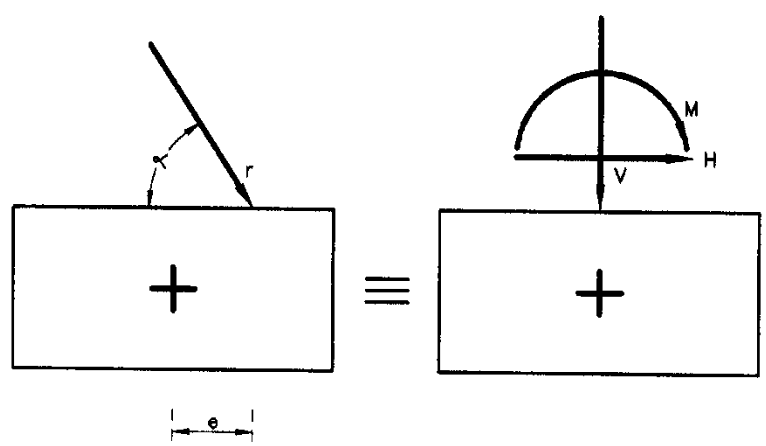
مروری بر اصول و مبانی ارتعاشات

Introduction to the theory of Vibrations

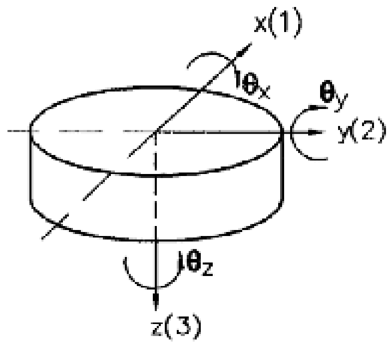
دکتر سید محمد رضا امام

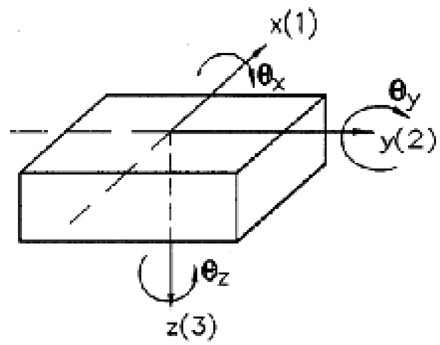
مروری بر تئوری ارتعاشات (Theory of Vibrations)

- معمولا می توان حرکات و بارگذاری های پیچیده را به حالت های ساده تر تبدیل کرده و پس از آنالیز برای حرکات ساده تر، با استفاده از جمع اثرات (superposition) رفتار را برای حالت پیچیده تر تعیین کرد.
مثلا برای پی تحت بار سمت چپ می توان ابتدا پی را تحت بارهای سمت راست آنالیز کرده و سپس اثر آنها را جمع کرد.



مروری بر تئوری ارتعاشات (Theory of Vibrations)





$$
\begin{array}{cccccc}
\delta_x & \delta_y & \delta_z & \theta_x & \theta_y & \theta_z \\
\end{array}
$$

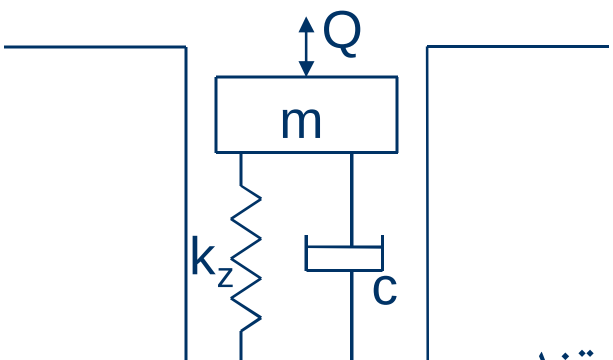
$$
\begin{bmatrix}
K_{11} & 0 & 0 & 0 & -K_{15} & 0 \\
0 & K_{22} & 0 & K_{24} & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{42} & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\
-K_{51} & 0 & 0 & 0 & K_{55} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{66}
\end{bmatrix}
$$

- یک جسم صلب (مثلا پی) دارای شش درجه آزادی برای حرکت است و برای هریک از این حرکات، سختی (و میرائی) معینی را می توان تعریف کرد.
- هر عضو ماتریس سختی مانند k_{ij} نشان می دهد که چه مقدار جابجائی در جهت i در اثر اعمال نیروی واحد در جهت j ایجاد می شود

مروری بر تئوری ارتعاشات (Theory of Vibrations)

- بنابر این کافی است رفتار اجسام را در حرکت در جهت هریک از درجات آزادی، جداگانه آنالیز کنیم

مثلا برای حرکت ارتعاشی یک پی
در امتداد قائم داریم:



$$k_z = \frac{W}{z_s}$$

که در آن k_z سختی فنر معادل وW و z_s بترتیب وزن و تغییر مکان استاتیکی پی هستند.

- اکنون برای بررسی رفتار پی تحت بار دینامیکی می توان حرکت ارتعاشی جرم (=W/g) m متکی به فنر به سختی k_z و متصل به میراگر c را بررسی کرد

ویژگیهای حرکت هماهنگ (Harmonic Motion)

ساده ترین شکل حرکت تناوبی حرکت هماهنگ است که با معادلات سینوسی یا کسینوسی بیان می گردد. برای چنین حرکتی تابع تغییر مکان x را می توان با معادله زیر نشان داد:

$$x = X \sin wt$$

که در آن:

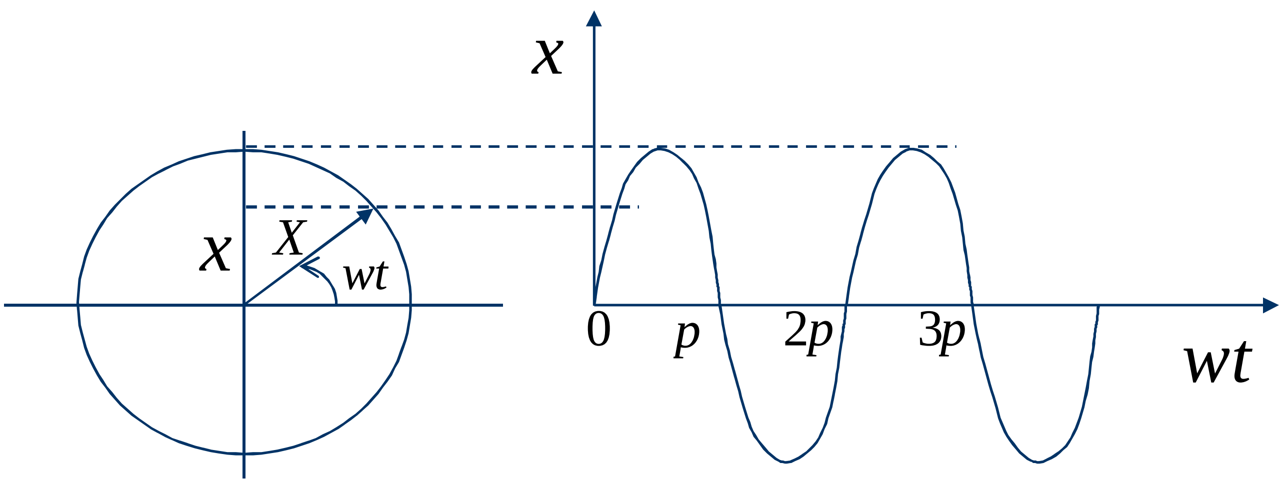
w فرکانس دورانی بر حسب رادیان در واحد زمان

X دامنه حرکت و

t زمان می باشند

ویژگیهای حرکت هماهنگ (Harmonic Motion)

تغییرات تابع x را برای این حرکت می توان با استفاده از تصویر یک بردار بطول X که با سرعت دورانی ثابت w دوران می کند، برروی قطر عمودی دایره ای به شعاع X نشان داد.



ویژگیهای حرکت هماهنگ (Harmonic Motion)

در چنین حرکتی زمان تناوب (Period) یا T و فرکانس (frequency) یا f عبارتند از:

$$T = \frac{2p}{w} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2p}$$

تغییرات سرعت و شتاب چنین متحرکی که بترتیب مشتقات اول و دوم جابجائی هستند نیز هماهنگ بوده و داریم:

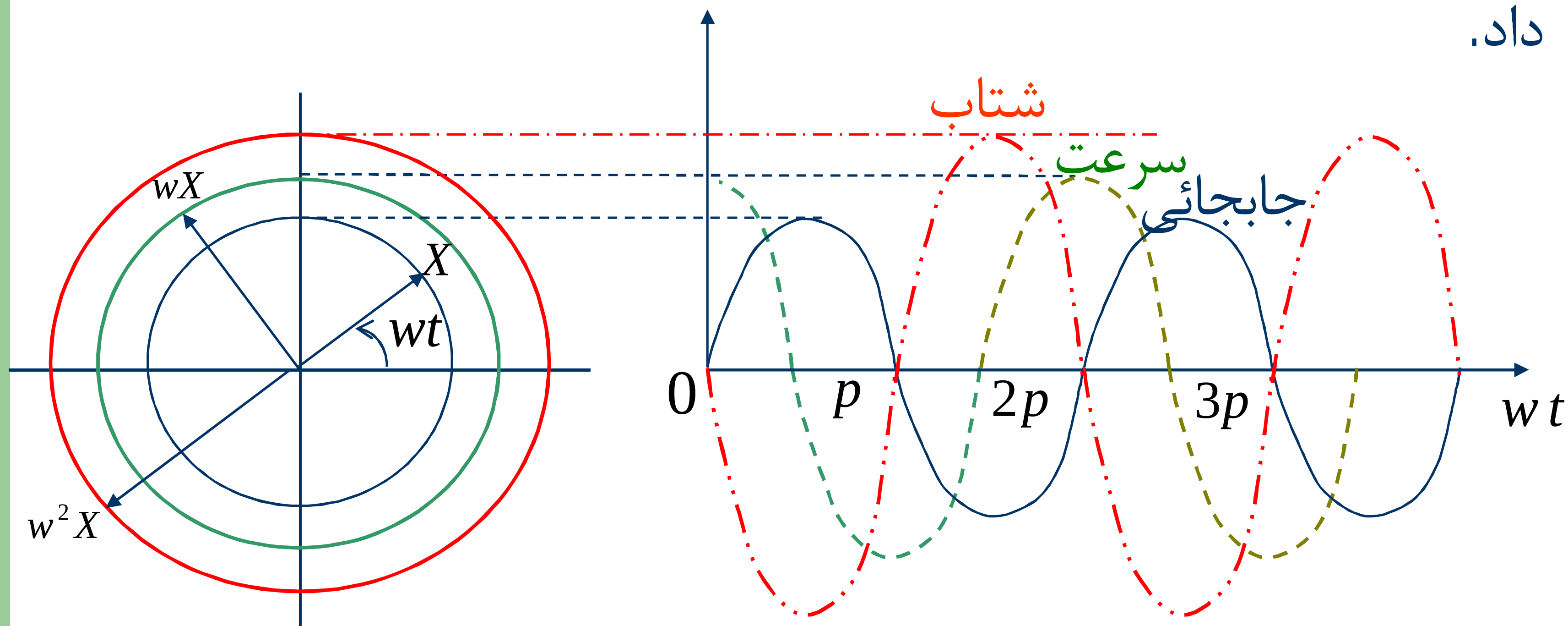
$$\dot{x} = wX \sin(wt + \frac{p}{2})$$

$$\ddot{x} = w^2 X \sin(wt + p) = -w^2 Xx$$

دیده میشود که سرعت و شتاب با جابجائی دارای اختلاف فاز بوده و بترتیب به اندازه $p/2$ و p از آن جلوترند.

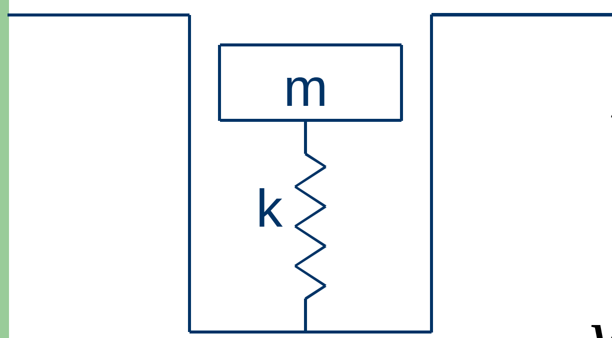
ویژگیهای حرکت هماهنگ (Harmonic Motion)

تغییرات سرعت و شتاب را نیز می توان بوسیله تصاویر بردارهائی بطول wX و w^2X که با سرعت یکنواخت w دوران می کنند بر روی قطر دایره نشان داد.



ارتعاش آزاد یک سیستم جرم-فنر
(Free vibration of a mass-spring system)

برای یک سیستم شامل جرم m و فنر به سختی k که بصورت آزاد مرتعش می شود، با نوشتن رابطه تعادل نیروها و حل معادله دیفرانسیل حاصل می توان رابطه زیر را بدست آورد:



$$z = Z\cos(w_n t - a)$$

که در آن w_n فرکانس دورانی طبیعی سیستم از رابطه زیر بدست می آید:

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

و داریم:

$$Z = \sqrt{{z_0}^2 + \left(\frac{u_0}{w_n}\right)^2} \qquad a = \tan^{-1}\left(\frac{u_0}{z_0 w_n}\right)$$

که در آن u_0 سرعت اولیه z_0 تغییر مکان اولیه سیستم می باشند.

ارتعاش آزاد یک سیستم جرم-فنر
(Free vibration of a mass-spring system)

در صورتیکه در مدت زمان T_n یک سیکل کامل حرکت صورت گیرد خواهیم داشت: $w_n T_n = 2p$ و در آنصورت تناوب یا پریود طبیعی سیستم عبارت خواهد بود از:

$$T_n = \frac{2p}{w_n} = 2p\sqrt{\frac{m}{k}}$$

و فرکانس طبیعی ارتعاش f_n ، یعنی تعداد سیکلهائی که در واحد زمان بوقوع می پیوندد عبارتست از:

$$f_n = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

در صورتیکه در اثر نیروی وزن جسم W تغییر مکان استاتیکی z_s باشد داریم $z_s = W/k$ و بنابراین:

$$f_n = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{gk}{W}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{g}{z_s}}$$

ارتعاش آزاد یک سیستم جرم-فنر
(Free vibration of a mass-spring system)

رابطه :

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{z_s}}$$

نشان می دهد که فرکانس طبیعی سیستم در حرکت آزاد بدون میرائی با تغییر مکان استاتیکی رابطه معکوس دارد و می توان جدول روبرو را با استفاده از این رابطه تهیه کرد:

فرکانس طبیعی (سیکل در ثانیه)	تغییر مکان استاتیکی (میلیمتر)
111.5	0.02
49.9	0.10
22.3	0.50
15.8	1
7	5
5	10

دکتر سید محمد رضا امام

ارتعاش آزاد یک سیستم جرم-فنر
(Free vibration of a mass-spring system)

در این حرکت سرعت و شتاب مانند حرکات هماهنگ دیگر، خود بصورت هماهنگ تغییر خواهند کرد و با تغییرات جابجائی بترتیب اختلاف فازهائی برابر با $p/2$ و p خواهند داشت یعنی داریم:

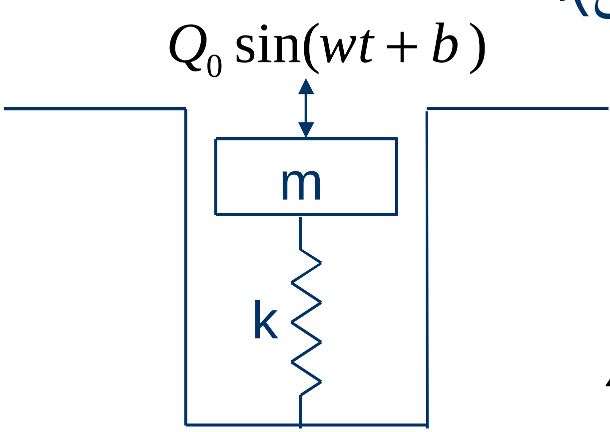
$$\dot{z} = Zw_n \cos(w_n t - a + \frac{p}{2})$$

$$\ddot{z} = Zw_n^{\ 2} \cos(w_n t - a + p)$$

در صورتیکه تغییرات سرعت و شتاب را همراه با تغییرات جابجائی بر روی یک نمودار رسم کنیم نموداری مانند آنچه قبلا برای حرکات هماهنگ دیدیم بدست خواهیم آورد.

ارتعاش جبری یک سیستم جرم-فنر
(Forced vibration of a mass-spring system)

در صورتیکه نیروی تکرار شونده ای مانند: $Q = Q_0 \sin(wt + b)$
به سیستم جرم-فنر وارد شود، مانند آنچه در پی ماشین آلات اتفاق می افتد، ارتعاش جبری خواهیم داشت (مانند شکل).



در صورتیکه برای چنین حرکتی معادله دیفرانسیل تعادل را بنویسیم، جواب اختصاصی این معادله عبارت خواهد بود از:

$$z = \frac{Q_0 / m}{(w_n^2 - w^2)} \sin(wt + b)$$

که در آن: $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ و ضریب جمله سینوس، دامنه ارتعاش است

دکتر سید محمد رضا امام

ارتعاش جبری یک سیستم جرم-فنر
(Forced vibration of a mass-spring system)

می توان از جمع جواب معادله با جواب اختصاصی و سپس اعمال شرایط مرزی جواب کلی معادله را بدست آورد ولی برای شرایطی که بیشتر در عمل با آن روبرو هستیم، یعنی زمانیکه:

- نیروی خارجی با ارتعاش سیستم هم فاز باشد و یا: $b = 0$
- جابجائی اولیه و سرعت اولیه صفر باشند و یا: $z_0 = u_0 = 0$
- در صورتیکه بعلت میرائی در سیستم های واقعی تنها تغییر شکل های مربوط به ارتعاش پایدار (steady state) باقی مانده باشند، تغییر شکل ها را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$z = \frac{Q_0 / k}{(1 - w^2 / w_n^{\ 2})}\left(\sin wt - \frac{w}{w_n}\sin w_n t\right)$$

دکتر سید محمد رضا امام

ارتعاش جبری یک سیستم جرم - فنر
بزرگنمائی جابجائی ها

ولی جابجائی استاتیکی عبارتست از: $z_s = Q_0 / k$

در صورتیکه $M = \dfrac{1}{(1-w^2/w_n{}^2)}$ را فاکتور بزرگنمائی (Magnification factor)
بنامیم جابجائی برای این حرکت را می توان بصورت زیر نوشت:

$$z = z_s M(\sin wt - \frac{w}{w_n}\sin w_n t)$$

- در شرایط تشدید (resonance) $(w/w_n = 1)$: $M \to \infty$
- در شرایط تغییر شکل استاتیکی $(w/w_n = 0)$: $M = 1$
- در شرایط $w/w_n > 1.5$ (سرعت های بالا) : $|M| < 1$

(تغییرات M با نسبت w/w_n در صفحه 20 کتاب رسم شده است).

دکتر سید محمد رضا امام

ارتعاش جبری یک سیستم جرم - فنر
جابجائی در شرایط تشدید

در شرایط تشدید تابع تغییر شکل بصورت $\frac{0}{0}$ در می آید که با بکار بردن قاعده هوپیتال مقدار آن را می توان بدست آورد:

$$z = \frac{1}{2} z_s (\sin w_n t - w_n t \sin w_n t)$$

حداکثر جابجائی در شرایط تشدید با مساوی صفر قرار دادن سرعت بدست خواهد آمد. این حداکثر عبارتست از:

$$(z_{\max})_{res} = \frac{1}{2} n p z_s$$

n عدد صحیح است

دیده میشود که $(z_{\max})_{res}$ با زیاد شدن n بطور نامحدودی افزایش یافته و این امر برای یک پی واقعی می تواند ایجاد خطر نماید.

ارتعاش جبری یک سیستم جرم - فنر
حداکثر نیروی وارد از پی به خاک

برای یک پی مرتعش شونده حداکثر نیروی وارد از پی به خاک زمانیست که جابجائی پی حداکثر (سرعت صفر) است. می توان نشان داد که حد اکثر نسبی جابجائی عبارتست از:

$$z_{\max} = \frac{Q_0}{k} \frac{1}{(1 - w / w_n)} \sin\left(\frac{2pnw}{w + w_n} \right)$$

حداکثر مطلق جابجائی که باعث ایجاد نیروی حداکثر میشود بیشترین مقداری است که $z_{\max}$ می تواند به خود بگیرد و عبارتست از:

$$(z_{\max})_{\max} = \frac{(Q_0 / k)}{1 - w / w_n}$$

ارتعاش جبری یک سیستم جرم - فنر
حداکثر نیروی وارد از پی به خاک

بنابراین حداکثر نیروی دینامیکی وارد بر خاک عبارت خواهد بود از:

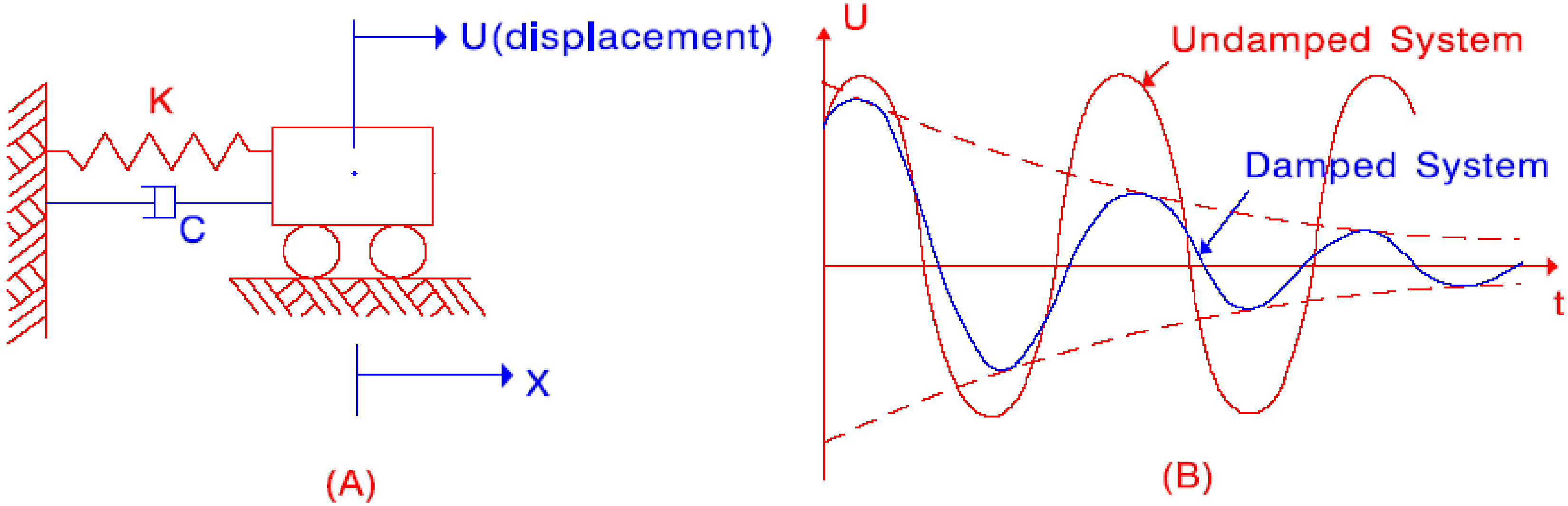
$$F_{dyn(\max)} = k\left(z_{\max}\right)_{\max} = \frac{k\left(Q_0 / k\right)}{1 - w / w_n} = \frac{Q_0}{1 - w / w_n}$$

نیروهای حداکثر و حداقل کل که از طرف پی به خاک وارد میشود مجموع نیروهای استاتیکی و دینامیکی است و عبارتند از:

$$F_{\max} = W + \frac{Q_0}{1 - w / w_n} \qquad F_{\min} = W - \frac{Q_0}{1 - w / w_n}$$

در روابط فوق W وزن پی است.

ارتعاش آزاد با میرائی ویسکوز
(Free vibration with viscous damping)



Free Vibration of Simple System

ارتعاش آزاد با میرائی ویسکوز
- روابط تعادل دینامیکی (Dynamic Equilibrium Equations)

در صورتیکه نیروی میرائی متناسب با سرعت باشد آن را میرائی ویسکوز می نامند. در اینصورت:

$$F_d = -C\dot{z}$$

معادله تعادل دینامیکی سیستم جرم - فنر با چنین میرائی (بدون نیروی خارجی) عبارتست از:

$$m\ddot{z} - C\dot{z} + kz = 0$$

می توان نشان داد که اگر میرائی برابر و یا بیش از:

$$C_c = 2\sqrt{km} = 2mw_n$$

باشد، حرکت تک تناوبی بوده و ارتعاشی صورت نخواهد گرفت. این مقدار میرائی را میرائی بحرانی (Critical Damping) می گویند.

ارتعاش آزاد با میرائی ویسکوز
- حالت های حرکت با توجه به میرائی

نسبت میرائی واقعی به میرائی بحرانی نسبت میرائی (damping ratio) نام دارد:

$$x = \frac{C}{C_c}$$

بسته به اینکه نسبت میرائی چقدر باشد، سه حالت ممکن است پیش آید :

- اگر $x > 1$ میرائی فوق بحرانی (overdamped) و حرکت تک تناوبی است
- اگر $x = 1$ میرائی بحرانی (critically damped) و حرکت تک تناوبی است.
- اگر $x < 1$ میرائی زیر بحرانی (underdamped) و حرکت ارتعاشی است.

در عمل معمولا با حالت سوم روبرو هستیم.

ارتعاش آزاد با میرائی ویسکوز
- سیستم های با میرائی بحرانی

چون در عمل معمولا با میرائی فوق بحرانی سروکار نداریم، جابجائی مربوط به آن را نمی آوریم. برای حرکت با میرائی بحرانی:

$$z=\left[z_0+(u_0+w_n z_0)t\right]e^{-w_n t}$$

Figure 1.3: Free vibrations of a strongly damped system.

ارتعاش آزاد با میرائی ویسکوز
- سیستم های با میرائی زیر بحرانی

در عمل سیستم های مرتعش شونده دارای میرائی زیر بحرانی هستند. در این سیستم ها جابجائی عبارتست از:

$$z = Z\cos(w_d t - a)$$

که در آن:

$$Z = e^{-xw_n t}\sqrt{{z_0}^2 + \left(\frac{u_0 + xw_n z_0}{w_n\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$$

$$a = \tan^{-1}\left(\frac{u_0 + xw_n z_0}{w_n z_0\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad w_d = w_n\sqrt{1-x^2}$$

پارامتر w_d به فرکانس دورانی طبیعی سیستم با میرائی (damped natural circular frequency) معروف است.

ارتعاش آزاد با میرائی ویسکوز
- سیستم های با میرائی زیر بحرانی

در سیستم های با میرائی زیر بحرانی، وجود میرائی باعث کاهش در دامنه حرکت است. می توان نشان داد که در این حرکتها، کاهش لگاریتمی دامنه (logarithmic decrement) یا d که نسبت دامنه های متوالی است از رابطه زیر بدست می آید:

$$d = \ln\left(\frac{Z_n}{Z_{n+1}}\right) = \frac{2p x}{\sqrt{1-x^2}}$$

اگر x کوچک باشد می توان رابطه فوق را بصورت زیر تقریب زد:

$$d = \ln\left(\frac{Z_n}{Z_{n+1}}\right) = 2p x$$

ارتعاش آزاد با میرائی ویسکوز
- سیستم های با میرائی زیر بحرانی

شکل زیر تاثیر میرائی را بر حرکت سیستم مرتعش شونده با میرائی زیر بحرانی را نشان میدهد

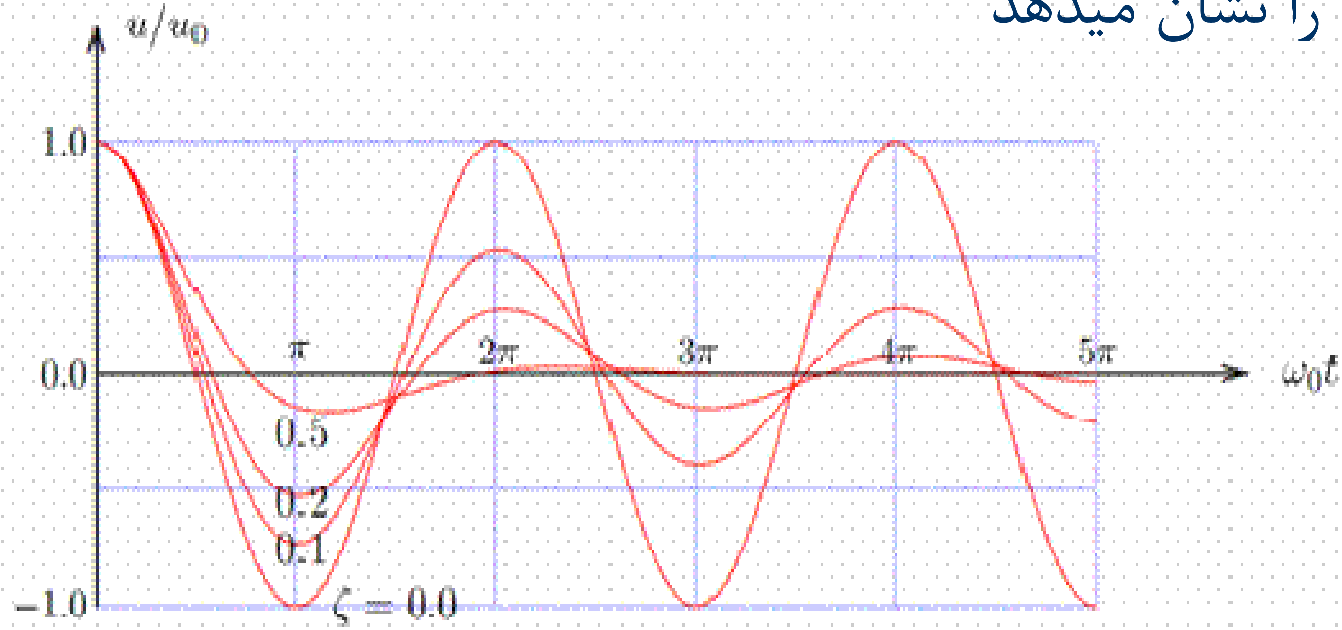
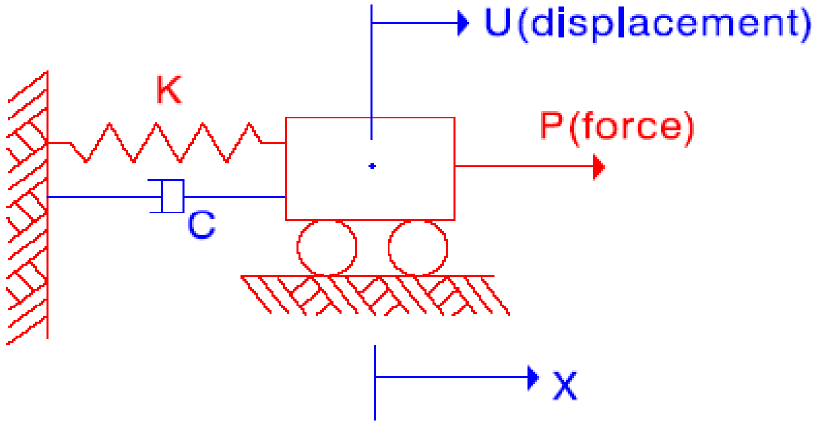


Figure 1.2: Free vibrations of a weakly damped system.

ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز
(Forced vibration with viscous damping)

با توجه به شکل زیر در صورتیکه نیروی خارجی رابطه تعادل دینامیکی را برای یک سیستم جرم – فنر با میرائی ویسکوز در ارتعاش جبری را می توان چنین نوشت:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = P(t)$$



(A)

دکتر سید محمد رضا امام

ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز - روابط حرکت

در صورتیکه نیروی خارجی یک نیروی هماهنگ بوده که بوسیله رابطه $P(t)=Q_0 \sin wt$ تعریف شود می توان نشان داد که جابجائی را برای بخش پایدار حرکت این سیستم مرتعش شونده می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$z = Z\cos(wt + a)$$

که در آن:

$$a = \tan^{-1}\left[\frac{1-(w/w_n)^2}{2x(w/w_n)}\right]$$

$$Z = \frac{(Q_0/k)}{\sqrt{\left[1-(w/w_n)^2\right]^2 + 4x^2(w/w_n)^2}}$$

$$w_n = \sqrt{k/m}$$

دکتر سید محمد رضا امام

ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز - روابط حرکت

در صورتیکه نسبت فرکانس های دورانی را با: $r = w / w_n$

نشان دهیم روابط قبل را می توانیم بصورت ساده تر زیر بنویسیم:

$$Z = \frac{(Q_0 / k)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2xr)^2}} \qquad a = \tan^{-1}\left[\frac{1 - r^2}{2xr}\right]$$

بنابراین برای ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز بزرگنمائی عبارت خواهد بود از:

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2xr)^2}}$$

ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز - روابط حرکت

شکل زیر تغییرات دامنه جابجائی را برای این حرکت نشان میدهد. دیده میشود که در این حرکت دامنه حداکثر در فرکانس دورانی $w = w_n$ اتفاق نمی افتد.

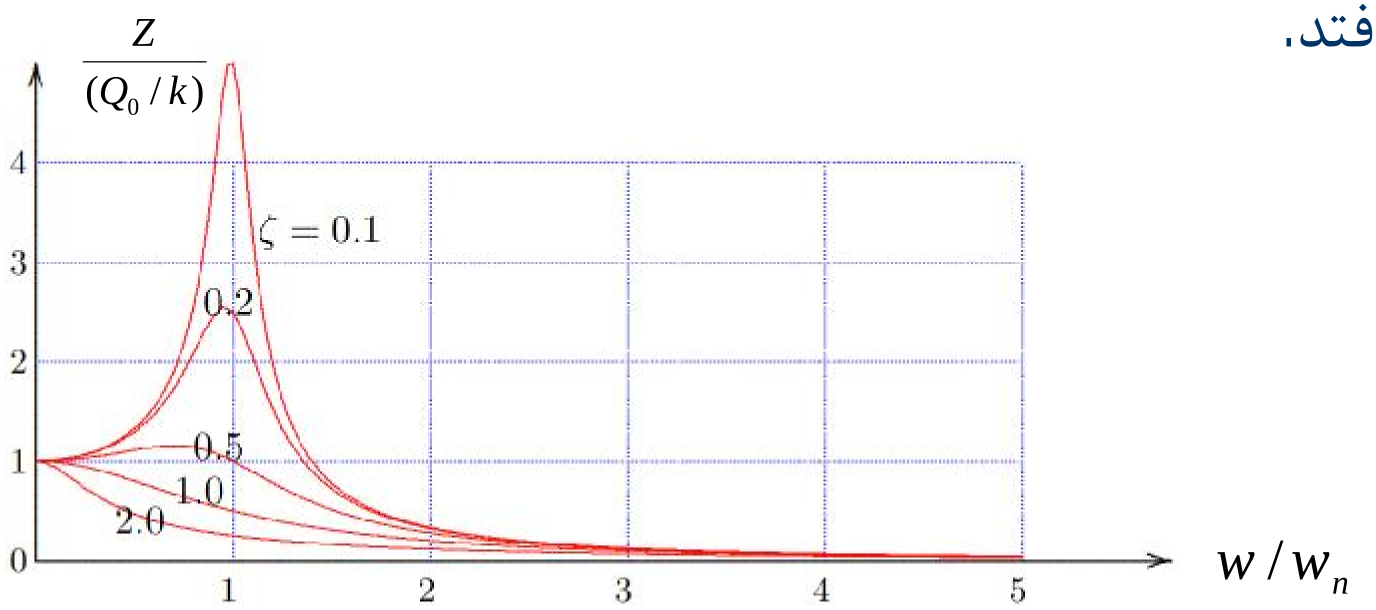


Figure 1.4: Amplitude of forced vibration.

دکتر سید محمد رضا امام

ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز - فرکانس تشدید

- می توان نشان داد که دامنه حداکثر در فرکانس دورانی: $w = w_n\sqrt{1-x^2}$ اتفاق می افتد. بنابراین فرکانس تشدید برای ارتعاشات با میرائی ویسکوز (Resonance frequency for vibration with damping) یا f_m را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$f_m = f_n\sqrt{1-x^2}$$

که در آن f_n فرکانس طبیعی ارتعاش بدون میرائی است.

- دامنه ارتعاش در شرایط تشدید (Amplitude of vibration at resonance) عبارتست از:

$$Z_{res} = \frac{Q_0}{k}\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}$$

ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز - حداکثر نیروی وارد بر پی

- حداکثر نیروی دینامیکی منتقل شده به پی را می توان از جمع نیروهای فنر و میراگر بدست آورد. در اینصورت خواهیم داشت:

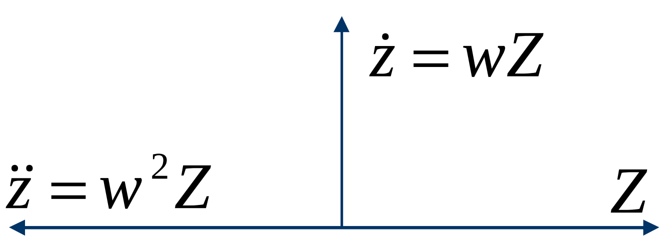
$$F_{dyn(\max)} = Z\sqrt{k^2 + (cw)^2}$$

در صورتیکه علاوه بر نیروی فوق نیروی خارجی استاتیکی نیز داشته باشیم باید نیروی دینامیکی فوق را با آن جمع کرد.

ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز

- استفاده از بردارها برای بررسی حرکت

- می توان از بردارها برای بررسی ارتعاشات جبری با میرائی ویسکوز استفاده کرد. با توجه به اختلاف فازهای 90 و 180 درجه ای سرعت و شتاب با جابجائی می توان برای یک حرکت سینوسی آنها را بشکل بردارهای زیر نشان داد:



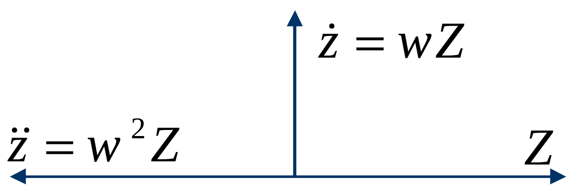
$$z = Z\sin(wt - j)$$

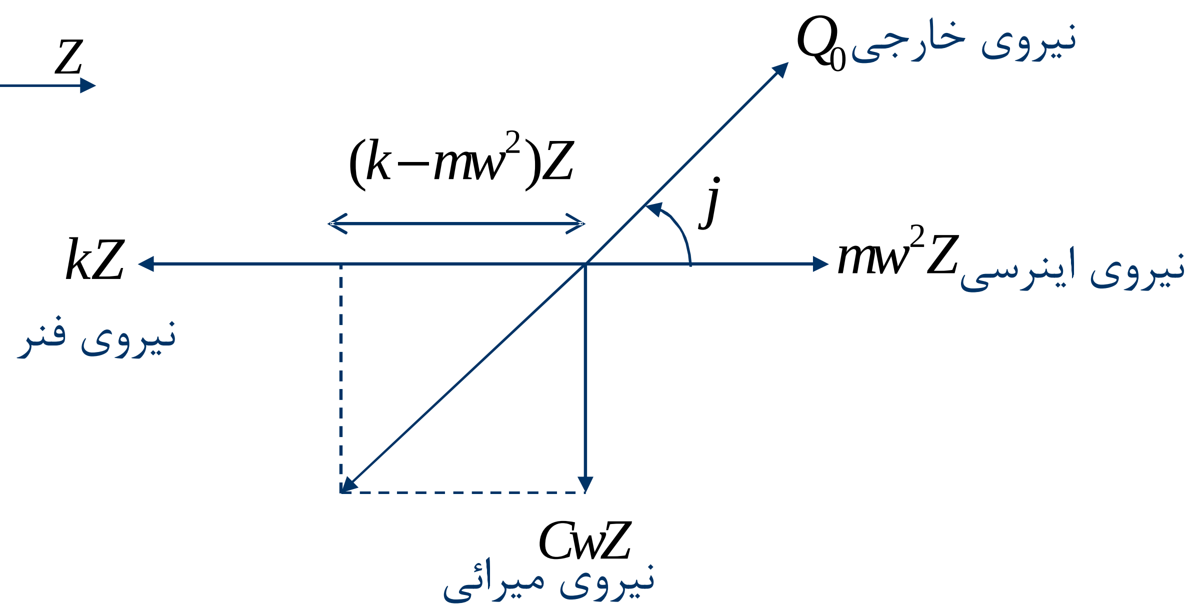
$$\dot{z} = wZ\sin(wt - j + \frac{p}{2})$$

$$\ddot{z} = w^2 Z\sin(wt - j + p)$$

ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز
- استفاده از بردارها برای بررسی حرکت

- تعادل نیروهای وارد بر جسم مرتعش شونده را می توان با استفاده از بردارهای نیروهای فنر، میرائی، اینرسی، و نیروی خارجی بصورت زیر نشان داد:





ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز
- استفاده از بردارها برای بررسی حرکت

میدانیم که:

- نیروی فنر در جهت عکس بردار جابجائی است
- نیروی میرائی در جهت عکس بردار سرعت است
- نیروی اینرسی در جهت عکس بردار شتاب (در جهت بردار جابجائی) است
- نیروی خارجی برابر ولی در جهت عکس برآیند بردارهای فوق است

بنابراین باتوجه به شکل در این حرکت بردار تغییر مکان به اندازه j نسبت به بردار Q_0 تاخیر دارد. تغییرات زاویه فاز برای مقادیر مختلف نسبت فرکانس در شکل بعد آمده است.

ارتعاش جبری با میرائی ویسکوز

- استفاده از بردارها برای بررسی حرکت

برای زمانیکه میرائی صفراست، برای $r<1$ زاویه فاز صفر بوده و تغییر مکان با نیروی محرک Q_0 هم فاز خواهد بود. برای $r>1$ زاویه فاز 180 درجه است

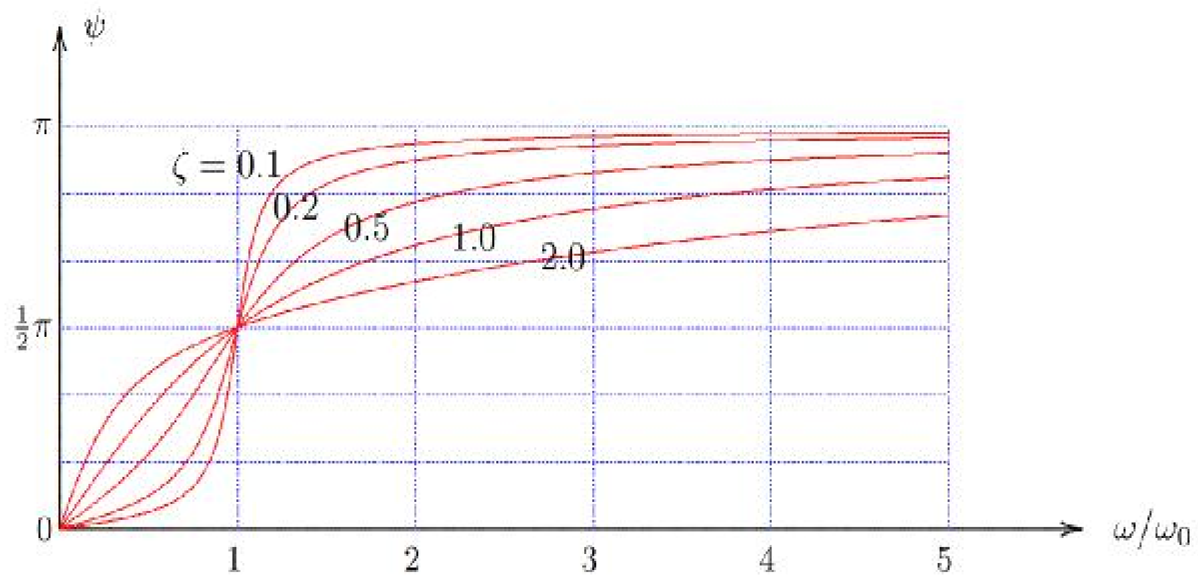


Figure 1.5: Phase angle of forced vibration.

دکتر سید محمد رضا امام

تعیین نسبت میرائی

در موارد عملی زیادی لازم است نسبت میرائی یک سیستم یا ماده برآورد شود. برای اینکار میتوان از آزمایشات ارتعاش آزاد یا جبری بر روی آن ماده یا سیستم استفاده کرد.

- آزمایش ارتعاش آزاد: ابتدا سیستم را از حالت تعادل اولیه خارج کرده و به ارتعاش در می آورند. سپس تغییرات دامنه ارتعاش را با زمان تعیین و بروش زیر میرائی را بدست می آورند:

برای میرائی های کم داریم:

$$d = \ln \frac{Z_n}{Z_{n+1}} = 2px$$

$$nd = \ln \frac{Z_0}{Z_n} = 2npx \longrightarrow x = \frac{1}{2np} \ln \frac{Z_0}{Z_n}$$

دکتر سید محمد رضا امام

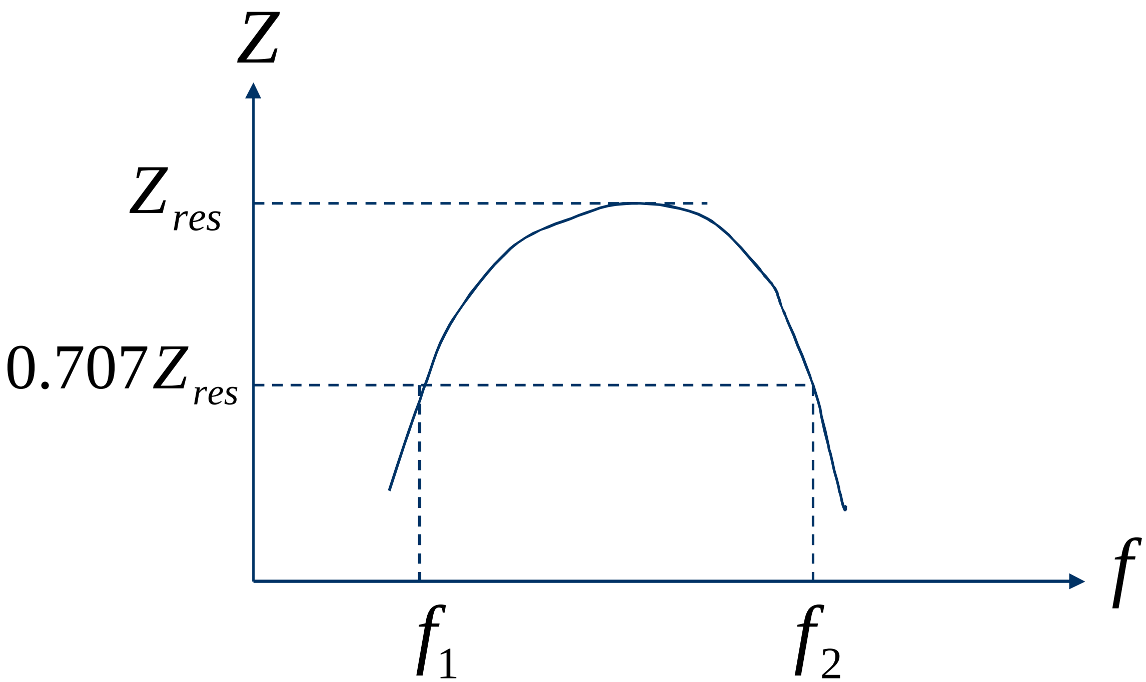
تعیین نسبت میرائی

آزمایش ارتعاش جبری:

- ابتدا سیستم را تحت نیروی مشخصی به ارتعاش در می آورند و نموداری از تغییرات دامنه ارتعاش Z با فرکانس f را مانند شکل رسم می کنند
- با استفاده از شکل، دامنه ارتعاش برای شرایط تشدید Z_{res} را تعیین میکنند
- فرکانس های f_1 و f_2 متناظر با $0.707Z_{res}$ را بدست می آورند
- می توان نشان داد که میرائی از رابطه $x=\frac{1}{2}\left(\frac{f_2-f_1}{f_n}\right)$ قابل تعیین است و میدانیم که فرکانس تشدید تقریبا با f_n برابر است.

این روش به روش پهنای باند (Bandwidth method) معروف است

تعیین نسبت میرائی



تعیین میرائی به روش پهنای باند