دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

مقاومت مصالح ۱

استاد :

جناب آقای دکتر کبیر

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(کارشناس ارشد عمران گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی دکترا گرایش سازه North Carolina State University)

تابستان ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

مقاومت مصالح ۱

استاد :

جناب آقای دکتر کبیر

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

حمید کاظم

«بسم الله الرحمن الرحیم»

حمید کاظم

معاونت مصالح ۱

جناب آقای دکتر کبیر

حمید کاظم

خلاصه مباحث درس:

فصل اول:

مفاهیم تنش: نرمال، برشی، لهیدگی، مولفه های تنش بر روی سطح شیبدار، ضریب اطمینان

فصل دوم:

بارگذاری محوری: تنش محوری، کرنش محوری (معیار اندازه گیری تغییر شکل)، دیاگرام تنش کرنش (رابطه بین بار و تغییر شکل)، خزش، خستگی، تحلیل سازه های نامعین استاتیکی، بارگذاری حرارتی، ضریب پواسون، تمرکز تنش، قانون هوک (رابطه بین تنش و کرنش در حالت خطی) برای حالت ۲ بعدی و ۳ بعدی تنش، تغییر شکل های ماندگار، تنش های پس ماند.

فصل سوم:

پیچش: مقاطع دوار، تنش برشی ناشی از پیچش، تغییر شکل پیچشی (زاویه پیچشی)، تمرکز تنش، مسائل نامعین در پیچش، طراحی محورهای انتقال قدرت، تغییر شکل های پلاستیک (ماندگار) در پیچش، مقاطع جدار نازک در پیچش، مقاطع غیر دوار

حمید کاظم

فصل چهارم:

خمش (خمش خالص N/m) : کلیات خمش، تعریف تنش ناشی از خمش، خمش در مقاطع مرکب، تمرکز تنش در خمش، تغییر شکل های غیر ارتجاعی، خمش نامتقارن، بارهای محوری خارج از مرکز، ترکیب تنش محوری و خمشی.

فصل پنجم:

برش : کلیات برش، تنش برشی در تیرها، مقاطع جدار نازک، مرکز برش، مقاطع مرکب، ترکیب تنش ها.

* ترکیب تنش ها جمع بندی کل چیزهایی است که خوانده ام.

{ Mechanics of solids
{ strength of materials → مقاومت مصالح

اهداف درس :

۱) استحکام strength

۲) صلبیت (میزان ایستایی در برابر بار وارده) Rigidity

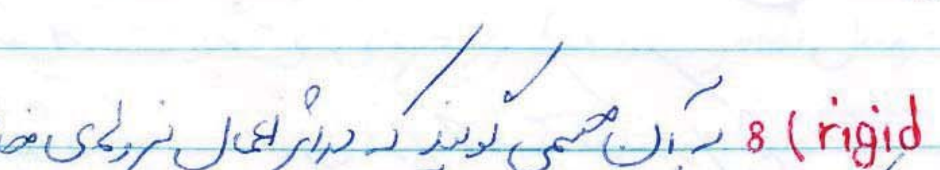
۳) پایداری الاستیک Elastic Stability

این ۳ هدف را در مکانیک جامدات به صورت زیر ملاحظه و تعریف می‌کنیم :
موضوعی از علم مکانیک است که با استفاده از روش‌های تحلیلی به بررسی و تعیین میزان مقاومت (استحکام) و صلبیت (تغییر شکل) و پایداری ارتجاعی اعضای باربر می‌پردازد.

مفاهیم اساسی درس :

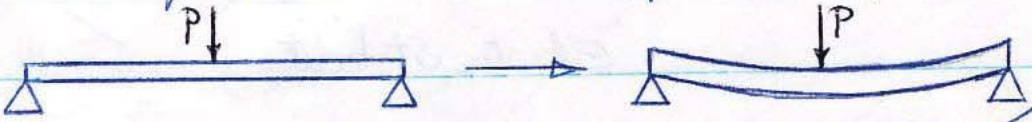
۱) جسم صلب (rigid body) : به آن جسمی گویند که در اثر اعمال نیروهای خارجی تغییر شکل نسبی بین اجزاء تشکیل دهنده آن صفر باشد یعنی به عبارتی

Relative Displacement Between Particles = 0



هر جسمی در اثر نیرو تغییر شکل می‌دهد (حرکت جسم صلب)

۲) جسم شکل پذیر (Deformable body) : به آن جسمی گویند که در اثر اعمال نیروهای خارجی تغییر شکل نسبی بین اجزاء تشکیل دهنده آن صفر نباشد.
Relative Displacement Between particles $\neq 0$.

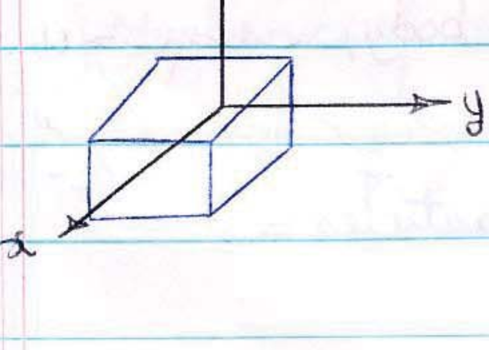


* درست برعکس جسم صلب

۳) جسم همگن (Homogen) : به جسمی گویند که چگالی آن (ρ) در تمام نقاط ثابت باشد. مثلاً فولاد (با ترکیب بتن)

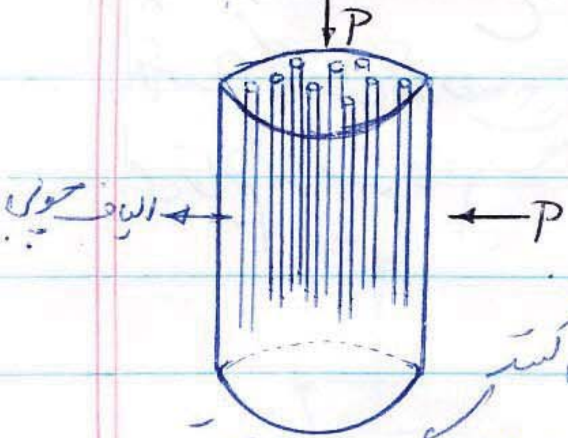
* بتن اگر خوب ویبره شود همگن می گردد. خاک همگن نیست.

۴) ایزوتروپ (Isotrop) : به جسمی گوییم که خواص مصالح آن در کلیه راستاها یکنواخت باشد.



مثلاً در مکعب مقابل از هر جهت بارگذاری کنیم یک عکس العمل نشان می دهد.

ه) انیستروپ (Anistrop): به جسمی گویند که رفتارش در سه جهت x، y، z یکسان نیست.



بهترین مثال برای این حالت چوب است.
چوب نیروی وارده P را بهتر از P' تحمل می‌کند.
چون در حالت موازی (P) بار را الیاف تحمل می‌کند
ولی در جهت عمودی (P') مواد چسباننده الیاف به همدیگر، بار را تحمل کرده و لذا بهتر است بار به صورت موازی با الیاف اعمال شود.

و) ارتوتروپ (Orthotrop): اجسامی که در سه راستای متعامد خواص متفاوتی داشته باشند.

تعادل اجسام: اجسام در حال تعادل از روابط زیر پیروی می‌کنند:

$$\Sigma F = 0 \quad , \quad \Sigma M = 0$$

برای پیدا کردن مجهول‌های تعادل، ۳ جهت x و y و z را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow \Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

* در مقاومت مصالح روابط تعادل اجسام به منظور تعیین و تحلیل نیروهای داخلی اجسام بکار می رود.

می توانیم بنویسیم:

$$\hat{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$$ بردارهای نیرو

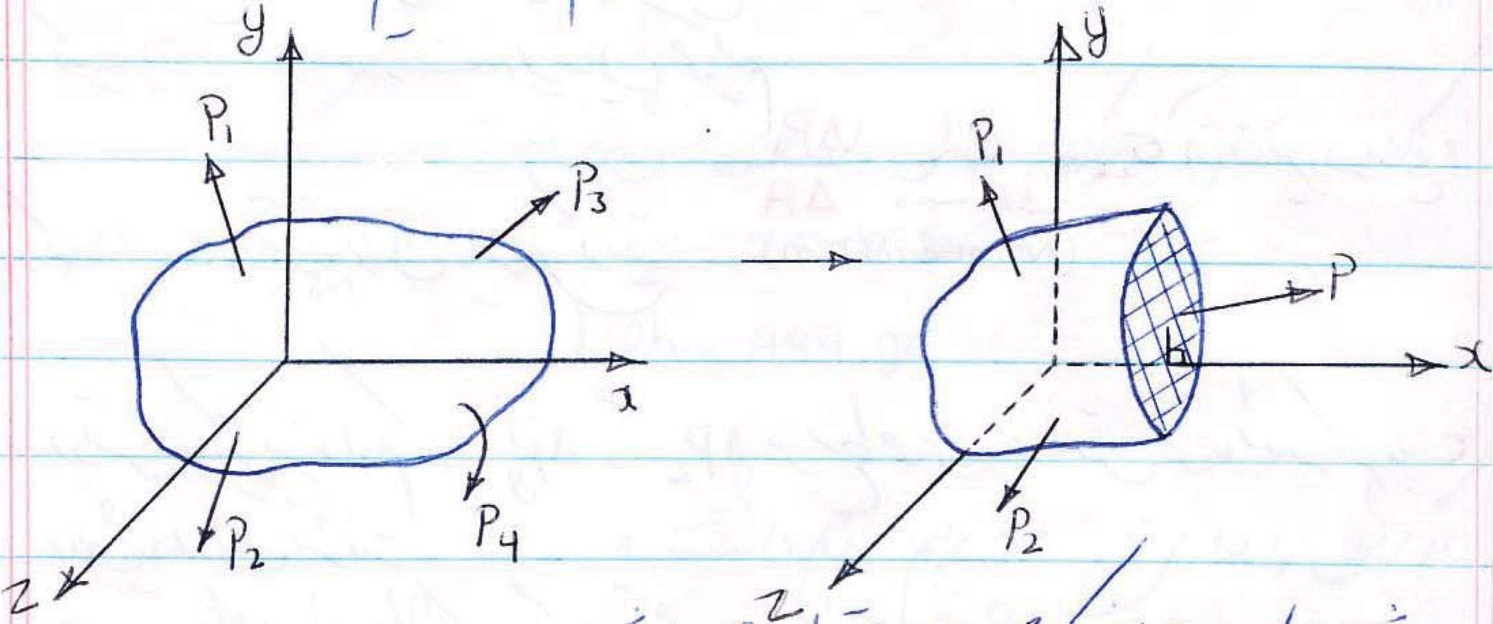
$$\hat{M} = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k}$$ بردارهای گشتاور

حمید کاظم

فصل اول

مفهوم تنش : (Concept of stress)

اگر جسمی در فضای xyz در حال تعادل تحت تاثیر نیروی P_1 ، P_2 ، P_3 و P_4 قرار گرفته باشد ؛ وقتی شکل را برش می زنیم خواهیم داشت :



برش را طوری می زنیم که محور x بر مقطع عمود باشد

P برآیند نیروهای داخلی در سطح مقطع می باشد که با P_1 و P_2 دارای برآیند صفر است

برای بیان مفهوم تنش روی سطح مقطع تقسیم بندی هایی انجام می دهیم . فرض کنیم مساحت سطح مقطع A و قسمت های خرد شده ΔA باشد ؛ در اینصورت می توان گفت به آن ΔP نیرو وارد می شود که اگر آن را بصورت برداری بنویسیم

حمید کاظم

خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{\Delta P} = \overrightarrow{\Delta P_x}\,\hat{i} + \overrightarrow{\Delta P_y}\,\hat{j} + \overrightarrow{\Delta P_z}\,\hat{k}$$

غلط (چون $\vec{n}$ بر سطح عمود است پس ΔP نیز بر مقطع برش عمود می‌باشد). بنابراین ΔP_x بر سطح عمود و ΔP_y ، ΔP_z بر سطح مماس هستند. از از تعریف تنش در نقطه را بصورت زیر بیان می‌کنیم.

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$ (اندیس نیرو و سطح واحد است)

که به σ_x تنش نرمال یا عمودی گویند (Normal stress)

دو تنش دیگر نیز داریم که ΔP_y و ΔP_z بر سطح مماس عمل می‌باشند که با τ نمایش داده می‌شوند.

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

xy بیانگر سطحی است که در آن تنش وارد می‌شود یعنی سطحی که نیرو بر آن عمود است

x در xy بیانگر سطح عمود تنش است و y در xy بیانگر جهت نیرو است.

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

بهتر است از لحاظ طراحی بارگذاری و تنش در یک راستا باشند.

* اولین اندیس τ، تنش را با صفحه‌ای که روی آن عمل می‌کند مربوط می‌سازد و اندیس دوم نشان‌دهنده جهت آن می‌باشد.

در سیستم واحد (SI) نیرو را با N یا kN و سطح را با mm^2 نمایش می‌دهند پس واحد تنش $\frac{kN}{mm^2}$ یا MPa است.

$$1\,pa = N/m^2 \qquad 1\,MPa = 10\,kg/cm^2$$

در کتب قدیمی و امریکایی شمای واحدهای تنش psi است که

$$psi = lb/in^2 \longrightarrow \begin{cases} in = 25.4\,mm \\ lb = 454\,gr \end{cases}$$

اگر برش را موازی محور xz بزنیم خواهیم داشت

$$\sigma_{yy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

محور y عمود است $\tau_{yx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$ $\qquad$ $\tau_{yz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$

* تنش کمیتی تانسوری (Tensor) است. یعنی برداری است که سطح داشته باشد. در این یعنی که علاوه بر مقدار و راستا، سطحی که بر آن اعمال می‌شود نیز معلوم باشد.

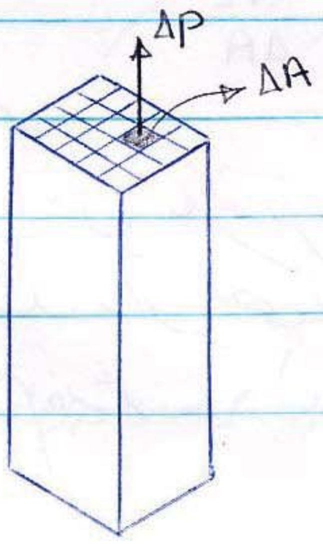
Tensor از نظر شکل کمیتی از بردار بالاتر است

ماتریس تانسور را در فضا به صورت زیر می‌نویسیم:

تانسور تنش: $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ ← دارای ۹ مولفه است

اگر تابع بارگذاری نوشته باشد تنش تبدیل به دیفرانسیل می‌شود (زیاد وارد این بحث نخواهیم شد!!)

تعریف مهندسی تنش: (Exact Define)

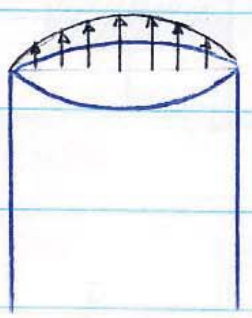


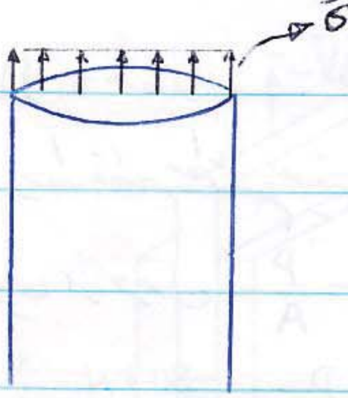
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

$$\bar{\sigma}_{\text{متوسط}} = \frac{P}{A}$$

در واقع وقتی P به سطح اعمال می شود، نیروها به صورت مقابل می گردند

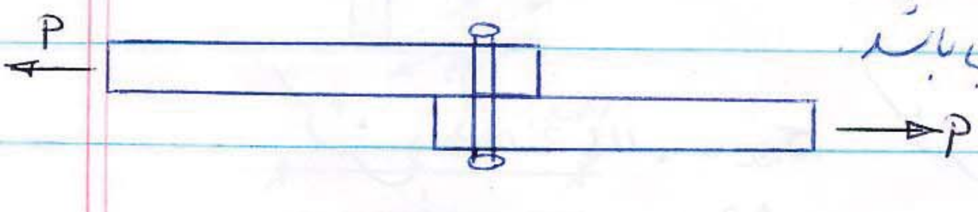
اگر بار وارده به صورت تابعی از مختصات سطح بیان شود می توان
شدت تنش را به صورت مقابل نشان داد.





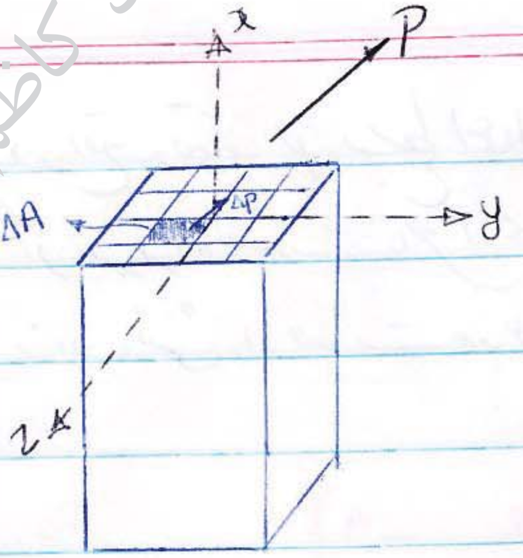
ولی در تنش متوسط نیروها به صورت مقابل فرض می شوند.
(همگی هم اندازه اند)

فرض کنیم عضوی به صورت مقابل باشد.



$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{P}{A}$$

* اگر به اندازه ضخامت عضو از محل اعمال بار دور شویم تنش یکنواخت می شود.

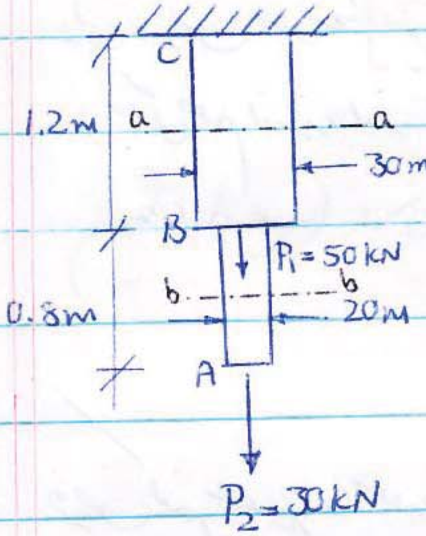


$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

مثال: مطلوبست تنش در وسط هر قطعه.



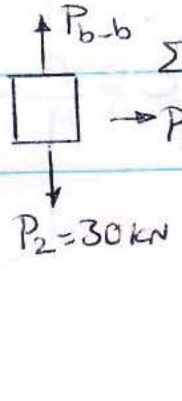
حل: در وسط قطعه مطمئن هستیم توزیع تنش یکنواخت است

در اینجا از فرمول $\bar{\sigma} = \frac{P}{A}$ استفاده می کنیم.

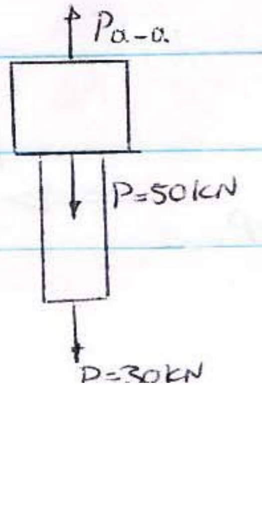
$$A_{a-a} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (30)^2}{4} \qquad P_{a-a} = 80\ kN$$

$$A_{b-b} = \frac{\pi (20)^2}{4} \qquad P_{b-b} = 30\ kN$$

$\Rightarrow \sigma_{AB} = +95.5\ MPa$ کشش $\qquad \sigma_{BC} = +113.2\ MPa$ کشش

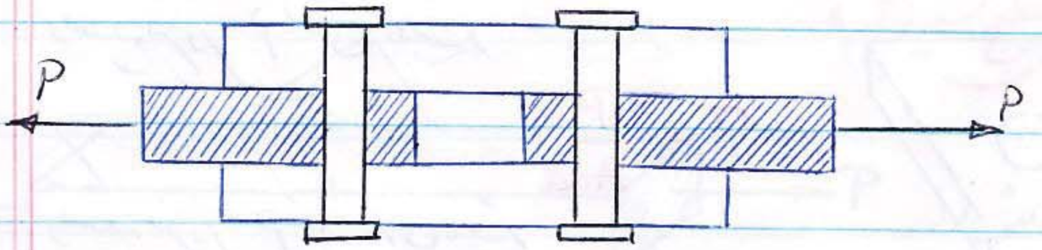


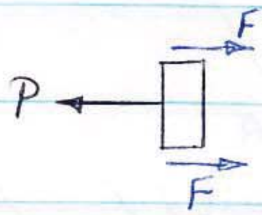
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow P_{b-b} = 30$



$\Sigma F_y = 0 \rightarrow P_{a-a} = 80\ kN$

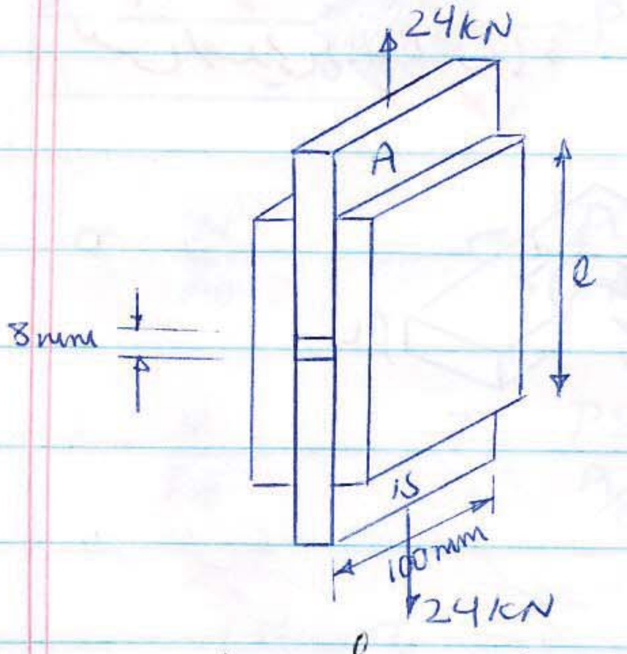
حمید کاظم

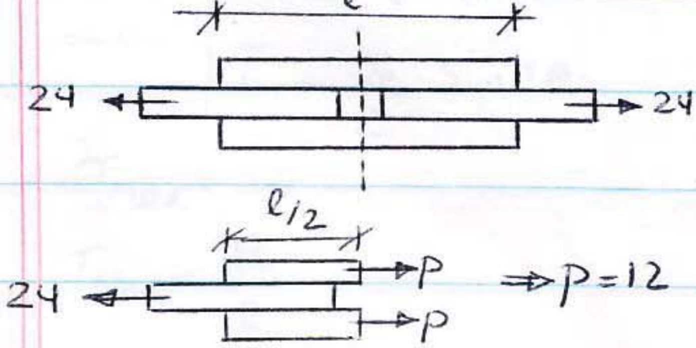




$$2F = P \Rightarrow F = P/2 \Rightarrow \tau = \frac{P}{2A}$$

مثال: اگر بدانیم تنش برشی متوسط مجاز حداکثر 800 kpa باشد و فاصله دو قطعه A , B، 8mm باشد، طول l چقدر باشد که در اثر بار 24kN تنش برشی از 800 kpa تجاوز نکند.

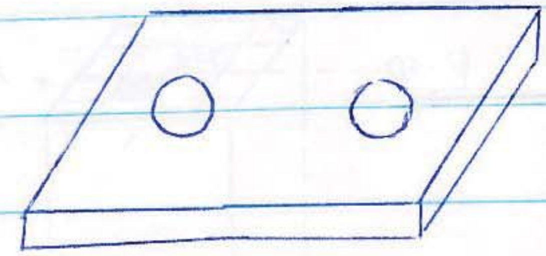




$\Rightarrow P = 12$

$$\tau = \frac{12 \times 10^3}{(l/2 - 4)\,100} = 800 \times 10^{-3}$$

$\Rightarrow l = 308 \text{ mm}$

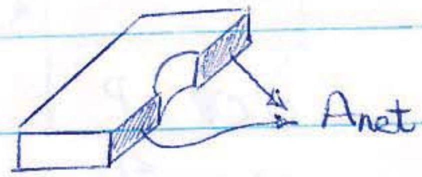


وقتیکه نیروی P کششی باشد

$$\sigma = \frac{P}{A_{net}}$$

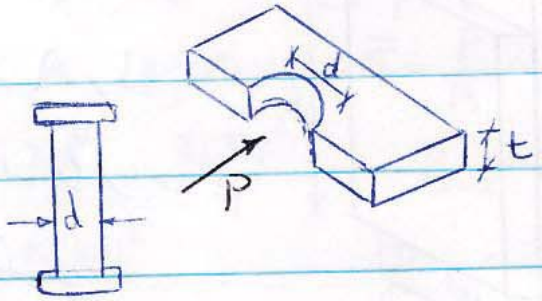
وقتیکه نیروی P فشاری باشد

$$\sigma = \frac{P}{A_{\text{کل}}}$$

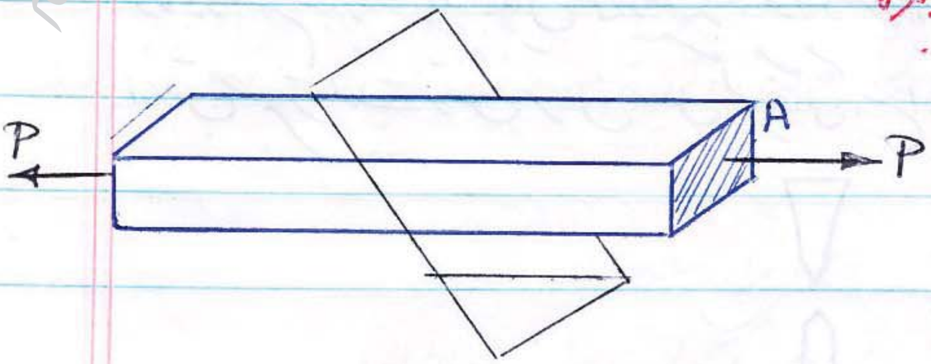


تنش لهیدگی (تکیه گاهی) :

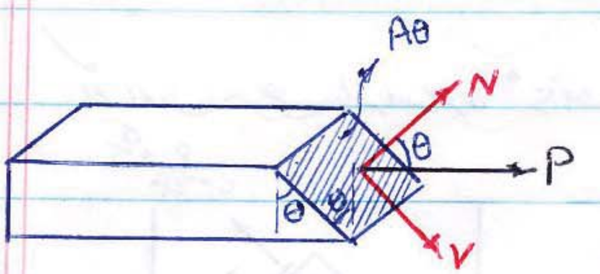
$$\sigma_b = \frac{P}{dt}$$



مولفه های تنش بر روی سطح شیبدار



$$\sigma_0 = \frac{P}{A}$$ تنش اولیه



$$\begin{cases} N = P\cos\theta \\ V = P\sin\theta \end{cases} \qquad A = A_\theta \cos\theta$$

$A =$

$$\sigma = \frac{N}{A_\theta} \Rightarrow \sigma = \frac{P\cos\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A}\cos^2\theta$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} \Rightarrow \tau = \frac{P\sin\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \tau = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_0 \cdot \cos^2\theta \\ \tau = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

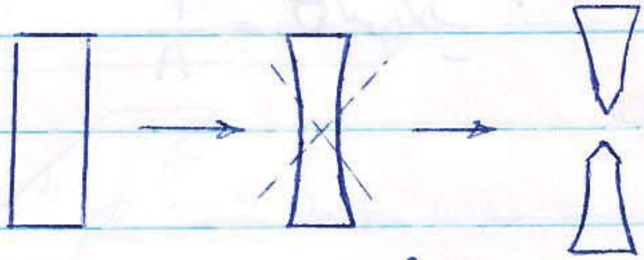
$\sigma_{Max} = \sigma_0$

$\tau_{Max} = \frac{\sigma_0}{2}$

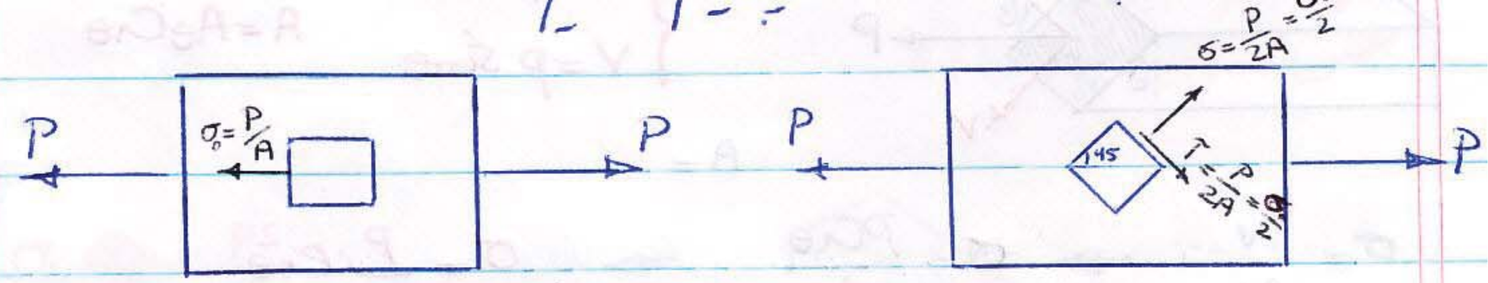
* اگر $\theta = 0$ باشد σ ، ماکزیمم می شود.

* اگر $\theta = 45$ باشد τ ، ماکزیمم می شود.

فولاد و بتن سازه‌ها را تشکیل می‌دهند. فولاد معمولاً گسیختگی اش به صورت برشی است؛
اما بتن چون ترد است تنش نرمال عامل گسیختگی آن است.



اگر المان مربعی را به اندازه 45° بگیریم خواهیم داشت:



بار نهایی: حداکثر باری که یک جسم می‌تواند تحمل کند تا گسیخته شود. به عبارت دیگر
بار آستانه گسیختگی را بار نهایی گوییم.

تنش نهایی: حداکثر تنشی که یک جسم می‌تواند تحمل کند تا گسیخته شود.

بار مجاز (بار طراحی) : Manufacturing : بار پیدا شده در تولید، مثلاً هنگام جوشکاری حرارت بالا می‌رود و بعد سرد می‌شود، جاهای دیگر سرد می‌شود. پس داخل قطعه تنش‌های داخلی ایجاد می‌شود.

Transportation : به علت تکان‌ها بار به قطعه وارد می‌شود

Installation : نصب قطعه اگر دقیق نباشد در قطعات تنش اضافه ایجاد می‌شود

Loading : بارگذاری که در نظر گرفته نشده که ممکن است بار اضافی اعمال شود

بار ضربه‌ای

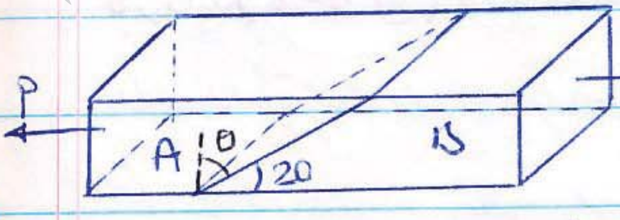
Environment, Material :

تمام این عوامل نشان می‌دهد ما باید بار نهایی را اعمال کنیم. نسبت بار مجاز را اعمال می‌کنیم

$$\text{ضریب اطمینان} = \frac{\text{بار نهایی}}{\text{بار مجاز}}$$

بار مجاز را به شکلی در نظر می‌گیریم که اعضا را مبنای طراحی در نظر می‌گیریم. ضریب اطمینان مشخص است. در برخی موارد هم وجود دارد.

مثال: دو جسم چوبی A و B دارای سطح مقطع یکنواخت $70 \times 110\ mm^2$ توسط چسب به هم متصل شده‌اند. اگر بدانیم تنش مجاز برشی برای چسب $500\ kPa$ فرض شود تعیین کنید حداکثر نیروی P که می‌توان به این عضو وارد نمود (چسب e)

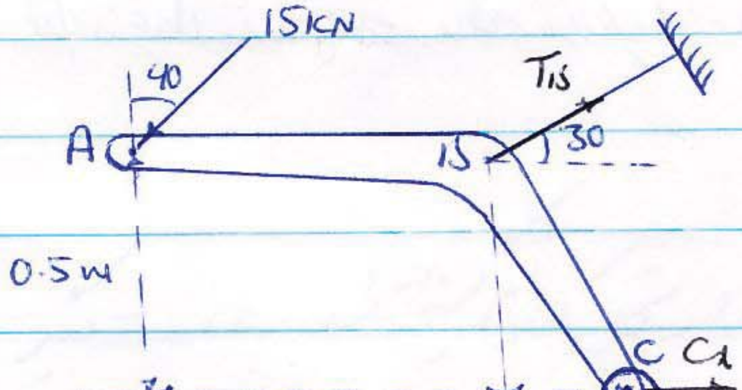


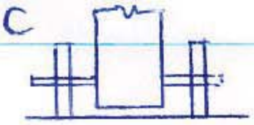
$$\theta = 90 - 20 = 70$$

$$\tau = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\theta = 500 \times 10^{-3}\ (MPa)$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \frac{500 \times 10^{-3} \times 2 \times (70 \times 110)}{\sin(2 \times 70)} = 11979\ N = 12\ kN$$

مثال: اگر جسم نشان داده شده از فولاد باشد و فولاد دارای تنش برشی نهایی $\tau = 350\ MPa$ می‌باشد. این عدد برای پین فولادی نقطه C نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر ضریب اطمینان مورد نظر در این مثال 3.5 در نظر گرفته شود، قطر پین فولادی C را محاسبه کنید.





$$\tau_{allowable} = \frac{350}{3.5} = 100\ MPa$$

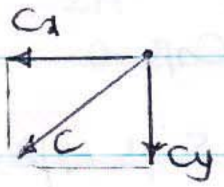
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow T_{13}(0.4 \sin 30 + 0.5 \cos 30) - 15(1.1 \times \cos 40) - 15(0.5 \sin 40) = 0 \Rightarrow T_{13} = 27.58\ kN$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -15 \sin 40 + 27.58 \cos 30 + C_x = 0$$

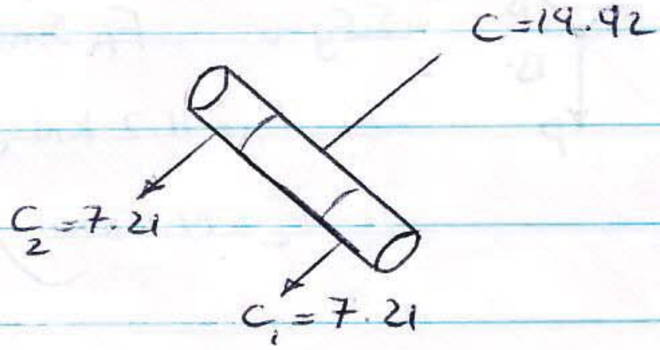
$$\Rightarrow C_x = -14.24$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -15 \cos 40 + T_{13} \sin 30 + C_y = 0$$

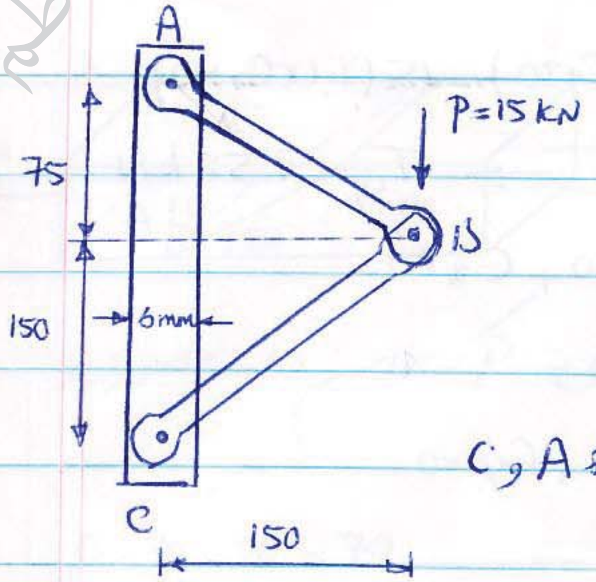
$$\Rightarrow C_y = -2.3\ kN$$



$C = 14.42\ kN$

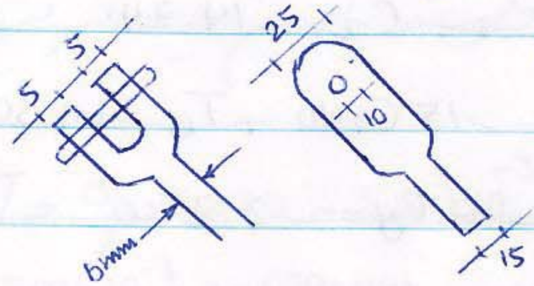


$$\tau_{allowable} = \frac{C/2}{A} = \frac{14.42 \times 10^3}{2 \times \pi (d^2)/4} = 100 \Rightarrow d = 9.58\ mm$$

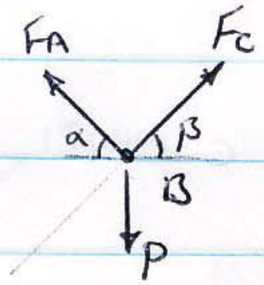


مثال ۶: مطلوبست تعیین تنش های قائم در اعضای میله ای AB و BC و همچنین تنش لهیدگی برای پین در C. (قطر تمام پین های به کار رفته در این سازه 10mm فرض کنید)

A و C :



$$\begin{cases} \alpha = 25.56 \\ \beta = 45 \end{cases}$$



$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \Sigma F_x = 0 \qquad -F_A \cos\alpha + F_C \cos\beta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_A \sin\alpha + F_C \sin\beta = P$$

$$\Rightarrow F_A = 11.2\ kN$$ کششی

$$F_C = 14.1\ kN$$ فشاری

محاسبه تنش های قائم:

میله $\sigma_{AB} = \dfrac{F_A}{A_A} = \dfrac{11.2 \times 10^3}{6 \times 15} = 124\ Mpa$ کششی

در محل پین $\sigma_{AB} = \dfrac{F_A}{A_{net}} = \dfrac{11.2 \times 10^3}{2(25-10)5} = 74.7\ Mpa$ کششی

میله $\sigma_{BC} = \dfrac{F_C}{A} = \dfrac{14.1 \times 10^3}{6 \times 15} = 156.67\ Mpa$ فشاری

* چون فشاری است A_{net} نمی‌خواهد — فشاری

در کوپلینگ $\sigma_{bc} = \dfrac{F_c}{A} = \dfrac{14.1\times10^3}{2\times25\times5} = 56.4\ \text{Mpa}$

می‌شه تنش لهیدگی بین پین و تیکه .

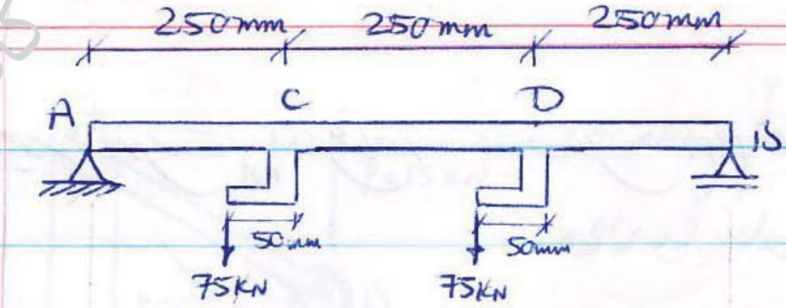
$$\sigma_b = \frac{F_c}{A} = \frac{14.1\times10^3}{2\times10\times5} = 141\ \text{Mpa}$$

$$\sigma_b = \frac{F_c}{A_{\text{تماس}}} = \frac{14.1\times10^3}{10\times6} = 235\ \text{Mpa}$$

می‌شه تنش لهیدگی بین پین و صفحه اصلی .

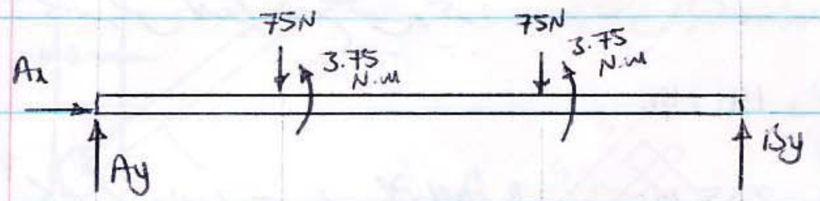
$$\tau = \frac{P}{2A} = \frac{14.1\times10^3}{2\times\pi(10)^2/4} = 89.8\ \text{Mpa}$$

مثال ۵) مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی

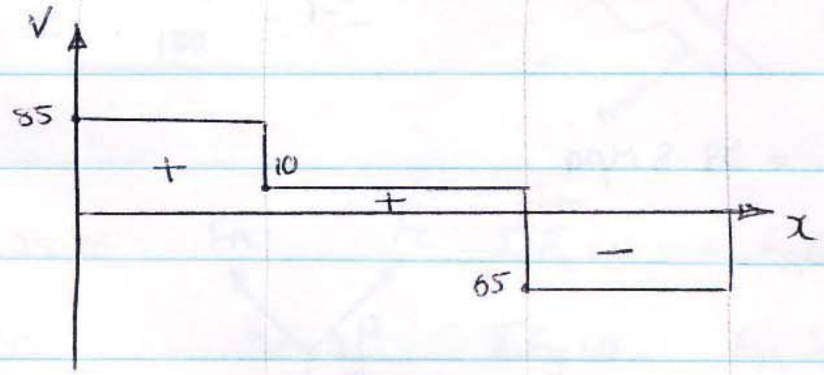


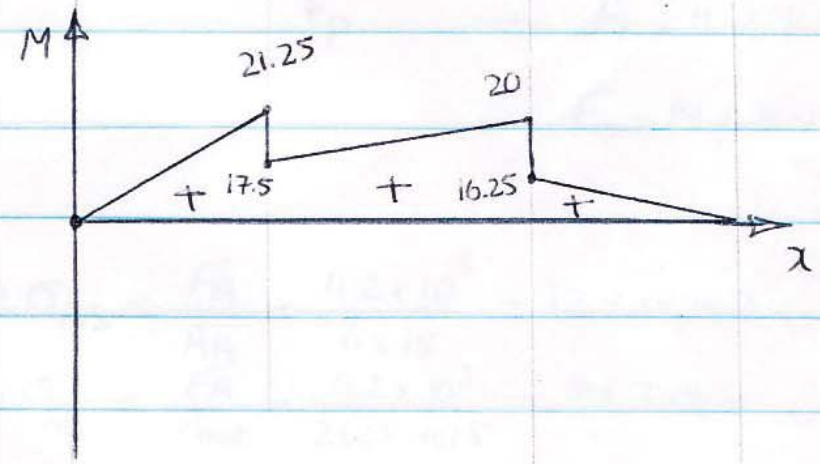
$\Sigma M_A = 0 \quad , \quad \Sigma F_y = 0$

$B_y = 65N \qquad A_y = 85N$

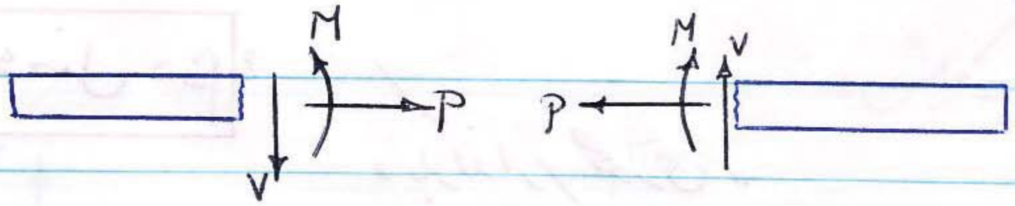


$$\begin{cases} V_2 - V_1 = \int q\,dx \\ M_2 - M_1 = \int V\,dx \end{cases}$$





قرارداد :



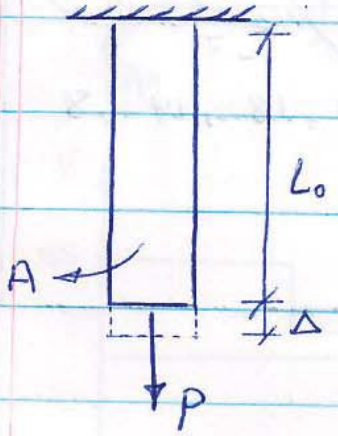
سئوالات پیشنهادی در Beer-Johnston :

فصل 1 : 8, 14, 18, 20, 24, 26, 36, 41, 49, 55

فصل 7 : 19, 20, 30, 66

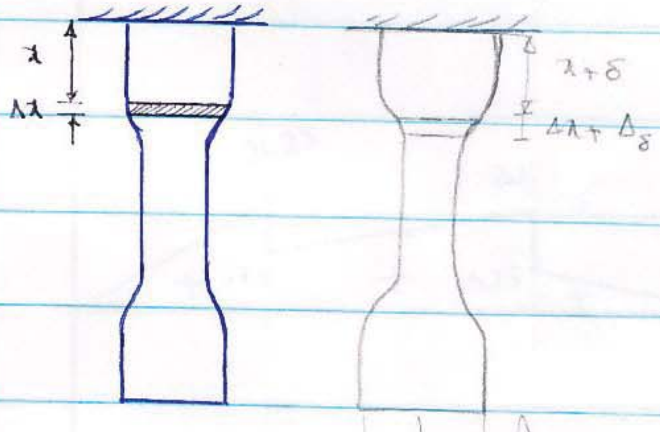
فصل دوم:

« بارگذاری محوری »



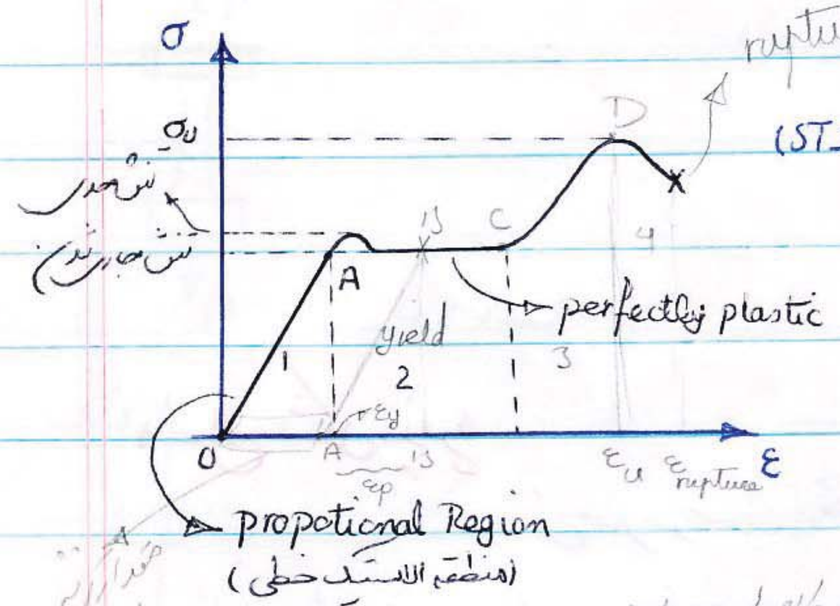
$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

ε کرنش (strain) است و بدون واحد است.



$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

رسم دیاگرام تنش ـ کرنش:



مصالح شکل پذیر: فولاد ساختمانی (ST-37)

کرنش جاری شدن: سیلانی در جسم وارد می شود

بعد از تنش جاری شدن کرنش افزایش پیدا کرده ایم

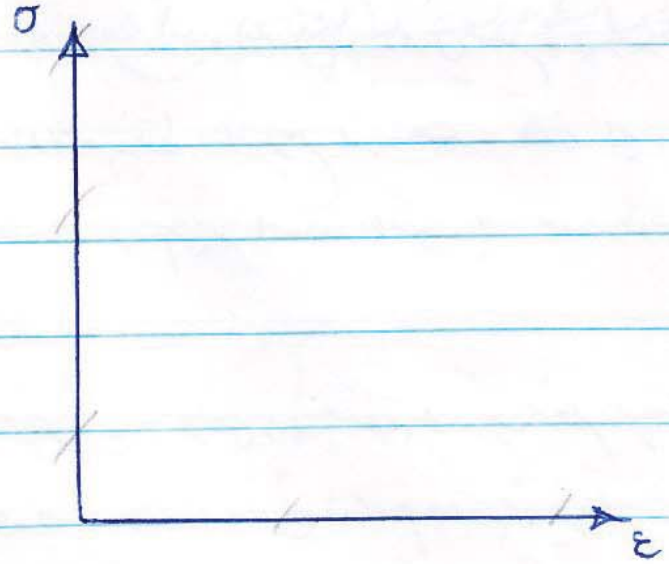
تا رسیدن

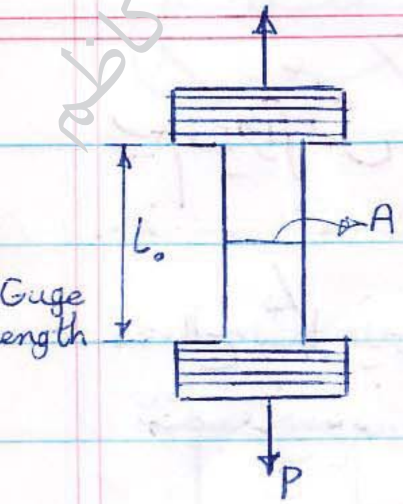
در OA اگر بار را برداریم تغییر شکل به حالت اول

برمی گردد و کرنش تنش اعمال شده منحرف می شود. طراحی سازه مصالح در

منطقه OA انجام می شود.

مصالح ترد:





مصالح شکل پذیر مصالحی هستند که دامنه تغییر شکل آن‌ها زیاد است

مصالح شکل پذیر

* در منطقه ۱ با افزایش تنش، کرنش هم خطی افزایش یافته و تغییر شکل خطی می‌شود 1: Linear Elastic
* در منطقه yield مصالح شل می‌شود و جاری می‌شود و هیچ مقاومتی از خود نشان نمی‌دهد
تغییر شکل کاملاً غیر خطی (پلاستیک) است 2: Yield

فولادهای ساختمانی و فلزی که در شکل می‌بینیم رفتارشان این گونه است

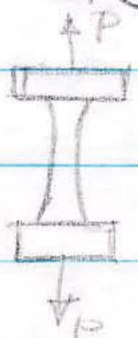
اگر کار را تا نقطه C ادامه دهیم از نقطه A تا C که ε_p است. از نقطه C خطی را موازی
خط OA رسم می‌کنیم (منطقه الاستیک) مقدار طول از صفر تا ... به دست می‌آید مقدار کرنش باقی مانده
گویند.

یعنی می‌شود در طراحی وارد منطقه دوم شد چون در سیستم اثر باقی می‌ماند

* در CD تنش دوباره افزایش می‌یابد. 3: strain hardening

منطقه کرنش سخت شونده. در هیچ طراحی وارد این منطقه نمی‌شوند.

شیب منطقه ۳ از منطقه ۱ کمتر است. نقطه D حداکثر بار برای جسم است که

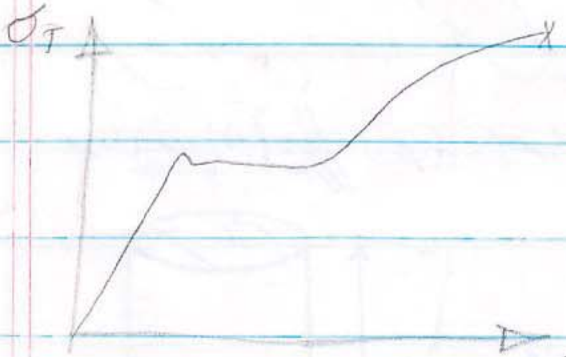


Ultimate stress بار ← تنش نهایی

در نقطه D و

نهایتاً با افزایش بار گسیخته می‌شود.

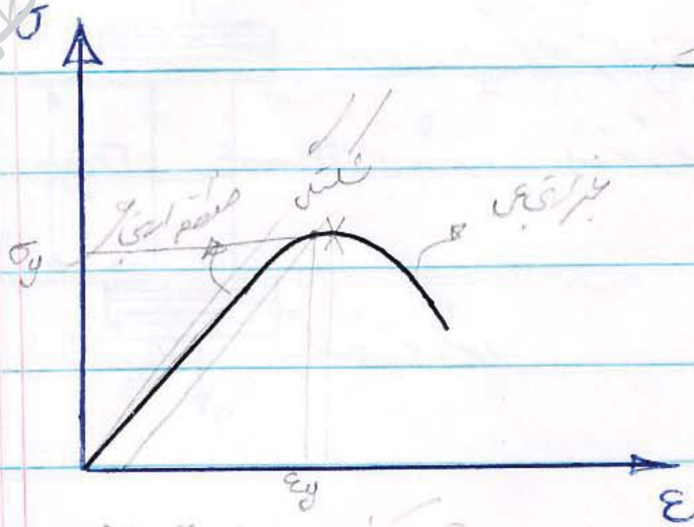
4 B necking



تنش واقعی: تنش حاصل از تقسیم نیرو بر سطح مقطع واقعی

True stress $\sigma = \dfrac{P}{A_T}$

تغییر شکل پلاستیک در برخی مصالح را از تغییر سطوح لغزش که تنش برشی τ_{max} وجود دارد.

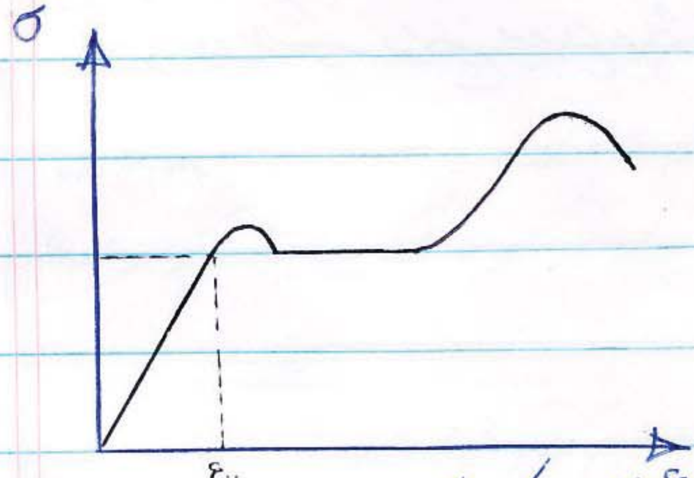


مصالح ترد: مصالحی هستند که تغییر شکل‌شان محدود است.

مثل بتن . $\varepsilon_{\text{بتن}} = 0.003$

علت اینکه در مورد بتن حالا دیگر رسم نمی‌کنیم این است که شکل منحنی را نداریم. یعنی نقطه‌ای به نام yield نداریم. یعنی نقطه‌ای به این لفظ نداریم.

برای جدا کردن منطقه ارتجاعی و غیرارتجاعی از نقطه اولیه محور افقی را در نظر می‌گیریم به اندازه 0.2٪ جابجا می‌کنیم (offset می‌کنیم) و بعد موازی شیب منحنی را رسم می‌کنیم. از نقطه تلاقی تا نقطه مشخص منطقه ارتجاعی داریم.



$$\sigma = E\varepsilon$$

این فرمول مربوط است به منطقه الاستیک خطی. E بستگی دارد به جنس مصالح.

تعریف E: مقدار تنشی که کرنش واحد را بوجود آورد. به E مدول ارتجاعی یا مدول یانگ گویند. ← مدول کشسانی هم

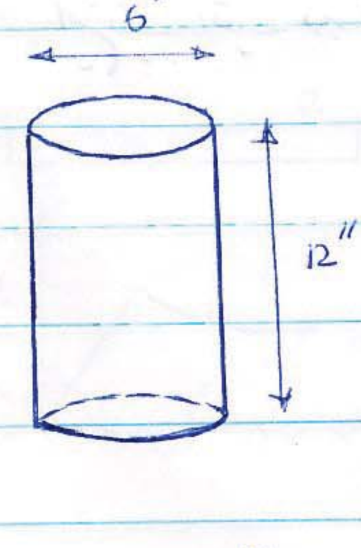
فولاد $E = 200\,Gpa = 2 \times 10^{6}\ kg/cm^{2}$

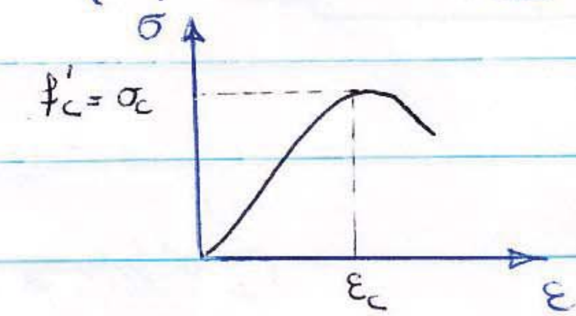
بتن $E \cong 2 \times 10^{5}\ kg/cm^{2}$

عمدهٔ مصالح ترد مقاومت کششی و فشاری یکسانی ندارند. بتن مقاومت کششی اش به مراتب کمتر از فشاری است.

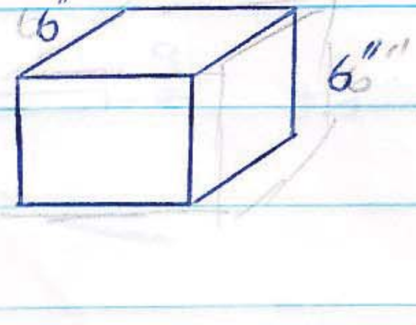
شیشه و سنگ و گچ مقاومت کششی کمی دارند.

استاندارد ACI برای محاسبه مقاومت فشاری بتن





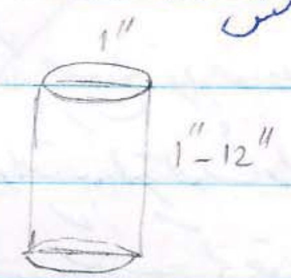
استاندارد انگلیس: در این حالت چون مقاومت فشاری بتن زیاد به دست می‌آید آن را تقسیم بر 1.2 می‌کنند.

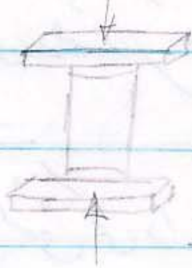


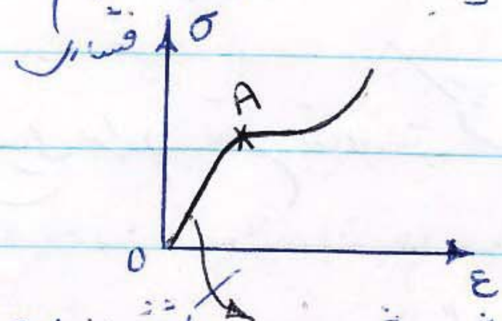
تست فشار فولادها

مقاومت فشاری و کششی اگر مصالح شکل پذیر مانند فولاد در محدوده الاستیک خطی یکسان بوده و شیب منحنی ارتجاعی نیز با هم برابر است.

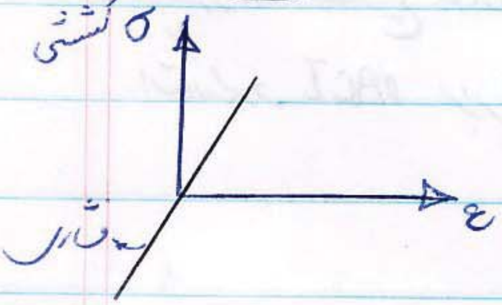
E کشش $=$ E فشار



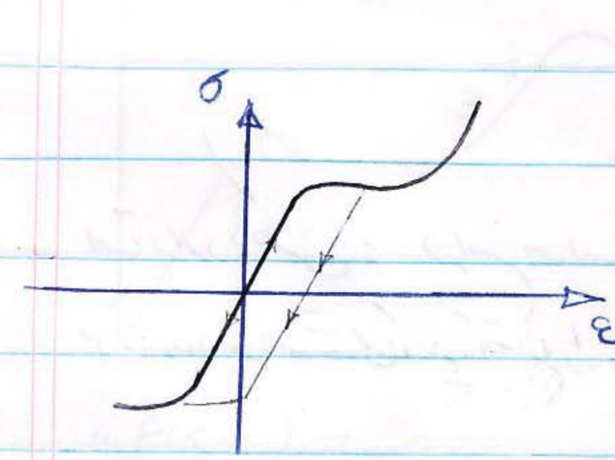


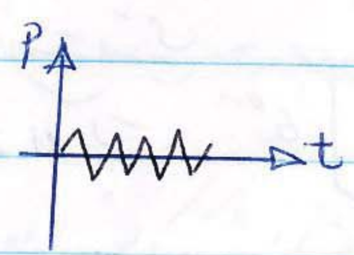


این شیب با شیب در حالت کشش برابر است.

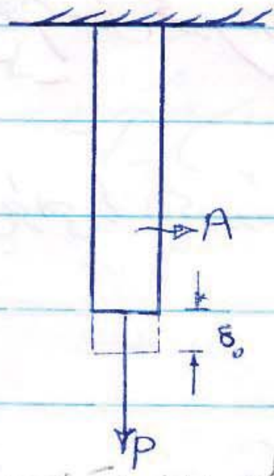


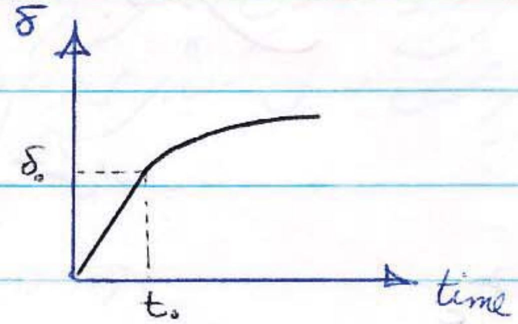
اگر بارگذاری فشاری کردیم و بعد باربرداری کنیم



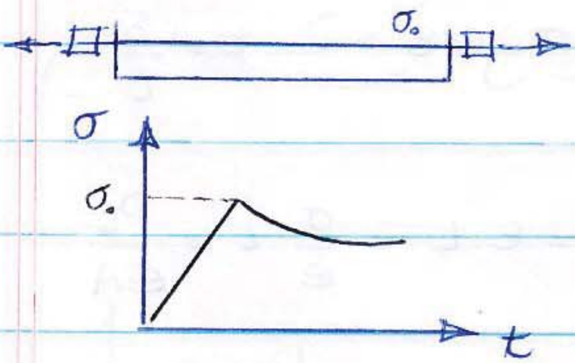


خزش:



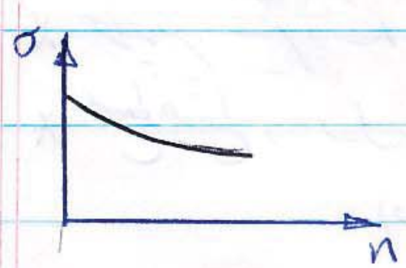


بعضی مصالح وقتی تحت بار ثابت قرار می‌گیرند طی گذشت زمان تغییر شکل‌های بیشتری ایجاد می‌کنند.

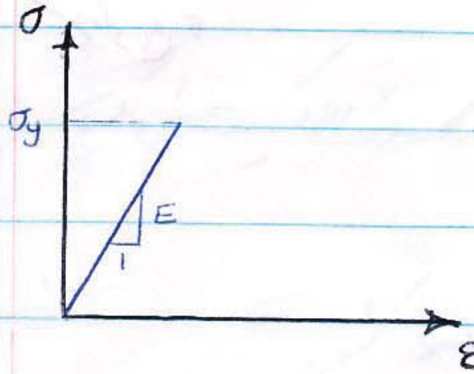


خستگی:

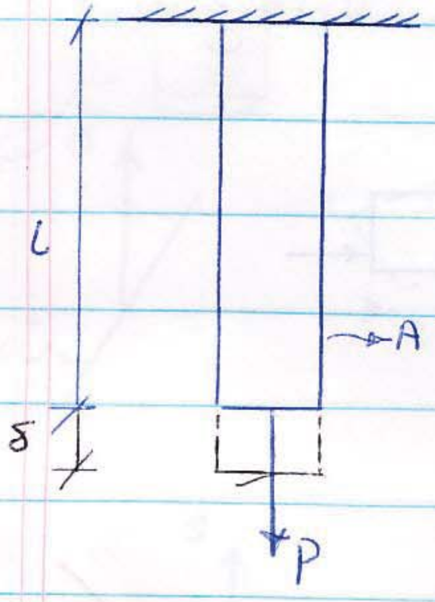
قطعاتی که تحت بارهای تناوبی و تکراری باشند تحت زمان خسته می‌شوند
مقاومتش را کاهش دهند



تغییر شکل محوری در اعضا تحت بار محوری



کل طراحی ها در محدوده ی الاستیک خطی است.



عضو مقابل عضو با مقطع منشوری است.

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \varepsilon . L = \frac{\sigma}{E} . L = \frac{PL}{EA}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

* هرچه نیرو بیشتر باشد δ بیشتر است. هرچه طول عضو بیشتر شود δ بیشتر می شود
* سطح مقطع و مدول الاستیک با δ رابطه عکس دارد.

1) $\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow P = \frac{EA}{L}\,\delta$ (فرمول سختی)

$\frac{EA}{L} \longrightarrow$ (stiffness) ثابت سختی محوری در واحد طول

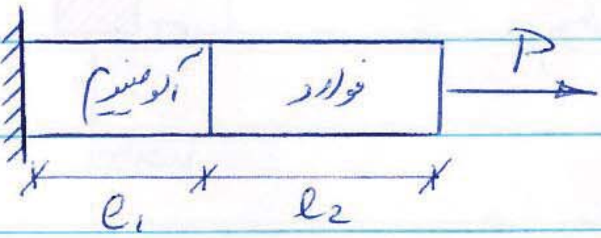
برای پایین آوردن تغییر محوری دنبال این می‌گردیم که $\frac{EA}{L}$ آن بیشتر شود.

2) $\delta = \frac{PL}{EA}$ (فرمول کلی)

$\frac{L}{EA} \longrightarrow$ (Complience) ثابت نرمی محوری در واحد طول

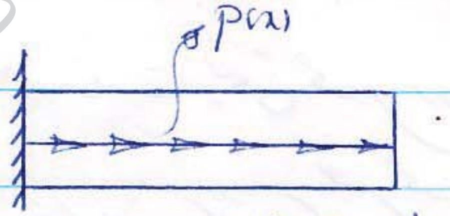
نکته: درباره‌ای که نیروی P و سطح مقطع A و جنس مصالح باید ثابت باشد تا بتوانیم از فرمول $\delta = \frac{PL}{EA}$ استفاده کنیم.

مثال: تغییر طول محوری عضو مقابل را حساب کنید.



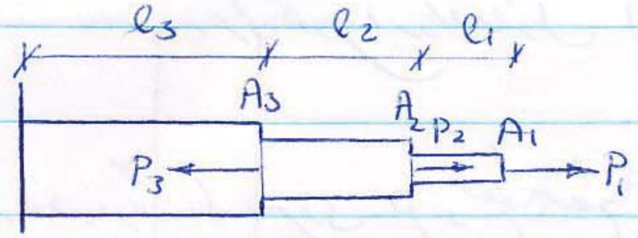
$$\delta = \frac{Pl_1}{AE_1} + \frac{Pl_2}{AE_2}$$

مثال: تغییر مکان عضو مقابل را بدست آورید.



$$\delta = \int_0^l \frac{P(x)\,dx}{AE}$$

مثال: تغییر مکان انتهای عضو را حساب کنید.



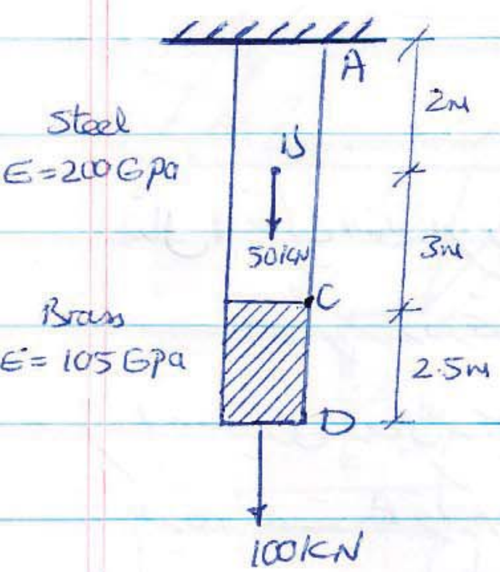
$$\delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i L_i}{E_i \; i}$$

هرگاه در مقاطع خاصی بر طول نمونه تغییراتی در سطح مقطع یا نیروی محوری یا جنس مصالح داشته باشیم آنگاه:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

هرگاه در مقطع خاصی در طول عضو نیروی محوری، سطح مقطع و مدول ارتجاعی به صورت توابعی پیوسته بیان شوند به طوری که این توابع بیان کننده‌ی این تغییرات با انتگرال‌گیری در طول عضو باشد آنگاه فرمول تغییر شکل محوری از رابطه زیر بیان خواهد شد.

$$\delta = \int_0^{l} \frac{P(x)\,dx}{E(x)\,A(x)}$$



مثال: قطر عضو در کل میله ثابت و 36mm است. اگر وزن میله صرف نظر شود مطلوبست میزان تغییر شکل محوری در نقطه C و D.

* هرگاه تغییرات به طور پیوسته صورت گیرد از انتگرال استفاده می‌کنیم اما اگر به طور ناگهانی صورت پذیرد از Σ استفاده می‌کنیم.

$\delta_{D/A}$: تغییر شکل محوری D نسبت به A.

$$\delta_{D/A} = \delta_D - \cancel{\delta_A}^{0} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

$$\delta_{C/A} = \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

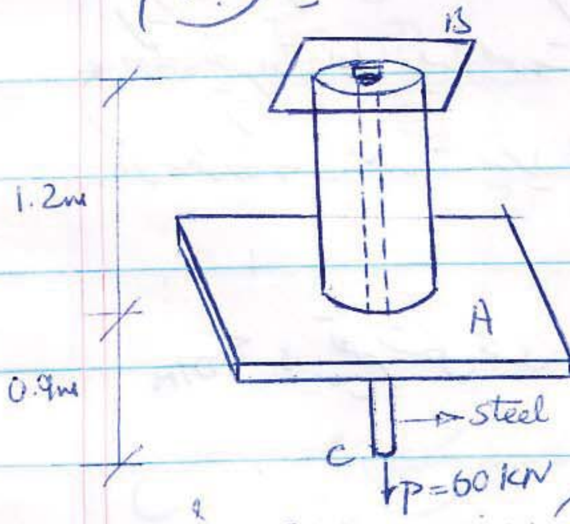
$$\delta_{C/A} = \frac{100\times10^3\times3}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}(0.036)^2} + \frac{150\times10^3\times2}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}(0.036)^2} = 2.95\,mm$$

$$\delta_D = \delta_{D/C} + \delta_{C/A} = \delta_{D/C} + 2.95\,mm$$

$$= \frac{100\times10^3\times2.5}{105\times10^9\times\frac{\pi}{4}(36)^2\times10^{-6}} + 2.95\,mm = 2.34 + 2.95 = 5.29\,mm$$

مثال: تیوب استوانه‌ای بر روی تکیه‌گاهی قرار دارد. تیوب توخالی است. سیلندر به جسم صلب جوش خورده و تحت نیروی P قرار می‌گیرد.

یک سیلندر توخالی به سطح مقطع $1100\ mm^2$ بر روی تکیه‌گاه ثابت A قرار گرفته است. میله فولادی BC به قطر 15mm مطابق شکل از یک صفحه صلب که در بالای استوانه قرار گرفته است آویزان شده. اگر بدانیم مدول الاستیسیته فولاد 200Gpa و آلومینیوم 70Gpa باشد، مطلوبست تغییر شکل نقطه C اگر بار 60 KNP فرض شود.



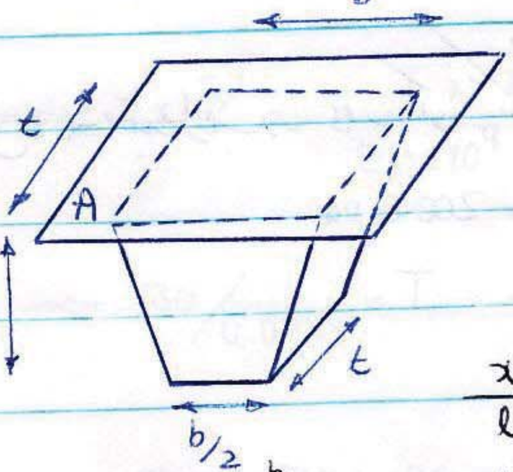
حمید کاظم

$$\delta_C = \overset{\text{میله}}{\delta_{C/B}} + \overset{\text{تیوب}}{|\delta_{B/A}|}$$

$$= \frac{60\times10^3\times2.1}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}(15)^2\times10^{-6}} + \frac{60\times10^3\times1.2}{70\times10^9\times1100\times10^{-6}} =$$

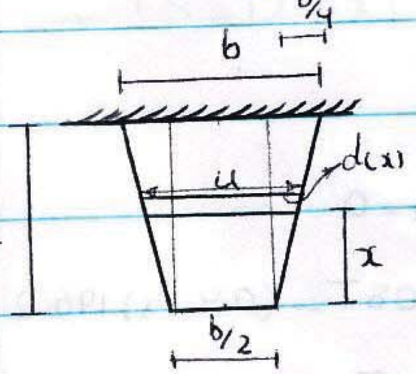
$$= 3.56\,mm + 0.935\,mm = 4.495\,mm$$

مثال: صفحه ذوزنقه‌ای شکلی با ضخامت t از نقطه A معلق می‌باشد. اگر ρ را علامت ($\frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}$) فرض کنیم، مطلوبست تغییر شکل صفحه بواسطه وزن آن.



$$\frac{x}{l} = \frac{d(x)}{b/4} \Rightarrow d(x) = \frac{bx}{4l}$$

$$\rightarrow u(x) = \frac{b}{2} + 2d(x) = \frac{b}{2}(1+x/l)$$



$$A(x) = u(x)\,t = \frac{bt}{2}(1+x/l)$$

$$p(x) = m(x)g = \rho V(x) g = \rho g t\left(\frac{b/2+u(x)}{2}\right)x$$

$$= \rho g t x\left(\frac{b/2(2+x/l)}{2}\right)$$

$$\delta = \int_0^l \frac{P(x)\,dx}{E A(x)} = \int_0^l \rho g t x\left(\frac{b(2+x/l)}{4}\right)\frac{dx}{E\frac{bt}{2}(1+\frac{x}{l})} = \int_0$$

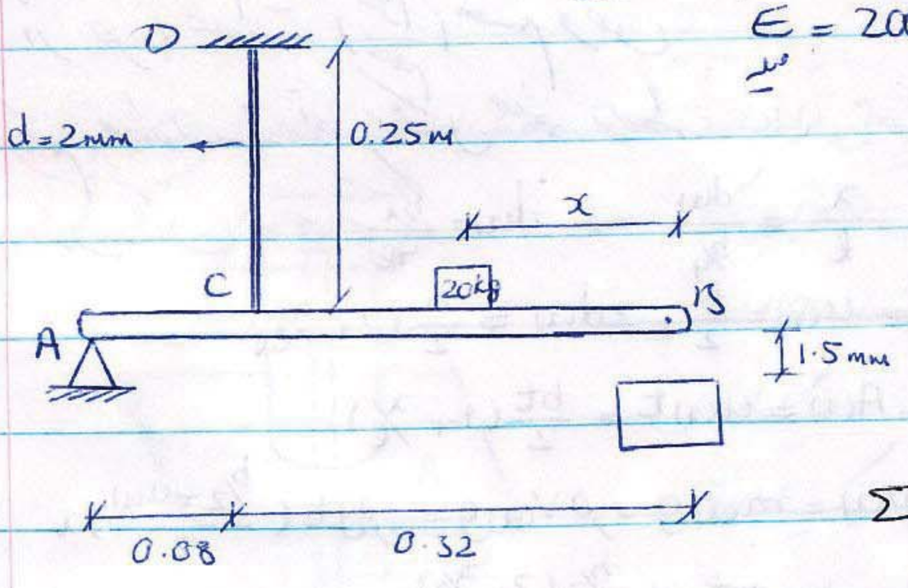
$$= \frac{\rho g}{2E}\int_0^{l} x\left(\frac{2+x/l}{1+x/l}\right)dx \qquad 1+x/l = v \Rightarrow dx = l\,dv$$

$$= \frac{\rho g}{2E}\int_1^{2} l(v-1)\,\frac{v+1}{v}\,l\,dv = \frac{\rho g}{2E}l^2\int_1^{2}\frac{v^2-1}{v}dv = \frac{\rho g}{2E}l^2\int_1^{2}\left(v-\frac{1}{v}\right)dv$$

$$= \frac{\rho g l^2}{2E}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \ln v\right)\Big]_1^2 = \frac{\rho g l^2}{2E}\left(3/2 - \ln 2\right) = 0.403\,\frac{\rho g l^2}{E}$$

مثال: x چقدر باشد تا انتهای تیر با تکیه‌گاه تماس پیدا کند

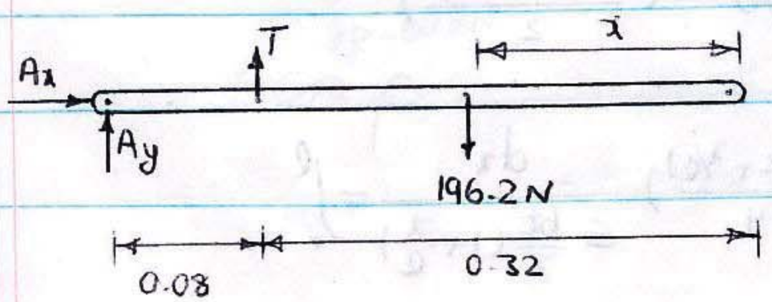
$E_{\text{میله}} = 200\,Gpa$

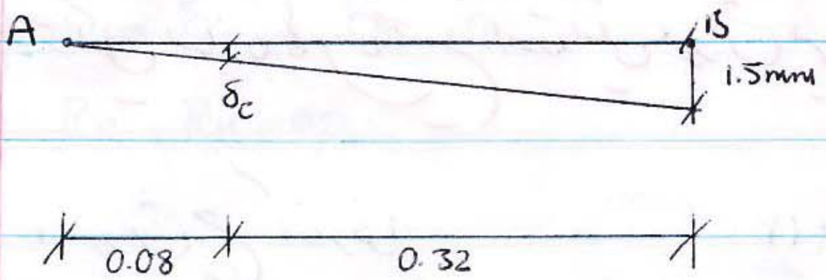


$\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow 0.08T - (0.4 - x)\,196.2 = 0$

$\Rightarrow T = (5 - 12.5x)\,196.2$





$$\frac{1.5\times10^{-3}}{0.4} = \frac{\delta_c}{0.08} \Rightarrow \delta_c = 0.3\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow 3\times10^{-4} = \frac{T\times 25\times10^{-2}}{200\times10^{9}\times\frac{\pi}{4}(4)\times10^{-6}} \Rightarrow 3\times10^{-4} = T(0.0398)\times10^{-5}$$

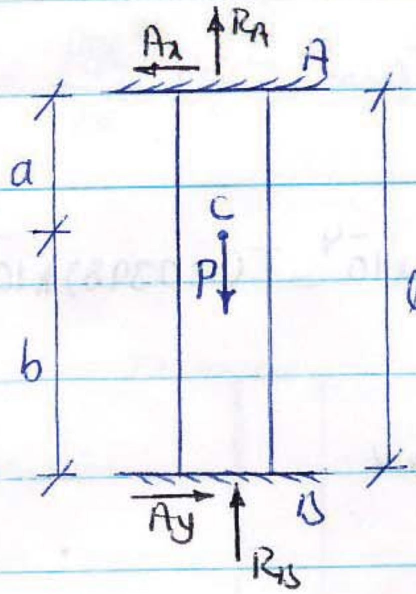
$$\Rightarrow 30/_{0.0398} = T \Rightarrow T = 753.77\ N$$

$$\rightarrow (5-12.5x)\,196.2 = 753.77 \Rightarrow x = 0.092\,m$$

تحلیل سازه های نامعین استاتیکی بروش نیروها

۱) روش جمع آثار قوا   ۲) روش سازگاری تغییر شکل ها

روش
عکس العمل های تکیه گاهی در A , B را بدست آورید

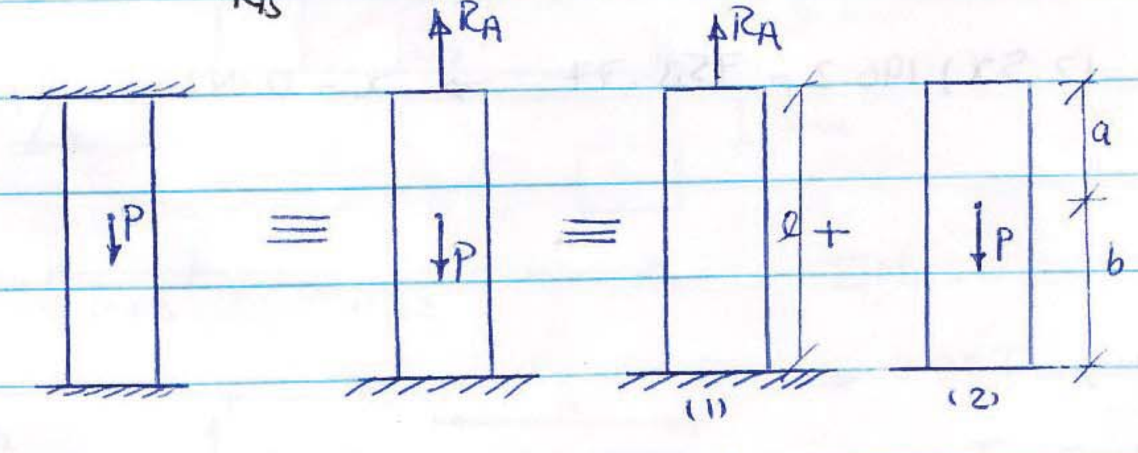


$$\sum M_C = 0 \Rightarrow A_x a + A_y b = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = A_y$$

$$\Rightarrow A_x (a+b) = 0 \Rightarrow A_x = A_y = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$$



$$\underset{(1)}{\delta_A} = \delta_A^{R_A} + \delta_A^{P} = 0$$

(1)   (2)

رابطه سازگاری تغییر شکل

$$\begin{cases} \delta = \delta_A^{R_A} + \delta_A^{P} = 0 \\ R_A + R_B = P \end{cases}$$

$$\delta = \delta_A^{R_A} + \delta_A^{P} = 0 \Longrightarrow \frac{R_A L}{E \cdot A} - \frac{P \cdot b}{EA} = 0$$

$$\Longrightarrow R_A = \frac{P \cdot b}{L}$$

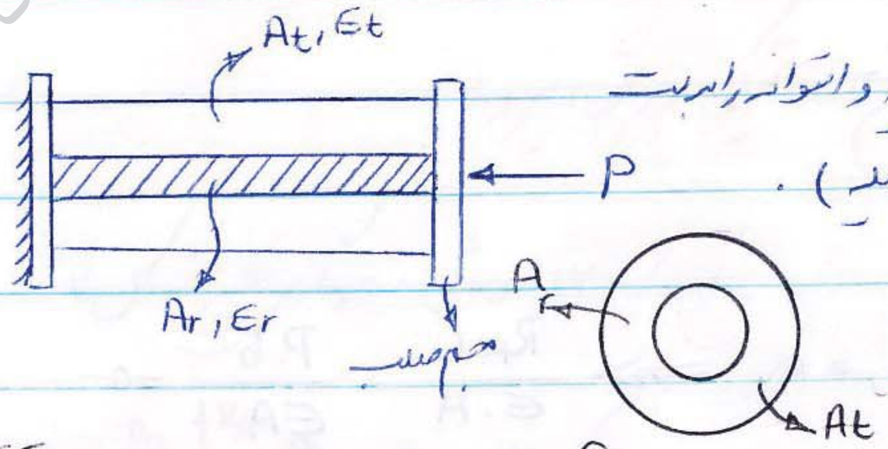
$$R_A + R_B = P \Longrightarrow \frac{P \cdot b}{L} + R_B = P \Longrightarrow R_B = P - \frac{P \cdot b}{L} = \frac{P \cdot a}{L}$$

$$\Longrightarrow R_A = \frac{P \cdot b}{L} \qquad R_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

پس برای حل باید از روش جمع آثار قوا و روش سازگاری تغییر شکل استفاده کنیم.

اصل سوپرپوزیسیون (Super-position Principal):

اصل سوپرپوزیسیون (اصل جمع قوا، جمع آثار) می گوید: تنش ها و تغییر شکل های ناشی از یک مجموعه نیرو بر روی یک سیستم برابر است با جمع جبری تنش ها و تغییر شکل ها.



مثال ۶: تنش های موجود در میله و استوانه را بدست آورید (تنش های پوسته و میله).

یک درجه نامعینی وجود دارد.

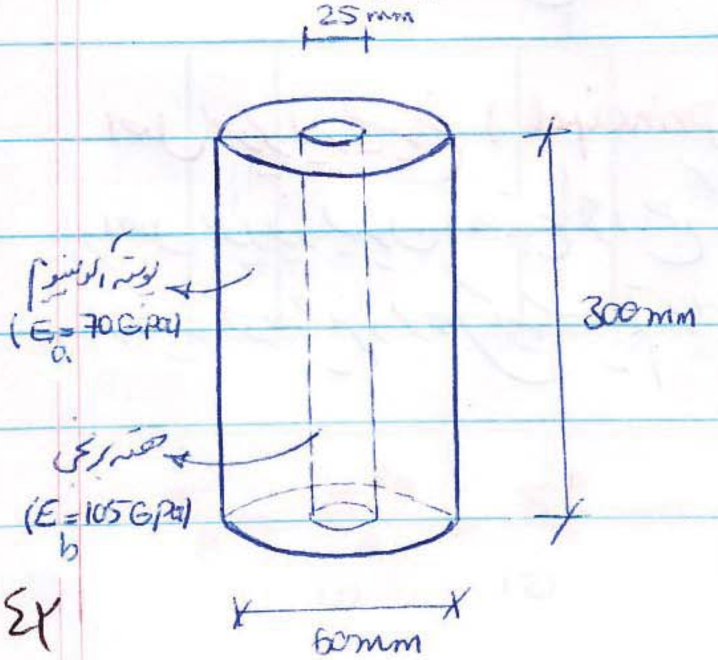
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_t + P_r = P \quad ①$$

معادله سازگاری تغییرشکل ها به صورت مقابل است.

$$\delta_t = \delta_r$$

$$\Rightarrow \frac{P_t \cdot \cancel{L}}{E_t \cdot A_t} = \frac{P_r \cdot \cancel{L}}{E_r \cdot A_r} \Rightarrow P_t = \frac{E_t \cdot A_t}{E_r \cdot A_r} P_r$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{E_t \cdot A_t}{E_t A_t + A_r E_r} P \quad , \quad P_r = \frac{E_r A_r}{E_t A_t + A_r E_r} P$$



مثال ۶: اگر طول کل مجموعه به اندازه 0.4mm کوتاه گردد، این کوتاه شدگی توسط نیروی محوری بوجود آمده. مطلوبست:

میزان نیروی وارده به این مجموعه و تنش بوجود آمده در حلقه برنجی.

حمید کاظم

$$P = P_a + P_b$$

$$\delta_a = \delta_b = -0.4\ mm = \delta$$

$$P = \left(\frac{E_a A_a + E_b A_b}{L}\right)\delta$$

$$A_a = \frac{\pi}{4}(60^2 - 25^2) = 2336.6\ mm^2$$

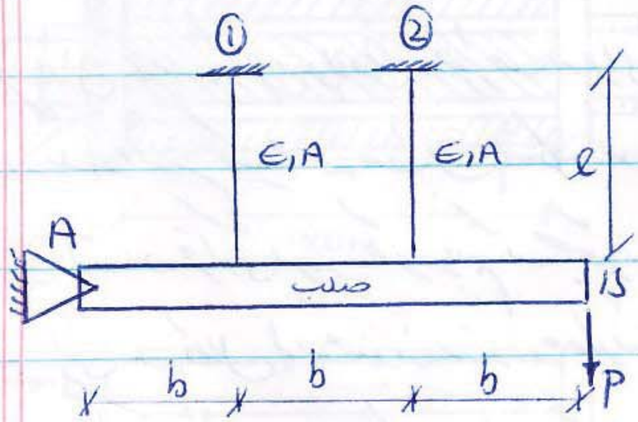
$$L = 300\ mm$$

$$A_b = \frac{\pi}{4}(25)^2 = 490.9\ mm^2$$

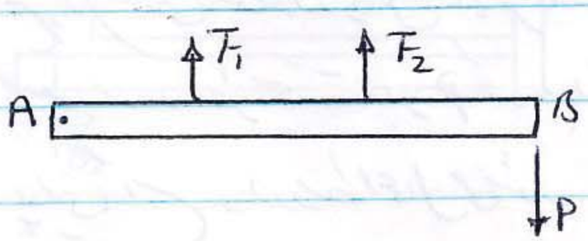
$$\Longrightarrow P = -287\ kN$$

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{\frac{E_b \cdot \cancel{A_b} \cdot \delta}{L}}{\cancel{A_b}} = \frac{105 \times 10^3 \times (-0.04)}{300} = 0.14\ Gpa$$

مثال: از عضو افقی AB را صلب فرض کنیم تنش های بوجود آمده در کابل های ① و ② چقدر است



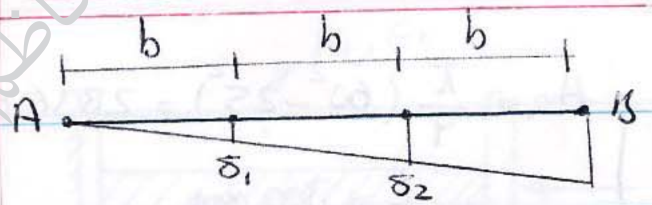
چون عضو صلب است پس تغییر شکل ندارد.



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_A = 0 \rightarrow$$

$$F_1 \times b + F_2(2b) - P(3b) = 0$$

$$\rightarrow F_1 + 2F_2 = 3P \quad (\mathrm{I})$$

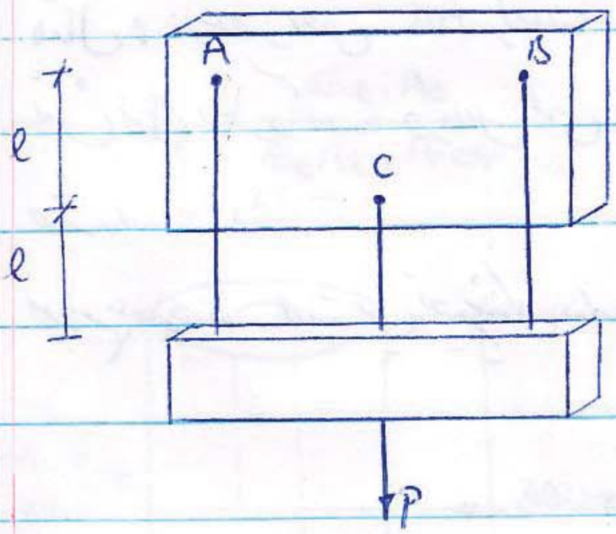


$$\delta_1 = \frac{1}{2}\delta_2$$

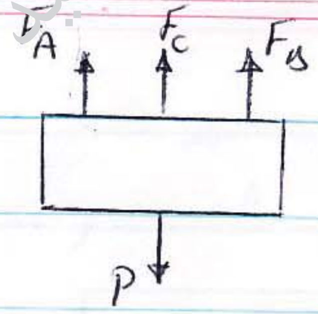
$$\Rightarrow \frac{F_1 L}{EA} = \frac{F_2 L}{2EA} \rightarrow F_2 = 2F_1 \quad \text{II}$$

$$\text{I}, \text{II} \Rightarrow 5F_1 = 3P \Rightarrow F_1 = \frac{3}{5}P \quad , \quad F_2 = \frac{6P}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{3P}{5A} \qquad \sigma_2 = \frac{6P}{5A}$$



مثال 6 سه کابل فولادی با مقطع مشابه برای نگه داشتن یک صفحه صلب مطابق شکل مورد الف در حرارت [illegible]. اگر بدانیم که هیچگونه شلی در کابل ها موجود نباشد، مطلوب است نیروهای کششی موجود در کابل ها هنگامی که صفحه مورد نظر تحت بار P که بر لبه پائینی آن و در وسط اعمال می شود.

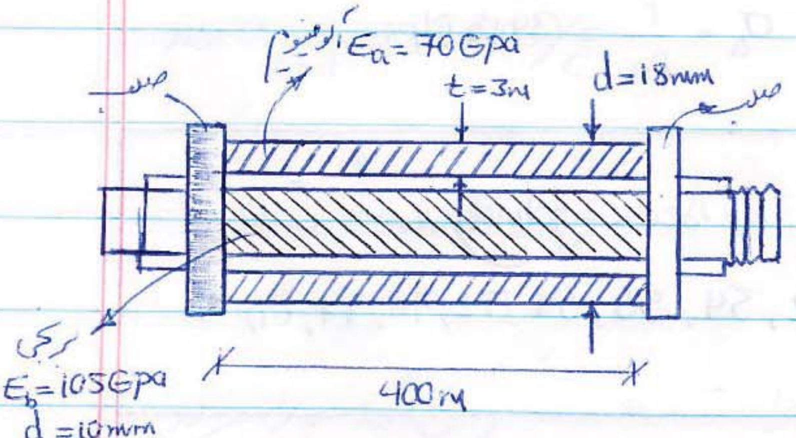


$$F_A + F_B + F_C = P \qquad (\Sigma F_y = 0)$$

$$F_A = F_B \qquad (\Sigma M = 0)$$

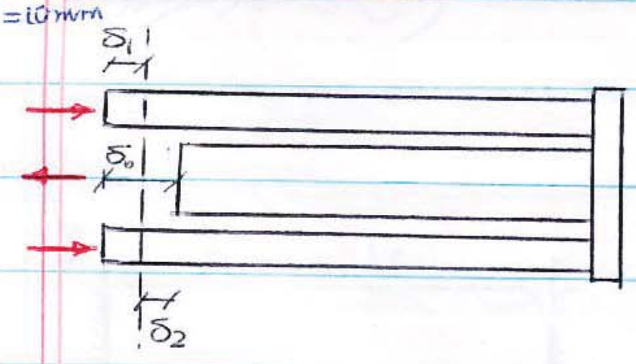
$$\delta_A = \delta_B = \delta_C \Rightarrow \frac{F_A(2L)}{EA} = \frac{F_C \cdot L}{EA} \Rightarrow F_C = 2F_A = 2F_B$$

$$F_A + F_A + 2F_A = P \Rightarrow F_A = P/4 \ , \ F_B = P/4 \ , \ F_C = P/2$$



مثال 6 اگر طول گام مهره 2mm باشد و مهره اندازه 1/4 دور پیچ را حرکت دهیم مطلوبست تنش نرمال ایجاد شده در Bolt برنجی و تیوب آلومینیومی.

فرض کنیم صفحه صلب باشد



$$\delta_0 = \frac{1}{4}(2mm) = 0.5\,mm$$

δ_1 ← فشرده شدن آلومینیوم (لوله)

δ_2 ← کشیده شدن Bolt برنجی

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_0 = 0.5\,mm$$

رابطه سازگاری تغییر شکل

حمید کاظم

$$P_a = P_b = P$$

(تویب) العضو $\delta_1 = \dfrac{P_a \cdot L}{A_a E_a} = \dfrac{P_a \cdot L}{70\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(18^2-12^2)}$

$$\delta_2 = \frac{P_b L}{A_b E_b} = \frac{P_b \cdot L}{105\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(10)^2}$$

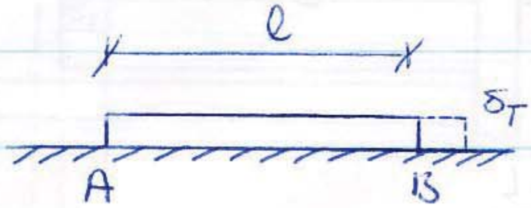
$$\Longrightarrow P_a = P_b = 5.62\,kN$$

$\sigma_b = \dfrac{P}{A_b} = 71.6\,Mpa$ $\qquad \sigma_a = \dfrac{P}{A_a} = 39.8\,Mpa$

سوالات پیشنهادی Beer-johnston

فصل ۲ : 13, 14, 26, 30, 43, 52, 54, 56, 64, 72, 76, 77, 84, 88
96, 102, 112, 118

مسائل مربوط به بارگذاری حرارتی (نامعین):



α : ضریب انبساط حرارتی

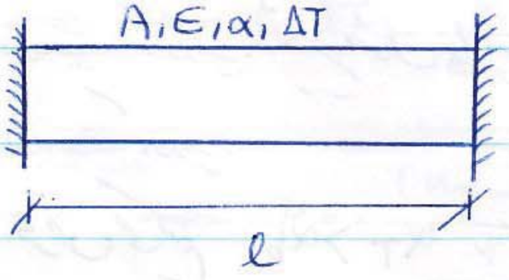
ΔT : اختلاف دما

$$\delta_T = \alpha . L . \Delta T \longrightarrow \delta_T = \int_0^L \alpha . T_{(x)} . dx$$

$$\text{فولاد } \alpha_{steel} = 12 \times 10^{-6}\ {}^{1}/_{^\circ C}$$

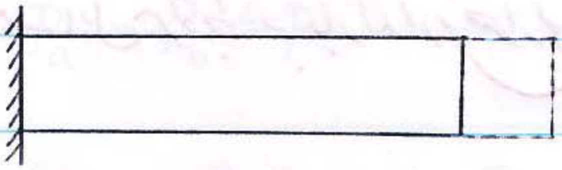
$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha . \Delta T$$

* در مسائل معین استاتیکی افزایش یا کاهش حرارت باعث تنش نمی‌شود زیرا این در مقاومت مصالح بررسی نمی‌شود.

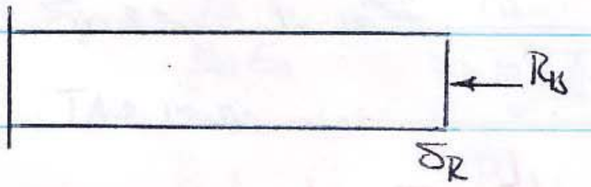


مثال: عضو مقابل دارای مشخصات مشخص می‌باشد. تعیین کنید تنش نرمال ایجاد شده در تیر بر اثر افزایش ΔT دما.

سازه یک درجه نامعین است.



$$\delta_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T$$

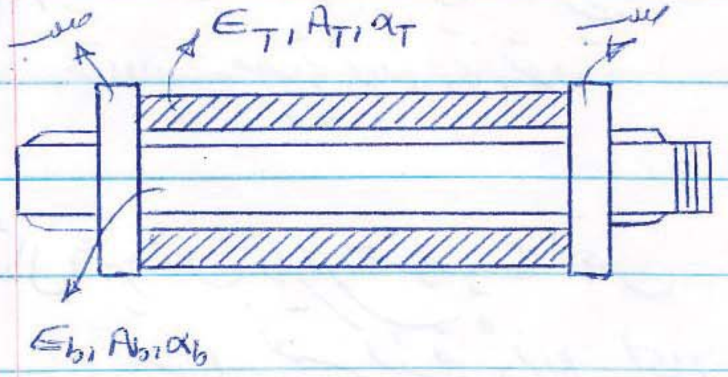


$$\delta_R = \frac{R_B \cdot L}{EA}$$

شرایط سازگاری تغییر شکل : $\delta_T = \delta_R \Rightarrow \alpha \cdot \cancel{L} \cdot \Delta T = \frac{R_B \cdot \cancel{L}}{AE} \Rightarrow R_B = \alpha \Delta T A E$

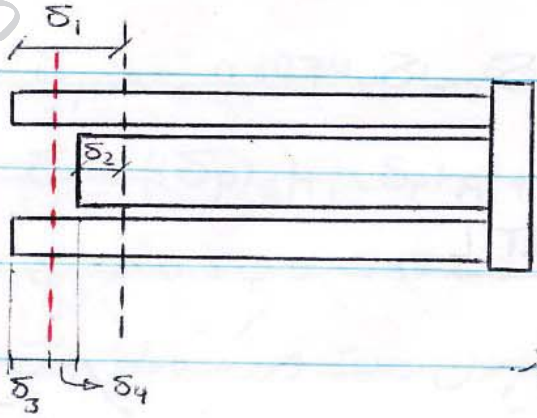
$$\Rightarrow \sigma_B = E \alpha \Delta T$$

راه دوم : رابطه هوک ← $\sigma = E \cdot \varepsilon_T = E \alpha \cdot \Delta T$



مثال : تنش ایجاد شده در Bolt و لوله در اثر اعمال حرارت ΔT را بدست آورید. تغییر طول را نیز بدست آورید.

فرض می کنیم $\alpha_T > \alpha_b$. * اگر $\alpha_T = \alpha_b$ باشد تنش ایجاد نمی شود.



هم صلب سمت چپ را داریم

موقعیت نهایی صفحه صلب در راستای

خط چین قرمز است

در این حالت لوله فشرده می شود و Bolt کشیده می شود.

روابط سازگاری تغییر شکل

$$\overset{\text{لوله}}{\delta_1 - \delta_3} = \overset{\text{بولت (Bolt)}}{\delta_2 + \delta_4} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T \\ \delta_2 = \alpha_b \cdot L \, \Delta T \end{cases}$$

$$(2) \quad P_b = P_t = P$$

برای δ_3 و δ_4 تغییر طول را به علت کوچک بودن در نظر نمی گیریم و طول را همان l در نظر می گیریم. (به جای $l+\delta_2$)

$$\delta_3 = \frac{P.L}{E_T.A_T} \qquad \delta_4 = \frac{P.L}{E_b.A_b}$$

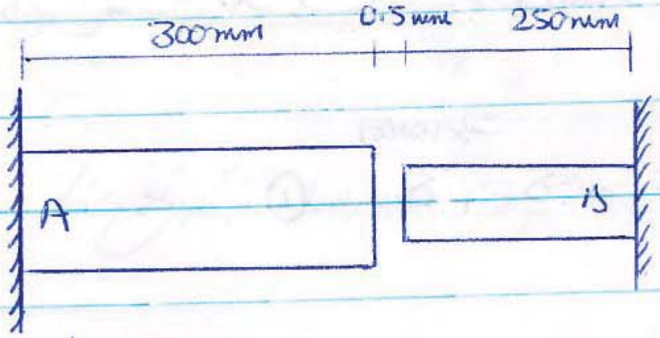
$$(1),(2) \Longrightarrow \alpha_T . L . \Delta T - \frac{P.L}{E_T A_T} = \alpha_b L \Delta T + \frac{PL}{E_b A_b}$$

$$\Longrightarrow P = \frac{(\alpha_T - \alpha_b) . \Delta T}{\frac{1}{E_T A_T} + \frac{1}{E_b A_b}}$$

حمید کاظم

تغییر شکل نهایی $\delta = \delta_1 - \delta_2 = \delta_3 + \delta_4$

$$\Longrightarrow \delta = \frac{(\alpha_T E_T A_T + \alpha_b E_b A_b)\,\Delta T . L}{E_T A_T + E_b A_b}$$



مثال ۶: اگر بدانیم در ابتدا دمای اولیه برابر $20^\circ C$ باشد، محاسبه کنید در چه دمای تنش نرمال در عضو فولادی به میزان $\sigma = -150\ MPa$ خواهد رسید؟ در این دما طول دقیق عضو فولادی را حساب کنید.

A: آلومینیوم: $A = 2000\ mm^2$, $E = 70\ GPa$, $\alpha = 23 \times 10^{-6} /^\circ C$

B: فولاد: $A = 800\ mm^2$, $E = 190\ GPa$, $\alpha = 18 \times 10^{-6} /^\circ C$

نیروی $P = \sigma A_B = -150(800) = -120\ kN$

$$(\delta_p)_B = \frac{P.L}{E.A} = \frac{-120 \times 10^3 \times 250}{190 \times 10^3 \times 800} = -0.1974\ mm$$

$$(\delta_p)_A = \frac{P.L}{E.A} = \frac{-120 \times 10^3 \times 300}{70 \times 10^3 \times 2000} = -0.2571\ mm$$

$$\delta_p = -0.1974 + (-0.2571) = -0.4545 \text{ mm}$$

$$\delta_T = |(\delta_p)_{st}| + |(\delta_p)_A| + 0.5\text{mm} = |\delta_p| + 0.5\text{mm}$$

$$\delta_T = 0.5 + 0.4545 = 0.9545 \text{ mm}$$

تا 0.5mm کاملاً تغییر طول دیده می‌شود. از این به بعد تغییر طول به علت وجود تکیه‌گاه‌های راست، جلوی خودش را به شکل تنش و تولید نیرو نشان می‌دهد.

$$\delta_T = \sum \alpha_T . L . \Delta T = 18\times10^{-6} \times 250 \times \Delta T + 23\times10^{-6} \times 300 \times \Delta T = 0.9545$$

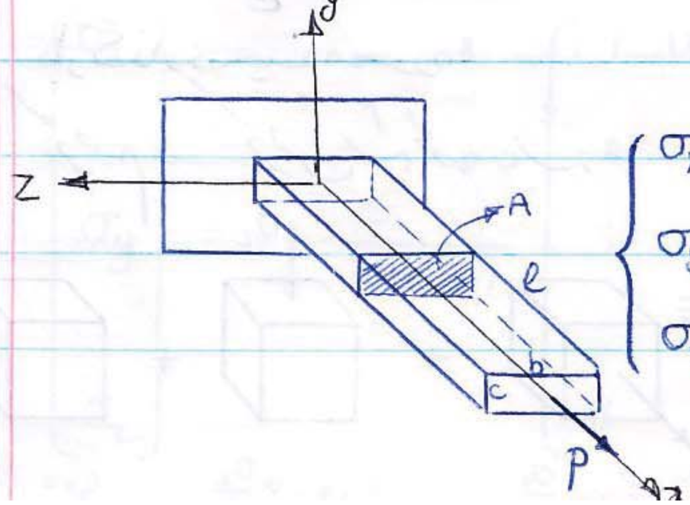
$$\Rightarrow \Delta T = 83.7^{\circ}$$

$$\Rightarrow T = 20 + 83.7 = 103.7^{\circ}$$

مقدار طول واقعی فولاد $= 250 + 18\times10^{-6}(250\times 83.7) - 0.1974 = 250.179$ m

---

ضریب پواسون 8



$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{P}{A} \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{EA}$$

اگر عضوی تحت کشش قرار گیرد ابعاد جانبی اش کوچک می شوند (b, c)

ثابت می شود برای اجسام ایزوتروپ $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ است

وقتی تنش (اعمال نیرو) در راستای محور x باشد:

$$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \right| = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right|$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

ε_z ، ε_y با ε_x مختلف العلامه هستند.

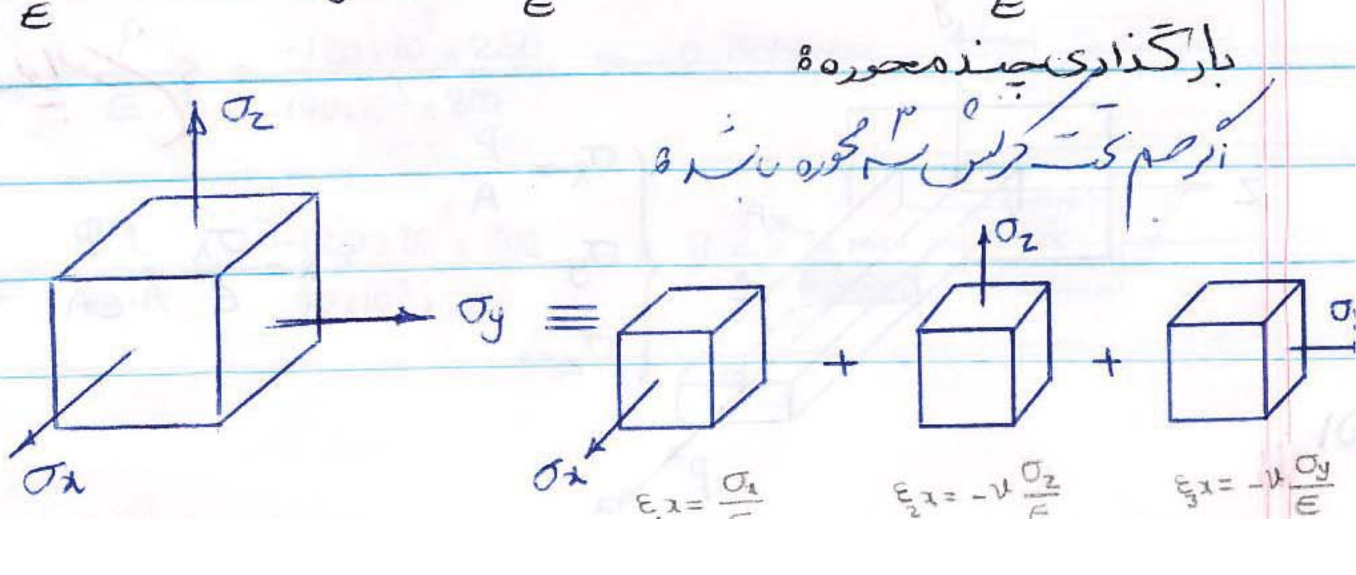
فولاد $\nu = 0.29 - 0.31$ بتن $\nu = 0.2 - 0.25$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

بارگذاری چند محوره:

اگر جسم تحت کرنش سه محوره باشد:



$$\varepsilon_{1x} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_{2x} = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_{3x} = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

۵۲

حمید کاظم

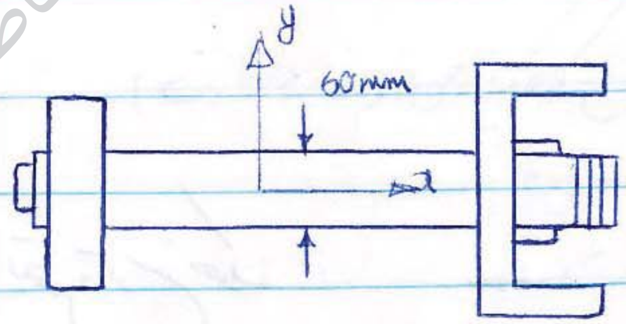
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex] \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \nu \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases} \longrightarrow$$

تعمیم قانون هوک

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ \frac{-\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

مثال ۶: اگر در اثر محکم کردن مهره انتهایی قطر این Bolt به اندازه 60.13 μm تغییر یابد، نیروی کششی ایجاد شده در Bolt را حساب کنید.



$E = 200\,GPa\ ,\quad \nu = 0.29$

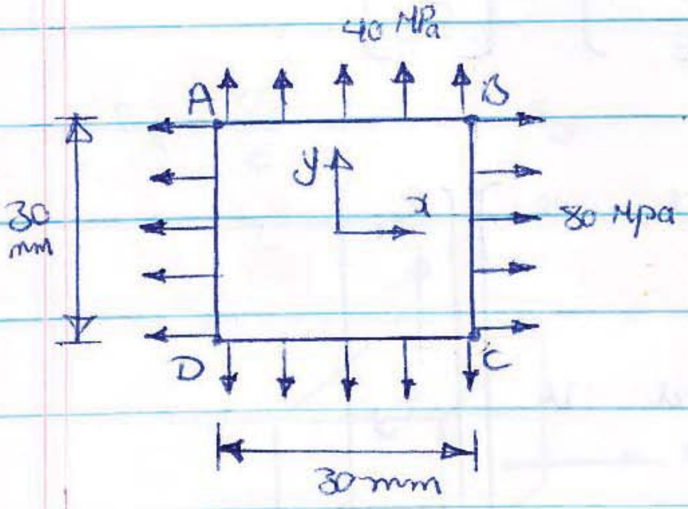
$$\varepsilon_y = \frac{-0.13 \times 10^{-3}}{60} = -2.167 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{216.7 \times 10^{-8}}{0.29} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{A \cdot E}$$

$$\Rightarrow P = 74.724 \times 10^{-8} \times 200 \times 10^{9} \times 2.826 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow P = 4.22\,KN$$

مثال ۷: صفحه مقابل تحت تنش دو محوره قرار دارد. مطلوبست تغییر در اندازه ضلع AB، BC و قطر AC.



$E = 200\,GPa$

$\nu = 0.3$

حميد كاظم

$\delta_x = \varepsilon_x \cdot \overline{AB}$ $\delta_y = \varepsilon_y \cdot \overline{BC}$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{200 \times 10^3}(80 - 0.3 \times 40) = 340 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{200 \times 10^3}(40 - 0.3 \times 80) = 80 \times 10^{-6}$$

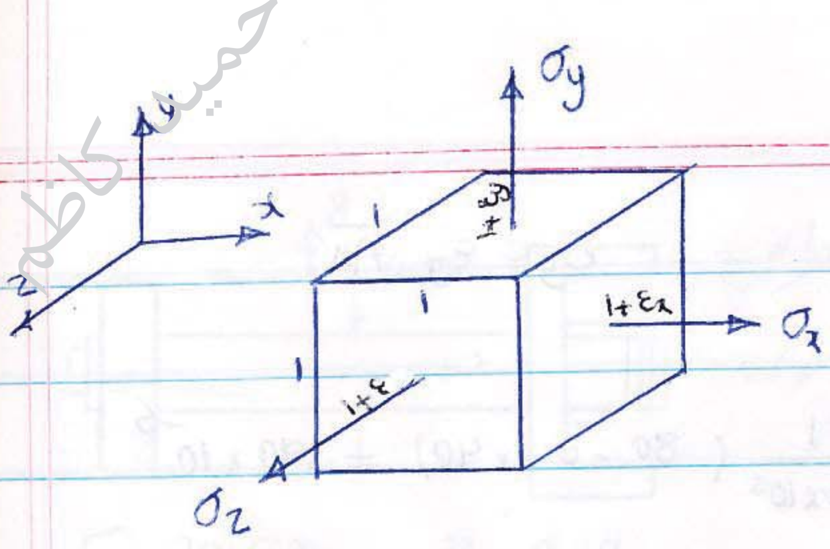
$$\begin{cases} \delta_{AB} = \varepsilon_x \cdot \overline{AB} = 340 \times 10^{-6} \times 30 = +10.2\,\mu m \\ \delta_{BC} = \varepsilon_y \cdot \overline{BC} = 80 \times 10^{-6} \times 30 = 2.4\,\mu m \end{cases}$$

جديد $AC^2 = (\overline{AB} + \delta_{AB})^2 + (\overline{BC} + \delta_{BC})^2$

$\Longrightarrow \delta_{AC} = 8.91\,\mu m$

	$\sigma_x \swarrow$	$\uparrow \sigma_z$	$\rightarrow \sigma_y$
ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_y}{E}$
ε_y	$-\nu\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$
ε_z	$-\nu\frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_y}{E}$

کرنش حجمی:



$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \xrightarrow{L=1} \varepsilon = \delta$$

$$V_0 = 1 \times 1 \times 1$$

$$V = (1+\varepsilon_x)\cdot(1+\varepsilon_y)\cdot(1+\varepsilon_z) =$$

$$\Rightarrow V = 1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$$

$$\Rightarrow V \simeq 1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

$$V_0 = abc \rightarrow \frac{V_0}{abc} = 1\times1\times1$$

$$V = (a+\delta_a)(b+\delta_b)(c+\delta_c) = abc(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_c)$$

$$e = \frac{V-V_0}{V_0} = \varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c$$

کرنش حجمی $e = \dfrac{V-V_0}{V_0}$

کرنش حجمی در تغییر شکل‌های حجم بسیار مهم است.

$$e = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

می‌توان کرنش حجمی را برحسب تنش نوشت:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y+\sigma_z)$$

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$\Rightarrow e = \frac{(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

حالت خاص : هرگاه جسم تحت فشار هیدرواستاتیک (آب) قرار گیرد :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\Rightarrow e = \frac{-3(1-2\nu)p}{E}$$

ضریب p را با K نشان می‌دهند که به K مدول بالک گویند.

مدول بالک ضریبی است که در استحکام حجمی جسم در مقابل فشارهای هیدرواستاتیک مقدار زیادی قرار می‌گیرد. این فرمول در علم مکانیک خاک مصداق‌های فراوان دارد.

$$e = \frac{-p}{K} \Rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

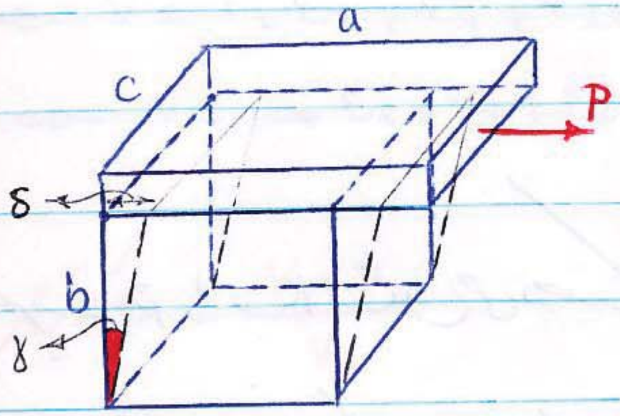
با توجه به اینکه در اثر فشار حجم کم شده، حجم رو به کاهش است این کرنش باید منفی باشد داریم:

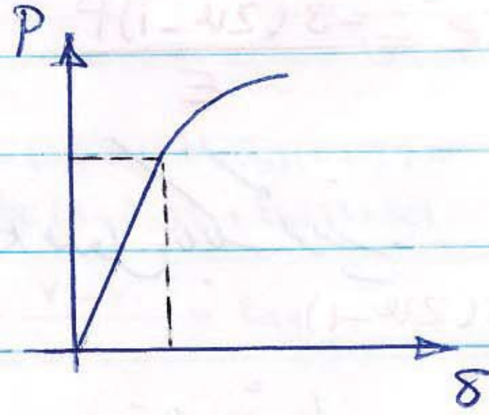
$$e<0 \Rightarrow K>0 \Rightarrow 1-2\nu>0$$

$$\Rightarrow 0<\nu<1/2 \Rightarrow \nu_{Max}=1/2$$

$0<\nu<1/2$ * مطابق تعریف فشار مثبت است.

کرنش برشی:





$$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{\delta}{b}\right)$$

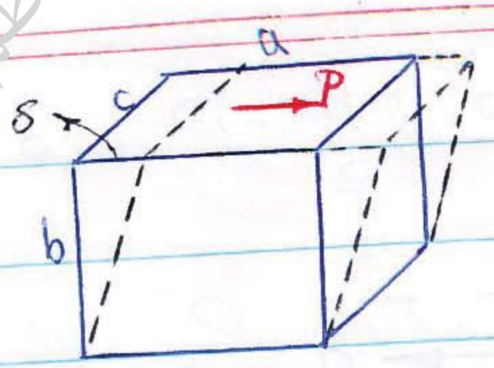
چون δ بسیار کوچک است پس:

$$\gamma = \frac{\delta}{b}$$

γ را کرنش برشی گویند و واحد ندارد. تنها کرنشی است که از جنس زاویه است.

* $\tau = G\gamma$ را رابطه هوک برای تنش و کرنش برشی می‌نامند. ثابت G را مدول صلبیت یا مدول برشی ساده گویند.

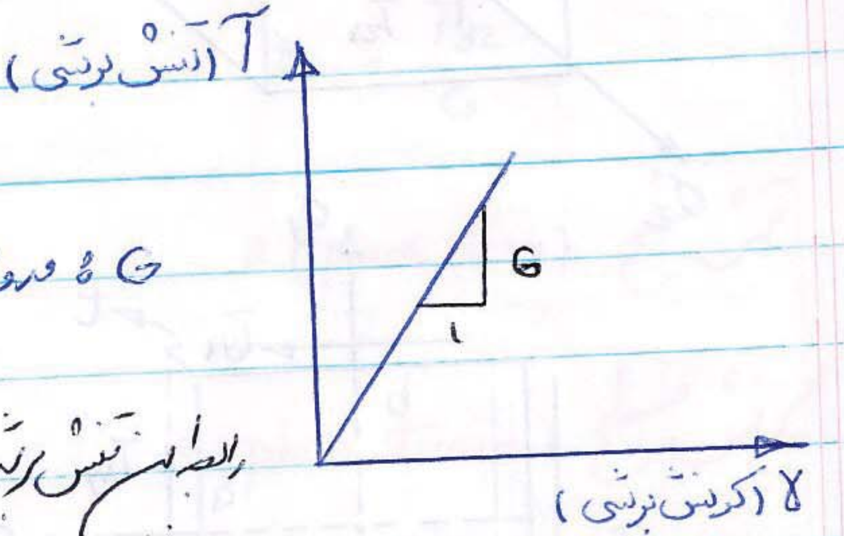
$\frac{1}{3}E < G < \frac{1}{2}E$



حجم برشی:

δ را تغییر شکل برشی یا جابجایی گویند.

$$\tau_{\text{تنش برشی}} = \frac{P}{a.c}$$



G: مدول ارتجاعی برشی

$\tau = G\gamma$ ⟵ رابطه بین تنش برشی و کرنش برشی

G: تنش برشی برای کرنش برشی واحد.

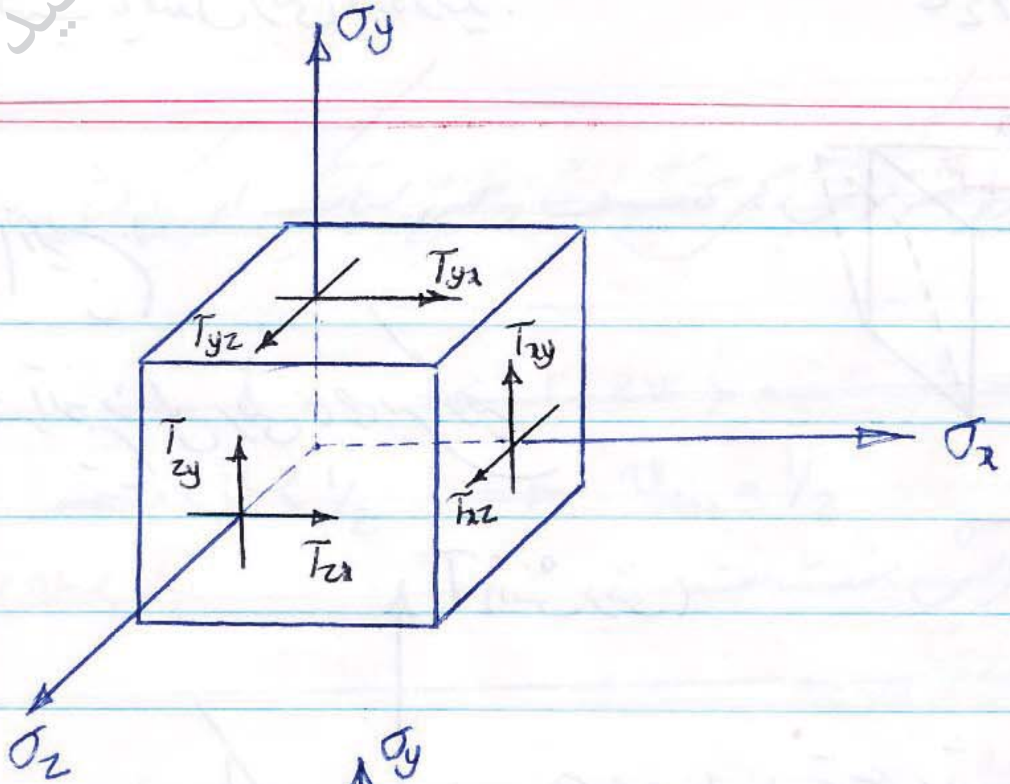
← مدول ارتجاعی در برشی یا مدول صلبیت

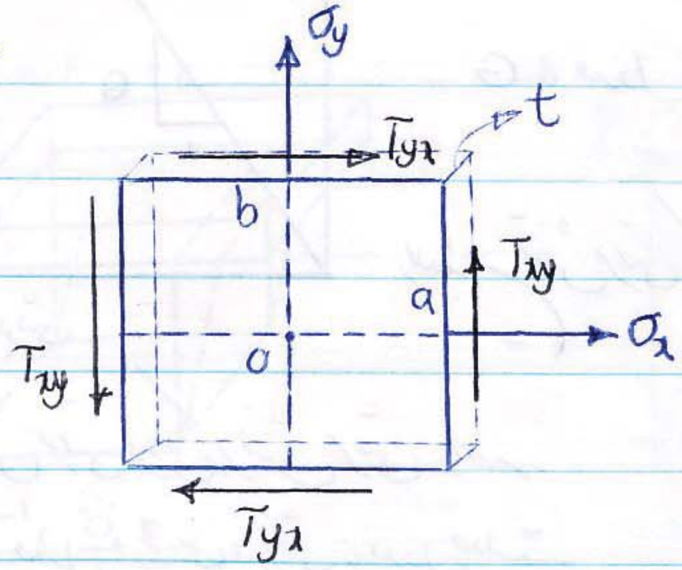
$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (\tau = G\gamma)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

نکته: از نظر شماتیک منحنی $\tau - \gamma$ (۱) هر یک از مصالح بسیار شبیه به منحنی $\sigma - \varepsilon$ (۲) است ولی مقادیر منحنی (۱) از منحنی (۲) کمتر است.

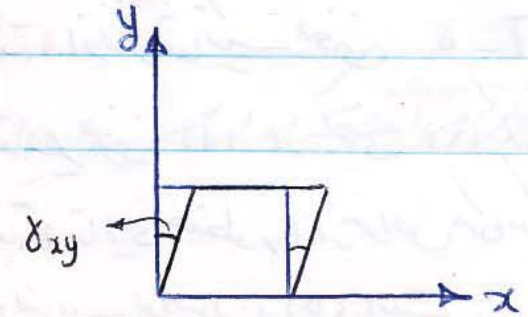
نکته: تا اینجا منظور ما از خواص مکانیکی مصالح، مدول الاستیسیته (E)، مدول ارتجاعی (G) و ضریب پواسون (ν) است.

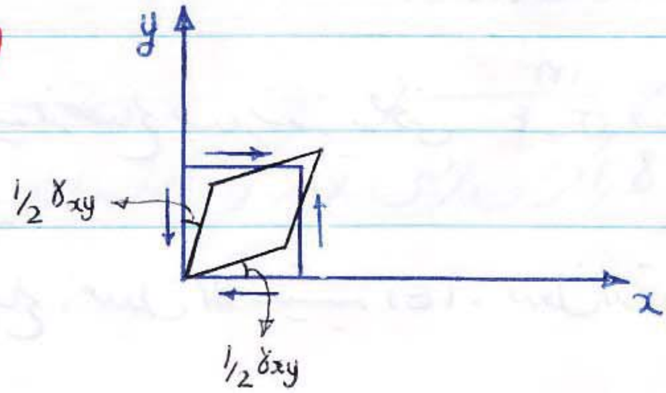




$$\Sigma M_o = 0 \Longrightarrow \tau_{yx}(b.t)\,a = \tau_{xy}(a.t)\,b$$

$$\Longrightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy}$$





معادله‌های تعمیم قانون هوک :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \\[2ex] \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\[2ex] \gamma_{xz} &= \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\[2ex] \gamma_{yz} &= \dfrac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned}$$

تنش مسطح (plane stress) :

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

کرنش مسطح (plane strain) :

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

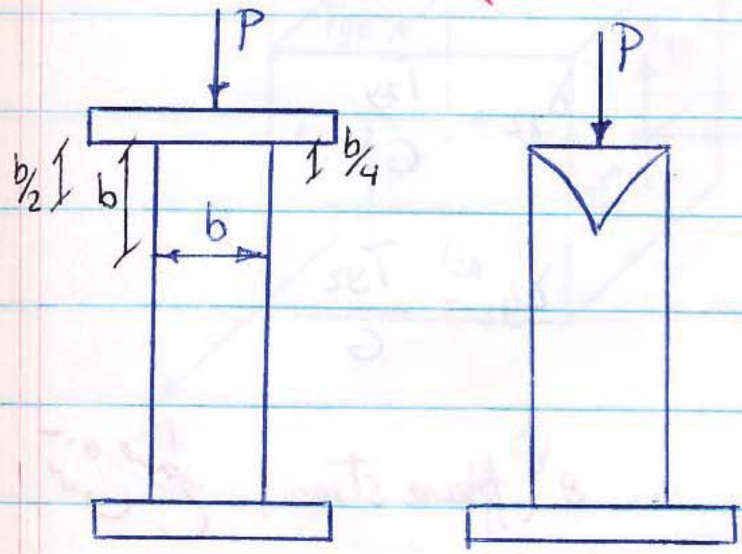
هر کرنش مسطح، تنش مسطح نیست و برعکس.

نکته : بررسی معادله‌های بالا ما را به این باور هدایت می‌کند که اگر می‌خواهیم تغییرات به وجود آمده توسط ترکیبی دلخواه از تنش‌ها را در یک مادهٔ معین پیش‌بینی کنیم، نخست باید ۳ ثابت متمایز E ، ν و G را به طور تجربی با آزمایش تعیین کنیم. در عمل فقط تعیین دو تا از ۳ ثابت برای هر مادهٔ معین لازم است، زیرا :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

تمرکز تنش:

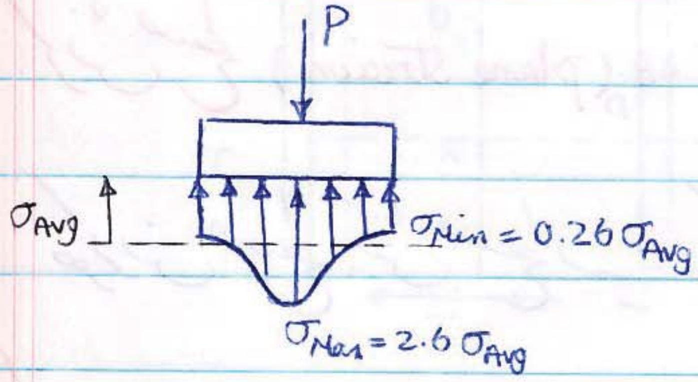
الف) اثر موضعی تنش ـ زیاد در محل تماس بار با جسم:



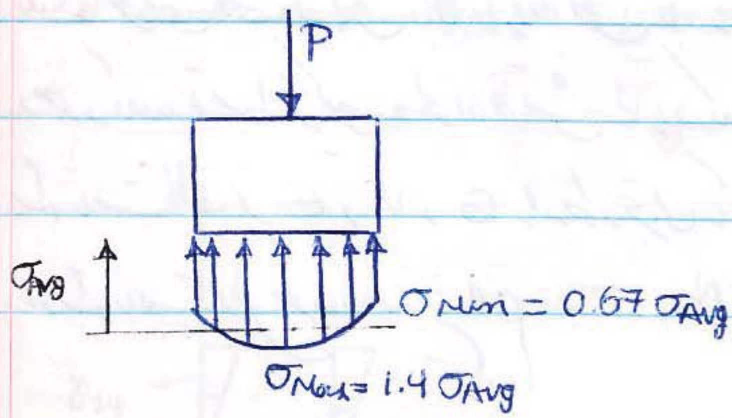
در b ، b/2 ، b/4 برش زده.

$$\sigma_{Avg} = \frac{P}{A}$$

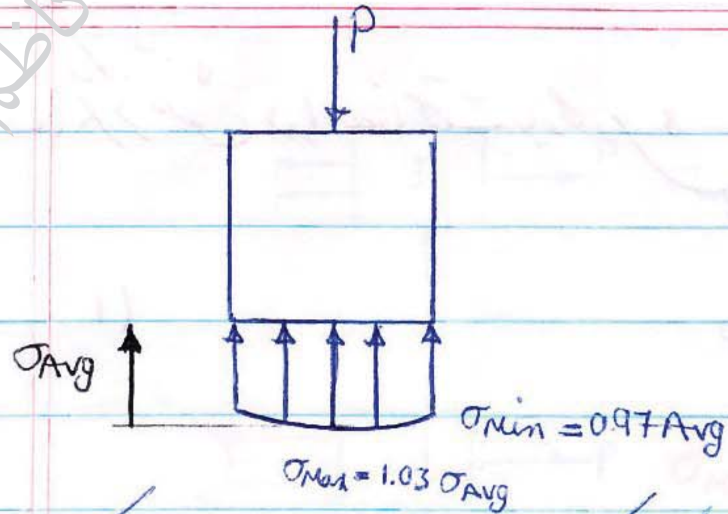
b/4 :



b/2 :



8 b



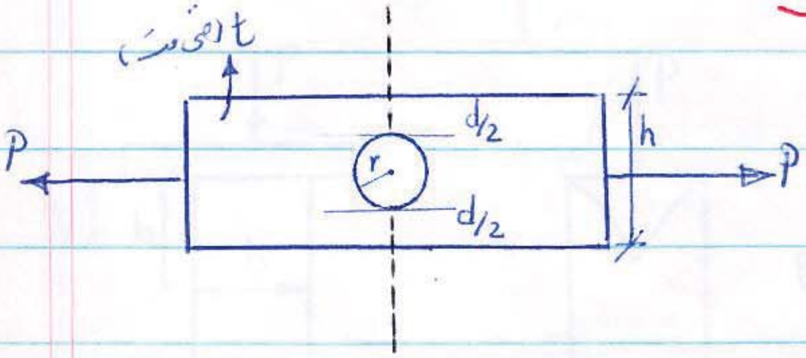
* بنابراین بهتر است از اعمال نیروی واحد متمرکز پرهیز کنیم و به کمک واسطه نیرو را اعمال کنیم. تا تنش Avg برای کل سطح ایجاد شود.

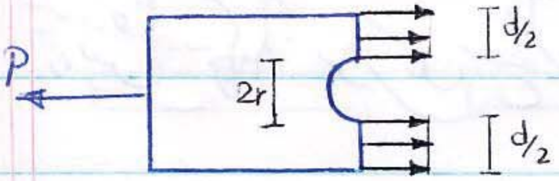
* در زندگی نکته با ارزش است. اگر چیزهای متوسط را بپذیرید، اغلب اوقات بهترین ها نصیب شما می شود (سامرست موام)

این اصل (اصل سن ونان) می گوید که در توزیع موثر نیروی بر یک جسم در صورتی که از نظر استاتیکی کاملاً یکسان باشند (یا اینکه این دو مجموعه نیرو یکسان باشند) در بخش هایی از جسم که به اندازه کافی از نقطه اثر نیروها دور هستند (تقریباً به اندازه عرض مقطع) دارای تاثیر یکسان هستند.

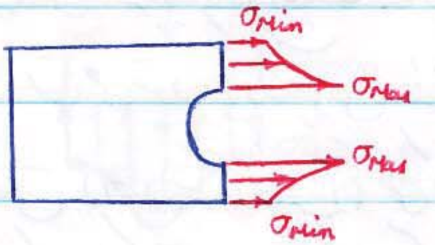
ب) تمرکز تنش در اعضای تحت بار محوری :

(1





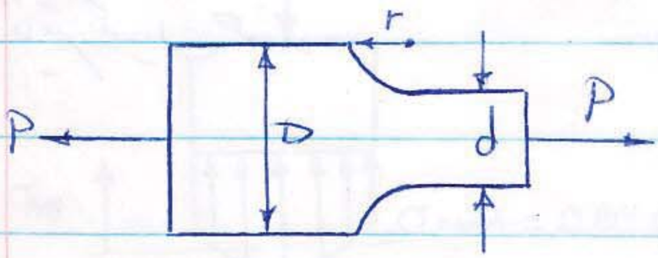
$$\sigma_{avg} = \frac{P}{dt}$$

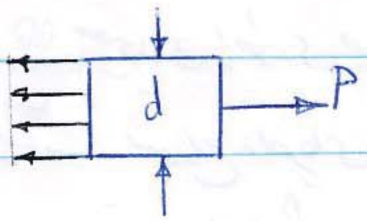


$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$$

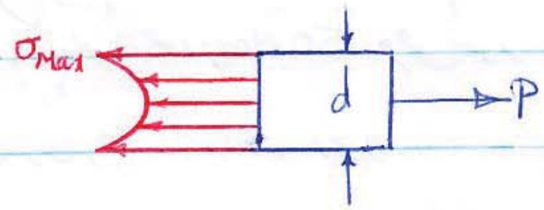
K → ضریب تمرکز تنش | ضریب تمرکزهای تنش

(2





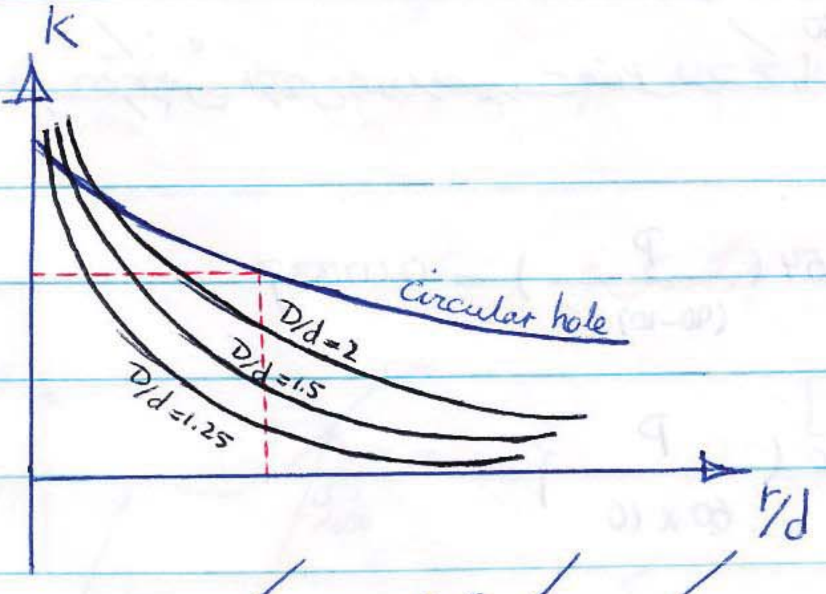
$$\sigma_{avg} = \frac{P}{dt}$$



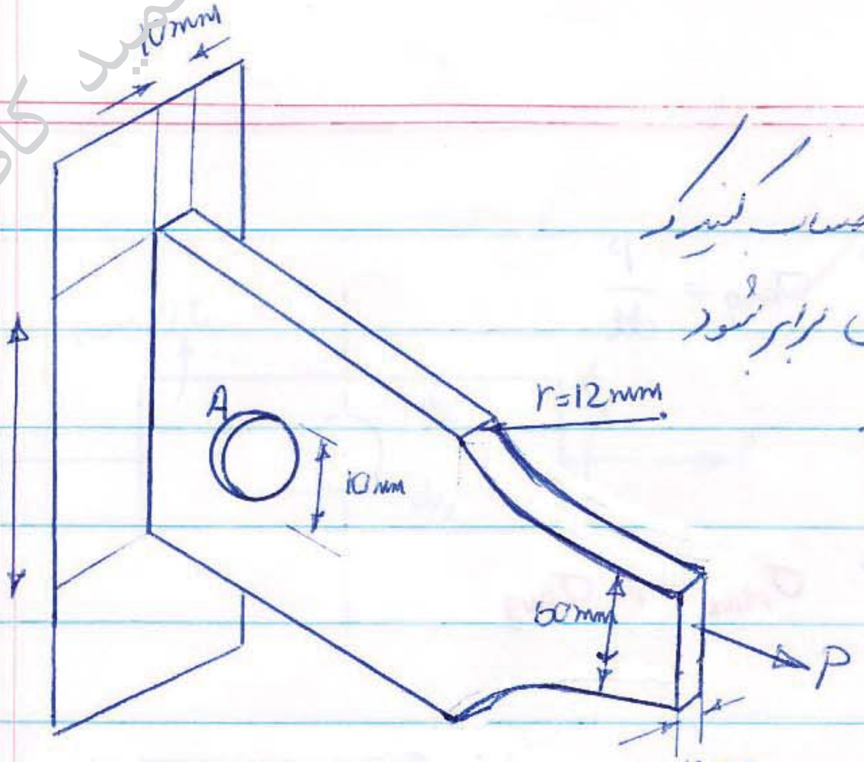
$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{Avg}$$

$$K = \frac{\sigma_{Max}}{\sigma_{Avg}}$$

* در طراحی $\sigma_{\text{مجاز}} = \sigma_{Max}$ قرار می‌دهیم.



* طراحان برای راحت‌تر بودن، سعی می‌کنند از تمرکز تنش اجتناب کنند و در صورت وجود آن نیز، می‌کوشند تدریجی اتفاق بیفتد.



الف) مشخصات قسمت ماهیچه‌ای را طوری حساب کنید که
Max تنش در قسمت سوراخ دایره‌ای برابر شود
با تنش Max در قسمت Fillet .
ب) اگر تنش مجاز 150 Mpa فرض شود
بار مجاز چقدر خواهد بود.

الف) $d = 90 - 10 = 80$ $\quad r = 5\,mm$ ؛ قسمت سوراخ دایره‌ای A

$$\rightarrow r/d = \frac{5}{80} = 0.0625$$

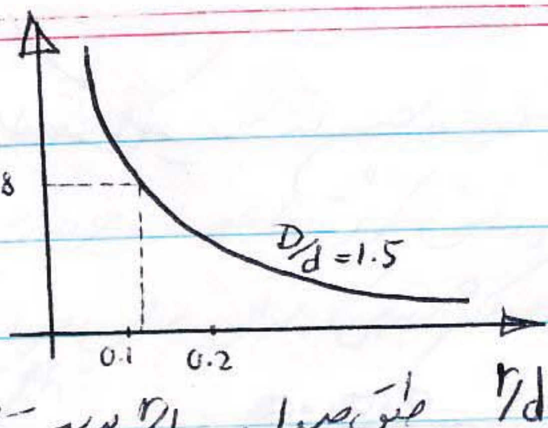
ضریب تمرکز تنش از روی نمودار به صورت مقابل بدست آمده است ؛ $K = 2.64$

$$\sigma_{Max}^{hole} = K \cdot \sigma_{Avg} = 2.64\left(\frac{P}{(90-10)\times 10}\right) = 0.0033P$$

$$\sigma_{Max}^{fillet} = K \cdot \sigma_{Avg} = k\left(\frac{P}{60 \times 10}\right)$$

$$\sigma_{Max}^{f} = \sigma_{Max}^{h} \Rightarrow k\left(\frac{P}{600}\right) = 2.64\left(\frac{P}{800}\right) \Rightarrow K = 1.98$$

$$\frac{D}{d} = \frac{90}{60} = 1.5$$



$$r/d = 0.12$$

طبق جدول r/d بدست می آید.

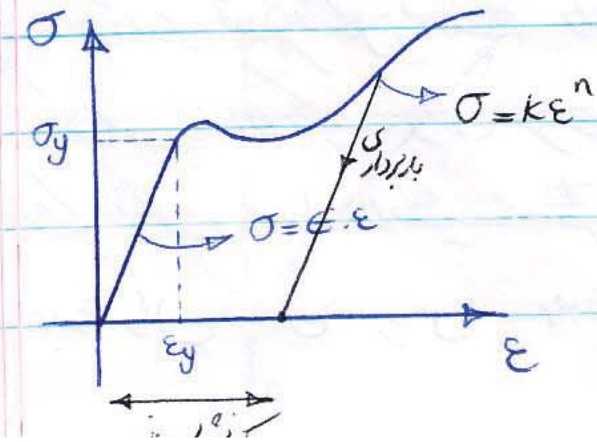
$$r/d = 0.12 \Rightarrow \frac{r}{60\,mm} = 0.12 \Rightarrow r = 7.2\ mm$$

ب)

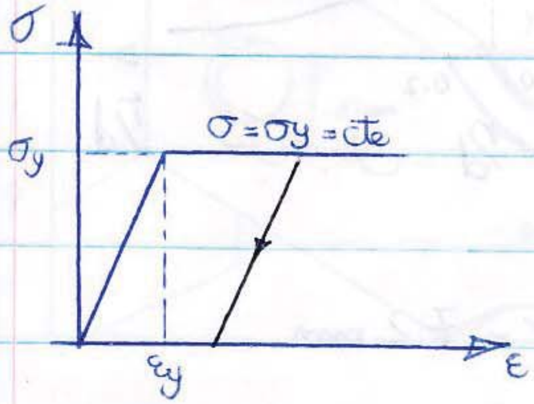
$$\sigma_{مجاز} = \sigma_{Max} = 150\ Mpa$$

$$\Rightarrow 0.0033p = 150\ Mpa \Rightarrow P = 45.5\ kN$$

تحلیل غیر ارتجاعی اعضا تحت بار محوری:



کرنش پسماند معادل تنشی است که تنش پسماند گویند

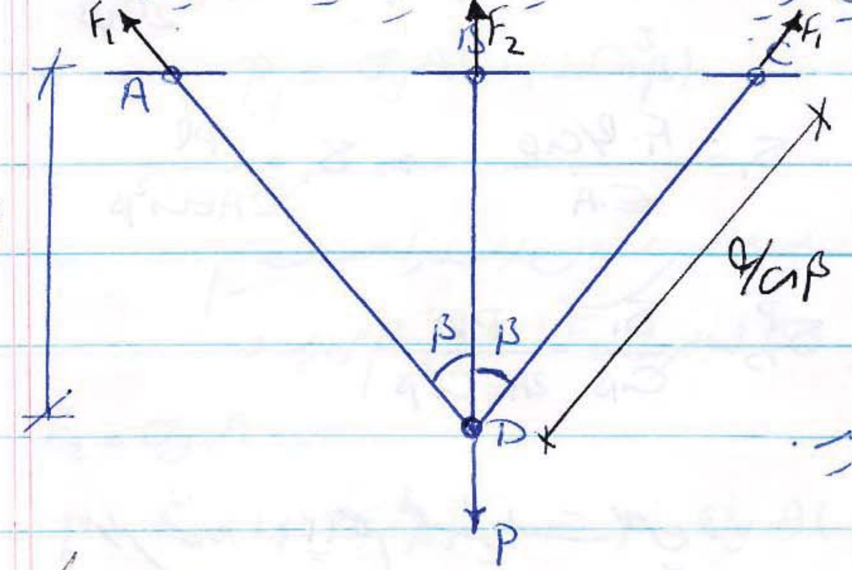


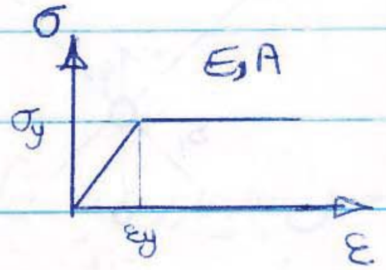
مدل مقابل اصلاح شده مدل قبلی است. این مدل elastic perfectly plactic نام دارد.

نکته: آنالیز تحلیل غیرارتجاعی در سازه‌های معین استاتیکی بسیار ساده است، به این علت که در سازه‌های معین استاتیکی نیروهای داخلی معلوم هستند که به راحتی محاسبه می‌شوند. بنابراین با داشتن تنش‌ها می‌توان کنترل کرد که آیا وارد منطقه غیرارتجاعی شده‌ایم یا خیر. اما وقتی مسئله به صورت نامعین استاتیکی مطرح می‌شود، در این نوع سازه‌ها نیاز به نوشتن معادلات اضافی که معمولاً از روش نیرو و این معادلات اضافی همان روابط سازگاری تغییر شکل‌ها است داریم. در این جا باید کنترل شود که کرنش‌ها و تنش‌ها در محدوده الاستیک برای هر مرحله باشند. در این صورت می‌توان به جای تغییر شکل‌ها از روابط الاستیک خطی نیروی متناظر را قرار داد و مسئله را حل نمود.

به عنوان مثال: خرپای سه میله‌ای زیر را در نظر می‌گیریم. این خرپا از نظر استاتیکی

یک خرپا مفروض است. اگر اعضای خرپا از یک جنس دارای E و A ثابت باشند و منحنی تنش کرنش اعضای خرپا بصورت Elasto plastic باشد، حساب کنید حداکثر باری که توان را این خرپا دارد و موقعی که کلیه اعضایش گسیخته شوند چقدر است.





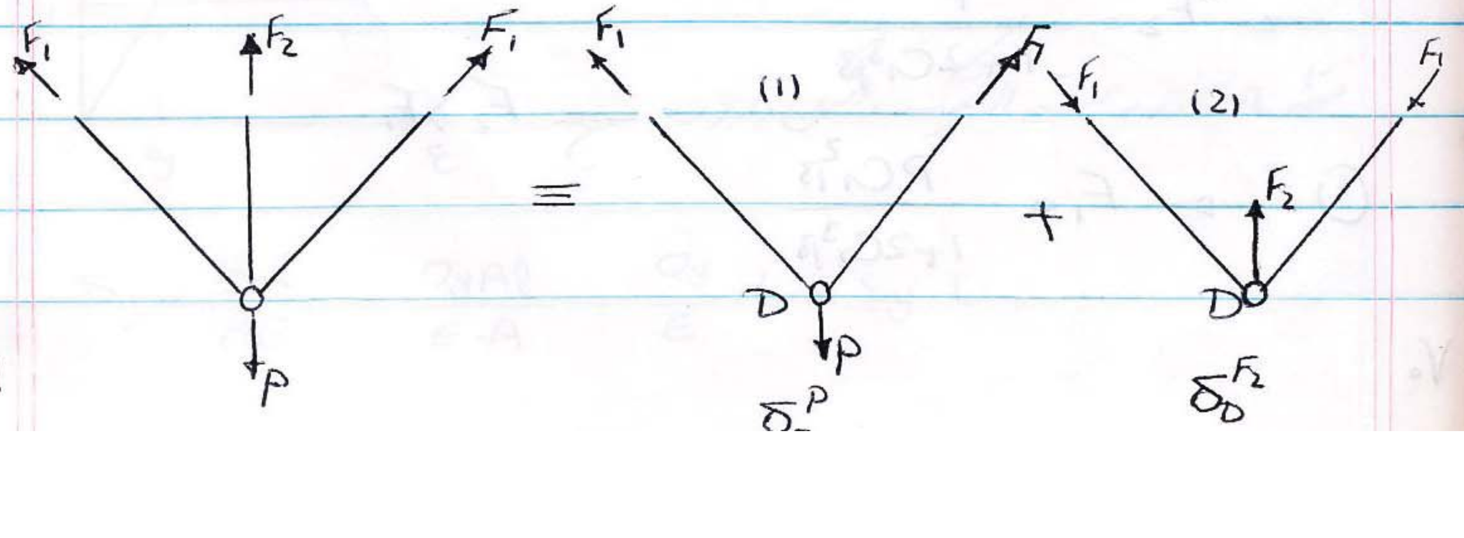
منحنی بار تغییر مکان را نیز رسم کنید.

گره D

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow F_A = F_C = F_1$$

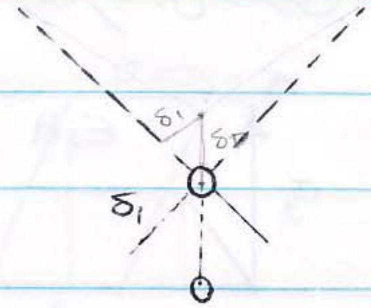
$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow 2F_1 \cos\beta + F_2 = P \quad (1)$$

$F_2 = 2F_1 \cos\beta$



$$\delta_D^{P} - \delta_D^{F_2} = \frac{F_2 . l}{EA} \qquad \delta_D = \frac{\delta_1}{\cos\beta}$$

(۱)



$$2F_1 \cos\beta = P \Rightarrow F_1 = \frac{P}{2\cos\beta}$$

$$\delta_1 = \frac{F_1 . l/\cos\beta}{E . A} \Rightarrow \delta_1 = \frac{Pl}{2AE\cos^2\beta}$$

$$\delta_D^{P} = \frac{\delta_1}{\cos\beta} = \frac{Pl}{2AE\cos^3\beta}$$

$$\delta_D^{F_2} = \frac{F_2 l}{2AE\cos^3\beta}$$

برای شماره (۲) هم همینطور است یعنی :

$$\Rightarrow \frac{P . L}{2AE\cos^3\beta} - \frac{F_2 . l}{2AE\cos^3\beta} = \frac{F_2 . l}{A . E}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\beta}$$

$$\rightarrow F_2 > F_1$$

$$(1) \rightarrow F_1 = \frac{P\cos^2\beta}{1 + 2\cos^3\beta}$$

بنابراین اولین میله‌ای که به حد جاری شدن می‌رسد میله B است.

اولین جاری شدن ؛ $F_2 = \sigma_y A$

$$\Longrightarrow P_y = \sigma_y A(1+2C_1^3\beta)$$

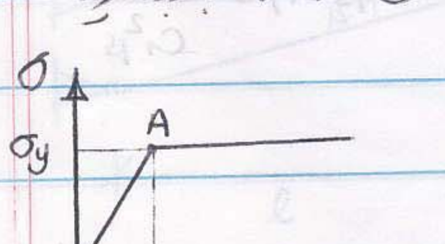
حال باید بار نهایی که به تمام اعضاء به حد جاری شدن برسد را حساب کنیم.
با افزایش بار P تنش ابتدا در میله BD (یا نیروی F_2) به حد تسلیم می‌رسد.

$$F_2 = \sigma_y \cdot A$$

$$P = F_2(1+2C_1^3\beta) \Longrightarrow P = \sigma_y \cdot A(1+2C_1^3\beta)$$

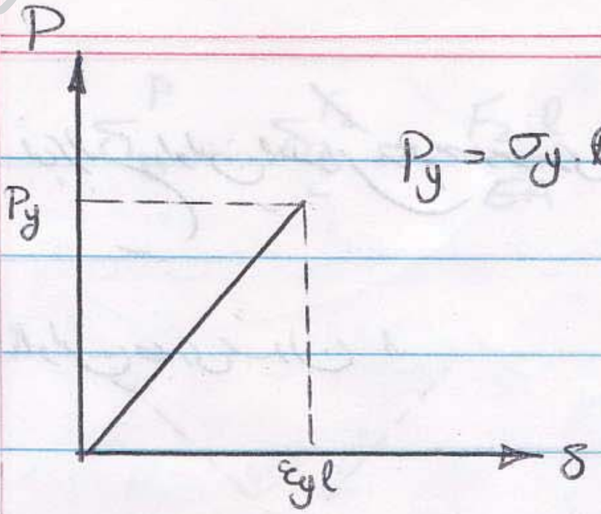
$$\Longrightarrow P_y = \sigma_y \cdot A(1+2C_1^3\beta)$$

P_y معادل نیرویی است که به سازه وارد شود تا اولین جاری شدن در سازه بوجود آید.
تغییر طولی که بوجود می‌آید را δ_y می‌نامیم.



نقطه A هنوز در منطقه الاستیک واکنش دارد، بنابراین ؛

$$\delta_y = \frac{F_2 L}{AE} = \frac{\sigma_y A l}{E \cdot A} = \frac{\sigma_y}{E} \cdot L = \varepsilon_y \cdot L$$



$$P_y = \sigma_y \cdot A(1+2C_1^3\beta)$$

حداکثر بار P هنگامی حاصل می‌شود که میله‌های AD و CD نیز تسلیم شوند. یعنی

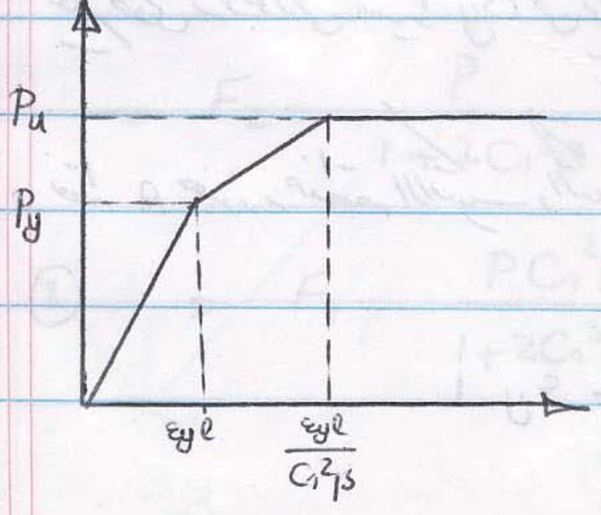
$$F_1 = F_2 = \sigma_y \cdot A$$

از رابطه ① داشتیم:

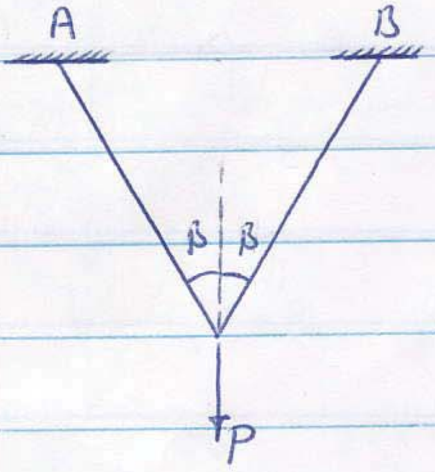
$$2F_1 C_1\beta + F_2 = P$$

$$\Rightarrow P_u = 2\sigma_y A C_1\beta + \sigma_y \cdot A = \sigma_y \cdot A(2C_1\beta + 1)$$

$$\delta_u = \frac{P_u \cdot l}{2EAC_1^3\beta} - \frac{\sigma_y A l}{2EAC_1^3\beta} = \frac{\sigma_y \cdot l}{2EC_1^3\beta}(1 + 2C_1\beta - 1) = \frac{\varepsilon_y l}{C_1^2\beta}$$

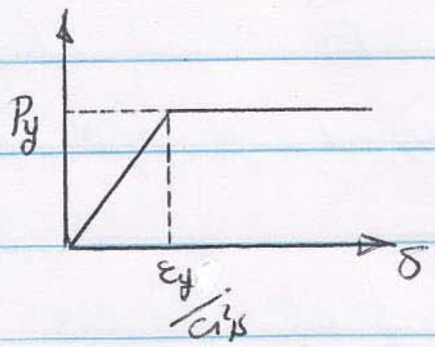


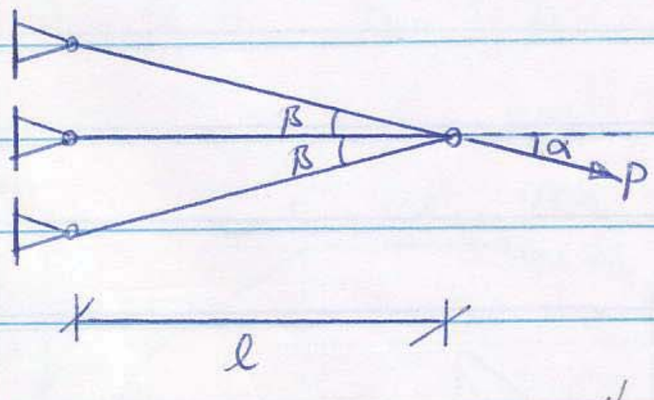
حمید کاظم



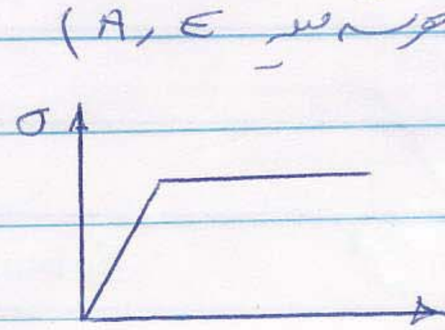
$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Rightarrow 2F_1 \cos\beta = P \Rightarrow P_y = 2\sigma_y A \cos\beta$$





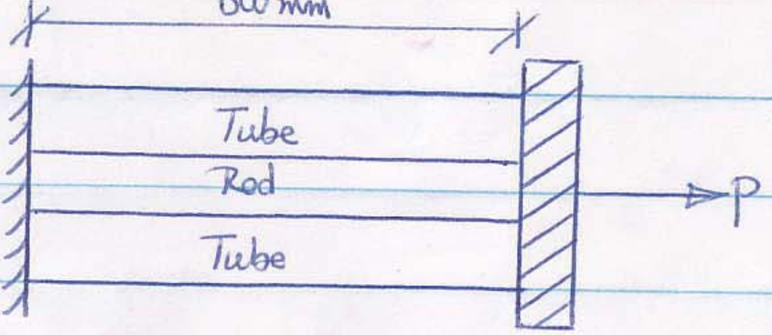
مثال ۵: با فرض اینکه منحنی تنش کرنش به صورت زیر باشد مطلوبست منحنی بار تغییر مکان، P_u ، P_y .
(همه مثل A ، E)



بررسی ۹۰

حميد كاظم

حمید کاظم



مثال: الف) مطلوبست رسم دیاگرام نیرو تغییر مکان و حداکثر باری که می‌توان به مجموعه اعمال کرد.

ب) اگر بار P تا $19.5\ (kN)$ افزایش و سپس برداشته شود، مطلوبست حداکثر تغییر شکل مجموعه، تغییر شکل دائمی پس از باربرداری و تنش‌های باقیمانده.

$E_T = 100\,Gpa \qquad A_T = 60\,mm^2 \qquad (\sigma_T)_y = 250\,Mpa$

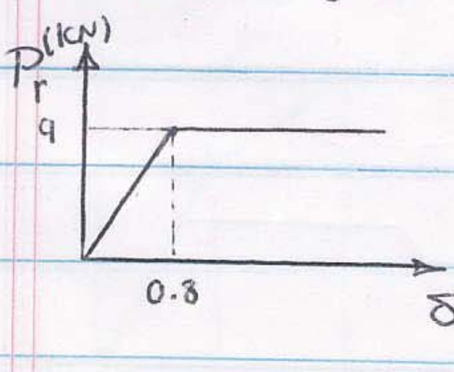
$E_R = 200\,Gpa \qquad A_R = 45\,mm^2 \qquad (\sigma_R)_y = 200\,Mpa$

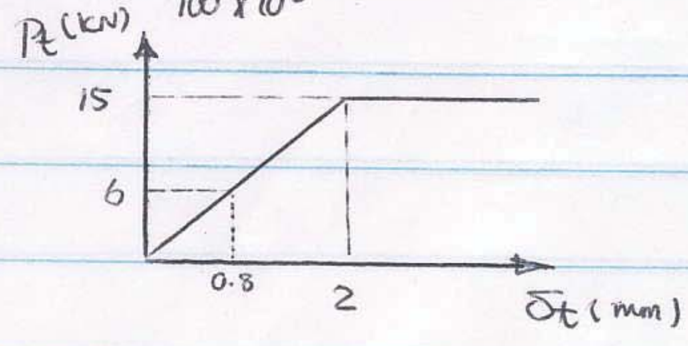
الف) روش اول:

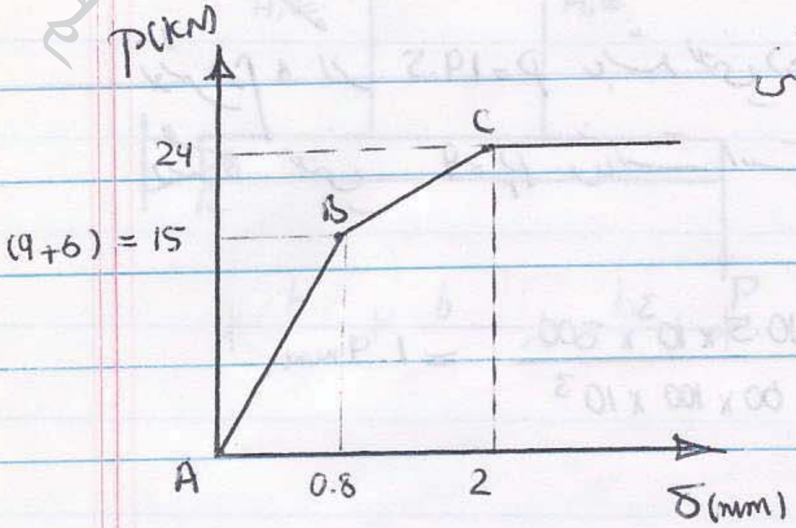
$$P = P_r + P_t$$

$$\begin{cases} (P_r)_y = (\sigma_r)_y \cdot A_r = 200 \times 45 = 9\,kN \\ (\delta_r)_y = \varepsilon_{r_y} \cdot L = \dfrac{(\sigma_r)_y}{E} \cdot L = \dfrac{200}{200 \times 10^3} \times 800 = 0.8\,mm \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P_t)_y = (\sigma_t)_y \cdot A_t = 250 \times 60 = 15\,kN \\ (\delta_t)_y = (\varepsilon_t)_y \cdot l = \dfrac{(\sigma_t)_y}{E} \cdot L = \dfrac{250}{100 \times 10^3} \times 800 = 2\,mm \end{cases}$$







چون سختی در BC کم می‌شود بنابراین شیب سختی کم است.

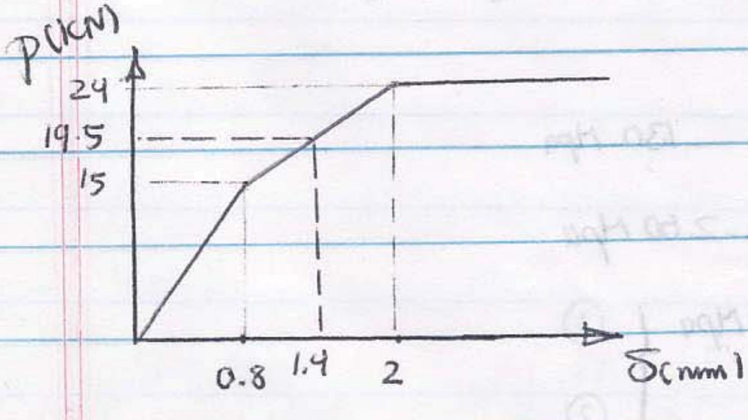
روش دوم:

$$\delta_r = \delta_t \qquad , \quad P_r + P_t = P$$

$$\Rightarrow \frac{P_r l}{A_r E_r} = \frac{P_t l}{A_t E_t} \Rightarrow P_r = \frac{E_r \cdot A_r}{E_t \cdot A_t} P_t$$

$$P_t = \frac{2}{5} P \qquad P_r = \frac{3}{5} P$$

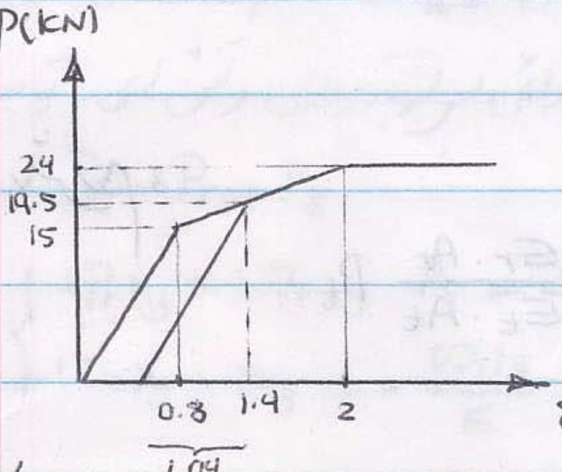
ب) روش اول:



روش دوم : اگر $P=19.5$ باشد یعنی در حالی هستیم که میله در حد جاری شدن رسیده. یعنی $P_r=9$ و ثابت است. بنابراین :

$P_t = 10.5$

$$\Longrightarrow \delta_t = \frac{P_t}{A}\cdot\frac{L}{E_t} = \frac{10.5\times10^3\times800}{60\times100\times10^3} = 1.4\,mm$$



$$\frac{15}{0.8} = 18.75$$

$$\frac{19.5}{18.75} = 1.04$$

$$\Longrightarrow 1.4 - 1.04 = 0.36$$ تغییر شکل دائمی

$$\varepsilon'_{\text{برگشت}} = \frac{-1.04}{800} = -1.3\times10^{-3} \qquad \varepsilon_{\text{پسماند}} = \frac{\delta}{l} = \frac{0.36}{800} = 0.45\times10^{-3}$$

تنش برگشت تیوپ $\sigma'_t = -1.3\times10^{-3}\times100\times10^3 = -130\,Mpa$

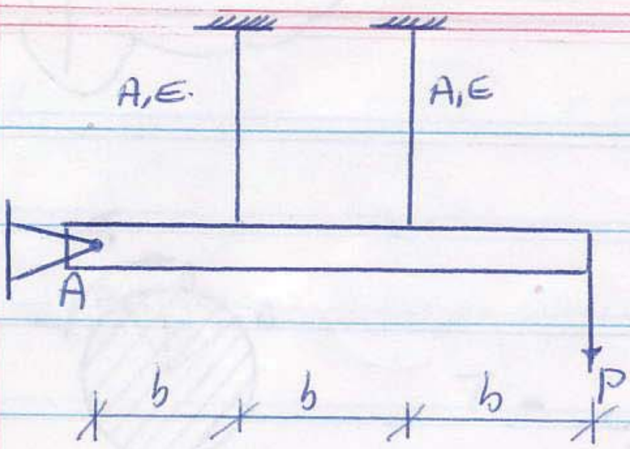
تنش برگشت تیوپ $\sigma'_r = -1.3\times10^{-3}\times200\times10^3 = -260\,Mpa$

تنش باقی‌مانده میله $\sigma_r^R = \frac{9\times10^3}{45} - 260 = -60\,Mpa$ ①

تنش باقی‌مانده تیوپ $\sigma_t^R = \frac{10.5\times10^3}{60} - 130 = 45\,Mpa$ ②

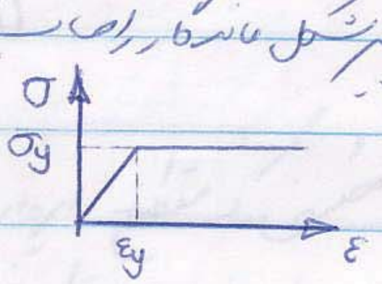
در شماره (2) σ_t^R را می‌توان از رابطه $\sigma = E\varepsilon_{\text{پسماند}}$ حساب کرد چون تیوپ هنوز جاری نشده

اما در شماره (1) چون میله جاری شده پس دیگر قانون هوک صادق نیست و باید از تنش برگشت استفاده نمود.



مثال: مطلوبست رسم منحنی $P-\delta$.

درصورتیکه بلافاصله پس از $P=P_u$ باربرداری شود تنش های پس ماند در میله ها و تغییر شکل ماندگار را بدست آورید.

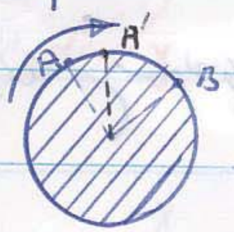


حمید کاظم

فصل سوم:

"پیچش"

مقاطع دوار:

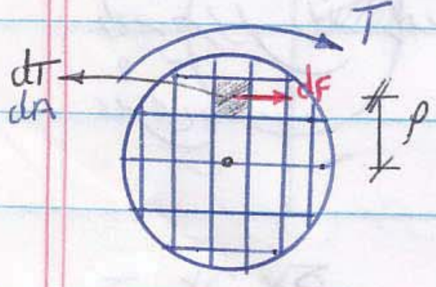


بردار پیچش بر سطحی که عمل می‌کند عمود است

T = گشتاور پیچشی (N.mm)

مشخصه‌ی که مقطع دایره‌ای دارد این است که تحت پیچش مقطعش همان دایره می‌ماند و فاصله نقطه تغییر یافته از مرکز تغییر نمی‌کند.

اما مقطع مربعی (یا هر مقطع دیگر) تحت پیچش مقطع تغییر شکل می‌دهد.



این مقطع سهمی از T که dT می‌باشد را می‌برد.

$$dT = \rho . dF$$

نیرویی که در مقطع بوجود می‌آید مماس بر مقطع است.

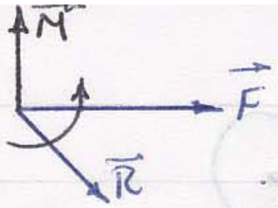
$$dF = \tau dA$$

* گشتاور پیچشی تولید تنش برشی می‌کند.

تعادل مقطع: $T = \int dT = \int \rho . dF = \int \rho \tau dA$

$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

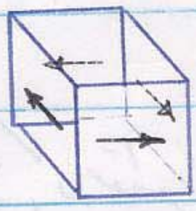
که M: انگشت شست جهت را دارد



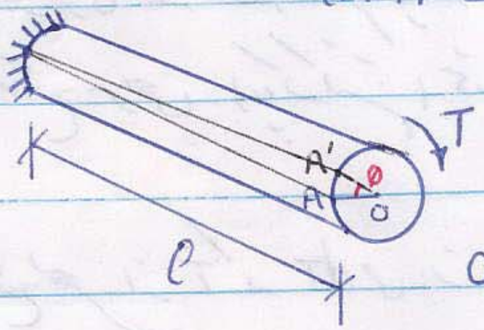
* از R به F جارو می‌کنیم.

گشتاور پیچشی $T = \int_A \rho \tau dA$

اگر المان سه‌بعدی را رسم کنیم برش خواهیم داشت.

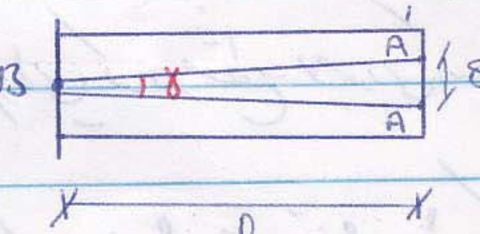


* بیشترین تغییر شکل در پیچش روی محیط دایره است $(\widehat{AA'})$



زاویه مرکزی را که زاویه پیچش است با ϕ نمایش می‌دهند.

$OA = C$ شعاع



$$\delta/l = \frac{AA'}{l} \rightarrow \delta/l = \gamma$$

چون بیشترین تغییر شکل در محیط است بنابراین γ در این حالت γ_{Max} خواهد بود که همان کرنش برشی ماکزیمم می‌باشد.

حمید کاظم

τ ← تنش برشی

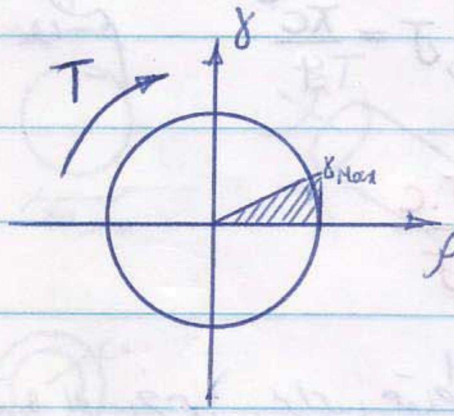
$\gamma_{Max} = \frac{\overline{AA'}}{L}$ $\overline{AA'} = c\varphi$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\gamma_{Max} = \frac{c\varphi}{l}}$

کرنش برشی (زاویه) ← $\gamma = \frac{\rho\varphi}{l}$ ← زاویه تغییر پیچش $\quad 0 \leq \rho \leq c$

ρ : فاصله هر المان از مرکز

$\Longrightarrow \frac{\gamma}{\gamma_{Max}} = \frac{\rho}{c}$

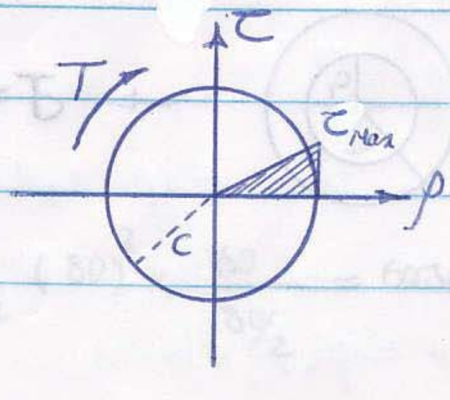
* بنابراین می فهمیم توزیع کرنش در مقطع خطی است.



$\tau = G\gamma \rightarrow \tau = G\frac{\rho\varphi}{l}$

در کلیِ ارتباطی داشتیم :

$\Longrightarrow \tau = \frac{\rho}{c}\tau_{Max}$



$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$

حال می‌خواهیم ببینیم چه ارتباطی بین τ و T در مقطع دایره‌ای وجود دارد.

$$T=\int_A \rho\tau\, dA \longrightarrow T=\int_A \rho \cdot \frac{\rho}{c}\tau_{Max}\, dA$$

$$\Longrightarrow T=\frac{\tau_{Max}}{c}\int_A \rho^2 dA$$

دایره $I_x = I_y = \frac{\pi c^4}{4}$

داشتیم

$$J=\int_A \rho^2 dA \quad (J = I_x + I_y) \xrightarrow{\text{دایره}} J=\frac{\pi c^4}{2}$$

$$\Longrightarrow T=\frac{\tau_{Max}}{c}J \Longrightarrow \tau_{Max}=\frac{T.c}{J}$$

تنش برشی

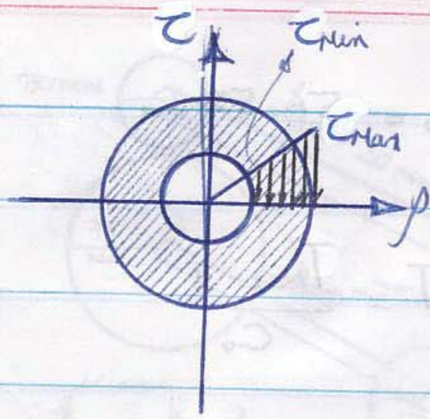
گشتاور پیچشی

$$\boxed{\tau=\frac{T.\rho}{J}}$$

نکته: این فرمول برای مقاطع توپر است.

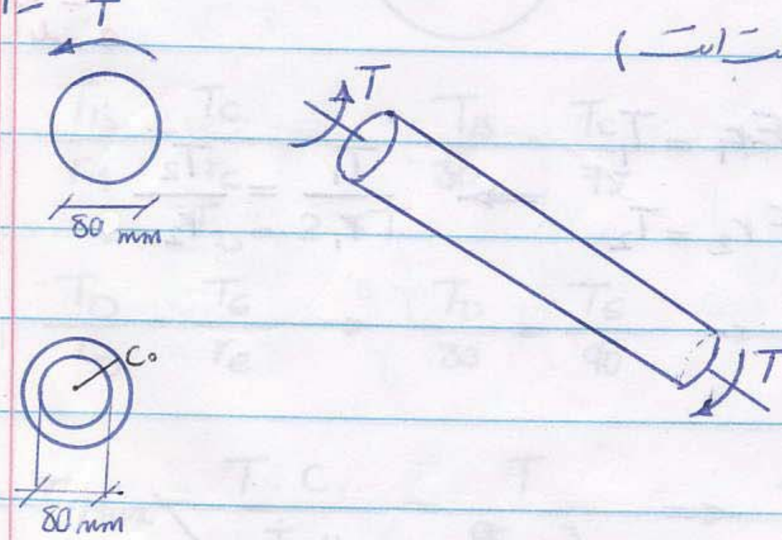
اگر مقطع توخالی باشد:

$$\longrightarrow J=\frac{\pi}{2}(c_2^4-c_1^4)$$



$$\tau_{Min} = \frac{c_1}{c_2}\,\tau_{Max}$$

مثال) حداکثر گشتاوری را در دو حالت می‌توان وارد کرد به شرطی که تنش برشی ماکزیمم از 60 Mpa بیشتر نشود. (مصالح ثابت است)



$$1)\quad J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{34} d^4 = \frac{\pi}{32}(80)^4$$

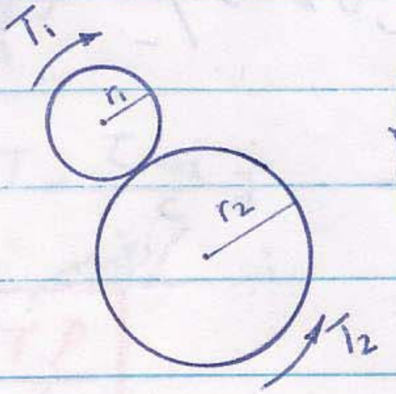
$$\tau_{Max} = \frac{T.c}{J} \Rightarrow T = J\,\frac{\tau_{Max}}{c} = \frac{\pi}{32}(80)^2 \times \frac{60}{80/2} = 6030\ N.m$$

$$2)\ \frac{\pi(80)^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(d_o^2 - 80^2\right) \Rightarrow C_o = 56.57\ \text{mm}$$

$$\Rightarrow J = \frac{\pi}{2}\left[(56.57) - (40)^4\right] \Rightarrow T = \frac{\tau_{max} \cdot J}{C_o}$$

$$= \frac{60 \times 12.065 \times 10^6}{56.57} = 12800\ \text{kN.mm}$$

تـ ۵



$$\begin{cases} Fr_1 = T_1 \\ Fr_2 = T_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}$$

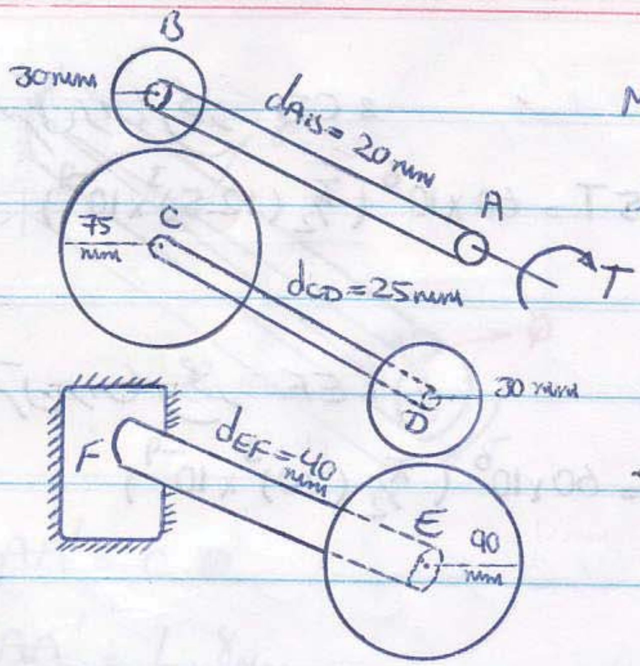
$50^4 = x$ ۱۱ برای محاسبه 50^4 در ماشین حساب

$$\Rightarrow \ln 50^4 = \ln x \Rightarrow 4\ln 50 = \ln x \Rightarrow x = e^{4\ln 50}$$

$$\Rightarrow x = Exp(4 * Ln50)$$

$$C^3 = x \Rightarrow 3\ln c = \ln x \Rightarrow \ln c = \tfrac{1}{3}\ln x \Rightarrow c = e^{\frac{1}{3}\ln x}$$ ۱۲

$c = Exp(1/3 * Lnx)$



مثال: حداکثر کوپل T را پیدا کنید تا تنش Max ایجاد شده در محورها از 60 Mpa بیشتر نشود.

$$T = T_{AB}$$

$$\begin{cases} T = T_{AB} = T_B \\ T_C = T_{CD} = T_D \\ T_E = T_{EF} \end{cases}$$

$$\frac{T_B}{r_B} = \frac{T_C}{r_C} \Rightarrow \frac{T_B}{30} = \frac{T_C}{75} \Rightarrow T_C = 2.5\,T_B = 2.5T$$

$$\Rightarrow T_D = 2.5T$$

$$\frac{T_D}{r_D} = \frac{T_E}{r_E} \Rightarrow \frac{T_D}{30} = \frac{T_E}{90} \Rightarrow T_E = 3T_D \Rightarrow T_E = 7.5T$$

$$\tau_{Max} = \frac{T \cdot C}{J} = \frac{T}{\frac{\pi}{2}C^3} \Rightarrow T = \tau_{Max}\left(\frac{\pi}{2}C^3\right)$$

کنترل بر اساس محور AB :

$$T = 60\times10^6\left(\frac{\pi}{2}(10)^3\times10^{-9}\right) = 94.2\ N.m$$

حمید کاظم

کنترل راداس محور CD :

$$T_{CD} = \tau_{Max} \left(\frac{\pi}{2} (c)^3 \right) \Rightarrow 2.5T = 60 \times 10^6 \left(\frac{\pi}{2} (12.5)^3 \times 10^{-9} \right)$$

$$\Rightarrow T = 73.593 \ N.m$$

کنترل راداس محور EF :

$$T_{EF} = \tau_{Max} \left(\frac{\pi}{2} c^3 \right) \Rightarrow 7.5T = 60 \times 10^6 \left(\frac{\pi}{2} (20)^3 \times 10^{-9} \right)$$

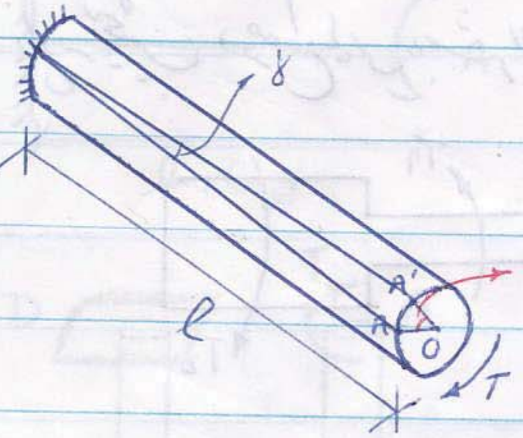
$$\Rightarrow T = 100.48 \ N.m$$

$$\Rightarrow T_{Max} = Min(94.2, 73.593, 100.48) = 73.593 \ N.m$$

کرنش برشی (زاویه) — زاویه پیچشی — تنش برشی — کوپل پیچشی

1) $\gamma = \dfrac{\rho\phi}{l}$ 2) $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$

زاویه پیچش:



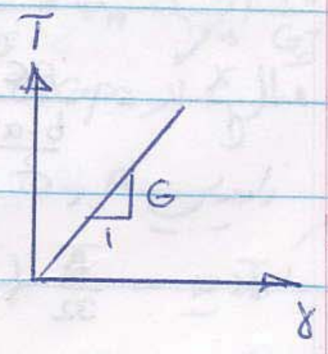
اگر محوری به طول L از جنس مصالح ثابت با مدول برشی G و سطح مقطع ثابت با ممان اینرسی قطبی J تحت کوپل ثابت T قرار گیرد میزان چرخش دو انتهای نسبت به یکدیگر با φ نمایش داده شود به صورت زیر است.

$$\begin{cases} AA' = C.\varphi \\ AA' = L.\gamma_{Max} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma_{Max} = \frac{C.\varphi}{L}$$

$$\tau_{Max} = G\,\gamma_{Max}$$

$$\tau_{Max} = \frac{T.C}{J} \longrightarrow \begin{cases} \tau_{Max} = \frac{T.C}{J} \\ \gamma_{Max} = \frac{\tau_{Max}}{G} = \frac{T.C}{G.J} \\ \gamma_{Max} = \frac{C.\varphi}{L} \end{cases}$$



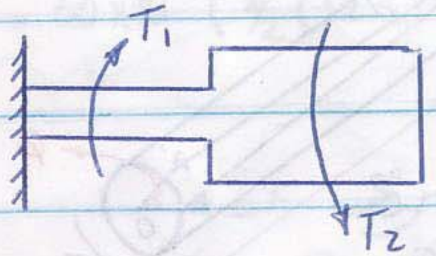
$$\varphi = \frac{T.L}{GJ}$$

در فصل قبل داشتیم $\delta = \frac{PL}{EA}$.

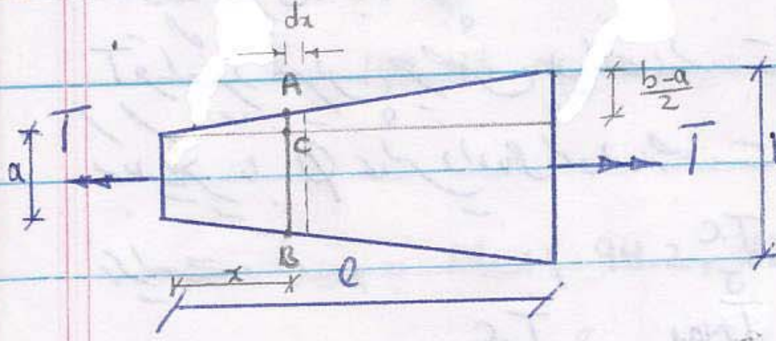
$\frac{GJ}{L}$ سختی پیچشی در طول است. $\frac{L}{GJ}$ نرمی پیچشی است.

زاویه پیچش در مقطع‌هایی با شرایط متفاوت به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$



مثال: زاویه پیچش مقطع مقابل را بدست آورید.



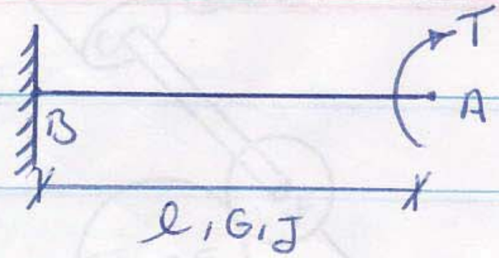
$$\varphi = \int_0^{l} \frac{T\,dx}{G\,J(x)}$$

$$\frac{x}{l} = \frac{AC}{\frac{b-a}{2}} \Rightarrow AC = \frac{x(b-a)}{2l} \Rightarrow AB = a + \frac{x(b-a)}{l}$$

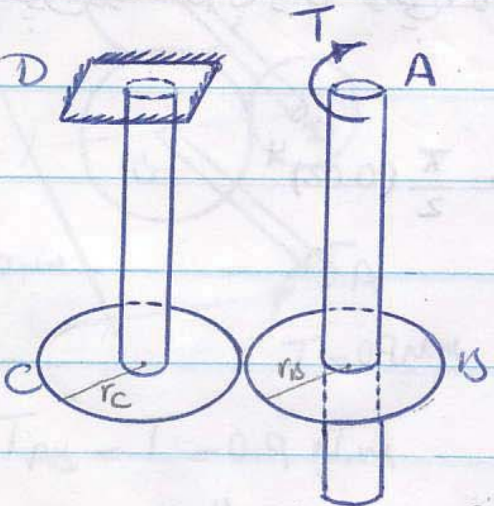
$$J(x) = \frac{\pi}{32}\left(AB^4 - a^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(\left(a + \frac{x}{l}(b-a)\right)^4 - a^4\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = \int_0^{l} \frac{T\,dx}{G} \times \frac{32}{\pi\left[\left(a+\frac{x}{l}(b-a)\right)^4 - a^4\right]}$$

حمید کاظم



$$\varphi = \varphi_{A/B} = \varphi_A - \cancel{\varphi_B}^{\,0}$$



مثال: با نشان دادن T ← $\varphi_A = ?$

$$\frac{T}{r_B} = \frac{T_C}{r_C}$$

$$\varphi_C = \varphi_{C/D} + \cancel{\varphi_D}^{\,0} \quad \rightarrow T_C = \frac{r_C T}{r_B}$$

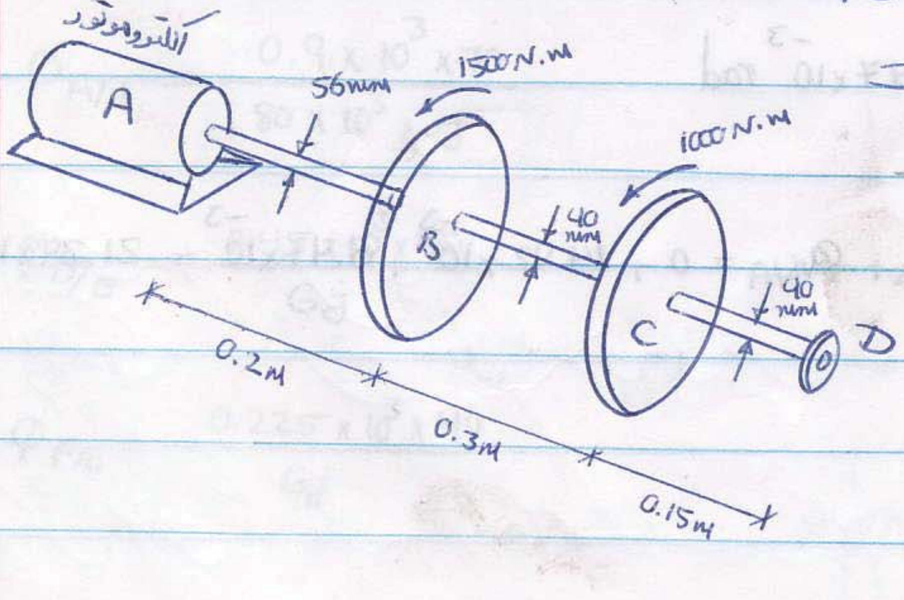
$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B \qquad \varphi_C = \frac{T_C l}{GJ}$$

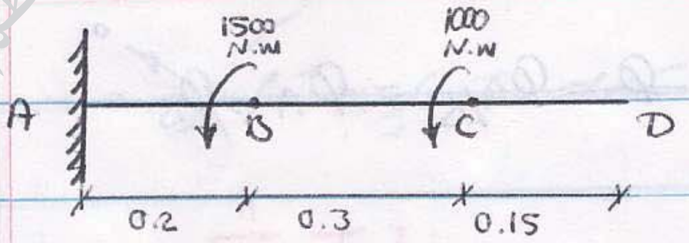
$$\varphi_B r_B = \varphi_C r_C \qquad r_C \varphi_C = r_B \varphi_B$$

$$\rightarrow \varphi_B = \frac{r_C}{r_B}\frac{T_C l}{GJ} = \left(\frac{r_C}{r_B}\right)^2 \frac{Tl}{GJ} \qquad \varphi_{A/B} = \frac{Tl}{GJ} \rightarrow \frac{Tl}{GJ} = \varphi_A - \left(\frac{r_C}{r_B}\right)^2 \frac{Tl}{GJ}$$

مثال: از $G = 80\,Gpa$ باشد

زاویه بین A و D را بدست آورید.





چون در فاصله C و D گشتاوری نداریم $\varphi_{D/C} = 0$

$$\varphi_{C/B} = \frac{1000 \times 0.3}{80 \times 10^9 \times J} \qquad J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2}(0.02)^4$$

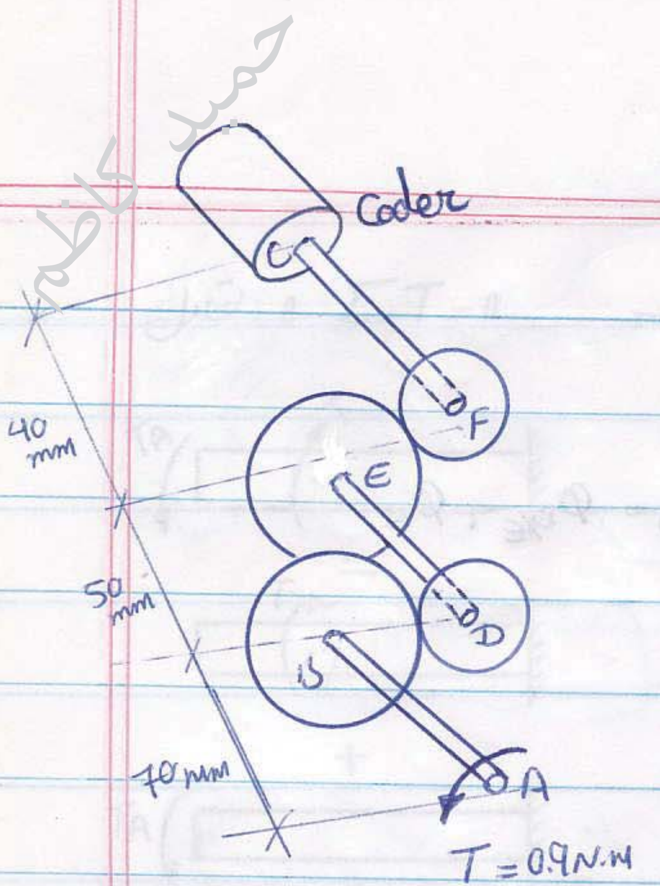
$$\Longrightarrow \varphi_{C/B} = 14.92 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{B/A} = \frac{(1500 + 1000) \times 0.2}{80 \times 10^9 \times J} \qquad J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2}(0.028)^4$$

$$\Longrightarrow \varphi_{B/A} = 6.47 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{D/A} = \varphi_{D/C} + \varphi_{C/B} + \varphi_{B/A} = 0 + 14.92 \times 10^{-3} + 6.47 \times 10^{-3} = 21.39 \times 10^{-3} \text{ ra}$$

$$\varphi_{D/A} = 1.226^{\circ}$$



مثال: اگر از چرخش نقطه C جلوگیری شود میزان
چرخش A را نسبت به C تحت $T=0.9^{N.m}$ بدست
می آورید. (شعاع دایره‌های کوچک ۲ و دایره‌های
بزرگ ۲۴ است) $G = 80\,Gpa$
قطر تمام محورها 4mm است.

$$J = \frac{\pi}{2}(2)^{2\times 2} = 8\pi$$

$$T_{AB} = T = 0.9\ N.m \qquad T_{DE} = \tfrac{1}{2} T_{AB} = 0.45\ N.m$$

$$T_{FC} = \tfrac{1}{2} T_{DE} = \tfrac{1}{4} T = 0.225\ N.m$$

$$\varphi_{A/B} = \frac{0.9 \times 10^3 \times 70}{80 \times 10^3 \times J}$$

$$\varphi_{D/E} = \frac{0.45 \times 10^3 \times 50}{GJ}$$

$$\varphi_{F/C} = \frac{0.225 \times 10^3 \times 40}{GJ}$$

حمید کاظم

$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2$$

$$\varphi_F = \varphi_{F/C} + \overset{0}{\varphi_C} = \frac{0.9\ N.mm}{GJ} \times 10^4$$

$$\varphi_E = \tfrac{1}{2}\varphi_F = {0.45}/{GJ} \times 10^4 \longrightarrow \varphi_D = \varphi_{D/E} + \varphi_E$$

$$\varphi_D = \frac{(2.25+0.45)\times 10^4}{GJ}$$

$$\varphi_B = \frac{r_D}{r_B}\varphi_D = \frac{1}{2}\varphi_D = \frac{1.35\times 10^4}{GJ}$$

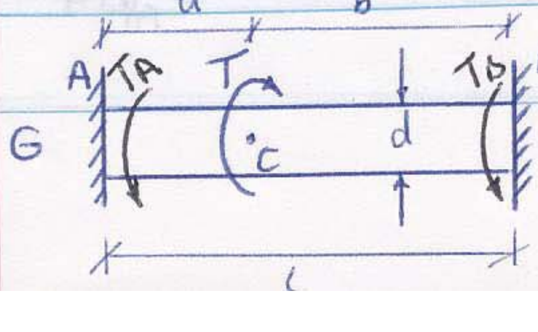
$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B = \frac{6.3\times 10^4}{GJ} + \frac{1.35\times 10^4}{GJ} = \frac{7.65\times 10^4}{GJ} = 38.05\times 10^{-3}\ rad$$

$$= 2.18^\circ$$

پیچش در اعضای نامعین :

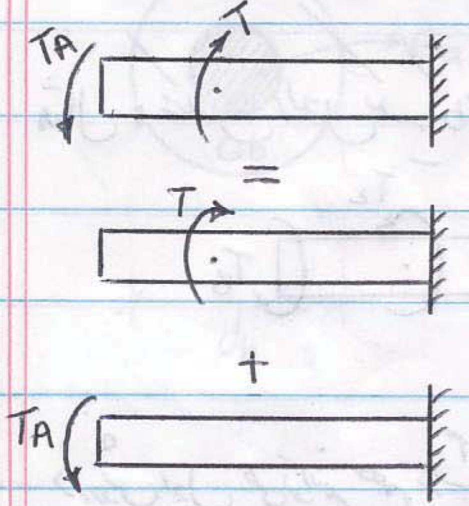
از روش سازگاری تغییر شکل که برای حل پیچش استفاده می شود. روش دیگر با روش جمع آثار قوا است.

مثال: عکس العمل تکیه گاهی T_A ، T_B مجهول است.



تعادل ؛ $\sum T = 0 \longrightarrow T_A + T_B = T$

روش اول ؛ (جمع آثار قوا)



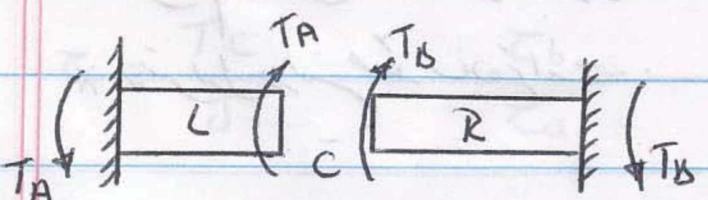
$$\varphi_A^{T} = \frac{Tb}{GJ}$$

$$\varphi_A^{T_A} = \frac{T_A \cdot L}{GJ}$$

چون نقطه A حرکت چرخشی ندارد ؛

$$\varphi_A^{T} = \varphi_A^{T_A} \Rightarrow \frac{Tb}{GJ} = \frac{T_A L}{GJ} \Rightarrow T_A = \frac{b}{L} T \qquad T_B = \frac{a}{L} T$$

روش دوم ؛ (سازگاری تغییر شکل)



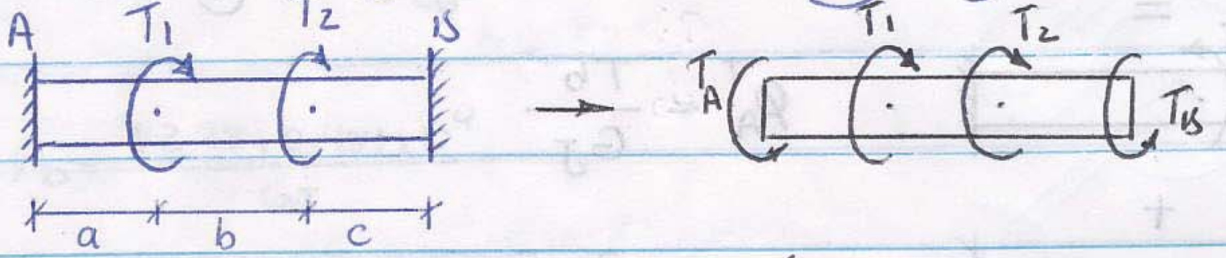
$$\varphi_C^{L} = \frac{T_A \cdot a}{GJ} \qquad \varphi_C^{R} = \frac{T_B \cdot b}{GJ}$$

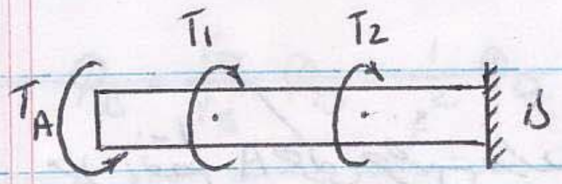
چون چرخش در دو طرف برابر است ؛

$$\varphi_C^{L} = \varphi_C^{R} \Rightarrow T_A \cdot a = T_B \cdot b \longrightarrow T_A = \frac{b}{a} T_B$$

$$T_A + T_B = T \Rightarrow \left(\frac{b}{a}+1\right) T_B = T \Rightarrow T_B = \frac{a}{L}T ,\ T_A = \frac{b}{L}T$$

مثال: عکس العمل تکیه گاهی A و B را بدست آورید.





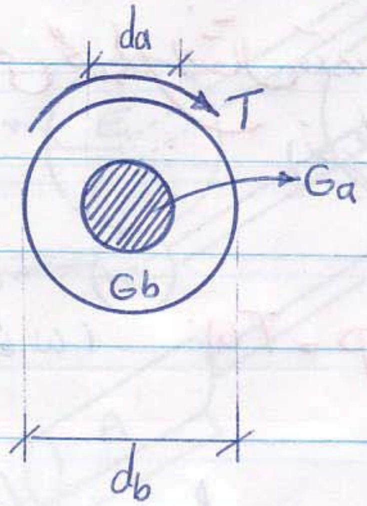
در روش اول می‌توانیم هم ۲ و ۳ شکل تبدیل کنیم و جدا حساب کنیم. یا می‌توانیم بر روی همین شکل از طریق که جمع ϕ_iها را برابر صفر بگذاریم.

از روش دوم می‌توان استفاده کرد به شرطی که یک نقطه را انتخاب کرده ϕها را مساوی می‌گذاریم.

* روش اول در اینجا ساده‌تر است.

* بسیار مهم است که بدانیم در این شکل زاویه پیچش ها با هم برابرند.

مثال : تنش های برشی Max را در پوسته و هسته بیابید.
هسته فولاد و پوسته مس است.



$$T = T_a + T_b \qquad \varphi_a = \varphi_b$$

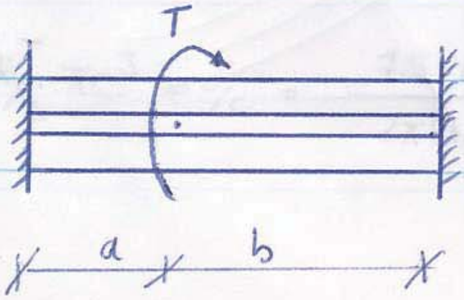
$$\longrightarrow \frac{T_a \cdot L}{G_a \cdot J_a} = \frac{T_b \cdot L}{G_b \cdot J_b}$$

$$\Rightarrow T_a = \frac{G_a \cdot J_a}{G_b \cdot J_b} T_b$$

$$T = \left(\frac{G_a \cdot J_a}{G_b \cdot J_b} + 1 \right) T_b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_b = \dfrac{G_b J_b}{G_a J_a + G_b J_b} \\ T_a = \dfrac{G_a J_a}{G_a J_a + G_b J_b} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{T \cdot C}{J} \qquad \frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{\dfrac{T_b \cdot d_b/2}{J_b}}{\dfrac{T_a \cdot d_a/2}{J_a}} = \frac{T_b}{T_a} \cdot \frac{J_a \cdot d_b}{J_b \cdot d_a}$$

$$\frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{G_b \cdot J_b}{G_a \cdot J_a} \cdot \frac{J_a \cdot d_b}{J_b \cdot d_a} = \frac{G_b \cdot d_b}{G_a \cdot d_a}$$



مثال : اگر τ_b معلوم باشد τ_a را بدست آورید. این مسئله ترکیب دو مثال قبل است.

طراحی محورهای انتقال قدرت :

$W = T \cdot \varphi$ (تغییر شکل φ ، کوپل T ، کار W)

$P = \dfrac{dW}{dt} \Rightarrow P = T\dfrac{d\varphi}{dt} \rightarrow P = T\omega$ (ω امگا)

$\omega = 2\pi f \rightarrow P = 2\pi f T$

$f \rightarrow$ فرکانس ($1/s$)

$\rightarrow$ تعداد دورها در ثانیه

$\Rightarrow \underbrace{T}_{\text{کوپل پیچشی}} = \dfrac{P}{2\pi f}$

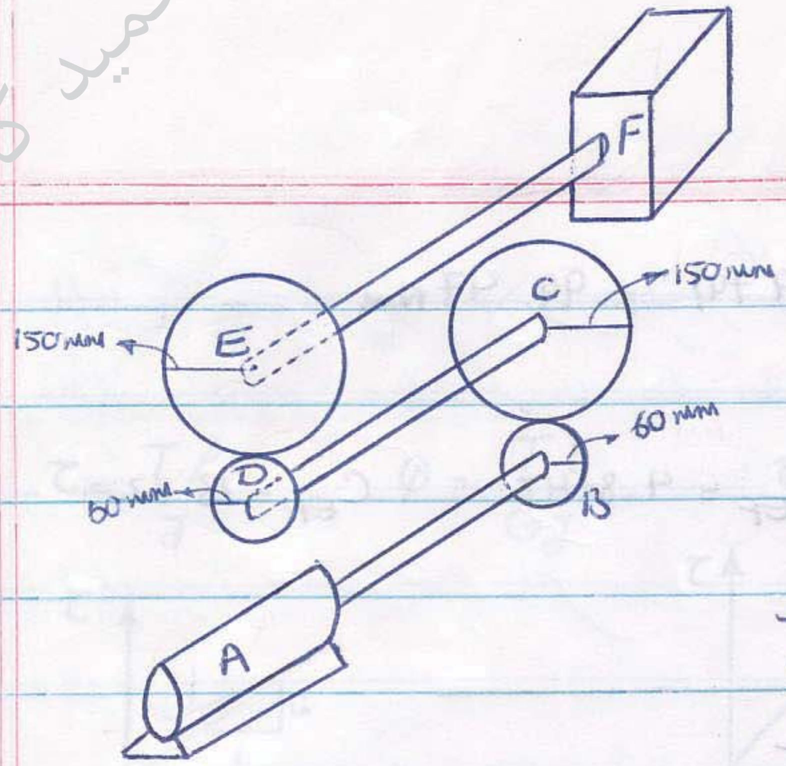
* در مسائل توان را ثابت فرض می‌کنیم.

$\tau = \dfrac{T \cdot c}{J} \Rightarrow T = \dfrac{\tau \cdot J}{c} \Rightarrow \dfrac{J}{c}\tau = \dfrac{P}{2\pi f}$

$\Rightarrow \underbrace{\tau}_{\text{تنش برشی مجاز}} = \dfrac{Pc}{2\pi f J}$

نکته

$P = 2\pi f T \rightarrow$ وات $(W) = \dfrac{N \cdot m}{s}$



مثال: سه محور و چهار چرخ دنده به منظور انتقال توانی معادل $P = 7.5\,kW$ از موتور A تا ماشین ابزاری در نقطه F مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر بدانیم فرکانس موتور $30\,Hz$ باشد و تنش مجاز $60\,Mpa$ باشد، قطر هر محور را تعیین کنید.

$$T_{AB} = \frac{P}{2\pi f} = \frac{7.5 \times 10^3}{2\pi \times 30} = 39.79\ N.m$$

$$\frac{J}{c} = \frac{1}{2}\pi c^3 = \frac{T}{\tau} = \frac{39.79 \times 10^3}{60} \longrightarrow c = 7.5\,mm$$

$$\Longrightarrow d_{AB} = 15\,mm$$

$$r_1 \varphi_1 = r_2 \varphi_2 \Longrightarrow r_1 \frac{d\varphi_1}{dt} = r_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \longrightarrow r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$$

$$\Longrightarrow r_1 f_1 = r_2 f_2$$

$$f_{CD} = \frac{30 \times 60}{150} = 12\,Hz$$

$$\frac{1}{2}\pi c^3 = J/c = \frac{7.5 \times 10^3 \times 10^3}{2\pi (12) \times 60} \Longrightarrow c = 20.4\,mm$$

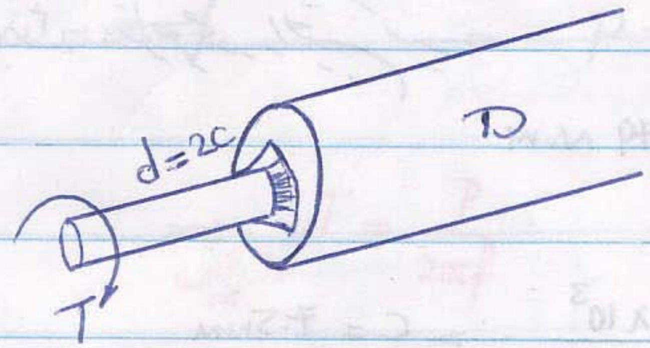
$$\Longrightarrow d_{CD} = 40.8\,mm$$

حمید کاظم

$$T_{CD} = \frac{r_C}{r_B} T_B = \frac{150}{60}(39.79) = 99.47 \text{ N.m}$$

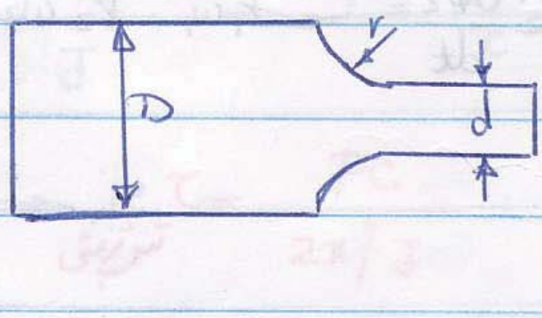
$T_{EF} = 248.7 \text{ N.m}$ $f_{EF} = 4.8 \text{ HZ}$ $C_{EF} = 13.82$

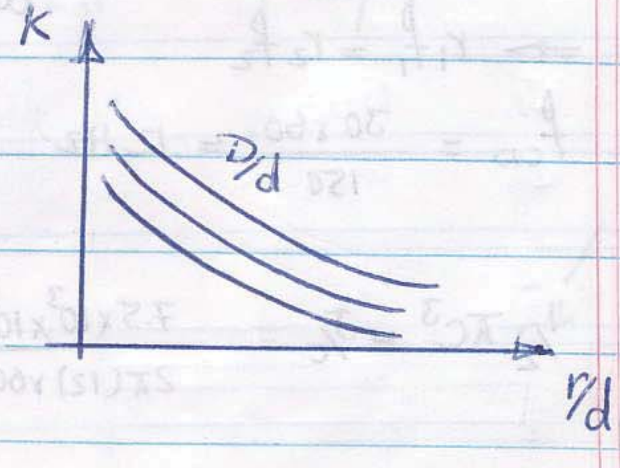
$d_{EF} = 27.64 \text{ mm}$



$$\tau_{Max} = K \frac{T.C}{J}$$

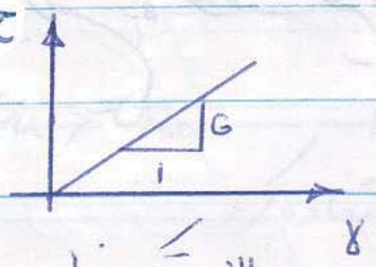
$$\tau_{avg} = \frac{T.C}{J}$$



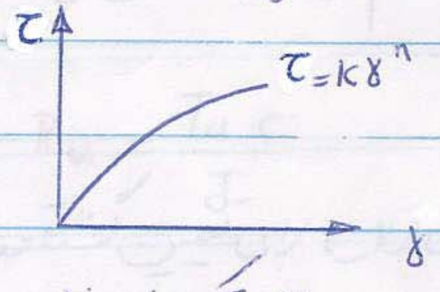


تغییر شکل غیرارتجاعی در پیچش :

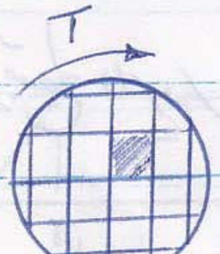
$$\tau = \frac{T.\rho}{J} \quad , \quad \varphi = \frac{T.L}{GJ} \quad , \quad \tau_{Max} = \frac{T.c}{J}$$



الاستیک خطی



الاستیک غیرخطی



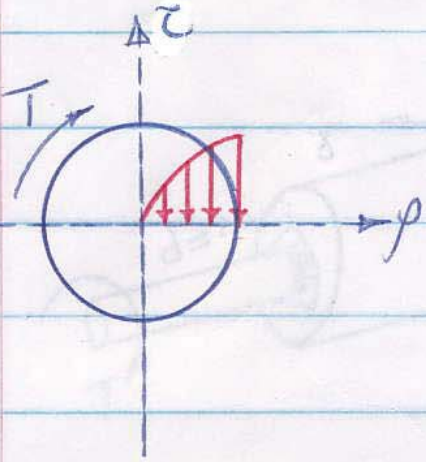
$$T = \int_A \rho . \tau dA$$

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{\rho}{L} \varphi \\ \gamma_{Max} = \dfrac{c}{L} \varphi \end{cases} \longrightarrow \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{Max}$$

وقتی صحبت از غیر ارتجاعی بودن تغییر شکل می کنیم یعنی $\tau = f(\gamma)$

از طرفی $\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{Max}$ که c و γ_{Max} ثابت هستند. بنابراین $\gamma = g(\rho)$

بنابراین τ حالت غیر ارتجاعی ← $\tau = h(\rho)$



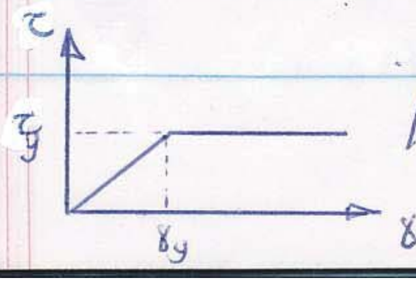
در مقطع دایره‌ای داریم:

$0 \leq \rho \leq c \qquad dA = 2\pi\rho \, d\rho$

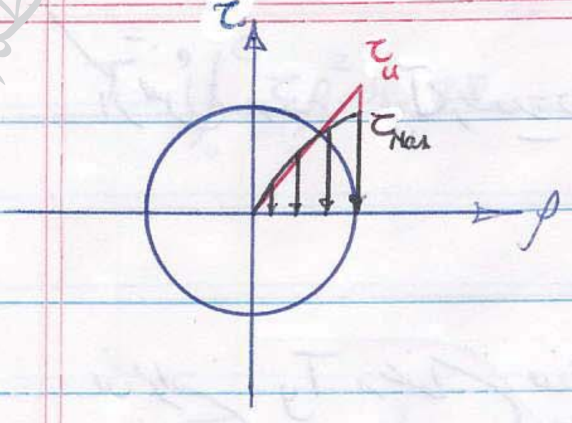
$$T = \int_0^c \rho \, \tau \, 2\pi\rho \, d\rho = 2\pi \int_0^c \tau \rho^2 \, d\rho$$

τ برحسب ρ می‌باشد پس باید تابع τ برحسب ρ را پیدا کرد.

در اینجا مدل Elasto plastic را بررسی می‌کنیم.



حمید کاظم



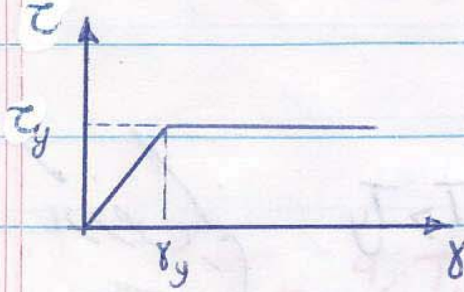
مدول گسیختگی در پیچش :

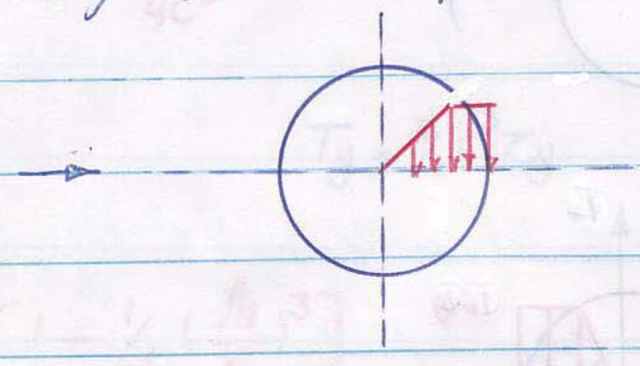
τ_u را در محوری رسم می‌کنیم سطح زیر نمودارش با سطح زیر نمودار τ_{Max} آ برابر باشد.

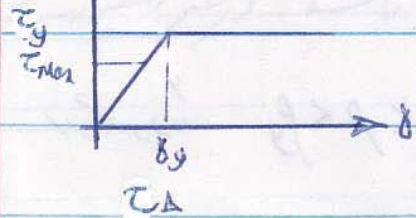
$$\tau_u > \tau_{Max} \longrightarrow \tau_u = R_u = \frac{T_u \cdot c}{J}$$

از R_u (R_T) می‌توان برای تعیین گشتاور پیچشی T_u استفاده کرد.

برای مدل Elastoplastic نمودار $\tau - \rho$ به شکل زیر است.



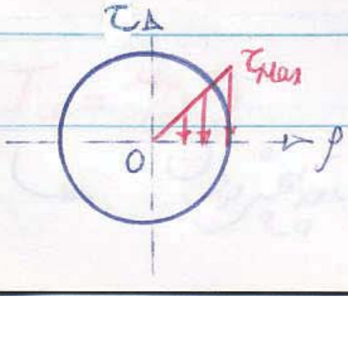




فرض می‌کنیم $\tau_{Max} < \tau_y$:

در این حالت توزیع تنش خطی است

پس رابطه $\tau_{Max} = \frac{T.c}{J}$



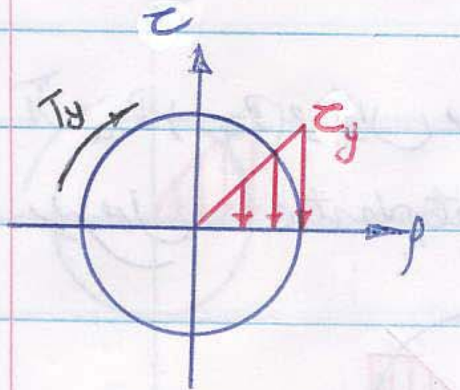
حمید کاظم

اگر تنش به حد τ_y رسید داریم:

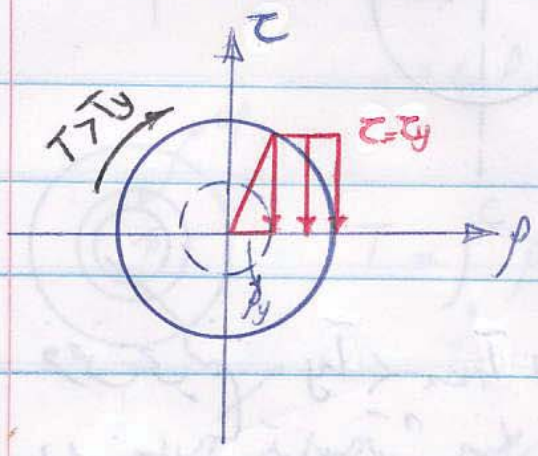
$$T_y = \frac{J}{c}\tau_y \qquad J = \frac{\pi}{2}c^4$$

$$\Longrightarrow T_y = \frac{\pi}{2}c^3\tau_y$$

بنابراین T_y به عنوان مرجع می باشد.



حال فرض می کنیم $T=T_y$:



اگر فرض کنیم $T>T_y$

ρ_y را هسته الاستیک گویند.

در محدوده $0<\rho<\rho_y$ داریم:

$$\frac{\tau}{\tau_y} = \frac{\rho}{\rho_y}$$

$$\begin{cases} T<T_y \longrightarrow T=\frac{\pi}{2}c^3\tau \\ T=T_y \longrightarrow T=T_y=\frac{\pi}{2}c^3\tau_y \\ T>T_y \longrightarrow T=\frac{4}{3}T_y\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right) \end{cases}$$

$$T=\left(\int_0^c \tau\rho^2\,d\rho\right)2\pi = 2\pi\left(\int_0^{\rho_y}\rho^2\left(\frac{\rho}{\rho_y}\tau_y\right)d\rho + \int_{\rho_y}^{c}\rho^2\tau_y\,d\rho\right)$$

ρ_y شعاع حد الاستیک است که ثابت می‌باشد.

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}\rho_y^3\tau_y+\frac{2}{3}\pi c^3\tau_y-\frac{2}{3}\pi\rho_y^3\tau_y$$

$$\Rightarrow T=\frac{2}{3}\pi c^3\tau_y\left(1-\frac{\rho_y^3}{4c^3}\right)$$

داریم: $T_y=\frac{\pi}{2}c^3\tau_y$

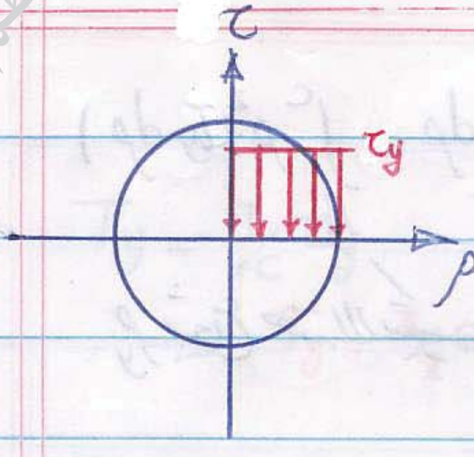
$$\Rightarrow T=\frac{4}{3}T_y\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right]$$

این فرمول تنها وقتی قابل استفاده است که $T>T_y$ باشد. در غیر اینصورت به تناقض می‌رسیم.

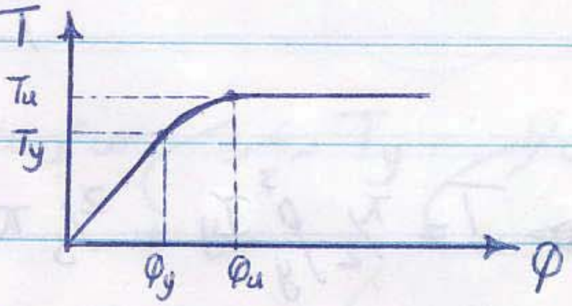
اگر $\rho_y \to 0$ آنگاه $T=T_u$ بنابراین: $T_u=\frac{4}{3}T_y$

(← گشتاور پیچشی نهایی)

$$T=\begin{cases}\dfrac{GJ}{l}\varphi & \varphi\leqslant\varphi_y\\[2mm] \dfrac{4}{3}T_y\left(1-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right) & \varphi\geqslant\varphi_y\end{cases}$$



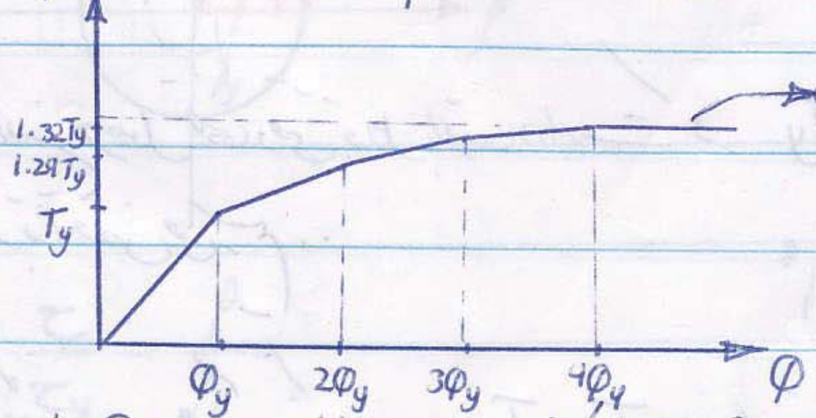
* هنگامیکه $\rho_y=c$ باشد $\varphi=\varphi_y$ می باشد.



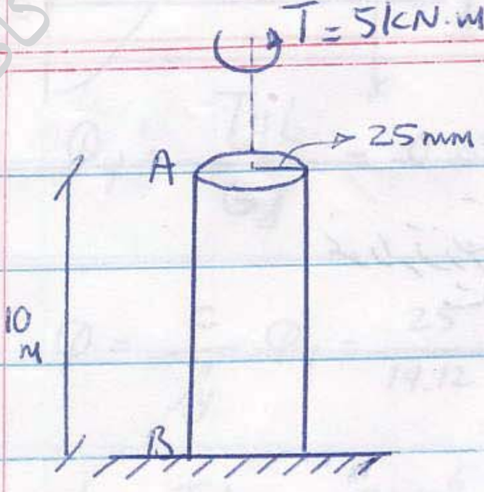
$$\begin{cases}\gamma=\dfrac{\rho}{L}\varphi \longrightarrow \gamma_y=\dfrac{\rho_y}{L}\varphi\\[3mm] \rho_y=c \xrightarrow{T=T_y} \gamma_y=\dfrac{c}{L}\varphi_y\end{cases}\Longrightarrow \boxed{\dfrac{\rho_y}{c}=\dfrac{\varphi_y}{\varphi}}$$

$$\Longrightarrow T=\frac{4}{3}T_y\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right],\quad \varphi_y<\varphi$$

* T_y و φ_y به ترتیب گشتاور و زاویه پیچش در لحظه شروع تسلیم هستند.



نکته: توجه شود رابطه بالا تنها به ازای $\varphi>\varphi_y$ به کار می رود. به ازای $\varphi<\varphi_y$ رابطه بین T و φ خطی و بصورت $\varphi=\dfrac{TL}{GJ}$ می باشد.



مثال: کوپلی به اندازه 5 kN.m در نقطه A وارد می‌شود و سپس برداشته می‌شود. مطلوبست حداکثر میزان تنش باقی مانده در مقطع و مقدار تغییر شکل ماندگار را بدست آورید (مصالح از جنس Elasto plastic فرض است)

$\tau_y = 160$ Mpa

$G = 75$ Gpa

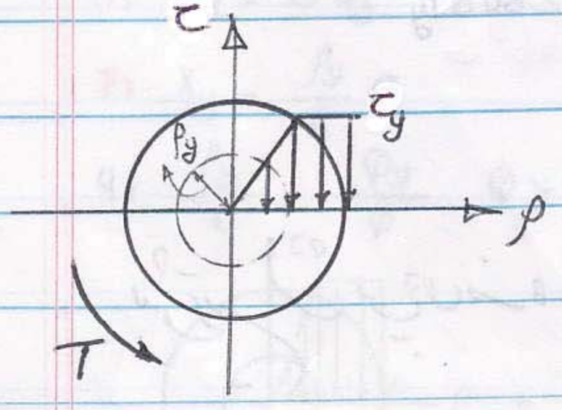
$$T_y = \frac{\pi}{2} c^3 \tau_y = \frac{\pi}{2}(25)^3 \times 160 \times 10^{-6} = 3.297 \text{ kN.m}$$

$T_y < T \Longrightarrow$ مقطع وارد پلاستیک شده است

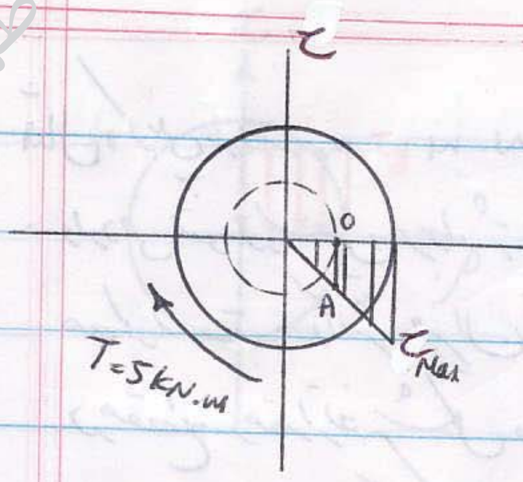
تعیین شعاع هسته الاستیک

$$5 = \frac{4}{3}(3.207)\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{25}\right)^3\right)$$

$\longrightarrow \rho_y = 12$ mm



$\longrightarrow$ نمودار توزیع تنش در بارگذاری

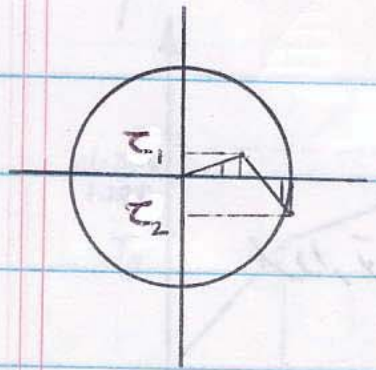


نمودار توزیع تنش در باربرداری

$$\tau_{Max} = \frac{T}{T_y}\tau_y = \frac{5}{3.297}(\tau_y) = 1.2732\tau_y$$

حاصل مانده‌ی نمودار را جمع کرده تا منحنی پس ماند بدست آید.

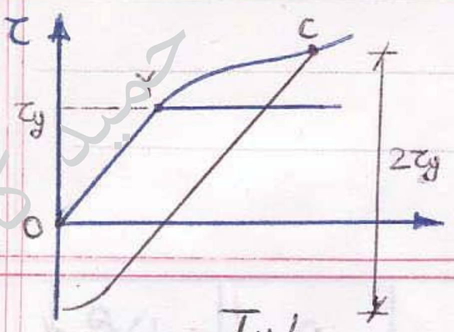
$$OA = \frac{\rho_y}{c}\tau = \frac{14.12}{25} \times 1.2732\tau_y = 0.7192\tau_y$$



$$\tau_1 = (1 - 0.7192\tau_y) = 0.2808\tau_y$$

$$\tau_2 = 0.2732\tau_y$$

بیشترین تنش پس ماند $0.2808\tau_y$



نکته مهم: می‌توان تحقیق کرد که حتی اگر تنش‌های معکوس از استحکام تسلیم τ_y تجاوز کنند، فرض توزیع خطی این تنش‌ها درست است، زیرا آن‌ها از $2\tau_y$ تجاوز نمی‌کنند.

$$\varphi_y = \frac{T_y L}{GJ} = 0.85 \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{c}{\rho_y}\varphi_y = \frac{25}{14.12}(0.85) = 1.5 \text{ rad}$$

$$\varphi' = \frac{T.L}{GJ} = \frac{5\times10^6 \times 10\times10^3}{GJ} = 1.086 \text{ rad}$$

پسماند $\varphi^R = \varphi - \varphi' = 1.5 - 1.086 = 0.41 \text{ rad}$

---

1) $T_y = \frac{1}{2}\pi c^3 \tau_y$

2) $T = \frac{4}{3}T_y\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right) \quad T > T_y$

3) $T_u = \frac{4}{3}T_y$

4) $T = \begin{cases} \frac{GJ}{l}\varphi & \varphi \leq \varphi_y \\ \frac{4}{3}T_y\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right) & \varphi \geq \varphi_y \end{cases}$

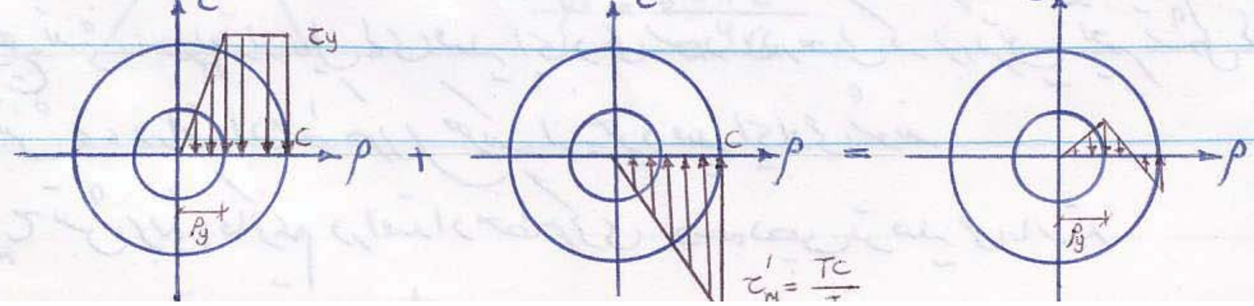
5) $\varphi_y = \frac{T_y l}{GJ}$

6) $\tau_y = G\gamma_y$

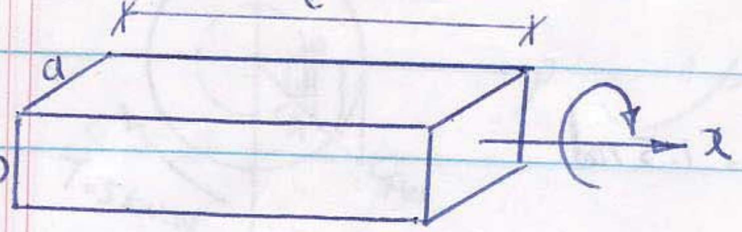
7) $\gamma_y = \frac{\rho_y}{l}\varphi$

8) $\gamma_y = \frac{c}{l}\varphi_y$

9) $\frac{\rho_y}{c} = \frac{\varphi_y}{\varphi} \quad \varphi > \varphi_y$

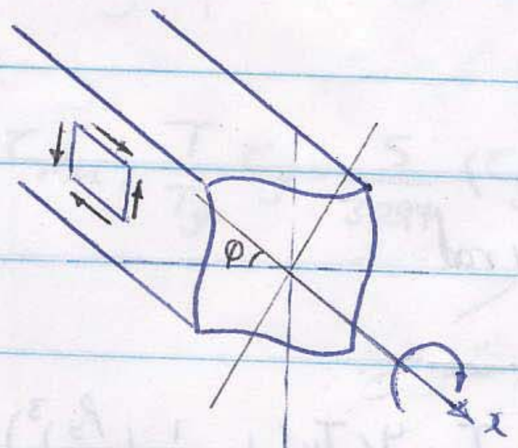


پیچش مقاطع غیر دوار



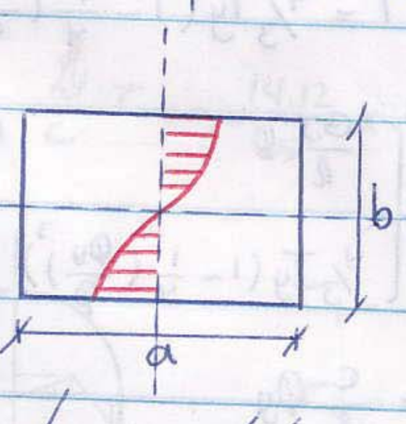
Twist + Warping

تابیدگی + چرخش



کرنش در کنج ها Max است.

اما تنش های برشی در گوشه های مقطع صفر است.



$$\tau_{Max} = \frac{T}{c_1 a b^2} \qquad \left(\tau = \frac{T\rho}{J}\right)$$

$$\varphi = \frac{T.L}{c_2 a b^3 G} \qquad \left(\varphi = \frac{TL}{GJ}\right)$$

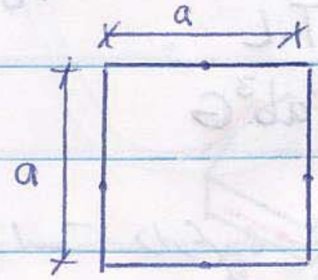
* با پیچاندن مدل لاستیکی میله مربعی، به راحتی می توان ثابت کرد که هیچ تغییر شکلی، و بنابراین هیچ تنشی، در امتداد یال های میله ایجاد نمی شود، در حالی که بزرگترین تغییر شکل ها و بزرگترین تنش ها، در امتداد محور مرکزی هر یک از وجوه میله ایجاد می شوند.

τ_{Max} تنش برشی ماکزیمم در امتداد محور مرکزی وجه پهن تر میله می باشد.

a/b	C_1	C_2
1	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3	0.267	0.263
4	0.282	0.281
5	0.291	0.291
10	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

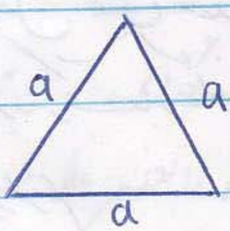
* C_1 و C_2 به نسبت a/b بستگی دارند.

$$\frac{a}{b} \geq 5 \rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{3}\left(1 - 0.63\frac{b}{a}\right)$$



$$\begin{cases} \tau_{Max} = \dfrac{4.81T}{a^3} \\ \varphi = \dfrac{7.1\, T.L}{Ga^4} \end{cases}$$

* دو فرمول τ_{Max} و φ تنها در محدوده کشسان معتبرند و فقط مخصوص میله‌های راست با سطح مقطع مستطیلی یکنواخت می‌باشند.



$$\tau_{Max} = \frac{20T}{a^3}$$

$$\varphi = \frac{46TL}{a^4 G}$$

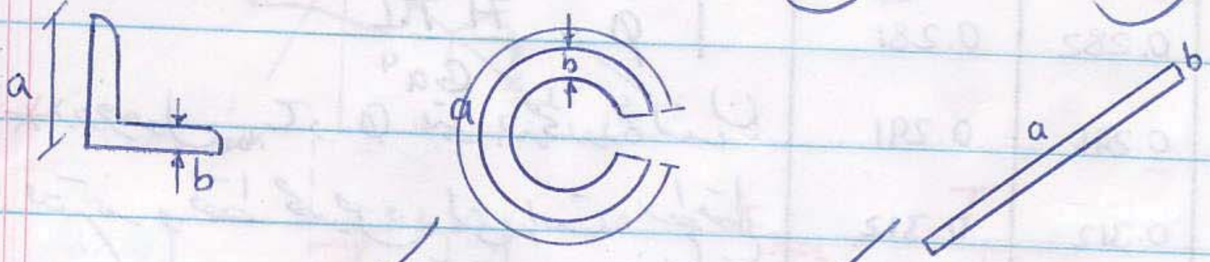
*** روابط مقاطع جدار نازک باز و مستطیلی:**

$$\begin{cases} \tau_{Max} = \dfrac{T}{\frac{1}{3}ab^2} \\ \varphi = \dfrac{T.L}{\frac{1}{3}ab^3G} \end{cases} \qquad a/b > 10$$

در مقاطعی که چون نسبت a/b بزرگتر از 10 است داریم:

$$C_1 = C_2 \simeq 1/3$$

مقاطع های جدار نازک دارای نسبت a/b بزرگتر از 10 است.

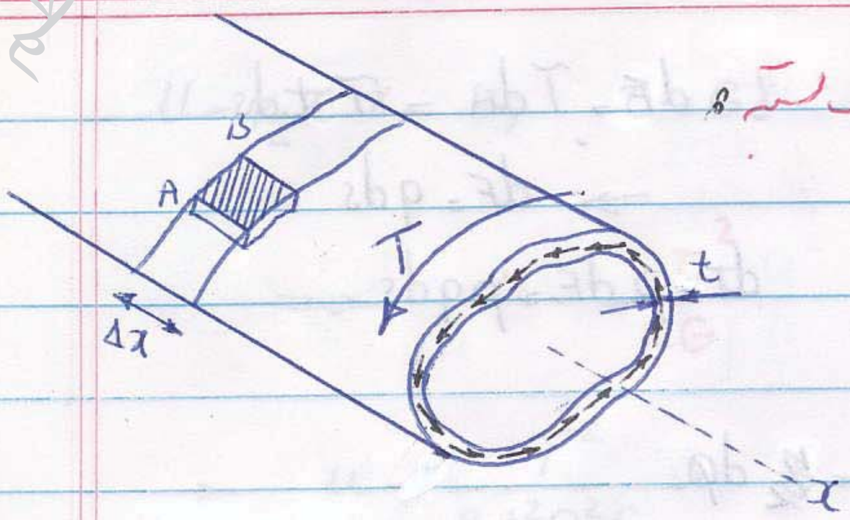


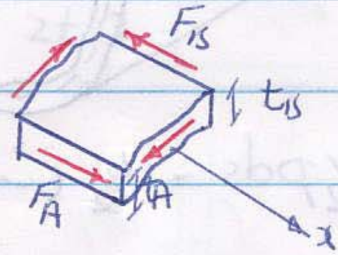
بنابراین برای مقاطع های جدار نازک $C_1 = C_2 = 1/3$ می‌دانیم.

مقاطع های جدار نازک به دو دسته باز و بسته تقسیم می‌شوند. روابط مقاطع جدار نازک باز گفته شد. حال به بیان روابط موجود در مقاطع های بسته جدار نازک می‌پردازیم.

حمید کاظم

پیچش در محورهای توخالی جدار نازک بسته :





t متغیر است.

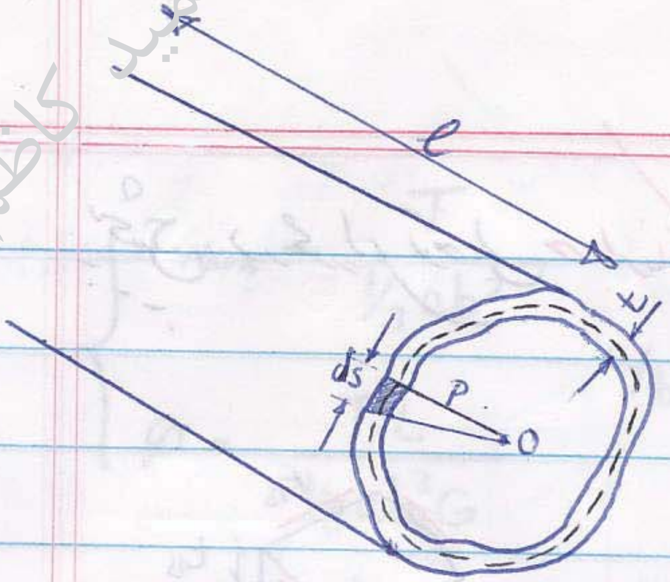
$$\begin{cases} F_{A_x} = \tau_A \, t_A \, \Delta x \\ F_{B_x} = \tau_B \, t_B \, \Delta x \end{cases}$$

$$\sum F_x = 0 \implies F_A - F_B = 0 \implies \tau_A \cdot t_A = \tau_B \cdot t_B$$

$$\tau . t = q = cte$$

q را جریان برشی نامند (shear flow)

این q در مکانیک سیالات نیز وجود دارد و نشان دهنده دبی است چون باشد $q = vb$ (v سرعت و b عرض) . q ثابت باشد با تغییر b سرعت تغییر می کند.



$$dF = \tau\, dA = \tau\, t\, ds$$

$$\Rightarrow dF = q\, ds$$

$$dT = p.dF = pq\,ds$$

$\frac{1}{2} p\, ds =$ (مساحت مثلث) $=$ dQ

$$\Rightarrow dT = 2q.dQ \Rightarrow \oint dT = 2\oint q.dQ$$

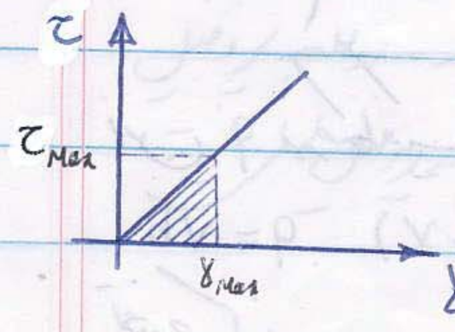
$$\Rightarrow T = 2q \oint dQ$$

$$\Rightarrow T = 2qQ \qquad \tau = \frac{T}{2tQ}$$

$$T = 2qQ \rightarrow T = \tau t(2Q)$$

Q مساحت شکل محاط محیط است . τ مقدار میانگین تنش برشی در کل مدار است.

محاسبه زاویه پیچش :



U انرژی کرنشی $= \frac{1}{2}\tau.\gamma$

$$U = \int \tau\, d\gamma$$

$$U = \tfrac{1}{2}\tau \cdot \gamma \quad , \quad \tau = G\gamma$$

$$\Longrightarrow \quad u = \frac{\tau^2}{2G} \quad , \quad \tau = \frac{T}{2tQ}$$

$$\longrightarrow \quad u = \frac{T^2}{8t^2Q^2G}$$

$$\longrightarrow \quad U = \int_V u \cdot dv \qquad dv = t \cdot \ell \cdot ds$$

$$\Longrightarrow \quad U = \oint_s \frac{T^2}{8t^2Q^2G}\, t \cdot \ell\, ds = \frac{T^2 \ell}{8Q^2G} \oint_s \frac{ds}{t}$$

کار نیروی خارجی $W = \tfrac{1}{2} T \phi$

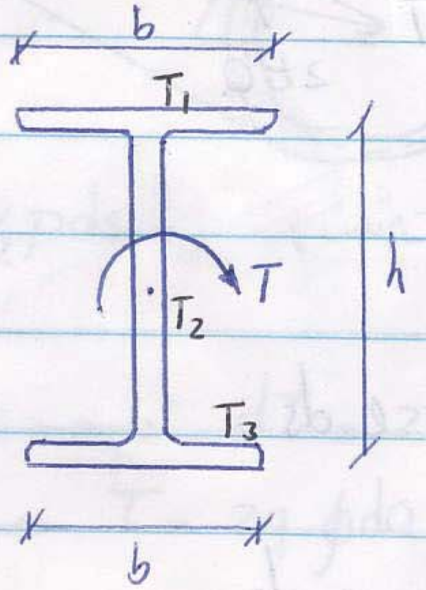
برای یک سیستم بسته (Conservative) :

$$W = U \longrightarrow \tfrac{1}{2} T \cdot \phi = \frac{T^2 L}{8GQ^2} \oint \frac{ds}{t}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi = \frac{T \cdot L}{G \dfrac{4Q^2}{\oint ds/t}}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \qquad J = \frac{4a^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

بحث در مورد مقطع I شکل :



$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$\Rightarrow T = 2T_1 + T_2$$

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\frac{T_1 L}{GJ_1} = \frac{T_2 L}{GJ_2} \qquad J_i = \frac{1}{3} b_i t_i^3$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{J_1}{J_2}$$

مقاطع بسته:

1) $\tau = \dfrac{T}{2tQ}$ 2) $q = \dfrac{T}{2Q}$ 3) $q = \tau t$

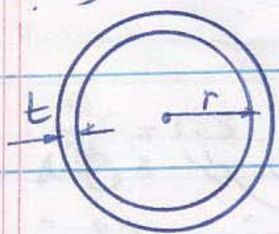
4) $\varphi = \dfrac{TL}{GJ}$ 5) $J = \dfrac{4Q^2}{\oint \frac{ds}{t}}$

مقاطع باز:

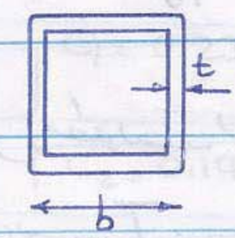
1) $\tau = \dfrac{T}{C_1 a b^2}$

2) $\varphi = \dfrac{T.L}{C_2 a b^3 G}$

مثال: دو مقطع جدار نازک شکل مربع و دایره را تحت پیچش با ضخامت ثابت t مقایسه کنید. درصورتیکه طول دو عضو یکسان باشد نسبت تنش برشی دایره به مربع چقدر است. زاویه پیچش در دایره و مربع چیست؟



(1)



(2)

(سطح مقطع (حجم مصالح) مربع و دایره را یکسان فرض کنید ($A_1 = A_2$

$Q_1 = \pi r^2$ $Q_2 = b^2$ $T_1 = T_2 = T$

حمید کاظم

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{T}{2tQ} = \dfrac{T}{2t\,\cancel{2}\pi r^2} \\[2ex] \tau_2 = \dfrac{T}{2tQ_2} = \dfrac{T}{2tb^2} \end{cases}$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow 2\pi r t = 4bt$$

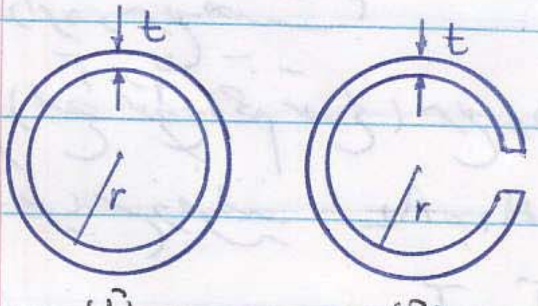
$$\Rightarrow r = \frac{2b}{\pi} \quad \text{و} \quad b = \frac{\pi r}{2}$$

$$\begin{cases} J_1 = \dfrac{4Q_1^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \dfrac{4\pi^2 r^4}{\frac{2\pi r}{t}} = 2\pi r^3 t \\[2ex] J_2 = \dfrac{4Q_2^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \dfrac{4b^4}{4b/t} = b^3 t = \dfrac{\pi^3 r^3}{8} t \end{cases}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{b^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\frac{\pi^3 r^3 t}{8}}{2\pi r^3 t} = \frac{\pi^2}{16} = 0.617$$

مثال ۶: برای دو مقطع مقابل مطلوبست نسبت تنش‌های برشی برای تورک ثابت T.



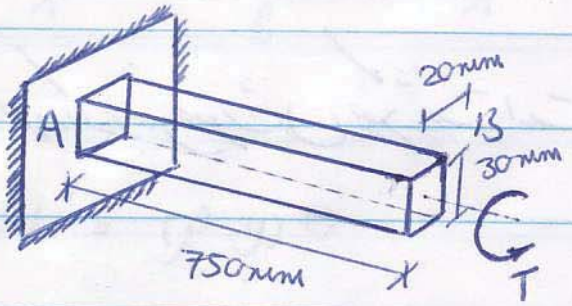
(1) (2)

حمید کاظم

$$\tau_1 = \frac{T}{2tQ} = \frac{T}{2t\pi r^2} \qquad \tau_2 = \frac{T}{c_1 a b^2} = \frac{T}{\frac{1}{3}\, 2\pi r t^2}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\dfrac{T}{2\pi t r^2}}{\dfrac{3T}{2\pi r t^2}} = \frac{t}{3r}$$

مثال: کوپل T باعث چرخش $\varphi_B = 2^\circ$ در AB می‌شود. اگر فرض $G = 80Gpa$ شود حداکثر تنش برشی در میله را حساب کنید.



$$\tau = \frac{T}{c_1 a b^2} \qquad \varphi = \frac{T.L}{c_2 a b^3 G}$$

$a = 30\ mm \qquad b = 20\ mm \qquad \varphi_B = 2^\circ = 2 \times \frac{\pi}{180} = 34.9 \times 10^{-3}\ rad$

$$a/b = 1.5 \xrightarrow{\text{از جدول}} \begin{cases} c_1 = 0.231 \\ c_2 = 0.1958 \end{cases}$$

$$\frac{\tau}{\varphi} = \frac{\dfrac{T}{c_1 a b^2}}{\dfrac{T.L}{c_2 a b^3 G}} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{Gb}{L} = \frac{0.1958}{0.231} \times \frac{80 \times 10^3 \times 20}{750}$$

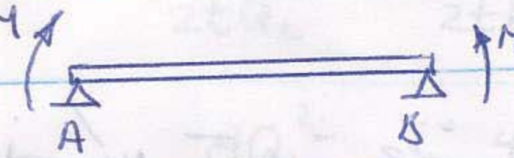
$\Rightarrow \tau_{Max} = 63.1\ Mpa$

فصل چهارم:

«خمش»

خمش خالص: در طول عضو مقدار لنگر ثابت می شود.

در خمش خالص برش صفر است.

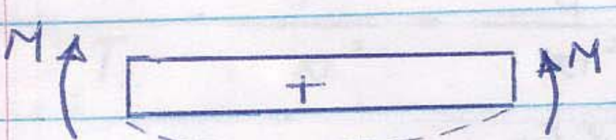


هرجا که برش صفر شود لنگر ثابت است.

$A_y = B_y = 0$

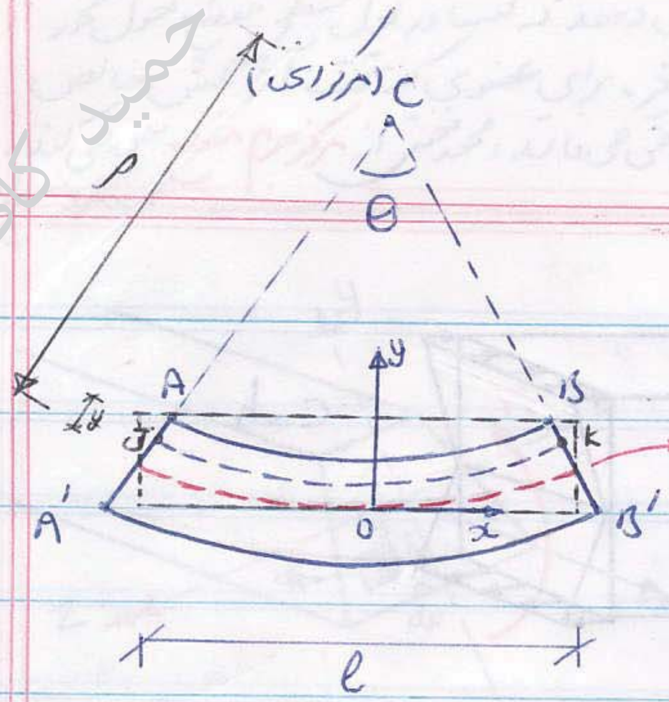
$M = \int V dx = 0 + C = C$

خمش انحنا تولید می کند.



انحنای مثبت: تارهای فوقانی فشرده شده و تارهای تحتانی کشیده می شود ← خمش مثبت

انحنای منفی: تارهای فوقانی کشیده شده و تارها تحتانی فشرده می شود ← خمش منفی



تار خنثی ، تاری که طولش ثابت می‌ماند.

فاصله تار JK را از تار خنثی y فرض می‌کنیم.

y : فاصله از تار خنثی

ρ : شعاع انحنای تار خنثی

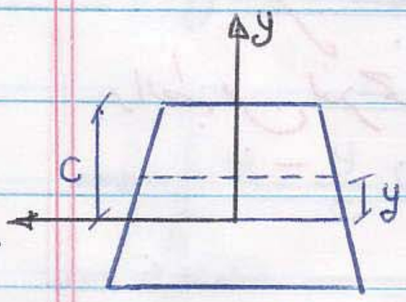
JK طول تار $L' = (\rho - y)\theta$

$$\delta = L - L' = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

برای y های مثبت (بالای تار خنثی) δ و ε منفی است.

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} = \frac{-y}{\rho} = \frac{-1}{\rho} y$$ ε_x (توزیع کرنش در مقطع)

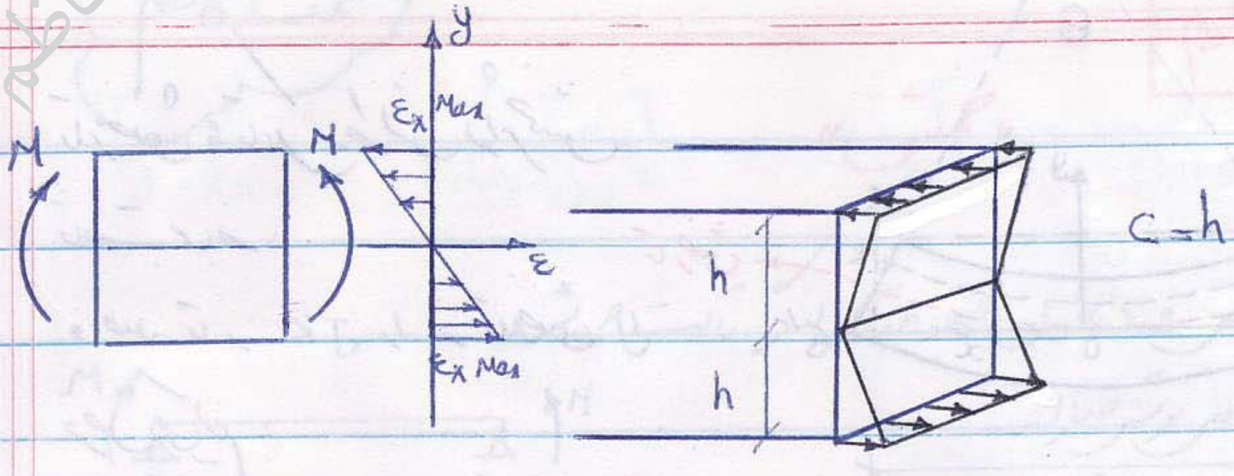
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$



مقطع عرضی

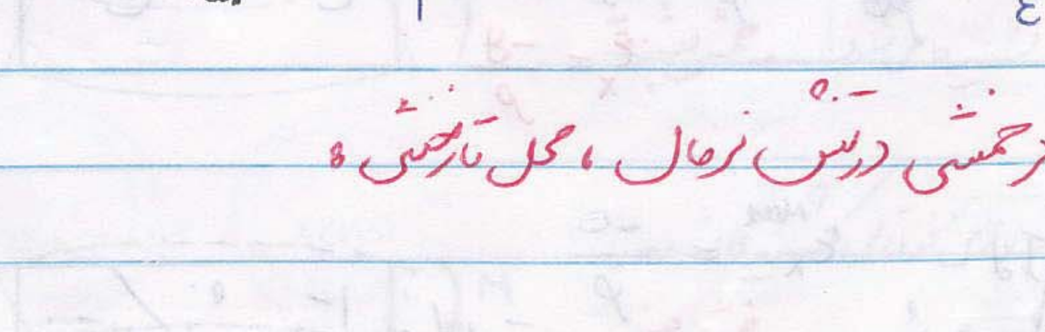
$$\varepsilon_x^{Max} = \frac{-c}{\rho}$$

بنابراین توزیع کرنش در مقطع خطی است.



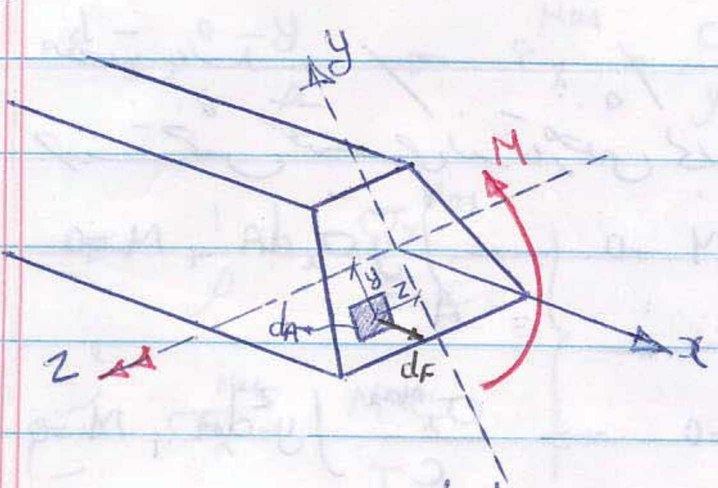
$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \qquad \varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{-y}{\rho} E$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{c}\, \varepsilon_x^{Max} \longrightarrow \sigma_x = \frac{y}{c}\, \sigma_x^{Max}$$



رابطه بین تنش خمشی در تنش نرمال ، محل تار خنثی .

۱۱) $S_z = \int y\,dA = 0$. این معادله نشان می دهد که گشتاور اول سطح مقطع حول محور خنثی آن باید برابر با صفر باشد. به عبارت دیگر، برای عضوی که تحت اثر خمش خالص قرار دارد و مادامی که تنش ها در ناحیه کشسان باقی می مانند، محور خنثی از مرکز جرم مقطع عبور می کند یا مرکز سطح مقطع



$dF = \sigma_x\, dA$ (کششی)

چون زیر تار خنثی است.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A dF = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x\, dA = 0 \rightarrow \int_A \frac{y}{c}\, \sigma_x^{Max}\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int_A y\, dA = 0 \Rightarrow \int_A y\, dA = 0$$

برای یافتن تار خنثی:

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dA}{\int dA} \qquad S_x = \sum y_i A_i = \int y\, dA = 0$$

* محل تار خنثی از مرکز سطح عبور می کند

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \int_A dM_y = 0 \Rightarrow \int_A z\, dF = 0 \Rightarrow \int_A z \cdot \sigma_x \cdot dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_A z \cdot \frac{y}{c}\, \sigma_x^{Max}\, dA = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int_A z \cdot y\, dA = 0 \Rightarrow I_{zy} = 0$$

* بنابراین z و y محورهای اصلی می باشند. بنابراین تار خنثی باید یکی از محورهای اصلی

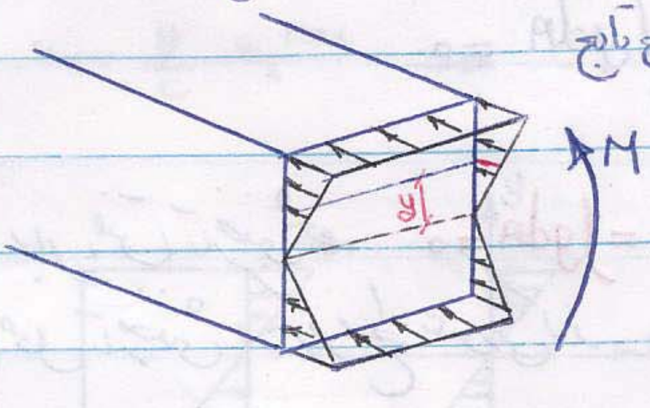
منطبق باشد

جهت خمش تغییر می کند تا رخ خمش کمینه.

$$\Sigma M_z = 0 \longrightarrow \int_A y\,dF + M = 0 \longrightarrow \int_A \bar{y}\,\sigma_x\,dA + M = 0$$

$$\longrightarrow \int_A y \frac{y}{c} \sigma_x^{Max}\,dA + M = 0 \Longrightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int y^2\,dA + M = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} I_z + M = 0 \Longrightarrow \sigma_x^{Max} = \frac{-M.c}{I_z}$$



* این رابطه فقط درحالتی صادق است که مصالح تابع قانون هوک باشد. درغیراینصورت باید از رابطه بالا به نحو دیگری استفاده نمود.

$$\sigma_x = \frac{-M.y}{I_z}$$

مدول مقطع $S = \frac{I}{c} \Longrightarrow \sigma^{Max} = \frac{M}{S} \Longrightarrow S = \frac{M_{Max}}{\sigma_{\text{مجاز}}}$

این رابطه طراحی برای خمش

$$\sigma_x = \frac{-M.y}{I_z} \qquad \varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \longrightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x$$

حمید کاظم

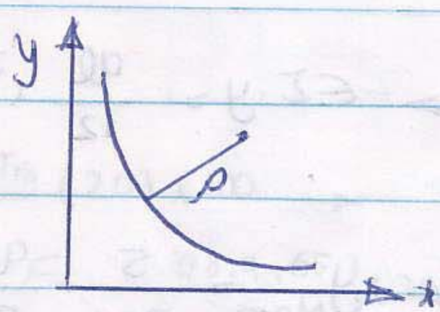
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \Rightarrow \varepsilon_x^{Max} = \frac{c}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_x^{Max}}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_x^{Max}}{E.C}$$

و داریم $\sigma_x^{Max} = \frac{M.C}{I}$

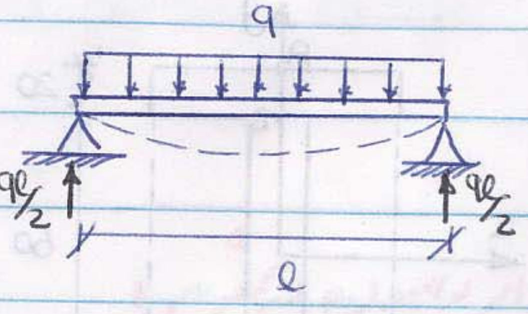
$\rightarrow$ لذا $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ $\quad (k = 1/\rho)$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \sim \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2y}{dx^2}$$



$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$\Rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow EI\frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI\cdot y=\frac{ql}{12}x^3-\frac{q}{24}x^4+C_1x+C_2$$

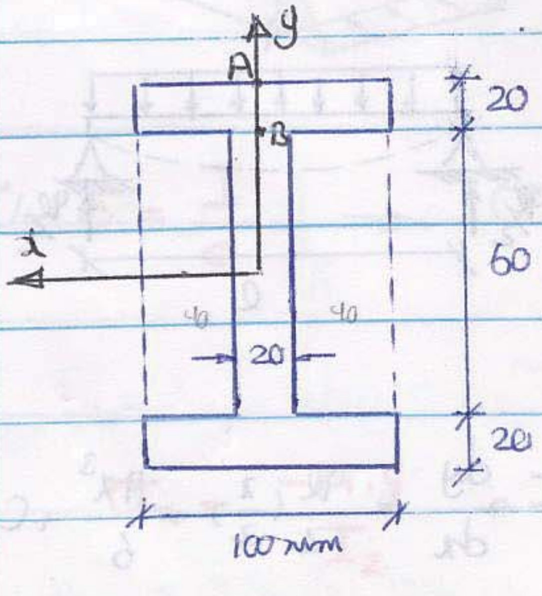
$$x=0\rightarrow y=0\rightarrow C_2=0$$

$$x=l\rightarrow y=0\rightarrow 0=\frac{ql^4}{12}-\frac{ql^4}{24}+C_1l\Rightarrow C_1=\frac{-ql^3}{24}$$

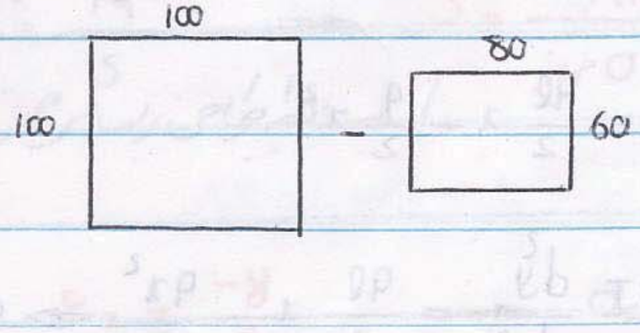
$$\Rightarrow EI\cdot y=\frac{ql}{12}x^3-\frac{q}{24}x^4-\frac{ql^3}{24}x$$

$$\Rightarrow y_{Max}=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}\quad at\quad x=l/2$$

مثال: مقطع تیر I شکل مطابق زیر تحت لنگر خمشی 15 kN.m قرار می‌گیرد محاسبه کنید جمع نیروی که به بال فوقانی تیر وارد می‌شود چقدر است.



$$\sigma=-\frac{M\cdot y}{I}$$

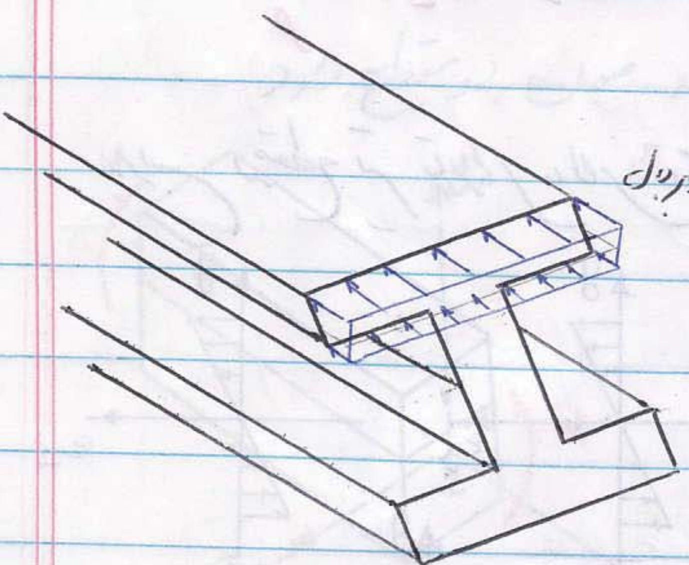


حمید کاظم

$$I = \frac{100^4}{12} - \frac{80 \times 60^3}{12} = 6.89 \times 10^6 \ mm^4$$

$$\sigma_A = \frac{-M y_A}{I} = -\frac{15 \times 10^6 \times 50}{6.89 \times 10^6} = -108.9 \ Mpa$$

$$\sigma_B = \frac{3}{5} \sigma_A = -65.3 \ Mpa$$

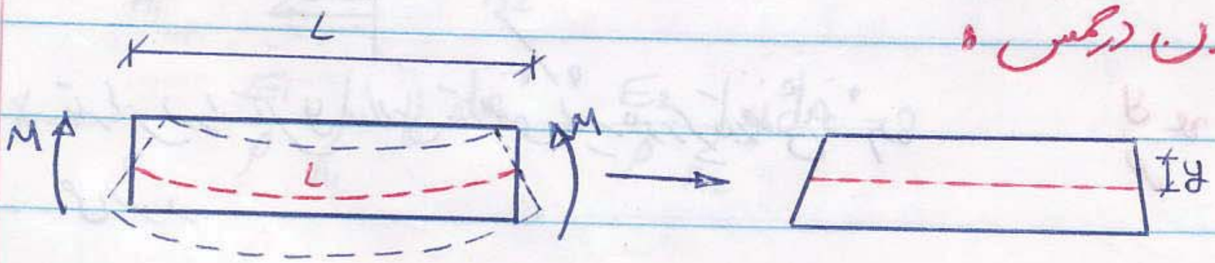


$$\frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} (20) \times 100 \longrightarrow$$

نیروی وارد بر بال $F = -\frac{108.9 + 65.3}{2}(20)(100)$

$$= -174.2 \ kN$$

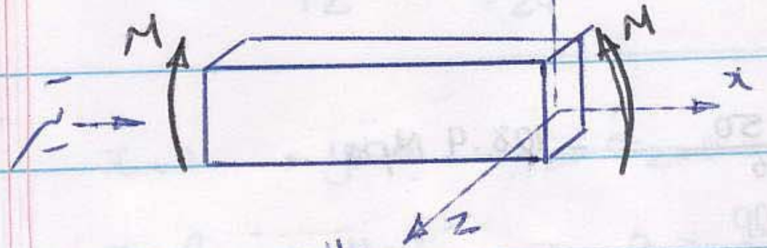
اثر پواسون در خمش



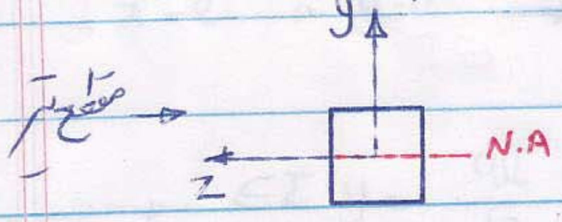
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$

نکته 8 روابط $\varepsilon_z = \varepsilon_y = \nu \frac{y}{\rho}$ نشان می دهند که اجزای واقع در بالای سطح خنثی ($y>0$) در هر دو جهت y و z انبساط پیدا می کند. (کششی). در حالیکه اجزای زیر تار خنثی ($y<0$) منقبض می گردند.

مقطع تیر به صورت مقابل است.



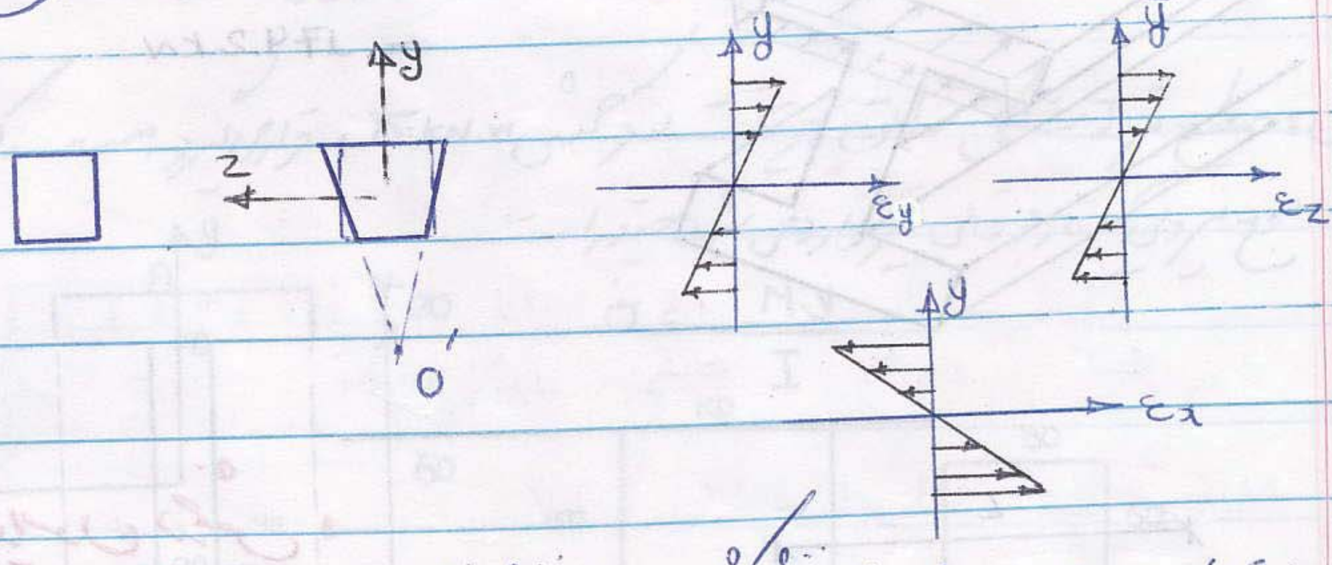
$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| \rightarrow \varepsilon_y = -\nu . \varepsilon_x$$



$$\varepsilon_z = -\nu . \varepsilon_x$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = \nu \frac{y}{\rho}$$

بنابراین در مقطع تیر تارهای بالای تار خنثی کششی و زیر تار خنثی فشاری است.



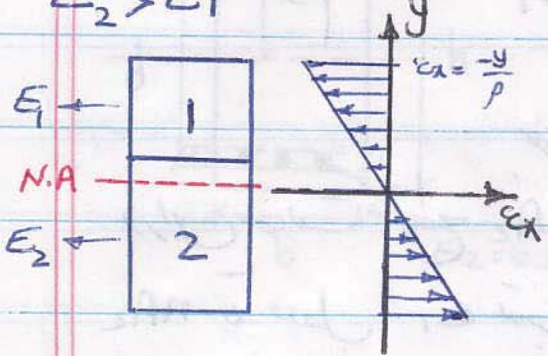
$$\varepsilon_y = \nu \frac{y}{\rho}$$

* تارهای در راستای y بالای تار خنثی کشیده و زیر تار خنثی فشرده می شود.

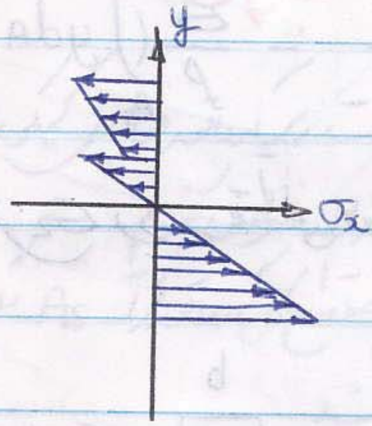
حمید کاظم

خمش مقاطع مرکب:

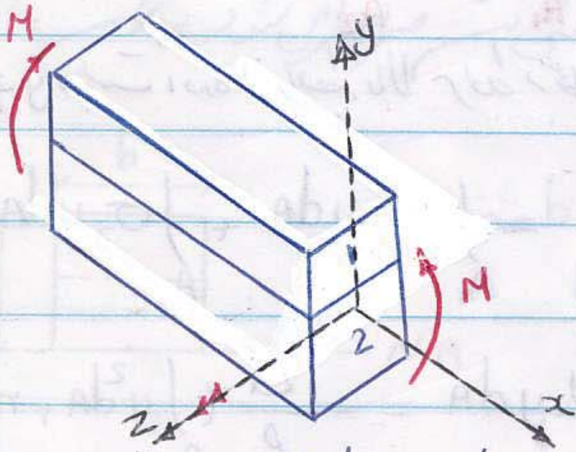
$E_2 > E_1$



$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$



در اینجا . $\sigma_x = \frac{y}{c}\sigma_{Max}$ صادق نیست . چون دو مقطع دارد.



$$\sum F_x = 0$$

$$\rightarrow \int \sigma_x \, dA = 0$$

$$\rightarrow \int_{A_1} \sigma_x \, dA + \int_{A_2} \sigma_x \, dA = 0$$

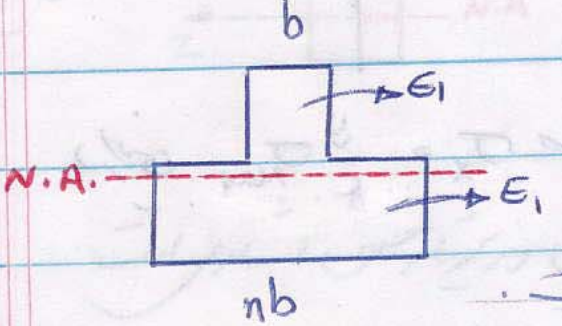
$$\rightarrow \int_{A_1} -E_1 \frac{y}{\rho} \, dA + \int_{A_2} -E_2 \frac{y}{\rho} \, dA = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y \, dA - \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y \, dA = 0$$

فرض می‌کنیم $\frac{E_2}{E_1}=n$

$$\Longrightarrow -\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y\,dA+\int_{A_2} ny\,dA\right)=0$$

در این حالت مقطع A_2 را که دارای مدول ارتجاعی E_2 بود به مقطعی معادل nA_2 با مدول E_1 تبدیل کردیم.



$$-\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y\,dA+\int_{A_2} y\,d(nA_1)\right)=0$$

* y بدست آمده از رابطه بالا مربوط به محل تار خنثی است.

$$\sum M_z=0 \longrightarrow M=\int \sigma_x y\,dA=\int_{A_1}\sigma_x y\,dA+\int_{A_2}\sigma_x y\,dA$$

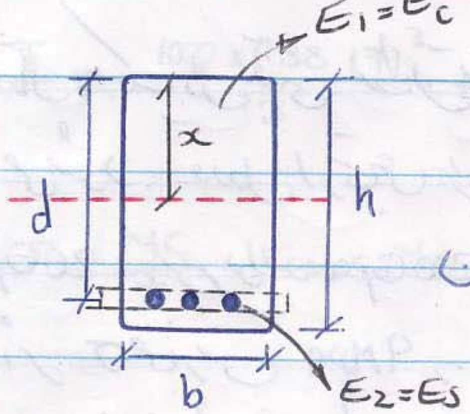
$$\longrightarrow M=\int_{A_1}-\frac{E_1 y}{\rho}\,y\,dA+\int_{A_2}-\frac{E_2 y}{\rho}\,y\,dA=-\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y^2 dA+n\int_{A_2} y^2 dA\right)$$

$$=-\frac{E_1}{\rho}\left(I_1+nI_2\right) \qquad M=-\frac{E_1}{\rho}\underbrace{\left(I_1+nI_2\right)}_{I\ \text{کل}}$$

بنابراین می‌توان فهمید که y نباید n برابر شود و b باید n برابر شود.

حمید کاظم

تیر بتن مسلح:



قسمت زیر آرماتور فولادی کمکی از لحاظ ارزش ندارد. بنابراین آن را در نظر نمی‌گیریم.

از سطح مقطع کل آرماتورها که A_s بنامیم مقطع معادل $n.A_s$ می‌باشد.

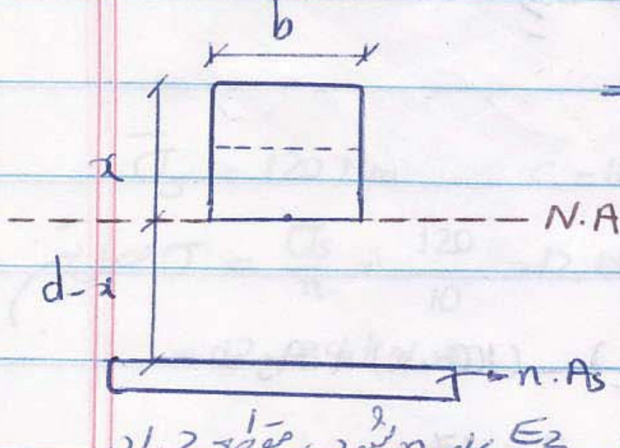
$$\frac{E_s}{E_c}=10=n$$

در حالت بارگذاری مقطع بتن مسلح از قسمت کششی بتن صرف‌نظر می‌شود. بنابراین:

$$S_x=\sum y_i A_i=0$$

$$\Rightarrow b.x.\frac{x}{2}-n.A_s(d-x)=0$$

$$\frac{b}{2}x^2+nA_s x-nA_s d=0$$

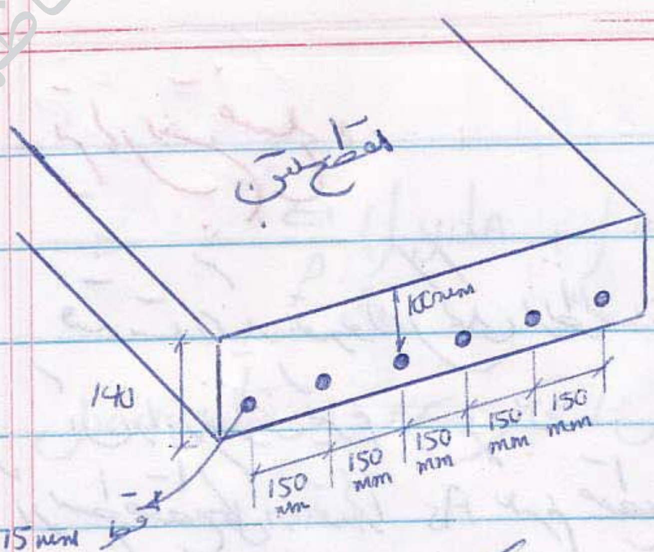


* چون بتن کشش را تحمل نمی‌کند، در قسمت کششی آرماتور فولادی قرار می‌دهند.

** نکته: اگر مقطع مرکب از دو مقطع 1 و 2 تشکیل شده باشد نه $\frac{E_2}{E_1}$ برابر n شود، مقطع 2 را در جهت عمود بر محور yها n برابر می‌کنیم تا سطح 2، n برابر شود. حال فرض می‌کنیم کل مقطع دارای مدول ارتجاعی E_1 است. در این حالت برای مقطع جدید σ_1 را بدست می‌آوریم. چون طبق رابطه $\sigma=E\varepsilon$ پس:

۱۳۱ $$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{E_2}{E_1}=n$$

حمید کاظم



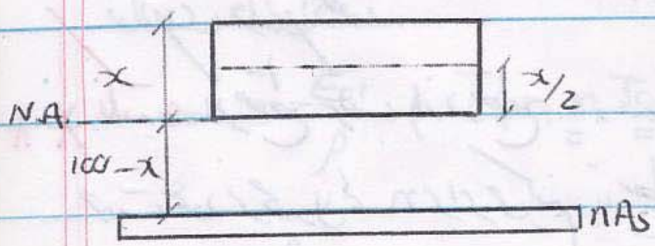
مثال ۵) یک دال بتنی مطابق شکل مسلح می شود. مدول ارتجاعی برای بتن 20Gpa و برای فولاد 200Gpa می باشد. اگر σ مجاز بتن 9Mpa و σ مجاز فولاد 120Mpa فرض شود، مطلوبست حداکثر گشتاور مثبتی که می توان به 1m عرض این دال اعمال کرد.

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{20} = 10$$

$$\text{تعداد میلگردهای یک دال عرض } 1m = \frac{1}{0.15} = 6.667 \text{ میلگرد}$$

$$A_s = 6.667 \times \pi \times \frac{15^2}{4} = 1.178 \times 10^3 \ mm^2$$

$$nA_s = 10\,(1.178 \times 10^3) = 1.178 \times 10^4 \ mm^2$$



$$1000\,x\,(x/2) - (100 - x)\,n.A_s = 0$$

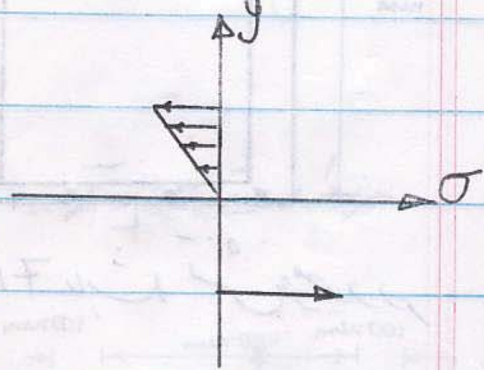
$$\rightarrow x = 38.17 mm$$

$$\rightarrow 100 - x = 61.83 mm$$

حمید کاظم

$$I = \frac{1000 \times (38.17)^3}{3} + 1.178 \times 10^4 \times (61.83)^2 + I_{\text{فولاد}} = 63.57 \times 10^6\ mm^4$$

$$\sigma = \frac{MC}{I} \longrightarrow M = \sigma \cdot \frac{I}{C}$$



۱) کنترل مقطع براساس تنش فشاری مجاز بتن :

$$M_{Max} = \bar{\sigma}_c \cdot \frac{I}{c} = 9 \times \frac{63.57 \times 10^6}{38.17} \times 10^{-6} = 14.99\ kN.m$$

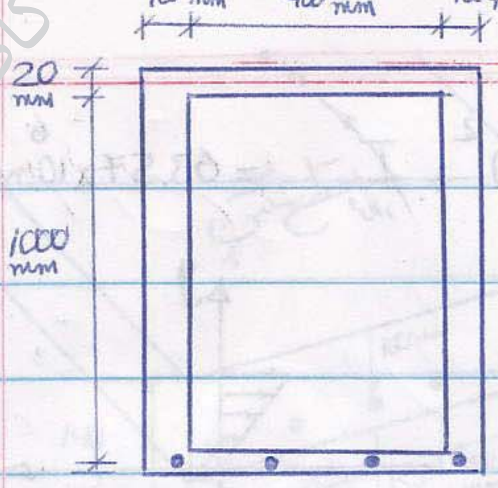
۲) کنترل مقطع براساس تنش مجاز فولاد :

$$\bar{\sigma}_s = 120\ Mpa \qquad c = 100 - x = 61.83\ mm$$

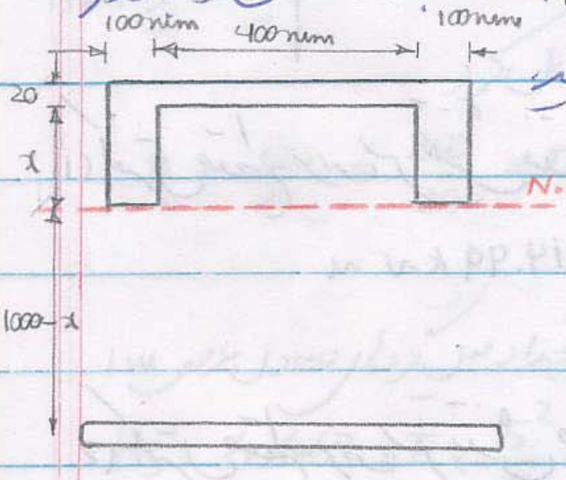
معادل بتن $\sigma = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{120}{10} = 12\ Mpa \longrightarrow M_{Max} = \bar{\sigma} \cdot \frac{I}{c} = 12 \times \frac{63.57 \times 10^6}{61.83} \times 10^{-6} =$

$= 12.34\ kN.m$

$$M_{Max} = Min(14.99, 12.34) = 12.34$$



مثال: مقطع تیر بتن مسلح همانند شکل به صورت مقابل می باشد. سطح مقطع مجموع میلگردهای کششی برابر $3600\ mm^2$ و $n=10$ فرض می گردد. هرگاه حداکثر تنش فشاری ناشی از خمش در بتن مساوی $7\ N/mm^2$ باشد تنش موجود در میلگردهای کششی و لنگر خمشی وارد بر مقطع را محاسبه کنید.



$$A_s = 3600\ mm^2 \longrightarrow nA_s = 36000\ mm^2$$

$$S_x = 0 \longrightarrow \sum y_i A_i = 0$$

$$(x+10)(20\times600) + \frac{x}{2}(100x)\times2 -$$

$$(1000-x)(36000) = 0 \longrightarrow x = 405.29\ m$$

$$\longrightarrow I = \frac{600(20)^3}{12} + (415.29)^2(20\times600) + 2\left(\frac{100(405.29)^3}{3}\right) + (594.71)^2(36000)$$

$$\longrightarrow I = 4\times10^5 + 20695.89\times10^5 + 44381.95\times10^5 + 127324.79\times10^5$$

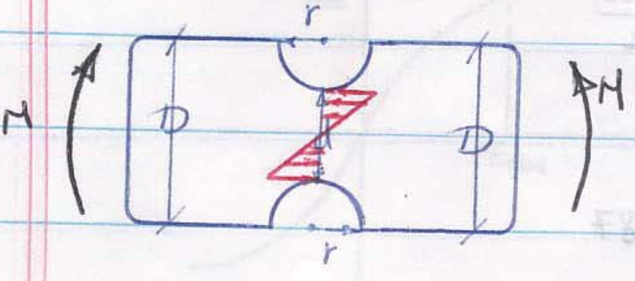
$$\Longrightarrow I = 192406.63\times10^5\ mm^4$$

$$(\sigma_{all})_c = 7\ N/mm^2 \longrightarrow \sigma_s = 70\ N/mm^2$$

بتن $$7\ \frac{N}{mm^2} = \frac{M\,(425.29)\,mm}{192406.63\times10^5\ mm^4} \Longrightarrow M = 316.69\ kN.m$$

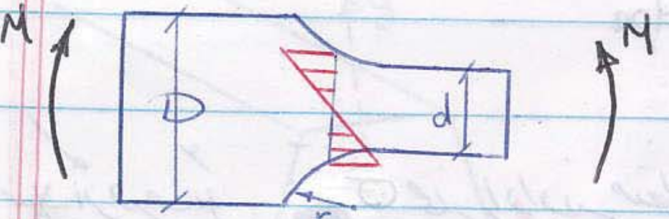
فولاد $$70\ \frac{N}{mm^2} = \frac{M\,(594.71)\,mm}{192406.63\times10^5\ mm^4} \Longrightarrow M = 2264.7\ kN.m$$

تمرکز تنش در خمش :

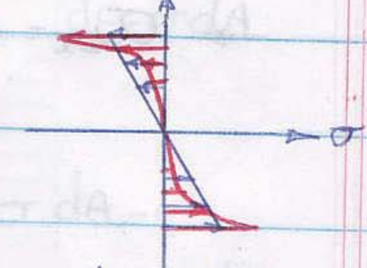


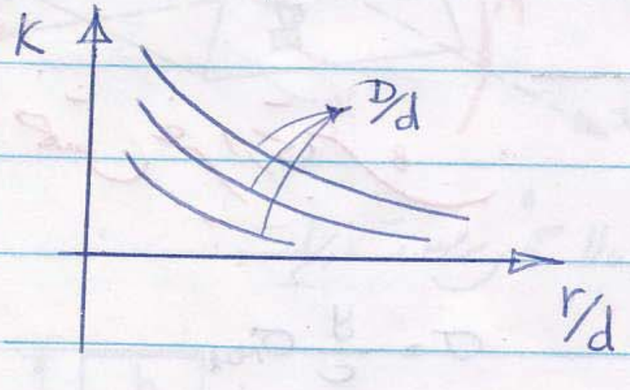
$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$$

$$\sigma_{avg} = M\frac{c}{I} \longrightarrow$$ مربوط به ورق ضعیف تر



$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$$





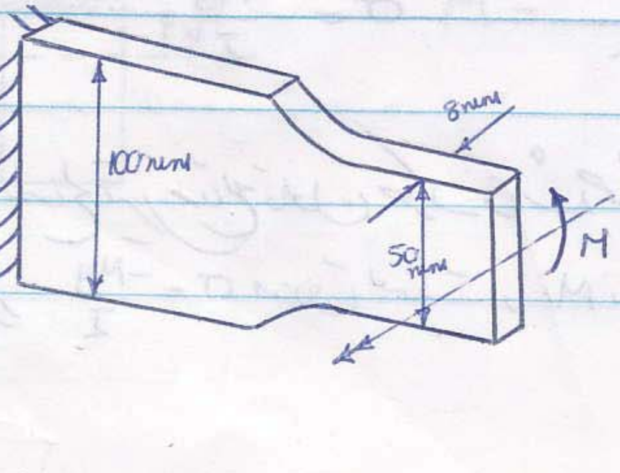
اگر سطح دو نمودار باید برابر باشد

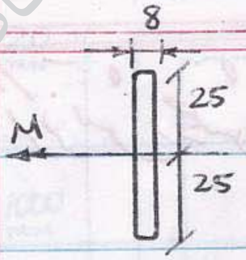
شکستن فقط توزیع تنش را بهم می‌زند.

مثال ۶: اگر $M = 350 N.m$ باشد

مطلوبست حداکثر تنش وارد شده

روی ورق اگر $r = 5mm$ باشد





$$\sigma_{avg} = \frac{MC}{I} = \frac{350\times10^{3}\times25}{\frac{8\times50^{3}}{12}} = 105\ Mpa$$

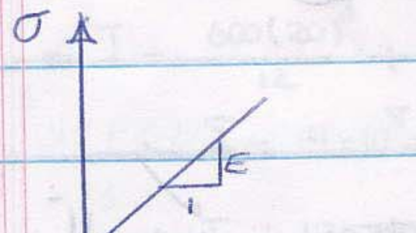
$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$$

$$D/d = 2 \quad r/d = 0.1 \longrightarrow K = 1.87$$

$$\longrightarrow \sigma_{Max} = 1.87\times105 = 196\ Mpa$$

* اگر در سوال تنش ماکزیمم را دادند منظور σ_{Max} است.

خمش غیر ارتجاعی

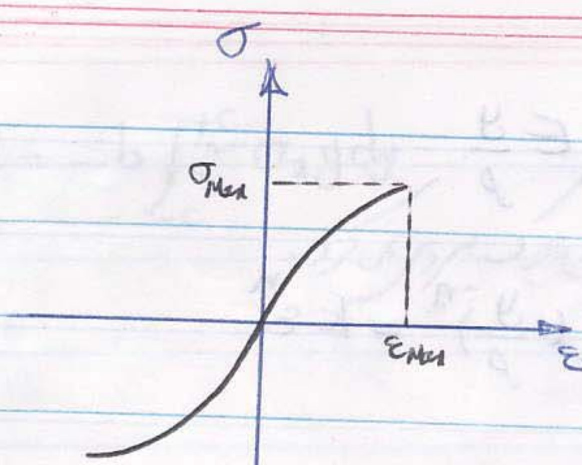


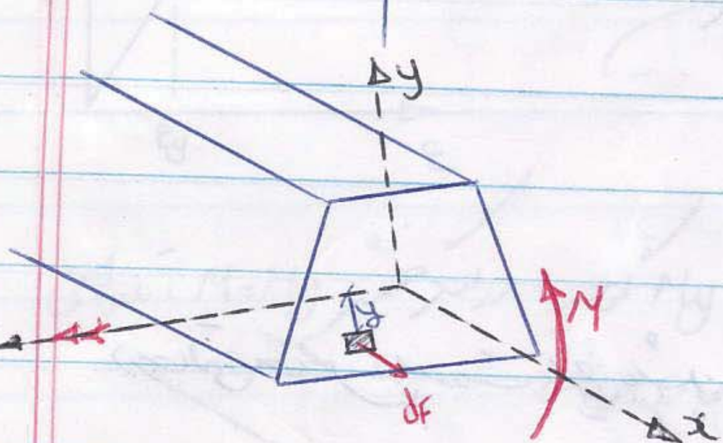
$$\sigma = E\,.\,\varepsilon \qquad \sigma = \frac{y}{c}\,\sigma_{Max}$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

اگر مصالح پیرو تابع قانون هوک نباشد خمش ایجاد شده غیر ارتجاعی است.
و دیگر $\sigma = \frac{-My}{I}$ صدق نیست، و M به صورت زیر بدست می آید.

حمید کاظم





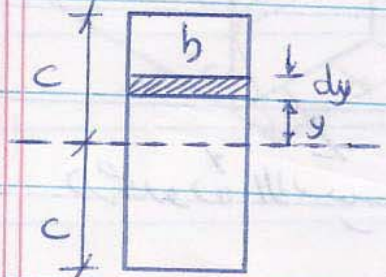
$$\Sigma M_z = 0 \qquad dF = \sigma dA$$

$$M + \int y\, dF = 0$$

$$\Rightarrow M + \int y\sigma . dA = 0$$

$$\Rightarrow M = -\int y\sigma . dA$$

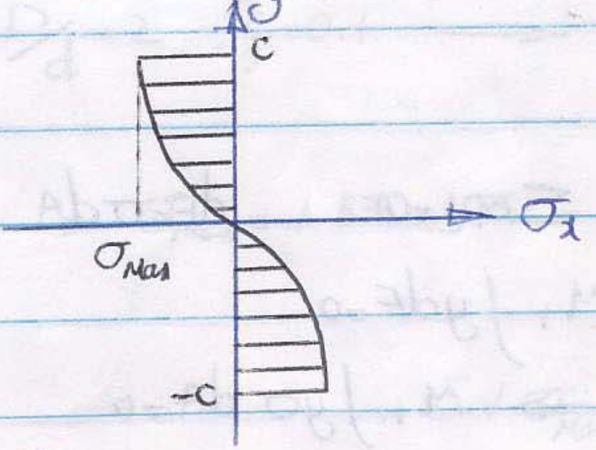
برای مستطیل زیر با توجه به نمودار σ ـ ε بالا خمش به صورت زیر است.



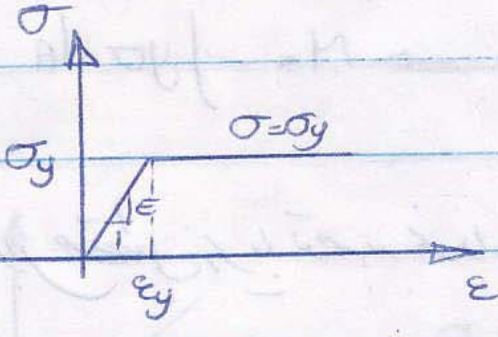
$$M = -\int y\sigma dA = -b\int_{-c}^{+c} \sigma . y . dy$$

برای الاستیک خطی $\longrightarrow \sigma_x = -E\dfrac{y}{\rho}$

در حالت کلی $\longrightarrow \sigma_x = K\left(\dfrac{y}{\rho}\right)^n = K\varepsilon^n$



در حالتی خاص به صورت زیر می‌باشد.



در محدوده الاستیک خطی

$$\sigma_{Max} = \frac{-Mc}{I}$$

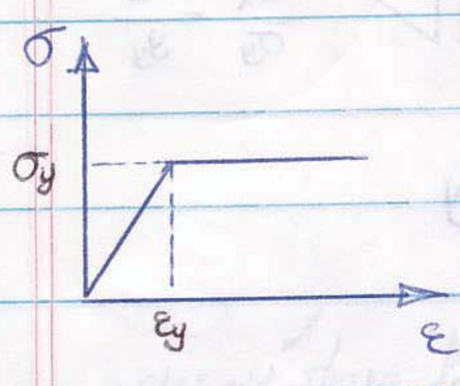
$$\sigma = \frac{-My}{I}$$

حمید کاظم

در جلسه قبل برای مستطیل گفتیم: $M = -b\int_{-c}^{+c}\sigma_x y\,dy$

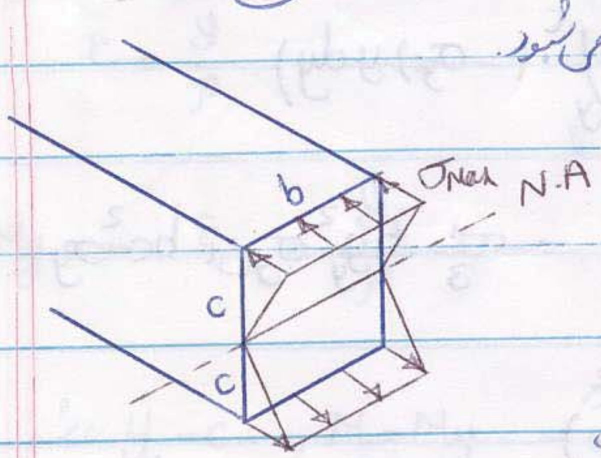
که از قانون هوک پیروی می‌کرد.

رفتار الاستو - پلاستیک در خمش:



چون تنش در دورترین تارها بیشتر است بنابراین این تارها زودتر جاری می‌شوند.

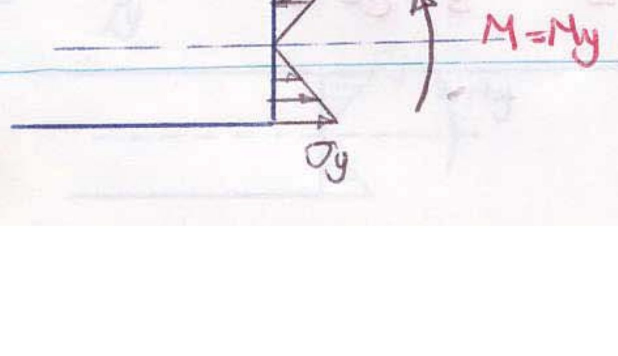
لنگری که اولین جاری شدن را دارد M_y گویند. در لنگر خمشی $M=M_y$، تارهای فوقانی (دورترین تار نسبت به تار خنثی) جاری می‌شود.



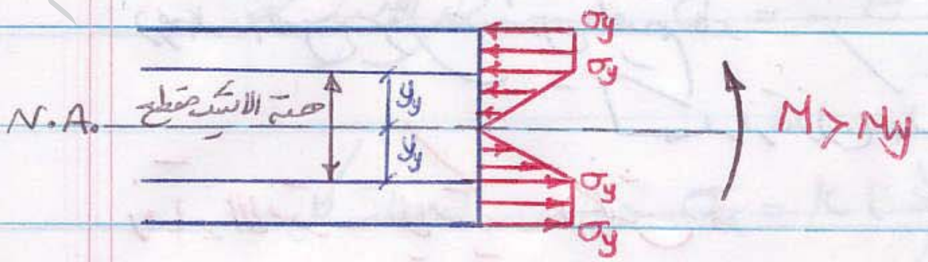
1) $M=M_y$: $\sigma_{Max} = \sigma_y = \dfrac{M_y \cdot c}{I}$

شکل $I = \dfrac{b(2c)^3}{12} = \dfrac{2}{3}bc^3$

$\xrightarrow{\text{مستطیل}} M_y = \dfrac{2}{3}bc^2\sigma_y$



حميد كاظم



2) $M > M_y$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{y}{y_y}$$

$$M = -b\int_{-c}^{c} \sigma_x y\,dy = -2b\int_{0}^{c} \sigma_x y\,dy$$

$$= -2b\left(\int_{0}^{y_y} \sigma_x y\,dy + \int_{y_y}^{c} \sigma_x \cdot y\,dy\right)$$

$$= -2b\left(\int_{0}^{y_y} \left(\frac{-y}{y_y}\cdot\sigma_y\right) y\,dy + \int_{y_y}^{c} (-\sigma_y)\, y\,dy\right)$$

$$= \frac{2}{3} b y_y^2 \sigma_y + bc^2\sigma_y - b y_y^2 \sigma_y = \frac{-1}{3} b y_y^2 \sigma_y + bc^2 \sigma_y$$

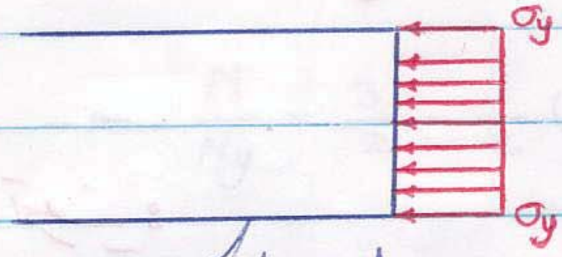
$$\Rightarrow M = bc^2\sigma_y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_y^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y^2}{c^2}\right)\right]$$

حمید کاظم

3) $M=M_p$

M_p حداکثر لنگری که بتوان به مقطع وارد کرد و در این صورت مقطع دچار گسیختگی می‌گردد.



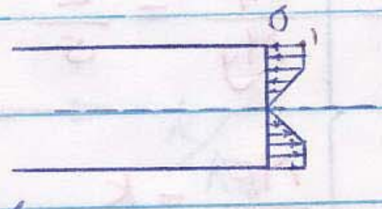
$y_y=0$

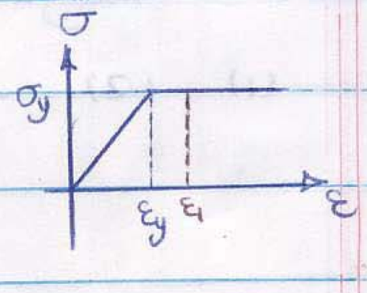
$M_p=\frac{3}{2}M_y$

* در حالت کلی $M_p=kM_y$ است که k را shape factor گویند و برای مستطیل $3/2$ است.

$\varepsilon=\frac{y}{\rho} \longrightarrow$ (منحنی کرنش‌ها با هم نسبت)

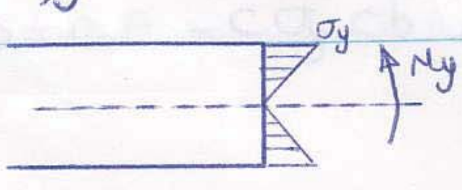
$M>M_y \longrightarrow \varepsilon_y=\frac{y_y}{\rho}$ (1)





ρ_y شعاع انحنای معادل مقطع جاری شده وقتی که $M=M_y$ ، $y_y=c$ باشد.

$M=M_y$: $\varepsilon_y=\frac{c}{\rho_y}$ (2)   (1), (2) $\longrightarrow \frac{y_y}{\rho}=\frac{c}{\rho_y} \longrightarrow \frac{y_y}{c}=\frac{\rho}{\rho_y}$



حمید کاظم

$\rho_y < \rho$ می باشد.

$$\frac{y_y}{c} = \frac{\rho}{\rho_y} \longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_y}\right)^2\right]$$

تعریف:

$$(1) \quad \frac{M_P}{\sigma_y} = Z \quad \text{مدول پلاستیک مقطع}$$

$$\frac{M}{\sigma} = S \quad \text{مدول الاستیک مقطع} \longrightarrow \frac{M_y}{\sigma_y} = S \quad (2) \qquad \left(\frac{I}{c} = \frac{M}{\sigma} = S\right)$$

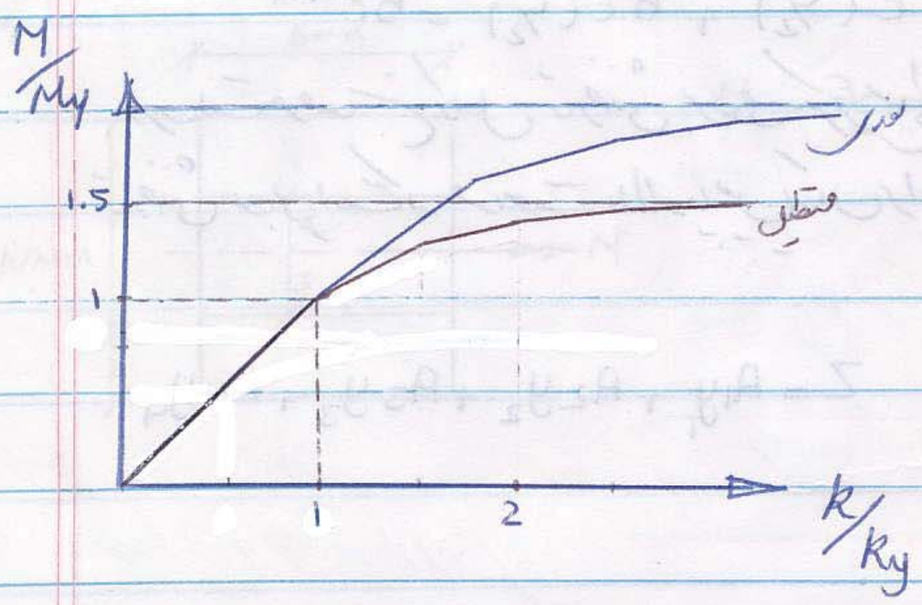
$$(1), (2) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{M_P}{M_y} = \dfrac{Z}{S} \\ \dfrac{M_P}{M_y} = k \end{cases} \longrightarrow \frac{Z}{S} = k \longrightarrow \text{ضریب شکل سطح مقطع}$$

k برای مقطع I شکل 1.15 و برای دایره 1.7 می باشد.

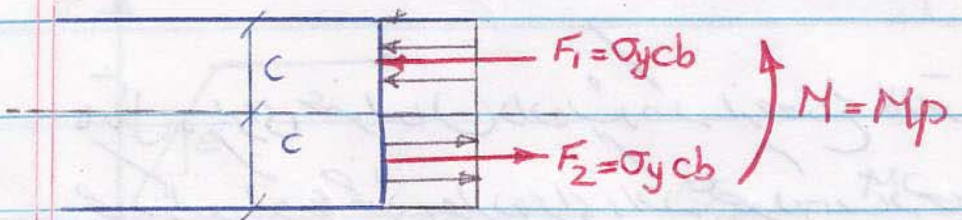
$\frac{1}{\rho} = k$ اگر $\frac{1}{\rho_y} = k_y$

$$\longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \right]$$

$$\longrightarrow \frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2$$



مقطع مستطیل



در حالت مومسان کامل

$F_1 = F_2 = F$

$M_p = c.F = c\sigma_y cb = bc^2 \sigma_y$

حالت کلی:

$F_1 = b_1 c_1 \sigma_y \quad F_2 = b_2 c_2 \sigma_y \quad (F_1 = A_1\sigma_y \ ; \ F_2 = A_2 \sigma_y)$

$\rightarrow M_p = F_1 y_1 + F_2 y_2 = b_1 c_1 y_1 \sigma_y + b_2 c_2 y_2 \sigma_y = A_1 y_1 \sigma_y + A_2 y_2 \sigma_y$

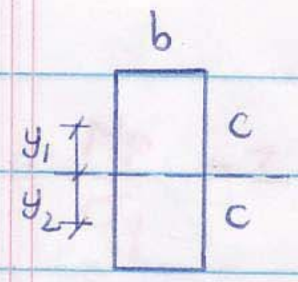
$\rightarrow M_p = \sigma_y (A_1 y_1 + A_2 y_2) \rightarrow Z = A_1 y_1 + A_2 y_2$

$$M_p = Z\sigma_y \Rightarrow Z = bc^2$$

در حالت کلی:

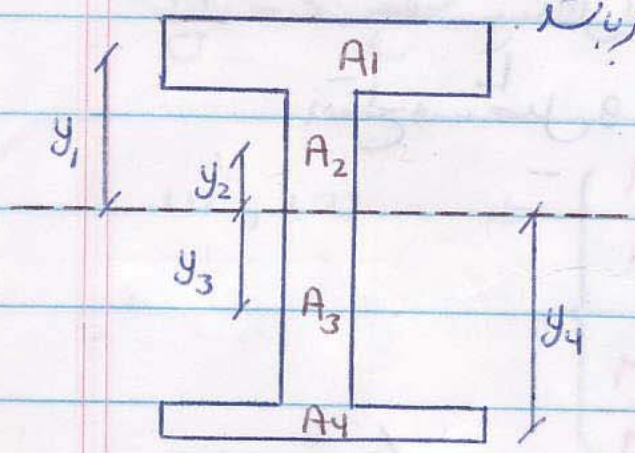
$$Z = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

$$\rightarrow M_p = (A_1 y_1 + A_2 y_2)\sigma_y$$



$$Z = b.c\left(\frac{c}{2}\right) + b.c\left(\frac{c}{2}\right) = bc^2$$

در حالت مومان کامل تار خنثی بر روی مرکز سطح نیست بلکه تار خنثی جایی است که سطح بالا و پایین آن برابر باشد.

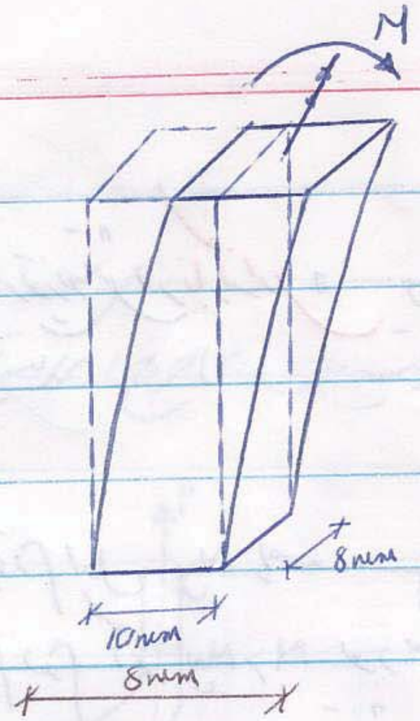


$$Z = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4$$

مثال: برای عضو نشان داده شده که از مصالح الاستو-پلاستیک تشکیل شده است محاسبه کنید لنگر خمشی وارده برای آنکه عضو در آستانه جاری شدن قرار گیرد. مطلوب چه لنگری هسته الاستیکی به ضخامت 6mm در مقطع این عضو به وجود آید؟

$\sigma_y = 300\,Mpa \quad E = 200\,Gpa$

حمید کاظم



$$\sigma_y = 300\,Mpa \qquad E = 200\,Gpa$$

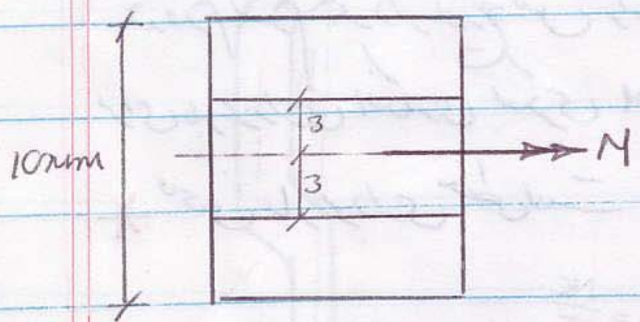
$$M \geqslant M_y \rightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y}{c}\right)^2\right]$$

$$b = 8\,mm \qquad c = 5\,mm$$

$$M_y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y = \frac{2}{3}\, 8\,(5)^2 \times 300 = 40\,N.m$$

$$2y_y = 6\,mm \rightarrow y_y = 3\,mm$$

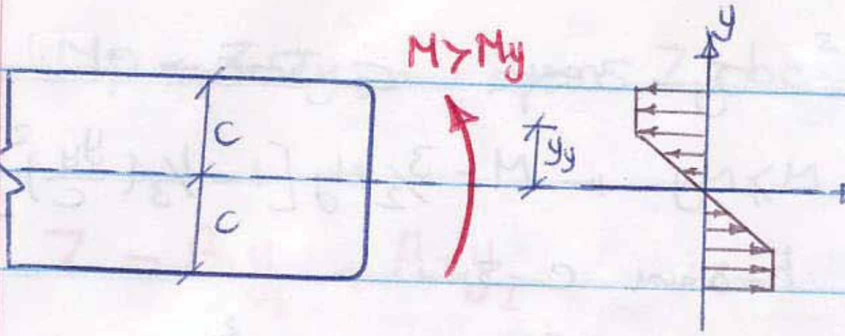
$$M = \frac{3}{2} \times 40 \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^2\right] = 52.8\,N.m$$



تنش های باقیمانده در خمش

مدل ما به صورت زیر می باشد.

$$\sigma_{Max} = \frac{Mc}{I} \qquad \sigma_y = \frac{M_y c}{I}$$



نمودار توزیع تنش در بارگذاری

$$My = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y$$

$$M = \frac{3}{2} My \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y}{c}\right)^2\right]$$

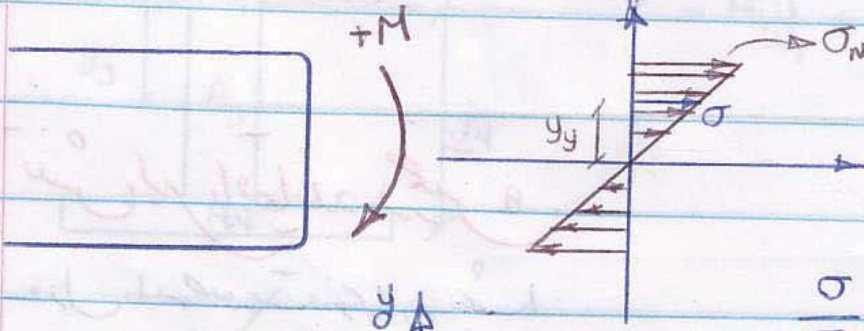
در قدم اول My را حساب می کنیم.

در قدم دوم اگر M > My بود هسته الاستیک را رسم می کنیم.

در قدم سوم نمودار توزیع تنش را رسم می کنیم.

برای باربرداری انگاری لنگری M- به مقطع وارد می کنیم.

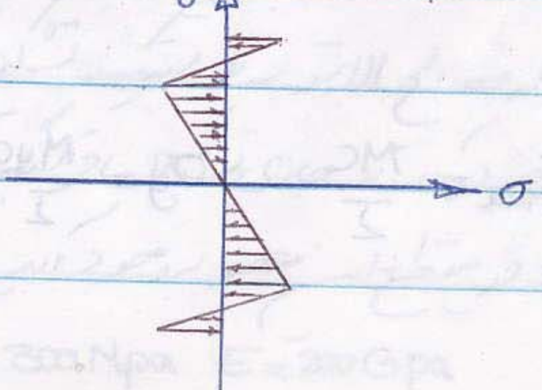
* منحنی باربرداری خطی است. پس توزیع تنش در باربرداری خطی است.



$$\sigma_M = \frac{Mc}{I}$$

نمودار توزیع تنش در باربرداری

$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{y_y}{c}$$

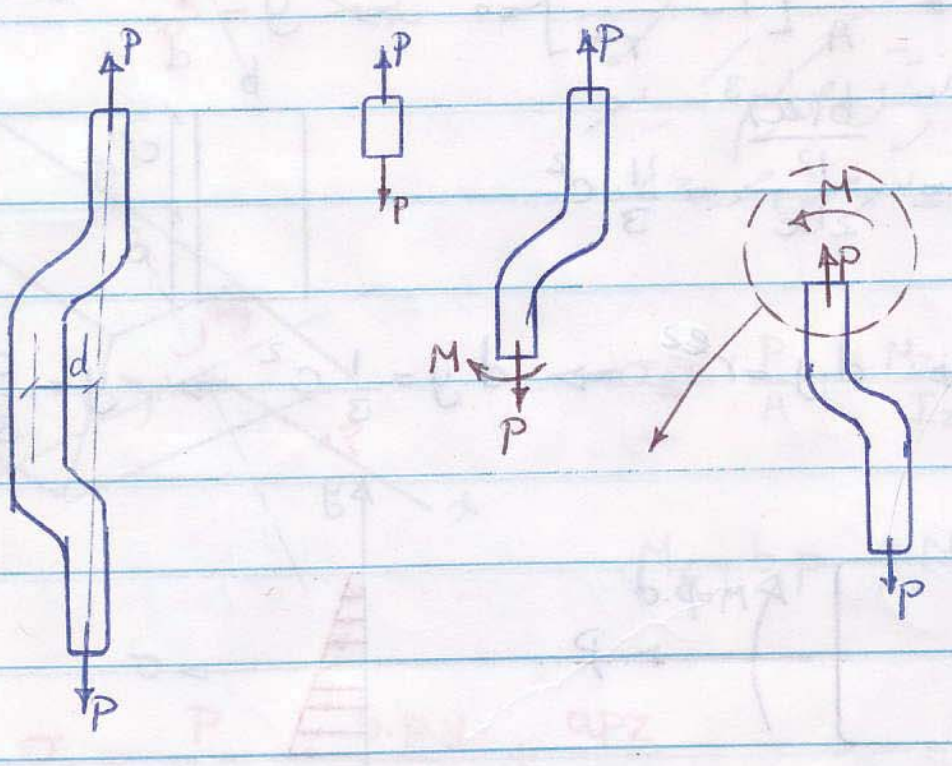


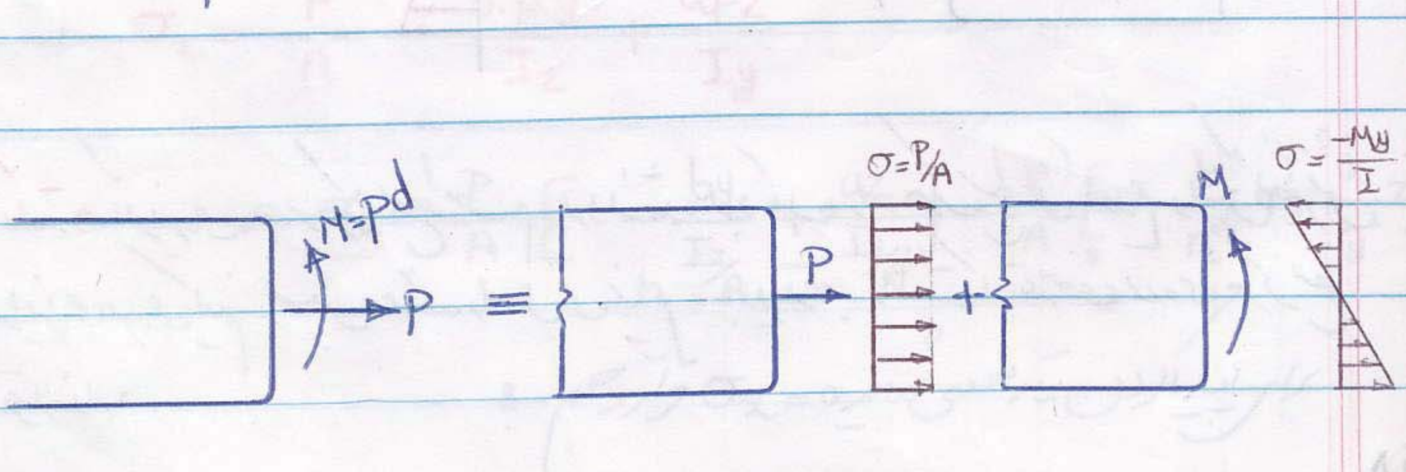
حمید کاظم

بارگذاری خارج از محور

در عمل بار همیشه در مرکز مقطع وارد نمی‌شود.

دو نوع خروج از مرکزیت داریم. ۱) خروج از مرکزیت بار ۲) خروج از مرکزیت هندسی.





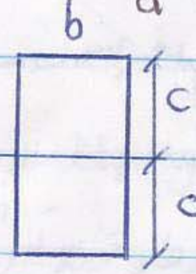
حمید کاظم

$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{d.y}{I/A}\right] \qquad I/A = r^2$$

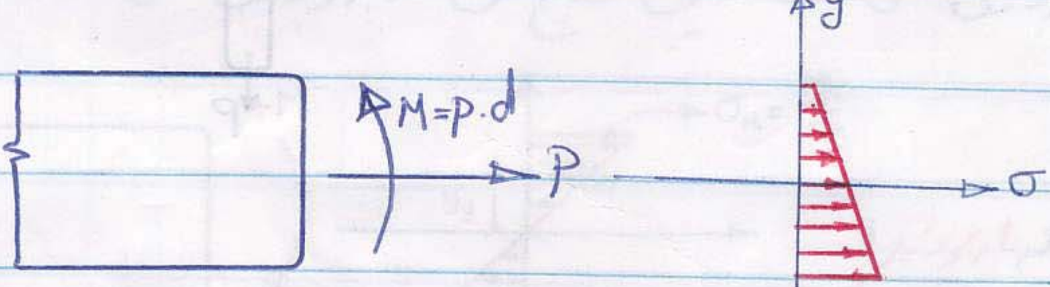
برای پیدا کردن تار خنثی باید $\sigma = 0$ باشد.

$$\sigma = 0 \longrightarrow \frac{P}{A}\left[1 - \frac{d.y}{r^2}\right] = 0 \Longrightarrow y = \frac{r^2}{d}$$

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{b(2c)^3}{12}}{2bc} = \frac{1}{3}c^2$$

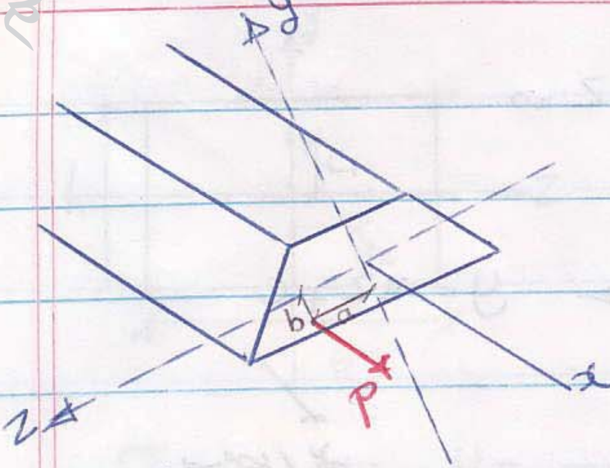


$$\sigma = 0 \Longrightarrow d.y = r^2 \Longrightarrow d.y = \frac{1}{3}c^2 \Longrightarrow y = \frac{c^2}{3d}$$



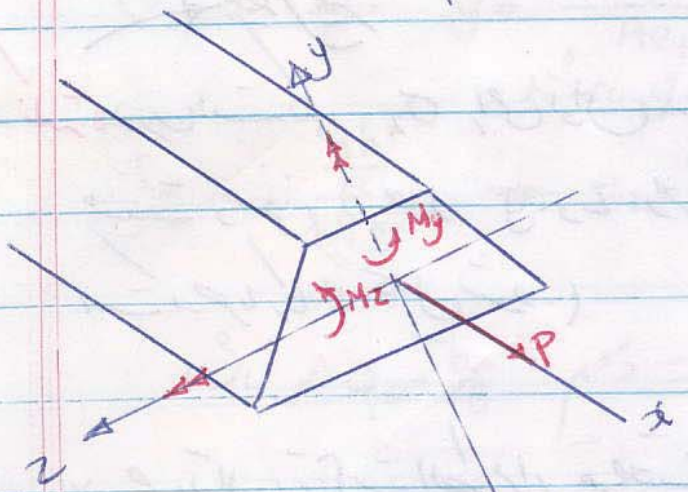
نکته 8: اگر نیروی P بر مرکز سطح جسم وارد نشده بود آن را به مرکز سطح می‌آوریم و لنگر نظیرش را نیز محاسبه می‌کنیم. سپس مسئله را حل می‌نماییم. باید توجه داشت که تار خنثی بر روی مرکز سطح قرار ندارد.

بارگذاری خارج از محور :



می خواهیم معادله تنش را برای مقطع مقابل بنویسیم .

بار را به مرکز ثقل منتقل می کنیم . یک لنگر حول محور y و یک لنگر حول محور z به وجود می آید.



$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

$$M_z = b.p \qquad M_y = a.p$$

$$\longrightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{b.p.y}{I_z} + \frac{apz}{I_y}$$

$$\longrightarrow \sigma_x = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{by}{I_z/A} + \frac{az}{I_y/A}\right] = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{b}{r_z^2} y + \frac{a}{r_y^2} z\right]$$

برای پیدا کردن تار خنثی باید $\sigma_x = 0$ قرار دهیم :

حمید کاظم

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow r - \frac{b}{r_z^2} y + \frac{a}{r_y^2} z = 0$$

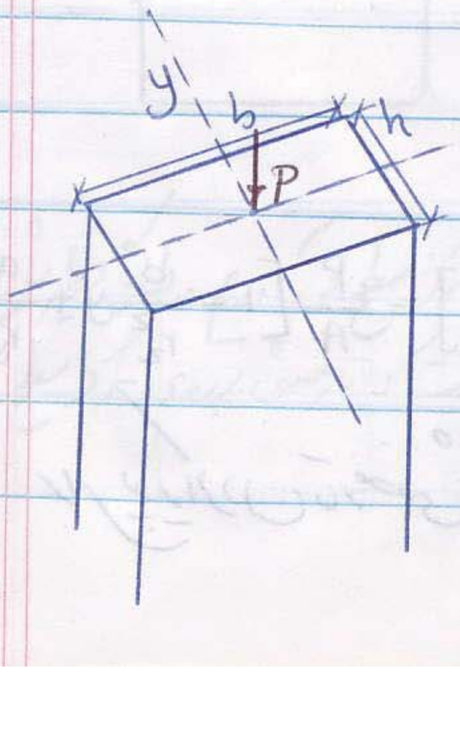
$$\Rightarrow y = \frac{a}{b}\frac{I_z}{I_y} z + \frac{r_z^2}{b} \longrightarrow y = mz + c$$

محور خنثی

نکته: در حالت کلی σ_x را می‌توان به صورت زیر نوشت. در این حالت علامت که مثبت و منفی در خود y و z وجود دارد و باید لحاظ شود (که البته بهترین راه این است که همواره کاملاً کنترل شود.)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

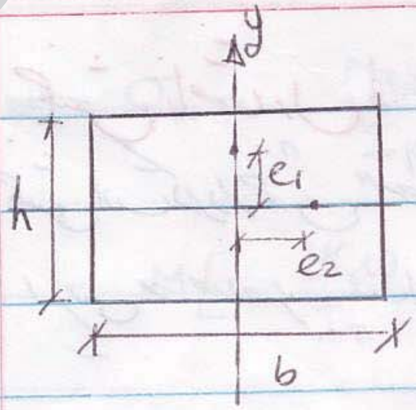
* می‌توان تمام شرایط را برای موقعیت نیروی P را بررسی نمود.



مثال: میزان خروج از مرکزیت P چقدر باشد که ستون به کشش نیفتد؟

در این حالت تار خنثی در بی‌نهایت قرار دارد چون صفحه تنش با صفحه مقطع ستون در بی‌نهایت همدیگر را قطع می‌کند. محل P را به جایی می‌بریم تا که تار خنثی به

هرگز کشش نبیند.



$$I = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad A = bh$$

$$\sigma_x = \frac{-P}{A} - \frac{P e_1 y}{I}$$

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow y = -\frac{I}{A e_1}$$

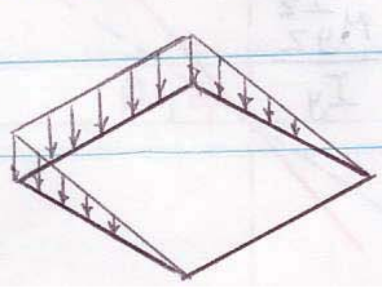
برای اینکه تار پایینی در مرز کشش باشد $y = -h/2$ باشد.

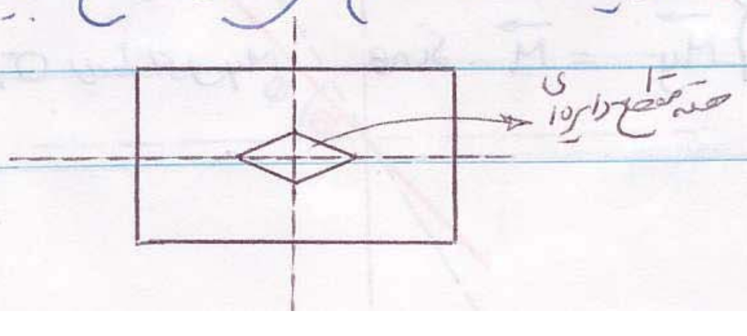
$$-h/2 = -\frac{\frac{bh^3}{12}}{b h e_1} \Rightarrow e_1 = h/6$$

به همین ترتیب اگر P را روی محور z حرکت دهیم $e_2 = b/6$ می باشد.

بنابراین مکان هندسی نقاطی که بارگذاری فشاری در آن نقاط قرار می گیرند تا مقطع در کشش نبیند لوزی با اقطار $b/3$ و $h/3$ است.

* این هسته در ستون های بتن مسلح بسیار مهم است که ستون به کشش نبیند.

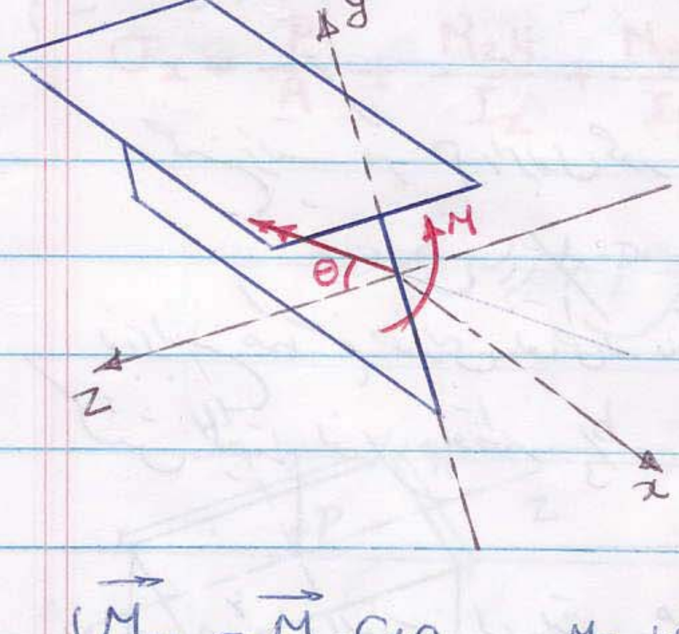


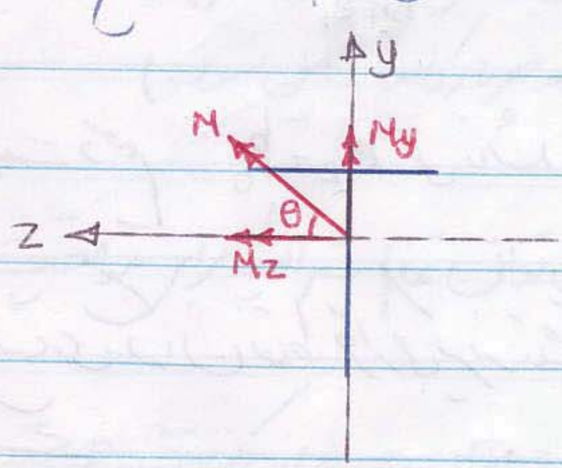


خمش نامتقارن:

خمشی است که بردار خمش منطبق بر محورهای اصلی مقطع نباشد. در این حالت ممان اینرسی حاصلضرب فعال می شود.

۱) محورهای اصلی مقطع را شناسایی می کنیم. ۲) بردار خمش را بر این ها تجزیه می کنیم.
۳) از فرمول $\sigma = \frac{My}{I}$ برای هر مولفه خمشی تنش را حساب می کنیم. ۴) با استفاده از روش جمع آثار قوا تنش را بدست می آوریم.





$$\begin{cases} \vec{M}_z = \vec{M}\cdot\cos\theta \\ \vec{M}_y = \vec{M}\cdot\sin\theta \end{cases}$$

بواسطه اعمال M_z: $\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$

بواسطه اعمال M_y: $\sigma_x = +\frac{M_y z}{I_y}$

$$\Rightarrow \sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = -\frac{M\cos\theta\, y}{I_z} + \frac{M\sin\theta\, z}{I_y}$$

$$= M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right] \qquad \sigma_x = M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right]$$

معادله تار خنثی مقطع با قرار دادن $\sigma_x = 0$ بدست می آید.

$\sigma_x = 0$

$$\Rightarrow M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right] = 0 \Rightarrow y = \frac{I_z}{I_y}\,tg\theta . z$$

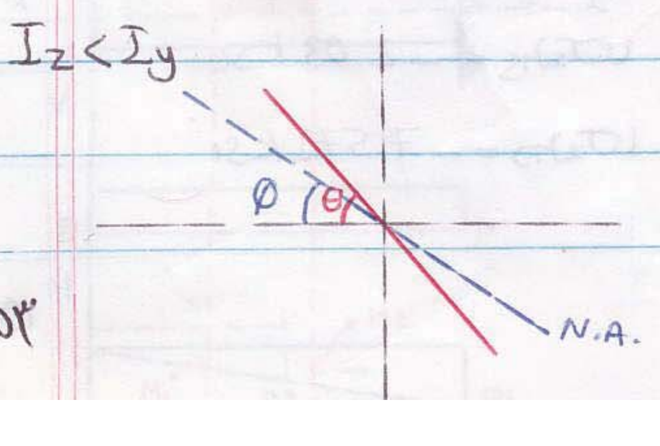
معادله تار خنثی

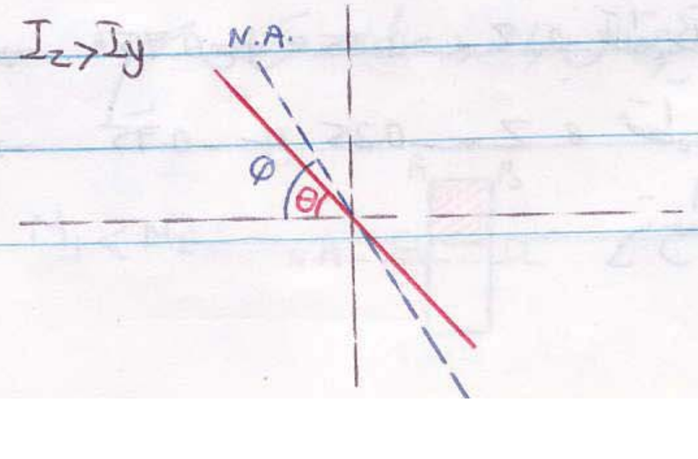
اگر $\frac{I_z}{I_y} tg\theta = m \Longleftarrow y = mz$

در اینصورت $m = tg\varphi$ قرار داده است. (φ زاویه بین محور خنثی و محور z می باشد)

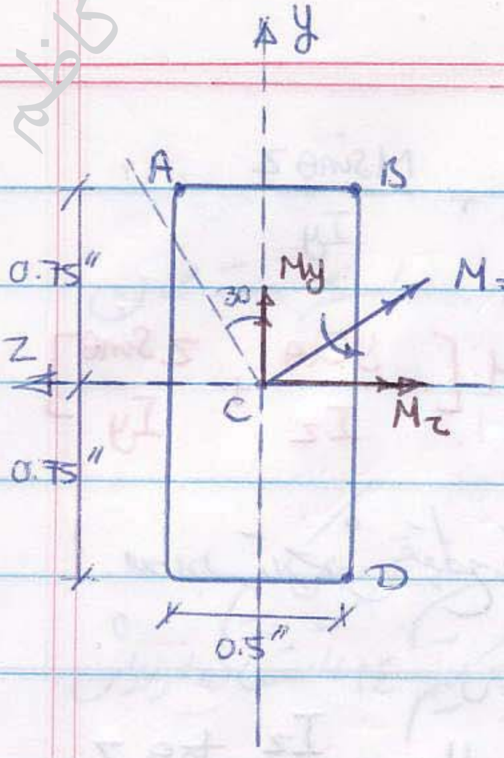
$$\longrightarrow \varphi = tg^{-1}\left(\frac{I_z}{I_y}\,tg\theta\right) \qquad \varphi = tg^{-1}\left(\frac{I_z}{I_y}\,tg\theta\right)$$

اگر $I_z = I_y$ باشد، آنگاه محور خنثی در امتداد بردار لنگر است.





10, 16, 24, 28, 42, 49, 50, 56, 58, 60, 68, 72, 84, 88, 106, 110, 116, 123, 130
148, 159, 168, 204



مثال، مطلوبست مقدار تنش در نقاط A ، B ،
و D که لنگر وارده مطابق شکل.

$$M_z = M\cos 30 = 600 \times \cos 30 = 520 \text{ lb.in}$$

$$M_y = M\sin 30 = 600 \times \sin 30 = 300 \text{ lb.in}$$

$$I_z = \frac{0.5 \times 1.5^3}{12} = 0.1406 \text{ in}^4$$

$$I_y = \frac{1.5 \times 0.5^3}{12} = 0.01563 \text{ in}^4$$

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{520\, y}{0.1406} + \frac{300\, z}{0.01563}$$

A نقطه: $Z = 0.25$ $y = 0.75$ $\Rightarrow (\sigma_x)_A = 7573 \text{ psi} = 7.573 \text{ ksi}$

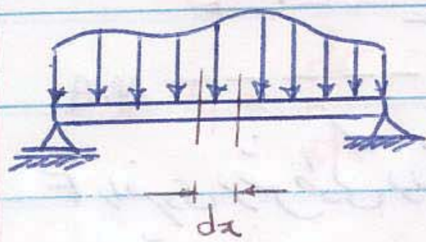
$\text{psi} = \text{lb}/\text{in}^2$

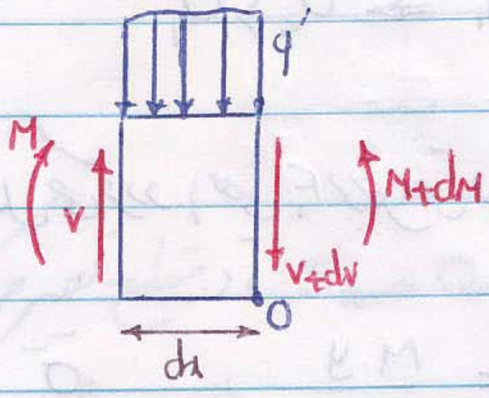
B نقطه: $Z = -0.25$ $y = 0.75$ $\Rightarrow (\sigma_x)_B = -2.03 \text{ ksi}$

D نقطه: $Z = -0.25$ $y = -0.75$ $\Rightarrow (\sigma_x)_D = -7.573 \text{ ksi}$

فصل پنجم

بارگذاری جانبی (برش)





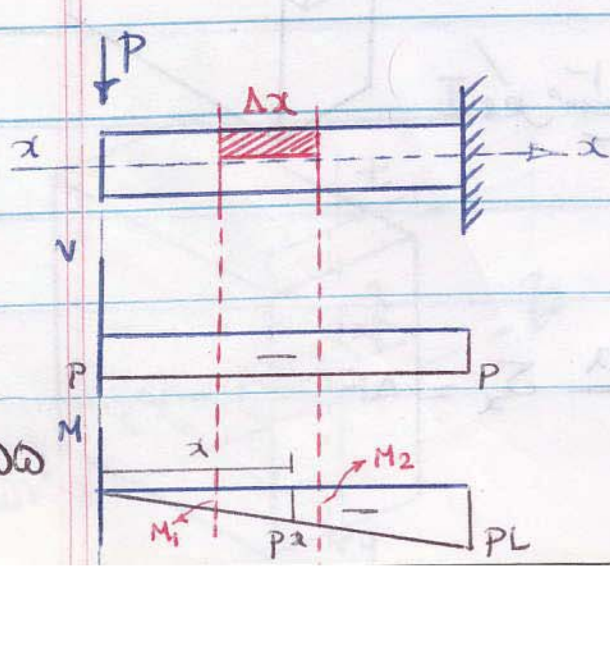
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow -M - Vdx + q'dx\left(\frac{dx}{2}\right) + (M+dM) = 0$$

$$\Rightarrow -Vdx + \frac{q'}{2}dx^2 + dM = 0$$

$$\Rightarrow -Vdx = dM \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

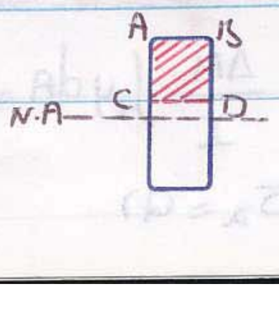
$$M = \int V dx \rightarrow M_2 - M_1 = \int_{(1)}^{(2)} V dx$$

برش وقتی وجود دارد که خمش متغیر باشد



تیر مقابل را مورد مطالعه قرار می‌دهیم

$M_1 < M_2$

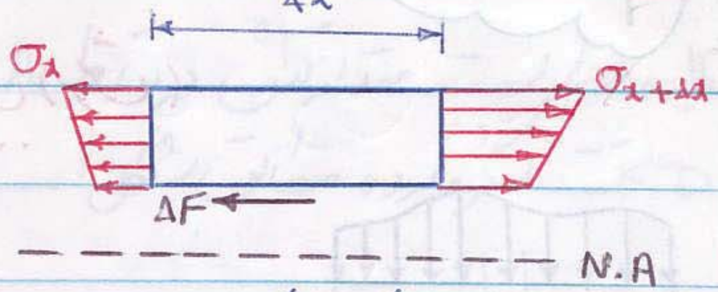


مقطع تیر

حمید کاظمی

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$

$$M_2 > M_1 \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_1$$

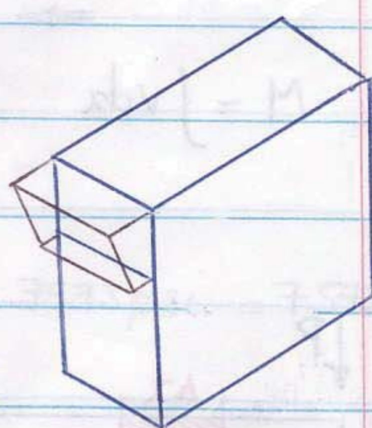


F را نیروی برش طولی نوشتیم که باعث تعادل می گردد. (یعنی q برش افقی در واحد طول است)

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I} \qquad \sigma_{x+\Delta x} = \frac{(M+\Delta M)\cdot y}{I}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int_{ABCD} \sigma_x \, dA + \Delta F - \int_{ABCD} \sigma_{x+\Delta x} \, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{ABCD} (\sigma_x - \sigma_{x+\Delta x})\, dA + \Delta F = 0$$



$$\Rightarrow \int_{ABCD} \frac{(M-M-\Delta M)y}{I} dA = -\Delta F$$

I : کل مقطع

$$\Rightarrow \frac{-\Delta M}{I}\int y\, dA = -\Delta F$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta M}{I}\int y\, dA = \Delta F \Rightarrow \frac{V \Delta x}{I} S_x = \Delta F$$

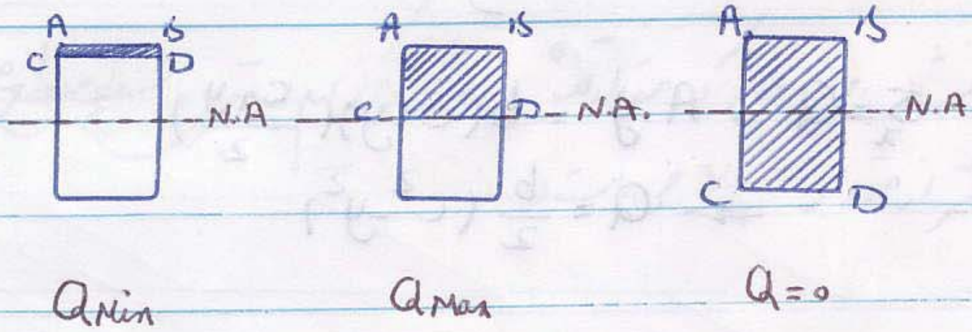
$$(S_x = Q)$$

Q* لنگر استاتیک سطح واقع در بالا یا پایین تراز مورد نظر برای محاسبه Q است که در طول محور خنثی کل مقطع حساب می شود

$$\Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{V S_x}{I} \Rightarrow q = \frac{dF}{dx} = \frac{V S_x}{I}$$

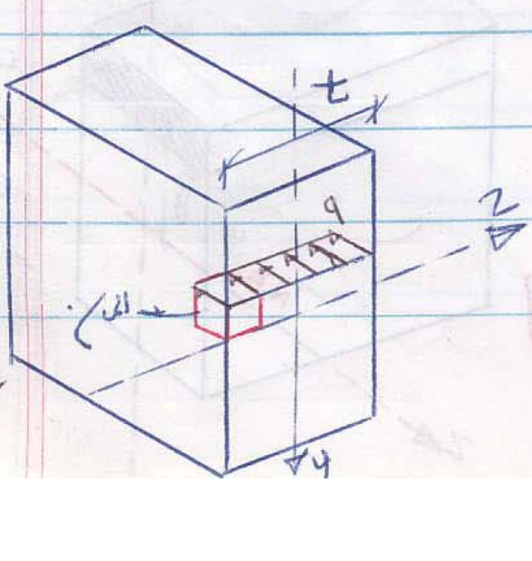
$$\rightarrow q = \frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$$

$S_x = Q = \int y\,dA$ ، در مقطع تغییر می کند.

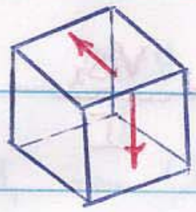


در طول $\frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$ ، V نیروی برشی مقطع ثابت است و I نیز ثابت می باشد

F و q نیز نیروی برشی در طول می باشد.



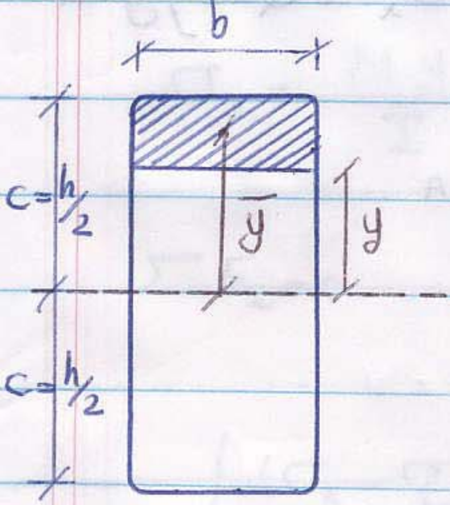
$$\tau = \frac{dF}{dx \cdot t} \Rightarrow \tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It}$$



بنابراین تنش برشی مقطع با تنش برشی طول برابر است.

$$\tau_{\text{تنش برشی مقطع}} = \tau_{\text{تنش برشی طول}} = \frac{VQ}{It}$$

مقطع مستطیلی زیر را در نظر می‌گیریم:



$$S_x = Q = A.\bar{y} = b(c-y)\left(\frac{c+y}{2}\right)$$

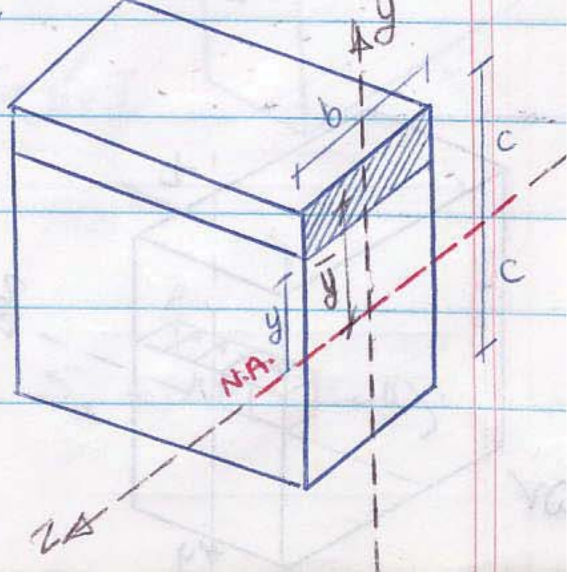
$$\Rightarrow Q = \frac{b}{2}\left(c^2 - y^2\right)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{bc^2}{2}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3}bc^3$$

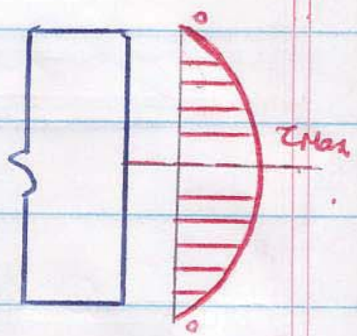
$$\Rightarrow \tau = \frac{V\,\frac{bc^2}{2}}{\frac{2}{3}bc^3\,b}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{3V}{4cb}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$



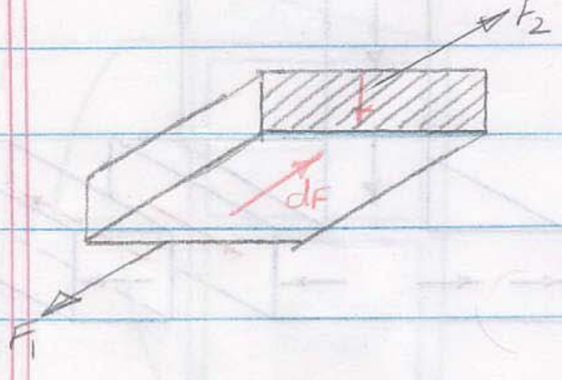
$0 \leq y \leq c$

$y = 0 \longrightarrow \tau_{Max} = \dfrac{3V}{4bc} = \dfrac{3V}{2A}$



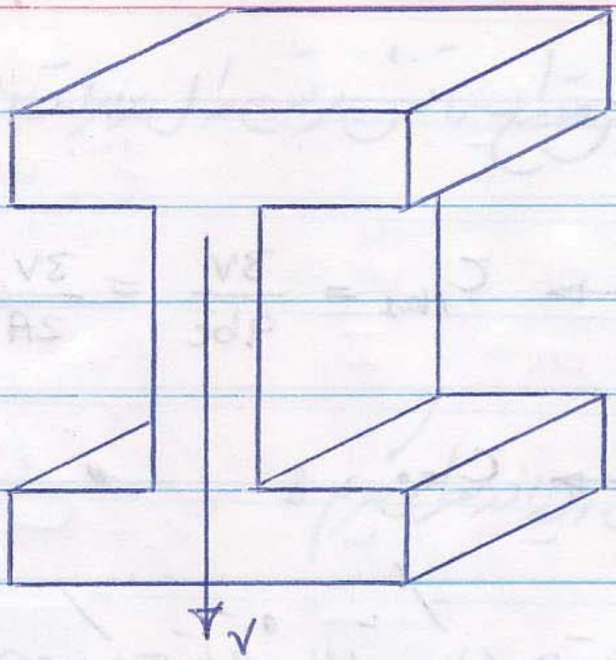
$y = c \longrightarrow \tau = 0$

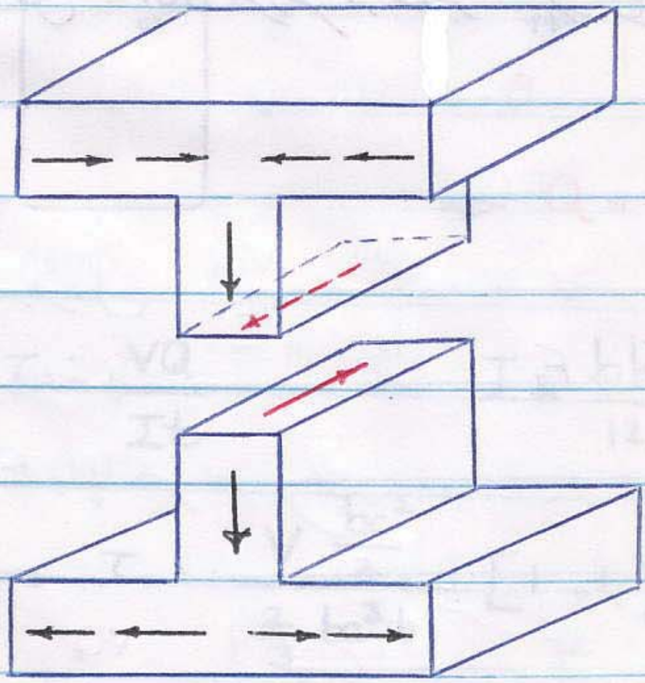
رابطه بدست آمده نشان می دهد که مقدار تنش برشی ماکزیمم در تیری با سطح مقطع مستطیل شکل 50% بزرگتر از مقدار V/A می باشد.

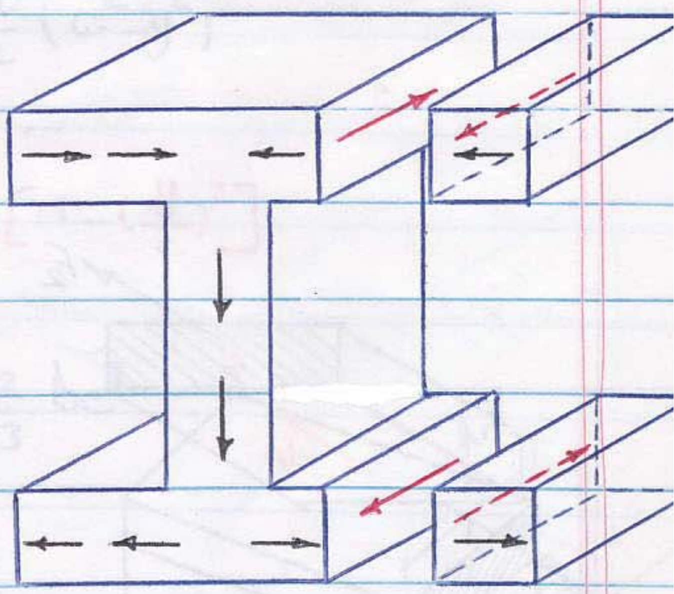


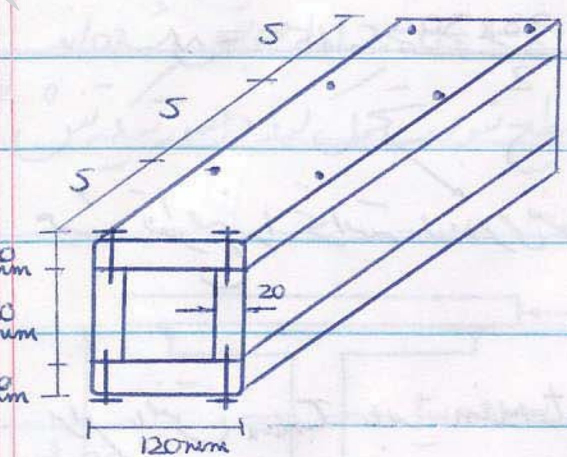
$F_1 > F_2$

حمید کاظم





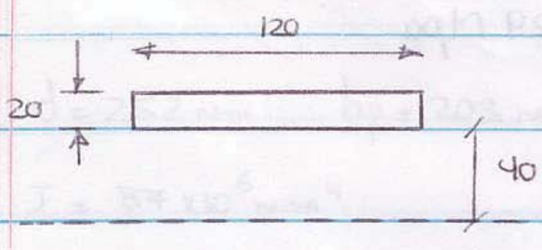




مثال: مقطع تیری مطابق شکل بصورت قوطی مربعی از دو قطعه چوب به ابعاد $20 \times 80\ mm^2$ بصورت قائم و دو قطعه دیگر به ابعاد $20 \times 120\ mm^2$ بصورت افقی که به یکدیگر میخ شده اند تشکیل شده است

اگر بدانیم که فاصله میخ ها از همدیگر $s = 30mm$ باشد و نیروی برش مقطع بصورت قائم و برابر $1200\ N$ درنظر گرفته شود، محاسبه کنید نیروی برشی ایجاد شده در هر میخ و حداکثر تنش برشی در تیر مورد نظر.

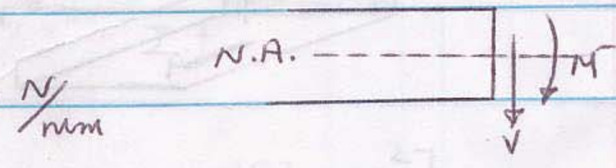
$S = 30\ mm \qquad V = 1200\ N$

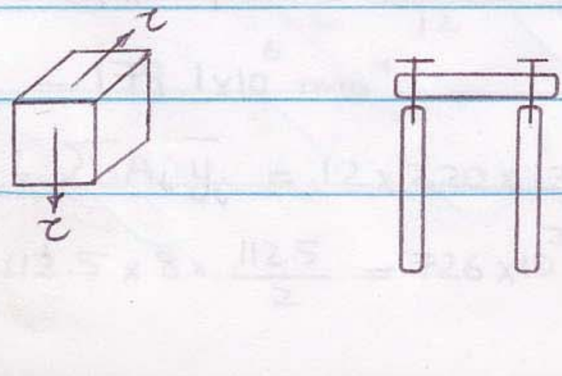


$$Q = A \cdot \bar{y} = 20 \times 120 \times 50 = 120000\ mm^3$$

$$I = \frac{120^4 - 80^4}{12} = 13.87 \times 10^6\ mm^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{1200 \times 120000}{13.87 \times 10^6} = 10.38\ N/mm$$

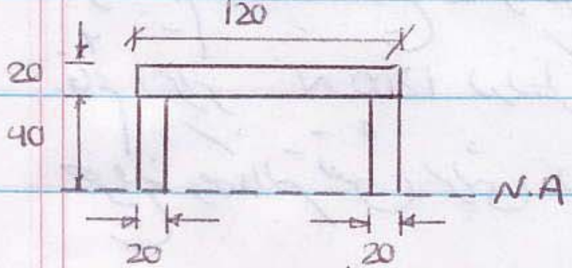




نیروی برشی وارد بر هر میخ $= \frac{q.s}{2} = \frac{10.38 \times 30}{2} = 155.7\,N$

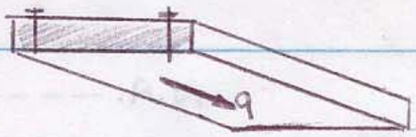
مسئله قطر میخ را نخواسته لذا نیازی نیست باید τ_{all} را می داد.

برای یافتن τ_{Max} باید t_{Min} و Q_{Max} را پیدا کنیم. این دو مقدار در محل تار خنثی تأمین می شوند.

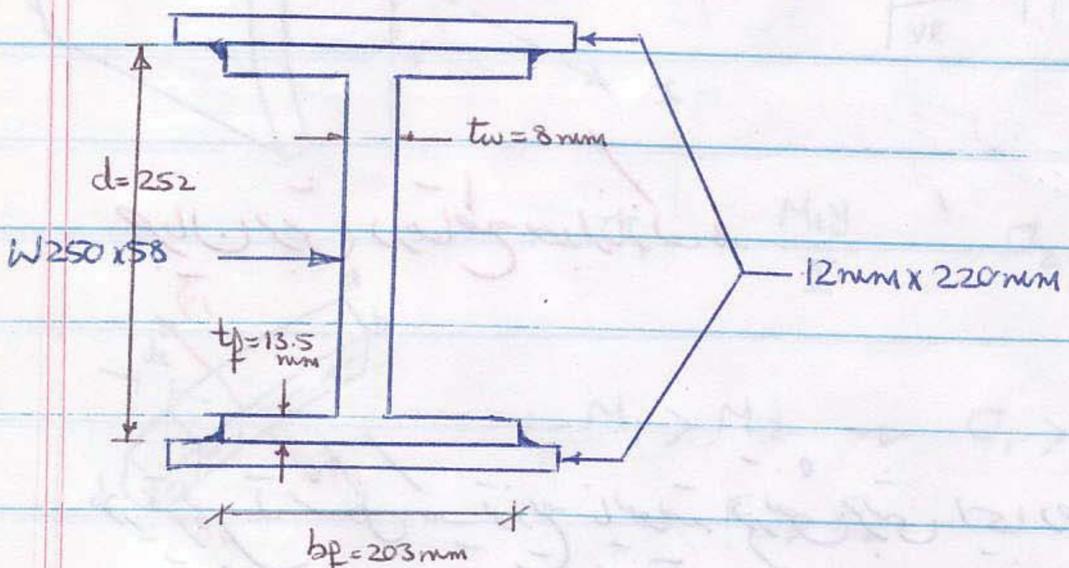


$$Q_{Max} = 120000 + 2 \times 40 \times 20 \times 20$$
$$= 152000\ mm^3$$

$$\Rightarrow \tau_{Max} = \frac{1200 \times 152000}{13.87 \times 10^6 \times 40} = 0.329\ Mpa$$



مثال: دو صفحه مستطیلی به دو بال تیر بال پهن W250x58 جوش شده اند مطلوبست حداکثر نیروی برشی که این مقطع می تواند تحمل کند در صورتیکه تنش Max برشی تیر از مقدار 90 Mpa فراتر نرود.



$d = 252$ mm $\quad b_f = 203$ mm $\quad t_f = 13.5$ mm $\quad t_w = 8$ mm

$I = 87 \times 10^6\ mm^4$ $\qquad \tau_{Max} = \dfrac{V_{Max}\, Q_{Max}}{I . t}$

$$I_{مقطع} = 87 \times 10^6 + 2 \times \left[\frac{220 \times 12^3}{12} + 12 \times 220 \times \left(\frac{252}{2} + 6\right)^2 \right]$$
$$= 179.1 \times 10^6\ mm^4$$

$$Q_{Max} = \sum A_i \bar{y}_i = 12 \times 220 \times 132 + 203 \times 13.5 \times \left(126 - \frac{13.5}{2}\right)$$
$$+ 112.5 \times 8 \times \frac{112.5}{2} = 726 \times 10^3\ mm^3$$

حمید کاظم

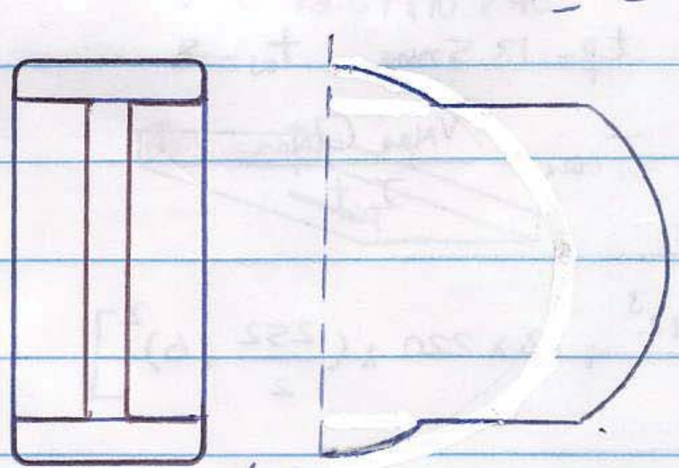
$$\tau_{Max} = \frac{V_{Max}\, Q_{Max}}{I \cdot t} \Rightarrow 90 = \frac{V \cdot (726 \times 10^3)}{179.1 \times 10^6 \times 8}$$

$$\Rightarrow V_{Max} = 177.6 \times 10^3\ N$$

جریان برش در مقاطع جدار نازک:

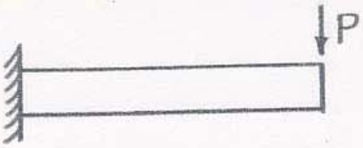
$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I t}$$

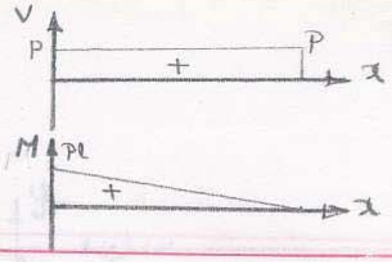
در تیرهای I شکل یک توزیع ناپیوسته در تنش برشی ایجاد می‌شود. این دستگاه را بررسی تنش برشی بر روی سطح مقطع تیر توضیح می‌دهند.

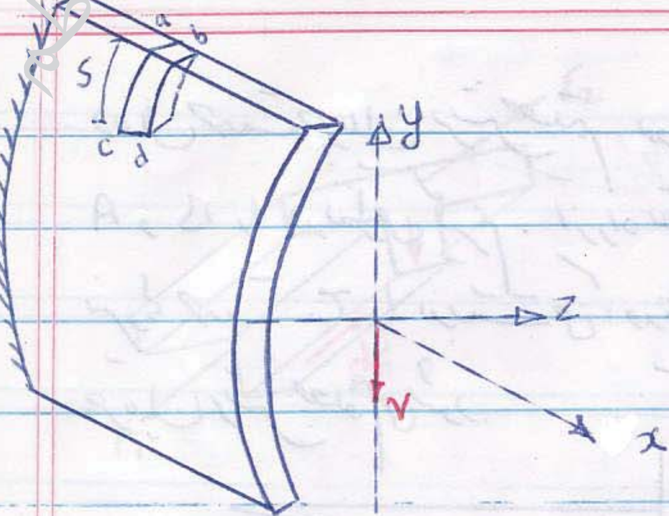


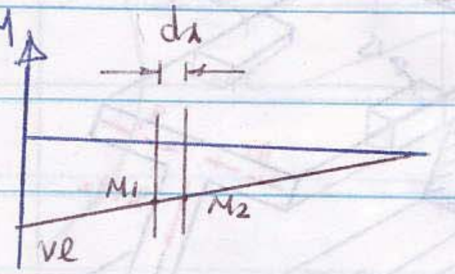
دستگاه دیگری نیز وجود دارد که جریان برش در مقطع جدار نازک گویند.

حمید کاظم

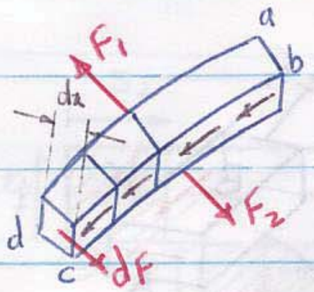








$$\sigma_1 = +\frac{M_1 y}{I} \qquad \sigma_2 = +\frac{M_2 y}{I}$$

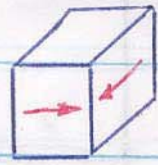


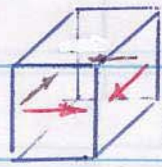
$$M_1 > M_2 \Rightarrow \sigma_1 > \sigma_2$$

$$\Rightarrow F_1 > F_2$$

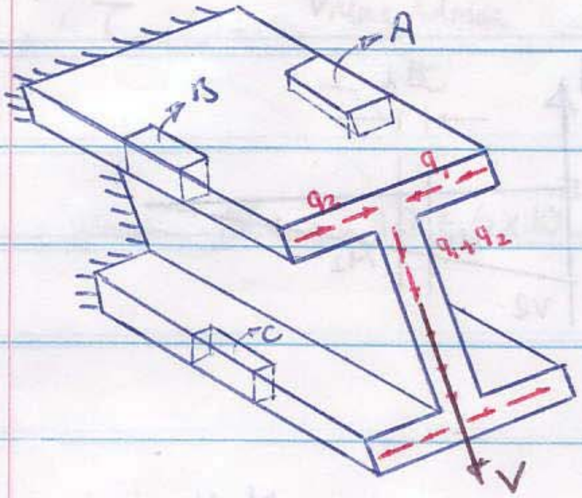
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2 + dF = F_1$$

ازطرفی $dF = t \cdot dx \cdot \tau = q\,dx$

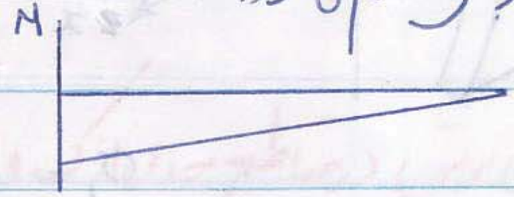


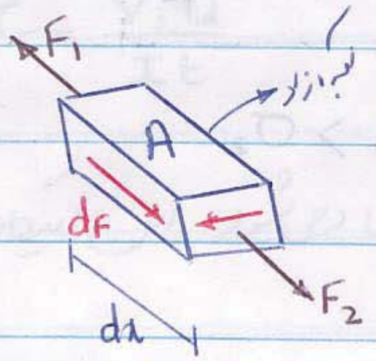


حال این بحث را برای مقطع I شکل ادامه می‌دهیم.



دنبال جهت جریان برش هستیم. دو مقطع A و B را در نظر می‌گیریم. از راه تعادل نیروها جهت C را بدست می‌آوریم و جریان برش معلوم می‌شود.

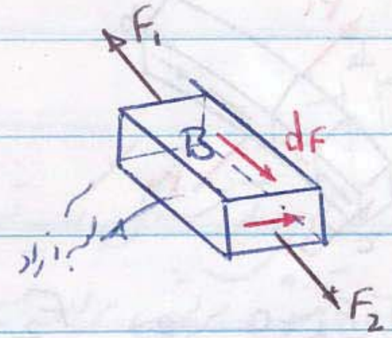


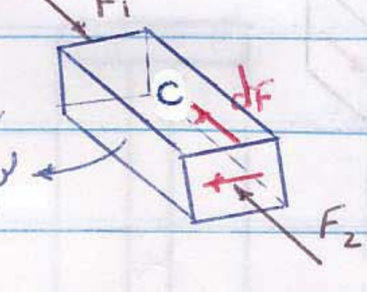


$$dF + F_2 = F_1$$

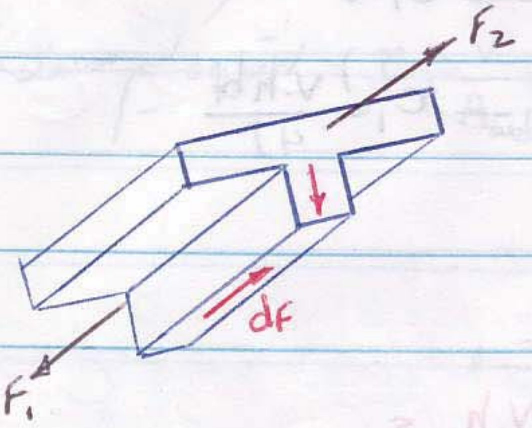
$$F_1 > F_2$$

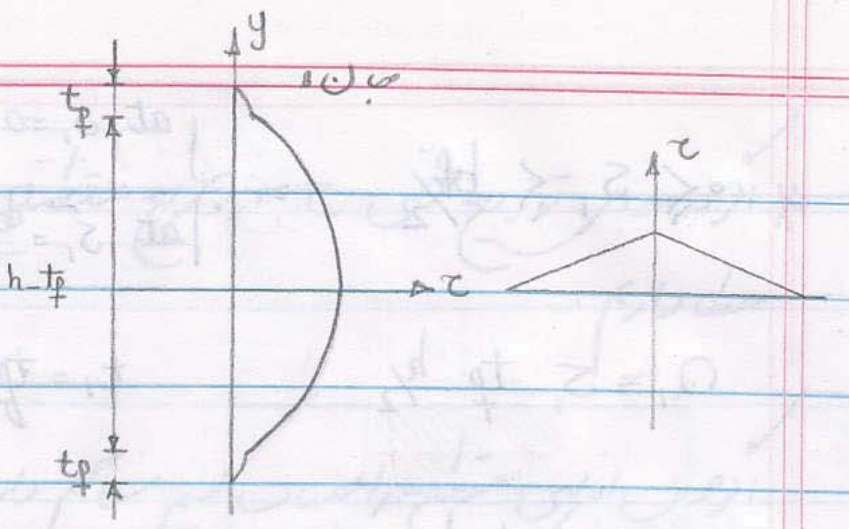
$$dF = q \cdot dx$$



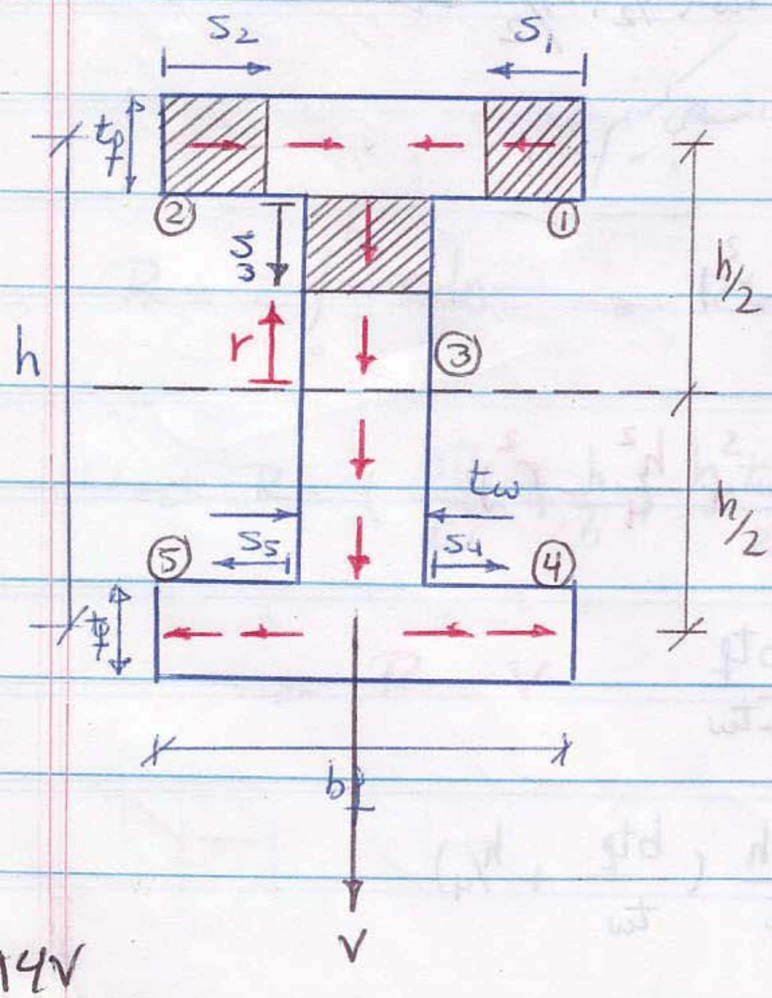


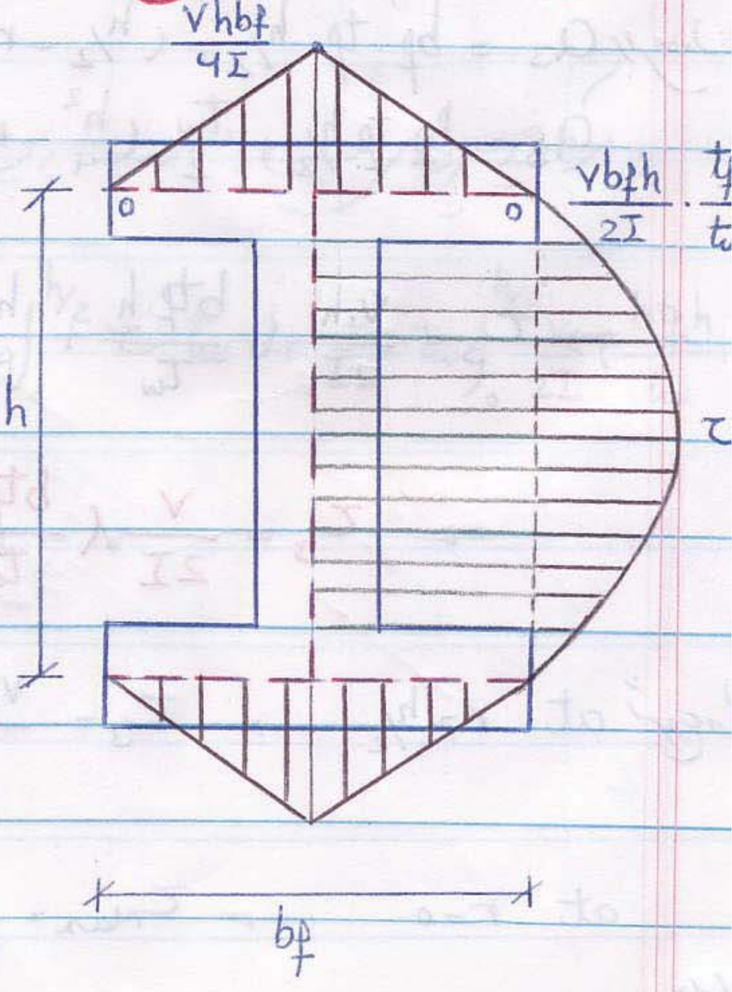
$$F_1 > F_2$$





توزیع تنش برشی در مقطع باز I شکل





حمید کاظم

$$0 \leq S_1 \leq b_f/2 \rightarrow \begin{cases} \text{at } S_1 = 0 \rightarrow \tau_1 = 0 \\ \text{at } S_1 = b_f/2 \rightarrow \tau_1 = \dfrac{V \cdot h\, b_f}{4I} \end{cases}$$

$$Q_1 = S_1 \cdot t_f \cdot h/2 \qquad t_1 = t_f$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{V \cdot t_f \cdot h/2}{I\, t_f} \cdot S_1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{V \cdot h}{2I} S_1$$

در جان $Q_3 = b_f \cdot t_f \cdot h/2 + (h/2 - r) \cdot t_w \,(h/2 + r)/2 \Rightarrow$

$$Q_3 = b_f\, t_f\, h/2 + \frac{t_w}{2}\left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\Rightarrow \tau_3 = \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f \cdot h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\Rightarrow \tau_3 = \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f \cdot h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

شروع جان at $r = h/2 \rightarrow \tau_3 = \dfrac{V \cdot h\, b t_f}{2 I t_w}$

at $r = 0 \rightarrow \tau_{Max} = \dfrac{V \cdot h}{2I}\left(\dfrac{b t_f}{t_w} + h/4\right)$

* اگر به جای توزیع منحنی τ از توزیع متصل ($\tau = \frac{V}{A_{web}}$) استفاده کنیم حدود ۱۲٪ خطا داریم.

اگر ممان اینرسی مقطع را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$I = \frac{t_w h^3}{12} + 2 b t_f \frac{h^2}{4} = \frac{t_w h^3}{12} + b t_f \frac{h^2}{2}$$

برآیند نیروهای برشی را بصورت زیر حساب می‌کنیم:

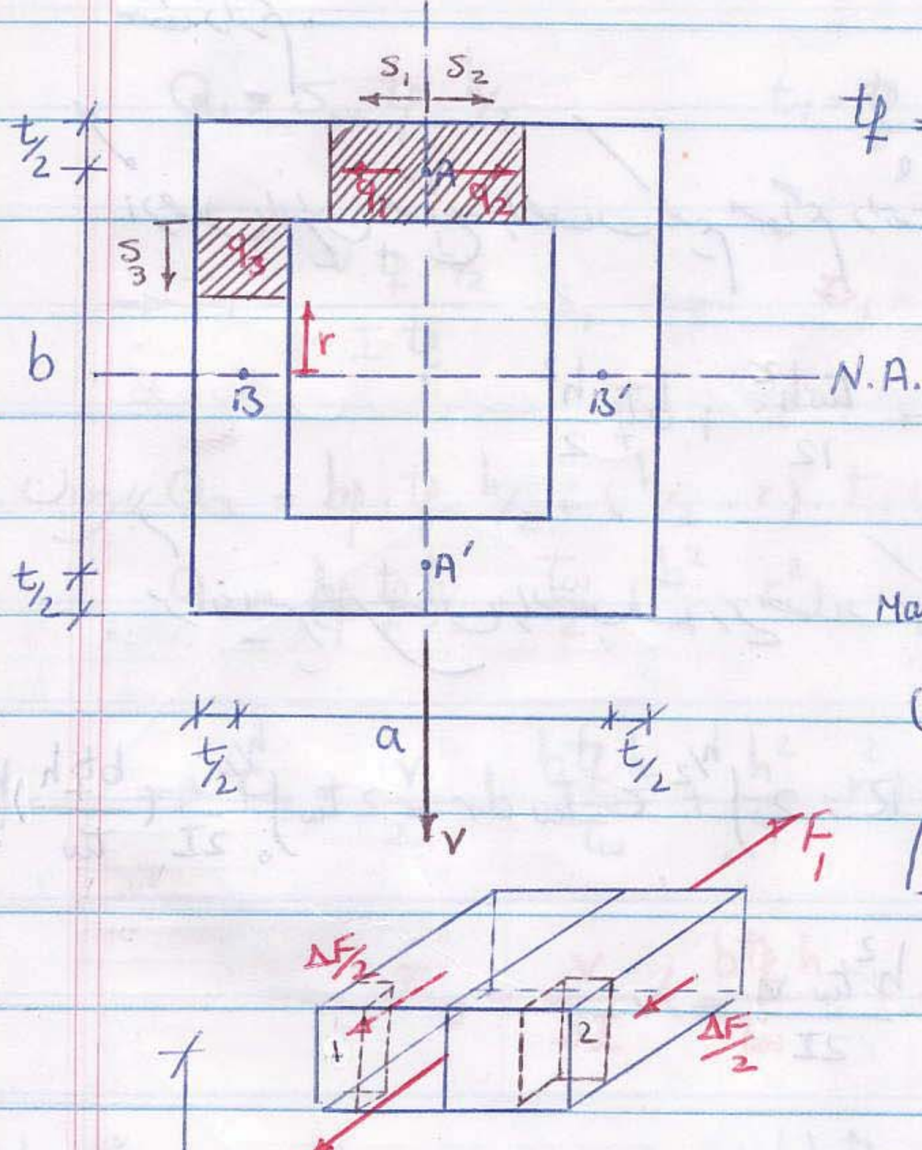
$$R = 2\int_0^{h/2} \tau \, dA \Rightarrow R = 2\int_0^{h/2} \tau \cdot t_w \, dy = 2 t_w \int_0^{h/2} \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{b t_f}{t_w} + \frac{h}{6}\right)\frac{h^2 t_w \cdot V}{2I} = V$$

$$\Rightarrow R = V$$

حمید کاظم

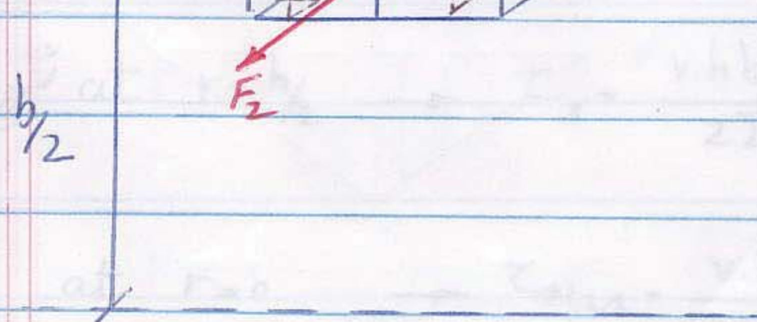
توزیع تنش برشی برای پروفیل بسته قوطی شکل :



$t_f = t_w = t$

* در مقاطع بسته محور اصلی عمود بر محور تقارن مقدار تنش برشی صفر است. مثلاً در مقطع نقاط A و A' دارای تنش برشی صفر و B و B' دارای تنش برشی ماکزیمم است. (علت Max بودن τ، Max بودن Q است.)

المانی بصورت بالا در نظر می‌گیریم برای قسمت افقی داریم :



$F_1 > F_2$

$\rightarrow F_2 + \Delta F = F_1$

حمید کاظم

$$q=\frac{VQ}{I} \longrightarrow \begin{cases} Q_1 = S_1 t\, b/2 \\ Q_2 = S_2 t\, b/2 \end{cases}$$

$$\tau_1 = \frac{q_1}{t} = \frac{V(S_1 t b)}{I\,2t} \Rightarrow \tau_1 = \frac{Vb}{2I} S_1$$

$$\tau_2 = \frac{q_2}{t} = \frac{V(S_2 t b)}{I\,2t} \quad \tau_2 = \frac{Vb}{2I} S_2$$

$$\begin{cases} S_1 = 0 \longrightarrow \tau_1 = 0 \\ S_1 = a/2 \longrightarrow \tau_1 = \dfrac{Vab}{4I} \end{cases}$$

برای قسمت قائم داریم:

$$Q_3 = t\, a/2\, b/2 + (b/2 - r)\, t\, (b/2 + r)/2$$

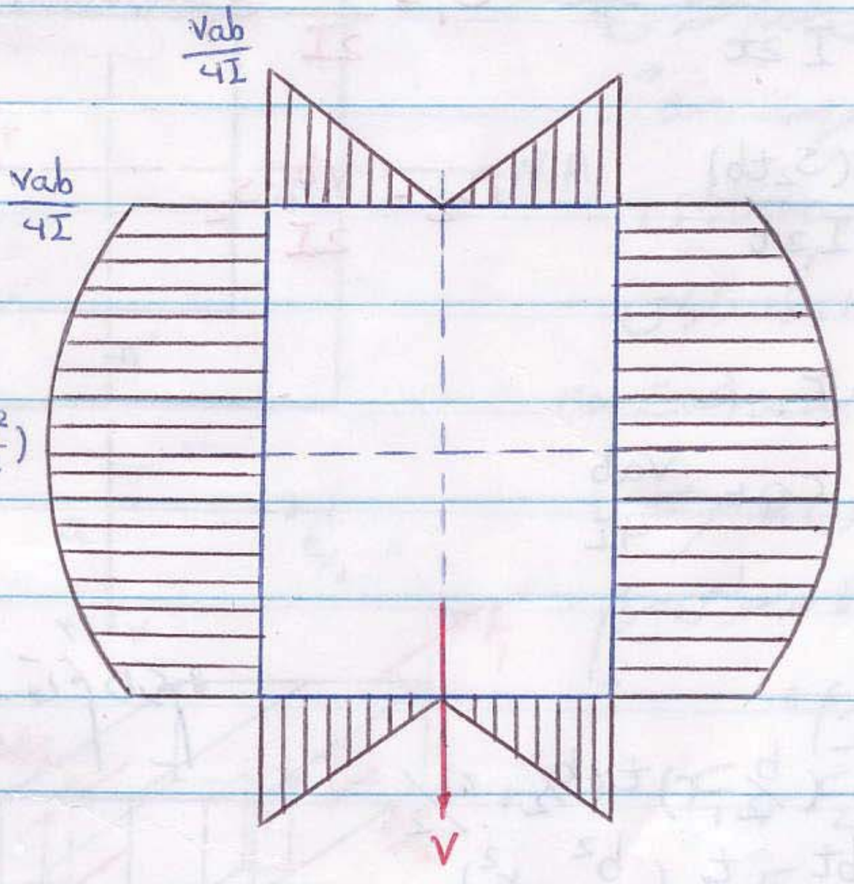
$$\longrightarrow Q_3 = \frac{abt}{4} + t/2\left(\frac{b^2}{4} - r^2\right)$$

$$\tau_3 = \frac{V}{It}\left[\frac{abt}{4} + t/2\left(\frac{b^2}{4} - r^2\right)\right]$$

حمید کاظم

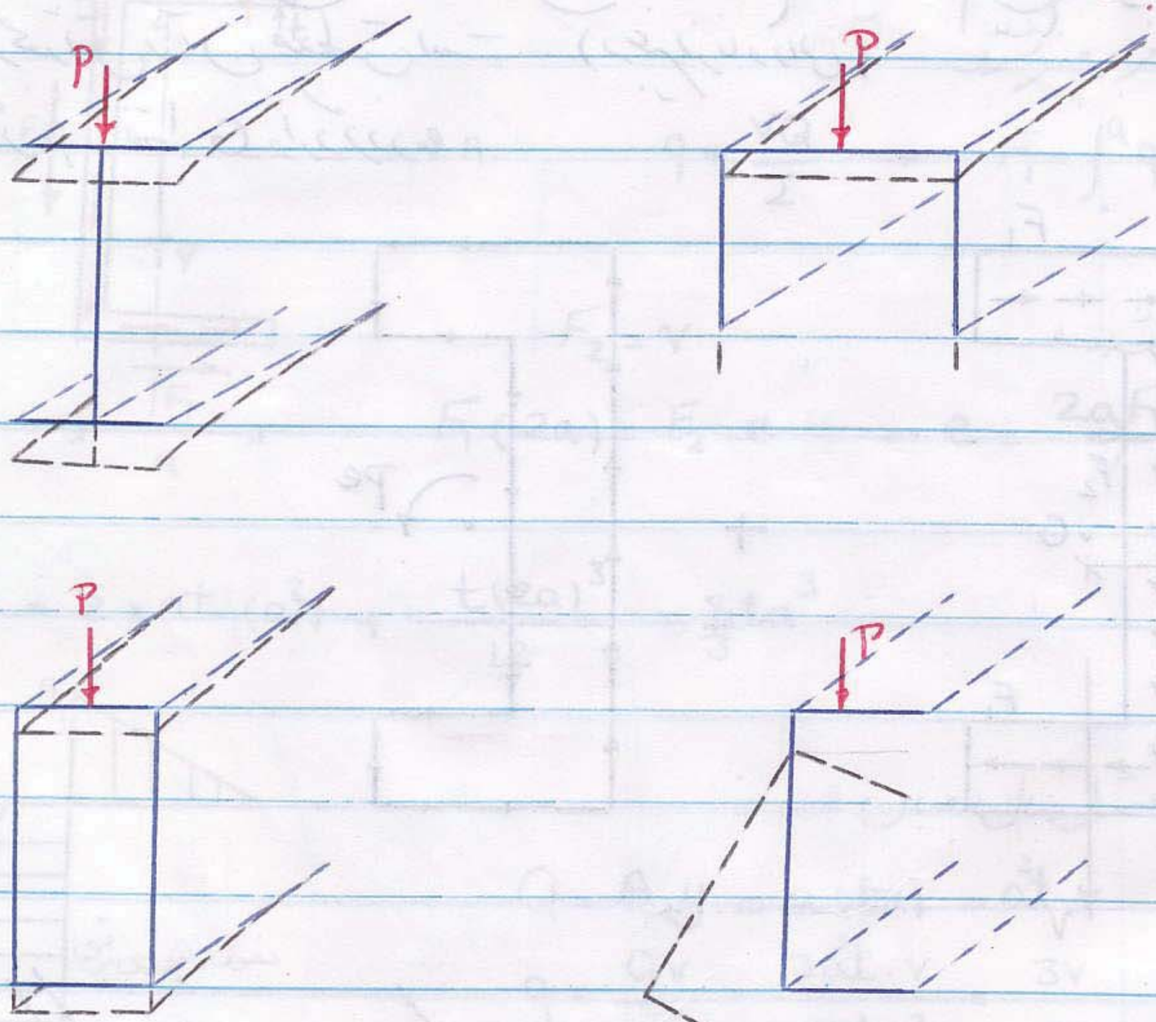
$$r = 0 \qquad \tau_{Max} = \frac{V}{4I}\left(ab + \frac{b^2}{2}\right)$$

$$r = b/2 \qquad \tau_{min} = \frac{Vab}{4I}$$



معمولاً سطوحی که موازی راستای برش مقطع هستند متحمل تنش برشی شدید هستند و سطوح عمود بر نیروی برشی سطح
[illegible] هستند.

مرکز برش:

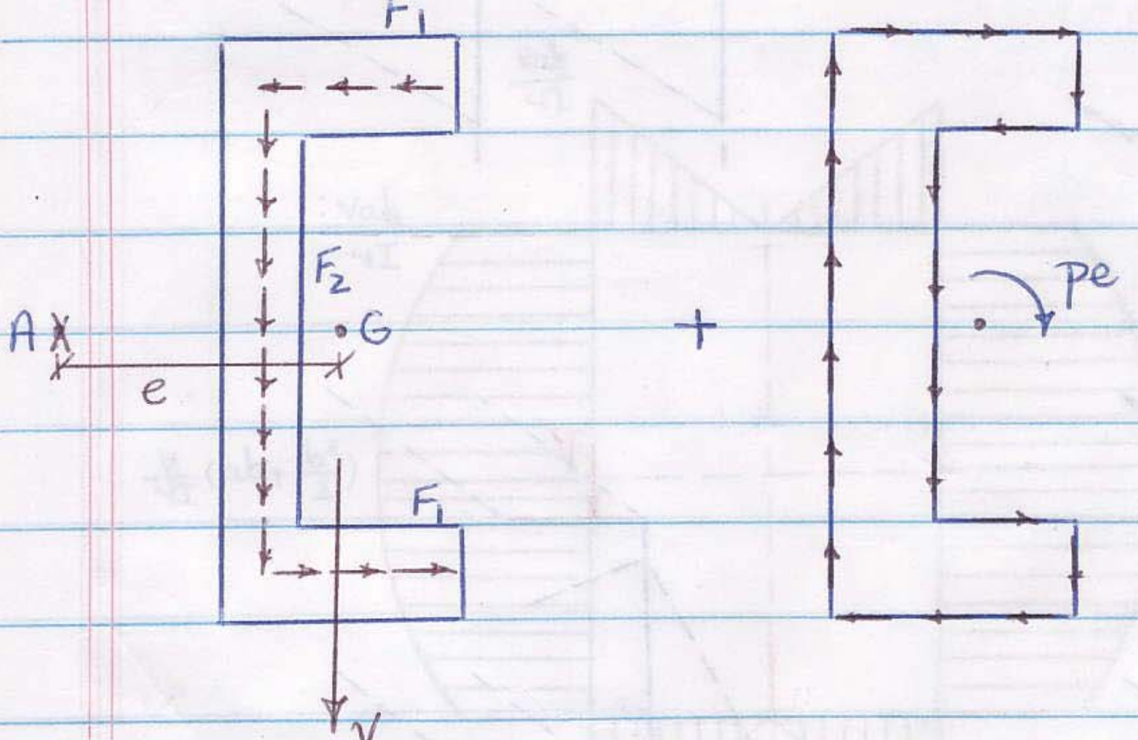


پروفیل های شکل (1)، (2)، (3) وقتی بار در راستای محور تقارن اعمال شود نمی‌چرخند و تغییر شکل در راستای قائم می‌دهند

ولی در پروفیل ناودانی (4) که بار در امتداد محور تقارن وارد نشده می‌چرخد

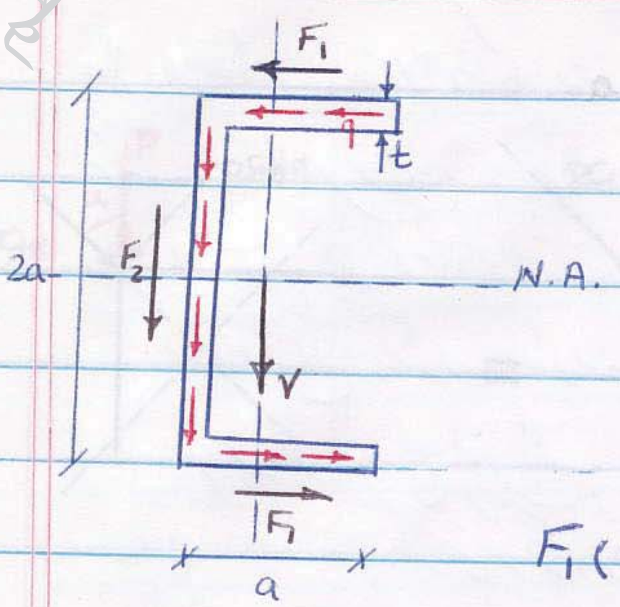
اگر هر دو مقطع یک سطحی دارای دو محور تقارن هستند بنابراین محور خمش آن‌ها بر محور تقارن‌شان منطبق است. (در غیر از ناودانی)

اگر P در نقطه G وارد گردد:



نکته 8: اگر یک مقطع داده و دیاگرام برش روی مقطع را خواستند، در ابتدا جریان برش را تعیین می‌کنیم و سپس با کمک فرض‌هایی که ... به دنبال محاسبه کردن Q و τ می‌رویم.

حمید کاظم



* دنبال نقطه‌ای هستیم که وقتی F_1 و F_2 برابر صفر شود.

$$q = \frac{VQ}{I} \rightarrow F_1 = \int_0^a q\,ds$$

ثابت شده:

$$F_2 = V$$

$$F_1(2a) = F_2 \cdot e \rightarrow e = \frac{2aF_1}{V} \quad (1)$$

$$I = 2 \times at\,(a^2) + \frac{t(2a)^3}{12} = \frac{8}{3}ta^3$$

در محل اتصال بال به جان:

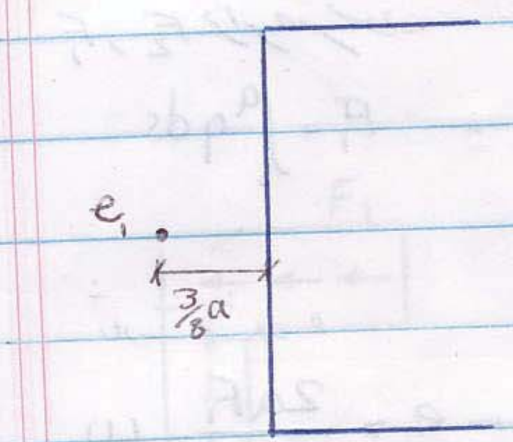
$$Q = A \cdot y = a(ta) = a^2t$$

$$q_1 = \frac{QV}{I} = \frac{3a^2t \cdot V}{8ta^3} = \frac{3V}{8a}$$

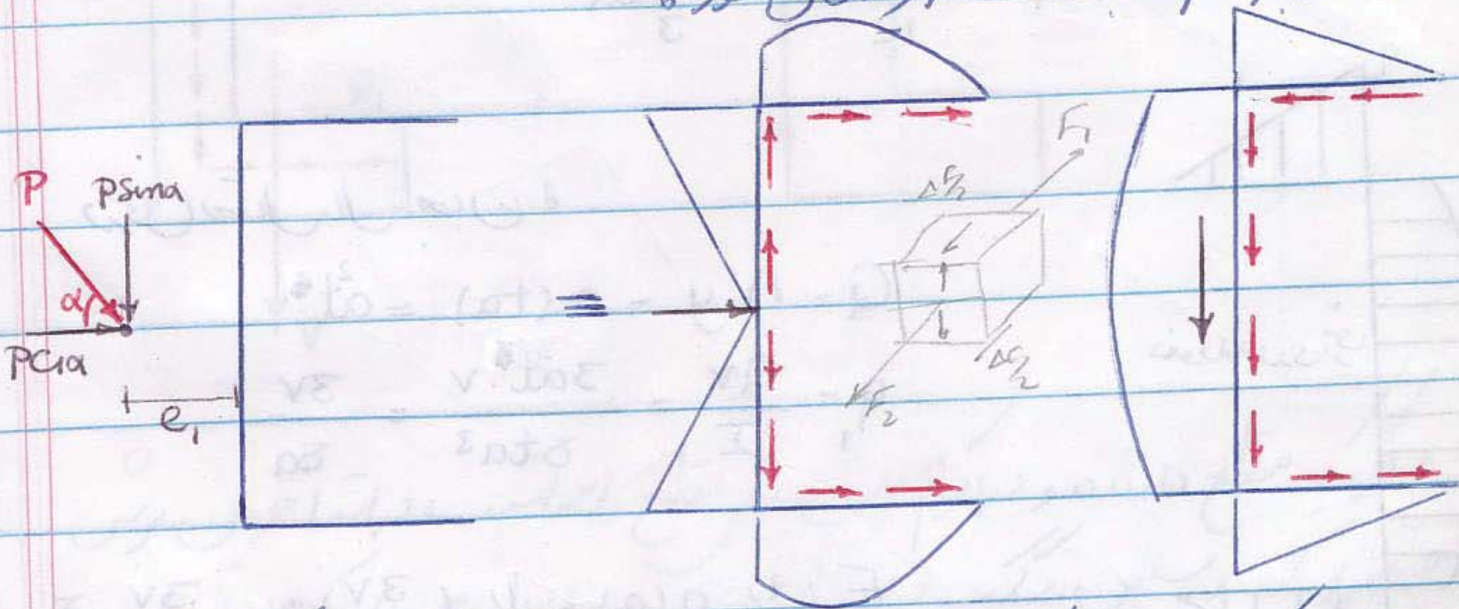
$$F_1 = \tfrac{1}{2} q(a) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{3V}{8a}\right)a = \frac{3V}{16}$$

حال از فرمول (1) داریم:

$$e = \frac{2aF_1}{V} = \frac{2a\left(\frac{3}{16}\right)V}{V} = \frac{3}{8}a$$



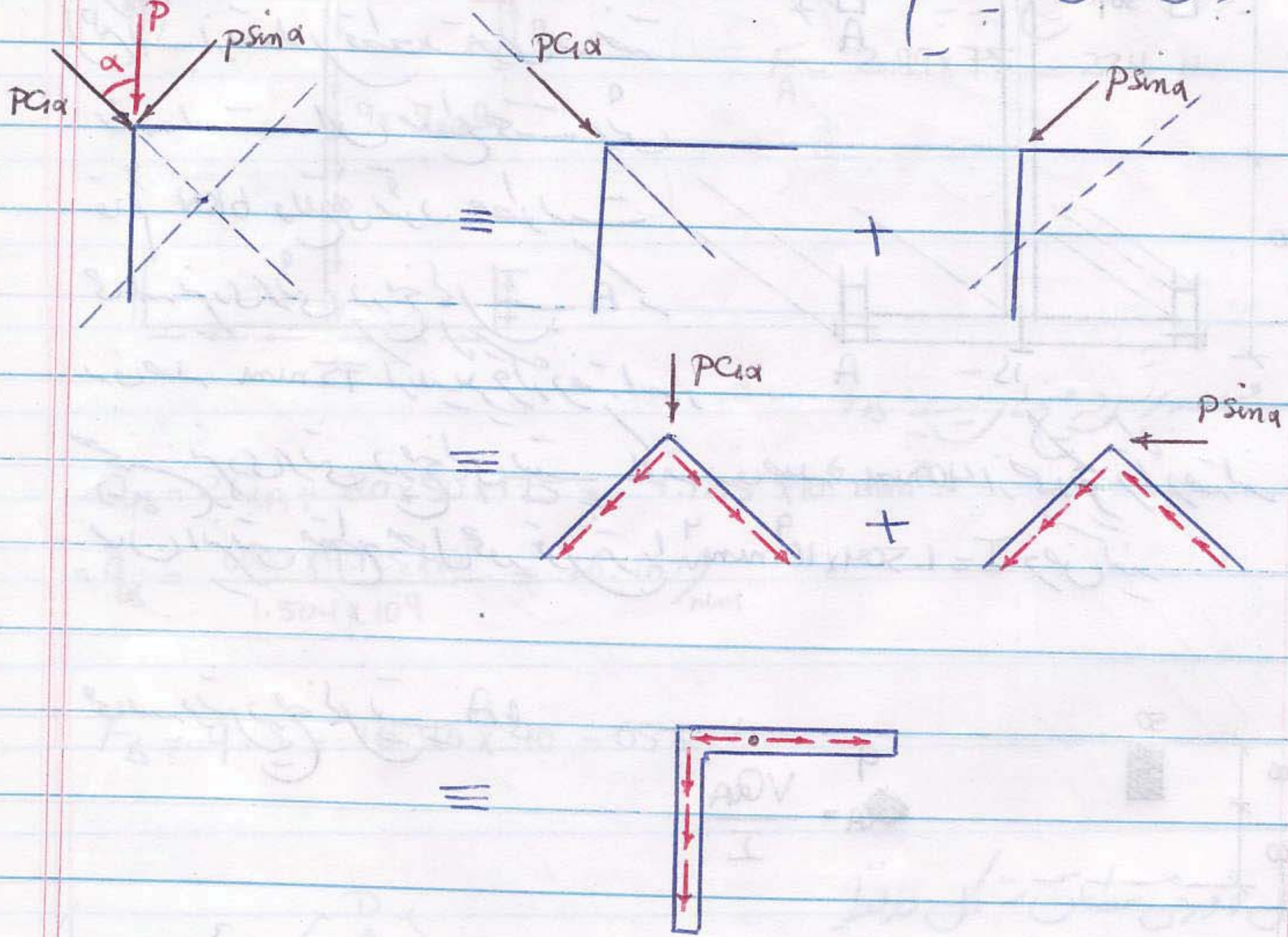
مثال اگر بار P به صورت زیر اعمال شود



باید برای ترکیب دو شکل با توجه به جریان برش نمودارها را جمع جبری کنیم

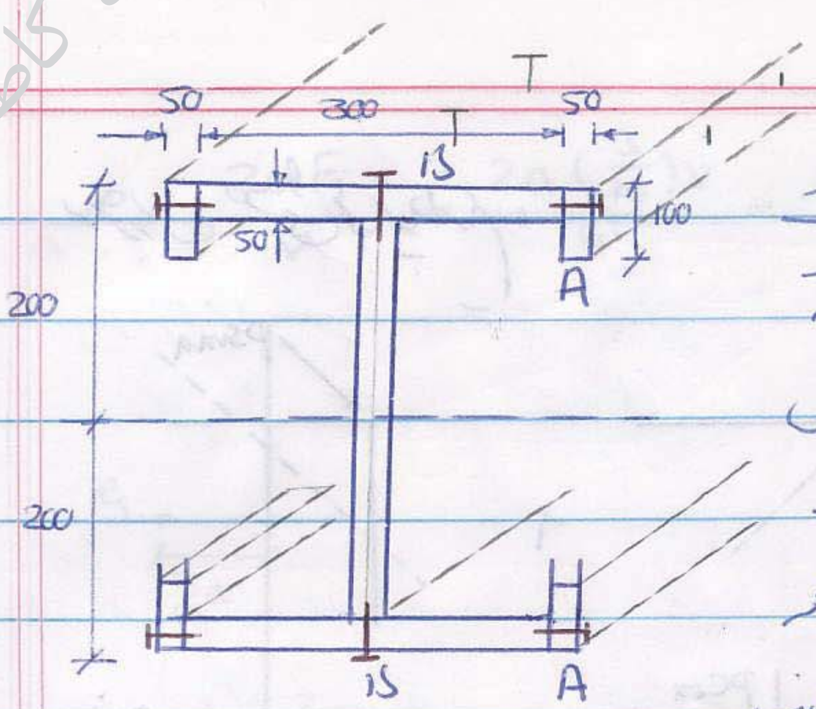
حمید کاظم

به بررسی تنش‌ها می‌پردازیم.



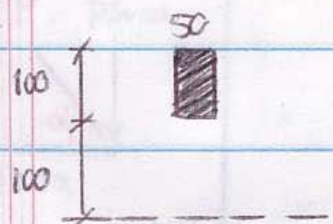
نکته: اگر با برش نامتقارن روبرو شدیم بار نامتقارن را تجزیه می‌کنیم و برای هر شکل توزیع تنش برشی را رسم می‌کنیم و شکل‌ها را با هم جمع جبری می‌کنیم

حمید کاظم



مثال ۸: مقطعی مطابق شکل به صورت مرکب از تعدادی قطعات چوبی ساخته شده است. این مقطع تحت برش قائم 6kN واقع می‌شود. مطلوبست محاسبه نیروی برشی در میخ‌های پیچ A که در فاصله 75 mm از یکدیگر قرار گرفته اند و همچنین نیروی برشی در میخ‌های پیچ B که در فاصله 140 mm از همدیگر قرار گرفته اند. ممان اینرسی مقطع حول محور خنثی تیر را $I = 1.504\times10^{9}\ mm^4$ فرض کنید.

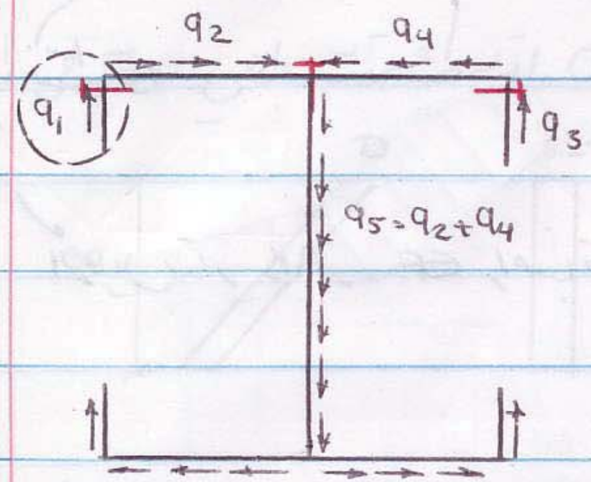
محاسبه برش در میخ‌های پیچ A



$$q_A = \frac{VQ_A}{I}$$

$$Q_A = A\bar{y} = 50\times100\times150 = 750000\ mm^3$$

$$\rightarrow q_A = \frac{6\times10^3\times750000}{1.504\times10^9} = 2.99\ kN/m = 2.99\ N/mm$$



نیروی وارد در هر پیچ تیپ A :

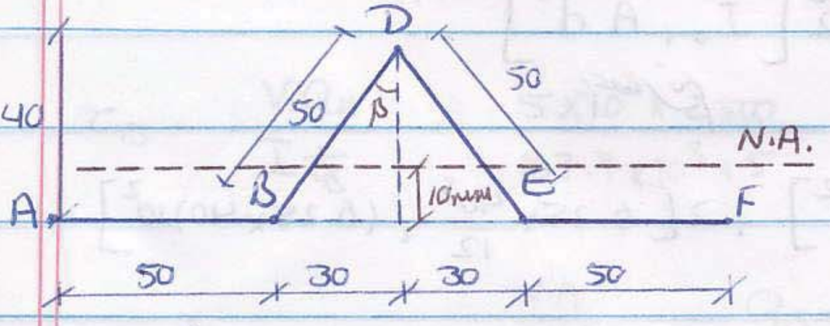
$$F_A = 2.99 \times 75 = 224 \ N$$

فی سه برش در پیچ های تیپ B :

$$Q_B = 2Q_A + 300 \times 50 \times 175 = 4.125 \times 10^6 \ mm^3$$

$$q_B = \frac{6000 \times 4.125 \times 10^6}{1.504 \times 10^9} = 16.46 \ N/mm$$

$$F_B = q \cdot S = 16.46 \times 40 = 658 \ N$$



مثال: ورق مطابق شکل در نظر گرفته می شود. ضخامت ورق مقدار ثابت 5mm است. در صورتیکه برش وارد در مقطع برابر $V = 5 \ kN$ باشد مطلوبست الف) حداکثر تنش برشی در مقطع ب) تنش برشی در

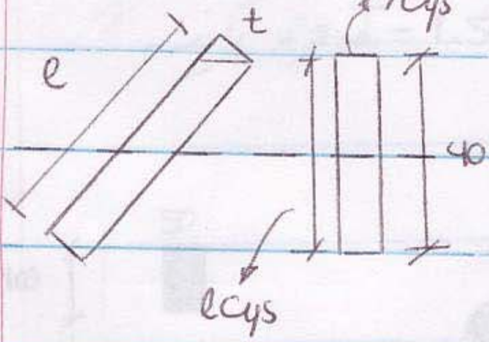
$S_x = \sum A_i y_i \qquad \bar{y} = \frac{S_x}{\sum A_i}$ 1- صفحه 15

اگر میان تار AB و EF را مبنا قرار دهیم ممان استاتیک حول آن صفر می‌شود

فاصله مرکز ثقل از مبنا

$S_x = (50 \times t \times 20)\,2$

$\longrightarrow \bar{y} = \frac{50 \times t \times 20 \times 2}{4 \times 50\, t} = 10 \text{ mm}$ فاصله مرکز سطح تا میان تار مبنا



برای محاسبه کردن ممان اینرسی

$c\gamma s = \frac{4}{5}$

$t' = \frac{t}{c\gamma s} = \frac{5}{4/5} = \frac{25}{4} = 6.25 \text{ mm}$

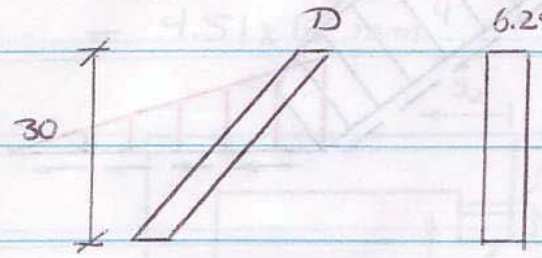
$$I = 2\big[\underbrace{I_o + A.d^2}_{\text{اعضای افقی}}\big] + 2\big[\underbrace{I'_o + A'.d^2}_{\text{اعضای مایل}}\big]$$

$$= 2\left[50 \times \frac{5^3}{12} + 50 \times 5 \times 10^2\right] + 2\left[6.25 \times \frac{40^3}{12} + (6.25 \times 40)\,10^2\right]$$

$$= 167.7 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

حمید کاظم

بیشترین تنش برشی در محل تار خنثی است. Q را توسط قسمت بالایی بدست می آوریم.



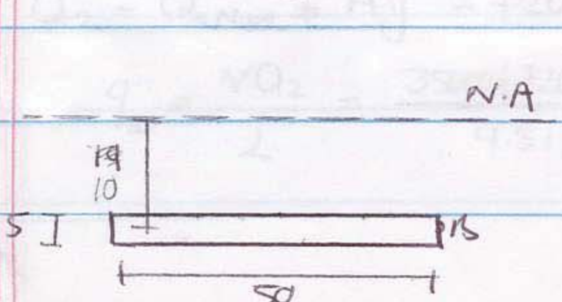
$$Q = A\bar{y} = 30 \times 6.25 \times 15$$
$$= 5625$$

از قسمت پائینی هم می توان استفاده کرد.

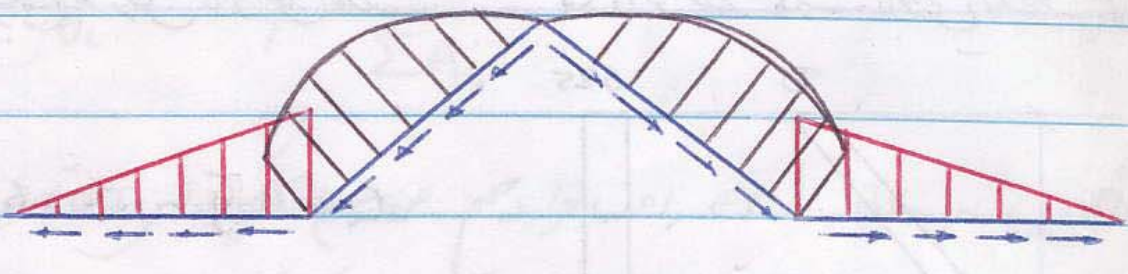
$$Q = 50 \times 5 \times 10 + 10 \times 6.25 \times 5 = 5625$$

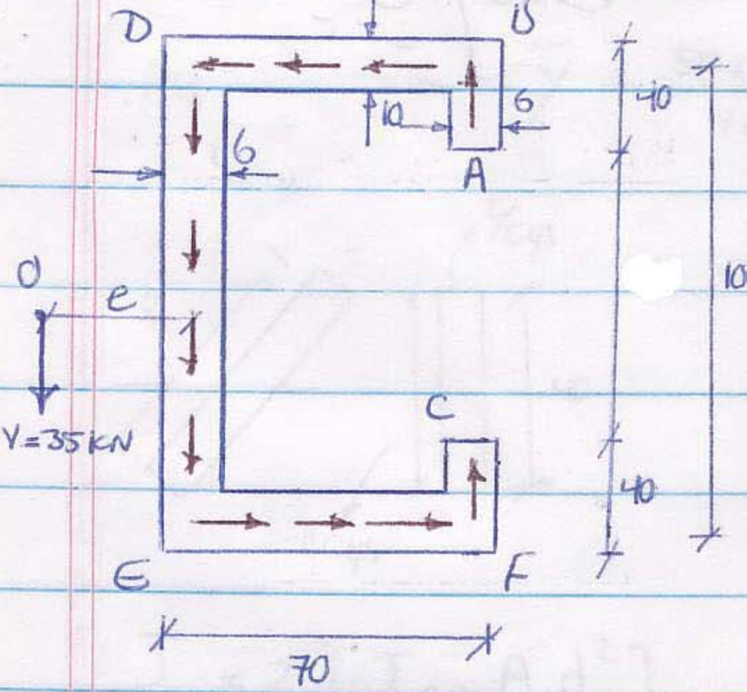
$$\tau_{Max} = \frac{5000 \times 5625}{167.7 \times 10^3 \times 5} = 16.77 \text{ Mpa}$$

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{I t_B} = \frac{5 \times 10^3 \times 2500}{167.7 \times 10^3 \times 5} = 14.91 \text{ Mpa}$$



$$Q_B = 50 \times 5 \times 10 = 2500$$

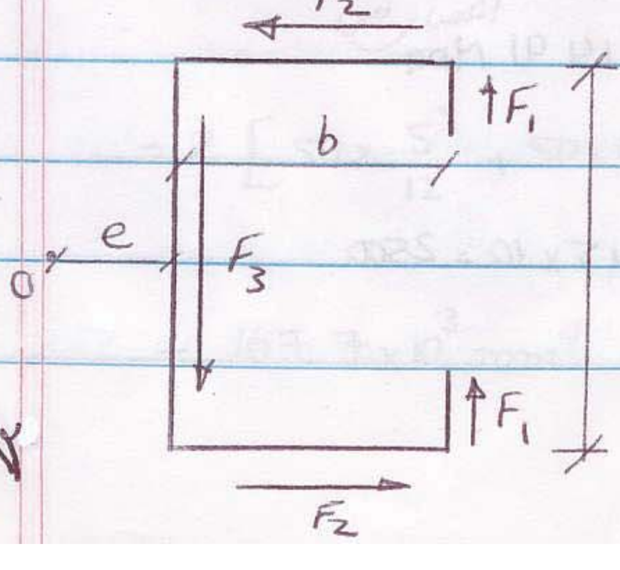




...ل O مرکز برش را تعیین کنید. توزیع تنش های
ایجاد شده (برشی) توسط نیروی قائم برشی
35 KN که در شکل مرکز برش O مطابق شکل
وارد می شود.

$$F_2 \cdot h + 2F_1(b + e) - F_3 e = 0$$

$$e = \frac{F_2 \cdot h + 2F_1 b}{F_3 - 2F_1} \qquad F_3 - 2F_1 = V$$

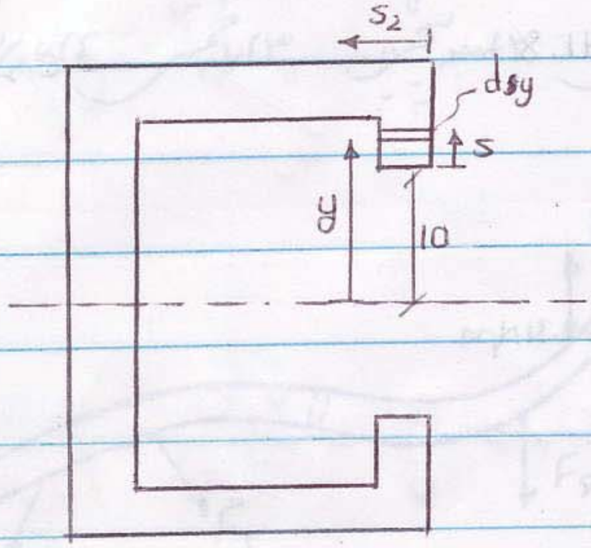


$$\Rightarrow e = \frac{F_2 h + 2F_1 b}{V}$$

$$I = 2\left[\frac{6(100)^3}{12}\right] - \left(\tfrac{1}{12}\, 6\times(20)^3\right) + 2\left[\tfrac{1}{12}\, 70(10)^3 + (70\times 10)\, 50^2\right]$$

$$= 4.51\times 10^6\ mm^4$$

محاسبه τ_1, F_1 :



$$Q_1 = (y-10)\times 6\times \tfrac{1}{2}(y+10)$$

$$= 3(y^2-100) \qquad 10 < y < 50$$

$$F_1 = \int_{10}^{5} q\,ds$$

$$F_1 = \frac{35000}{4.51\times 10^6}\int_{10}^{50} 3(y^2-100)\,d\cancel{s}^{\,y} = 869\ N$$

$$\tau_1 = \frac{q_1}{t_1} = \frac{VQ_1}{It_1} = \frac{35000\times 3(y^2-100)}{6\times 4.51\times 10^6}$$

$$\begin{cases} \text{at } y = 50\,mm \rightarrow \tau_1 = 9.31\ Mpa \\ \text{at } y = 10\,mm \rightarrow \tau_1 = 0\ Mpa \end{cases}$$

محاسبه τ_2, F_2 : در شکل انتقال به بال فوقانی ← $Q_{1Max} = 7200$

$$Q_2 = Q_{1Max} + A\bar{y} = 7200 + 50\times 10\, S_2 \qquad 0 < S_2 < 70$$

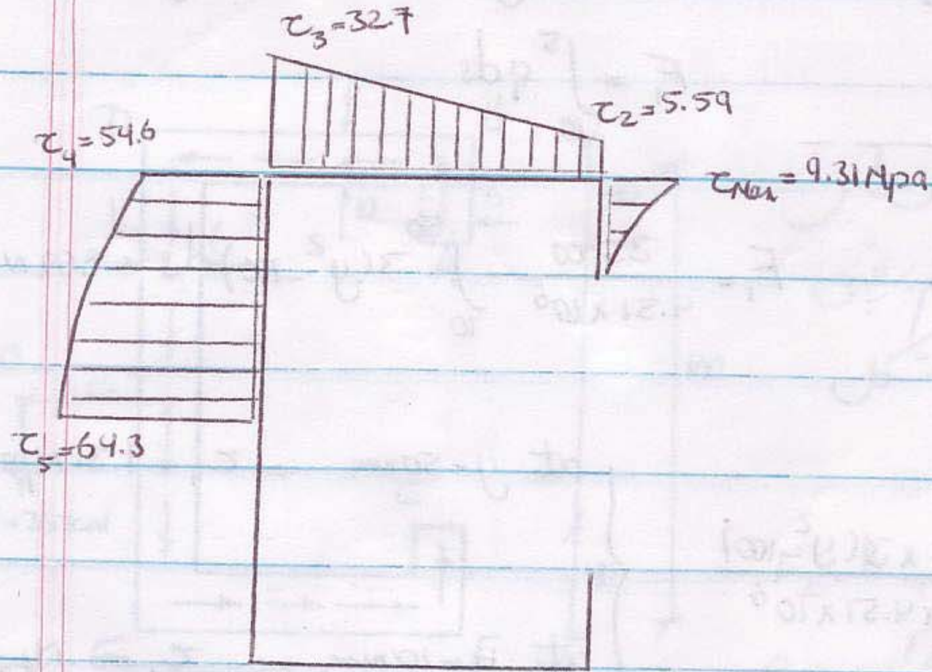
$$q_2 = \frac{VQ_2}{I} = \frac{35000(7200 + 500\,S_2)}{4.51\times 10^6}$$

حميد كاظم

$$F_2 = \int_0^{70} q_2 \, ds_2 = 13.4 \text{ KN}$$

$$e = \frac{13400(100) + 2(869)70}{35000} = 41.8 \text{ mm}$$

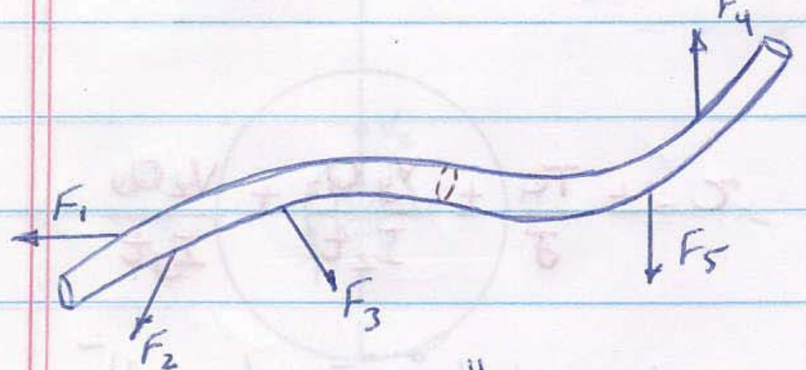
گیری e

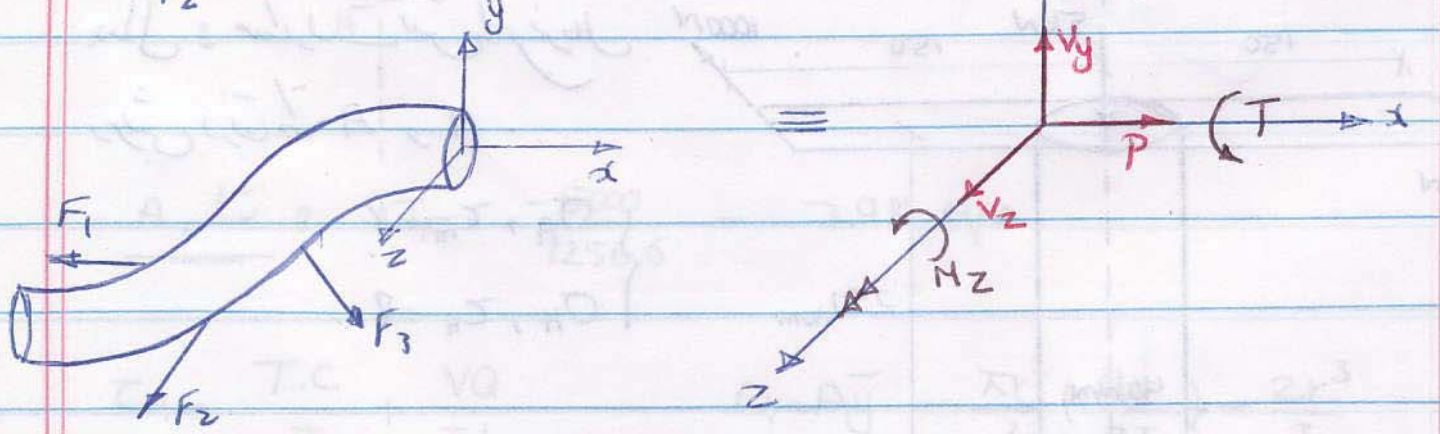


IV٤

ترکیب تنش‌ها:

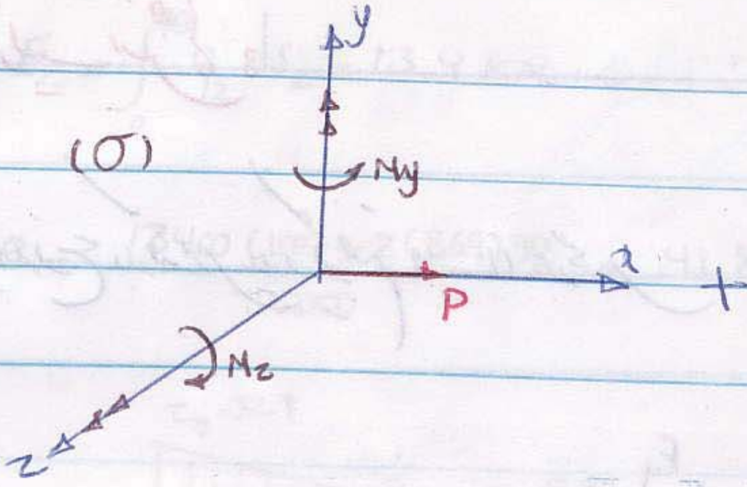
چهار نوع بارگذاری یاد گرفتیم: ۱) بار محوری ۲) بار پیچشی ۳) بار خمشی ۴) بار برشی



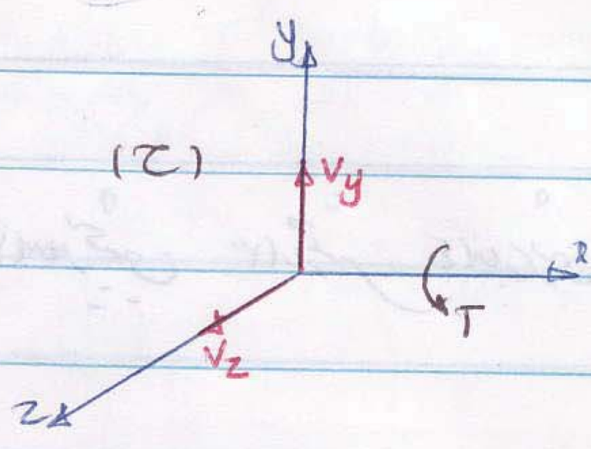


نیروها را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. آن‌هایی که σ می‌سازند و آن‌هایی که τ می‌سازند.

حمید کاظم

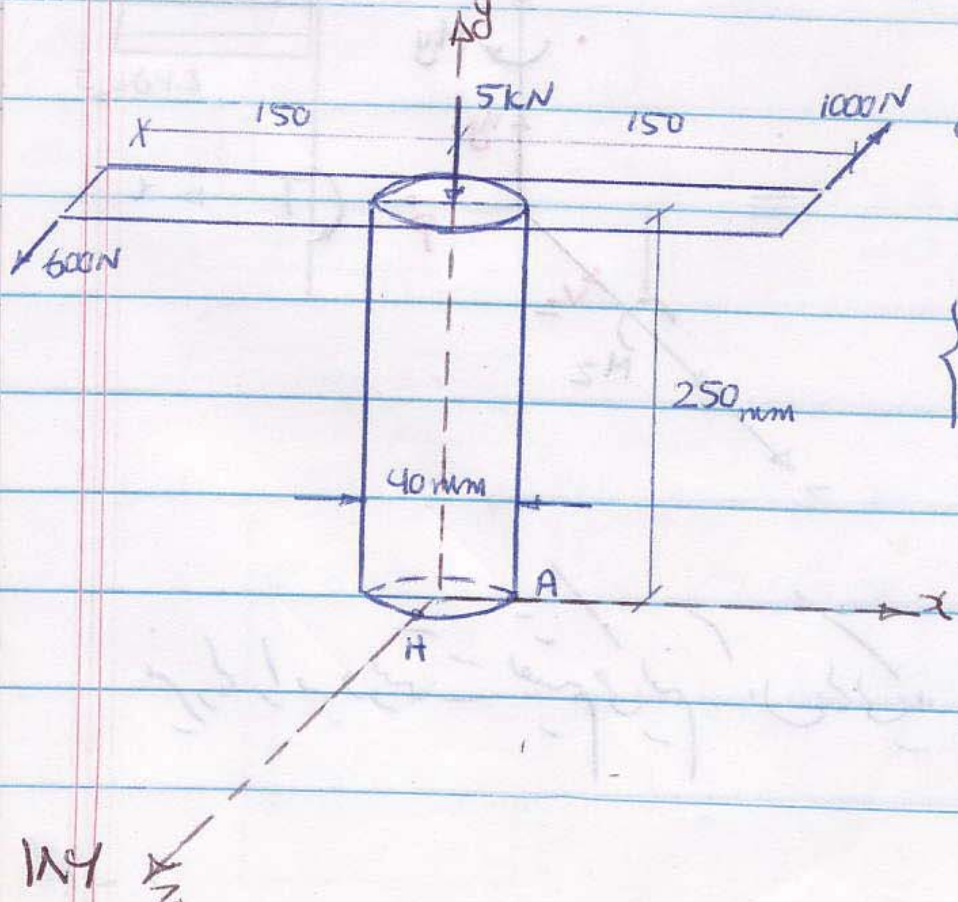


+



$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_y . z}{I_y} \pm \frac{M_z . y}{I_z}$$

$$\tau = \pm \frac{Tc}{J} \pm \frac{V_y Q_z}{I_z t} \pm \frac{V_z Q_y}{I_y t}$$



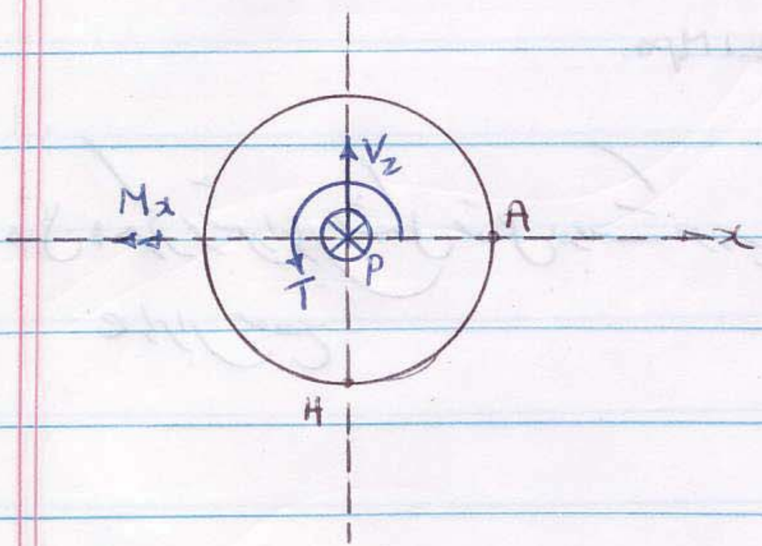
مثال : مطلوبست تنش های نرمال و برشی در نقاط A و H .

$$\begin{cases} \sigma_A , \tau_A = ? \\ \sigma_H , \tau_H = ? \end{cases}$$

حميد كاظم

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(40)^2 = 1256.6\ mm^2$$

$$I = \tfrac{1}{4}\pi r^4 = \tfrac{1}{4}(\pi \times 20^4) = 125663.7\ mm^4$$



$$P = -5000N$$

$$V_z = -1000 + 600 = -400$$

$$T = 150 \times (1000 + 600) = 2.4 \times 10^5\ N.mm$$

$$M_x = -400 \times 250 = -10^5\ N.mm$$

A نقطة : $\sigma_A = \frac{-5000}{1256.6} = -3.98\ Mpa$

$$\tau_A = \frac{T.C}{J} + \frac{VQ}{It} \qquad Q = A\bar{y} = \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3}$$

$$\rightarrow \tau_A = \frac{2.4 \times 10^5 \times 20}{2 \times 125663.7} + \frac{400\left(\frac{2 \times 20^3}{3}\right)}{125663.7 \times 40} = 19.51\ Mpa$$

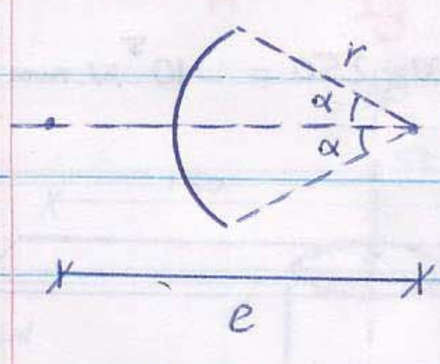
نقطه H : $\sigma_H = -3.98 + \dfrac{1 \times 10^5 \times 20}{125663.7} = +11.93\ Mpa$

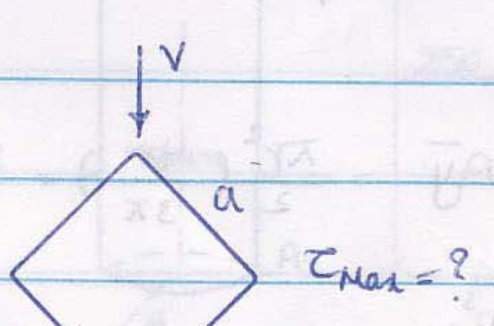
$$\tau_H = \frac{TC}{J} + \frac{VQ_H}{It} \longrightarrow Q_H = 0 \longrightarrow \tau_H = \frac{TC}{J}$$

$$\Rightarrow \tau_H = \frac{2.4 \times 10^5 \times 20}{2 \times 125663.7} = 19.1\ Mpa$$

مثال ۱: مرکز برش را برای شکل مقابل بدست آورید

e را برای مقطع





حميد كاظم

تمارين :
5, 12, 16, 23, 36, 49, 62, 72, 87, 79, 94, 109
114, 120, 127, 138

تشکر :

در انتها لازم میدانم از آقای نوید ذوالقدری (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف) و آقای مسعود قهرمان نژاد (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی تبریز- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیر کبیر) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .