

انتشار امواج در محیط های الاستیک

Propagation of Waves in Elastic Medium

تدریس: دکتر سید محمد رضا امام

مقدمه و کلیات

اگر به یک محیط پیوسته ارتجاعی تنش‌ی بطور ناگهانی اعمال شود، تمام بخش‌های محیط از این تنش به یکسان متاثر نمیشوند بلکه بخش‌هایی که نزدیکتر به محل اعمال تنش هستند زودتر تاثیر می‌پذیرند.

تغییر شکل ایجاد شده بتدریج به بخش‌های دیگر جسم منتقل می‌شود. این انتقال بشکل امواج تنش (stress waves) صورت می‌گیرد.

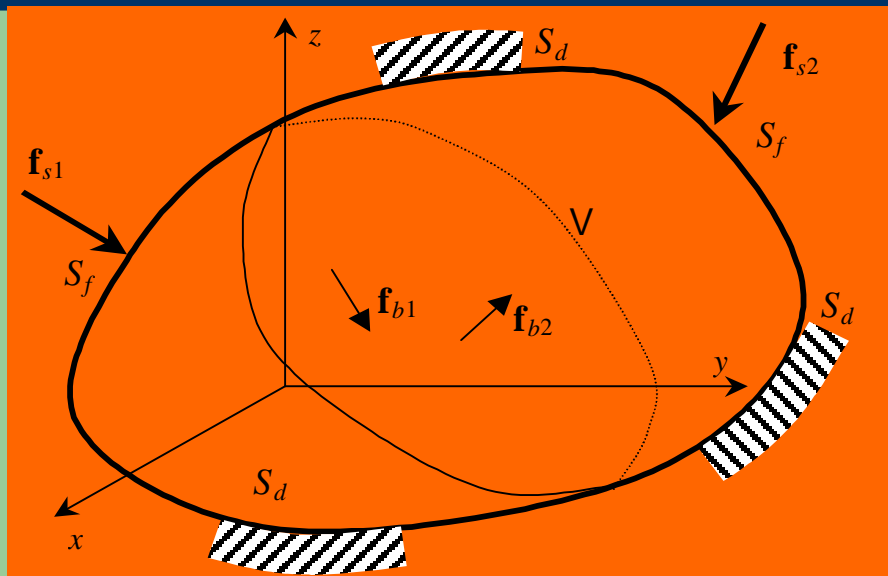
مطالعه گسترش امواج تنش کاربردهای مهمی در مهندسی ژئوتکنیک دارد از جمله: تعیین خصوصیات خاک و طراحی سازه‌های ژئوتکنیکی برای بارهای ناشی از زلزله

مقدمه و کلیات

انتشار امواج در محیط های ارتجاعی را میتوان به سه حالت زیر تقسیم کرد. روابط بدست آمده برای هر یک از حالت های زیر برای گروه مشخصی از مسائل کاربردی قابل استفاده اند :

- انتشار موج در یک میله ارتجاعی (Elastic stress waves in a bar)
- انتشار موج در یک محیط بی نهایت ارتجاعی (Stress waves in an infinite elastic medium)
- انتشار موج در یک محیط نیمه بی نهایت ارتجاعی (Stress waves in an elastic half-space)

روابط لازم برای مطالعه رفتار اجسام جامد سه بعدی



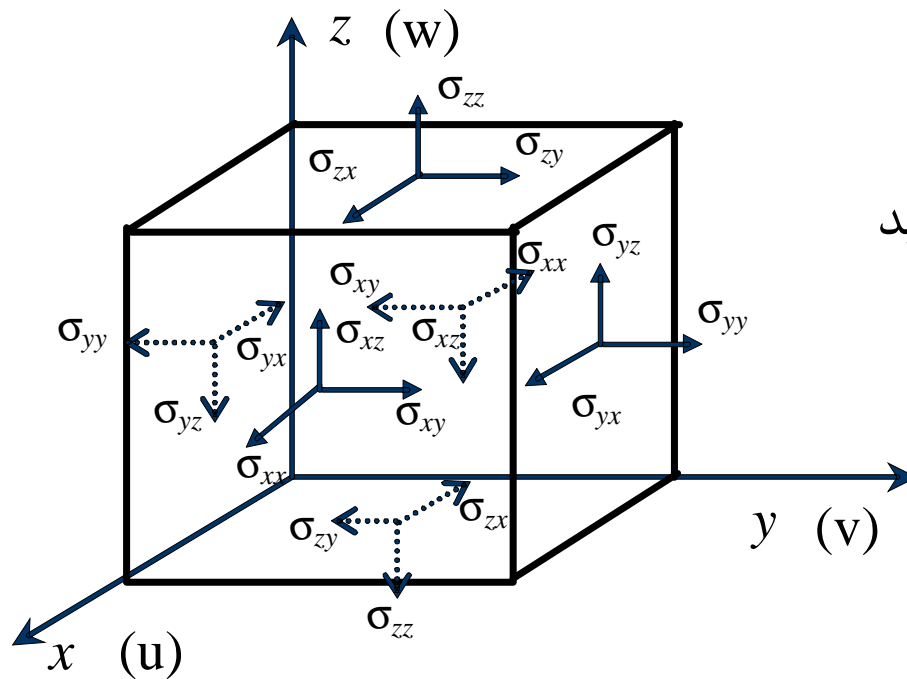
قبل از اینکه به بررسی سه حالت مذکور گسترش امواج ارتجاعی بپردازیم، روابط و معادلات لازم برای اینکار را ذکر می کنیم. این روابط را می توان به سه گروه اصلی تقسیم کرد:

▮ روابط تنش ها و کرنش ها (Stresses and Strains)

▮ روابط رفتاری (Constitutive Relationships)

▮ روابط تعادل استاتیکی و دینامیکی (Dynamic and static equilibrium equations)

تنش ها (Stresses)



تنش در یک نقطه از جسم سه بعدی دارای مولفه های نشان داده شده در شکل روبروست. برای ارضای تعادل باید داشته باشیم:

$$S_{xz} = S_{zx}$$

$$S_{xy} = S_{yx}$$

$$S_{zy} = S_{yz}$$

تنش های برشی را میتوان بجای S با t نیز نشان داد. در هر مولفه تنش، اندکس اول امتداد عمود بر سطح و امتداد دوم امتداد تنش وارده است.

کرنش ها (Strains)

کرنش های نرمال و برشی در یک نقطه از جسم سه بعدی

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad g_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

روابط رفتاری (Constitutive Relationships)

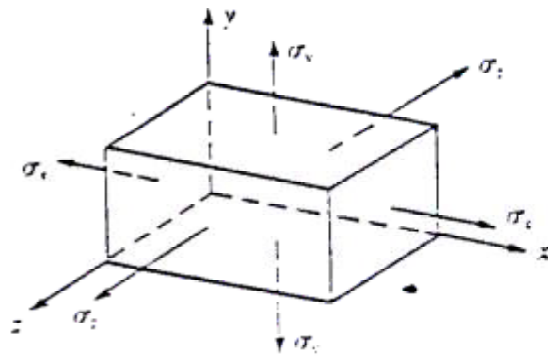
روابط رفتاری (تنش- کرنش) را میتوان بشکل ماتریسی زیر نوشت :

$$\begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ & & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ & sy. & & & D_{55} & D_{56} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ g_{yz} \\ g_{xz} \\ g_{xy} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e}$$

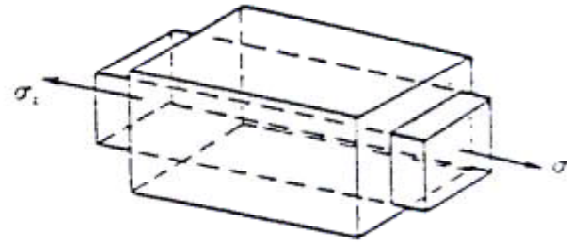
ویا:

ماتریس D در حالت کلی 36 عضو دارد ولی در اجسام الاستیک Green بعلت تقارن 21 عضو آن متمایزند

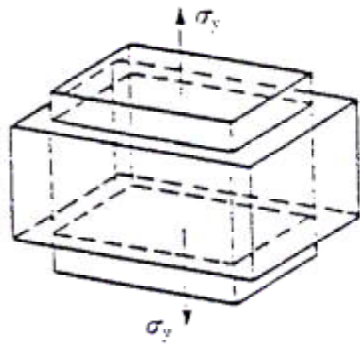
روابط رفتاری برای اجسام الاستیک همسان



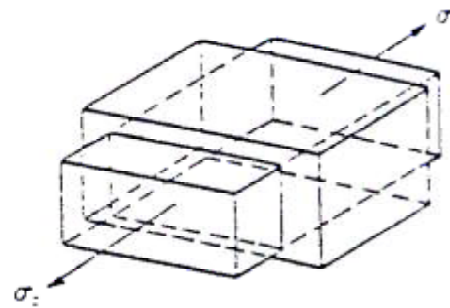
(a)



(b)



(c)



(d)

کرنش در امتداد X
سه مولفه دارد:

$$e'_x = \frac{S_x}{E}$$

$$e''_x = -\frac{nS_y}{E}$$

$$e'''_x = -\frac{nS_z}{E}$$



روابط رفتاری برای اجسام الاستیک همسان

$$e_x = \frac{s_x}{E} - n \frac{s_y}{E} - n \frac{s_z}{E}$$

حاصل جمع کرنش ها در امتداد X:

$$e_y = -n \frac{s_x}{E} + \frac{s_y}{E} - n \frac{s_z}{E}$$

به همین شکل در دو امتداد دیگر داریم:

$$e_z = -n \frac{s_x}{E} - n \frac{s_y}{E} + \frac{s_z}{E}$$

$$s_x = \frac{E}{(1+n)(1-2n)} [e_x(1-n) + ne_y + ne_z]$$

$$s_y = \frac{E}{(1+n)(1-2n)} [ne_x + (1-n)e_y + ne_z]$$

$$s_z = \frac{E}{(1+n)(1-2n)} [ne_x + ne_y + (1-n)e_z]$$

با حل همزمان سه رابطه فوق
میتوان تنشها را بر حسب
کرنش ها بدست آورد:

روابط رفتاری برای اجسام الاستیک همسان

روابط قبل را می توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$s_x = l \bar{e} + 2G e_x$$

$$s_y = l \bar{e} + 2G e_y$$

$$s_z = l \bar{e} + 2G e_z$$

$$l = \frac{nE}{(1+n)(1-2n)}$$

$$n = \frac{l}{2(l+G)}$$

که در آنها:

$$\bar{e} = e_x + e_y + e_z$$

روابط رفتاری برای اجسام الاستیک همسان

تنش ها و کرنش های برشی مانند تنش های نرمال طبق قانون Hook به هم مرتبط هستند :

$$t = Gg$$

لذا برای تنش های برشی در سه جهت داریم :

$$t_{xy} = Gg_{xy}$$

$$t_{yz} = Gg_{yz}$$

$$t_{zx} = Gg_{zx}$$

در روابط فوق مدول برشی G عبارتست از:

$$G = \frac{E}{2(1+n)}$$

روابط رفتاری برای اجسام الاستیک همسان

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+n)(1-2n)} \begin{bmatrix} 1-n & n & n & 0 & 0 & 0 \\ & 1-n & n & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-n & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2n}{2} & 0 & 0 \\ & \text{sy.} & & & \frac{1-2n}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2n}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ g_{yz} \\ g_{xz} \\ g_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e}$$

ویا:

روابط تعادل دینامیکی

روابط تعادل دینامیکی در امتدادهای سه گانه بصورت زیر نوشته می شوند. روابط تعادل استاتیکی را می توان از روابط زیر با حذف جمله سمت راست مربوط به بار دینامیکی بدست آورد.

$$\frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial s_{zx}}{\partial z} + f_x = r\ddot{u}$$

$$\frac{\partial s_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial s_{zy}}{\partial z} + f_y = r\ddot{v}$$

$$\frac{\partial s_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + f_z = r\ddot{w}$$

انتشار امواج در میله ارتجاعی

در یک میله ارتجاعی سه نوع موج مستقل می تواند منتشر شود:

▪ امواج طولی (Longitudinal waves)

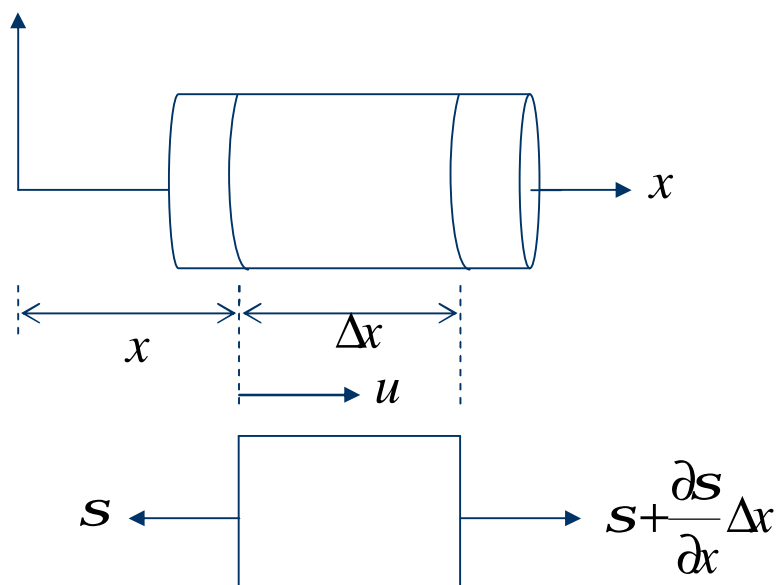
▪ امواج پیچشی (Torsional waves)

▪ امواج خمشی (Flexural waves)

از سه نوع فوق، فقط برای دو نوع اول را میتوان روابط تحلیلی بدست آورد. لذا در اینجا این دو نوع موج را بررسی خواهیم کرد.

انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

برای میله ارتجاعی نشان داده شده در شکل، رابطه تعادل دینامیکی را می توان بصورت زیر برای مقطعی به مساحت A و طول Δx از میله بنویسیم:



$$\sum F = ma$$

$$-SA + \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} \Delta x \right) A = \frac{(A\Delta x)g}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

که در آن g وزن حجمی میله، g شتاب جاذبه و t زمان است.

رابطه فوق با فرض اینکه تنش در کلیه نقاط هر مقطع یکسان بوده و مقاطع در ضمن حرکت مسطح باقی می مانند نوشته شده است.

انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

رابطه فوق پس از ساده شدن بشکل زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

از طرفی چون داریم:

$$s = Ee = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

بنابراین عبارت بالا را می توان بصورت زیر بر حسب جابجائی نوشت:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left(\frac{E}{r} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ویا:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = u_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که در آن: $u_c = \sqrt{\frac{E}{r}}$ سرعت حرکت موج طولی در میله است

انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

در صورتیکه میله فوق محدود (confined) باشد بگونه ای که از اطراف امکان تغییر شکل نداشته باشد رابطه را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = u_c'^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_c' = \sqrt{\frac{M}{r}}$$

در اینحال سرعت حرکت موج طولی در میله محصور شده عبارت خواهد بود از:

$$M = \frac{E(1-m)}{(1-2m)(1+m)}$$

که در آن M مدول محصور شده (constrained modulus) می باشد که بوسیله رابطه روبرو تعریف می شود:

انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

- سرعت حرکت موج

می توان نشان داد که u_c در واقع سرعت حرکت موج فشاری در میله است. برای اینکار ابتدا نشان می دهیم که جواب معادله دیفرانسیل انتشار موج در میله را می توان بصورت زیر نوشت:

$$u = f(x - u_c t)$$

در صورتیکه از عبارت فوق نسبت به x و t مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f'(x - u_c t) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = f''(x - u_c t)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -u_c f'(x - u_c t) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = u_c^2 f''(x - u_c t)$$

با قرار دادن جملات فوق در معادله دیفرانسیل حرکت موج خواهیم دید که این جواب در معادله صدق می کند:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = u_c^2 f''(x - u_c t) = u_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

- سرعت حرکت موج

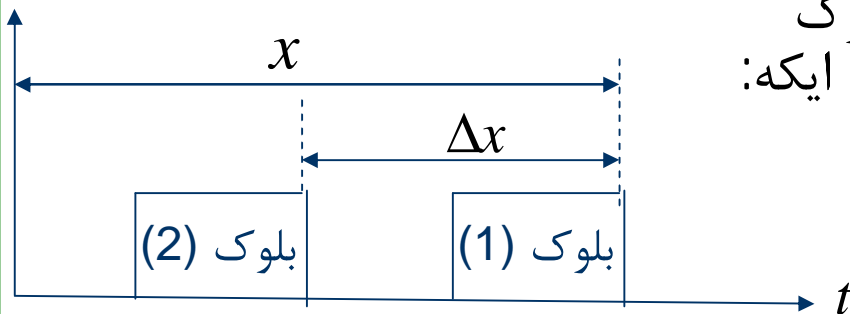
بهمین شکل می توان نشان داد که شکل کلی تر معادله حرکت بصورت زیر است:

$$u = f_1(x - u_c t) + f_2(x + u_c t)$$

در اینجا نشان میدهیم که تابع f_2 در واقع نشان دهنده موجی است که با سرعت u_c در جهت منفی محور x ها حرکت می کند (و تابع f_1 مربوط به موجی است که در جهت مثبت x ها حرکت می کند).

در صورتیکه در زمان t تابع f_2 بوسیله بلوک (1) در شکل زیر نشان داده شده باشد بگونه ای که:

$$u_t = f_2(x + u_c t)$$



انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی - سرعت حرکت موج

در زمان $t + \Delta t$ این تابع را می توان بوسیله بلوک (2) که در فاصله Δx از بلوک (1) است نشان داد بگونه ایکه:

$$u_{t+\Delta t} = f_2[(x - \Delta x) + u_c(t + \Delta t)]$$

در صورتیکه بلوک (1) در ضمن حرکت هیچ تغییری نکند داریم:

$$u_t = u_{t+\Delta t}$$

بنابراین:

$$f_2(x + u_c t) = f_2[(x - \Delta x) + u_c(t + \Delta t)]$$

$$u_c \Delta t = \Delta x$$

ویا:

که بمعنای حرکت موج با سرعت u_c است.

بهمین شکل می توان نشان داد که تابع f_1 نشان دهنده موجی است که با سرعت u_c در جهت مثبت حرکت می کند

انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

- سرعت حرکت ذرات میله

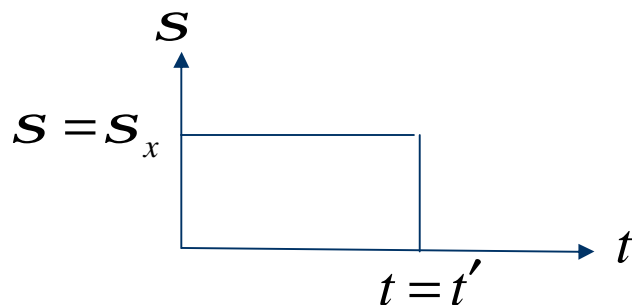
! باید توجه داشت که سرعت حرکت ذرات میله با سرعت حرکت موج فشاری یکسان نیست.

! در صورتیکه در ابتدای میله ضربه ای وارد کنیم که تنش S_x را در مدت t' به میله اعمال کند، ناحیه ای از میله بطول \bar{x} تحت این تنش قرار خواهد داشت بطوریکه:

$$\bar{x} = u_c t'$$

در مدت Δt این ناحیه فشرده شده فاصله Δx را در امتداد میله خواهد پیمود و داریم:

$$\Delta x = u_c \Delta t$$



انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی - سرعت حرکت ذرات میله

می توان کاهش طول الاستیک میله را در اثر این ضربه بشکل زیر تعیین کرد:

$$u = e_x \bar{x} = \left(\frac{S_x}{E} \right) \bar{x} = \left(\frac{S_x}{E} \right) (u_c t')$$

با رسیدن موج به انتهای میله، همین میزان جابجائی در انتهای میله نیز اتفاق خواهد افتاد. بنابراین سرعت انتهای میله، که در واقع سرعت حرکت ذرات میله است عبارت خواهد بود از:

$$\dot{u} = \frac{u}{t'} = \frac{S_x}{E} u_c$$

دیده میشود سرعت فوق با سرعت انتشار موج طولی (u_c) تفاوت دارد.

انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

- سرعت حرکت ذرات میله

در این رابطه باید توجه کرد که:

▪ سرعت حرکت ذرات میله (u) تابع شدت تنش اعمال شده (s_x) است ولی سرعت انتشار موج طولی (u_c) تنها به خصوصیات ماده تشکیل دهنده میله بستگی دارد.

▪ سرعت حرکت موج طولی و سرعت حرکت ذرات میله در امواج فشاری هم جهت، و در امواج کششی در جهت عکس همدیگرند.

انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی - انعکاس موج از انتهای میله

ا در صورتیکه در یک میله یک موج فشاری از یک انتها در جهت مثبت محور طولی، و موج دیگری از انتهای دیگر با همان اندازه ولی کششی در جهت منفی محور طولی حرکت کنند، زمانیکه دو موج در وسط میله بهم می رسند، تنش فشاری از موج فشاری و تنش کششی از موج کششی همدیگر را خنثی کرده و تنش حاصل در محل برخورد دو موج صفر خواهد شد.

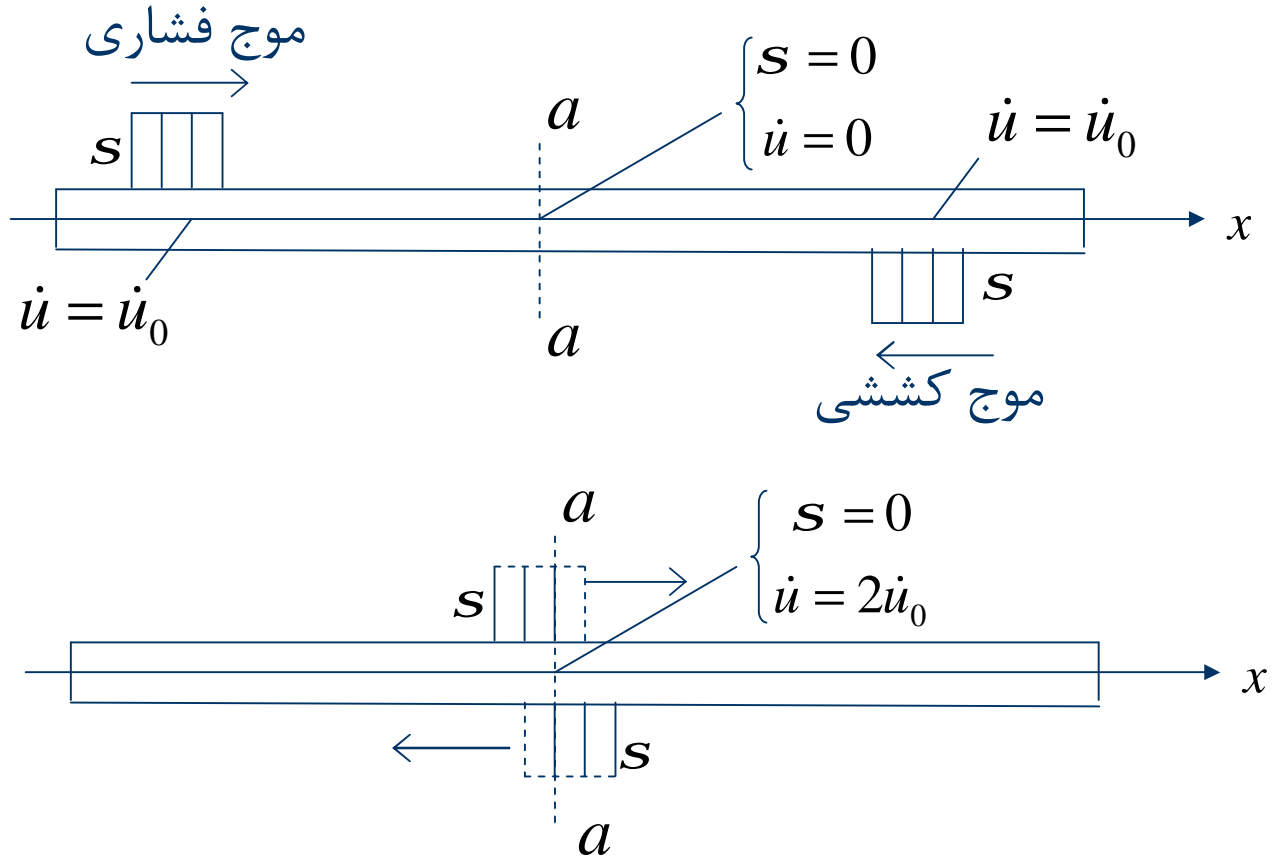
ا در اینحال بدلیل هم جهت بودن حرکت ذرات ناشی از این دو موج، سرعت حرکت ذرات در محل برخورد دو موج دو برابر سرعت ذرات ناشی از هر یک از موج ها خواهد بود (چون حرکت ذرات در موج فشاری هم جهت، و در موج کششی در جهت عکس انتشار است).

ا پس از گذشتن دو موج از کنار هم، تنش و سرعت ذرات در وسط میله مجددا برابر صفر خواهد شد.

ا وضعیت تنش و سرعت در وسط میله مانند انتهای آزاد یک میله خواهد بود. بنابراین می توان گفت که زمانیکه موج فشاری به انتهای آزاد یک میله می رسد، بصورت یک موج کششی منعکس می شود.

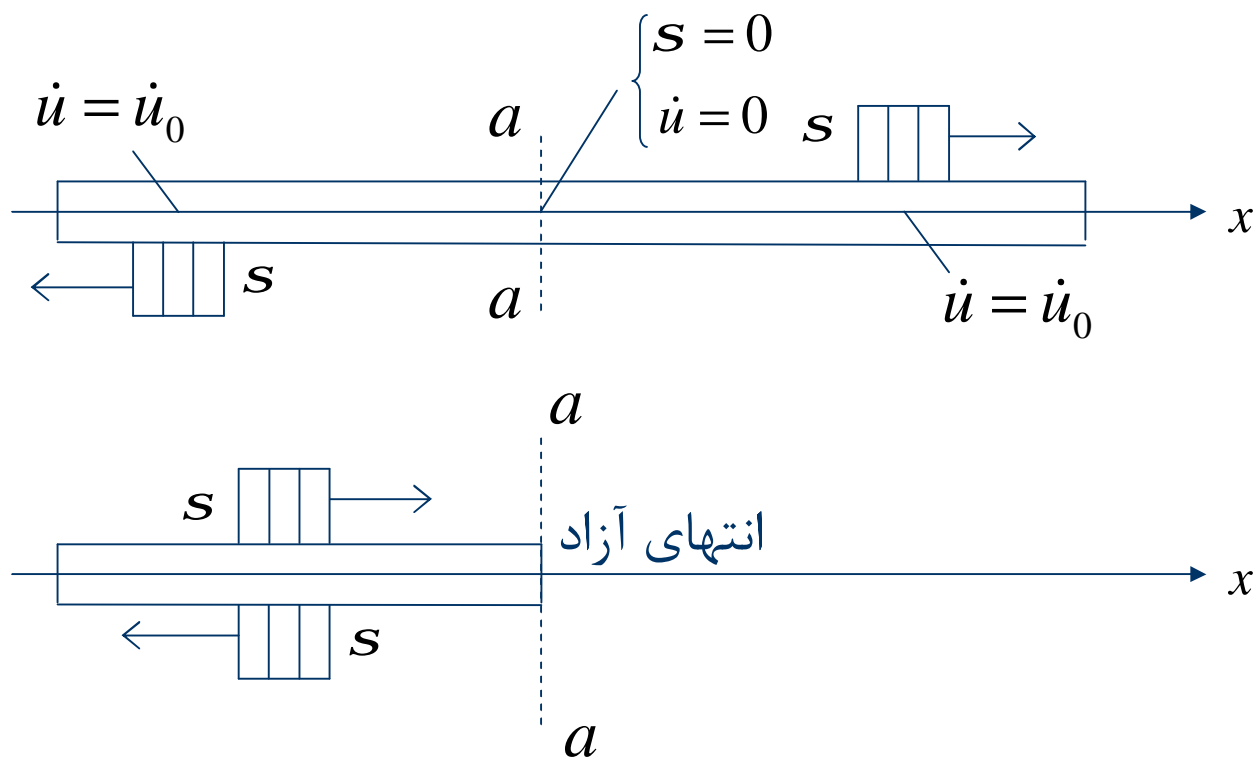
انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

- انعکاس موج از انتهای میله



انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

- انعکاس موج از انتهای میله

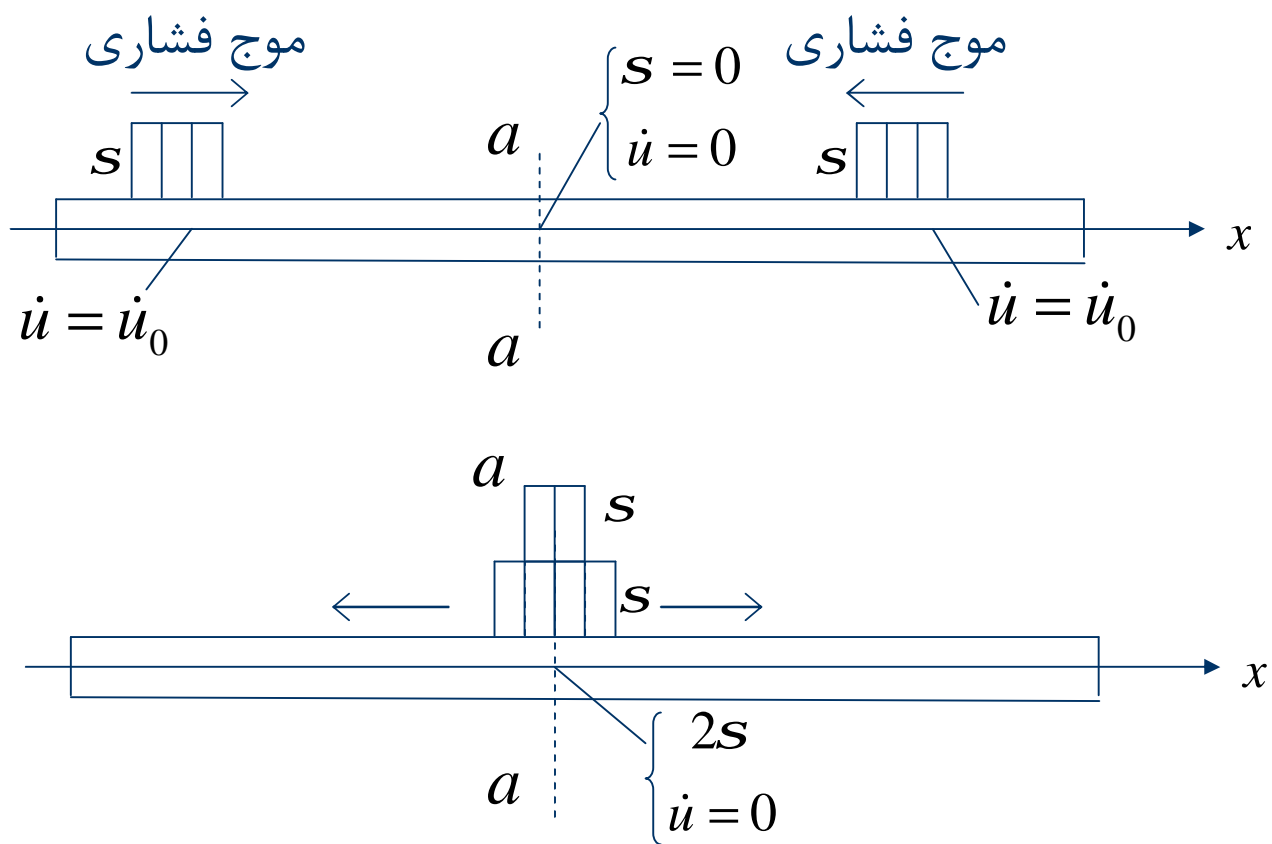


انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی - انعکاس موج از انتهای میله

- | در صورتیکه در یک میله دو موج فشاری از دو انتها بطرف هم حرکت کنند، در محل رسیدن دو موج بهم، تنش دو برابر و سرعت حرکت ذرات صفر خواهد شد.
- | پس از گذشتن دو موج از کنار هم، تنش و سرعت ذرات در وسط میله مجدداً برابر صفر خواهد شد.
- | وضعیت تنش و سرعت در وسط میله مانند انتهای گیردار یک میله خواهد بود.
- | بنابراین می توان گفت که زمانیکه موج فشاری به انتهای گیردار یک میله می رسد، بصورت یک موج فشاری با همان اندازه و شکل منعکس می شود. در اینحال تنش در انتهای میله دوبرابر و جابجائی صفر خواهد بود.

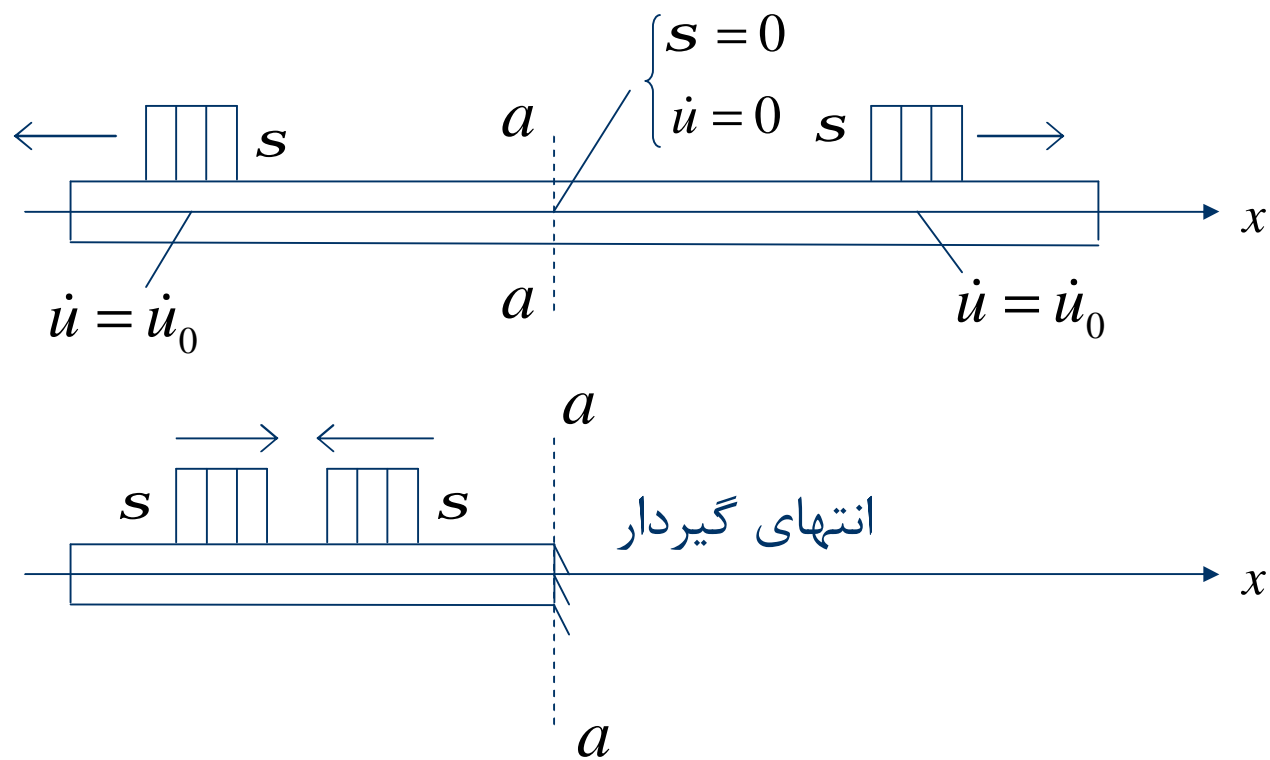
انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

- انعکاس موج از انتهای میله



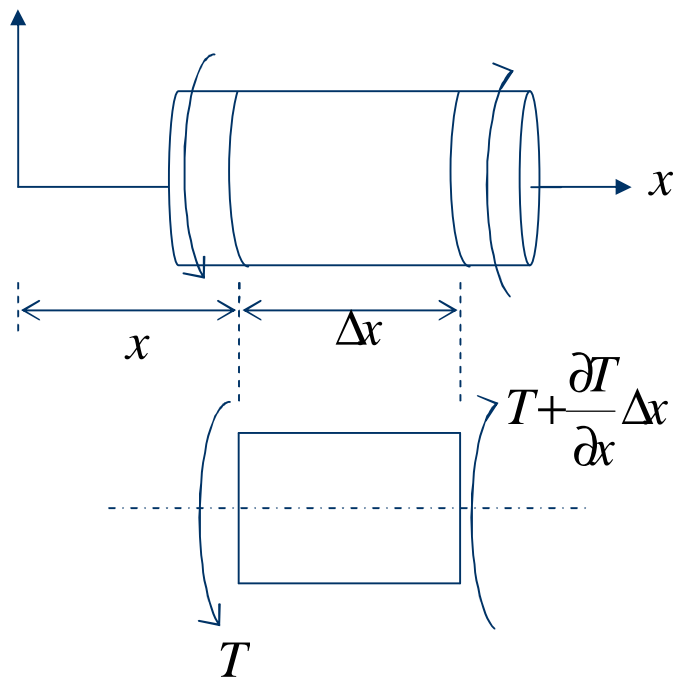
انتشار امواج طولی در میله ارتجاعی

- انعکاس موج از انتهای میله



انتشار امواج پیچشی در میله ارتجاعی

برای میله ارتجاعی نشان داده شده در شکل، رابطه تعادل دینامیکی را می توان بصورت زیر برای مقطعی با ممان اینرسی قطبی J و طول Δx از میله بنویسیم:



$$-T + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \right) = rJ\Delta x \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

که در آن r جرم حجمی میله و t زمان است.

زاویه دوران مقطع نیز در فاصله Δx به اندازه $\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x$ تغییر خواهد کرد. از طرفی داریم:

$$T = JG \frac{\partial q}{\partial x}$$

انتشار امواج پیچشی در میله ارتجاعی

با جایگزین کردن رابطه قبل در معادله تعادل دینامیکی به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{G}{r} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

و یا:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = u_s^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

که در آن: $u_s = \sqrt{\frac{G}{r}}$ سرعت حرکت موج پیچشی در میله است.

دیده میشود که روابط فوق با روابط بدست آمده برای حرکت موج فشاری مشابهند.

ارتعاش طولی میله های کوتاه (Longitudinal Vibration of short bars)

تاکنون ارتعاش طولی میله های با طول نامحدود را بررسی کردیم. ولی در عمل میله ها معمولا دارای طول محدود هستند. بنابراین در اینجا ارتعاش طولی میله های با طول محدود را بررسی می کنیم. از نظر شرایط انتهائی، میله های با طول محدود ممکن است دارای یکی از سه حالت زیر باشند:

- ▮ دو انتهای میله آزاد باشد (free-free)
- ▮ دو انتهای میله گیردار باشد (fixed-fixed)
- ▮ یک انتهای میله آزاد و انتهای دیگر گیردار باشد (fixed-free)

ارتعاش طولی میله های کوتاه (Longitudinal Vibration of short bars)

حل معادله دیفرانسیل مربوط به ارتعاش طولی یک میله کوتاه که در مود طبیعی ارتعاش می کند بصورت رابطه کلی زیر نوشته میشود:

$$u(x, t) = U(x)(A_1 \sin W_n t + A_2 \cos W_n t)$$

که در آن A_1 و A_2 مقادیر ثابت، W_n فرکانس دورانی طبیعی و $U(x)$ دامنه جابجائی در امتداد طول میله است که مستقل از زمان می باشد.

برای ارتعاش طولی میله اگر رابطه فوق را در معادله: $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = u_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{r}{E} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

ارتعاش طولی میله های کوتاه (Longitudinal Vibration of short bars)

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{r}{E} (w_n^2) U(x) = 0$$

و یا:

رابطه فوق دارای جواب زیر است:

$$U(x) = B_1 \sin\left(\frac{w_n x}{u_c}\right) + B_2 \cos\left(\frac{w_n x}{u_c}\right)$$

که در آن B_1 و B_2 مقادیر ثابت هستند که با اعمال شرایط انتهائی میله تعیین می شوند.

اکنون برای شرایط انتهائی مختلف مقادیر ثابت فوق و در نتیجه معادله ارتعاش را تعیین می کنیم

ارتعاش طولی میله های کوتاه (Longitudinal Vibration of short bars)

شرایط انتهائی آزاد-آزاد

در اینحالت تنش ها، و بنابراین کرنشها در دو انتها صفر بوده و داریم:
| در $x = 0$ و $x = L$: $dU(x) / dx = 0$

برای بدست آوردن کرنش از رابطه جابجائی باید از این رابطه مشتق بگیریم.

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{B_1 W_n}{u_c} \cos\left(\frac{W_n x}{u_c}\right) - \frac{B_2 W_n}{u_c} \sin\left(\frac{W_n x}{u_c}\right)$$

ارتعاش طولی میله های کوتاه (Longitudinal Vibration of short bars)

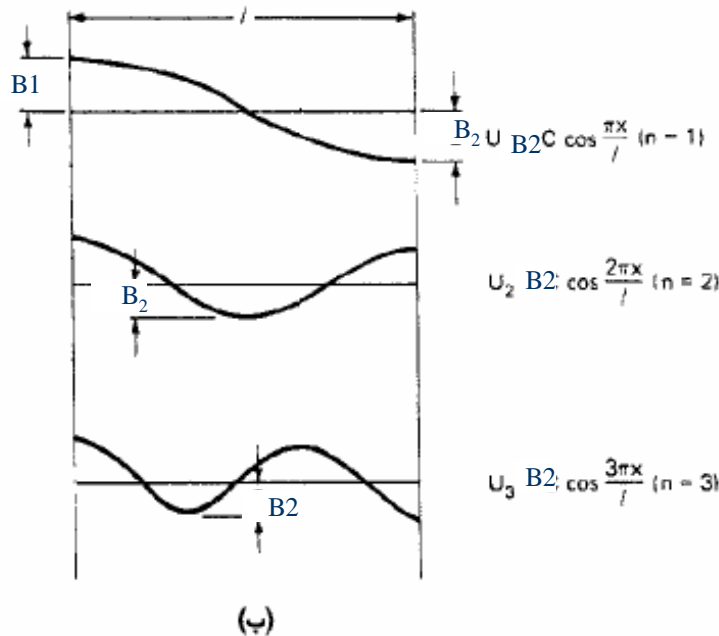
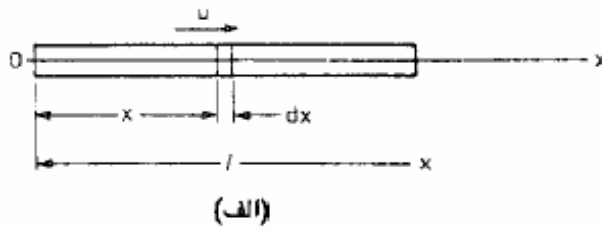
$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{B_1 w_n}{u_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0 \quad \text{در } x = 0$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{B_2 w_n}{u_c} \sin\left(\frac{w_n L}{u_c}\right) = 0 \quad \text{در } x = L$$

چون B_2 نمی تواند صفر باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{w_n L}{u_c} = np \quad \Rightarrow \quad w_n = \frac{np u_c}{L}$$

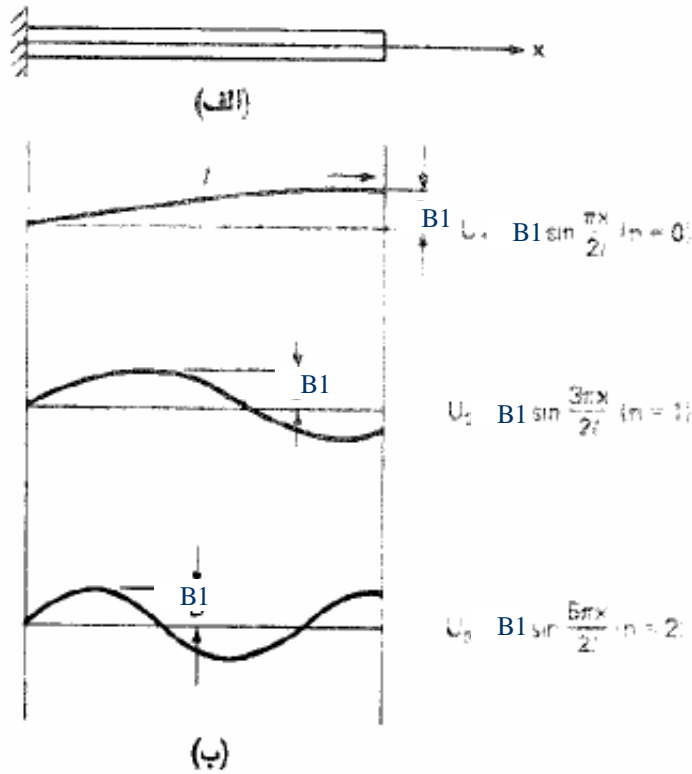
ارتعاش طولی میله های کوتاه (Longitudinal Vibration of short bars)



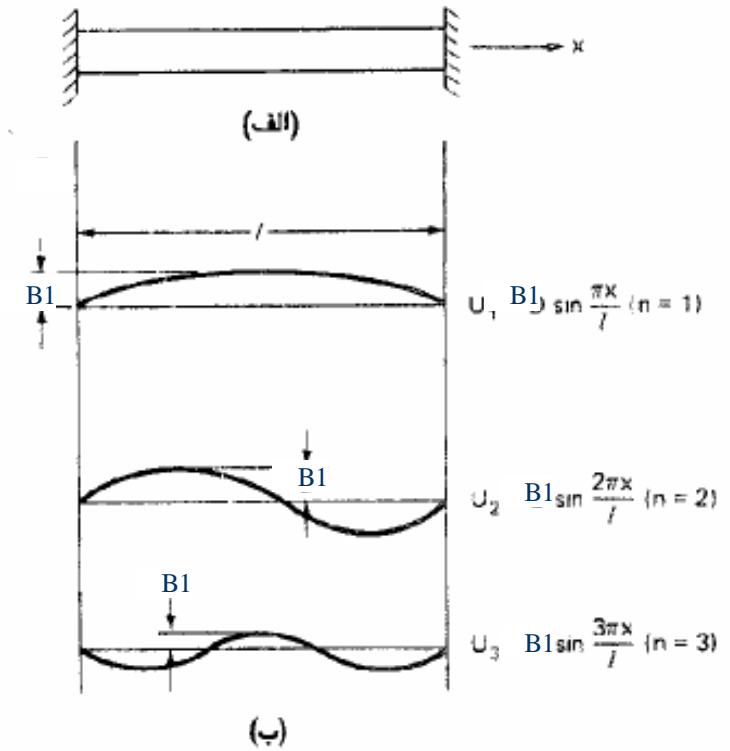
بنابراین برای میله با دو انتهای آزاد حالت‌های ارتعاش برای مقادیر $n=1$ تا $n=3$ بشکل روبرو خواهند بود.

بهمین شکل با اعمال شرایط مرزی مربوط به میله با دو انتهای گیردار، یا یک انتها گیردار و یک انتها آزاد می‌توان حالت‌های ارتعاش برای آنها را نیز بدست آورد.

ارتعاش طولی میله های کوتاه (Longitudinal Vibration of short bars)



حالت‌های ارتعاش یک انتها گیردار و یک انتها آزاد



حالت‌های ارتعاش میله با دو انتهای گیردار

انتشار موج در محیط الاستیک نامحدود (Stress waves in an infinite elastic medium)

در گذشته روابط تنش و کرنش را برای یک نقطه از محیط الاستیک خطی دیدیم. سپس روابط تعادل دینامیکی را برای جسم در سه امتداد محورهای مختصات نوشتیم.

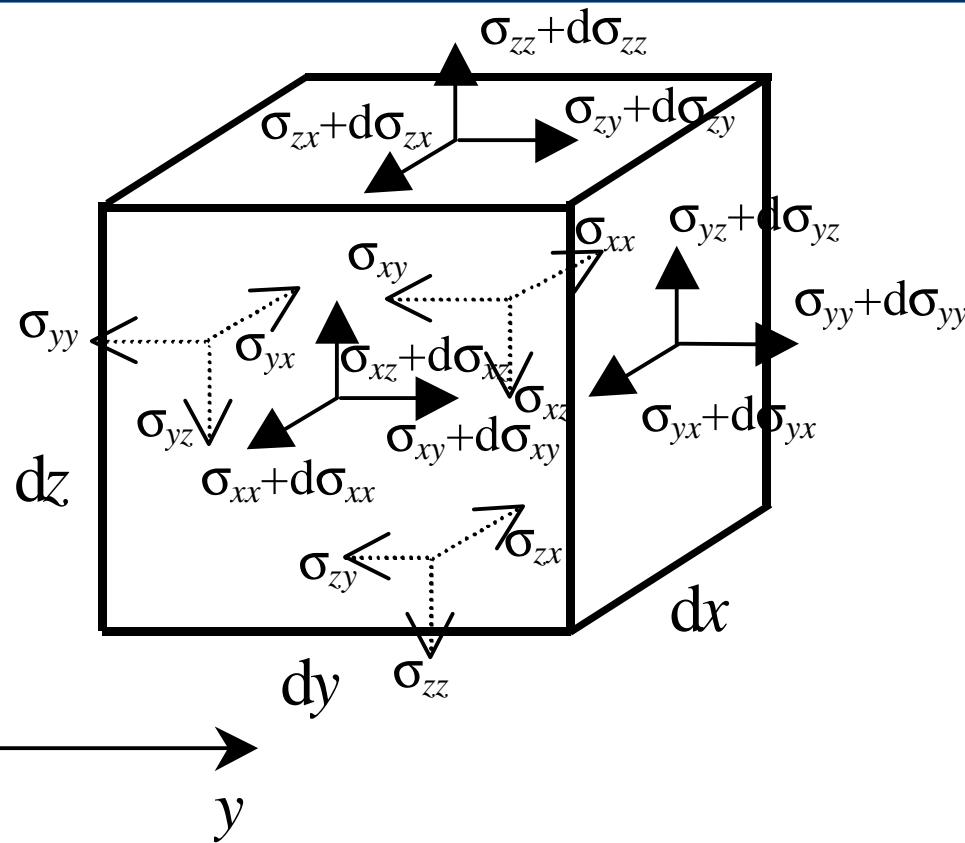
در اینجا می خواهیم با بررسی تعادل دینامیکی یک جزء با ابعاد محدود ولی خیلی کوچک روابط تعادل دینامیکی و بنابراین معادله حرکت را بدست آورده و سپس با جایگزینی متغیرها با استفاده از روابط رفتاری محیط های الاستیک خطی، معادله انتشار موج در این محیط را بدست آوریم.

روابط تعادل دینامیکی

برای یک مکعب با ابعاد:

dx ، dy و dz

وضعیت تنش ها مانند آنچه در شکل نشان داده شده است خواهد بود.



روابط تعادل دینامیکی (ادامه)

در صورتیکه رابطه تعادل نیروها در امتداد محور x ها را بنویسیم خواهیم داشت:

$$(s_{xx} + ds_{xx})dydz - s_{xx}dydz + (s_{yx} + ds_{yx})dxdz - s_{yx}dxdz + (s_{zx} + ds_{zx})dxdy - s_{zx}dxdy + \underbrace{f_x}_{\text{نیروی خارجی}} = \underbrace{r\ddot{u}_x}_{\text{نیروی اینرسی}}dxdydz$$

$$ds_{xx} = \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} dx,$$

$$ds_{yx} = \frac{\partial s_{yx}}{\partial y} dy,$$

$$ds_{zx} = \frac{\partial s_{zx}}{\partial z} dz$$

تغییر تنش ها در فواصل dx ، dy و dz عبارتست از:

روابط تعادل دینامیکی (ادامه)

بنابر این رابطه تعادل دینامیکی در امتداد X بصورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} + f_x = r\ddot{u}$$

در دو امتداد دیگر نیز روابط چنین خواهند شد:

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} + f_y = r\ddot{v}$$

$$\frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + f_z = r\ddot{w}$$

روابط فوق همان روابطی هستند که در گذشته دیدیم

بدست آوردن معادله حرکت امواج در محیط الاستیک خطی - امواج فشاری (Compression waves)

در صورتیکه نیروی خارجی نداشته باشیم و شتاب را بر حسب جابجائی بنویسیم رابطه تعادل دینامیکی در امتداد X بصورت در خواهد آمد:

$$\frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial s_{zx}}{\partial z} = r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

تنش ها در سمت چپ رابطه فوق را می توان ابتدا با استفاده از روابط تنش- کرنش و سپس کرنش-جابجائی بر حسب جابجائی بنویسیم تا متغیرها شبیه متغیر جابجائی در سمت راست رابطه شود.

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (I \bar{e} + 2G e_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G g_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G g_{xz})$$

بدست آوردن معادله حرکت امواج در محیط الاستیک خطی - امواج فشاری (Compression waves)

و با جایگزینی جابجائی ها بجای کرنش ها خواهیم داشت:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \bar{\varepsilon} + 2G\varepsilon_x) + G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \text{ویا:}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{از طرفی داشتیم:}$$

و بنابراین:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \bar{e}}{\partial x}$$

بدست آوردن معادله حرکت امواج در محیط الاستیک خطی - امواج فشاری (Compression waves)

لذا معادله حرکت بصورت زیر در می آید:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + G \nabla^2 u$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

که در آن اپراتور لاپلاسین ∇^2 چنین
تعریف می شود:

! بهمین شکل برای امتدادهای دیگر خواهیم داشت:

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (l + G) \frac{\partial \bar{e}}{\partial y} + G \nabla^2 u$$

$$r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (l + G) \frac{\partial \bar{e}}{\partial z} + G \nabla^2 w$$

بدست آوردن معادله حرکت امواج در محیط الاستیک خطی - امواج فشاری (Compression waves)

حال در صورتیکه از معادلات حرکت در امتدادهای x ، y و z بترتیب نسبت به مختصات x ، y و z مشتق گرفته و روابط حاصل را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = (I + G) \left(\frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial z^2} \right) + G \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

ویا:

$$r \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial t^2} = (I + G) (\nabla^2 \bar{e}) + G (\nabla^2 \bar{e}) = (I + 2G) \nabla^2 \bar{e}$$

بدست آوردن معادله حرکت امواج در محیط الاستیک خطی - امواج فشاری (Compression waves)

که آنرا می توان بصورت روبرو نوشت:

$$\frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial t^2} = \frac{I + 2G}{r} \nabla^2 \bar{e} = u_p^2 \nabla^2 \bar{e}$$

شکل رابطه فوق نظیر شکل رابطه ایست که برای حرکت موج فشاری در میله بدست آوردیم. در رابطه بالا:

$$u_p = \sqrt{\frac{I + 2G}{r}}$$

ا کرنش \bar{e} کرنش حجمی است و u_p سرعت امواج اتساعی (Dilatational waves) است که به امواج اولیه (Primary waves) یا امواج P (P-waves) و یا امواج فشاری (Compressions waves) نیز معروفند.

بدست آوردن معادله حرکت امواج در محیط الاستیک خطی - امواج فشاری (Compression waves)

با توجه به آنکه برای حرکت موج فشاری در میله سرعت چنین بدست می آید:

$$u_c = \sqrt{\frac{E}{r}}$$

$$G = \frac{E}{2(1+n)} \quad I = \frac{nE}{(1+n)(1-2n)} \quad \text{و چون داریم:}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad \text{بنابراین:}$$

دیده میشود که سرعت حرکت امواج P بیشتر از سرعت حرکت امواج فشاری در میله است.

بدست آوردن معادله حرکت امواج در محیط الاستیک خطی - امواج برشی (Distortional waves or shear waves)

! در صورتیکه از معادلات حرکت بدست آمده برای امتدادهای y و z بترتیب نسبت به z و y مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = (I + G) \frac{\partial \bar{e}}{(\partial y)(\partial z)} + G \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = (I + G) \frac{\partial \bar{e}}{(\partial y)(\partial z)} + G \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial y}$$

در صورتیکه دو رابطه فوق را از هم کم کنیم خواهیم داشت:

$$r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

بدست آوردن معادله حرکت امواج در محیط الاستیک خطی - امواج برشی (Distortional waves or shear waves)

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 2v_x \quad \text{اما میدانیم:}$$

که در آن $2v_x$ چرخش نسبت به امتداد x است. بنابراین:

$$r \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = G \nabla^2 v_x$$

بنابراین برای امتداد x می توانیم بنویسیم:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = \frac{G}{r} \nabla^2 v_x = u_s^2 \nabla^2 v_x$$

که در آن $u_s = \sqrt{\frac{G}{r}}$ سرعت انتشار امواج برشی و معادله فوق معادله حرکت این امواج است

بدست آوردن معادله حرکت امواج در محیط الاستیک خطی - امواج برشی (Distortional waves or shear waves)

می توان دید که این سرعت با سرعت حرکت امواج برشی در میله یکسان است. برای دو امتداد دیگر نیز بطریق مشابهی می توان روابط زیر را بدست آورد:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_y}{\partial t^2} = u_s^2 \nabla^2 \mathbf{v}_y$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_z}{\partial t^2} = u_s^2 \nabla^2 \mathbf{v}_z$$

حرکت امواج در محیط الاستیک

- ملاحظات عمومی

ارتعاش در یک محیط ارتجاعی نامحدود باعث انتشار دو نوع موج میشود:

- موج فشاری یا اولیه یا ابتدائی یا اتساعی (Compression or Primary or dilatational wave)

- موج برشی یا ثانوی یا پیچشی یا با حجم مساوی (shear or secondary or distortional or constant volume wave)

این دو موج باعث دو نوع متفاوت حرکت در جسم ارتجاعی شده و با سرعت های متفاوتی در جسم منتشر میشوند

حرکت امواج در محیط الاستیک - ملاحظات عمومی

می توان نشان داد که سرعت حرکت ذرات جسم در هنگام گسترش موج فشاری در یک میله و در یک جسم نامحدود یکی است، ولی سرعت انتشار این موج در این دو محیط متفاوت بوده و در محیط بی نهایت بیشتر است

علت سرعت بیشتر حرکت موج در محیط بی نهایت اینست که در این محیط امکان حرکت جانبی برای ذرات مانند آنچه در میله ممکن است وجود ندارد

سرعت حرکت موج فشاری در محیط نامحدود را می توان بر حسب مدول حجمی (Bulk Modulus) که طبق رابطه زیر تعریف میشود نیز بیان کرد:

$$E_b = \frac{(1-n)E}{(1+n)(1-2n)}$$

حرکت امواج در محیط الاستیک - ملاحظات عمومی

! دیدیم سرعت موج فشاری در محیط نامحدود را می توان بشکل زیر نیز بیان کرد:

$$u_p = \sqrt{\frac{I + 2G}{r}} = \sqrt{\frac{(1-n)E}{(1+n)(1-2n)r}}$$

با توجه به تعریف مدول حجمی E_b که در قبل دیدیم می توان سرعت حرکت موج فشاری را چنین نیز نوشت:

$$u_p^2 = \frac{E_b}{r}$$

! در صورتیکه نسبت پواسون صفر باشد ($n = 0$) داریم ($E_b = E$) و بنابراین سرعت حرکت موج فشاری در محیط نامحدود (u_p) و در میله (u_c) با هم برابرند. در غیر اینصورت، برای $n > 0$ همیشه داریم:

$$u_p > u_c$$

حرکت امواج در محیط الاستیک

- ملاحظات عمومی
- مقایسه سرعت موج فشاری و برشی

$$u_p = \sqrt{\frac{(1-n)E}{(1+n)(1-2n)r}}$$

با توجه به اینکه:

$$u_s = \sqrt{\frac{G}{r}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+n)r}}$$

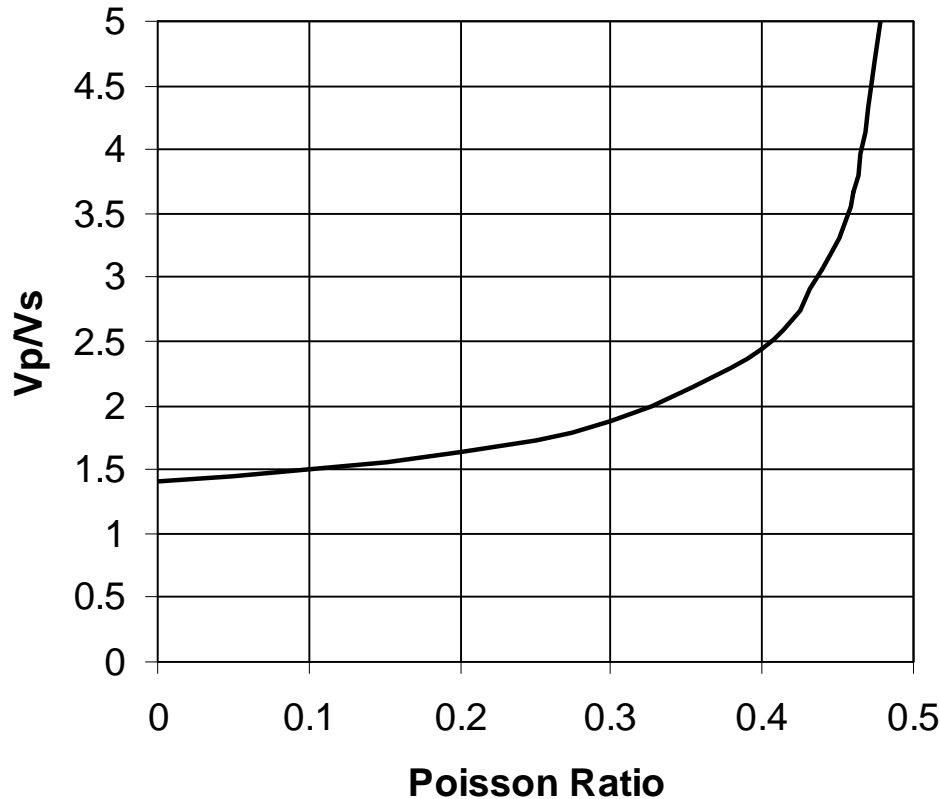
و سرعت موج برشی عبارت است از:

$$\frac{u_p}{u_s} = \sqrt{\frac{2(1-n)}{(1-2n)}}$$

می توان دید که نسبت سرعت موج فشاری به برشی عبارت است از:

حرکت امواج در محیط الاستیک

- ملاحظات عمومی
- مقایسه سرعت موج فشاری و برشی



! بررسی نسبت u_p / u_s نشان میدهد که این نسبت از 1.41 برای $n = 0$ تا بی نهایت برای $n = 0.5$ تغییر میکند.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- ملاحظات عمومی

- حرکت موج فشاری در خاکهای اشباع

| حرکت موج در خاک اشباع شامل حرکت موج از طریق اسکلت دانه ای خاک و همچنین از طریق آب بین دانه ها است. مطالعات (Biot, 1956) نشان داد که در اینحال دو موج فشاری و یک موج برشی در خاک اشباع منتشر میشود.

| امواج فشاری در خاک اشباع شامل امواج منتشر شده در بخش مایع (آب) یا (fluid waves) و امواج منتشر شده در اسکلت خاک (frame waves) می باشند. البته حرکت این دو موج بر هم تاثیر می گذارد.

| چون آب سختی برشی ندارد، موج برشی تنها از طریق اسکلت خاک منتشر شده و تنها به خواص خاک ارتباط دارد

حرکت امواج در محیط الاستیک

- ملاحظات عمومی
- حرکت موج فشاری در خاکهای اشباع

ا چون برای آب نسبت پواسون نزدیک به 0.5 است و برای این مقدار، سرعت حرکت موج فشاری بی نهایت است، این سرعت برای آب معمولاً خیلی بیشتر از خاک است. این امر میتواند تاثیر وجود آب را بر نتایج حاصل از اندازه گیری سرعت حرکت امواج در خاک نشان دهد.

ا سرعت واقعی حرکت موج فشاری در آب (u_w) را میتوان از رابطه زیر برآورد کرد:

$$u_w = \sqrt{\frac{B_w}{r_w}}$$

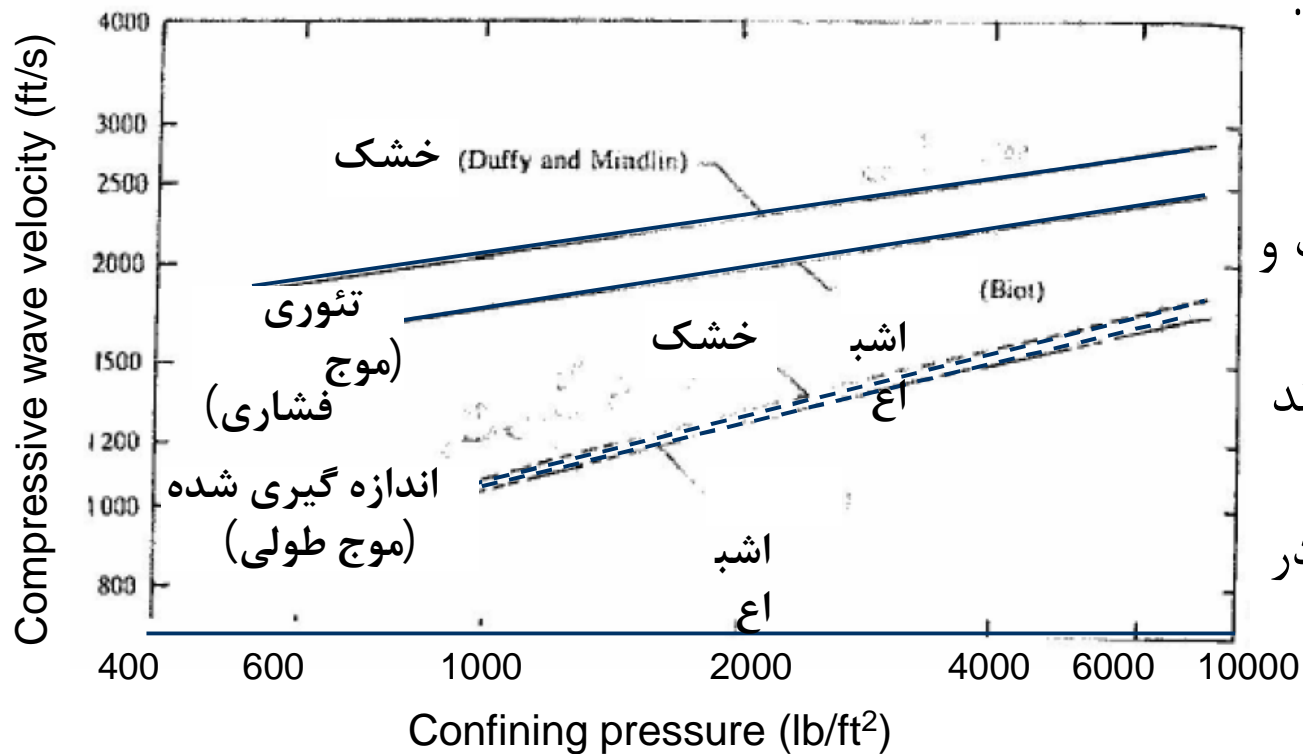
که در آن B_w و r_w بترتیب مدول حجمی و دانسیته آب می باشند. سرعت حرکت موج فشاری در آب معمولاً در حدود 4800 ft/s (1463 m/s) می باشد

حرکت امواج در محیط الاستیک

- ملاحظات عمومی

- حرکت موج فشاری در خاکهای اشباع

شکل زیر تغییرات سرعت حرکت موج فشاری و طولی (مانند میله) در اسکلت دانه های خاک را برای خاک خشک و اشباع، که با استفاده از تئوری و اندازه گیری بدست آمده است نشان میدهد.



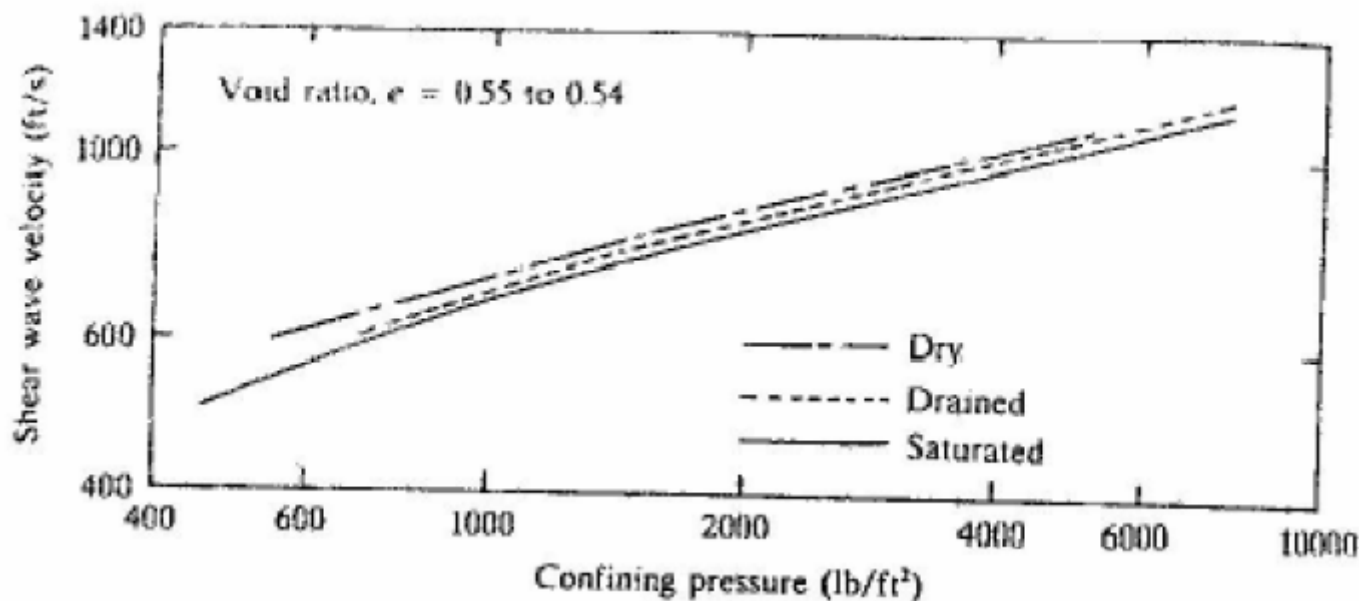
دیده میشود که سرعت حرکت در اسکلت خاک خشک و اشباع خیلی بهم نزدیک بوده و میتواند با استفاده از تفاوت جرم حجمی خاک در این دو حالت توجیه شود

حرکت امواج در محیط الاستیک

- ملاحظات عمومی

- حرکت موج برشی در خاکهای اشباع و غیر اشباع

شکل زیر تغییرات سرعت حرکت موج برشی با فشار محصور کننده را برای ماسه اتاوا در حالت خشک، زهکشی شده و اشباع نشان میدهد. دیده میشود که تاثیر وجود آب بر سرعت حرکت امواج برشی بسیار ناچیز است.



حرکت امواج در محیط الاستیک

- ملاحظات عمومی

حرکت امواج برشی و فشاری در خاکهای مختلف

جدول زیر سرعت حرکت امواج برشی و فشاری را در خاکهای مختلف نشان میدهد. دیده میشود که نسبت سرعت حرکت موج فشاری به برشی در خاکهای مختلف یکی نیست و به دانسیته و اندازه دانه ها بستگی دارد. قابل ذکر است که در محیط الاستیک خطی، برای ضریب پواسون 0.35 (مقدار تقریبی برای بعضی خاکها) این نسبت حدودا برابر 2.2 بدست می آید

Soil type	velocity, v_p (ft/s)	velocity, v_s (ft/s)
Fine sand	1,000	300–500
Dense sand	1,500	750
Gravel	2,500	600–750
Moist clay	4,000–4,500	500
Granite	13,000–18,000	7,000–11,000
Sandstone	4,500–14,000	2,000–7,000

حرکت امواج در محیط الاستیک - انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت

تا کنون دیدیم در یک محیط بی نهایت دو نوع موج فشاری و برشی منتشر میشوند. در محیط ارتجاعی نیمه بی نهایت، نوع دیگری از امواج بنام موج رالی در نزدیکی مرز منتشر می شود که در واقع سومین جواب معادله دیفرانسیل است.

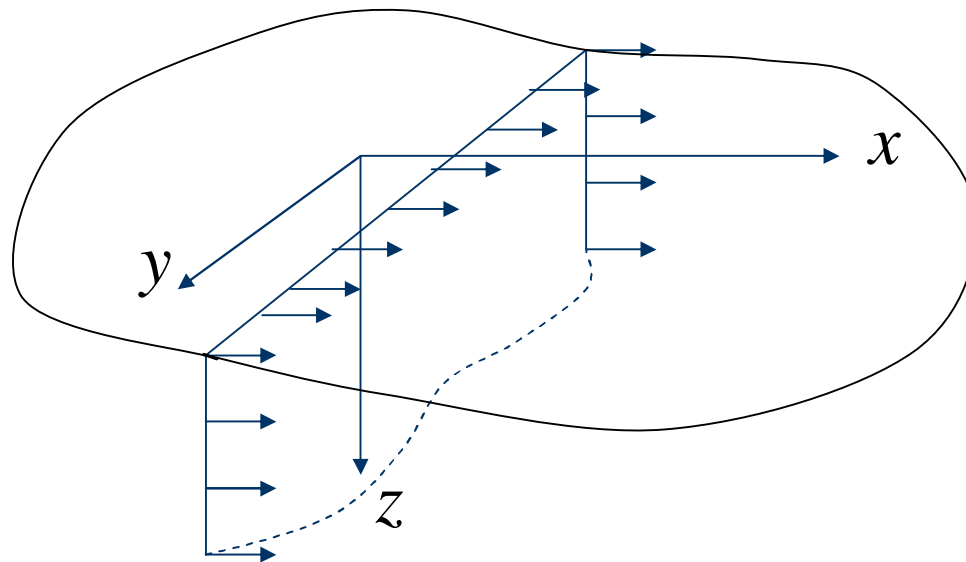
این موج اولین بار توسط Lord Rayleigh در سال 1885 مورد مطالعه قرار گرفت و در سالهای بعد توسط Lamb (1904) تشریح شد.

این موج در نزدیکی مرز منتشر شده و با عمق بسرعت مستهلک میشود.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت

برای بدست آوردن ویژگیهای این موج باید شرایط مرزی مربوط به سطح آزاد را بر معادلات دیفرانسیل حرکت اعمال نمود. یک محیط نیمه محدود (نیم فضا) با مختصات نشان داده شده در شکل را در نظر می گیریم. فرض می کنیم صفحه xy سطح مرزی، و محور z ها با جهت مثبت بسمت داخل محیط تعریف شده اند.



حرکت امواج در محیط الاستیک - انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت

در صورتیکه یک موج مسطح بر روی صفحه ای در جهت محور x ها حرکت کند، جابجائی ذرات در اثر حرکت موج در تمام نقاط در امتداد محور y یکسان بوده و این جابجائی مستقل از محور y خواهد بود.

مولفه های جابجائی در امتداد دو محور دیگر، یعنی u در امتداد محور x ها و w در امتداد محور z ها خواهد بود.

در صورتیکه جابجائی ها در امتداد x و z را به ترتیب با u و w نشان داده و دو تابع پتانسیل بنامهای f و y را بگونه ای تعریف کنیم که داشته

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \quad w = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{باشیم:}$$

حرکت امواج در محیط الاستیک - انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت

در اینصورت تغییر حجم (گرنش حجمی) و دوران برحسب این توابع پتانسیل بشکل زیر بدست خواهند آمد:

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} \right) + 0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$$

$$2\bar{w}_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \nabla^2 y$$

دیده میشود که توابع پتانسیل بگونه ای تعریف شده اند که یکی مربوط به اتساع محیط و دیگری مربوط به دوران آن می باشد.

حرکت امواج در محیط الاستیک - انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت

اکنون در صورتیکه مقادیر بدست آمده برای کرنش حجمی و جابجائی را بر حسب توابع پتانسیل در رابطه کلی حرکت که قبلاً بدست آوردیم (رابطه زیر) قرار دهیم:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + G \nabla^2 u$$

و پس از انجام مقاداری عملیات جبری شرایط مرزی زیر را اعمال کنیم:

$$s_z = 0 \quad t_{zx} = 0 \quad t_{zy} = 0 \quad \text{در } z = 0$$

به رابطه ای برای نسبت سرعت امواج رالی به امواج برشی خواهیم رسید.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- سرعت امواج رالی

این رابطه بشکل زیر است:

$$V^6 - 8V^4 - (16a^2 - 24)V^2 - 16(1 - a^2) = 0$$

$$V = \frac{u_r}{u_s}$$

که در آن:

$$a^2 = \frac{1 - 2n}{2 - 2n} = \left(\frac{u_s}{u_p} \right)^2$$

و u_r سرعت حرکت موج رالی در محیط است.

رابطه فوق یک معادله درجه سوم بر حسب V^2 است که با داشتن نسبت پواسون قابل حل خواهد بود.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- سرعت امواج رالی

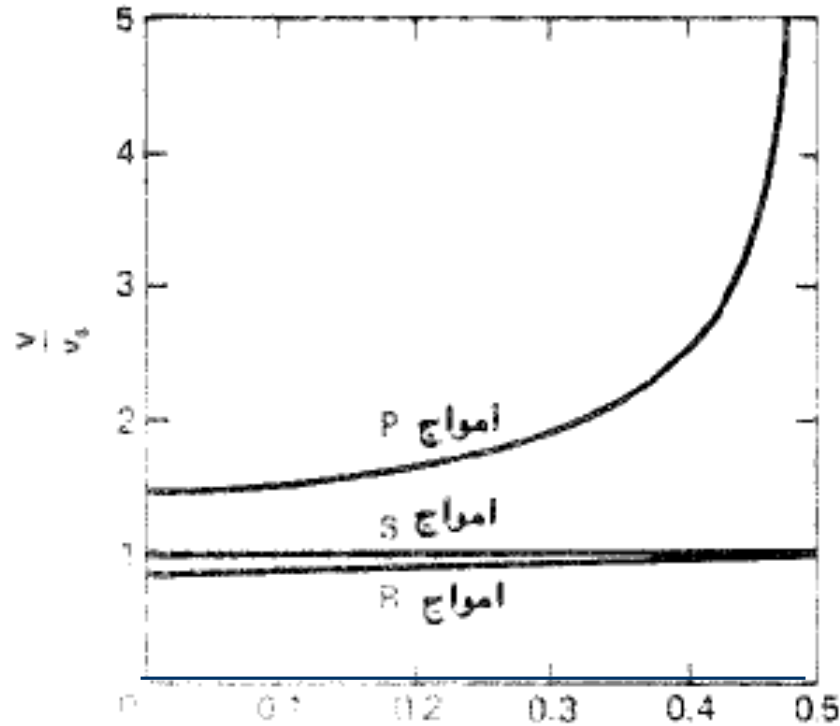
میتوان برای مقادیر مختلف نسبت پواسون نسبت سرعت موج رالی به موج برشی را بدست آورد. جدول زیر این نسبت را برای بعضی مقادیر n داده است.

n	$V = u_r / u_s$
0.25	0.919
0.29	0.926
0.33	0.933
0.4	0.943
0.5	0.955

دیده میشود که نسبت سرعت موج رالی به موج برشی مستقل از فرکانس بوده و همیشه از یک کمتر است. یعنی سرعت موج رالی نزدیک به موج برشی ولی کمی کمتر از آن بوده و بنابراین کمتر از موج فشاری است

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- سرعت امواج رالی



۱ شکل روبرو نسبت سرعت امواج فشاری (P) و رالی (R) به سرعت موج برشی (S) را برای مقادیر مختلف نسبت پواسون نشان میدهد.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- جابجائی های ناشی از انتشار موج رالی

ا در صورتیکه در توابع جابجائی u و w که قبلا بر حسب توابع پتانسیل نوشته شد، مقادیر توابع پتانسیل را که در طی مراحل قبلی بدست می آید قرار دهیم، پس از طی چند مرحله محاسباتی به روابط زیر برای تغییرات جابجائی های افقی و قائم u و w بر حسب عمق z می رسیم:

$$u(z) = -e^{-\sqrt{1-\alpha^2 V^2}(fz)} + \frac{2\sqrt{(1-\alpha^2 V^2)(1-V^2)}}{2-V^2} e^{-\sqrt{1-V^2}(fz)}$$

$$w(z) = -e^{-\sqrt{1-a^2 V^2}(fz)} + \frac{2}{2-V^2} e^{-\sqrt{1-V^2}(fz)}$$

در روابط فوق $f = w/u_r$ عدد موج است و میتوانیم آنرا بر حسب طول موج L بصورت $f = 2p/L$ بنویسیم.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- جابجائی های ناشی از انتشار موج رالی

دیده میشود که تغییرات جابجائی های افقی و قائم با عمق، تابع پارامترهای V و a بوده که این دو خود تابع نسبت پواسون می باشند. مثلا برای نسبت پواسون 0.25 میتوان این تغییرات را با استفاده از روابط زیر، که از جایگزینی نسبت پواسون فوق در روابط جابجائی بدست می آیند تعیین کرد:

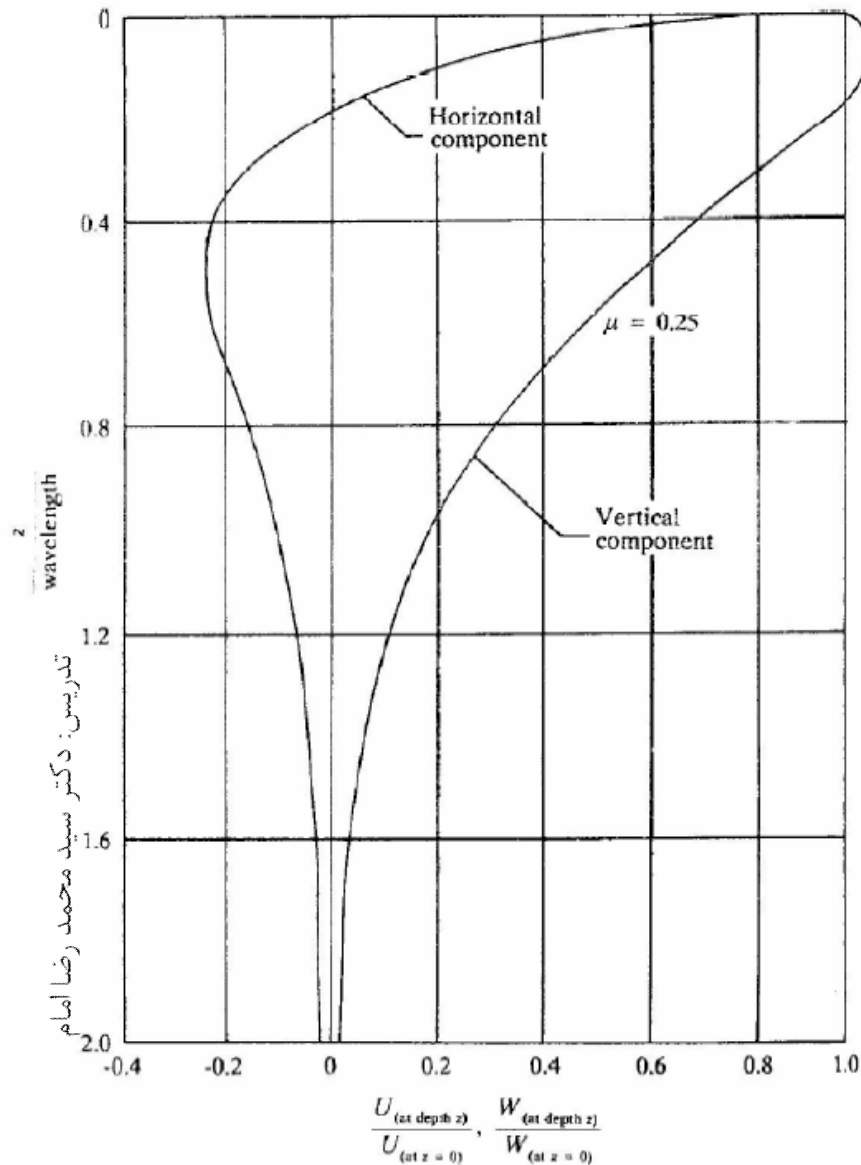
$$u(z)_{n=0.25} = -\exp(-0.8475 fz) + 0.5773 \exp(-0.3933 fz)$$

$$w(z)_{n=0.25} = -\exp(-0.8475 fz) + 1.7321 \exp(-0.3933 fz)$$

روابط فوق را میتوان برحسب عمق رسم کرده و تغییرات جابجائی های افقی و قائم، و بنابراین نحوه استهلاک موج رالی با عمق را تعیین کرد.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- جابجائی های ناشی از انتشار موج رالی



در شکل روبرو تغییرات نسبت جابجائی در عمق به جابجائی در سطح زمین برای جابجائی های افقی و قائم ناشی از موج رالی رسم شده است.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- جابجائی های ناشی از انتشار موج رالی

بررسی رابطه تغییرات و شکل مربوط به آن نشان میدهد که:

▮ جابجائی افقی سرعت با افزایش fz کم میشود. در عمق حدود $z/L = 0.2$ جابجائی افقی برابر صفر شده و بنابراین جابجائی موازی با سطح زمین وجود ندارد. چون داریم: $fz = (2p/L)z = 6.28 \times (z/L)$ این عمق متناظر است با مقدار $fz = 1.21$ که با جایگزینی آن در تابع مربوط به جابجائی افقی این تابع برابر با صفر میشود. در عمق های بیشتر جابجائی افقی غیر صفر بوده ولی جهت آن عکس میشود.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- جابجائی های ناشی از انتشار موج رالی

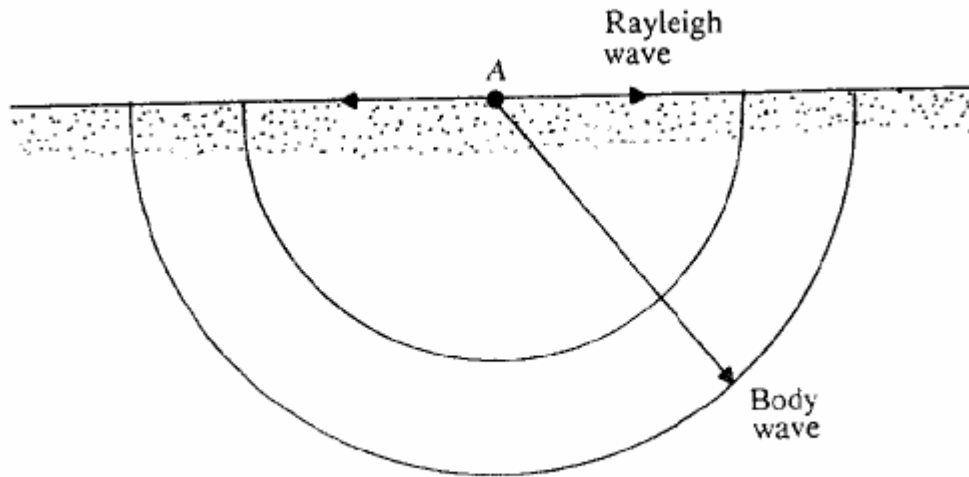
▮ جابجائی عمودی ابتدا با افزایش fz زیاد شده تا اینکه در $z/L = 0.076$ به مقدار حداکثر میرسد و سپس با افزایش عمق مقدار آن کاهش می یابد. با توجه به رابطه فوق نسبت z/L بالا معادل $fz = 0.4775$ می باشد.

▮ میتوان نشان داد که روابط بدست آمده برای جابجائی های افقی و قائم ناشی از موج رالی بگونه ایست که ذرات جابجا شده مسیری بیضی شکل با قطر بزرگتر در امتداد عمود بر سطح زمین را طی می کنند.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- استهلاک امواج در محیط نیمه بی نهایت

در صورتیکه موجی در سطح محیط الاستیک نیمه بی نهایت ایجاد شود، امواج حجمی بصورت شعاعی و بشکل نیمکره مانند شکل زیر از محل ایجاد موج به دیگر نقاط جسم منتشر میشوند.

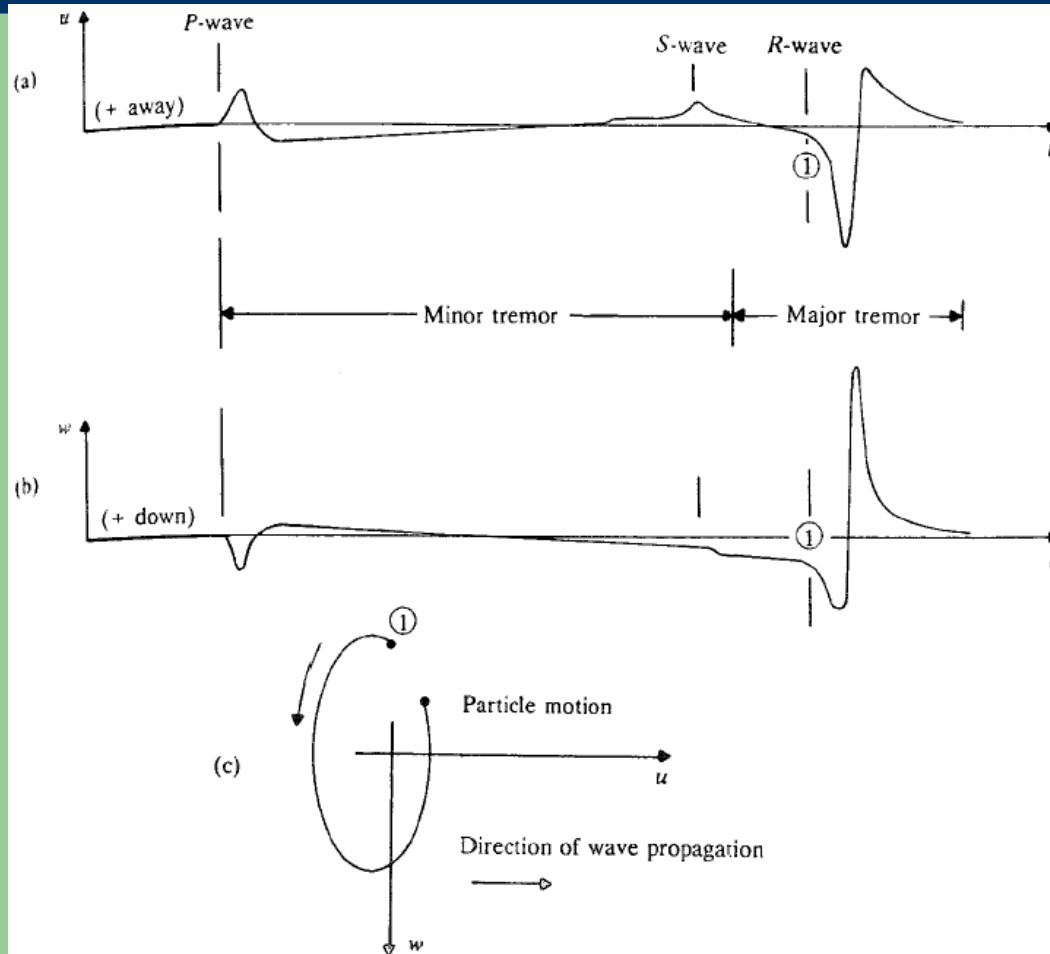


Note: Point A is the source of disturbance

این در حالیست که امواج رالی از محل ایجاد موج بصورت جبهه ای سیلندری شکل منتشر میشوند.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- استهلاک امواج در محیط نیمه بی نهایت



! در فاصله ای از محل
ایجاد موج، جابجائی زمین
بصورت نشان داده شده در
شکل روبروست. امواج
فشاری بدلیل سرعت
بیشتر زودتر به یک نقطه
میرسند و پس از آنها امواج
برشی و سپس رالی
میرسند.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- استهلاک امواج در محیط نیمه بی نهایت

همانگونه که گفته شد و در شکل دیده میشود جابجائی زمین در اثر حرکت موج رالی باعث ایجاد حرکتی بصورت بیضی شده که با توجه به نحوه حرکت ذرات به بیضی جمع شونده یا (Retrograde Ellipse) معروف است.

دامنه جابجائی ها بتدریج با افزایش فاصله کم میشود. انرژی امواج حجمی (body waves) با توجه به نحوه انتشار کروی آنها به نسبت عکس مربع فاصله کاهش می یابد یعنی داریم:

$$E \propto \frac{1}{r^2}$$

که در آن E انرژی در واحد سطح و r فاصله است.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- استهلاک امواج در محیط نیمه بی نهایت

دامنه ارتعاش حجمی نیز با مجذور انرژی متناسب است و بنابراین:

$$\text{دامنه} \propto \sqrt{E} \propto \sqrt{\frac{1}{r^2}} \propto \frac{1}{r}$$

البته تنها در سطح محیط نیمه بی نهایت، دامنه ارتعاشات حجمی با مربع فاصله رابطه عکس دارد یعنی داریم:

$$\text{دامنه} \propto \frac{1}{r^2}$$

به همین شکل می توان نشان داد که دامنه امواج رالی با $1/\sqrt{r}$ متناسب است و بنابراین این امواج کندتر از امواج حجمی مستهلک میشوند

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- استهلاک امواج در محیط نیمه بی نهایت

کاهش دامنه امواج در اثر گسترش آنها به میرائی هندسی (geometric damping) امواج معروف است. علاوه بر آن، امواج ممکن است در اثر جذب انرژی آنها بوسیله مواد نیز مستهلک شوند. به این نوع استهلاک انرژی، استهلاک ناشی از مواد (Material Damping) می گویند. بنابراین با در نظر گرفتن این دو نوع استهلاک، دامنه ارتعاش موج رالی طبق رابطه زیر مستهلک میشود:

$$\overline{w}_n = \overline{w}_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_n}} \exp[-b(r_n - r_1)]$$

که در آن \overline{w}_1 و \overline{w}_n دامنه ارتعاشات بترتیب در فواصل r_1 و r_n بوده و b ضریب جذب (absorption coefficient) است که به نوع خاک بستگی دارد.

حرکت امواج در محیط الاستیک

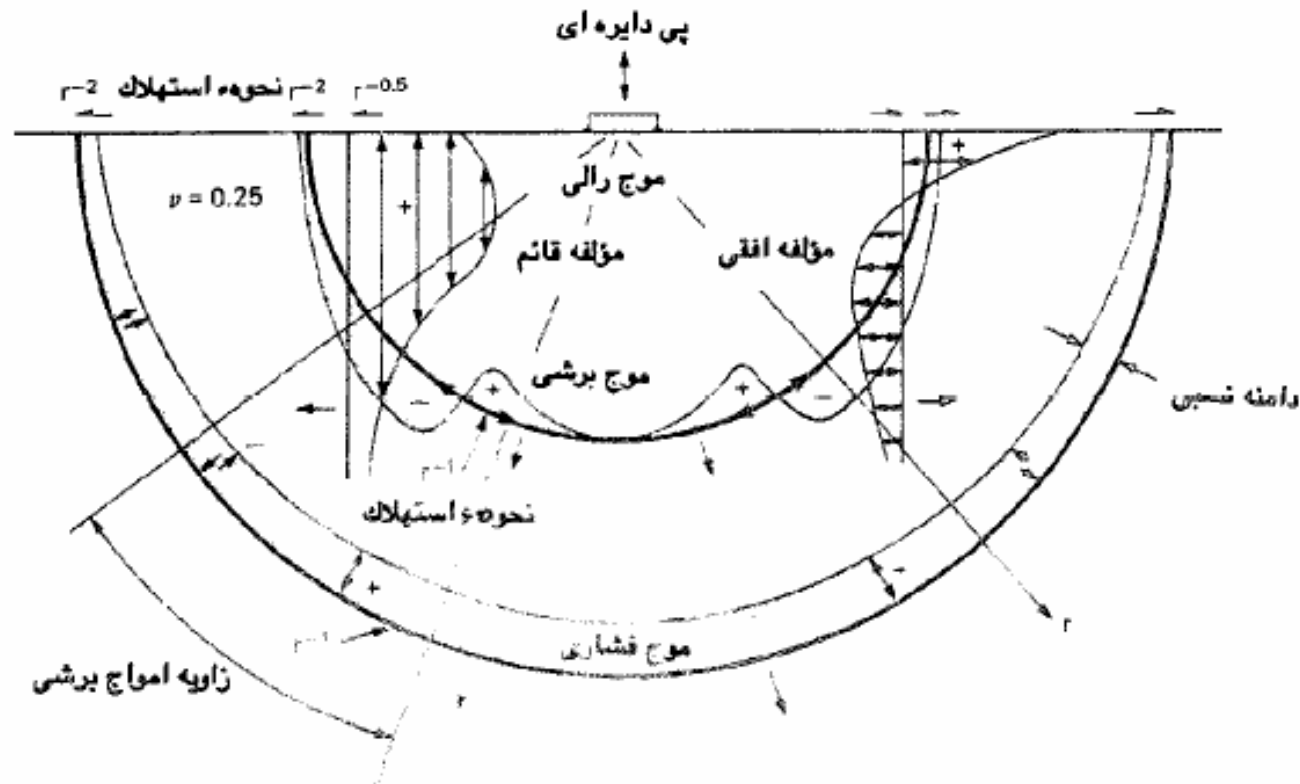
- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- استهلاک امواج در محیط نیمه بی نهایت

امواج ایجاد شده در اثر ارتعاش یک پی سطحی نیز نظیر امواج زلزله است. در اثر این ارتعاشات، امواج حجمی بصورت نیمکره از منبع ایجاد موج منتشر میشوند. موج فشاری جابجائی هایی از نوع فشاری-کششی در امتداد انتشار موج ایجاد میکند در صورتیکه موج برشی جابجائی های عرضی عمود بر امتداد انتشار بوجود می آورد. امواج رالی نیز تغییر مکانهایی بشکل بیضی جمع شونده در نزدیکی مرز نیم فضا بوجود می آورند.

با توجه به شکل بعد دیده میشود که دامنه ارتعاش در امواج حجمی به زاویه شیب نسبت به سطح افق بستگی دارد. در امواج رالی نیز دامنه ارتعاش در امتداد افقی و قائم و نحوه استهلاک آنها با عمق تفاوت دارد.

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
 - استهلاك امواج در محیط نیمه بی نهایت



نحوه انتشار امواج ناشی از ارتعاش پی سطحی

حرکت امواج در محیط الاستیک

- انتشار موج در محیط نیمه بی نهایت
- استهلاک امواج در محیط نیمه بی نهایت

بررسی های Miller و Perry در سالهای 1954 و 1955 نشان داد که برای ارتعاش قائم یک منبع دایره ای شکل در سطح یک محیط همگن، ایزوتروپ، الاستیک و نیمه بی نهایت، از کل انرژی منتقل شده از منبع، 67% بصورت امواج سطحی رالی، 26% بصورت امواج برشی و 7% بصورت امواج فشاری منتقل میشود. با توجه به انتقال حدود دو سوم از انرژی بصورت موج رالی و استهلاک کند آن، این امواج می توانند اثر مهمی بر سازه های سطحی در معرض ارتعاش یا زلزله داشته باشند. البته باید توجه کرد که در مورد انتشار امواج زلزله، وجود ناهمگنی و ناهمسانی در خاک، لایه بندی زمین، انحناها و توپوگرافی های مختلف می تواند تاثیر زیادی بر نحوه انتشار موج داشته و نتایج را با آنچه از تئوریهای فوق بدست می آید متفاوت نماید.