ متناظر را به دست آورده جایگذاری می‌کنیم .

والسلام

A. Dayani

A. Dayani

$$\{f_{s2}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰/۹۱ \\ -۰/۳ \\ -۱/۵۹ \end{Bmatrix} \times \frac{\overset{-۲/۵۷۸}{-۱/۸۷۲۵}}{۵/۲۲۳} \times ۰/۶ \times ۱۲ = \begin{Bmatrix} -۵/۱۵۶ \\ -۳/۵۲ \\ ۰/۷۷ \\ ۳/۰۷۴ \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s3}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰/۷۲۱ \\ -۰/۸۸۷ \\ ۱/۰۷ \end{Bmatrix} \times \frac{\overset{-۰/۱۹۸}{-۰/۸۲۹}}{۴/۴۴} \times ۰/۴ \times ۱۲ = \begin{Bmatrix} -۱/۷۹۶ \\ ۰/۹۸۵ \\ ۰/۷۹۷ \\ -۰/۷۲۱ \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_{s4}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix} ۱ \\ -۲/۴۴ \\ ۲/۴۴۱ \\ -۱/۸۶۸ \end{Bmatrix} \times \frac{\overset{-۰/۰۷۷}{-۰/۵۳}}{۲۴/۶۸} \times ۰/۳ \times ۱۲ = \begin{Bmatrix} -۰/۱۵۴ \\ ۰/۲۷ \\ -۰/۲۶۵ \\ ۰/۱۰۸ \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix} (f_{s1m}^۲ + f_{s2m}^۲ + f_{s3m}^۲ + f_{s4m}^۲)^{۱/۲} \\ '' \\ '' \\ '' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۹/۹۸۶ \\ ۱۲/۸۶ \\ ۱۱/۵۴ \\ ۱۰/۶۷ \end{Bmatrix}$$

نیروی برش پایه :

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{k}_k^۲}{M_k}\,\omega_k S_{vk} = \frac{\bar{k}_k^۲}{M_k}\,\omega_k^۲ S_{dk}$$

$$\Rightarrow Q_{1max} = \frac{(-۱۰/۱۳۵)^۲}{۲۳/۲۷} \times ۵/۴^۲ \times ۰/۸ = ۱۰۲/۹۷ \times ۱۲$$

$$Q_{2max} = \frac{(-۱/۸۷۲۵)^۲}{۵/۲۳} \times ۱۲/۷^۲ \times ۰/۶ = ۶۴/۸۹ \times ۱۲$$

$$Q_{3max} = \frac{(-۰/۸۲۹)^۲}{۴/۴۴} \times ۱۹/۱۴^۲ \times ۰/۴ = ۲۲/۷۴ \times ۱۲$$

$$Q_{4max} = \frac{(-۰/۵۳)^۲}{۲۴/۶۸} \times ۳۴/۸۲^۲ \times ۰/۳ = ۱/۹۴ \times ۱۲$$

$$\Rightarrow Q_{max} = \sqrt{۱۰۲/۹۷^۲ + ۶۴/۸۹^۲ + ۲۲/۷۴^۲ + ۱/۹۴^۲} = ۱۲۴/۸۳ \times ۱۲$$

مریم تشلیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۲_۱۱)

- اگر سازه تمرین ۱ تحت اثر شتاب زمین لرزه قرار گیرد و در لحظه $t=2s$ بردار تند سرعت آن برای کلیه مودها به صورت زیر باشد مطلوبست تعیین تغییر مکان طبقات در این لحظه. نیروی الاستیک در این لحظه، و هم چنین برش پایه در لحظه یاد شده.

$$V(t_2)=\begin{Bmatrix}2\\1.7\\1.5\\1.2\end{Bmatrix} ft/s \qquad \omega_n=\begin{Bmatrix}5.4\\12.7\\19.14\\24.82\end{Bmatrix} rad/s$$

$$\bar{K}_n=\begin{Bmatrix}-10.135\\-1.8725\\-0.829\\-0.534\end{Bmatrix} \qquad M_n=\begin{Bmatrix}23.27\\5.24\\4.43\\24.68\end{Bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1.967&0.91&-0.731&-2.44\\2.746&-0.3&-0.887&3.441\\3.251&-1.59&1.07&-1.868\end{bmatrix}$$

$$\{x_k\}_{max}=\Phi_k\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot S_{dk}=\Phi_k\cdot\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot\frac{V_{(t)}}{\omega_k}$$

$$\Rightarrow \{x_1\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\1.967\\2.746\\3.251\end{Bmatrix}\times\cancel{\frac{-10.135}{23.27}}^{\,-0.161}\times\frac{2}{5.4}=\begin{Bmatrix}-0.161\\-0.317\\-0.442\\-0.524\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_2\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\0.91\\-0.3\\-1.59\end{Bmatrix}\times\cancel{\frac{-1.8725}{5.24}}\times\frac{1.7}{12.7}=\begin{Bmatrix}-0.0479\\-0.0436\\0.0144\\0.0762\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_3\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-0.731\\-0.887\\1.07\end{Bmatrix}\times\frac{-0.829}{4.43}\times\frac{1.5}{19.14}=\begin{Bmatrix}-0.0147\\0.0107\\0.013\\-0.0157\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_4\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-2.44\\3.441\\-1.868\end{Bmatrix}\times\cancel{\frac{-0.534}{24.68}}\times\frac{1.2}{24.82}=\begin{Bmatrix}-1.082\times10^{-3}\\2.534\times10^{-3}\\-3.722\times10^{-3}\\2.021\times10^{-3}\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow x_{max}=\begin{Bmatrix}0.169\\0.32\\0.442\\0.529\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\{f_{s_k}\}_{max} = [M][X_k]\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot S_{a_k} = [M][X_k]\cdot\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot \omega\cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_1}\}_{max} = [M][X_k]\times\overbrace{\frac{-10.135}{23.27}\times 5.4\times 2}^{-4.704} = \begin{Bmatrix}-9.408\\-13.88\\-12.917\\-11.479\end{Bmatrix}\times 12$$

$$,\ \{f_{s_2}\}_{max} = [M][X_2]\times\overbrace{\frac{-1.8725}{5.12}\times 12.7\times 1.7}^{-7.72} = \begin{Bmatrix}-15.46\\-10.55\\2.419\\9.22\end{Bmatrix}\times 12$$

$$,\ \{f_{s_3}\}_{max} = [M][X_3]\times\overbrace{\frac{-0.829}{4.44}\times 19.14\times 1.5}^{-5.37} = \begin{Bmatrix}-10.75\\5.89\\4.76\\-4.31\end{Bmatrix}\times 12$$

$$,\ \{f_{s_4}\}_{max} = [M][X_4]\times\overbrace{\frac{-0.534}{44.68}\times 23.82\times 1.2}^{-0.614} = \begin{Bmatrix}-1.23\\2.16\\-2.11\\0.86\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix}21.085\\18.52\\14.11\\15.36\end{Bmatrix}\times 12$$

برش پایه:

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{K}_k^2}{M_k}\cdot\omega_k\cdot V_{(t)}$$

$$\rightarrow Q_{1\,max} = \frac{(-10.135)^2}{23.27}\times 5.4\times 2 = 47.67\times 12$$

$$Q_{2\,max} = \frac{(-1.8725)^2}{5.12}\times 12.7\times 1.7 = 14.47\times 12$$

$$Q_{3\,max} = \frac{(-0.829)^2}{4.44}\times 19.14\times 1.5 = 4.45\times 12$$

$$Q_{4\,max} = \frac{(-0.534)^2}{24.68}\times 23.82\times 1.2 = 0.34\times 12$$

$$\Rightarrow Q_{max} = 50.02\times 12$$

○ ماکزیمم برش پایه :

$$\left\{ Q_{k,max} \right\} = \frac{\bar{k}_k^{2}}{m_k} \cdot S_{ak}$$ برش پایه ماکزیمم در مد k ام

$$\begin{cases} Q_{1,max} = \dfrac{11.392^{2}}{24.585} \times 121.01 = 637.614 \\[2ex] Q_{2,max} = \dfrac{2^{2}}{6} \times 249.11 = 166.073 \\[2ex] Q_{3,max} = \dfrac{0.708^{2}}{3.417} \times 289.96 = 42.536 \end{cases}$$

$$Q_{max} = \left(637.614^{2} + 166.073^{2} + 42.536^{2} \right)^{1/2} = 650.607 \quad kips$$

○ جرم موثر :

$$m_k^{*} = \frac{\bar{k}_k^{2}}{m_k}$$

$$\begin{cases} m_1^{*} = \dfrac{11.392^{2}}{24.585} = 5.186 \\[2ex] m_2^{*} = \dfrac{2^{2}}{6} = 0.667 \\[2ex] m_3^{*} = \dfrac{0.708^{2}}{3.417} = 0.147 \end{cases}$$

$$m_1^{*} + m_2^{*} + m_3^{*} = 6 = m_1 + m_2 + m_3 \longrightarrow ok$$

تشکر :

در انتها لازم میدانم از آقای محمدرضا سیفی (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیر کبیر) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .