

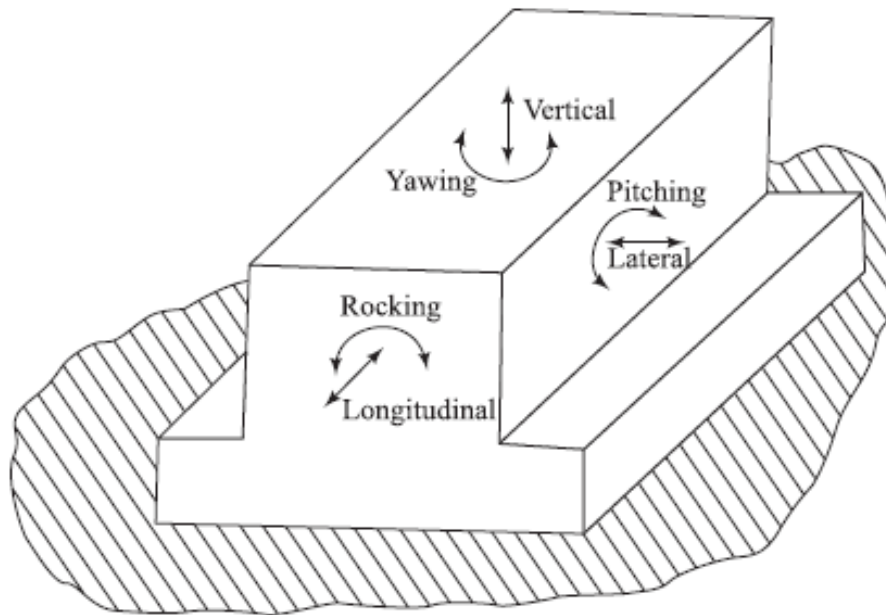
بخش ششم

# ارتعاشات پی های سطحی

(Vibration of shallow foundations)

دکتر محمد رضا امام

## ارتعاشات پی های سطحی - مقدمه



! بطور کلی یک پی سطحی میتواند شش حالت ارتعاش مختلف مانند شکل داشته باشد که هر یک بنام خاصی شناخته میشود.

! این حالتها شامل جابجائی در امتداد سه محور مختصات و همچنین دوران حول این سه محور است.

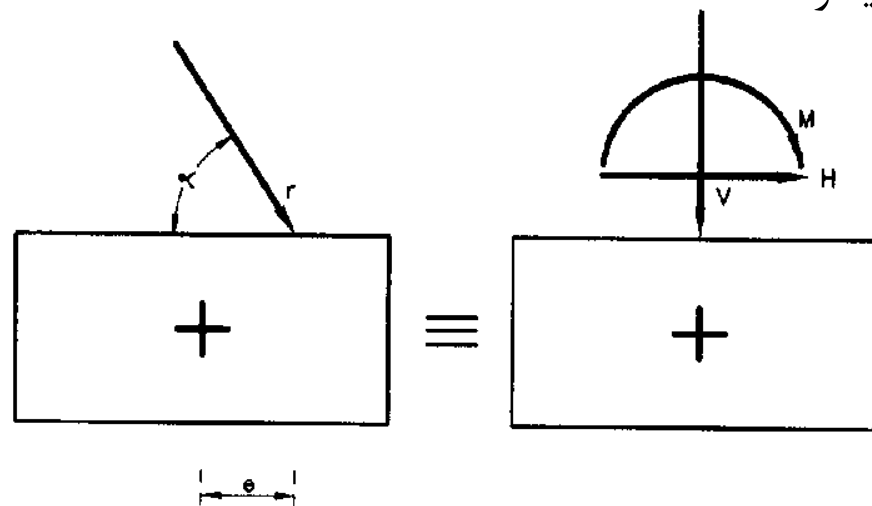
1. translation in the vertical direction,
2. translation in the longitudinal direction,
3. translation in the lateral direction,
4. rotation about the vertical axis (that is, yawing),
5. rotation about the longitudinal axis (that is, rocking), and
6. rotation about the lateral axis (that is, pitching).

## ارتعاشات پی های سطحی

- مقدمه

همانطور که قبلاً ذکر شد یک ارتعاش مرکب را میتوان به ارتعاشات ساده تری تجزیه کرده و آنرا برای آن ارتعاشات تحلیل کرد. سپس با استفاده از اصل جمع اثرات، رفتار پی تحت اثر ارتعاش مرکب را تعیین کرد.

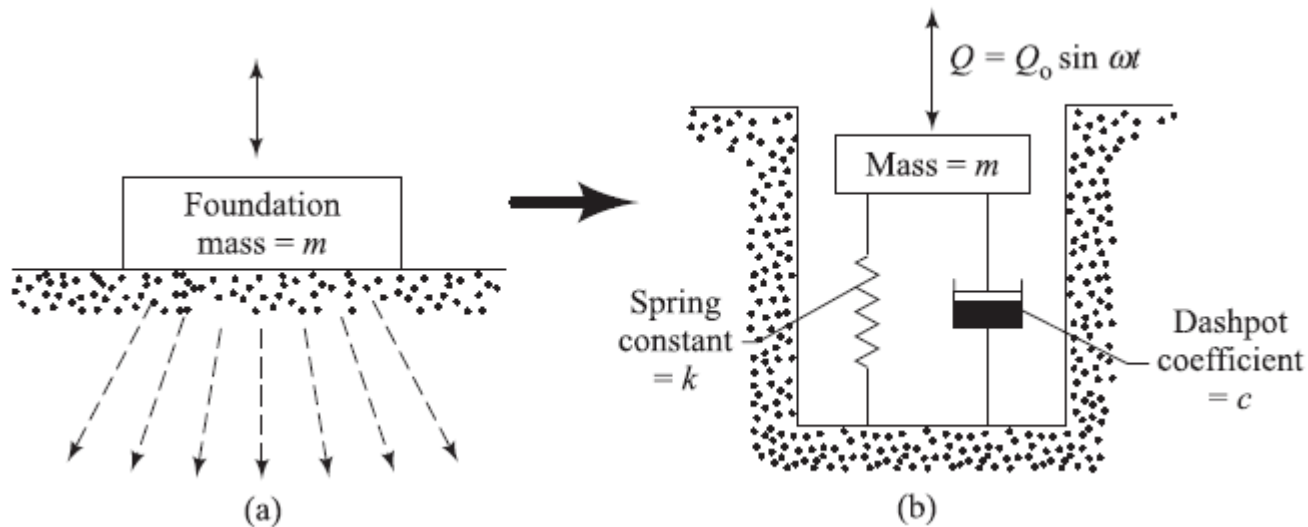
در شکل زیر اعمال یک نیروی مایل بر نقطه ای غیر از مرکز سطح پی باعث ایجاد نیروی عمودی، نیروی افقی و لنگر بر پی میشود.



# ارتعاشات پی های سطحی

- مقدمه

یکی از روشهای تحلیل، استفاده از جرم متمرکز، فنر معادل و میرایی معادل و نوشتن رابطه تعادل دینامیکی برای آنها با توجه به نیروی خارجی است. در این حالت اثر ابعاد پی و خاک و عوامل دیگر مانند عمق قرار گیری پی در نظر گرفته نمیشود.

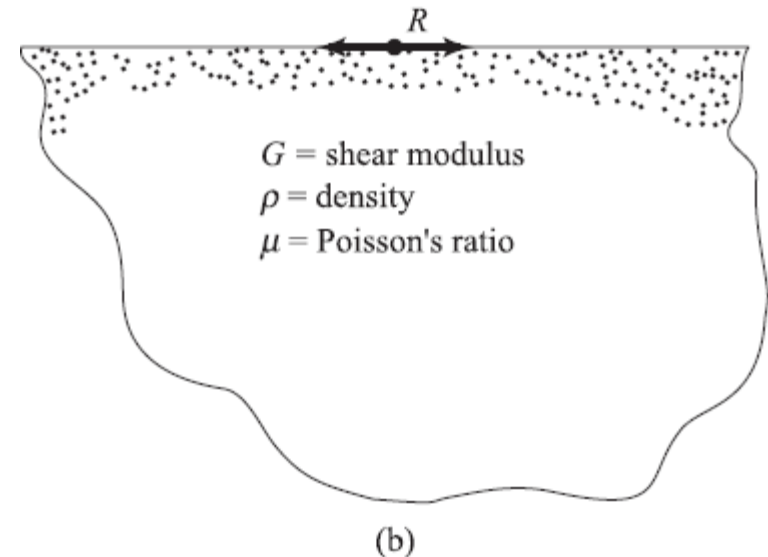
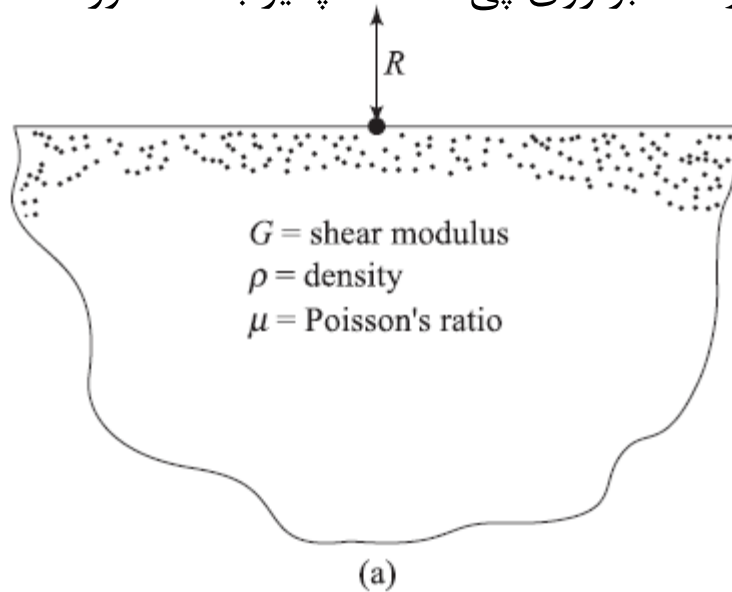


## ارتعاشات پی های سطحی

- مقدمه

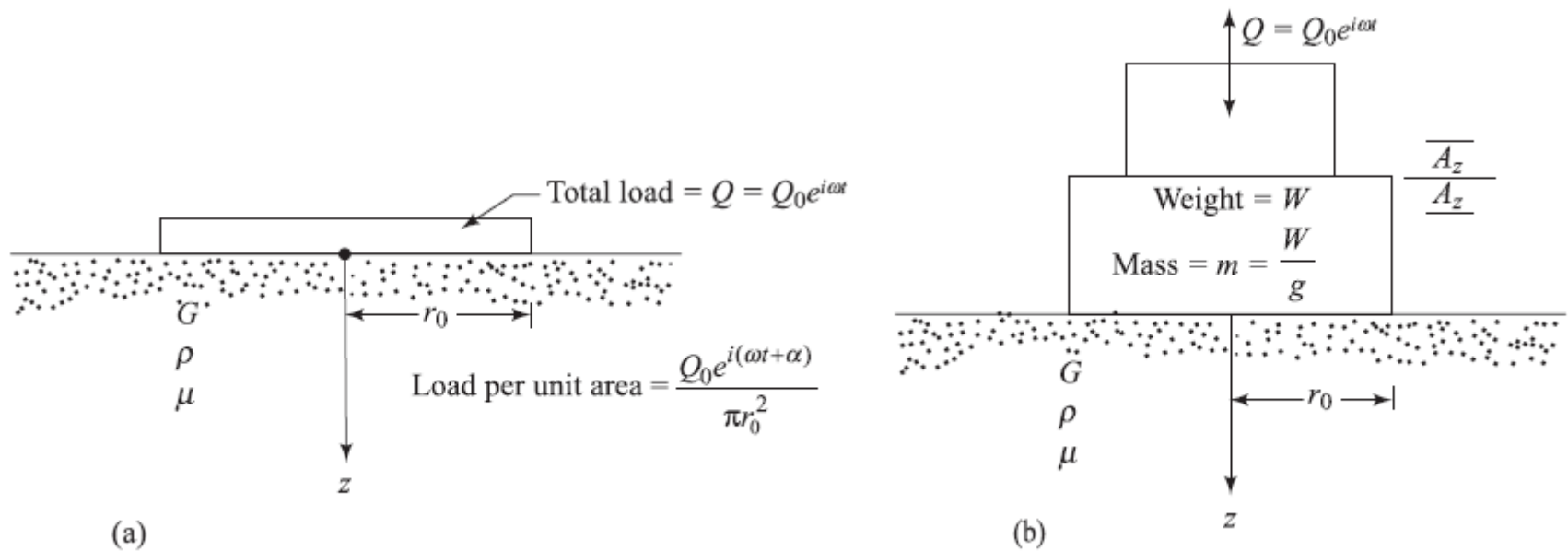
ا روش دیگر فرض قرارگیری پی با توجه به ابعاد آن بر روی یک محیط الاستیک خطی نیمه بی نهایت با مشخصات معلوم است.

Lamb در سال 1903 رفتار پی تحت بار نقطه ای دینامیکی در جهت افقی و عمودی را بررسی کرده و برای تغییر شکل آن جوابهائی بدست آورد. (Reissner) در سال 1936 با انتگرال گیری از جواب Lamb پاسخ را برای یک سطح دایره ای شکل با بارگذاری یکنواخت بر روی پی انعطاف پذیر بدست آورد.



## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی

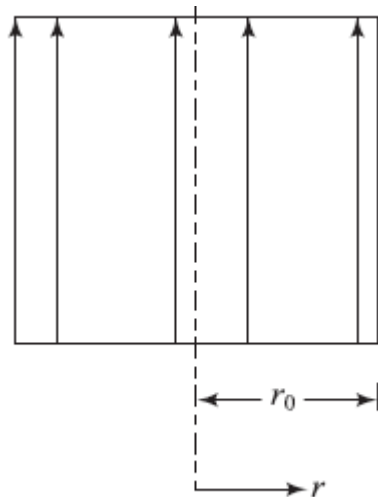
Reissner) در سال 1936 با انتگرال گیری از جواب Lamb پاسخ را برای یک سطح دایره ای شکل با بارگذاری یکنواخت بر روی پی انعطاف پذیر بدست آورد.



## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی

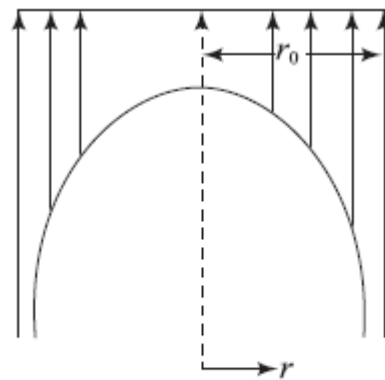
پس از او پاسخ های دیگری برای حالتی که در آنها پی صلب بوده و یا توزیع فشار در زیر پی بشکل سهمی باشد توسط دیگران ارائه شد. برای هر یک از این حالت ها توزیع فشار تماس با استفاده از روابط زیر بدست خواهد آمد.

$$q = \frac{Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{\pi r_0^2} \quad (\text{for } r \leq r_0)$$



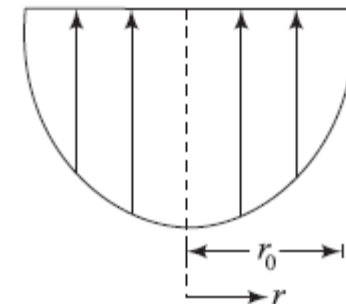
(a) Uniform pressure distribution

$$q = \frac{Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{2\pi r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}} \quad (\text{for } r \leq r_0)$$



(b) Pressure distribution under rigid foundation

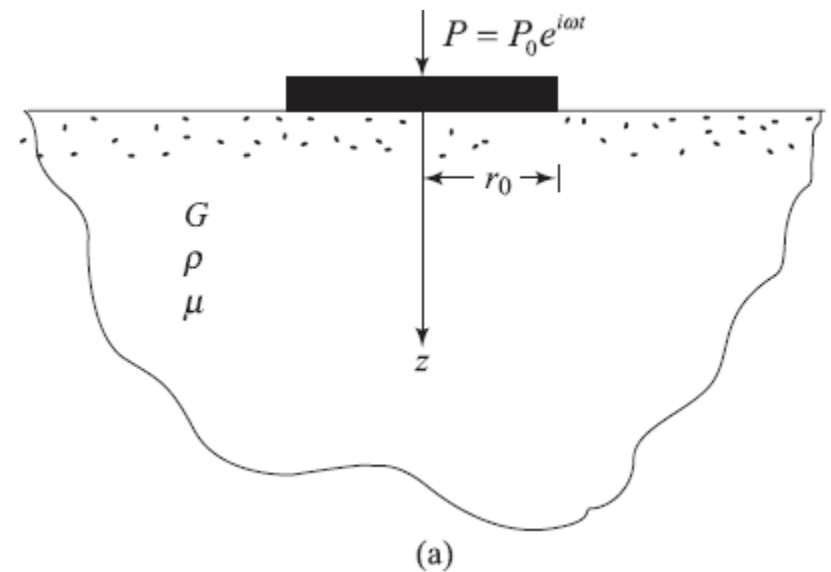
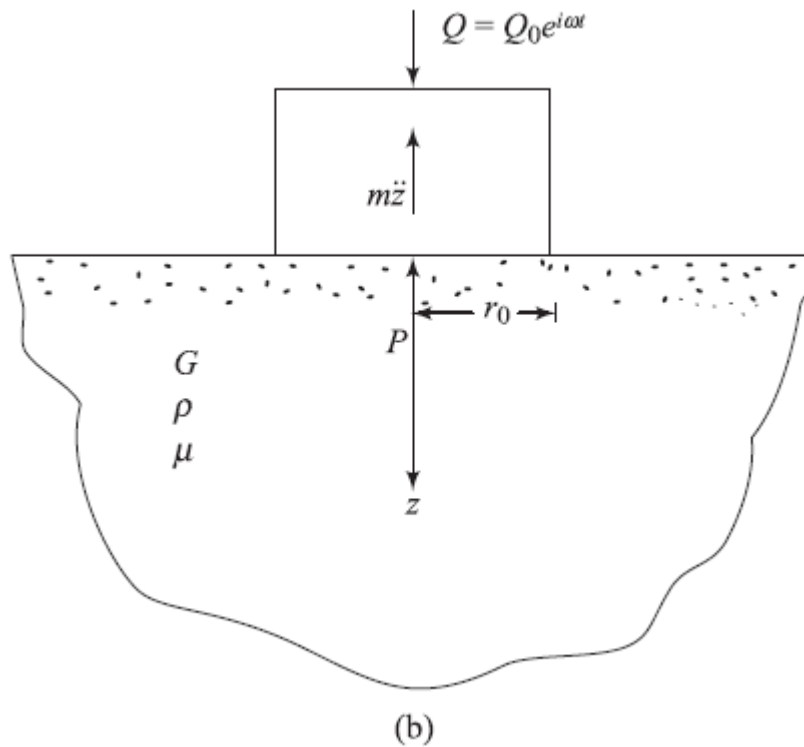
$$q = \frac{2(r_0^2 - r^2) Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{\pi r_0^4} \quad (\text{for } r \leq r_0)$$



(c) Parabolic pressure distribution

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی

ا در سال 1962 Hsieh تلاش کرد با اصلاح روش Reissner و شبیه سازی رفتار پی ها با حرکت جسم متمرکز تحت بار دینامیکی و با منظور کردن میرایی برای ارتعاشات قائم پی پاسخی بدست آورد. شبیه سازی او در شکل زیر دیده میشود.





## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی

۱ برای یک دیسک دایره ای صلب که بر روی محیط نیمه بی نهایت الاستیک خطی قرار دارد و نیروی دینامیکی عمودی  $P = P_0 e^{i\omega t}$  بر آن وارد میشود، با استفاده از راه حل های الاستیک گفته شده می توان نشان داد که رابطه تعادل نیروها بصورت زیر در می آید:

$$P = k_z z + c_z \dot{z}$$

که در آن  $Z$  جابجائی عمودی بوده و ضرایب دیگر مربوط به رفتار محیط الاستیک است.

اکنون در صورتیکه یک پی صلب تحت بار دینامیکی  $Q = Q_0 e^{i\omega t}$  قرار گیرد، رابطه تعادل دینامیکی آن بصورت روبرو نوشته میشود:

$$m\ddot{z} = Q - P$$

با ترکیب روابط فوق خواهیم داشت:

$$m\ddot{z} + c_z \dot{z} + k_z z = Q_0 e^{i\omega t}$$

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی

! میتوان نشان داد که در رابطه نوشته شده، ضرایب چنین بدست می آیند:

$$k_z = \text{static spring constant for rigid circular foundation} \\ = \frac{4Gr_0}{1-\mu}$$

$$c_z = \frac{3.4r_0^2}{1-\mu} \sqrt{G\rho}$$

! دیده میشود که در روابط فوق، ضرایب تابع فرکانس حرکت نبوده و تنها به خصوصیات محیط الاستیک و سطح بارگذاری شده بستگی دارند و لذا مقادیر ثابتی هستند.

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی

اکنون با حل معادله دیفرانسیل مذکور مشخصات حرکت بصورت زیر بدست می آید.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_z}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{4Gr_0}{1-\mu}\right) \frac{1}{m}}$$

فرکانس طبیعی:

$$D_z = \frac{c}{c_{cz}} = \frac{\frac{3.4r_0^2}{1-\mu} \sqrt{G\rho}}{\frac{8r_0^2}{1-\mu} \sqrt{GB_z\rho}} = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}}$$

نسبت میرایی:

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2D_z^2} = \left[ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{4Gr_0}{1-\mu}\right) \frac{1}{m}} \right] \sqrt{1 - 2 \left( \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} \right)^2}$$

فرکانس تشدید:

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی

فرم ساده تر و تقریبی فرکانس تشدید:

$$f_m = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \left(\sqrt{\frac{G}{\rho}}\right) \left(\frac{1}{r_0}\right) \sqrt{\frac{B_z - 0.36}{B_z}}$$

دامنه ارتعاش در شرایط تشدید:

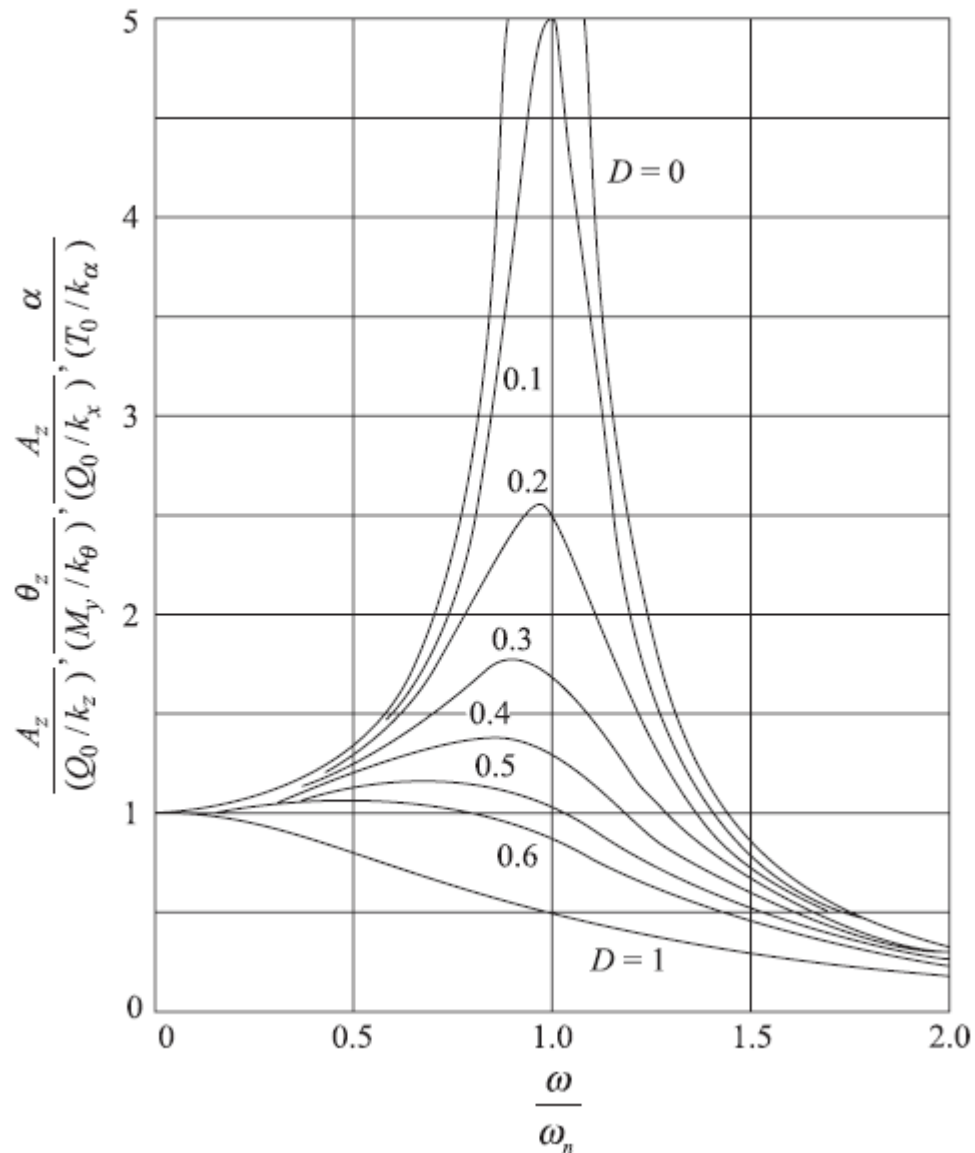
$$A_{z(\text{resonance})} = \frac{Q_0(1-\mu)}{4Gr_0} \frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z - 0.18}}$$

دامنه ارتعاش در فرکانسهایی غیر از فرکانس تشدید:

$$A_z = \frac{\frac{Q_0}{k_z}}{\sqrt{[1 - (\omega^2/\omega_n^2)]^2 + 4D_z^2(\omega^2/\omega_n^2)}}$$

که در آن:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_z}{m}}$

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی

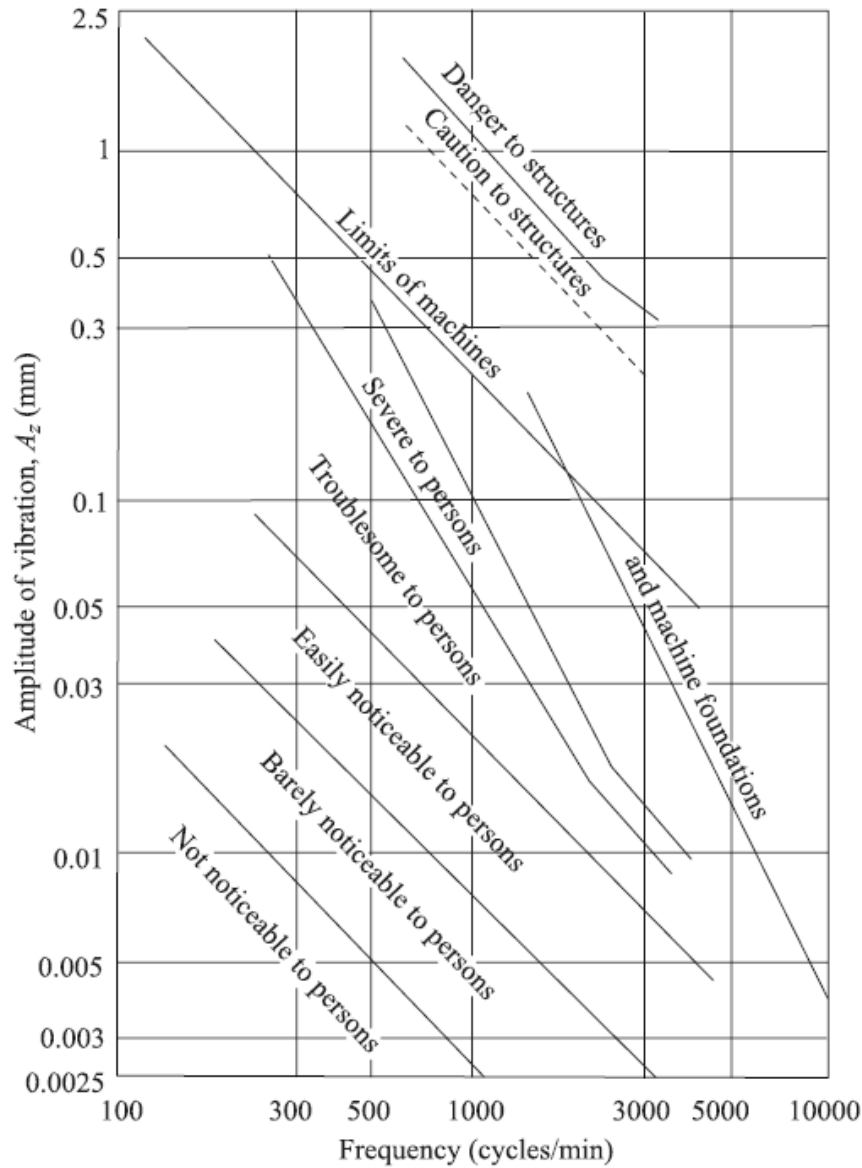


میتوان نشان داد که برای  
حالت‌های دیگر ارتعاش نیز  
میتوان پاسخ‌هایی مشابه بدست  
آورد:

در صورتیکه پی دایره ای نباشد  
معادل سازی با استفاده از رابطه  
زیر انجام میشود:

$$r_0 = \sqrt{\frac{BL}{\pi}}$$

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی



اکنون میتوان مشخص کرد آیا ارتعاشات پی چه اثری داشته و قابل قبول هستند یا خیر

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی - مثال

برای یک پی که تحت اثر ارتعاش عمودی قرار دارد در صورتیکه:  
- وزن پی و ماشین آلات روی آن 680 کیلو نیوتن، طول پی 6 متر و عرض آن 2 متر  
- مشخصات خاک: وزن حجمی 18/5 کیلو نیوتن بر متر مکعب، نسبت پواسون 1/4 و مدول برشی 20700 کیلو پاسکال

- دامنه نیروی ارتعاشی  $Q_0 = 7 \text{ kN}$  کیلو نیوتن و فرکانس سرویس  $f = 180 \text{ cpm}$  باشد، فرکانس تشدید را بدست آورده و کنترل کنید که آیا این فرکانس از دو برابر فرکانس سرویس بیشتر است یا خیر:

$$\frac{f_{\text{resonance}}}{f_{\text{operating}}} > 2$$

ضمنا دامنه ارتعاش را در شرایط تشدید تعیین کنید.

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی - مثال

با توجه به آنکه پی مربعی است ابتدا باید شعاع پی دایره ای معادل آنرا تعیین کنیم:

$$r_0 = \sqrt{\frac{BL}{\pi}} = \sqrt{\frac{(2)(6)}{\pi}} = 1.954 \text{ m}$$

$$B_z = \left(\frac{1-\mu}{4}\right)\left(\frac{m}{\rho r_0^3}\right) = \left(\frac{1-\mu}{4}\right)\left(\frac{W}{\gamma r_0^3}\right)$$

$$= \left(\frac{1-0.4}{4}\right)\left[\frac{680}{18.5 \times 1.954^3}\right] = 0.739$$

نسبت جرم عبارتست از:

$$f_m = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\sqrt{\frac{G}{\rho}}\right)\left(\frac{1}{r_0}\right)\sqrt{\frac{B_z - 0.36}{B_z}}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left[\sqrt{\frac{20700}{18.5/9.81}}\right]\left(\frac{1}{1.954}\right)\sqrt{\frac{0.739 - 0.36}{0.739}} = 6.11 \text{ Hz} \approx 366.6 \text{ cpm}$$

و بنابراین فرکانس تشدید چنین بدست می آید:



## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات عمودی - مثال

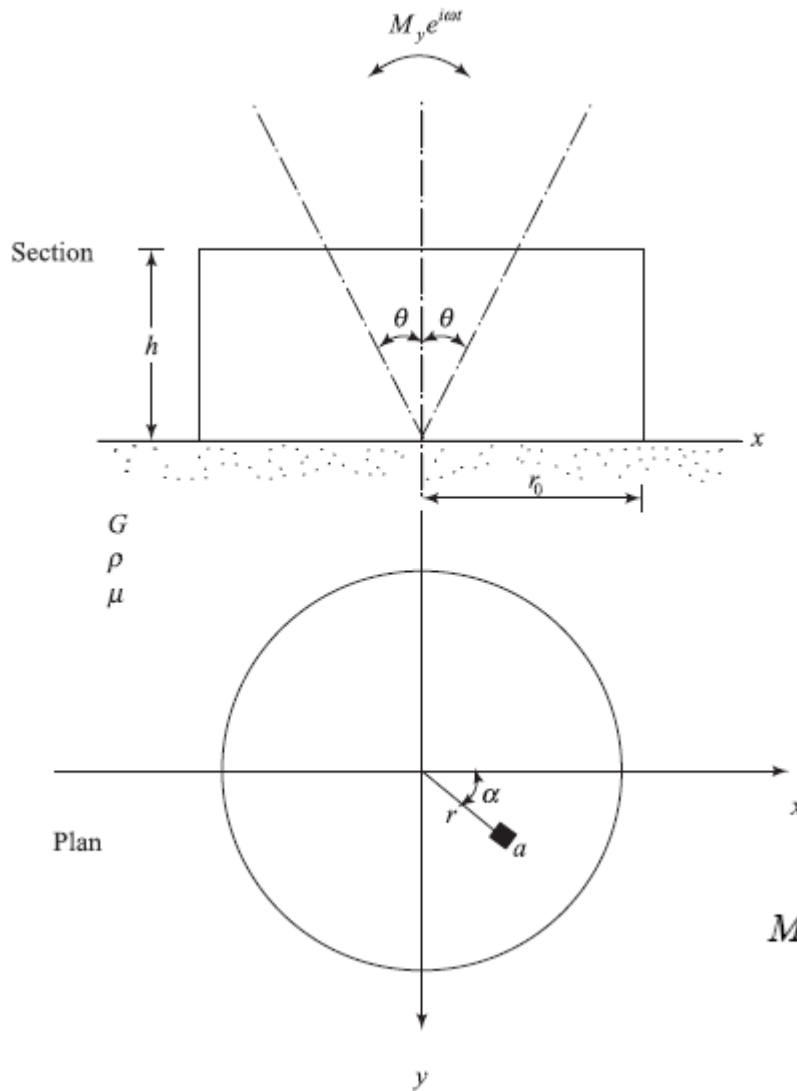
$$\frac{f_{\text{resonance}}}{f_{\text{operating}}} = \frac{366.6}{180} = 2.04 > 2$$

با توجه فرکانس تشدید بدست آمده دیده میشود که:

$$A_{z(\text{resonance})} = \frac{Q_0(1-\mu)}{4Gr_0} \frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z - 0.18}}$$
$$= 0.00003 \text{ m} = \mathbf{0.03 \text{ mm}}$$

دامنه ارتعاش نیز با استفاده از رابطه آن تعیین میشود:

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاش حول محور افقی



برای چنین ارتعاشی مشخصات پی و خاک زیر آن بصورت روبرو است.

برای نقطه **a** نشان داده شده در شکل تنش تماس از رابطه زیر بدست می آید:

$$q = \frac{3M_y r \cos \alpha}{2\pi r_0^3 \sqrt{r_0^2 - r^2}} e^{i\omega t}$$

لنگر اعمال شده بر پی حول محور افقی برابر با  $M_y e^{i\omega t}$  می باشد.

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاش حول محور افقی

برای این ارتعاش رابطه تعادل دینامیکی بصورت روبرو نوشته میشود:  
که در آن:

$$I_0 \ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} + k_\theta \theta = M_y e^{i\omega t}$$

$\theta$  = دوران محور عمودی پی در هر زمان  
 $I_0$  = ممان اینرسی جرم پی حول محور  $y$  گذرنده از پی بوده و برابر با  $\frac{W_0}{g} \left( \frac{r_0^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$  می باشد

$W_0$  = وزن پی

$g$  = شتاب جاذبه

$h$  = ارتفاع پی

می باشند. ضریب فنریت معادل، ضریب میراگر معادل و نسبت اینرسی نیز از روابط روبرو بدست می آیند:

$$k_\theta = \text{static spring constant} = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\mu)}$$

$$c_\theta = \text{dashpot coefficient} = \frac{0.8r_0^4 \sqrt{G}}{(1-\mu)(1+B_\theta)}$$

$$B_\theta = \text{inertia ratio} = \frac{3(1-\mu)}{8} \frac{I_0}{\rho r_0^5}$$

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاش حول محور افقی

با حل معادله تعادل دینامیکی مربوط به این ارتعاش، مقادیر فرکانس تشدید، دامنه ارتعاش در زمان تشدید، و دامنه ارتعاش در فرکانسهائی غیر از فرکانس تشدید با استفاده از روابط زیر بدست می آید:

- فرکانس طبیعی ارتعاش:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\theta}{I_0}}$$

- میرائی بحرانی و نسبت میرائی:

$$C_{c\theta} = 2\sqrt{k_\theta I_0} \quad D_\theta = \frac{c_\theta}{C_{c\theta}} = \frac{0.15}{\sqrt{B_\theta(1+B_\theta)}}$$

- فرکانس تشدید:

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2D_\theta^2} \quad (\text{for constant force excitation})$$

- دامنه ارتعاش در شرایط تشدید:

$$\theta_{\text{resonance}} = \frac{M_y}{k_\theta} \frac{1}{2D_\theta \sqrt{1 - D_\theta^2}} \quad (\text{for constant force excitation})$$

- دامنه ارتعاش در شرایطی غیر از شرایط تشدید:

$$\theta = \frac{M_y/k_\theta}{\sqrt{\left[1 - (\omega^2/\omega_n^2)\right]^2 + 4D_\theta^2(\omega^2/\omega_n^2)}}$$

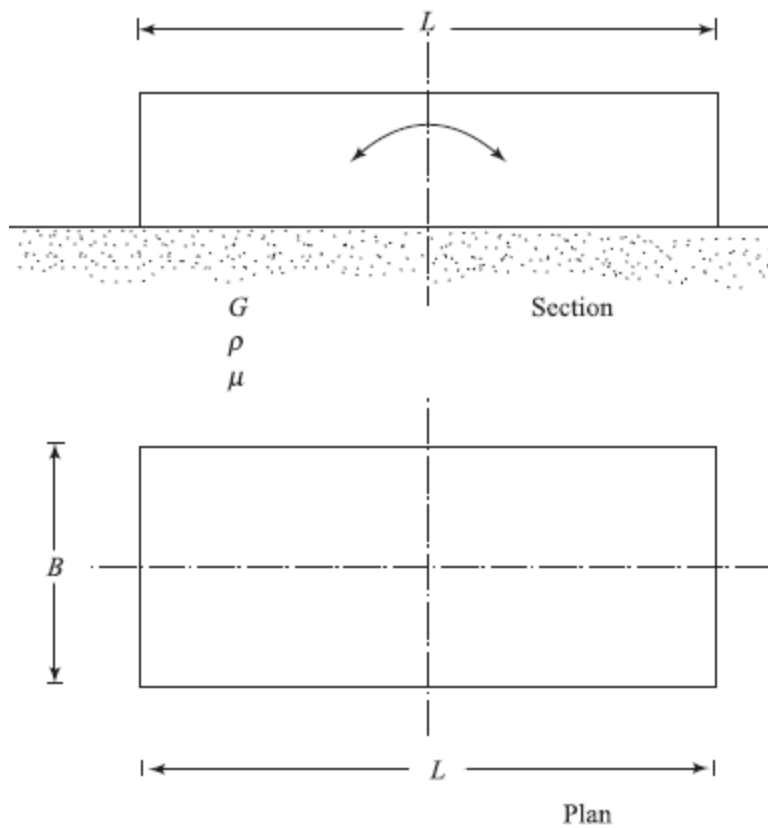
میتوان دامنه ارتعاش را با استفاده از نمودار داده شده در قبل نیز تعیین کرد

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاش حول محور افقی

برای پی های مستطیل شکل شعاع پی دایره ای معادل را میتوان با استفاده از رابطه زیر بدست آورد:

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{BL^3}{3\pi}}$$

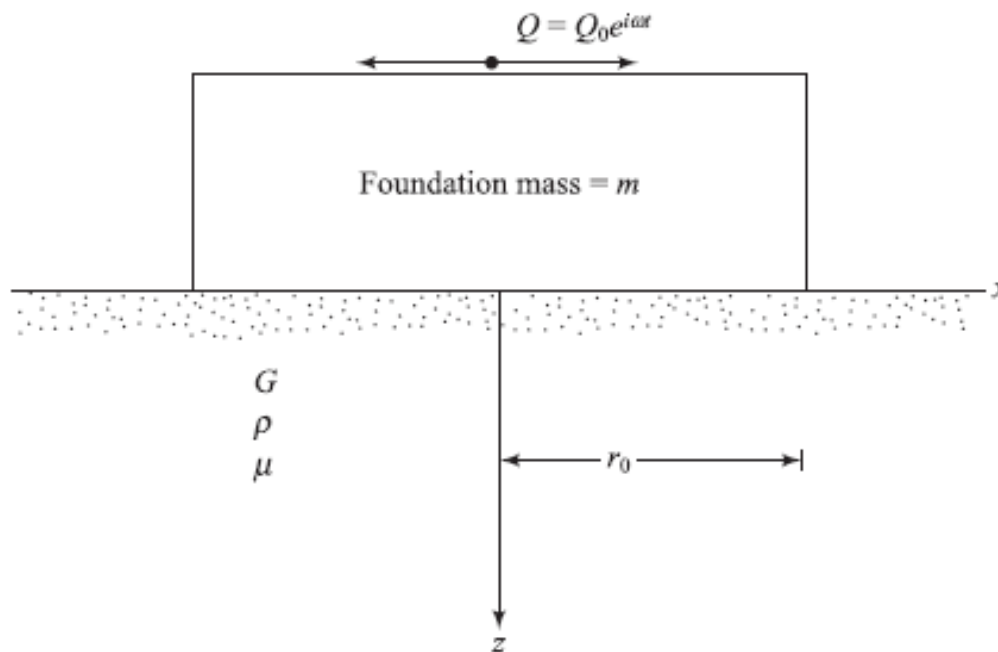
توجه شود که در اینحالت، بعدی که به توان بیشتری میرسد عمود بر محور دوران است.



## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات لغزشی

مشخصات پی مرتعش شونده در شکل نشان داده شده است. برای این سیستم معادله تعادل دینامیکی بصورت زیر در میآید:

$$m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = Q_0 e^{iat}$$



در اینجا سختی فنر معادل و ضریب میراگر با استفاده از روابط زیر تعیین میشوند:

$$k_x = \text{static spring constant for sliding} \\ = \frac{32(1-\mu)Gr_0}{7-8\mu}$$

$$c_x = \text{dashpot coefficient for sliding} \\ = \frac{18.4(1-\mu)}{7-8\mu} r_0^2 \sqrt{\rho G}$$

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات لغزشی

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_x}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{32(1-\mu)Gr_0}{(7-8\mu)m}}$$

$c_{cx}$  = critical damping in sliding

$$= 2\sqrt{k_x m} = 2\sqrt{\frac{32(1-\mu)Gr_0 m}{(7-8\mu)}}$$

$$B_x = \frac{7-8\mu}{32(1-\mu)} \frac{m}{\rho r_0^3}$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{BL}{\pi}}$$

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2D_x^2}$$

$$A_x = \frac{Q_0/k_x}{\sqrt{[1 - (\omega^2/\omega_n^2)]^2 + 4D_x^2(\omega^2/\omega_n^2)}}$$

برای این ارتعاش فرکانس طبیعی، میرایی بحرانی و نسبت میرایی عبارتند از:

$D_x$  = damping ratio in sliding

$$= \frac{c_x}{c_{cx}} = \frac{0.288}{\sqrt{B_x}}$$

در روابط فوق نسبت بدون بعد جرم و شعاع معادل از روابط زیر بدست می آیند:

اکنون میتوان فرکانس تشدید را از رابطه روبرو بدست آورد:

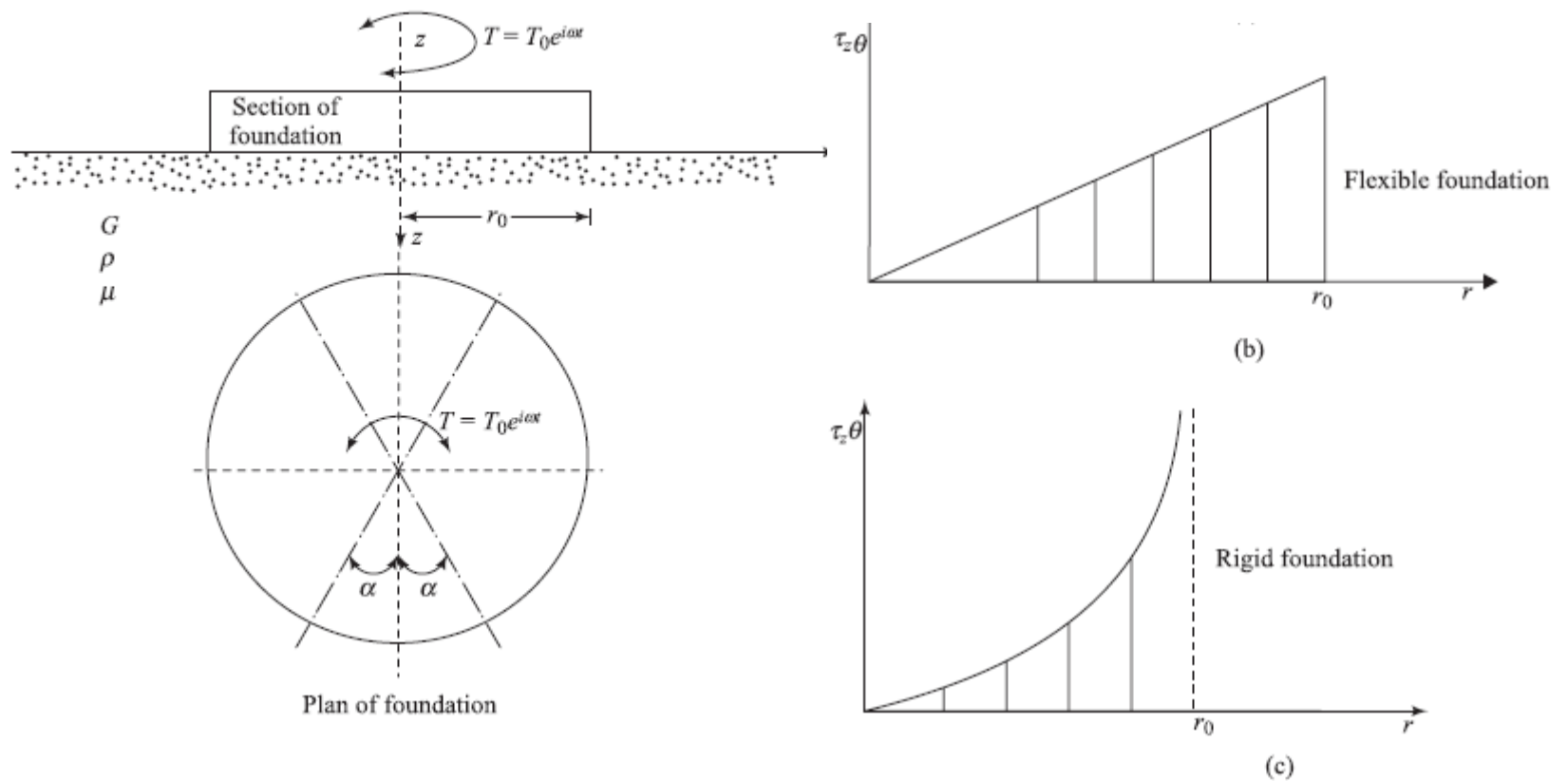
دامنه ارتعاش در شرایط تشدید و غیر آن را نیز میتوان با استفاده از روابط زیر تعیین کرد:

$$A_{x(\text{resonance})} = \frac{Q_0}{k_x} \frac{1}{2D_x \sqrt{1 - D_x^2}}$$

# ارتعاشات پی های سطحی

## - ارتعاش پیچشی

مشخصات این ارتعاش و توزیع فشار تماسی آن در شکلهای زیر نشان داده شده است





## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاش پیچشی

$$J_{zz}\ddot{\alpha} + c_{\alpha}\dot{\alpha} + k_{\alpha}\alpha = T_0 e^{i\omega t}$$

برای این ارتعاش رابطه تعادل دینامیکی بصورت روبرو نوشته میشود:  
که در آن:

$$\begin{aligned} J_{zz} &= \text{ممان اینرسی جرم پی حول محور Z گذرنده از پی می باشد} \\ c_{\alpha} &= \text{ضریب میراگر برای حرکت پیچشی} \\ k_{\alpha} &= \text{ضریب فنریت برای ارتعاش پیچشی که برابر با } \frac{16}{3} GJ_0^3 \text{ است} \\ \alpha &= \text{زاویه دوران محور عمودی پی در هر زمان} \end{aligned}$$

می باشند. ضریب میرائی معادل و نسبت اینرسی نیز از روابط زیر بدست می آیند:

$$D_{\alpha} = \frac{0.5}{1 + 2B_{\alpha}}$$

$B_{\alpha}$  = the dimensionless mass ratio for torsion at vibration

$$= \frac{J_{zz}}{\rho r_0^5}$$

## ارتعاشات پی های سطحی - ارتعاشات لغزشی

برای این ارتعاش فرکانس طبیعی، و فرکانس تشدید عبارتند از:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\alpha}{J_{zz}}} \quad f_m = f_n \sqrt{1 - 2D_\alpha^2}$$

دامنه ارتعاش در شرایط تشدید را نیز میتوان با استفاده از رابطه زیر تعیین کرد:

$$\alpha_{\text{resonance}} = \frac{T_0}{k_\alpha} \frac{1}{2D_\alpha \sqrt{1 - D_\alpha^2}}$$

در اینجا شعاع معادل از رابطه زیر تعیین میشود:

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{BL(B^2 + L^2)}{6\pi}}$$

برای تعیین دامنه ارتعاش در فرکانسهایی غیر از فرکانس تشدید میتوان از نمودار داده شده در قبل استفاده کرد.

## ارتعاشات پی های سطحی - برآورد ضریب فنریت برای ارتعاشات مختلف

*McClintock, 1987*

Motion	Spring constant	Reference
<i>Circular foundations</i>		
Vertical	$k_z = \frac{4Gr_0}{1-\mu}$	Timoshenko and Goodier (1951)
Horizontal (sliding)	$k_x = \frac{32(1-\mu)Gr_0^3}{7-8\mu}$	Bycroft (1956)
Rocking	$k_\theta = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\mu)}$	Borowicka (1943)
Torsion	$k_\alpha = \frac{16}{3}Gr_0^3$	Reissner and Sagoci (1944)

## ارتعاشات پی های سطحی - برآورد ضریب فنریت برای ارتعاشات مختلف

### *Rectangular foundation*

Vertical <sup>a</sup>	$k_z = \frac{G}{1-\mu} F_z \sqrt{BL}$	Barkan (1962)
Horizontal <sup>a</sup> (sliding)	$k_x = 2(1+\mu) GF_x \sqrt{BL}$	Barkan (1962)
Rocking <sup>b</sup>	$k_\theta = \frac{G}{1-\mu} F_\theta BL^2$	Gorbunov-Possadov and Serebrajanyi(1961)

<sup>a</sup>  $B$  = width of foundation;  $L$  = length of foundation.

<sup>b</sup> For definition of  $B$  and  $L$ , refer to Figure 5.18. Refer to Figure 5.29 for values of  $F_z$ ,  $F_x$ , and  $F_\theta$ .