دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

مقاومت مصالح ۲

استاد :

جناب آقای مهندس پیدایش

نگارش:

حمید کاظم
(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)
(کارشناس ارشد عمران گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)
(دانشجوی دکترا گرایش سازه North Carolina State University)

تابستان ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

مقاومت مصالح ۲

استاد :

جناب آقای مهندس پیدایش

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

«بسم الله الرحمن الرحیم»

حمید کاظم

«مقاومت مصالح ۲»

حمید کاظم

اگر صخره و سنگ در مقابل مسیر آب نباشد صدای آب هیچگاه قشنگ نیست

پس از صخره های جلوی مسیرت غمگین مباش

مباحث درس:

مقدمه

فصل اول: تغییرشکل تیرها

فصل دوم: تبدیل تنش ها و کرنش ها

فصل سوم: پایداری اعضای تحت فشار (کمانش ستون ها)

فصل چهارم: معیارهای گسیختگی مصالح

فصل پنجم: پوسته های جدار نازک

معیارهای طرح یک سازه مهندسی:

- مهندس سازه:
  1) مقاومت
  2) صلبیت
  3) پایداری
  4) اقتصاد
- معمار:
  5) زیبایی

- نیروی محوری:
  - مقاومت σ
  - صلبیت δ
- لنگر پیچشی:
  - مقاومت τ
  - صلبیت ϕ
- نیروی برشی:
  - مقاومت τ
  - صلبیت در تیرهای عمیق ← X
- لنگر خمشی:
  - مقاومت σ
  - X

حمید کاظم

شباهت مقاومت ۱ و ۲: هر دو شیرین هستند.
تفاوت مقاومت ۱ و ۲: در مقاومت ۱ وزن صفحه حجم بیشتر است مخصوصاً صفحه حجم پایدار.
اما در مقاومت ۲ وزن صفحات رویی سنگین‌تر است و صفحه حجم متحرک نیز دارد.

اهداف بالفعل:
۱) کامل کردن زنجیره آگاهی‌های حرفه‌ای
۲) تمرین زاویه‌دار کردن نظم. در یادگیری محل مشکل باید نظم را تمرین نمود.

ترتیب نمرات:

2 نمره ← quiz
2 نمره ← کلاس حل تمرین
6 نمره ← میان‌ترم (فصل‌های ۱ و ۲)
10 نمره ← پایان‌ترم (فصل‌های ۲، ۳، ۴، ۵)

تاریخ میان‌ترم ← پنجشنبه 6 اردیبهشت

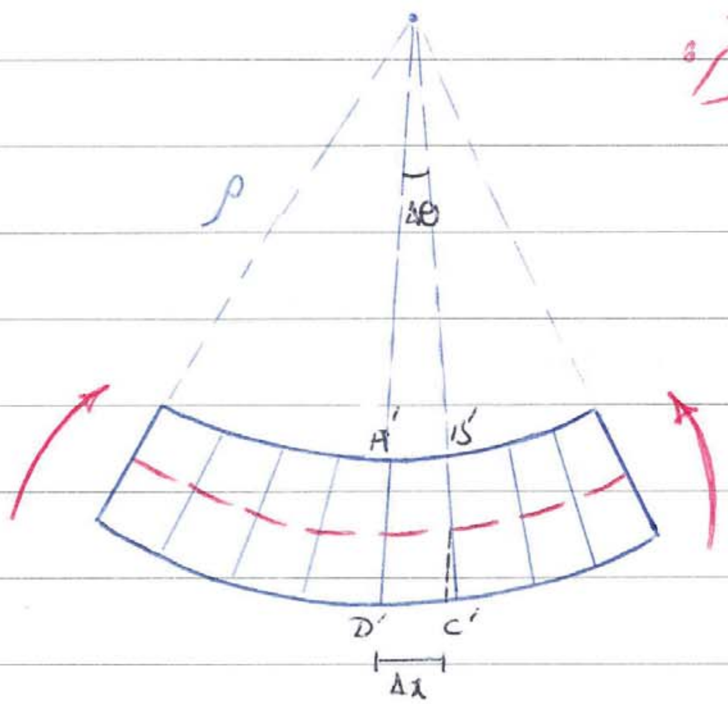
1000 kg = 1 ton

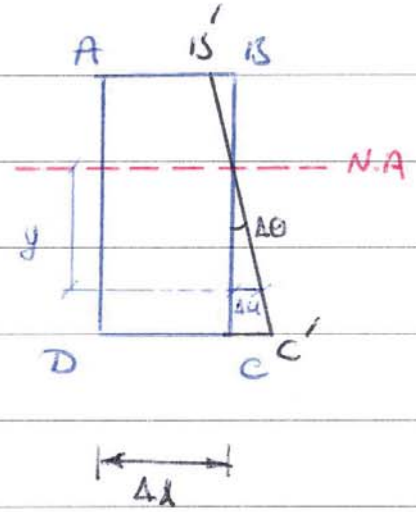
حمید کاظم

فصل اول:

تغییر شکل تیرها (Deflection Of Beam)

معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی تیر:





تغییر شکل برشی در مقابل تغییر شکل خمشی ناچیز است اگر عرض تیر نسبت به طول تیر بسیار کم باشد (عمیق نباشد)

$\Delta u = -y\ \Delta\theta$

* منفی لازم است چون در y های منفی کشش که باید مثبت Δu مثبت داریم.

$$\rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta x} = -y\ \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \quad , \quad \Delta x = \rho \cdot \Delta\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \varepsilon \\[2ex] \dfrac{\Delta\theta}{\Delta x} = \dfrac{1}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon = -y \cdot \frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

رابطه کرنش انحنا

strain-Curvature equation

$$\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$$

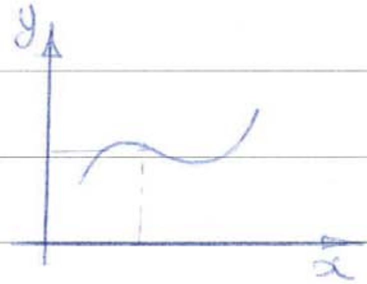
$\frac{1}{\rho} = k$ (انحنا)

رابطه کرنش - انحنا متکی به قانون هوک نیست پس هم در خمش ارتجاعی و هم خمش غیر ارتجاعی صادق است.

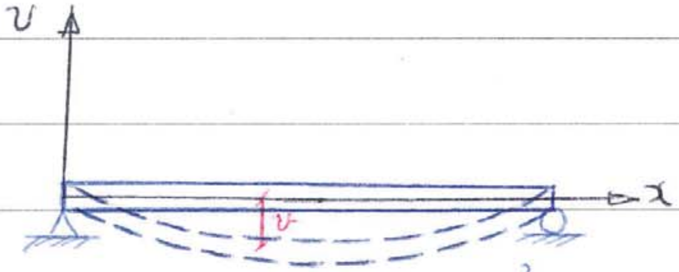
با فرض رفتار الاستیک خطی مصالح:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-M \cdot y}{IE} \quad (1) \qquad , \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{-\varepsilon}{y} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$ Moment curvature equation رابطه لنگر - انحنا



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$



y فقط در مقطع می‌باشد و مبدأ آن محور خنثی است. اما v مبدأش ابتدای تیر است.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

چون ما صلبیت را در نظر فرض می‌کنیم و تغییر شکل‌های تیر را بسیار کم می‌بینیم بنابراین شیب منحنی الاستیک تقریباً صفر می‌گیریم یعنی: $\frac{dv}{dx} \simeq 0$

حمید کاظم

$\Longrightarrow \quad \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}$ ← معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیر

اگر $M>0$ باشد تقعر در سمت بالا و اگر $M<0$ باشد تقعر در سمت پایین است (اتیک)

* اگر تغییر شکل تیر 1/200 طول تیر باشد خطای ایجاد شده ۱٪ است که قابل اغماض است.

اشکال دیگر معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیر

از این به بعد

$$\begin{cases} v(x) \longrightarrow & \text{تغییر شکل تیر} \\ \frac{dv}{dx}=\theta & \text{شیب تیر} \end{cases}$$

$$(1)\quad \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI} \Longrightarrow M(x)=EI\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$(2)\quad \frac{dM}{dx}=V(x) \Longrightarrow V(x)=\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

حالت خاص: اگر EI در طول تیر ثابت باشد

$$\Longrightarrow V(x)=EI\frac{d^3v}{dx^3}$$

$$(3)\quad \frac{dV}{dx}=q(x) \Longrightarrow q(x)=\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) \xrightarrow{\text{حالت خاص}} q(x)=EI\frac{d^4v}{dx^4}$$

$$1)\ M(x)=EI\frac{d^2v}{dx^2} \qquad 2)\ V(x)=EI\frac{d^3v}{dx^3} \qquad 3)\ q(x)=EI\frac{d^4v}{dx^4}$$

شرایط مرزی تیرها

۱) همگن: هندسی / استاتیکی

۲) غیرهمگن: هندسی / استاتیکی

* شرایط مرزی همگن مربوط به کمیت‌های برابر صفر می‌باشد در حالیکه شرایط مرزی غیرهمگن مربوط به کمیت‌های غیرصفر می‌باشد.

* شرایط مرزی هندسی شرایطی هستند که بیانگر کمیت‌های هندسی هستند ولی کمیت‌های استاتیکی مربوط به کمیت‌های نیرویی هستند.

۱) تکیه‌گاه گیردار

در محل تکیه‌گاه:

$u = 0$ (شرط مرزی هندسی - همگن)

$\frac{du}{dx} = 0$ (شرط مرزی هندسی - همگن)

۲) تکیه‌گاه مفصلی یا غلتکی در انتهای تیر

محل تکیه‌گاه:

$u = 0$ (هندسی - همگن)

$M = 0$ (استاتیکی - همگن) ← به شرط عدم اعمال گشتاور خمشی خارجی

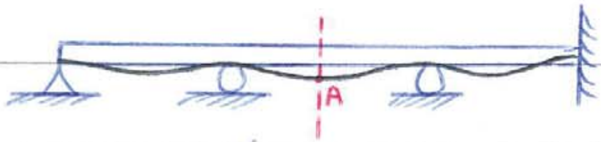
از لنگر متمرکز خارجی بر تکیه‌گاه اعمال شود: (انتهای غیر گیردار) $M=M_0$

۳) انتهای آزاد تیر:

به شرط عدم اعمال لنگر متمرکز (انتهای گیردار) $M=0$

به شرط عدم اعمال بار متمرکز (انتهای گیردار) $V=0$

شرایط پیوستگی فیزیکی:

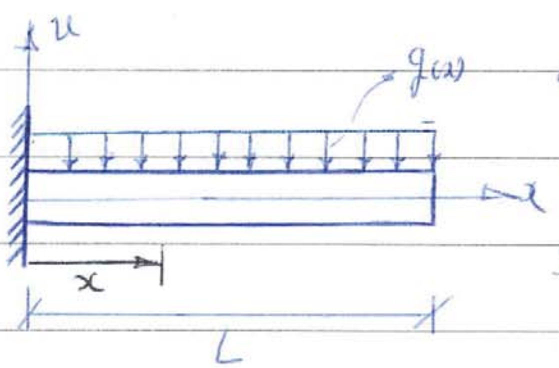


یعنی تیر نشان داده شده باید تغییر شکلش پیوسته باشد یعنی هیچگاه شکستگی نداشته باشیم.

← نه شکستگی نه انفصال

عدم شکستگی: شیب در دو طرف نقطه یکسان باشد. (مثلاً نقطه A)

عدم انفصال: تغییر شکل در دو طرف یک نقطه همواره یکسان است. (مثلاً نقطه A)



مثال: معادلهٔ منحنی تغییر شکل ارتجاعی تیر کنسول به طول l تحت بار گسترده یکنواخت را بدست آورده. تغییر مکان و شیب حداکثر را بدست آورید.

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{M}{EI} \qquad M(x)=-\frac{q(l-x)^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{q(l-x)^3}{6} + C_1 \longrightarrow EIv = \frac{-q(l-x)^4}{24} + C_1x + C_2$$

شرایط مرزی :

$$\begin{cases} v'_{(0)} = 0 \Rightarrow C_1 = \dfrac{-ql^3}{6} \\ v_{(0)} = 0 \Rightarrow C_2 = \dfrac{ql^4}{24} \end{cases} \longrightarrow \text{تکیه‌گاه}$$

$$\Rightarrow v_{(x)} = \frac{q}{24EI}\left(-x^4 + 4Lx^3 - 6L^2x^2\right)$$

تغییر شکل ماکزیمم و شیب ماکزیمم در انتهای آزاد تیر است.

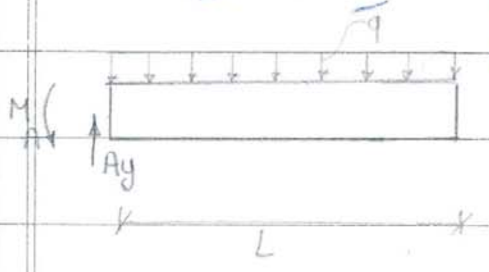
$$\delta_{Max} = v(l) = -\frac{ql^4}{8EI}$$

$$\theta_{Max} = v'(l) = -\frac{ql^3}{6EI}$$

یک شرط مرزی دیگری هم در انتهای آزاد تیر داریم : $V=0 \; , \; M=0$

می دانیم که M با $\frac{d^2v}{dx^2}$ ، V با $\frac{d^3v}{dx^3}$ ارتباط دارند ولی چون در معادله این دو وجود ندارند و فقط v و $\frac{dv}{dx}$ وجود دارند پس این شرط مرزی بدرد نمی خورد.

مثال : مثال فوق را با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم حل کنید. (تاکید می شود حتماً این مسئله را در منزل حل کنید و ما را کیف نمایید)

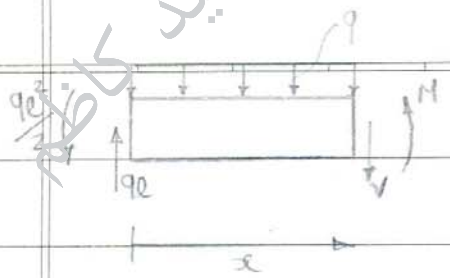


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = ql$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - ql\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{ql^2}{2}$$

حمید کاظمی



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow q\ell - qx - V = 0 \rightarrow V = q(\ell - x)$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow \frac{q\ell^2}{2} - q\ell x + \frac{qx^2}{2} + M = 0$$

$$\rightarrow M = \frac{-q}{2}(\ell^2 - 2\ell x + x^2) \rightarrow M = \frac{-q}{2}(\ell - x)^2$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q \Rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = -qx + C_1 \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = -\tfrac{1}{6}qx^3 + \tfrac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIv = -\tfrac{1}{24}qx^4 + \tfrac{1}{6}C_1x^3 + \tfrac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

شرایط مرزی ، محل تکیه‌گاه $\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$ انتهای آزاد $\begin{cases} M(\ell) = 0 \rightarrow \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=\ell} = 0 \\ V(\ell) = 0 \rightarrow \left.\frac{d^3v}{dx^3}\right|_{x=\ell} = 0 \end{cases}$

$$\left.\frac{d^3v}{dx^3}\right|_{x=\ell} = 0 \Rightarrow 0 = -q\ell + C_1 \Rightarrow C_1 = q\ell$$

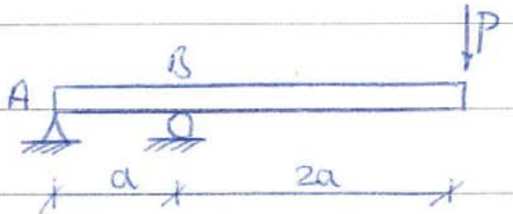
$$\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=\ell} = 0 \Rightarrow 0 = -\tfrac{1}{2}q\ell^2 + q\ell^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\tfrac{1}{2}q\ell^2$$

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$v = \frac{1}{EI}\left(-\tfrac{1}{24}qx^4 + \tfrac{1}{6}q\ell x^3 - \tfrac{1}{4}q\ell^2x^2\right) = \frac{q}{24EI}\left(-x^4 + 4\ell x^3 - 6\ell^2x^2\right)$$

نکته: انتخاب یکی از معادلات $q(x)=EI\frac{d^4v}{dx^4}$, $V(x)=EI\frac{d^3v}{dx^3}$, $M(x)=EI\frac{d^2v}{dx^2}$ برای یک حالت معلوم بستگی به این دارد که رابطه کدامیک از کمیت‌های بارگذاری، نیروی برشی و یا لنگر خمشی را بتوان به صورت درآورد. برای روابط دیفرانسیل از مرتبه پایین‌تر ثابت‌های انتگرال‌گیری کمتری مورد نیاز است. این موضوع می‌تواند معیاری برای انتخاب یکی از معادلات فوق باشد.



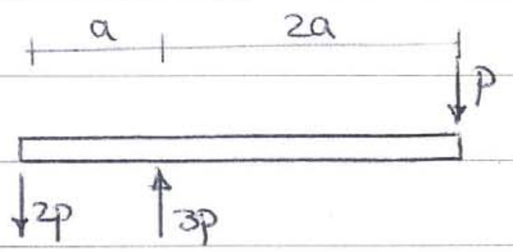
مثال: برای تیر نشان داده شده مطلوبست

الف) تعیین معادلات منحنی تغییر شکل تیر

ب) محاسبه حداکثر تغییر مکان شیب و خیز تیر

* لفظ تغییر شکل برای کل شکل تیر است. اما لفظ تغییر مکان برای یک نقطه از تیر است. ولی بعضاً این دو لفظ به جای هم بکار برده می‌شوند (مسامحتاً). بعضی کتاب‌ها هم از خیز نام می‌برند.

چون از دو ناحیه تشکیل شده دو معادله تغییر شکل دارد.



$$\sum M_A=0 \Rightarrow aB_y-3ap=0 \rightarrow B_y=3p$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+3p-p=0 \rightarrow A_y=-2p$$

$$0\leq x\leq a \rightarrow M(x)=-2px \Rightarrow EI\frac{d^2v_1}{dx^2}=-2px$$

$$\rightarrow EI\frac{dv_1}{dx}=-px^2+C_1 \Rightarrow EIv_1=-\frac{px^3}{3}+C_1x+C_2$$

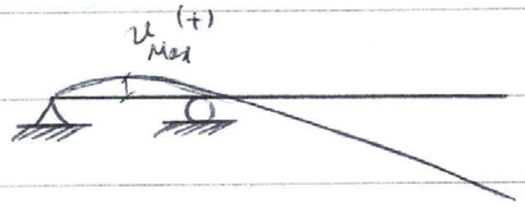
$$a\leq x\leq 3a \rightarrow M(x)=-p(3a-x) \rightarrow EI\frac{d^2v_2}{dx^2}=-p(3a-x)$$

$$\rightarrow EIv_2=-\frac{3pa}{2}x^2+\frac{P}{6}x^3+C_3x+C_4$$

حمید کاظم

شرایط مرزی
$$\begin{cases} v_1(0)=0 \\ v_1(a)=0 \\ v_2(a)=0 \\ \dfrac{dv_1}{dx}(a)=\dfrac{dv_2}{dx}(a) \end{cases} \Longrightarrow \quad C_1=\frac{Pa^2}{3},\quad C_2=0,\quad C_3=\frac{11Pa^2}{6},\quad C_4=\frac{-Pa^3}{2}$$

$$\rightarrow v_1(x)=-\frac{Px^3}{3EI}+\frac{Pa^2}{3EI}x \qquad v_2(x)=\frac{P}{6EI}x^3-\frac{3Pa}{2EI}x^2+\frac{11Pa^2}{6EI}x-\frac{Pa^3}{2EI}$$



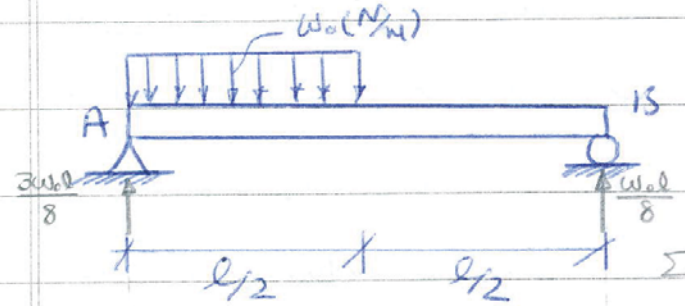
$$\begin{cases} 0\leq x\leq a \rightarrow M_1<0 & \text{تقعر منفی} \\ a\leq x\leq 3a \rightarrow M_2<0 & \text{تقعر منفی} \end{cases}$$

$$v_{Max}^{(-)}=v_2(3a)=\frac{-4Pa^3}{EI}$$

$$v_1'(x)=0 \Longrightarrow$$

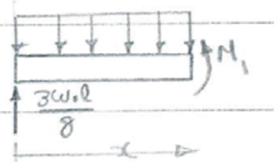
$$v_{Max}^{(+)}=\frac{2Pa^3\sqrt{3}}{27EI}$$

مثال : مطلوبست تعیین معادلات تغییر شکل تیر داده شده.



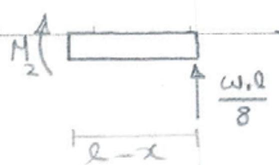
$$\Sigma M_A=0 \rightarrow -(w_0 l/2)\, l/4 + B_y(l)=0$$

$$\rightarrow B_y=\frac{w_0l^2}{8} \qquad \Sigma F_y=0 \rightarrow A_y+\frac{w_0l}{8}-\frac{w_0l}{2}=0 \rightarrow A_y=\frac{3w_0l}{8}$$



$$M_1-\frac{3w_0l}{8}x+w_0x(x/2)=0$$

$$\rightarrow M_1=\frac{3w_0l}{8}x-\frac{w_0}{2}x^2 \qquad 0\leq x\leq l/2$$



$$-M_2+\frac{w_0l}{8}(l-x)=0$$

$$\Longrightarrow M_2=-\frac{w_0l}{8}x+\frac{w_0l^2}{8} \qquad l/2\leq x\leq l$$

حمید کاظم

$0 \leq x \leq l/2 \rightarrow M_1 = -\frac{w_0}{2}x^2 + \frac{3w_0 l}{8}x \rightarrow EI\frac{dv_1}{dx} = -\frac{w_0}{6}x^3 + \frac{3w_0 l}{16}x^2 + C_1$

$\rightarrow EIv_1 = \frac{-w_0}{24}x^4 + \frac{w_0 l}{16}x^3 + C_1 x + C_2$

$l/2 \leq x \leq l \rightarrow M_2 = -\frac{w_0 l}{8}x + \frac{w_0 l^2}{8} \rightarrow EI\frac{dv_2}{dx} = -\frac{w_0 l}{16}x^2 + \frac{w_0 l^2}{8}x + C_3$

$\rightarrow EIv_2 = -\frac{w_0 l}{48}x^3 + \frac{w_0 l^2}{16}x^2 + C_3 x + C_4$

حال شرایط مرزی را بررسی می‌کنیم:

1) $v_1(0) = 0 \rightarrow \underline{\underline{C_2 = 0}}$

2) $v_2(l) = 0 \rightarrow 0 = -\frac{w_0 l^4}{48} + \frac{w_0 l^4}{16} + C_3 l + C_4 \quad (I)$

3) $v_1'(l/2) = v_2'(l/2) \rightarrow -\frac{w_0 l^3}{48} + \frac{3w_0 l^3}{64} + C_1 = -\frac{w_0 l^3}{64} + \frac{w_0 l^3}{16} + C_3$

$\rightarrow C_1 - C_3 = \frac{w_0 l^3}{48}$

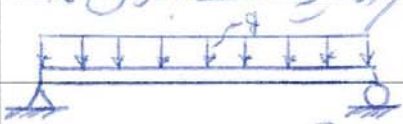
4) $v_1(l/2) = v_2(l/2) \rightarrow \cancel{\frac{-w_0 l^4}{384}} + \frac{w_0 l^4}{128} + \frac{l}{2}C_1 = \cancel{-\frac{w_0 l^4}{384}} + \frac{w_0 l^4}{64} + C_3 l/2 + C_4$

$\rightarrow -\frac{w_0 l^4}{128} + l/2(C_1 - C_3) = C_4 \rightarrow \underline{\underline{C_4 = \frac{w_0 l^4}{384}}}$

$(I) \rightarrow \underline{\underline{C_3 = \frac{17 w_0 l^3}{384}}} \quad , \quad \underline{\underline{C_1 = \frac{25 w_0 l^3}{384}}}$

$$\begin{cases} v_1(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{w_0}{24}x^4 + \frac{w_0 l}{16}x^3 + \frac{25 w_0 l^3}{384}x\right) & 0 \leq x \leq l/2 \\ v_2(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{w_0 l}{48}x^3 + \frac{w_0 l^2}{16}x^2 + \frac{17 w_0 l^3}{384}x + \frac{w_0 l^4}{384}\right) \end{cases}$$

تمرین: برای تیر ساده (تکیه‌گاه مفصلی و تکیه‌گاه غلتکی) تحت بار گسترده یکنواخت به طول l

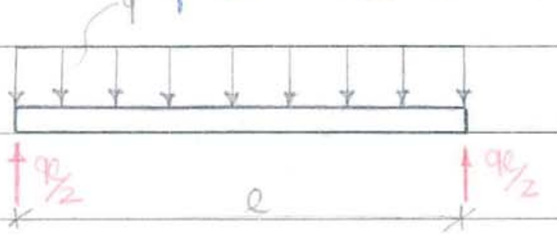


معادله تغییر شکل تیر را از دو روش زیر بدست آورید.

الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ب) معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم

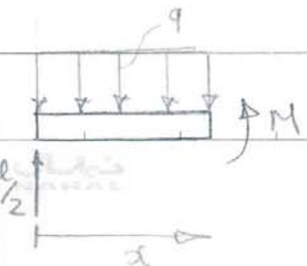
و تغییر مکان Max تیر را حساب نمایید.

(الف)



$M - \frac{ql}{2}x + qx(x/2) = 0$

$\rightarrow M = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{ql}{2}x$



حمید کاظم

$$EI\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{ql}{2}x \rightarrow EI\frac{dv}{dx} = -\frac{q}{6}x^3 + \frac{ql}{4}x^2 + C_1$$

$$\rightarrow EIv = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 + C_1 x + C_2$$

حال شرایط مرزی را بررسی می‌کنیم.

1) $v(0)=0 \rightarrow 0 = C_2$

2) $v(l)=0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{q}{12}l^4 + C_1 l \Rightarrow C_1 = \frac{-q}{24}l^3$

$$\rightarrow v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}l^3 x\right)$$

ب)

$$EI\frac{d^4 v}{dx^4} = -q \rightarrow EI\frac{d^3 v}{dx^3} = -qx + C_1 \rightarrow EI\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{-q}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{-q}{6}x^3 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$\rightarrow EIv = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

شرایط مرزی را بررسی می‌کنیم.

1) $v(0)=0 \rightarrow C_4 = 0$

2) $M(0)=0 \rightarrow C_2 = 0$

3) $M(l)=0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{2}l^2 + C_1 l \Rightarrow C_1 = \frac{q}{2}l$

4) $v(l)=0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{q}{12}l^4 + C_3 l \rightarrow C_3 = \frac{-q}{24}l^3$

$$\rightarrow v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 - \frac{ql^3}{24}x\right) =$$

ج)

$$v'(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-q}{6}x^3 + \frac{ql}{4}x^2 - \frac{ql^3}{24}\right) = 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{6}x^3 + \frac{l}{4}x^2 - \frac{l^3}{24} = 0 \Rightarrow -4x^3 + 6x^2 - l^3 = 0$$

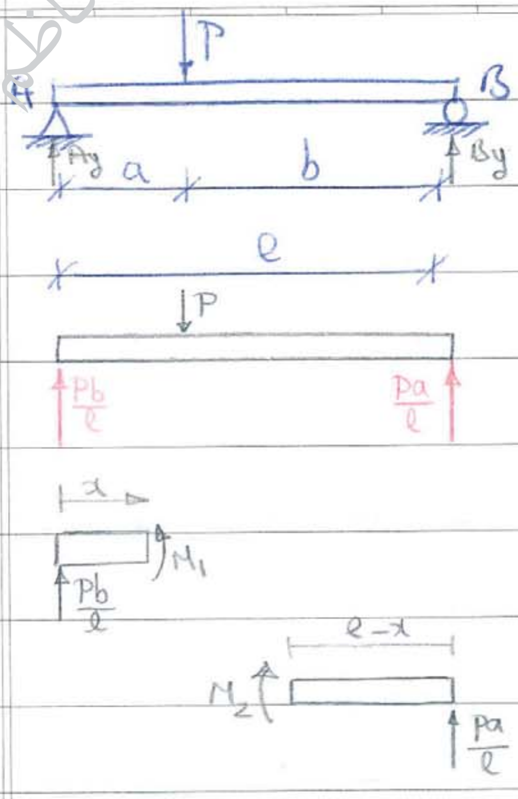
$$\rightarrow x = l/2$$

$$\rightarrow v(l/2) = \frac{+q}{24EI}\left(-\left(\frac{l}{2}\right)^4 + 2l\left(l/2\right)^3 - l^3\left(l/2\right)\right)$$

$$= \frac{q}{24EI}\left(\frac{-5}{16}l^4\right) \rightarrow v_{Max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

$$v(x) = \frac{qx}{24EI}\left[-x^3 + 2lx^2 - l^3\right]$$

حمید کاظم



تمرین ۵ معادله تغییر شکل تیر را بدست آورید
تغییر مکان Max را بدست آورید

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -pa + B_y(l) = 0 \rightarrow B_y = \frac{Pa}{l}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = p \rightarrow A_y = \frac{Pb}{l}$$

$$M_1 - \frac{Pb}{l}x = 0 \rightarrow M_1 = \frac{Pb}{l}x \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

$$-M_2 + \frac{Pa}{l}(l - x) = 0 \rightarrow M_2 = \frac{-Pa}{l}x + pa \qquad a \leqslant x \leqslant l$$

$$M_1 = \frac{Pb}{l}x \rightarrow EI\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{Pb}{l}x$$

$$\rightarrow EI\frac{dv_1}{dx} = \frac{Pb}{2l}x^2 + C_1 \rightarrow EI v_1 = \frac{Pb}{6l}x^3 + C_1 x + C_2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

$$M_2 = \frac{-Pa}{l}x + pa \rightarrow EI\frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{-Pa}{l}x + pa \rightarrow EI\frac{dv_2}{dx} = \frac{-Pa}{2l}x^2 + pax + C_3$$

$$EI v_2 = \frac{-Pa}{6l}x^3 + \frac{Pa}{2}x^2 + C_3 x + C_4 \qquad a \leqslant x \leqslant l$$

شرایط مرزی:

$$1)\ v_1(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$2)\ v_2(l) = 0 \rightarrow -\frac{Pa}{6}l^2 + \frac{pa}{2}l^2 + C_3 l + C_4 = 0 \quad (1)$$

$$3)\ v'_1(a) = v'_2(a) \rightarrow \frac{Pb}{2l}a^2 + C_1 = -\frac{Pa}{2l}a^2 + pa^2 + C_3$$

$$\rightarrow pa^2\left(\frac{b+a}{2l}\right) - pa^2 = C_3 - C_1 \Rightarrow C_3 - C_1 = \frac{-1}{2}pa^2 \quad (2)$$

$$4)\ v_1(a) = v_2(a) \rightarrow \frac{Pb}{6l}a^3 + C_1 a = \frac{-Pa}{6l}a^3 + \frac{P}{2}a^3 + C_3 a + C_4$$

$$\rightarrow pa^3\left(\frac{b+a}{6l}\right) - \cancel{\frac{P}{2}a^3} = \cancel{-\frac{1}{2}pa^3} + C_4 \rightarrow C_4 = \frac{1}{6}pa^3$$

$$(1) \rightarrow \frac{1}{3}pal^2 + C_3 l + \frac{1}{6}pa^3 = 0 \qquad C_3 = \frac{-Pa}{6l}(2l^2 + a^2)$$

$$(2) \rightarrow C_3 + \frac{1}{2}pa^2 = C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{3pla^2}{6l} - \frac{pa}{6l}(2l^2 + a^2)$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{-Pa}{6l}(2l^2 - 3la + a^2)$$

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{Pb}{6l}x^3 - \dfrac{pax}{6l}(2l^2 - 3la + a^2)\right] & 0 \leqslant x \leqslant a \\ v_2 = \dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{-Pa}{6l}x^3 + \dfrac{Pa}{2}x^2 - \dfrac{pax}{6l}(2l^2 + a^2) + \dfrac{1}{6}pa^3\right] & a \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

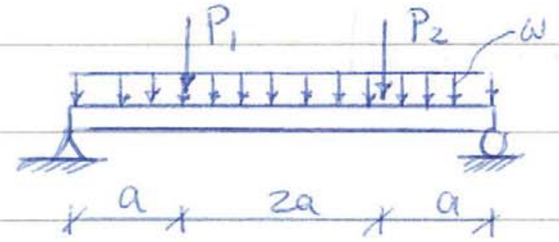
حمید کاظم

تغییر شکل تیرها با استفاده از اصل سوپر پوزیسیون:

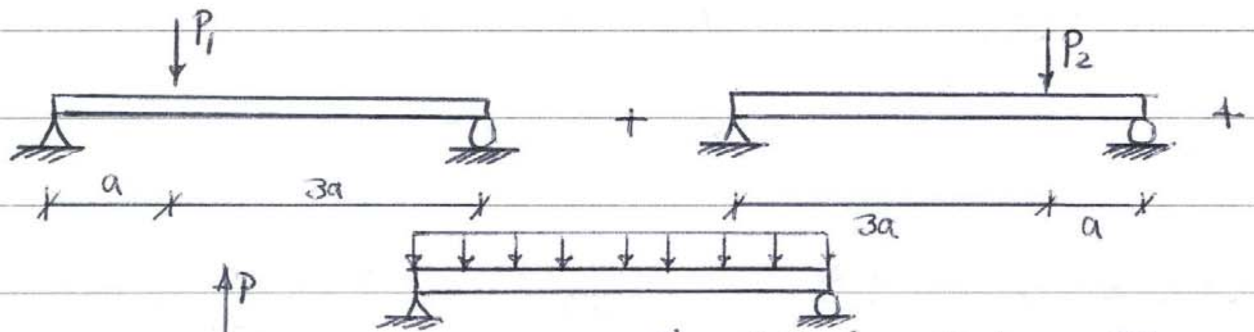
شرایط استفاده از اصل سوپر پوزیسیون:

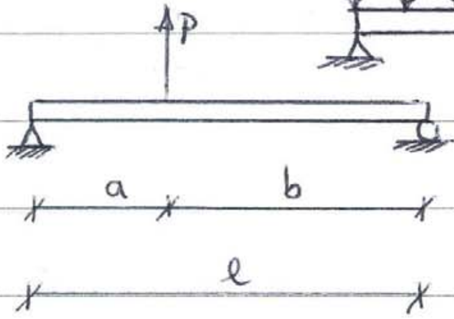
۱) تغییر شکل حاصل از هر کدام آنقدر بزرگ نباشد که در عوامل دیگر تاثیر بگذارد

۲) حالت بررسی حالت الاستیک خطی باشد



مثال: معادله تغییر شکل تیر را یافته، تغییر مکان وسط آن را بدست آورید.





در جدول: $v = \frac{Pb}{6EIL}\left[(L^2-b^2)x - x^3 + \frac{L}{b}\langle x-a\rangle^3\right]$

$$\langle x-a\rangle = \begin{cases} \text{for } x>a \rightarrow (x-a) \\ \text{for } x<a \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$v_1(x) = \frac{-P_1(3a)}{6EI(4a)}\left[\left((4a)^2-(3a)^2\right)x - x^3 + \frac{4a}{3a}\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$\rightarrow v_1(x) = \frac{-P_1}{8EI}\left[7a^2x - x^3 + 4/3\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$v_2(x) = \frac{-P_2(a)}{6EI(4a)}\left[\left((4a)^2-a^2\right)x - x^3 + \frac{4a}{a}\langle x-3a\rangle^3\right]$$

$$\rightarrow v_2(x) = \frac{-P_2}{24EI}\left[15a^2x - x^3 + 4\langle x-3a\rangle^3\right]$$

حميد كاظم

$$v_3(x) = \frac{-wx}{24EI}\left(x^3 - 8ax^2 + 64a^3\right)$$

$$\Rightarrow v(x) = v_1(x) + v_2(x) + v_3(x)$$

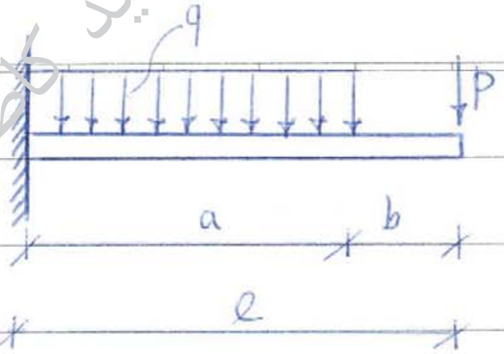
$$\Rightarrow v(x) = \frac{-P_1}{8EI}\left[7a^2x - x^3 + \tfrac{4}{3}\langle x-a\rangle^3\right] + \frac{-P_2}{24EI}\left[15a^2x - x^3 + 4\langle x-3a\rangle^3\right] - \frac{wx}{24EI}\left(x^3 - 8ax^2 + 64a^3\right)$$

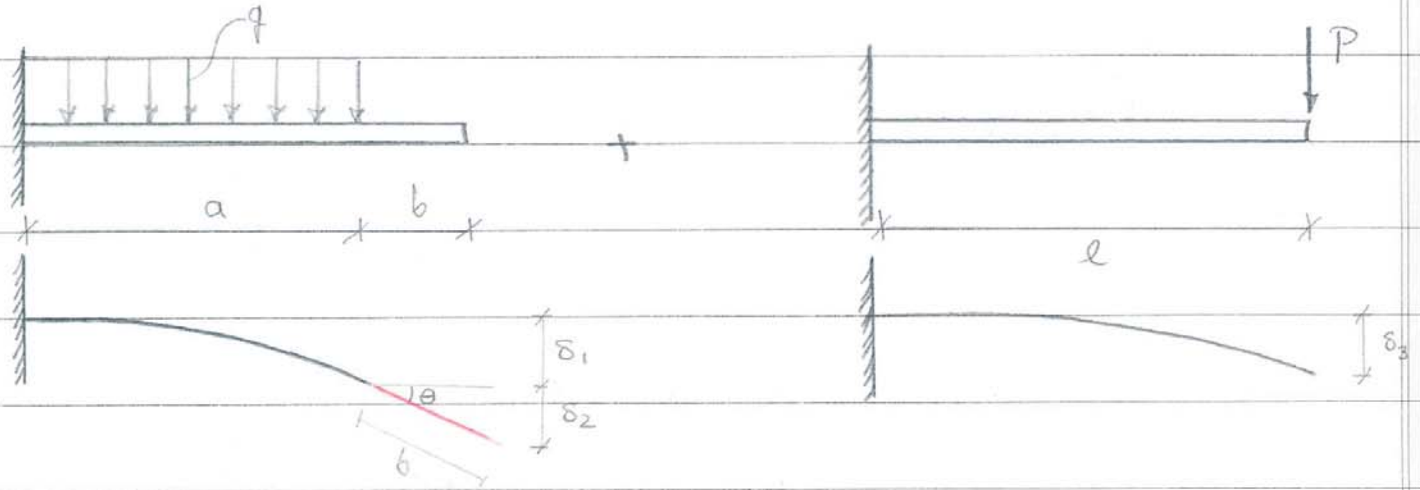
$$x = 2a \Rightarrow v(2a) = \frac{-P_1}{8EI}\left[14a^3 - 8a^3 + \tfrac{4}{3}a^3\right] - \frac{P_2}{24EI}\left[30a^3 - 8a^3\right] - \frac{wa}{12EI}\left(8a^3 - 32a^3 + 64a^3\right)$$

$$\Rightarrow v(2a) = \frac{-P_1}{8EI}\left(\frac{22}{3}a^3\right) - \frac{P_2}{24EI}\left(22a^3\right) - \frac{wa}{12EI}\left(40a^3\right)$$

$$\Rightarrow v(2a) = \frac{a^3}{24EI}\left(-22P_1 - 22P_2 - 80wa\right)$$

مثال: تغییر مکان انتهای آزاد تیر کنسولی را با استفاده از روش جمع آثار بدست آورید





$$\delta_1 = \frac{qa^4}{8EI}$$

$$\theta = \frac{qa^3}{6EI} \rightarrow \sin\theta = \frac{\delta_2}{b} \rightarrow \delta_2 = b\theta = \frac{qa^3 b}{6EI}$$

$$\delta_3 = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\rightarrow u = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{qa^3}{2EI}\left(\frac{b}{3} + \frac{a}{4}\right) + \frac{Pl^3}{3EI}$$

تحلیل تیرهای نامعین 8 (Indeterminate Beam Analysis)

تیر نامعین تیری است که تعداد تکیه‌گاه‌ها یا واکنش‌ها به قدری است که تعداد معادلات مستقل تعادلش
کفایت برای یافتن واکنش‌های تکیه‌گاهی نمی‌کند.
اگر تیر دارای تکیه‌گاه‌های بیش از تعداد حداقل پایداری باشد تیر نامعین می‌گردد.

دو روش را برای تحلیل تیرهای نامعین استفاده می‌کنیم:

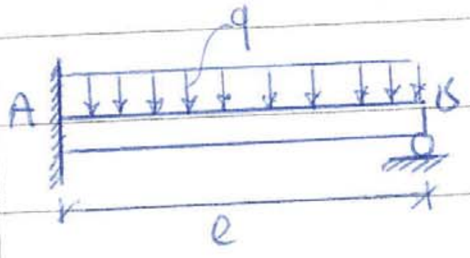
۱) روش حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی
۲) روش مبتنی بر اصل سوپرپوزیشن

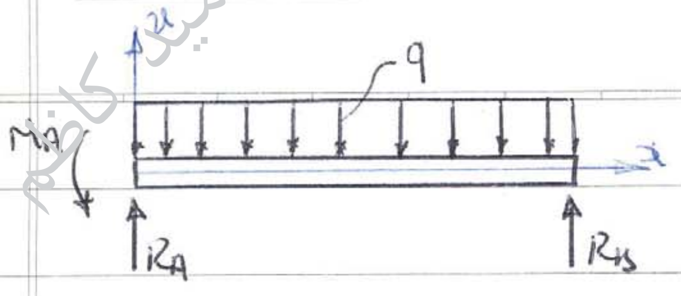
در هر دو روش مطلب مشترک است که باید درجه نامعینی را تشخیص و مقدار آن را بدست آوریم.

۱) روش حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی:

۱) انتخاب واکنش اضافی
۲) تشکیل معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی تیر برحسب واکنش اضافی
۳) حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل
۴) اعمال شرایط مرزی و یافتن ثابت‌های انتگرال و واکنش اضافی. توانا در تشکیل معادلات مختار هستیم از معادله درجه دوم، سوم یا چهارم استفاده نماییم.

مثال: مطلوب است محاسبه عکس‌العمل‌های تیر نشان داده شده.





تیر کنسول ؛ تیر مبنا

R_B ؛ واکنش اضافی

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A = q \cdot l - R_B \qquad \Sigma M = 0 \rightarrow M_A = \frac{ql^2}{2} - R_B \cdot l$$

$$M(x) = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} - M_A \Rightarrow EI\frac{d^2 v}{dx^2} = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} - M_A$$

$$\rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{R_A}{2} x^2 - \frac{qx^3}{6} - M_A \cdot x + C_1$$

$$\rightarrow EI v = \frac{R_A}{6} x^3 - \frac{q}{24} x^4 - \frac{M_A}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow EI v = \frac{ql}{6} x^3 - \frac{R_B}{6} x^3 - \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^2}{4} x^2 + \frac{R_B l}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

شرایط مرزی ؛

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \\ v(l) = 0 \end{cases} \rightarrow C_1 = 0 \;,\; C_2 = 0 \;,\; R_B = \frac{3ql}{8}$$

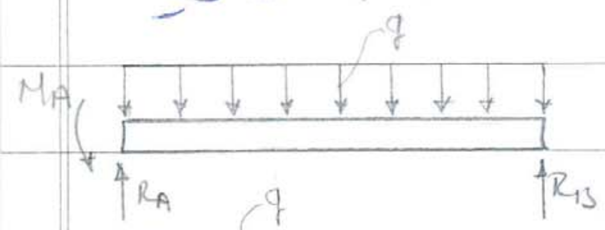
این شرایط مرزی برای تیر اصلی است نه تیر مبنا

$$\rightarrow R_A = \frac{5ql}{8} \qquad M_A = \frac{ql^2}{8}$$

تمرین ؛ M_A را در مثال فوق واکنش اضافی در نظر گرفته و مسئله را مجدداً حل نمایید.

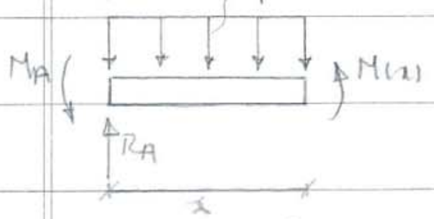
تیر ساده ؛ تیر مبنا

M_A ؛ واکنش اضافی



$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M_A - \frac{q}{2} l^2 + R_B l = 0$$

$$\rightarrow R_B = \frac{q}{2} l - \frac{M_A}{l}$$



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = ql$$

$$\rightarrow R_A = ql - \frac{q}{2} l + \frac{M_A}{l} = \frac{q}{2} l + \frac{M_A}{l}$$

$$M(x) + \frac{qx^2}{2} - R_A x + M_A = 0 \rightarrow M(x) = -\frac{q}{2} x^2 + R_A x - M_A$$

$$\rightarrow M(x) = -\frac{q}{2} x^2 + \frac{q}{2} l x + \frac{M_A}{l} x - M_A$$

$$\rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{2}x^2 + \frac{q}{2}lx + \frac{M_A}{l}x - M_A$$

$$\rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{-q}{6}x^3 + \frac{q}{4}lx^2 + \frac{M_A}{2l}x^2 - M_A x + C_1$$

$$\rightarrow EI\,v(x) = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{q}{12}lx^3 + \frac{M_A}{6l}x^3 - \frac{M_A}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

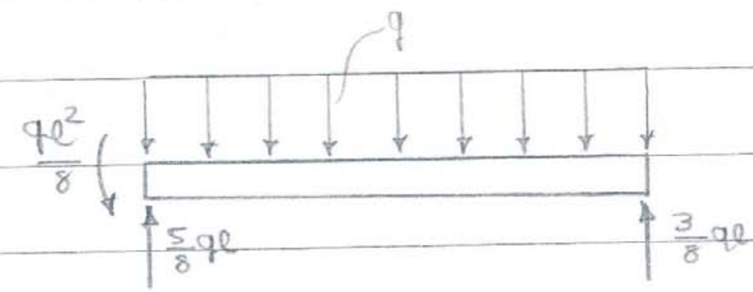
1) $v(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

2) $v'(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$

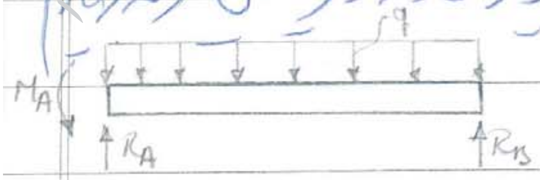
3) $v(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{q}{12}l^4 + \frac{M_A}{6}l^2 - \frac{M_A}{2}l^2$

$$\rightarrow 0 = \frac{q}{24}l^4 - \frac{2M_A}{6}l^2 \rightarrow \frac{1}{3}M_A l^2 = \frac{q}{24}l^4 \rightarrow M_A = \frac{ql^2}{8}$$

$$\rightarrow R_B = \frac{q}{2}l - \frac{M_A}{l} = \frac{q}{2}l - \frac{q}{8}l \rightarrow \begin{cases} R_B = \frac{3}{8}ql \\ R_A = \frac{5}{8}ql \end{cases}$$



تمرین: هر کدام را دوست دارید واکنش اضافی در نظر بگیرید و از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم مسئله را حل کنید.



R_A و B واکنش اضافی

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \frac{q}{2}l^2 - R_A l + M_A = 0$$

$$\rightarrow M_A = R_A l - \frac{q}{2}l^2 \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = ql \rightarrow R_B = ql - R_A$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q \Rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = -qx + C_1 \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{-q}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3 \Rightarrow EIv = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

1) $v(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$ 2) $v'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

3) $V(0) = R_A \rightarrow C_1 = R_A$

4) $M(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{2}l^2 + C_1 l + C_2 \Rightarrow 0 = \frac{-q}{2}l^2 + R_A l + C_2$

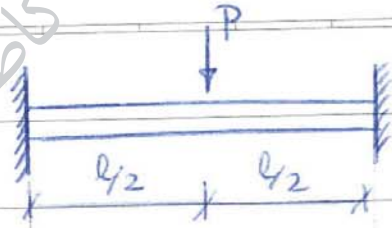
$$\rightarrow C_2 = \frac{q}{2}l^2 - R_A l$$

5) $v(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{R_A}{6}l^3 + \frac{l^2}{2}\left(\frac{q}{2}l^2 - R_A l\right)$

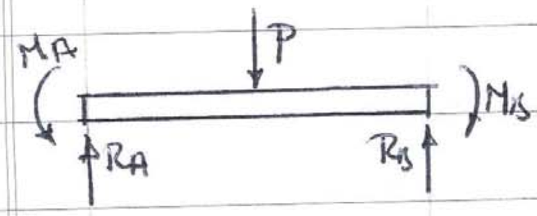
$$0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{R_A}{6}l^3 + \frac{q}{4}l^4 - \frac{R_A}{2}l^3 \Rightarrow 0 = \frac{5ql^4}{24} - \frac{1}{3}R_A l^3$$

$$\rightarrow R_A = \frac{5}{8}ql \quad , \quad R_B = \frac{3}{8}ql \quad , \quad M_A = \frac{ql^2}{8}$$

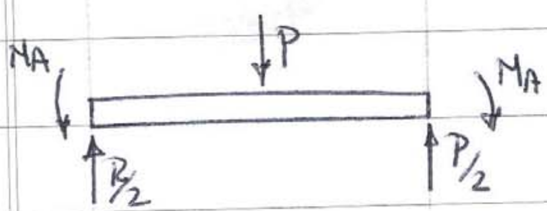
مثال: عکس العمل های تکیه گاهی تیر دوسر گیردار شکل را بدست آورید.



* اگر بارها بر روی تیر قائم باشند در مورد A_x و B_x می‌توانیم بنویسیم که $A_x = B_x$. و چون تأثیرشان در تغییر شکل خمشی تیر نسبتاً ناچیز است در نظر نمی‌گیریم.



* در این مسئله بخصوص بدلیل تقارن $R_A=R_B=P/2$ و $M_A=M_B$ باشد. پس یک مجهول داریم.



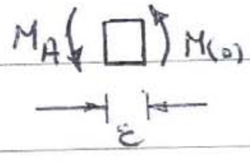
M_A را مجهول اضافی می‌گیریم و از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم استفاده می‌کنیم.

$$0 \leq x \leq l/2 \quad ; \quad EI\frac{d^4v}{dx^4}=0 \rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3}=C_1 \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2}=C_1x+C_2$$

$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3 \rightarrow EIv=\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

ترتیب استفاده

شرایط مرزی
$$\begin{cases} v(0)=0 & (5) \\ v'(0)=0 & (3) \\ v'(l/2)=0 & (4) \\ M(0)=-M_A & (2) \\ V(0)=P/2 & (1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1=P/2 \\ C_2=-M_A \\ C_3=0 \\ M_A=\frac{Pl}{8} \\ C_4=0 \end{cases}$$



$$v(x)=\frac{P}{12EI}x^3-\frac{Pl}{16EI}x^2 \qquad 0 \leq x \leq l/2 \qquad M_A=\frac{Pl}{8}$$

بدلیل تقارن داریم برای حل در تغییر شکل ناحیه دوم می‌توان به جای x ، $l-x$ قرار داد.

حمید کاظم

۲) روش مبتنی بر اصل سوپرپوزیسیون :

۱) تعیین واکنش های اضافی (واکنش اضافی)

۲) حذف واکنش های اضافی از تیر و تشکیل تیر ضمن

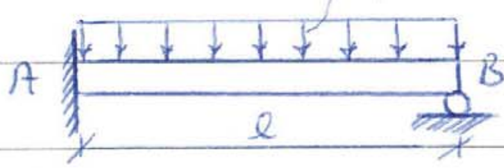
۳) محاسبه تغییرشکل ها و شیب های نظیر محل واکنش های اضافی در تیر ضمن در اثر بارگذاری واقعی تیر.

۴) محاسبه تغییرشکل ها و شیب های نظیر محل واکنش های اضافی در تیر ضمن ناشی از اعمال فقط واکنش های اضافی به عنوان بار خارجی روی تیر ضمن.

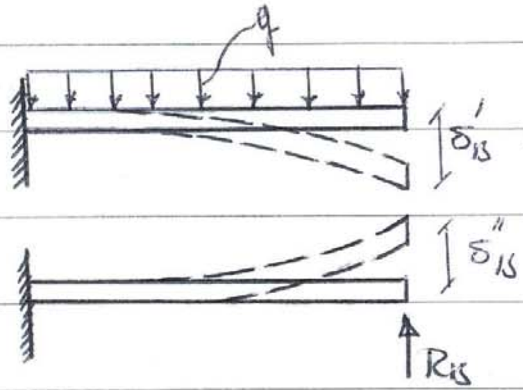
۵) تشکیل معادلات سازگاری تغییرشکل ها بر اساس اصل سوپرپوزیسیون (یعنی این واقعیت که تغییرشکل ها و شیب های نهائی ناشی از تأثیر همزمان بارگذاری خارجی واقعی و واکنش های اضافی برابر با جمع جبری تغییرشکل ها و شیب های جداگانه می باشد)

۶) یافتن واکنش های اضافی از حل معادلات سازگاری و بقیه واکنش ها از تعادل

مثال : مطلوبست محاسبه عکس العمل های تیر نشان داده شده.



۱) واکنش R_{1B} را به عنوان واکنش اضافی انتخاب می کنیم



در مرحله ۳ تیر ضمن تحت بارگذاری خارجی واقعی روی تیر قرار می گیرد.

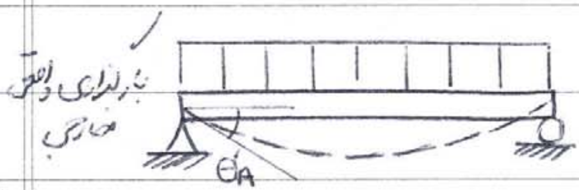
در مرحله ٤ تیر ضمن را تحت واکنش اضافی به عنوان بار خارجی قرار می دهیم

در محل تشکیل واکنش اضافی معادله سازگاری را می نویسیم چون از B انتقال نداریم

$$\delta_{1B} = \delta'_{1B} + \delta''_{1B} = 0$$ معادله سازگاری تغییرشکل

جداول آماده
$$\begin{cases} \delta'_B = -\dfrac{q\ell^4}{8EI} \\ \delta''_B = \dfrac{R_B \ell^3}{3EI} \end{cases} \quad , \quad \delta'_B + \delta''_B = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3q\ell}{8}$$

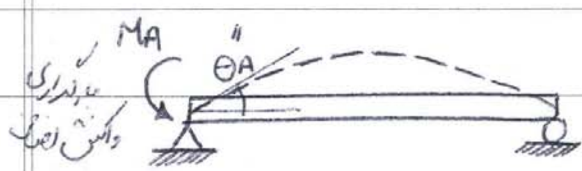
$$\rightarrow R_A = \frac{5q\ell}{8} \qquad M_A = \frac{q\ell^2}{8}$$



۲) واکنش M_A را واکنش اضافی فرض می‌کنیم

ترجیح ۲ تیر ساده

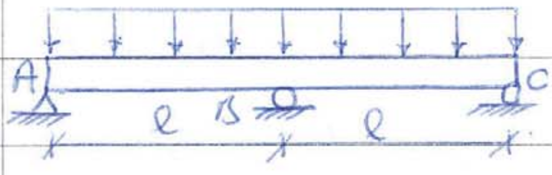
معادله سازگاری:
$$\theta_A = \theta'_A + \theta''_A = 0$$



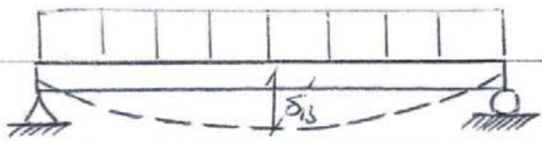
جدول آماده
$$\begin{cases} \theta'_A = -\dfrac{q\ell^3}{24EI} \\ \theta''_A = \dfrac{M_A \cdot \ell}{3EI} \end{cases}$$

$$\rightarrow \theta'_A = -\theta'_A \Rightarrow M_A = \frac{q\ell^2}{8}$$

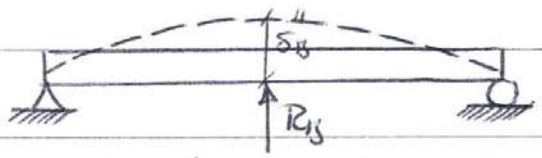
مثال: عکس العمل های تیر نشان داده شده را بدست آورید.



B واکنش اضافی



می‌توانستیم C را واکنش اضافی بگیریم اما جدول نداریم.



محل واکنش اضافی برای معادله سازگاری استفاده می‌گردد.

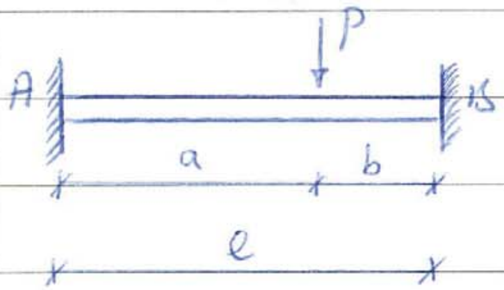
سازگاری: $\delta'_B + \delta''_B = 0$
$$\delta'_B = -\frac{5q(2\ell)^4}{384EI} = -\frac{5q\ell^4}{24EI}$$

$$\delta''_B = \frac{R_B(2\ell)^3}{48EI} = \frac{R_B \cdot \ell^3}{6EI}$$

حمید کاظم

سازه → $R_B = \dfrac{5ql}{4}$ $\qquad R_A = R_C = \dfrac{3ql}{8}$

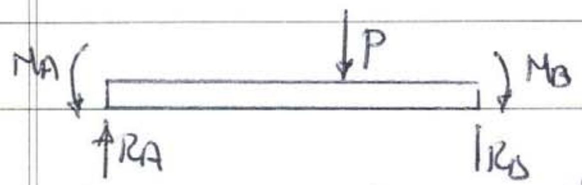
مثال: عکس العمل های تکیه گاهی را بیابید.

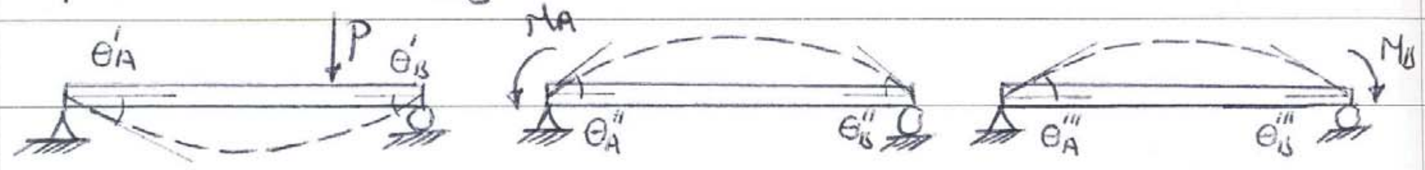


به علت عکس العمل های ناچیز افقی از آن ها صرفنظر می کنیم
(اما اگر مایل باشد نمی توان صرفنظر کرد)

M_A , M_B → واکنش اضافی

تیر مبنا = تیر ساده





معادلات سازگاری

$$\begin{cases} \theta_A = \theta'_A + \theta''_A + \theta'''_A = 0 \\ \theta_B = \theta'_B + \theta''_B + \theta'''_B = 0 \end{cases}$$

$$\theta'_A = -\frac{Pab(l+b)}{6EIl} \qquad \theta'_B = \frac{Pab(l+a)}{6EIl}$$

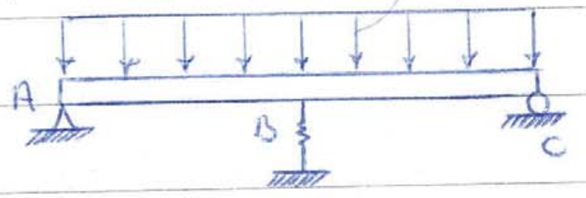
$$\theta''_A = \frac{M_A \cdot l}{3EI} \qquad \theta''_B = -\frac{M_A \cdot l}{6EI}$$

$$\theta'''_A = \frac{M_B l}{6EI} \qquad \theta'''_B = -\frac{M_B \cdot l}{3EI}$$

$$\rightarrow M_A = \frac{Pab^2}{l^2} \qquad M_B = \frac{Pa^2 b}{l^2}$$

$$R_A = \frac{Pb^2}{l^3}(l+2a) \qquad R_B = \frac{Pa^2}{l^3}(l+2b)$$

تمرین ۵: با فرض اینکه بجای تکیه‌گاه غلتکی B یک تکیه‌گاه فنری با سختی k داشته باشیم مثال قبلی نه قبلش را حل کنید



$$\delta = \delta' + \delta'' = -\frac{R_B}{k} \qquad \begin{cases} \delta' = -\dfrac{5ql^4}{24EI} \\ \delta'' = \dfrac{R_B l^3}{6EI} \end{cases}$$

$$\rightarrow -\frac{5ql^4}{24EI} + \frac{R_B l^3}{6EI} = -\frac{R_B}{k} \Rightarrow R_B\left(\frac{l^3}{6EI} + \frac{1}{k}\right) = \frac{5ql^4}{24EI}$$

$$\Rightarrow R_B\left(\frac{kl^3 + 6EI}{6kEI}\right) = \frac{5ql^4}{24EI} \Rightarrow R_B = \frac{5qkl^4}{24(kl^3 + 6EI)}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_B l + 2R_C l - 2ql^2 = 0 \Rightarrow R_C = \frac{-R_B}{2} + ql$$

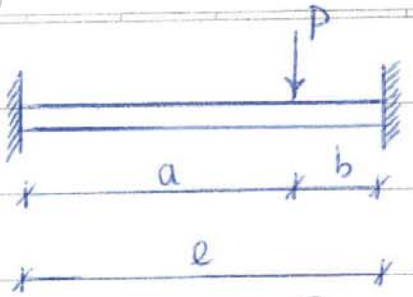
$$\rightarrow R_C = \frac{-5}{48}\left(\frac{qkl^4}{kl^3 + 6EI}\right) + ql$$

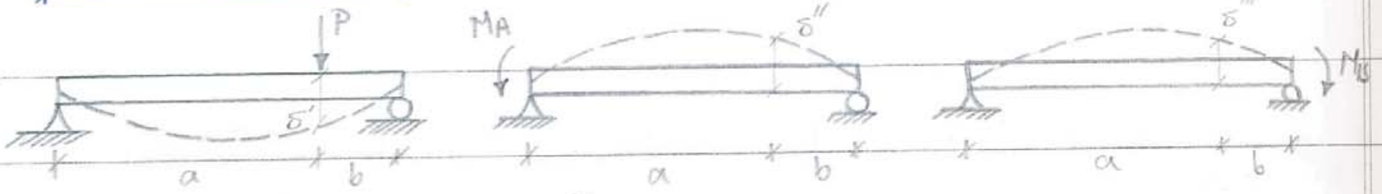
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B + R_C = 2ql \rightarrow R_A = 2ql - R_B - R_C$$

$$\Rightarrow R_A = ql - \frac{5}{48}\left(\frac{qkl^4}{kl^3 + 6EI}\right)$$

حمید کاظمی

تمرین: تغییر مکان محل زیر بار تیر فوق را بدست آورید.





$$M_A = \frac{Pab^2}{l^2} \qquad M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

$$\delta = \delta' + \delta'' + \delta'''$$

$$v_1 = \frac{-Pb}{6EIl}\left[(l^2-b^2)x - x^3 + (l/b)\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$\rightarrow \delta' = v_1(a) = \frac{-Pb}{6EIl}\left[(l+b)a^2 - a^3\right] = \frac{-Pb^2a^2}{6EIl}$$

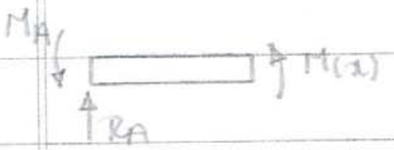
$$v_3 = \frac{M_B x}{6EIl}(l^2-x^2) \rightarrow \delta''' = v_3(a) = \frac{M_B a}{6EIl}(b(l+a))$$

$$\rightarrow \delta''' = \frac{Pa^3b^2}{6EIl^3}(l+a)$$

برای یافتن v_2 به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A = R_B l \qquad \Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A = R_B$$

$$\rightarrow R_A = R_B = \frac{M_A}{l}$$



$$\Sigma M = 0 \rightarrow M(x) + M_A - R_A \cdot x = 0$$

$$\rightarrow M(x) = M_A(x/l - 1) = \frac{M_A}{l}(x-l)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_A}{l}(x-l) \rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{M_A}{2l}(x-l)^2 + C_1$$

$$\rightarrow EIv = \frac{+M_A}{6l}(x-l)^3 + C_1x + C_2$$

$$v(0) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-M_A}{6l}(l)^3 + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{+M_A l^2}{6}$$

$$v(l) = 0 \rightarrow 0 = 0 + C_1 l + \frac{M_A l^2}{6} \rightarrow C_1 = -\frac{M_A l}{6}$$

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{M_A}{6l}(x-l)^3 - \frac{M_A}{6}lx + \frac{M_A}{6}l^2\right) = \frac{M_A}{6EI}\left(\frac{(x-l)^3}{l} - lx + l^2\right)$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{M_A}{6EIl}\left((x-l)^3 - l^2x + l^3\right)$$

$$\Rightarrow \delta'' = v_3(a) = \frac{M_A}{6EIl}\left((a-l)^3 - l^2a + l^3\right) = \frac{M_A}{6EIl}\left(-b^3 - l^2a + l^3\right)$$

$$= \frac{M_A}{6EIl}\left(l^2(b) - b^3\right) = \frac{M_A}{6EIl}\left(b(a)(l+b)\right) = \frac{M_A ab}{6EIl}(l+b)$$

$$\Rightarrow \delta'' = \frac{Pa^2b^3}{6EIl^3}(l+b)$$

$$\delta = \frac{-Pb^2a^2}{6EIl} + \frac{Pa^2b^3}{6EIl^3}(l+b) + \frac{Pa^3b^2}{6EIl^3}(l+a)$$

$$= \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(-1 + \frac{b}{l^2}(l+b) + \frac{a}{l^2}(l+a)\right) = \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(-1 + 1 + \frac{b^2+a^2}{l^2}\right)$$

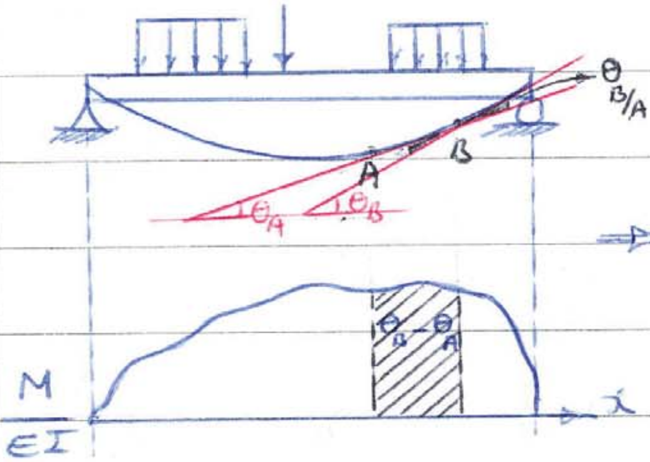
$$\Rightarrow \delta = \frac{Pa^2b^2(a^2+b^2)}{6EIl^3}$$

بعضی مواقع دیگر احتیاج به شکل معادله تغییر شکل تیر نداریم. در این مواقع از قضایای زیر استفاده می کنیم.

قضایای مساحت لنگر (Moment-area Theorems):

$$\frac{d^2 u}{dx^2}=\frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)=\frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx}=\frac{M}{EI}$$

$$\Rightarrow d\theta=\frac{M}{EI}\,dx \qquad (\theta_A+180-\theta_B+x=180 \Rightarrow x=\theta_B-\theta_A=\theta_{B/A})$$



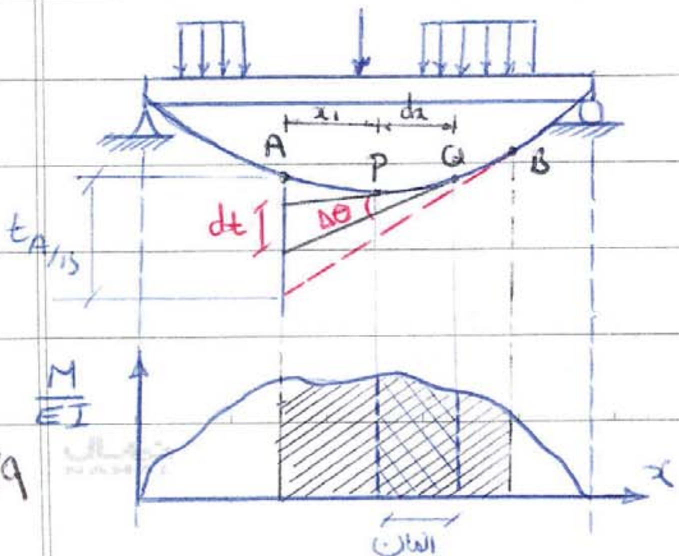
$$\int_A^B d\theta=\int_A^B \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\Rightarrow \theta_B-\theta_A=\int_A^B \frac{M}{EI}\,dx=\theta_{B/A}$$

قضیه اول لنگر سطح:

زاویه‌ی بین مماس‌های رسم شده بر منحنی ارتجاعی تغییر شکل تیر در هر دو نقطه دلخواه برابر است با سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ بین همان دو نقطه.

اگر تقعر به سمت بالا باشد لنگر مثبت است و شیب در حال زیاد شدن است.



$$dt=x_1\,\Delta\theta$$

$$\rightarrow dt=x_1\cdot\frac{M}{EI}\,dx$$

$$\rightarrow \int_A^B dt=\int_A^B x_1\cdot\frac{M}{EI}\,dx$$

$$t_{A/B}=\int_A^B x_1\cdot\frac{M}{EI}\,dx$$

فاصله از A

S

$$S_x=\int x\,dA$$

قضیه دوم لنگر سطح:

در یک منحنی ارتجاعی تغییر شکل فاصله قائم نقطه A از مماس رسم شده در نقطه B برابر است با لنگر اول سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ از A تا B نسبت به محور قائم در نقطه A

$S=\int x\,dA$ ← لنگر اول سطح

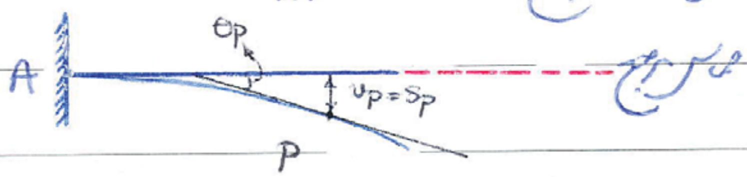
x_1: فاصله تک تک المان ها از محور قائم در نقطه A.

$t_{A/B}$: فاصله (انحراف) قائم نقطه A از مماس مرسوم نقطه B

کاربرد مستقیم قضایای لنگر سطح:

اگر بتوانیم مماس مرجع (نقطه ای که شیب معلوم است) را مشخص کنیم θ در نقاط دیگر بدست می آید. اگر نقطه A بر روی مماس مرجع باشد، نقطه B بالای مماس مرجع قرار داشته باشد، $t_{B/A}>0$ و اگر نقطه B زیر مماس مرجع باشد $t_{B/A}<0$ است

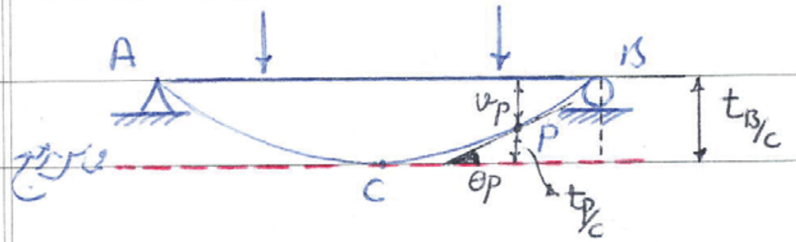
الف) تیر یکسر گیردار



$v_P<0\ ,\ t_{P/A}<0$

$\theta_P=\theta_{P/A}$ $\qquad$ $v_P=\delta_P=t_{P/A}$

ب) تیر ساده تحت بارگذاری متقارن:



$$\begin{cases} t_{B/C}>0\ ,\ t_{P/C}>0 \\ v_P<0 \end{cases}$$

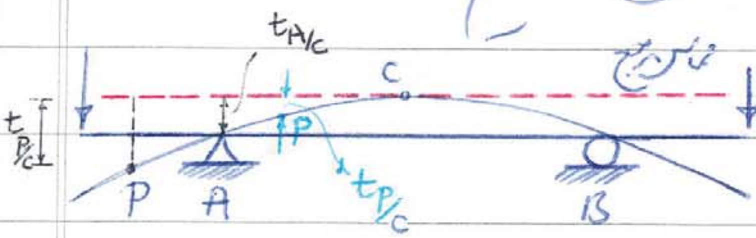
$\theta_P=\theta_{P/C}$ $\qquad$ $v_P=t_{P/C}-t_{B/C}$

علامت رعایت شده

- فرض کنیم تیری دارای پیش آمدگی متقارن و بارگذاری متقارن داریم.

$(v_P<0 \ , \ t_{P/C}<0 \ , \ t_{A/C}<0)$

$t_{P/C}<0$ چون زیر خط مماس است.

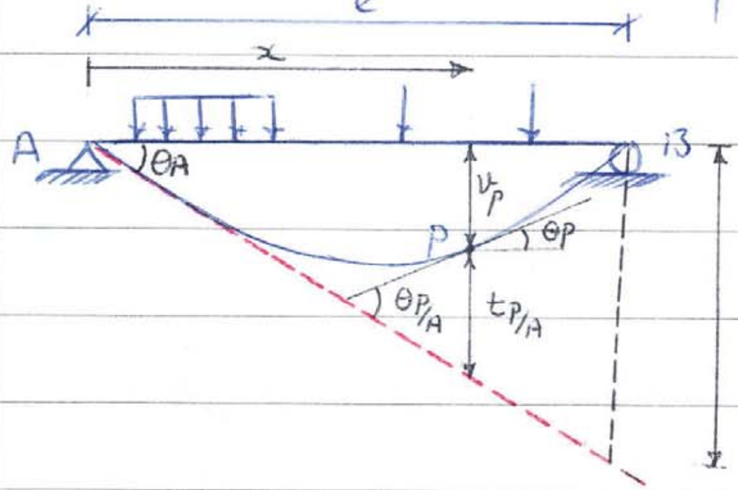


$$\theta_P = \theta_{P/C} \qquad\qquad v_P = t_{P/C} - t_{A/C}$$

اگر P را بین A , C انتخاب کنیم باز هم رابطه صادق است.

ج) تیر نامتقارن:

مماس مرجع را در یک تکیه گاه در نظر می‌گیریم.



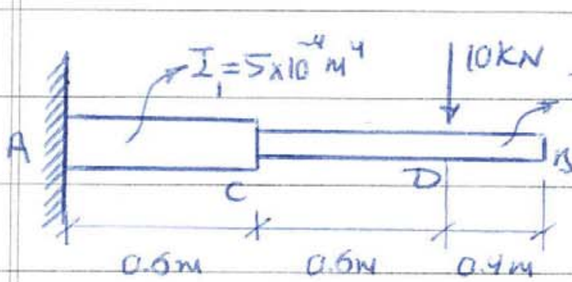
چون بالای خط مماس است

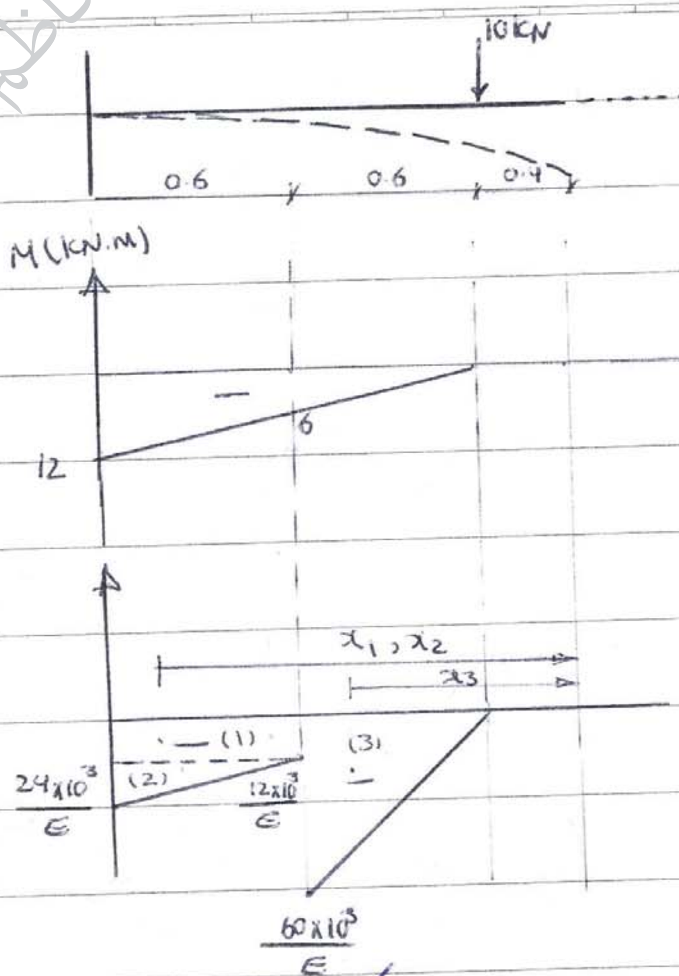
$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{l} \qquad\qquad \theta_P = \theta_A + \theta_{P/A}$$

$$v_P = t_{P/A} - \frac{x}{l}\, t_{B/A}$$

مثال: مطلوبست محاسبه تغییر مکان و شیب انتهای آزاد تیر کنسولی در نقطه B (v_B , θ_B)

$E = 70\times10^{9}\ N/m^2$





$$\theta_B=\theta_{B/A}=\int \frac{M}{EI}dx$$

$$\rightarrow \theta_B=-\left[\left(\frac{1.2\times10^{-3}\times10^{4}}{E}\times0.6\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1.2\times10^{-3}\times10^{4}}{E}\times0.6\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{6\times10^{7}}{E}\times0.6\right)\right]$$

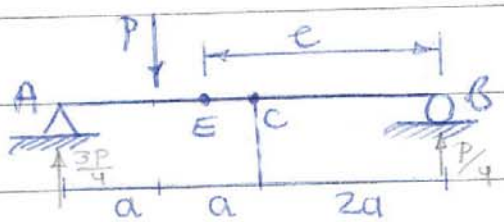
$$\Rightarrow \theta_B=-\frac{2.88}{70\times10^{9}}\times10^{7}=-0.411\times10^{-3}$$

$$v_B=t_{B/A}=\int x\frac{M}{EI}dx \Rightarrow$$

$$=-\left[(1.6-0.3)\left(\frac{1.2\times10^{7}}{E}\times0.6\right)+(1.6-0.2)\left(\frac{1}{2}\times\frac{1.2\times10^{7}}{E}\times0.6\right)+(1.6-0.6-0.2)\left(\frac{1}{2}\times\frac{6\times10^{7}}{E}\times0.6\right)\right]$$

$$=-\frac{2.88}{E}\times10^{7}=-4.114\times10^{-4}$$

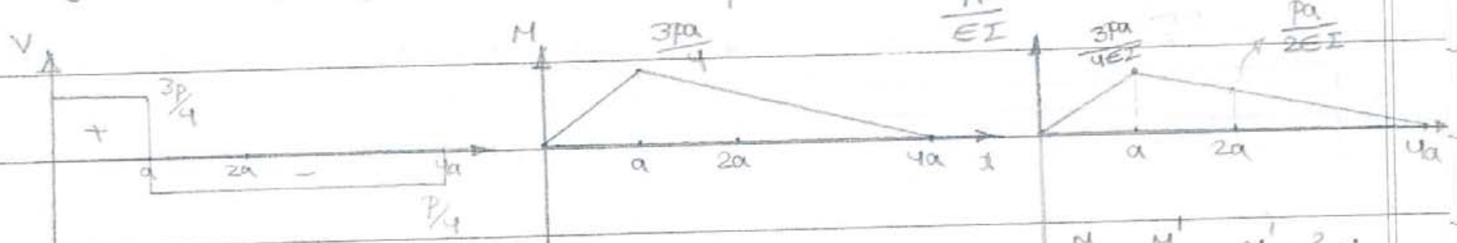
نکات: وقتی مرا آزار می‌دهند می‌کوشم روحم را آنقدری بالا نگه دارم که آزار دیگران به من نرسد.



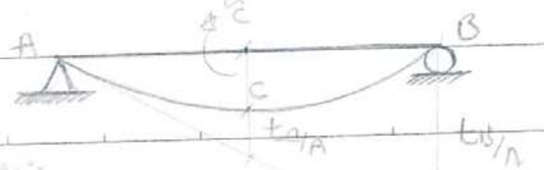
تمرین ۵: تیر نشان داده مقابل در نقاط E و C مفصل ندارد. مطلوبست تغییر مکان نقاط C و E.

$$\Sigma M_A=0 \Rightarrow -pa+4aB_y=0 \rightarrow B_y=P/4$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow B_y+A_y=P \rightarrow A_y=\frac{3P}{4}$$

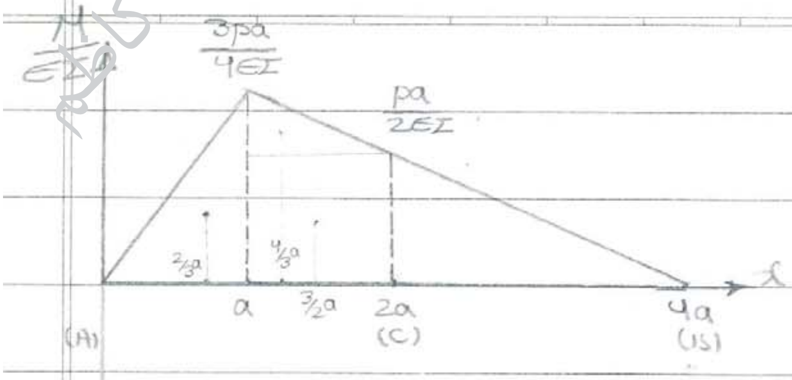


$$\frac{M}{3a}=\frac{M'}{2a}\rightarrow M'=\frac{2}{3}M$$



$$v_C=t_{C/A}-\frac{1}{2}t_{B/A}$$

حمید کاظم



$$t_{C/A} = \int x \frac{M}{EI} dx$$

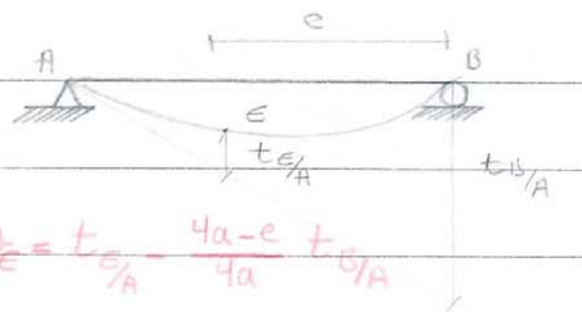
$$t_{C/A} = \frac{4}{3}a\left(\frac{1}{2}a \times \frac{3pa}{4EI}\right) + \frac{1}{2}a\left(a \times \frac{pa}{2EI}\right) + \frac{2}{3}a\left(\frac{1}{2}a \times \frac{pa}{4EI}\right)$$

$$\rightarrow t_{C/A} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}\frac{pa^3}{EI} + \frac{pa^3}{2EI} + \frac{pa^3}{6EI}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(12+6+2)pa^3}{12}\right] = \frac{20}{24}\frac{pa^3}{EI}$$

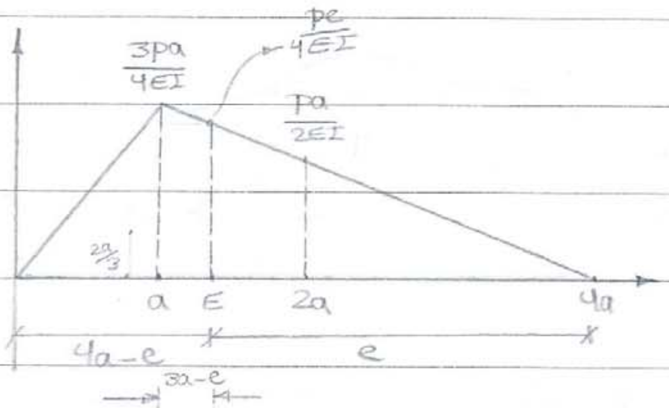
$$t_{B/A} = \frac{10}{3}a\left(\frac{1}{2}a \times \frac{3pa}{4EI}\right) + 2a \times \left(\frac{1}{2} \times 3a\left(\frac{3pa}{4EI}\right)\right)$$

$$= \frac{pa^3}{EI}\left(\frac{5}{4} + \frac{9}{4}\right) = \frac{14}{4}\frac{pa^3}{EI}$$

$$\rightarrow v_C = \left(\frac{20}{24} - \frac{14}{8}\right)\frac{pa^3}{EI} = \frac{20-42}{24}\frac{pa^3}{EI} = \frac{-11}{12}\frac{pa^3}{EI}$$



$$v_E = t_{E/A} - \frac{4a-e}{4a} t_{B/A}$$



$$\frac{\frac{3pa}{4EI}}{3a} = \frac{M}{e} \rightarrow M = \frac{3pae}{4(3aEI)} = \frac{pe}{4EI}$$

$$t_{E/A} = \left(\frac{1}{3}a + 3a - e\right)\left(\frac{1}{2}a\frac{3pa}{4EI}\right) + \left(\frac{1}{2}(3a-e)^2\frac{pe}{4EI}\right) + \frac{2}{3}(3a-e)^2\frac{1}{2}\left(\frac{3pa}{4EI} - \frac{pe}{4EI}\right)$$

$$= \left(\frac{10}{3}a - e\right)\left(\frac{3}{8}\frac{pa^2}{EI}\right) + (3a-e)^2\frac{pe}{8EI} + \frac{1}{3}(3a-e)^3\left(\frac{p}{4EI}\right)$$

$$= \frac{p}{4EI}\left[\left(\frac{10}{3}a - e\right)\left(\frac{3}{2}a^2\right) + (3a-e)^2\frac{e}{2} + \frac{1}{3}(3a-e)^3\right]$$

$$= \frac{p}{4EI}\left[5a^3 - \frac{3}{2}ea^2 + \frac{9}{2}ea^2 - 3e^2a + \frac{e^3}{2} + 9a^3 + ae^2 - 3a^2e - \frac{e^3}{3}\right]$$

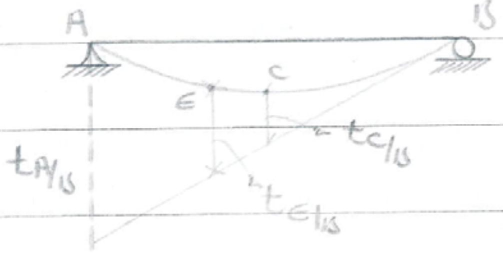
$$= \frac{p}{4EI}\left[14a^3 - 2ae^2 + \frac{e^3}{6}\right] = \frac{7pa^3}{2EI} - \frac{pe^2a}{2EI} + \frac{pe^3}{24EI}$$

$$v_E = \frac{7pa^3}{2EI} - \frac{pe^2a}{2EI} + \frac{pe^3}{24EI} - \frac{7pa^3}{2EI} + \frac{7pa^2e}{8EI}$$

$$v_E = \frac{3pe^2a}{8EI} + \frac{pe^3}{24EI}$$

حمید کاظم

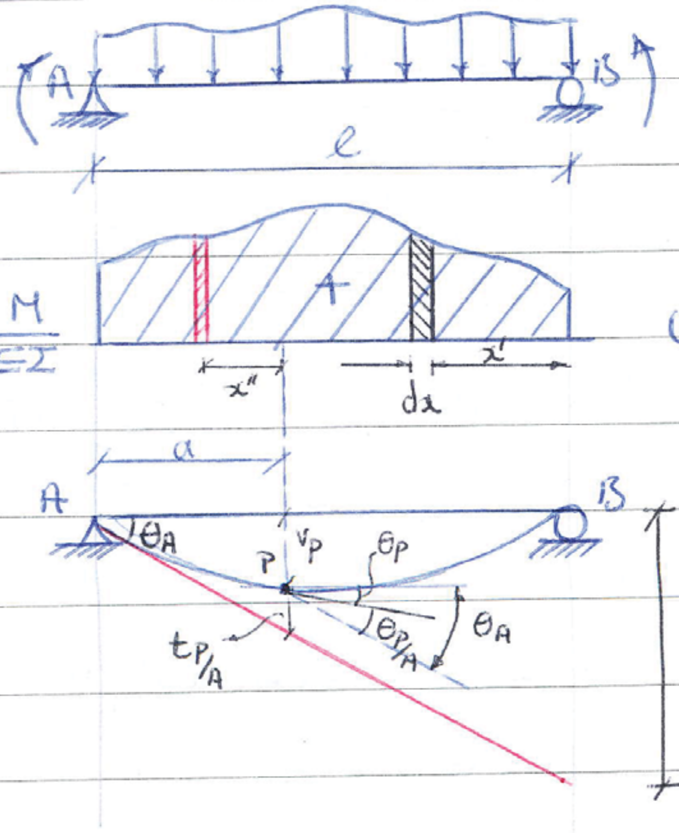
روش دوم :

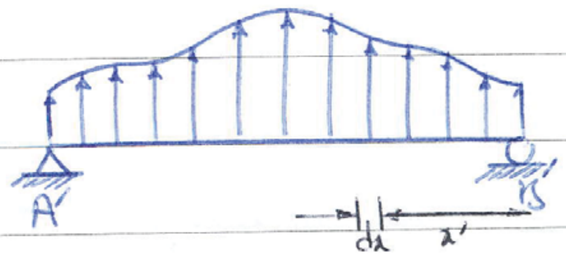


روش بار الاستیک :

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L} = \frac{1}{l}\int_A^B x' \frac{M}{EI}\,dx$$

فرض کنیم منحنی $\frac{M}{EI}$ یک بار گسترده خارجی به سمت بالا روی تیر است (فرض مجازی)





$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \theta_A = R_A'$$

$$-R_A' l - \int_A^B x' \frac{M}{EI}\,dx = 0$$

$$-R_A' = -\frac{1}{l}\int_A^B x' \frac{M}{EI}\,dx$$

θ_A : عکس العمل تکیه گاه A که بار $\frac{M}{EI}$ تیر مجازی

$$\theta_P = \theta_A - \theta_{P/A}$$

$$\Rightarrow \theta_P = \theta_A - \int_A^P \frac{M}{EI}\,dx$$

* برای بدست آوردن علامت θ_A باید V_A را به اندازه‌ی شیب از نقطه A بدست آوریم.

θ_p : نیروی برشی در تیر مجازی تحت بارگذاری $\frac{M}{EI}$ در نقطه p.

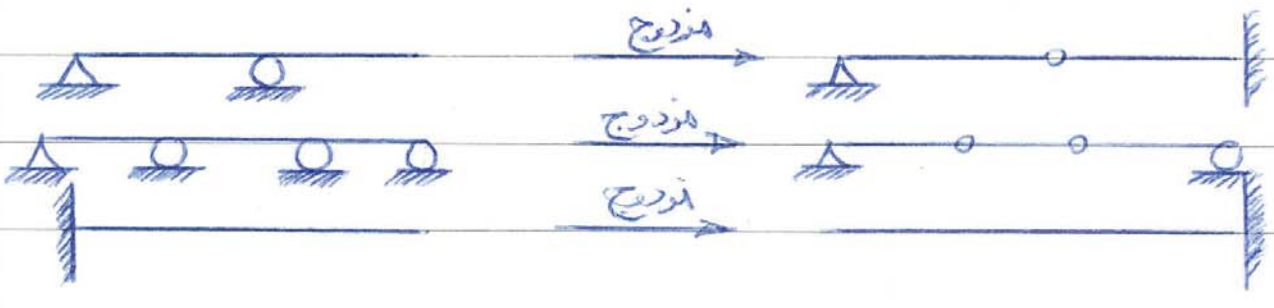
$$v_p = \theta_A . a - t_{P/A} = \theta_A . a - \int_A^P x'' \frac{M}{EI} dx$$

v_p : لنگر خمشی در تیر مجازی تحت بارگذاری $\frac{M}{EI}$ در نقطه p.

نتیجه: در تیر مجازی تعریف شده تحت بارگذاری $\frac{M}{EI}$ در هر مقطع نیروی برشی معادل شیب همان نقطه در تیر اصلی است و لنگر خمشی در هر نقطه معادل تغییر مکان آن نقطه در تیر اصلی است.

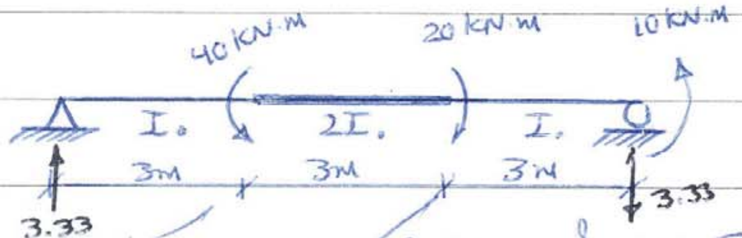
* این روش فقط در تیر ساده وجود دارد.

این روش برای تیرهای غیر ساده تعمیم داده می شود و روش تیر مزدوج بوجود می آید

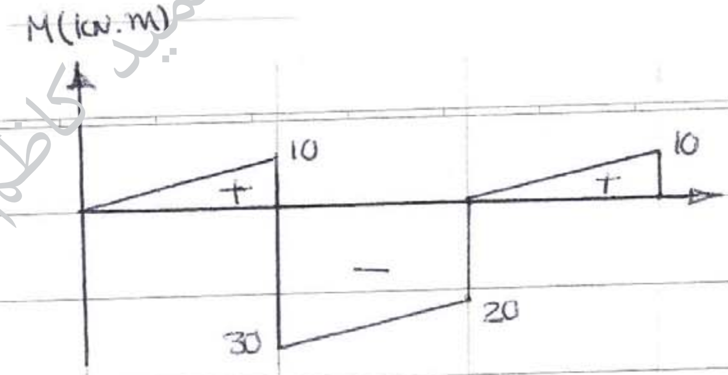


تیرهای معین مزدوجشان معین است و تیرهای نامعین مزدوجشان ناپایدار است

مثال: تیر نشان داده شده تحت اثر سه لنگر متمرکز قرار گرفته است. شیب های دو انتهای تیر و تغییر شکل وسط تیر را از روش بار الاستیک حساب کنید.



$$\begin{cases} E = 2\times10^5 \ N/mm^2 \\ I = 3\times10^7 \ mm^4 \end{cases}$$

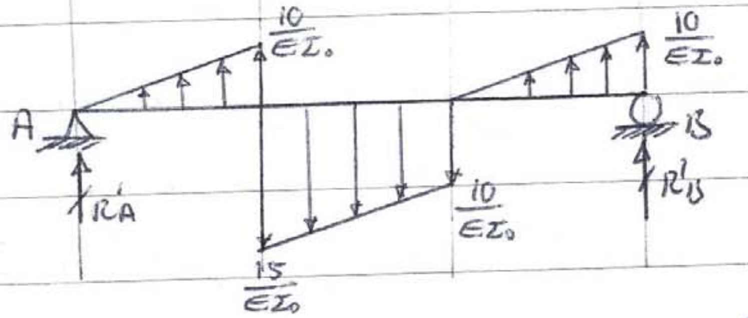


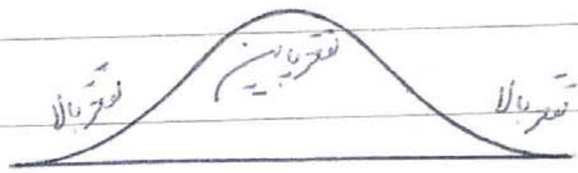
$\sum M_B = 0 \Rightarrow R'_A = +9.7 \times 10^{-4}\ rad$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R'_B = 2.8 \times 10^{-4}\ rad$

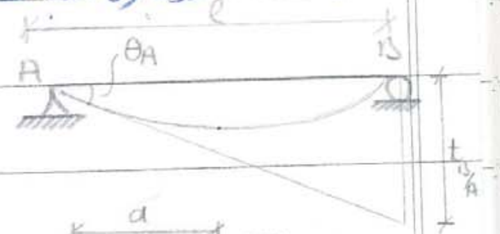
$$\begin{cases} \theta_A = +9.7 \times 10^{-4}\ rad \ (\text{نیروی برشی مثبت}) \\ \theta_B = -2.8 \times 10^{-4}\ rad \ (\text{نیروی برشی منفی}) \end{cases}$$

$M_{cL} = \delta_{cL} = +7.96\ mm$





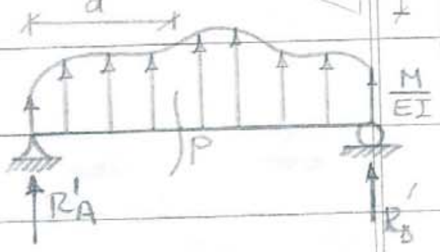
تمرین 8 در اثبات مبانی روش بار الاستیک بجای اثبات هندسی با رعایت علامت دوباره اثبات کنید.



1) $\theta_A = \dfrac{-t_{B/A}}{l} = -\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_B^A x' \frac{M}{EI}\, dx \quad (1)$

$\sum M_B = 0 \rightarrow -R'_A l - \displaystyle\int_B^A x' \frac{M}{EI}\, dx = 0$

$\rightarrow R'_A = -\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_B^A x' \frac{M}{EI}\, dx \qquad R'_A = \theta_A$



2) $\theta_{P/A} = \theta_P - \theta_A \Rightarrow \theta_P = \theta_A + \theta_{P/A}$

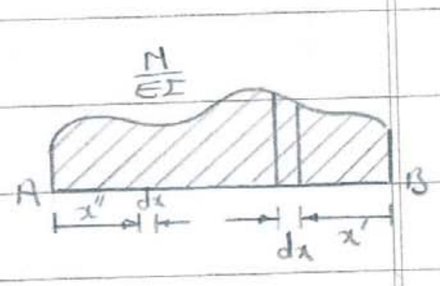
$\theta_P = \displaystyle\int_A^P \frac{M}{EI}\, dx + \theta_A = \int_A^P \frac{M}{EI}\, dx + R'_A = V'_P$

3) $v_P = -a.\theta_A - t_{P/A} = -a.R_A - \displaystyle\int_P^A x''' \frac{M}{EI}\, dx = M'_P$

4) $\theta_B = \dfrac{+t_{A/B}}{l} = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_A^B x'' \frac{M}{EI}\, dx$

$\sum M_A = 0 \rightarrow \displaystyle\int_A^B x'' \frac{M}{EI}\, dx + R'_B l = 0$

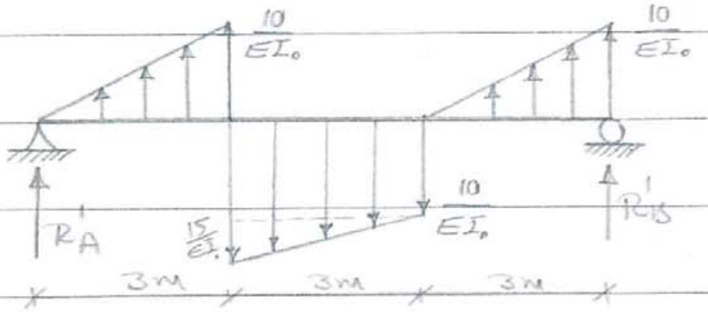
$\rightarrow R'_B = -\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_A^B x'' \frac{M}{EI}\, dx$



تمرین: اولاً جواب این مثال عددی را کاملاً حل کنید. اگر این جواب را درست بر تناقض مورد بحث را مورد بحث قرار دهید.

$E = 2\times10^{5}\times10^{6}\,pa = 200\times10^{9}\,pa$

$I_0 = 3\times10^{7}\times10^{-12}\,m^4 = 3\times10^{-5}\,m^4 \rightarrow EI_0 = 600\times10^{4}$



$\sum M_A = 0$

$2\left(\frac{1}{2}\times3\times\frac{10}{EI_0}\right) + 8\left(\frac{1}{2}\times3\times\frac{10}{EI_0}\right)$

$- 4\left(\frac{1}{2}\times3\times\frac{5}{EI_0}\right) - 4.5\left(3\times\frac{10}{EI_0}\right)$

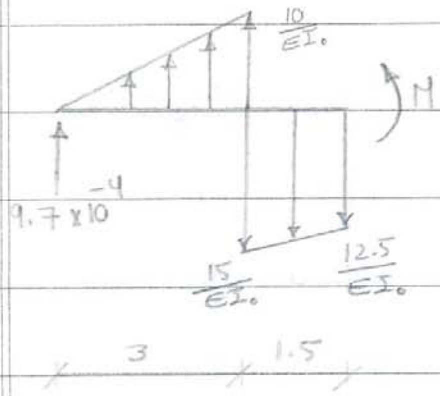
$+ 9R'_B = 0$

$\Rightarrow 15\times\frac{10}{EI_0} - \frac{30}{EI_0} - 4.5\,\frac{30}{EI_0} + 9R'_B = 0 \rightarrow 15\left(\frac{1}{EI_0}\right) = 9R'_B$

$\Rightarrow R'_B = \frac{5}{3EI_0} \rightarrow R'_B = \frac{5\times10^{3}}{3\times600\times10^{4}} = 2.8\times10^{-4}\,rad$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R'_A + \frac{3}{2}\left(\frac{10}{EI_0}\times10^{3}\right)\times2 - \frac{3}{2}\left(\frac{25\times10^{3}}{EI_0}\right) + R'_B = 0$

$\rightarrow R'_A + \frac{3\times10^{4}}{600\times10^{4}} - \frac{75\times10^{3}}{2\times600\times10^{4}} + 2.8\times10^{-4} = 0 \Rightarrow R'_A = 9.7\times10^{-4}\,rad$



$\sum M = 0 \Rightarrow M - 2.5\left(\frac{3}{2}\times\frac{10\times10^{3}}{EI_0}\right) - 9.7\times10^{-4}\times4.5$

$+ 0.75\left(1.5\times\frac{12.5\times10^{3}}{EI_0}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\times1.5\times\frac{2.5\times10^{3}}{EI}\right)$

$\rightarrow M = 79.6\times10^{-4}\,m = 7.96\,mm$

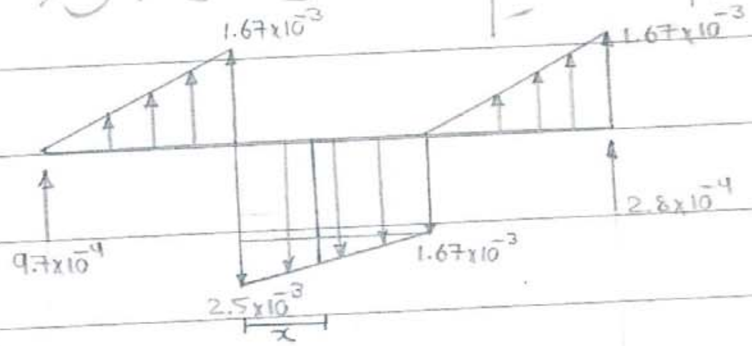
حمید کاظم

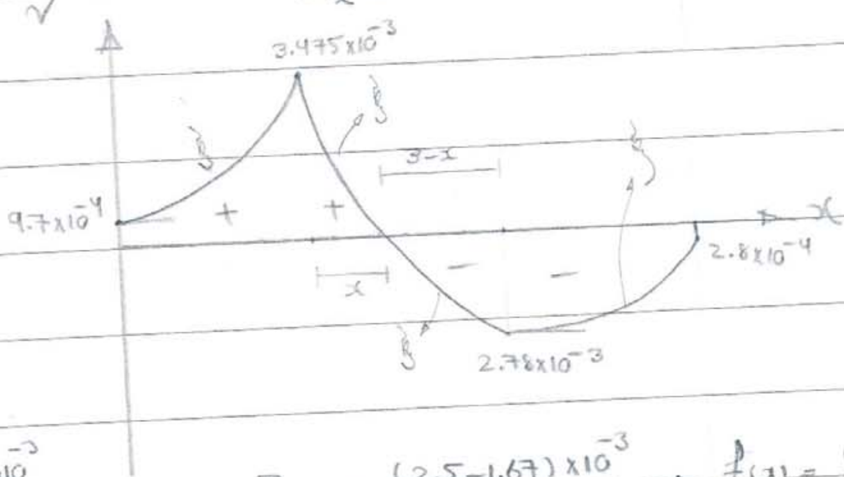
تمرین: تعیین مکان Max در تیر مثال فوق را از روش بار الاستیک بدست آورید (اعم از مثبت یا منفی)

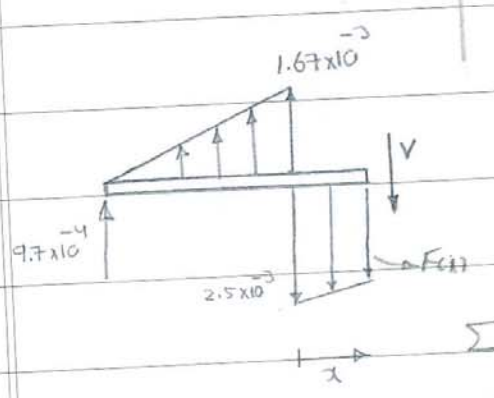
باید دنبال جایی باشیم که لنگر ماکزیمم می شود، یعنی جایی که برش صفر است.

$\frac{dv}{dx} = q$

$v_2 - v_1 = \int q\,dx$







$$\frac{3}{3-x} = \frac{(2.5-1.67)\times10^{-3}}{f(x)} \rightarrow f(x) = \frac{0.83(3-x)}{3}\times10^{-3}$$

$$f(x) = (0.83 - 0.28x)\times10^{-3}$$

$$F(x) = f(x) + 1.67\times10^{-3} = (2.5 - 0.28x)\times10^{-3},\ 0 \leq x \leq 3$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 9.7\times10^{-4} + \frac{3}{2}(1.67\times10^{-3}) - \frac{x}{2}(2.5\times10^{-3} + F(x))$$

$$V = 0 \xrightarrow{V=0} 3.475\times10^{-3} - \frac{x}{2}(5\times10^{-3} - 0.28x\times10^{-3}) = 0$$

$$\rightarrow 6.95 - 5x + 0.28x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 17.86x + 24.82 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{17.82 \pm \sqrt{17.86^2 - 4(24.82)}}{2} = 1.5$$

$x = 4.5 \rightarrow M = 79.6$ mm

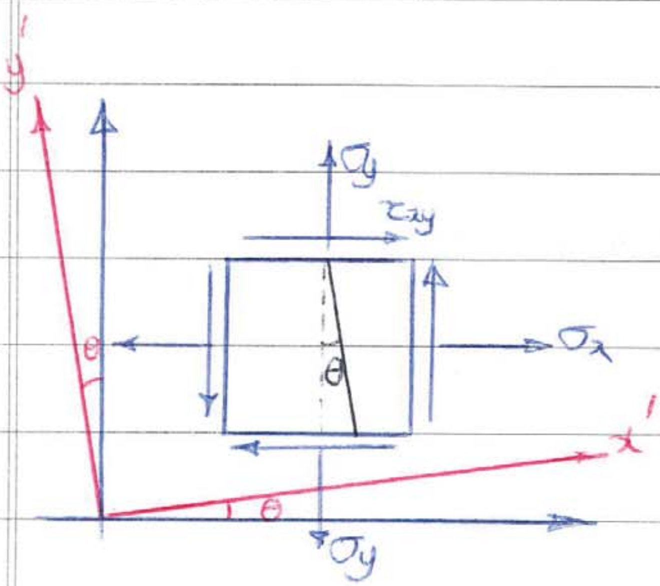
حمید کاظم

فصل دوم:

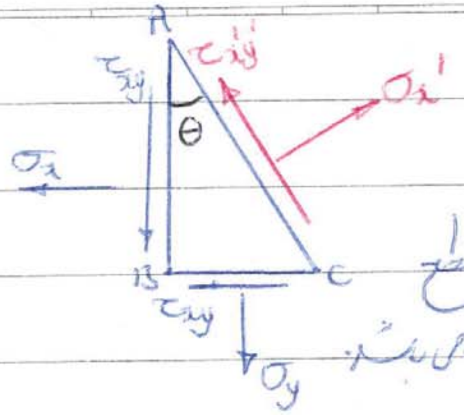
تبدیل تنش ها و کرنش ها
(Transformation of stresses & strains)

در مبحث مقاومت بحث ما این بود که تنش در هر نقطه از تنش مجاز بیشتر نباشد. برای این کار به دنبال تنش Max می گردیم و با تنش مجاز مقایسه می کنیم. تا اینجا با تنش محوری مواجه بودیم. تمام مقاطعی که بر اثر آن تنش بدست می آوردیم عمود بر عضو (تیر) بود. اما از کجا معلوم که تنش های Max در مقطع عمود باشد؟
بنابراین نگرانی به وجود می آید که تنش Max ممکن است در مقطع عمود نباشد.
پس در این فصل بحث تنش ها را در مورد مقطع مایل بحث می کنیم.
این فصل دو استفاده دارد: ۱) بحث ریاضی است
۲) مطالعات آزمایشگاهی (کشش نتایج آزمایشگاهی)

تبدیل تنش های صفحه ای (دو بعدی):



قرارداد ها:
۱) تنش های نرمال در جهت کششی مثبت و در حالت فشاری منفی.
۲) تنش برشی را زمانی مثبت می گیریم که روی وجه مثبت راست به سمت بالا باشد.
۳) در چرخش محورهای مختصات، چرخش در خلاف عقربه های ساعت (مثلثاتی) مثبت است.



مثلث المان را بیرون می‌کشیم؛
برای المان، دو رابطه تعادل می‌توان نوشت.
اگر سطح مقطع وجه AC را dA فرض کنیم، سطح مقطع
وجه BC، $dA.\sin\theta$ و وجه AB، $dA.\cos\theta$ می‌باشد.

$$\sum F_{x'}=0 \Rightarrow \sigma_{x'}.dA-\sigma_x.dA\cos\theta.\cos\theta-\sigma_y.dA\sin\theta.\sin\theta$$
$$-\tau_{xy}.dA\cos\theta.\sin\theta-\tau_{xy}\,dA\sin\theta.\cos\theta=0$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'}=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta+2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

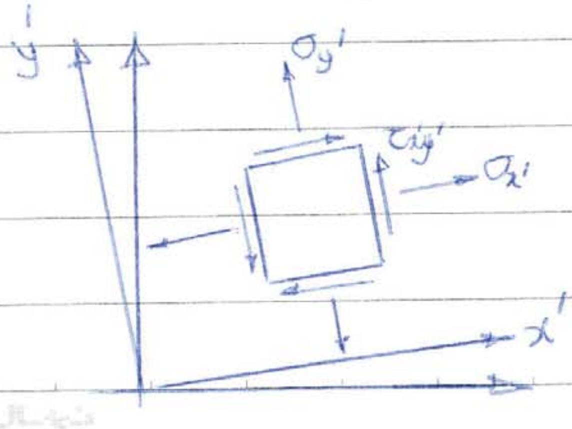
$$\Rightarrow \sigma_{x'}=\sigma_x\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)+\sigma_y\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sum F_{y'}=0 \Rightarrow \tau_{x'y'}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

برای بدست آوردن $\sigma_{y'}$، در رابطه $\sigma_{x'}$ به جای θ، $90-\theta$ قرار می‌دهیم.

$$\sigma_{y'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta-\tau_{xy}\sin 2\theta$$



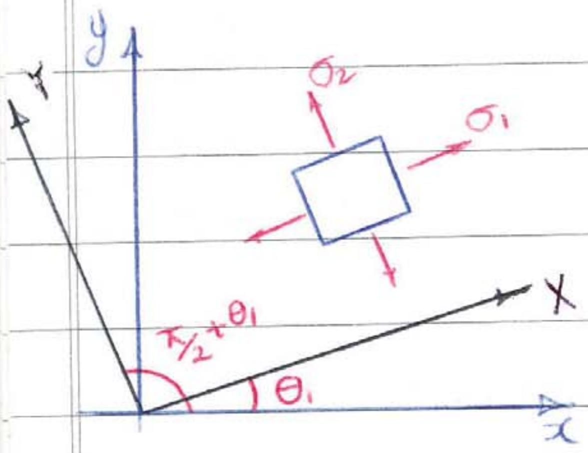
حمید کاظم

$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = Const.$ (نامتغیر تنش Invariant of stress)

جمع تنش ها به θ بستگی ندارد

تنش های اصلی:

تنش هایی که به ازای θ خاصی Max , Min می شوند



$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0$$

$$\longrightarrow (-(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow tg\, 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \left\langle \begin{array}{l} 2\theta_1 \\ \pi + 2\theta_1 \end{array} \right.$$

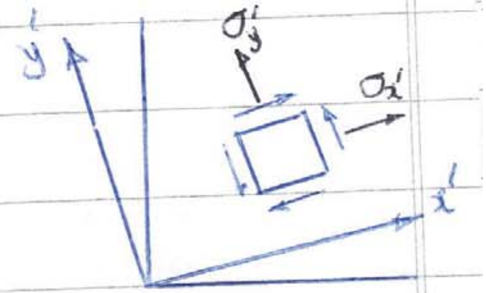
در اینجا θ_1 و $\frac{\pi}{2}+\theta_1$ بدست می آیند، θ_1 برای X و $\frac{\pi}{2}+\theta_1$ برای Y است

$$\begin{cases} \sigma_{\substack{Max \\ Min}} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{1,2} \\ \tau_{x'y'} = 0 \end{cases}$$

* نتیجه: برای تعریف المان اصلی می توانیم بگوییم المانی است که تنش برشی در آن صفر است

تنش های برشی حداکثر:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta}=0 \Longrightarrow tg\,2\theta_2=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} \begin{cases} 2\theta_2 \\ \pi+\theta_2 \end{cases}$$

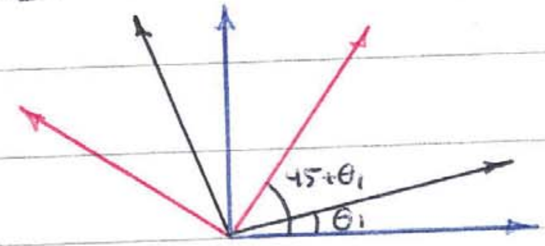


$$\theta_2 \begin{cases} \tau_{\substack{Max\\Min}}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \\ \sigma_{x'}=\sigma_{y'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \end{cases}$$

تنها زمانی $\sigma_{x'}=\sigma_{y'}=0$ است که $\sigma_x=-\sigma_y$.

$$tg\,2\theta_2=-\frac{1}{tg\,2\theta_1}=-Ctg\,2\theta_1=tg\left(\frac{\pi}{2}+2\theta_1\right) \longrightarrow 2\theta_2=\frac{\pi}{2}+2\theta_1$$

$$\Longrightarrow \theta_2=\frac{\pi}{4}+\theta_1$$



دلیل: در المان اصلی دارای تنش های قائم σ_1 و σ_2 باشد

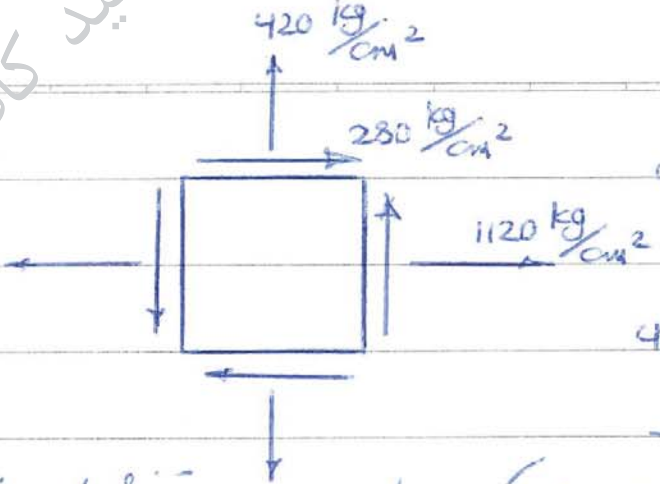
$$\tau_{Max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$ (چون $\tau_{xy}=0$)

آسمان شو، ابر شو، باران ببار — ناودان بارش نمی آید به کار

آب باران باغ صد رنگ آورد — ناودان همسایه در جنگ آورد

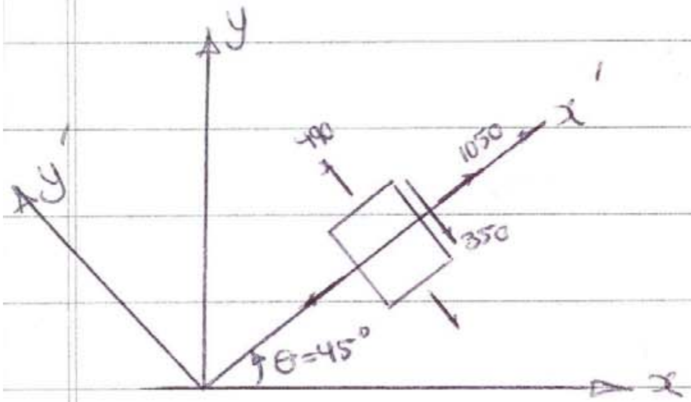
زردشت: سعی کن خورشید باشی که اگر خواستی بزرگی نمائی، نمائی. ای برادر چون درخت باش که سایه از سر هیزم شکن نیز برنمی دارد.

شکسپیر: بزرگی سه گونه است: یک عده بزرگ زاده می شوند (اشراف)، یک عده بزرگی را بر خود می بندند و یک عده نیز بزرگی را به دست می آورند.



مثال : المانی تحت تنش های نشان داده شده مفروض است . مطلوبست :
الف) محاسبه تنش های روی المانی که به اندازه 45° درجه خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کرده است . ب) محاسبه تنش های اصلی و محل آن ها ج) محاسبه تنش های برشی حداکثر و محل آن ها . ضمنا در هر سه مورد حالت تنش های محاسبه شده را به طور دقیق نشان دهید .

الف)



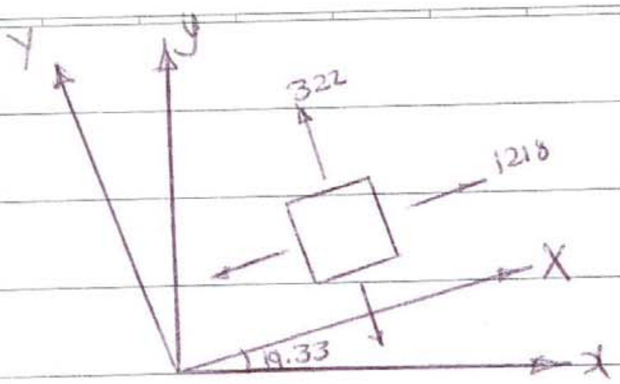
$$\begin{cases} \sigma_x = +1120 \\ \sigma_y = +420 \\ \tau_{xy} = 280 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = 1050 \ kg/cm^2 \\ \sigma_{y'} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta = 490 \ kg/cm^2 \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = -350 \ kg/cm^2 \end{cases}$$

ب)

$$tg\, 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \rightarrow \theta_1 = 19.33^\circ$$

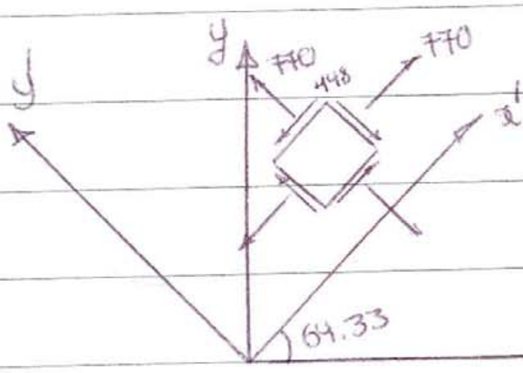
$$\sigma_{Max/Min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 1218 \\ 322 \end{cases}$$



تنها راه این است که از روابط $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ و بجای θ، 19.33 قرار دهیم و رسم 1218 و 322 برای کدام صفحه می باشد. مشخص کردن راه می باشد.

ج) $\theta_2 = 45 + 19.33 = 64.33^\circ$

$$\tau_{Max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm 448\ kg/cm^2$$

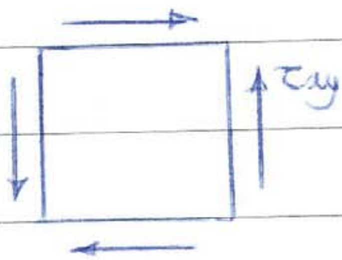


$$\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

علامت مثبت و منفی برای $\theta = 64.33$ و $\theta = 90 + 64.33$ می باشد. برای اینکه دقیق علامت را بدانیم از رابطه اصلی $\tau_{x'y'}$ استفاده کنیم و بجای θ از θ، 64.33 قرار دهیم

المان تحت برش خالص:

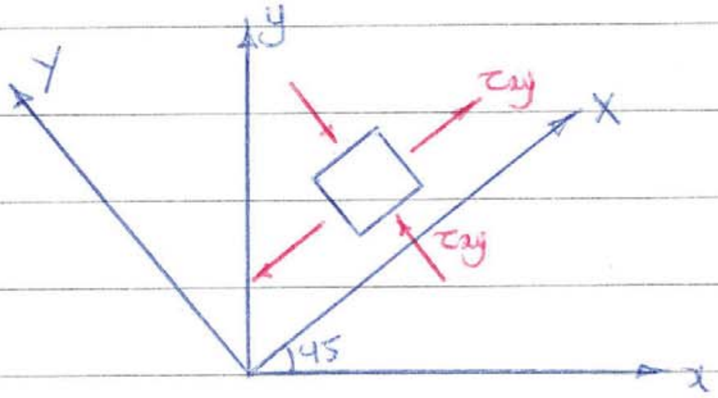
المانی است که تنها تحت برش است و تنش های قائم صفر باشد. می خواهیم بدانیم این المان از کجا شکست می خورد؟ المان اصلی آن را بدست می آوریم:



$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = +\tau_{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = ? \\ \sigma_{Max/Min} = ? \end{cases}$$

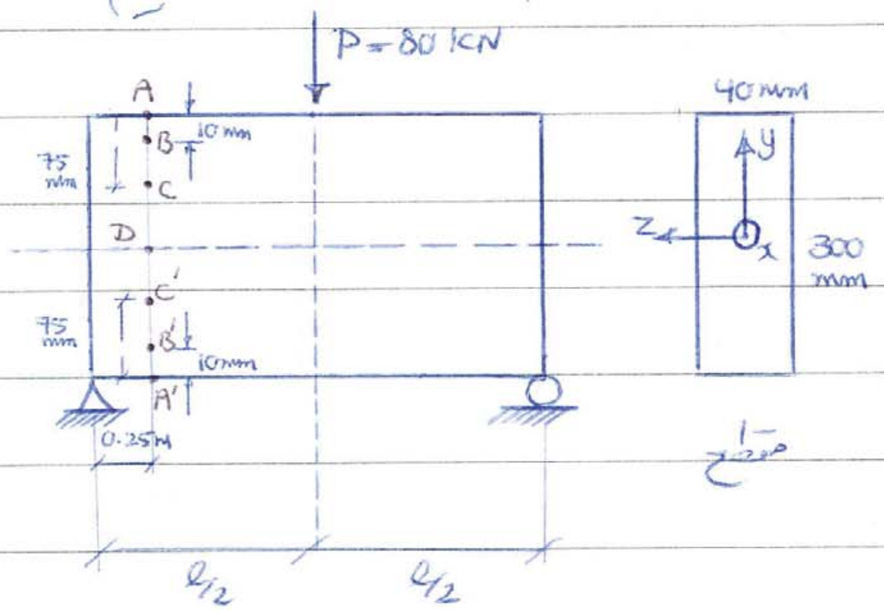
$$tg 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \infty \rightarrow \theta_1 = 45^\circ$$

$$\sigma_{\substack{Max\\Min}} = \pm \tau_{xy}$$



این المان المان خاصی است که **المان تحت کشش و فشار قطری** نام دارد.

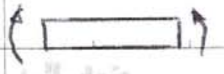
* در المان تحت برش خالص انگار دو تنش مقابل را می فرستیم و دو تنش دیگر را می گیریم و می توانیم به راحتی جهت تنش های اصلی را بدست آوریم.



مثال: تیر ساده ای مطابق شکل مفروض است مطلوبست تعیین تنش های اصلی در نقاط A ، B ، C و D ، A' ، B' ، C' و موقعیت دقیق آن ها بر روی المان

در ابتدا باید نیروی برشی و لنگر خمشی را بدست می آوریم.

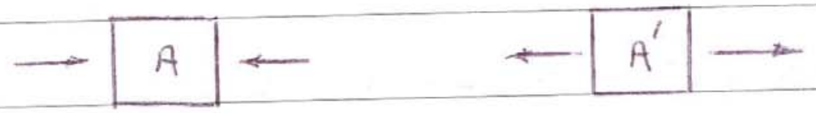
$$\begin{cases} V = +40\,KN\,(\downarrow) \\ M = 40 \times 0.25 = 10\,KN.m \end{cases}$$



* جهت قراردادی نیروی برشی با تنش برشی همیشه یکی نیست.

حمید کاظم

المان های A , A' :

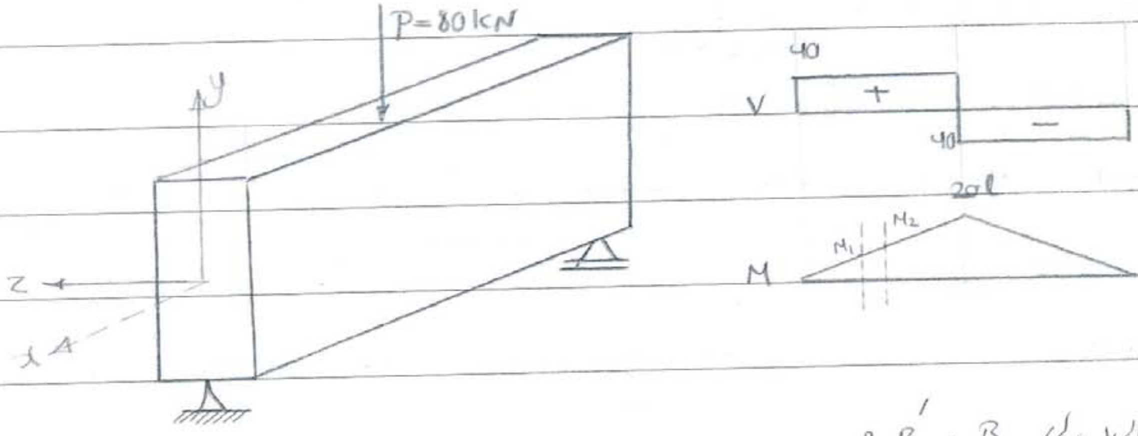


تنش های برشی در A , A' صفر است چون : $\tau = \dfrac{VQ}{It}$ $Q=0 \Rightarrow \tau = 0$

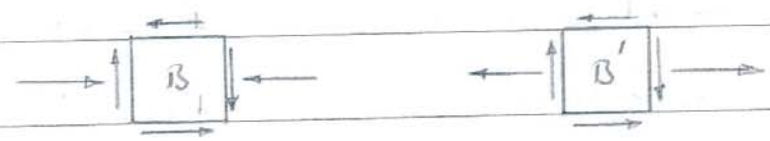
$$\sigma_x = \frac{M.y}{I} = \frac{10\times10^{6}\times150}{40\times\frac{300^3}{12}} = 16.67\ \text{Mpa}$$

این المان خود المان اصلی است چون $\tau_{xy}=0$ می باشد.

چون بار محوری و چه گسترده متقارن ایجاد نگردد σ_y پدید نمی آید. فقط σ_x ایجاد می گردد



المان های B , B' :



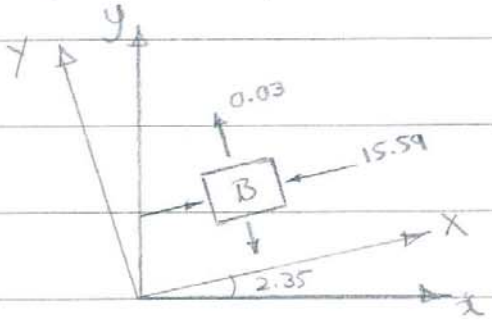
$$\sigma_{x_B} = \frac{M_z \cdot y}{I_x} = \frac{10\times10^{3}\times140\times10^{-3}}{40\times\frac{300^3}{12}\times10^{-12}} = 15.56\ \text{Mpa}$$

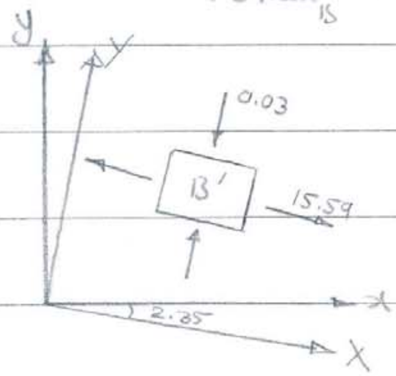
$\sigma_y = 0$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{40\times10^{3}\times10\times40\times145\times10^{-9}}{40\times\frac{300^3}{12}\times40\times10^{-15}} = 0.64\ \text{Mpa}$$

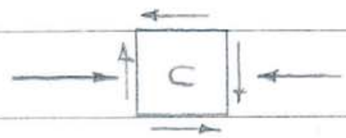
$$tg\,2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2\,(0.64)}{-15.56} \rightarrow \theta_1 = +2.35$$

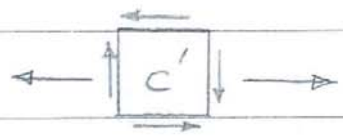
$$(\sigma_{Max})_{Min_B} = \frac{-15.56}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15.56}{2}\right)^2 + (0.64)^2} = -7.78 \pm 7.81 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{Max_B} = -15.59 \\ \sigma_{Min_B} = +0.03 \end{cases}$$





العمل على C , C'





$$\sigma_{x_C} = -\frac{M_z \cdot y}{I_x} = \frac{10\times10^{3} \times 75\times10^{-3}}{40 \times \frac{300^3}{12} \times 10^{-12}} = -8.33\ Mpa$$

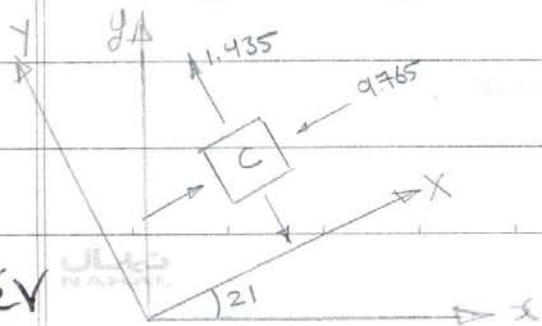
$$\sigma_y = 0$$

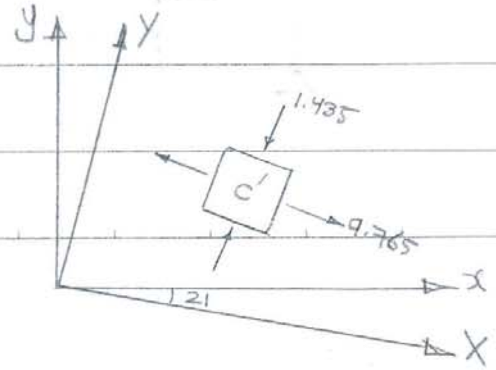
$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{40\times10^{3} \times 40\times75 \times 112.5\times10^{-9}}{40\times\frac{300^3}{12}\times10^{-12} \times 40\times10^{-3}} = 3.75\ Mpa$$

$$tg\,2\theta_1 = \frac{2\times3.75}{8.33} \rightarrow \theta_1 = 21$$

$$\sigma_{Max/Min} = \frac{-8.33}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8.33}{2}\right)^2 + 3.75^2} = -4.165 \pm 5.6 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{Max} = 1.435 \\ \sigma_{Min} = -9.765 \end{cases}$$

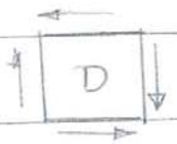
$$\sigma_X = \frac{-8.33}{2} + \frac{-8.33}{2}\cos 2\times21 - 3.75\sin 2\times21 = -9.765$$





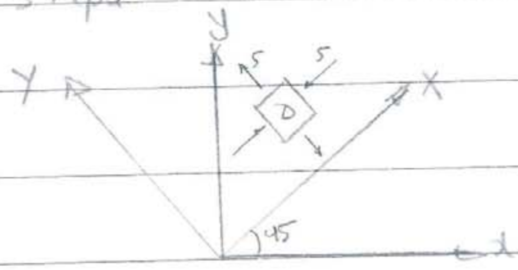
حميد كاظم

المان D :



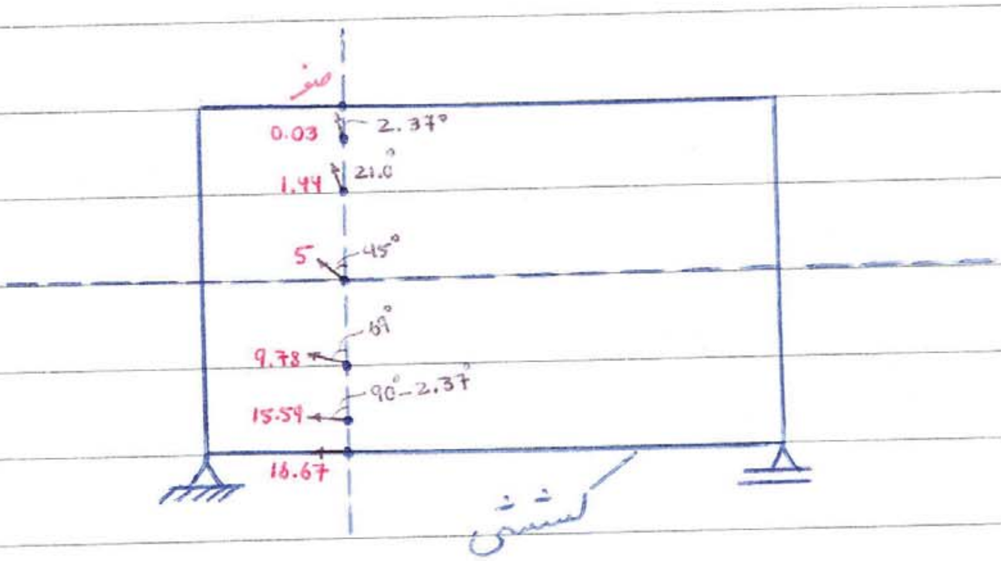
$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 0$

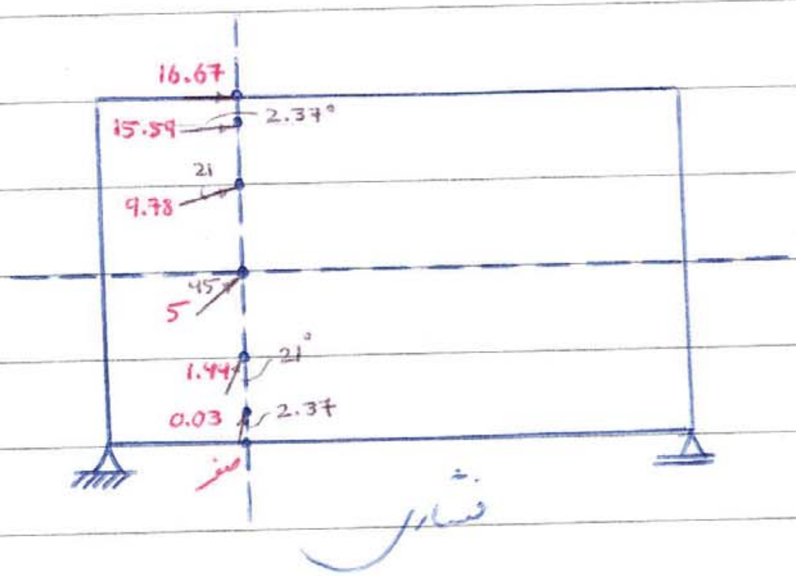
$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{40\times10^{3} \times 40\times150 \times 75\times10^{-9}}{40 \times \frac{300^{3}}{12} \times 10^{-12} \times 40\times10^{-3}} = 5\ Mpa$$



$\theta_1 = 45$

$\sigma_{\underset{Min}{Max}} = \pm 5$





حمید کاظم

روش های مطالعه رفتار اعضای تحت تنش:

روش های مطالعه را از طریق مراحل زیر دسته بندی می کنند:

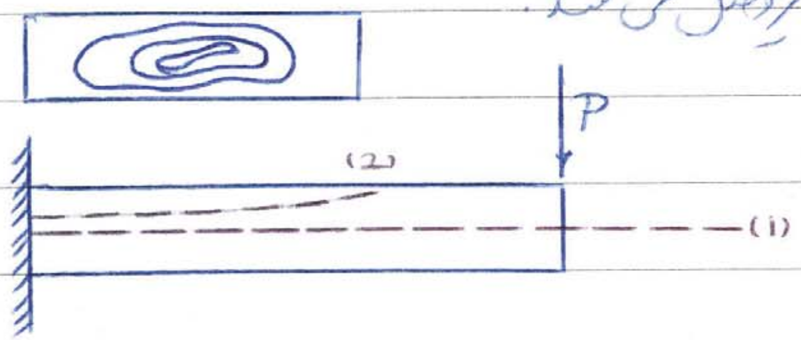
الف) بررسی تعداد نقاط زیادی در عضو

ب) وجه مشترک مشخص بین تنش های نقاط بدست می آورند

ج) تفسیری از تصویرهای وجه های مشترک بدست می آورند.

سه روش برای مطالعه وجود دارد:

۱) خطوط هم تنش (stress contour): در این روش توجه بیشتر بر مقدار تنش است. تمام نقاط هم تنش را به یکدیگر وصل می کنند.



محور خنثی خط هم تنش است

چون $\sigma=0$, $\tau_{xy}=\frac{VQ}{It}$

و ثابت است.

خط (2) در راستای شیب برای ثابت ماندن σ_{Max} باید $M\uparrow$ و $Q\downarrow$ شود.

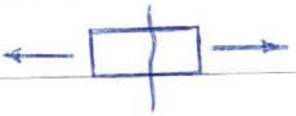
۲) خطوط هم امتداد (Isoclinic Contour): در این روش توجه بیشتر بر امتداد و جهت تنش می باشد. تنش های اصلی که در جهت امتداد یکسان هستند را به هم متصل می کنند. در یک تیر ساده تار خنثی یک خط هم امتداد است.

۳) دیاگرام مسیر تنش های اصلی یا خطوط ایزواستاتیک:

(principal stresses trajectery & Isostatic lines)

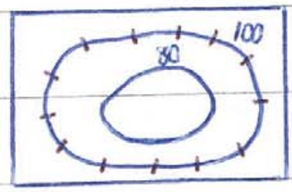
تنها مسیر تنش که برای این روش اهمیت دارد. این دیاگرام، دیاگرامی حاصل از خطوط هم تنش و تنش که می‌باشد.

* این روش می‌تواند دستخوش سلیقه گردد بنابراین سعی می‌شود منحنی‌های مناسب و منطقی رسم گردد (با شکستگی کم)



* در دیاگرام مسیر تنش، امتداد ترک وارد بر سازه عمود بر منحنی است. برای جلوگیری از این ترک‌ها باید میلگردها را عمود بر ترک قرار دهیم.

نکته: خطوط هم تنش نشان می‌دهد کدام نقاط اول ترک خوردگی دارد.



مثال: میله‌ای با سطح مقطع $850\ mm^2$ تحت اثر نیروی کششی 60kN قرار گرفته است

الف) تنش قائم و برشی را روی صفحه مایل با زاویه 30° نسبت به محور میله بدست آورید.

ب) حداکثر تنش قائم و برشی را در میله یافته امتداد آن‌ها را بطور دقیق مشخص کنید

الف)

$$\sigma_x = \frac{60 \times 10^3}{850 \times 10^{-6}} = 70.59\ Mpa$$

$$\sigma_{x'} = \tfrac{1}{2}(70.59 + 0) + \tfrac{1}{2}(70.59 - 0)\cos 60 = 52.94\ Mpa$$

$$\sigma_{y'} = \tfrac{1}{2}(70.59 + 0) - \tfrac{1}{2}(70.59 - 0)\cos 60 = 17.65\ Mpa$$

$$\tau_{x'y'} = -(70.59 - 0)\sin 60 = -61.13\ Mpa$$

ب)

$$\sigma_{Max} = \frac{70.59}{2} + \sqrt{\left(\frac{70.59}{2}\right)^2} = 70.59\,Mpa \qquad tg2\theta_1 = 0 \rightarrow \theta_1 = 0$$

$$\tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{70.59}{2}\right)^2} = 35.295\,Mpa \qquad tg2\theta_2 = \infty \rightarrow \theta_2 = 45^\circ$$

دایره مور تنش (Mohr's circle of stresses):

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta & (1) \\[2ex] \tau_{x'y'} = \dfrac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \qquad (1')$$

روابط (1') و (2) را به توان 2 می رسانیم و با هم جمع می کنیم. داریم:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

فرض

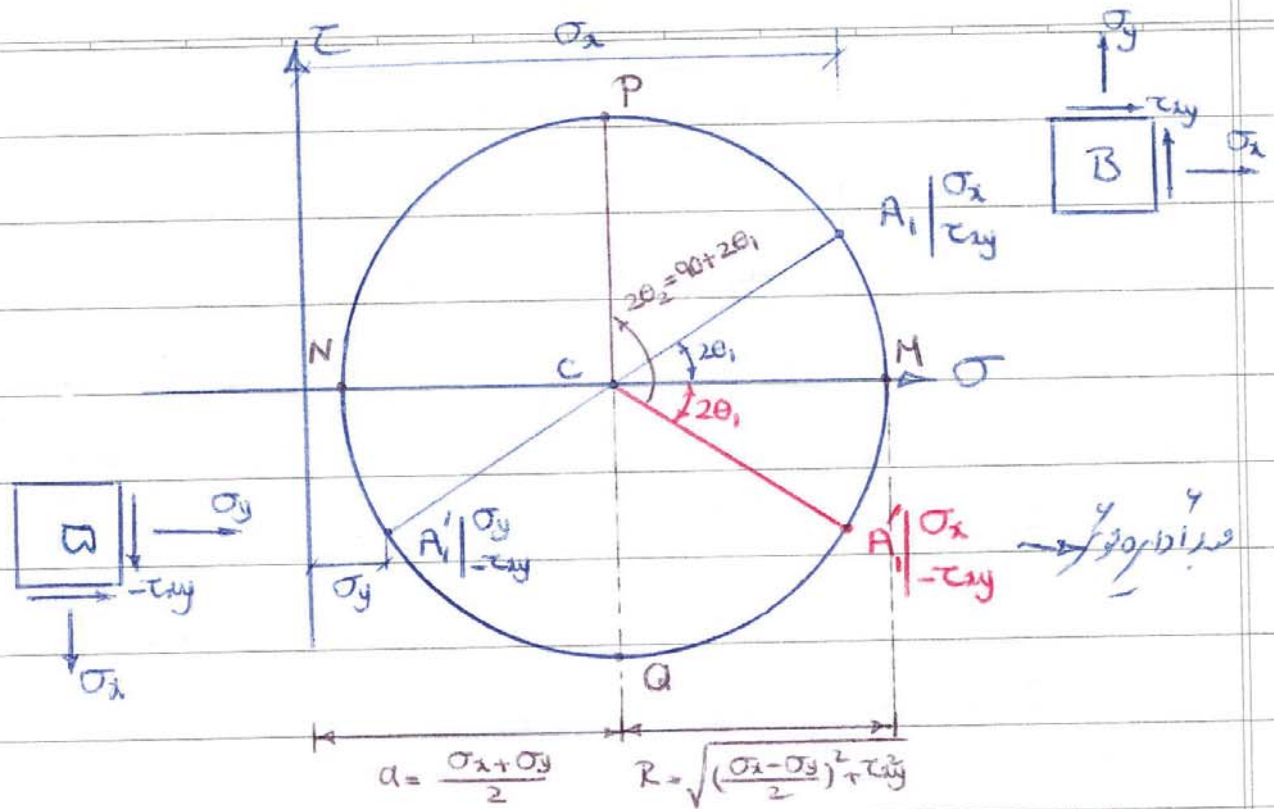
$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = a \\[2ex] \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \end{cases} \rightarrow (\sigma_{x'} - a)^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

معادله بالا معادله دایره است با:

مرکز $C \left| \begin{array}{l} a = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ 0 \end{array} \right.$

شعاع $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

حمید کاظم



خواص و کاربرد دایره مور

۱) دایره مور مکان هندسی نقاطی است که بیانگر تنش‌های متعلق به زوایای خاص مقطع از المان می‌باشد.

۲) نقطه $A_1|\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}}$ بر روی دایره موجود است و در نتیجه دایره صدق می‌کند. این معادله متعلق به $\theta=0$ می‌باشد.

مختصات نقطه $A'_1|\frac{\sigma_y}{-\tau_{xy}}$ نقطه‌ای قرینه نقطه A_1 نسبت به C می‌باشد.

۳) نقاط M و N مقادیر حداکثر و حداقل را در تنش نشان می‌دهند.

$$M:\ \sigma_1=a+R=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}$$

$$N:\ \sigma_2=a-R=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}$$

۴) از نقطه A_1 متعلق به $\theta=0$ به اندازه $2\theta_1$ می‌چرخیم تا به تنش اصلی برسیم.

$$tg\,2\theta_1=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

حمید کاظم

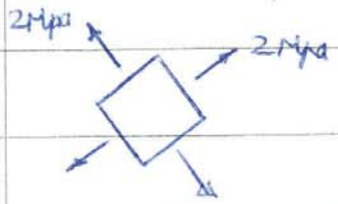
۵) از این به بعد $A\left|\begin{matrix}\sigma_x\\-\tau_{xy}\end{matrix}\right.$ را مبدأ دایره مور فرض می‌کنیم. از این نقطه به اندازه 2θ، در جهت مثلثاتی می‌چرخیم تا به تنش اصلی برسیم.

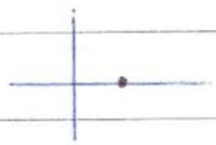
۶) نقطه P دارای تنش برشی حداکثر است.

$$P: \tau_{Max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 - \tau_{xy}^2}$$

۷) و هر نقطه در دایره مور نسبت $\sigma_1+\sigma_2=\sigma_x+\sigma_y=\sigma_{x'}+\sigma_{y'}=cte$
به هر زاویه چرخش کناری المان را نمایش می‌دهد.

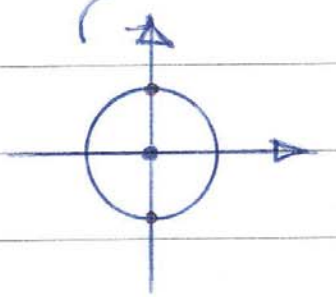
۸) اگر $\sigma_1=\sigma_2$ شد یعنی $R=0$ است و دایره تبدیل به یک نقطه می‌شود.
یعنی المان را هر گونه بچرخانیم مثل المان اولیه است و تنش برشی صفر است.





اگر در المان اولیه $\begin{cases}\sigma_x=\sigma_y\\ \tau_{xy}=0\end{cases}$

۹) اگر $\sigma_x+\sigma_y=0$ باشد مرکز دایره بر روی مبدأ مختصات می‌افتد. این حالت را برش خالص گویند.

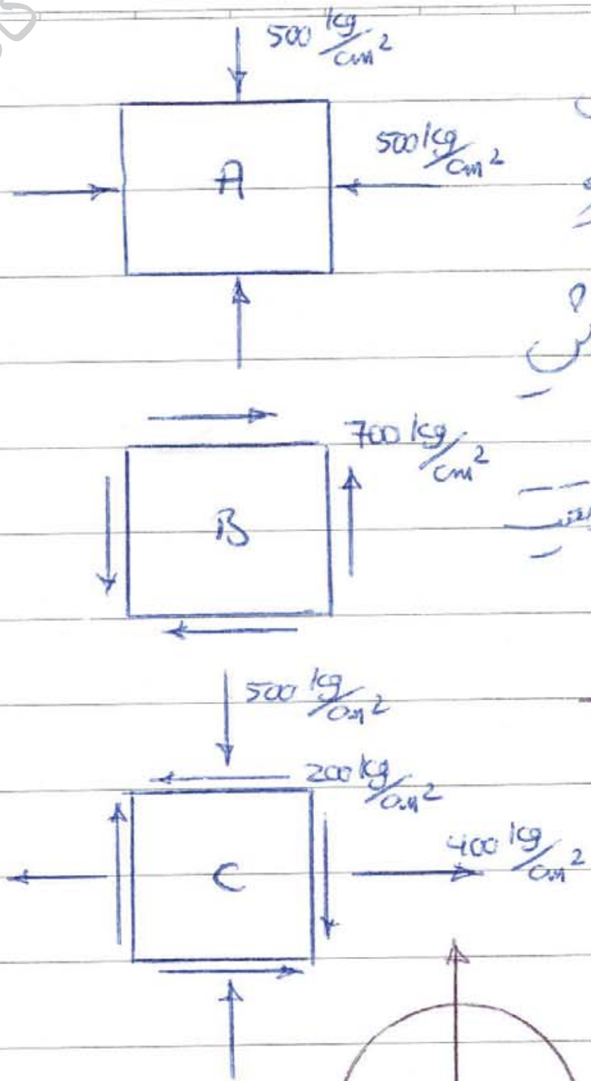


۱۰) برای یافتن تنش‌های قائم و برشی بر روی المانی که به اندازه θ از وضعیت اولیه دوران نموده است، بر روی دایره مور همچنین عمل می‌کنیم. از مبدأ دایره مور (A) به اندازه 2θ طبق قرار داد عمل می‌کنیم (چرخش مثبت موافق دوران مثلثاتی) و به نقطه B می‌رسیم. $B\left|\begin{matrix}\sigma_{x'}\\-\tau_{x'y'}\end{matrix}\right.$ و انتهای دیگر قطر متعلق به نقطه $B'\left|\begin{matrix}\sigma_{y'}\\\tau_{x'y'}\end{matrix}\right.$ می‌باشد.

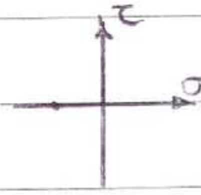
مثال: المان های A ، B و C مطابق شکل مفروضند. برای هر کدام از آن‌ها با استفاده از دایره مور مطلوبست:

الف) تعیین مقدار و محل تنش‌های اصلی مربوط و نمایش موقعیت دقیق آن بر روی المان

ب) تعیین مقدار تنش‌های برشی حداکثر و نمایش موقعیت دقیق آن بر روی المان



A: الف) $\sigma_x=\sigma_y=-500$ دایره نقطه

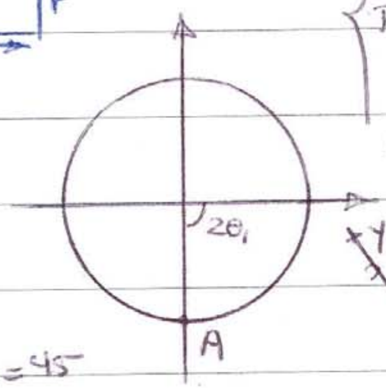


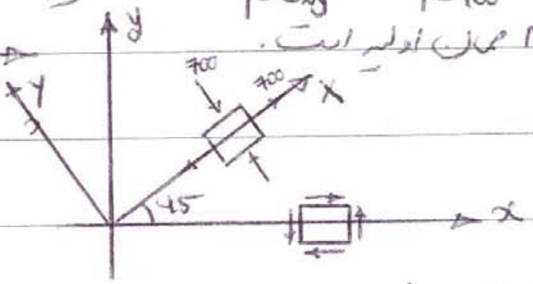
ب) تنش برشی ندارد.

B: الف)

$$\begin{cases} a=0.5(\sigma_x+\sigma_y)=0 \\ R=\tau_{xy}=700\ \frac{kg}{cm^2} \\ \text{قطب دایره}=A\left|\begin{matrix}\sigma_x\\-\tau_{xy}\end{matrix}\right.=A\left|\begin{matrix}0\\-700\end{matrix}\right. \end{cases}$$

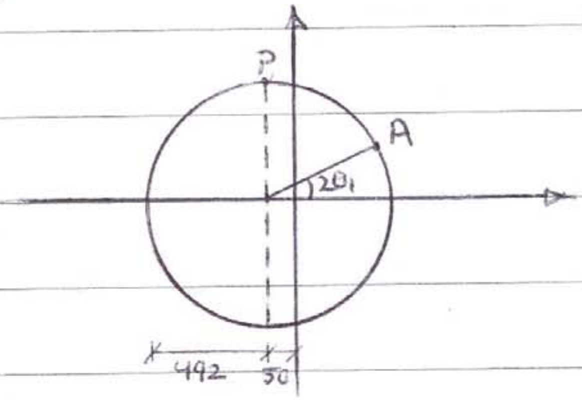
ب) تنش برشی Max همان اولیه است.





$2\theta_1=90 \rightarrow \theta_1=45$

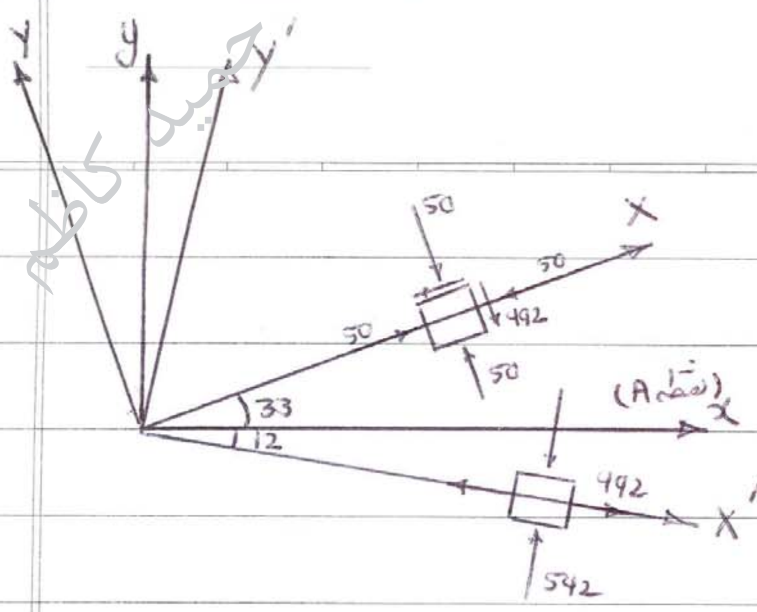
C:



$$\begin{cases} a=\frac{-500+400}{2}=-50 \\ R=\sqrt{450^2+200^2}=492 \\ \text{قطب}=A\left|\begin{matrix}400\\200\end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1=a+R=-50+492=442 \\ \sigma_2=a-R=-50-492=-542 \end{cases}$$

$2\theta_1=\sin^{-1}\frac{200}{492} \rightarrow \theta_1=12^\circ$

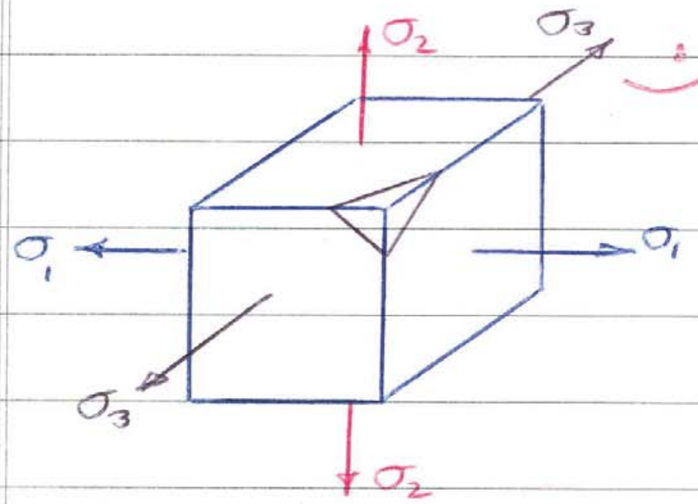


$$\theta_2 = 45 + \theta_1$$

$$\longrightarrow \theta_2 = 45 - 12 = 33^\circ$$

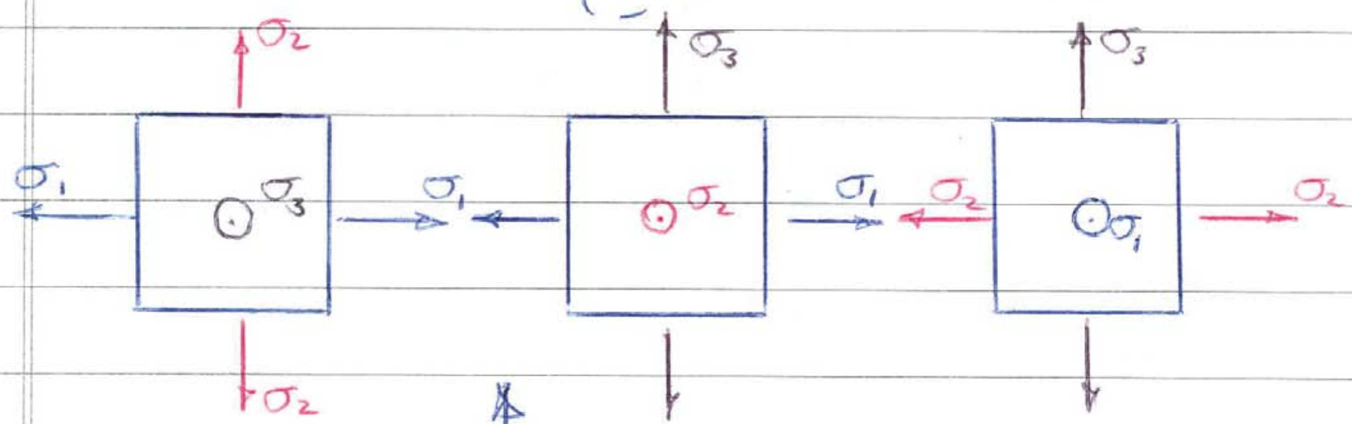
$$P\left|\begin{matrix}-50\\492\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}\sigma_{x'}\\-\tau_{x'y'}\end{matrix}\right. \longrightarrow \tau_{x'y'} = -492$$

دایره موهر تنش ها در حالت کلی ۳ بعدی :

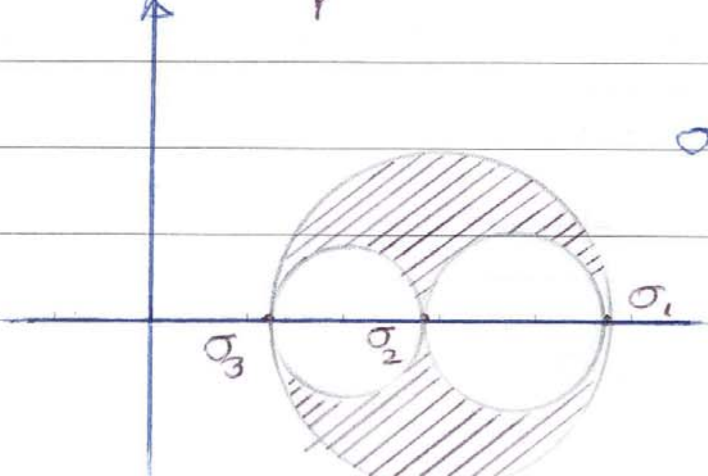


برای هر المان کلی در حالت ۳ بعدی وضعیت خاصی در زاویه خاصی وجود دارد که تنش های برشی روی آن صفر بوده المان المان اصلی است .

المان ۳ بعدی را به صورت های دو بعدی نمایش می دهیم

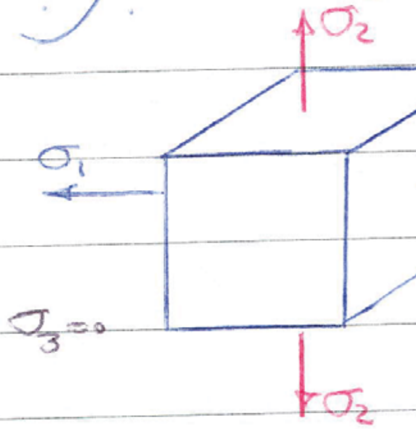


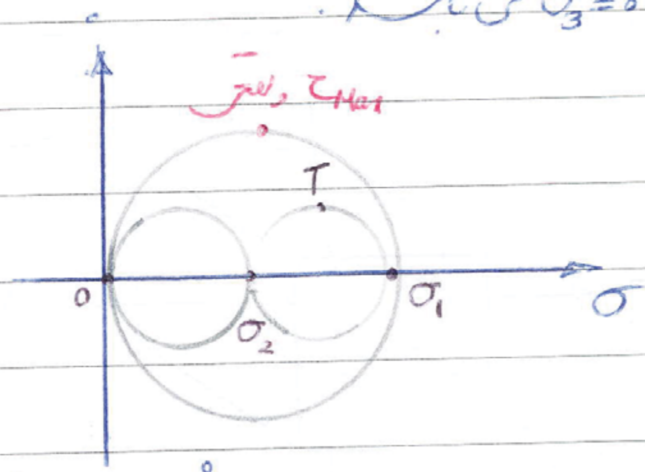
فرض : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$



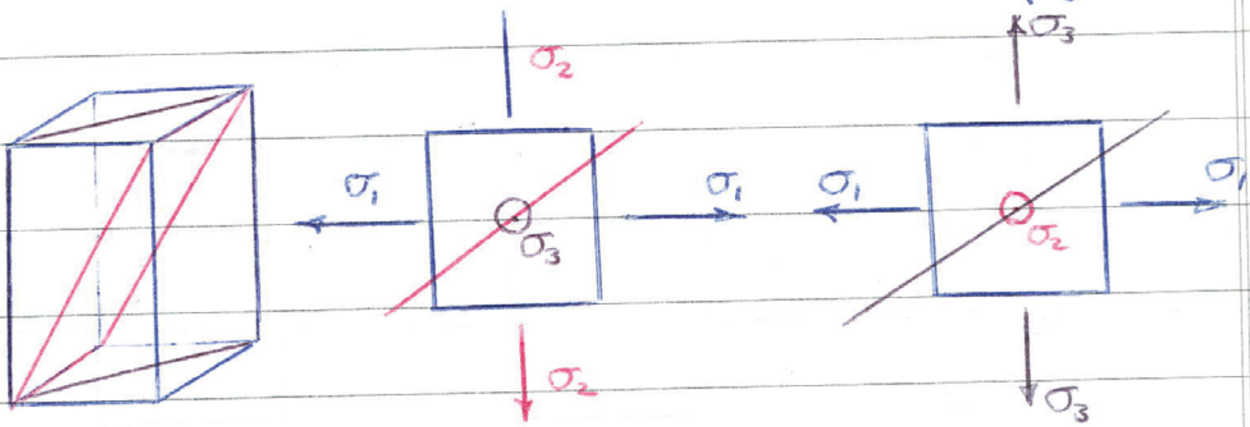
هر نقطه در قسمت هاشور خورده مکان هندسی نقاطی هستند که هر کدام بیانگر تنش های قائم و برشی روی صفحات مایل برش خورده مکعب می باشد.

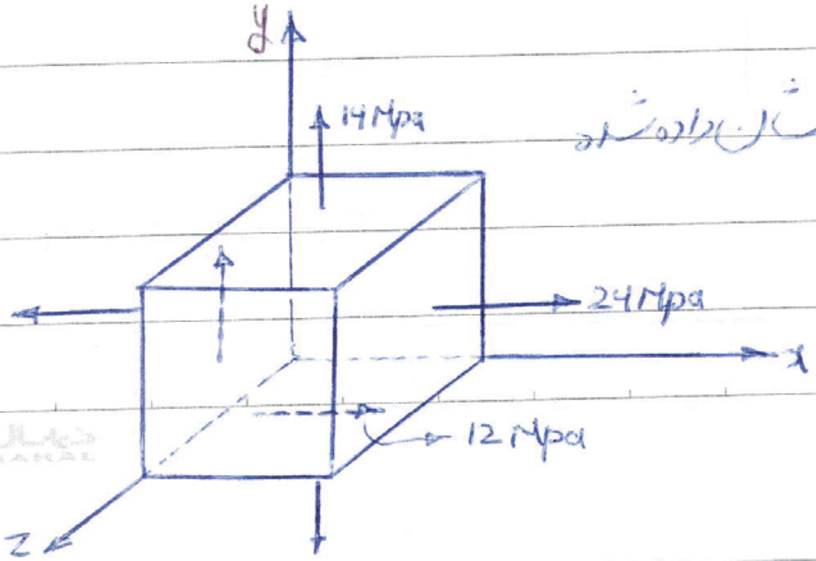
حالت خاص: حالتی خاص که تا به حال مطالعه کرده ایم همان حالت سه بعدی با $\sigma_3=0$ می باشد.





چون این سه دایره را نداشتیم تنش برشی Max را نقطه T در نظر می گرفتیم. حال آنکه این نقطه در سه بعد به صورت دیگری است.

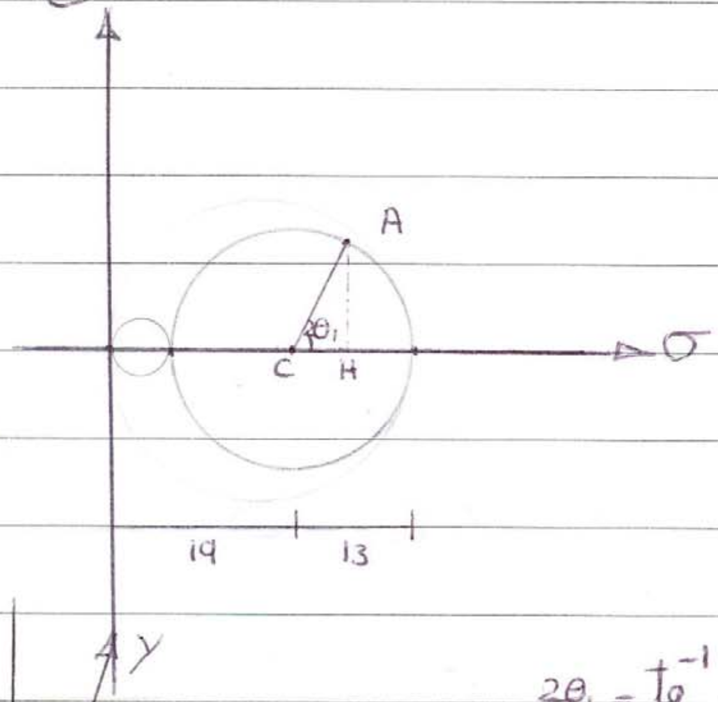




مثال: برای حالت تنش صفحه ای نشان داده شده مطلوب است:

الف) تعیین محل صفحات اصلی و مقدار تنش های اصلی

ب) تعیین مقدار Max تنش برشی



$\sigma_x = 24\,Mpa \quad \sigma_y = 14\,Mpa \quad \sigma_z = 0$

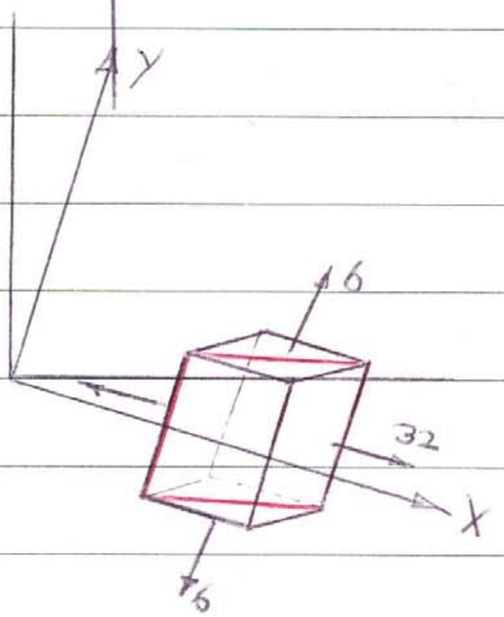
$\tau_{xy} = 12\,Mpa$

$a = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 19\,Mpa$

$R = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 12^2} = 13$

مختصات A $= \begin{vmatrix} 24 \\ 12 \end{vmatrix}$

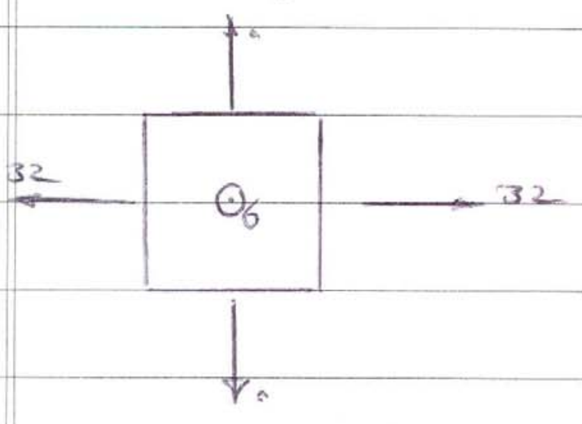
$2\theta_1 = tg^{-1}\dfrac{AH}{CH} = 67.4 \rightarrow \theta_1 = 33.7$



$\sigma_1 = a + R = 32$

$\sigma_2 = a - R = 6$

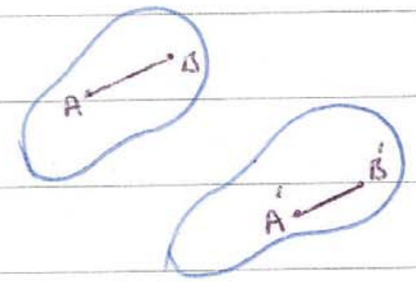
تنش برشی Max در صفحه‌ای است که یک تنش آن ۰،
32 و تنش دیگر ۰ می‌باشد.



اگر در حالت تنش صفحه‌ای دو تنش مختلف العلامه باشند دیگر به تنش برشی Max
براساس دایره موهر دیگر احتیاج نداریم.

تبدیل کرنش ها (Transformation of strains)

۱) میدان معمولاً کرنش ها در دستگاه مختصات تارها ایجاد می شود. بنابراین تبدیل کرنش ها را در دو بعد بررسی می کنیم.

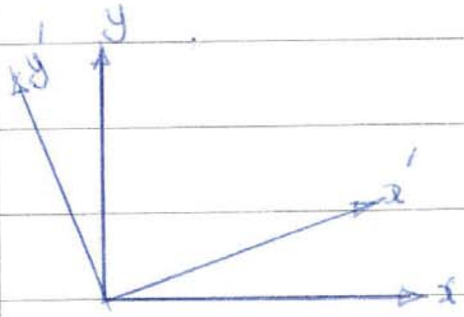


۲) اگر $A'B' = AB$ باشد نشان می دهد یک حرکت انتقالی یا دورانی یا هر دو را جسم داده باشد. اما اگر $A'B' \neq AB$ یعنی کرنش اتفاق افتاده است.

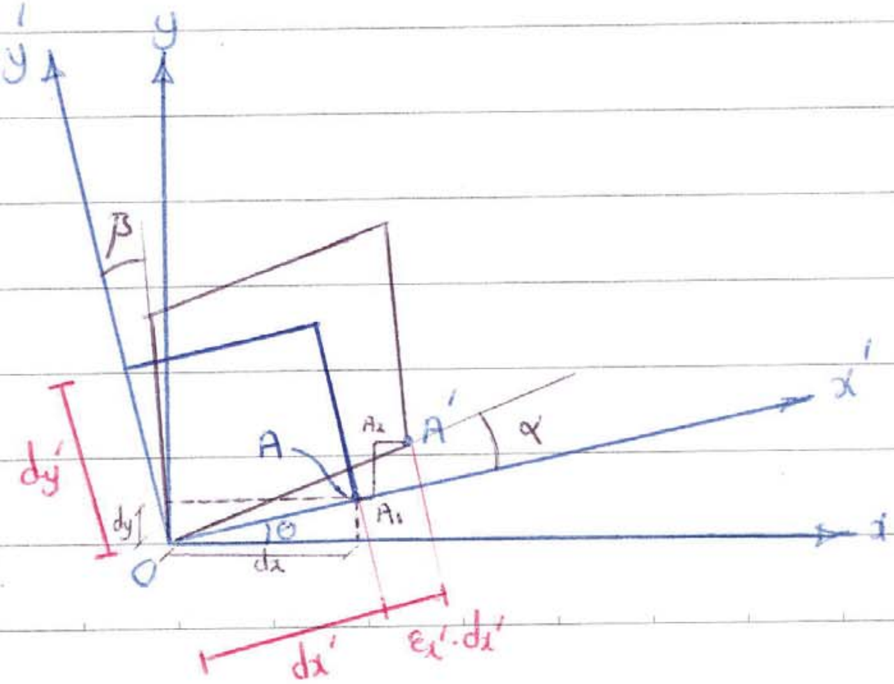
ندادن این جابجایی ها برای ما اهمیت ندارد و تنها تغییر شکل مهم است.

۳) تفسیر نتایج تنش در اجسام. با توجه به ابزارهای آزمایشگاهی صورت می گیرد.

روابط تبدیل کرنش ها برای کرنش صفحه ای:

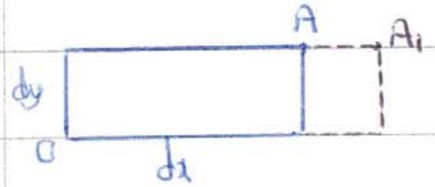


معلومات اولیه حالت در مختصات x و y، ε_x و ε_y و γ_{xy} است. حال می خواهیم در مختصات x' و y'، $\varepsilon_{x'}$ ، $\varepsilon_{y'}$ ، $\gamma_{x'y'}$ را بدست آوریم.

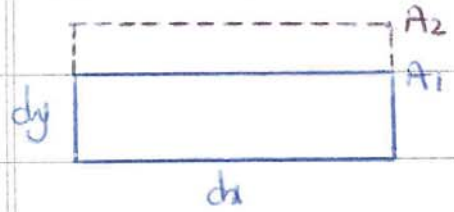


فرض می کنیم OA قطر المانی در دستگاه اولیه با ابعاد dx و dy باشد.

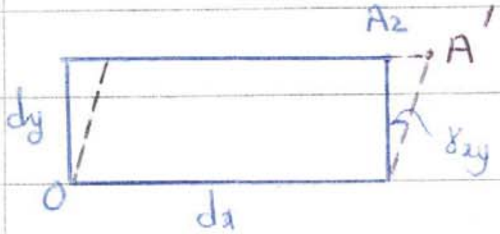
A مسیری را طی کرده تا به A' رسیده است. در این مسیر 3 کرنش ε_x ، ε_y ، γ_{xy} را طی کرده است. فرض می کنیم A به A_1 و A_2 رفته و در نهایت به A' رسیده است.



$$AA_1 = \varepsilon_x . dx$$



$$A_1A_2 = \varepsilon_y . dy$$



$$A_2A' = \gamma_{xy} . dy$$

از AA_1 ، A_1A_2 ، A_2A' را تصویر کنیم بر ox' و حاصل را جمع کنیم $\varepsilon_x'.dx'$ بدست می آید.

$$\varepsilon_x' . dx' = AA_1 . \cos\theta + A_1A_2 \sin\theta + A_2A' \cos\theta$$

$$\rightarrow \varepsilon_x' . dx' = \varepsilon_x . dx \cos\theta + \varepsilon_y dy \sin\theta + \gamma_{xy} dy \cos\theta$$

$$\rightarrow \varepsilon_x' = \varepsilon_x . \frac{dx}{dx'} . \cos\theta + \varepsilon_y \frac{dy}{dx'} \sin\theta + \gamma_{xy} \frac{dy}{dx'} \cos\theta$$

$$\rightarrow \varepsilon_x' = \varepsilon_x . \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta . \cos\theta$$

$$\rightarrow \varepsilon_x' = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

حمید کاظم

اگر بجای θ، $\theta + \pi/2$ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y = Const.$$

می دانیم که $\gamma_{x'y'} = \alpha + \beta$ پس:

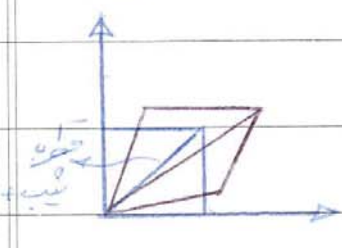
$$\gamma_{x'y'} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

* توجه کنید که در این روابط $\gamma_{xy}/2$ ظاهر شده است

قراردادهای روابط فوق:

۱) کرنش های ε_x و ε_y وقتی مثبت می باشند که کششی باشند.

۲) کرنش γ_{xy} در صورتی مثبت فرض می شود که قطری از المان که دارای شیب مثبت است افزایش طول داده باشد



۳) θ در جهت دوران در جهت مثلثاتی مثبت است.

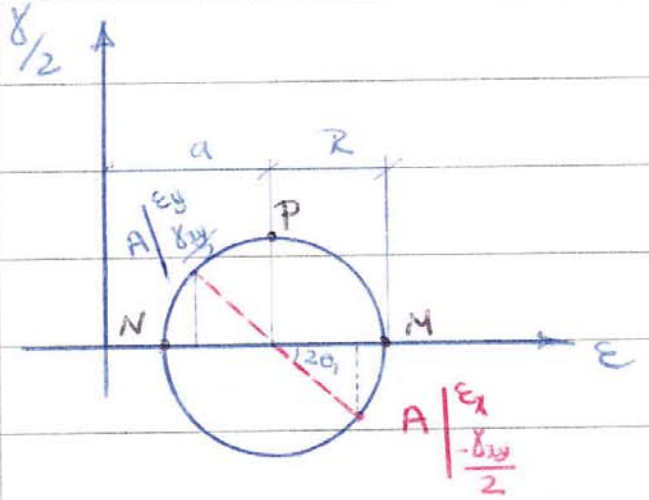
حمید کاظم

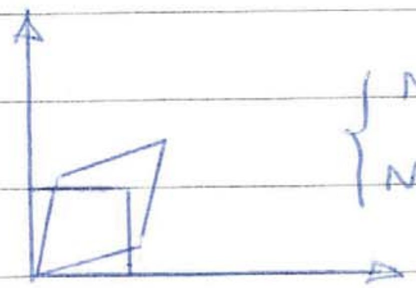
دایره مور برای کرنش ها

۱) محور افقی در دایره مور ε و محور قائم $\gamma/2$ است.

۲) $C\left|\begin{matrix} a=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$ ، $R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$ ، $A\left|\begin{matrix}\varepsilon_x\\ -\frac{\gamma_{xy}}{2}\end{matrix}\right.$ و غیره

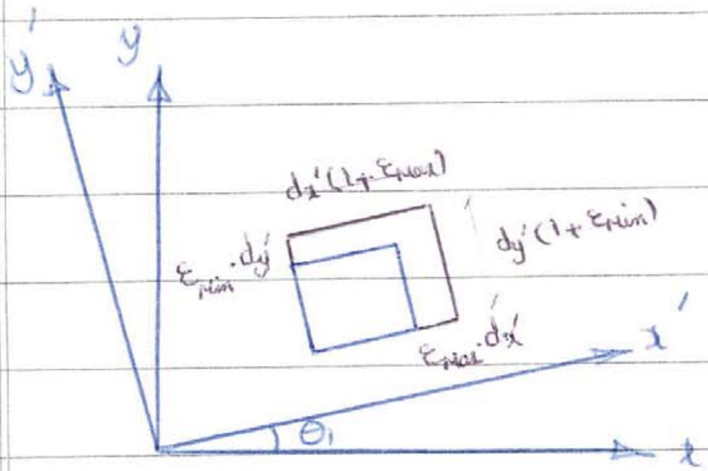
۳)





$$\begin{cases} M \rightarrow \varepsilon_{Max}\\ N \rightarrow \varepsilon_{Min}\end{cases}$$

$$\varepsilon_{\substack{Max\\Min}} = a \pm R \qquad tg2\theta_1 = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$



۴) در المان مقابل چون $\gamma_{xy}=0$ است پس $\tau_{xy}=0$ است.

۵) مقدار ماکزیمم کرنش برشی در نقطه P اتفاق می افتد و برابر قطر دایره مور است.

$$\gamma'_{Max} = 2R$$

6) در جایی که کرنش ماکزیمم برشی داریم کرنش های ε برابر a می باشد.

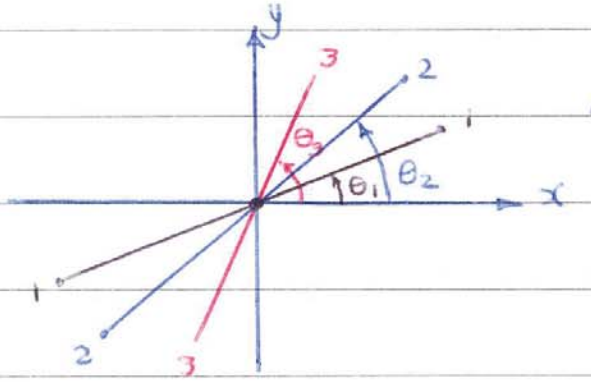
کاربرد دیگر دایره مور برای یافتن کرنش ها بر روی المانی که به اندازه θ نسبت به وضعیت اولیه چرخیده است از دایره مور به اندازه 2θ مطابق قرارداد حرکت می کنیم. می رسیم به نقطه $B \left| \begin{matrix} \varepsilon_x' \\ -\frac{\gamma_{xy}'}{2} \end{matrix} \right.$ و سر دیگر قطر متعلق به B عبارت است از $B' \left| \begin{matrix} \varepsilon_y' \\ \frac{\gamma_{xy}'}{2} \end{matrix} \right.$

روش های اندازه گیری تغییر شکل:

۱) روش های نوری (photoelasticity)

۲) روش پوشش ترد (brittle Coating Method)

۳) روش کرنش سنج الکتریکی (electrical strain gage)



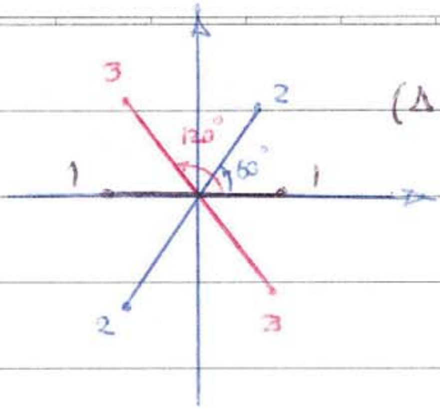
نقطه ای را بر روی سازه معین می کنیم و توسط اسم های ۱ و ۲ و ۳ روش کرنش سنج الکتریکی را انجام می دهیم و توسط سه معادله سه مجهول ε_x و ε_y و γ_{xy} را بدست می آوریم.

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{\theta_1} = \varepsilon_x \cos^2\theta_1 + \varepsilon_y \sin^2\theta_1 + \gamma_{xy} \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_1 \\
\varepsilon_{\theta_2} = \varepsilon_x \cos^2\theta_2 + \varepsilon_y \sin^2\theta_2 + \gamma_{xy} \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_2 \\
\varepsilon_{\theta_3} = \varepsilon_x \cos^2\theta_3 + \varepsilon_y \sin^2\theta_3 + \gamma_{xy} \sin\theta_3 \cdot \cos\theta_3
\end{cases}
$$

به این سه عضو گلبرگ کرنش یا خوشه کرنش می گویند. حالت های ساده دیگری هم وجود دارد که محاسبات را بسیار ساده تر می کند. اما اگر نتوانستیم سیم ها را به این صورت ساده بچینیم باید از حالت کلی استفاده می کنیم.

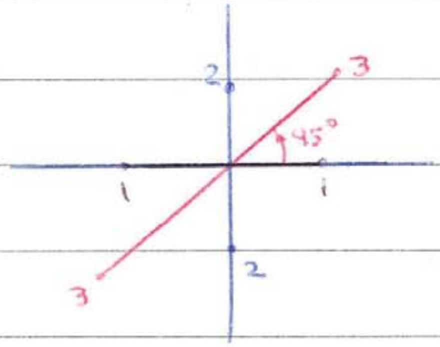
گلبرگ کرنش یا خوشه کرنش (strain Rossette)

خوشه کرنش °60 یا خوشه کرنش Δ (Δ Rosette)



$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_{(\theta=0^\circ)} \\ \varepsilon_y = (2\varepsilon_{60^\circ} + 2\varepsilon_{120} - \varepsilon_0) \times \frac{1}{3} \\ \gamma_{xy} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)(\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120}) \end{cases}$$

خوشه کرنش شق در (Rectangular Rossette)



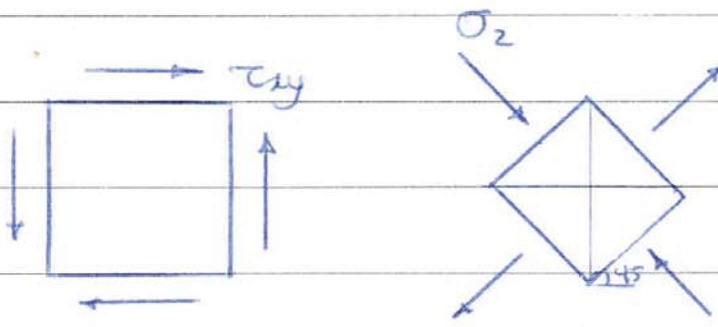
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{90} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}) \end{cases}$$

روابط بین تنش‌ها و کرنش‌ها:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \end{cases}$$

رابطه بین E , G , ν :



(1) (2)

حمید کاظم

$$(1) \rightarrow \varepsilon_{\theta=45^\circ} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta$$
$$= 0 + 0 + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}$$
$$\Rightarrow \varepsilon = \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}$$

$$(2) \rightarrow \varepsilon_{45} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E} + \nu\frac{\tau_{xy}}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\nu)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\nu) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\nu)$$

$$\Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

تغییر حجم المان تحت کرنش ها:

فرض می کنیم المان اولیه به ابعاد dx، dy، dz داریم.

$$dx \xrightarrow{\text{اعمال بار}} dx(1+\varepsilon_x)$$

$$dy \xrightarrow{\text{اعمال بار}} dy(1+\varepsilon_y)$$

$$dz \xrightarrow{\text{اعمال بار}} dz(1+\varepsilon_z)$$

$$V_1 = dx.dy.dz \longrightarrow V_2 = dx.dy.dz(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$
$$\Rightarrow V_2 = dx.dy.dz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = dx\,dy\,dz(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

حمید کاظم

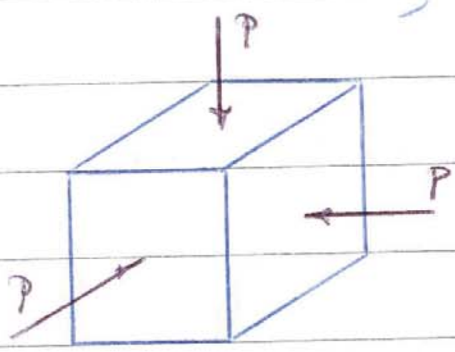
تغییر حجم نسبی $e = \dfrac{\Delta V}{V_1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ → dilatation (اتساع)

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

تغییر حجم نسبی برابر است با تغییر کرنش ها و همچنین متناسب است با تغییر تنش ها

* تغییر حجم المان در تمام جهات یکسان است.

حالت خاص: المان تحت فشار هیدرواستاتیک



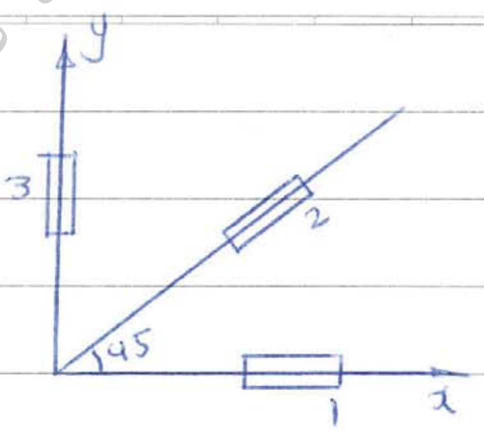
$$e = \frac{1-2\nu}{E}(-3p)$$

$$\rightarrow \quad -p = \frac{E}{3(1-2\nu)}\, e$$

$K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ → Bulk Modulus   مدول بالک (فشار)

Compression Modulus

مثال: یک خوشه کرنش شامل سه کرنش سنج الکتریکی بر روی یک ورق فلزی که تحت اثر مجموعه‌ای از نیروها قرار دارد نصب شده است. شکل قرارگیری کرنش سنج‌ها و مقادیر حاصله بدین ترتیب است.

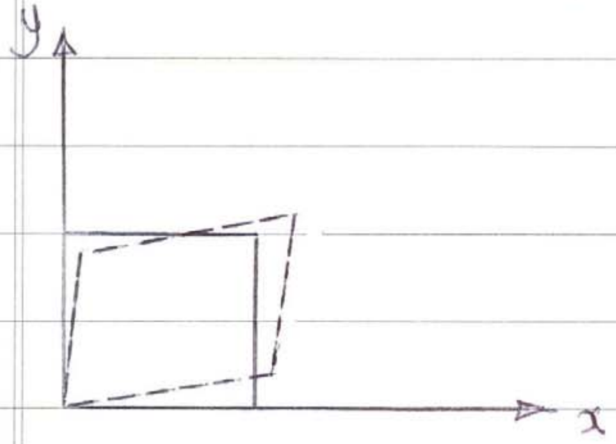


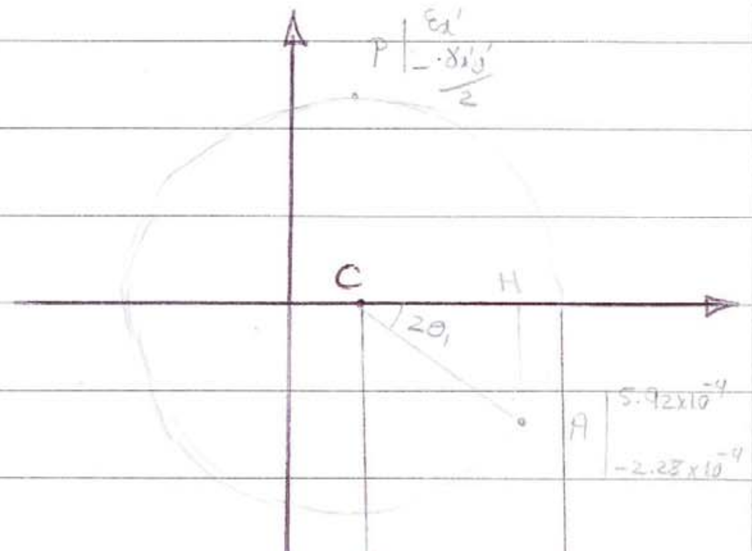
$\varepsilon_3 = -0.000432 \qquad \varepsilon_2 = 0.000308 \qquad \varepsilon_1 = +0.000592$

مطلوبست: الف) مقدار و جهت کرنش های اصلی. ب) مقدار و جهت تنش های اصلی. ج) موقعیت و مقادیر کرنش های برشی حداکثر.

$E = 2.03 \times 10^5\ Mpa \qquad \nu = 0.3$

$\varepsilon_x = 0.000592 \qquad \varepsilon_y = -0.000432 \qquad \gamma_{xy} = 0.000456$



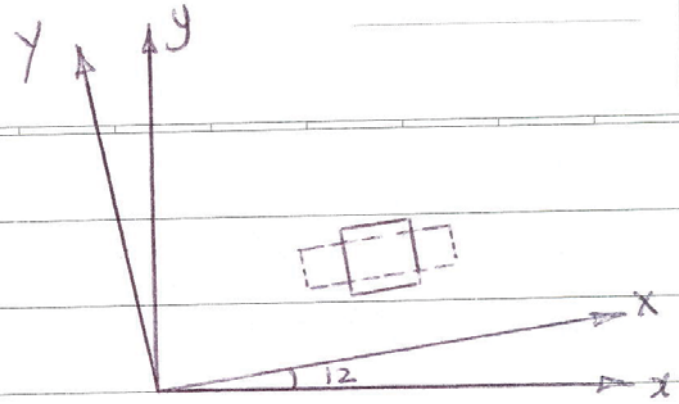


$$a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = 0.000080$$

$C(0, a)$

$R = 0.000560$

مبدأ: $A \left| \begin{matrix} \varepsilon_x \\ -\dfrac{\gamma_{xy}}{2} \end{matrix} \right.$



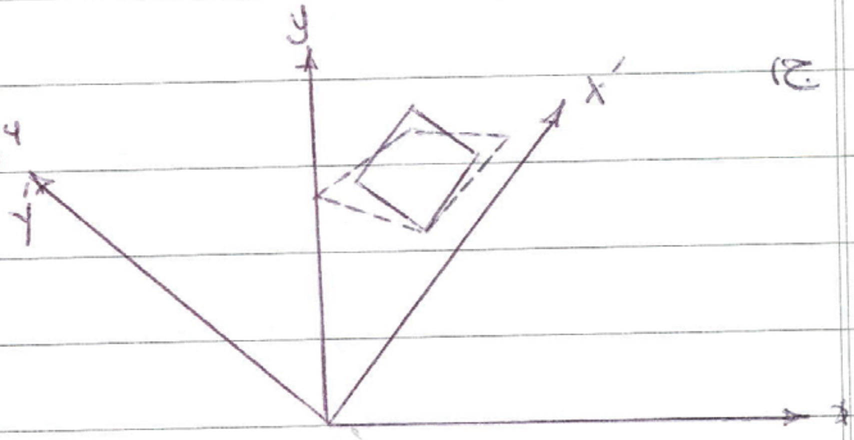
$$\begin{cases} \varepsilon_{Max} = a + R = 6.4 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_{Min} = a - R = -4.8 \times 10^{-4} \end{cases}$$

$$2\theta_1 = \sin^{-1} \frac{AH}{R} = 24^\circ \rightarrow \theta_1 = 12^\circ$$

ج)

$$\theta_2 = \theta_1 + 45 = 57^\circ$$

$$\gamma_{Max} = -2R = -11.2 \times 10^{-4}$$



γ منفی یعنی قطر با شیب مثبت کوچک، با شیب منفی بزرگ می‌شود

حمید کاظم

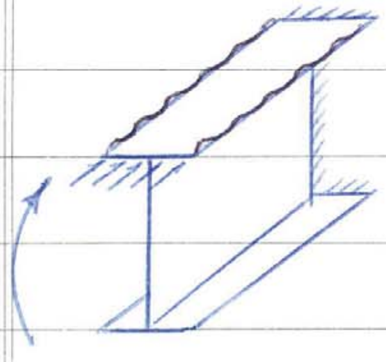
فصل سوم:

تئوری پایداری در اعضای تحت فشار (ستون‌ها)

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{Max} \leq \sigma_{all} \\ \tau_{Max} \leq \tau_{all} \\ \delta_{کل} \leq \delta_{all}\end{array}\right\}$$ معیارهای مقاومت

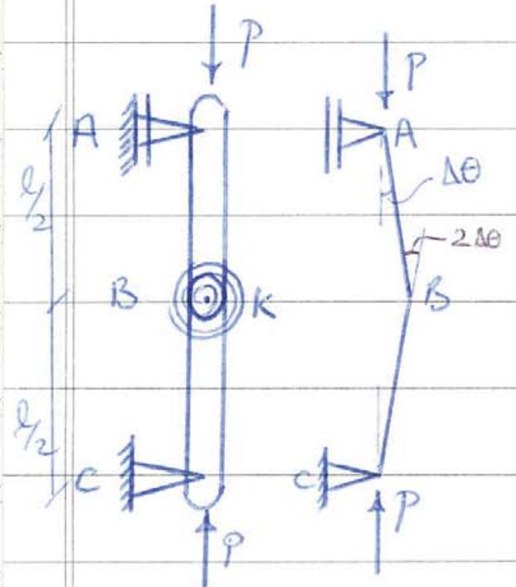
به تغییر شکلی که اختصاص به اعضای تحت فشار دارد کمانش (Buckling) گویند.

به کمانش شکل (1) کمانش کلی گوییم. اما به کمانش شکل (2) کمانش جزئی گوییم.



در این فصل به کمانش کلی در ستون‌ها می‌پردازیم.

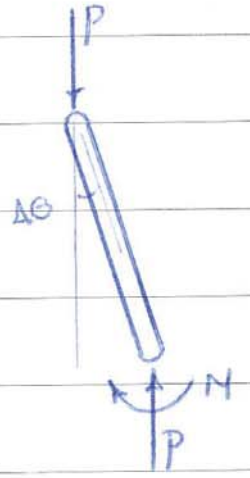
پایداری ارتجاعی اجسام صلب:



تا اینجا می‌دانیم با فرض کاملاً ایده‌آل این دو کاملاً در یک امتداد باشند و به علت صلب بودن هیچ کمانشی ندارند.

در نقطه B در راستای افقی نیرویی را وارد می‌کنیم و آن را منحرف می‌کنیم. بعد از این اتفاق نیروی افقی را حذف می‌کنیم. پس در حالت اول نرمی برمی‌گردد و تا زاویه صفر می‌شود. بنابراین اگر به جای خودش برگشت می‌گوییم سیستم پایدار است.

و اگر در حالت اولیه برگشت، سیستم ناپایدار می باشد ،

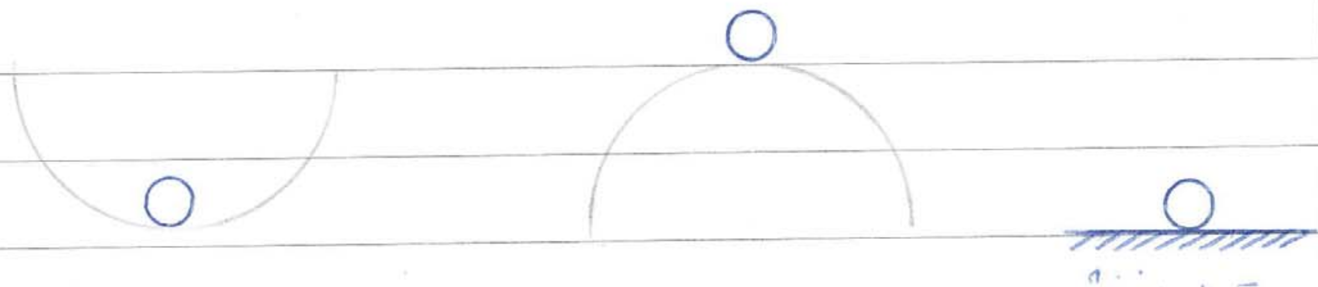


$$\begin{cases} M_1 = P\left(\frac{l}{2}\sin\Delta\theta\right) \\ M_2 = k(2\Delta\theta) \end{cases}$$

$M_1 > M_2$: سیستم ناپایدار است .

$M_1 < M_2$: سیستم پایدار است و به حالت خود برمی گردد

اگر P ، قابل ملاحظه باشد و k کم باشد سیستم ناپایدار می گردد



تعادل پایدار   تعادل ناپایدار   تعادل خنثی

حالت مرزی وقتی است که $M_1 = M_2$ باشد یعنی :

$$P\frac{L}{2}\sin\theta = k\,2\Delta\theta$$

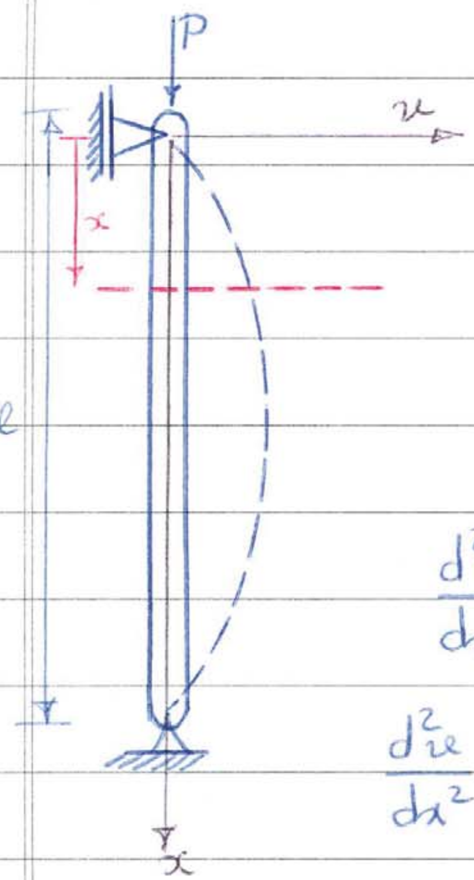
$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{4k}{L}$$ (Critical load بار بحرانی)

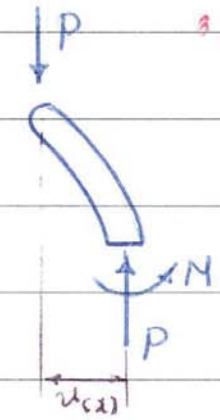
$P < \frac{4k}{L} \Rightarrow M_1 < M_2$ سیستم پایدار

$P > \frac{4k}{L} \Rightarrow M_1 > M_2$ سیستم ناپایدار

نکته: این به این معنی نیست که اگر $P_{cr}=10t$ بود و ما $P=20t$ وارد کردیم کمانش ایجاد می گردد. بلکه به این معنی است که در $P=20t$ اگر یک تلنگر به سازه بخورد باعث کمانش می شود.

بررسی پایداری ستون دو سر مفصل:





$$M=-Pv$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{-P.v}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{P}{EI}v=0$$

با فرض $\frac{P}{EI}=\lambda^2$ داریم:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\lambda^2 v=0$$

$$\rightarrow v_{(x)}=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x$$

شرایط مرزی:
$$\begin{cases} v_{(0)}=0 \Rightarrow B=0 \\ v_{(l)}=0 \Rightarrow A\sin\lambda l=0 \end{cases}$$

A نمی تواند صفر باشد چون اگر صفر باشد پس کمانش نداریم.

$$A\sin\lambda l=0 \Rightarrow \lambda l=n\pi$$

$$\Rightarrow \lambda^2 l^2=n^2\pi^2 \Rightarrow \frac{P}{EI}l^2=n^2\pi^2$$

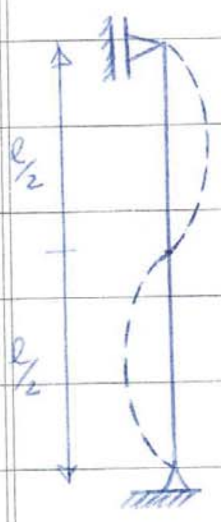
$$\Rightarrow P_{cr}=\frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

از نظر ریاضی به ازای $n=1$ ، $n=2$ و $n=k$ به ازای هر کدام یک P بحرانی داریم. یعنی به ازای ۱ برابر، ۴ برابر، ۹ برابر و ... حالت بحرانی داریم. اما ما به عنوان مهندس تنها $n=1$ را در نظر می‌گیریم.

$$n=1 \rightarrow P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2}$$ Euler's Formula (رابطه اویلر)

$$u_{(x)}=A\sin\lambda x$$

در این رابطه A مجهول است و نمی‌توان بدست آورد. در اینجا $u_{(x)}$ را می‌توان بدست آورد چون ستون ناپایدار است و همینطور تغییر شکل با زمان پیش می‌رود

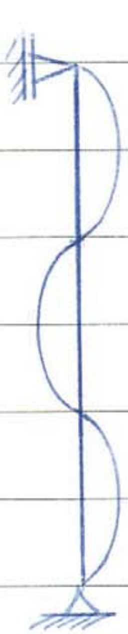


$$n=2 \Rightarrow P_{cr}=\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

$$u_{(x)}=A\sin\lambda x=A\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x$$

$$\Rightarrow u_{(x)}=A\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$$

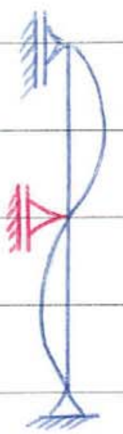
$$\begin{cases} u(0)=0 \\ u(l)=0 \\ u(l/2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(l/4)=A \\ u(3l/4)=A \end{cases}$$



$$n=3 \Longrightarrow u(x) = A\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)$$

$$\begin{cases} u(0)=0 \\ u(l)=0 \\ u(l/3)=0 \\ u(2l/3)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(l/6)=A \\ u(l/2)=A \\ u(5l/6)=A \end{cases}$$

اگر اینکه کمانش در $n=1$ پیش نیاید و وارد $n=2$ شود عامل مزاحم ایجاد شد کمانش در شکل رسم شده در $n=2$ است. این یک بحث ریاضی است. اما از دید مهندسی می‌دانیم وقتی این عامل ایجاد می‌شود که تکیه‌گاه جانبی ایجاد کنیم



نکته: ممان اینرسی اشاره شده باید حول محور ضعیف نوشت. بنابراین بهترین ستون ستونی است که ممان اینرسی حول محورهای x و y برابر باشد یعنی ضعیف و قوی نداشته باشد.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 . A} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{L^2 . A}$$

تنش بحرانی:

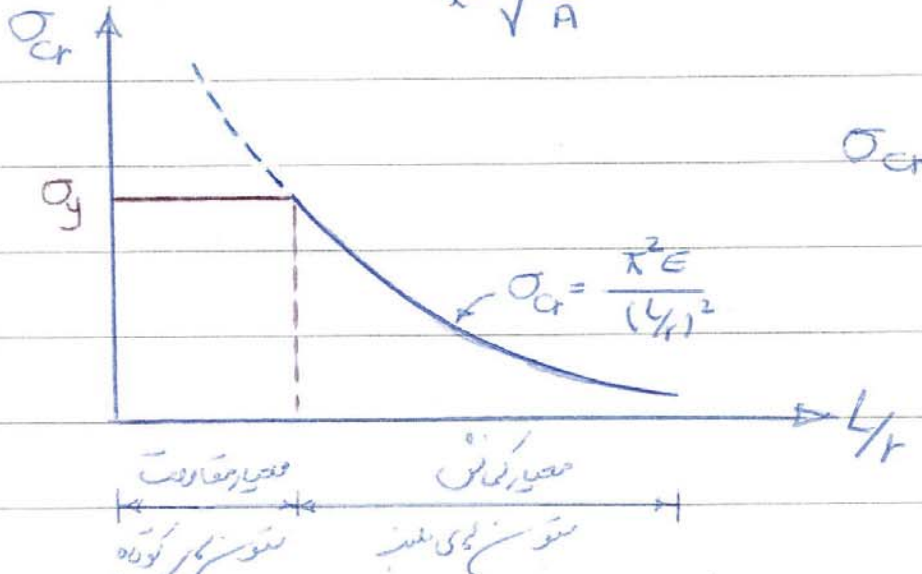
r: شعاع ژیراسیون

تنش بحرانی در ستون دو سر مفصل $\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$

$\dfrac{L}{r}$: نسبت لاغری (slenderness effect)

از این می فهمیم که تنش به L/r بستگی دارد. r استفاده شده شعاع ژیراسیون محور ضعیف است.

$r_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}}$



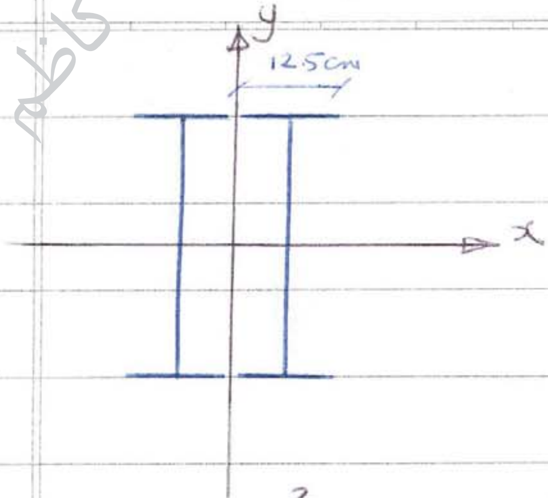
نامساوی : $\sigma_{cr} < \sigma_y$

در لاغری های کم هر چند تنش کم است، نشکند تسلیم در مقابل رخ می دهد.

مثال: ستونی دو سر مفصل به طول 6m از 2 عدد INP300 تشکیل شده که به یک فاصله ای جوش شده است. با فرض $\sigma_y = 2400\ kg/cm^2$ و $E = 2.1\times10^6\ kg/cm^2$ ظرفیت باربری فشاری آن را بیابید. ضریب اطمینان را 2 در نظر بگیرید.

$I_x = 9800\ cm^4$ $\quad A = 69\ cm^2$ $\quad h = 30\ cm$

$I_y = 451\ cm^4$ $\quad b_w = 12.5\ cm$



$I_x = 2 \times 9800 = 19600 \ cm^4$

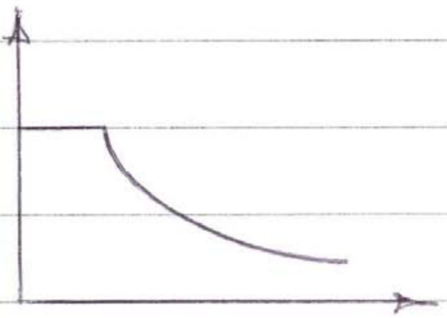
$I_y = 6293 \ cm^4$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^6 \times 6293}{600^2} = 362.3 \ ton$$

$$\sigma_{cr} = \frac{362.3 \times 10^3}{2 \times 69} = 2625 \ \frac{kg}{cm^2} > 2400 \ \frac{kg}{cm^2}$$

پس معیار مقاومت حاکم است.

$$P_{all} = \frac{2400 \times 2 \times 69}{2} = 165.5 \ ton$$

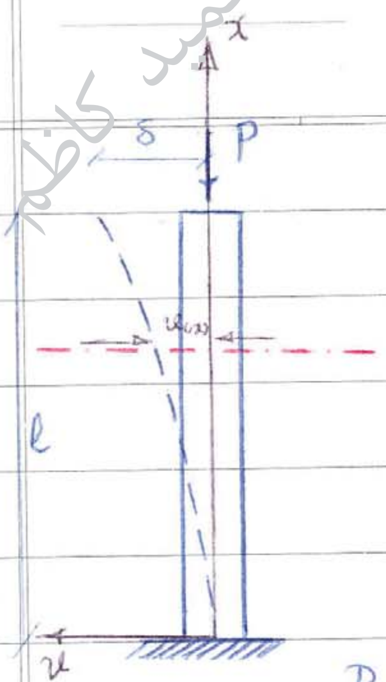


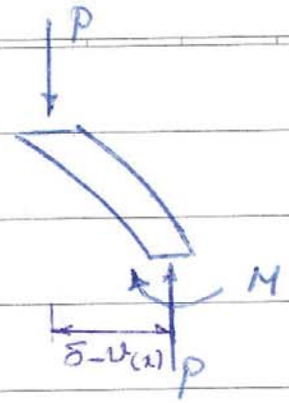
مثال: ستونی باریکی در دو انتها مفصل شده است. با فرض شرایط ایده‌آل و رفتار ارتجاعی مصالح چه میزان افزایش درجه حرارت در این ستون باعث ظهور کمانش می‌شود. (طول ستون l . مدول الاستیسیته مصالح E و ضریب انبساط حرارتی α باشد)

$\varepsilon = \alpha . \Delta t \rightarrow \sigma = E . \alpha . \Delta t \rightarrow F = E \alpha . \Delta t . A$

$$E \alpha \Delta t . A = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\pi^2 . I}{\alpha l^2 A}$$





ستون یکسر گیردار :

$$M = P(\delta - v(x))$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{P(\delta - v)}{EI}$$

فرض : $\frac{P}{EI} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} + \lambda^2 v = \lambda^2 \delta$

$$v(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \delta$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow B = -\delta \\ v'(0) = 0 \Rightarrow A \lambda \cos \lambda x = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(x) = \delta(1 - \cos \lambda x)$$

شرط مرزی : $v(l) = \delta \Rightarrow \delta = \delta(1 - \cos \lambda x) \Rightarrow \cos \lambda l = 0$

$$\Rightarrow \lambda l = (2n+1)\pi/2$$

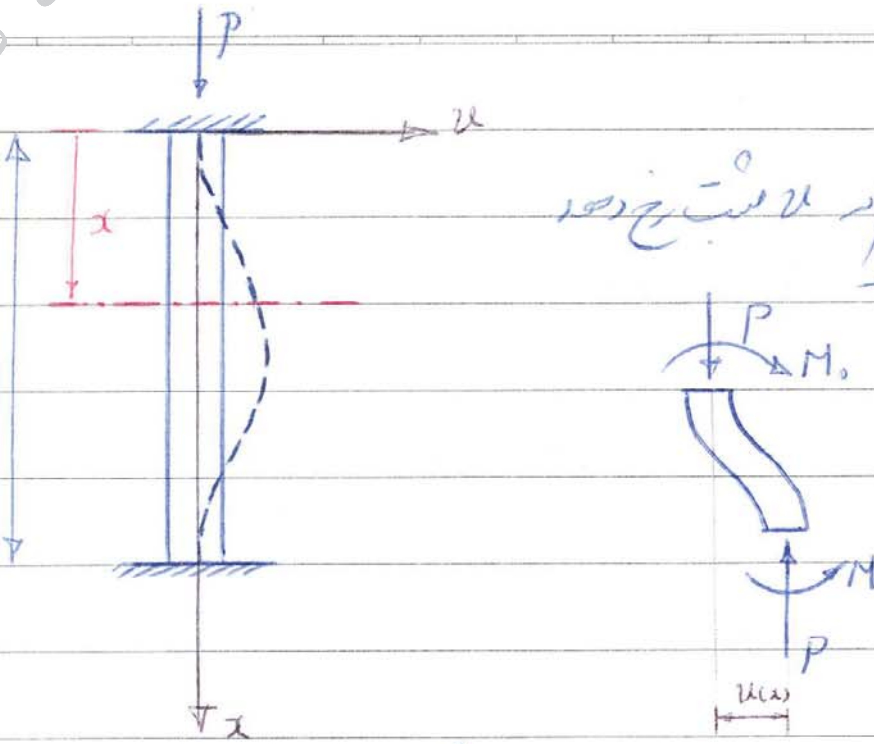
$$n = 0 \Rightarrow \lambda l = \pi/2 \Rightarrow \lambda^2 l^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \frac{P}{EI} l^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$$

حمید کاظم

ستون دو سر گیردار

محورها را طوری در نظر می‌گیریم که u مثبت رخ دهد



$$M = M_0 - Pu \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M_0 - Pu}{EI}$$

فرض : $\frac{P}{EI} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = \frac{M_0}{EI} \times \frac{P}{P}$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = \frac{M_0}{P}\lambda^2$$

$$\Rightarrow u(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + \frac{M_0}{P}$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} u(0) = 0 \rightarrow B = \frac{-M_0}{P} \\ u'(0) = 0 \rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{M_0}{P}(1 - \cos\lambda x)$$

حمید کاظم

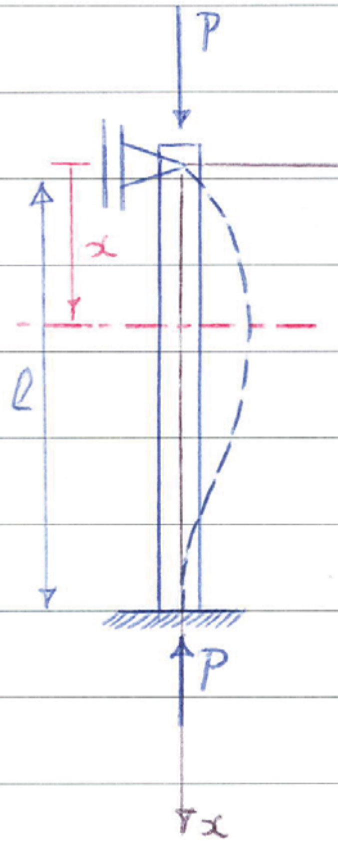
شرط مرزی : $u(l)=0 \Rightarrow \frac{M_0}{P}(1-\cos\lambda l)=0 \quad \left(\frac{M_0}{P}\neq 0\right)$

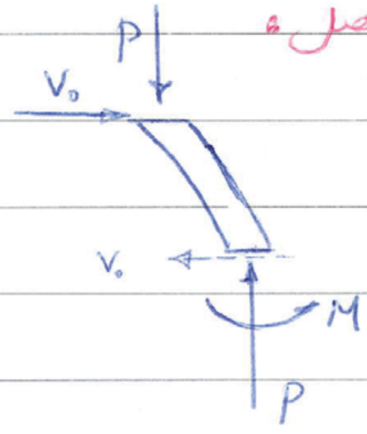
$$\Rightarrow \cos\lambda l = 1 \Rightarrow \lambda l = 2n\pi$$

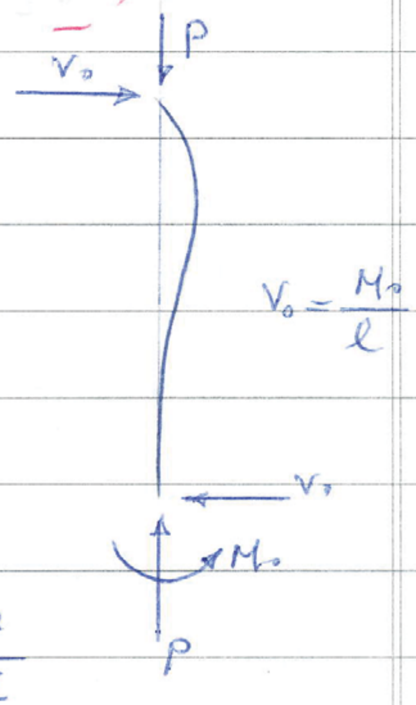
$$n=1 \Rightarrow \lambda l = 2\pi \Rightarrow \lambda^2 l^2 = 4\pi^2 \Rightarrow \frac{P}{EI}\, l^2 = 4\pi^2$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

ستون یک سر گیردار، یک سر مفصل :







$$M = V_0 x - P u$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{V_0 x}{EI} - \frac{P u}{EI}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{V_0 x}{EI}\,\frac{P}{P} - \frac{P u}{EI}$$

فرض : $\frac{P}{EI} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = \frac{V_0}{P}\, x\, \lambda^2$

$$v(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + \frac{V_0}{P}x$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} v(0) = 0 \longrightarrow B = 0 \\ v(l) = 0 \longrightarrow A\sin\lambda l + \frac{V_0}{P}l = 0 \quad (1) \\ v'(l) = 0 \longrightarrow A\lambda\cos\lambda l + \frac{V_0}{P} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

رابطه (1) را بر (2) تقسیم می‌کنیم

$$\frac{1}{\lambda}\operatorname{tg}\lambda l = l \implies \operatorname{tg}\lambda l = \lambda l$$

پیدا شده $\longrightarrow \lambda l = 4.4934$

$$\frac{P}{EI} = \lambda^2 l^2 = (4.4934)^2 \implies P_{cr} = \frac{20.19\,EI}{l^2}$$

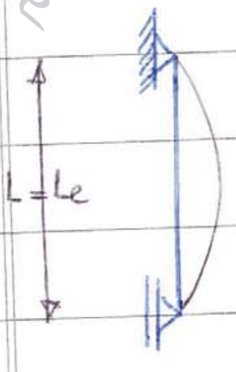
$$\implies P_{cr} = \frac{2.05\,\pi^2 EI}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

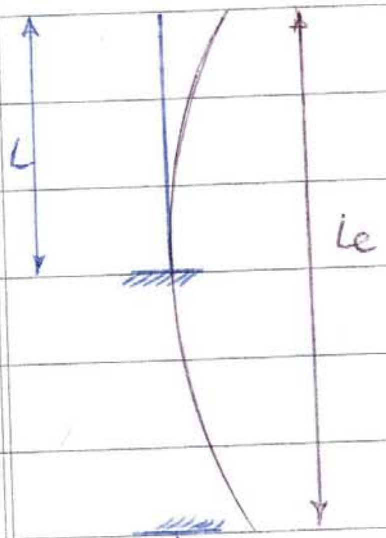
$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\,l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{2.05\,\pi^2 EI}{l^2}$$

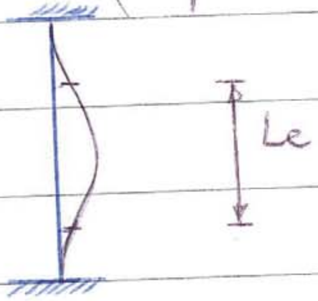


$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \qquad (L = L_e)$$



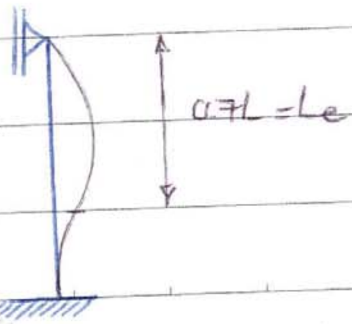
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4L^2} = \frac{\pi^2 E I}{(L_e)^2}$$

$$(2L = L_e)$$



$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 E I}{L^2} = \frac{\pi^2 E I}{(L_e)^2}$$

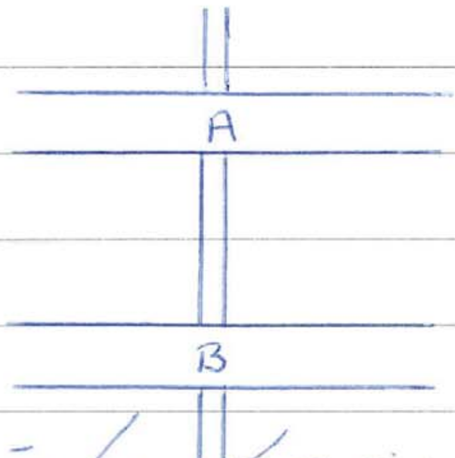
$$(\tfrac{1}{2}L = L_e)$$



$$P_{cr} = \frac{2.05\,\pi^2 E I}{L^2} = \frac{\pi^2 E I}{(L_e)^2}$$

effective length ⟵ (L_e) طول موثر

$L_e = kL$ ⟵ ضریب طول موثر k

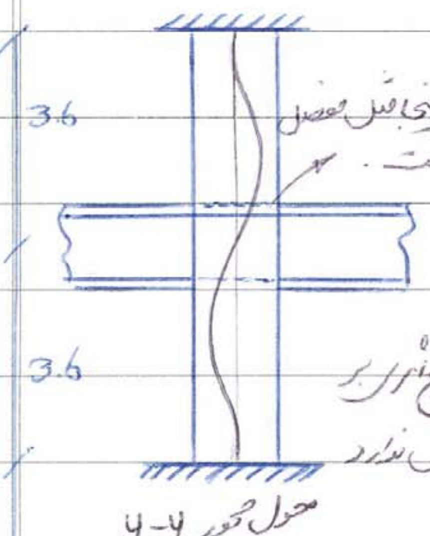


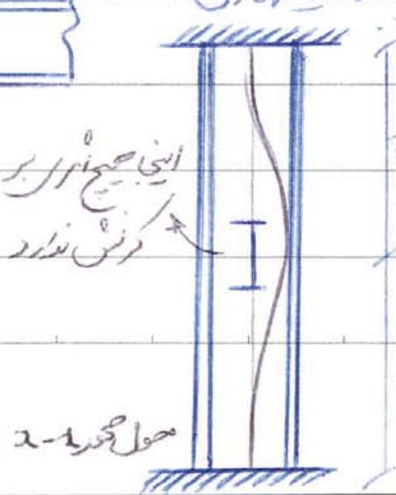
گراف اینک

در اینجا تکیه گاه ستون A,B نه گیردار است و نه مفصلی و به سختی تیر بستگی دارد و محدود اجازه چرخش به ستون می دهد.

$$\phi = \frac{\sum \left(\frac{EI}{L}\right)_{\text{تیر}}}{\sum \left(\frac{EI}{L}\right)_{\text{ستون}}}$$ ⟵ در فولاد

مثال: ستونی به طول 7.2m از نیمرخ IPB160 با دو انتهای گیردار مفروض است. جهت افزایش ظرفیت باربری آن در وسط ارتفاع ستون با یک تیر افقی دارای اتصال مفصلی طول آن را برای کمانش حول محور ضعیف مقطع نصف کردیم. با اعمال ضریب اطمینان برابر با 2 ظرفیت

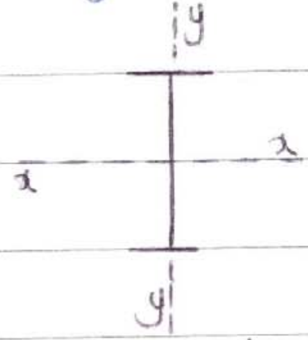




با بررسی مقطع ستون را بدست آوریم: $E = 2.1 \times 10^6 \ \mathrm{kg/cm^2}$ $\sigma_y = 2400 \ \mathrm{kg/cm^2}$

$IPB160$: $A = 54.3 \ \mathrm{cm^2}$ $I_x = 2490 \ \mathrm{cm^4}$ $I_y = 889 \ \mathrm{cm^4}$

$r_x = 6.78 \ \mathrm{cm}$ $r_y = 4.05 \ \mathrm{cm}$



الف) کمانش حول محور x داریم:

$L = 7.2 \ \mathrm{m}$ $L_e = \frac{1}{2} L = 3.6$

$$\lambda_x = \frac{L_e}{r_x} = \frac{360}{6.7} = 53.1$$

ب) کمانش حول محور y داریم:

$L = 3.6 \ \mathrm{m}$ $L_e = 0.7 L = 2.52 \ \mathrm{m}$

$$\lambda_y = \frac{L_e}{r_y} = \frac{252}{4.05} = 62.2$$

کنترل کننده کمانش محور y است چون λ آن بیشتر است.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2} = 5702 \ \mathrm{kg/cm^2}$$

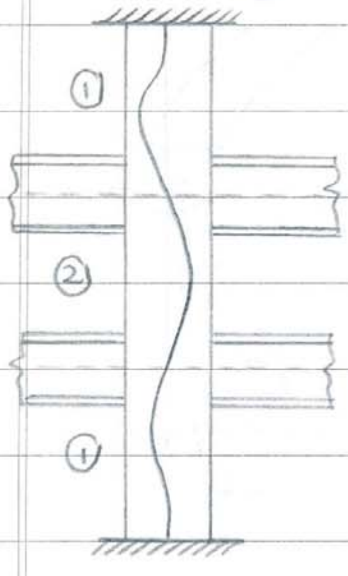
چون $\sigma_{cr} > 2400$ است پس معیار مقاومت حاکم است. پس:

$$P_{all} = \frac{2400 \times 54.2}{2} = 65.2 \times 10^3 \ \mathrm{kg}$$

* اگر ضریب را حساب نمی‌کردیم که می‌شد $\sigma_{cr} = 2498$ می‌شد که دوباره از σ_y بیشتر است و معیار مقاومت حاکم خواهد بود

σ_{cr} 2400

تمرین ۵ اگر به جای تیر لوله‌ای، دو لوله‌ای در فواصل 1/3 برای کاهش طول موثر
کمانش حول محور ضعیف قرار دهیم ظرفیت باربری ستون چه میزان تغییر می‌کند.



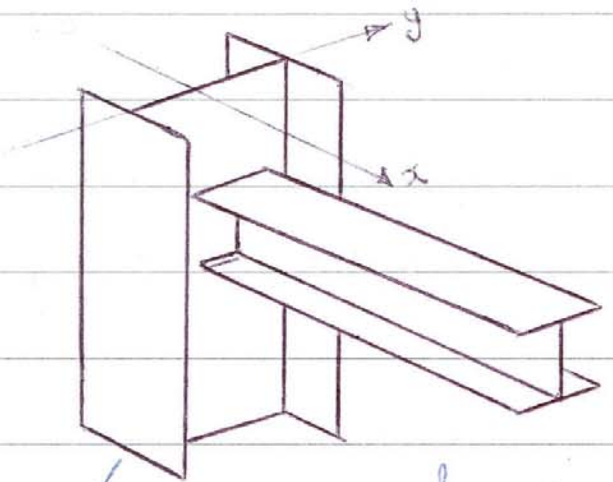
$$L = \tfrac{1}{3}(7.2) = 2.4$$

$$L_{e_1} = 0.7(L) = 1.68 \rightarrow \lambda_1 = \frac{1.68}{4.05\times10^{-2}} = 41.48$$

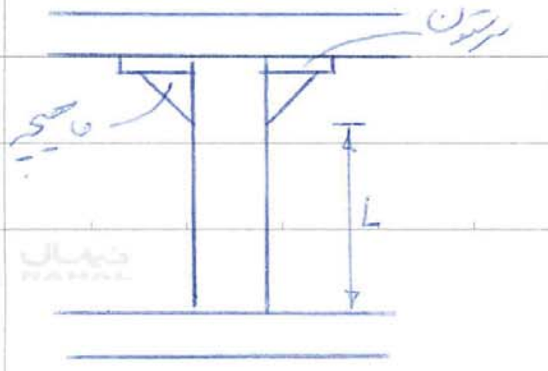
$$L_{e_2} = L = 2.4 \rightarrow \lambda_2 = \frac{2.4}{4.05\times10^{-2}} = 59.26$$

$$\sigma_{cr} = \frac{3.14^2(2.1\times10^6)}{59.26^2} = 5895.97$$

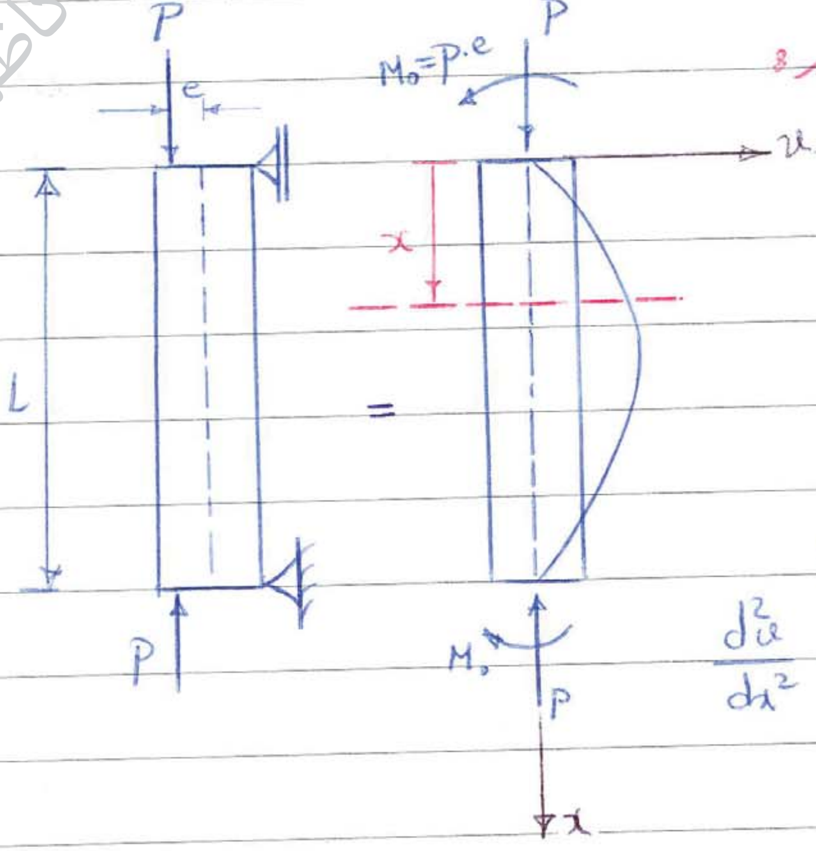
چون $\sigma_{cr} > 2400$ می‌باشد پس معیار مقاومت حاکم است.

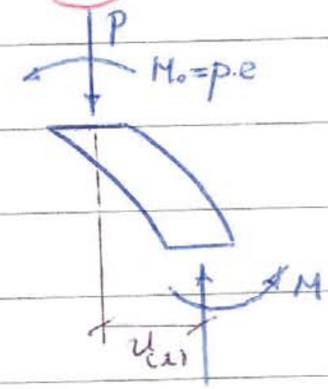


مهم‌ترین کار برای کاهش طول موثر است. برای این کار در $L_e = kL$ باید
k را کاهش داد و یا L.
کاهش k با سخت‌تر کردن تکیه‌گاه است.
راه کاهش L این است که از سر ستون دو ستون استفاده کرد (فاصله دو سقف را
کم نمی‌شود تغییر داد لذا با سر ستون طول L را کم می‌کنیم
اگر هم خواستیم L را کم‌تر کنیم باز ماهیچه تعبیه می‌کنیم



ستون‌ها تحت بار خارج از محور





$$M = -pu - pe$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{-pu-pe}{EI}$$

فرض : $\frac{P}{EI} = \lambda^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = -\lambda^2 e$$

$\Rightarrow$ جواب : $u_{(x)} = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x - e$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} u_{(0)} = 0 \Rightarrow B = e \\ u_{(l)} = 0 \Rightarrow A\sin\lambda l + e\cos\lambda l - e = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{e(1-\cos\lambda l)}{\sin\lambda l}$$

$$\Rightarrow A = \frac{e \times 2\sin^2\frac{\lambda l}{2}}{2\sin\frac{\lambda l}{2} \cdot \cos\frac{\lambda l}{2}} = e\,tg\frac{\lambda l}{2}$$

$$\Rightarrow u_{(x)} = e\,tg\frac{\lambda l}{2}\sin\lambda x + e\cos\lambda x - e$$

این رابطه برعکس روابط قبل تغییر شکل را در هر نقطه می‌دهد.

اینجا ما دنبال کمانش نیستیم. می‌خواهیم تنش ماکزیمم را برای طراحی بدست آوریم

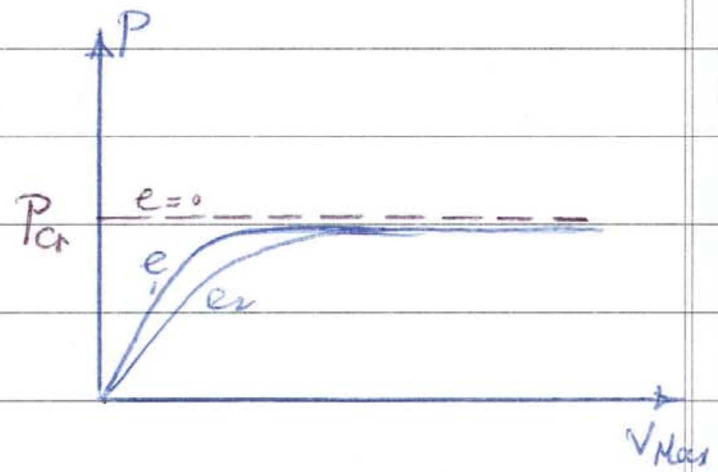
$$u_{Max}\Big|_{x=L/2} = e\left(tg\,\frac{\lambda l}{2}\,\sin\frac{\lambda l}{2} + C_1\frac{\lambda l}{2} - 1\right)$$

$$= e\left(\frac{\sin^2\frac{\lambda l}{2} + C_1^2\frac{\lambda l}{2}}{C_1\frac{\lambda l}{2}} - 1\right) = e\left(\frac{1}{C_1\frac{\lambda l}{2}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_{Max} = e\left(\sec\frac{\lambda l}{2} - 1\right)$$

$$\text{if } P=0 \rightarrow V_{Max}=0$$

$$\text{if } C_1\frac{\lambda l}{2}=0 \rightarrow V_{Max}=\infty$$



P هر چه بیشتر شود دیگر کاری به P نداریم و u_{Max} بدون احتیاج به P به سمت بی‌نهایت
حرکت می‌کند و افزایش می‌یابد.

برای e_1 و e_2 و ... و e_n در حالت $C_1\frac{\lambda l}{2}=0$ ، $V_{Max}=\infty$ است. یعنی P ثابت
می‌باشد

$$C_1\frac{\lambda l}{2}=0 \Rightarrow \frac{\lambda l}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \xrightarrow{n=0} \lambda l = \pi$$

$$\rightarrow \lambda^2 l^2 = \pi^2 \Rightarrow \qquad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

می‌بینیم بار بحرانی ستون دو سر مفصل بدون خروج از مرکزیت می‌باشد.

در این رابطه P و v غیرخطی است. لذا در یک تحلیل خطی نمی‌توان این رابطه را خطی فرض نمود.

$$v_{Max} = e\left[\sec\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - 1\right]$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow EI = \frac{L^2}{\pi^2} P_{cr}$$

$$v_{Max} = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right]$$

محاسبه تنش Max در ستون:

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A} + \frac{M \cdot C}{I} = \frac{P}{A} + \frac{P(e + v_{Max})C}{I} \qquad (I = Ar^2)$$

$$\rightarrow \sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(e + v_{Max})C}{r^2}\right]$$

$$\rightarrow \sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{\left(e + e\left(\sec\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - 1\right)\right)C}{r^2}\right]$$

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L_e}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)\right] \qquad (1)$$

$$\rightarrow \sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)\right]$$

حمید کاظم

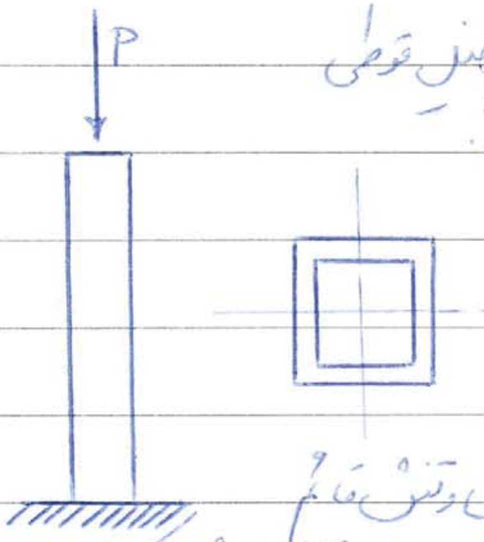
در رابطه (۱۱) به جای $I = Ar^2$ قرار می‌دهیم.

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2}\sec\left(\frac{L_e}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$

به این شکل رابطه Secant formula گویند. ($\sigma_{Max} > P/A$ پس)

در یک حرکت کوتاه برای تمام ستون‌ها که در این رابطه به جای L ، L_e را قرار می‌دهند

مثال: ستون تیر گیردار به طول 2.45 متر از یک مقطع قوطی $100 \times 100\ mm^2$ با مشخصات نشان داده شده مفروض شده است.



$A = 2284\ mm^2$ $\quad E = 2.1 \times 10^5\ Mpa$

$I = 3.33 \times 10^6\ mm^4$ $\quad \sigma_y = 240\ Mpa$

$r = 38.18\ mm$

مطلوبست: الف) تعیین بار کمانشی فشاری مجاز ستون و تنش قائم مربوطه با استفاده از رابطه اولر و ضریب اطمینان 2. ب) محاسبه تنش قائم حداکثر در ستون با فرض اعمال بار کمانشی مجاز تعیین شده در بند الف با خروج از محوریت $e = 19\ mm$

الف)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^5 \times 3.33 \times 10^6}{(2 \times 2450)^2} = 287.5\ KN$$

$$\sigma_{cr} = \frac{287.5 \times 10^3}{2284} = 126\ Mpa < 240$$

پس معیار کمانش حاکم است.

$$P_{all} = \frac{287.5}{2} = 143.75\ KN \qquad \sigma_{مجاز} = \frac{126}{2} = 63\ Mpa$$

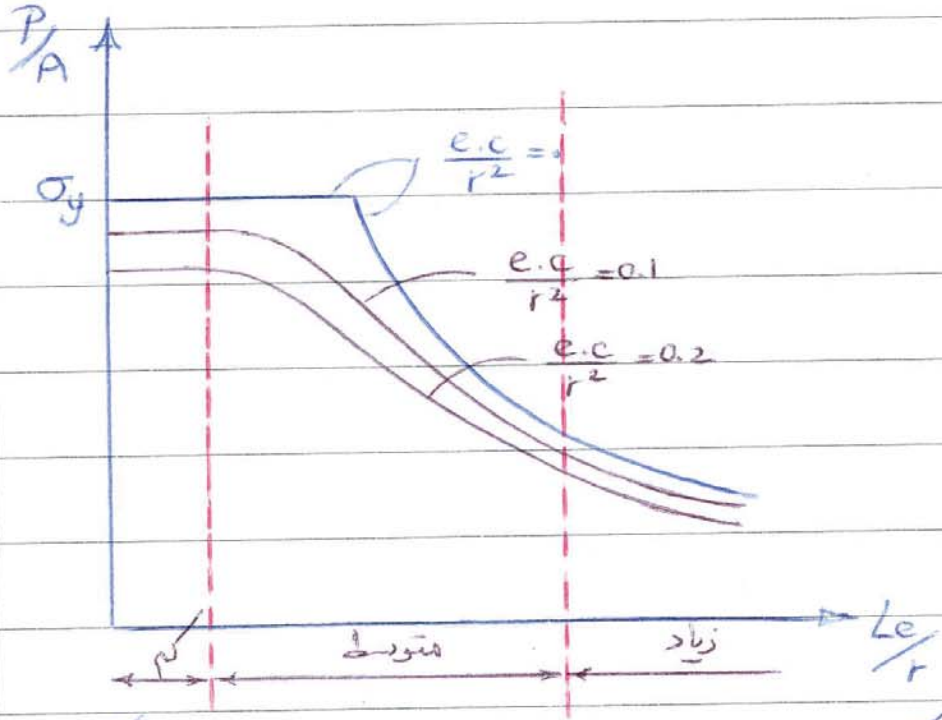
ب) $\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2} \sec \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right] = 155.32\ Mpa$

حواستان باشد بجای π، 180 نگذارید

رابطه سکانت را به شکل مقابل داریم:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{Max}}{1 + \frac{e.c}{r^2}\sec\left(\frac{L_e}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)}$$

$(\sigma_{Max} = \sigma_y)$



۱) برای $\frac{L_e}{r}$ های کم P_{cr} بزرگ را خواهیم داشت و در نتیجه sec به سمت ۱ میل کرده رابطه به شکل زیر است.

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{e.c}{r^2}\right)$$

در $\frac{L_e}{r}$ متوسط اثر لاغری دیده می‌شود ولی اثر خروج از مرکزیت داریم.

۲) برای $\frac{L_e}{r}$ های زیاد می‌بینیم منحنی‌ها منطبق می‌شوند. پس در $\frac{L_e}{r}$ های زیاد

اثر خروج از مرکزیت از بین می‌رود.

نتیجه: پس کاربرد رابطه سکانت برای لاغری‌های متوسط است.

$$\begin{cases} \frac{Le}{r} < 60 \longrightarrow \text{کم} \\ 60 < \frac{Le}{r} < 100 \longrightarrow \text{متوسط} \longrightarrow \text{رابطه سکانت} \\ \frac{Le}{r} > 100 \longrightarrow \text{زیاد} \longrightarrow \text{رابطه اویلر} \end{cases}$$

* باید مقدار خروج از مرکزیت معلوم باشد تا بتوان از رابطه سکانت در محدوده متوسط استفاده نمود.

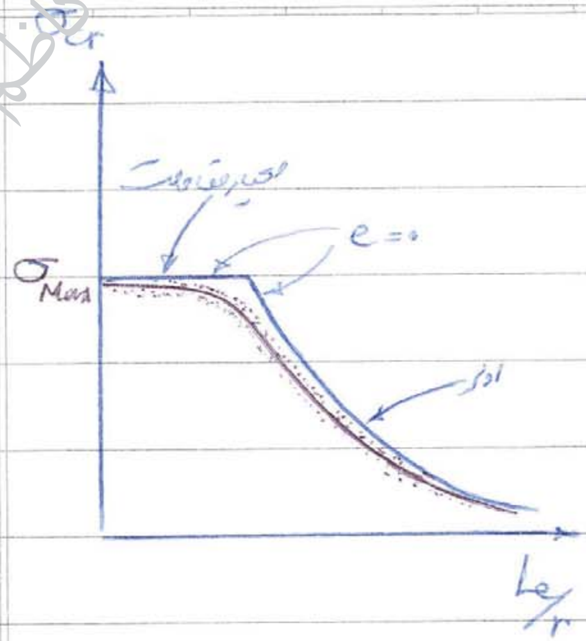
طرح ستون‌ها

الف) ستون‌های تحت بار محوری (بدون خروج از مرکزیت):

در واقعیت همگن بودن مصالح، ارتجاعی بودن و مستقیم بودن محور مرکزی تأمین نمی‌شود. بنابراین عموماً تمام روابط استفاده شده در طرح ستون‌ها بر اساس روابط تجربی است.

۱) انحنای اولیه و خروج از مرکزیت اولیه اثر قابل ملاحظه‌ای بر ظرفیت باربری ستون دارد.

۲) برای لاغری‌های زیاد ($\frac{Le}{r} > 120$) رابطه اویلر می‌تواند مقاومت نهایی ستون را تخمین بزند.



منحنی نمایش داده شده حاصل از آزمایشات می باشد.

۱) برای L_e/r های زیاد ظرفیت باربری ستون (σ_{cr}) بستگی به E می باشد.

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

۲) برای L_e/r های کم ظرفیت باربری ستون به σ_y بستگی دارد.

۳) برای L_e/r های متوسط ظرفیت باربری ستون هم به E و هم به σ_y بستگی دارد.

برای ستون های بلند و کوتاه به روابط تجربی نیاز نداریم. لذا برای ستون های L_e/r های متوسط داریم:

نمونه روابط تجربی:

۱) رابطه رانکین - گوردون (Rankin_Gordon):

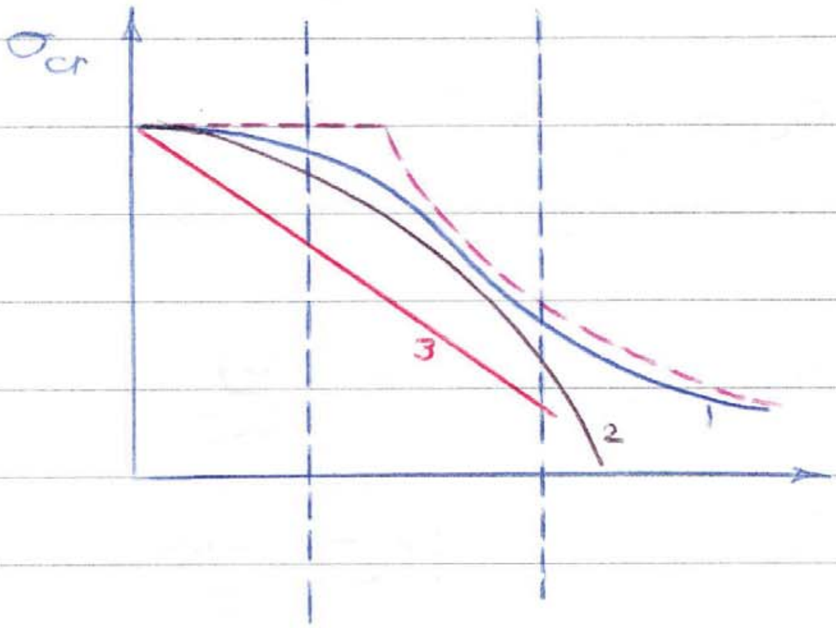
$$\sigma_{cr}=\frac{\sigma_{Max}}{1+k\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$$

۲) رابطه سهمی جانسون (Johnston):

$$\sigma_{cr}=\sigma_{Max}\left[1-k\left(\frac{L_e}{r}\right)^2\right]$$

۳) روابط خطی:

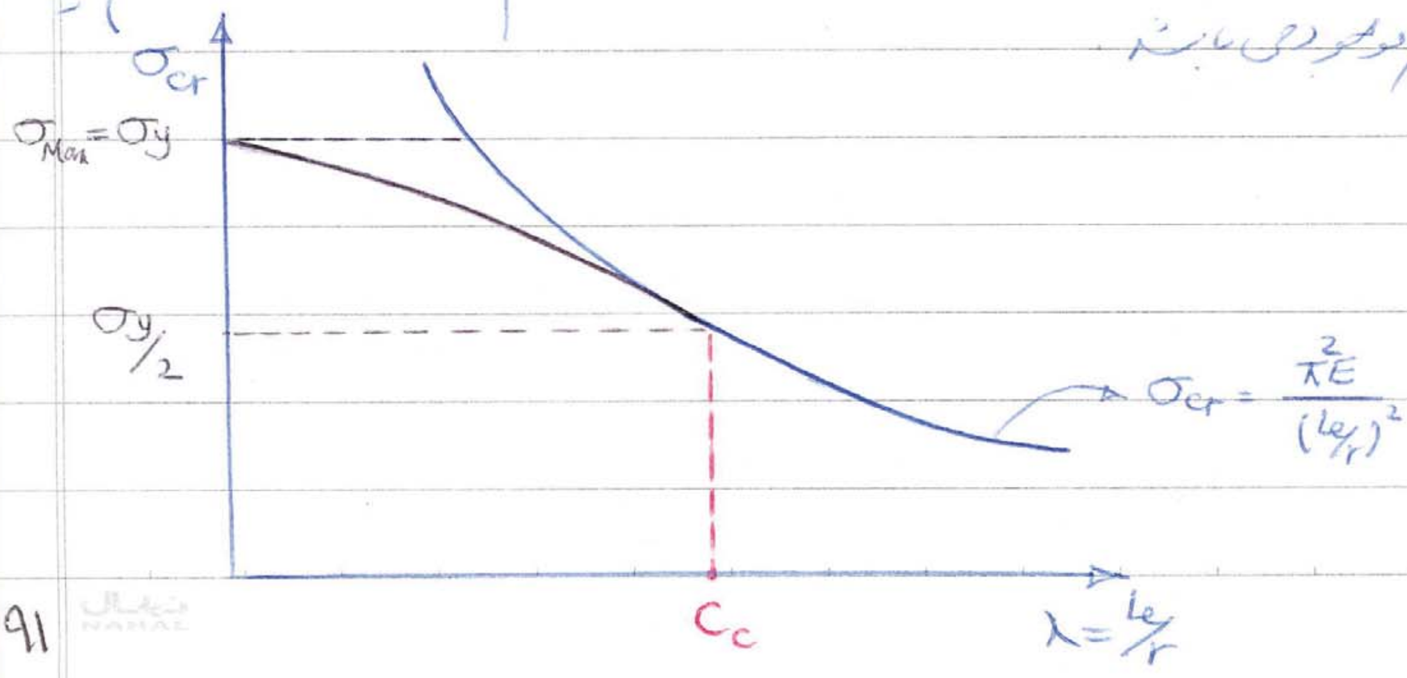
$$\sigma_{cr} = \sigma_{Max} - k\left(\frac{L_e}{r}\right)$$



روابط آیین‌نامه‌ای برای طرح ستون‌های فولادی:

AISC : American Institute of Steel Construction

روابط گفته شده در AISC می‌باشد که در مبحث دهم مقررات ملی ساختمان ایران نیز موجود می‌باشد.



برای ستون های کوتاه و متوسط یک منحنی سهمی درجه دو است را پیشنهاد می کنند. این ویژگی که بر منحنی اویلر مماس شود. نقطه مماس نقطه $\sigma_y/2$ می باشد. لاغری متناظر با $\sigma_y/2$ را C_c نامیده اند.

سهمی : $\sigma_{cr} = \sigma_y - K\lambda^2 \quad for \quad \lambda \leq C_c$

اویلر : $\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad for \quad \lambda \geq C_c$

رابطه ۱ : $\dfrac{\sigma_y}{2} = \sigma_y - K C_c^2 \Rightarrow K = \dfrac{\sigma_y}{2C_c^2}$

رابطه ۲ : $\dfrac{\sigma_y}{2} = \dfrac{\pi^2 E}{C_c^2} \Rightarrow \boxed{C_c^2 = \dfrac{2\pi^2 E}{\sigma_y}}$

$$\begin{cases} for \ \lambda \leq C_c & \sigma_{cr} = \sigma_y\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] \\ for \ \lambda \geq C_c & \sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad C_c \leq \lambda \leq 200 \end{cases}$$

$\sigma_{all} = \dfrac{\sigma_{cr}}{F.S.}$ ضریب اطمینان :

$for \ \lambda \geq C_c \longrightarrow F.S. = 1.92$ ستون های بلند

$for \ \lambda \leq C_c \longrightarrow F.S. = \dfrac{5}{3} + \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{\lambda}{C_c}\right) - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\lambda}{C_c}\right)^3$

ستون های کوتاه یا متوسط

$$\begin{cases} for \ \lambda \leq C_c \longrightarrow \sigma_{all} = \dfrac{\sigma_y}{F.S.}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] \\ for \ \lambda \geq C_c \longrightarrow \sigma_{all} = \dfrac{\pi^2 E}{1.92\lambda^2} \end{cases}$$

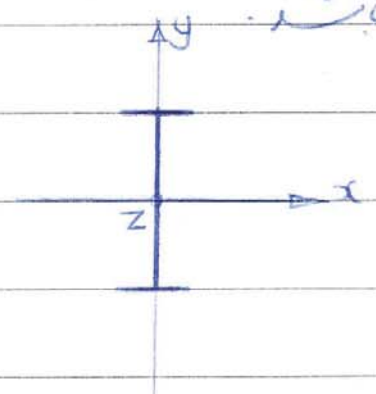
$A_{req} \geq \frac{P}{\sigma_{all}}$. A یا σ ، درهم وابسته اند. پس باید از روش صحیح و خطا استفاده کنیم.

مثال: ستونی از نیمرخ فولادی IPB220 با دو انتهای مفصلی و به طول 7.3m مفروض است. بار محوری مجاز P را در دو حالت زیر محاسبه کنید.

الف) به جز دو انتهای مفصلی، ستون در طول خود هیچگونه مهاری نداشته باشد.

ب) یک مهاری با تکیه گاه مفصلی در وسط ارتفاع ستون از حرکت نقطه وسط در صفحه xz جلوگیری نماید. فرض می کنیم این مهاری هیچ تاثیری در حرکت نقطه وسط در صفحه yz نداشته باشد.

$$\begin{cases} A = 91\ cm^2 \\ r_x = 9.42\ cm \\ r_y = 5.59\ cm \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_y = 2500\ kg/cm^2 \\ E = 2\times10^6\ kg/cm^2 \end{cases}$$



الف)

$$\begin{cases} \lambda_x = \frac{730}{9.42} = 77.49 \\ \lambda_y = \frac{730}{5.59} = 130.6\ \checkmark \end{cases}$$

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_y} \rightarrow C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = 125.7$$

$$\lambda_y \geq C_c \xrightarrow{\text{اولر}} \sigma_{all} = \frac{\pi^2 E}{1.92\ \lambda^2} = 602.8\ kg/cm^2 \rightarrow P_{all} = 54.85\ ton$$

ب)

$$\begin{cases} \lambda_x = \frac{730}{9.42} = 77.49\ \checkmark \\ \lambda_y = \frac{365}{5.59} = 65.3 \end{cases}$$

$$C_c = 125.7 \rightarrow \lambda_x < C_c$$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S.}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] \qquad \lambda/C_c = 0.62$$

$$F.S. = 5/3 + 3/8\left(\frac{\lambda}{C_c}\right) - \frac{1}{8}\left(\lambda/C_c\right)^3$$

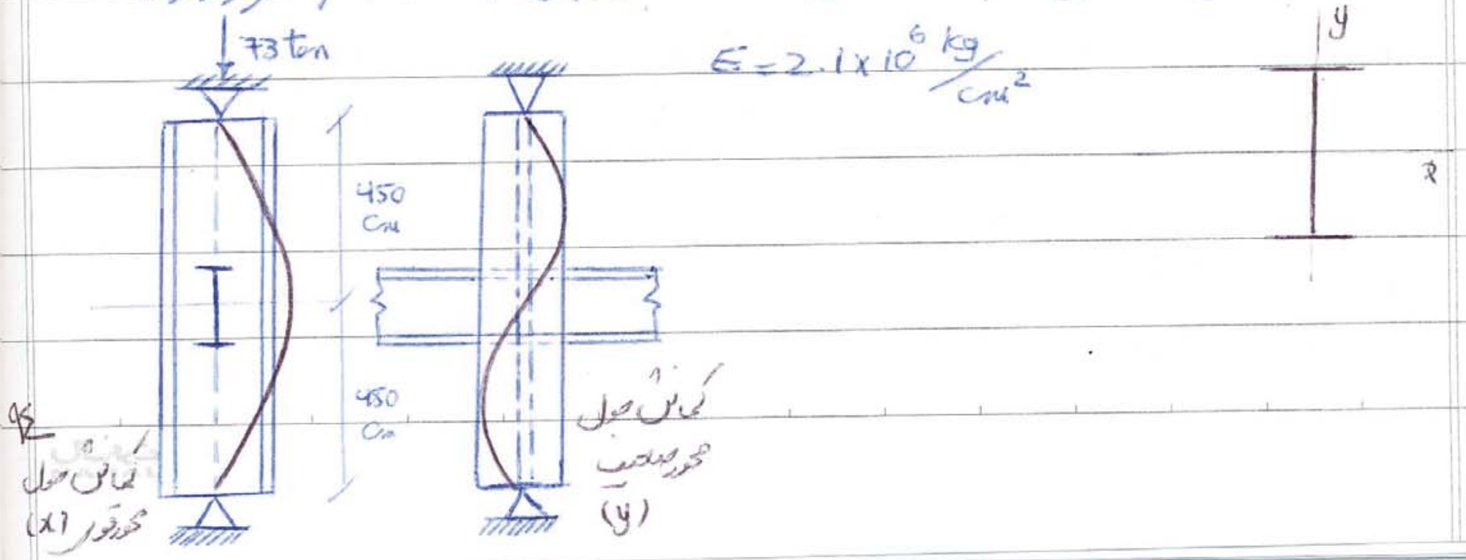
$$\rightarrow F.S. = 1.87 \qquad \Rightarrow \sigma_{all} = 1083\ kg/cm^2$$

$$P_{all} = 1083 \times 91 = 98.55\ ton$$

* با استفاده از روابط بدست آمده می‌توانیم تنش فشاری مجاز را برای هر نوع فولاد و هر مقدار $\lambda = kl/r$ بدست آوریم. روش کار به این ترتیب است که ابتدا با استفاده از σ_y، مقدار C_c را حساب می‌کنیم. برای مقادیر $\lambda = kl/r$ بزرگتر از C_c و کوچکتر از C_c تنش مجاز را از روابط اثبات شده بدست می‌آوریم.

مثال: مطلوبست طراحی ستونی به طول 9m از نیمرخ IPB از فولاد نرمه ساختمانی با $\sigma_y = 2400\ kg/cm^2$. این ستون در بالا و پایین مفصلی بوده و توسط تیرهای جانبی از کمانش حول محور ضعیف در وسط ارتفاع جلوگیری شده است. اتصال این تیرها به ستون مفصلی بوده و ستون تحت بار محوری $P = 73\ ton$ قرار دارد.

$$E = 2.1 \times 10^6\ kg/cm^2$$



حمید کاظم

$$\begin{cases} (L_e)_x = k.L_x = 900\,cm \\ (L_e)_y = k.L_y = 450\,cm \end{cases}$$

۱) فرض تنش مجاز اولیه:

$$\sigma_{all} = 800\ kg/cm^2$$

۲) انتخاب مقطع ستون:

$$A_{req} = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{73\,ton}{800} = 91.25\,cm^2$$

Use IPB240 ($A_{موجود} = 106\,cm^2$)

۳) محاسبه تنش مجاز برای IPB240:

$$\begin{cases} A = 106\,cm^2 \\ r_x = 10.3\,cm \\ r_y = 6.08\,cm \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_x = \dfrac{(L_e)_x}{r_x} = \dfrac{900}{10.3} = 87.38 \checkmark \\ \lambda_y = \dfrac{(L_e)_y}{r_y} = \dfrac{450}{6.08} = 74.01 \end{cases}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = 131.4 \qquad C_c > \lambda_x$$

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^3 = 1.88$$

$$\rightarrow \sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S.}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] = 994\ kg/cm^2$$

۴) انتخاب مقطع:

$$A_{req} = \frac{73 \times 10^3}{994} = 73.44\,cm^2$$

Use IPB 200 $\begin{cases} A = 78.1\,cm^2 \\ r_x = 8.54\,cm \\ r_y = 5.07\,cm \end{cases}$

$$\begin{cases} \lambda_x = 105.4 \checkmark \\ \lambda_y = 88.8 \end{cases} \qquad C_c > \lambda_x$$

$$F.S = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^3 \Rightarrow \sigma_{all} = 859 \ kg/cm^2$$

۶) انتخاب مقطع :

$$A_{req} = \frac{73 \times 10^3}{859} = 85 \ cm^2$$

$$\text{Use IPB220} \begin{cases} A = 91 \ cm^2 \\ r_x = 9.43 \ cm \\ r_y = 5.59 \ cm \end{cases}$$

۷) تنش مجاز :

$$\sigma_{all} = 931 \ kg/cm^2$$

۸) انتخاب مقطع :

$A_{req} = 78.4$

Use IPB220 $\rightarrow$ O.k.

این مراحل را تا جایی ادامه می‌دهیم که در اختلاف تنش مجاز فرضی با تنش مجاز بدست آمده خیلی کم باشد.

800 , 990 ✗

859 , 931 ✓

حمید کاظم

ب) ستون‌های تحت بار با خروج از مرکزیت:

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A} + \frac{M.C}{I} = \frac{P}{A} + \frac{P(e + y_{Max})C}{I}$$

این رابطه برای ستون‌های کوتاه و لاغر استفاده می‌کنیم تا ν_{Max} صفر شود. اگر ستون دارای لاغری زیادی باشد تیر ستون گویند. تیر ستون از بحث ما خارج است.

دو روش برای تعیین σ_{all}:

۱) σ_{all} برای ستون تحت بار محوری بدون خروج از مرکزیت براساس λ_{Max} ستون $\left(\frac{Le}{r_{min}}\right)$ بدون توجه به صفحه خمش

$$\frac{P}{A} + \frac{M.C}{I} \leqslant (\sigma_{all})_a$$

۲)

$$\frac{P}{A} + \frac{M.C}{I} \leqslant \sigma_{all}$$

$$\rightarrow \frac{P/A}{(\sigma_{all})_a} + \frac{\frac{M.C}{I}}{(\sigma_{all})_b} \leqslant 1$$

محوری ← a: axial

خمشی ← b: bending

* شماره ۱ محافظه‌کارانه‌تر است پس غیراقتصادی‌تر می‌باشد.

برای خمش کج:

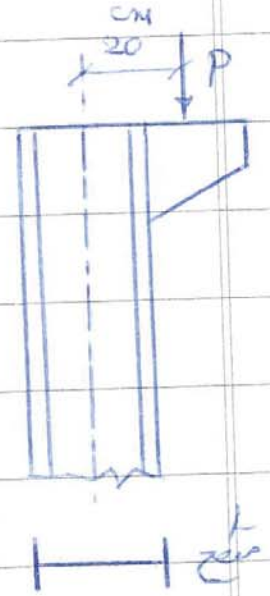
$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_a} + \frac{\frac{M_z \cdot y_{Max}}{I_z} + \frac{M_y \cdot Z_{Max}}{I_y}}{(\sigma_{all})_b} \leqslant 1$$

* برای شماره ۱ و ۲ λ برابر $\frac{Le}{r_{min}}$ می‌باشد. بدون توجه به صفحه خمش.

مثال: از یک پروفیل فولادی با مشخصات زیر، ستونی با طول موثر 4.5m ساخته شده ... حداکثر بار P که می‌تواند با خروج از مرکزیت 20cm حول محور قوی توسط این ستون تحمل شود

$$\begin{cases} \sigma_y = 2500\ kg/cm^2 \\ E = 2\times10^6\ kg/cm^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 94.8\ cm^2 \\ r_x = 13.16\ cm \\ r_y = 4.98\ cm \\ S_x = 1058\ cm^3 \end{cases}$$

$$(\sigma_{all})_{\text{خمشی}} = 1500\ kg/cm^2$$



$$\lambda_y = \frac{L_e}{r_y} = \frac{4.5\times10^2}{4.98} = 90.36$$

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_y} = \frac{2\pi^2\times2\times10^6}{2500}$$

$$\rightarrow C_c = \frac{2\pi\times10^3}{50} = 125.66 \rightarrow C_c > \lambda_y$$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S.}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] \qquad \frac{\lambda}{C_c} = 0.719$$

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^3 = 1.89$$

$$\rightarrow \sigma_{all} = \frac{2500}{1.89}\left[1-\frac{1}{2}(0.719)^2\right] = 980.85\ \frac{kg}{cm^2}$$

روش اول:

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leqslant \sigma_{all} \rightarrow \frac{P}{A} + \frac{20P}{S_x} \leqslant \sigma_{all}$$

$$\rightarrow \frac{P}{94.8} + \frac{20P}{1058} \leqslant 980.85 \rightarrow P \leqslant 33303\ kg$$

روش دوم:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_a} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{all})_b} \leq 1$$

$$\rightarrow \frac{P}{980.85 \times 94.8} + \frac{20P}{1500 \times 1058} \leq 1$$

$$\rightarrow P \leq 42813.96\ kg$$

مقدار P در روش اول محافظه‌کارانه‌تر است.

حمید کاظم

فصل چهارم :

معیارهای گسیختگی مصالح (تسلیم و شکست)
Failure Criterias (Yield & Fracture)

وقتی سازه را طراحی می‌کنیم همیشه این سؤال پیش می‌آید که حد خرابی کجاست ؟

به معیارهایی نیاز داریم تا به این سؤال جواب دهند

این معیارها را به ۳ جهت نیاز داریم :

۱) آنالیز اجسام در حالت بحرانی

۲) طراحی اجسام در حالت بحرانی

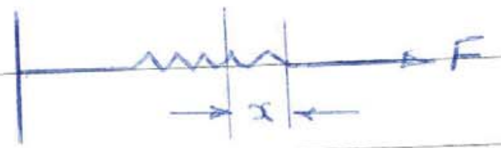
۳) تفسیر نمونه‌های خرابی

متأسفانه باید خاطرنشان کنیم که یک معیار گسیختگی واحد وجود ندارد . متأسفانه این معیارها انطباق کاملی هم ندارند .

انرژی کرنشی ارتجاعی (elastic strain energy) :

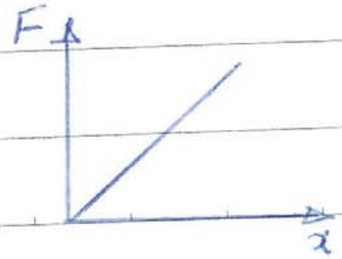
انرژی : توانایی انجام کار .

انرژی کرنشی : انرژی ناشی از تغییر شکل جسم است ، ناشی از کرنش جسم است .



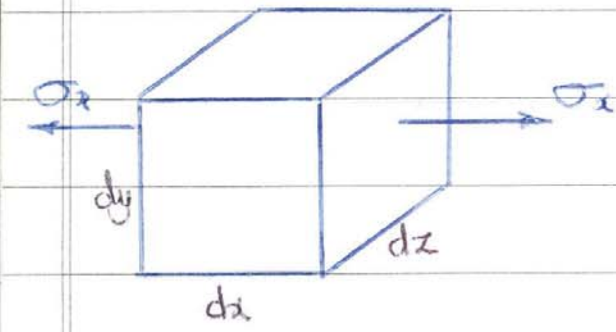
$F = kx$

$\text{انرژی} = \frac{1}{2} k x^2$



کرنش ضرب در طول می شود تغییر شکل و تنش ضرب در سطح می شود نیرو. ضرب نیرو در تغییر شکل انرژی را می دهد.

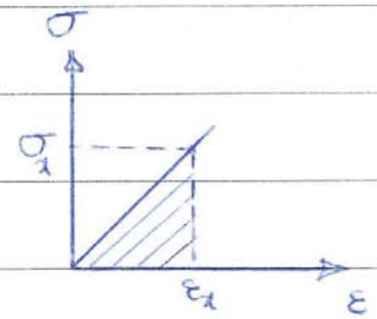
الف) المان تحت تنش تک محوری:



$$dU = \frac{1}{2}\underbrace{(\sigma_x \cdot dy \cdot dz)}_{\text{نیرو}} \cdot \underbrace{(\varepsilon_x \cdot dx)}_{\text{تغییر شکل}}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \cdot dx\,dy \cdot dz$$

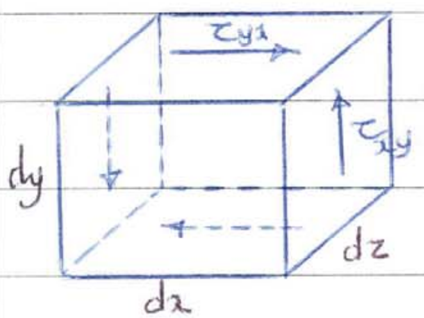
$U_0 = \frac{dU}{dV}$ → چگالی انرژی کرنشی است.

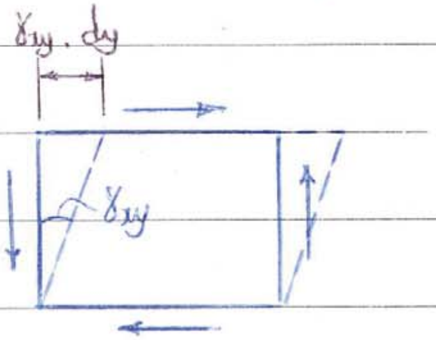


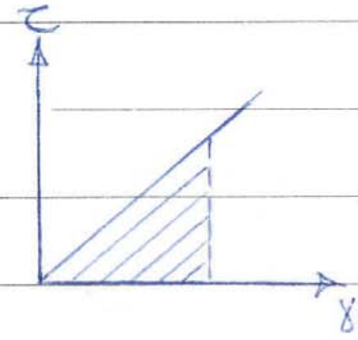
$$\rightarrow U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_x \cdot \varepsilon_x = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$

چگالی انرژی کرنشی است که عبارتست از سطح زیر نمودار σ-ε .

ب) المان تحت تنش برشی:







$$dU = \frac{1}{2}(\tau_{xy} \cdot dx \cdot dz) \cdot (\gamma_{xy} \cdot dy) = \frac{1}{2}\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} \cdot dV$$

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\cdot\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

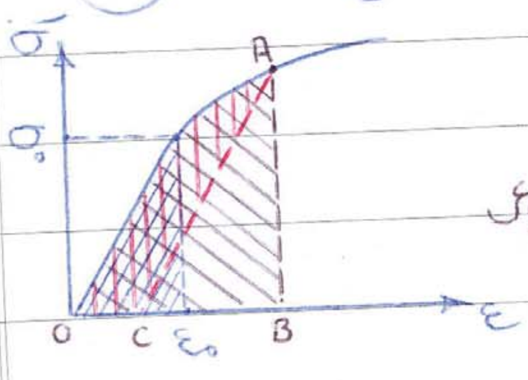
ج) تنش‌های چند محوری:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x\cdot\varepsilon_x + \sigma_y\cdot\varepsilon_y + \sigma_z\cdot\varepsilon_z) + \frac{1}{2}(\tau_{xy}\cdot\gamma_{xy} + \tau_{yz}\cdot\gamma_{yz} + \tau_{zx}\cdot\gamma_{zx})$$

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\cdot\sigma_y + \sigma_y\cdot\sigma_z + \sigma_z\cdot\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$

ضریب ظرفیت مصالح (Modulus of Resilience):

قابلیت مصالح برای جذب یا ذخیره انرژی بدون ایجاد تغییر شکل دائمی را ضریب ظرفیت گوییم. (σ_0 حد خطی مصالح (حد تناسب))



$$U_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E}$$ ضریب ظرفیت ارتجاعی

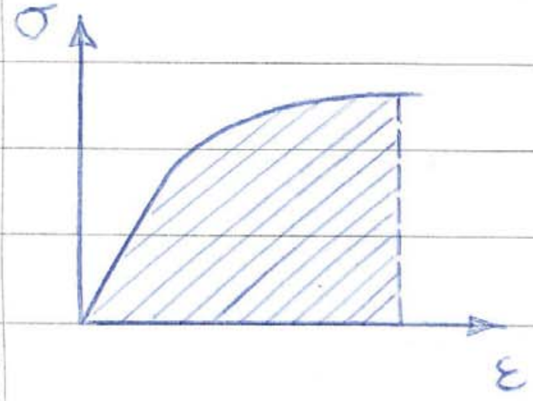
اگر از نقطه A باربرداری کنیم به مقدار سطح زیر نمودار انرژی (سایه‌زده) در جسم ذخیره می‌شود. اگر باربرداری کنیم به اندازه سطح قرمز رنگ انرژی تلف می‌شود. اگر دوباره بارگذاری کنیم حالت خطی محدود بیشتر می‌شود و ضریب ظرفیت مقدارش بیشتر می‌گردد که به اندازه کل سطح می‌باشد. AISC

به این ضریب ظرفیت، ضریب ظرفیت ارتجاعی می‌گویند

طاقت مصالح (چقرمگی) Toughness :

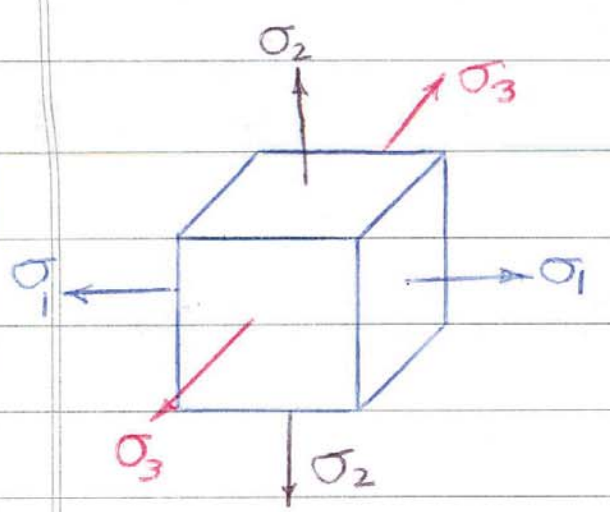
عبارتست از کل انرژی جذب شده توسط واحد حجم مصالح وقتی تا نقطه گسیختگی بارگذاری شود.

* در واقع در واحد حجم گسست شد.



انرژی های تغییر حجمی و تغییر شکل برشی :

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{xz}^2\right)$$



$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right]$$

انرژی بوجود آمده در المان به دو بخش تقسیم می شود :

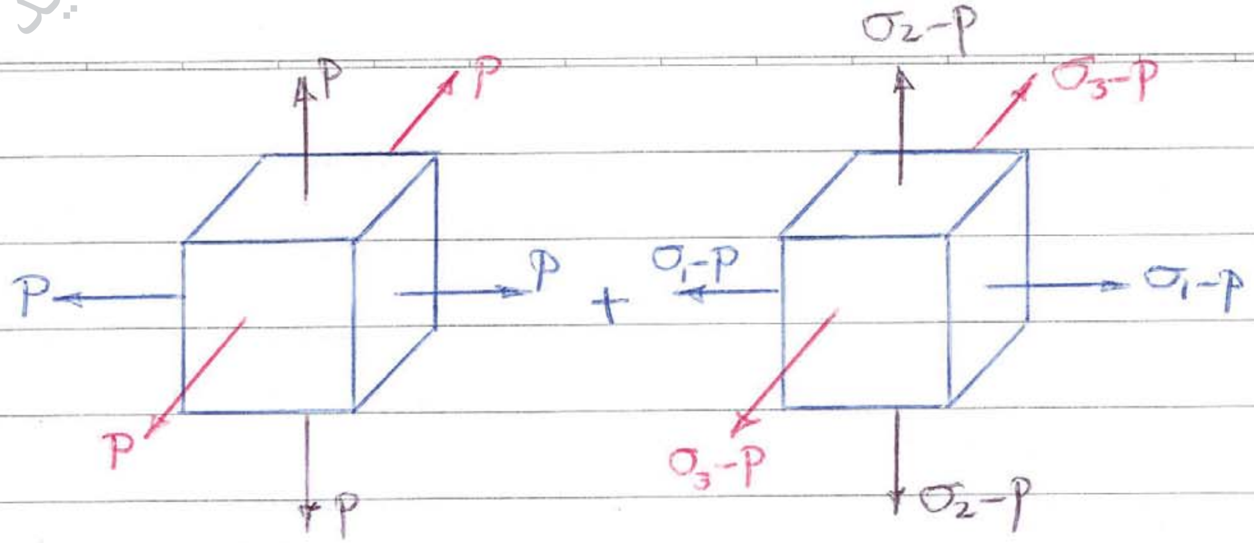
۱) بخشی صرف تغییر حجم المان می شود

۲) بخشی صرف تغییر شکل برشی می باشد.

حال باید ببینیم سهم هر بخش از انرژی چیست !

المان بالا را با جمع دو وضعیت زیر نشان می دهیم :

حمید کاظم



شماره (1) فقط دارای تغییر حجم است چون دایره صورتش نقطه است. اما شماره (2) هم می‌تواند تغییر شکل برشی و هم می‌تواند تغییر شکل حجمی داشته باشد. اما ما می‌خواهیم تغییر شکل حجمی‌اش صفر باشد.

$$\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P & 0 & 0\\ 0 & P & 0\\ 0 & 0 & P\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sigma_1-P & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2-P & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3-P\end{bmatrix}$$

تانسور تنش تغییر حجم (اتساعی) — dilatational stress tensor

تانسور تنش کروی — spherical stress tensor

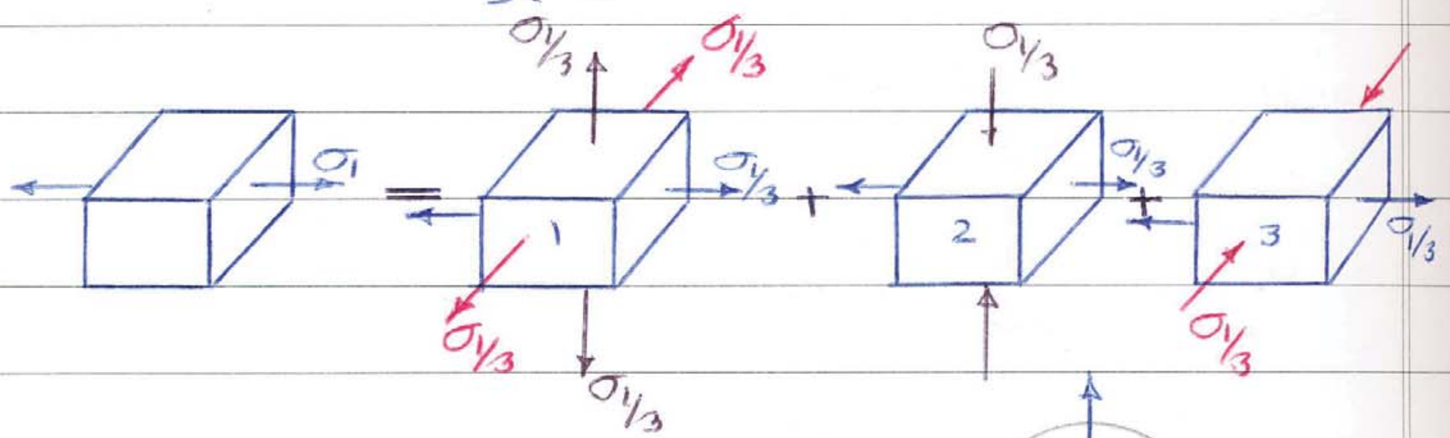
تانسور تنش انحرافی (تغییر شکل) — deviation (distorsion) stress tensor

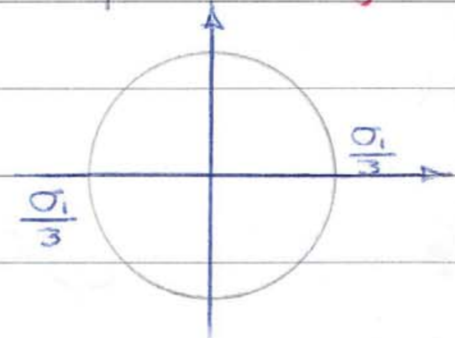
$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)_{dis}=0 \rightarrow \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1-P+\sigma_2-P+\sigma_3-P)=0$$

$$\Rightarrow P=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$

با این P المان 2 تغییر شکل حجمی نخواهد داشت.

* ماتریس را به تانسور P تانسور تنش منحرف تجزیه کنید.





$$\Delta V_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$
$$= \frac{1-2\nu}{E}\left(\frac{\sigma_1}{3} - \frac{\sigma_1}{3}\right) = 0$$

$$U_{0\,(dil.)} = \frac{1}{2E}\left[(p^2+p^2+p^2) - 2\nu(p\cdot p + p\cdot p + p\cdot p)\right]$$

$$= \frac{3(1-2\nu)}{2E}\, p^2$$

$$\rightarrow \quad U_{0\,(dil.)} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

انرژی تغییر حجم

$$U_{0\,(dis.)} = U_{0\,کل} - U_{0\,(dil.)}$$

انرژی تغییر شکل برشی

$$= \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2\right]$$

حالت خاص (المان تحت تنش سه محوری):

حمید کاظم

$$U_{0,\text{کل}} = \frac{1}{2E}\sigma_1^2$$

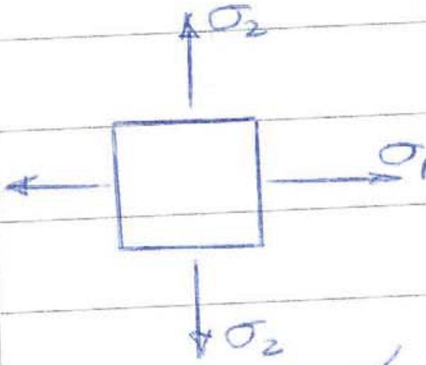
$$U_{0,dil} = \frac{1-2\nu}{6E}\sigma_1^2$$

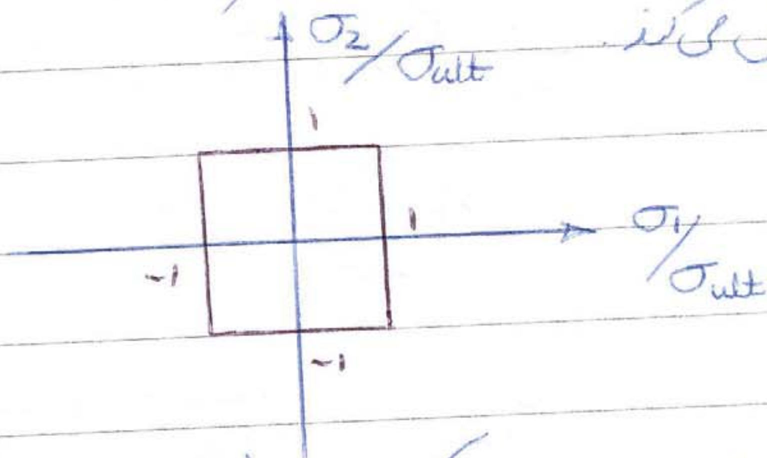
$$U_{0,dis} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_1^2$$

۶) فرضیه تنش قائم حداکثر (Maximum Normal stress Theory)

توسط آقای رانکین بیان شده است

می‌گوید هرگاه بزرگترین تنش قائم در المان به حد بحرانی برسد المان گسیخته خواهد شد. مقدار بحرانی عبارت است از حداکثر تنشی که در آزمایش کشش یا فشار المان تحمل می‌کند.





اگر σ_1 و σ_2 را بدست آوردیم، نقطه در داخل مربع افتاد جسم گسیخته نمی‌شود.
اگر روی مربع بود در آستانه گسیختگی است (آستانه زوال) است.
اگر بیرون مربع بود گسیخته می‌شود.

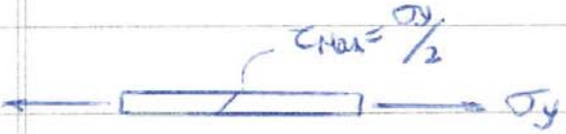
* آزمایشات نشان داده است که در مورد مصالح شکننده در حالت کششی (محوری) این فرضیه صادق است.

فرضیه تنش برشی حداکثر (Maximum shearing stress Theory)

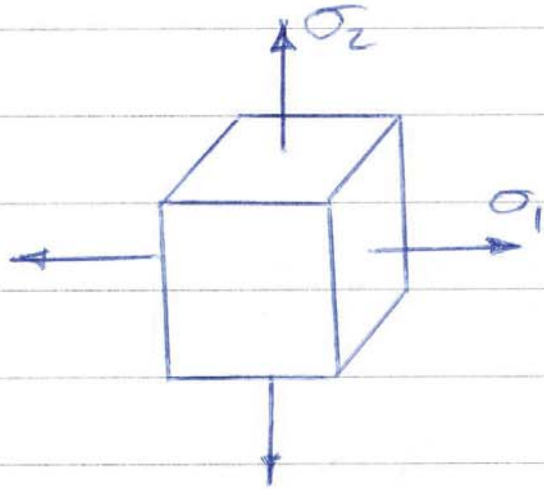
توسط آقای Treska بیان شده است.

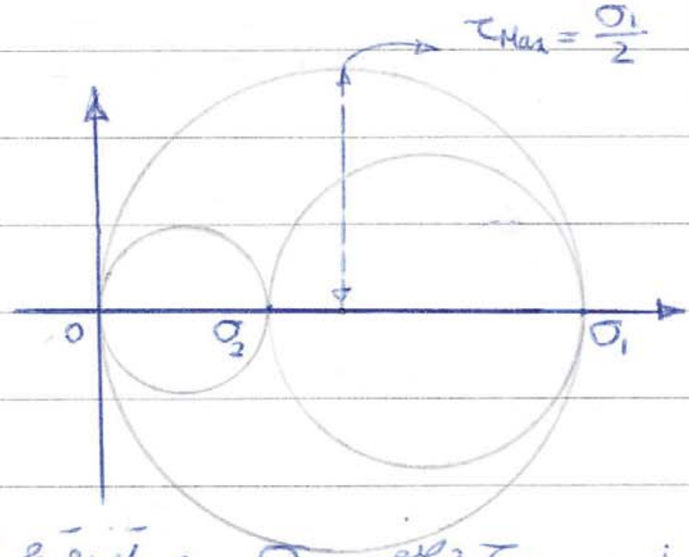
در مورد مصالح شکل پذیر اگر تنش برشی Max (τ_{Max}) به حد بحرانی برسد مصالح گسیختگی دارد.

مقدار بحرانی تنش برشی، تنش برشی Max در عضو کشش و فشار یا کشش ساده در لحظه گسیختگی می باشد.

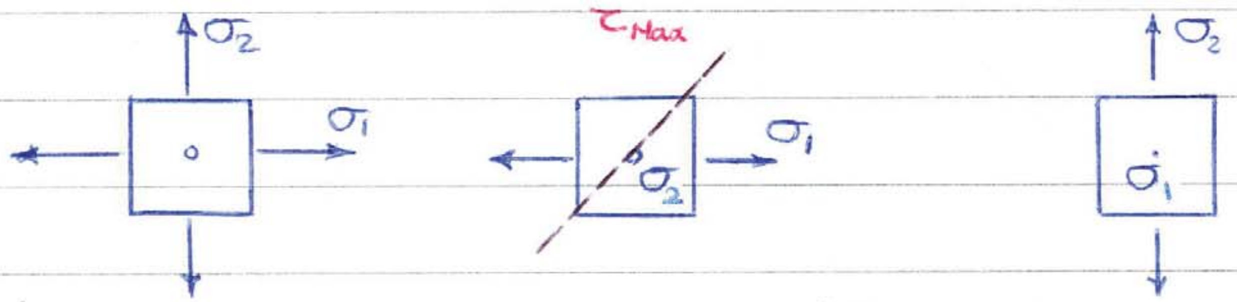


الف) $\sigma_1 . \sigma_2 > 0$



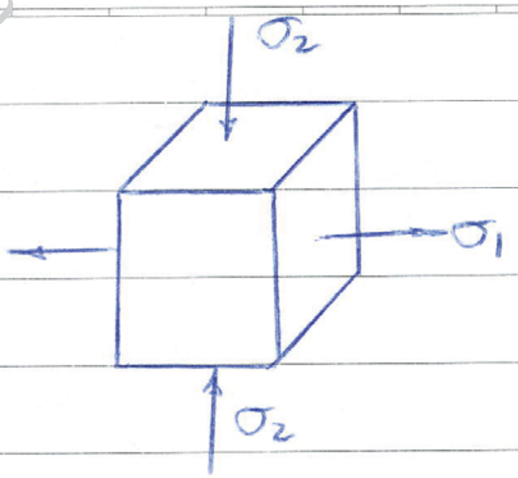


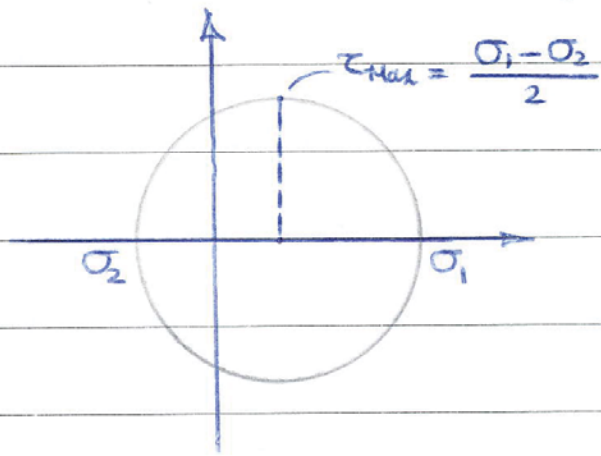
پس τ_{Max} در صفحه σ_1 و 0 اتفاق می افتد.



$$\begin{cases} \text{if } |\sigma_1| > |\sigma_2| \longrightarrow \tau_{Max} = \dfrac{|\sigma_1|}{2} \leqslant \dfrac{\sigma_y}{2} \longrightarrow |\sigma_1| \leqslant \sigma_y \\ \text{if } |\sigma_1| < |\sigma_2| \longrightarrow \tau_{Max} = \dfrac{|\sigma_2|}{2} \leqslant \dfrac{\sigma_y}{2} \longrightarrow |\sigma_2| \leqslant \sigma_y \end{cases}$$

ب) $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$

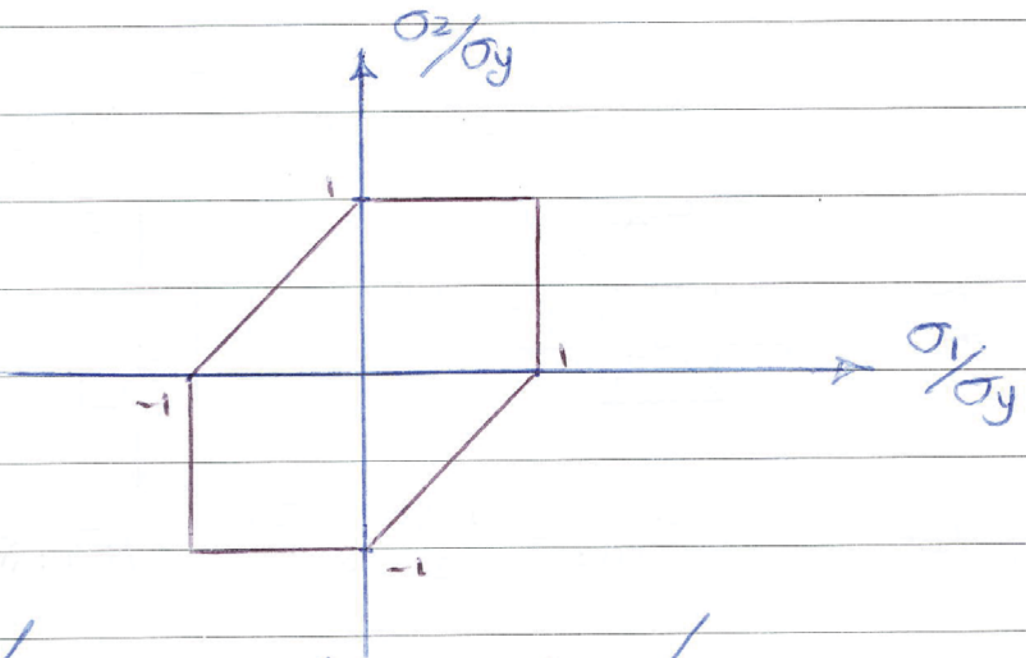




$$\tau_{Max} = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2} \leq \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\rightarrow |\sigma_1| + |\sigma_2| \leq \sigma_y$$

$$\begin{cases} \text{if } \sigma_1 > 0,\ \sigma_2 < 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 < \sigma_y \\ \text{if } \sigma_1 < 0,\ \sigma_2 > 0 \Rightarrow \sigma_2 - \sigma_1 < \sigma_y \end{cases}$$



* هرجا سه بعدی بود، فقط به دوبعدی اکتفا نشود و در حالت سه بعدی τ_{Max} حساب گردد.

فرضیه انرژی کرنشی حداکثر در تغییر شکل برشی (Max. distortional energy Theory)

این فرضیه توسط آقای فون - میسس (Von-Mises) بیان شده است.

معیار گسیختگی از نظر این فرضیه این است که اگر بخشی از انرژی که مربوط به تغییر شکل برشی است به حد کرانی برسد المان گسیخته می گردد. حد کرانی انرژی تغییر شکل برشی، انرژی تغییر شکل برشی Max در عضو تحت بار کشش ساده در لحظه گسیختگی می باشد.

$$U_{0,dis} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right] \quad (1)$$

برای آزمایش تک محوری

$$U_{0,dis} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_y^2 \quad (2)$$

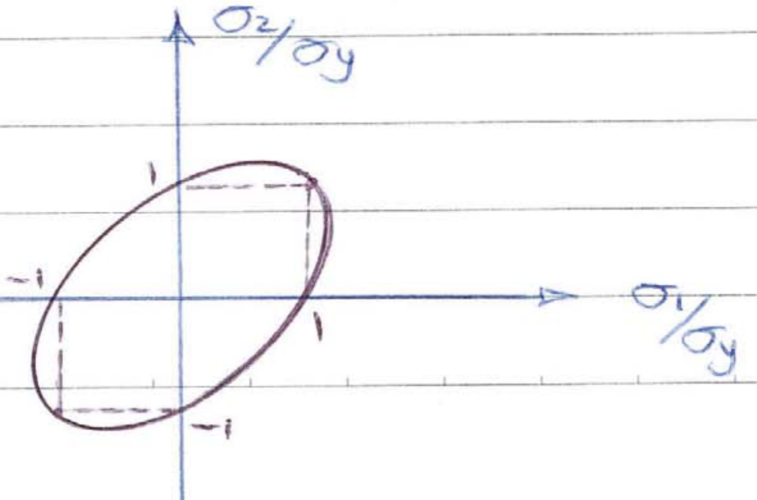
این نتیجه برای مصالح شکل پذیر همگن و ایزوتروپیک بیان شده است.

(1) و (2) را برابر هم قرار می دهیم (انرژی حالت دو بعدی $\sigma_3 = 0$)

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_y^2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)^2 = 1$$

حالت سه بعدی:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2$$



حمید کاظمی

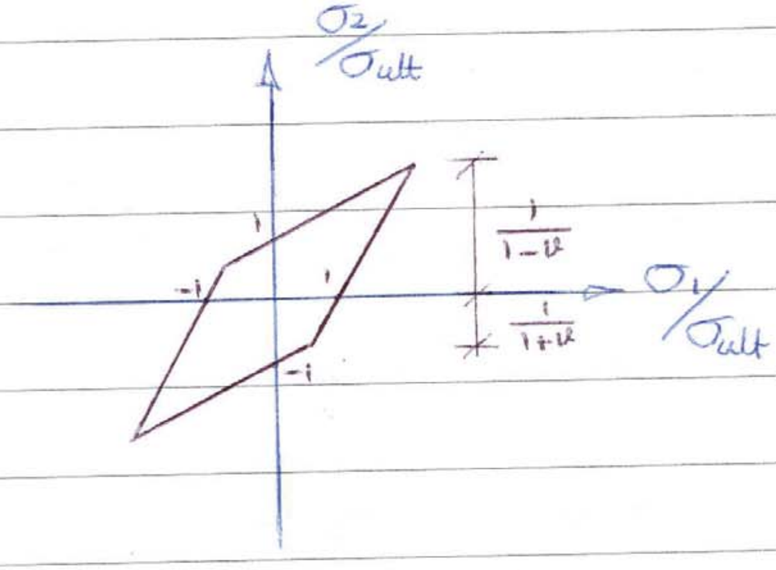
فرضیه (معیار) کرنش طولی حداکثر (Maximum Normal strain Theory)

این فرضیه توسط سن ونان (St. venan) بیان شده است.

اگر کرنش طولی حداکثر به مقدار بحرانی برسد جسم گسیخته می‌شود. مقدار بحرانی کرنش طولی، کرنش طول Max در عضو کشش در بارگذاری تک محوری.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \nu\dfrac{\sigma_2}{E} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} - \nu\dfrac{\sigma_1}{E} \end{cases}$$

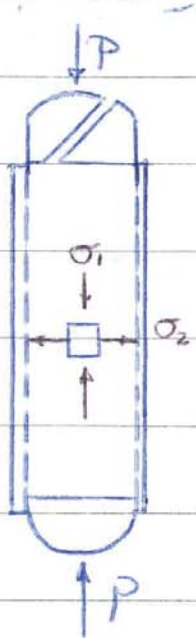
المان تک محوری : $\varepsilon = \dfrac{\sigma_y}{E}$

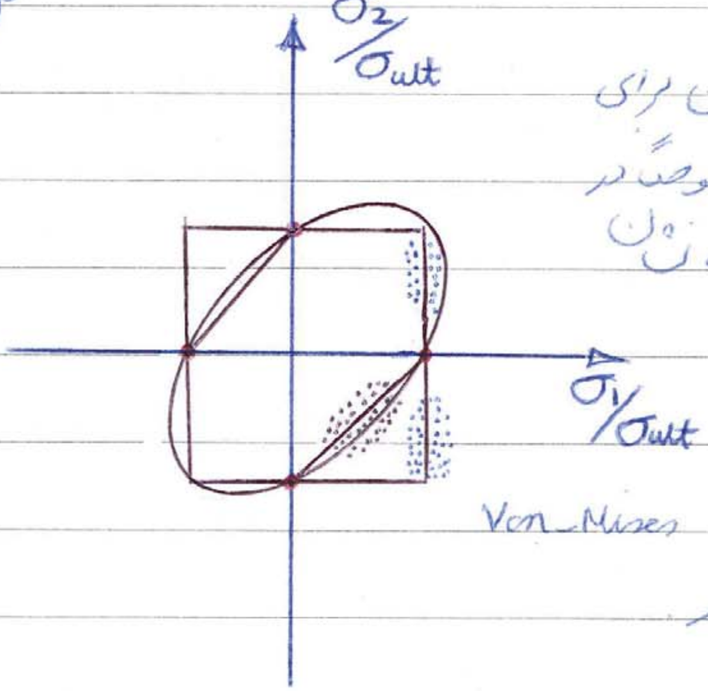


آزمایشات این نتایج را نشان نداده اند.

مقایسه فرضیه ها

مقایسه فرضیه ها براساس یک آزمایش صورت می گیرد. یک استوانه جدار نازک از جنس مورد نظر ساخته می شود. دو درپوش بر روی آن می گذارند. روی یک درپوش نیرو را وارد می کنند و هوای فشرده وارد می کنند. بر این اساس جداره ها تحت کشش قرار می گیرند. همزمان عضو را تحت کشش یا فشار قرار می دهند. بنابراین دیواره ها هم تحت فشار و هم تحت کشش.





استفاده از تئوری رانکین برای مصالح شکل پذیر مخصوصاً در ناحیه 4 و 2 بیشتر خطا نشان می دهد.

• فولاد، آلومینیوم، مس

• چدن

* دو معیار Thresca , Von-Mises بیشتر شبیه هم هستند.

همه فرضیات در چهار نقطه روی محور مختصات (تنش تک محوری) دارای یک نتیجه مشترک است. چون تمام فرضیات مقدار بحرانی را مقداری قرار داده اند که تحت تنش تک محوری است.

اگر المانی تحت تنش دو محوری داشتیم که یکی منفی و دیگری مثبت باشد همچون ترکیب اول می شود پس از این معیار کم می توان استفاده نمود.

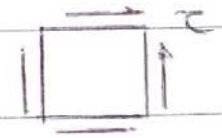
مثال: کوپل پیچشی مربوط به حالت تسلیم در یک میله گرد فولادی توپر به قطر $d=10mm$ را بر اساس هر یک از دو معیار زیر تعیین کنید

الف) حالت تسلیم بر اساس حداکثر تنش برشی مطلق

ب) حالت تسلیم بر اساس تئوری حداکثر انرژی تغییر شکل برشی

تنش حد تسلیم شدن فولاد را 140 Mpa در نظر بگیرید.

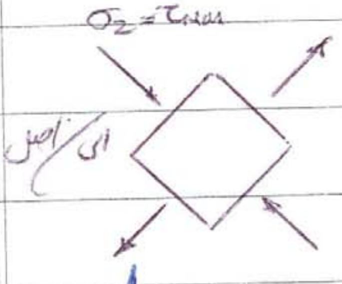
الف)



$$\tau_{Max} = \frac{T.C}{J} = \frac{T \times 5^{mm}}{\frac{\pi}{2} \times 5^4} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

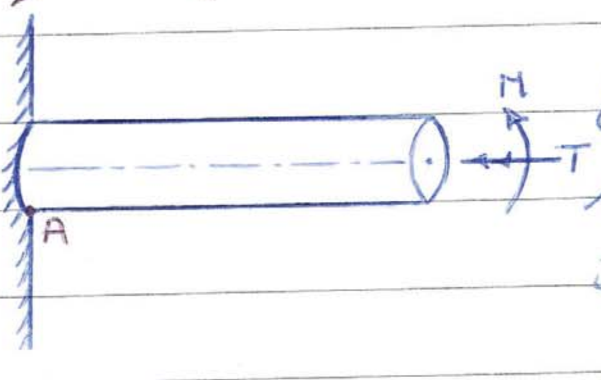
ترسکا: $\tau_{Max} \leq \frac{\sigma_y}{2} \Longrightarrow \frac{16T}{\pi d^3} \leq \frac{140}{2} \longrightarrow T = 13.74\ N.m$

فون میزز: $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2$



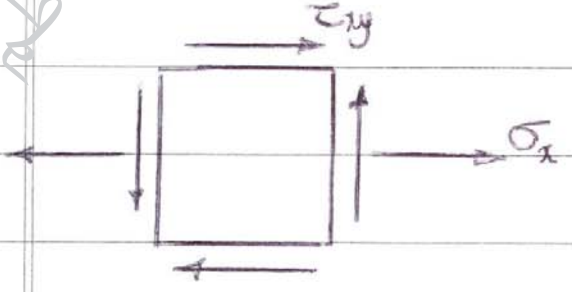
$\Longrightarrow \tau_{Max} = 0.577\sigma_y$

$\longrightarrow T = 15.86\ N.m$



مثال: میله فولادی با مقطع دایره‌ای با شعاع r تحت اثر کوپل پیچشی T و لنگر خمشی M قرار دارد. حالت تسلیم این میله را برای ترکیبات مختلف T و M بر اساس معیارهای ترسکا و فون میسس تعیین نمایید. تنش حد تسلیم شدن مصالح σ_y می‌باشد.

A: تنش ناشی از M و T ماکزیمم است.



$$\sigma_x = \frac{M.C}{I} = \frac{M.\frac{R}{2}}{\frac{\pi}{4}R^4} = \frac{2M}{\pi R^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T.C}{J} = \frac{T.R}{\frac{\pi}{2}R^4} = \frac{2T}{\pi R^3}$$

الف) معیار ترسکا:

$$\tau_{Max} \leqslant \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_y/2$$

$$\rightarrow 16\left(\frac{M}{\sigma_y}\right)^2 + 16\left(\frac{T}{\sigma_y}\right)^2 = (\pi R^3)^2 \longrightarrow \text{دایره}$$

M و T موجود در این رابطه مرز تسلیم را می‌دهد.

ب) معیار فون میسس:

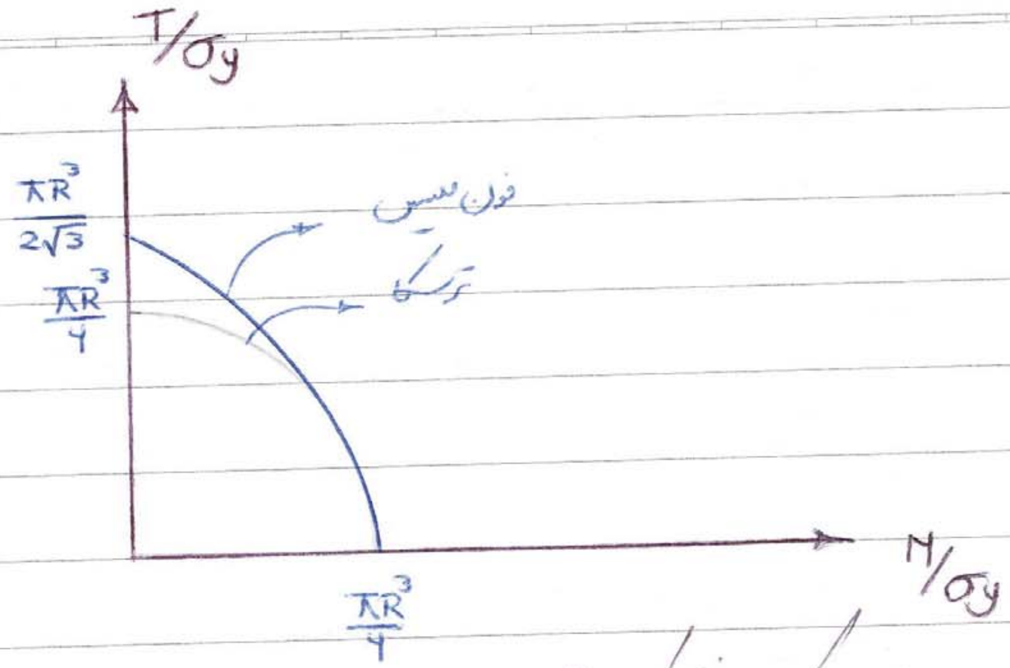
$$U_{o,dis} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]$$

$$U_{o,dis} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_y^2$$

تسلیم

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\rightarrow 16\left(\frac{M}{\sigma_y}\right)^2 + 12\left(\frac{T}{\sigma_y}\right)^2 = (\pi R^3)^2 \longrightarrow \text{بیضی}$$

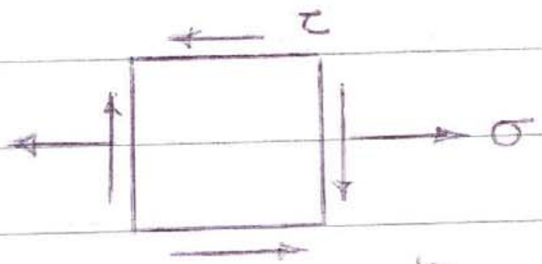


پس معیار ترسکا محافظه کارانه تر است.

مثال: عضوی با مقطع دایروی از فولاد با تنش تسلیم $\sigma_y = 4000\ kg/cm^2$ مفروض است. تحت اثر بارگذاری نشان داده شده، ضریب اطمینان بکار رفته در طراحی عضو را براساس معیارهای ترسکا و فون میسس بدست آورید.

قطر عضو $d = 1.5\ cm$

$P = 600\ kg$ $\quad T = 800\ kg.cm$ $\quad M_z = 500\ kg.cm$



$$\sigma_{\text{محوری}} = \frac{P}{A} = 340\ kg/cm^2$$

$$\sigma_{\text{خمش}} = \frac{Mc}{I} = 1509\ kg/cm^2$$

$$\tau = \frac{T.c}{J} = 1207\ kg/cm^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma = 1849\ kg/cm^2 \\ \tau = 1207\ kg/cm^2 \end{cases}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} +2445\ kg/cm^2 \\ -596\ kg/cm^2 \end{cases}$$

الف) معیار ترسکا : $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0 \rightarrow \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \leq \frac{\sigma_y}{2}$

$$\rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_y$$

برای این سیستم طراحی شده و ضریب اطمینان در نظر گرفته شده است. پس رابطه به صورت زیر است.

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq \frac{\sigma_y}{F.S.}$$

$$\rightarrow 2445 + 596 = \frac{4000}{F.S.} \rightarrow F.S. = 1.32$$

ب) معیار فون میسس : $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_y^2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)^2 \leq 1$

$$\rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \leq \sigma_y^2$$

برای طراحی و اعمال ضریب اطمینان :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \leq \left(\frac{\sigma_y}{F.S.}\right)^2$$

$$\rightarrow F.S. = 1.43$$

* پس معیار ترسکا محافظه کارانه‌تر است.

طراحی با آنالیز تفاوت دارد

سیستمی داریم. طبق معیار ترسکا 1.32 برابر بار وارد کنیم سازه خراب می‌شود. اما براساس معیار فون میسس اگر 1.43 برابر بار وارد کنیم سازه خراب می‌گردد. بنابراین ترسکا محافظه کارانه‌تر (Conservative) می‌باشد.

حمید کاظم

فصل پنجم:

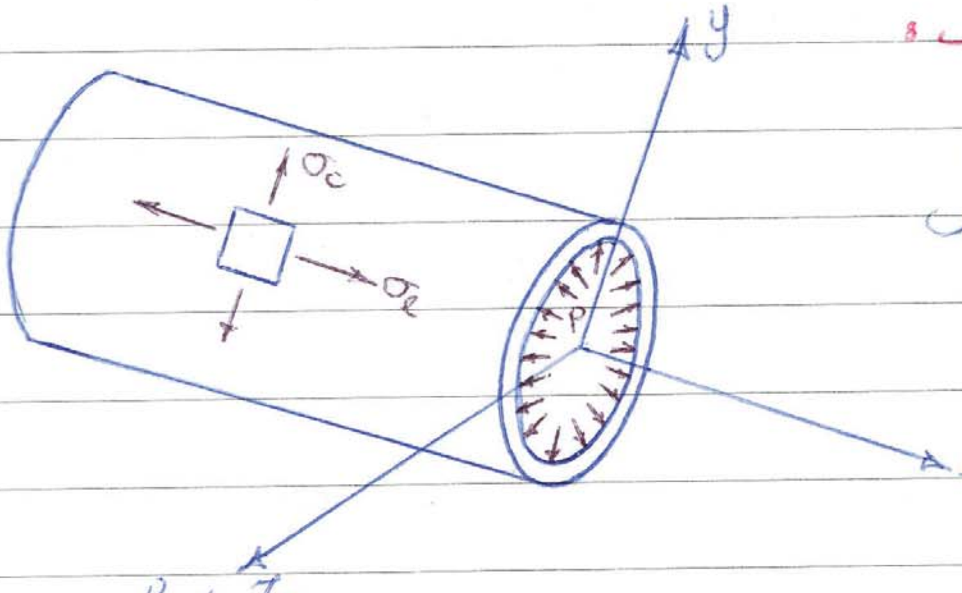
پوسته ها و مخازن جدار نازک تحت فشار

پوسته چیست؟

پوسته ها عناصر سازه ای هستند که از نظر هندسی سطوحی با انحنای یک یا دو جهته هستند و ضخامت آن ها نسبت به سایر ابعاد آن ها بسیار کم است.

اگر r شعاع داخلی و t ضخامت سازه باشد با شرط $\frac{r}{t} \geq 10$ سازه را جدار نازک در نظر می گیریم.

استوانه های جدار نازک:

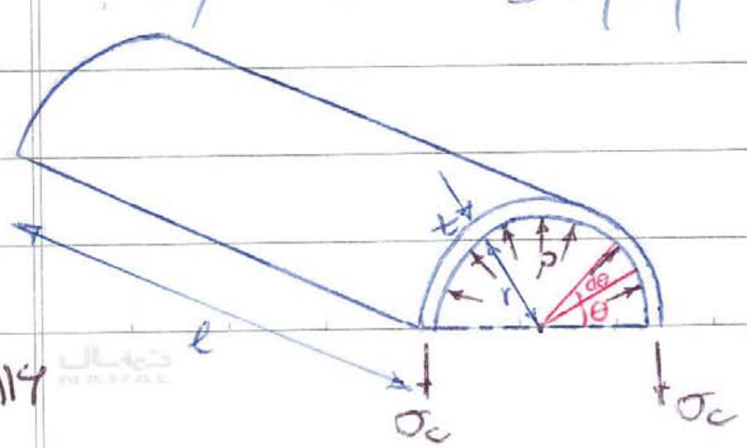


استوانه بسته است و داخلش فشار وجود دارد.

σ_c → circular حلقوی

σ_ℓ → longitudinal طولی

چون بارگذاری متقارن است و استوانه نیز نسبت به محور تقارن دارد پس اگر وسط المان را در نظر بگیریم خط تقارن است محور تقارنی رسم کنیم باید τ در طرف هم جهت باشد که امکان ندارد پس: $\tau = 0$

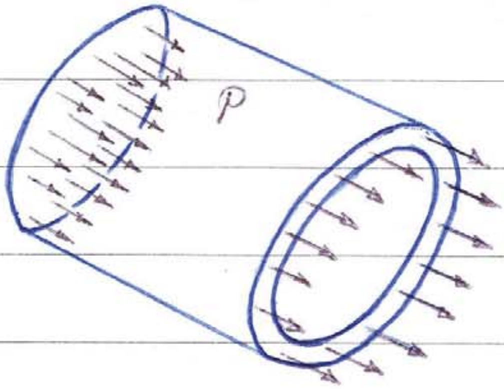


$\Sigma F_y = 0$

$\rightarrow 2\sigma_c \ell . t = 2r . \ell p$

حمید کاظم

$$\sigma_c = \frac{P.r}{t}$$ ← تنش طوقی



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow$$

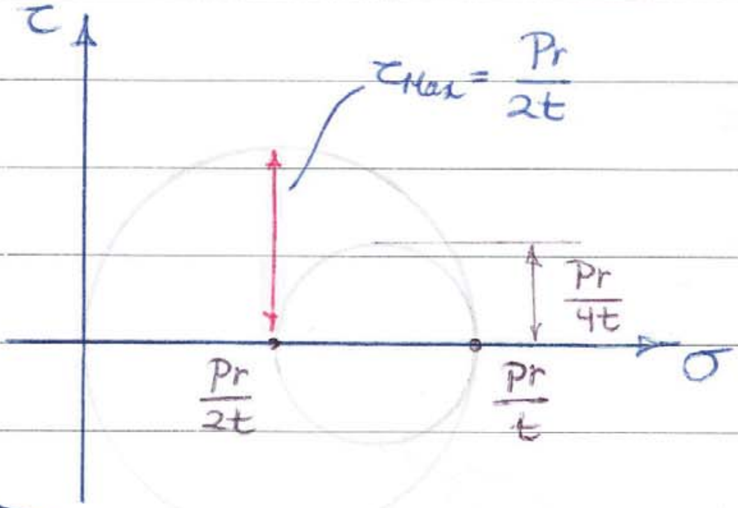
$$P.\pi r^2 = \sigma_l . 2\pi r.t$$

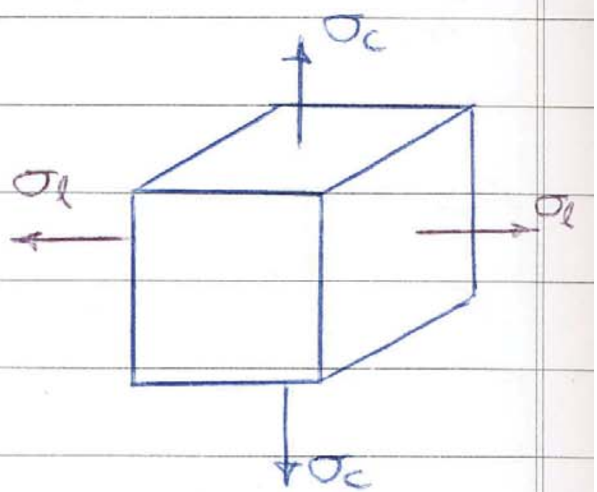
$$\sigma_l = \frac{P.r}{2t}$$ ← تنش محوری

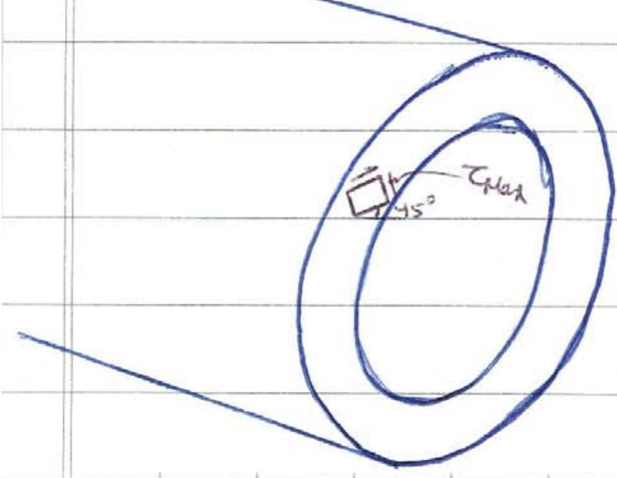
پس جوش های طولی (پیچ ها و پرچ ها) باید محکم تر از جوش های محیطی باشد.

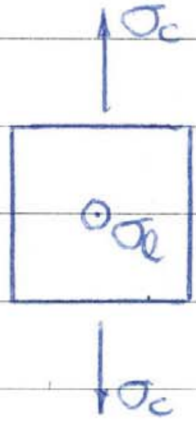
$$\sigma_c = 2\sigma_l$$

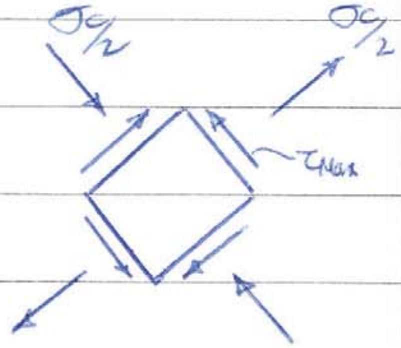
محاسبه تنش های برشی در المان:



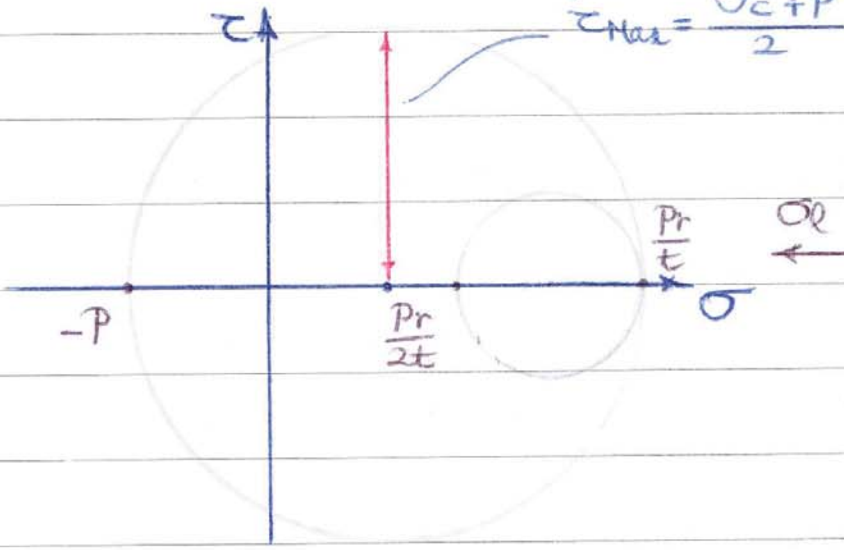


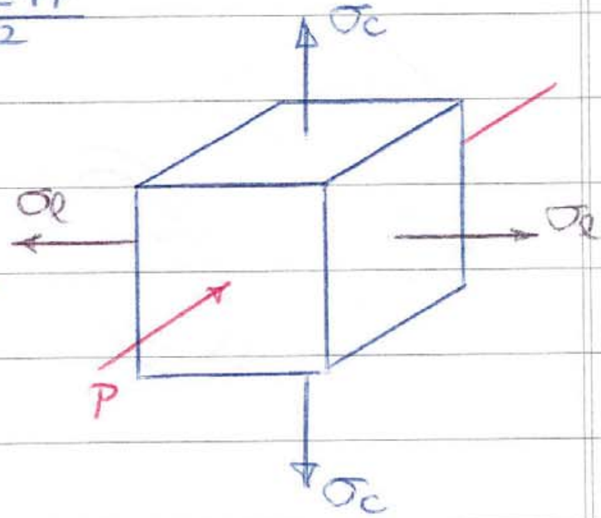






المانی که در سطح جداره داخلی قرار دارد تنش سوم $\sigma_3 = -P$ را نیز دارد.

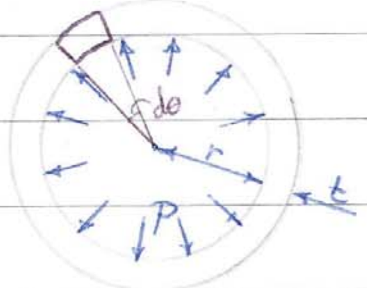


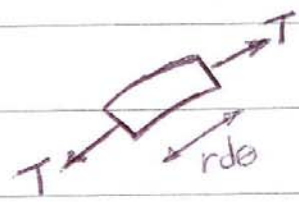


$$\tau_{Max} = \frac{\sigma_c + P}{2} = \frac{P.r}{2t} + \frac{P}{2} \rightarrow \tau_{Max} = \frac{P.r}{2t}(1 + t/r)$$

$$t/r \simeq 0 \rightarrow \tau_{Max} = \frac{P.r}{2t}$$

مثال: لوله استوانه‌ای جدار نازکی به شعاع داخلی r و ضخامت t با دو انتهای باز تحت فشار داخلی P قرار دارد. تغییرات در شعاع لوله را بدست آورید.
(طول استوانه واحد)





$$d\delta = \frac{T.r.d\theta}{E.A} = \frac{\frac{P.r}{t}.t \times 1 \times rd\theta}{E(t \times 1)} = \frac{P.r^2.d\theta}{E.t}$$

$$\rightarrow \text{تغییر محیط مقطع} = \delta = \oint d\delta = \int_0^{2\pi} \frac{P.r^2.d\theta}{Et} = \frac{Pr^2(2\pi)}{E.t}$$

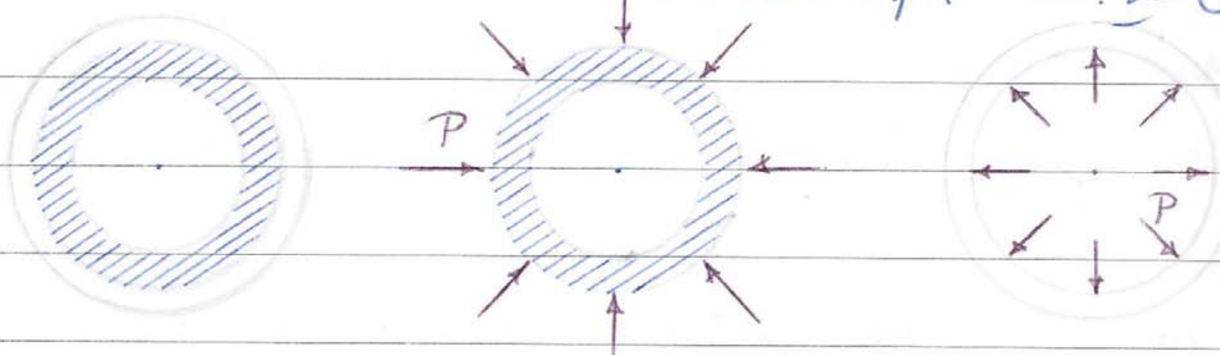
$$\delta_{شعاع} = \frac{P.r^2}{E.t} \rightarrow \varepsilon_{شعاع} = \frac{\delta}{r} = \frac{P.r}{E.t}$$

$$\begin{cases} \sigma_c = \dfrac{P.r}{t} \\ \varepsilon_{شعاع} = \dfrac{P.r}{Et} \end{cases}$$

با شرط باز بودن دو طرف استوانه

مثال: مخزن تحت فشاری از دو استوانه هم محور جفت شده است. چون استوانه داخلی بزرگ بوده و در خارجی نمی گنجد، ابتدا استوانه خارجی حرارت داده شده و روی استوانه داخلی جا داده شده است. اگر هر دو استوانه از فولاد و قطر متوسط مشترکشان 100mm باشد، تنش های محیطی ایجاد شده در هر یک از استوانه ها پس از سرد شدن استوانه خارجی بدست آورید. ضخامت جداره پوسته داخلی 2.5mm و خارجی 2mm است. اضافه طول اولیه قطر استوانه داخلی را 0.25mm فرض کنید.

$E = 2\times10^5$ Mpa



تغییر در هر دو با هم 0.25 است پس در رابطه سازگاری تغییر شکل می نویسیم

$$\Delta r_i + \Delta r_e = \frac{0.25}{2}$$

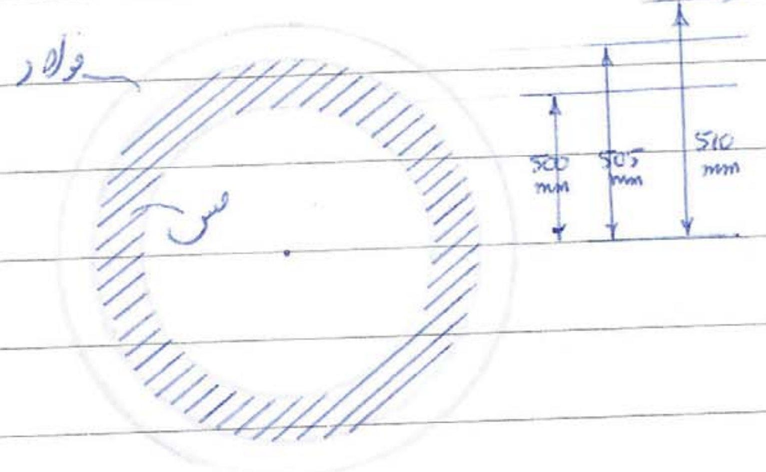
$$\rightarrow \left(\frac{Pr^2}{Et}\right)_i + \left(\frac{Pr^2}{Et}\right)_e = 0.125$$

$$\rightarrow P = 11.1 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_i \text{ داخلی} = \frac{P.r}{t} = 222\ \text{Mpa}$$

$$\sigma_e \text{ خارجی} = \frac{P.r}{t} = 277\ \text{Mpa}$$

مثال: استوانه فولادی جدار نازکی دقیقاً روی استوانه مسی جدار نازکی قرار دارد. اگر دمای مجموعه 30°C اضافه شود تنش های محیطی ایجاد شده در هر یک از استوانه ها را بدست آورید. از تاثیرات ناشی از انبساط طولی صرف نظر کنید.



مس $\begin{cases} \alpha = 18 \times 10^{-6}\ 1/°C \\ E = 9 \times 10^{4}\ \text{Mpa} \end{cases}$

فولاد $\begin{cases} \alpha = 12 \times 10^{-6}\ 1/°C \\ E = 2 \times 10^{5}\ \text{Mpa} \end{cases}$

تغییر محیط استوانه مسی $= \alpha . l . \Delta T = \alpha \times 2\pi (502.5) \Delta T = 1.705\ \text{mm}$

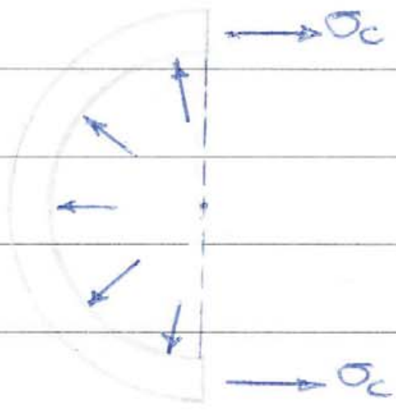
تغییر محیط استوانه فولادی $= \alpha . l . \Delta T = \alpha \times 2\pi (507.5) \Delta T = 1.148\ \text{mm}$

اختلاف بین تغییر شعاع $= \dfrac{1.705 - 1.148}{2\pi} = 0.089\ \text{mm}$

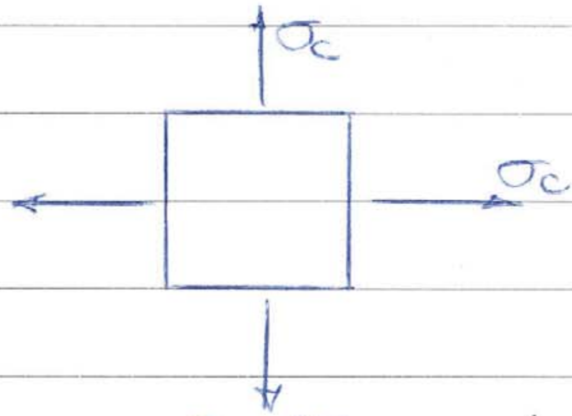
$$(\delta r)_{st} + (\delta r)_{cu} = 0.089\ \text{mm}$$

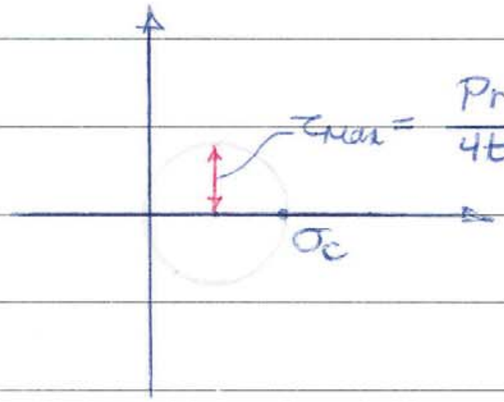
$\rightarrow P = 0.109\ \text{Mpa} \rightarrow \begin{cases} \sigma_s = 11.06\ \text{Mpa} & \text{کششی} \\ \sigma_{cu} = 10.95\ \text{Mpa} & \text{فشاری} \end{cases}$

کره جدار نازک :



$$\sigma_c = \frac{P.r}{2t}$$





دایره موراین تنش دو بعدی نقطه است
اما برای این تنش ۳ بعدی می توان
دایره موری رسم نمود که از τ_{Max}
بدست آید.

آر. ماتسوشیتا: چشم‌انداز و الگوی زندگی شعر زیر بوده است:

جوانی زمانی ویژه از عمر نیست، بلکه حالتی از ذهن است. پدیده‌ای برخوردار از اراده و کیفیتی از تخیل است.

تشکر :

در انتها لازم میدانم از آقای محمدرضا سیفی (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیر کبیر) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .