

# www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

ارائه كتابها و جزوات رايجان مهندسي عمران

بهترين و برترين مقالات روز عمران

انجمن هاي تفصلي مهندسي عمران

خوشگاه تفصلي مهندسي عمران

# روشهای عددی در مکانیک خاک

بهروز گتمیری

دانشکده فنی

دانشگاه تهران

## روش اجزای محدود

### ایده اصلی:

ایده اصلی در روش اجزای محدود جایگزینی یک مساله پیچیده با مساله ای آسانتر می باشد. در این آسان سازی معمولا در نبود روابط و راه حل های صددرد صد کامل (exact) به انتخاب ویافتن راه حل تقریبی بسنده می شود. در نبود راه حل دقیق و کامل با استفاده از روش اجزای محدود با صرف بیشتر انرژی محاسباتی می توان راه حل تقریبی را هرچه بیشتر به راه حل دقیق نزدیک نمود.

در روش اجزای محدود، منطقه ای که در آن راه حل پیشنهاد شده است به عناصر محدودی که در ارتباط با یکدیگر هستند تقسیم شده است. در هر قطعه یا عنصر روابط تقریبی مناسب راه حل نوشته شده و شرایط تعادلی کلی سازه از آن بدست می آید. اقناع شرایط کلی تعادل نتیجه ای کلی برای سیستم تقسیم شده به قطعات بدست می دهد.

گرچه نام روش اجزای محدود اخیرا به این متد داده شده است، لیکن ایده کلی آن قدیمی است. روش شبیه آنچه که امروز بکار برده می شود در ادبیات ریاضیات کاربردی در سال 1943 توسط Courant پیشنهاد

شده است و روش اجزای محدود به شکل امروزی در سال 1956 توسط

Topp, Martin, Clough, Turner پیشنهاد شده است. اولین کاربرد روش اجزای محدود جهت آنالیز

سازه ی aircraft بوده است و امروزه در تمام شاخه های علوم از آن استفاده می شود. با پیشرفت ماشین

های محاسبه گر و رایانه ها، روش اجزای محدود نیز به گونه ای بسیار سریع پیشرفت حاصل کرده است.

می توان زمینه کاربرد روش اجزای محدود را در "**مسائل مقادیر حدی**" به سه بخش عمده زیر تقسیم

بندی کرد.

1. مسائل تعادلی

2. مسائل مقادیر ویژه

3. مسائل مربوط به انتشار امواج

روش های عددی در خاک

**گروه اول** مسایلی هستند که تابع زمان نبوده و بیانگر حالت پایا می باشند. این گونه مسایل میتوانند با نحوه ی برخورد خاص حل شوند، یعنی اینکه با در نظر گرفتن "تغییر شکل" یا با در نظر گرفتن "تنش" به عنوان پارامتر اصلی و متغیر عمده حل شوند.

**گروه دوم** مسایلی هستند که پارامتر زمان بصورت واضح در آن ظاهر نمی شوند. می توان این نوع مسایل را ادامه مسایل گروه اول دانست با این تفاوت که مجبوریم در این گروه مقادیر بحرانی بعضی از پارامترها را علاوه بر حالت پایا محاسبه کنیم.

**گروه سوم** مسایلی هستند که تابع زمان می باشند و پارامتر زمان در آنها نقش عمده ای بازی می کند و بیانگر حالت گذرا می باشند.

در جدول یک مباحثی که در زمینه های مربوط به مکانیک خاک به روش اجزا محدود می توان به بررسی و حل آن مبادرت کرد به طور خلاصه یاد آور می شویم.

\* جدول یک - زمینه کاربرد روش اجزای محدود \*

زمینه کاربرد	مسایل تعادلی	مسایل مقادیر ویژه	مسایل انتشاری
انتشار حرارت	پخش حرارت در جامد یا مایع در حالت پایا	-	جریان گذرای حرارت در مکانیک جامدات و ساختمانها و ماشینهای حرارتی
ژئومکانیک	آنالیز و بررسی گودبرداری، دیوارهای حایل، تونلها، اتصالات سنگها و اندرکنش خاک-سازه، آنالیز تنشها در خاک، سدها، شمعها و پی های ماشین آلات و ساختمانها	آنالیز و تعیین فرکانس طبیعی و مودهای ارتعاش سیستم سد-مخزن و بررسی اندرکنش دینامیکی خاک و سازه	مسایل اندرکنش خاک-سازه تابع زمان تراوای گذرای آب در خاک و سنگ انتشار امواج تنش در خاک و سنگ
هیدرولیک و هیدرو دینامیک مهندسی	آنالیز پتانسیل جریان، سطوح آزاد، لایه های مرزی جریان، جریانهای لزج و آنالیز و بررسی سازه های آبی و سدها	آنالیز و تعیین فرکانس طبیعی حوضه های آبگیر و دریاچه ها و بنادر	آنالیز جریان مایع نا پایا و انتشار امواج در محیطهای اشباع و صخره های آبگیر و مسایل جریان های هیدرومغناطیسی دینامیکی

## توضیحات کلی در مورد درس روش اجزای محدود

راه حل های محیطهای پیوسته توسط روش اجزای محدود با گامهای مهم توضیح داده شده در زیر همراه است:

### **گام اول: شبکه بندی محیط پیوسته**

این عمل به منظور تقسیم کردن محیط پیوسته به یک سری عناصر کوچک در ارتباط با یکدیگر انجام می پذیرد. در این گام باید یک سری شرایط خاص را مد نظر داشت تا راه حل تقریبی پیشنهاد شده به جوابهای سازگار و دقیق برسد. اندازه عناصر، تیپ عناصر، تعداد عناصر و نحوه ی کنار هم گذاری در این مرحله تصمیم گیری می شود.

### **گام دوم: انتخاب تابع درون یابی مناسب جهت تبدیل صحیح فرم انتگرال به فرم ماتریسی**

در نحوه نگرش و انتخاب راه حل "تغییر مکان" معادلات تعادل نوشته شده روی هر عنصر با انتخاب مدل مناسبی تقریب می شود که این تقریب باید از نقطه نظر محاسباتی آسان و از نقطه نظر نتایج باید دقیق باشد. شرایط همگرایی راه حل باید در این مرحله کنترل شود. معمولاً تابع درون یابی هر عنصر بصورت چند جمله ای در نظر گرفته می شود.

### **گام سوم: تعیین "ماتریس سختی عنصری" و بردارهای "نیرو"**

برای هر عنصر تعیین شده در گام اول بر اساس معادلات نوشته شده و پس از تبدیل فرم انتگرالی معادلات به فرم ماتریسی آن، ماتریسهای سختی هر عنصر و بردار نیروی هر عنصر با استفاده از شرایط حدی پس از استفاده از اصل حساب تغییرات بدست می آیند.

### **گام چهارم: کنار هم گذاری معادلات عناصر**

به منظور دست یافتن به فرم کلی ماتریسی معتبر روی کل محیط تقسیم شده به عناصر باید ماتریس های موجود در هر مرحله را بانظم خاصی تبدیل به ماتریس کلی معادلات نمود. ماتریس ها و بردارهای حاصل در کل محیط معتبر هستند.

### گام پنجم: معرفی شرایط حدی در ماتریس نهایی

#### گام ششم: حل معادله نهایی

فرم نهایی بدست آمده که بصورت  $[K]\{z\} = \{F\}$  است توسط راه حل های کلاسیک حل معادله دستگاه های خطی یا غیرخطی حل می شوند.

#### گام هفتم: محاسبات لازم به منظور تعیین پارامترهای جنبی مورد نیاز

در اینگونه محاسبات بر حسب نیاز پارامترهای مشخصی را محاسبه کرده و عرضه می نماییم. مثلا اگر محاسبات بر حسب تغییر مکان ها انجام شده باشد و بخواهیم تنش ها را نیز داشته باشیم لازم است در زیر برنامه ای تنشها را برای عناصر حساب کنیم.

# فصل اول: تقریب توسط عناصر محدود

## 1-1 تقریبا

### 1-1-1 تقریب گرهی:

در یک مدل ریاضی یک سیستم فیزیکی از متغیرها و توابع که توابع صحیح و دقیق نامیده می شوند استفاده می گردد:  $U_{ex}(x)$ . تابع تقریبی  $U(x)$  که جواب مدل ریاضی سیستم مورد نظر است همواره اختلافی با جواب دقیق دارد: باید  $e(x)$  به حد کافی کوچک باشد تا جواب تقریبی را جواب مساله بدانیم:

$$e(x) = U(x) - U_{ex}(x) \quad (1-1)$$

برای ساختن تابع جواب تقریبی می توان به طریق زیر عمل کرد:

-تابعی وابسته به  $n$  پارامتر  $a_i$  تعریف کرد یا انتخاب نمود  $U(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$

-پارامترهای  $a_i$  را طوری تعریف و تعیین کرد که رابطه (1-1) صادق باشد. به عنوان مثال می توانیم در چند نقطه تابع جواب  $U(x)$  را با  $U_{ex}(x)$  یکسان کنیم. باید این توابع طوری انتخاب شوند که مشتق گیری و انتگرال گیری از آنها ساده باشد.

با مثال های زیر:

1) تابع تقریبی برای یک تابع شکل که فقط در چند نقطه شناخته شده است معرفی می گردد و

2) حل تقریبی یک معادله دیفرانسیل را عرضه می کنیم.

### مثال 1-1:

حرارت در سه نقطه مطابق جدول شناخته شده است. برای نقاط دیگر توسط یک تابع حرارت را بیابید.

x	0	0.5	1
$U_{ex}(x)$	$20^{\circ}$	$25^{\circ}$	$22^{\circ}$

**حل.** فرم چند جمله ای از درجه دوم را جهت جواب تقریبی اختیار می کنیم.

$$U(x, a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

$$U_{ex}(x=0) = U(x=0) = a_1 = 20^{\circ}$$

$$U_{ex}(x=0.5) = U(x=0.5) = a_1 + 0.5a_2 + 0.25a_3 = 25^{\circ}$$

$$U_{ex}(x=1) = U(x=1) = a_1 + a_2 + a_3 = 22^{\circ}$$

$$\Rightarrow a_1 = 20, a_2 = 18, a_3 = -16$$

$$\rightarrow U_{ex}(x) \approx U(x) = 20 + 18x - 16x^2$$



روش های عددی در خاک

**مثال 2-1:** تقریب یک معادله دیفرانسیل تابع  $U_{ex}(x)$  را پیدا کنید که شرایط زیر را ارضا کند:

$$0 \leq x \leq 1, \quad \frac{d^2 U_{ex}(x)}{dx^2} = f(x) \text{ : معادله دیفرانسیل}$$

$$U_{ex}(x) = 0 \quad \text{for } x=0, x=1 \text{ : شرایط حدی}$$

$$f(x=0.75) = 0.25, f(x=0.25) = 1 \text{ : تابع } f(x) \text{ طوری است که}$$

**حل.** تابع زیر را انتخاب می کنیم:

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = a_1 \sin(px) + a_2 \sin(2px)$$

$$\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x_1=0.25} = -a_1 p^2 \sin(0.25p) - 4a_2 p^2 \sin(0.5p) = f(x_1) = 1$$

$$\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x_2=0.75} = -a_1 p^2 \sin(0.75p) - 4a_2 p^2 \sin(1.5p) = 0.25$$

$$\rightarrow a_1 = -\frac{5}{4\sqrt{2}p^2}, \quad a_2 = -\frac{3}{32p^2}$$

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = -\frac{5}{4\sqrt{2}p^2} \sin(px) - \frac{3}{32p^2} \sin(2px)$$

این حرکت یک نوع مجزاسازی (discretisation) معادله دیفرانسیل است با دو معادله جبری.

در دو مثال بالا می بینیم که:

$$U(x) = P_1(x)a_1 + P_2(x)a_2 + \dots + P_n(x)a_n \quad (1-2)$$

$$U(x) = \langle P_1(x) \ P_2(x) \ \dots \ P_n(x) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle P \rangle \{a\} \quad (1-3)$$

**توابع P:** توابع خطی مستقل، همیشه نمی توان وضع خطی داشت.

$a_i$ : پارامترهای تقریب، عموماً مفهوم فیزیکی ندارد ولیکن می توان بجای  $a$  مقادیر  $U_{ex}(x)$  را در  $n$  نقطه با

مختصات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  که گره می نامیم انتخاب کنیم.

روش های عددی در خاک

$$U(x_1) = U_{ex}(x_1) = U_1$$

$$U(x_2) = U_{ex}(x_2) = U_2$$

در این صورت تابع تقریب بصورت زیر خواهد بود:

$$U(x) = N_1(x)U_1 + N_2(x)U_2 + \dots + N_n(x)U_n \quad (1-4)$$

$$U(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad \dots \quad N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \mathbf{M} \\ U_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{U\} \quad (1-5)$$

$N_i$  ها ضرایب  $a_i$  هستند که در  $U_{exact}$  صدق می کنند.

پارامتر  $a_i$ : پارامترهای عمومی تقریب

پارامتر  $U_i$ : پارامترهای گرهی یا متغیرهای گرهی

رابطه (1-3) یک تقریب غیرگرهی را تعریف می کند.

رابطه (1-5) یک تقریب گرهی را تعریف می کند.

توابع  $P_x$ : توابع پایه تقریب هستند (function de base)

توابع  $N(x)$ : توابع درونیابی (function de interpolation)

\* با استفاده از توابع درونیابی  $N(x)$  که در توابع  $U_{exact}$  صدق می کنند یک تقریب گرهی را با رابطه

$$U(x) = N(x).U_n$$

می سازیم.

با توجه به روابط 1-4 و 1-5 تقریب گرهی خواص زیر را خواهد داشت:

- چون  $U(x_i) = U_i$  می باشد توابع  $N_i$  روابط زیر را اقلان می کند:

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

- خطای تقریب تعریف شده توسط برای  $e(x) = U(x) - U_{ex}(x)$  نقاط گره  $x_i$  معادل صفر است.

$$e(x_i) = 0$$

**مثال 1-3:** تقریب گرهی از نوع لاگرانژ

تابع  $U_{ex}(x)$  که در چهار نقطه شناخته شده است را در نظر می گیریم

$$U(x) = N_1(x)U_1 + N_2(x)U_2 + N_3(x)U_3 + N_4(x)U_4$$

روش های عددی در خاک

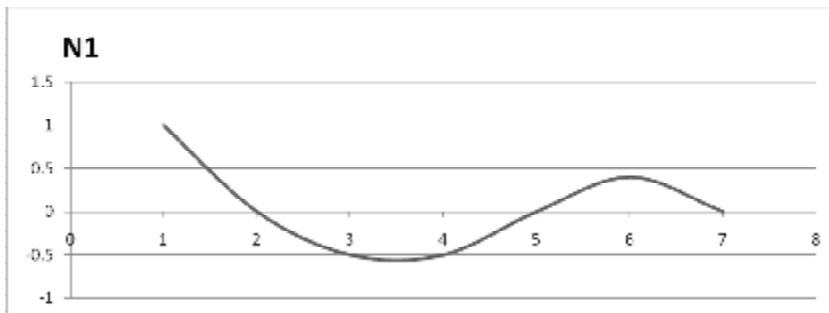
که در آن  $N_i$  چند جمله ای لاگرانژ از درجه ی سوم با فرم زیر است:

$$N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

رابطه 1-6 توسط این فرم افتناع می شود مثلاً  $N_1$  به فرم زیر است:

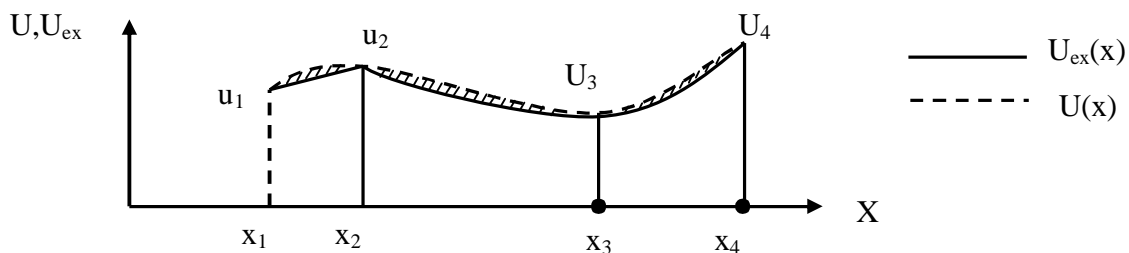
$$N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

مثلاً اگر  $x_4=7, x_3=5, x_2=2, x_1=1$  باشد تابع  $N_1$  به شکل زیر است:



$$N_1 = -\frac{1}{24}(x-2)(x-5)(x-7)$$

x	1	1.5	2	3	4	5	6	7
$N_1$	1	77/192	0	-1/3	-1/9	0	1/6	0



اگر چند متغیر داشته باشیم، کلیه مفاهیم بالا به چند متغیر نیز گسترش خواهد یافت.

$$\|n\| = \sqrt{\langle \Delta u^i \rangle \{ \Delta u^i \}}$$

$$X = (x \ y \ z)$$

X متعلق به قلمرو V می باشد.

معادله 1-5 به صورت زیر نوشته میشود

روش های عددی در خاک

$$u(x, y, z) = u(X) = \langle N_1(X) \ N_2(X) \dots N_n(X) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \mathbf{M} \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (1-9)$$

رابطه 1-4 باید اقناع شود:  $U(X_i) = U_{ex}(X_i) = U_i$  که در آن:  $i = 1, 2, \dots, n$   $X_i = \langle x_i \ y_i \ z_i \rangle$  مختصات گره ها هستند.

### 1-1-2- تقریب توسط عناصر:

هنگامیکه تعداد گره ها ( $n$ ) و در نتیجه تعداد پارامترها زیاد می شوند مسأله تخمین رابطه تقریبی مشکل می شود، اگر قلمرو هم فرم پیچیده ای داشته باشد مسأله مشکلتر می شود.

روش "تقریب گرهی در زیر قلمرو" روش روشنی است که اجازه ساختن تابع  $U(x)$  را توسط کامپیوتر می دهد. این روش شامل مراحل زیر است:

1- ساختن زیر قلمرو  $V^e$  از قلمرو  $V$

2- تعریف تابع تقریبی  $U^e(x)$  روی هر یک از زیر قلمروهای  $V^e$  توسط متد تقریب گرهی هر تابع  $U^e(x)$  میتواند به متغیرهای گرهی زیر قلمروهای دیگر نیز ارتباط داشته باشد مثل تقریبهای Spline

روش تقریب توسط عناصر محدود، روش تقریب خاص توسط زیر قلمرو است که خصوصیات زیر را دارد:

- تقریب گرهی روی زیر قلمرو  $V^e$  که فقط متغیرهای گرهی زیر قلمرو  $V^e$  را دخالت می دهد.

- تابع تقریبی  $U^e(x)$  روی زیر قلمرو  $V^e$  به صورت پیوسته روی  $V^e$  ساخته شده است و شرط پیوستگی بین زیر قلمروها را نیز تأمین میکند.

### تعاریف

- هر زیر قلمرو یک «عنصر» نامیده میشود.

- نقاطی که تابع تقریبی با تابع دقیق یکسان است، نقاط درون یابی یا نقاط گرهی نامیده میشوند.

- $X_i$  «مختصات گرهی» نامیده میشود.

- مقادیر  $U_i = U_{ex}(X_i) = U^e(X_i)$  «متغیرهای گرهی» نامیده میشوند.

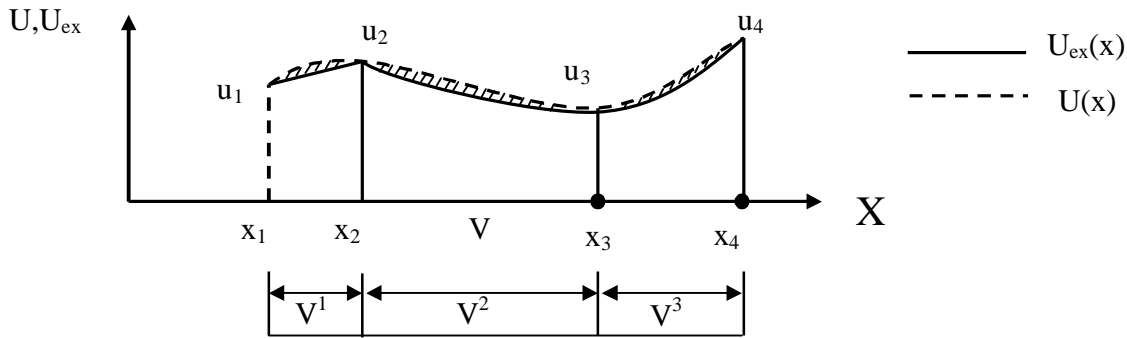
در این تقریب دو نقطه نظر مشخص زیر عرضه میشود:

1- باید به صورت تحلیلی هندسه عناصر تعریف گردد.

2- توابع درون یابی برای هر المان ساخته شود.

مثال 1-4 :

تقریب توسط اجزاء محدود برای یک بعدی



- تعریف هندسه المان

گره s: 1 و 2 و 3 و 4

مختصات گرهی:  $x_1, x_2, x_3, x_4$

قلمرو کامل:  $V: x_1 \leq x \leq x_4$

زیر قلمروها (عناصر):

$$V^1 = x_1 \leq x \leq x_2$$

$$V^2 = x_2 \leq x \leq x_3$$

$$V^3 = x_3 \leq x \leq x_4$$

- ساختن تابع تقریبی  $U^c(x)$

- متغیر گرهی:  $U_1, U_2, U_3, U_4$

- تابع تقریب خطی روی هر المان

- المان 1: زیر قلمرو  $V^1$

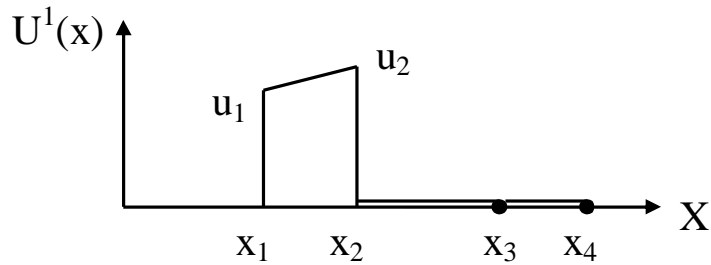
$$U_{(x)}^1 = N_1 U_1 + N_2 U_2$$

$N_1$  و  $N_2$  توابع خطی هستند که رابطه 1-6 را اقیاناع می کنند:

$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad N_1(x_1) = 1 \quad , \quad N_1(x_2) = 0$$

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

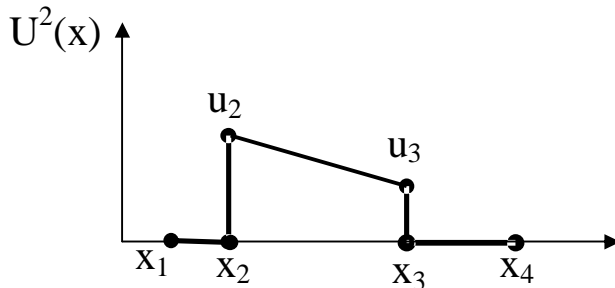
$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad N_2(x_1) = 0 \quad , \quad N_2(x_2) = 1$$



$$U^2(x) = N_1 U_2 + N_2 U_3$$

المان 2 :

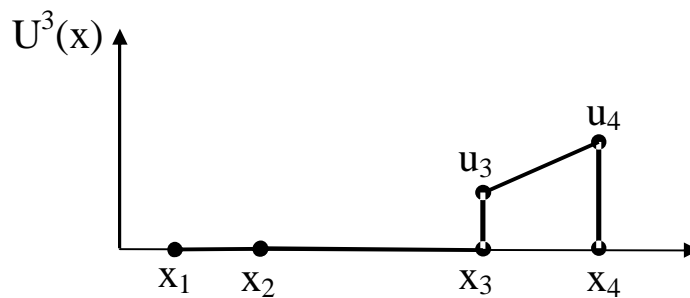
$$N_1 = \frac{x-x_3}{x_2-x_3}, \quad N_2 = \frac{x-x_2}{x_3-x_2}; \quad x_2 \leq x \leq x_3$$



المان 3 :

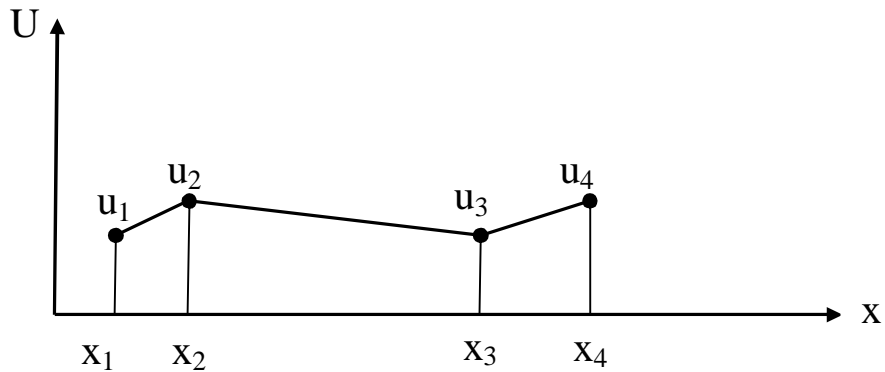
$$U^3(x) = N_1 U_3 + N_2 U_4$$

$$N_1 = \frac{x-x_4}{x_3-x_4}, \quad N_2 = \frac{x-x_3}{x_4-x_3}; \quad x_3 \leq x \leq x_4$$



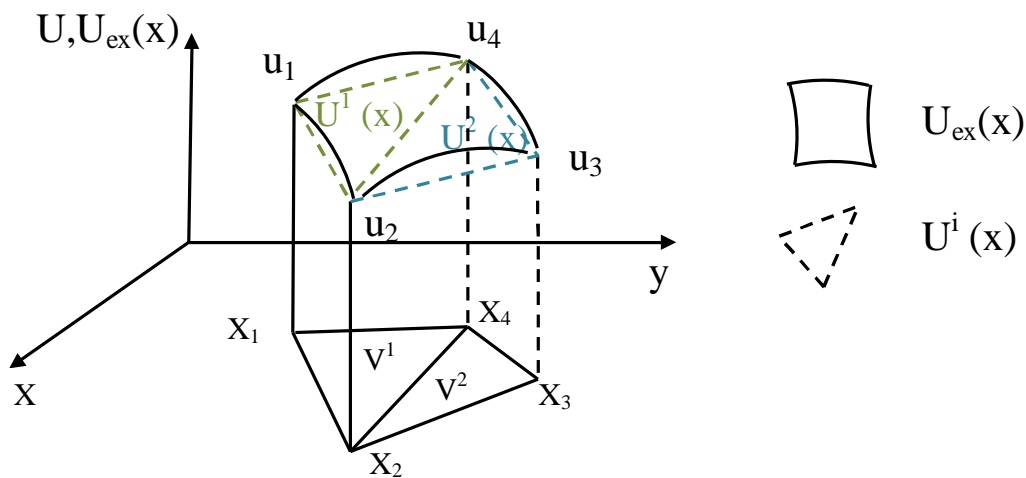
توابع  $U^e(x)$  و  $N_i(x)$  برای هر عنصر متفاوت است، این توابع خارج از هر المان صفرند. جمع این توابع، تابع کلی تقریب را می دهد.  $U^1 + U^2 + U^3 = U$

روش های عددی در خاک



$$X = \langle x \ y \rangle$$

مثال 5-1: تقریب خطی برای دو بعدی



### تعریف هندسه مسأله

گره: 1 و 2 و 3 و 4

مختصات گرهی:  $x_1, x_2, x_3, x_4$

قلمرو کامل:  $V$  چهار وجهی 1-2-3-4

المانها:  $V^1$ : مثلث 1-2-4

المانها:  $V^2$ : مثلث 2-3-4

### ساختن تابع تقریب $U^e(x)$

متغیر گرهی:  $U_1$  و  $U_2$  و  $U_3$  و  $U_4$

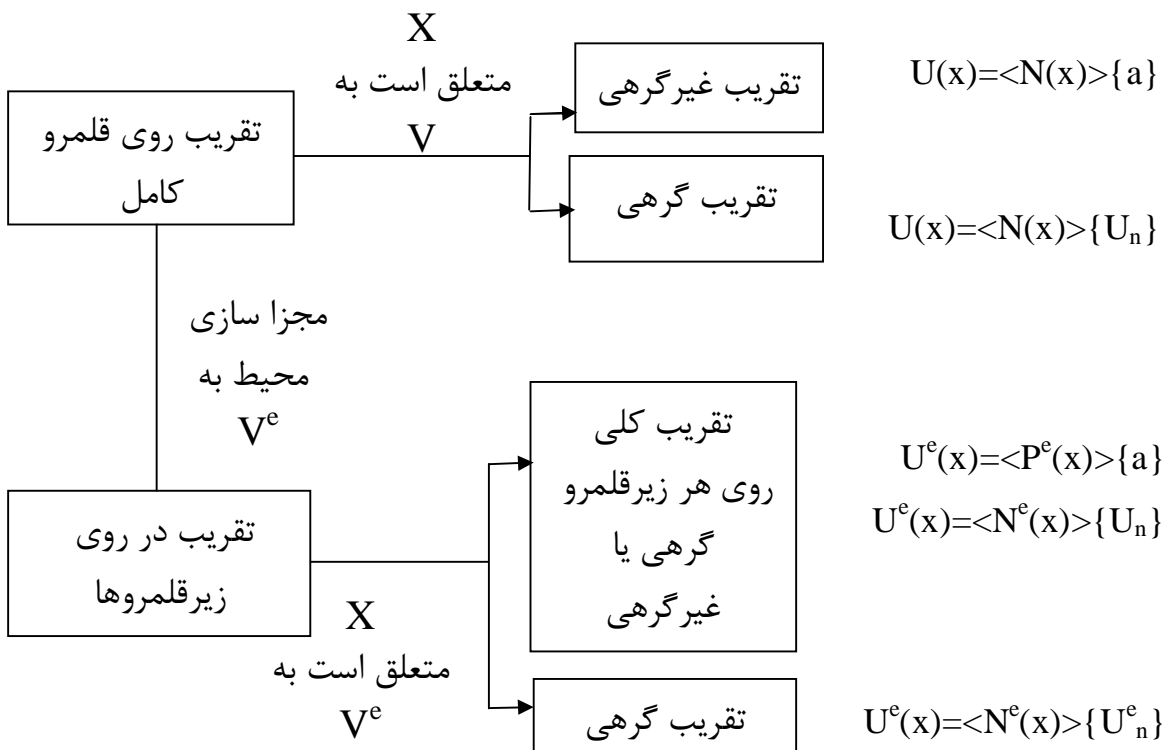
تابع تقریبی  $U^e(x)$  خطی برای هر المان:

$$U^1(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_4 \quad \text{المان 1:}$$

$N_1$  تابع خطی بر حسب  $x$  و  $y$  است که در  $x_1$  مقدار 1 را دارد و در  $x_2$  و  $x_4$  صفر است.

$$U^2(x) = N_1(x)u_2 + N_2(x)u_3 + N_3(x)u_4 \quad \text{المان 2:}$$

### خلاصه متدهای تقریب



### 2- تقریب هندسه المانها

#### 1-2: گره هندسی

مجموعه‌ای از  $\bar{n}$  نقطه روی قلمرو  $v$  که هندسه المانها را تعریف می‌کنند انتخاب می‌شوند. این نقاط «گره‌های هندسی» نامیده می‌شوند و می‌توانند با نقاط درون یا بی‌یکسان باشند. کل قلمرو  $v$  توسط زیر



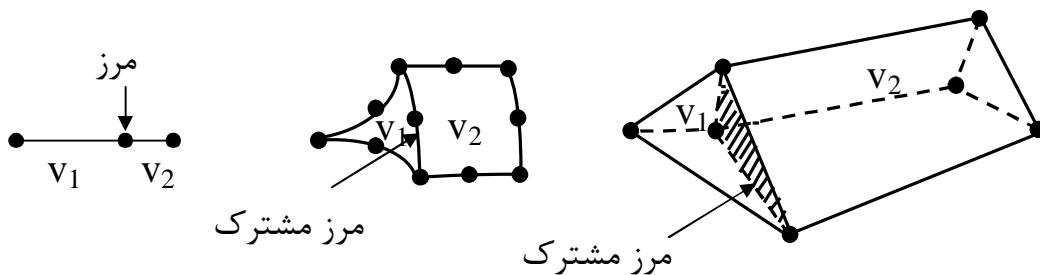
روش های عددی در خاک

قلمروهای  $V^e$  که شکل های ساده ای دارند جایگزین می شود. هر زیر قلمرو  $V^e$  (عنصر) بر حسب مختصات گره های هندسی متعلق به همان عنصر به طور تحلیلی کاملاً تعریف شده است. در مثال های 1-4 و 1-5، گره های 1، 2 و 3 و 4 و 1 و 2 و 3 و 4 گره های هندسی هستند، در مثال اول که یک بعدی است عناصر از دو گروه تشکیل شده و در مثال دوم هر عنصر بر حسب مختصات سه گره تشکیل دهنده مثلث تشکیل گردیده است.

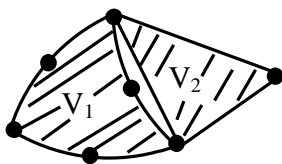
### 1-2-2: قاعده کلی مجزا سازی قلمرو توسط عناصر

قسمت کردن قلمرو کامل توسط عناصر  $V^e$  باید دو قاعده کلی زیر را پاسخگو باشد:

- دو عنصر مجاور فقط نقاط واقع بر مرزهای مشترک خود را در اشتراک دارند. با این قاعده از روی هم رفتن عناصر جلوگیری می کنیم. مرز مشترک بین المان ها می تواند به نقطه، خط (مستقیم یا منحنی) و یا صفحه باشد.



- مجموعه کلیه عناصر باید کاملاً قلمرو  $V$  را بپوشاند، هیچ فضای خالی در بین المان ها نباید موجود باشد.



هنگامی که مرز قلمرو  $V$  منحنی الخط است و یا سطوح منحنی شکلی است که ممکن است توسط المان های خطی کاملاً پوشیده نشود، خط های غیر قابل اجتنابی ایجاد می گردد که به آن «خطای مجزا سازی هندسی» می گوئیم. باید با انتخاب المان های کوچک و یا المان های منحنی شکل این خط را تا حد ممکن تقلیل داد.

روش های عددی در خاک

در قاعده فوق الذکر در صورت ساختن المانها با روش زیر حتماً رعایت می شوند:

- هر عنصر توسط مختصات گره های هندسی روی این عنصر به صورت منحصر به فردی تعریف شده باشد. معمولاً این گره ها روی مرزهای المانها واقع و بین چند عنصر به اشتراک گذاشته شده اند.
- در المان های دو یا سه بعدی که مرز المانها از مجموعه ای از منحنی ها و یا سطوح تشکیل شده اند، هر بخش از مرز المان به صورت منحصر به فردی توسط مختصات گره های هندسی که فقط روی آن بخش از مرز واقعند تعریف شوند. به این ترتیب بخش های مشترک مرز دو عنصر به صورت واحدی تعریف می گردند.

### 3-2-1: فرمول های کلاسیک عناصر

در زیر فرمول های متداول و طبیعی المان های یک، دو و یا سه بعدی عناصر تعریف می گردند: تعداد گره ها در پرانتز کنار اسم عناصر نوشته شده است.

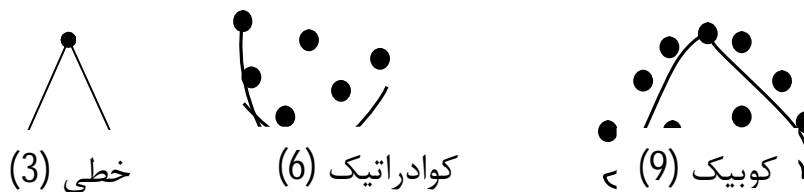
(a): عناصر یک بعدی:



(b): عناصر دو بعدی:

معمولاً مثلث یا چهار وجهی هستند که اضلاع آنها از منحنی های چند جمله ای درجه اول، دوم و سوم تشکیل شده اند:

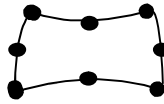
- عناصر مثلثی:



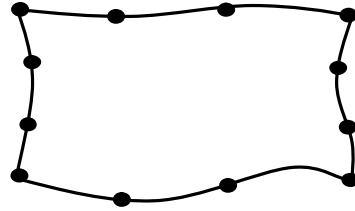
- عناصر چهار وجهی:



خطی (4)



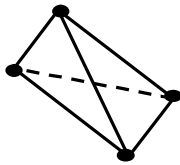
کوادراتیک (8)



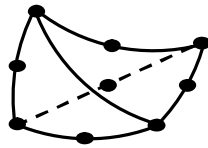
(c): عناصر سه : کوپیک (12)

عناصر چهار وجهی (هرمی شکل)، شش وجهی (مکعبی شکل) و یا پنج وجهی (منشوری شکل) هستند که هر وجه توسط سطوح چند جمله‌ای درجه اول، دوم و سوم تشکیل شده است:

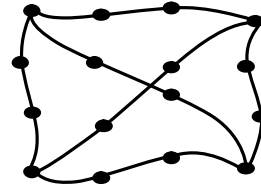
- عناصر چهار وجهی:



خطی (4)

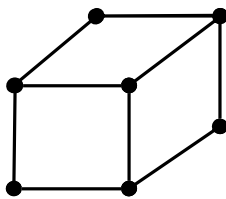


کوادراتیک (10)

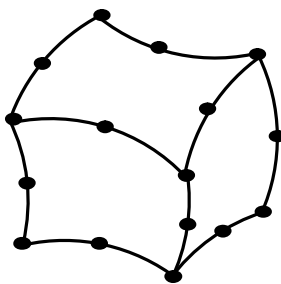


کوپیک (16)

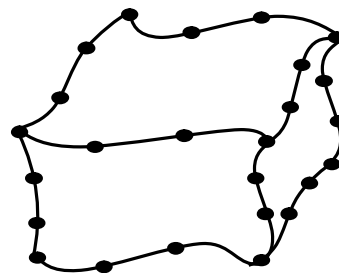
- عناصر شش وجهی:



خطی (8)

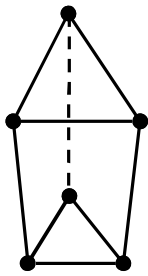


کوادراتیک (20)

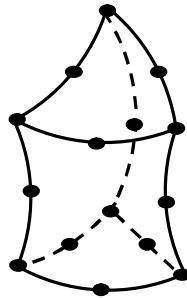


کوپیک (32)

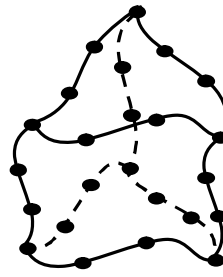
- عناصر پنج وجهی:



خطی (6)



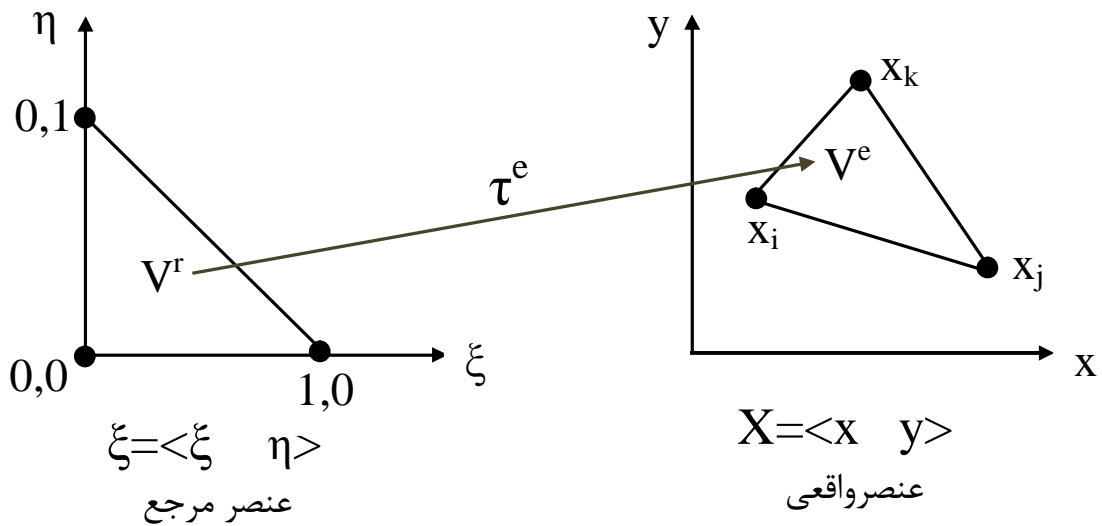
کوادراتیک (15)



کوبیک (24)

#### 4-2-1: عنصر مرجع

برای اینکه بتوان تعریف تحلیلی عناصر پیچیده را آسان نمود، عنصر مرجع تعریف می شود: عنصر مرجع  $V^e$  عنصری با شکل بسیار ساده است که در فضای مرجع تعریف می گردد و می تواند به عناصر واقعی  $V^e$  توسط یک تبدیل هندسی  $\tau^e$  تبدیل شود. در مورد یک مثلث می توان نوشت:



تبدیل  $\tau^e$  مختصات  $X^e$  هر نقطه از عنصر واقعی را بر حسب مختصات  $\xi$  نقاط نظیر روی المان مرجع تعریف می کند.

$$t^e : x \rightarrow X^e = X^e(x)$$

روش های عددی در خاک

تبدیل  $\tau^e$  به شکل و محل عنصر واقعی بستگی دارد در نتیجه به مختصات نقاط هندسی (گره های هندسی) که آن را تعریف می کنند وابسته است. در نتیجه برای هر المان واقعی یک تبدیل ویژه و مختلف با بقیه تبدیل ها موجود است.

$$t^e : \mathbf{x} \rightarrow X^e = X^e(\mathbf{x}, x_i, x_j, x_k, \dots)$$

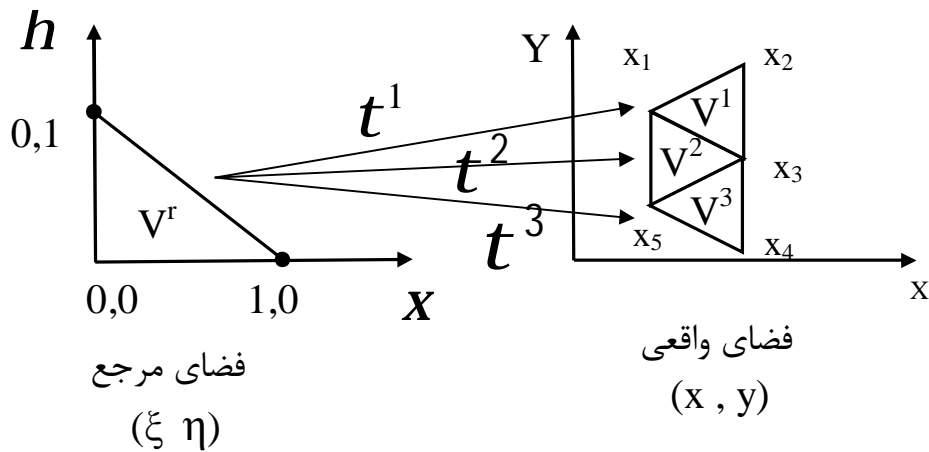
$X_i$  و  $X_j$  و  $X_k$  و ... مختصات گره های هندسی متعلق به المان  $e$  می باشند. تبدیل های  $\tau^e$  باید بتوانند المان های واقعی که قواعد ذکر شده در قبل را اقتاع کنند تولید نمایند، لذا این تبدیل ها باید خواص زیر را دارا باشند:

- این تبدیل «بیژکتیو» است یعنی به ازای هر نقطه از المان واقعی فقط یک نقطه نظیر روی المان مرجع موجود است و بالعکس.

- گره های هندسی المان واقعی نظیر گره های هندسی المان مرجع هستند.

- هر بخش از مرز المان مرجع که توسط گره های هندسی این مرز تعریف شده اند. نظیر بخشی از مرز المان واقعی است که توسط گره هایی نظیر تعریف شده اند.

یادآوری می کنیم که یک المان مرجع می تواند توسط تبدیل های متفاوت  $\tau^e$  المان های واقعی یک قلمرو کامل  $V$  را تولید کند.



1st element :  $t^1 : \mathbf{x} \rightarrow X^1 = X^1(\mathbf{x}, x_1, x_3, x_2)$

2nd element :  $t^2 : \mathbf{x} \rightarrow X^2 = X^2(\mathbf{x}, x_1, x_5, x_3)$

3rd element :  $t^3 : \mathbf{x} \rightarrow X^3 = X^3(\mathbf{x}, x_5, x_4, x_3)$

در نتیجه می توان تبدیل خطی ای را تعریف کرد که نسبت به مختصات  $\{x_n\}$  گره های هندسی عنصر واقعی  $V^e$  نوشته شده باشد:

$$t : \mathbf{x} \rightarrow X(\mathbf{x}) = [\bar{N}(\mathbf{x})] \{x_h\}$$

می توان توابع یکسان تبدیل برای مختصات مختلف اختیار کرد:

$$x(\mathbf{x}) = \langle \bar{N}(\mathbf{x}) \rangle \{x_h\}$$

$$y(\mathbf{x}) = \langle \bar{N}(\mathbf{x}) \rangle \{y_h\}$$

$$z(\mathbf{x}) = \langle \bar{N}(\mathbf{x}) \rangle \{z_h\}$$

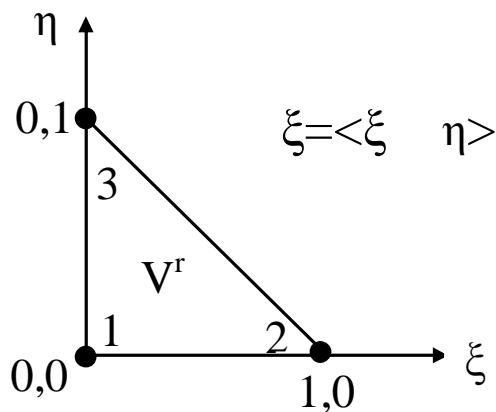
مثلا برای یک مثلث با مختصات  $x_i, x_j, x_k$ :

$$x(\mathbf{x}, h) = \bar{N}_1(\mathbf{x}, h)x_i + \bar{N}_2(\mathbf{x}, h)x_j + \bar{N}_3(\mathbf{x}, h)x_k = \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix}$$

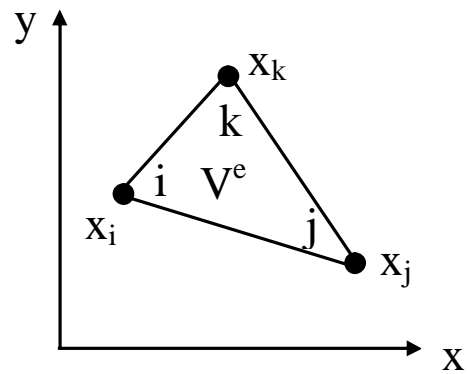
$$y(\mathbf{x}, h) = \bar{N}_1(\mathbf{x}, h)y_i + \bar{N}_2(\mathbf{x}, h)y_j + \bar{N}_3(\mathbf{x}, h)y_k = \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix}$$

توابع  $\bar{N}_i$  که معمولا چند جمله ای هایی بر حسب  $\xi$  هستند «توابع تبدیل هندسی» نامیده می شوند.

مثال 9-1: تعریف تحلیلی المان مثلثی با سه گره



فضای مرجع، المان مرجع



روش های عددی در خاک

عنصر مرجع به صورت تحلیلی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}x + h &= 1 \\x &\geq 0 \\h &\geq 0 \\h - 1 &= -1(x) \\m &= \frac{1}{-1} = -1\end{aligned}$$

تبدیل خطی  $\tau$  بر حسب  $\xi$  و  $\eta$  در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}x(x, h) &= \langle 1-x-h \quad x \quad h \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} \\y(x, h) &= \langle 1-x-h \quad x \quad h \rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

سه خاصیت ذکر شده اقلان شده اند:

- گره های هندسی  $V^T$  با مختصات  $\langle 0 \ 1 \ 0 \rangle, \langle 1 \ 0 \ 0 \rangle, \langle 0 \ 0 \ 0 \rangle$  تبدیل به گره های هندسی  $V^e$  با مختصات  $X_i$  و  $X_j$  و  $X_k$  شده اند مثلاً:

$$x(x=0, h=0) = \langle 1 \ 0 \ 0 \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} = x_i$$

- هر مرز از  $V^T$  به مرز نظیر در  $V^e$  تبدیل شده است. مثلاً مرز گذرنده از  $\langle 0 \ 1 \ 0 \rangle, \langle 1 \ 0 \ 0 \rangle$  که معادله آن  $1-x-h=0$  است به مرز گذرنده از  $X_j$  و  $X_k$  تبدیل شده است که معادله پارامتریک آن به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}x < 0 \quad x \quad 1-x > \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} &= x x_j + (1-x) x_k \\y < 0 \quad x \quad 1-x > \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix} &= x y_j + (1-x) y_k\end{aligned}$$

روش های عددی در خاک

معادلات خطی بر حسب  $\xi$  و  $\eta$  هستند و فقط به  $X_j$  و  $X_k$  وابسته می باشند که گره های روی مرز مزبور می باشند.

- تبدیل  $t$  بیژکتیو است اگر ماتریس ژاکوبین منفرد نباشد (صفر نباشد)

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial y}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i \end{bmatrix}$$

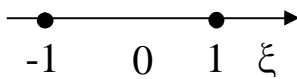
$$\det(J) = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i) = 2A$$

چون مساحت است فقط وقتی صفر می شود که رئوس در امتداد هم قرار گیرند.

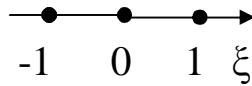
### 5-2-1: شکل های عناصر مرجع کلاسیک

در زیر فرم، عبارت تحلیلی عناصر مرجع کلاسیک داده می شوند.

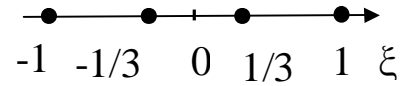
(a) المان های یک بعدی



خطی (2)



کوادراتیک (3)



کیوبیک (4)

$$V^r: -1 \leq x \leq 1$$

(b) عناصر دو بعدی

$$-1 \leq x \leq 1$$

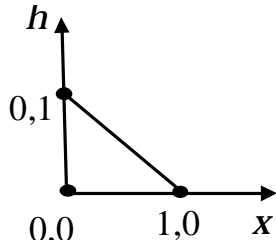
$$-1 \leq h \leq 1$$

$$V^r: \begin{cases} x+h \leq 1 \\ x \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

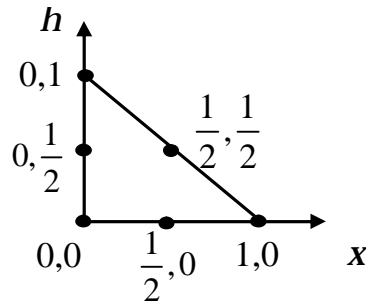


روش های عددی در خاک

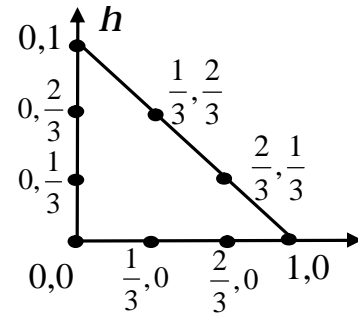
- عناصر مثلثی



خطی (3)



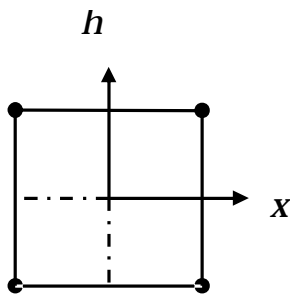
کوادراتیک (6)



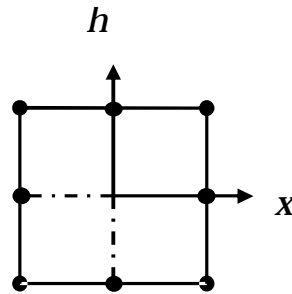
کیوبیک (9)

$$V^r : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq h \leq 1 \end{cases}$$

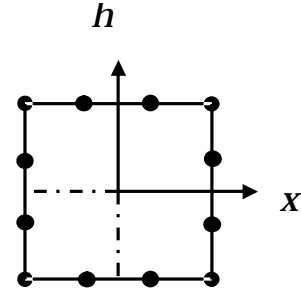
- عناصر مربعی



خطی (4)



کوادراتیک (8)



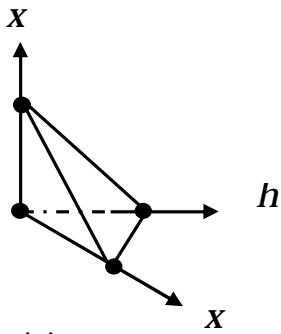
کیوبیک (12)

(C) عناصر مرجع سه بعدی

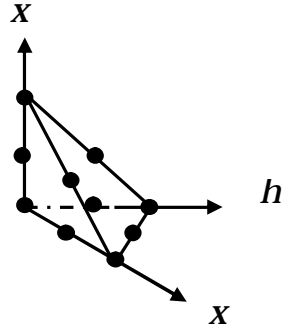
- عناصر چهار وجهی :

$$V^r : \begin{cases} x+h+z \leq 1 \\ x \geq 0 \\ h \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

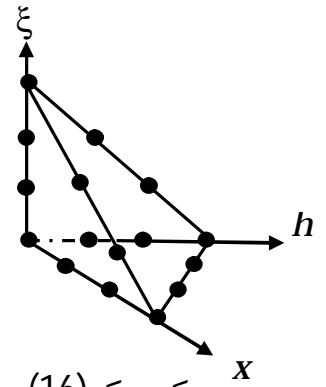
روش های عددی در خاک



خطی (4)



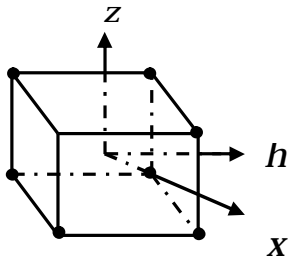
کوادراتیگ (10)



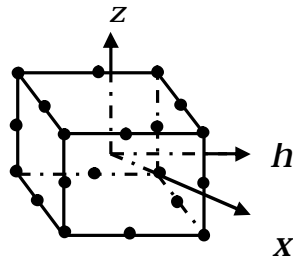
کیوبیک (16)

- عناصر مکعبی

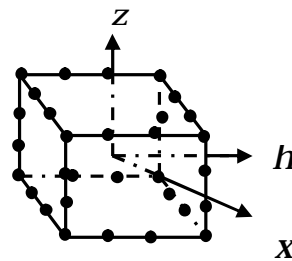
$$V^r : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq h \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{cases}$$



خطی (8)



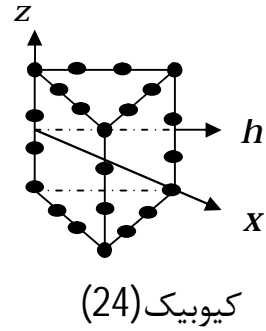
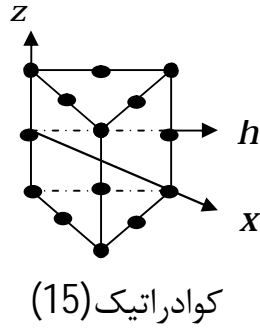
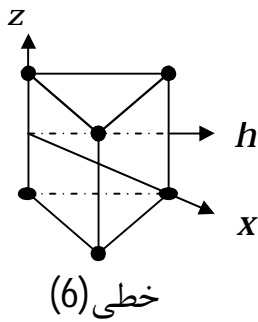
کوادراتیگ (20)



کیوبیک (32)

- عناصر منشوری

$$V^r : \begin{cases} x + h \leq 1 \\ x \geq 0 \\ h \geq 0 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{cases}$$



### 1: تقریب روی یک المان مرجع

1-3-1: عبارت تابع تقریبی  $o(x)$

روی قلمرو  $V$  مجموعه‌ای از  $n$  گره درون یابی با مختصات  $x_i$  انتخاب شده‌اند. این گره‌ها همان گره‌های هندسی نیز هستند. روی عنصر  $V^e$  تقریبی گره از نوع (1-5) را اختیار می‌کنیم.

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \dots N_{n^e}(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \mathbf{M} \\ u_{n^e} \end{Bmatrix} = \langle N(x) \rangle \{u_n\} \quad (1-13)$$

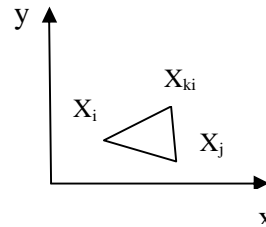
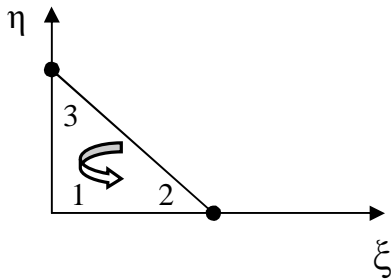
$x$  متعلق به  $V^e$  و  $u_1, u_2, \dots, u_{n^e}$  مقادیر دقیق  $U_{ex}$  روی گره‌های درون یابی عنصر هستند،  $N(x)$  توابع درون یابی روی المان واقعی می‌باشند. اگر تقریب روی عنصر واقعی را با تقریب روی عنصر مرجع جایگزین کنیم:

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\} \quad (1-14)$$

با  $t: x \rightarrow x(x) = [\bar{N}(x)] \{x_n\}$  که در آن  $\{u_n\}$  متغیرهای گرهی عنصر و  $\bar{N}(x)$  توابع درون یابی روی عنصر مرجع می‌باشند.

مثال 1-11 :

توابع درون یابی روی یک مثلث سه گرهی



گره های درون یابی همان گره های هندسی هستند.

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

درون یابی خطی روی عنصر واقعی با فرم (1-15) به صورت زیر نوشته می شود:

$$U(x, y) = \langle N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y) \rangle \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2A} [(y_k - y_j)(x_j - x) - (x_k - x_j)(y_j - y)]$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2A} [(y_i - y_k)(x_k - x) - (x_i - x_k)(y_k - y)]$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2A} [(y_j - y_i)(x_i - x) - (x_j - x_i)(y_i - y)]$$

$$2A(x_k - x_j)(y_i - y_j) - (x_i - x_j)(y_k - y_j)$$

تقریب روی عنصر مرجع به صورت زیر است:

$$U(\mathbf{x}, h) = \langle N_1(\mathbf{x}, h) \quad N_2(\mathbf{x}, h) \quad N_3(\mathbf{x}, h) \rangle \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

$$N_1(\mathbf{x}, h) = 1 - x - h$$

$$N_2(\mathbf{x}, h) = x$$

$$N_3(\mathbf{x}, h) = h$$

به شرط آن که نقاط  $(x, h)$  و  $(x, y)$  توسط تبدیل  $\tau$  به صورت زیر مطابق باشند عبارت  $U(x, y), U(x, h)$  یکسان خواهند بود.

$$t : \begin{cases} x(\mathbf{x}, h) = \langle \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & \bar{N}_3 \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} \\ y(\mathbf{x}, h) = \langle \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & \bar{N}_3 \rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix} \end{cases}$$

که در آن  $\bar{N}_1 \equiv N_1$  ,  $\bar{N}_2 \equiv N_2$  ,  $\bar{N}_3 \equiv N_3$  ← برای اینکه المان ایزوپارامتریک بماند.

### 1-3-2: ویژگی های تابع تقریبی $U(\mathbf{x})$

- (a) ویژگی های اصلی تقریب گرهی
- (b) پیوستگی روی عنصر
- (c) پیوستگی بین عناصر
- (d) توابع درون یابی چند جمله ای کامل

### 1-4: ساختن توابع $N(x), \bar{N}(x)$

توابع تبدیل هندسی  $\bar{N}(x)$  و توابع درون یابی  $N(x)$  روی المان مرجع همان خواص ذکر شده این دو تابع برای المان واقعی را باید دارا باشند. (1-3-2 و 1-2-4)

### 1-4-1: روش کلی ساخت

(a) انتخاب چند جمله ای پایه:

انتخاب چند جمله ای پایه یکی از گام های اصلی ساخت توابع بالا است.  $U(x)$  را روی المان مرجع به صورت زیر نمایش می دهیم که در آن ترکیب خطی تک جمله ای های شناخته شده ای در نظر گرفته شده اند  $P_1(x), P_2(x)$ :

$$U(x) = \langle P_1(x) \quad P_2(x) \quad \dots \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \mathbf{M} \\ a_{nd} \end{Bmatrix} = \langle P(x) \rangle \{a\} \quad (1-18)$$

مجموعه توابع  $P(x)$  پایه چند جمله ای تقریب را تشکیل می دهند. تعداد آنها مساوی تعداد متغیرهای گرهی یا درجه آزادی عنصر می باشد. (nd)

معمولا پایه چند جمله ای کامل استفاده می کنیم. جدول زیر تعداد تک جمله ای های لازم برای ساختن چند جمله ای کامل را تشریح می کند.

درجه چند جمله ای	یک بعدی	دو بعدی	سه بعدی
r	$n_d$	$n_d$	$n_d$
1	2	3	4
2	3	6	10
3	4	10	20
4	5	15	35
5	6	21	56

دیمانسیون	درجه چند جمله‌ای	پایه چند جمله‌ای $\langle P \rangle$	$n_d$
کامل			
1	1	خطی $\langle 1 \ x \rangle$	2
1	2	کوادراتیک $\langle 1 \ x \ x^2 \rangle$	3
2	1	خطی $\langle 1 \ x \ h \rangle$	3
2	2	کوادراتیک $\langle 1 \ x \ h \ x^2 \ xh \ h^2 \rangle$	6
3	1	خطی $\langle 1 \ x \ h \ z \rangle$	4
3	2	کوادراتیک $\langle 1 \ x \ h \ z \ x^2 \ xh \ h^2 \ hz \ z^2 \ xz \rangle$	10
ناقص			
2	2	(دو خطی) $\langle 1 \ x \ h \ xh \rangle$	4
3	3	$\langle 1 \ x \ h \ z \ xh \ hz \ xz \ xhz \rangle$	8

برای ساختن توابع تبدیل هندسی  $\bar{N}$  عبارت  $x$  را با همان فرم انتخاب می‌کنیم.

$$x(x) = \langle \bar{P}(x) \rangle \{a_x\}$$

$$y(x) = \langle \bar{P}(x) \rangle \{a_y\} \quad (1-19)$$

$$z(x) = \langle \bar{P}(x) \rangle \{a_z\}$$

تعداد توابع  $\bar{P}(x)$  و ضرایب  $\{a_x\}, \{a_y\}, \{a_z\}$  با تعداد گره های هندسی عنصر  $\bar{n}^e$  برابر است.  
تعاریف:

$\{a\}$ : متغیرهای کلی عنصر در مقابل متغیرهای گرهی  $\{u_n\}$

-  $U(x) = \langle \bar{P}(x) \rangle \{a\}$  تقریب کلی را در مقابل  $U(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\}$  تقریب گرهی تعریف می‌کند.

روش های عددی در خاک

-  $\{a_x\}, \{a_y\}, \{a_z\}$  مختصات کلی نامیده می شوند در مقابل مختصات گرهی  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  (b) رابطه بین متغیرهای کلی و متغیرهای گرهی:

می دانیم که برای هر گره درون یابی با مختصات  $\{X_i\}$ ، تابع  $u\{X\}$  مقدار گرهی  $u_{ex}\{X_i\}$  را به خود می گیرد.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \mathbf{M} \\ u_{n_d} \end{Bmatrix} = \{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle P_1(x_1) & P_2(x_1) & \dots & P_{n_d}(x_1) \rangle \\ \langle P_2(x_1) & P_2(x_2) & \dots & P_{n_d}(x_2) \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle P_1(x_{n_d}) & P_2(x_{n_d}) & \dots & P_{n_d}(x_{n_d}) \rangle \end{bmatrix} \{a\}$$

$$\{u_n\} = [P_n]\{a\} \quad (1-20)$$

در نتیجه

$$\{a\} = [P_n]^{-1}\{u_n\} \quad (1-21)$$

اگر روابط (1-19) را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \{x_n\} &= [\bar{P}_n]\{a_x\} \\ \{y_n\} &= [\bar{P}_n]\{a_y\} \\ \{z_n\} &= [\bar{P}_n]\{a_z\} \end{aligned} \quad (1-22)$$

می توان بعد از عکس کردن نوشت:

$$\begin{aligned} \{a_x\} &= [\bar{P}_n]^{-1}\{x_n\} \\ \{a_y\} &= [\bar{P}_n]^{-1}\{y_n\} \\ \{a_z\} &= [\bar{P}_n]^{-1}\{z_n\} \end{aligned} \quad (1-23)$$

(c) عبارات  $\bar{N}, N$

با گذاشتن روابط (1-21) ر (1-18) داریم:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= \langle P(\mathbf{x}) \rangle [P_n]^{-1}\{u_n\} \\ U(\mathbf{x}) &= \langle N(\mathbf{x}) \rangle \{u_n\} \\ \langle N(\mathbf{x}) \rangle &= \langle P(\mathbf{x}) \rangle [P_n]^{-1} \end{aligned} \quad (1-24)$$



روش های عددی در خاک

برای  $\bar{N}$  به همین طریق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x(\mathbf{x}) &= \langle \bar{N}(\mathbf{x}) \rangle \{x_n\} \\ y(\mathbf{x}) &= \langle \bar{N}(\mathbf{x}) \rangle \{y_n\} \\ z(\mathbf{x}) &= \langle \bar{N}(\mathbf{x}) \rangle \{z_n\} \end{aligned} \quad (1-25)$$

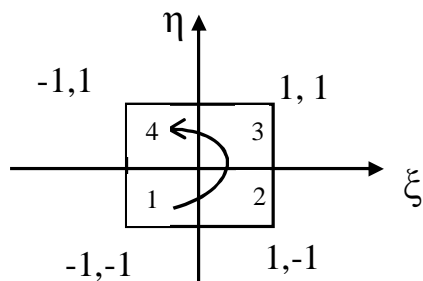
$$\langle \bar{N}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \bar{P}(\mathbf{x}) \rangle [\bar{P}_n]^{-1}$$

(d) مشتق گیری از تابع  $u(\xi)$

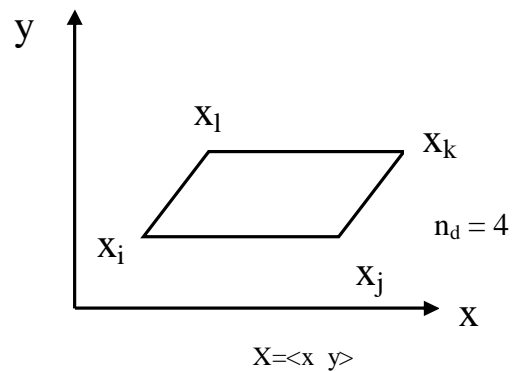
از (1-24) با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,h} \\ u_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle P_{,x} \rangle \\ \langle P_{,h} \rangle \\ \langle P_{,z} \rangle \end{bmatrix} [P_n]^{-1} \{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle N_{,x} \rangle \\ \langle N_{,h} \rangle \\ \langle N_{,z} \rangle \end{bmatrix} \{u_n\} = [B_x] \{u_n\} \quad (1-26)$$

مثال (1-16): ساختن تابع  $N(\xi)$  برای یک المان چهار گرهی ایزوپارامتریک



$$\xi = \langle \xi \quad \eta \rangle$$



(a) انتخاب پایه چند جمله ای

با درجه آزادی  $n_d = 4$  و چهار متغیر گرهی از پایه کامل نمی توانیم استفاده کنیم. بهترین انتخاب که تقارن و پیوستگی  $U$  را از بین المان ها نیز تأمین می کند، یک پایه دو خطی بر حسب  $\mathbf{x}, \mathbf{h}$  می باشد.

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad x \quad h \quad xh \rangle$$

روش های عددی در خاک

یادآوری می کنیم که  $\{a\} = \langle P \rangle U \langle x \rangle = \langle P(x) \rangle$  روی هر ضلع خطی می شود.  $h = \pm 1, x = \pm 1$

(b) تعیین  $[P_n]$ : با تخمین  $\langle P(x) \rangle$  برای هر چهار گره با مختصات  $\mathbf{X}$  خواهیم داشت:

$$[P_n] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & x & h & xh \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\{x_n\} = \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$\{h_n\} = \begin{cases} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$$

(c) معکوس کردن  $[P_n]$ : چون ارتوگونال است (حاصلضرب عددی ستون های مختلف صفر است) نرم هر ستون 4 است در نتیجه:

$$[P_n]^{-1} = \frac{1}{4} [P_n]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) عبارت  $\langle N \rangle$ :

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle = \langle P \rangle [P_n]^{-1}$$

$$\langle N \rangle = \left\langle \frac{1-x-h+xh}{4}; \frac{1+x-h-xm}{4}; \frac{1+x+h+xh}{4}; \frac{1-x+h-xh}{4} \right\rangle$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{4} (1-x)(1-h); (1+x)(1-h); (1+x)(1+h); (1-x)(1+h) \rangle$$

المان ایزوپارامتریک است  $\langle \bar{N} \rangle \equiv \langle N \rangle$

روش های عددی در خاک

$$x(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

### 1-4-2: ویژگی های توابع $\bar{N}, N$

(a) هر تابع درون یابی  $N_i(\mathbf{x})$  از ضرب عددی پایه چند جمله ای  $\langle P(\mathbf{x}) \rangle$  و ستون  $i$  ام ماتریس  $[P_n]^{-1}$  به دست می آید.

$$N_i(\mathbf{x}) = \langle p(\mathbf{x}) \rangle \{C_i\} \quad (1-27)$$

که در آن

$$[P_n]^{-1} = [\{C_1\} \quad \{C_2\} \quad \dots \quad \{C_i\} \quad \dots] \quad (1-28)$$

در نتیجه هر تابع  $N_i(\mathbf{x})$  یک ترکیب خطی از توابع  $\langle P(\mathbf{x}) \rangle$  می باشد و ضرایب، ترم های ستون  $\{C_i\}$  از ماتریس  $[P_n]^{-1}$  هستند. در نتیجه می توان از ماتریس  $[P_n]^{-1}$  برای ذخیره کردن کل ماتریس  $N_i$  استفاده نمود.

(b) رابطه (1-24)  $\langle N(\mathbf{x}) \rangle = \langle P(\mathbf{x}) \rangle [P_n]^{-1}$  با ضرب کردن دو طرف در  $[P_n]$  به صورت

$$\langle N(\mathbf{x}) \rangle [P_n] = \langle P(\mathbf{x}) \rangle \quad (1-29)$$

در می آید، با استفاده از تعریف (1-20) می توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n_d} N_i(\mathbf{x}) P_j(\mathbf{x}_i) \equiv P_j(\mathbf{x}) \quad j = 1, 2, \dots, n_d \quad (1-30)$$

از این رابطه می توان در ساختن توابع  $N_i$  استفاده کرد. این رابطه نشان می دهد که عبارات  $p_j(\xi)$  بخشی از پایه چند جمله ای استفاده شده در ساخت  $N_i$  می باشند.

روش های عددی در خاک

اگر فرض کنیم که مجموعه ای از توابع  $N_i$  به صورت تجربی ساخته شده باشند می توانیم اطمینان حاصل کنیم که تقریب  $U(j) \approx \langle N \rangle \{u_n\}$  یک چند جمله ای  $p(\xi)$  را در بر می گیرد اگر رابطه زیر اقیاناع شده باشد.

$$\sum_{i=1}^{n_d} N_i(x) P(x_i) \equiv P_j(x) \quad (1-31)$$

در بررسی همگرایی لازم می آید که بدانیم چه تک جمله ای هایی در تابع  $u(\xi)$  وجود دارند. مثلا برای کنترل اینکه بدانیم  $1, x, h$  در  $u(\xi)$  وجود دارد یا نه، کافی است ببینیم:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x) = 1 \\ \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x) x_i = x \\ \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x) h_i = h \end{cases} \quad (1-32)$$

**مثال (1-17):** تابع  $N$  در یک چهارضلعی خطی

می توان کنترل کرد که توابع  $N_i$  مثال (1-16) روابط (1-30) را اقیاناع می کند و مطابق با تک جمله ای های  $1, x, h, xh$  می باشند.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 N_i(x, h) &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \\ \sum_{i=1}^4 N_i(x, h) x_i &= -N_1 + N_2 + N_3 - N_4 = x \end{aligned} \quad (1-33)$$

$$\sum_{i=1}^4 N_i(x, h) h_i = -N_1 - N_2 + N_3 + N_4 = h$$

$$\sum_{i=1}^4 N_i(x, h) x_i h_i = N_1 - N_2 + N_3 - N_4 = xh$$

(c) با مشتق گیری از رابطه (1-30) روابط بین مشتقات توابع  $N_i$  به دست می آید.

$$\sum_{i=1}^{n_d} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} P_j(x_i) \equiv \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} \quad (1-34)$$

اینگونه روابط همراه با روابط (1-15) و (1-16) و (1-17) و (1-30) برای کنترل صحت فرم های صریح توابع  $N_i$  و مشتقات آن مفید هستند.

### 1-5: تبدیل عملگرهای مشتق

1-5-1: مشتقات درجه یک:

برای محاسبه مشتق یک تابع نسبت به  $\xi$  بر حسب مشتق آن تابع نسبت به  $X$  از مشتق گیری متوالی استفاده می کنیم.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial h} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial y}{\partial h} & \frac{\partial z}{\partial h} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1-36)$$

معادله بالا را به صورت  $\{\partial_x\} = [J]\{\partial_x\}$  می نویسیم که  $[J]$  ماتریس ژاکوبین تبدیل هندسی است. عناصر ماتریس ژاکوبین با مشتق گیری از رابطه تبدیل به دست می آید. به همین صورت می توانیم مشتق تابع نسبت به  $X$  را بر حسب مشتق آن تابع نسبت به  $\xi$  بنویسیم که به صورت

$$\{\partial_x\} = [j]\{\partial_x\} \quad (1-37)$$

در این معادله  $[j] = [J]^{-1}$  می باشد.

در برنامه نویسی ها معمولا از  $[j]$  استفاده می شود. زیرا لازم است مشتق تابع نسبت به  $X$  را از مشتقات تابع نسبت به  $\xi$  به دست آوریم.

$$\text{- عبارت } [j] = [J]^{-1} \quad (1-38)$$

فرم صریح معکوس  $[J]$  را برای حالات یک، دو و سه بعدی می نویسیم:  
\* یک بعدی

$$[J] = J_{11} ; [j] = [J]^{-1} = \frac{1}{J_{11}} \quad (1-39)$$

\* دو بعدی

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} ; [J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} \\ -j_{21} & j_{11} \end{bmatrix} \quad (1-40)$$

$$\det(J) = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$\det(J) \neq 0 \Leftrightarrow A \neq 0$$

\* سه بعدی

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23} & J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33} & J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22} \\ J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33} & J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} & J_{21}J_{13} - J_{23}J_{11} \\ J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22} & J_{12}J_{21} - J_{32}J_{11} & J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \quad (1-41)$$

$$\det(J) = J_{11}(J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23}) + J_{12}(J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33}) + J_{13}(J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22})$$

### - محاسبه عبارت های ماتریس [ J ]

عبارت های ماتریس [ J ] با مشتق گیری نسبت به  $\xi$  از رابطه زیر که در فصل اول داده شده است به دست می آید.

$$\langle x \ y \ z \rangle = \langle \bar{N}(\mathbf{x}) \rangle \left[ \{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\} \right] \quad (1-42)$$

$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  مختصات  $x, y, z$  گره های هندسی یک عنصر هستند. ماتریس ژاکوبین به صورت زیر نوشته می شود:

$$[j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial h} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \langle x \ y \ z \rangle = \begin{bmatrix} \langle \bar{N}, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \bar{N}, h \rangle \\ \langle \bar{N}, \mathbf{z} \rangle \end{bmatrix} \left[ \{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\} \right] \quad (1-43)$$

$$\bar{n}_e \times 3$$

$$\bar{n}_e \times 3$$

همانطور که دیده می شود، ماتریس ژاکوبین حاصل ضرب دو ماتریس، یکی مشتقات توابع تبدیل هندسی نسبت به  $\xi$  و دیگری مختصات نقاط گره های هندسی هر المان می باشد.

### - تبدیل یک انتگرال

می توان انتگرال روی المان واقعی  $V^e$  را برحسب انتگرال تابع روی المان مرجع بیان نمود:

$$\int_{V^e} f(x) dx dy dz = \int_{V^r} f(x(x)) \det(J) dx dh dz \quad (1-44)$$

این عبارت از آنجا به دست آمده است که به جای  $dv = \det(J) dx dh dz$  را گذاشته ایم.

مثال 1-17: ماتریس ژاکوبین یک عنصر چهار وجهی با چهار گره

مشتقات توابع  $\bar{N}$  داده شده در مثال (1-16) را به دست می آوریم:

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-h) & (1-h) & (1+h) & -(1+h) \\ -(1-x) & -(1+x) & (1+x) & (1-x) \end{bmatrix}_{2 \times 4} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \\ +h(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +h(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \\ +x(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +x(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = A_0 + A_1 x + A_2 h$$

$$A_0 = \frac{1}{8} [(y_4 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_2)]$$

$$A_1 = \frac{1}{8} [(y_3 - y_4)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_4)]$$

$$A_2 = \frac{1}{8} [(y_4 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_4 - x_1)]$$

در صورتی که المان مستطیلی باشد با اضلاع  $x_2 - x_1 = 2a$  و  $y_4 - y_1 = 2b$

$$x_1 = x_4 \quad x_2 = x_3$$

$$y_1 = y_2 \quad y_3 = y_4$$

$$[J] = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b \end{bmatrix}, \quad \det(J) = ab \equiv \frac{1}{4} (\text{area of rectangular})$$

روش های عددی در خاک

و تبدیل انتگرال یک تابع روی المان به صورت زیر نوشته می شود:

$$\int_{V^e} f(x) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(x)) ab dx dh$$

### 3-5-1 : مشتقات درجه دوم

مشتق درجه دوم یک تابع نسبت X بر حسب مشتقات نسبت به  $\xi$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial h} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + [T_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial h^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial h} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial h \partial z} \end{bmatrix} \quad (1-45)$$

این عبارت را به صورت زیر می نویسیم:

$$(1-45-b) \quad \{\partial^2 x\} = [T_1] \{\partial x\} + [T_2] \{\partial^2 x\}$$

- محاسبه  $[T_1]$

ماتریس  $[T_1]$  از مشتقات عبارات ماتریس  $[J]$  نسبت به  $\xi$  که در عبارت (1-27) داده شده است به دست می آید.  $[T_1]$  در صورتی که  $[J]$  ثابت باشد یعنی توابع  $\bar{N}(x)$  خطی باشند صفر می شود. از آنجایی که به طور کلی عبارت صریح برای  $[J]$  نداریم روش زیر جهت محاسبه  $[T_1]$  بدون استفاده از  $[J]$  داده می شود، با مشتق گیری از عبارت (1-36) بر حسب  $\xi$  خواهیم داشت:

$$\{\partial_x^2\} = [C_1] \{\partial_x\} + [C_2] \{\partial_x^2\} \quad (1-46)$$

که به صورت زیر می تواند نوشته شود:

$$\{\partial_x^2\} = [C_1][J] \{\partial_x\} + [C_2] \{\partial_x^2\} \quad (1-46-b)$$



با قرار دادن (1-46-b) در (1-45-b) :

$$\{\partial_x^2\} = ([T_1] + [T_2][C_1][j])\{\partial_x\} + [T_2][C_2]\{\partial_x^2\}$$

دو رابطه زیر به دست می آید:

$$(1-47a) \quad [T_2][C_2] = 1 \quad \text{or} \quad [T_2] = [C_2]^{-1}$$

$$(1-47b) \quad [T_1] + [T_2][C_1][j] = 0 \quad \text{or} \quad [T_1] = -[T_2][C_1][j]$$

ماتریس های  $[C_1]$ ,  $[T_2]$  به طور صریح در زیر داده شده اند.

$$[T_2] = \begin{pmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & j_{13}^2 & 2j_{11}j_{12} & 2j_{12}j_{13} & 2j_{13}j_{11} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & j_{23}^2 & 2j_{21}j_{22} & 2j_{22}j_{23} & 2j_{23}j_{21} \\ j_{31}^2 & j_{31}^2 & j_{33}^2 & 2j_{31}j_{32} & 2j_{32}j_{33} & 2j_{33}j_{31} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{13}j_{23} & j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21} & j_{12}j_{23} + j_{13}j_{22} & j_{11}j_{23} + j_{13}j_{21} \\ j_{21}j_{31} & j_{22}j_{32} & j_{23}j_{33} & j_{21}j_{32} + j_{22}j_{31} & j_{22}j_{33} + j_{23}j_{32} & j_{21}j_{33} + j_{23}j_{31} \\ j_{31}j_{11} & j_{32}j_{12} & j_{33}j_{13} & j_{31}j_{12} + j_{32}j_{11} & j_{32}j_{13} + j_{33}j_{12} & j_{31}j_{13} + j_{33}j_{11} \end{pmatrix} = [C_2]^{-1}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle J_{11} \ J_{12} \ J_{13} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \langle J_{21} \ J_{22} \ J_{23} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \langle J_{31} \ J_{32} \ J_{33} \rangle \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \langle J_{11} \ J_{12} \ J_{13} \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle J_{21} \ J_{22} \ J_{23} \rangle \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \langle J_{21} \ J_{22} \ J_{23} \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \langle J_{31} \ J_{32} \ J_{33} \rangle \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle J_{31} \ J_{32} \ J_{33} \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \langle J_{11} \ J_{12} \ J_{13} \rangle \right) \end{bmatrix}$$

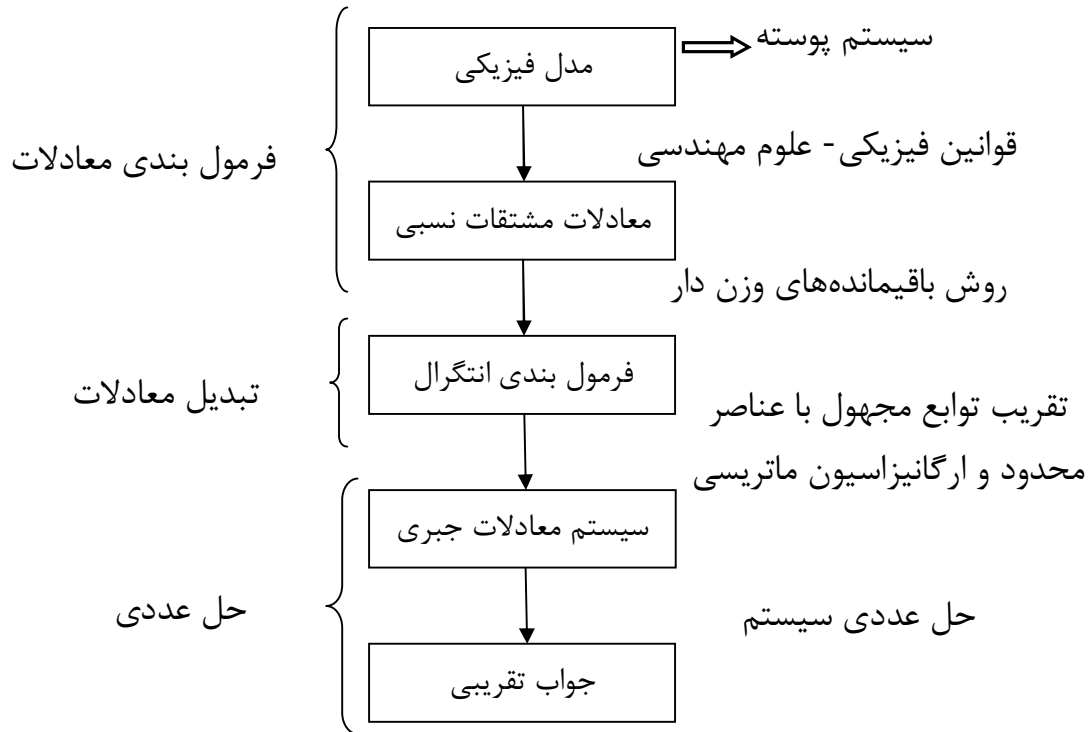
در حالت دو بعدی ماتریس های بالا به صورت زیر نوشته می شوند:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21} \end{bmatrix}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \langle j_{11} & j_{12} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial h} \langle j_{21} & j_{22} \rangle \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial h} \langle j_{11} & j_{12} \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle j_{21} & j_{22} \rangle \right) \end{bmatrix}$$

### فرمول بندی انتگرال

Formulation vationnelle – Formulation integrale – Integral Form



### 1- طبقه بندی سیستم ها

سیستم پیوسته (continue) و مجزا شده (discrete)

یک سیستم تابع مختصات مکانی و زمانی است. سیستم پایا (stationaire) اگر تابع t نباشد

روش های عددی در خاک

یکسری از مشخصات سیستم مثل ابعاد سیستم، مشخصات فیزیکی، شرایط حدی، بارگذاری شناخته شده هسته (d) و بخشی مثل تغییر مکان ها، سرعت و حرارت و تنش ها پارامترهای مجهول هستند. (U) یک مدل ریاضی روابطی است که بین مشخصات d و U نوشته می شود. درجات آزادی یک سیستم تعداد پارامترهای لازم برای تعریف کامل U در لحظه t مشخص می باشد.

یک سیستم را مجزا شده می نمایم (discret) اگر تعداد درجات آزادی محدود باشد و یک سیستم را پیوسته می نمایم اگر تعداد درجات آزادی نامحدود باشد. رفتار یک سیستم دیسکره (31) با سیستم معادلات جبری عرضه می شود در صورتی که در یک محیط پیوسته معادلات بصورت یک سیستم معادلات مشتقات نسبی می باشد.

### مسائل تعادلی، مقادیر ویژه و انتشار امواج

1) در مسائل تعادلی معادلات جبری زیر را برای یک سیستم پایا داریم:

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

سیستم پیوسته، معادلات مشتقات جزئی زیر می تواند عرضه شود:

$$\text{در محیط } v \rightarrow L(u) + f_v = 0 \quad \text{اپراتور دیفرانسیل}$$

$$\text{روی مرزهای } s \text{ از محیط } v \rightarrow C(u) = f_s \quad \text{اپراتور دیفرانسیل}$$

بارگذاریها

2) مسائل مقادیر ویژه یا مقادیر بحرانی: عبارت است از مسأله تعادلی بالا به اضافه محاسبه u مربوط به مقادیر بحرانی یکسری پارامترهای خاص  $\lambda$  را که به مقادیر ویژه معروف هستند.

$$\text{-سیستم پیوسته} \quad L_1(u) = I L_2(u) \quad \text{روی محیط } v$$

$$C_1(u) = I C_2(u) \quad \text{روی مرز } s$$

$L_1, L_2, C_1, C_2$  اپراتورهای دیفرانسیل هستند که مشخص کننده وضعیت سیستم می باشند.

$$\text{-سیستم مجزا شده} \quad [K]\{u\} = I [M]\{u\}$$

↓  
ماتریس جرم

روش های عددی در خاک

(3) مسائل انتشار یا مقادیر اولیه (برخلاف دو دسته قبل در این حالت مشتقات نسبت به زمان داریم)

-سیستم پیوسته

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + L(u) + f_v = \mathbf{0}$$

$$C(u) = f_s$$

$$\text{با شرایط اولیه } u = u_0 \text{ و } \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}_0 \text{ برای } t = t_0$$

-سیستم مجزا

$$[M]\{\dot{U}\} + [c]\{U\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad ; \quad \{U\} = \{U_0\} \quad , \quad \frac{d}{dt}\{U\} = \{\dot{U}_0\}$$

سیستم مجزا شده را خطی می گوئیم اگر  $F, C, M, K$  از  $u$  مستقل باشند.

یک سیستم پیوسته را خطی می گوئیم اگر  $L(u)$ ,  $C(u)$  اپراتورهای خطی باشند نسبت به  $u$  و مشتقات  $u$  و همچنین  $f_v$ ,  $f_s$  و  $m$ ,  $C$  مستقل از  $u$  باشند، یعنی:

$$L(u) = [L]\{u\}$$

$$C(u) = [C]\{u\}$$

که  $[L]$  و  $[C]$  ماتریس های اپراتور دیفرانسیل هستند که مستقل از  $u$  می باشد مثلا برای لاپلاسین می توان نوشت:

$$L(u) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \cdot u$$

درجه یک سیستم: تعداد مشتقاتی از مجهول ( $u$ ) که در معادلات موجود است.

- اپراتور دیفرانسیل  $L$  همگن است اگر  $L(u = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$

$$[L]\{u\} + \{f_v\} = \mathbf{0} \quad \text{یک سیستم معادلات مشتقات جزئی همگن است اگر در سیستم} \quad \{f_v\} = \mathbf{0} \quad \text{باشد.}$$

شرایط حدی روبرو همگن است  $[C]\{u\} = \{f_s\}$  اگر  $\{f_s\} = \mathbf{0}$  باشد.

یک سیستم معادلات دیفرانسیل متقارن یا  $\text{Self-adjoint}$  یا  $\text{auto-adjoint}$  است اگر

$$\int_v \langle u \rangle [L]\{V\} dv = \int_v \langle v \rangle [L]\{u\} dv$$

$u$ ,  $v$  به حد کافی مشتق پذیر هستند و شرایط حدی همگن را اقماع می کنند.

$$C(u) = C(v) = \mathbf{0}$$

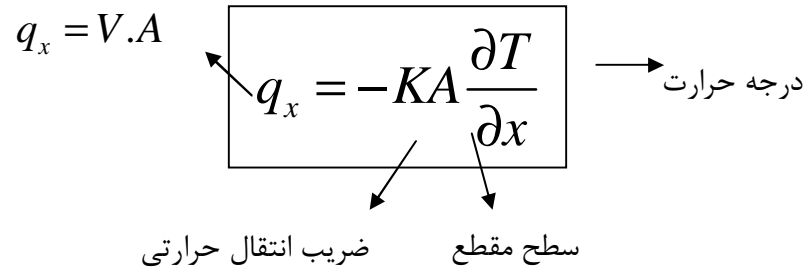
روش های عددی در خاک

یک سیستم مشتقات نسبی خطی وقتی مثبت است که:

$$\int_v \langle u \rangle [L] \{u\} dv \geq 0$$

اگر رابطه بالا برابر صفر باشد فقط برای  $u = 0$  به این سیستم «مثبت معین» می گوئیم.

### انتشار امواج حرارتی یک بعدی



$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = -KA \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -KA \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx$$

معادله تعادل انرژی

$$q_x dt + \cancel{q} A dt = q_{x+dx} dt + \overset{\text{ثابت حرارتی}}{Cr} \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

جریان حرارتی داخل شده در زمان dt	+	حرارت چشمه حرارتی در dt	=	جریان خروجی حرارتی در dt	+	تغییرات انرژی داخلی در زمان dt
--	---	----------------------------------	---	-----------------------------------	---	--------------------------------------

فرم کلی معادله انتشار حرارتی:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( KA \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} A = Cr \frac{\partial T}{\partial t}$$

روش های عددی در خاک

حالات خاص

اگر  $q=0$  ← معادلات فوریه

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( KA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = Cr \frac{\partial T}{\partial t}$$

اگر در حالات پایا باشیم ← معادلات پواسون

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( KA \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q = 0$$

اگر  $q=0$  باشد و حالت پایا باشیم: معادله لاپلاس

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( KA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

و اگر ضریب انتقال حرارتی ثابت باشد

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

این معادلات را می توان برای جریان آب در محیط غیرقابل تراکم استفاده کرد.

### مساله پیوسته دوبعدی

مساله تعادلی

معادله Poisson: سیستم پایا دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v = 0 \quad \text{روی } V$$

معادله ای است که انتشار امواج حرارتی (u) در محیط پیوسته دو بعدی همگن همان در حالت پایا را بیان می کند.

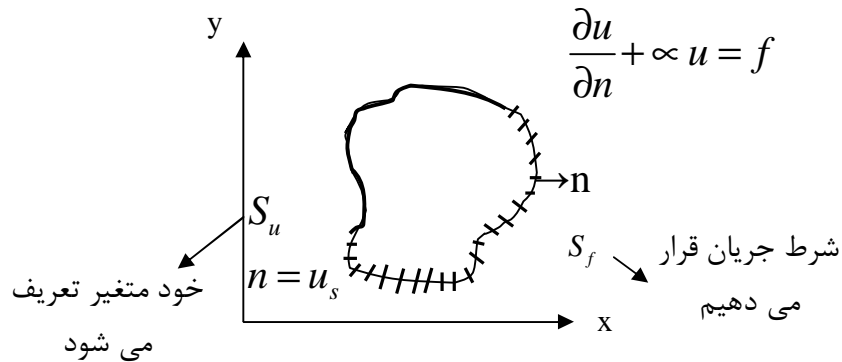
روی  $S_u$  - دیریکله Dirichlet  $u = u_s$

روی  $S_f$  - شرایط جریان  $\frac{\partial u}{\partial n} + a u = f_s$

Cauchy - شرط کوشی  $a \neq 0$

Neumann - شرط نیومن  $a = 0$

روش های عددی در خاک



معادلات تعادل در شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u + f_v = 0 \Rightarrow [L]\{u\} + \{fv\} = 0 \quad \text{روي } V$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} + a \right] u = f_s \Rightarrow [C_f]\{u\} = \{f_s\} \quad \text{روي } S_f$$

$$[1]u = u_s \Rightarrow [C_u]\{u\} = \{f_u\} \quad \text{روي } S_u$$

باید تابع  $u$  را که سه شرط بالا را اقلان می کند، پیدا کرد.

\*دبی حرارتی: شرایط نیومن

$$s = eE = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{*بارگذاری: تنش}$$

\*همواره شرایط مرزی مسئله باید بدرستی داده شود و هر جا داده نشده بود  $f_s = 0$  می باشد (نیومن صفر)

می توان «مقارن بودن» و «مثبت معین» بودن سیستم را امتحان کرد.

$$\int_v u \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dv = \int_v v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dv$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n} + a u = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} + a v = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{روي } S_f \text{ و} \\ \text{روي } S_u \end{array}$$

روش های عددی در خاک

$$\int_V u \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dv > 0 \quad \text{Si } a \geq 0$$

مثبت تعریف شده

### مسأله مقادیر ویژه

معادله Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + I u = 0 \quad \text{روی } V$$

با شرایط حدی از نوع دیریکله یا نیومن، حل این معادلات علاوه بر  $u$  پارامتر  $\lambda$  را نیز باید بدهد. با این معادله می توان مد ویژه  $u$  و فرکانس ویژه  $\sqrt{I}$  ارتعاش یک غشاء الاستیک زیر کشش را به دست آورد. همچنین معادله حاکم بر امواج الکترومسیک و ارتعاش مایعات در اکوستیک می باشد.

### مسأله گذرا و انتشار : معادله انتشار امواج حرارتی در محیط دوبعدی حالت گذرا

برای  $t > t_0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(t) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{روی } V$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + a u = f_s \quad \text{روی } S_f$$

$$u = u_s \quad \text{روی } S_u$$

برای  $t = t_0$

$$u = u_0 \quad \text{روی } V$$

## 2- متد باقیمانده های وزن دار Weight residual – Re'sidus ponde're's

2-1: باقیمانده:

اگر یک سیستم فیزیکی پیوسته ایستا را که رفتار آن توسط یک سیستم معادلات مشتقات نسبی خطی یا غیر خطی از درجه  $m$  عرضه شده باشد به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\text{روی } V \quad L(u) + f_v = 0 \quad (5)$$

$$\text{روی } S \quad C(u) = f_s \quad (6)$$



روش های عددی در خاک

$u$  تابع مختصات  $x$  می باشد، توابعی از  $u$  جواب های این مسأله تعادلی می باشند که معادلات بالا را اقلان کنند باقیمانده  $R(u)$  مقداری است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(u) = L(u) + f_v$$

این مقدار صفر است اگر  $u$  جواب واقعی معادلات باشد.  $R$  یک بردار است اگر معادلات بالا یک سیستم باشند.

2-2: فرم انتگرالی:

متد باقیمانده های وزن دار عبارت است از پیدا کردن توالی از  $u$  که فرم انتگرال زیر را صفر کند.

$$W(u) = \int_v \langle y \rangle \{R(u)\} dv = \int_v \langle y \rangle \{L(u) + f_v\} dv = 0 \quad (7)$$

برای تمام توابع وزنی  $Y$  که متعلق به مجموعه توابع  $E_y$  می باشند و  $u$  متعلق به مجموعه توابع  $E_u$  که جواب های قابل قبول سیستم که شرایط حدی را اقلان کرده و تا درجه  $m$  مشتق پذیر باشد.

مثال: فرم انتگرالی معادله Poisson

$$W = \int_v y(x, y) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v \right) = 0 \quad (\text{فرم 1})$$

که در اینجا  $u$  دو بار مشتق پذیر بوده و شرایط حدی را باید اقلان کند.

2-3) تبدیل فرم انتگرالی:

2-3-1) انتگرال گیری جزیی (Par Parties)

این عمل اجازه می دهد که فرم انتگرالی تیپ معادلات  $v$  را به صورتی که شرایط اعمال شده بر توابع قابل قبول  $u$  کاهش یابد در آوریم.

یادآوری:

- انتگرال یک بعدی

$$\int_{x_1}^{x_2} y \frac{du}{dx} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{dx} u dx + yu \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} y \frac{d^2 u}{dx^2} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{dx} \frac{du}{dx} dx + \left( y \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

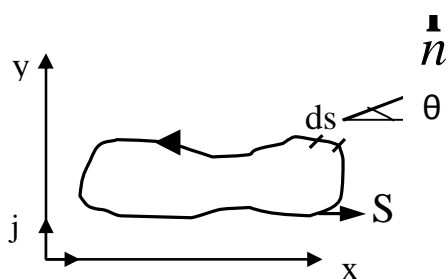
- انتگرال دو بعدی:

$$\int_A y \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = - \int_A \frac{\partial y}{\partial x} u dx dy + \oint_s y u dy$$

$$= - \int_A \frac{\partial y}{\partial x} u dx dy + \oint_s y u l ds$$

$$\int_A y \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = - \int_A \frac{\partial y}{\partial y} u dx dy - \oint_s y u dx$$

$$= - \int_A \frac{\partial y}{\partial y} u dx dy + \oint_s y u m ds$$



$$\left. \begin{aligned} l = n \cdot i = \cos \theta \\ m = n \cdot j = \sin \theta \end{aligned} \right\} \frac{\partial}{\partial n} = l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y}$$

$$dx = -m ds$$

$$dy = l ds$$

$$\int_A i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = - \int_A \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \oint_s y \frac{\partial u}{\partial x} l ds$$

$$\int_A (y \Delta u - u \Delta y) dx dy = \oint_s (y \frac{du}{dn} - u \frac{dy}{dn}) ds \quad ; \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- سه بعدی

$$\int_v y \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = - \int_v \frac{\partial y}{\partial x} u dx dy dz + \oint_s y u l ds$$

### 3-3-2) فرم انتگرالی ضعیف (faible یا weak)

انتگرال گیری جزء به جزء از معادله  $\nabla$  فرم خاصی را به ما می دهد که به فرم ضعیف معروف است، محاسن

این فرم به شرح زیر است:

1: درجه ماکزیمم مشتق  $U$  در فرم نهایی کاهش یافته است در نتیجه شرط مشتق پذیری  $u$  ضعیف تر است.

روش های عددی در خاک

2: بعضی از شرایط حدی که در فرم ضعیف ظاهر می شوند می توانند در فرمول بندی انتگرالی در نظر گرفته شوند و به جای اینکه نقطه توسط  $U$  اقناع شوند.

برعکس نسبت به  $Y$  مشتق  $Y$  در معادلات ظاهر شده و در نتیجه درجه مشتق پذیری نسبت به  $Y$  افزایش یافته است. به هر حال راه حل کلی استفاده از فرم ضعیف است اگرچه این راه حل شرط مشتق پذیری معادلات 5 را نیز کاملاً اقناع نکند زیرا می توان یک منحنی را با یک چند ضلعی با درجه ای که می خواهیم تقریب کنیم اگرچه این چند ضلعی در نقاط رأس مشتق پذیر نباشد.

### مثال

فرم انتگرالی معادله Poisson

در فرم انتگرالی به دست آمده در مثال قبل  $u$  باید:

- دو مرتبه مشتق پذیر باشد

- شرایط حدی را اقناع کند

-  $Y$  هیچ شرطی ندارد

پس از یک بار انتگرال گیری جزء به جزء

$$W = -\int_v \left( \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - y f_v \right) dv + \int_{S_f} y \frac{\partial u}{\partial n} ds + -\int_{S_u} y \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

$Y$  باید یک مرتبه مشتق پذیر باشد، از شرایط حدی استفاده می کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_s - au \quad \text{روی } S_f \quad \text{روی } S_f$$

$$\int_{S_f} y \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad \text{توسط} \quad \int_{S_f} y (f_s - au) ds \Rightarrow \text{برای جایگزینی}$$

$$y = 0 \quad \text{و روی } S_u$$

خواهیم داشت:

$$\text{فرم 1} \quad W = -\int_v \left( \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - y f_v \right) dv + \int_{S_f} y (f_s - au) ds = 0$$

$$-u = u_s \quad \text{روی } S_f$$

$$y = 0 \quad \text{روی } S_u$$

شرایط حدی

### پس از دو بار انتگرالسیون

$$W = \int_v \left( \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} \right) u + y f_v \right) dv + \oint_s \left( y \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial y}{\partial n} u \right) ds = 0$$

اگر تابع  $y$  طوری انتخاب شود که  $\nabla^2 y = 0$  باشد فقط می ماند معادله زیر اگر  $f_v = 0$  باشد

$$\text{فرم 3} \quad W = \oint_s \left( y \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial y}{\partial n} u \right) ds = 0$$

این معادله اساس روش B.E.M می باشد. (معادلات انتگرال مرزی)

$\Delta.T$  جدول صفحه 168 کتاب را اینجا به عنوان خلاصه بگیریم

بعد از چندین بار انتگرالسیون (S بار) می توان گفت که:

- U باید m-s بار مشتق پذیر باشد

-  $\Psi$  باید S بار مشتق پذیر باشد

- u باید شرایط حدی را که فقط مشتقات تا درجه  $m-s-1$  را دارد اقماع کند.

- روی حدود بالا  $y = 0$  است.

در نتیجه شرایط حدی که مشتقات با درجه بالا یا مساوی m-s را شامل می شود. در فرمول بندی در نظر گرفته شده اند.

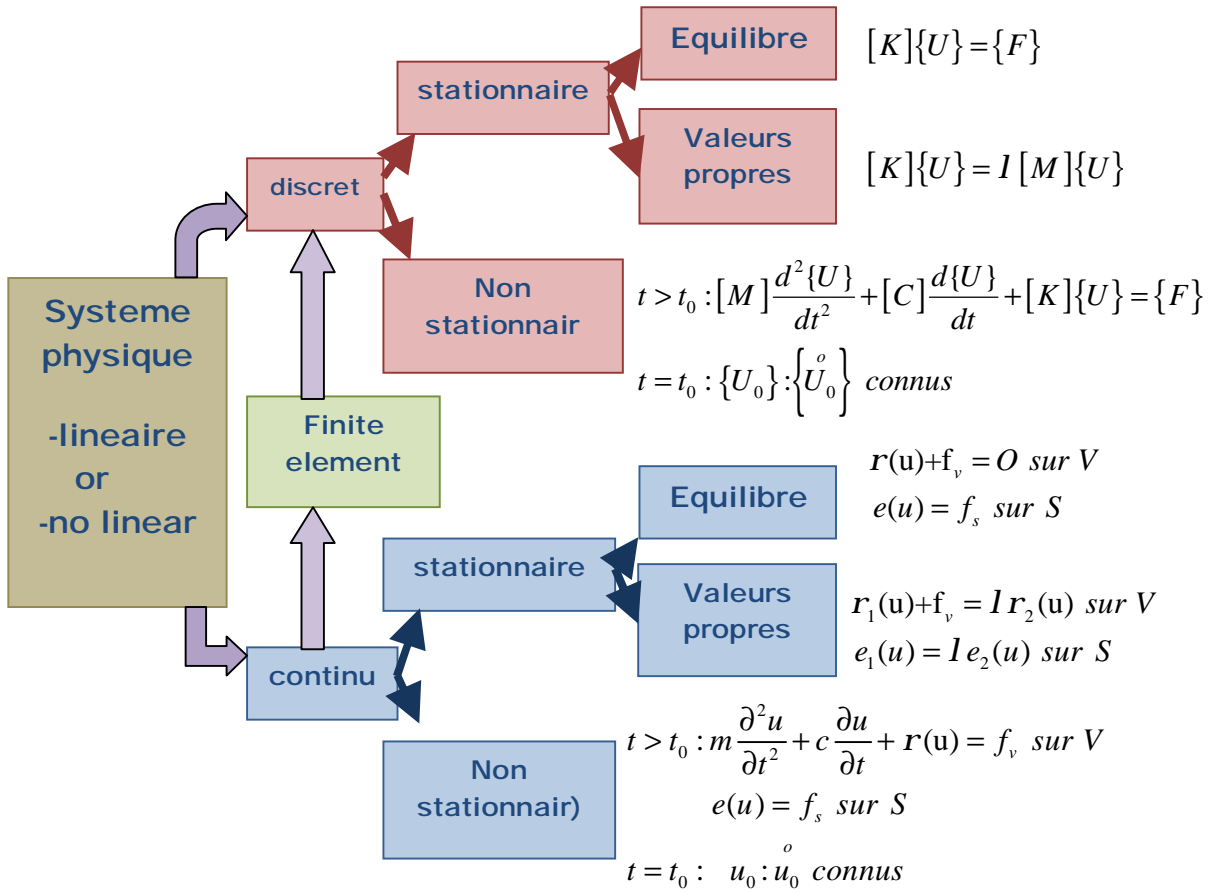


Figure 3.3 Classification des systeme physiques

### 2-3-3) ساخت فرمهای انتگرال اضافی

در بعضی مواقع سیستم معادلات  $L(u) - f_v = 0$  از حذف بعضی از پارامترها مثل تنش - گرادیان و... باید بدست آیند. مثل:

$$L_e(q) - f_v = 0 \quad \text{معادله تعادلی}$$

$$L_c(q, u) = 0 \quad \text{قانون}$$

معمولاً  $L$  بزرگتر از  $L_e$  و  $L_c$  از نظر درجه می باشد. در نتیجه بعضی وقت ها مفید است که فرم انتگرال را یکسره از معادلات 11 بدست آوریم که هم درجه کمتری دارد و هم متغیر  $q$  بطور explicit موجود است.

#### مثال: ساخت معادله پواسون

برای معادله انتشار حرارت با ضریب حرارتی 1 دو معادله داریم:

- بقای جریان حرارت  $q$

$$L_e(q) - f_v = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - f_v = 0$$

$f_v$ : یک چشمی حرارتی است در واحد حجم

- رابطه بین جریان حرارت و درجه حرارت

$$L_c(q, u) = 0 \quad \begin{cases} q_x + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ q_y + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$U(x, y)$  درجه حرارت در نقطه  $x$  و  $y$  می باشد.

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + f_v = 0 \quad \text{معادله ی پواسون از حذف } q_x \text{ و } q_y \text{ بدست آمده است.}$$

متد باقیمانده وزن دار را مستقیماً به معادلات بالا اعمال می کنیم

روش های عددی در خاک

$$W_r = \int_v \langle y_u \rangle \{L_e(q) - f\} dv + \int_v \langle y_q \rangle \{L_c(q, u)\} dv = 0$$

چون  $y_u$  و  $y_q$  مستقل از هم هستند:

$$\int_v \langle y_u \rangle \{L_e(q) - f\} dv = 0$$

$$\int_v \langle y_q \rangle \{L_c(q, u)\} dv = 0$$

فرم Mixte:

$$W_r = \int_v \langle y_u \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - f_v \right) + y_{q_x} \left( q_x + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + y_{q_y} \left( q_y + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \rangle dv$$

توابع وزنی را از جان طبیعت توابع  $u, q_y, q_x$  به شرح روبرو انتخاب می کنیم:

$$y_u = du, \quad y_{q_x} = dq_x, \quad y_{q_y} = dq_y$$

$$W_r = \int_v \langle du \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - f_v \right) + dq_x \left( q_x + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + dq_y \left( q_y + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \rangle dv = 0$$

#### 2-4: فونکسیونل

متد باقیمانده وزن دارد در بعضی از حالات معادل روشی است که یک فونکسیونل را ثابت می سازد. معمولاً در بعضی مواقع مستقیماً، مثلاً انرژی پتانسیل سیستم را نوشته و فرم انتگرالی را پیدا می کنیم که از طریق این استدلال بدست می آید که باید این فونکسیونل ثابت باشد.

$$\Pi = \Pi \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) \quad \text{-تغییرات درجه ی یک فونکسیونل}$$

فونکسیونل بالا انتخاب می شود که ترکیبی از توابع  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$  می باشد.

تغییرات درجه یک  $\Pi$ :

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} d \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \dots$$

$du$  و  $d \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  تغییرات هر گونه ی  $u$  و  $\frac{\partial u}{\partial x}$  هستند.

$\frac{\partial \Pi}{\partial u}$  مشتق معمولی است و بقیه مشتقات نیز به همین.

اپراتور  $d$  خصوصیات زیر را دارد:

روش های عددی در خاک

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial(du)}{\partial x}$$

$$d(du) = 0$$

$$d\left(\int_v u dv\right) = \int_v du dv$$

$$d(u + v) = du + dv$$

$$d(uv) = u dv + v du = d(vu)$$

$$d(cu) = c du \Rightarrow c = cte$$

**مثال: فونکسیونل یک بعدی**

$$\Pi\left(u, \frac{du}{dx}\right) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - uf\right) dx \quad f = cte$$

در نظر می گیریم.

$$d\Pi = d \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - uf\right) dx$$

$$d\Pi = \int_{x_1}^{x_2} \left(d\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) - duf\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d(du)}{dx} \frac{du}{dx} - duf\right) dx$$

$$d^2\Pi = d(d\Pi) = \int_{x_1}^{x_2} \left(d\left(\frac{du}{dx}\right)\right)^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d(du)}{dx}\right)^2 dx$$

زیرا  $d(du) = 0$  است. (اگر  $y = d(u)$  حتماً فرم گلرکین بدست می آید.)

## 2-4-2) فونکسیونل همراه یک فرم انتگرال

می توان برای معادلات 5 فونکسیونلی مثل  $\Pi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right)$  ساخت با شرط زیر

$$d\Pi \equiv W = 0 \quad (15)a$$

این فرم  $W$  فرم خاصی است که به نام گلرکین معروف است. با انتخاب  $\mathcal{Y} = d(u)$  در معادله 7 و استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء

$$W = \int_v \langle du \rangle \{L(u) + f_v\} dv = 0 \quad (15)b$$

این مطلب را می توان به شروط زیر بکاربرد: (این شروط کافی هستند ولیکن لازم نیستند.)

-  $L, c$  خطی هستند و تمام مشتقات  $L$  زوج هستند.

-  $f_s, f_v$  مستقل از  $u$  می باشند.



روش های عددی در خاک

مثال: فونکسیونل پواسون

$$L(u) + f_v = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v = 0$$

با شرط بالا: فونکسیونل موجود است. فرم بدست آمده در مثال 5 (فرم انتگرال 1) را بصورت زیر داریم:

$$W = \int_v \left( \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - y f_v \right) dv + \int_{s_f} y (au - f_s) ds = 0$$

$$W = \int_v \left( \frac{\partial(du)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(du)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - du f_v \right) dv + \int_{s_f} du (au - f_s) ds = 0$$

اگر فونکسیونل  $\Pi$  را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\Pi \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \int_v \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - u f_v \right) dv + \int_{s_f} \left( \frac{1}{2} a u^2 - u f_s \right)$$

می توان دید که  $d\Pi \equiv W = 0$  میباشد.

می توان تعبیر کرد که رابطه 15 شرط ثابت بودن فونکسیونل  $\Pi$  میباشد. در نتیجه می توان گفت جواب  $U$  که  $W$  را صفر می کند فونکسیونل  $\Pi$  را ثابت نگه می دارد. این حداکثر یا حداقل است در صورتیکه تغییرات دوم فونکسیونل  $\delta\Pi^2$  مثبت یا منفی باشد.

$$d^2\Pi \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) = \frac{\partial^2\Pi}{\partial u^2} du du + \frac{\partial^2\Pi}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} d \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) d \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \dots$$

**تعاریف:**

$$\left( \Pi \left( u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) = \int_v \left( a_1 u + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) dv$$
 خطی بودن فونکسیونل:  $\Pi$  نسبت به  $U$  خطی است

کوادراتیک بودن فونکسیونل:  $\Pi$  نسبت به  $U$  از درجه دوم است.

مخلوطی از خطی و کوادراتیک رانیز کوادراتیک می گویند.

**فونکسیونل کاملاً کوادراتیک:**

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \left\langle u \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots \right\rangle [D] \begin{Bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} dv$$

ماتریس  $[D]$  یک ماتریس متقارن است که به  $U$  بستگی ندارد.

تغییرات اول و تغییرات دوم آن به صورت زیر نوشته می شود:

روش های عددی در خاک

$$d\Pi = \int_V \left\langle du \quad \frac{\partial(du)}{\partial x} \quad \dots \right\rangle [D] \begin{Bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} dv$$

$$d^2\Pi = \int_V \left\langle du \quad \frac{\partial(du)}{\partial x} \quad \dots \right\rangle [D] \begin{Bmatrix} du \\ \frac{\partial(du)}{\partial x} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} dv$$

فونکسیونل  $\Pi$  مثبت تعریف شده است. اگر ماتریس  $D$  مثبت تعریف شده باشد، یعنی اینکه تمام مقادیر ویژه مثبت باشد، در نتیجه  $d^2\Pi$  مثبت است.

### مثال: فرم ماتریسی معادله پواسون

فونکسیونل مثال قبل بصورت زیر نوشته می شود:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} - 2uf_v \Bigg) dv + \int_{s_f} \left( \frac{au^2}{2} - uf_s \right) ds$$

$$d^2\Pi = dW = \int_V \left\langle \frac{\partial(du)}{\partial x} \quad \frac{\partial(du)}{\partial y} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(du)}{\partial x} \\ \frac{\partial(du)}{\partial y} \end{Bmatrix} \Bigg) dv + \int_{s_f} (a(du)^2) ds$$

ماتریس  $D$  مثبت فرض شده است، پس ماتریس مثبت تعریف شده است و  $d^2\Pi \geq 0$

### principe de stationnarite اصل پایایی (2-4-3)

$$L(u) + f_v = 0 \quad \text{over } V \quad 21-a$$

$$C_f(u) = f_s \quad \text{over } s_f \quad 21-b$$

$$C_u(u) = f_u \quad \text{over } s_u \quad 21-c$$

روش های عددی در خاک

فرم انتگرال بدست آمده از متدباقیمانده های وزن دار:

$$W(u) = \int_v \langle y \rangle \{L(u) + f_v\} dv = 0 \quad \leftarrow (for \ \forall \ y)$$

$$C_f(u) = f_s \quad over \ s_f$$

$$C_u(u) = f_u \quad over \ s_u$$

با انتخاب  $y = du$  وبا استفاده از انتگرال جزء به جزء برای سیستمهای conservative می توان

فونکسیونل  $\Pi$  طوری ساخت که جواب  $U$  مورد نظر این فونکسیونل را ثابت نگه دارد

$$d\Pi(u) = W(u) = 0$$

$$C_u(u) = f_u \quad over \ S_u$$

اصل پایایی می گوید: در میان توابع  $U$  قابل قبول، آن تابعی که معادلات 21-a, 21-b را اقلان

کند، فونکسیونل را ثابت نگه می دارد.

#### 4-4-2- ضریب لاگرانژ و فونکسیونل اضافی

با استفاده از ضریب لاگرانژ می توان فونکسیونل  $\Pi^*$  را طوری ساخت که شرایط ثابت بودن فونکسیونل، فرم

انتگرالی جدیدی که مشخصات خاصی را در نظر می گیرد بدست دهد. باین روش می توانیم به مشخصات

زیر دست یابیم:

- معرفی متغیرهای جدید فیزیکی به عنوان مجهول

- شرط مشتق پذیری خفیفی

#### مثال - تعریف ضریب لاگرانژ:

اکستریم تابع روبرو  $\Pi_1(u, v) = u^2 + v^2$  به طریق زیر بدست می آید:

$$d\Pi_1 = 2u du + 2v dv = 0 \quad \forall \ du, \ dv$$

$$u = v = 0 \quad \Pi_1(0, 0) = 0$$

فرض کنیم که مینیمم  $\Pi_1$  را با شرط زیر می خواهیم پیدا کنیم:

$$g(u, v) = u - v + 2 = 0$$

روش اول استفاده از معادله بالا در  $\Pi_1$  و حذف  $v$ :

روش های عددی در خاک

$$\begin{aligned}\Pi(u) &= 2u^2 + 4u + 4 \\ d\Pi &= 4(u+1)du = 0 \\ u = -1, v = 1 &\Rightarrow \Pi(1, -1) = 2\end{aligned}$$

متد ضریب لاگرانژ عبارتست از:

$$\begin{aligned}\Pi^*(u, v, I) &= \Pi_1(u, v) + I g(u, v) = u^2 + v^2 + I(u - v + 2) \\ d\Pi^* &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi^*}{\partial v} dv + \frac{\partial \Pi^*}{\partial I} dI = 0 \quad \forall du, dv, dI \\ d\Pi^* &= (2u + I)du + (2v - I)dv + (u - v + 2)dI = 0 \\ 2u + I &= 0 \quad u = -1 \\ 2v - I &= 0 \quad v = 1 \\ u - v + 2 &= I = 2\end{aligned}$$

با عمومیت دادن نتایج مثال بالامی توان گفت که پیدا کردن U ی که  $\Pi_1(u, q)$  فونکسیونل راثابت نگه می دارد با افتخار روابط زیر جواب مساله هستند.

$$\begin{aligned}g_1(u, q) &= 0 \\ g_2(u, q) &= 0 \quad \text{روي } v\end{aligned} \quad (25)$$

**M**

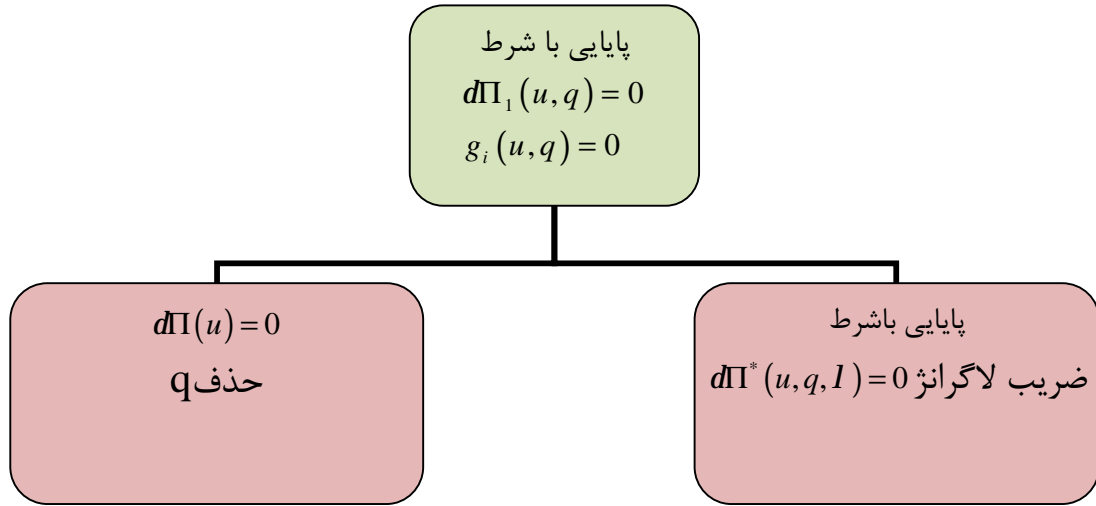
یک متد این است که از معادلات (25) q را حذف کرده و فونکسیونل  $\Pi$  را بر حسب U بدست آورده و یا با بکارگیری روش ضریب لاگرانژ m ضریب لاگرانژ  $I_n, L, I_2, I_1$  را معرفی کرده فونکسیونل عمومی راثابت نگه می داریم.

$$\Pi^*(u, q, I) = \Pi_1(u, q) + \int_v (I_1 g_1(u, q) + I_2 g_2(u, q) + L + I_m g_m(u, q)) dv$$

شرط ثبوت

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial I_i} = g_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

مجموعه ی مجهولات u و q و  $\lambda$  بجای u و q.  $\Pi^*$  مثبت معین نیست حتی اگر  $\Pi$  مثبت معین باشد. معمولاً ضرایب لاگرانژ مفهوم فیزیکی دارند و دبی یا جریان یا تنش هستند.



مثال روی poisson: فونکسیونل زیر را در نظر می گیریم:

$$\Pi(u) = \int_v \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - uf_v \right) dv + \int_{s_f} \left( \frac{1}{2} au^2 - uf_s \right) ds$$

و یامی توان با استفاده از  $q_x$  و  $q_y$  نوشت:

$$\Pi_1(u, q_x, q_y) = \int_v \left( \frac{1}{2} (q_x^2 + q_y^2) - uf_v \right) dv + \int_{s_f} \left( \frac{1}{2} au^2 - uf_s \right) ds$$

با دو شرط  $q_x + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  ,  $q_y + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  می توان به فونکسیونل  $\Pi$  رسید.

یا با استفاده از ضریب لاگرانژ:

$$\Pi^*(u, q_x, q_y, l_1, l_2) = \int_v \left( \frac{1}{2} (q_x^2 + q_y^2) - uf_v + l_1 \left( q_x + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + l_2 \left( q_y + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dv + \int_{s_f} \left( \frac{1}{2} au^2 - uf_s \right) ds$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi^*}{\partial q_x} dq_x + \frac{\partial \Pi^*}{\partial q_y} dq_y + \frac{\partial \Pi^*}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial \Pi^*}{\partial l_2} dl_2 = 0 \quad \text{هر ترم:}$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial u} du = \int_v \left( -f_v du + l_1 \frac{\partial du}{\partial x} + l_2 \frac{\partial du}{\partial y} \right) dv + \int_{s_f} (au - f_s) du ds = 0$$

روش های عددی در خاک

پس از انتگرال گیری جزء به جزء:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial u} = - \int_v \left( \frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{\partial I_2}{\partial y} + f_v \right) dv + \int_{s_f} (au - f_s + I_1 m + I_2 l) ds = 0$$

با فرض  $du = 0$  روی  $S_u$  شرایط دیگر ثبوت بدست می آید:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_x} = \int_v (q_x + I_1) dv = 0$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_y} = \int_v (q_y + I_2) dv = 0$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial I_1} = \int_v \left( q_x + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dv = 0$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial I_2} = \int_v \left( q_y + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dv = 0$$

## 2-5) مجزاسازی فرم انتگرال

فرم انتگرال زیر از معادلات مشتقات جزئی بدست آمده است.

$$W = \int_v y \cdot R(u) dv = \int_v y \cdot (L(u) + f_v) dv = 0$$

برای بدست آوردن یک جواب تقریبی در دومرحله مجزاسازی انجام می شود.

-انتخاب تابع تقریب مجهولات  $u = u(a_1, a_2, \dots, a_n)$  که می تواند گرهی و یا غیر گرهی باشد. (روش اجزای محدود)

$$\forall y \rightarrow W = \int_v y \cdot (L(u(a_1, a_2, \dots, a_n)) + f_v) dv = 0 \quad \text{برای}$$

-انتخاب یک مجموعه از  $n$  تابع وزنی مستقل  $y_1, y_2, \dots, y_n$

مسلم است که تعداد توابع وزنی معادل پارامترهای تقریب مجهولات می باشد. این انتخاب

تیپ  $y_i$  ها به راه حل های مختلف می انجامد (گالرکین)

$$W_1 = \int_v y_1 (L(u(a_1, a_2, \dots, a_n)) + f_v) dv = 0$$

$$W_2 = \int_v y_2 (L(u(a_1, a_2, \dots, a_n)) + f_v) dv = 0$$

**M**

$$W_n = \int_v y_n (L(u(a_1, a_2, \dots, a_n)) + f_v) dv = 0$$

روش های عددی در خاک

در مجموع این دو مرحله به سیستم معادلات جبری زیر می رسیم:

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

در جدول زیر خلاصه ای از روشهای توضیح داده شده عرضه گردیده است.

سیستم معادلات دیفرانسیل

شرایط حدی:  $\mathbf{1}(u) + f_v = 0$  روی  $v$

روی  $S_f$   $C_f(u) = f_s$

روی  $S_u$   $C_u(u) = f_u$

باقیمانده های وزن دار

فرم انتگرال

$$W = \int_v y (\mathbf{1}(u) + f_v) dv = 0$$

با اقناع شرایط حدی روی  $u$  در مرزهای  $S_u$  و  $S_f$

انتگرال جزء به جزء

فرم انتگرال ضعیف

$$W = \int_v (\mathbf{1}_1(y) + \mathbf{1}_2(u) + y f_v) dv + \int_{S_f} (C(y) f_s + \dots) ds = 0$$

با اقناع شرایط حدی برای  $u$  روی  $S_u$

انتخاب  $y \equiv du$  (سیستم کنسرواتيو)

انتخاب  $y$

تقریب  $u$

فونکسیونل  $\Pi$  آنچنانکه

$$d\Pi = W$$

تقریب  $u$

فونکسیونل مجزاشده

-----< جواب

فرم انتگرال

مجزاشده

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

شرط ایستایی  $d\Pi = 0$

-----à



روش های عددی در خاک

## 2-5-2) تقریب توابع U

$$e(x) = U(x) - U_{ex}(x) = \text{approximate} - \text{exact}$$

به سه روش زیر انجام می گیرد:

1) تقریب غیر گرهی روی محیط V (توابع پایه)

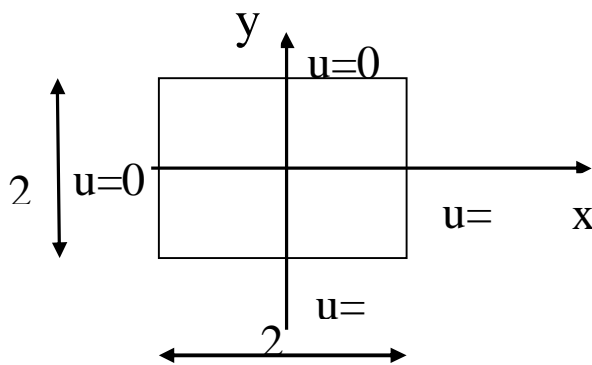
$$U = U(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = \langle P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \mathbf{M} \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (33)$$

2) تقریب گرهی روی محیط V (توابع درون یابی)

$$U = U(x, u_1, u_2, \dots, u_n) = \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \mathbf{M} \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (34)$$

3) تقریب توسط عناصر محدود: تقریب گرهی برای زیرمجموعه ها که عنصر نامیده میشود و بعلاوه آن

شرط پیوستگی بین المانها



مثال: تقریب غیر گرهی روی یک مربع

معادله poisson

روی مربع:

$$L(u) + f_v = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f = 0$$

$$u = 0 \quad \text{روی} \quad S \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

روش های عددی در خاک

یک تقریب که شرایط حدی و تقارن را اقلع می کند:

$$u = \langle P_1 \ P_2 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \langle P \rangle \{a\}$$

با:

$$P_1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

$$P_2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2) = P_1(x^2 + y^2)$$

در نتیجه:

$$L(u) = L(\langle P \rangle \{a\}) = L(P_1)a_1 + L(P_2)a_2$$

با:

$$L(P_1) = 2(x^2 + y^2 - 2)$$

$$L(P_2) = 2(6x^2 - 1)(y^2 - 1) + 2(6y^2 - 1)(x^2 - 1) + 2(x^4 - x^2) + 2(y^4 - y^2)$$

### 2-5-3) انتخاب توابع وزنی $\psi$

بنابر انتخاب  $\psi$  معادلات 31 به متدهای مختلفی به شرح زیر می انجامد:

1. متد هم قرارگیری نقاط collocation par point

$$y = d(x_i) \quad \text{گسترش دیراک در نقطه } x_i$$

2. متد هم قرارگیری زیر مجموعه ها collocation par sousdenation  $y = cte$

3. متد گلرکین (از همه بیشتر استفاده می شود)

$$y = \langle N \rangle \quad \text{or} \quad y = \langle P \rangle \quad \text{or} \quad y = du$$

4. متد حداقل مربعات  $y = L(\langle N \rangle) \quad \text{or} \quad y = L(\langle P \rangle) \quad \text{or} \quad y = d(L(u))$

### متد هم قرار گیری نقاط

تابع  $y_i(x)$  گسترش دیراک  $d(x_i)$  در نقطه  $x_i$  که نقطه ی هم قرار گیری نامیده می شود، می باشد به فرم انتگرال  $v$  نوشته می شود:

$$W = \int_v d(x_i) R(x, u) dv = R(x_i, u) = 0 \quad (35)$$

معادلات 31 به صورت زیر نوشته می شوند:

$$W_i(a) = (\mathbf{1}(u(x, a_1, a_2, \dots, a_n)) + f_v)_{x=x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

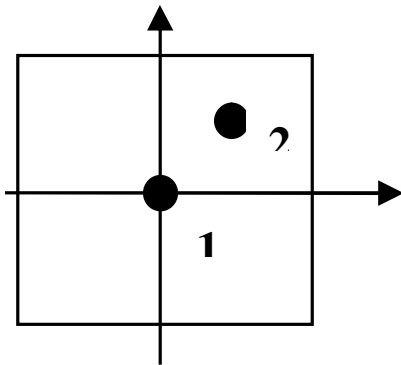
با استفاده از تقریب 33 می توان نوشت:

$$W_i(a) = (\mathbf{1}(\langle p \rangle \{a\}) + f_v)_{x=x_i} = (\langle \mathbf{1}(p) \rangle \{a\} + f_v)_{x=x_i} = 0 \quad (36)$$

دقت جواب بستگی به انتخاب  $x_i$  دارد. معمولاً باید تقارن مساله را اقتناع کرد. تعداد نقاط هم قرار گیری برابر است با تعداد پارامترهای  $a_i$ . این روش به علت مشکل بودن کم مورد استفاده قرار میگیرد ولیکن حسن آن این است که انتگرال گیری روی حجم حذف می شود که برای مسایل غیرخطی مفید است.

### مثال: حل معادله پواسون به روش "هم قرار گیری نقاط"

نقاط هم قرار گیری به صورت  $x_1 = (0, 0)$ ,  $x_2 = (0.5, 0.5)$  تعریف می شوند



تابع وزنی:

$$y_1 = d(x_1)$$

$$y_2 = d(x_2)$$

روش های عددی در خاک

روابط 36 به صورت زیرنوشته می شوند:

$$W_1 = \langle L(p_1) \quad L(p_2) \rangle_{x=x_1} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + f(x_1) = 0$$

$$W_2 = \langle L(p_1) \quad L(p_2) \rangle_{x=x_2} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + f(x_2) = 0$$

با استفاده از جواب مثال قبل

$$W_1 = -4a_1 + 4a_2 + f = 0$$

$$W_2 = -3a_1 - \frac{9}{4}a_2 + f = 0 \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0.2976 f \\ a_2 = 0.0476 f \end{array} \right.$$

مقدار  $u$  در مرکز برابر است با:

$$u(x_1) = \langle P_1(x_1) \quad P_2(x_1) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = a_1$$

$$u_c = u(x_1) = 0.2976 f$$

مقدار دقیق  $u$  با استفاده از راه حل توسط یکسری ، 14 جمله  $u_c = 0.2947 f$  می باشد.

اگر جواب رابایک پارامتر  $u = p_1(x)a_1$  بدست می آوریم:

$$u_c = 0.25 f : x_1 \text{ هم قرار گیری}$$

$$u_c = 0.333 f : x_2 \text{ هم قرار گیری می شدند.}$$

**متد هم قرار گیری زیر قلمرو:**

$n$  زیر قلمرو  $V^i$  در نظر گرفته و  $\psi_i$  را بصورت زیر اختیار می کنیم:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in V^i \\ 0 & \text{if } x \notin V^i \end{cases} \quad (37)$$

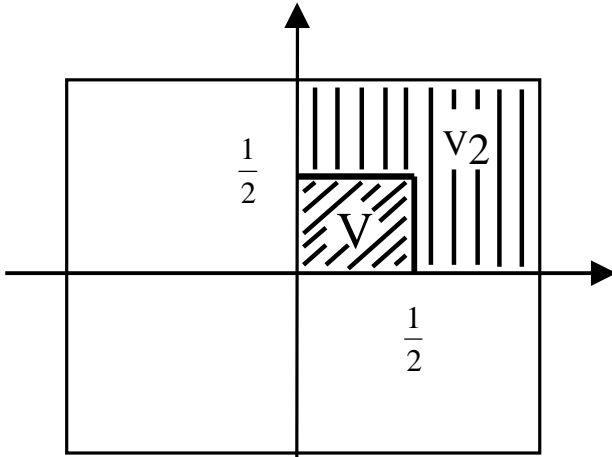
روابط 31 به صورت زیر می شوند:

$$W_i(a) = \int_{V^i} (\langle L(P) \rangle \{a\} + f_v) dv = 0 \quad (38)$$

روش های عددی در خاک

دقت جواب به انتخاب زیر قلمرو بستگی دارد. شرط تقارن باید احترام گذاشته شود. انتخاب زیر قلمرو مشکل است لذا این متد زیاد استفاده نمی شود. از آنجایی که این متد انتگرال گیری روی حجم دارد بهتراست گالرکین استفاده شود.

مثال: حل poisson توسط متد هم قرار گیری زیر قلمرو



معادله 38 می شود:

$$W_1 = \int_{v^1} \langle L(P_1) \quad L(P_2) \rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{v^1} f dv = -0.9167a_1 + 0.3875a_2 + 0.25f = 0$$

$$W_2 = \int_{v^2} \langle L(P_1) \quad L(P_2) \rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{v^2} f dv = -1.75a_1 - 3.587a_2 + 0.75f = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = 0.2994 f \\ a_2 = 0.0630 f \end{cases} \quad \text{value in center} \Rightarrow u_c = a_1 = 0.2994 f$$

### متد گالرکین

تابع  $\psi$  مجموعه تغییرات  $\delta u$  تابع  $u$  خواهد بود.

$$y = du = \langle P \rangle \{ da \} \quad \text{for } \forall \{ da \}$$

$\{ \delta a \}$  تغییرات پارامتر تقریب می باشد.

معادله 31 می دهد:

روش های عددی در خاک

$$W = \int_v du (L(u) + f_v) dv = 0$$

$$W = \langle da \rangle \int_v \{P\} (L(\langle P \rangle \{a\}) + f_v) dv = 0$$

از آنجایی که W باید برای تمام  $\{da\}$  ها صفر باشد، نتیجه می گیریم:

$$W_1(a) = \int_v P_1 (\langle L(P) \rangle \{a\} + f_v) dv = 0$$

**M**

$$W_n(a) = \int_v P_n (\langle L(P) \rangle \{a\} + f_v) dv = 0$$

این سیستم متقارن بوده اگر اپراتور L اتوادجوینت باشد.

مثال: حل معادله پواسون توسط متد گلرکین بدون انتگرال جزء به جزء

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \int_v \langle P_1.L(P_1) \quad P_1.L(P_2) \rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_v P_1 f dv = 0 \\ W_2 &= \int_v \langle P_2.L(P_1) \quad P_2.L(P_2) \rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_v P_2 f dv = 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

با استفاده از تقارن مساله

$$\left. \begin{aligned} 5.689 a_1 + 1.9505 a_2 &= 1.7778 f \\ 1.9505 a_1 + 2.3839 a_2 &= 0.7111 f \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 = 0.2922 f \quad a_2 = 0.0592 f$$

$$u_c = 0.2922 f \quad , \quad \text{exact value : } u_c = 0.2947 f$$

با اختیار یک پارامتر تقریب  $u = P_1(x, y) a_1$  خواهیم داشت:  $u_c = 0.3125 f$

با اختیار سه پارامتر تقریب خواهیم داشت:  $u_c = 0.2949 f$

با استفاده از انتگرالسیون جزء به جزء می توان معادلات 42 را بصورت زیر نوشت:

$$\left. \begin{aligned} W_1(a) &= \int_v L_1(P_1) (\langle L_2(P) \rangle \{a\}) dv - \int_v P_1 f_v dv - \int_{s_f} P_1 f_s ds = 0 \\ W_n(a) &= \int_v L_1(P_n) (\langle L_2(P) \rangle \{a\}) dv - \int_v P_n f_v dv - \int_{s_f} P_n f_s ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

در این حالت از شرایط با محدودیت کمتر می توان استفاده کرد. از تابع  $\langle P \rangle$  ساده ترمی توان استفاده کرد. این فرمولها (43) فرم گلرکین معادلات است که از همه بیشتر استفاده می شود.

مثال: حل معادله پواسون توسط متد گلرکین با انتگرال جزء به جزء

روش های عددی در خاک

با استفاده از فرم  $W$  بدست آمده در مثال های قبل و در نظر گرفتن:

$$\mathbf{I}_1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle; \quad \mathbf{I}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\}$$

معادله 43 با  $(f_s = a = 0)$  می شود:

$$W_1 = \int_v \left\langle \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_1}{\partial y}; \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} \right\rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - \int_v P_1 f dv = 0$$

$$W_2 = \int_v \left\langle \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \frac{\partial P_1}{\partial y}; \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} \right\rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - \int_v P_2 f dv = 0$$

این معادلات و نتایج آن با مثال قبلی یکسان است.

#### متد حداقل مربعات:

این متد عبارت است از حداقل کردن عبارت  $\Pi_m = \int_v R.R dv$  (44) نسبت به  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

باقیمانده است.

$$R = L(u) + f_v = \langle L(P) \rangle \{a\} + f_v \quad (45)$$

شرایط ایستایی برای معادله 44 به شکل زیر است:

$$\begin{array}{l} W = d\Pi_m(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \\ \left. \begin{array}{l} W_1(a) = \int_v L(P_1) \langle L(P) \rangle \{a\} + f_v dv = 0 \\ \mathbf{M} \\ W_n(a) = \int_v L(P_n) \langle L(P) \rangle \{a\} + f_v dv = 0 \end{array} \right\} \quad (46) \end{array}$$

با این متد از انتگرال گیری جزء به جزء نمی توان استفاده کرد و در نتیجه شرایط سختی برای تقریب

موجود است. لیکن همواره به سیستم معادلات متقارن و مثبت معین منتهی می شود.

روش های عددی در خاک

### مجزاسازی یک فونکسیونل (متد ریتز)

متد ریتز عبارت است از مجزاسازی یک تابع  $\Pi$  با استفاده از تقریب  $U$  از نوع غیر گرهی (معادلات 33) و سپس نوشتن شرایط پایایی نسبت به پارامترهای تقریب:

$$\Pi(u) = \Pi(u(a_1, a_2, \dots, a_n))$$

$$d\Pi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} da_2, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} da_n = 0$$

از این جا  $n$  معادله زیر حاصل می شود:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \quad (47)$$

**M**

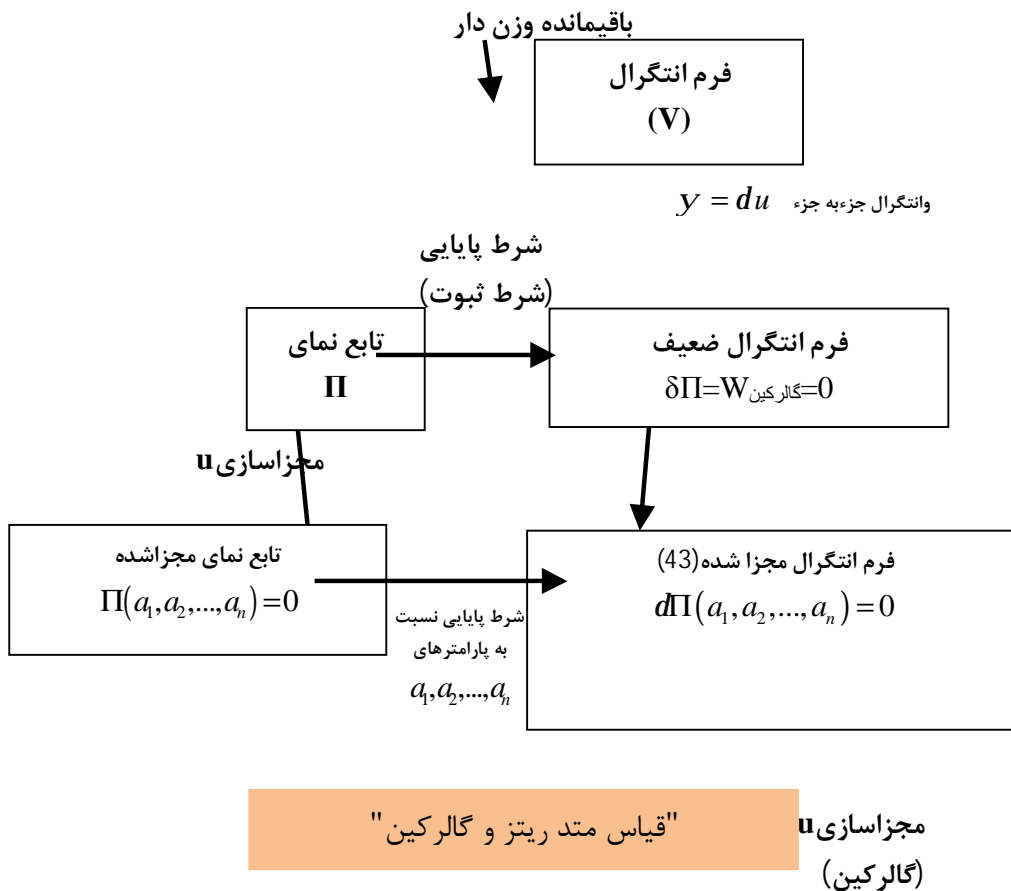
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0$$

اگر فونکسیونل موجود باشد، تغییرات درجه اول آن با فرم انتگرال  $W$  از نوع گالرکین یکسان است (معادله

$$d\Pi = W = 0 \quad (43)$$

در نتیجه جواب بدست آمده از روش ریتز با جواب بدست آمده توسط گالرکین یکسان خواهد بود.





### مثال) حل Poisson به روش ریتز

با استفاده از فرم تریسیل فونکسیونل داده شده در مثال و با استفاده از تقریب  $u$  در مثال خواهیم داشت

$$\Pi(a_1, a_2) = \frac{1}{2} \langle a_1 \ a_2 \rangle \int_v \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial x} \\ \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{pmatrix} dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - \langle a_1 \ a_2 \rangle \int_v \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} f dv = 0$$

با  $d\Pi = 0$  خواهیم داشت:

$$* \int_v \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} \\ \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial x} \\ \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{pmatrix} dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - \int_v \begin{Bmatrix} P_1 f \\ P_2 f \end{Bmatrix} dv = 0$$

برای یک المان روابط را می نویسیم و سپس با حلقه Do این کار را برای تمامی المان ها بسط می دهیم\*

این معادله با معادله ی مثال قبلی یکسان است.

### مثال: قیاس روشهای مختلف.

مقدار  $\frac{u_c}{f}$  که از متدهای متفاوت بدست آمده اند به شرح زیرند. توابع پایه ی در نظر گرفته شده عبارتند از:

$$P_1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1); P_2 = P_1(x^2 + y^2); P_3 = P_1(x^2 y^2)$$

اندازه دقیق	حداقل مربعات	گالرکین یا ریتز	هم قرار گیری زیر قلمرو	هم قرار گیری نقاط	توابع
0.2947	0.3409	0.3125	0.3750	0.2500	$P_1$
	0.2904	0.2922	0.2994	0.2976	$P_1, P_2$
	0.2949	0.2949			$P_1, P_2, P_3$

### عرضه ماتریسی روش اجزای محدود

در این فصل عرضه ماتریسی معادلات مورد نظر می باشد که گذار به برنامه نویسی را ممکن می سازد. در ابتدا روش اجزای محدود به مثابه روش مجزا سازی فرم انتگرالی از نوع گالرکین تعریف شده و انتگرالهای کلی  $W$  با مجموع انتگرال عنصری  $W^e$  جایگزین می شوند، سپس با استفاده از تقریب  $u$  توسط متد اجزای محدود مجزاسازی انجام می گیرد. در نتیجه ماتریسهای کلی و ماتریسهای عنصری شکل می گیرند. تکنیک جمع ماتریس های عنصری جهت به دست آوردن ماتریس کلی و بردارهای کلی استفاده شده در مسأله عرضه خواهند شد. خصوصیات ماتریس کلی و همچنین تکنیکهای ذخیره سازی این ماتریس و خصوصاً روش ذخیره سازی (خط آسمان) توضیح و تشریح می گردد.

1. روش اجزاء محدود

1-1- تعریف:

روش اجزاء محدود عبارت است از استفاده از یک تقریب از نوع اجزاء محدود برای توابع ناشناخته  $U$  به منظور مجزاسازی فرم انتگرالی  $W$  و سپس معادلات به دست آمده. در اینجا از فرم انتگرالی  $W$  استفاده شده است که توابع وزن دار  $y \equiv du$  می باشند.

$$W = \int_v du (L(u) + f_v) dv = 0 \quad (1)$$

روش های عددی در خاک

باجایگزین نمودن این انتگرال بامجموع انتگرال های روی هر عنصر  $V^e$  خواهیم داشت:

$$W = \sum_{e=1}^{n_{el}} W^e = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{V^e} du^e (L(u^e) + f_v) dv = 0 \quad (2-a)$$

به منظور محاسبه عبارت  $W^e$  که به فرم انتگرال عنصری موسوم است از تقریب از نوع اجزا محدود برای  $u$  و  $\delta u$  روی هر عنصر استفاده می شود

$$u^e = \langle N \rangle \{u_n\}$$

$$du^e = \langle N \rangle \{du_n\} \quad (2-b)$$

می دانیم که  $\langle N \rangle$  برای نقاط خارج از هر عنصر صفر می باشد و از آنجایی که  $\{u_n\}$  فقط براساس متغیرهای گرهی نوشته شده است،  $W^e$  فقط به متغیرهای عنصر  $e$  ارتباط دارد و همین خاصیت است که عامل اصلی موفقیت متد عناصر محدود است زیرا انتگرال یک عنصر محاسبه شده و با تکرار به کلیه محیط بسط داده می شود.

با استفاده از معادله (2-b) خواهیم داشت:

$$W^e = \int_{V^e} du^e (L(u^e) + f_v) dv$$

$$W^e = \langle du_n \rangle \left( \int_{V^e} \{N\} L(\langle N \rangle) dv \{u_n\} + \int_{V^e} \{N\} f_v dv \right) \quad (2-c)$$

همانطوریکه در فصل پیش بحث شد، معمولاً از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کرده و درجه ی مشتقهایی که در معادلات دخالت می کنند کاهش می دهیم. در نتیجه در عبارت  $W$  مشتقات  $\delta u$  و انتگرال های روی مرز به وجود خواهد آمد. پس عبارت  $W^e$  به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$W^e = \int_{V^e} \left( \langle d(\partial u^e) \rangle [D] \{ \partial u^e \} - du^e \cdot f_v \right) dv - \int_{s_f^e} du^e \cdot f_s ds \quad (3)$$

که در آن:

$$\langle \partial u^e \rangle = \left\langle u^e \quad \frac{\partial u^e}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \quad \dots \right\rangle$$

$$\langle \partial (du^e) \rangle = \left\langle du^e \quad d \left( \frac{\partial u^e}{\partial x} \right) \quad \dots \quad d \left( \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \right) \quad \dots \right\rangle$$

$[D]$  یک ماتریس مستقل از  $u^e$  و مشتقات آن برای عملگر خطی  $L$  می باشد.  $[D]$  برای عملگرهای غیر خطی تابع  $u^e$  و مشتقات  $u^e$  می باشد.

$f_s, f_v$ : نیروهای حجمی و سطحی می باشند.

روش های عددی در خاک

$V^e$ : حجم عنصر و  $S_f^e$ : مرز المان استکه روی آن شرایط حدی مربوط به نیروهای سطحی تعریف شده اند.

مثال 1) عبارت ماتریسی  $W^e$  برای معادلات پواسون  
 فرم انتگرالی عنصری  $W^e$  برای معادلات پواسون با حذف اندیس  $e$  روی  $u^e$  و  $\delta u^e$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \int_{V^e} du \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v \right) dv = 0$$

بعداز انتگرال گیری جزء به جزء:

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \left( \int_{V^e} ( \langle d(\partial u) \rangle [D] \{ \partial u \} - du f_v ) dv - \int_{S_f^e} du (f_s - au) ds \right)$$

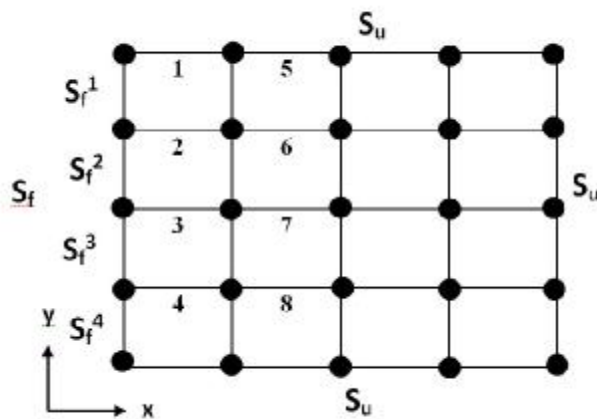
که در آن:

$$\langle d(\partial u) \rangle = \left\langle d \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad d \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\rangle$$

$$\langle \partial u \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

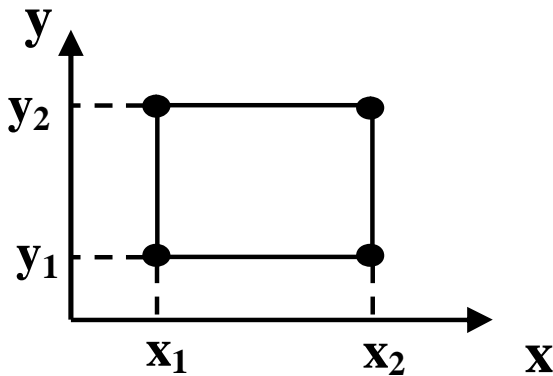
اگر محیط در نظر گرفته مطابق شکل (که به عناصر مستطیل شکل  $V^e$  تقسیم شده باشد) مستطیلی باشد و روی مرزهای این محیط دوبخش  $S_u$  و  $S_f$  در نظر گرفته شوند:



روش های عددی در خاک

می دانیم که انتگرال روی مرز فقط برای عناصر 1 و 2 و 3 و 4 موجود خواهد بود برای هر یک بصورت زیر نوشته می شود (4 گرهی با 2 آزادی: ماتریس 8\*8)

$$\int_{y_1}^{y_2} du(x_1, y)(f_s - au(x_1, y)) dy$$



با استفاده از معادلات (2-b) در معادله (3) و همچنین معدلات مشابه برای  $\partial u^e$ ,  $d(\partial u^e)$  بر حسب  $\langle du_n \rangle, \{u_n\}$  در معادله (3) به فرم ماتریسی زیر برای  $W^e$  مجزاشده خواهیم رسید که پایه ی روش عناصر محدود می باشد.

$$W^e = \langle du_n \rangle ([K] \{u_n\} - \{f\}) \quad (4)$$

$[K]$ : ماتریس عنصری است و برای عملگرهای خطی مستقل از  $u$  می باشد.

$\{f\}$ : بردار عنصری تحریکات

$\{u_n\}$ : بردار عنصری متغیرهای گرهی

$\{\delta u_n\}$ : بردار عنصری تغییرات متغیرهای گرهی می باشند.

فرم انتگرالی کلی (2-a) با جمع انتگرال های عنصری (4) بدست می آید:

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \langle du_n \rangle ([K] \{u_n\} - \{f\}) = 0 \quad (5-a)$$

و این فرم به صورت زیر شکل داده می شود:

$$W = \langle dU_n \rangle ([K] \{U_n\} - \{F\}) = 0 \quad (5-b)$$

که در آن  $[K]$  و  $\{U_n\}$  و  $\{\delta U_n\}$  و  $\{F\}$  ماتریس و بردارهای کلی هستند. گذار از معادله (5-a) به معادله (5-b) توسط روش جمع ماتریس های عنصری انجام می پذیرد و اجازه می دهد که برای کل عبارات ماتریسی و بردارهای عنصری، عبارات ماتریسها و بردارهای کلی  $[K]$  و  $\{F\}$  ساخته شوند. این مبحث در همین بخش مورد توجه قرار خواهد گرفت.

روش های عددی در خاک

از آنجاییکه  $W$  بجای تمام مقادیر  $\langle \delta U_n \rangle$  باید صفر باشد، سیستم معادلات زیر بر حسب  $\{U_n\}$  بدست می آید:

$$[K]\{U_n\} = \{F\} \quad (5-c)$$

در مسایل غیر پایا (non stationnaire) عبارتی از قبیل  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial t}$  ظاهر می شوند که فرم انتگرالی مربوطه به شکل زیر به معادلات (2-a) افزوده خواهند شد:

$$W^e = \int_{V^e} du^e \frac{\partial u^e}{\partial t} dv, \quad W^e = \int_{V^e} du^e \frac{\partial^2 u^e}{\partial t^2} dv \quad (6-a)$$

این عبارات پس از مجزاسازی با استفاده از معادلات (2-b) به صورت زیر در می آیند:

$$W^e = \langle du_n \rangle [c] \left\{ \frac{du_n}{dt} \right\}, \quad W^e = \langle du_n \rangle [m] \left\{ \frac{d^2 u_n}{dt^2} \right\}$$

$$[c] = [m] = \int_{V^e} \{N\} \langle N \rangle dv \quad (6-b)$$

که این ماتریسها، ماتریسهای عنصری جرم و میرایی خواهند بود. ( $[c]$  و  $[m]$ ) باقیمانده عنصری را با معادله زیر تعریف می کنیم:

$$\{r\} = \{f\} - [k]\{u_n\} \quad (6-c)$$

و باقیمانده کلی با جمع باقیمانده های عنصری بدست می آید:

$$\{R\} = \sum_e \{r\} = [F] - [K]\{U_n\} \quad (6-d)$$

## 2. فرم انتگرالی عنصری مجزاشده $W^e$

### 2-1) عبارت ماتریسی $W^e$

با استفاده از تقریب عنصری برای  $u$  و  $\delta u$  و مشتقات آنها و استفاده از معادله (3) می توان فرم مجزاشده  $W^e$  را بدست آورد:

$$u = \langle N \rangle \{u_n\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{u_n\}$$

$$\mathbf{M} \quad (7-a)$$

$$du = \langle N \rangle \{du_n\}$$

$$d \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{du_n\}$$

$$\mathbf{M}$$

در نتیجه:

$$\{\partial u\} = \begin{Bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle N \rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \{u_n\} = [B] \{u_n\} \quad (7-b)$$

$$\{d(\partial u)\} = \begin{Bmatrix} du \\ d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle N \rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \{du_n\} = [B_d] \{du_n\}$$

[B]: ماتریس مشتقات (ارتباط  $u, \partial u$ )

برای عملگر  $\mathbf{1}$  که auto-adjoint باشد:

$$\{d(\partial u)\} \equiv d(\{ \partial u \}) ; [B_d] \equiv [B]$$

در نتیجه معادله (3) با استفاده از معادلات (7) به صورت زیر نوشته میشود:

$$W^e = \langle du_n \rangle \left( \int_{V^e} [B_d]^T [D] [B] dv \{u_n\} - \int_{V^e} \{N\} f_v dv - \int_{S_f^e} \{N\} f_s ds \right) \quad (8-a)$$

بامقایسه با معادله (4):

$$[K] = \int_{V^e} [B_d]^T [D] [B] dv \quad (8-b)$$

$$\{f\} = \int_{V^e} \{N\} f_v dv + \int_{S_f^e} \{N\} f_s ds \quad (8-c)$$

$$\{f\} = \text{volume} + \text{surface}$$

مثال 2) عبارت ماتریسی معادلات پواسون

تقریب  $u$  روی عنصر به صورت زیر نوشته می شود:

$$u = \langle N \rangle \{u_n\}$$

$$\partial \{u\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \end{Bmatrix} \{du_n\} = [B_d] \{du_n\} = [B] \{du_n\}$$

روش های عددی در خاک

در این حالت  $[B_d] \equiv [B]$  زیرا لاپلاسیان یک عملگر auto-adjoint می باشد.

$$[K] = \int_{V^e} [B]^T [D][B] dv + \int_{S_f^e} a \{N\} \langle N \rangle ds$$

ماتریس  $K$  متقارن است.

$$\{f\} = \int_{V^e} \{N\} f_v dv + \int_{S_f^e} \{N\} f_s ds$$

در حالتی که بارگذاری در نقطه  $x = x_i$  در روی سطح متمرکز باشد، تابع  $f_s$  یک گسترش دیراک

$$f_s(x_i) = f_i d(x_i) \quad \text{خواهد بود.}$$

و بردار  $\{f\}$  مربوط به صورت  $\{f\} = \{N(x_i)\} f_i$  نوشته می شود.

## 2-2) فرم انتگرالی $W^e$ روی عنصر مبنا

معمولاً توابع درون یابی روی عنصر مبنا به صورت  $N(x)$  داده می شود. عبارات  $W^e$  در (3) و (8) شامل موارد زیر می باشد:

- مشتقات  $u$  و  $\delta u$  نسبت به  $x$

- متغیرهای گرهی  $du_n, u_n$  بوده و در عناصر مختلف مقادیر گرهی مشتقات  $u$  و  $\delta u$  نسبت به  $x$  می باشد.

- انتگرال گیری روی عنصر واقعی  $V^e$

لذا لازم است که مشتقات نسبت به  $x$  و انتگرال گیری روی  $V^e$  به مشتقات نسبت به  $\xi$  و انتگرال گیری روی عنصر مبنا  $V^T$  تبدیل شوند.

### 2-2-1) تبیل مشتقات نسبت به $x$

مشتقات  $u_{,x}, u_{,y}, u_{,z}, u_{,xx}, u_{,zz}$  نسبت  $u_{,xx}, u_{,z}, u_{,y}, u_{,x}$  و عبارات عکس ماتریس ژاکوبین  $[j] = [y]^{-1}$  که از تبدیل هندسی بدست آمده اند بر حسب روابطی بیان می گردند، مثلاً برای یک بعد می توان نوشت:

$$u(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} \frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} \left\langle \frac{dN(x)}{dx} \right\rangle \{u_n\}$$

عبارت (7-b) ماتریس  $[B]$  می تواند به فرم زیر تغییر فرم یابد:

$$[B] = [Q][B_x]$$



روش های عددی در خاک

$[B_x]$ : ماتریسی است مشابه ماتریس مشتقات  $[B]$  ولیکن براساس مشتقات برحسب  $\xi$  توابع درون یابی  $N(\xi)$  در آن در نظر گرفته شده اند.

$[Q]$  ماتریسی است که ترمهای ماتریس ژاکوبین در آن موجود می باشد.

\*\* هموزن (همگن): روی یک محور

انیزوتروپی: روی محورهای مختلف:

- انیزوتروپی هیدرولیکی: تغییرات  $k_x, k_y$

- انیزوتروپی مکانیکی: تغییرات  $E_x, E_y$

مثال 3) تبدیل ماتریس  $[B]$  فرم انتگرالی پواسون

$$[B] = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial h} \right\rangle \end{bmatrix} = [Q][B_x]$$

در این حالت  $[Q] = [J]^{-1}$  و در نتیجه:

$$[K] = \int_{V^e} [B_x]^T [Q]^T [D][Q][B_x] dv$$

## 2-2-2) تبدیل متغیرهای گرهی

در صورتیکه عنصر، عنصر مختلط نباشد تغییری حاصل نمی گردد. در صورتیکه با عناصر مختلط سروکار داشته

باشیم، متغیرهای گرهی  $\{u_n\}_x$  روی عنصر مبنا و  $\{u_n\}_x$  روی عنصر واقعی، با رابطه زیر بهم مربوط می شوند:

$$\{u_n\}_x = [T]\{u_n\}_x$$

$$\{du_n\}_x = [T]\{du_n\}_x$$

ماتریس  $T$  در فصل مربوط به المان های مختلط داده شده اند. این ماتریس حاوی ترمهای ماتریس ژاکوبین

می باشد.

## 2-2-3) تبدیل حوزه انتگرال گیری

انتگرال حجمی روی  $V^e$  باید با انتگرال حجمی روی  $V^T$  جایگزین شود

$$\int_{V^e} \dots dv = \int_{V^T} \dots \det(J) dx dh dz \quad (10)$$

روش های عددی در خاک

حدود انتگرال گیری روی عناصر مبنای کلاسیک بر حسب  $\xi$  به شرح زیرند:

• یک بعدی

$$\int_{x=-1}^{x=1} \dots \det(J) dx$$

• دو بعدی

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{h=0}^{h=1-x} \dots \det(J) dh dx \quad \text{مثلاً}$$

$$\int_{x=-1}^{x=1} \int_{h=-1}^{h=1} \dots \det(J) dh dx \quad \text{چهار ضلعی}$$

• سه بعدی

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{h=0}^{h=1-x} \int_{z=0}^{z=1-x-h} \dots \det(J) dz dh dx \quad \text{چهار وجهی}$$

$$\int_{x=-1}^{x=1} \int_{h=-1}^{h=1} \int_{z=-1}^{z=1} \dots \det(J) dz dh dx \quad \text{شش وجهی}$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{h=0}^{h=1-x} \int_{z=-1}^{z=1} \dots \det(J) dz dh dx \quad \text{منشور}$$

2-2-4) تبدیل عنصر دیفرانسیل  $ds$  در انتگرال مرز المان

(a) انتگرال منحنی الخط دو یا سه بعدی

انتگرال  $I = \int_S \dots ds$  بر حسب مختصات منحنی الخط  $S$  روی منحنی  $S$  به صورت زیر نوشته

میشود:

$$I = \int_{s_1}^{s_2} \dots J_s ds \quad (11-a)$$

مختصات  $S$  معمولاً یکی از متغیرهای  $x, h, z$  می باشد و منحنی  $S$  یکی از رویه های المان

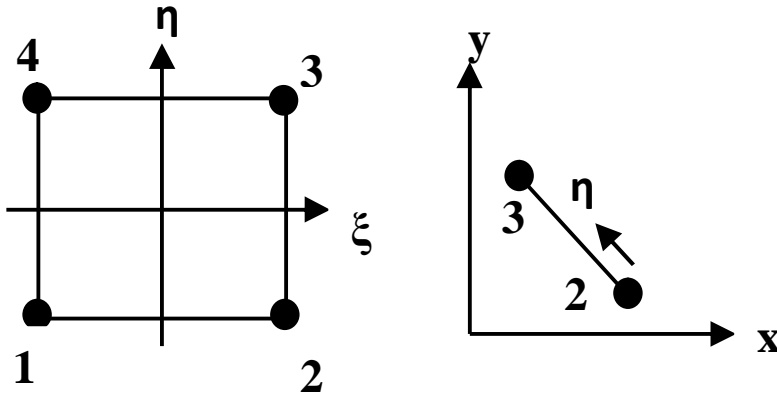
مبنا که روی آن نقطه ای که بر حسب پارامتر  $S$  تعریف شده است اختیاری گردد

$$X = \langle N(s) \rangle \{ X_n \}$$

(11-b)

$$J_s = \sqrt{X_{,s}^2 + Y_{,s}^2 + Z_{,s}^2}$$

مثال: انتگرال روی رویه ی یک عنصر چهارگره‌ی



انتگرال برای رویه  $\xi=1$  عنصر چهارضلعی عرضه می شود:

$$s \equiv h \quad ds = dh$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{4} \langle (1+x)(1-h); (1-x)(1-h); (1+x)(1+h); (1-x)(1+h) \rangle$$

$$\langle N(s) \rangle = \langle N(x=1, h) \rangle = \left\langle 0 \quad \frac{1-h}{2} \quad \frac{1+h}{2} \quad 0 \right\rangle$$

$$x_h = \langle N_h(x=1, h) \rangle \{x_n\} = \frac{1}{2}(x_3 - x_2)$$

$$y_h = \frac{1}{2}(y_3 - y_2)$$

$$J_s = \sqrt{x_h^2 + y_h^2} = \sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2}$$

$$I = \int_{-1}^1 \dots J_s dh \quad \text{روی سطح:}$$

(b) انتگرال روی سطح سه بعدی

انتگرال  $\int_s \dots ds$  بر حسب مختصات سطوح  $S_1, S_2$  که در حالت کلی تابع  $(x, h)$  یا

$(x, z)$  و یا  $(h, z)$  هستند نوشته می شوند:

$$\int_s \dots J_s ds_1 ds_2 \quad (12-a)$$

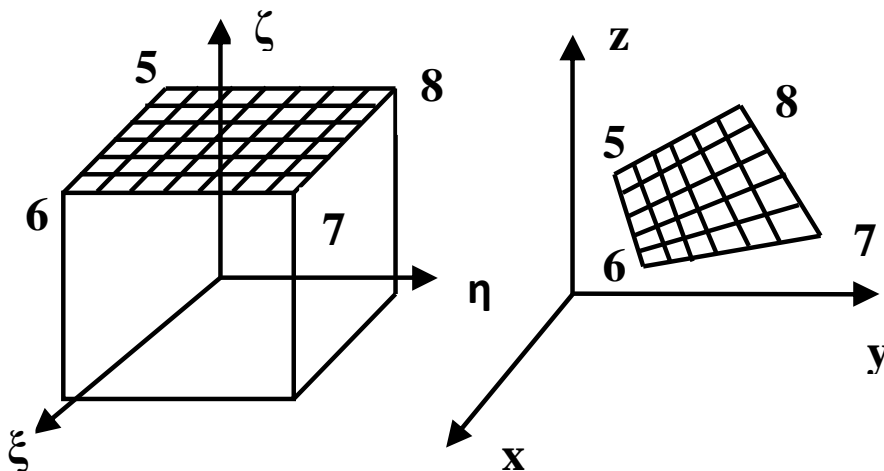
که سطح  $S$  یکی از وجوه عنصر مبنامیباشد. روی این وجه نقطه ای توسط دو پارامتر  $S_1$  و  $S_2$  در نظر گرفته شده است

روش های عددی در خاک

$$x = \langle N(s_1, s_2) \rangle \{x_n\}, \dots$$

$$J_s = \sqrt{(y_{,s_1} z_{,s_2} - z_{,s_1} y_{,s_2})^2 + (z_{,s_1} x_{,s_2} - x_{,s_1} z_{,s_2})^2 + (x_{,s_1} y_{,s_2} - y_{,s_1} x_{,s_2})^2} \quad (12-b)$$

مثال: انتگرال روی یک المان چهار وجهی هشت گرهی



روی سطح  $\zeta=1$  المان چهار وجهی هشت گرهی به این صورت انتگرال رامی نویسیم:

$$s_1 = x \quad s_2 = h$$

$$ds_1 = dx \quad ds_2 = dh$$

$$N(s_1, s_2) = N(x, h, z=1) = \frac{1}{4} \langle 0; 0; 0; 0; (1-x)(1-h); (1+x)(1-h); (1+x)(1+h); (1-x)(1+h) \rangle$$

$$N_{,x}(x, h, z=1) = \frac{1}{4} \langle 0; 0; 0; 0; -(1-h); (1-h); (1+h); -(1+h) \rangle$$

$$N_{,h}(x, h, z=1) = \frac{1}{4} \langle 0; 0; 0; 0; -(1-x); -(1+x); (1+x); (1-x) \rangle$$

$$\langle x_{,x} \quad y_{,x} \quad z_{,x} \rangle = \langle N_{,x} \rangle [\{x_n\} \quad \{y_n\} \quad \{z_n\}]$$

$$\langle x_{,h} \quad y_{,h} \quad z_{,h} \rangle = \langle N_{,h} \rangle [\{x_n\} \quad \{y_n\} \quad \{z_n\}]$$

$$J_s = \sqrt{(y_{,s_1} z_{,s_2} - z_{,s_1} y_{,s_2})^2 + (z_{,s_1} x_{,s_2} - x_{,s_1} z_{,s_2})^2 + (x_{,s_1} y_{,s_2} - y_{,s_1} x_{,s_2})^2}$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dots J_s(x, h) dx dh$$

2-2-5 عبارت  $[K]$ ،  $\{f\}$  روی عنصر مینا:

اگر انتگرال گیری روی عنصر مینا  $V^T$  استفاده شود، عبارات ماتریس  $[K]$  و بردار  $\{f\}$  به صورت زیر

نوشته می شوند:

روش های عددی در خاک

$$[K] = \int_{V^e} [B_{dx}]^T [Q_d]^T [D][Q][B_x] \det(J) dx dh dz \quad (13-a)$$

$\downarrow$   
volume force (weight)

$$\{f\} = \int_{V^e} \{N\} f_v \det(J) dx dh dz + \int_{S_f^e} \{N\} f_s J_s ds_1 ds_2 \quad (13-b)$$

$\downarrow$  surface force  
 $\downarrow$  volume (Newman condition)  
 $\downarrow$  surface

ماتریسهای  $[B]$ ,  $[Q]$  در معادلات 9 و  $J_s$  در عبارات (13-b) و (12-b) داده شده اند.

2-3) فرم کلاسیک  $W^e$  و ماتریس عنصری:

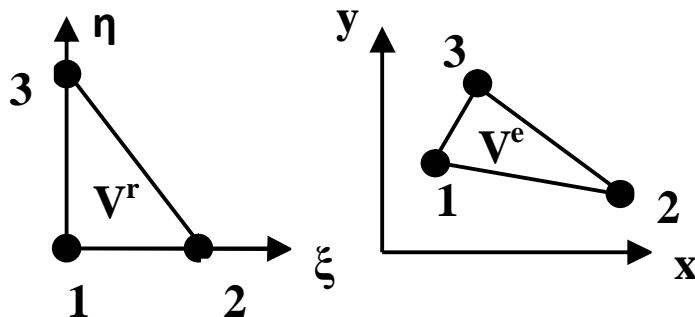
معمولاً فرم انتگرالی  $W^e$  از مجموعه ای از ترمهای متعددی تشکیل شده است. مثلاً

$$W^e = \int_{V^e} \left( d \left( \frac{du}{dx} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + d \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right) dv$$

در جداول 1 و 2 عبارات و فرم های صریح ماتریس عنصری و ماتریس های  $[B]$  و  $[D]$  که در فرم انتگرالی به آن برمی خوریم داده شده اند.

3) تکنیک محاسبه ماتریس های عنصری

3-1) محاسبه صریح معادله پواسون برای یک عنصر مثلثی



$$\langle N \rangle = \langle 1-x-h \quad x \quad h \rangle$$

$$[j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad [J] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = 2A = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (14-a)$$

$$[B_x] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

سطر اول  $\frac{\partial N}{\partial x}$  و سطر دوم  $\frac{\partial N}{\partial h}$  میباشد.

روش های عددی در خاک

$$[B] = [j][B_x] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad D = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که K ضریب هدایت همسان می باشد که در معادلات لاپلاس 1 در نظر گرفته می شود.

$$[K] = \int_0^1 \int_0^{1-x} k [B]^T [B] \det(J) dh dx$$

ماتریس [B] ثابت و در نتیجه  $K = A k [B]^T [B]$  بدست می آید.

$$[K] = \frac{k}{4A} \begin{bmatrix} \begin{matrix} (y_3 - y_2)^2 \\ + (x_3 - x_2)^2 \end{matrix} & \begin{matrix} (y_3 - y_2)(y_1 - y_3) \\ + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \end{matrix} & \begin{matrix} (y_2 - y_1)(y_3 - y_2) \\ + (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (y_3 - y_1)^2 \\ + (x_3 - x_1)^2 \end{matrix} & \begin{matrix} (y_1 - y_3)(y_2 - y_1) \\ + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \end{matrix} & \\ \begin{matrix} (y_2 - y_1)^2 \\ + (x_2 - x_1)^2 \end{matrix} & & \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (15)$$

اگر عنصر واقعی مثل عنصر مینا باشد در این حالت:

$$x_1 = y_1 = 0 ; x_2 = a ; y_2 = 0 ; x_3 = 0 ; y_3 = a$$

$$[K] = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ & 1 & 0 \\ sym & & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

و ماتریس جرم:

$$[m] = \int_0^1 \int_0^{1-x} \{N\} \langle N \rangle \det(J) dh dx$$

$$[m] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

بردار  $\{f\}$  با فرض  $f_v$  ثابت و  $f_s$  صفر به صورت زیر است:

$$\{f\} = \frac{A f_v}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

3-2) در حالت کلی جهت محاسبه ماتریس سختی عنصری باید از انتگرال گیری عددی استفاده نمود. روشهای انتگرال گیری عددی در بخش دیگری با جزئیات توضیح داده شده اند. در اینجا فقط گام های لازم جهت محاسبه ماتریس سختی و بردار نیروی عنصری ذکر می شوند.  
a) عملیات مشترک در همه عناصر مشترک (دارای یک عنصر مینا)

روش های عددی در خاک

- محاسبه مختصات  $\xi_r$  و ضرایب وزن دار  $W_r$  برای نقاط انتگرال گیری (در متد گوس)  
 - محاسبه توابع  $N, \bar{N}$  و مشتقات آنها بر حسب  $\xi$  در نقاط انتگرال گیری (در عناصر ایزوپارامتریک  
 $(N \equiv \bar{N})$ )

(b) عملیات لازم برای محاسبه ماتریس [K] هر عنصر

- شروع عملیات با صفر گذاری کلیه ترمهای ماتریس سختی  
 - برای هر نقطه انتگرال گیری عملیات زیر انجام می گیرد (برای هر  $\xi_r$ ):  
 I. محاسبه ماتریس ژاکوبین [J] با محاسبه مشتقات  $\bar{N}$  نسبت به  $\xi$  و مشتقات مختصات  
 گره ها و همچنین محاسبه عکس این ماتریس.

II. محاسبه مشتقات توابع درون یابی  $N$  بر حسب  $x$  از مشتقات بر حسب  $\xi$

III. ساختن ماتریس های [D] و [B]

IV. جمع حاصل ضرب  $W_r \det(J) [B] [D] [B]^T$  در ماتریس [K]

(c) عملیات لازم جهت محاسبه ماتریس جرم [m]

- شروع عملیات با صفر گذاری عبارات ماتریس [m]

- برای هر نقطه انتگرال گیری  $\xi_r$ :

ماتریس ژاکوبین و دترمینان آن را حساب می کنیم.

حاصل ضرب  $W_r \det(J) \langle N \rangle \{N\}$  را در ماتریس [m] جمع می کنیم.

(d) عملیات لازم جهت محاسبه بردار تحریکات {f} با در نظر گرفتن  $f_v$  ثابت

- شروع عملیات با صفر گذاری عبارات بردار {f} (اول هر Do باید f را صفر نماید تا برای هر المان

f را مجدداً در نظر بگیرد)

- برای هر نقطه انتگرال گیری  $\xi_r$ :

ماتریس ژاکوبین و دترمینان آن را حساب می کنیم.

حاصل ضرب  $W_r \det(J) f_v \{N\}$  را در بردار {f} جمع می کنیم

(e) عملیات لازم جهت محاسبه باقیمانده {r} بر مبنای جواب  $\{u_n\}$

- در ابتدا باقیمانده ی {r} را با {f} محاسبه شده در d مساوی می گذاریم.

- برای هر نقطه انتگرال گیری  $\xi_r$ :

ماتریسهای [B], [D], [J] را مانند آنچه که در b آمد می سازیم.

حاصل ضرب  $W_r \det(J) [B] [D] [B]^T$  را در {r} جمع می کنیم.

روش های عددی در خاک

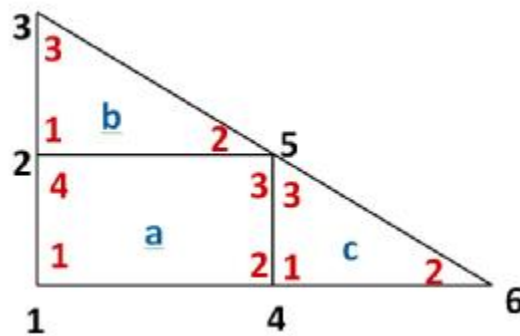
(f) عملیات لازم جهت محاسبه گرادیان  $\{\partial u\}$  در نقاط انتگرال گیری بر مبنای جوابهای  $\{u_n\}$  بدست آمده:

- برای هر نقطه انتگرال گیری

ماتریس  $[B]$  رامی سازیم.

گرادیان  $\{\partial u\} = [B]\{u_n\}$  را محاسبه و چاپ می کنیم.

نحوه جمع کردن



	1	2	3	4	5	6
1	a	a		a	a	
2	a	<u>ab</u>	b	a	<u>ab</u>	
3		b	b		b	
4	a	a		ac	ac	c
5	a	<u>ab</u>	b	ac	<u>abc</u>	c
6				c	c	c



### تکنیک جمع ماتریسهای عنصری

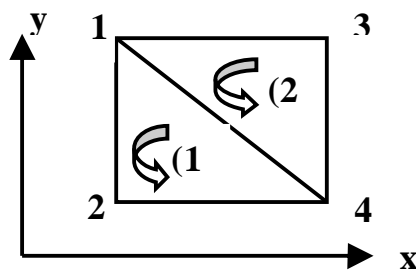
گامهای جمع ماتریس

-ساخت ماتریس عنصری

-افزودن ماتریس های عنصری و بردار عنصری در ماتریس کلی

-تشکیل تابلوی محل یابی گره ها

-افزودن



عناصر	گره ها		
1	1	2	4
2	1	4	3

-یک درجه آزادی:

$$\text{general vector} \rightarrow \langle U_r \rangle = \langle u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \rangle$$

عنصر اول:

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \ u_2 \ u_4 \rangle$$

$$LOCE = \langle 1 \ 2 \ 4 \rangle$$

عنصر دوم:

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \ u_4 \ u_3 \rangle$$

$$LOCE = \langle 1 \ 4 \ 3 \rangle$$

روش های عددی در خاک

-دو درجه آزادی:

$$\text{general vector} \rightarrow \langle U_n \rangle = \langle u_1 v_1 \quad u_2 v_2 \quad u_3 v_3 \quad u_4 v_4 \rangle$$

عنصر اول:

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 v_1 \quad u_2 v_2 \quad u_4 v_4 \rangle$$

$$LOCE = \langle 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 7 \ 8 \rangle$$

عنصر دوم:

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 v_1 \quad u_4 v_4 \quad u_3 v_3 \rangle$$

$$LOCE = \langle 1 \ 2 \ 7 \ 8 \ 5 \ 6 \rangle$$

در نتیجه تکنیک به صورت زیر بدست می آید:

هرترم ماتریس عنصری  $K_{ij}$  از ماتریس  $[K]$  عنصری بصورت  $K_{ij}^e$  از ماتریس  $[K^e]$  در می آید به صورتی که:

$$I = LOCE(i) \quad i = 1, n_{de}$$

$$J = LOCE(j) \quad j = 1, n_{de}$$

$$n_{de} = n_e \cdot n_{dn}$$

$n_{de}$  درجه آزادی کلی هر المان  
 $n_{dn}$  درجه آزادی هر گره  
 $n_e$  شماره گره های هر المان  
 و:

$$K_{IJ}^e = K_{LOCE(i), LOCE(j)}^e \equiv K_{ij}$$

و برای بردار  $F$  نیز:

$$F_I^e = F_{LOCE(i)}^e \equiv f_i$$

الگوریتم کلی چنین است:

- 1) تمام ترمهای ماتریس  $[K]$ ,  $[F]$  کلی را صفر می کنیم.
- 2) برای هر عنصر

-هرترم  $K_{ij}$  را به ماتریس  $K_{IJ}$  کلی تبدیل می کنیم باروش:

$$K_{IJ} = K_{IJ} + K_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n_{de} \\ j = 1, 2, \dots, n_{de} \end{matrix}$$

که:

$$I = LOCE(i)$$

$$J = LOCE(j)$$

روش های عددی در خاک

-هرترم  $f_i$  رانیز به طریق بالا به ماتریس کلی  $\{F\}$  اضافه می کنیم:

$$F_i = F_i + f_i \quad i = 1, 2, \dots, n_{de}$$

$$I = LOCE(i)$$

برنامه به صورت زیر درمی آید: (IDLE درجه آزادی هر المان)

*DIMENTION*  $VKE(IDLE, IDLE)$ ,  $VFE(IDLE)$ ,  $KLOCE(IDLE)$ ,  
 $VKG(NEQ, NEQ)$ ,  $VFG(NEQ)$

*Do* 1  $ID = 1, IDLE$

$I = KLOCE(ID)$

$VFG(I) = VFG(I) + VFE(ID)$

*Do* 1  $JD = 1, IDLE$

$J = KLOCE(JD)$

10  $VKG(I, J) = VKG(I, J) + VKE(ID, JD)$

*RETURN*

*END*

IDLE: تعداد درجه آزادی هر المان

KLOCE: بردار عنصری محل یابی

### ساختن بردار KLOCE

تئوری:

یک درجه آزادی: تابلوی LOCE مثل تابلوی ارتباط عنصر با گره می باشد (تابلوی CONEC) (76)  
 (درجات آزادی را در هر المان کنار هم می گذاریم)

چند درجه آزادی: اگر فرض کنیم متغیرهای گرهی به ترتیب زیر مرتب شده باشند:

$$\text{elemental } \{u_n\}^T = \{u_i \ v_i \dots, u_j \ v_j, \dots, \dots\}$$

$$\text{General } \{U_n\}^T = \{U_1 \ V_1 \dots, U_2 \ V_2 \dots, U_n \ V_n \dots\}$$

i, j: شماره گره ها در هر عنصر و n: شماره گره ها در کل هستند.

روش های عددی در خاک

درجه آزادی کلی هر المان برابر است با تعداد گره های هر المان ضربدر درجه آزادی هر گره.

$$\left. \begin{array}{l} \text{درجات آزادی} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3n \\ 3n-1 \\ 3n-2 \end{array}$$

$$n_{de} = n_e * n_{dn}$$

↓	↓	↓
درجه آزادی کل هر المان	تعداد گره های هر المان	درجه آزادی هر گره

برنامه LOCE :

*DIMENSION* *KCONEC* (*NDE*), *KLOCE* (*NDE*)  
*IDLE* *IDLE*

*J*=0

*C* *NNEL*

*DO* 1 *IN*=1,*NNEL*

*IDO*=(*KCONEC*(*IN*)-1)\**NDLN*

*C*

*Do* 1 *ID*=1,*NDLN*

*J*=*J*+1

*KLOCE*(*J*)=*ID*+*IDO*

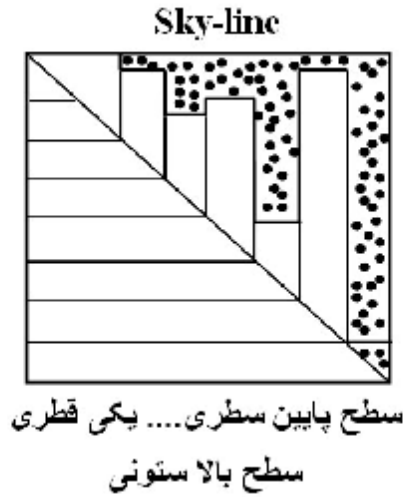
*RETURN*

*END.*

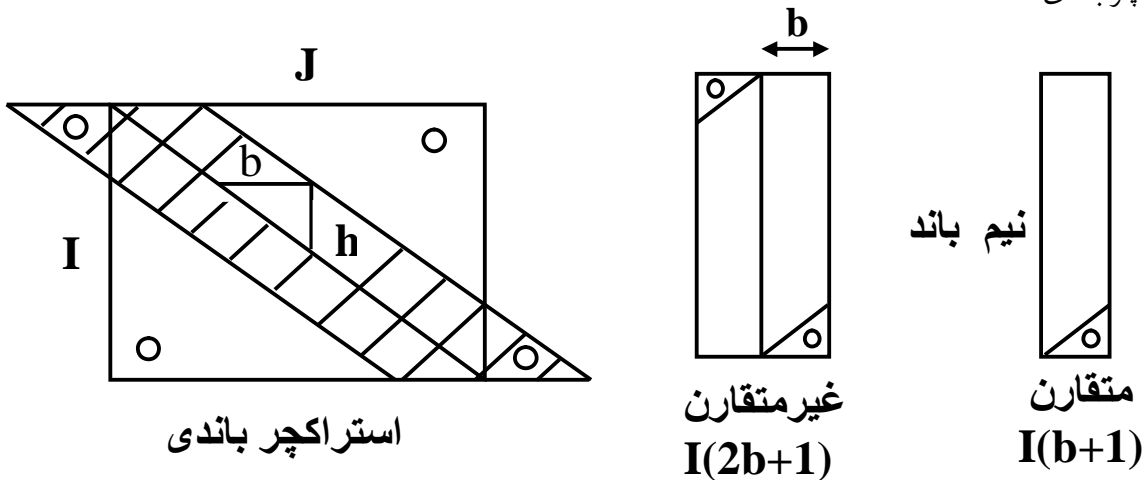
*NNEL*: حلقه روی تعداد گره های هر المان

*NDLN*: درجه آزادی هر گره

روش های عددی در خاک



ماتریس های کلی  
استراکچر باندی:



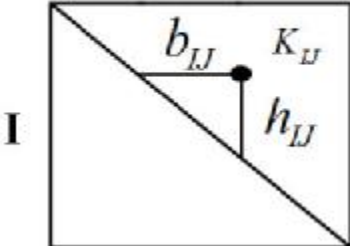
**Sky-line**

با شناختن  $K_{II}^e = k_{ij}^e$  که در آن:

$$I = LOCE(i) \quad i = 1, 2, \dots, n_{de}$$

$$J = LOCE(j) \quad j = 1, 2, \dots, n_{de}$$

قاعده جمع ماتریسها به صورت مقارن در حالت I و J قابل اعمال است. یعنی وقتی که ترم  $K_{II}$  غیر صفر موجود باشد، ترم غیر صفر  $K_{II}$  نیز موجود است. پس در نتیجه می توان فقط نصف بالایی را جمع کرد. یعنی برنامه در صورتیکه  $J \neq I$  باشد نوشته می شود:

	$J > I$	
	$b_{IJ} = J - I$	فاصله افقی
	$h_{IJ} = b_{IJ}$	فاصله عمودی

در نتیجه برای  $J > I$ :

$$b_{IJ} = J - I = LOCE(j) - LOCE(i)$$

عرض باند ذخیره سازی المان برابر خواهد بود با حداکثر  $b_{IJ}^e$  هر المان. در نتیجه برای کل باید بزرگترین  $b_{IJ}^e$  عنصری را پیدا کرد.

$$\begin{array}{l}
 \text{حلقه} \quad i = 1, 2, \dots, n_{de} \\
 \quad \quad I = LOCE(i) \\
 \quad \quad \text{حلقه} \quad j = 1, 2, \dots, n_{de} \\
 \quad \quad \quad \quad b_{i,j}^e = \underset{j}{\text{Max}}(LOCE(j) - I) = \underset{j}{\text{Max}}(LOCE(j)) - I
 \end{array}$$

همین کاربری فاصله عمودی حداکثر باید انجام شود:

$$\begin{array}{l}
 j = 1, 2, \dots, n_{de} \\
 J = LOCE(j) \\
 i = 1, 2, \dots, n_{de} \\
 h_{i,j}^e = \underset{i}{\text{Max}}(J - LOCE(i)) = J - \underset{i}{\text{Min}}(LOCE(i))
 \end{array}$$

روش های عددی در خاک

در نتیجه عرض باند ذخیره سازی ماتریس کلی  $[K]$  :  $b_I = \text{Max}(b_I^e)$

واضح است که روی خط I ترمهای  $K_{II}$  که  $J > b_I + 1$  باشد، صفر هستند و روی ستون I نیز ترمهای  $K_{II}$  که  $J > b_I + 1$  باشد، صفرند.

حداکثر ارتفاع ستون J نیز به صورت روبرو در می آید:  $h_J = \text{Max}(h_J^e)$

$$h = b \text{ (symmetry)} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \text{Max}(b_I) & \text{for the all rows of } I \\ h = \text{Max}(h_J) & \text{for the all columns of } J \end{cases}$$

لازم به تذکر است که ترمهای قطری در نظر گرفته نشده اند و در نتیجه برای ماتریس قطری  $b$  و  $h$  مساوی صفر هستند.

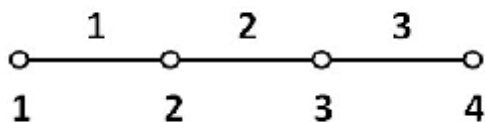
### نکات

\* در استراکچر بانندی: از اولین عدد برخوردی به صفر، آنرا پایین می آورد.

\* معمولاً ماتریس ها را با هم جمع نمی کنیم تا کلاً جمع شوند.

\* هر چه اختلاف شماره گره ها برای هر المان کمتر باشد، مقدار  $b$  کمتر می شود.

مثال: با یک درجه آزادی



روش های عددی در خاک

$$\begin{aligned} \text{member 1: } LOCE &= \langle 1 \ 2 \rangle \\ b_I^{(1)} &= \langle 1 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle \\ h_J^{(1)} &= \langle 0 \ 1 \ 0 \ 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{member 2: } LOCE &= \langle 2 \ 3 \rangle \\ b_I^{(2)} &= \langle 0 \ 1 \ 0 \ 0 \rangle \\ h_J^{(2)} &= \langle 0 \ 0 \ 1 \ 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{member 3: } LOCE &= \langle 3 \ 4 \rangle \\ b_I^{(3)} &= \langle 0 \ 0 \ 1 \ 0 \rangle \\ h_J^{(3)} &= \langle 0 \ 0 \ 0 \ 1 \rangle \end{aligned}$$

for general matrix:

$$\begin{aligned} b_I &= \langle 1 \ 1 \ 1 \ 0 \rangle \\ h_J &= \langle 0 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle \\ b &= h = 1 \end{aligned}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

توضیح قاعده کلی:

باید فاصله شماره گره ها را برای حداقل کردن عرض باند به حداقل رساند.

### متدهای ذخیره سازی

(1) ماتریس کامل غیرمقارن: با ابعاد  $n \times n$  باید  $n^2$  کلمه حقیقی در حافظه کامپیوتر ذخیره شود.

(2) ماتریس کامل مقارن: اگر ماتریس روبرو در بردار  $VK$  به صورت ستون پایین رونده ذخیره شود.



روش های عددی در خاک

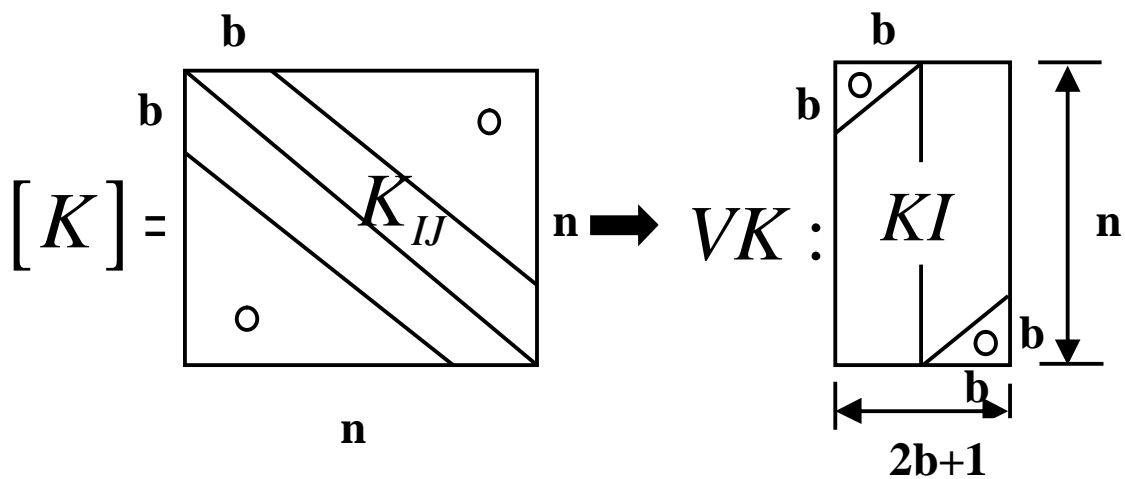
$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$V_K = \langle K_{11} \ K_{12} \ K_{22} \ K_{13} \ K_{23} \ K_{33} \rangle$$

$$K_{IJ} \equiv VK_l, \quad l = \frac{J(J-1)}{2} + I \quad J \geq I$$

در نتیجه باید  $\frac{n(n+1)}{2}$  کلمه حقیقی ذخیره کرد.

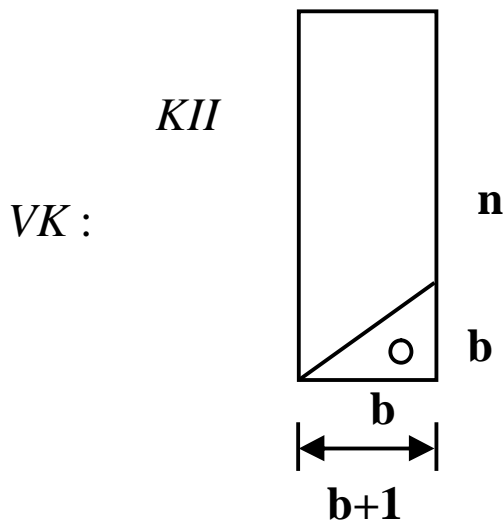
(3) ماتریس باند غیر متقارن



$$K_{IJ} = VK_{ij} \quad \text{if} \quad \begin{cases} i = I \\ j = J - I + 1 + b \end{cases}$$

در نتیجه باید  $n(2b+1)$  کلمه حقیقی که  $b(b+1)$  آن صفر است ذخیره کنیم.

(4) ماتریس باند متقارن



در این صورت :

$$K_{IJ} \equiv VK_{ij} \quad \text{if} \quad \begin{cases} i = I \\ j = J - I + 1 \\ J \geq I \end{cases}$$

در نتیجه  $n(b+1)$  کلمه حقیقی که  $\frac{b(b+1)}{2}$  غیر مفید دارد ذخیره می شود.

(5) متد خط آسمان ماتریس غیر متقارن

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & K_{55} \end{bmatrix}$$

سه بردار متفاوت زیر را برای ذخیره سازی در نظر می گیریم:

$VKGD$  - بردار ترمهای قطری

$VKGS$  - بردار ترمهای مثلث بالایی

$VKGI$  - بردار ترمهای مثلث پایینی

بردار  $VKGS$  به صورت ستون پایین رونده ذخیره و بردار  $VKGD$  به صورت ردیف از چپ به راست

ذخیره می شوند یعنی:

روش های عددی در خاک

$$VKGD = \langle K_{11} \quad K_{22} \quad K_{33} \quad K_{44} \quad K_{55} \rangle$$

$$VKGS = \langle K_{12} \quad K_{23} \quad K_{14} \quad K_{24} \quad K_{34} \quad K_{35} \quad 0 \rangle$$

$$VKGI = \langle K_{21} \quad K_{32} \quad K_{41} \quad K_{42} \quad K_{43} \quad K_{53} \quad 0 \rangle$$

**خط آسمان:** پوش حداکثر ستون های با ارتفاع متفاوت است که باید ذخیره شوند. یا متقارن و یا غیر متقارن است. این خط توسط تابلوی ارتفاع ستون  $h_j$  تعریف می شود که در بخش قبل توضیح داده شد:

$$h_j = \langle 0 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \rangle$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$

ارتفاع ستون اول                      تفاع ستون سوم                      ارتفاع ستون پنجم

فقط  $K_{23}$      $K_{35}$  و 0

روش های عددی در خاک

ترمهای صفرخارج از خط ذخیره نمی شوند، لیکن ترمهای صفر داخل خط آسمان ذخیره می شوند.  
 برای تعریف محلّ ترم نامشخص  $K_{ij}$  در بردارهای  $VKGS$  یا  $VKGI$  باید از تابلوی "محلّ ابتدای ستون  
 ها" استفاده کرد ( $KLD$ ) که دیمانسیون  $n+1$  دارد و توسط رابطه زیر تعریف می شود:

$$KLD(1) = 1$$

$$KLD(2) = 1$$

$$KLD(I) = KLD(I-1) + h_j(I-1) \quad I = 3, 4, \dots, n+1$$

مثلاً در حالت مثال بالا:

$$KLD = \langle 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 6 \ 8 \rangle$$

یعنی اینکه ترم  $K_{ij}$  در محلّ های زیر خواهد بود:

$$VKGD(I) \quad \text{اگر } I = J \text{ باشد در}$$

$$l = KLD(J+1) - J + I ; VKGS(l) \quad \text{اگر } I < J \text{ باشد در}$$

$$l = KLD(I+1) - I + J ; VKGI(l) \quad \text{اگر } I > J \text{ باشد در}$$

در نتیجه جای لازم برای ذخیره سازی به شرح زیر است: برای:

$VKGD$  :  $n$  کلمه

$$VKGI, VKGS : KLD(n+1) - 1$$

که در کل :  $n+2(KLD(n+1)-1)$  کلمه حقیقی جا لازم خواهد بود.

در حالت مقارن تابلوی  $VKGI$  مفید نیست و در نتیجه  $n+KLD(n+1)-1$  کلمه جا نیاز دارد.

مثال: ذخیره سازی خط آسمان غیرمقارن

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} \end{bmatrix} \quad n=4$$

در این حالت:

روش های عددی در خاک

$$h_j = \langle 0 \ 0 \ 1 \ 3 \rangle$$

$$KLD = \langle 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 5 \rangle$$

$$VKGS = \langle K_{23} \ K_{14} \ K_{24} \ 0 \rangle$$

$$VKGI = \langle K_{32} \ K_{41} \ K_{42} \ 0 \rangle$$

$$VKGD = \langle K_{11} \ K_{22} \ K_{33} \ K_{44} \rangle$$

یعنی با فرمول بالا مثلاً ترم  $K_{24}$  در محل  $VKGS(l)$  که  $l$  معادل عدد زیر است خواهد بود:

$$l = KLD(4+1) - 4 + 2 = 3$$

$$4 + 2(KLD(5) - 1) = 12 \quad \text{کلمه حقیقی} \quad \text{جای لازم برابر است با:}$$

7-4) اعمال شرایط حدی از نوع دیریکله

1-7-4) سیستم کلی معادلات

پس از جمع ماتریس ها و بردارهای طرف دوم، فرم انتگرالی به صورت زیر نوشته می شود:

$$W = \langle dU_n \rangle ([K]\{U_n\} - \{F\}) = 0$$

این سیستم انتگرالی درون خود شرایط حدی روی  $S_f$  را اقلع می کند ولیکن شرایط روی  $S_u$  را باید همراه آن در نظر گرفت. برای فرم مجزا شده باید شرایط زیر را اقلع کرد:

$$du_i = 0$$

$$U_i = \bar{U}_i \quad 4-44$$

در نتیجه فرم کلی معادلات جبری به صورت زیر در می آید:

$$[K]\{u_n\} = \{F\} \quad (4-45)$$

2-7-4) معرفی شرایط حدی

ماتریس کلی  $[K]$  بدون در نظر گرفتن شرایط حدی جمع شده است، پس باید برای هر رابطه  $U_i = \bar{U}_i$  باروشهای زیر معادلات و ماتریس  $K$  اصلاح شوند:

1) روش عبارت غالب روی قطر

در این روش سعی می شود عددی بسیار بزرگ در معادله مورد نظر به صورت زیر وارد شود:

روش های عددی در خاک

$$\begin{bmatrix} K_{11} \mathbf{L} & K_{1i} \mathbf{L} & K_{1n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ K_{i1} \mathbf{L} & K_{ii} + a \mathbf{L} & K_{in} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ K_{n1} \mathbf{L} & K_{ni} \mathbf{L} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \mathbf{M} \\ U_i \\ \mathbf{M} \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \mathbf{M} \\ a\bar{U}_i \\ \mathbf{M} \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (4-46)$$

در نتیجه رابطه 1 به صورت زیر نوشته می شود:

$$aU_i + \left( \sum_{j=1}^n K_{ij} U_j \right) = a\bar{U}_i \quad (4-47) \quad \left( \text{مقدار } \sum_{j=1}^n K_{ij} U_j \text{ ناچیز است} \right)$$

رابطه تقریبی زیر برای جواب صحیح است:

$$U_i \cong \bar{U}_i \quad \text{if} \quad a\bar{U}_i \geq \sum_{j=1}^n K_{ij} U_j$$

معمولاً  $\alpha$  معادل  $10^7 * \text{Max}|K_{ij}|$  یا  $10^{15} * \text{Max}|K_{ij}|$  انتخاب می شود.

\* برای مصالح از یک جنس می توانیم از این روش استفاده کنیم.

\* در کارهای خاکی ماتریس ها معلوم نیست چه اندازه ای می باشند، بنابراین نمی توانیم از این روش استفاده کنیم.

### متد عبارت واحد روی قطر

این متد به صورت زیر انجام می پذیرد:

برای هر رابطه  $U_i = \bar{U}_i$  ماتریس  $\mathbf{K}$  و بردار  $\mathbf{F}$  باید اصلاح گردند:

$$F_j = F_j - K_{ji} \bar{U}_i \quad j=1, 2, \dots, n \quad j \neq i$$

$$F_i = \bar{U}_i$$

$$K_{ji} = K_{ij} = 0 \quad j=1, 2, \dots, n \quad j \neq i$$

$$K_{ii} = 1$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} \mathbf{L} & K_{1,i-1} & 0 & K_{1,i+1} \mathbf{L} & K_{1n} \\ \mathbf{M} & & & & \\ K_{i-1,1} \mathbf{L} & K_{i-1,i-1} & 0 & K_{i-1,i+1} \mathbf{L} & K_{i-1,n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{i+1,1} \mathbf{L} & K_{i+1,i-1} & 0 & K_{i+1,i+1} \mathbf{L} & K_{i+1,n} \\ \mathbf{M} & & & & \mathbf{M} \\ K_{n1} \mathbf{L} & K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} \mathbf{L} & K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ \mathbf{M} \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \mathbf{M} \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{1i} \bar{U}_i \\ \mathbf{M} \\ F_{i-1} - K_{i-1,i} \bar{U}_i \\ \bar{U}_i \\ F_{i+1} - K_{i+1,i} \bar{U}_i \\ \mathbf{M} \\ F_n - K_{ni} \bar{U}_i \end{Bmatrix} \quad (4-48)$$

### متد حذف معادله

در این روش معادله مربوط به درجه آزادی داده شده از سیستم معادلات حذف می گردد. در این روش تعداد مجهولات سیستم کاهش یافته و با ماتریس کوچکتری کار خواهد شد. از آنجائیکه دوباره ساختن ماتریس  $[K]$  عملیات پرخرجی است لذا بهتر است از ابتدا این معادلات حذف شوند. در نهایت معادلات بدست آمده و ماتریس  $[K]$  نهایی، مانند ماتریس عرضه شده در معادله (4-48) است با این تفاوت که سطرون  $i$  حذف شده اند.

مثال: سیستم معادلات زیر موجود است. شرط حدی  $U_1 = \bar{U}_1$  را در آن اعمال کنید.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & K_{23} & K_{33} & 0 \\ K_{14} & K_{24} & 0 & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

روش عبارت غالب:

$$\begin{bmatrix} K_{11} + 10^{15} & O & O & K_{14} \\ O & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ O & K_{23} & K_{33} & O \\ K_{14} & K_{24} & O & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{15} \bar{U}_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

روش عبارت واحد

$$\begin{bmatrix} 1 & O & O & O \\ O & K_{22} & K_{33} & K_{24} \\ O & K_{23} & K_{33} & O \\ O & K_{24} & O & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 - K_{14} \bar{U}_1 \end{bmatrix}$$

حذف معادله اول

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{23} & K_{33} & O \\ K_{24} & O & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 - K_{14} \bar{U}_1 \end{bmatrix} ; U_1 = \bar{U}_1$$

غیر خطی بودن معادلات به دو دلیل زیر در فرمول بندی فیزیکی مسائل ظاهر می شود:

- پارامترهای فیزیکی خاصی که در حالت خطی مستقل هستند. مثل ضریب ارتباطی و ضریب هدایت حرارتی و یا از جهت استقلال خویش را از دست داده و تابع متغیرهای اصلی مسأله  $U_n$  می گردند. مثال

روش های عددی در خاک

این نوع معادلات پلاستیه در جامد است و جریان های غیر نیوتنی و جریان در محیط های غیر اشباع می باشند.

- عبارات غیر خطی نسبت به مجهولات مسأله در معادلات مشتقات نسبی ظاهر می شوند، حتی وقتی که پارامترهای فیزیکی مستقل از  $U_n$  هستند. مثل معادلات ناویه استوکس که در آن عبارات  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$  ظاهر می گردند. یا معادلات با تغییر مکان های بزرگ:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

روش عناصر محدود فرمول بندی مجزا شده زیر را در مورد مسائل غیر خطی به صورت فرم کلی به دست می دهد.

$$W = \langle du_n \rangle ([K(u_n)]\{u_n\} - \{F\}) = 0 \quad \langle S_u \rangle \text{ تمام (1)}$$

یا

$$[K(u)]\{U\} = \{F\} \quad \text{یا} \quad \{R(u)\} = \{F\} - [K(u)]\{U\} = 0$$

استراتژی کلی برای حل مسائل موجود نیست ولیکن سه روش زیر یا ترکیبی از آنها استفاده می گردند:

- متد جایگزینی

- متد نیوتن - رافسون

- متد جزئی (incrementale)

- متد جایگزینی

این روش عبارت است از به دست آوردن یک سری جواب  $\{u^0\}, \{u^1\}, \dots, \{u^i\}$  که  $\{u^i\}$  بر اساس  $\{u^{i-1}\}$  و حل سینوسی خطی زیر به دست آمده است.

$$[K\{u^{i-1}\}]\{u^i\} = \{F\} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2)$$

که به صورت جزئی زیرا با معرفی باقیمانده  $\{R^i\}$ ، نوشته می شود:

$$\{R^i\} = \{R(u^{i-1})\} = \{F\} - [K(u^{i-1})]\{u^{i-1}\}$$

$$[K(u^{i-1})]\{\Delta u^i\} = \{R^i\} \quad (3)$$

$$\{u^i\} = \{u^{i-1}\} + \{\Delta u^i\}$$

با دانستن  $\{u^{i-1}\}$  می توانیم  $[K(u^{i-1})]$  را ساخته (ماتریس عنصری) و با جمع آنها با ماتریس کلی  $[K(U^{i-1})]$  را به دست آورده و سیستم خطی بالا را حل کنیم. الگوریتم متد جایگزینی به صورت زیر نوشته می شود:



### سیستم متد جایگزینی

جواب تقریبی اولیه  $\{U^0\}$  را به دست می آوریم (احتمالاً صفر)  
 $\{F\}$  را از جمع بردارهای عنصری  $\{f\}$  به دست می آوریم.  
 برای هر تکرار  $i = 1, 2, \dots$ :

#### برای هر عنصر:

- مقادیر بردار  $\{u^{i-1}\}$  را از بردار کلی  $\{U^{i-1}\}$  خارج کرده و
- ماتریس  $[K(U^{i-1})]$  را به دست آورده
- باقیمانده عنصری  $\{r\} = \{f\} - [K]\{u^{i-1}\}$  را حساب می کنیم
- مانند حالات خطی ماتریس و بردار زیر را جمع می کنیم  $[K]$  در  $[K]$  و  $\{r\}$  در  $\{R^i\}$
- معادله  $[K]\{\Delta u^i\} = \{R^i\}$  را مانند حالات خطی حل می کنیم
- تخمین جدید جواب را به دست می آوریم  $\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + w\{\Delta U^i\}$   
 $w$  ضریب پیش رهایی که 1 در نظر گرفته می شود و همواره  $w > 1$
- نرم  $\|n\|$  از  $\{\Delta U^i\}$  یا  $\|m\|$  مربوط به  $\{R^i\}$  را به دست آورده
- آزمایش Convergence با استفاده از  $\|n\|$  یا  $\|m\|$  انجام می گردد.

#### تذکر:

ضریب  $w$  که به نام ضریب بیش رهایی (sur - relaxation) معروف است بر حسب طبیعت مسأله انتخاب می شود، متد بدون سور رلکسیون  $w = 1$  انجام می شود، در حالت پلاستیه  $w$  بین  $1/7$  و  $1/6$  می باشد.

فرم های متفاوتی می توان استفاده نمود، مانند:

- فرم ماکزیمم:

$$(5) \quad \|m\| = \max_j |R_j|^i \quad or \quad \|n\| = \max_j |\Delta u_j|^i$$

- فرم حداقل مربع:

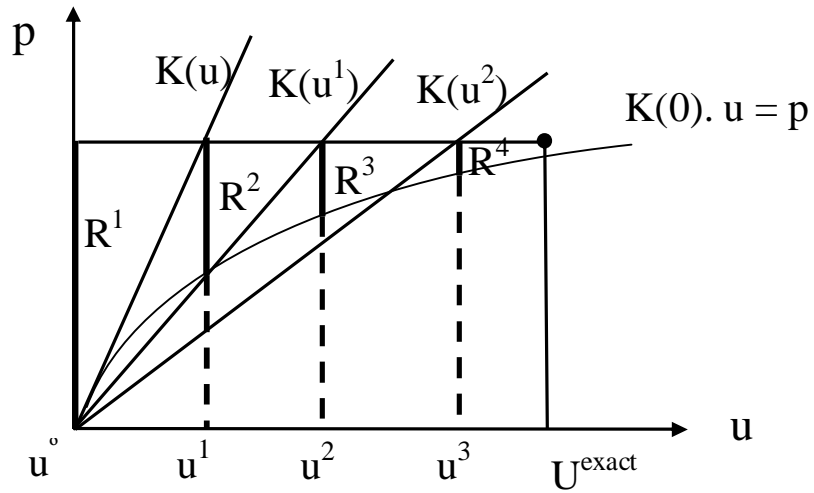
$$(6) \quad \|m\| = \sqrt{\langle R^i \rangle \{R^i\}} \quad or \quad \|n\| = \sqrt{\langle \Delta u^i \rangle \{\Delta u^i\}}$$

- فرم نسبی:

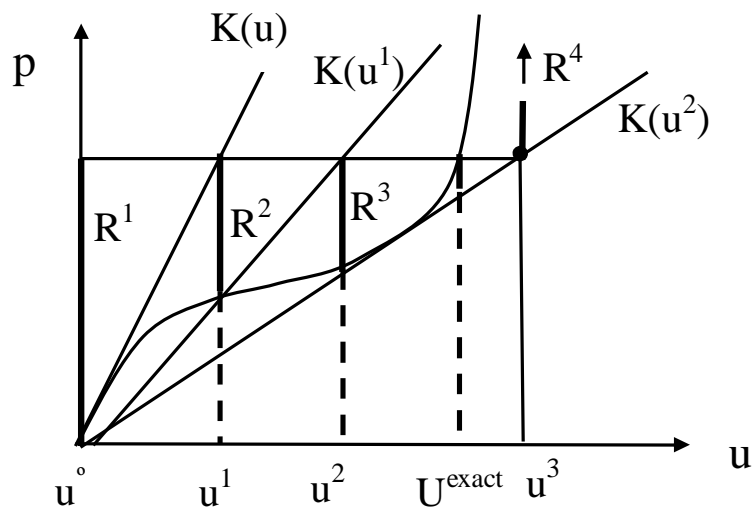
$$(7) \quad \|n\| = \frac{\sqrt{\langle \Delta U^i \rangle \{\Delta U^i\}}}{\sqrt{\langle U^i \rangle \{U^i\}}} \quad or \quad \|n\| = \max_j \left| \frac{\Delta U_j}{U_j} \right|^i$$

روش های عددی در خاک

که به هر تقریب  $\|n\| < e$  باید کوچکتر باشد و  $e$  عدد مجاز خطای به دست آمده می باشد معمولا 0.05 می باشد.



الگوریتم 4 (متد جایگزینی)



معادله اصلی (3) را به صورت زیر فرمول بندی کنیم:

$$([K_e] + [K_{nl}(U^{i-1})])\{\Delta U^i\} = \{R^i\} \quad (8)$$

که از جداسازی ماتریس کلی به دو ماتریس  $[K_l]$  خطی و  $[K_{nl}]$  غیر خطی به دست آمده است، می توان با صرف نظر کردن از  $[K_{nl}]$  معادله (8) رابطه زیر را نوشت:

$$[K_l]\{\Delta U^i\} = \{R^i\} \quad (9)$$

$$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$$

که در نتیجه  $K_l$  را می توان فقط یک بار محاسبه و جمع کرد و در هر تکرار فقط لازم است که  $\{R^i\}, \{\Delta U^i\}$  از معادلات (9) حساب شوند. الگوریتم معادلات بالا به صورت زیر نوشته می شود:

- الگوریتم نیوتن - رافسون اصلاح شده

- جواب تقریبی اولیه  $\{U^0\}$  را به دست می آوریم (احتمالا صفر)

-  $\{F\}$  را از جمع بردارهای عنصری به دست می آوریم

- ماتریس  $K_l$  را از جمع ماتریس های عنصری خطی  $[K_l]$  به دست می آوریم

برای هر تکرار  $i = 1, 2, \dots$ :

برای هر عنصر:

- مقادیر  $\{u^{i-1}\}$  را از بردار  $\{U^{i-1}\}$  خارج کرده

- باقیمانده  $\{R^i\}$  را از جمع باقیمانده های عنصری:  $\{r\} = \{f\} - [K]\{U^{i-1}\}$  به دست

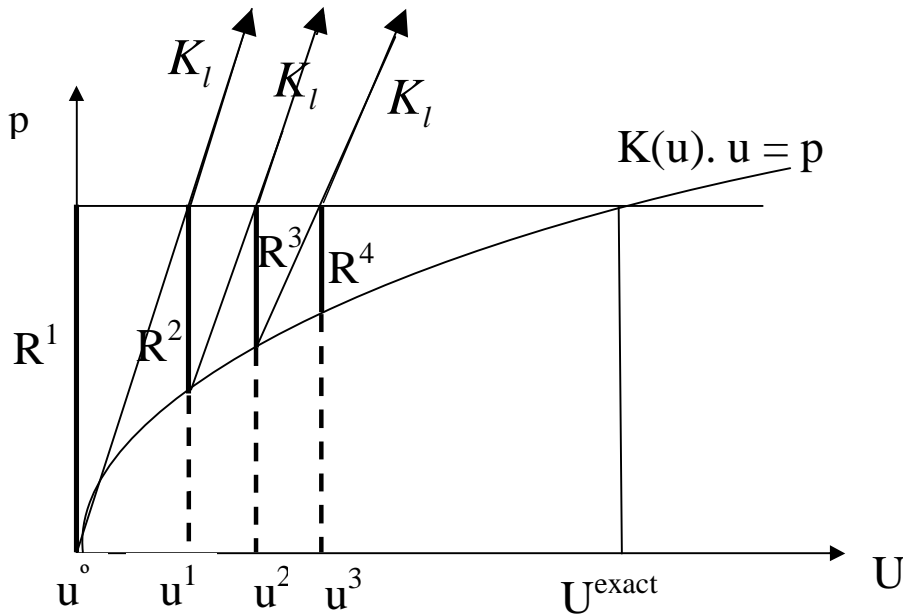
می آوریم

- حل معادله  $[K_l]\{\Delta U^i\} = \{R^i\}$

- محاسبه  $\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$  (با فرض  $w = 1$ )

- محاسبه  $\|n\|$

- آزمایش همگرایی با استفاده از  $\|n\|$



(الگوریتم 10)

نیوتن رافسون اصلاح شده

این متد برای معادلاتی که غیر خطی بودن آنها ضعیف است مناسب می باشد.

### متد نیوتن رافسون

اگر فرض کنیم که در تکرار  $i-1$  تقریبی از جواب  $(u^{i-1})$  به دست آمده است و با این جواب باقیمانده صفر نباشد.

$$\{R(U^{i-1})\} = \{F\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \neq 0 \quad (11)$$

در تکرار  $i$  جواب تقریبی  $U^i$  باید رابطه زیر را اکتفا کند

$$\{R(U^i)\} = \{R(U^{i-1} + \Delta U^i)\} \approx 0 \quad (12)$$

الگوریتم با بسط سری تیلور باقیمانده در حول  $u^{i-1}$  به دست می آید:

$$\{R(U^i + \Delta U^i)\} = \{R(U^{i-1})\} + \left[ \frac{\partial R}{\partial O} \right]_{u=U^{i-1}} \{\Delta U^i\} + \dots = 0 \quad (13)$$

که اگر از ترم های با درجه بزرگتر از یک صرف نظر کنیم:

روش های عددی در خاک

$$-\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]\{\Delta U^i\} = \{R(U^{i-1})\}$$

که:

$$[k_t(U^{i-1})]\{\Delta U^i\} = \{R(U^{i-1})\} \quad (14)$$

$$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$$

عبارت ماتریس مماس  $[K_t\{U^{i-1}\}]$  با مشتق گیری از عبارت باقیمانده (1) به دست می آید.

$$[K_t(U)] = -\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right] = -\left[\frac{\partial F}{\partial U}\right] + [K(u)] + \left[\frac{\partial [K(u)]}{\partial U}\{U\}\right]$$

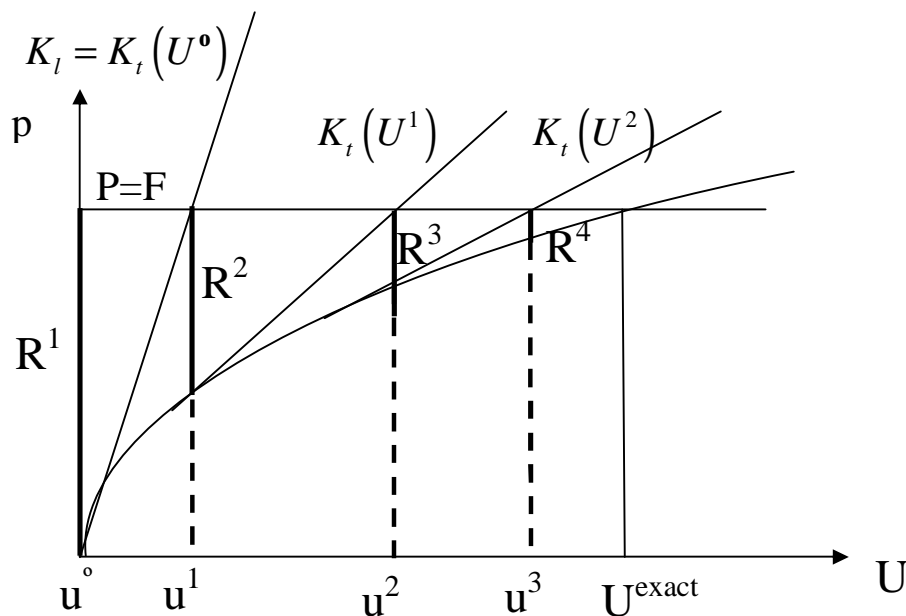
اگر  $F$  مستقل از  $U$  باشد ترم مشتق آن حذف شده، و اگر  $(K_t)_{ij}, K_{ij}$  مولفه های ماتریس  $K, K_t$  باشند:

$$(K_t)_{ij} = K_{ij} + \sum_l \frac{\partial K_{il}}{\partial U_j} U_l$$

الگوریتم عمل مثل الگوریتم متد جایگزینی است با این تفاوت که  $[K_t]$  به جای  $[K]$  خواهیم داشت.

تذکر:

معمولا ماتریس  $[K_t]$  را از فرم انتگرالی به دست آمده و آن را جمع می کنیم.



### متد جزء به جزء

در کلیه متدهای تکرار که در پیش توضیح داده شدند، جواب اولیه که در معادلات معرفی می شوند رل مهمی را بازی کرده و ممکن است بر اساس این انتخاب راه حل واگرا گردد. متد جزء به جزء عبارت است از جایگزینی راه حل.

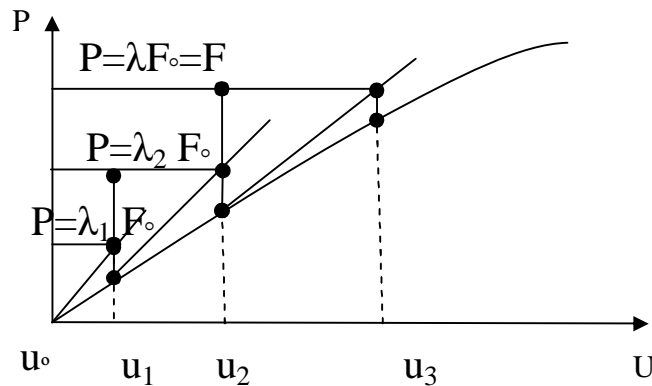
$$[K(U)]\{U\} = I\{F_0\} = \{F\}$$

توسط راه حل مداوم زیر

$$I_j = I_1, I_2, I_3, \dots, [K(U_j)]\{U_j\} = I_j\{F_0\}$$

جواب اولیه در هر بار حل جواب به دست آمده در حل قبلی است. هر گام حل یک مسأله غیر خطی است که اکثرا با متد نیوتن - رافسون یا نیوتن رافسون اصلاح شده خواه با یک تکرار خواه با چند تکرار حل می گردد.

روش جزء به جزء با استفاده از یک تکرار نیوتن - رافسون در هر گام حل به صورت زیر نوشته می شود.



$$\{R(U_{j-1})\} = I_{j-1}\{F_0\} - [K(U_{j-1})]\{U_{j-1}\}$$

$$[K_t(U_{j-1})]\{\Delta U_j\} = \{R(U_{j-1})\} + (I_j - I_{j-1})\{F_0\}$$

$$\{U_j\} = \{U_{j-1}\} + \{\Delta U_j\}$$

متد جزء به جزء با استفاده از نیوتون - رافسون با چند تکرار برای یک سطح تحریکات داده شده  $I_j$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$[K_t(U_j^{i-1})]\{\Delta U_j^i\} = \{R(U_j^{i-1})\} + (I_j - I_{j-1})\{F_0\}$$

$$\{U_j^i\} = \{U_j^{i-1}\} + \{\Delta U_j^i\} \quad i = 2, 3, \dots$$

### معادلات گذرا

در مسائل انتشاری، مجزاسازی در فضای سه بعدی توسط روش اجزا محدود - معمولاً به معادلات درجه اول یا درجه دوم بر حسب زمان منتهی می شود.  
معادلات درجه یک فرم زیر را دارند:

$$\text{for } t > t_0 \quad [C]\{U\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

$$\{U(t_0)\} = \{U_0\}$$

معادلات درجه دوم

$$\text{for } t > t_0 \quad [M]\{\dot{U}\} + [C]\{U\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

$$\{U(t_0)\} = \{U_0\}, \quad \{\dot{U}(t_0)\} = \{\dot{U}_0\}$$

در معادلات بالا  $\dot{U}$  مشتقات اول و دوم نسبت به زمان می باشند. ماتریس های  $[K], [C], [M]$  به ترتیب ماتریس های جرم، میرایی و سختی هستند که در مسائل حرارتی  $[K], [C]$  ماتریس های ظرفیت حرارتی و هدایت حرارتی خواهند شد. بردار  $\{F\}$ ، بردار تحریکات (بارگذاری تششی یا حرارتی) می باشد. ماتریس های بالا می توانند مستقل از بردار مجهول  $\{U\}$  باشند که در این صورت سیستم خطی است و همچنین در صورتی که پارامترهای فیزیکی مصالح در طول زمان تغییر نکنند، ماتریس های مذکور در زمان نیز ثابت خواهند بود.

در مواقعی می توان سیستم های درجه دوم را با تغییر متغیر به سیستم های درجه اول تبدیل نمود:

$$[M]\{\dot{U}\} + [C]\{U\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

با انتخاب

$$\{U\} = \{V\}$$

$$[M]\{\dot{V}\} + [C]\{V\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

$$[I]\{\dot{U}\} - [I]\{V\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{U} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ -[I] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[C']\{\dot{U}\} + [K']\{U'\} = \{F'\}$$

سیستم بالا تعداد مجهولات افزون گشته و ماتریس  $K'$  متقارن نیست.

روش های متداول انتگرال گیری در زمان معادلات درجه اول

- متد اولر واضح (Euler Explicite)

$$\{\dot{U}\} = [C]^{-1}(\{F\} - [K]\{U\})$$

$$\text{for } t > t_0 \quad \{\dot{U}\} = \{f(\{u\}, t)\} \quad \{U(t_0)\} = \{U_0\}$$

در صورت انتخاب روش تفاضل محدود پسرو و (به چپ) داریم:

$$\{\dot{U}(t)\} = \{\dot{U}_t\} = \frac{1}{\Delta t}(\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\})$$

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t\{\dot{U}_t\}$$

$$= \{U_t\} + \Delta t\{f(\{U_t\}, t)\}$$

در صورت جایگذاری  $\{\dot{U}\}$  از معادله بالا در این معادله خواهیم داشت:

$$[C]\{U_{t+\Delta t}\} = \Delta t\{F_t\} + ([C] - \Delta t[K])\{U_t\}$$

همین معادله به صورت جزیی می تواند نوشته شود:

$$[C]\{\Delta U\} = \Delta t(\{F_t\} - [K]\{U_t\}) = \{R_t\}$$

یا

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \{\Delta U\}$$

الگوریتم عملیات مربوط به حل معادله بالا به صورت زیر است: (جهت پایداری این الگوریتم به مقالات

مؤلف مراجعه شود)

$$t = t_0 -$$

- تعریف  $\{U_0\}$  و  $\Delta t$

- ساختن ماتریس  $[c]$

- مثلثی کردن  $[c]$

- برای هر گام زمانی

$$t = t + \Delta t -$$

- ساختن  $\{R_t\}$

- حل معادله  $\{R_t\} = [C]\{\Delta U\}$

- محاسبه  $\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \{\Delta U\}$

اولر واضح:

$$\{\dot{U}(t)\} = \{\dot{U}_t\} = \frac{1}{\Delta t}(\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\})$$

تفاضل عدد پسرو (به چپ) می دهد.



روش های عددی در خاک

فرم واضح :  $\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t \{f(\{U_t\}, t)\}$

$$f = [C]^{-1}(\{F\} - [K]\{U\})$$

جایگذاری کرده و بسط دهیم و دو فرم کلی را عرضه کنیم و پایداری را ذکر کنیم. تفاضل محدود و پیشرو (به راست) می دهد.

متد اولر ضمنی:

$$\{\mathcal{U}_{t+\Delta t}\} = \frac{1}{\Delta t} (\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\})$$

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t \{f(\{U_{t+\Delta t}\}, t + \Delta t)\}$$

$$\Rightarrow [\bar{K}]\{U_{t+\Delta t}\} = \{\bar{R}_{t+\Delta t}\}$$

$$[\bar{K}] = [C] + \Delta t[X]$$

$$\{\bar{R}_{t+\Delta t}\} = \Delta t\{F_{t+\Delta t}\} + [C]\{U_t\}$$

و با فرم  $\Delta U$

$$[\bar{K}]\{\Delta U\} = \{\bar{R}_{t+\Delta t}\} - [\bar{K}]\{U_t\}$$

$$[\bar{K}]\{\Delta U\} = \{R_{t+\Delta t}\}$$

$$\{R_{t+\Delta t}\} = \Delta t(\{F_{t+\Delta t}\} - [K]\{U_t\})$$

متد نیمه ضمنی:

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t \{ f(\{U_{t+a\Delta t}\}, t + a\Delta t) \}$$

$$\{U_{t+\Delta t}\} = a\{U_{t+\Delta t}\} + (1-a)\{U_t\}$$

$$a = 1 \quad \text{implicit}$$

$$a = 0 \quad \text{explicit}$$

$$[\bar{K}]\{U_{t+\Delta t}\} = \{\bar{R}_{t+\Delta t}\}$$

$$[\bar{K}] = [c] + a\Delta t[K]$$

$$\{\bar{R}_{t+\Delta t}\} = \Delta t(a\{F_{t+\Delta t}\} + (1-a)\{F_t\} - (1-a)[K]\{U_t\}) + [C]\{U_t\}$$

فرم  $\Delta U$ :

$$[\bar{K}]\{\Delta U\} = \{R_{t+\Delta t}\}, \quad \{R_{t+\Delta t}\} = \Delta t(a\{F_{t+\Delta t}\} + (1-a)\{F_t\} - [K]\{U_t\})$$

معادلات درجه یک

معادلات گذرا

روش های عددی در خاک

$$\text{for } t > t_0 \quad [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

$$\{U_{(t_0)}\} = \{U_0\}$$

درجه دوم

$$\text{for } t > t_0 \quad [M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

$$\{U_{(t_0)}\} = \{U_0\}, \{\dot{U}_{(t_0)}\} = \{\dot{U}_0\}$$

تبدیل به درجه یک

$$\{\dot{U}\} = \{V\}$$

$$[M]\{\dot{V}\} + [C]\{V\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

$$[I]\{\dot{U}\} - [I]\{V\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{U} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

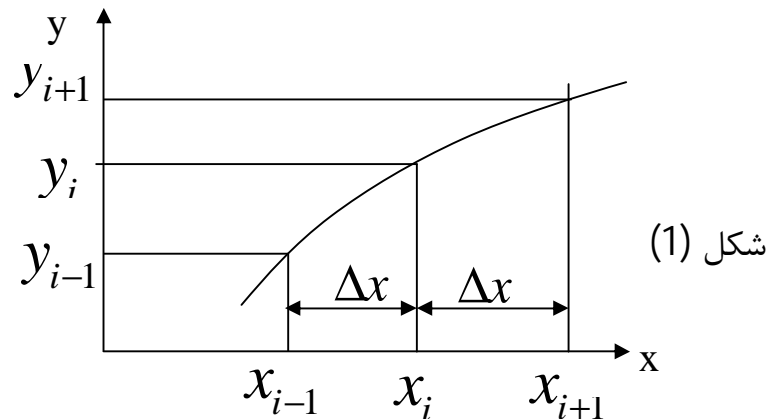
$$[c']\{\dot{U}'\} + [k']\{U'\} = \{F'\}$$

### روش تفاضل محدود:

با نوشتن تابعی مثل  $y = f(x)$  می توانیم مشتقات درجه اول و درجه دوم و ..... آن را در نقطه  $x_i$  به طریق زیر محاسبه کنیم.

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad (1)$$

فرمول بالا به فرمول تفاوت مرکزی معروف است می توان از فرمول های تفاوت پیشرو و تفاوت پسرو به شرح زیر نیز به عنوان فرمول های دیگری که مشتق درجه اول در نقطه  $x_i$  را به دست می دهند یاد کرد.



$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (2) \quad \text{تفاوت پیشرو}$$

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \quad (3) \quad \text{تفاوت پسرو}$$

فرمول تفاوت مرکزی نسبت به دو فرمول دیگر از تقریب بهتری جهت تعیین میزان مشتق درجه اول در نقطه مفروض برخوردار است. مشتقات از درجات دیگر را نیز به همین روش می توان محاسبه نمود. مثلاً جهت مشتق درجه دوم را با استفاده از عبارت مشتق درجه اول در نقاط به فاصله  $\frac{\Delta x}{2}$  در هر طرف  $x_i$  و  $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$  با توجه به این که مشتق درجه دوم بیانگر نرخ تغییرات مشتق درجه اول بین این دو نقطه می باشد محاسبه نمود.

$$y''_i = \frac{y'_{i+\frac{1}{2}} - y'_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (4)$$

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (5)$$

$$y'_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \quad (6)$$

با گذاشتن فرمول های (5) و (6) در فرمول (4) نتیجه می گیریم:

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (7)$$

روش های عددی در خاک

به همین طریق با استفاده از سری های تیلور و مک لوران می توان مشتقات درجه بالاتر را به دست آورد. و هنگامی که با توابع دو پارامتر مستقل مثل  $j = f(x, y)$  کار می کنیم، لازم است که از شبکه بندی در دو جهت  $x, y$  با اندازه های  $\Delta x, \Delta y$  استفاده کنیم. برای چنین توابعی مشتقات درجه اول و درجه دوم را از فرمول تقریب تقارن مرکزی به شرح زیر به دست می آوریم:

$$\left(\frac{\partial j}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{j_{i+1,j} - j_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial j}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{j_{i,j+1} - j_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{j_{i+1,j} - 2j_{i,j} + j_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^2 j}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{j_{i,j+1} - 2j_{i,j} + j_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (11)$$

اگر فرم کلی معادله دیفرانسیل، مشتقات جزئی از درجه دوم زیر را در نظر بگیریم:

$$a \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 j}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} = f(x, y, j, \frac{\partial j}{\partial x}, \frac{\partial j}{\partial y}) \quad (12)$$

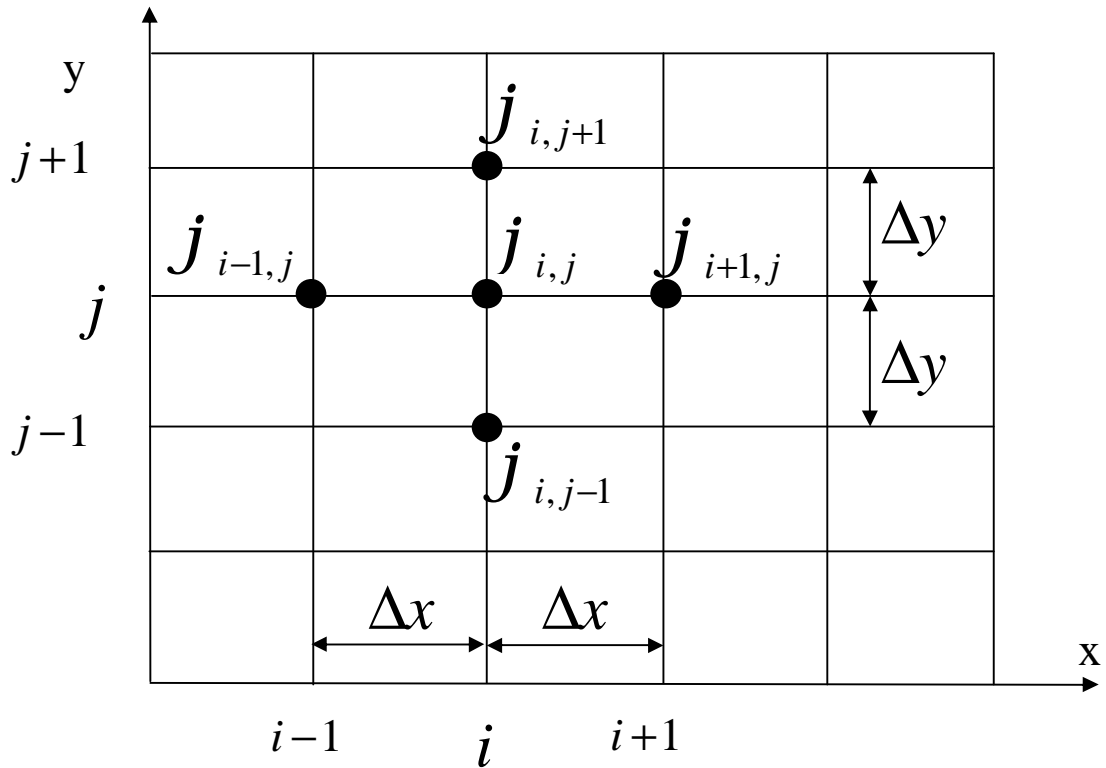
برحسب مقدار  $\Delta = b^2 - 4ac$ ، معادله بالا نام های زیر را به خود می گیرد و راه حل هر یک از معادلات زیر به طور مشخص در کتاب های تحلیل عددی معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی داده شده است.

$\Delta < 0$  (elliptic) معادله بیضی

$\Delta = 0$  (Parabolic) سهمی

$\Delta > 0$  (hyperbolic) هذلولی

لیکن بحث ما در مورد فرم ساده شده معادله بالا یعنی  $\nabla^2 h = 0$  می باشد.



شکل (2)

برای حل معادله بالا عبارات مشتق جزئی درجه دوم را که به دست آورده ایم در عبارات لاپلاسین جایگزین می کنیم.

$$\frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (13)$$

با مساوی قرار دادن  $\Delta x = \Delta y$  یعنی با استفاده از یک شبکه مربعی می توان نوشت:

$$h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 4h_{i,j} + h_{i+1,j} + h_{i-1,j} = 0 \quad (14)$$

روش های عددی در خاک

یعنی عامل  $\nabla^2$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & -4 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (15)$$

در حل یک مسأله تراوش آب یا انتشار حرارت یا هدایت الکتریکی که معادله حاکم بر آن به صورت معادله درجه دوم (لاپلاسین) می باشد، برای هر یک از نقاط شبکه معادله بالا را نوشته و یک سیستم معادلات چند مجهولی را باید در انتها حل نمود.

روش های حل معادلات جبری چند مجهوله به شرح زیر است:

1- روش های مستقیم مثل گوس - جردن، چولسکی، دولیتل

2- روش تکرار

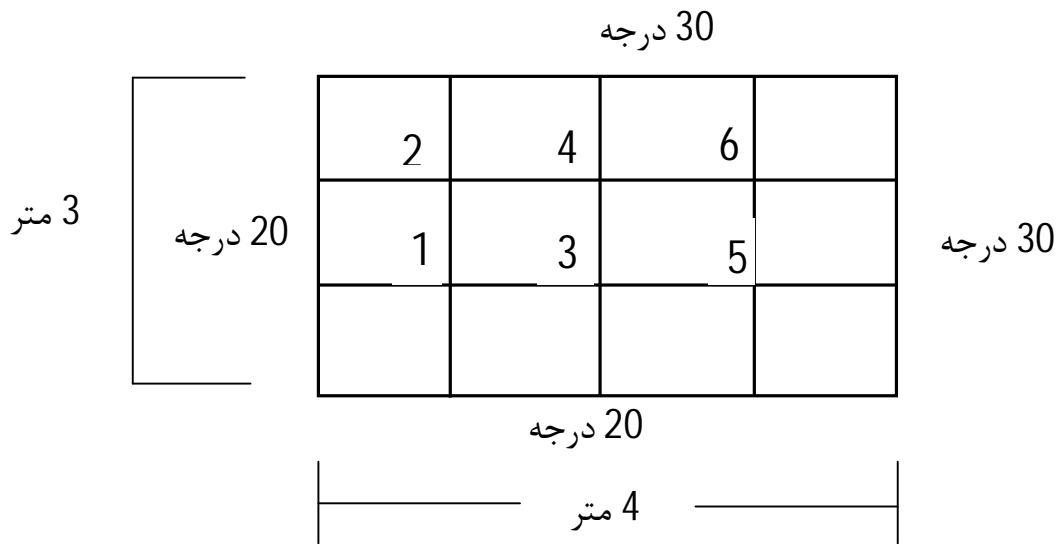
3- روش رهایی

توضیح روش های مستقیم را که معمولاً در حل معادلات بزرگ (مجهول های بسیار زیاد) به کار گرفته می شود. در کتاب های محاسبات علمی می توان یافت و معمولاً با نوشتن یک برنامه کوتاه کامپیوتری جهت عکس نمودن ماتریس ضرایب که قبلاً بصورت مثلثی درآمده اند همراه است.

روش های غیرمستقیم (روش تکرار یا رهایی) معمولاً در حل معادلات دستی استفاده شده و روش تکرار از تقارب بهتری برخوردار می باشد. به همین دلیل با حل یک مثال روش مستقیم و روش تکرار را توضیح می دهیم.

مثال مطلوب است: تعیین درجه حرارت نقاط محیط زیر با فرض شرایط حدی داده شده.

روش های عددی در خاک



معادله حاکم  $\Delta T = 0$  می باشد. عامل لاپلاسیان داده شده در معادله (15) را استفاده می کنیم.

1) روش مستقیم: معادلات با استفاده از معادله (14) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$-4T_1 + T_2 + T_3 = -40$$

$$T_1 - 4T_2 + T_4 = -50$$

$$T_1 - 4T_3 + T_4 + T_5 = -20$$

$$T_2 + T_3 - 4T_4 + T_6 = -30$$

$$T_3 - 4T_5 + T_6 = -50$$

$$T_4 + T_5 - 4T_6 = -60$$

از حل، سیستم شش معادله و شش مجهول داده شده، می توان درجه حرارت نقاط 1 تا 6 را به دست آورد.

2. روش تکرار

با استفاده از عامل لاپلاسیان زیر:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با فرض اینکه درجه حرارت در تمام نقاط محیط یکسان باشد عمل تکرار را شروع می کنیم.

روش های عددی در خاک

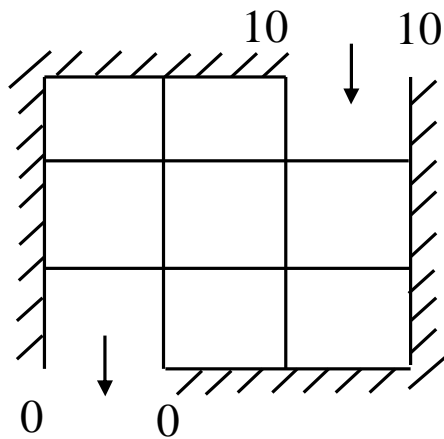
از سمت چپ و بالا شروع کرده و به صورت ستونی پیش خواهیم رفت. زمانی که اختلاف بین دو تکرار به حد کافی کوچک شده باشد می توان حل مسأله را متوقف نموده و جواب های آخرین تکرار را با تقریب

	30	30	30	30	30
		23/4 22/5 ۲۰	25 23/1 ۲۰	27/3 25/8 ۲۰	
20		21/1 20/6 ۲۰	22/6 20/9 ۲۰	25 24/2 ۲۰	30
20					30
	20	20	20	20	30

مناسبی به عنوان جواب های مسأله قبول کرد.



مسأله: در میدان جریان دو بعدی زیر، بار آبی نقاط را به دست آورید.  
سطوح هاشور خورده نمودار سطوحی هستند که نفوذناپذیر می باشند. بار آبی در دو نقطه در بالا مساوی 10 و در دو نقطه در هنگام خروج مساوی صفر می باشد.



بر روی بستر ارتجاعی با روش تفاضل محدود

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -K_s \cdot y$$

$$y'' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2(\Delta x)^3}$$

$$M = EIy''$$

$$V = EIy'''$$

$$M_i = \frac{EI}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = M_i$$

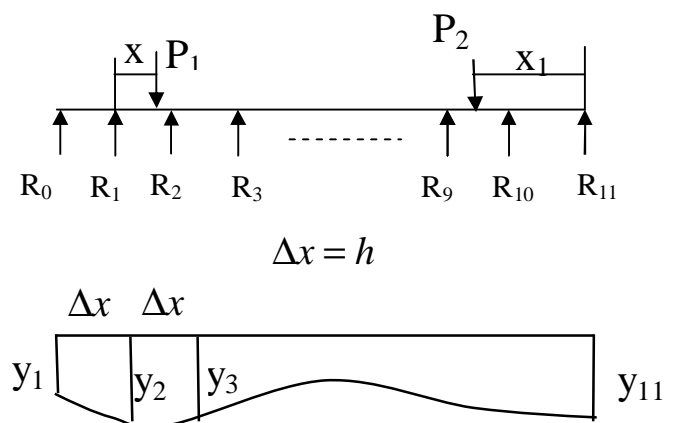
$$V_i = \frac{EI}{h^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) = V_i$$

$$q_i = K_s B y_i$$

$$R_1 = y_2 K_s B h y_1$$

$$R_2 \text{ to } R_{10} = K_s B h y_i$$

$$R_{11} = y_2 K_s B h y_{11}$$



هر نوع پخش تنش را می توانیم انتخاب کنیم.

روش های عددی در خاک

برای هر نقطه معادله  $M$  را می نویسیم: مثلاً برای نقطه 2 داریم:

$$M_2 = \frac{EI}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) = R_1 h - P_1(h - x) = \frac{1}{2} K_s B h y_1 - P_1(h - x)$$

برای نقطه 3 داریم:

$$\frac{EI}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) = R_1(2h) + R_2 h - P_1(2h - x)$$

در نتیجه برای 9 نقطه میانی، 9 معادله خواهیم داشت:

مجموع ممان ها و مجموع نیروها را که بنویسیم معادلات کامل می شوند.

$$\sum M_{0_{11}} = 0 \quad R_1(10h) + R_2(9h) + \dots + R_{10}h - P_1(10h - x) - P_2(x_1) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \sum_1^{11} R_i - P_1 - P_2 = 0$$

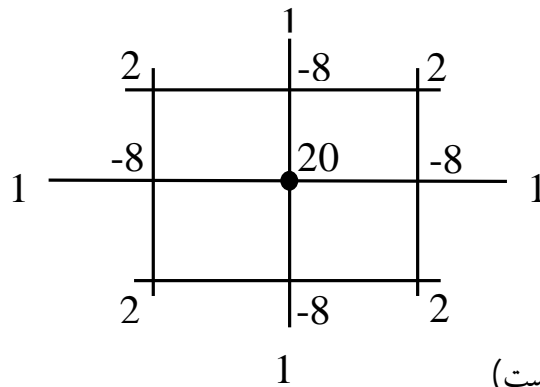
معادله تغییر مکان دال ها  $D \nabla_w^4 = q - KW$  یا  $D = \frac{Eh^3}{12(1-u^2)}$  منحنی پی گسترده

$$\nabla_w^4 = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad \Delta x = \Delta y = h$$

q : بار گسترده زیر پی

k : مدول سابگرید خاک

اپراتور معادله را می نویسیم:



$$= \frac{q \Delta x^4}{D} + \frac{Q h^2}{D}$$

$$= \frac{q h^4}{D} + \frac{Q h^2}{D}$$

Q : بار در نقطه مرکز (نقطه مورد نظر است)

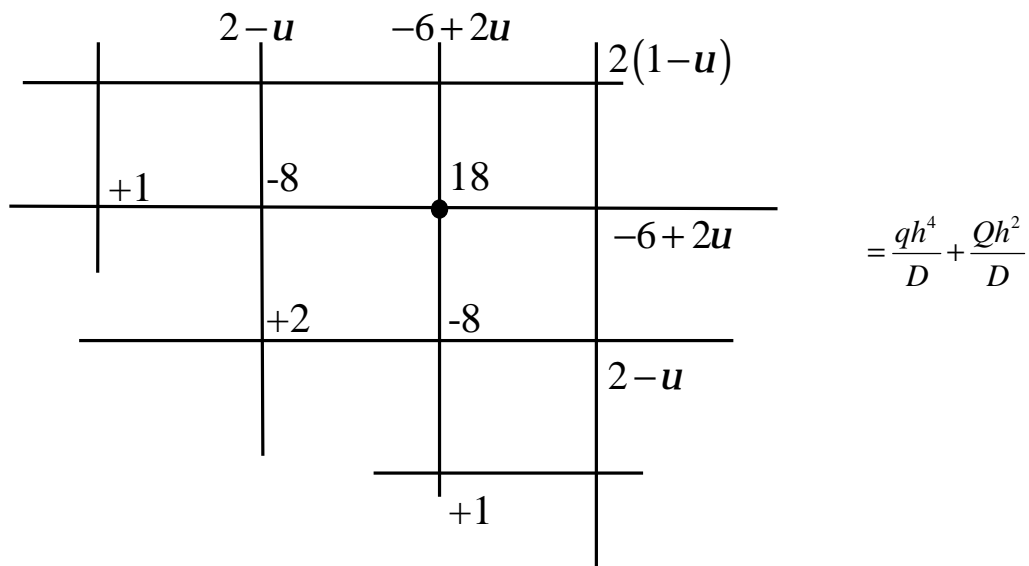
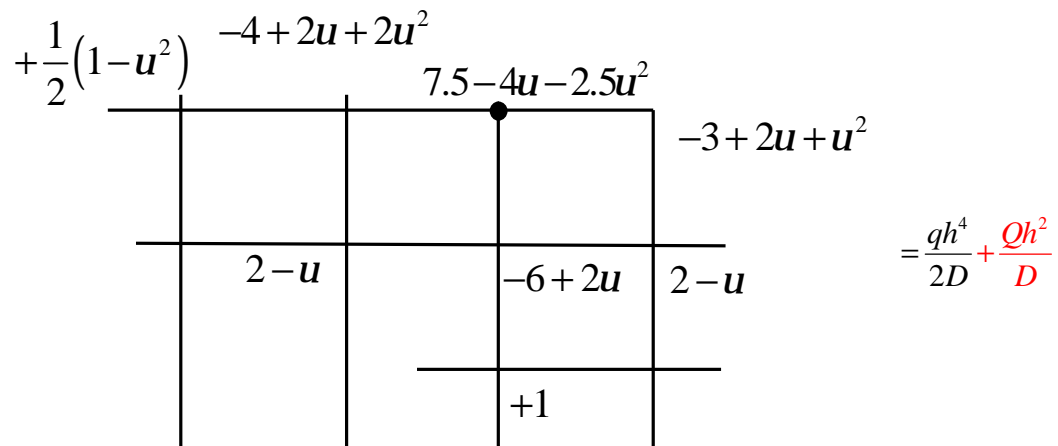
روش های عددی در خاک

$$= \frac{qh^4}{D} + \frac{Qh^2}{D}$$

$$= \frac{qh^4}{2D} + \frac{Qh^2}{D}$$

$$= \frac{qh^4}{4D} + \frac{Qh^2}{D}$$

روش های عددی در خاک



روش های عددی در خاک

برای المان ها می توان نوشت و اپراتور را پیدا کرد.

$$M_x = M'_x + uM'_y \quad \text{ممان در جهت } x$$

$$M_{horizontal} = -\frac{D}{h^2}(w_{left} - 2w_a + w_{right}) + D(w_{up} - 2w_a + w_{down})$$

## محیط متخلخل زیر بارهای دینامیکی و گذرا

کشش مثبت انتخاب شده است

$S_{ij}$  متغیرها  $r$  جرم مخصوص مجموعه

$P$   $R_f$  جرم مخصوص مایع

$u_i$  تغییر مکان متوسط solid  $r_s$  جرم مخصوص جامد

تغییر نسبی مایع نسبت به  $W_1 \rightarrow W_1 / n$  مجموعه مایع تغییر مکان یافته بر کل سطح است

solid

فرض

در مختصات لاگرانژ 
$$e_{ij} = \frac{(U_{ij} + U_{ji})}{2}$$

$$U_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

تنش موثر و روابط رفتاری

تعریف تنش موثر

$$s_{ij} = s'_{ij} - d_{ij} P$$

تغییر شکل حجمی حاصل از تغییر فشار حفره ای عبارت است از

$$d\bar{e}_{ij} = -d_{ij} dP / (3K_s)$$

مدول تغییر شکل حجمی دانه های اسکلت (اگر رفتار غیر خطی باشد  $K_s$  تابع  $P$  خواهد بود)

در خاک قابل صرف نظر کردن است ولی در سنگ باید در نظر گرفته شود.

روش های عددی در خاک

$$de_{ij} = de^s_{ij} + d\bar{e}_{ij} + de^o_{ij}$$

O خزش، دما

تغییر شکل های حاصل از تنش  $de^s_{ij}$  از رابطه تنش - تغییر شکل بدست می آید.

$$ds'_{ij} = D_{ijkl} de^2_{kl}$$

معادله حرکت تعادل کل solid

$$s_{ij,k} r g_i = r \ddot{u}_i + r_f w_i$$

توجه کنید که باید  $n r_f$  گذاشته شود ولی بعلت اینکه از تغییر مکان متوسط استفاده میکنیم (average)

$n r_f \bar{w}_i / n$  (چون معادله حرکت کلی است در نتیجه  $n r_f \bar{w}_i$  استفاده میشود)

معادله تعادل جریان مایع

$$w_{j,i} = -K_{ij} P_{,i}$$

در حالت همان  $K_{ij} = d_{ijk}$  و در حالت غیر همسان ماتریس قطری است.

معادله تعادل کلی مایع

$$-P_{,i} + r_f g_i = K^{-1}_{ij} w_{j,i} + r_f \ddot{u}_i + r_f \bar{w}_i / n$$

### اصل بقای جرم مایع

آخرین معادله لازم معادله بقای جرم مایع است.

دیورژانس سرعت مایع = نسبت افزایش حجم مایع + نسبت کاهش حجم حفرات

$$w_{i,i} = -\frac{e_{i,i}}{n} - (1-n) P' / K_s + \frac{e_{i,i}}{3K_s} - \frac{P}{K_f}$$

$K_f$  مدول حجمی مایع

ترم 1 دست راست = نسبت کاهش اسکلت در حالت غیر قابل تراکم بودن دانه ها (rate)

ترم 2 دست راست = ترم مربوط به نسبت افزایش حجم حفرات بدلیل کاهش حجم دانه ها تحت تاثیر

افزایش فشار هیدرواستاتیک

ترم 3 دست راست = ترم مربوط به نسبت افزایش حجم حفرات بدلیل کاهش حجم دانه ها تحت

تاثیر افزایش تنش متوسط

ترم 4 دست راست نسبت افزایش حجم مایع

P چون فشار است منفی است لذا دو ترم حاوی P علامت منفی داریم

روش های عددی در خاک

در نتیجه معادلات بصورت زیر خلاصه میشوند: در این معادلات اندرکنش خاک و سازه بطور دینامیکی در نظر گرفته شده است.

تغییر مکان کوچک

$$de_{ij} = \frac{(du_{ij} + du_{ji})}{2}$$

### رابطه رفتاری

$$ds'_{ii} = D_{ijkl} (de_{kl} - d\epsilon_{kl} + d_{kl} \frac{dp}{3K_s})$$

$$s_{ij,j} + r g_i = r \ddot{u}_i + r_f \ddot{w}_i \quad \text{تعادل}$$

تعادل مایع بعلاوه معادله رفتاری مایع

$$-P_{,i} + r_f g_i = K^{-1}_{ij} w_{j,i} + r_f \ddot{u}_i + r_f \ddot{w}_i / n$$

### بالانس جرم

$$w_{i,i} + e_{ii} + nP/K_f + (1-n)P/K_s - s'_{ii} / 3K_s = F(x_i)$$

F تابع شرایط اولیه است لذا میتوان فعلا صفر گرفت

ترم های دارای Ks بدلیل بزرگی Ks میتوانند حذف شوند لیکن در مکانیک سنگ چون اندازه بزرگی ks با اندازه های ماتریس K یکی است نمیتوان حذف کرد.

فرمهای ساده شده:

فرمول بندی U-P (پدیده های سرعت نسبی متوسط)

بجای شش درجه آزادی سه بعدی یا 4 درجه آزادی دو بعدی با W و u بهتر است از U و P که سه

درجه آزادی دو بعدی هستند استفاده کنیم

اگر فرض کنیم  $\frac{\bar{w}_i}{\bar{u}_i} \rightarrow 0$  خواهیم داشت

$$s_{ij} = s'_{ij} - d_{ij} P$$

روش های عددی در خاک

$$de_{ij} = \frac{(du_{ij} + du_{ji})}{2}$$

$$ds'_{ii} = D_{ijkl} (de_{kl} - d\epsilon_{kl} + d_{kl} \frac{dp}{3K_s})$$

$$s_{ij,j} + rg_i = r\ddot{u}_i$$

$$(K_{ij} P_{,i})_{,i} - \epsilon_{ii} - (K_{ij} r_f g_i)_{,i} = - (K_{ij} r\ddot{u}_j)_{,i} + n \frac{P}{K_f} + (1-n) \frac{P}{K_s} - \epsilon_{ii} / 3K_s$$

معادله بالا از گذاشتن  $\ddot{u}_i = -K_{ij} P_{,i} - K_{ij} r\ddot{u}_j + K_{ij} r_f g_i$  در معادله آخر معادلات اصلی بدست آمده است.

خود این معادله از معادله تعادل جریان مایع بدست آمده است  
معادلات تحکیم: پدیده بسیار کند

$$\ddot{u}_i \rightarrow 0 \quad \epsilon_{ii} \rightarrow 0$$

$$s_{ij} = s'_{ij} - d_{ij} P$$

$$de_{ij} = \frac{(du_{ij} + du_{ji})}{2}$$

$$ds'_{ii} = D_{ijkl} (de_{kl} - d\epsilon_{kl} + d_{kl} \frac{dp}{3K_s})$$

$$s_{ij,j} + rg_i = 0$$

$$(K_{ij} P_{,i})_{,i} - \epsilon_{ii} - (K_{ij} r_f g_i)_{,i} = n \frac{P}{K_f} + (1-n) \frac{P}{K_s} - \epsilon_{ii} / 3K_s$$

معادلات بسیار سریع رفتار غیر زهکشی شده

در مواقعی که  $k_{ij}$  بسیار کوچک است  $w_i$  و  $w_{\square I}$  و  $w_{\square i}$  هیچگاه به مقادیر قابل توجهی نمیرسند  
با  $K_{ij}=0$  معادله آخر می دهد:

$$\epsilon_{ii} = - \frac{P}{K_f} - (1-n) \frac{P}{K_s} - \epsilon_{ii} / 3K_s$$

یا بصورت جزئی

$$de_{ii} = -dP(n/K_f + (1-n)/K_s) + ds'_{ii} / 3K_s$$

در نهایت سیستم بصورت زیر در می آید

$$s_{ij} = s'_{ij} - d_{ij} P$$



روش های عددی در خاک

$$de_{ij} = \frac{(du_{ij} + du_{ji})}{2}$$

$$ds'_{ii} = D_{ijkl} (de_{kl} - d\epsilon_{kl} + d_{kl} \frac{dp}{3K_s})$$

$$dP(n/K_f + (1-n)/K_s)^{-1} (-de_{ii} + ds'_{ii}/3K_s)$$

$$s_{ij,j} + rg_i = r\ddot{u}_i$$

با ks بزرگ در خاکها می توان نوشت :

$$ds_{ij} = \bar{D}_{ijkl} (de_{kl} - d\epsilon_{kl})$$

$$de_{ij} = \frac{(du_{ij} + du_{ji})}{2}$$

$$s_{ij,j} + rg_i = r\ddot{u}_i$$

$$\bar{D}_{ijkl} = D_{ijkl} + d_{ij} d_{kl} K_f / n$$

میبینیم که محیط یک فازی مشود که اتریس سختی آن فرق کرده است

-رفتار زهکشی شده:

درحالتی که زهکشی انجام می شود می توان نوشت

$$w_1 = 0 \quad \dot{w}_1 = 0$$

$$w_1 = 0 \quad \ddot{u}_1 = 0$$

مسلم است که معادلات از یکدیگر جدا شده و اندرکنش موجود نخواهد بود

درحالت دینامیکی مورد زهکشی شده هیچگاه اتفاق نمی افتد

$$-(K_{ij} P_{,j}) + (K_{ij} r_f g_i)_{,i} = 0$$

با استفاده از این معادله P بدست می آید. سپس با استفاده از معادلات زیر میتوان تغییر مکان شکل را

بدست آورد.

$$s_{ij,j} - P_{,i} + rg_i = 0$$

$$ds'_{ij} = D_{ijkl} (de_{kl} - d\epsilon_{kl})$$

$$de_{ij} = \frac{(du_{ij} + du_{ji})}{2}$$

روش های عددی در خاک

### اعتبار هریک از تقریبات

با فرض بزرگ بودن ks پارامترهای زیر را تعریف میکنیم

$$\Pi_1 = \frac{KrV_c^2}{wl^2} = \frac{2KrT}{pT^2} = \frac{2}{bp} \frac{\bar{K}}{g} \frac{T}{T^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{w^2 l^2}{V_c^2} = p^2 \left(\frac{\hat{T}}{T}\right)^2$$

$$\Pi_3 = b = \frac{r_f}{r}$$

$$\Pi_4 = n$$

$$\Pi_5 = \frac{K_f}{n(K + K_f/n)}$$

### پریود طبیعی خاک

$$T = \frac{2L}{V_c}$$

$$V_c^2 = \frac{K + K_f/n}{r} = \frac{bK_f}{r_f n} = \frac{K_f}{r_f}$$

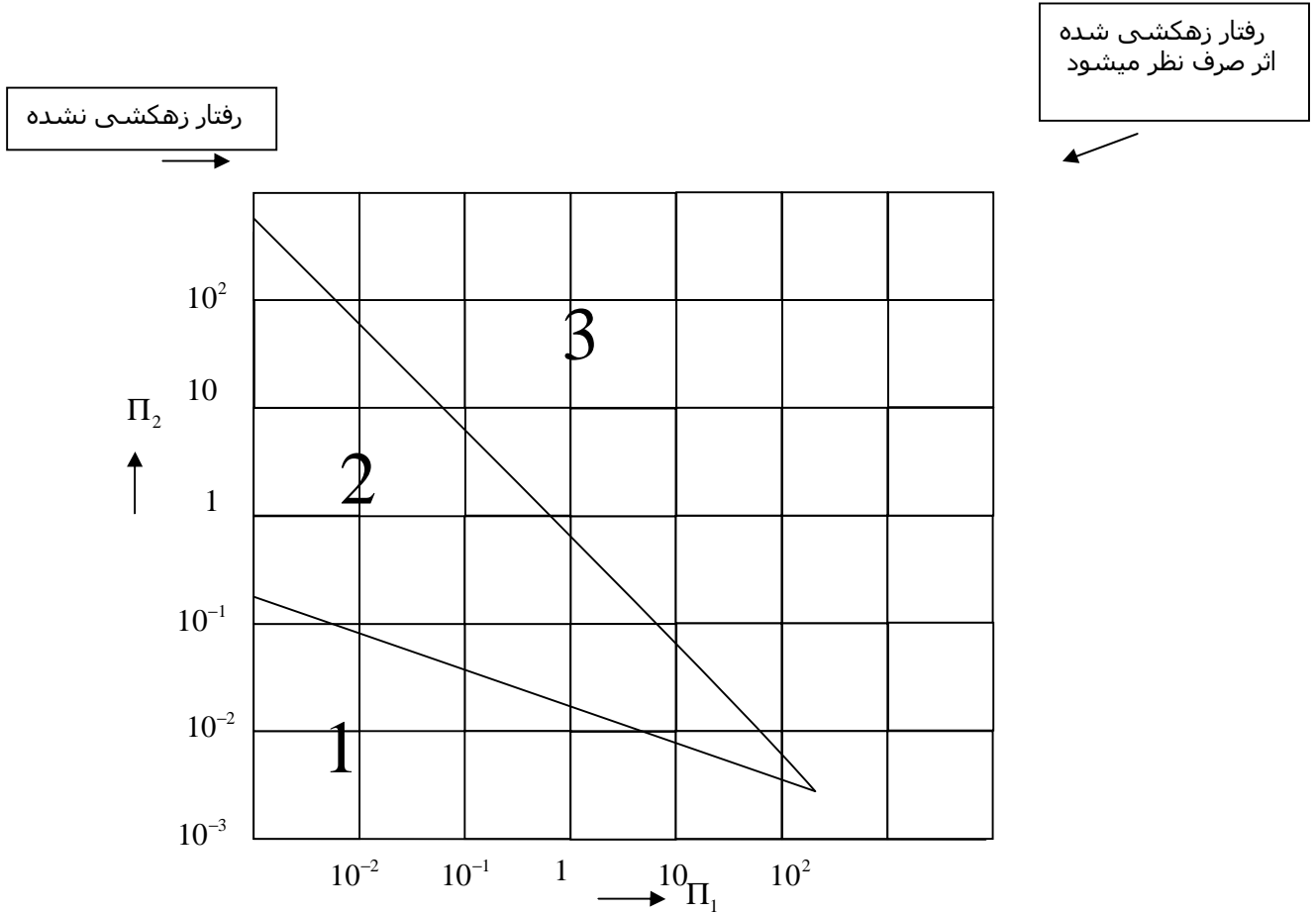
$$K = E(1-n)(1+n)(1-2n)$$

در حالت خاک  $\Pi_3 = \Pi_4 = 1/3$  و  $\Pi_5 = 1$  می توان در نظر گرفت و در نتیجه  $\Pi_1, \Pi_2$  پارامترهای

موثر هستند و قتیکه  $\Pi_2$  بسیار کوچک است .

کلا اثر دینامیکی میتواند حذف شود و راه حل های مختلف نتایج یکسان میدهند.

روش های عددی در خاک



- 1)  $B=Z=C$
- 2)  $B=Z \neq C$
- 3)  $B \neq Z \neq C$

برای یک زلزله  $T=0.01-10^s$  که بر یک سد به طول 50 متر وارد می شود  $T=0.15$  است

$$V_c=1000\text{m/s}$$

$$\left(\frac{2K \times 10^{-2}}{10 \times (10^{-1})^2}\right) = 0.2k < \Pi_1 < \frac{2K}{10} \times \frac{10}{10^{-2}} = 200k$$

$$\left(\frac{10 \times 10^{-1}}{10}\right) = 10^{-3} < \Pi_1 < 10 \left(\frac{10^{-1}}{10^{-2}}\right)^2 = 10^3$$

برای یک مساله شماتیک دریایی  $T=10$  s با عمق 10 متر زیر بستر دریا

$$T=10^{-2}s \quad \Pi_2 < 10 \left(\frac{10^{-2}}{10}\right)^2 = 10^{-5}$$

در نتیجه اثرات دینامیکی کلا میتواند حذف گردد.