حمید کاظم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

مکانیک سیالات

استاد :

جناب آقای دکتر زراتی

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(کارشناس ارشد عمران گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی دکترا گرایش سازه North Carolina State University)

تابستان ۱۳۹۱

حمید کاظم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

مکانیک سیالات

استاد :

جناب آقای دکتر زراتی

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

حمید کاظم

«بسم الله الرحمن الرحیم»

حمید کاظم

«مکانیک سیالات»

«جناب آقای دکتر زراتی»

نهال
NAHAL

حمید کاظم

مکانیک سیالات (Mechanics of Fluids)

Refrences:

1) Fluid Mechanics ; streeter — خیلی قدیمی است ولی هنوز هم کاربرد دارد. تقریبا حجیم دارد
2) Fluid Mechanics ; Shames
3) Fluid Mechanics ; Daughlas, et al — خیلی روان و خوب توضیح داده. هنوز هم کاربرد دارد.
4) Fluid Mechanics ; Daughtery & Franzin — آمریکایی است. بخش اندازه گیری آزمایشگاهی است.
5) Fluid Mechanics (Elementary) ; Vennard

Adv. Text:

1) Fluid Mechanics ; F. white
2) Fluid Mechanics ; Massey

Fluid Mechanics True Problems → کتاب جدید

ترجمه را نخوانید ← ۱) اصلی غلط دارند
۲) زبان یادی گیرید.

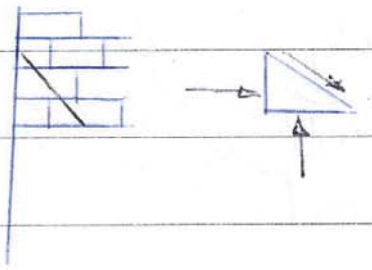
امتحان:

30% میان ترم ← سیال در حال سکون — 10 سوال تستی 5 نمره
70% پایان ترم ← سیال در حال حرکت — تشریحی 15 نمره

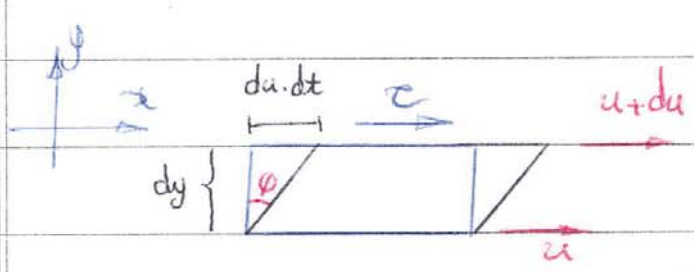
حمید کاظمی

علم مکانیک سیالات: علم مطالعه سیال در حال سکون و در حال حرکت به کمک اصول تعادل جرم و حرکت. (در شیمی و مکانیک اصل تعادل انرژی جسم در تعریف وجود دارد. نه در عمران نسبت)

تحت تأثیر تنش های برشی سیال تغییر شکل می دهد. این تفاوت سیال با جامد است.



منظور از تغییر شکل زیاد حرکت سیال است. تا اثر سیال حرکتی نکند یعنی تنش برشی در آن اعمال نشده است.



سیال متقابل با تنش برشی τ حرکت می کند.

چون سیال گوارنده است پس لغزش

ϕ را در زمان معین بررسی کرده و حجم.

$$\phi = \frac{du.dt}{dy}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{du}{dy} \rightarrow \begin{cases} \tau \propto \frac{d\phi}{dt} \\ \tau \propto \frac{du}{dy} \end{cases}$$

τ با آهنگ ϕ نسبت است با لزجت

$$\Rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy}$$ رابطه نیوتن

رابطه نیوتن رابطه بین تنش و کرنش و بصورت خطی است.

حمید کاظم

خواص سیالات :

۱) جگالی : عبارت است از جرم واحد حجم سیال . با ρ نشان می‌دهند $\frac{kg}{m^3}$

(density)

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad SI \rightarrow \frac{kg}{m^3}$$

۲) وزن مخصوص : عبارت است از وزن واحد حجم سیال . با γ نشان می‌دهند $\frac{N}{m^3}$

(specific weight)

$$\gamma = \rho g = \frac{mg}{V} \qquad SI \rightarrow \frac{kg}{m^3} \times \frac{m}{s^2} = \frac{N}{m^3} \qquad \frac{m}{s^2} \times 9.81$$

* در بررسی‌های عرفی معمولاً $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ در نظر گرفته می‌شود ، $\gamma = 9810 \frac{N}{m^3}$ است یعنی هر $1 m^3$ آب $9810 N$ وزن دارد .

۳) جگالی نسبی : نسبت وزن مخصوص یک ماده به وزن مخصوص یک جسم جرم آن در شرایط استاندارد و یا نسبت جرم مخصوص ماده به جرم مخصوص یک جسم هم حجم آن است ، که با R.d. نشان می‌دهند .

(Relative density)

R.d. = 0.85

$\rightarrow \rho_x = 0.85 \times 1000 = 850 \frac{kg}{m^3}$

۴) لزجت دینامیکی : خاصیتی در سیال که در مقابل تنش برشی وجود دارد و مانع حرکت آن می‌شود . μ

(Dyn. Viscosity)

$\frac{kg}{m.s}$ در بررسی‌های مرسوم کوچک نوشته می‌شود .

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} = \frac{N}{m^2} \cdot sec = \frac{kg \cdot sec \cdot m}{m^2 \cdot sec^2} = \frac{kg}{m \cdot sec}$$

μ هوا بالاتر از μ آب است

$\mu \simeq 10^{-3} \frac{kg}{m.s}$

$\mu \left(\frac{kg}{m.sec} \right)$

نهال NAHAL

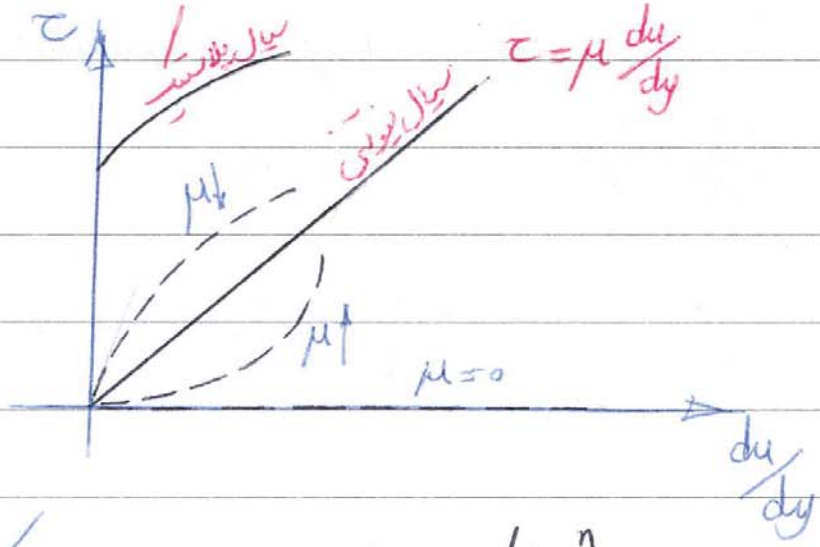
حمید کاظم

۵) لزجت سینماتیکی: نسبت لزجت دینامیکی به چگالی $\frac{\mu}{\rho}$ استفاده می‌کنیم.

(Kyn. viscosity)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{m^2}{s}\right) \quad \text{یا} \quad \nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

* $10\ poise = 1 \frac{kg}{m.sec}$



* همواره سیال نیوتنی هستند اما فولاد سیال پلاستیک است. لجن هم سیال غیر نیوتنی است.

سیال پلاستیک: $\tau = A + \left(\frac{du}{dy}\right)^n \beta$

* سیالاتی داریم که برابر واردکردن تنش شل می‌شوند. اما سیالی داریم که برابر وارد کردن تنش سفت می‌شود (رئوپکتیک)

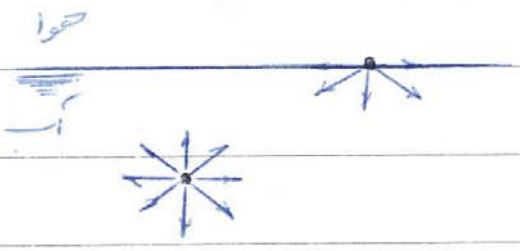
سیال ایده‌ال: سیالی است که در آن $\mu = 0$ است و در واقعیت وجود ندارد اما بعضی مواقع سیال را سیال ایده‌ال فرض می‌کنیم تا معادلات ساده‌تر گردد.

حمید کاظم

سیال جسم به صورت بلافاصله عمل می کند و بعد از تغییر شکل باقی می ماند.
فاز سطح آزاد را ایجاد می کند.

توجه: ما در صورت تمرین و ذهن نگاه می کنیم بلکه به صورت ماکروسکوپی نگاه می کنیم یعنی به دید مولکول کاری نداریم.

۱۶ کشش سطحی: $\frac{N}{m}$ قطعه ای برای مایع با سطح آزاد اتفاق می افتد.

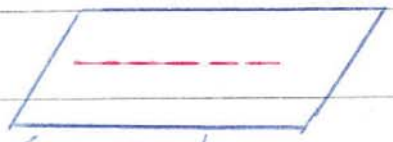


(surface tension)

نیروی سطحی است

کشش سطحی مدل کمی از فعالیت های را به علت چسبندگی می کند.

واحد کشش سطحی N/m است. مقدار تقریبی که باید اعمال کنیم تا دو واحد طول پاره شود

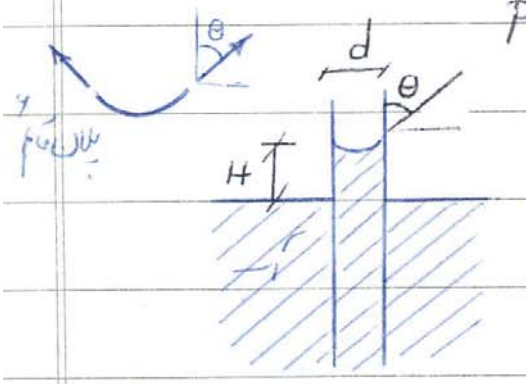


$$\sigma = 7.41 \times 10^{-2} \ N/m$$

نکته: کشش سطحی باعث می شود فشار داخل قطرات بیشتر کمی باریک مایع از فشار محیط بیشتر باشد. که قطره دور به شعاع r را در نظر بگیرید. اگر دیاگرام آزاد نیمه را رسم کنید و تعادل را بنویسیم فشار داخلی قطره به صورت مقابل بدست می آید

$$P\pi r^2 = 2\pi r\sigma \rightarrow P = \frac{2\sigma}{r}$$

* θ شکل به حسن و تغیر کیفی توجه دارد.



$$mg = F$$

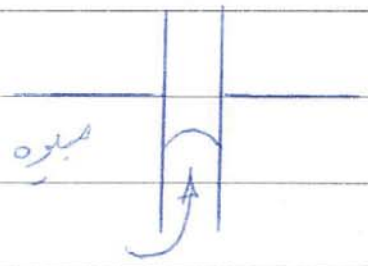
$$\rho g \frac{\pi d^2}{4} \times H = \pi . d\sigma \cos\theta$$

$$\Rightarrow H = \frac{4\sigma\cos\theta}{\rho g d}$$

نکته: یک جت استوانه‌ای کوچک به شعاع r را در نظر بگیرید. اگر نیاگارا آزاد نیم استوانه را سر کرده و تقابل نیروی را بنویسیم، فشار داخل جت به صورت زیر بدست می‌آید:

$P = \frac{\sigma}{r}$ ← کشش سطحی

حرکت dt ، H↑ است.



۷) ضریب الاستیسیته: میزان تغییر شکل پذیری سیال در برابر فشارهای وارد شده $\frac{N}{m^2}$

(Bulk Modulus)

$\delta p = -k \frac{\delta \forall}{\forall}$ ($\forall$ → Volume) → $\left(\Delta p = -k \frac{\Delta \forall}{\forall}\right)$

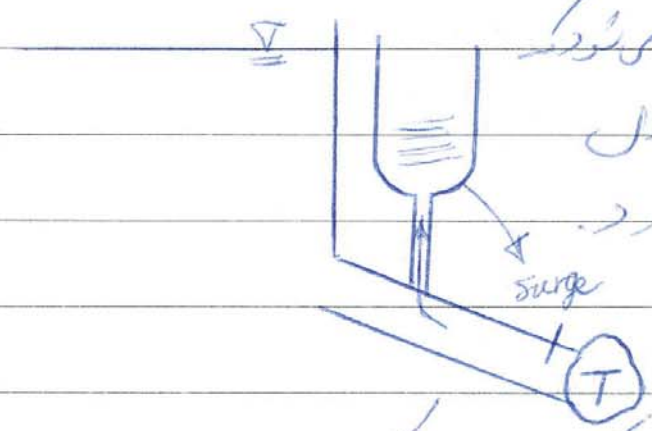
$k = -\rho \frac{dp}{d\rho}$ (N/m^2) اثبات $\left(dp = -k \frac{d\forall}{\forall} \rightarrow dp = -k \frac{\frac{dm}{m}}{\frac{v}{m}} \rightarrow dp = -k \frac{d\rho}{\rho}\right)$

* از جبری است فشار وارد شده آنقدر عوض می‌شود $k = 2 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$
به ازای k نیز عوض می‌شود.
* اگر 3000 واحد فشار به آبهای تونل وارد کنیم k آب 2 برابر می‌شود.
* معمولاً آب را غیرقابل تراکم فرض می‌کنیم و به ازای تغییرات فشار برابر اعمال فشار هم نظر می‌کنیم.

قطعه‌ی مورد استفاده وجود دارد:

در صنعت برای بررسی تونل‌های احداث می‌شود که آب را به توربین می‌رساند. برای یک توربین معادل 150 m^3/s توربین 250 MW وجود دارد.

لوله توربین یک دریچه دارد که فشار زیاد آب باعث می‌شود دریچه بسته می‌شود. فشار زیاد آب باعث



می‌شود عضوی از توربین که در برابر فشار مقاومت می‌کند کوچک شود. از این عضو مقاومت خود را از دست بدهد زیان‌های زیادی را وارد می‌کند. بنابراین دریچه‌ای را افزایش دهند که به محض این اتفاق دریچه بسته شود. وقتی دریچه بسته می‌شود آبی که با سرعت حدود $8 m/s$ به طرف دریچه و توربین می‌آمد

حمید کاظم

مثال: اگر $1m^3$ آب در اثر $1atm$ فشار حجم آن چه تغییری می‌کند؟

$$1atm = 0.1Mpa = 10^5 pa$$

$$\frac{\delta \forall}{\forall} = \frac{\delta P}{K} \Rightarrow \frac{\delta \forall}{1m^3} = \frac{0.1 \times 10^6}{2.2 \times 10^9} \Rightarrow \delta \forall \cong 45.5cc$$

* تغییرات حجم آب در اثر فشار بسیار کم است. بنابراین تقریباً غیرقابل تراکم در نظر گرفته می‌شود.

مثال: وزن مخصوص آب دریاچه‌ای $10.2 \frac{kN}{m^3}$ می‌باشد. وزن مخصوص آن در عمق $8.5km$ چقدر است؟ (فشار در این عمق $90 \frac{MN}{m^2}$ است. $K = 2.4 \times 10^6 \frac{kN}{m^2}$)

$$\Delta p = K \frac{\Delta \forall}{\forall} \Rightarrow \Delta p = K \frac{\frac{mg}{\Delta \forall}}{\frac{mg}{\forall}} \Rightarrow \Delta p = K \frac{\Delta \gamma}{\gamma}$$

$$\Rightarrow 90 \times 10^6 = 2.4 \times 10^6 \times 10^3 \frac{\Delta \gamma}{\gamma_{\text{سطح آب}}} \Rightarrow \frac{\Delta \gamma}{\gamma_{\text{سطح آب}}} = 37.5 \times 10^{-3}$$

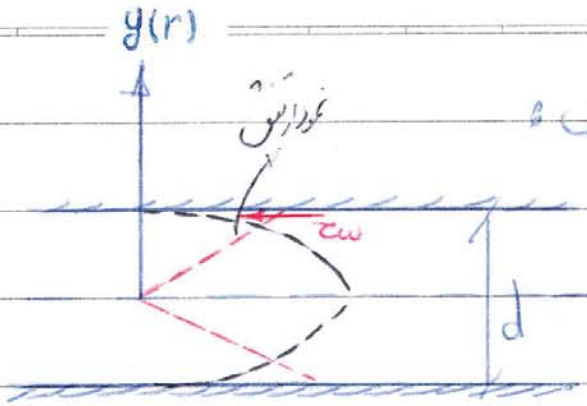
$$\Rightarrow \Delta \gamma = 0.38 \qquad \gamma_{\text{دریاچه}} = \gamma_{\text{سطح آب}} + \Delta \gamma = 10.2 + 0.38$$

$$\Rightarrow \gamma_{\text{عمق } 8.5km} = 10.58 \cong 10.6 \frac{kN}{m^3}$$

با مانع مواجه می‌شود و بافشاری که به آب وارد می‌کند برگشت می‌کند. این فشار برگشتی را افزایش می‌دهد. بنابراین در تونل باید از فولاد استفاده کرد. برای جلوگیری از فشار زیاد (فولادگذاری است) وسط تونل مطابق شکل راهی ایجاد می‌کنند تا آب به سمت بالا حرکت کند. از دریچه تا این راه (Surge) را با فولاد و بتن را با بتن اصلاح می‌نمایند.

حمید کاظم

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$



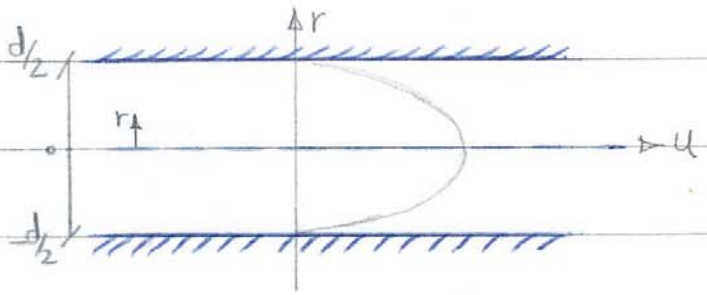
توزیع سرعت بین دو صفحه موازی

برای دو صفحه موازی که بوده و β

$$u = \frac{\beta}{4\mu}\left[\frac{d^2}{4} - r^2\right]$$ سرعت سیال

$$-d/2 \le r \le d/2$$

$$\begin{cases} r = 0 \rightarrow u = u_{Max} \\ r = d/2 \rightarrow u = 0 \end{cases}$$



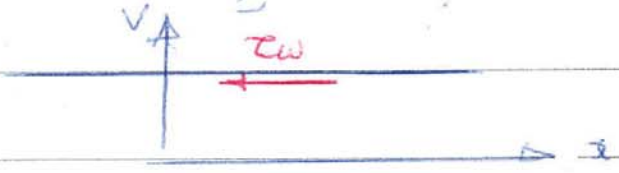
توزیع تنش برشی بصورت زیر می‌باشد.

$$u = \frac{\beta}{4\mu}\left[\frac{d^2}{4} - r^2\right} \qquad (r \sim y)$$

$$\rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{2\beta r}{4\mu} \Rightarrow \tau = \frac{-\beta r}{2}$$

$$r = d/2 \Rightarrow \text{دیواره} \quad \tau_w = \frac{-\beta d}{4}$$

نیروی اصطکاک وارده به لوله در طول به اندازه l به صورت زیر است.



حمید کاظم

* نیروی Drag نیروی است که در اثر حرکت جسم به سیال حرکت وارد می‌شود.
این نیرو در جهت حرکت سیال است.
* نیروی که عمود بر حرکت سیال به جسم وارد می‌شود نیروی lift نامیده می‌شود.
(نیروی برآ) نیروی مثبت : lift (نیروی پس) نیروی کشش : Drag

اگر کره‌ای Drag را در حال l در نظر بگیریم،

قطر کره D ← و لایه‌ای که در حال حرکت است $F_D = \tau(\pi D \times l)$

$$\rightarrow F_D = \frac{-\beta r}{2}(\pi D l)$$

* کنترل حرکت سیال می‌آید

مثال: سرعت جسم (سرعت حدی) چقدر است؟

$A = 0.2m^2$

$m = 8kg$

$\mu = 4.4 \times 10^{-1} \frac{kg}{ms}$

2mm

20°

وقتی سرعت به سرعت حدی V_T می‌رسد

$$mg\sin\alpha = \tau . A$$

$$8 \times 9.81 \times \sin 20 = \mu \frac{du}{dy} . 0.2$$

$\frac{du}{dy}$ را چون لایه روغن به دیواره نزدیک است برابر

فرض می‌کنیم.

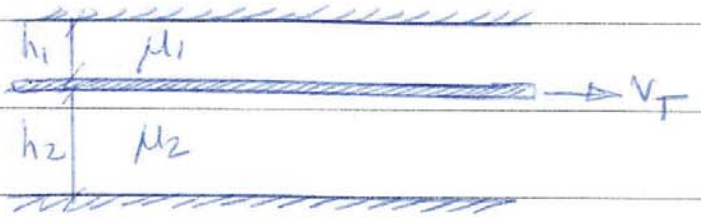
$$\frac{du}{dy} = \frac{V_T - 0}{0.002}$$

$$\rightarrow 8 \times 9.81 \times \sin 20 = 4.4 \times 10^{-1} \times 0.2 \times \frac{V_T}{0.002} \rightarrow V_T = 0.61 \frac{m}{s}$$

کتاب Streeter مضمون از این است سوال دارد حرصل بت کنوریز

حمید کاظم

مثال:

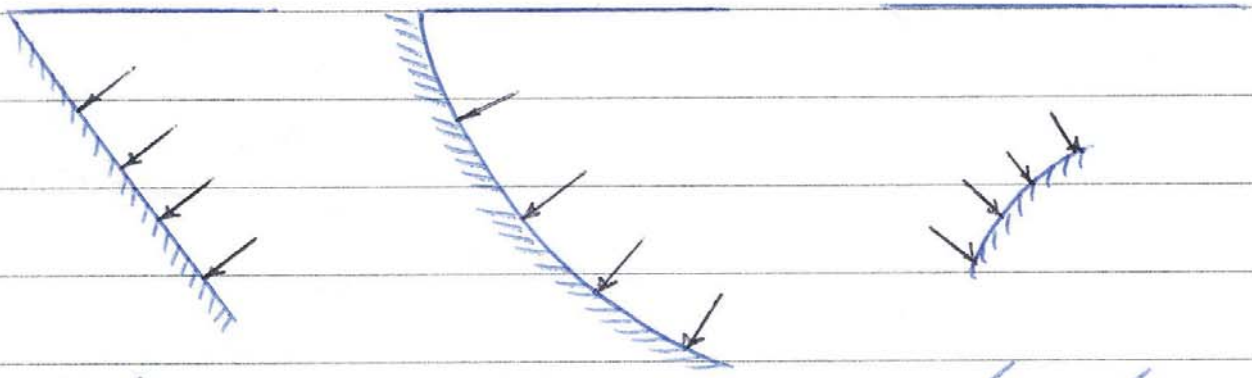


نکته (ریاضی 2): فرض کنید $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک تابع n متغیره باشد

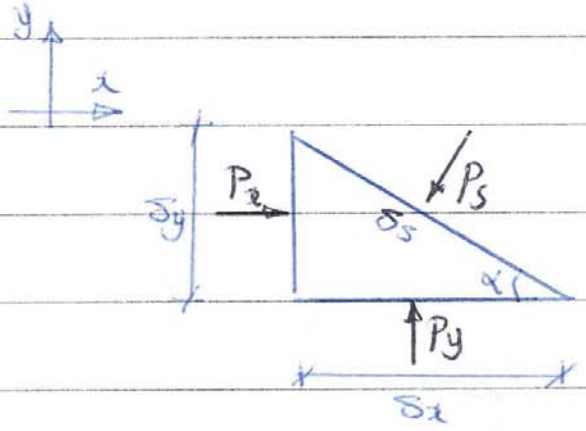
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

حمید کاظم

توزیع فشار در سیال در حال سکون (pressure & head)



چون سیال حرکت نمی کند پس برایش تنش برشی نداریم پس فشار عمود بر سطح جداره ها می باشد و فرض صفحه داخل نمودن تنش برشی را نقض می کند.



نیروهای وارده بر سطوح سیال در حال سکون:

الف) نیروی سیال

$$P = F/A = \sigma$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_x \cdot \delta_y - P_s \delta_y = 0 \Rightarrow P_x = P_s$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_y \delta_x - P_s \delta_x - \tfrac{1}{2} \delta_y \delta_x \rho g = 0$$

$$\Rightarrow P_y = P_s$$

$$\Rightarrow P_x = P_y = P_s$$

حمید کاظمی

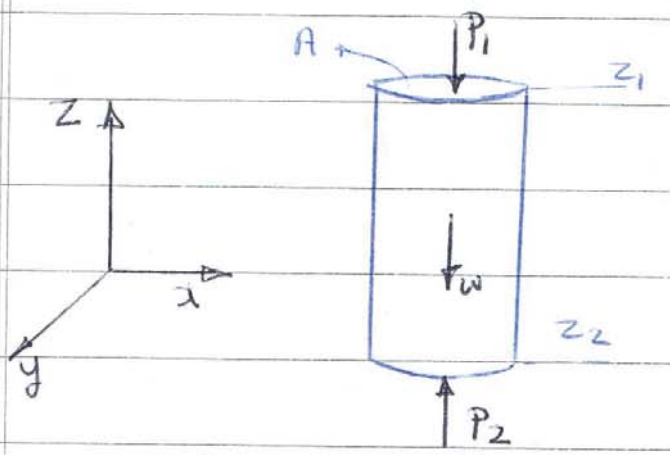
درک فیزیکی: در یک نقطه سیال فشار در تمام جهات یکسان است. (قانون پاسکال)
(ایزوتروپیک)

* اگر سیال در حال حرکت باشد هنوز تنش برشی وارد نشده و فشار در جهات مختلف یکسان است.

فشار هیدرواستاتیک:

سؤال: فشار در داخل سیال چقدر است؟

المانی را در داخل جسم سیال در نظر می‌گیریم.



۱) المان ثابت:

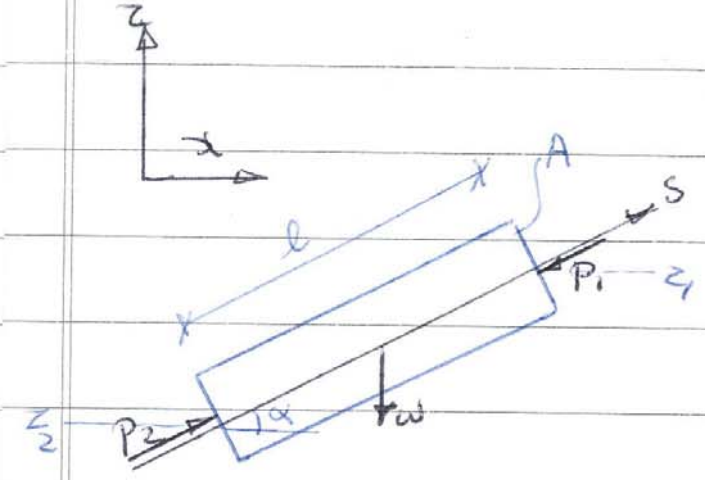
$$\Sigma F_z = 0 \rightarrow P_2 A - P_1 A - \rho g A(z_1 - z_2) = 0$$

$$\rightarrow P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

اگر ارتفاع المان را کوچک کنیم:

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

قانون توزیع فشار هیدرواستاتیک



۲) المان مایل:

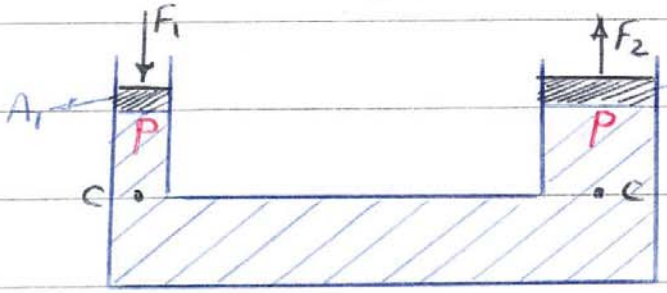
$$\Sigma F_s = 0$$

$$P_2 A - P_1 A - \rho g A \times \frac{z_1 - z_2}{l} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

حمید کاظم

اگر در سیال حرکت نکنیم و ارتفاع هم تغییری نکند فشار تغییری نکند

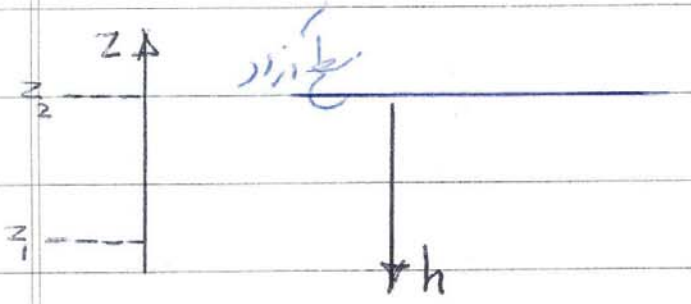


دو نقطه C هم جنس و در ارتفاع یکسان هم فشار هستند

مکانیکی سیال روی سیستم شکل فشار ایجاد می‌کند. حال فشار P در دو طرف با هم برابر شده پس $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1}$$

ما عرفانی که معمولاً فاصله از سطح آزاد اندازه می‌گیریم.



$$|z_2 - z_1 = -h|$$

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \rho g$$

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \rho g \longrightarrow P = \rho g h + \text{Const.} \longrightarrow P = \rho g h + P_{atm}$$

$(h = 0 \rightarrow P_{atm} = \text{Const})$

فشار اتمسفر معمولا در سازه‌ها را می‌توان نادیده گرفت.

فشار سنجی $P_g = \rho g h$ $\qquad P_{abs} = P_g + P_{atm}$

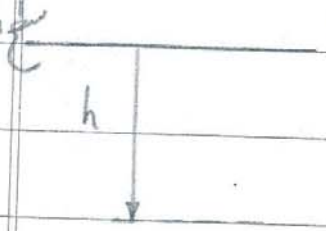
h ← head فشار بالای ارتفاع آب (فشار head)

g ← gage سنجی

مثال: فشارسنج (gage) در نقطه‌ای از سیال 350 kN/m^2 اندازه‌گیری شده است. این فشار را برحسب ستون آب (head) و ستون جیوه حساب کنید.

ρ_{gage} (جیوه) $= 13.6 \times 10^3 \ kg/m^3$

اگر فشار اتمسفر 101.3 kN/m^2 باشد، فشار مطلق این نقطه چیست؟



$P_g = 350 \ kN/m^2$

$P_g = \rho g h$ جیوه $\Rightarrow 350 \times 10^3 \ (N/m^2) = 13.6 \times 10^3 \ (kg/m^3) \times 9.81 \ (m/s^2) \times h \ (m)$

$\Rightarrow h = 2.62 \ m$

$P_g = \rho g h$ آب $\Rightarrow 350 \times 10^3 \ (N/m^2) = 1 \times 10^3 \ (kg/m^3) \times 9.81 \ (m/s^2) \times h \ (m)$

$\Rightarrow h = 35.68 \ m$ ستون آب

$P_{atm} = \rho g h \Rightarrow 101.3 \times 10^3 = 9810 \, h \Rightarrow h = 10.3$ ستون آب

$P_{abs} = P_g + P_{atm} = 350 + 101.3 = 451.3 \ kN/m^2$

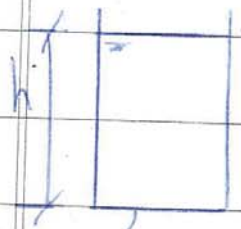
$P_{abs} = 10.3 + 35.68 = 46.01 \ m$ فشار ستون آب

$P_2 - P_1 = -\int \rho g \, dz$ اگر ρ ثابت باشد

یا از دوکس حالا هرچه

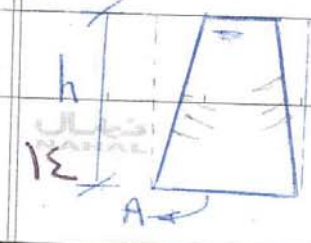
می‌خواهیم فرمول $P = \rho g h$ را به صورت خیلی حس کنیم

می‌خواهیم نیرو که توسط مقدار را فشار حساب کنیم که نیرو وارد کند به سطح



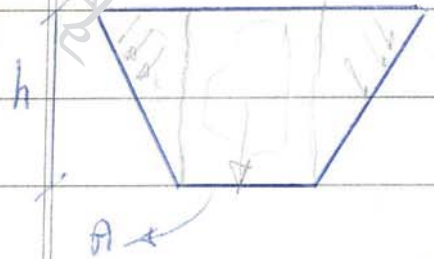
$P = \rho g h \Rightarrow F = \rho g h A$

حال فرض کنید جسم شکل دیگری را داشته باشد

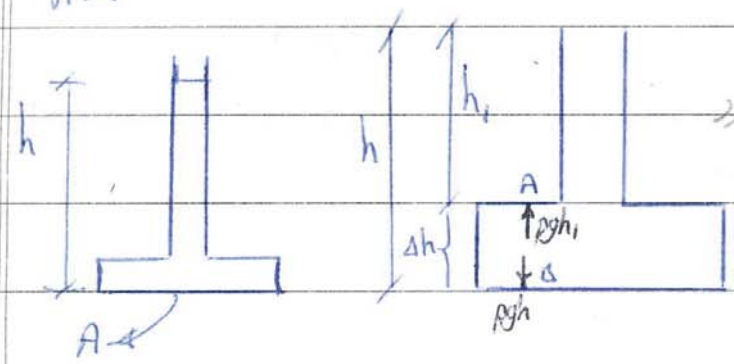


$P = \rho g h \Rightarrow F = \rho g h A$

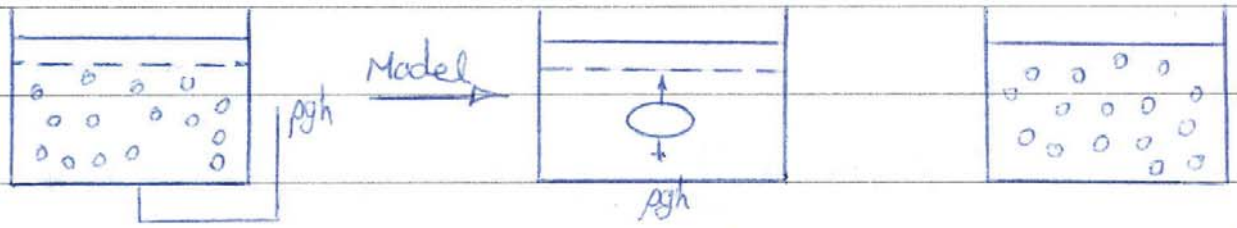
حمید کاظم



لعاده این ظرف قطعاً نیروی وزنش کم تر است
در اینجا باید قانون فشار هیدرواستاتیک را بررسی کنیم که
آیا قانون فشار هیدرواستاتیک درست است یا نادرست
را نیز اعمال کنیم؟



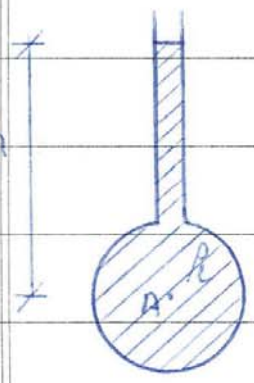
در A آب می خواهد ρgh_1 فشار وارد کند به دیواره وارد
کند به صورت دیواره هم این فشار را به آب
وارد می کند. بنابراین فشار A عبارت است از فشار A,
به اضافه فشار Δh سر آب.



اگر g را ثابت فرض کنیم و در نظر بگیریم مقدارش کمتر از 1000 می شود یعنی فشاری کمتر از فشار آب
مطلق نشان می دهد. اما اگر با فشار سنج اندازه گیری کنیم فشار بیشتر را نشان می دهد (فشار پارگوس)

اندازه گیری فشار

بوسیله قانون هیدرواستاتیک می توانیم فشارها را بنام مانومتر
نام ببریم. چیزی داریم که به وسیله ای وارد ولوله ای به آن وصل
می کنیم. وصل کنیم حتماً باید



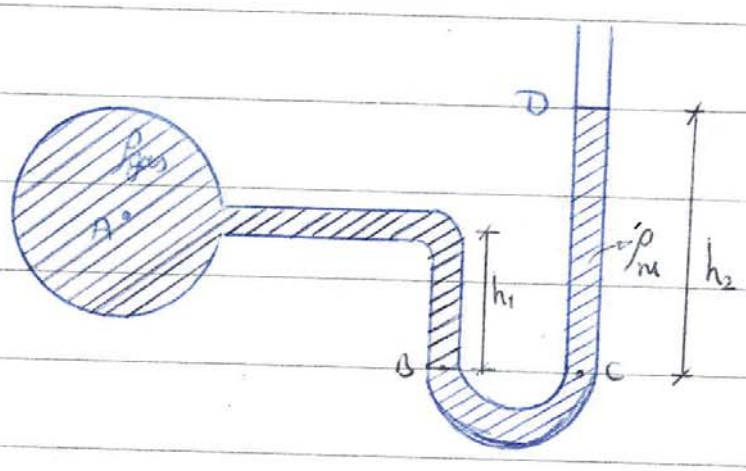
$$P_A = \rho_L g h$$

$$P_g = 1000 \times 9.81 \times 2 = 19.62 \times 10^3 \ N/m^2$$

از لوله ای به ارتفاع 2m باشد

نهال NAHAL

می توانیم برای محاسبه فشار نقطه (استفاده از مانومتر) از مانومتر استفاده کنیم



$P_{IS} = P_C$

$P_{IS} = P_A + \rho_{gas} g h_1$

$P_C = \rho_m \cdot g \cdot h_2$

$P_A = \rho_m g h_2 - \rho_{gas} g h_1$ ← $P_A + \rho_{gas} g h_1 - \rho_m g h_2 = 0$

P_A فشار نسبی (gage) است.

مثال: جیوه $\rho_M = 13.6 \times 10^3 \ kg/m^3$ ، $\rho_g = 800 \ kg/m^3$

الف) اگر $h_1 = 0.5m$ ، $h_2 = 0.9m$ باشد P_A را محاسبه کنید

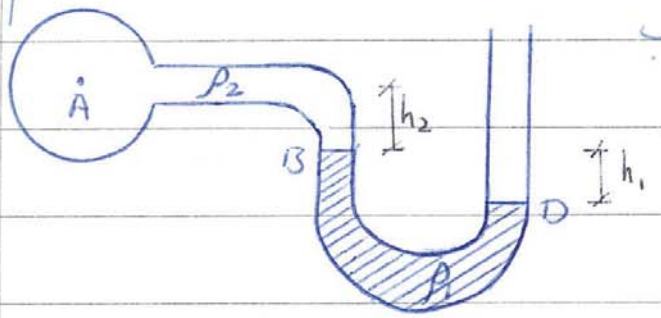
ب) اگر $h_1 = 0.1m$ ، $h_2 = 0.2m$ باشد P_A را محاسبه کنید

الف) $P_A = 13.6 \times 10^3 \times 9.81 \times 0.9 - 800 \times 9.81 \times 0.5 = 116.15 \times 10^3 \ N/m^2$

ب) $P_A = -13.6 \times 10^3 \times 9.81 \times 0.2 - 800 \times 9.81 \times 0.1 = -27.468 \times 10^3 \ N/m^2$

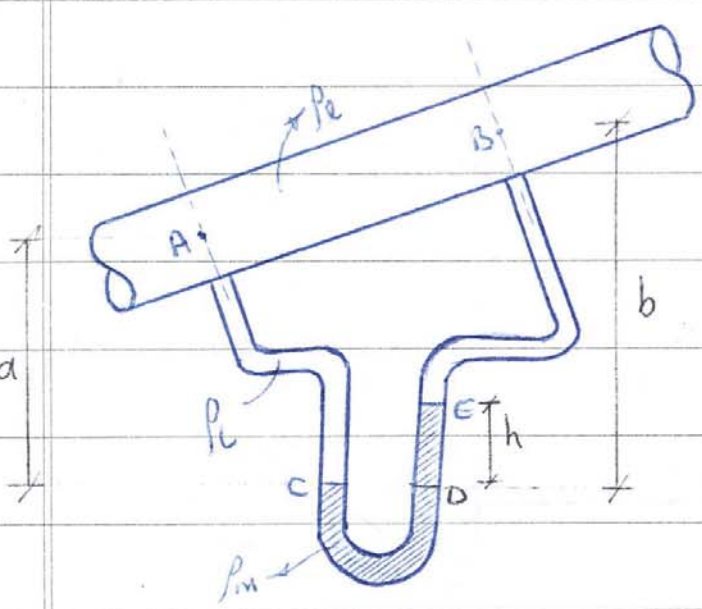
به حالت شکل زیر حالت فشار منفی گویند. اگر محتوی داخل لوله از سوراخ شود نه تنها مایع بیرون نمی‌ریزد بلکه حباب‌هایی مکد. فشار منفی ایراد ندارد ولی اگر زیاد شود باعث می‌شود که آب تبخیر گردد اگر $P_A = -101.3$ گردد تمام آب تبخیر می‌شود. این پدیده را اصطلاحاً زالی (Cavitation) نامند.

اگر فشار منفی نگوییم باشد که تمام آب تبخیر نشود یعنی خلوط آب و بخار داشته باشیم. با کم کردن فشار منفی آب کاربرده به آب مایع بازمی‌گردد.



$$P_A + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 = 0$$

همچنین مانومتر فقط برای گاز نیست بلکه مانومتر معمولی برای اختلاف سطح مایع است.



$$\left.\begin{aligned} P_C &= P_A + \rho_L g a \\ P_D &= P_B + \rho_L g (b-h) + \rho_m g h \end{aligned}\right\}$$

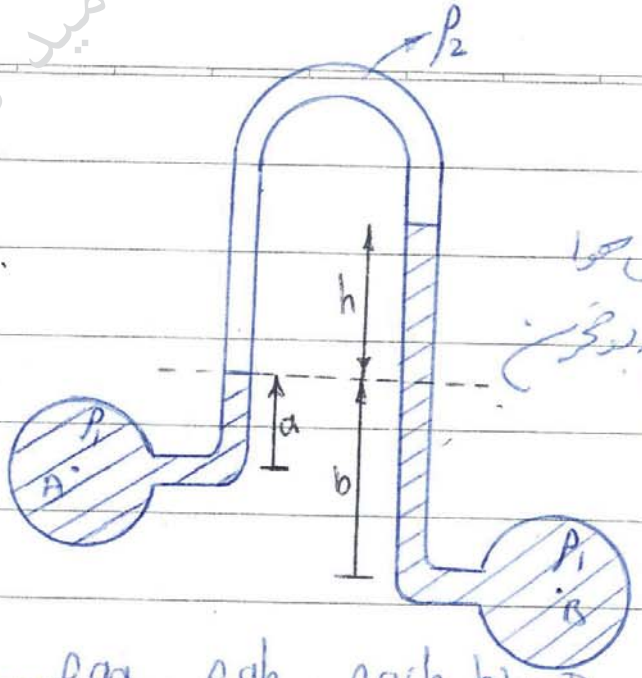
$$P_A - P_B = \rho_L g (b-a) - (\rho_m - \rho_L) h g$$

و رابطه $P_A + \rho_L g a - \rho_m g h - \rho_L g (b-h) = P_B$ به‌دست می‌آید.

از A به C که می‌رویم فشار زیاد می‌شود ($\rho_L g a$). از C به D فرقی نمی‌کند. از D به E فشار کم می‌شود ($-\rho_m g h$). از E به B فشار کم می‌شود ($-\rho_L g (b-h)$).

حمید کاظم

مانومتر U شکل وارونه



اصل این مانومتر آن است که P_2 برای هوا است. به همین دلیل می‌توانیم به راحتی از وزن هوا صرف‌نظر کنیم و یک مانومتر ساده‌تر بدست آوریم.

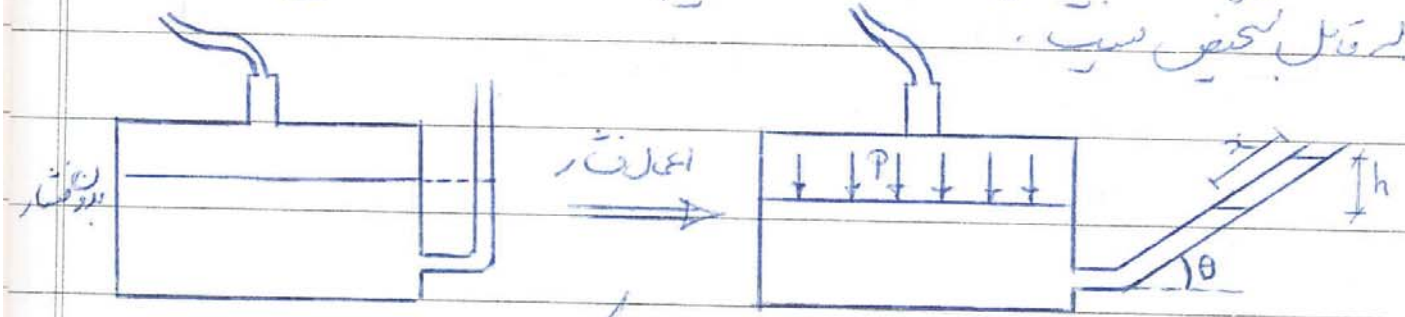
$$P_A - \rho_1 g a - \rho_2 g h + \rho_1 g(h+b) = P_B \longrightarrow P_A - P_B = \rho_1 g(a-b) + (\rho_2 - \rho_1) g h$$

اگر P_2 برای هوا و P_1 برای آب باشد می‌توان از P_2 صرف‌نظر کرد و داریم:

$$P_A - P_B = -\rho g h$$

اندازه‌گیری فشارهای بسیار کم «میکرومانومتر کِمِل»

اندازه‌گیری فشارهای بسیار کم با مانومترهای U شکل بسیار سخت و مشکل است. این نوع فشارها در حدود 0.5mm ستون آب را تشکیل می‌دهند. بنابراین تغییرات ناچیز در لوله قابل تشخیص نیست.



با کج کردن شاخه مانومتر دقت بالاتری پیدا می‌کند. مثلاً اگر با کوچکترین مایع 1mm بالا برود اگر شاخه را کج کنیم که $\sin\theta = 1/3$ شده باشد با همان 1mm بالا رفتن 3mm جابجا می‌شود.

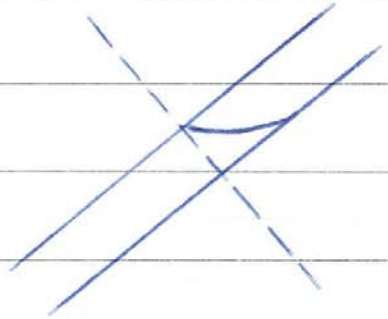
$$P = g\rho h$$

$$\Rightarrow P = \rho g \times \sin\theta$$

NAMAL

حمید کاظم

ادامه مشکل فاصله حوضچه موجود است و دقت خواندن را پایین می‌آورد.



اما این مانومتر از آن جهت، در دسته بین وسایل
می‌باشد برای بالابردن دقت کار از آن کمتر در
این مانومتر استفاده می‌شود.

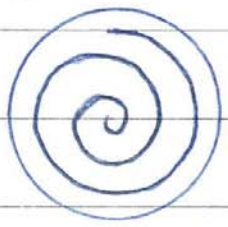
مانومتر (BETZ)

در این مانومتر روی لوله‌اش یا قوه دوبرابر شده ولی دیگر درجه‌بندی شده ولی دیگر درجه‌بندی
دوبرابر قرار داده شده که براحتی خوانده می‌شود.

* برای فشارهای کم دهم mm ستون آب را نشان دیگری می‌دهد.

امتیاز مانومتر یکی از ارزان و سادگی شان است. هرجا می‌توانیم با آن کار کنیم کالیبراسیون
می‌خواهد (احتیاج به بررسی فشارسنج)

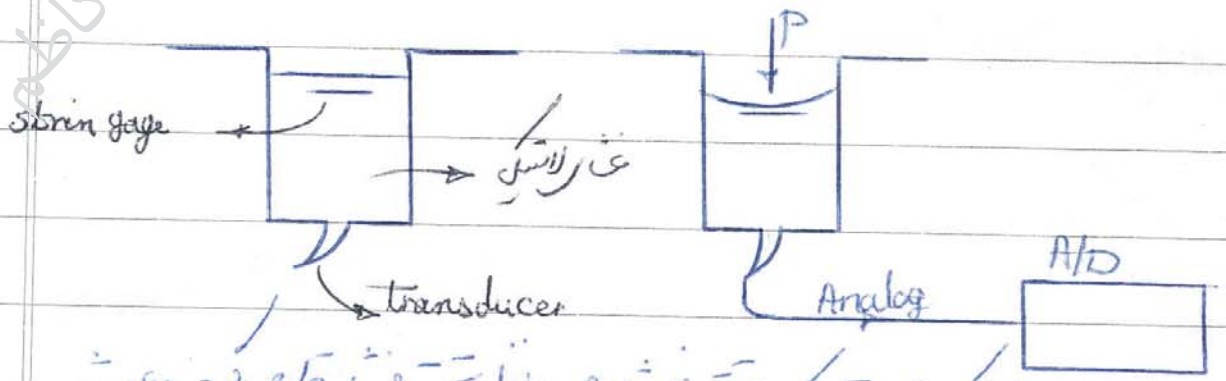
مشکلات آن این است که برای فشارهای محدودی می‌باشد همچنین مانومتر محدودی
(gages) دارد. در فشارهای زیاد و فشارهای کم مشکل دارد. البته برای فشارهای زیادی می‌توان از گیج‌های
مخروطی استفاده کرد. گیج‌های مخروطی کالیبراسیون نیست. چون
برای آن تعریف می‌کنند. برای فشارهای کم حجم باید از مانومتر گیج
استفاده کنیم.



مشکل دیگر نوسان فشار است که ایجاد می‌کند. مثلاً می‌خواهی 5 بار فشار را در 15 ثانیه
بگیری.

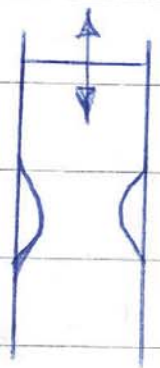
روش برای گرفتن نوسان‌های فشار استفاده از Transducer (مبدل) است.

حمید کاظمی



Stringage یک سیم پیچ بسیار نازک است که وقتی غشا تحت فشار قرار می‌گیرد دچار deformation و سیم پیچ می‌شود و سیم بلندتر می‌شود و این سبب تغییر ولتاژ می‌شود. این تغییر ولتاژ بصورت Analog است که بصورت Digital تغییر می‌کند.

این دستگاه برای توسعه‌ای فشاری بخوبی عمل می‌کند. البته کالیبره بودنش معلوم است و ممکن است بیراسته شود.



در مانومتر که نوسانات را بصورت نوری نشان می‌دهد. توسعه گره‌ای لوله را می‌بندیم و گره را سفت پیچ می‌کنیم. تا لوله deforme شود. این کار باعث می‌شود تا سرعت نوسانات کم شود. از متاعر راک در این حالت می‌خوانیم که average می‌باشد.

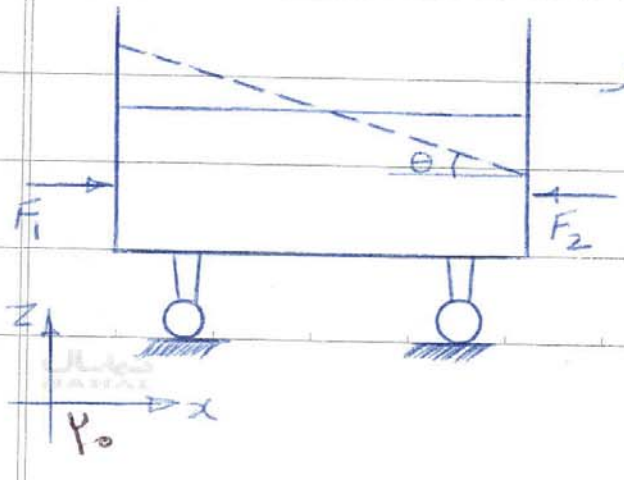
تعادل نسبی

در حالتی که آب در حرکت صلب باشد فشار همیشه از استاتیک $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$ می‌باشد.

اما اگر ظرف هم خودش حرکت کند:

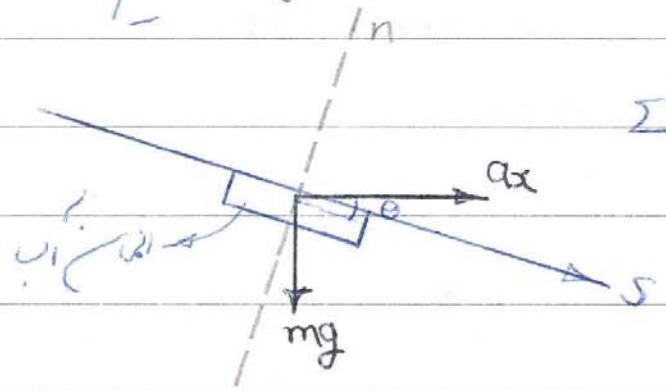
اگر با سرعت ثابت حرکت کند باز هم فرقی ندارد.

اما اگر با شتاب ثابت باشد:



$\Sigma F_x = ma_x$ $\quad \Sigma F_z = 0$ (1)

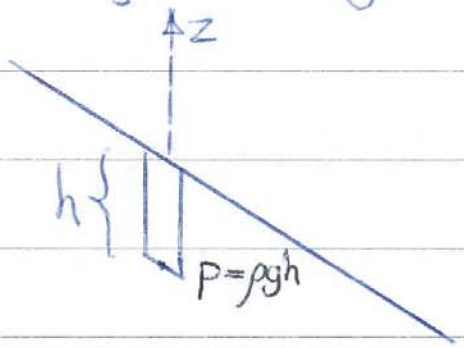
توزیع فشار در عمق جسم شناور مساوی وزن جسم جابجا شده است (2)



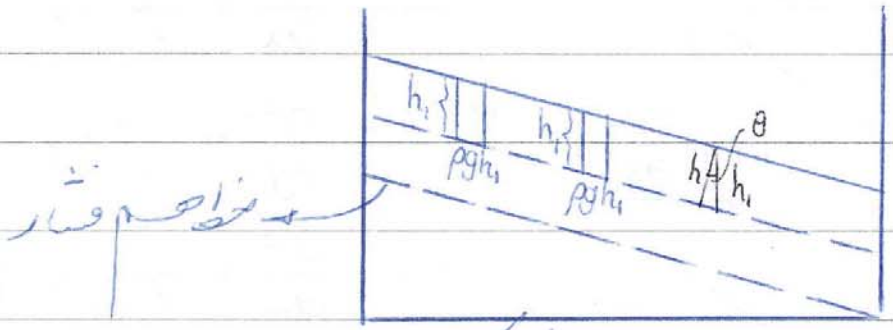
$\Sigma F = F_1 - F_2 > 0 \rightarrow F_1 > F_2$

این از آنجا که θ همیشه تغییر می‌کند

$\Sigma F_S = ma_S \rightarrow mg\sin\theta = ma_x \cos\theta \rightarrow \tan\theta = \frac{a_x}{g}$

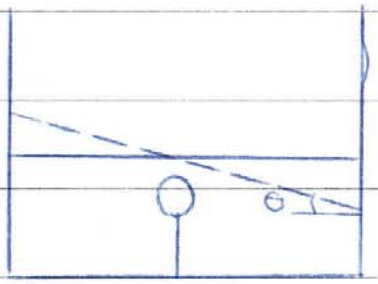


خطوط هم فشار سطوحی هستند موازی سطح آزاد آن



$h_1 = \frac{h}{\cos\theta}$

مثال: ظرف باز مکعبی پر از مایع می‌باشد با دیواره‌های بسیار نازک که تا نیمه پر شده است. ظرف با شتاب ثابت a_x در جهت راست حرکت می‌کند.



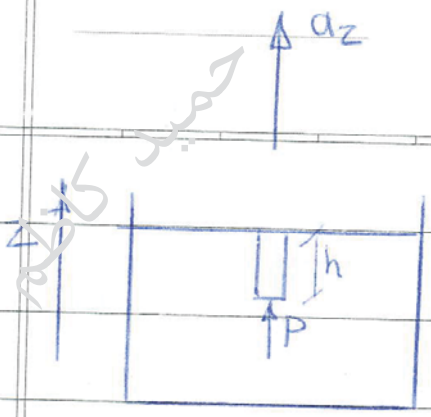
الف) کشش سطح آزاد مایع و بادکنک در جهت راست

ب) کشش سطح آزاد مایع و بادکنک در جهت چپ

ج) کشش سطح کاهش و بادکنک در جهت راست

د) کشش سطح کاهش و بادکنک در جهت چپ

حمید کاظم



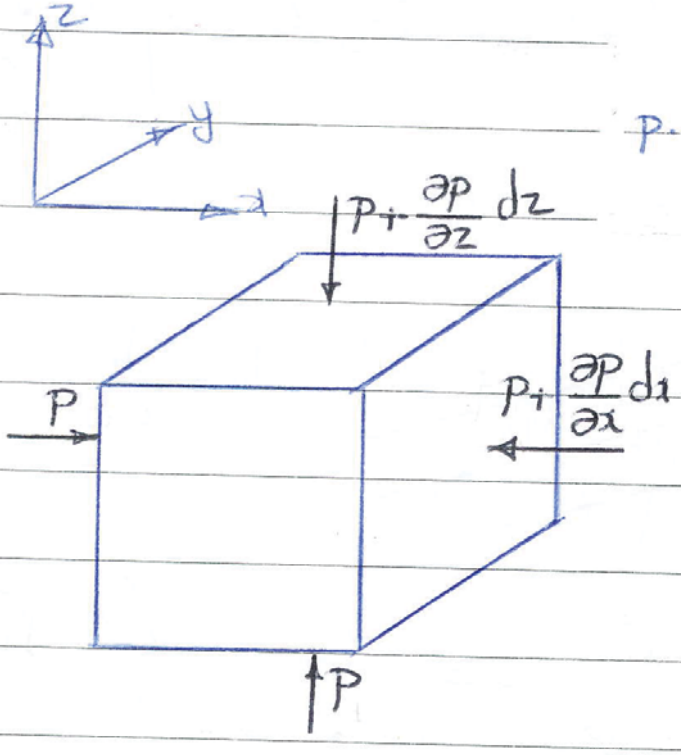
ظرف را با شتاب ثابت a_z حرکت می‌دهیم.

$$\Sigma F_z = ma_z \rightarrow PA - \rho g A h = \rho A h a_z$$

$$\rightarrow P = \rho g h + \rho h a_z \rightarrow \boxed{P = \rho h (g + a_z)}$$

* یعنی اگر ظرف آب را با شتاب $a_z = g$ حرکت دهیم، فشار داخل آن صفر می‌شود.

حال ظرف را با شتاب‌های ثابت در راستای محورهای x و y و z حرکت می‌دهیم.



$$\Sigma F_x = m \cdot a_x$$

$$P \cdot \delta y \cdot \delta z - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\delta x\right)\delta y \delta z = \rho \delta x \delta y \delta z a_x$$

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \cdot a_x$$

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \cdot a_y$$

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho (a_z + g)$$

$$dp = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

تمرین

$$\rightarrow dp = -\rho a_x \, dx - \rho a_y \, dy - \rho (a_z + g) \, dz$$

$a_y = 0$ فرض می‌کنیم، انتگرال بگیرید.

$$\rightarrow P = -\rho a_x \cdot x - \rho (a_z + g) \cdot z + C$$

$$p = -\rho a_x \cdot x - \rho(a_z + g)z + p_0$$

حمید کاظمی

مقدار فشار روی سطح آزاد ← $x=0, z=0 \Rightarrow p=p_0$

** (p_0 مطلق فشار جو است که در مبدأ مختصات یعنی $x=0, z=0$ می‌باشد) **

$$\Rightarrow p = p_0 - \rho a_x \cdot x - \rho(a_z+g)\cdot z$$

$$z = \frac{-a_x}{g+a_z}x - \frac{p-p_0}{\rho(g+a_z)}$$ معادله خطوط هم فشار ($z=mx+c$)

از این فرمول برای محاسبه کردن سطح آزاد استفاده می‌کنیم

اگر سطح آزاد را در $x=0, z=0$ قرار دهیم آنگاه دیگر فرمول دارم.

شیب سطح با افق ثابت است.

$$z = \frac{-a_x}{g+a_z}x \quad (\text{معادله سطح آزاد}) \qquad tg\theta = \frac{-a_x}{g+a_z}$$

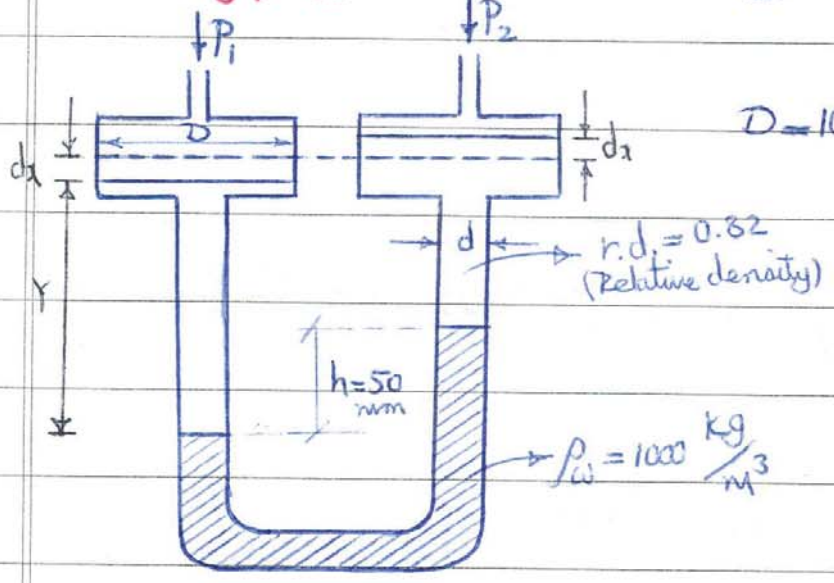
مثال: برای شکل

$P_1 - P_2$ را بدست آورید

از مایع مانومتر روغنی است

از مایعی با $r.d.=1.62$ استفاده می‌شد h چقدر بود

(نام این مانومتر والی است)



$D = 10d$

* با نقطه گذاری روی مایع داخل مانومتر مساوی دست‌های بین

$$P_1 + 0.82\rho_\omega g Y - \rho_\omega g h - 0.82\rho_\omega g(Y - h + 2d_1) = P_2$$

$$\Rightarrow P_1 + \rho_\omega g(\cancel{0.82Y} - h - \cancel{0.82Y} + 0.82h - 1.64d_1) = P_2$$

$$h\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = 2d_1\frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow d_1 = \frac{1}{4}mm \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho_\omega g(9.41\times10^{-3})$$

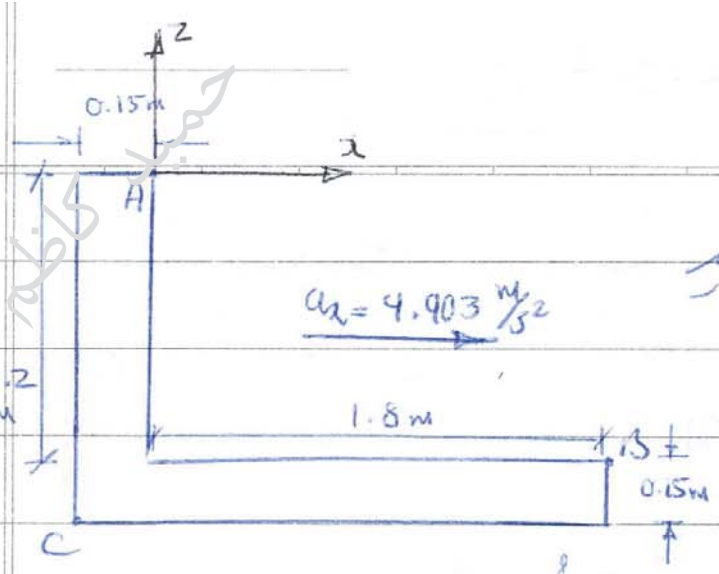
می‌بینید فقط با حجم $11mm$ و $9mm$ تا می‌رود

$$\Rightarrow \frac{P_1-P_2}{\rho_\omega g} = 9.41mm$$ ستون آب

قسمت دوم مسئله

$$P_1 + 0.82\rho_\omega g Y - 1.62\rho_\omega g h - 0.82\rho_\omega g(Y - h + 2d_1) = P_2$$

$$h\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = 2d_1\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \Rightarrow d_1 = \frac{1}{200}h \Rightarrow h = 11.69\ mm$$



مثال: ظرف زیر با سیال جدایی دارم. فرض کنید $a_x = 4.903\ m/s^2$ اگر $r.d. = 0.8$

الف) اگر در A فشار برابر با اتمسفر باشد، فشار در گوشه C چقدر است؟

ب) شتاب را چقدر کنیم تا $P_B = 0$ شود؟

$$P = -\rho a_x \cdot x - \rho(g + a_z)z + P_0$$

P_0 فشار در $x=0, z=0$ است.

$$P_B = -0.8\rho_w (4.903)(1.8) - 0.8\rho_w (g+0)(-1.2)$$

$$\Rightarrow P_B = 2.35\ kpa$$

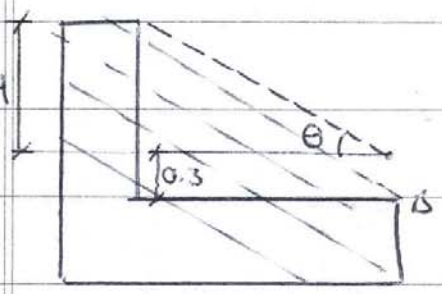
$$P_C = -0.8\rho_w (4.903)(-0.15) - 0.8\rho_w (g+0)(-1.35) = 11.18\ kpa$$

ب)

$$P_B = 0 \Rightarrow 0 = -0.8\rho_w (a_x)(1.8) - 0.8\rho_w (g+0)(-1.2)$$

$$\Rightarrow a_x = 6.5\ m/s^2$$

راه دوم: اگر نقطه A فشار صفر است، خطوط هم فشار روی سطح آب هستند. شیب $\tan\theta = a_x/g$



$$\tan\theta = \frac{a_x}{g} = \frac{4.903}{9.81} = 1/2$$

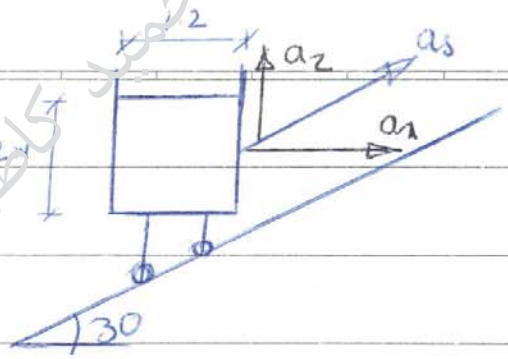
$$P_B = 0.8\rho_w g x (0.3) = 2.35\ kpa$$

ب) برای خواهیم خطوط هم فشار از کف عبور کند یعنی

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{1.2}{1.8} = \frac{a_x}{9.81} \Rightarrow a_x = 6.54$$

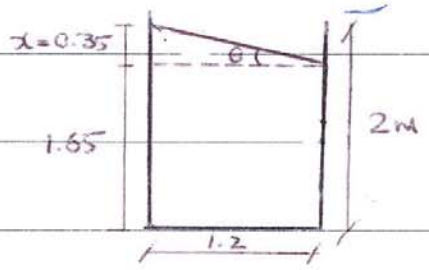
حمید کاظمی



مثال: با توجه به اعداد داده شده برای شتاب $4\ m/s^2$ ابتدای میز دارای شتاب $1.2m \times 2m$ و در انتهای آن دارای شتاب $-4.5\ m/s^2$ است تراز سطح آب را به گونه‌ای بدست آورید که سرریز نکند.

$$\text{جواب: } tg\theta = \frac{-a_1}{a_2+g} = \frac{-4\cos 30}{4\sin 30 + 9.81} \rightarrow \theta = 16.353^\circ$$

$$tg\,16.353 = \frac{x}{1.2} \rightarrow x = 0.35$$

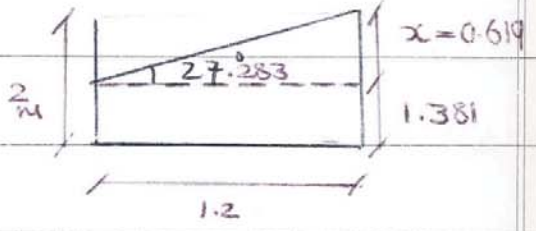


$$1.2 \times 1 \times h = \frac{1}{2} \times 1.2 \times 0.35 + 1.65 \times 1.2$$

$$\rightarrow h = 1.825$$

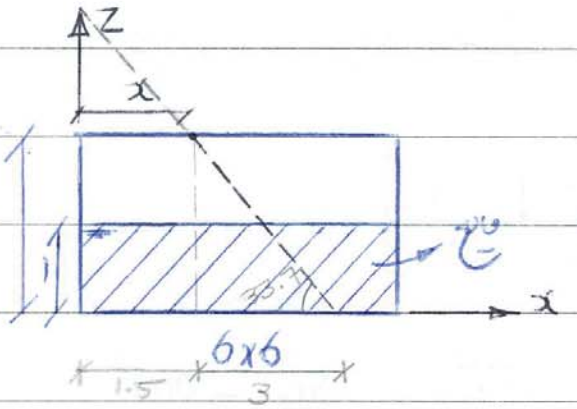
$$\text{نیز: } tg\theta = \frac{-(-4.5\cos 30)}{-4.5\sin 30 + 9.81} \rightarrow \theta = 27.283^\circ$$

$$tg\,27.283 = \frac{x}{1.2} \rightarrow x = 0.619$$



$$1.2 \times 1 \times h = \frac{1}{2} \times 1.2 \times 0.619 \times 1 + 1.381 \times 1.2 \times 1$$

$$\rightarrow h = 1.691$$



مثال: مقدار توزیع فشار در دو طرف دریچه کروی $a_1 = g/2 \quad a_2 = -g/4$

$$6 \times 1 = \frac{1}{2}(3 \times 2) + 2x \rightarrow x = 1.5$$

$$P = -\rho\frac{g}{2}x - \rho\left(\frac{3g}{4}\right)z + P_0 \quad (1)$$

$$tg\theta = \frac{-a_1}{a_2+g} = -\frac{2}{3}$$

حجم منشور حاصل از فشار را با حجم آب برای بدست آوردن x بدست آورید.

حمید کاظم

(1) $\Rightarrow p = -\frac{1}{2}\rho g x - \frac{3}{4}\rho g z + p_0$

$z=0 \rightarrow x=4.5 \Rightarrow p=0$

در $x=4.5$ ، $z=0$ ، $p=0$ می‌باشد (بالای سطح مایع خلأ می‌باشد) بنابراین:

$\rightarrow 0 = p_0 - 2.25\rho g \rightarrow p_0 = 2.25\rho g$

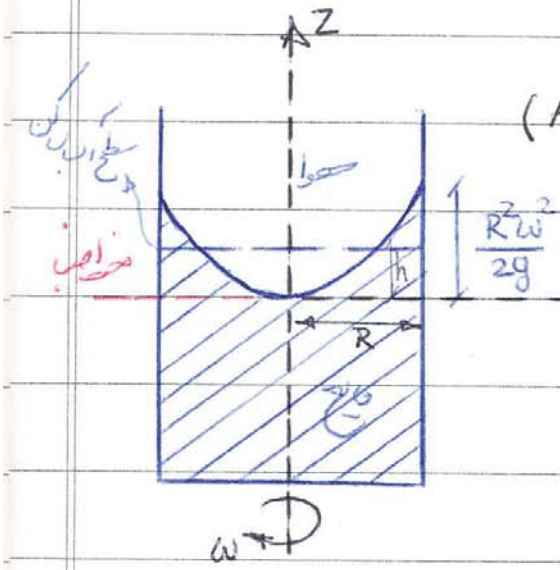
معادله کف ظرف ($z=0$):

$p = -0.5\rho g x + 2.25\rho g$

دوران یکنواخت حول محور قائم

* ظرف را حول محور می‌چرخانیم
* شتاب گرانش را نادیده می‌گیریم
* سرعت چرخش را ثابت فرض می‌کنیم

(گرداب اجباری / Forced Vortex)



$$dp = \frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{\partial p}{\partial r}dr$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho a_r = \rho r\omega^2$$

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -r\omega^2 \Rightarrow dp = -\rho g\,dz + \rho r\omega^2 dr$$

در جهت r چون r مثبت و فشار کم می‌شود

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2$$

حمید کاظم

$z=0 \;,\; r=0 \;,\; p=0 \Rightarrow c=0$

با انتگرال گیری

$$p = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} - \rho g z$$

۱) معادله p روی محور ($z=0$)

$$z=0 \rightarrow p = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2}$$

$$P_{Max} = \frac{\rho R^2 \omega^2}{2}$$

۲) تراز سطح آزاد از محور

$$p = \rho g h \Rightarrow h = \frac{p}{\rho g} \Rightarrow h = \frac{r^2 \omega^2}{2g}$$ (سهمی دوار)

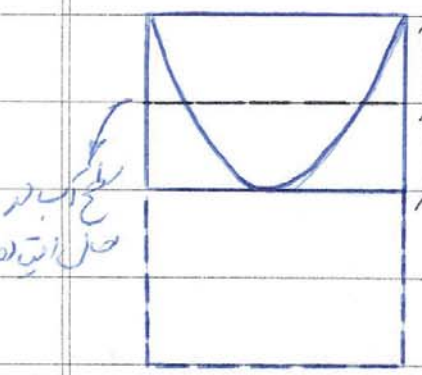
$$h_{Max} = \frac{R^2 \omega^2}{2g}$$

۳) برای بدست آوردن معادله سطح آزاد باید $p=0$ قرار دهیم

$$0 = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} - \rho g z$$

$$\Rightarrow z = \frac{r^2 \omega^2}{2g}$$ (معادله سطح آزاد)

۴) حجم آب جابجا شده بالای محور نصف استوانه‌ای است که حجم دوران جابجا شده حول آن از حرکت نیمی از آب نصف استوانه را برمی‌دارد.

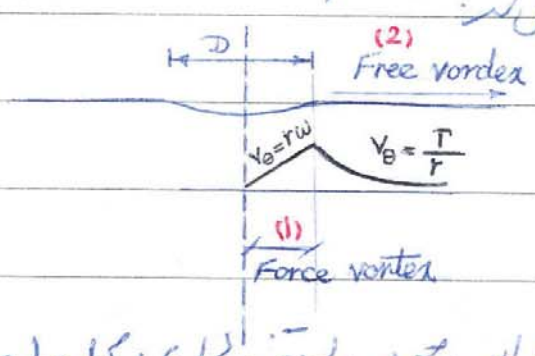


ارتفاع آب ایستاده $\frac{R^2 \omega^2}{4g}$

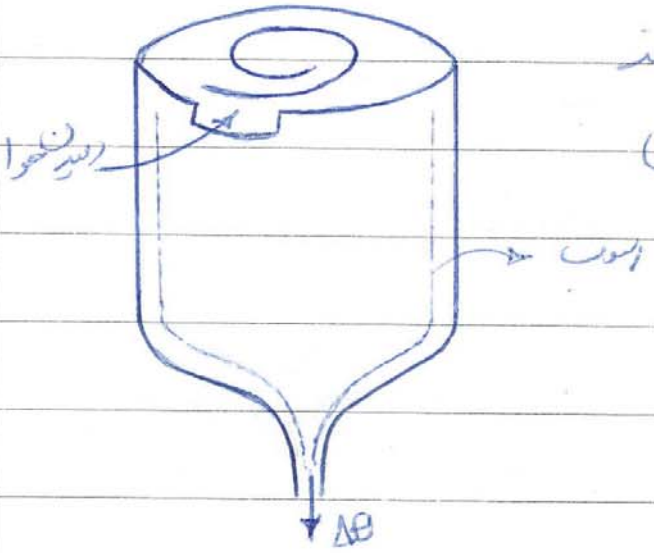
۵) انتگرال $z = \frac{r^2 \omega^2}{2g}$ حجم آب موجود در یکی را می‌دهد.

حمید کاظم

گردابی داریم که حرکت سیال بصورت تونل می باشد تا آب را به توربین ببرد. همزمان بعضی می کنند تا تونل همواره باز باقی بماند. اگر تونل خیلی بالا بیاید گردابه باعث گردباد می شود. این گرداب باعث ورود هوا به توربین می شود و توربین را خراب می کند.

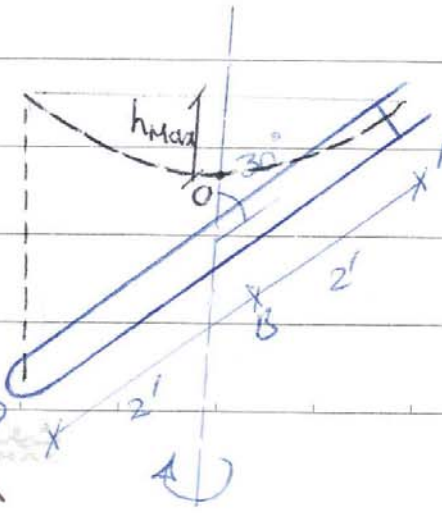


گرداب دو نوع دارد تقریب سرعت به صورت نمودار روبرو است. برروی این گرداب آزمایشی انجام می دهند در این شرح که دو عدد چوب پنبه را بصورت عمود در هم ($\perp$) به همدیگر می چسبانند. سپس در ابتدا این چوب پنبه ها روی محل (1) قرار می دهند. مشاهده می شود که در (1) چوب پنبه حول مرکز خود دوران می کند درحالیکه در (2) حول نقطه ای غیر از مرکز دوران می نماید.

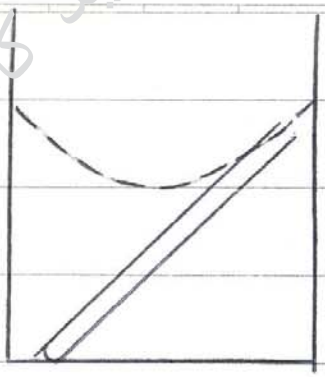


مثال: اگر $\omega = 8.02 \frac{rad}{s}$ باشد فشار در نقطه A چقدر است. $\rho_w = 1.94 \frac{slug}{ft^3}$ $g = 32.2 \frac{ft}{s^2}$. D و ... را محاسبه کنید.

فشار در نقطه A صفر است. سپس هم فشار A را بدست می آوریم. می توانیم به صورت شکل صفحه بعد حل کنیم.



حمید کاظم



$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \rho g z$$

$$p = 0 \rightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_{Max} = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{8.02^2 (2\sin 30)^2}{2 \times 32.2} = 1'$$

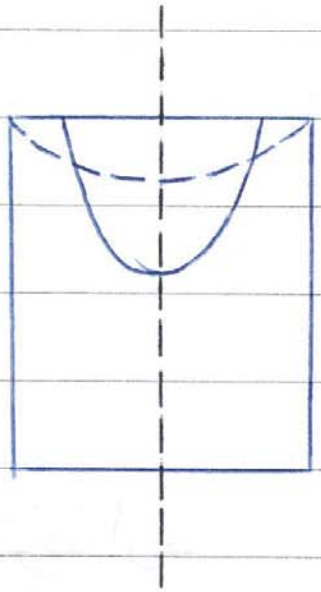
نقطه B به اندازه OB زیر خط (سطح) هم فشار صفر است، چون در راستای z فشار هیدرواستاتیک است، پس:

$$P_B = \rho g (OB)$$

$$P_B = 1.94 \times 32.2 \times (2\cos 30 - 1) = 45.73 \ lb/ft^2$$

$$P_D = \rho g (CD) = 1.94 \times 32.2 \times 4\cos 30 = 216.4 \ lb/ft^2$$

نکته: اگر خط هم فشار صفر به هر دلیلی (با دیواره) باعث بیرون زدگی آب از لوله می‌گردد. چون انسان موجود در لوله فشارش منفی می‌گردد و تمایل دارد از بیرون هوا را به داخل بکشد.

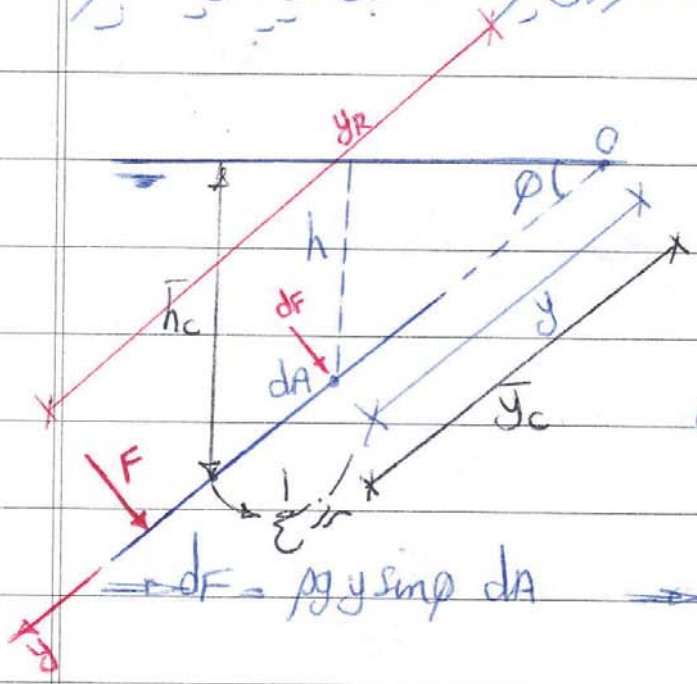


اگر لوله اصلی افزایش یابد باعث می‌شود فشار هم فشار صفر از حالت خط صاف به حالت بیضی تغییر پیدا کند.

حمید کاظم

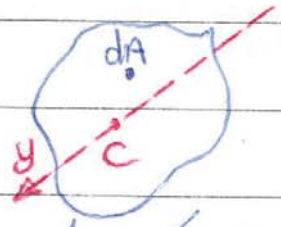
نیروی وارد بر سطوح مستوی مغروق

برای طراحی سازه‌ای هیدرولیکی نیاز است مقدار اثر نیروی وارد بر دیواره‌ای و محل اثر آن مشخص شود.



اگر نیروی وارد بر سطح dA در نظر گرفته شود نیروی وارد شده بر سطح عبارت است از:

$$dF = \rho g h (dA)$$



$$\Rightarrow dF = \rho g y \sin\phi \, dA \quad \Rightarrow F = \int_A \rho g y \sin\phi \, dA$$

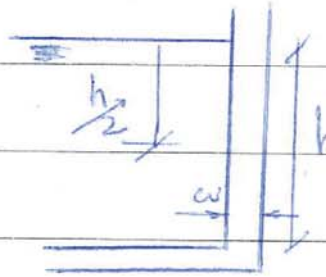
C نقطه مرکز سطح خواهد بود زیرا:

$$F = \rho g \sin\phi \int_A y \, dA = \rho g \sin\phi \, \bar{y}_c A$$

$$\Rightarrow F = \rho g \bar{h}_c A$$

بنابراین برای مرکز سطح داریم: فاصله مرکز سطح تا سطح آب از مرکز سطح شده (ثقل) برابر است با عمق.

کل نیروی وارده بر سطح ذوزنقه‌ای شکل برابر است با مساحت ذوزنقه‌ای شکل.



$$P = \rho g h/2$$

$$F = \rho g h/2 \, (w \times h)$$

مرکز فشار

نقطه اثر نیروی F را پیدا کنید.

$$dM = dF \cdot y$$

نقطه اثر نیروی F $\rightarrow (x_R, y_R)$

$$dM = \rho g y \sin\theta \, dA \cdot y \longrightarrow M = \rho g \sin\theta \int_A y^2 \, dA$$

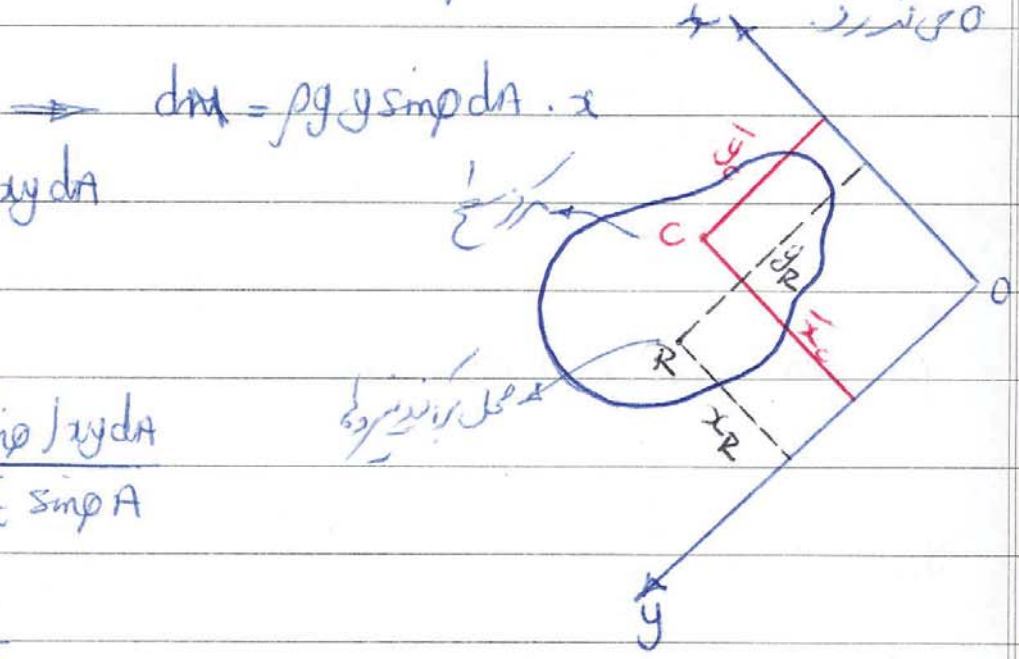
از طرفی $M = F \cdot y_R$

$$\longrightarrow y_R = \frac{\rho g \sin\theta \int y^2 dA}{\rho g \sin\theta \, \bar{y}_c \cdot A} \longrightarrow y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{\bar{y}_c \cdot A}$$

$$\longrightarrow y_R = \frac{\bar{I}_c + \bar{y}_c^2 A}{\bar{y}_c A} \qquad y_R = \bar{y}_c + \frac{(\bar{I}_c)_x}{\bar{y}_c A}$$

$y_{cp} = e \, y_R - \bar{y}_c \longrightarrow$ چون y_{cp} همیشه مثبت می‌شود

y فاصله اثر نیرو برایند تا محور x است. x را هم به همین شکل محور x عمود بر صفحه



$dM = dF \cdot x \longrightarrow dM = \rho g y \sin\theta \, dA \cdot x$

$\longrightarrow M = \rho g \sin\theta \int_A xy \, dA$

از طرفی $M = F_x \, x_R$

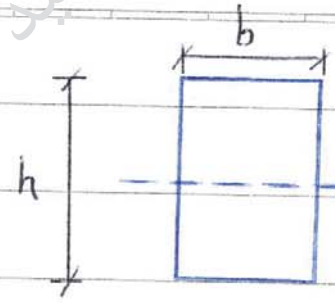
$$\longrightarrow x_R = \frac{\rho g \sin\theta \int xy \, dA}{\rho g \, \bar{y}_c \sin\theta A}$$

$$\longrightarrow x_R = \frac{\int xy \, dA}{\bar{y}_c \cdot A}$$

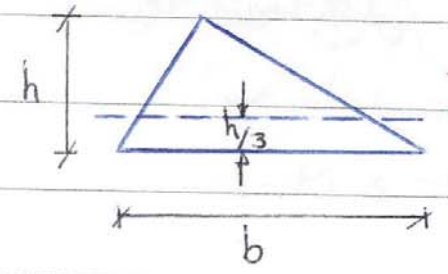
$$\longrightarrow x_R = \frac{I_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{X}\bar{Y}A}{\bar{y}_c A} \longrightarrow x_R = \bar{x}_c + \frac{\bar{I}_{\bar{x}\bar{y}}}{\bar{y}_c A}$$

$\bar{I}$: ممان حول محور مرکزی

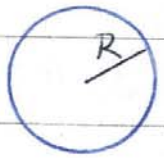
حمید کاظمی



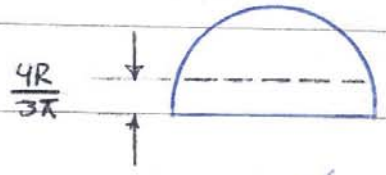
$$I = \frac{bh^3}{12}$$



$$I = \frac{bh^3}{36}$$

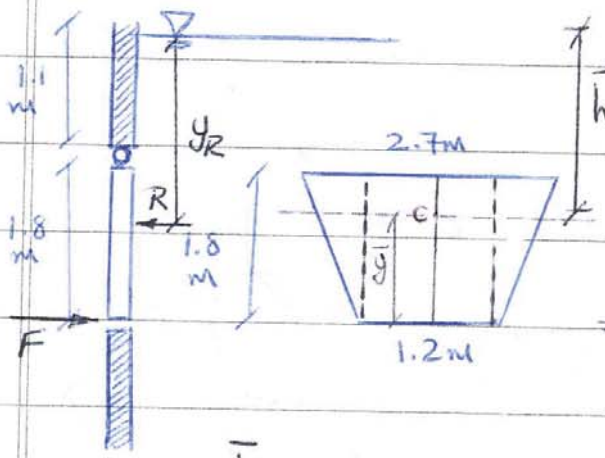


$$I = \frac{\pi R^4}{4}$$



$$I = 0.1102 R^4$$

مثال: نیروی لازم برای آنکه دریچه نشان داده شده باز نشود را بیابید.



ابتدا مرکز سطح دریچه را پیدا می‌کنیم.

$$A = 3.51 \ m^2 \qquad A\bar{y} = \sum A_i \bar{y}_i$$

$$\rightarrow A\bar{y} = (1.2 \times 1.8)\frac{1.8}{2} + 0.75 \times 1.8 \times 2 \times \frac{1}{3} \times 1.8$$

$$\rightarrow \bar{y} = 1.015 \ m$$

$$P = \rho g \bar{h} = 9810 \times (0.785 + 1.1) \rightarrow R = \bar{P}.A = 18.492 \times 3.51 = 64.906 \ kN$$

$$y_R = \bar{y}_c + \frac{I_c}{A\bar{y}_c}$$

I_c تمام شکل را باید حساب کنیم.

$$I_c = \frac{1.2 \times 1.8^3}{12} + 1.2 \times 1.8 \times 0.115^2 + 2\left[\frac{0.75 \times 1.8^3}{36} + \frac{1.8}{2} \times 0.75 \times (0.185)^2\right]$$

$$0.5832 + 0.028566 + 0.2892 = 0.901$$

$$\rightarrow I_c = 0.901 \ m^4$$

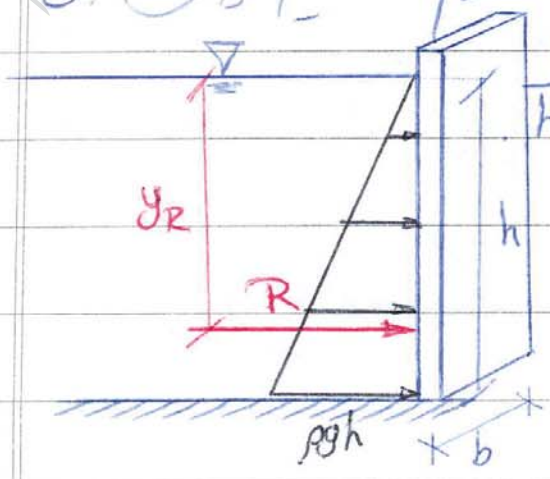
$$\rightarrow y_R = (1.1 + 0.785) + \frac{0.901}{3.51\,(1.1 + 0.785)} = 2.02$$

$$F \times (1.8) = (64.906)(2.02 - 1.1) \rightarrow F = 33.17 \ kN$$

حمید کاظم

دیاگرام فشار (منشور فشار):

در حالتی که عرض سطح آبگیر تغییر نکند به طوری که بتوان عمل کرد، می خواهیم نیروی وارد بر سطح دیواره مخزن را محاسبه کنیم. پهنای دیواره را b فرض می کنیم. همچنین دیواره متقارن است بنابراین $\bar{h} = h/2$



$$F = \rho g \bar{h} A = \rho g \tfrac{h}{2} \times h \times b = \tfrac{1}{2} \rho g b h^2$$

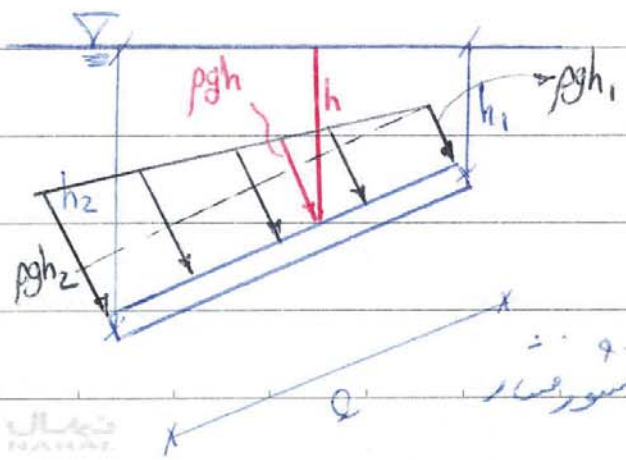
نتیجه: کل نیروی وارد بر سطح آبگیر برابر است با حجم منشور فشار وارد بر سطح.

$$y_R = \bar{y} + \frac{I_c}{A\bar{y}} = \tfrac{h}{2} + \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh \times \frac{h}{2}} = \tfrac{2}{3}h$$

* تمام این نتایج با فرض ثابت بودن پهنای دیواره بدست می آید.

نتیجه: بنابراین به طور کلی مرکز سطح منشور فشار بر مرکز ثقل است.

حال اگر دیواره مایل باشد و سطح آزاد آب هم نرسیده باشد. همچنین پهنای دیواره ثابت باشد.



$$F = \rho g h_1 \times \ell \times b + \tfrac{1}{2} \rho g (h_2 - h_1) \ell b$$
$$= \ell b \rho g (h_1) + \ell b \rho g (\tfrac{1}{2} h_2 - \tfrac{1}{2} h_1)$$
$$= \tfrac{1}{2} \ell b \rho g (h_1 + h_2)$$

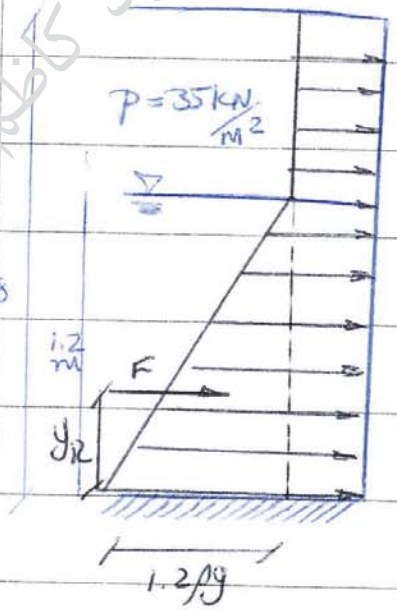
$$dF = \rho gh \, dA = dV \longrightarrow F = V$$

نتیجه: کل نیروی ترازیدال وارد بر سطح آبگیر برابر است با حجم منشور فشار وارد بر سطح.

حمید کاظم

مثال: عرض مخزن یک متر فرض، 3m می‌باشد.

کل مخزن یک متر فرض، $35\ \frac{kN}{m^2}$ می‌باشد



$$F = 35\times10^3\times1.8\times3 + \tfrac{1}{2}\rho g\times1.2^2\times3 = 189 + 21.19$$

$$= 210.19\,kN$$

نقطه اثر نیروی F نسبت به کف:

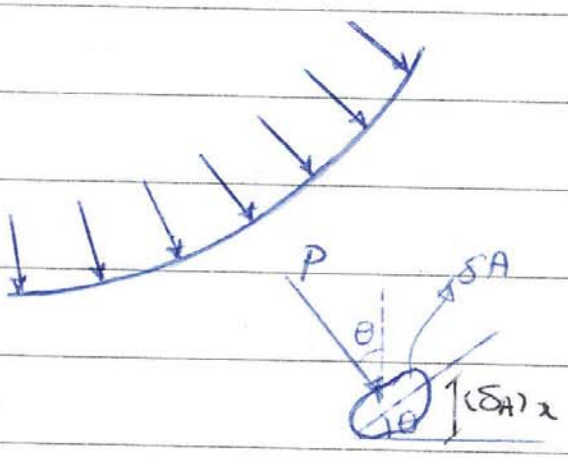
$$210.19\,y_R = 189\times0.9 + 21.19\times\frac{1.2}{3}$$

$$\rightarrow y_R = 0.85\,m$$

نیروی وارد از طرف آب بر سطوح دارای انحنا:

۱) هولفه افقی نیروی وارد بر سطوح منحنی:

می‌خواهیم کل نیروی وارد بر سطح، محل نیروی آن را بدست آوریم. المانی از سطح را می‌گیریم.



$$dF = p\,\delta A$$

$$dF_x = p\,\delta A\sin\theta$$

$$\rightarrow F_x = \int p\,dA_x$$

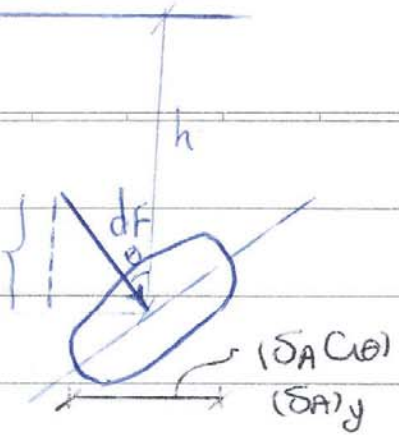
از صفحه دار انحنا با صفحه قائم و افق متقابل کنید نیرو را بدست آورید تبدیل می‌کنیم.

$$F_x = \rho g \bar{h}_c A_x \quad (A_x \text{ سطح عمود بر محور افقی است})$$

هولفه افقی نیروی وارد بر یک سطح منحنی برابر است با نیروی وارد بر تصویر آن سطح بر روی صفحه قائمی عمود بر امتداد هولفه افقی مورد نظر.

حمید کاظم

۲) مولفه قائم نیروی وارد بر سطوح منحنی:



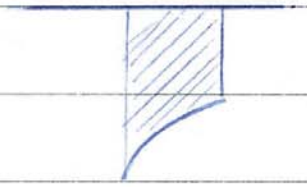
$$dF_y = dF \cdot \cos\theta = p\,dA\cos\theta$$

$$dF_y = \rho g\,[h\,dA\cos\theta]$$

(حجم آب بالای سطح)

نتیجه: نیروی قائم برابر حجم مایع بالای سطح می‌باشد

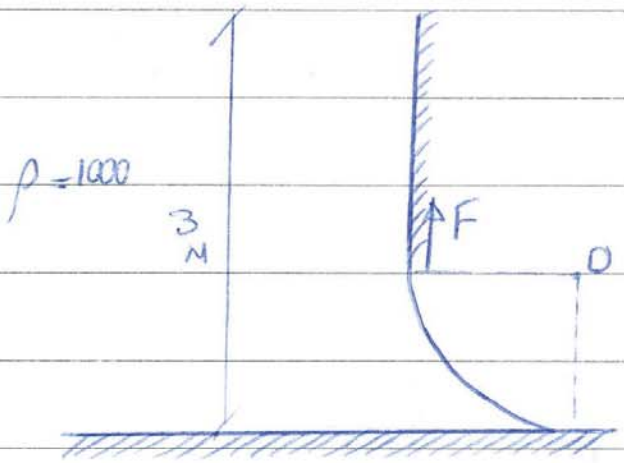
$$dF_y = dv(\rho g) \rightarrow F = \rho g V$$



نیروی قائم برابر وزن حجم آب بالای سطح می‌باشد.

* مولفه قائم نیروی وارد بر سطح اعم از برآیند یا وزن مایعی که بر طرف قائم روی سطح قرار دارد یا سطح آزاد

مثال: نیروی لازم برای باز کردن دریچه را بیابید. (وزن دریچه صرف نظر کنید)



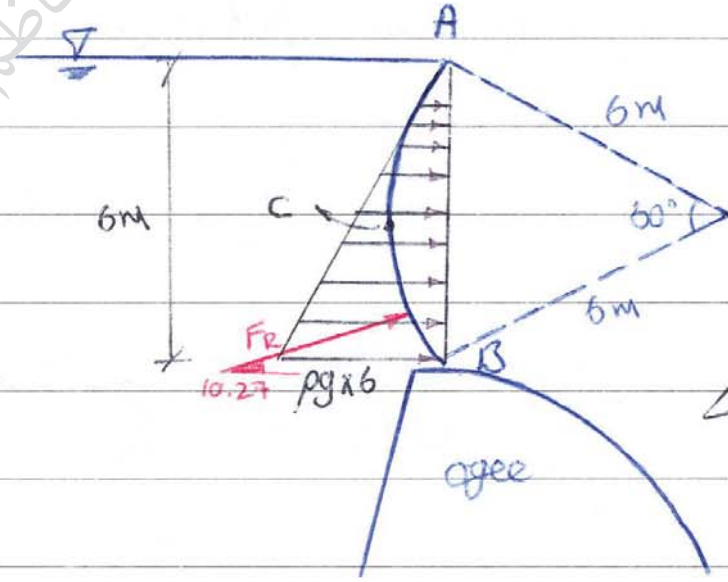
چون تمام نیروهای وارد بر دریچه از مرز O می‌گذرند پس می‌توان حول O ضرب لنگ گرفت.

بنابراین F باید mg را خنثی کند و چون m=0 است پس F=0 می‌باشد

* برای تعیین خط اثر نیروی قائم باید مرکز حجم را بدست آورد.

حمید کاظم

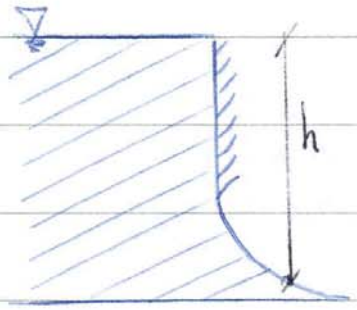
مثال: نیروی وارد بر یک قطاعی را بیابید. عرض آن 1m است.



$F_x = \frac{1}{2}\rho g \times 6 \times 6 = 176.58\ KN$

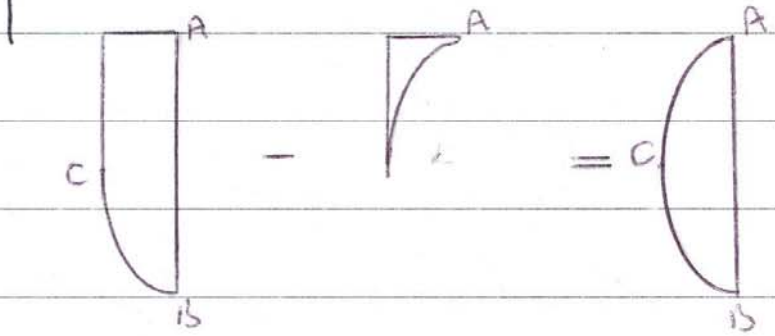
که نیروی نسبتاً عظیمی است.

ogee به این علت است که وقتی در یک دره را سد می‌کنیم آب آن را پر می‌کند و ایجاد خلأ می‌کند و مصالح را خراب می‌کند.



نکته: از آنجا که جهت متقابل یا شده و آب سطحی را تشکیل نداده خلأ را برای آن فرض می‌کنیم و از روابط استفاده می‌کنیم. فقط جهت نیرو فرق دارد. در این حالت نیز پایین به بالاست.

در این حالت نیروی تمام در AC به سمت پایین و در BC به سمت بالاست. پس نیز حجم کم می‌کنیم.



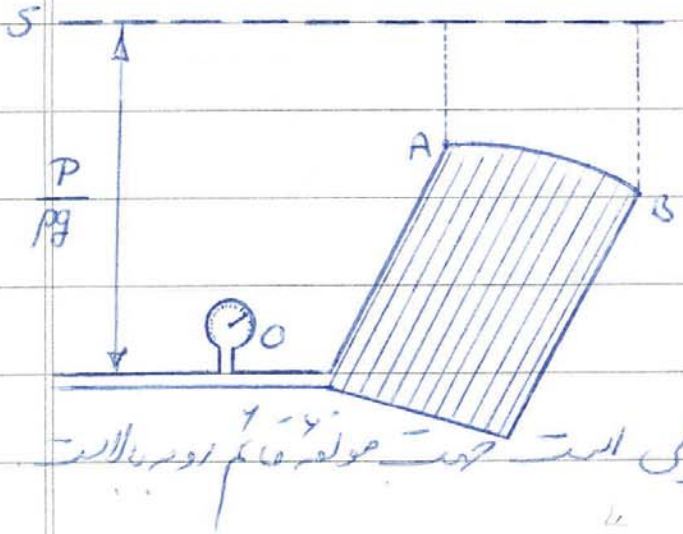
$$F_y = \left[\frac{\pi D^2}{4} \times \frac{1}{6} - \frac{6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right]\rho g = 32\,KN$$

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 179.46 \qquad tg\theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \theta = 10.27$$

حمید کاظم

چون تمام نیروها از O عبور می‌کنند بنابراین R نیز باید از O عبور کند و با افق زاویه $\theta = 10,27^\circ$ بسازد.

نکته: ممکن است مایع زیر سطح باشد. مثلاً در شکل زیر، مایع زیر سطح منحنی AB است. در این حالت اگر فشار در نقطه‌ای مانند O معلوم باشد، می‌توانیم سطح آزاد خیالی S-S را که فاصله‌اش $P/\rho g$ بالای O رسم کنیم، بطوری که حاصلضرب وزن مخصوص و فاصله قائم هر نقطه تا سطح آزاد (γh) برابر فشار در آن نقطه باشد. در این صورت هر نقطه قائم نیروی وارد بر سطح برابر است با وزن مایع خیالی که در بالای سطح قرار دارد تا سطح آزاد. در واقع سطح آزاد خیالی باید وزن مخصوص مایع خیالی با وزن مخصوص مایعی که با سطح منحنی تماس دارد یکسان باشد، و غیر این صورت توزیع فشار روی سطح درست نمی‌شود.



با فرض وجود مایع خیالی بر روی سطح منحنی، در هر نقطه از سطح فشار در بالا و پایین آن یکسان است، و لذا جهت هر نقطه‌ای قائم خواهد بود و نیروهای مختلف یکدیگر را خنثی می‌کنند.

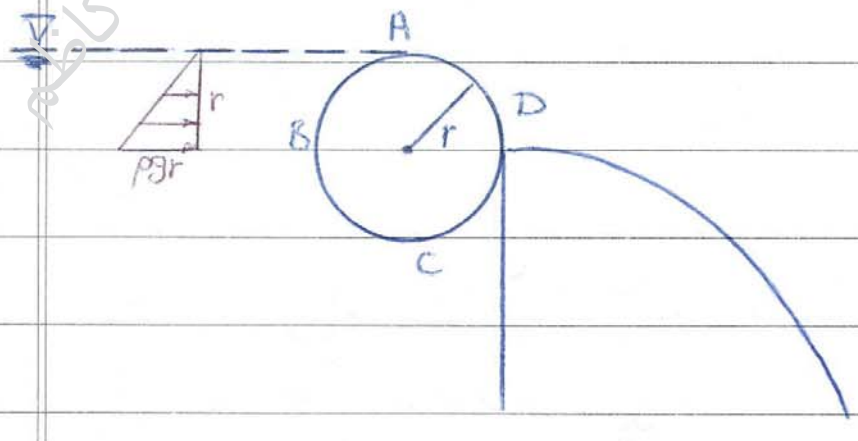
بنابراین در مواردی که مایع روی سطح منحنی صلبی است جهت هر نقطه قائم رو به بالا است.

حمید کاظم

مثال: طول لوله را b در نظر بگیرید.

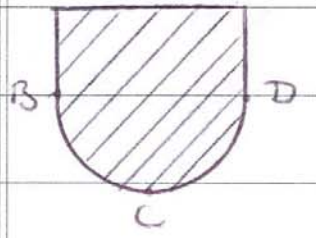
نیروهای وارد بر لوله استوانه‌ای را بدست آورید.

نیروهای بین C و D با نیروهای بین C و A حذف می‌شود. (نیروهای افقی)



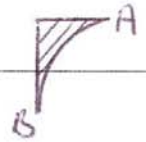
$$F_H = F_{H(AB)} = \frac{1}{2}(\rho g r)\, r\,(b) = \frac{1}{2} b \rho g r^2$$

برای نیروی قائم، نیروی قائم سطح ABCD نیروی وزن آب درون شکل مقابل است.



$$\uparrow F_{V_C} = F_{V(ABCD)} = \rho g \left(\frac{\pi r^2}{2} + 2r^2\right) b$$

$$\downarrow F_{V_{AB}} = \rho g \left(r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2\right) b$$

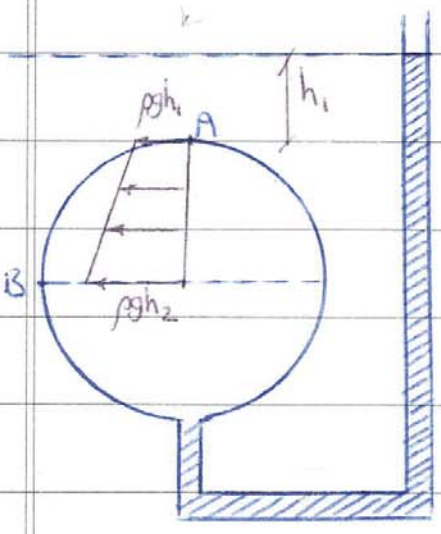


$$F_V = F_{V_C} - F_{V_{AB}} = \rho g b r^2 \left[\frac{3\pi}{4} + 1\right]$$

* باید تسمیم نیروی مایعات چگونه استوانه نشوند.

(1) فرض کنید کره‌ای به شکل مقابل داشته باشیم و در یک نیروسنج وصل باشد. از ما می‌خواهند ثابت کنیم جسم مایع نیروی وارد بر AB را بدست آورد.

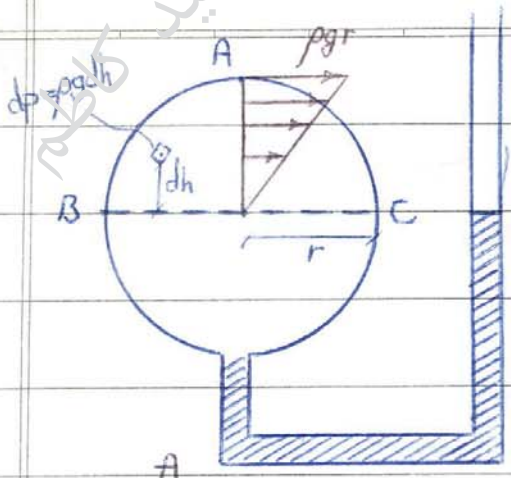
(AB دریچه است)



نیروی قائم وزن آب فرضی بالای دریچه AB است که به سمت بالایی باشد.

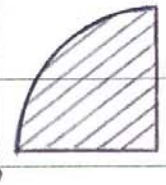
نیروی افقی نیرویی است که دریچه را به سمت بیرون می‌فشارد.

حمید کریم



۲) مثال فرض کنید سطح AB موجود در شکل (مانومتر) هم سطح نقطه A باشد. نیروی وارد بر AB را بدست آورید.

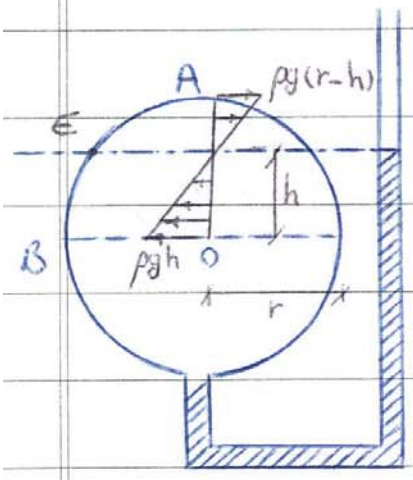
در اینجا فشار اعمال شده از سمت راست است و نیروی مخالف در یک راستا به سمت داخل یک شکل متقارن است که جهتش به سمت پایین می‌باشد.



نیروی قائم حجم وزن آب موجود در شکل مقابل است که جهتش به سمت پایین می‌باشد.

$F_H \rightarrow \quad F_V \downarrow$

* برای فهم باید به اثبات برویم. در اثبات با انتگرال گیری dh را باید از صفر تا BC در نظر بگیریم $P=\int \rho g\, dh$ نتایج داخل را می‌دهد.



۳) مثال فرض کنید سطح AB مانومتر بین A و B باشد.

برای حالت نیروی اعمال از خط E بالاتر به صورت فشار به داخل و از خط E پایین‌تر به صورت فشار به بیرون می‌باشد.

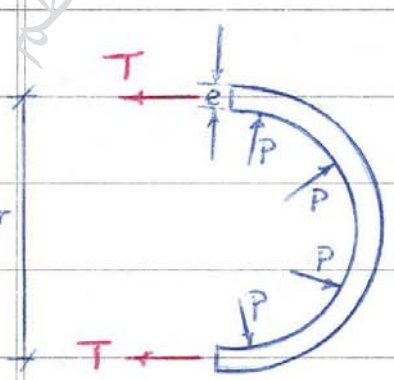
برای نیروی قائم در قسمت AE جهت به سمت پایین و در قسمت BE جهت به سمت بالایی باشد.

EB :

EA :

حمید کاظم

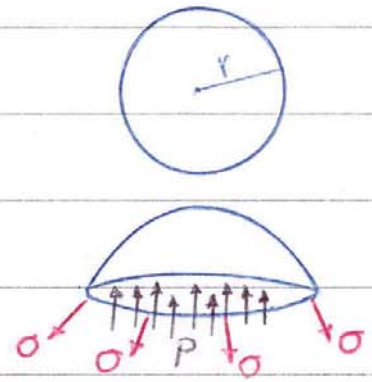
فرض می‌کنیم مخزن با فشار یکنواخت داریم.
کل نیروی لازم برای نصف کردن کپسول:



$$P \cdot 2r \cdot b = T \cdot 2e \cdot b$$

$$\rightarrow T = \frac{rP}{e}$$

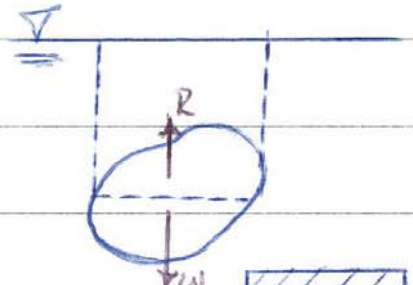
از قضیه ایده‌آلی لزاک را در نظر بگیرم. آن را برش زنیم، می‌دانیم در سطح آزادش دارای کشش سطحی هستیم. داخل قطره هم فشار داخلی داریم.



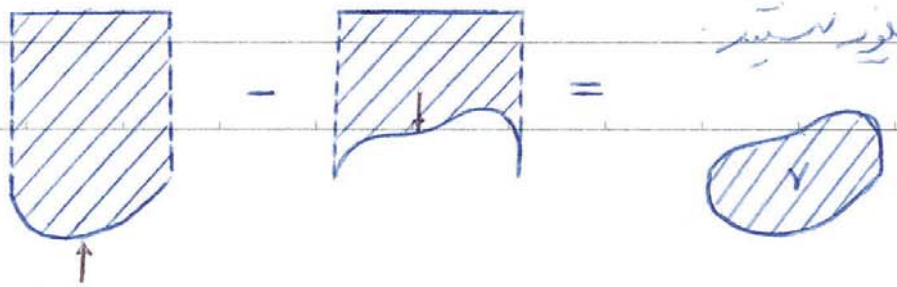
$$2\pi r \cdot \sigma = \pi r^2 \cdot P \rightarrow P = \frac{2\sigma}{r}$$

نیروهای غوطه‌وری (ارشمیدس)
(Bayant Forces)

هدف این است که بتوانیم نیروهای وارد شده به جسم غوطه‌ور در مایع را محاسبه کنیم.



جسمی را غوطه‌ور در مایع در نظر می‌گیریم.
نیروهای افقی همدیگر را خنثی می‌کنند.
نیروهای قائم اینگونه هستند:



$$\begin{cases} R = \rho g V \\ W = R \end{cases} \rightarrow W = \rho V g \rightarrow$$ V حجم جسم، ρ چگالی مایع

نیروی شناوری روی سطح (قسمت بالا) وارد می‌شود و برابر است با وزن آب بالای سطح یا به عبارتی وزن آب بالای سطح جابجا شده است.

پس نیروی شناوری وارد بر جسم برابر است با وزن حجم آبی که جسم جابجا می‌کند.

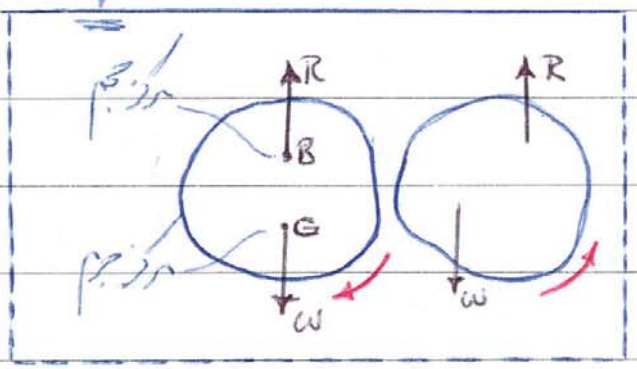
$F_v = \gamma V$ (V حجم جسم)

اگر $R = W$ باشد جسم غوطه‌ور باقی می‌ماند. اگر $R > W$ باشد جسم به سمت بالا حرکت می‌کند و اگر $R < W$ باشد جسم به سمت پایین حرکت می‌کند تا به کف ظرف برخورد کند.

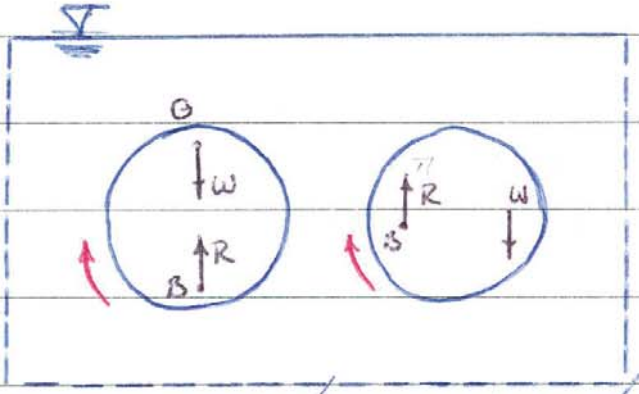
نکته: بنابراین هر جسم توپر به اندازه وزن آب هم حجم آن سبک می‌شود.

فرض کنیم در جسم متقابل $R = W$ است. حال آن را از حالت تعادل خارج می‌کنیم. از وضعیت شکل (1) به حالت روبرو می‌گردد. چون کوپل مانع می‌باشد و کوپل حاصل از R و W در خلاف جهت بوده خنثی می‌گردد. لذا وضعیت شکل (2) هر دو کوپل هم جهت می‌گردند و جسم از حالت تعادل خارج می‌گردد.

(1)



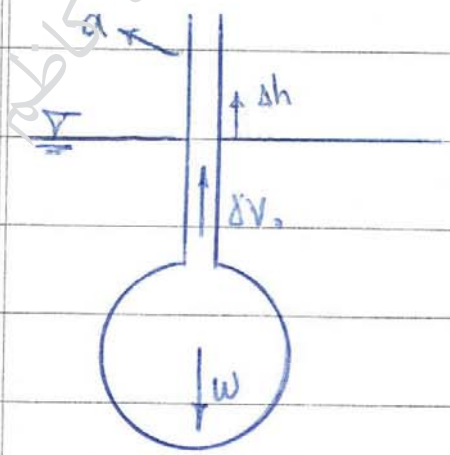
(2)



نتیجه: اجسام غوطه‌ور پایدارند اگر مرکز جرم آن‌ها زیر مرکز حجم آن‌ها قرار گرفته باشد و در غیر اینصورت ناپایدارند. (با این فرض که کل جسم داخل مایع باشد و زیر سطح آزاد مایع قرار گرفته باشد.)

حمید کاظمی

طراحی هیدرومتر



فرض کنید شی ای به صورت متقارن با وزن W

آن را در داخل یک مایع با $\rho_0 = 1000$ قرار دهیم.

اگر حجم داخل جسم را V_0 در نظر بگیریم به آنجا

$$\rho_0 g V_0 = W$$

فرض کنید داخل مایع قرار دهیم که $\rho_1 > \rho_0$ باشد آنجا مقداری بیرون می آید.

(چون $\rho \uparrow$ پس $V \downarrow$ می شود)

$$\rho_1 V g = W \rightarrow \rho_1 g (V_0 - \Delta h \cdot a) = \rho_0 g V_0$$

$$\rightarrow \Delta h = \frac{V_0}{a} \cdot \frac{S_s - 1}{S_s} \qquad S_s = \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

مثال: قطعه ای به شکل مکعب به وزن 1.5N وزن دارد، ولی داخل آب وزن آن 1.1N می شود. چگالی نسبی سنگ این قطعه را بدست آورید.

$W = 1.5N \qquad W' = 1.1N$

$$0.4N = \gamma V_0 \rightarrow 0.4 = 9810 V_0 \rightarrow V_0 = 40.8 cm^3$$

$$\rho = \frac{m}{V_0} \rightarrow S_s = \frac{\rho}{\rho_{آب}}$$

$$\rightarrow S_s = 3.75$$

مثال: مکعبی به عرض 6M و طول 12M در آب خالص با $\rho = 1000$ به عمق 1.5M در داخل آب قرار می گیرد. حساب کنید الف) این مکعب در چه عمقی از آب قرار دارد ($\rho = 1025$) ب) وزن بار تحمل شده توسط مکعب چقدر است

حمید کاظمی

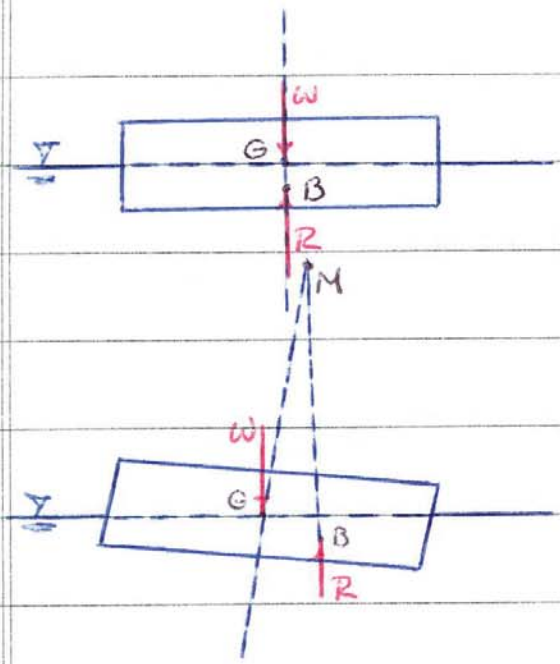
که کدام یک 2kN بیشتر محدودیت است.

$$W = \gamma V_o = 9810 \times 6 \times 12 \times 1.5 = 1059.5 \text{ KN}$$

$$W + W_{L(0)} = 1025 \times 9.81 \times 6 \times 12 \times 2 \rightarrow W_L = 388 \text{ KN}$$

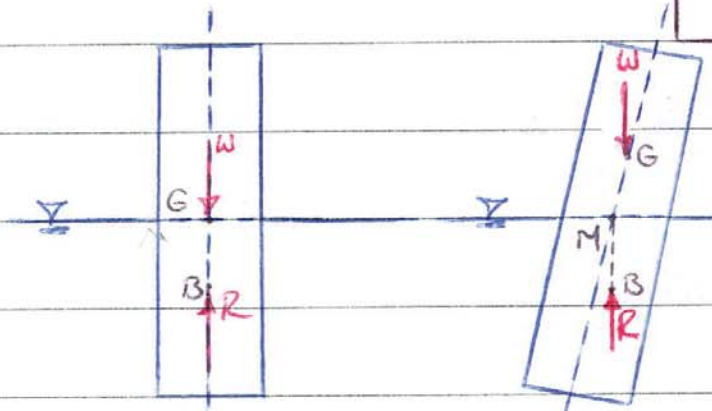
پایداری اجسام شناور:

جسم شناوری را داخل آب رها کنید، مشاهده خواهید کرد جسم راحی چرخد.



نقطه M را مرکز چرخش گویند و شکل پایداری آن (Metacenter) می‌باشد.

نکته: جسمی که در حالت سنگین باشد در شناور می‌ماند، طوری غوطه‌ور است.

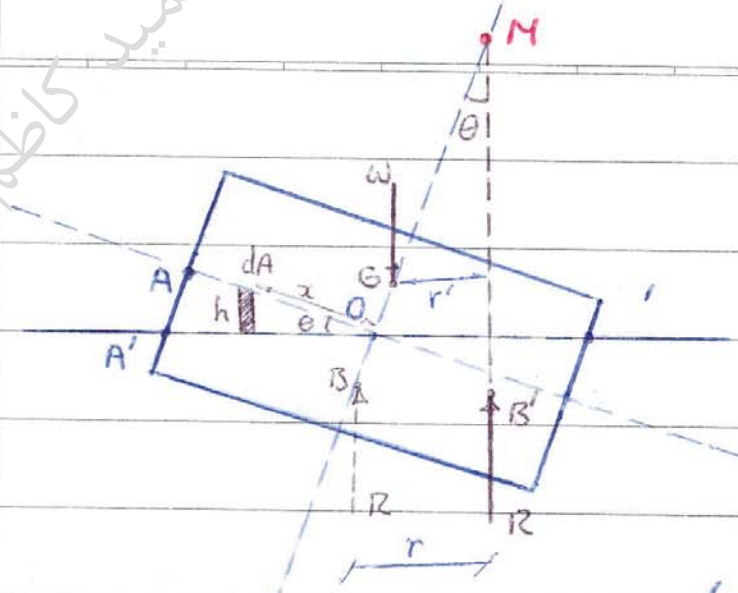


* نقطه M محل تلاقی امتداد نیروی شناوری و امتداد محور جسم می‌باشد.

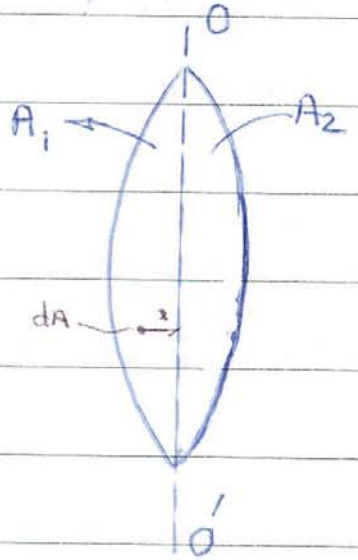
نتیجه:

اگر به صورتی باشد که M بالای G نیفتد شی پایدار است و اگر زیر G باشد ناپایدار می‌ماند. (این حالت در مورد اجسام شناور صادق است.)

حمید کاظم



فرض کنیم قطعه شناوری را اندازه زاویه کوچک θ بچرخانیم.
می‌خواهیم نقطه M را بیابیم.
باید برای بدست آوردن M نقطه B' را بیابیم.
باید حجم دو طرف (داخل منحل و بیرون منحل) برابر باشد. یعنی یک مرکز حجم مقدار داخل آب با مقدار



راضی باشیم.

$$\int_{A_1} x\theta\, dA = \int_{A_2} x\theta\, dA$$

حال نیروی بالابری را حول O بدست می‌آوریم که این حال باعث ایجاد تغییر نقطه اثر نیروی R از G شده می‌باشد.

$$dM = \rho g (\theta x)\, dA \cdot x \qquad \sin\theta = \frac{BM}{r} = \theta$$

$$\rightarrow \rho g\theta \int_{A_1} x^2 dA + \rho g\theta \int_{A_2} x^2 dA = r \cdot R$$

$$\rightarrow \rho g\theta \int_{A_1} x^2 dA + \rho g\theta \int_{A_2} x^2 dA = (BM\cdot\theta)(\rho g V)$$

$$\rightarrow \int_A x^2 dA = BM \cdot V \Rightarrow \begin{cases} BM = \dfrac{I_{oo'}}{V} \\ V \text{ حجم جسم غوطه‌ور} \\ MG = BM - BG \end{cases}$$

مرکز سطح $\bar{y} = \begin{cases} \frac{\int y dA}{\int dA} \\ \frac{\sum yA}{A} \end{cases}$ مرکز حجم $\bar{y} = \begin{cases} \frac{\int y dm}{\int dm} \\ \frac{\sum ym}{m} \end{cases}$ مرکز جرم $\bar{y} = \begin{cases} \frac{\int y dv}{\int dv} \\ \frac{\sum yv}{v} \end{cases}$

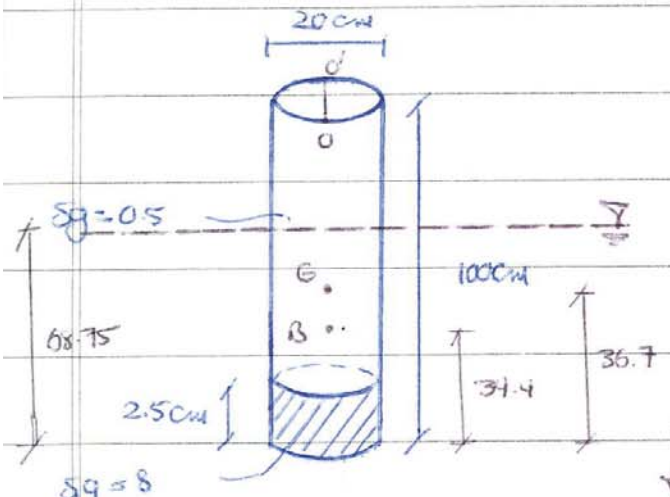
جزیره کاظم

می خواهیم کل را نسبت به مرکز جرم به حالت اولیه برگردانیم

$F'(R) = M$

$\rightarrow (MG \cdot \theta).R = M$ عامل چرخش

مثال: سلندری به شکل مقابل در اختیار داریم. می خواهیم داخل آب قرار دهیم $\bar{y} = 2.5cm$ از انتهای آن را عمودی با خط آبی نگه داریم. $S.g = 8$ متصل کرده ایم. معادلات وضعیت پایداری هم.



$$\begin{cases} W_1 = 8 \times 1000 \times 9.81 \left(2.5 \times 10^{-2} \times \pi (0.1)^2\right) \\ W_2 = 0.5 \times 1000 \times 9.81 \left(97.5 \times 10^{-2} \times \pi (0.1)^2\right) \end{cases}$$

$A = 0.01\pi \ m^2$ وزن بالن $W_1 = 61.61N$ وزن بدنه $W_2 = 150.17N$

$W = \gamma A \rightarrow 150.17 + 61.61 = 9810 \times 0.01\pi \times h \rightarrow h = 0.6875$

مرکز $G = 0.367$

$B = \frac{1}{2}(0.6875) = 34.4cm$

$$BM = \frac{I_{oo'}}{V} = \frac{\pi d^4/64}{\pi d^2/4 \times h} = 0.25cm$$

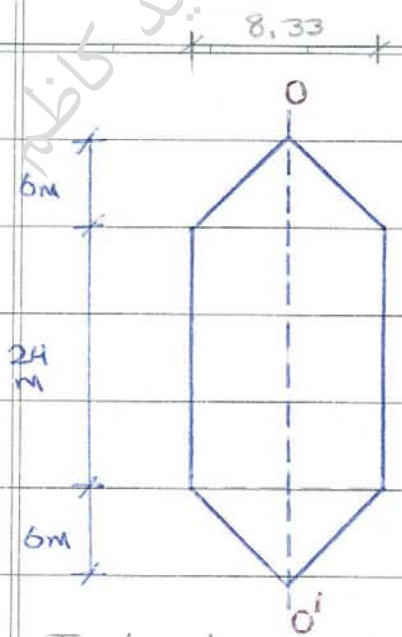
مرکز $\bar{y} = \frac{150.17 \times 51.25 + 61.61 \times 1.25}{150.17 + 61.61} = 36.7cm$

$BM = 0.25cm \rightarrow MG = 0.25 - 2.3 = -2.05$

پس جسم در حالت پس ترین M از G پایدار است

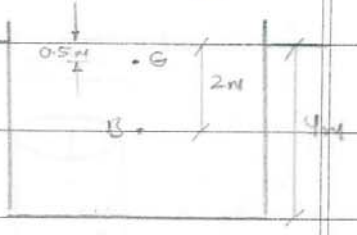
حمید کاظمی

مثال: حجم جسم مقابل 1Mg می‌باشد. تحقیق کنید که اگر B، 2 متر زیر سطح آب و اگر G نیم متر زیر سطح آب باشد، این جسم پایداری دارد یا خیر؟



$$W = \rho g V \rightarrow V = \frac{10^6 g}{10^3 g}$$

$$\rightarrow V = 10^3$$



$$10^3 = 4\left[2 \times \frac{6}{2} x + 24x\right] \rightarrow x = 8.33$$

$$I_{oo}' = \frac{1}{12} 24 \times 8.33^3 + 4 \times \frac{1}{12} \times 6 \times \left(\frac{8.33}{2}\right)^3 = 1300.52 \ m^4$$

$$\rightarrow BM = \frac{I_{oo}'}{V} = \frac{1300.52}{1000} = 1.3 \ m$$

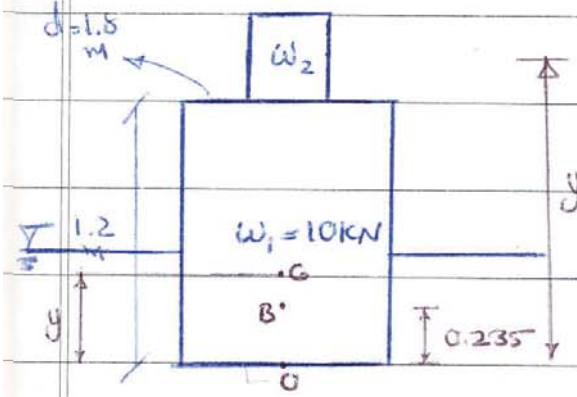
پس M بالاتر از G قرار گرفته و جسم ناپایدار است.

مثال: می‌خواهیم فاصله مرکز ثقل جسم از کف را بیابیم. (جسم) پایدار باشد.

اگر M زیر G نباشد

(مرکز ثقل نیم‌کره 0.45^M است)

$\omega_2 = 2KN \quad \rho = 1025 \ kg/m^3$



$$y = \frac{y_1 \omega_1 + y_2 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \qquad BG = BM$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \rho g V \Rightarrow 12000 = 1025 \times 9.81 V \rightarrow V = 1.193 \ m^3$$

$$1.193 = h(\pi \times 0.9^2) \Rightarrow h = 0.469 \qquad OB = \frac{1}{2}(0.469) = 0.235$$

$$y = \frac{y_1 \omega_1 + y_2 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = BM + 0.235$$

$$I_{oo}' = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{4}(0.9)^4 = 0.515 \rightarrow BM = 0.432$$

$$\rightarrow 0.432 + 0.235 = \frac{0.45 \times 10 + 2y_2}{10+2} \rightarrow y_2 = 1.752 \ m$$

سیال در حال حرکت
(Fluid in motion)

وقتی سیال در حال حرکت است تنش برشی ایجاد می کردد.
در این قسمت خواه ناخواه درگیر کارهای آزمایشی می شویم.

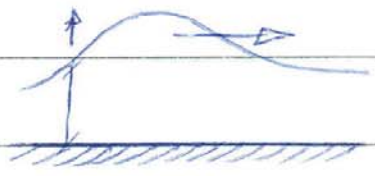
باید یک سری تعاریف را داشته باشیم:

دسته بندی جریان سیال:

۱) اگر مشخصه ی سیال در طول زمان تغییر کند می گوییم سیال غیر دائمی (غیر ماندگار) است. مشخصه ها مثل سرعت، فشار و ... ← در مقطع است.

$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$ غیر دائمی (unsteady) $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ دائمی (steady)

فرض کنید در داخل کانالی سیال ایجاد شود و سرعت بالادست ثابت باشد. سطح آب عمق و سرعت تغییر کرده و غیر دائمی است.



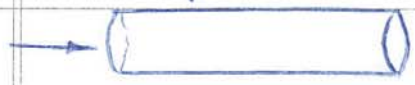
۲) اگر در طول جریان (در امتداد طول) مشخصه ثابت باشد جریان یکنواخت است.

$\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ غیر یکنواخت (non-uniform) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ یکنواخت (Uniform)

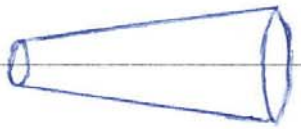
حمید کاظم

دائمی (واحدی)

یکنواخت: در زمان و مکان مشخصه‌ای تغییر نکند



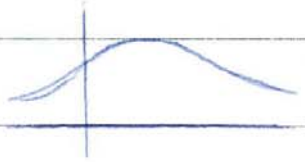
غیر یکنواخت:



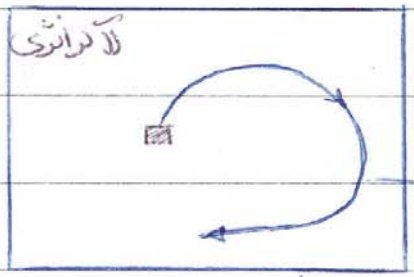
غیر دائمی

یکنواخت: اینی در عرض می‌شود ولی در طول همه جا یکجا عرض می‌شود که استثنایی است.

غیر یکنواخت: شکل پذیرفته‌ای اینی مثل عبور موج پس از یک کانال



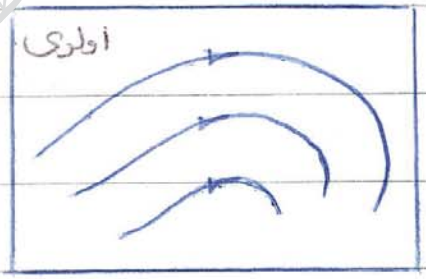
می‌خواهیم سیستم مطالعه الان‌لاگرانژی را بدست بیاوریم.
اگر الان از سیال را مطابق شکل مقابل تعقیب کنیم مسیری را که طی می‌کند مسیر (خط مسیر) می‌نامیم.



به مطالعه یک المان سیال و تک تک آن مطالعه، دیدگاه لاگرانژی گوییم.
این مطالعه (لاگرانژی) متداول نیست است.
مطالعه دیگری وجود دارد. می‌بینیم در یک لحظه تمام المان‌ها را freez می‌کنیم و بردار سرعت (streamline) را بدست می‌آوریم. (این freez کردن

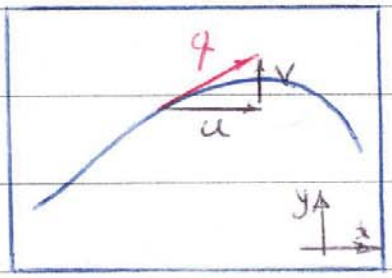
حمید کاظم

در خطوط جریان یک بردار سرعت است (جریان مدیت دارد)



الگوی جریان ← (Flow pattern)

تمام خطوط که بردارهای سرعت را بهم نشان سرعت در خط جریان می‌گیرد است.



$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v}$$

می‌توان با انتگرال‌گیری معادله جریان را بدست آورد.

این دیدگاه، دیدگاه اولری است.

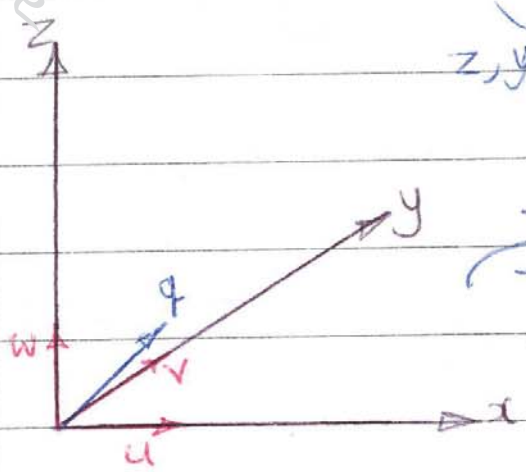
روش اولری بیشتر در ارتباط با سیالات مورد است.

خط لکه (streak line): جوهر چینی را فرض می‌کنیم، در $t=0$ یک نقطه را مشخص رنگ تزریق می‌کنیم. در $t=t_0$ در همان نقطه دوباره رنگ تزریق می‌کنیم. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم. اگر یک لحظه عکس بگیریم، این خط نه خط جریان است و نه خط جریان. چون در هر لحظه یک المان را نشان می‌دهد نه المان دیگر را. ثابت دارد.

* اگر جریان steady state باشد یعنی در حال جزئی عوض نشود نه این خطوط جریان، المان کار المان بعدی را ادامه می‌دهد نه این خط مسیر و خط لکه یکی می‌شوند یعنی خط جریان هم خط لکه یکی می‌گردد.

حمید کاظمی

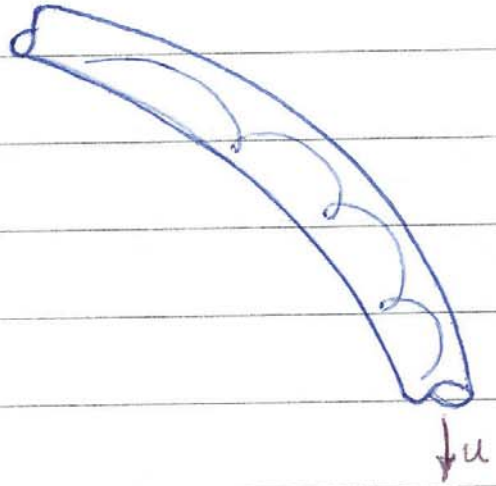
تحلیل جریان زمانی است که دارای ۳ بعدی است.



هر جریانی در طبیعت تقریبا سه جهت در جهت های x و y و z تغییر می کند.

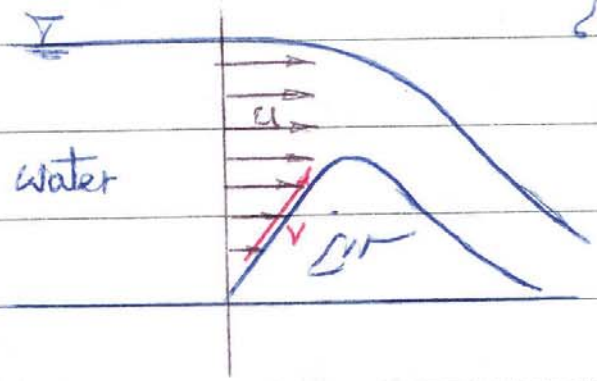
ما توجه به پیچیدگی مسئله در کاربردهای عملی سعی بر این است تغییر می کند حالت سه بعدی را به دو بعدی و یک بعدی تبدیل کرد.

فرض می کنید در مقطع تنگه سرعت داریم و کل لوله که جریان است.

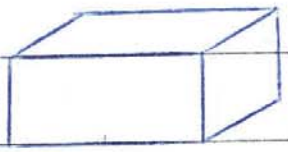


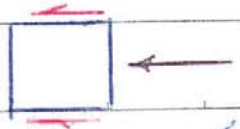
$w=v=0$ فرض می کنیم جهان سرعت های v و w صفر هستند. سرعت u در حدود 0.02 تا 0.03 تغییر می کند. بنابراین در حالت یک بعدی حل می کنیم و با خطا آزمایشگاهی مقایسه می کنند و خطا را از این لحاظ می کنند.

در شکل مقابل یک سرریز را می بینیم که سرعت ها را از آن داده ایم. در این حالت سرعت ها را در حالت دو بعدی بررسی می کنیم.



المان کنترل (دیاگرام آزاد):





این طریقه دیاگرام آزاد رسم میشه.

حمید کاظم

در سیالات منطقه‌ای از فضا را بنام **حجم کنترل** در نظر می‌گیریم و سیال وارد شده و از آن خارج می‌گردد.

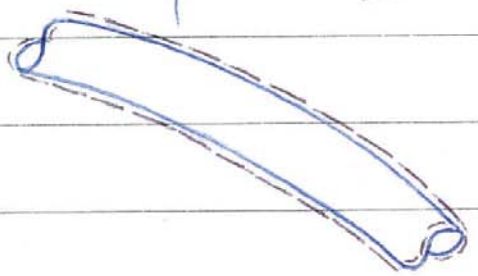
این حجم کنترل می‌تواند تمام مقطع راه آب را شامل شود و یا فقط قسمتی از آن را. معمولاً توده سیال حجم کنترل را کاملاً پر می‌کند.

Central Volume

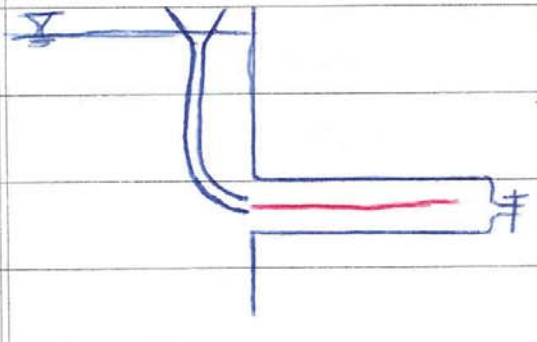
روشی که در آن کل میدان را حجم کنترل می‌نامند **روش انتگرال** گویند زیرا در این روش می‌توان جریان حجم کنترل را انتگرال گرفت و در هر حجم کنترل سرعت و شتاب را بدست آورد و حرکت سیال را بدست آورد. به این روش **روش دیفرانسیلی** گویند.

در روش دیفرانسیلی باید مسئله را چندین مرتبه حل کرد تا اطلاعات برای نقطه به نقطه بدست آید. اما در روش انتگرالی با یک محاسبه هم می‌توان حل کرد اما اطلاعات detail را بدست نمی‌دهد.

در اینجا روش انتگرالی را صحبت می‌کنیم.



حالت حرکت سیال:

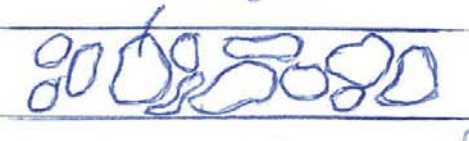


A. Reynalds (1883) جریان را شکل مقابل در نظر گرفت. توده‌ای رنگ را در داخل جریان سیال رنگ تزریق کرد. مشاهده کرد وقتی سرعت کم باشد رنگ در امتداد لوله و به صورت ورقه حرکت می‌کند تا انتها برود. اسم این جریان را ورقه‌ای (Laminar) نامید. سپس سرعت را بیشتر کرد مشاهده کرد که

حمید کریم

اگر سرعت بیشتر باشد ذرات کاملا نامنظم حرکت می‌کنند. نقش اصلی را در حرکت‌های نامنظم Reynolds شکل می‌دهد.

Eddy

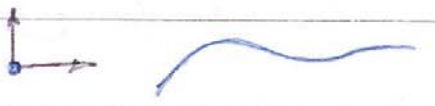


این پدیده‌ها سیال را به صورت گردابه‌های چرخنده حرکت می‌کند. و ورقه ورقه نمی‌شود. به این گردابه (Eddy) گویند. این جریان، جریان آشفته است. (turbulence)

علت این موضوع را Reynolds بررسی کرد.

علت:

از کجا احتمال مسیر مارپیچ را بدهیم و علت اصطکاک زیاد



با وجود سرعت کم در مسیر مستقیم می‌ماند. اما اگر سرعت زیاد شود اصطکاک را این می‌زند و حرکت گردابه‌ای پیچیده می‌شود.

از اینرسی نسبت به نیروی Viscos تشکیل شده تشکیل می‌شود.

$$Re = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی حاصل از زحمت}}$$

این اینرسی اولیه از بالا است می‌دهد علت ذرات است.

نیروی اینرسی ma است. نیروی زحمت $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ است.

$$Re \rightarrow \frac{\rho l^3 \cdot \frac{l}{t^2}}{\underbrace{\mu \frac{v}{l} l^2}_{\text{سطح مقطع} \times \text{تنش}}} \rightarrow \frac{\rho l^2 v^2}{\mu \frac{v}{l} l^2} \rightarrow \frac{\rho l v}{\mu}$$

برای l از قطر استفاده می‌کنیم.

$$Re = \frac{\rho D V}{\mu} \rightarrow Re = \frac{DV}{\nu}$$

حمید کاظم

$Re < 2000$ → جریان ورقه‌ای

$2000 < Re < 4000$ → Transition انتقالی

$Re > 4000$ → جریان آشفته

دبی: برحسب آب در واحد زمان دبی کلی واحدش $\frac{m^3}{s}$ است. با Q نشان می‌دهند که حجمی است.

ρQ → دبی جرمی

$\rho g Q$ → دبی وزنی

1) $Q \rightarrow \frac{m^3}{s}$ دبی حجمی

2) $\rho Q = \dot{m} \rightarrow \frac{kg}{m^3} \times \frac{m^3}{s} \rightarrow \frac{kg}{s}$ دبی جرمی

3) $\rho g Q \rightarrow \frac{N}{s}$ دبی وزنی

$$AV = \int u dA \rightarrow \pi r_0^2 V = 2\pi \int_0^{r_0} r u dr$$

$$u = u_{Max} \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7} \quad (1) \qquad , \qquad r = r_0 - y \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \pi r_0^2 V = 2\pi u_{Max} \int_0^{r_0} (r_0 - y)\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7} dy = 2\pi u_{Max} \left(\frac{49}{120}\right) r_0^2$$

$$\rightarrow \pi r_0^2 V = \frac{98}{120} \pi u_{Max} r_0^2 \rightarrow V = \frac{98}{120} u_{Max} \quad (3)$$

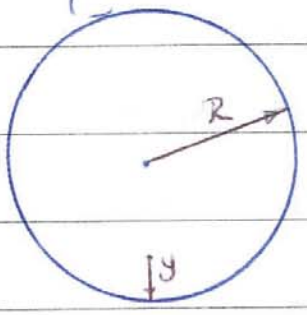
$$(1),(3) \rightarrow \frac{u}{V} = \frac{120}{98}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$$

حمید کاظم

معادلات اصلی حاکم بر جریان:

اگر بردار را تصور کنیم Max سرعت در مرکز لوله است . در نقطه سرعتی داریم که با u نشان می‌دهیم سرعت متوسط را که تولید می‌شود را با V نشان می‌دهیم

$$V = \frac{1}{A}\int_A u\,dA \quad , \quad Q = V.A = \int u\,dA$$



$0 < y < R$

$$u = u_{Max}\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}$$

سال‌ها پیش آزمایشات نشان داده است که تقریبا یک هفتم می‌باشد.

مثال: سرعت متوسط را در جریان زیر بیابید.

40
40

Air

$\bar{V} = 23.36$

$\uparrow y$

y (mm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
u (m/s)	0	23	28	31	32	29	22	14	0

$$V = \frac{1}{A}\sum u_i A_i = \frac{1}{A}\sum u(\pi r^2) = \frac{1}{A}\sum u(\pi)(R-y)^2$$

$$= \frac{\pi}{A}\sum u(R-y)^2 = \frac{1}{R^2}\sum u(R-y)^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{40^2}\left(23(30)^2 + 28(20)^2 + 31(10)^2 + 29(10)^2 + 22(20)^2 + 14(30)^2\right)$$

$$\Rightarrow V = 37.06\ m/s$$

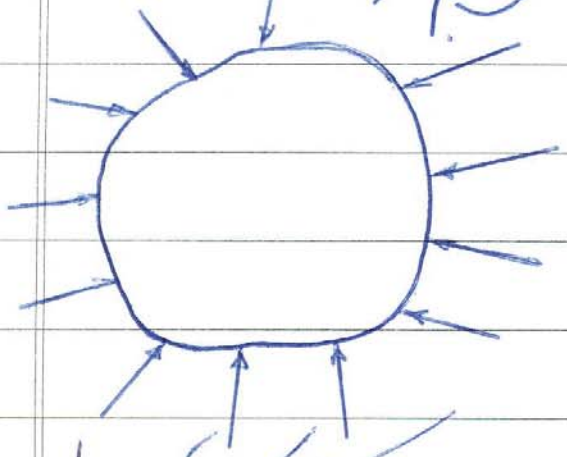
$\dot{m} = \rho V A = \rho Q$ دبی جرمی

NAHAL

معادله پیوستگی (اصل بقاء جرم)، Continuity (Conservation of Mass)

اولین معادله حاکم بر جریان می باشد

جرم ذخیره شده در حجم کنترل + جرم خروجی از حجم کنترل = جرم ورودی به حجم کنترل



$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dv + \int_{CS}\rho v.dA$$

حجم کنترل دارای سطحی است که تمام ورودی ها و خروجی ها از آن عبور می کنند که به آن سطح کنترل می گوییم. اگر دهانه ها را n تا در نظر بگیریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} A_i \rho_i V_i\right)_{in} = \left(\sum_{i=1}^{n_2} A_i \rho_i V_i\right)_{out} \quad (\text{دبی جرمی})_{in} = (\text{دبی جرمی})_{out}$$

سرعت

$A\rho V$ به معنای جرم عبوری خروجی است ($A\rho V \rightarrow m^2 \frac{kg}{m^3}\frac{m}{s} \rightarrow \frac{kg}{s}$)

$$\rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

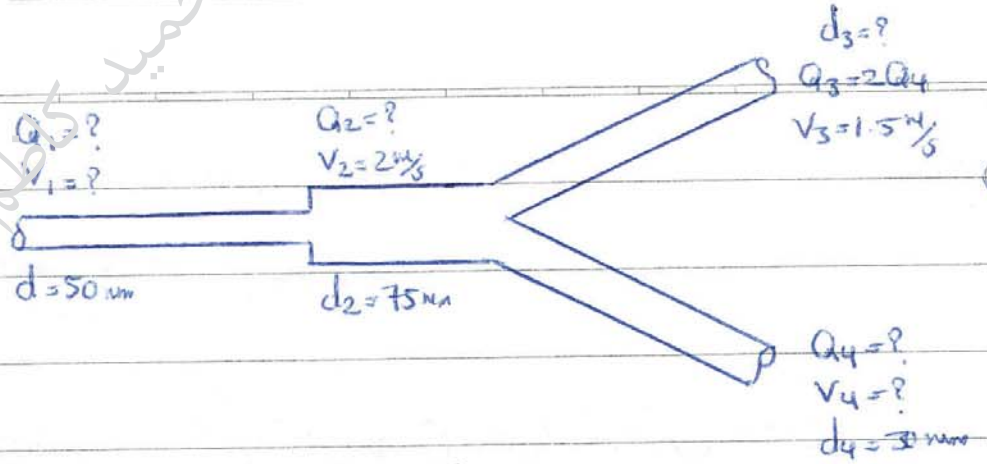
در عمل معمولاً سیال ما مایع است پس $\rho_1 = \rho_2$ است. اما اگر گاز خروجی محلول (داخل شده) شده باشد آنگاه گاز است. ورودی خروجی تفاوت پیدا نمی کند مگر عبوری از آن کاسته و افزوده شود.

اما در این حالت $\rho_1 = \rho_2$ پس:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$\rightarrow Q_1 = Q_2 \rightarrow \text{معادله پیوستگی}$$

حمید کاظم



مثال: با استفاده از بقای جرم مشخص شده در اینجا چیست؟

$$A_2V_2=Q_2 \rightarrow \frac{\pi d_2^2}{4}V_2=Q_2 \rightarrow Q_2=8.836\times10^{-3}\ m^3/s$$

$$Q_1=Q_2 \rightarrow Q_2=8.836\times10^{-3}$$

$$Q_1=A_1V_1 \rightarrow V_1=4.5\,m/s$$

$$Q_3+Q_4=Q_2 \qquad Q_3=2Q_4 \rightarrow \begin{cases} Q_3= \\ Q_4= \end{cases}$$

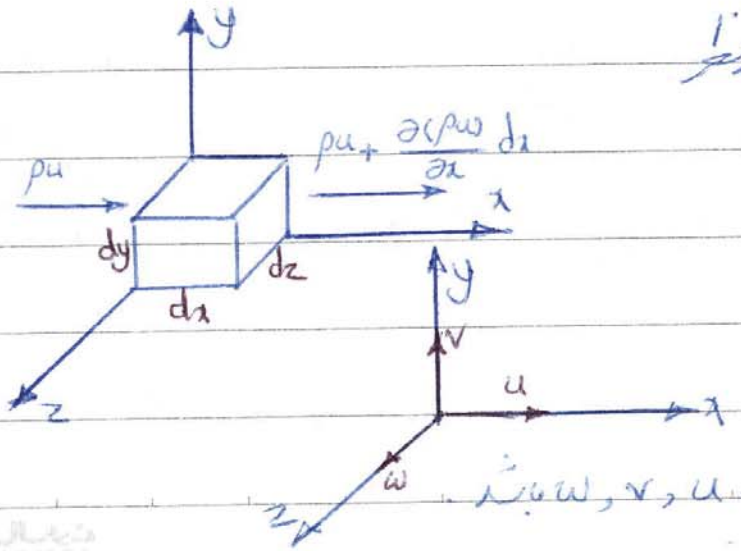
$$Q_3=A_3V_3 \rightarrow$$

$$\Rightarrow d_3=71\,mm$$

$$\Rightarrow V_4=4.17\,m/s$$

معادله پیوستگی به فرم دیفرانسیلی:

در این بار بحث حجم کنترل به شکل متغیر در نظر می‌گیریم. (سیال تراکم‌پذیر)



فرض می‌کنیم جریان کاملاً عمومی (غیر دائمی و تراکم‌پذیر) باشد و مولفه‌های سرعت در امتداد محورهای x و y و z به ترتیب u و v و w باشد.

جمله $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\,dx\,dy\,dz$ عبارتست از نرخ افزایش دبی نسبت به x ضربدر فاصله وجه سمت راست تا وجه سمت چپ یعنی dx.

از روی سطح بالایی سرعت را u و چگالی را ρ گرفتیم، تغییر اندازه dx حجم را روی سطح بالایی داریم.

$$\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,dx$$

جرم سیالی که داخل حجم کنترل در جهت x در زمان Δt حرکت می‌کند:

$$\rho u\,dy\,dz\,\Delta t \rightarrow kg$$

جرم خروجی از داخل حجم کنترل در جهت x در زمان Δt است:

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right)dy\,dz\,\Delta t \rightarrow kg$$

جرم خالص خروجی از حجم کنترل در جهت x:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\,dy\,dz\,\Delta t$$

جرم خالص خروجی از حجم کنترل در جهت y:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dx\,dy\,dz\,\Delta t$$

جرم خالص خروجی از حجم کنترل در جهت z:

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dx\,dy\,dz\,\Delta t$$

حال به دلیل تغییرات جریان در داخل حجم کنترل تغییر حس می‌شود

(حال جرمی است که در ابتدا در حجم کنترل در زمان Δt وجود داشته است.)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta t\,dx\,dy\,dz$$

مجموع خروجی سیالی و تغییر باید صفر شود (خاصیت پیوستگی است)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

حمید کاظم

اگر تراکم‌پذیر باشد:

از این دو حالت می‌توان یکی را انتخاب کرد ←
- (steady – state)
- (incompressible – Unsteady state)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$ ← با شرط دائمی غیرلزوجت ← تراکم‌ناپذیر

اگر انتگرال گرفتم، w را نمی‌نویسم، انتظار می‌رود که قبل بدست می‌آید.

مثال: جریانی غیرقابل تراکم با $u=3-x$ ، $v=4+2y$ ، $w=z-z$.

۱) تحقیق کنید تراکم‌پذیر است.

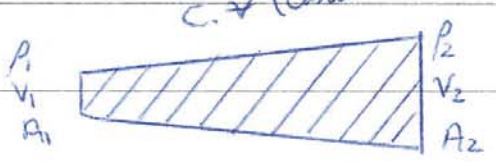
$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-1+2-1=0$ ← incompressible است

۲) اگر u و v را داشته باشیم، w را در حالت incompressible بدست آورید.

دومین معادله اصلی حاکم بر جریان:

قانون دوم نیوتن: تغییرات مومنتم را برای سیستمی از ذرات استفاده می‌کنیم.

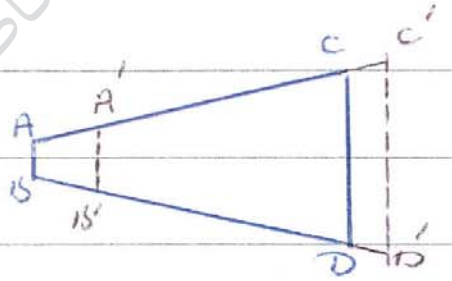
در حالت خیلی ساده جریانی که بصورت شکل می‌کنیم که:



$$\vec{\Sigma F}=m.\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{\Sigma F}\,dt=m\,d\vec{v}$$

توجه: M.V اندازه‌ی مقدار حرکت (اندازه حرکت) می‌نامیم.

حمید کاظمی



حجم کنترل را در لحظه $t=t_0$ در نظر می‌گیریم. $t=t_0+\Delta t$ لحظه بعد از آن دارای سرعت V_1 است.

$A'CDB'$ تغییری در سرعت ندارد بنابراین در $AA'B'B$ سرعت V_1 و در $CC'D'D$ سرعت V_2 را خواهیم داشت.

تغییرات اندازه حرکت سیستم در Δt $\rightarrow \rho_2 V_2 A_2 \Delta t . V_2 - \rho_1 V_1 A_1 . \Delta t . V_1$

$$\rightarrow \sum \vec{F} = \rho_2 V_2 A_2 V_2 - \rho_1 V_1 A_1 V_1 \qquad \Delta t \rightarrow 0$$

$\sum F$ نیروی است که $AB'CD$ را از $A'B'C'D'$ وارد است.

برای سیال تراکم‌ناپذیر $\rho Q = \rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A_2$ می‌باشد

$$\rightarrow \sum F = \rho Q (V_2 - V_1) \rightarrow \text{steady state (دائمی)}$$

نکته: فرض ما حرکت steady-state (دائمی نبودن) و غیرقابل تراکم (incompressible) بودن و سرعت ثابت بود در ورودی و خروجی حجم کنترل.

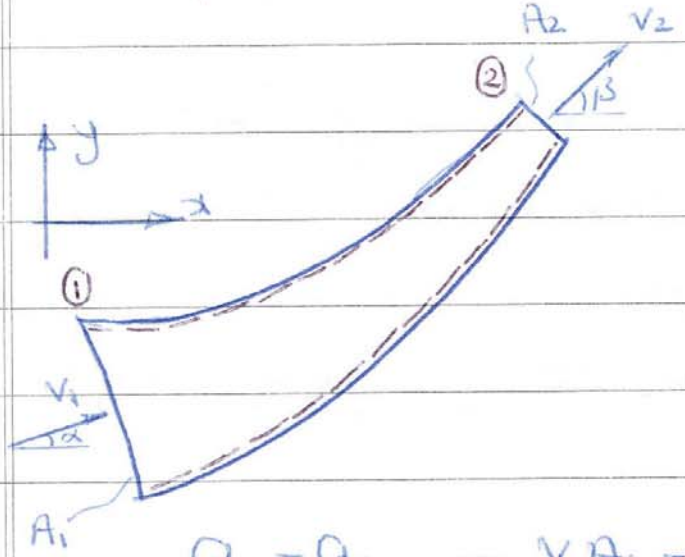
اولین نکته این است که این معادله برداری است بنابراین در راستای x و y و z وجود دارد.

$$\sum F_x = \rho Q (V_{2x} - V_{1x})$$

حمید کاظم

$$\Sigma F_y = \rho Q (V_{2y} - V_{1y})$$

$$\Sigma F_z = \rho Q (V_{2z} - V_{1z})$$



حجم کنترلی را بصورت مقابل مثل می‌زنیم جریان با سرعت V_1 وارد و با V_2 خارج می‌شود. معادلات مربوط را استخراج می‌کنیم. در ابتدا حجم کنترل را مشخص می‌کنیم

$$Q_1 = Q_2 \rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$\Sigma F_x = \rho Q (V_2 \cos\beta - V_1 \cos\alpha)$$

$$\Sigma F_y = \rho Q (V_2 \sin\beta - V_1 \sin\alpha)$$

ΣF مجموعه نیروهایی است که به حجم کنترل اعمال می‌شود و به دو دسته تقسیم می‌شود:

۱) نیروهای سطحی Surface Forces

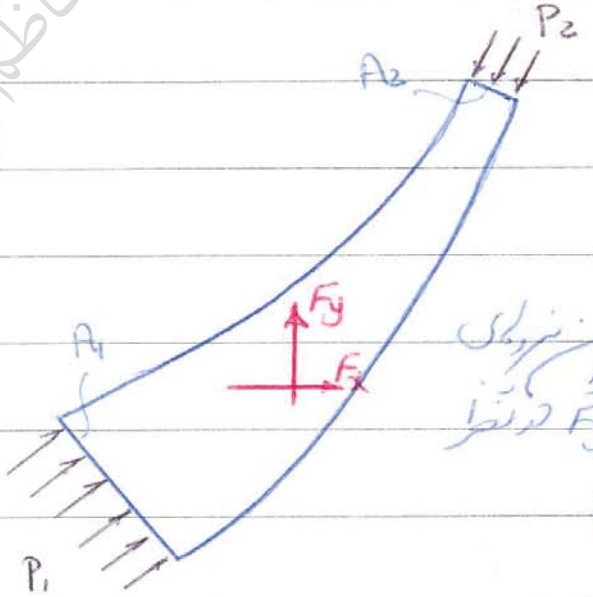
۲) نیروهای حجمی Body Forces

نیروهایی که از داخل حجم کنترل به حجم کنترل وارد می‌شود وزن است. معمولاً از این نیرو صرفنظر می‌شود.

نیروهای سطحی نیروهایی هستند که از سطح حجم کنترل به حجم وارد می‌شوند.

از قسمت ① شروع می‌کنیم و نیروهای سطحی را بررسی می‌کنیم

حمید کاظم



از سطح کنترل شده 1 و 2 را در نظر میگیریم
نیروهای P_1 و P_2 را همیشه اعمال میکنیم
حال نیروهای دوست دور را باید بررسی کنیم.
با حول حجم کنترل کشیدیم باید بیاییم بر اثر نیروهای
برشی را در جهت x، F_x و در جهت y، F_y در نظر
میگیریم. (این نیروها نیروهای وارد بر آب است)

حال می توانیم ΣF_x و ΣF_y را بنویسیم:

$$P_1 A_1 \cos\alpha - P_2 A_2 \cos\beta + F_x = \rho Q (V_2 \cos\beta - V_1 \cos\alpha)$$

از F_x را توانیم بدست آوریم می شود $F_x = -R_x$. R_x نیروی آب روی
است در جهت x.

$$P_1 A_1 \sin\alpha - P_2 A_2 \sin\beta + F_y = \rho Q (V_2 \sin\beta - V_1 \sin\alpha)$$

از F_y را توانیم بدست آوریم می شود $F_y = -R_y$. R_y نیروی آب روی
است در جهت y.

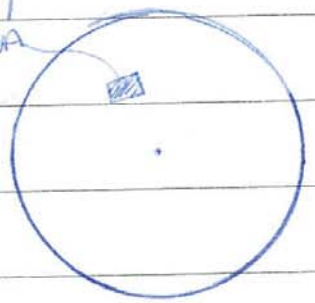
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

نکته: نیروهای که همواره آب وارد می کند هم برشی است و هم فشاری

حمید کاظم

فرض کرده بودیم سرعت یک بعدی است.

اگر بخواهیم سرعت را بصورت متقارن در نظر بگیریم و آن را بر حسب سرعت متوسط بنویسیم سرعت متوسط را بصورت متقارن در نظر



$$mv = \rho Q v = \rho v^2 A \quad (v \text{ ثابت})$$

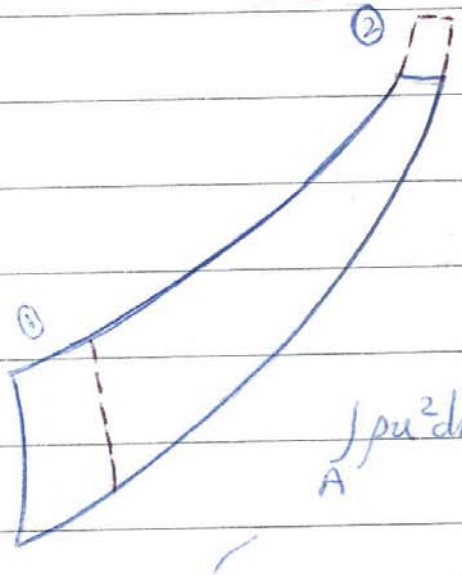
$$d(\rho Q v) = \rho dQ\, u$$

$$\text{کل مومنتم} = \int_A \rho u dQ = \int_A \rho u (u dA)$$

$$\rightarrow \text{کل مومنتم} = \int_A \rho u^2 dA$$

مومنتم ورودی در نقطه 2 می‌شود $\int_{A_2} \rho u^2 dA$ و مومنتم از دست رفته در این شود $\int_A \rho u^2 dA$

$$\rightarrow \Sigma F = \int_{A_2} \rho u^2 dA - \int_A \rho u^2 dA$$



با فرض سرعت ثابت مومنتم $\rho Q v$ می‌باشد ولی با فرض سرعت غیر ثابت مومنتم $\int_A \rho u^2 dA$ می‌باشد.

لذا $\int_A \rho u^2 dA \neq \rho Q v$

لذا $\int_A \rho u^2 dA = \beta \rho Q v \rightarrow \beta = \frac{\int_A u^2 dA}{v^2 A}$

ما معادله برای سرعت متوسط در نظر گرفتیم و توانستیم برای سرعت آنرا بدست آوریم اما برای بقیه سرعت‌ها نمی‌توان مومنتم را بدست آورد

$$\vec{\Sigma F} = \rho Q (\beta_2 \vec{V}_2 - \beta_1 \vec{V}_1)$$

* اگر سرعت در روی مقطع سطح کنترل ثابت نباشد، می‌توانیم با وارد کردن ضریب تصحیح اثر سرعت متوسط را استفاده کنیم.

حمید کاظم

نکته: اگر در کل سطح توزیع سرعت یکنواخت باشد (یا اصلا نباشد)، ضریب $\beta=1$ می‌باشد.

$$\beta=\frac{\int_A u^2 dA}{V^2 A}=\frac{V^2\int_A dA}{V^2 A}=1$$

مثال: ضریب β را با توجه به توزیع سرعت $1/7$ توانی در لوله محاسبه کنید.

$$\beta=\frac{\int_A u^2 dA}{V^2 A} \qquad u=u_{max}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$$

$$\int_A u^2 dA=\int_0^{r_0} u^2(2\pi r\,dr)=2\pi\int_0^{r_0} r u^2 dr \longrightarrow \begin{cases} u=u_{max}\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \\ r=r_0-y \end{cases}$$

$$\int_A u^2 dA=2\pi u_{max}^2\int_0^{r_0}(r_0-y)\left(\frac{y}{r_0}\right)^{2/7}dy=2\pi u_{max}^2 r_0^{-2/7}\int_0^{r_0}(r_0 y^{2/7}-y^{9/7})dy$$

$$=2\pi u_{max}^2 r_0^{-2/7}\left(\frac{r_0}{9/7}y^{9/7}-\frac{1}{16/7}y^{16/7}\right)_0^{r_0}=2\pi u_{max}^2 r_0^2\left(\frac{7}{9}-\frac{7}{16}\right)$$

$$=\frac{98}{144}\pi r_0^2 u_{max}^2 \qquad V=\frac{1}{A}\int u\,dA \longrightarrow V=\frac{98}{120}u_{max}$$

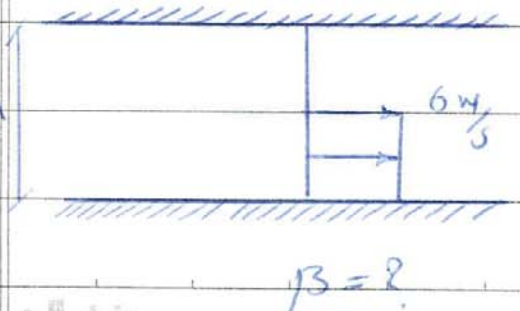
هم چنین داریم:

$$\beta=\frac{\frac{98}{144}\pi r_0^2 u_{max}^2}{\left(\frac{98}{120}\right)^2\pi r_0^2 u_{max}^2}=\frac{120^2\times 98}{98^2\times 144}=1.02$$

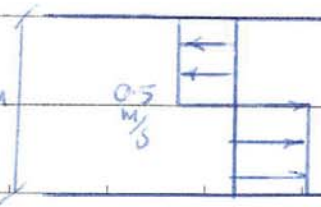
به β ضریب تصحیح خواهیم گفت.

در لوله‌ها β همیشه (یا اکثرا) اهمیت چندانی نداشته و می‌توان آن را مساوی یک در نظر گرفت.

مثال: در شکل‌های زیر توزیع سرعت داریم.



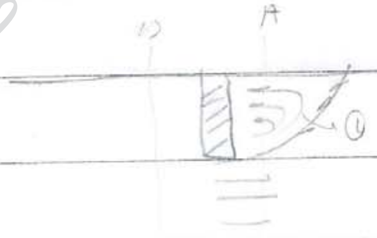
(ب)



(الف)

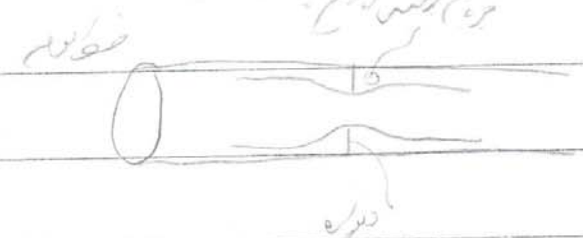
نهال NAHAL

حمید کاظم



اگر توزیع سرعت را داشته باشیم اگر مقطع A را در نظر بگیریم شکل سمت راست است که در آن ① جهت سرعت در دو جهت می چرخد در این حالت β=10 است.

اما در مقطع B ... شکل سمت ... که ... 13 > 1.75 ... قابل قبول نیست. ...



معادلات ... .

الف)

$$V = \frac{1}{A}\sum u_i A_i = \frac{1}{2}(-0.5\times1 + 1\times1) = 0.25$$

$$\beta = \frac{\sum u_i^2 A_i}{V^2 A} = \frac{0.5^2 + 1^2}{0.25^2 (2)} = 10$$

ب)

$$V = \frac{1}{A}\sum u_i A_i = \frac{1}{2}(6\times1) = 3$$

$$\beta = \frac{\sum u_i^2 A_i}{V^2 A} = \frac{6^2\times1}{3^2\times2} = 2$$

حمید کاظم

از المان روی دلخواه سیال در جهت عمودی خروجی داشته باشیم و غیر لزجی و تراکم ناپذیری باشد معادله در جهت z به شکل زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - g\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

در جهت y و z هم به این شکل است.

معادله دیگر هم $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ می‌شود. دقیق کنید معادله 4 مجهول است و حلش بسیار مشکل است.

کاربرد معادله مومنتم

۱) نیروی وارد بر یک صفحه تخت که بر خورد به جهت

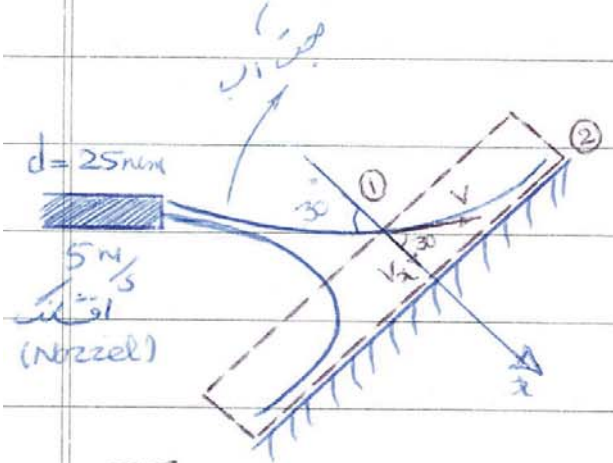
مثال: نیروی وارد به علت برخورد به صفحه در جهت x چیست؟

داخل جت فشار نداریم. چون در مرز جت فشار اتمسفر وجود دارد.

$\rightarrow P_1 = P_2 = 0$

حالی که آب توسط حجم کنترل قطع شده فشار صفر است. فقط می‌ماند نیروی ظرف که آب بهش F_x.

V_{2x} صفر است چون صفحه می‌گذارد.



$$\Sigma F_x = \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$F_x = 1000\left(\frac{\pi(0.025)^2}{4} \times 5\right)(0 - 5\cos 130) \rightarrow F_x = -10.62$$

$$R_x = 10.62$$

حمید کاظم

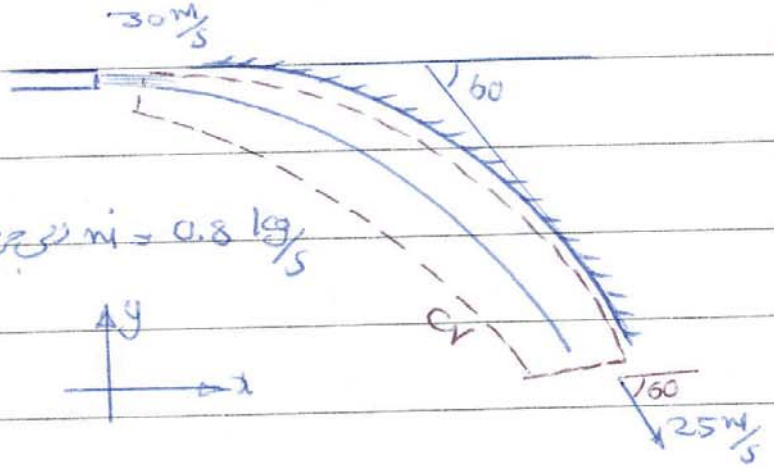
مثال: فرض کنید صفحه با سرعت $2\ m/s$ به سمت راست حرکت کند. نیروی کنترل را روی صفحه جهت ثابت نگه داشتن سرعت برای ناظر بیرونی محاسبه کنید.

$V_1 = 3\angle 30$

$$F_x = 1000\left(\frac{\pi(0.025)^2}{4} \times 3\right)(0 - 3\angle 30) = -3.82\ N$$

* این معادلات صحیح است تا وقتی که صفحه ثابتی وجود نداشته باشد. چون در این صورت حرکت به وجود می‌آید.

مثال: نیروی وارد بر پره توسط جت آب را به دست آورید. سپس زاویه ایجاد نیرو را نیز محاسبه کنید.



$\Sigma F_x = \rho Q(V_{2x} - V_{1x})$

چون فشار بسیار کم است می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. CV را از وسط حرکت جت در نظر گرفتیم. $\frac{Atm}{\Delta P = 0}$ به دلیل Atm

این جت بر اثر جوانبری کج می‌شود (در اندازه 3 دقیقه)

$$\rightarrow F_x = 0.8(25\angle 60 - 30) \Rightarrow F_x = 14\ N\ (-i) = -14N$$

$\rightarrow R_x = 14\ N$ نیروی وارد بر پره

چون $25\angle 60 = 30\ m/s$ تبدیل شده به F_x نیروی مقاومت است.

$$\sum F_y = \rho Q (V_{2y} - V_{1y}) \rightarrow F_y = 0.8 (-25 \sin 60 - 0)$$

$$\rightarrow F_y = -17.32\ N$$

نیروی وارد بر صفحه در راستای y برابر $25\sin 60$ و جهت آن منفی است، پس نیروی F_y مثبت است.

$$R_y = 17.32\ N$$

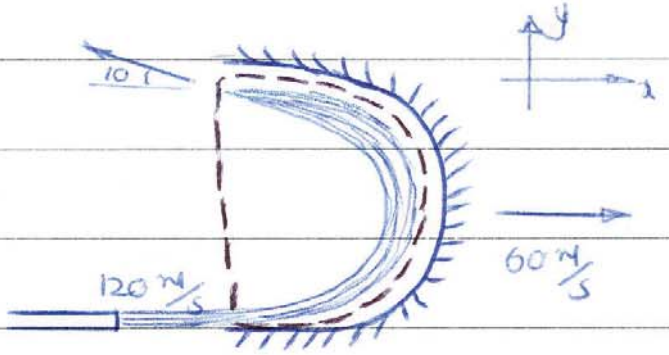
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 22.27$$

$$tg\theta = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \theta = 51.05^\circ$$

مثال: نیروی وارد بر صفحه در راستای x و y را بیابید.

چون اطلاعاتی نداریم سرعت صفحه را $120\ m/s$ فرض می‌کنیم. (با فرض حرکت صفحه)

سرعت برخورد جت $120 - 60$ یعنی $60\ m/s$.



$$A = 0.001\ m^2$$

$$\sum F_x = \rho Q (V_{2x} - V_{1x}) \Rightarrow F_x = 1000 \times 60 \times 0.001 (-60\cos 10 - 60)$$

$$\Rightarrow F_x = -7.145\ kN$$

$$\sum F_y = \rho Q (V_{2x} - V_{1x}) \rightarrow F_y = 1000 \times 60 \times 0.001 (60 \sin 10 - 0)$$

$$\rightarrow F_y = 625\ N$$

$$\rightarrow \theta = 5^\circ \qquad R = 7.172\ kN$$

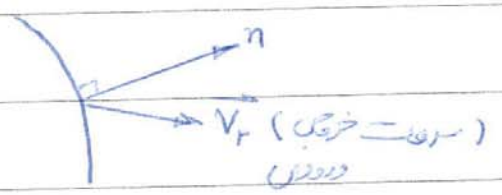
$$\text{توان} = \frac{F_x \cdot U}{s} = 428.7\ kw$$

(U: سرعت)

حمید کاظمی

تمام مسائل حل شده به صورتی بود که خروجی داشت. اما اگر صفر بود چی؟ دانستم.

$$\Sigma F = \iint_{CS} \rho \vec{V} (\vec{V_r} \cdot \vec{n}) dA$$ (CS سطح کنترل)



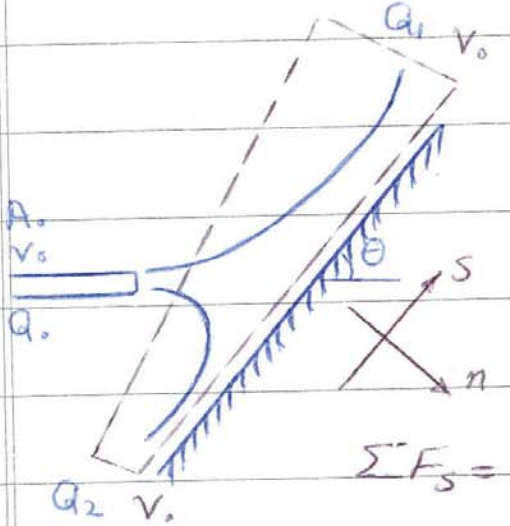
$$\Sigma F = (\Sigma \rho Q V)_{\text{خروجی}} - (\Sigma \rho Q V)_{\text{ورودی}}$$

اگر غیردائمی بود:

$$\Sigma F = \iint \rho V (V_r \cdot n) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho V dV$$

مثال: آبجوئی با سطح مقطع A_0، سرعت V_0، دبی Q_0 هست و دبی‌های Q_1 و Q_2 را ایجاد کند. رابطه Q_1 و Q_2 را بدست آورید. (اصطکاک نداریم)

سرعت‌های خروجی را V_0 فرض می‌کنیم.



$$\Sigma F_S = (\Sigma \rho Q V)_{\text{خروجی}} - (\Sigma \rho Q V)_{\text{ورودی}}$$

از اصطکاک داریم و نیروی ΣF_S هم نداریم

$$0 = \rho Q_1 V_0 + \rho Q_2 (-V_0) - \rho Q_0 V_0 \cos\theta$$

$$\rightarrow \begin{cases} Q_1 - Q_2 = Q_0 C_1\theta \\ Q_1 + Q_2 = Q_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \frac{Q_0}{2}(1 + C_1\theta) \\ Q_2 = \frac{Q_0}{2}(1 - C_1\theta) \end{cases}$$

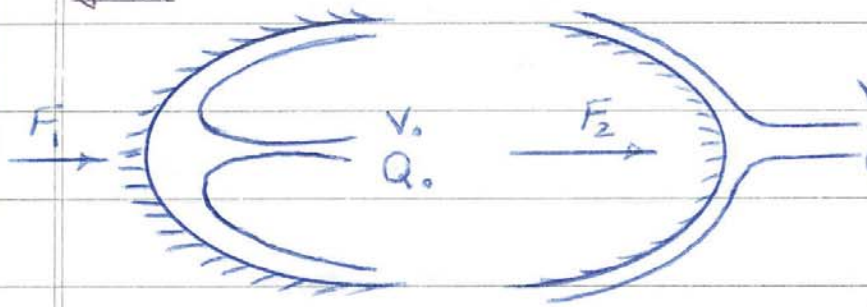
بقیه مسئله

$$\Sigma F_n = \rho Q_0 (0 - V_0 \sin\theta)$$

$$\rightarrow F_n = -\rho Q_0 V_0 \sin\theta$$

به جهت n نقطه نیرو وارد و خروجی داریم.

مثال: F_1/F_2 را محاسبه کنید.



الف) 2 ب) 4 ج) ∞ د) 0

با تقارن مقادیر دبی خروجی را $Q_0/2$ می‌گیریم و سرعت هم V_0 است.

$$F_1 = -\rho \frac{Q_0}{2} V_0 - \rho \frac{Q_0}{2} V_0 - (\rho Q_0 V_0) = -2\rho Q_0 V_0$$

$$F_2 = \rho \frac{Q_0}{2} V_0 + \rho \frac{Q_0}{2} V_0 - \rho Q_0 V_0 = 0$$

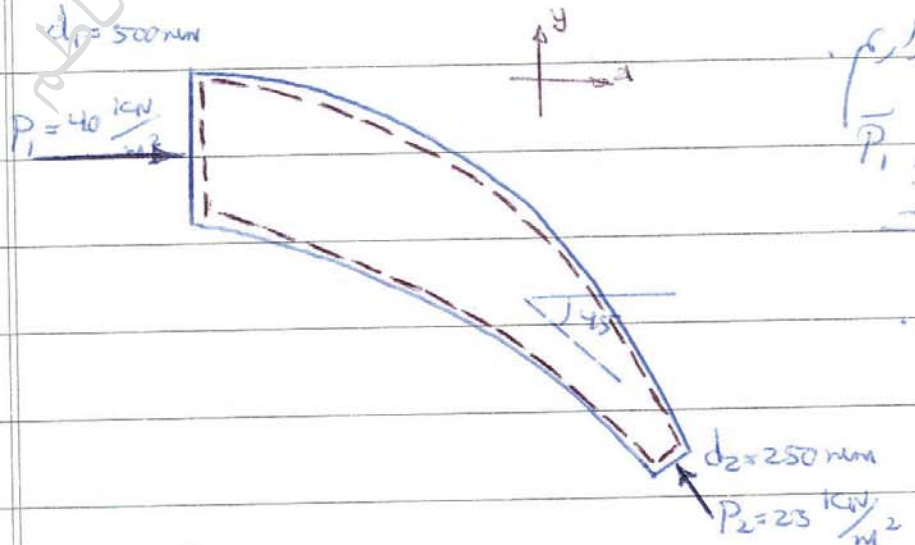
$$\rightarrow F_1/F_2 = \infty$$

اگر سرعت جریان دورودی V_{max} شود و اصطکاک نداشته باشیم $F_2 = 0$ می‌شود.

* اگر توانیم از اصطکاک صرفنظر کنیم می‌توانیم سرعت‌ها (دورودی) را برابر بگیریم.

حمید کاظم

مثال: توانایی به شکل مقابل داریم.
سرعت بالادست فشاری بر P_1 است. فشار سرعت $P_1 = 40 \frac{kN}{m^2}$
باشد $P_2 = 23 \frac{kN}{m^2}$ می‌باشد.
$\rho = 800 \frac{kg}{m^3}$, $Q = 0.45 \frac{m^3}{s}$
نیروی وارد بر زانو را محاسبه کنید.



$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = 2.29 \frac{m}{s} \qquad V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = 9.167 \frac{m}{s}$$

$$\sum F_x = \rho Q (V_{2x} - V_{1x})$$

$$\rightarrow 40 \times 1000 \times \pi/4 (0.5)^2 - 23 \times 10^3 \times \pi/4 (0.25)^2 \cos 45 + F_x =$$

$$800 \times 0.45 (+9.167 \cos 45 - 2.29) \rightarrow F_x = -10.214\,kN$$

$-5545.75\,N$

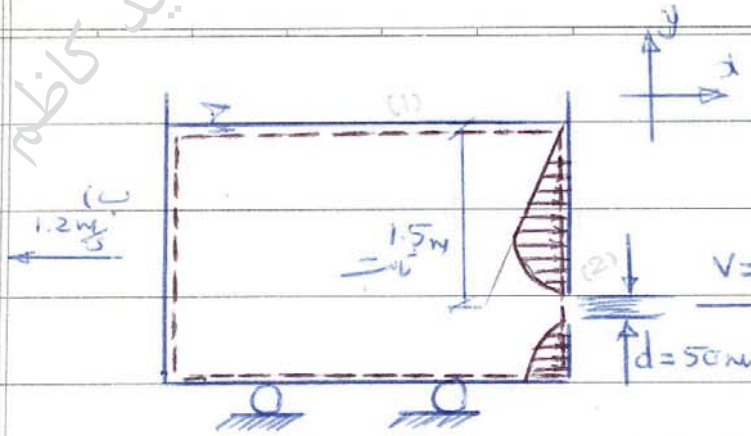
$$\sum F_y = \rho Q (V_{2y} - V_{1y})$$

$$\rightarrow 23000 \times \pi/4 (0.25)^2 \sin 45 + F_y = 800 \times 0.45 (-9.167 \times \sin 45 - 0)$$

$$\rightarrow F_y = -3.28\,kN$$

حمید کاظم

مثال ۶: نیروی وارد بر افزایش سرعت در اثر برخورد دو افشانه برخورد کننده آن وارد می شود



الف) نیروی

ب) خروجی سرعت $V = 1.2\ m/s$ دارد محاسبه

الف)

(برنولی) برای اتمسفر دیگر فشار صفر است چون با فشار atm نزدیک است

$$\Sigma F = \rho Q (V_2 - V_1) = 1000 \times 4.9 \times \frac{\pi}{4}(0.05)^2 (4.9 - 0) = 47.14\ N$$

$$\rightarrow F_x = 47.14\ N \qquad R_x = -47.14\ N$$

روش انتزاعی دیگر و مثال توزیع فشار نیست و مستقیماً کل نیرو را به ما می دهد.

* اگر ارتفاع 1.5m ثابت نباشد دیگر جریان پایا (steady) نخواهد بود. اگر 1.5m را با عدد بزرگتر بدهیم سرعت ورودی عوض می شود.

ب) چون $V = 4.9\ m/s$ و با توجه به ارتفاع 1.5m است پس با سرعت $1.2\ m/s$ صحیح 99% نیروی برآیند را می دهد.

مثال ۷: راکتی دارای جرم $m_f = 300{,}000\ kg$ و $m_V = 150{,}000\ kg$ دارای سوخت است که سوخت را با $\dot{m}$ ثابت می سوزاند و نیروی $T = 5\ MN$ را وارد می کند. سرعت خروج سوخت $V_V = 3000\ m/s$ می باشد. این راکت از حالت سکون شروع به حرکت می کند و

$$T = \dot{m} V_2 \rightarrow 5 \times 10^6 = \dot{m} \times 3000 \rightarrow \dot{m} = \frac{dm}{dt} = 1667\ kg/s$$

$$t = \frac{300000}{1667} = 180\ s$$

$$\Sigma F = m \frac{dv}{dt} \rightarrow T - (m_r + [m_f - \dot{m}t])\, g = (m_r + [m_f - \dot{m}t]) \frac{dv}{dt}$$

$$\Sigma F = \rho Q (V_2 - V_1) \xrightarrow{\text{ثابت}} T = \dot{m}(V_r - 0)$$

در حرکت شتاب دار از کنترل حجم لاگرانژی استفاده می‌کنیم.

انتگرال سرعت t را برای خروج صفحه محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$V_t = -9.81t - 3000 \ln\left(1 - \frac{t}{269.95}\right)$$

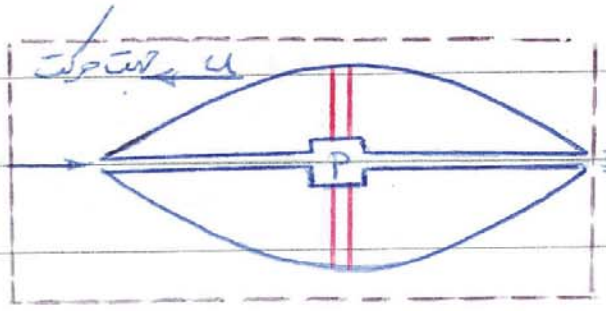
$$L_1 = \int_0^{180} V_t dt = 84.6 \text{ km}$$

بالاتر سرعت تا ارتفاع 84.6 km می‌رود از آن به بعد با شتاب ثابل سرعت صفر می‌شود.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz \rightarrow z = 119 \text{ km}$$

* اثر تغییرات شتاب ثقل و نیروی چسبندگی drag هوا صرف نظر شده.

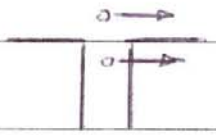
مثال: فنی در داخل آب به سمت چپ حرکت می‌کند. جت آب از دو نازل به سمت راست خارج می‌شود و باعث حرکت قایق می‌شود.



$$\Sigma F = \rho Q (V_2 - V_1) = \rho Q (V_r - u)$$

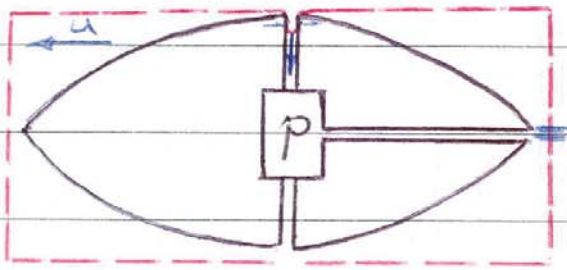
حال جرم کنترل آب از دو طرف قایق وارد می‌شود.

فرض می کنیم ... وقتی به پره برخورد کرد کلا وارد دلو می شود و مومنتم آبی که می زند
آبی که با سرعت جریان نسبت به دلم و با سرعت جریان نسبت به زمین دارد
و مومنتم دارد



پس ما برای دلم

مدل کنترل volume را حول دلم می زنیم



ب) $\Sigma F = \rho Q (V_r - u)$

توان برابر است با نیرو ضرب در سرعت دلم

$$\text{توان} = \frac{1}{2}\rho Q (V_r^2 - u^2)$$

$$\rightarrow \text{Efficiency} = \frac{\rho Q (V_r - u) u}{\frac{1}{2}\rho Q (V_r^2 - u^2)}$$

ب) $\Sigma F = \rho Q (V_r - u)$ نیرو $= \frac{1}{2}\rho Q V_r^2$

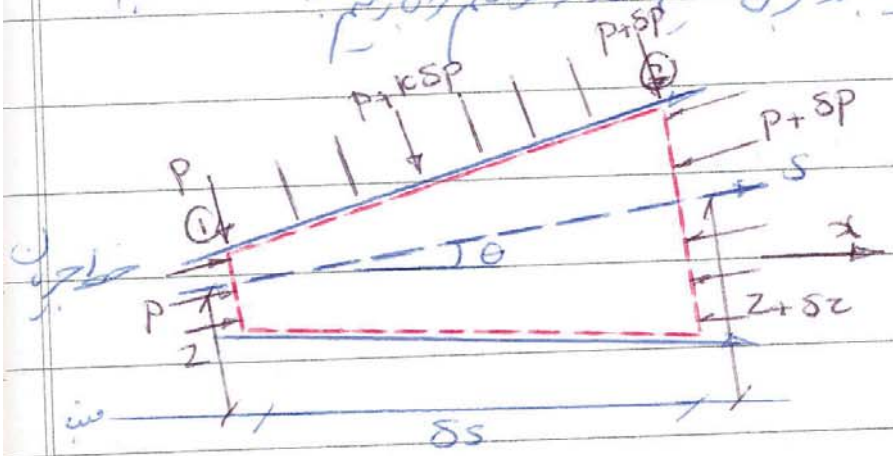
حمید کاظم

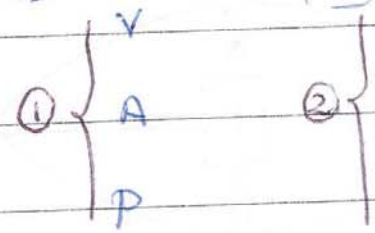
معادله اویلر (معادله برنولی)

معادله‌ای که تأثیر تبادل حرارت داریم و معادله انرژی نام دارد.

این معادله بیشترین تعداد درسی که عنده نوشته شده است. این معادله از اصل معادله مومنتم بدست آمده است.

می‌توان در راستای یک خط جریان، قانون مومنتم و دوران و خروجی را نوشت و نیروهای حجم کنترل را بدست آوریم. حال می‌خواهیم به ازای تمام معادله مومنتم را بنویسیم.





۱) در راستای جریان هستیم

۲) جریان دائمی است.

$$\sum F_s = \rho Q (V_2 - V_1) = \rho V A \delta V$$

$$F_g = \rho g \left(A + \frac{\delta A}{2}\right) \delta s \sin\theta = \rho g \left(A + \frac{\delta A}{2}\right) \delta s \left(\frac{\delta z}{\delta s}\right)$$

$$\Rightarrow F_g = \rho g \left(A + \frac{\delta A}{2}\right) \delta z$$

$$F_1 = P \cdot A \qquad F_2 = (P + \delta p)(A + \delta A)$$

$$\Rightarrow F = (P + k\delta p)\delta A$$

فرض سیال ایده‌آل و تنش برشی در لوله‌ها را صفر می‌گیریم.

$$F_1 - F_2 - F_g + F_{\text{ثقل}} = \rho V A \delta V$$

δ را به سمت صفر میل می‌دهیم

$$-A\delta p - \rho g A \delta z = \rho A V \delta V$$

دو طرف را بر $\rho A \delta s$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} + V\frac{dv}{ds} + g\frac{dz}{ds} = 0 \leftarrow \text{معادله اویلر}$$

از دو طرف انتگرال می‌گیریم و فرض چگالی را جریان غیرقابل تراکم می‌گیریم تا ρ ثابت ρ باشد.

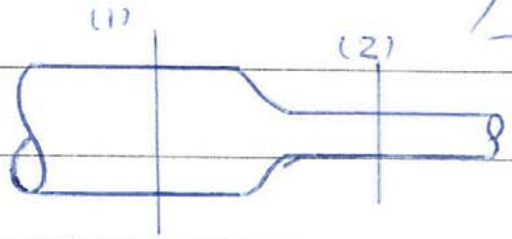
$$\Rightarrow \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = c \leftarrow \text{معادله برنولی}$$

فشار، سرعت و تراز مجموعا ثابت است و این به خط جریان مربوط می‌شود

در واقع یک خط جریان می‌گیریم و برنولی می‌نویسیم.

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

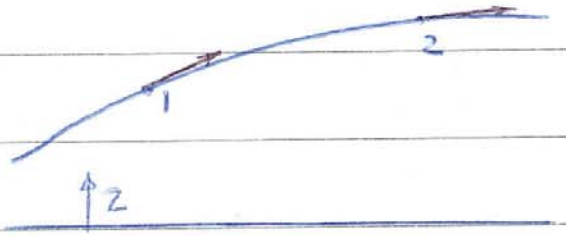
جریان در لوله‌ای همانند لوله‌ی زیر از (۱) وارد و در (۲) خارج می‌شود



$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$\therefore P_2$ بدست می‌آید و فشار ما محاسبه می‌شود

حمید کاظم



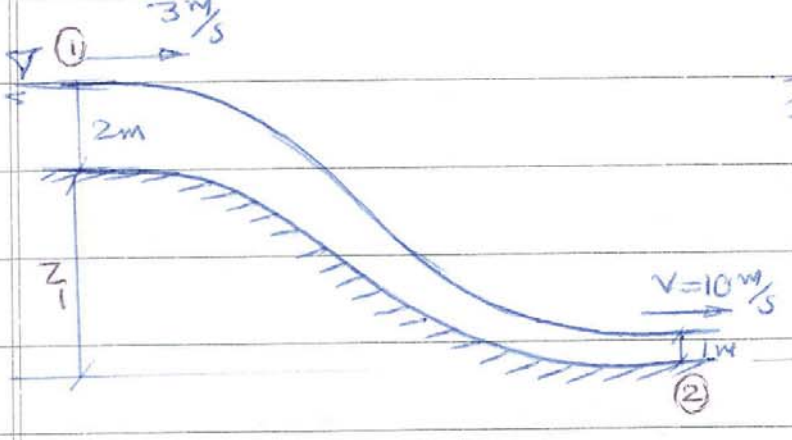
$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + Z_2$$

۱) دائمی ۲) طول یک خط جریان

۳) غیر ماندا ۴) غیر قابل تراکم

شماره ۱ و ۲ و ۴ قابل قبول است اما شماره ۳ غیر قابل قبول می باشد. این مسئله را به نحوی حل می کنیم.

مثال: جریان حول ایرفویل نشان داده شده است. ارتفاع وزنه (h) چقدر است؟ از اصطکاک صرفنظر کرده و توزیع سرعت را یکنواخت در نظر بگیرید.



کف کانال را مبنا گرفته و حول سطح آب کنترل حجم می کنیم. فشار در بالا و پایین سطح آب برابر است و حول آب در حال حرکت نداریم. فشار هیدرواستاتیک است. ($\rho g h$)

$$\frac{9}{2\times 9.81} + \frac{2\times\rho g}{\gamma} + Z_1 = \frac{100}{2\times 9.81} + \frac{1\times\rho g}{\rho g} + 0$$

$$\Rightarrow Z_1 = 3.64\ m$$

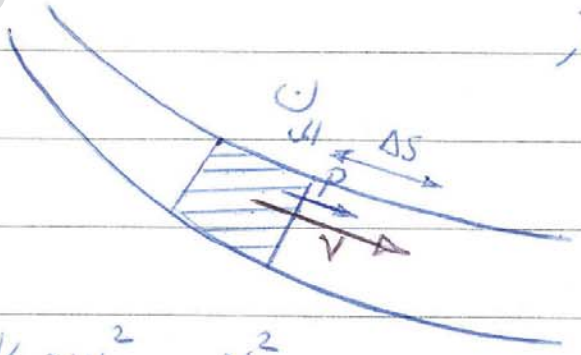
اگر سطح آزاد حذف شده باشد:

$$\frac{9}{2\times 9.81} + \frac{0}{\gamma} + Z = \frac{100}{2\times 9.81} + 0 + 1$$

$$\Rightarrow Z = 5.64 \Rightarrow Z_1 = 3.64\ m$$

* تعداد معادلات مقدار برنولی، انرژی بر واحد وزن است و برحسب ارتفاع خطوط جریان مایع قابل بیان می باشند.

برای استخراج معادله برنولی جسم آلمانی از آب درون خط جریان را در نظر می گیریم.



$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg} = \frac{v^2}{2g}$$

از انرژی جنبشی بر وزن آن تقسیم کنید.

$\frac{v^2}{2g}$ انرژی جنبشی آن بر وزن واحد وزن. واحدش $\left(\frac{N.M}{N}\right)$ و جرم m است.

$$\frac{mgz}{mg} = z$$

از انرژی پتانسیل بر وزن آن تقسیم کنید.

z انرژی پتانسیل بر واحد وزن است.

$\frac{P}{\gamma}$ انرژی جریانی یا کار جریانی بر واحد وزن است.

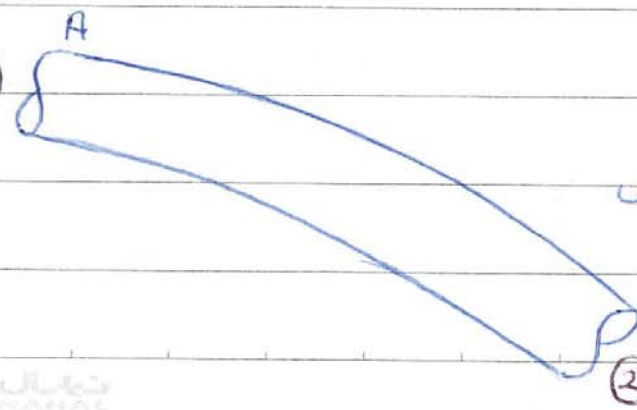
ارسال به اندازه ΔS حرکت کند کار انجام می شود.

سیال مشکل دارد که تابع خواص خودش است.

$$\frac{P.\delta A.\delta s}{\rho g \delta A.\delta s} = \frac{P}{\gamma}$$

جابجایی / نیرو / وزن

معادله برنولی می گوید سیال انرژی پتانسیل و جنبشی و فشاری حمل می کند ثابت است که انرژی فشاری در حرکت سیال با جابجایی است.

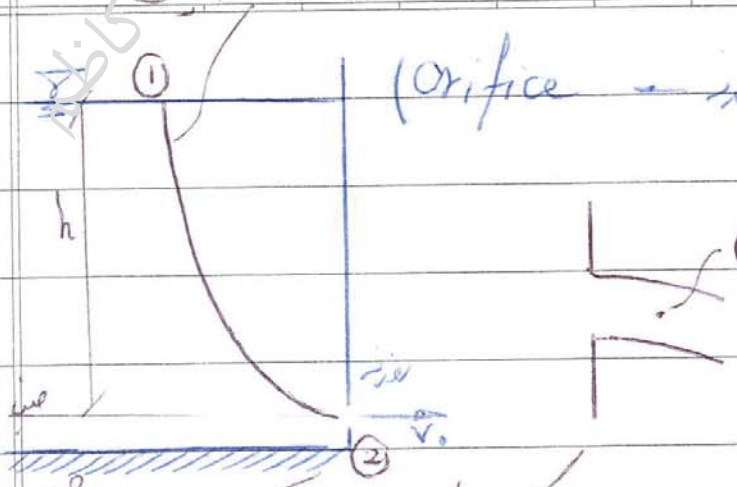


مثلاً در مقطع ① و ② با مساحت مقطع سیال با وجود کم شدن انرژی پتانسیل به علت پوسته $V_1A_1 = V_2A_2$ انرژی جنبشی زیاد می شود (به علت شکل خاص) ولی فشار افزایش می یابد.

مطابق زیر

مثال: سرعت V_0 را بیابید. (Orifice = سوراخ)

(سطح آزاد ثابت است)



علت اینکه ② را در نظر گرفتیم این است که $P=0$ است.

سرعت در هر نقطه برابر سرعت در حالت جریان است. از سطح بالایی می‌دانیم V_1 داشتیم که $V_1 = 0$ است.

با اطلاعات برنولی $\Rightarrow V_0 = \sqrt{2gh}$

$$0 + 0 + h = \frac{V_0^2}{2g} + 0 + 0$$

با اطلاعات برنولی بنابراین سرعت سوراخ برابر $\sqrt{2gh}$ است. این اطلاعات بدست می‌آید.

تنش‌های برشی مانع حرکت هستند بنابراین مقداری از انرژی توسط این برش‌ها صرف h_f (افت انرژی) تبدیل می‌شود.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + h_f$$

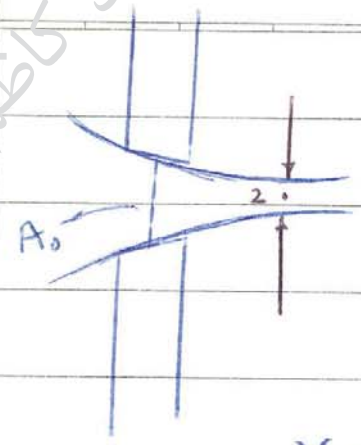
انرژی توربین را h_t، انرژی پمپ را h_p گوییم.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + h_p = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + Z_1 + h_f + h_t$$

معمولاً ضریبی برای برش برای معادله توریچلی در نظر گیریم.

$$V_0 = C_v \sqrt{2gh} \qquad 0.85 < C_v < 0.95$$

حمید کاظم



سطح (2) از سطح مقطع جریان کمتر است که به این سطح، Vena Contracta گفته و برای آن ضریبی از سطح تعریف کرده که C_c می‌باشد.

$$Q = VA$$

$$V = C_v\sqrt{2gh} \quad , \quad A = C_c A_0$$

$$\Rightarrow Q = C_v C_c A_0 \sqrt{2gh}$$

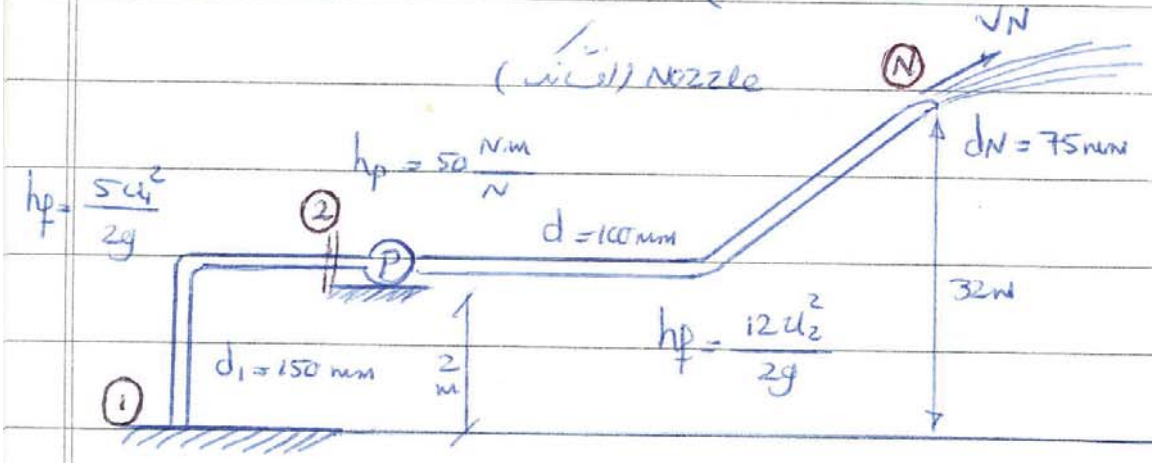
حاصل دو ضریب $C_v C_c$ را C_d ضریب تخلیه می‌گویند که معمولاً $0.6 < C_d < 0.65$ می‌باشد.

$$Q = C_d A\sqrt{2gh}$$

← برای آزمایشگاه

← دبی خروجی از نازل یا لوله یا مخزن

مثال: دبی جریان عبوری از نازل را بدست آورید.



u_1 سرعت در لوله ۱ است.

بین نقاط N و 1 بنویسی

$$0 + 0 + 0 + 50 = \frac{V_N^2}{2g} + 0 + 32 + \frac{5u_1^2}{2g} + \frac{12u_1^2}{2g}$$

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 = V_N A_N$$

$$\Rightarrow V_N = 8.314 \ m/s$$

حمید کاظمی

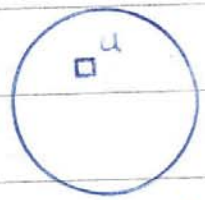
(2) و (1) برای

$$0+0+0 = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + 2 + \frac{5u_1^2}{2g} \rightarrow P < 0$$

فشار منفی یا مکش ایجاد می‌شود

$$\frac{P_3}{\gamma} = -3.32\,m \qquad P_3 = -32.57\times10^3\ N/m^2$$

$\frac{1}{2}\dot{m}V^2$ ← انرژی جنبشی در واحد زمان



$\frac{1}{2}d\dot{m}V^2$

$$\int \tfrac{1}{2}\rho u^3 dA = \alpha\, \tfrac{1}{2}\dot{m}V^2 \Rightarrow \int \tfrac{1}{2}\rho u^3 dA = \alpha\, \tfrac{1}{2}\rho Q V^2$$

$$\int \tfrac{1}{2}\rho u^3 dA = \alpha\, \tfrac{1}{2}\rho A V\, dA$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\int u^3 dA}{U^3 A}$$

ضریب کوریولیس

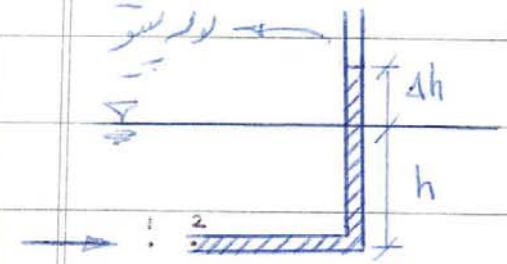
تصحیح انرژی جنبشی

حمید کاظم

کاربرد معادله برنولی برای اندازه گیری در سیالات:

اندازه گیری سرعت را در دو مثال کوتاه و مفید بررسی می‌کنیم.

۱) اندازه گیری سرعت:



لوله پیتو را در نظر بگیرید که برای اندازه‌گیری سرعت جریان آب در یک کانال باز مورد استفاده قرار می‌گیرد. این لوله به شکل L است و دهانه آن در جهت جریان قرار دارد. ارتفاع آب در لوله بالاتر از سطح آب کانال است.

نقطه ۱ در دهانه لوله و نقطه ۲ در امتداد لوله است. نقطه ۱ نقطه سکون است و نقطه ۲ در امتداد خط جریان قرار دارد.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + Z_2$$

($V_2 = 0$, $Z_1 = Z_2$)

سرعت در نقطه ۱ برابر صفر و در نقطه ۲ تبدیل شده است.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{\rho g h}{\gamma} = \frac{\rho g (h+\Delta h)}{\gamma}$$

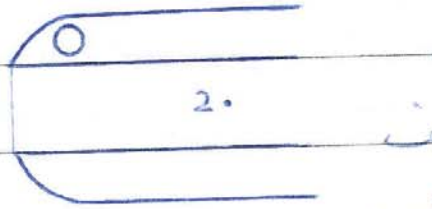
$$\Rightarrow V_1 = \sqrt{2g\Delta h}$$ ← فرمول لوله پیتو

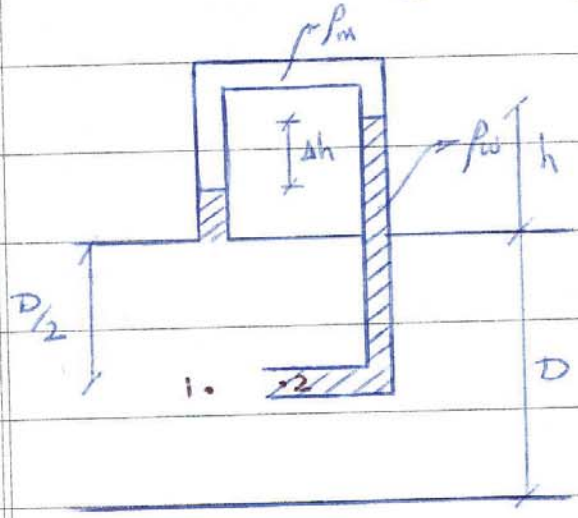
* لوله پیتو سرعت را کمی کمتر از مقدار واقعی نشان می‌دهد. در این حالت ضریب اصلاحی برای سرعت می‌خواهیم.

* لوله پیتو کاملاً تمیز باشد. همچنین اندازه‌گیری ارتفاع آب نیز دقت است.

حمید کاظم

در شکل مقابل دایره‌ی (۱) داده شده که لوله است که
فشار در ۱ برحسب $\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}$ می‌توان سرعت را بدست آورد.
از رابطه $V_1 = \sqrt{2gh}$ ، h بدست می‌آید. (برای کاربرد آزمایشگاه)





از رابطه برنولی بین (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{P_2}{\gamma} = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} \quad (I)$$

همچنین از تعادل فشار در مانومتر بدست می‌آید:

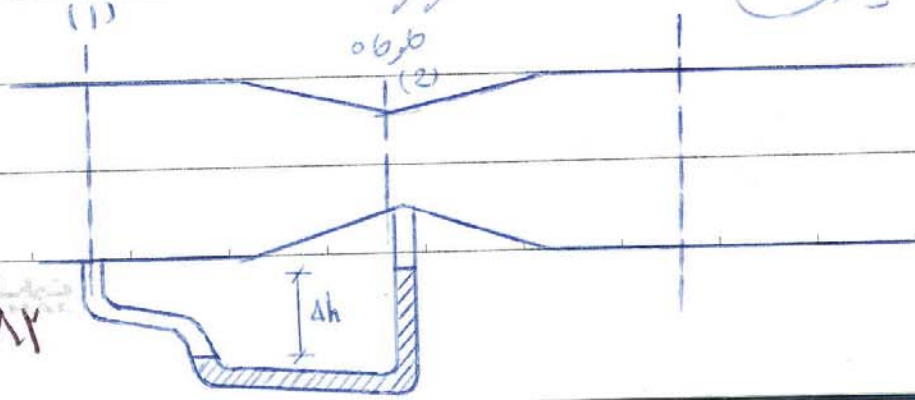
$$P_2 - \rho_w g(h + D/2) + \rho_m g \Delta h + \rho_w g(\frac{D}{2} + h - \Delta h) = P_1 \quad (II)$$

از I و II ، P_2 ، P_1 بدست می‌آید.

۲) اندازه‌گیری دبی:

* اگر در مقطعی از لوله تنگی ایجاد کنیم و علت کم شدن سطح مقطع سرعت زیاد می‌شود و فشار سرعت باعث کاهش فشار می‌شود.

در این حالت فشار را از مانومتر بدست می‌آوریم با سرعت بدست می‌آید. در سطح مقطع ۱ ضرب می‌کنیم، دبی اندازه‌گیری می‌شود.

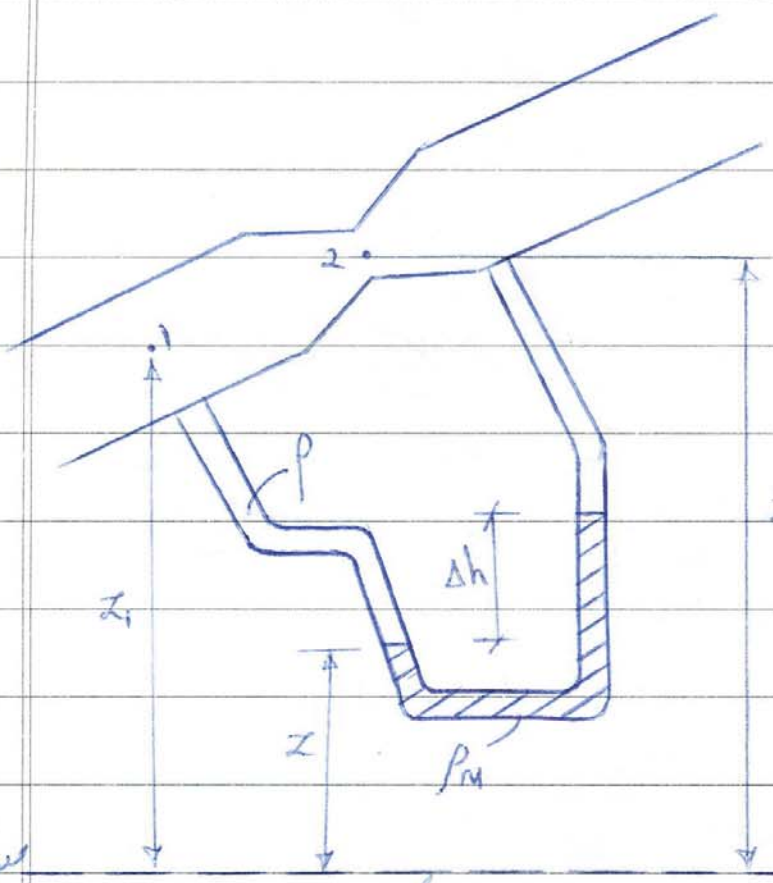


لوله ونتوری

حمید کاظم

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \quad , \quad A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$\rightarrow V_1 = \left(\frac{A_2}{(A_1^2 - A_2^2)^{1/2}}\right) \sqrt{2g\left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + z_1 - z_2\right)}$$



$$P_1 + \rho g(z_1 - z) - \rho_M g \Delta h - \rho g(z_2 - z - \Delta h) = P_2$$

$$\rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \Delta h\left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1\right) \quad (1)$$

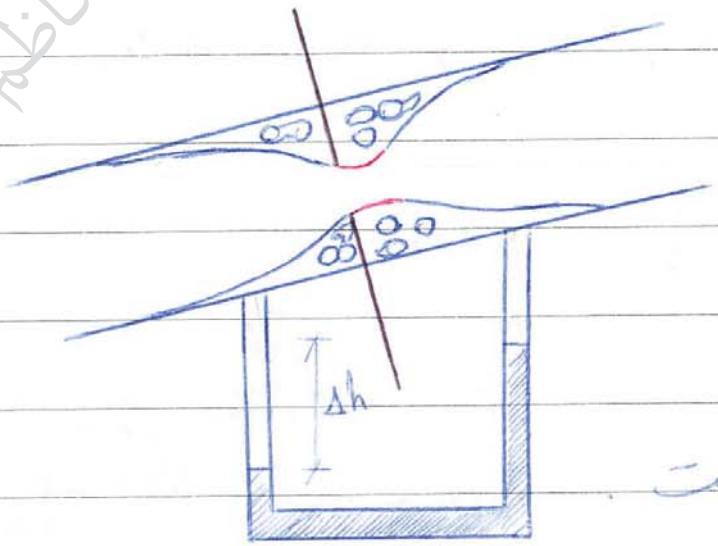
$$\rightarrow Q = V_2 A_2 C_d$$

$$(1) \rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \Delta h\left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1\right)$$

* چون در طوقه Vena داریم پس سطح A_2 کمتر از سطح طوقه کوچکتر است ضریب C_d را لحاظ می‌کنیم. $(C_d < 1)$

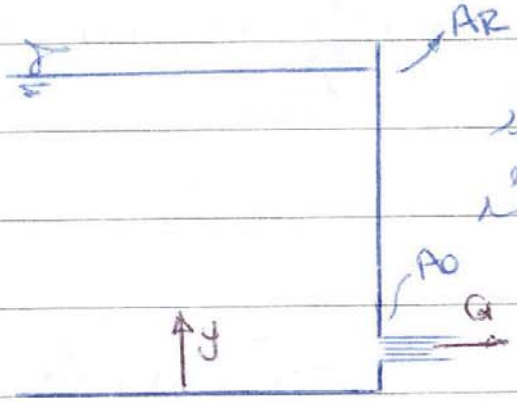
معمولاً از دو نوع لوله می‌توان استفاده کرد که هیچ‌کدام بدون عیب نیستند. می‌توان کلاً رد دو نوع لوله می‌توان صفحه‌ای سوراخ‌دار قرار داد (orifice plate) که خروجی لوله واشری را می‌سازد که شدت دبی سوراخ Vena دارد.

حمید کاظم



در اینجا ضریب Cd کم می‌شود، زیرا سرعت و جریان کمتر می‌شود. قدرت عبور را می‌گیرد، head را در واقع کمتر اصلی پایین می‌آورد. فرمول همان فرمول قبلی است. تنها تفاوت این است که قدرت متفاوت است.

تخلیه در حجم‌های غیر دائمی (غیر ماندگار)



از سطح آب در مخزن پایین می‌آید و در نتیجه حجم آب کاهش می‌یابد، اما از سطح مقطع آب قبلی بیشتر از سطح مقطع افزایش می‌یابد.

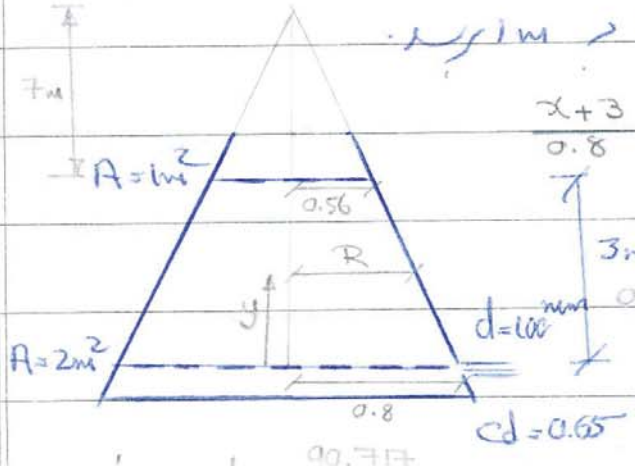
$A_R >> A_o$

R → Reservoir O → orefice

$$Q.dt = A_R.dy \rightarrow t = \int \frac{A_R}{C_d A_o \sqrt{2gy}} dy$$

$$\rightarrow t = \frac{2A_R}{C_d A_o \sqrt{2g}} (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})$$

مثال: حساب کنید زمانی که سطح آب از 2.5m به 1m برسد.



$$\frac{x+3}{0.8} = \frac{x}{0.56} \rightarrow x = 7 \quad \frac{10}{0.8} = \frac{10-y}{R} \rightarrow R = 0.08(10-y)$$

$$Q = C_d \times \sqrt{2 \times 9.81 \times y} \times \pi \times \frac{0.1^2}{4} = 0.035 C_d \sqrt{y}$$

$$0.035(0.65)\sqrt{y}\, dt = \pi (0.08(10-y))^2 dy$$

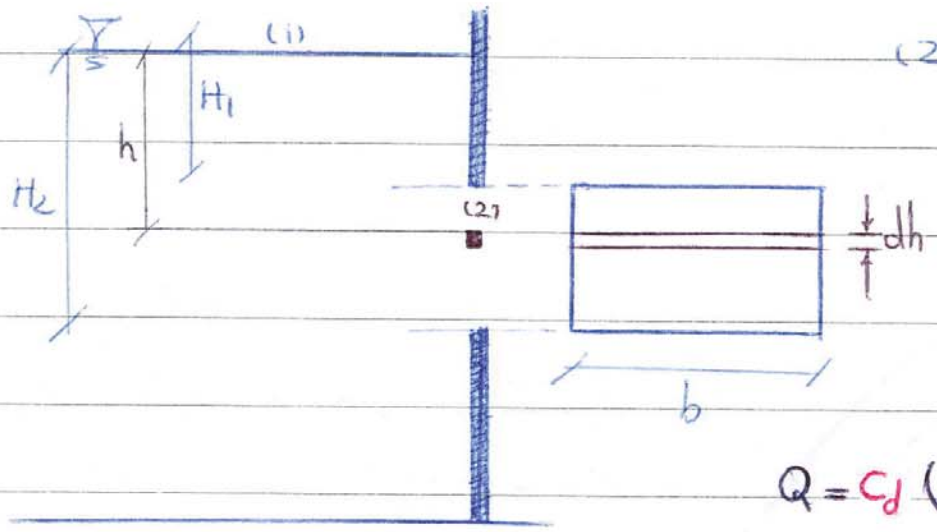
$$1.131\, dt = \frac{(10-y)^2}{\sqrt{y}} dy$$

$$t = \frac{90.717}{C_d}$$

حمید کاظم

از لبه دریچه عبور کند وارد کانال جدید می شویم.

تئوری اوریفیس لبه تیز:



از رابطه برنولی بین (1) و (2)

$$V_2 = \sqrt{2gh}$$

$$dQ = b \cdot \sqrt{2gh}\, dh$$

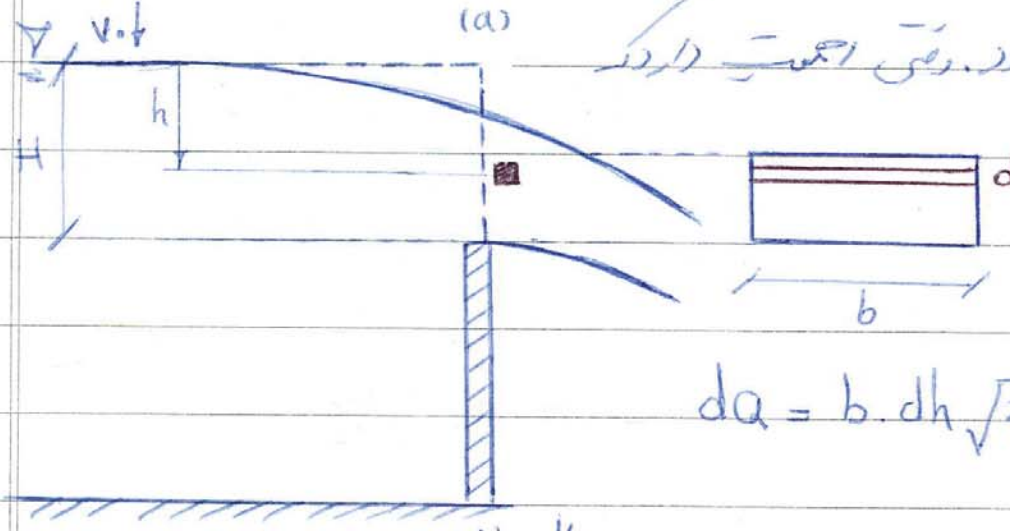
$$Q = b\sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} \sqrt{h}\, dh$$

$$Q = C_d \left(\tfrac{2}{3} b\sqrt{2g}\right)\left(H_2^{3/2} - H_1^{3/2}\right)$$

* نقطه (2) در وسط است نه در داخل دریچه.

لبریز (Weir):

این موضوع بیشتر مورد توجه است. وقتی آب از روی دیواره نازک بالا می رود.



$$dQ = b \cdot dh\sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow Q = b\sqrt{2g} \int_0^H h^{1/2}\, dh$$

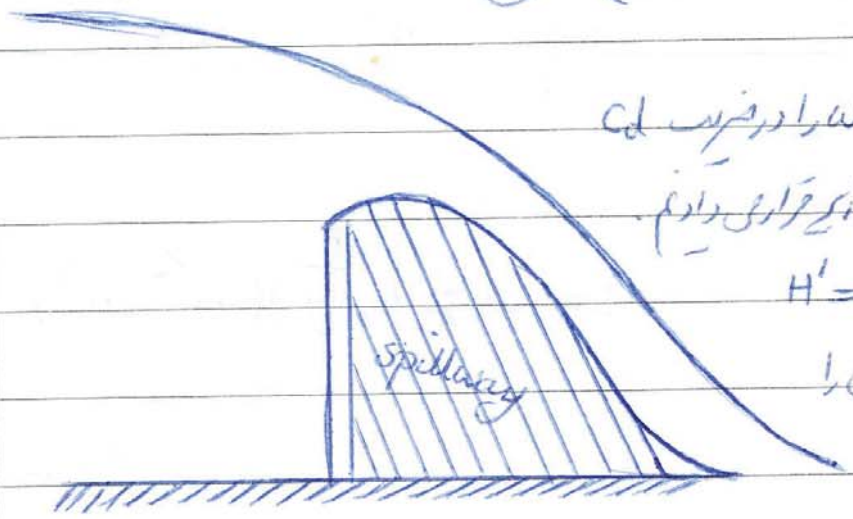
$$\Rightarrow Q = C_d \tfrac{2}{3} \sqrt{2g}\, b H^{3/2}$$

$$Q = C_d \left(\tfrac{2}{3} b\sqrt{2g}\right) H^{3/2}$$

حمید کاظمی

* در مقطع (۱) عمق و سرعت معلوم است. این اطلاعات را به مقطع (۲) می‌بریم که عمق مجهول است. تا الان هم معلوم نشده که عمق و سرعت در این مقطع چه مقدار است.

در سد که دبی زیاد و ارتفاع زیاد است، از Spillway استفاده می‌کنند.



* تأثیر سرعت V_0 آب در بالادست weir را در ضریب C_d می‌بینیم. و گفتیم باید H' را به صورت زیر قرار دهیم.

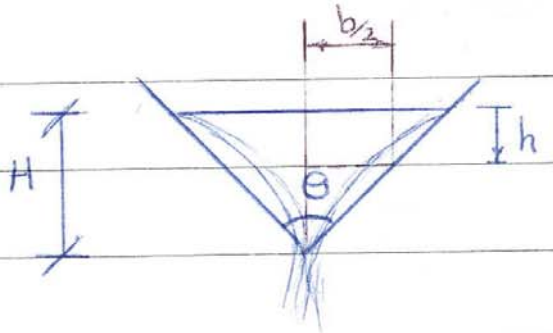
$$H' = H + \frac{V_0^2}{2g}$$

اما چون $V_0 \to 0$ صرف می‌کند آن را در C_d اعمال می‌کنیم.

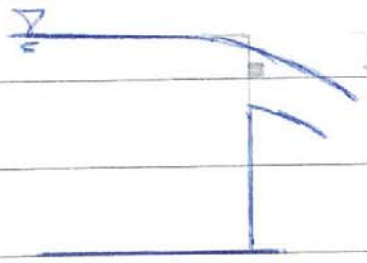
لبرز مثلثی

در سرریز مثلثی اگر دبی خیلی کم باشد کشش سطحی از عوامل تأثیرگذار می‌شود. فرمول گسسته شده دبی است.

اگر b را کم کنیم انتهای تیغه بیشتر می‌رود و این مشکل رفع می‌گردد.



$$b = 2(H-h)\,tg\,\theta/2$$



$$Q = \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g}\, tg\,\theta/2\, H^{5/2}$$

$$dQ = C_d \cdot v\, dH \quad \rightarrow \quad dQ = C_d \sqrt{2gh}\, b\, dh$$

$$\rightarrow dQ = C_d \sqrt{2gh}\,(2(H-h)\,tg\,\theta/2)\,dh$$

مثال: یک سرریز مثلثی برای اندازه‌گیری دبی مورد نظر در اندازه‌گیری head با دقت
تقسیم سرریز (H) 1.5mm گفته می‌شود. اگر دبی اندازه‌گیری شده $280 \frac{lit}{s}$
باشد. خطای آن چیست؟ زاویه سرریز 90° و ضریب کلی 0.6 می‌باشد.

$$Q = \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \, tg\frac{\theta}{2} \, H^{5/2}$$

$$Q = 1.417 \, H^{5/2} \Rightarrow H = 0.5228\,m$$

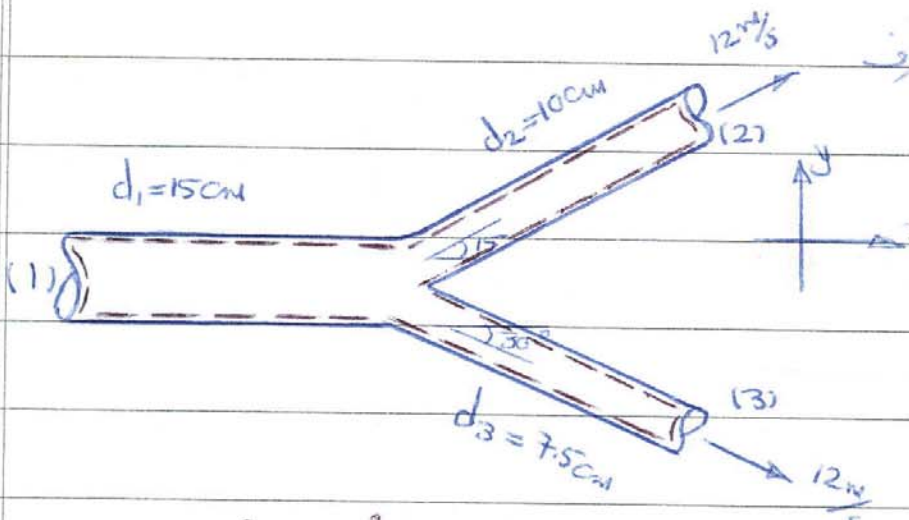
$$dQ = 2.5 \times 1.417 \, H^{3/2} \, dH \Rightarrow dQ = 2.5 \, Q \frac{dH}{H}$$

$$\frac{dQ}{Q} = 2.5 \frac{dH}{H} \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = 2.5 \times \frac{1.5\,mm}{0.5228} = 0.72\%$$

مثال: در لوله‌ی زیر دبی خارج شده از هر دو انشعاب برابر است. فشار ورودی را به دست آورید. (از اصطکاک صرفنظر کنید)

سیستم در سطح افق است.

نقاط 2 و 3 در اتمسفر هستند.



$$\begin{cases} \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f \\ V_1 A_1 = V_2 A_2 + A_3 V_3 \Rightarrow V_1 = 8.33 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1 = 37.3 \, \frac{KN}{m^2}$$

$Q_2 = 0.094 \frac{m^3}{s}$ $Q_3 = 0.053 \frac{m^3}{s}$

$\Sigma F_x = \Sigma$ مومنتم خروجی $- \Sigma$ مومنتم ورودی

$\rightarrow P_1 A_1 + F_x = (\rho Q_2 \times V_2 C_{15}) + (\rho Q_3 \times V_3 C_{130}) - (\rho Q_1 \times 83.3)$

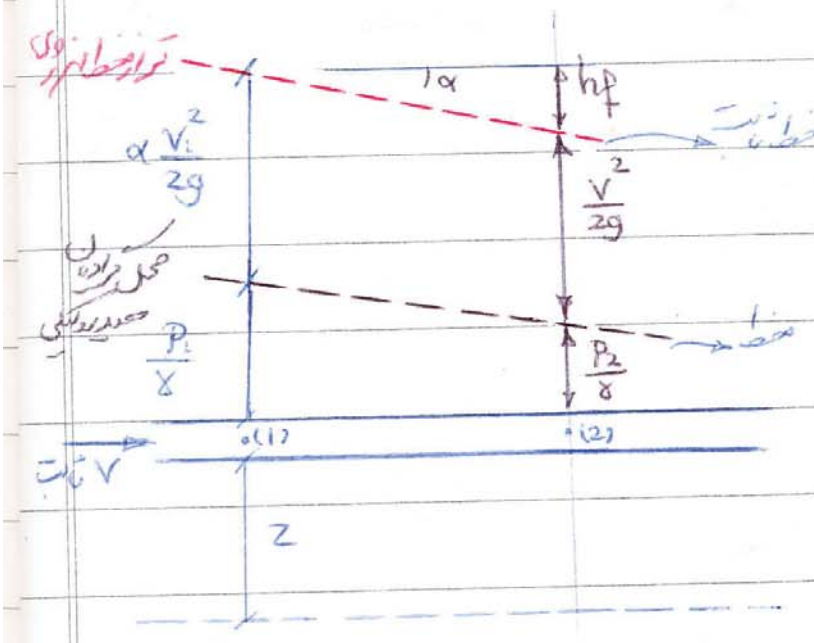
$\rightarrow F_x = -242 N$

$\Sigma F_y = \Sigma$ out مومنتم $- \Sigma$ in مومنتم

$F_y = \rho Q \times V_2 \sin 15 + \rho Q_3 (-V_3) \sin 30 \rightarrow F_y = -27 N$

رسم خط انرژی و خط اول هیدرولیکی:

از بولوای دانسته باشیم می‌توان سه نوع انرژی را داریم، مدرم و برابر صورت ارتفاع سطح آزاد را داریم.

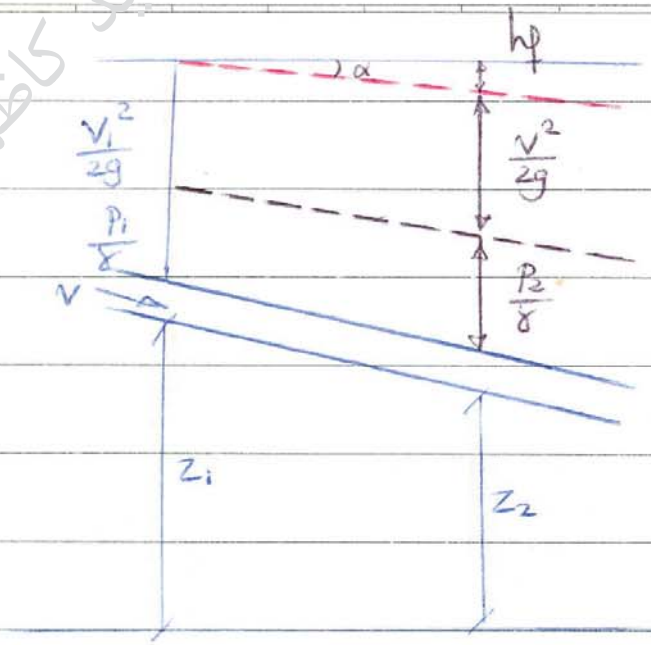


محول خط انرژی به علت اصطکاک کم می‌شود و چون V ثابت است پس در نقطه 2 $\frac{P_2}{\gamma}$ کم می‌شود در نتیجه P_2 کاهش می‌یابد. مقدار اصطکاک در طول لوله ثابت است پس شیب افت ثابت است.

خط انرژی: نموداری که انرژی موجود در طول لوله جریان نشان می‌دهد، خط انرژی نیز خط انرژی هیدرولیکی (خط اول هیدرولیکی): نموداری که مجموع دو جمله $Z + P/\gamma$ را در طول لوله جریان نشان می‌دهد خط انرژی هیدرولیکی نامیده.

* خط انرژی همواره در جهت جریان افت می‌کند مگر در محلی که یک پمپ یا منبع انرژی داشته باشیم.

حمید کاظم



حال لوله را با زاویه مثبت در افق

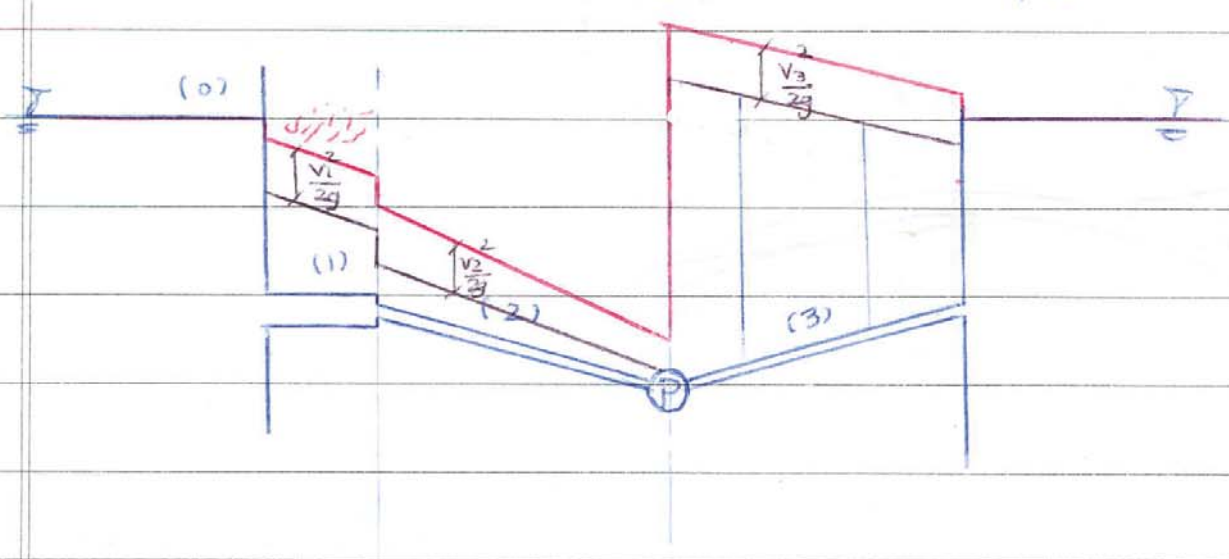
قرار می دهیم

در این حالت مقداری دارد که مثبت بودن آن

از شیب لوله است یا خیر

ممکن است P_2 زیاد شود

فرض می کنیم جریانی داشته باشیم که بتوان آن را تا انتهای آن انتقال داد



* در لوله 2 سرعت بالایی بود و احتمالاً اول می باید شیب خط انرژی تند می شود

و چون قطر لوله تغییر نکرده است پس شیب ثابت است.

* از محل اصلی به لوله 1 افت انرژی هم داریم

* یک انرژی به سیستم می رسد. در لوله (3) باز انرژی کم می شود. ولی دارد جریان می شود باز

افت دارد

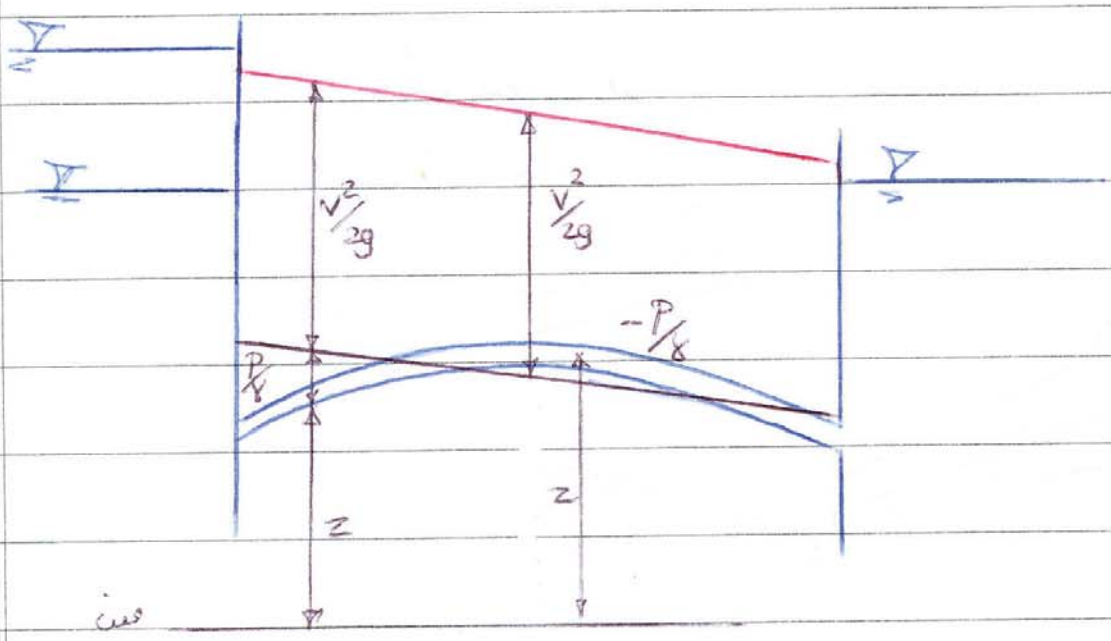
* از نقطه ای که به بزرگ باز می رود به بعد افت دارد

حمید کاظم

* در لوله (2) سرعت بیشتر است بنابراین فشار در این محل کمتر از بقیه است و فشار کم می‌شود. فشار هوای بیرون بیشتر است در نتیجه لوله 3 کم می‌شود.

از سرعت 2 برای گردو راحت 9 برداری می‌شود علت چیست؟

چون در لوله گردو ای می‌شود این سرعت گردش آب گردو را می‌شود. آب در دانه گردو تبخیر می‌کنیم این گردو را برای شکستن و اصطکاک کم می‌شود.



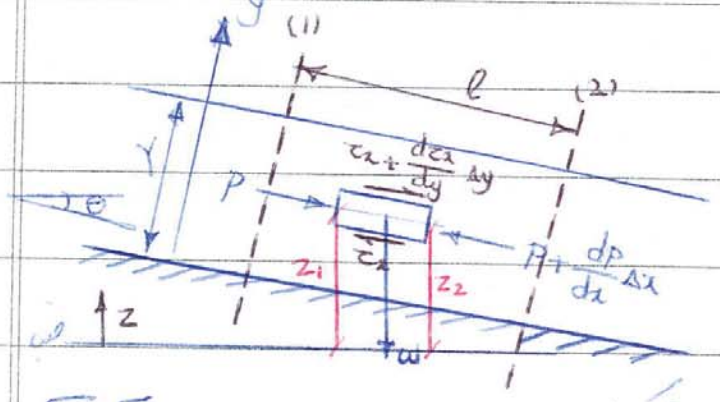
در اینجا فشار منفی ایجاد می‌شود.

حمید کاظم

اثرات لزجت (تنش لبه برشی) بر حرکت سیال

شرط جریان دائمی - یک بعدی - توسعه‌ای - تنش لبه برشی اضافه شده در سطح ایجاد شده

لایه‌ای به ضخامت dy که در سرعت u حرکت می‌کند.



$\sum F_x = 0$ ← نیروها در جهت x تشریح شده

$$P\delta y - \left(P + \frac{dP}{dx}\delta x\right)\delta y - \tau_1 \delta x + \left(\tau_1 + \frac{d\tau_1}{dy}\delta y\right)\delta x + w \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta = \frac{-\delta z}{\delta x}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dx}(P + \rho g z) \rightarrow \mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d}{dx}(P + \rho g z)$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}(P + \rho g z)\frac{y^2}{2} + y\frac{c_1}{\mu} + c_2$$

شرایط مرزی:
$u = 0$ at $y = 0$
$u = U$ at $y = Y$.

$$\rightarrow \boxed{u = \frac{y}{Y}U - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(P + \rho g z)(Yy - y^2)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dy}(P + \rho g z)$$

حمید کاظم

اگر $\frac{dz}{dx}=0$ باشد داریم: $u=0$ و $u=\frac{-1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(Ry-y^2)$

* u صحیح که صفی است، $Ry-y^2$ یک سهمی گونه است.

چون $\frac{dp}{dx}$ صفی است پس u صفی می‌شود. فشار از بالاست به پایین است به علت وجود تنش برشی کاهش می‌یابد.

$\frac{dp}{dx}=\frac{P_2-P_1}{\Delta x}$ $\leftarrow$ $P_2\rightarrow$ بالاست $P_1\rightarrow$ پایین است

پس معادله برنولی بین دو نقطه (1) و (2) معادله برنولی را می‌نویسم.

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+z_2+h_f$$

h_f نشان‌دهنده تنش برشی است.

با توجه به اینکه قطر ثابت بوده $V_1=V_2$ می‌باشد.

$$(P_2-P_1)+\rho g(z_2-z_1)=-\rho g h_f$$

دو طرف رابطه بالا را بر ℓ تقسیم می‌کنیم

$$\Rightarrow \frac{\delta(P+\rho gz)}{\ell}=-\rho g\frac{h_f}{\ell} \qquad \frac{h_f}{\ell}=S_f \text{ شیب}$$

$\frac{h_f}{\ell}$ شیب خط انرژی است $\rightarrow$ مقدار افت در واحد طول است.

* از رابطه بالا می‌توان دریافت که اگر قطر ثابت باشد شیب خط انرژی و خط هیدرولیکی یکسان است.

از dx ـ ℓ می‌گیریم داریم:

$$\frac{d(P+\rho gz)}{dx}=-\rho g S_f$$

$$\frac{dQ}{dA} = \frac{y}{Y} U - \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dx} (P + \rho g z)(Yy - y^2)$$

سعید کاظمی

$\frac{d(P+\rho g z)}{dx}$ در صورتی که مقدار عددی مثبت باشد جریان به سمت راست حرکت می‌کند و اگر منفی باشد جریان به سمت چپ حرکت می‌کند.

* h_f را در ترم $\rho g Q$ ضرب کنیم توان بدست می‌آید.

$$\frac{N.M}{N} \times \frac{N}{S} = \frac{N.M}{S} = W$$

$$P = \rho g Q h_f$$

3W افت انرژی توان در $\rho g Q$ ضرب کرد برحسب وات بدست آمد.

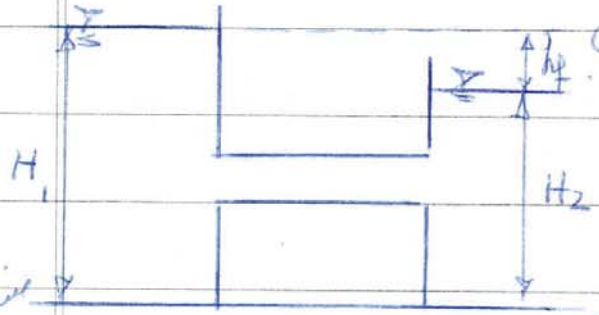
* نکته

$$V = \frac{1}{A} \int_A u dA \Rightarrow Q = \int_A u dA$$

اگر بخواهیم در کنترل حجم انرژی بدست آوریم از $\frac{d(P+\rho g z)}{dx}$ استفاده می‌کنیم (چون از Q و u انرژی بدست می‌آوریم و از $\frac{d(P+\rho g z)}{dx}$ بدست می‌آید)

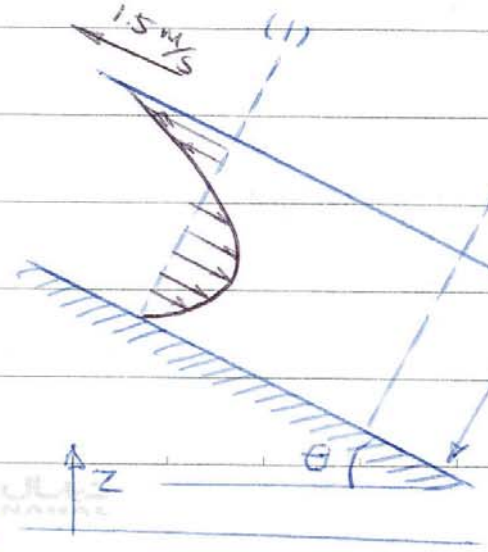
* برعکس این موضوع حجم صحیح است. مثل شکل مقابل

اگر بخواهیم خروج می‌خواهیم.



$$H_1 = H_2 + h_f$$

از h_f، $\frac{d}{dx}(P+\rho g z)$ بدست می‌آید. اینجا u بدست می‌آید و با انتگرال گیری از u، Q بدست می‌آید.



مثال:

$U = 1.5 \frac{M}{S}$

$P_1 = 250 \frac{kN}{M^2}$ $P_2 = 80 \frac{kN}{M^2}$

$\Delta Z = 1M$ $\theta = 45°$

$SF = 1260$ $M = 0.9 \frac{NS}{M^2}$

$Y = 10 \frac{KN}{M^3}$

حمید کاظم

توزیع سرعت صبت ؛ تنش برشی را بدست آورید

اینی $\mu = 0.9$ است ، $\mu = 10^{-3}$ صبی است تا عدد رینولدز کمتر از 2000 شود

$z_1 = 1m \quad z_2 = 0$

$P_1 + \rho g z_1 = 250\times10^3 + 9.810 \times 1260 \times 1 \quad P_2 + \rho g z_2 = 80 \times 10^3$

$$\frac{d(P+\rho gz)}{dx} = \frac{80\times10^3 - 250\times10^3 - 9.81\times1260}{\sqrt{2}} = -128.948\times10^3$$

$$u = 566.4\,y - 71.64\times10^3\,y^2 \quad (1)$$

$$u_{Max} \rightarrow \frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow y = 3.95\,mm \Rightarrow u_{Max} = 3.36\ m/s$$

برای محاسبه مقدار تنش برشی $\tau = \mu \frac{du}{dy}$

$y = 0.01\,m \Rightarrow \tau = 780\ N/m^2$

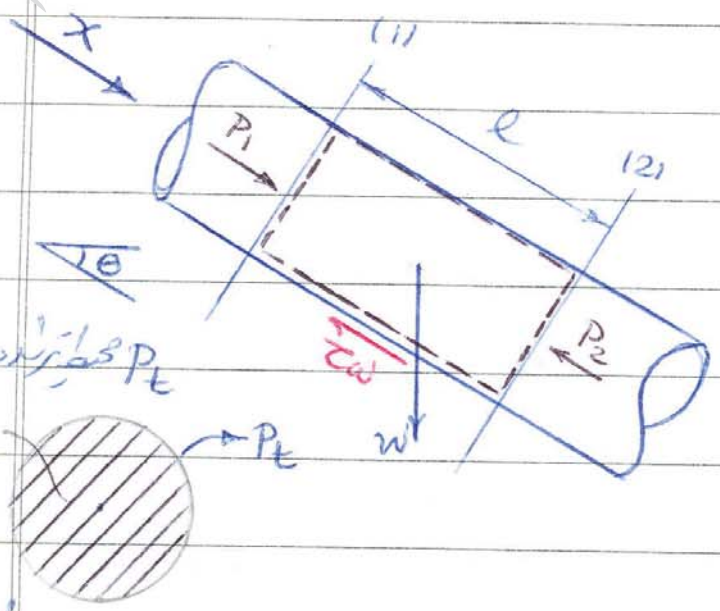
$$u = \frac{y}{2}U - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(P+\rho gz)(2y - y^2)$$

$$u = -150y - \frac{1}{1.8}(-128.948\times10^3)(0.01y - y^2)$$

$$u = 566.38y - 71.64\times10^3 y^2 \quad (1)$$

حمید کاظم

محاسبه افت در جریان عبوری از لوله (افت ناشی از اصطکاک)



نیروی وارد بر حجم کنترل در جهت x:

$$\sum F_x = 0$$

$$P_1 A - P_2 A - \tau_w \cdot P_t \cdot l + \rho g A l \frac{-\Delta z}{l} = 0$$

$$\tau_w = \frac{-A}{P_t} \cdot \frac{1}{l} \left[(P_2 - P_1) + \rho g (z_2 - z_1) \right] \quad (2)$$

معادله انرژی:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + h_f$$

$$\rightarrow (P_2 - P_1) + \rho g (z_2 - z_1) = -\rho g h_f \quad (1)$$

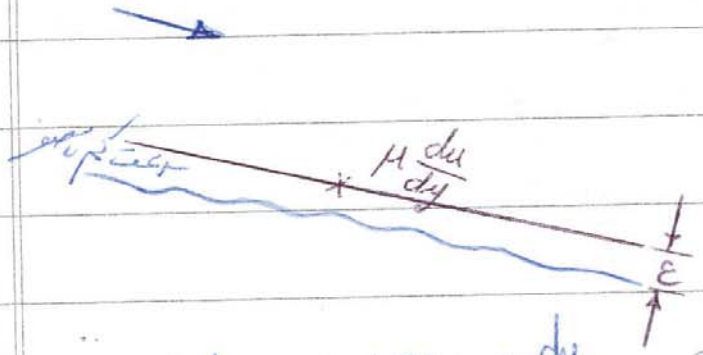
$$\Rightarrow \tau_w = \frac{A}{P_t} \cdot \frac{1}{l} \rho g h_f$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{\tau_w}{\rho g} \cdot \frac{P_t}{A} \cdot l$$

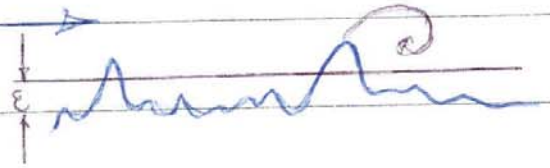
برای یافتن h_f باید τ_w را بیابیم.

حمید کاظم

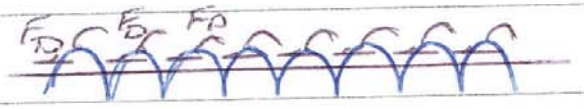
یک لایه از هوا را که در اثر جریان، حرکت می‌کند را در نظر بگیرید و سرعت آن را حساب کنید.



سرعت بالای هواره را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم روی لایه سرعت صفر است. تنش محل برخورد با صفحه چون Eddy نداریم پس به مقدار فرض می‌کنیم و مقدار نوشتنی است و $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ است. لایه‌ها سرعت را نداریم می‌توان تنش را به سادگی بدست آورد.



مشکل دیگری داریم. از زبری از صفحه نیست باشد ربط داشته.



داریسی - ویسباخ با کار تجربی فرمول زیر را انجام داد.

$\tau_w = \frac{1}{2} \rho f v^2$ $\quad f$ ثابت داریسی - ویسباخ $\quad \tau_w \to \tau_{wall}$

$$\rightarrow h_f = \frac{fl}{A/P_t} \frac{v^2}{2g} \qquad \frac{A}{P_t} = R_h \text{ شعاع هیدرولیکی}$$

$$h_f = \frac{fL}{R_h} \frac{V^2}{2g}$$

$$R_h = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4}$$ در لوله‌ی ما

$$h_f = \frac{4fl}{D}\cdot\frac{v^2}{2g}$$ → مرجع انگلیسی

$$h_f = \frac{fl}{D}\cdot\frac{v^2}{2g}$$ → مرجع آمریکایی

$$\tau_w = \frac{1}{8}\rho f v^2$$

* با توجه به کتاب streeter و آمریکایی کار می‌کنیم.

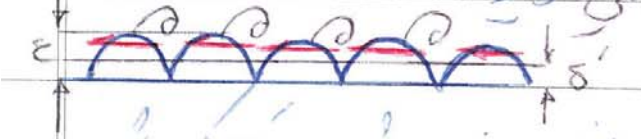
برای محاسبه ضریب داربسی و ایباخ باید نظر تنش برشی را داشته باشیم و بخواهیم بزرگی آن را که عامل اصطکاک می‌شود بررسی کنیم داریم:

رژیم آرام رژیم بسیار کم است. در لایه‌ای به ضخامت δ به آن نزدیک شویم سرعت بسیار کم است. δ' را ضخامت زیرلایه آرام گویند.

$$\delta' = \frac{11.6\,\nu}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}$$ سرعت سیالی که به لا

اگر بزرگی را عوض کنیم یا سرعت در رژیم خیلی کم می‌شود. این عامل در سرعت تنش برشی می‌شود این است که بالای خط سرعت بالا و پس آن سرعت پایین است و باعث تنش می‌گردد. این حالت برای ($\varepsilon < \delta'$) اتفاق می‌افتد. این لایه را لایه‌ای صاف هیدرولیکی نامیم.

اگر ($\delta' < \varepsilon$) باشد زبری Drag ایجاد شده حاصل از مجموع زبری‌ها تنش برشی می‌شود. این لایه را لایه‌ای زبر هیدرولیکی نامند.



چون $\tau = \frac{1}{2}\rho f v^2$ است از سرعت را زیاد کنیم τ زیاد می‌شود و δ' کم می‌شود پس δ' زبری نسبی ندارد بلکه به سرعت وابسته است. پس دلیل هیدرولیکی نامند.

$$v \uparrow \Rightarrow \delta' \downarrow$$

حمید کاظم

زبری وصافی هم معنی دارد

$\varepsilon < 0.4\delta'$ → صاف

$\varepsilon > 6\delta'$ → زبر (Rough)

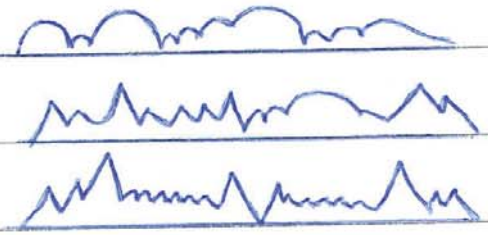
$0.4\delta' < \varepsilon < 6\delta'$ → Transition Zone

ضریب اصطکاک دارسی و ایباخ به شکل زیر تعریف می‌شود:

اگر لوله صاف باشد Re مهم است. اگر زبر شد ε مهم است. و ارتفاع، شکل زبری هم اهمیت دارد.

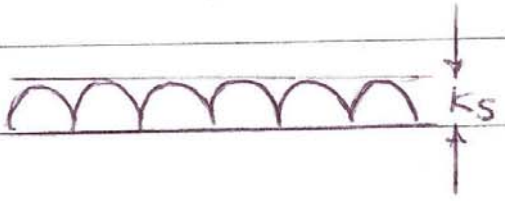
$$f = \varphi(Re, \varepsilon/D, \alpha, \alpha')$$

ضرایب مربوط به شکل ارتفاع



نیکوراتسه اعداد زبری های مصنوعی را تعریف کرد و برای اشکال هندسی مختلف را بدست آورد و k_s های مختلفی را ارائه داد (k_s همان ε است)

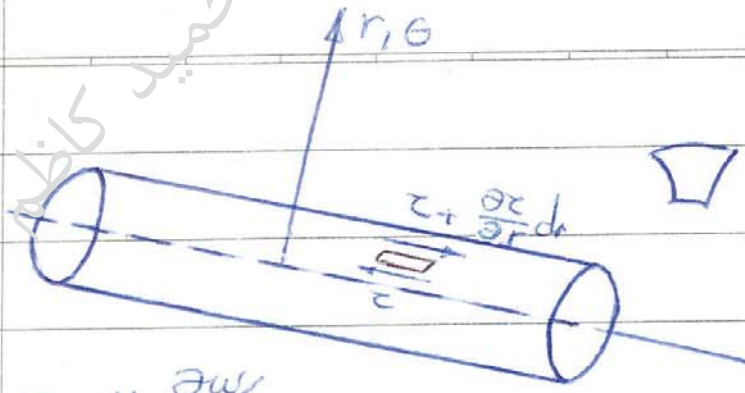
این شکل برای تمرین وجود دارد.



حال اگر لوله را تشکیل دهیم که جنس آن صاف باشد $f = \varphi(Re, \varepsilon/D)$

ضریب دارسی - ایباخ (f) در لوله ها

حمید کاظمی



نیروی اینرسی روی لوله در راستای z صفر.

سرعت در جهت z ثابت می‌شود؟

دبی ثابت می‌ماند.

$$\tau = \mu \, \partial w / \partial r$$

$$w = \frac{g S_F}{4\nu} (a^2 - r^2)$$

$$V = \frac{\int w \, dA}{A} = \frac{\rho g h_f D^2}{l \times 32 \times \mu} = \frac{64}{VD/\nu}$$

$$\Rightarrow f = \frac{64}{Re} \quad (Re < 2000)$$

* این موضوع برای لوله‌ای در $Re < 2000$ صادق است چون در آن $\tau = \mu \, \partial w / \partial r$ می‌باشد.

- فرمول Colbrooke_white :

اگر $Re > 4000$ (توربولنت) باشد می‌توان از فرمول زیر استفاده نمود.

دیاگرام Moody را می‌توان به شکل زیر فرمول کرد.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left[\frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right]$$

این منحنی به شکل منحنی‌های $\varepsilon/D = cte$ را در ناحیه انتقالی پیدا می‌کند.

* $0.02 < f < 0.1$ این روش خطای f را در این محدوده جبران می‌کند.

$h_f = \frac{fl}{D}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ $\quad Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$ $\quad P = \rho g Q h_f$ (توان)

مثال: توان و افت مورد نظر برای عبور روغن بین دو مخزن زیر را

الف) $Q = 4 \frac{lit}{min}$ ب) $Q = 30 \frac{lit}{min}$

$\varepsilon = 0.00008\ m$ $\quad L = 750\ m$

$d = 40\ mm$ $\quad \mu = 1.14 \times 10^{-3} \frac{N.S}{m^2}$

$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$

الف)

$V = 52.9 \times 10^{-3}\ m/s \quad (Q = VA)$

$Re = 1856 \quad \left(Re = \frac{\rho VD}{\mu}\right) \quad Re < 2000$

$f = \frac{64}{Re} = 0.03445$

$h_f = \frac{fl}{D}\frac{v^2}{2g} = 92.4 \times 10^{-3}\ m$

$P = \rho g Q h_f = 0.06\ W$

ب)

$Re = 14035$, $\frac{\varepsilon}{D} = 0.002$ $\xrightarrow{Moody}$ $f = 0.032$

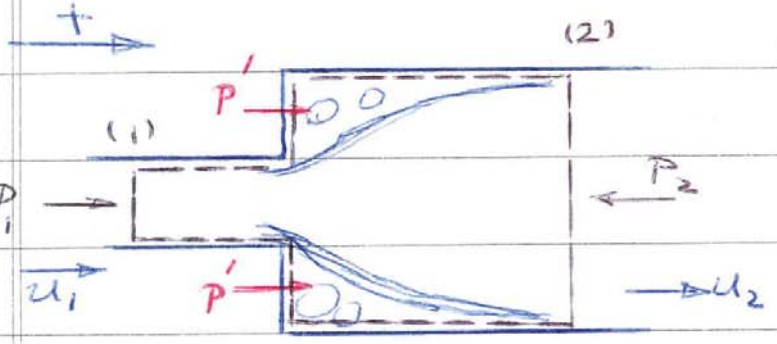
$\rightarrow h_f = 4.89\ m$

$\rightarrow P = 24\ W$

* برای f تا چهار رقم اعشار را کفایت دارد

افت کمر موضعی (Minor Losses)

۱) بازشدگی ناگهانی:



$$\Sigma F = \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$\rightarrow P_1 A_1 - P_2 A_2 + P'(A_2 - A_1) = \rho Q (u_2 - u_1)$$

(معمولا افت موضعی را اندازه نمی گیریم و موضوع می دهیم.)

P' فشار وارد بر حجم کنترل است و از طریق تجربی نشان داده شده که $P' = P_1$

$$\rightarrow P_1 - P_2 = \rho u_2 (u_2 - u_1)$$

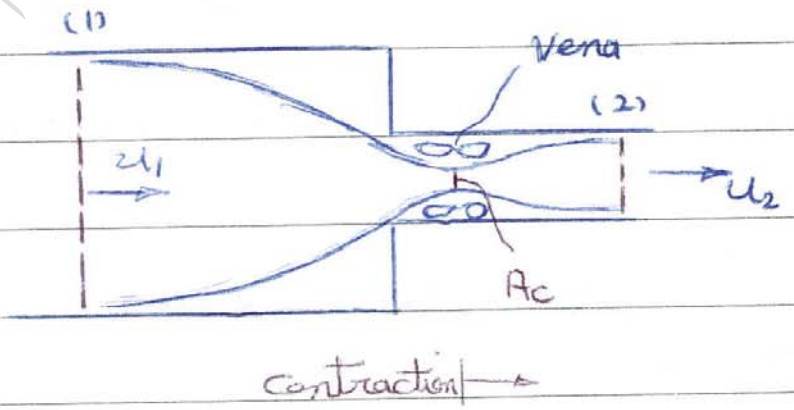
$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + h_f$$ برنولی ۱ و ۲

$$\rightarrow h_e = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$$

افت بازشدگی $h_e = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{u_2^2}{2g} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{u_1^2}{2g}$

حمید کاظم

۲) جمع شدگی ناگهانی



در فلک سیالات گفته می‌شود اگر آب از جمع کنی منشعب شود در منطقه contraction به دست داشت است. (منشعب شدن خط بزرگتر است)

مثل اطمینان.

$$\begin{cases} h_c = \dfrac{u_2^2}{2g}\left(\dfrac{A_2}{A_c}-1\right)^2 \\ A_c = C_c A_2 \end{cases}$$

$$k_c = \left(\frac{1}{C_c}-1\right)^2$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{u_2^2}{2g}\left(\frac{1}{C_c}-1\right)^2 = k_c \frac{u_2^2}{2g}$$

جمع شدگی

$\frac{A_2}{A_1}$	0.1	0.3	0.5	0.7	1
k_c	0.41	0.34	0.24	0.14	0

مثال (تست کنکور): قطر لوله‌ای در مقطع که خارج شده از 140^{mm} به 250^{mm} می‌رسد دارد. اگر جریان از لوله کوچکتر به بزرگتر وارد شود، افت 0.6^{M} کمتر از زمانی است که جریان برعکس باشد. (بی جریان را حساب کنید.

$h_e = h_c + 0.6$

$$h_e = \left(\frac{A_1}{A_2}-1\right)^2 \frac{u_1^2}{2g} = 0.6864 \frac{(u_1)_e^2}{2g} \qquad \rightarrow (u_1)_e = (u_2)_c = V$$

$$h_c = 0.34 \frac{(u_2)_c^2}{2g}$$

$$0.6864^2 \frac{V^2}{2g} = 0.34 \frac{V^2}{2g} + 0.6 \rightarrow V = 9.47 \rightarrow Q = 145.85 \ lit/s$$

نهال NAHAL

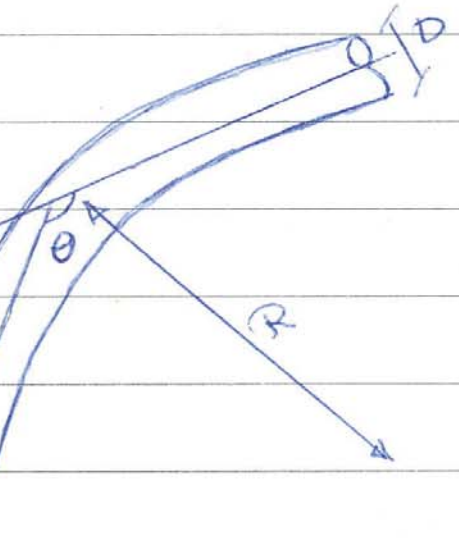
حمید کاظم

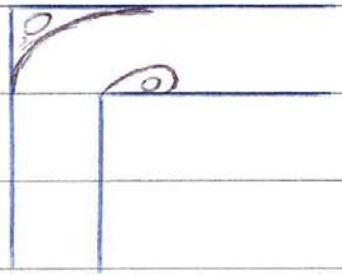
۳) خم شدگی:

در خم جریان ثانویه ای تولید می شود و افت را افزایش می دهد.

برای افت بایستی از خم استفاده کنیم. در افت $\frac{R}{D}$ و زاویه کم است.

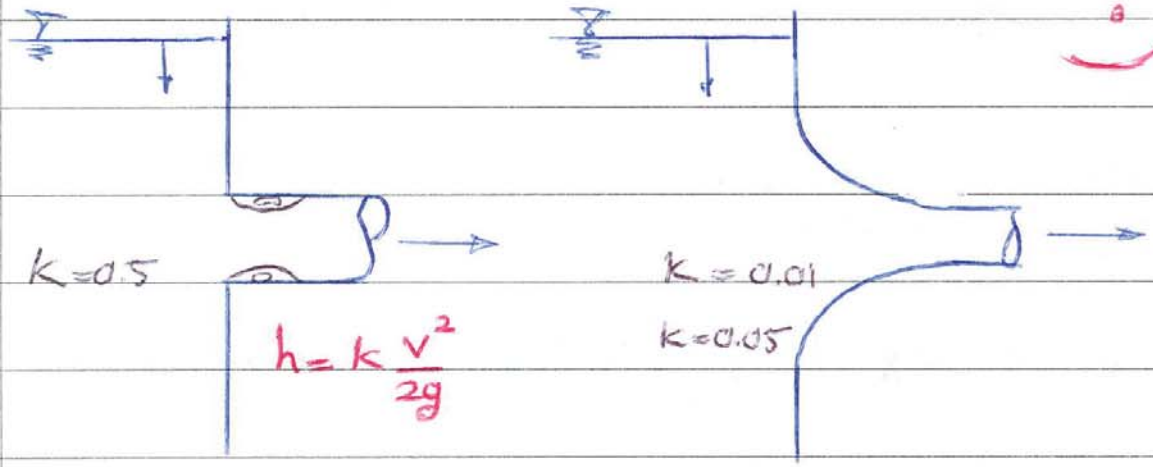
$$h_B = k \frac{v^2}{2g}$$ (Bending خمش)

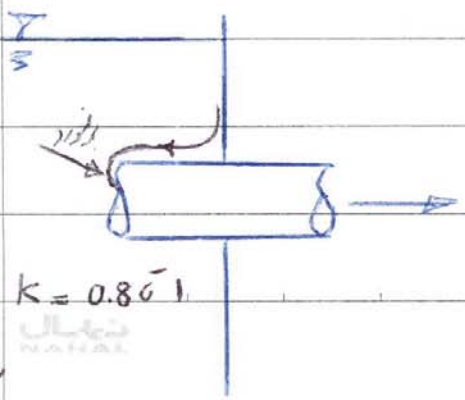




زاویه خم	360	90	45	90 با $\frac{R}{D}$ زیاد
k	2.2	0.9	0.4	0.6

۴) اتصالات:

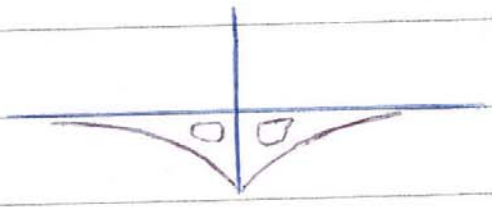


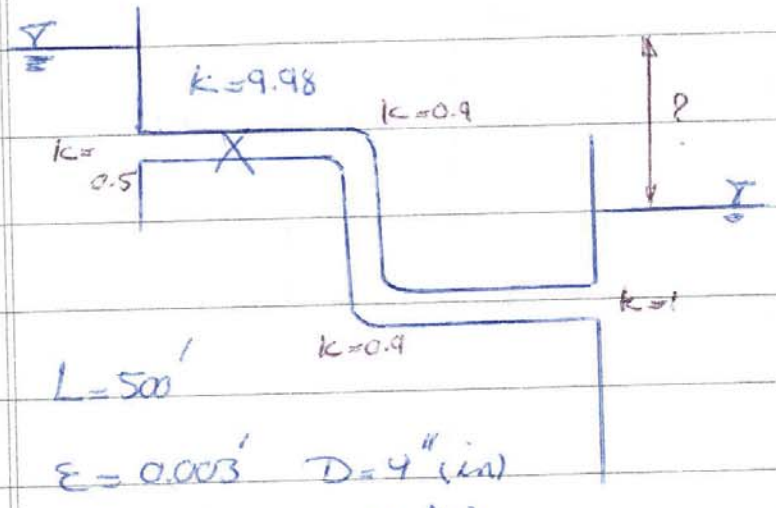


می توانید افت بدنه را معادل طول لوله فرض کنید.

$$k \frac{v^2}{2g} = \frac{f L_e}{D} \frac{v^2}{2g} \rightarrow L_e = \frac{kD}{f}$$

Gates & Valves





$$Q = 0.573 \left(\frac{ft^3}{s}\right)$$

$$V = \frac{Q}{A} = 6.56 \ ft/s$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.003}{4/12 \rightarrow ft} = 0.009$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = 1.15 \times 10^5$$

$$\Rightarrow f = 0.037$$

$$h_f = \frac{0.037 \times 500}{4/12} \times \frac{6.56^2}{2 \times 32.2} = 36.76'$$

$$\Sigma h_L = (0.5 + 9.98 + 2 \times 0.9 + 1) \frac{V^2}{2g} = 8.88'$$

$$\Rightarrow H = 36.76' + 8.88' = 45.64'$$

حمید کاظم

سه نوع سؤال در لوله کی داریم

مجهولات : h_f ، Q ، D

معلومات : $L, \varepsilon, \nu, h_f, Q$ ، $L, \varepsilon, \nu, h_f, D$ ، $L, \varepsilon, \nu, Q, D$

مسائل به ترتیب از راست به چپ افت می کنند

مثال نوع ۱ : لوله چدنی است با مشخصات زیر افت را حساب نمایید.

$d = 200mm$

$L = 400m$

$Q = 40 \, l/s$ $\quad \nu = 0.000001 \, m^2/s$ $\quad \varepsilon = 0.25mm$

$$h_f = \frac{fL}{D}\frac{(V^2)}{(2g)} \longrightarrow V = \frac{Q}{A} \Rightarrow Re = \frac{VD}{\nu} = 89000$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.25}{200} \longrightarrow f = 0.023$$

$$h_f = \frac{0.023 \times 400}{0.2} \times \frac{V^2}{2g} = 46.58m$$

مثال نوع ۲ : سیال آب را در نظر می گیریم. می خواهیم لوله فولادی با $d = 300mm$ و $\varepsilon = 3mm$ که به اندازه $L = 300m$ با شدت جریان $h_f = 6m$ آب را عبور می دهد، طوری که افت $h_f = 6m$ باشد، دبی را حساب کنید.

$$h_f = \frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g}$$

اول باید یک ضریب داشی را از نمودار حساب کنیم.

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0.01$$

با این دو پارامتر با استفاده از نمودار مودی Re را که نامعلوم است پیدا می کنیم.

حمید کاظم

$f = 0.04 \rightarrow 6 = \frac{0.04 \times 300}{0.3} \times \frac{V^2}{19.62} \Rightarrow V = 1.715 \ m/s$

$Re = \frac{VD}{\nu} = 455000$

حال $\varepsilon/D = 0.01$ از راه کنی دوباره صحیح وضاحی کنیم

$f = 0.038$

$f = 0.038$ کسب برابر صحیح وضاحی کنیم

مثال ۲:

مثال نوع ۳ قطر لوله‌ای را حساب کنید که بتواند $Q = 0.25 \ m^3/s$ با مشخصات زیر عبور کند.

$\nu = 9.3 \times 10^{-6} \ m^2/s$, $L = 3050 \ m$, $h_f = 22.9 \ m$

$\varepsilon = 0.00046 \ m$

$$h_f = \frac{fL}{D} \frac{Q^2}{A^2(2g)} = \frac{fL \ Q^2}{D^5 (\frac{\pi^2}{16} \times 2g)} \Rightarrow D^5 = \frac{8LQ^2}{h_f g \pi^2} f \quad (1)$$

$$Re = \frac{Q/A \cdot D}{\nu} \Rightarrow Re = \frac{4Q}{\pi \nu} \cdot \frac{1}{D} \quad (2)$$

الف) رابطی را حدس می‌زنیم. ب) از رابطه (1) تقریبی بدست می‌آوریم.

ج) Re از رابطه (2) بدست می‌آوریم. د) ε/D محاسبه می‌شود.

حمید کاظم

ه) ضریب دارسی را بدست می‌آوریم

ی) از ضریب دارسی کمتر نبود به کمتر مساوی کنیم

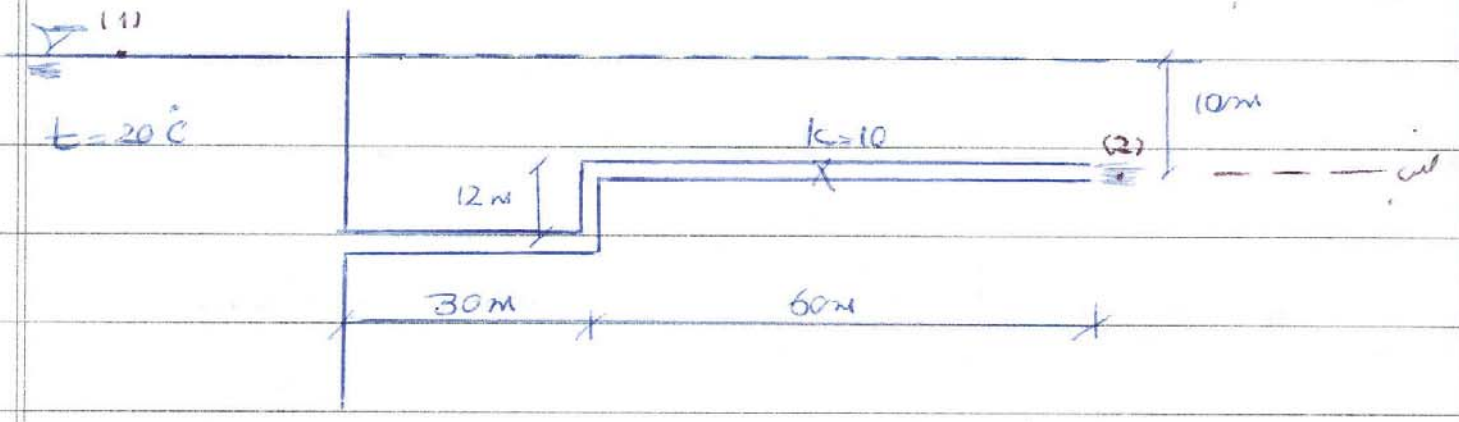
$f = 0.02 \xrightarrow{(1)} D = 0.43m \xrightarrow{(2)} \begin{cases} R_e = 80000 \\ \varepsilon/D = 0.00011 \end{cases} \rightarrow f = 0.019$

تا شرط کم ضریب دارسی صدق داشته باشد

$f = 0.019 \rightarrow D = 0.42m$

مثال: نوع ۲ دی بدست آمده

$d = 150\ mm \quad \varepsilon = 0.255\ mm$



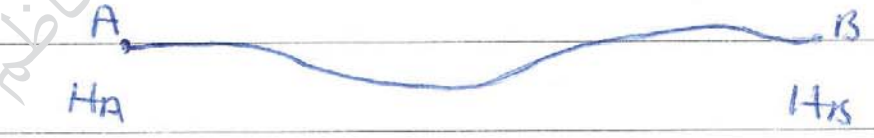
$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_f$$

$$\rightarrow 10 = \frac{V_2^2}{2g} + \left(0.5 + 2\times 0.9 + 10 + \frac{fe}{D}\right)\frac{V^2}{2g}$$

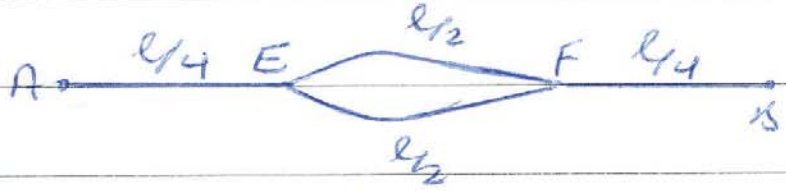
$f = 0.022 \rightarrow V_2 = 2.63 \rightarrow Re = 391000 \xrightarrow{\text{در نمودار}}$

$f = 0.023 \rightarrow V = 2.6 \rightarrow Q = 0.046\ m^3/s$

حمید کاظم



۱) H_A بیشتر $\frac{P}{\gamma}$ ، $\frac{V^2}{2g}$ ، Z می‌باشد و اصطلاح $|H_A - H_B|$ می‌باشد، h_f یعنی افت انرژی که برای A و برای B کمتر می‌شود. آب از جایی که انرژی بیشتر است حرکت می‌کند یعنی از A به B حرکت می‌کند.



۲) افت انرژی بین A و B از طول لوله‌ها و اصطکاک حاصل می‌شود. در نقطه E لوله به دو قسمت تقسیم می‌شود. قطر لوله‌ها نصف می‌شود و سرعت ۴ برابر می‌شود. در نقطه F دوباره لوله‌ها به هم می‌رسند و قطر لوله دوباره دو برابر می‌شود و سرعت ۴ برابر کم می‌شود. در نتیجه سرعت تغییر نمی‌کند و افت انرژی $\frac{V^2}{2g}$ / ۴ می‌شود. در نتیجه افت انرژی کل برابر $\frac{V^2}{2g}$ می‌شود.

$$h_f = H_A - H_B = \frac{f\ell Q^2}{D\ 2gA^2} \rightarrow Q_0^2 = \frac{2gA^2 h_f D}{f.\ell}$$

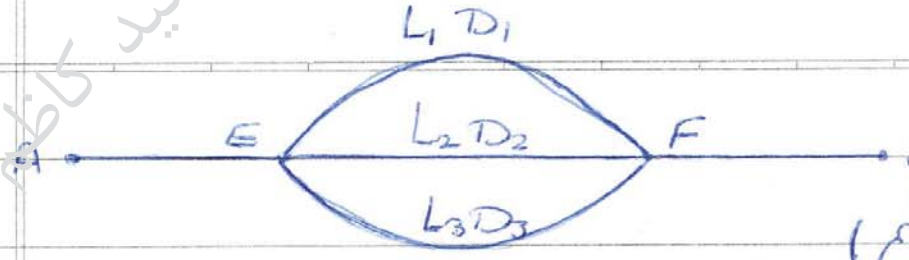
$$h_f = H_A - H_B = \frac{f\ell/4}{D}\frac{Q^2}{2gA^2} + \frac{f\ell/2}{D}\frac{(Q/2)^2}{2gA^2} + \frac{f\ell/4}{D}\frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$\rightarrow Q^2 = \frac{16gA^2 D h_f}{5f.\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{Q_0} = \sqrt{1.6}$$

روشهای دیگری برای حل این مسئله وجود دارد. در این مسئله افت‌های Minor Losses صفر فرض شده.

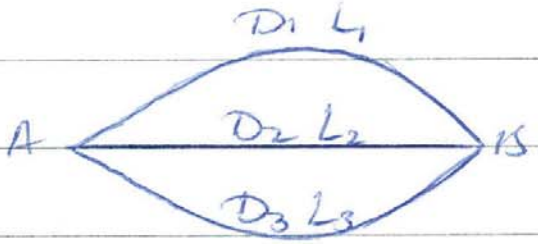
محمید کاظم



مثال: در جریان $H_A - H_B$ داریم (اگر $H_A - H_B$ را داشته باشیم)

$H_E - H_F$ را از طریق $H_A - H_B$ بدست می‌آوریم ← محاسبه می‌کنیم.

در AE، FB بدست می‌آید. آزمایش نمود صحیح و خطا می‌کنیم.



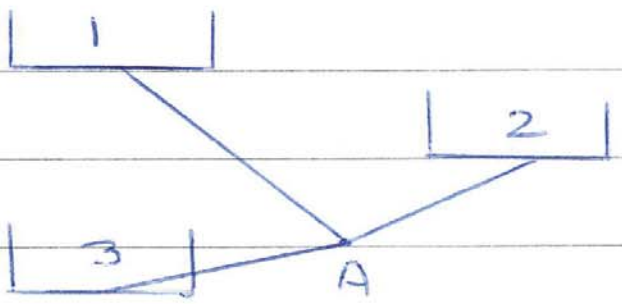
مثال: Q مجهول است. $H_A - H_B$ چیست؟

$H_A - H_B$ را محاسبه نمایید. Q که از بدست آوردید.

صحیح و خطا کنید.

$H_A - H_B$ مجهول ← Q_1 ✓، Q_2 ✓، Q_3 ✓ ← $\sum Q$ قابل

$$Q \text{ محاسبه شده} = \frac{Q \text{ واقعی}}{\sum Q_i} \times Q \text{ فرضی}$$



مثال: در مجموعه‌ی لوله‌ها H_1، H_2 و H_3 چند مرتبه آب را تا چه ارتفاعی از کدام مخزن و در کدام جهت حرکت می‌کند.

حمید کاظم

	L	D	ε/D	H
1	3000	1	0.0002	30m
2	600	0.45	0.002	18m
3	1000	0.6	0.001	9m

$H_A = 23 \rightarrow Q_1 = 1.38 \rightarrow Q_2 = -0.278 \rightarrow Q_3 = -0.81$

چون ΣQ مثبت است، فرضیت اولیه در حادر A را باید کم می‌شود. پس دوباره حجم را خطا کنیم

$H_A = 24.8m$

حمید کاظم

حمید کاظم

آنالیز ابعادی
(Dimensional Analysis)

تمام پدیده‌های فیزیکی را می‌توان بر حسب ۳ بُعد اساسی تبدیل کرد. بعد طول، زمان، جرم (M-L-T)

[ ] → علامت بعد

$$\left[\frac{y}{x}\right]=\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \qquad \left[\frac{y}{x^2}\right]=\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$$

$$[F]=[m][a] \rightarrow [F]=MLT^{-2}$$

بنابراین هر پدیده‌ای را می‌توان به $M^aL^bT^c$ تبدیل کرد. برای ابعاد اصلی توجه

اگر یک رابطه‌ی فیزیکی در یک سیستم به $M_1^aL_1^bT_1^c$ باشد در سیستم دیگر $M_2^aL_2^aT_2^c$ می‌شود.

می‌توان از ضریب K استفاده نمود. $K M_1^aL_1^bT_1^c = M_2^aL_2^{-b}T_2^c$

$$\rightarrow K=\left[\frac{M_2}{M_1}\right]^a\left[\frac{L_2}{L_1}\right]^b\left[\frac{T_2}{T_1}\right]^c$$

$550\ \frac{lbf\text{-}ft}{sec}$ (واحد قوت انگلیسی) $\qquad [\text{قدرت}]=ML^2T^{-3}$

$$K=\left[\frac{M_2}{M_1}\right]^1\left[\frac{L_2}{L_1}\right]^2$$

T در هر دو سیستم یکسان است.

$1\ slug = 14.6\ kg \qquad 1\ ft = 0.3048\ m$

حمید کاظمی

$$k = \left[\frac{14.6}{1}\right] \times \left[\frac{0.3048}{1}\right]^2 = 1.356$$

$$\rightarrow 550 \times 1.356 = 745.8$$

مثال: نیروی پسای هواپیما در هنگام پرواز تابعی از چه پارامترهایی است؟

باید ابتدا هیچ پارامتری کم نباشد.

$$F, d, v, \rho, N, \mu$$

$$[F] = MLT^{-2} \qquad [d] = L$$

$$[v] = LT^{-1} \qquad [\rho] = ML^{-3}$$

$$[N] = T^{-1} \rightarrow \text{فرکانس} \qquad [\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$F = k\, d^m v^p \rho^q N^r \mu^s$$

توان M دو طرف باید هم برابر باشد.

توان L و T هم باید برابر باشد.

$$\begin{cases} 1 = q + s \\ 1 = m + p - 3q - s \\ -2 = -p - r - s \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = 1 - s \\ p = 2 - r - s \\ m = 2 + r - s \end{cases}$$

بر حسب s و r، همه را حل می‌کنیم.

$$\rightarrow F = k\rho^2 v^2 d^2 \left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)^{-s} \left(\frac{Nd}{v}\right)^r$$

$$\rightarrow \frac{F}{d^2\rho^2 v^2} = k\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)^{-s} \left(\frac{Nd}{v}\right)^r$$

حمید کاظم

$\rho^2 d^2 V^2$ ← این جمله است که باید $\frac{\pi}{4}$ دیگر ضرب کنم.
بیشتر از این چیزی نمی دهد و تقریبا همین را باید در آزمایشگاه بدهم.

تئوری π باکینگهام

فردی به نام باکینگهام تئوری داده است که توسط آن راه آنالیز ساده می شود.
می گوید اگر پدیده ای n پارامتر درگیر داشته باشد و آنالیز ابعادی m بعد اصلی داشته باشد (M, L, T) بنابراین $n-m$ عنصر بی بعد تشکیل می شود که مستقل هستند.

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m}) = 0$$

۱) تمام عناصر درگیر را باید مشخص کرد و نسبت به آنالیز ابعادی شود.
۲) باید از میان پارامترهای درگیر و تعداد ابعاد اصلی عضو انتخاب کنیم. (برابر تعداد ابعاد اصلی (۱ و ۲ یا ۳) سه پارامتر را انتخاب کنید.)
۳) ترکیب پارامترهای تکرار شونده با بقیه پارامترها برای تولید π ها

نکته: در مسئله قبل 6 پارامتر درگیر بود و 3 عنصر اصلی داشتیم.

در مسئله قبل اگر ρ (مشخصه سیال) و $\frac{V}{H}$ (مشخصه جریان) و $\frac{d}{h}$ (مشخصه مجرا) $\frac{y}{}$

$$\pi_1 = M^0 L^0 T^0 = F \cdot \rho^{a_1} \cdot V^{b_1} \cdot d^{c_1}$$

$$\rightarrow \pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 d^2}$$

$$\pi_2 = M^0 L^0 T^0 = N \cdot \rho^{a_2} V^{b_2} d^{c_2}$$

$$\rightarrow \pi_2 = \frac{Nd}{V}$$

$$\pi_3 = M^{0} L^{0} T^{0} = M \rho^{a_3} V^{b_3} d^{c_3}$$

$$\rightarrow \pi_3 = \frac{M}{\rho V d}$$

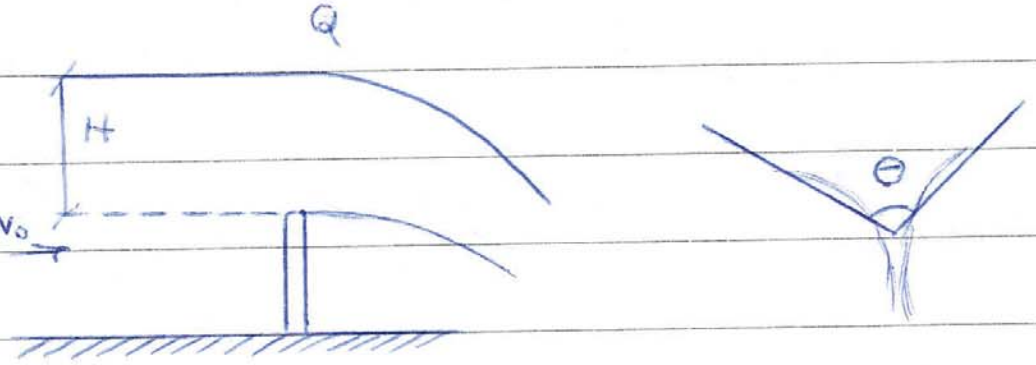
$$\varphi \left\{ \frac{F}{\rho V^2 d^2}, \frac{Nd}{U}, \frac{M}{\rho V d} \right\} = 0$$

این سه تابع هم هستند

هر مجموعه توان ها را ترکیب کرد (ln، توان، ...)

از آنجایی که بعد از آنالیز ماتریس باید استفاده نمود

مثال: می خواهیم دبی عبوری از یک لبریز لبه تیز را بدست آوریم. (مثلثی)



Q , H

g , θ , V_0

T, L دو عنصر اصلی است. H را از جزو ل و g را

از تئوری بکل برمیتم

$$\pi_1 = \theta \cdot H^{a_1} g^{b_1} \rightarrow \pi_1 = \theta$$

$$\pi_2 = Q \cdot H^{a_2} g^{b_2} \rightarrow \pi_2 = \frac{Q}{\sqrt{g}\, H^{5/2}}$$

$$\pi_3 = V_0 \cdot H^{a_3} g^{b_3} \rightarrow \pi_3 = \frac{V_0}{\sqrt{gH}}$$

$$\frac{Q}{\sqrt{g}\, H^{5/2}} = \varphi \left\{ \theta, \frac{V_0}{\sqrt{gH}} \right\}$$

حمید کاظم

اگر H و V_0 را پارامتر تکرار شونده بگیریم رابطه مشکل به صورت می آید

$$Q = V_0 H^2 \varphi \left\{ \frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \theta \right\}$$

مثال: افت در طول لوله را می خواهیم

h_f , L , V , D , ρ , μ , g , ε

7 پارامتر است. مانند قبل h_f/L کاربرد ندارد.

ρ , V , D را عنوان عناصر تکرار شونده انتخاب می کنیم

$$\pi_1 = \frac{h_f}{L}$$

$$\pi_2 = \mu \cdot \rho^{a_1} V^{b_1} D^{c_1} \rightarrow \pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

$$\pi_3 = g \cdot \rho^{a_3} V^{b_3} D^{c_3} \rightarrow \pi_3 = \frac{gD}{V^2}$$

π_4 — $\pi_4 = \varepsilon/D$

$$\frac{h_f}{L} = \varphi \left\{ \frac{gD}{V^2}, \frac{\mu}{\rho V D} \right\} \rightarrow \frac{h_f}{L} = \varphi' \left\{ \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{D}, \frac{\rho V D}{\mu} \right\}$$

$$\rightarrow \frac{h_f}{L} = \frac{\varphi''\{Re\}}{D} \cdot \frac{V^2}{g}$$

روشنه بیان جبری است

1) پارامترهای حذف نشده نشوند.

2) عناصر تکرار شونده به صورتی باشند که پارامترها بی بعد ایجاد شود.

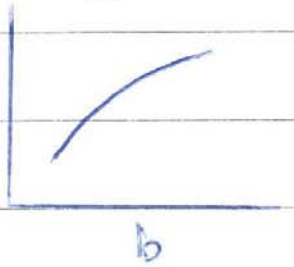
NAHAL

حمید کاظم

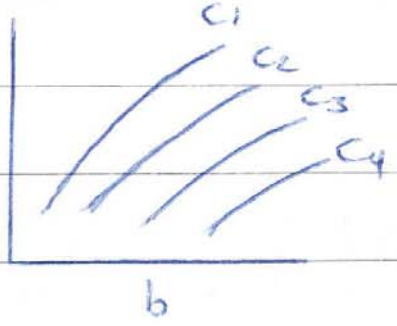
- $Re = \frac{\text{انرژی}}{\text{لزجت}} = \frac{VD}{\nu}$ ازنظر پارامتری بی بعد Re است.
- $F_r = \frac{\text{انرژی}}{\text{ثقل}} = \frac{V^2}{gl}$ باید سعی کنیم این دو را طوری بی بعد بدست آوریم.
- $We = \frac{\text{انرژی}}{\text{کشش سطحی}} = \frac{\rho L V^2}{\sigma}$

اهمیت پارامتر بی بعد:

فرض کنید پدیده a را داریم که طول آن اهمیتی ندارد. برای بدست آوردن رابطه a و b به آزمایشگاه می‌رویم و با تغییر b، تغییر a را بدست می‌آوریم و گرافش را می‌کشیم



برای a و b و c وضعیت مشکل است.

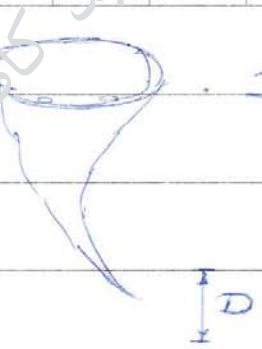


هرچه پارامتر دیگری اضافه شود مشکلات بیشتر می‌شود.

آنالیز ابعادی 3 تا از پارامترها را جمع می‌کند. در اینجا π_2 را داریم که تغییر π_2 ها مثل تغییر پارامترها است.

مثلاً در vonten : ρ, V, H, μ, Q داریم. می‌شود ρ را عوض کرد و $\pi_1 = \frac{\rho V D}{\mu}$ و π_2 داشته باشیم برای تغییر π_1 فرض نکرد ρ را

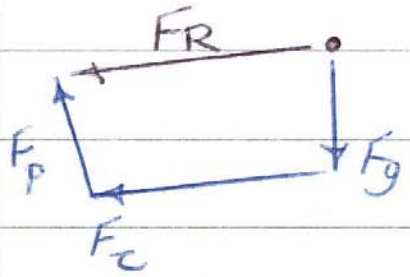
عوض کنیم می‌توانیم D را عوض کنیم. وقتی π کم می‌کنیم بی‌بعد است.



مدل‌های فیزیکی (physical Models)

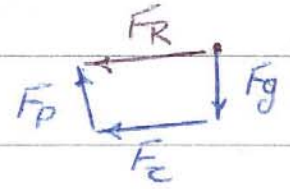
نمونه اصلی در طبیعت وجود است که شده پروتوتیپ (prototype) نام دارد و هدف است آزمایش آن مدل سازیم.

مدل در شرایط ایده‌آل باید ۱) با پروتوتیپ شباهت هندسی داشته باشد. ۲) تمام نیروهای شرط بعدی است. الگوی جریان در پروتوتیپ باید در مدل شبیه‌سازی شود. حالت اول توسط تکنسین و حالت دوم توسط فیزیک حاصل می‌شود.



→ این در پروتوتیپ

Model:



برای همه شکل‌های بالا در حرکت شابه می‌توان نوشت:

$$\frac{(F_c)_m}{(F_c)_p} = \frac{(F_g)_m}{(F_g)_p} = \frac{(F_p)_m}{(F_p)_p} = \frac{(F_R)_m}{(F_R)_p}$$

این رابطه را می‌توان به این شکل نوشت:

$$\frac{(F_R)_m}{(F_c)_m} = \frac{(F_R)_p}{(F_c)_p} \longrightarrow (Re)_m = (Re)_p$$

$$\frac{(F_R)_m}{(F_g)_m} = \frac{(F_R)_p}{(F_g)_m} \longrightarrow (F_r)_m = (Fr)_p$$

$$\frac{(F_R)_m}{(F_p)_m} = \frac{(F_R)_p}{(F_p)_p} \longrightarrow (Eu)_m = (Eu)_p$$

اویلر

$$F_r^2 = \frac{\rho Q V}{\rho g A l} = \frac{V^2}{gL} \rightarrow Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$ عدد فرود (Frod) **

$\frac{\rho_M V_M D_M}{\mu_M} = \frac{\rho_P V_P D_P}{\mu_P}$ شود داریم $(Re)_M = (Re)_P$ اگر داشته باشیم

اگر در پروتوتایپ با مدل تقریباً در حال حرارت است. پس $\rho_M = \rho_P$ است، $\mu_M = \mu_P$ است پس:

$$\frac{V_M}{V_P} = \frac{D_P}{D_M} = \lambda \rightarrow$$ اسکیل مدل

اگر $\lambda = 50$ باشد یعنی مدل را $\frac{1}{50}$ کوچک کرده‌ایم.

$$(Fr)_M = (Fr)_P \rightarrow \frac{V_M}{\sqrt{g l_M}} = \frac{V_P}{\sqrt{g l_P}} \rightarrow \frac{V_M}{V_P} = \frac{\sqrt{l_M}}{\sqrt{l_P}}$$

$$\rightarrow \frac{V_M}{V_P} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

یعنی اگر کوچک جسم خود را در نظر بگیریم باید $\lambda = 1$ باشد. در نتیجه کشتی داریم پس باید نیروی F_c کم تر باشد یا F_g.

طبق دیاگرام Moody می‌دانیم Re کم با تأثیری روی اصطکاک و افت انرژی دارد پس می‌خواهیم در Re های بزرگ تأثیر عدد Re کم شود و شرط Fr را در نظر می‌گیریم.

قانون: در کلیه مسائل جریان‌های باز، کانال‌های باز و Free Surfaces رعایت بالا بودن Re نقل بسیار کم است پس عدد Fr کم است.

لذا در بسیاری از کتب فقط شرط Re کافی است چون تنش‌های برشی کم است.

مجاز کتب فقط ← لوله

مثال: Re کنترل شده و Q کنترل نشده است، $Q_p = 5000 \frac{m^3}{s}$ و $\lambda = 50$. (سرریز بی‌نشت)

چون سرریز بی‌نشت بی‌فرود (Fr) می‌باشد.

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{V_m \cdot A_m}{V_p \cdot A_p} = \frac{1}{\lambda^{0.5}} \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^{2.5}}$$

$$\rightarrow Q_m = \frac{5000}{(50)^{2.5}} = 0.28 \frac{m^3}{s}$$

$$\frac{(Re)_m}{(Re)_p} = \frac{\frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m}}{\frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}} = \frac{V_m}{V_p} \cdot \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{\lambda^{0.5}} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{1.5}}$$

اگر $Re > 5 \times 10^4$ باشد شرط فرود (Fr) کافی است.

مثال: در یک جریان تحت فشار می‌خواهیم نوسان را مدل کنیم اگر $\rho_m = 1.2 \frac{kg}{m^3}$، $\rho_p = 1000 \frac{kg}{m^3}$ (آب) $Q_p = 100 \frac{m^3}{s}$ و $\lambda = 40$ باشد Q_m را بدست آورید.

$(Re)_m = (Re)_p$ در اینجا چون $\rho_m \neq \rho_p$ پس نمی‌توان مستقیماً این دو را برابر گذاشت.

$$\frac{V_m D_m}{\nu_m} = \frac{V_p D_p}{\nu_p} \rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p} \cdot \frac{D_p}{D_m} = \frac{15 \times 10^{-6}}{1.14 \times 10^{-6}} \times 40$$

$$\rightarrow \frac{V_m}{V_p} = 13 \times 40 = 525.85$$

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{V_m}{V_p} \cdot \frac{A_m}{A_p} = 525.85 \times \frac{1}{40^2} = 0.33$$

$$Q_m = 0.33 \times 100 = 33 \frac{m^3}{s}$$

برقراری شرط بی بعدی رینولدز برای حصول تشابه کامل کافی است. حال سرعت مدل را به دست می‌آوریم.

مثال: مدل یک بندرگاه در آبخوری ساخته می‌شود، تا عمق مدل کوچک شود. بندرگاه دارای مقیاس $L_h = 1:1000$ ، $L_v = 1:100$ می‌باشد. $Q_m = 0.1 \frac{m^3}{s}$ می‌باشد. Q_p را بیابید.

$(F_r)_m = (F_r)_p$

$$\rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{g l_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g l_p}}$$

* l در مخرج وجود عمق است.

$$\rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = \sqrt{L_v}$$

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{V_m}{V_p} \cdot \frac{A_m}{A_p} = \frac{1}{\sqrt{100}} \times \frac{1}{100 \times 1000} \rightarrow Q_p = 10^6 Q_m = 10^5 \frac{m^3}{s}$$

مثال: جریان سیالی در لوله برای نمونه مدل می‌شود. $D_p = 800\,mm$ ، $\mu_p = 10 \times 8^{-3} \frac{kg}{m^3}$ ، $\rho_p = 800 \frac{kg}{m^3}$ ، $\mu_m = 10^{-3} \frac{kg}{m^3 s}$ ، $\rho_m = 1000 \frac{kg}{m^3}$ ، $D_m = 10\,mm$ ، $V_p = 1.5 \frac{m}{s}$ ، اگر $\tau_m = 1600 \frac{N}{m^2}$ باشد τ_p را بدست آورید.

جریان جریان کنترل ویسکوزیته مدل رینولدز است

$(Re)_m = (Re)_p$

$$\frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p D_p}{\mu_p} \rightarrow V_m = 12 \frac{m}{s}$$

مقاومت برشی سیال ویسکوز از رابطه نیوتن (سیال نیوتنی سیالی که ks خروجی دهد) بدست می‌آید.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\text{نسبت } \tau_r = \mu_r \cdot \frac{\Delta u_r}{\Delta y_r} = \frac{10^{-3}}{8 \times 10^{-3}} \times \frac{\frac{12}{1.5}}{\frac{10}{800}} = \frac{1}{80}$$

$$\frac{\tau_m}{\tau_p} = 80 \rightarrow \tau_p = \frac{\tau_m}{80} = \frac{1600}{80} = 20$$

حمید کاظم

می‌توان از رابطه $\tau = \frac{1}{2} \rho f V^2$ هم استفاده کرد.

مثال: $\frac{(S_F)_M}{(S_F)_P}$ را بدست آورید.

$$\frac{(S_F)_M}{(S_F)_P} = \frac{(h_f/\ell)_M}{(h_f/\ell)_P} = \frac{\frac{f_M}{D_M}\frac{V_M^2}{2g}}{\frac{f_P}{D_P}\frac{V_P^2}{2g}}$$

* زمان در مسائل دینامیکی به صورتی است که یعنی زمان مدل زودتر و تندتر اتفاق می‌افتد.

$t_m = \sqrt{\lambda}\, t_p$

اثبات کنید:

$$(F_r)_m = (F_r)_p \Rightarrow \frac{x_m \cdot t_m}{\sqrt{e_m}} = \frac{x_p \cdot t_p}{\sqrt{e_p}} \Rightarrow \frac{t_m}{t_p} = \frac{x_p}{x_m} \times \frac{\sqrt{e_m}}{\sqrt{e_p}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\Rightarrow t_m = \sqrt{\lambda}\, t_p$$

حمید کاظم

تشکر :

در انتها لازم میدانم از آقای مهرداد کیانپور (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه علم و صنعت) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .