۱

اعداد مختلط

اعدادی که در جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی بکار می‌روند و نمایش هندسی آنها نقاط روی یک خط راست است، بـه اعـداد حـقیقی مـوسومند. نـاممکن بـودن حل مـعادلاتی چـون $x^۲ + ۱ = ۰$ در اعداد حقیقی به خلق اعداد مختلط منجر گردید و با وجود اینکه این اعداد اکنون در همه جا پذیرفته شده‌اند، بسط آنها در ابتدا با مخالفت‌هایی جدی روبرو شد که بالاخره بدلیل مفید بودن آنها و غنایی که به بسیاری از زمینه‌های ریاضی می‌بخشیدند کم کم در همه جا پذیرفته شدند.

نظریه توابعی با متغیرهای مختلط، که به اختصار آنرا نظریه **متغیرهای مختلط** یا **آنـالیز مـختلط** نـیز می‌نامند، در قرن نوزدهم بر پایه یافته‌های ریاضی دانان بزرگی چون کوشی، ریمان، وایراشتراس، گاوس و سایرین گسترش یافت. این نظریه از نظر کاربردی بی نهایت مهم و ارزشمند است و کاربردهای آنرا می‌توان در مسائل انتقال گرما، نظریه پتانسیل، مکانیک سیالات، نظریه الکترومغناطیس، نظریه موج و بسیاری از میدان‌های علوم و تکنولوژی مشاهده کرد.

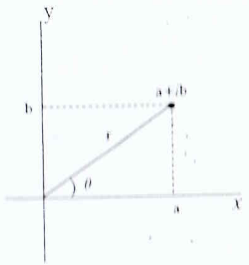
۱-۱. معرفی اعداد مختلط

مجموعه اعداد مختلط، که آنرا با حرف C (اول کلمه *Complex*) نمایش می‌دهیم، شامل کلیه اعدادی به شکل $z = a + ib$ است که در آن a و b اعدادی حقیقی بوده و i، **واحـد مـختلط**، دارای خـاصیت $i^۲ = -۱$ است.

عدد a بخش حقیقی، و عدد b بخش موهومی z نامیده می‌شوند و می‌نویسیم:

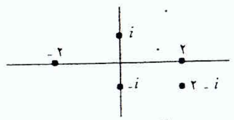
$$\boxed{a = Re(z) \quad ، \quad b = Im(z)}$$

اگر $a = ۰$، آنگاه عدد $z = ib$ یک عدد **موهومی محض**، و اگر $b = ۰$، آنگاه عدد $z = a$ یک
حقیقی محض نامیده می‌شوند. مثلاً عدد $۲i-$ یک عدد موهومی محض و عدد ۵- یک عدد حقی
محض است.



برای نمایش اعداد مختلط، ما از صفحه مختلط استفاده می‌کنیم. عدد $a + ib$ بصورت هندسی بعنوان نقطه‌ای به مختصات (a,b) در صفحه دکارتی تعبیر می‌شود. محور xها را **محور حقیقی**، و محور yها را **محور موهومی** می‌نامند.
مبدأ مختصات متناظر با عدد مختلط صفر است.

مثال ۱:



$Re(i) = ۰ \quad ، \quad Im(i) = ۱$

$Re(-۲) = -۲ \quad ، \quad Im(-۲) = ۰$

$Re(۲ - i) = ۲ \quad ، \quad Im(۲ - i) = -۱$

تساوی دو عدد مختلط

اگر $z_۱ = a_۱ + ib_۱$ و $z_۲ = a_۲ + ib_۲$، آنگاه شرط لازم و کافی برای تساوی $z_۱$ و $z_۲$ این است که داش
باشیم $a_۱ = a_۲$ و $b_۱ = b_۲$. از این نتیجه به خصوص در حل معادلات شامل متغیرهای مختلط استفا
می‌شود. در حل این معادلات کافی است که بخش‌های حقیقی و موهومی دو طرف تساوی را براب
یکدیگر قرار دهیم تا جواب‌های معادله نتیجه گردد.
رابطه کوچکتری در اعداد مختلط تعریف نمی‌شود، پس رابطه $z_۱<z_۲$ فقط وقتی معنی‌دار است که $z_۱$
$z_۲$ هر دو اعداد حقیقی باشند. لذا روابطی چون $z^۲+۱>۰$، $-۱\leq \sin z \leq ۱$ و یا $e^z > ۰$ در میدان اعد
مختلط بی معنی است و فقط برای zهای حقیقی درست است.

مثال ۲:

معادله $x^2 + (2x + y)i = 4 - 3i$ را حل کنید.

حل: با برابر قرار دادن بخش‌های حقیقی و موهومی دو طرف معادله داریم:

$$x^2 = 4 \quad \text{و} \quad 2x + y = -3$$

چون $x = \pm 2$، بنابراین جواب‌های معادله برابر $2 - 7i$ و $-2 + i$ می‌باشند.

□

مثال ۳:

معادله $\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0$ را حل کنید.

حل: در اینجا داریم:

$$\sin x \cosh y = 0 \quad (1) \quad \text{و} \quad \cos x \sinh y = 0 \quad (2)$$

چون همواره $\cosh y \neq 0$، پس از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم $\sin x = 0$. بنابراین $\cos x \neq 0$ بوده و از رابطه (۲) نتیجه می‌گیریم $\sinh y = 0$. پس جواب‌های معادله از حل توأم معادلات $\sin x = 0$ و $\sinh y = 0$ نتیجه می‌شوند. بنابراین $x = k\pi$ برای kهای صحیح و $y = 0$ جواب‌های معادله هستند و جواب‌ها را می‌توان بصورت $x + iy = k\pi$ برای $k = 0, \pm 1, \ldots$ نوشت.

□

۱-۲. شکل قطبی اعداد مختلط

به دلیل طبیعت دو بعدی اعداد مختلط، می‌توان از مختصات قطبی نیز برای نامیدن عدد مختلط غیر صفر $z = a + ib$ استفاده کرد. اگر $a = r\cos\theta$ و $b = r\sin\theta$، آنگاه برای $z \neq 0$ داریم:

$$\boxed{z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را به اختصار با $cis\,\theta$ نمایش می‌دهند. در بخش‌های بعد نشان خواهیم داد که $e^{i\theta}$ نمایش دیگری از این عبارت است، بنابراین شکل قطبی z را می‌توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$\boxed{z = r e^{i\theta}}$$

واضح است که چون دورهٔ تناوب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ برابر 2π است، بنابراین داریم:

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$$

لذا می‌توان شکل قطبی z را به صورت زیر نوشت که در آن k هر عدد صحیح دلخواه است.

$$z = r e^{i(\theta + 2k\pi)}$$

عدد نامنفی $r = \sqrt{a^2 + b^2}$، فاصلهٔ z از مبدأ مختصات، به **قدر مطلق** یا **مدول** z موسوم است و آ
نماد $|z|$ نمایش می‌دهند. زاویه $\theta = arc\ tan\ \frac{b}{a}$ به **آرگومان** z موسوم بوده و آنرا با $arg(z)$ نم
می‌دهیم.

$$\boxed{r = |z| \quad \text{و} \quad \theta = arg\ (z)}$$

مقداری از آرگومان z که در فاصله $[-\pi, \pi]$ واقع می‌گردد، **آرگومان اصلی** نامیده شده و با نماد (z)
مشخص می‌شود. مقدار آرگومان اصلی برای اعداد واقع در بالای محور حقیقی مثبت، و برای اعداد در پایین آن منفی است. همچنین مقدار آن روی محور حقیقی برابر ۰ یا π و روی محور موهومی $\pi/2$ یا $-\pi/2$ است.

همواره داریم:

$$\boxed{arg(z) = Arg(z) + 2k\pi \qquad (k\ \text{صحیح})}$$

در بسیاری از کتب مهندسی از **طول** و **زاویه** به جای مدول و آرگومان و از نماد J به جای i استـ
می‌شود.

تعیین شکل قطبی اعداد مختلط

برای تعیین شکل قطبی عدد $z = a + ib \neq 0$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف- بخش‌های حقیقی و موهومی z، یعنی a و b را شناسایی کرده و $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ را بد
می‌آوریم.

ب- جای نقطه را در صفحه مشخص می‌کنیم. اگر نقطه بر محور حقیقی واقع باشد، $Arg\ (z)$ برابر ۰ بوده و اگر بر محور موهومی واقع باشد، $Arg\ (z)$ برابر $\frac{\pi}{2}$ یا $-\frac{\pi}{2}$ است.

پ- $\alpha = tan^{-1}|\frac{b}{a}|$ که عددی بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ است، محاسبه می‌کنیم.

ت- $Arg\ (z)$ را از جدول زیر تعیین می‌کنیم:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$Arg\ (z)$	α	$\pi-\alpha$	$-(\pi-\alpha)$	$-\alpha$

مثال ۴:

شکل قطبی اعداد مختلط الف) i، ب) -۲ و پ) $۱-i$ را تعیین کنید.

الف) $Re(i)=0$ و $Im(i)=1$، بنابراین $r=\sqrt{1}=1$. چون عدد i در بخش بالایی محور موهومی واقع است، پس $Arg\ (i)=\frac{\pi}{2}$ و بنابراین $i=e^{(\pi/2+2k\pi)i}$.

ب) $Re\ (-2)=-2$ و $Im(-2)=0$، بنابراین $r=2$. چون عدد -۲ در سمت چپ محور حقیقی واقع است، پس $Arg(-2)=\pi$ و بنابراین $-2=2e^{(\pi+2k\pi)i}$.

پ) $|1-i|=\sqrt{2}$ و $\alpha=\tan^{-1}|\frac{b}{a}|=\tan^{-1}|\frac{-1}{1}|=\frac{\pi}{4}$. چون نقطه در ربع چهارم واقع است بنابراین $Arg\ (1-i)=-\frac{\pi}{4}$، پس $1-i=\sqrt{2}e^{(-\pi/4+2k\pi)i}$.

□

۱-۳. اعمال روی اعداد مختلط

اعمال جبری روی اعداد مختلط بصورت زیر تعریف می‌شوند:

۱- حاصل جمع: $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$

۲- تفاضل: $(a_1+ib_1)-(a_2+ib_2)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$

۳- حاصلضرب: $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$

در اینجا از خاصیت $i^2=-1$ استفاده شده است. دقت کنید که اگر اعداد مختلط $z_1=a_1+ib_1$ و $z_2=a_2+ib_2$ را متناظر با دو بردار $z_1=(a_1,b_1)$ و $z_2=(a_2,b_2)$ در نظر بگیریم در این صورت:

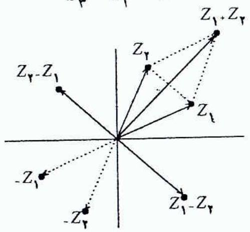
الف) جمع و تفریق دو عدد مختلط، متناظر با جمع و تفریق این دو بردار است (شکل ۱).

ب) $|z_2-z_1|=|z_1-z_2|$ برابر فاصله دو نقطه z_1 و z_2 است.

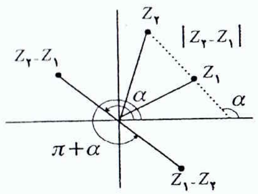
پ) اگر α زاویه بین خط گذرنده از نقاط z_1 و z_2 با جهت مثبت محور حقیقی باشد، آنگاه آرگومان تفاضل z_1 و z_2 برابر α و یا $\pi+\alpha$ است (شکل ۲).

ت) با توجه به شکل (۳) نتیجه می‌گیریم که اگر z_3 نقطه دیگری در صفحه مختلط باشد، آنگاه زاویه بی دو خط گذرنده از z_1 یعنی z_1z_2 و z_1z_3 را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

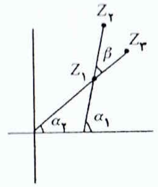
$$\beta=\alpha_1-\alpha_2=arg\ (z_2-z_1)-arg\ (z_3-z_1)=arg\ (\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1})$$



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

به عنوان مثال از این جا می‌توان نتیجه گرفت که سه نقطه متمایز z_1، z_2 و z_3 به شرطی روی یک خط واقعند که زاویه $arg\ \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ مضربی از π باشد، یعنی می‌بایست عدد $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ حقیقی باشد.

۴- خارج قسمت: برای تقسیم a_1+ib_1 بر عدد غیر صفر a_2+ib_2 کافی است، صورت و مخرج را د a_2-ib_2 ضرب نماییم.

خارج قسمت: $\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)\ (a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)\ (a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$

همچنین می‌توان با توجه به شکل‌های قطبی اعداد، ضرب و تقسیم دو عدد $r_1e^{i\theta_1}$ و $r_2e^{i\theta_2}$ را نتیجه گرفت:

حاصلضرب: $(r_1e^{i\theta_1})\ (r_2e^{i\theta_2})=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

خارج قسمت: $(r_1e^{i\theta_1})/(r_2e^{i\theta_2})=(r_1/r_2)e^{i(\theta_1-\theta_2)}\qquad (r_2\neq 0)$

از روابط فوق نتیجه می‌گیریم که اگر $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ باشند، آنگاه:

$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$

و $arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=arg(z_1)+arg(z_2)$

به همین نحو $|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|$

و $arg(z_1/z_2)=arg(z_1)-arg(z_2)$

مثال ۵:

اگر $z_1 = -3 - 4i$ و $z_2 = 4 + 8i$، آنگاه:

$$z_1 + z_2 = 1 + 4i \; , \; z_1 - z_2 = -7 - 12i \; , \; z_1 z_2 = 20 - 40i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3-4i}{4+8i} \cdot \frac{4-8i}{4-8i} = -\frac{44}{80} + \frac{8}{80} i = -\frac{11}{20} + \frac{1}{10} i$$

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{20 - 40i} = \frac{20 + 40i}{2000} = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} i$$

□

۵- توان: اگر $z = re^{i\theta}$، آنگاه بسادگی می‌توان نشان داد که برای هر عدد طبیعی n:

$$\boxed{z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{ni\theta}}$$

همچنین همواره داریم:

$$\boxed{z^{-n} = \frac{1}{z^n} \qquad z \neq 0}$$

چون $(re^{i\theta})^n = r^n e^{ni\theta}$، پس با فرض $r = 1$ نتیجه می‌گیریم $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$، و یا به عبارتی دیگر

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

این اتحاد به **فرمول دوموآور** موسوم است.

مثال ۶:

مقادیر الف) $(1-i)^3$ ب) $(1-i)^{-3}$ را محاسبه کنید.

$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2 \times 2^2} = 2\sqrt{2}$

حل: چون $1 - i = \sqrt{2}e^{(-\pi/4)i}$، بنابراین

الف) $(1-i)^3 = (\sqrt{2}e^{(-\pi/4)i})^3 = 2\sqrt{2}e^{(-3\pi/4)i} = -2 - 2i$

ب) $(1-i)^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}e^{(-3\pi/4)i}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{(3\pi/4)i} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i$

□

مثال ۷:

مقادیر i^{103} و i^{-78} را محاسبه کنید.

حل: چون $i^1 = i$، $i^2 = -1$، $i^3 = -i$ و $i^4 = 1$، بنابراین $i^{103} = i^3 = -i$ و $i^{-78} = i^{-80} i^2 = -1$

مثال ۸:

با استفاده از فرمول دوموآور بسط‌های $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را بدست آورید.

حل: کافی است در فرمول دوموآور $n = 3$ قرار دهیم، پس

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

با توان رساندن عبارت سمت چپ و برابر قرار دادن بخش‌های حقیقی و موهومی نتیجه می‌گیریم:

$$\cos 3\theta = Re\,(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\sin 3\theta = Im\,(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$

مثال ۹:

با استفاده از فرمول اویلر $\cos^3\theta$ و $\sin^3\theta$ را بر حسب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ بنویسید.

حل: چون $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ و $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$، پس

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

بنابراین:

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 = \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta})$$

$$= \frac{1}{8}(2\cos 3\theta + 6\cos\theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

$$\sin^3\theta = \frac{1}{-8i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3 = \frac{-1}{8i}(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta})$$

$$= \frac{-1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3\,\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

۶- ریشه: برای تعیین ریشه n ام یک عدد مختلط غیر صفر، ضروری است که ابتدا شکل قطبی آن بصورت $r\,e^{i(Arg\,(z)\,+\,2k\pi)}$ را تعیین کرده و سپس ریشه‌ها را از فرمول زیر محاسبه کنیم:

$$\sqrt[n]{z} = [re^{i(\theta + 2k\pi)}]^{1/n} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

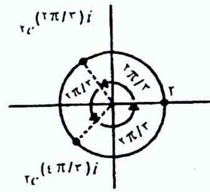
توجه کنید که برای مقادیر متفاوت k، ریشه‌های مختلف نتیجه می‌گردند و چون برای $k = 0, 1, \ldots, n-1$ مجموعه‌ای از n عدد متمایز حاصل می‌شوند که برای سایر مقادیر k نیز همین مقادیر تکرار می‌گردند، این n مقدار متمایز $\sqrt[n]{z}$ را، **n ریشه** z می‌نامند. ریشه متناظر با آرگومان اصلی ($k = 0$) را **ریشه اصلی** می‌خوانند. این n ریشه روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ و به فواصل مساوی از یکدیگر واقع هستند. روش محاسبه z^a برای هر a مختلط در فصل ۳ بررسی خواهد شد.

مثال ۱۰:

ریشه‌های سوم عدد ۸ را بدست آورید.

حل: شکل قطبی عدد ۸ بصورت $8e^{2k\pi i}$ است. بنابراین ریشه‌ها برابرند با:

$$(8e^{2k\pi i})^{1/3} = 2e^{(2k\pi/3)\,i} \qquad k = 0\,,\,1\,,\,2$$



این ریشه‌ها به ترتیب برابر ۲، $2e^{(2\pi/3)i}$ و $2e^{(4\pi/3)i}$ هستند. ریشه اصلی (برای $k = 0$) برابر ۲ است. هر سه ریشه روی دایره‌ای به شعاع ۲ واقع بوده و اختلاف آرگومانهای آنها برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.

□

مثال ۱۱:

کلیه مقادیر $(2 - 2i)^{3/5}$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا مقدار $(2 - 2i)^3 = -16 - 16i$ را محاسبه می‌کنیم.

چون $-16 - 16i = \sqrt{512}e^{(-3\pi/4 + 2k\pi)i}$، بنابراین

$$(2 - 2i)^{3/5} = (\sqrt{512}e^{(-3\pi/4 + 2k\pi)i})^{1/5} = \sqrt[10]{512}e^{(-3\pi/20 + 2k\pi/5)i}$$

که برای $k = 0\,,1\,,2\,,3\,,4$ پنج مقدار متمایز نتیجه می‌شود.

واضح است که در مثال فوق می‌توانستیم ابتدا $(2 - 2i)^{1/5}$ را محاسبه کرده و سپس مقادیر آنرا بتوان برسانیم.

۱-۴. مزدوج یک عدد مختلط

عدد $a - ib$ را مزدوج عدد $z = a + ib$ نامیده و آنرا با $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم. از نقطه نظر هندسی، $\bar{z}$ قرینه نسبت به محور حقیقی است لذا در شکل قطبی مزدوج $z = re^{i\theta}$ برابر $\bar{z} = re^{-i\theta}$ است همواره داریم

الف)

$$Re\,(\bar{z}) = Re\,(z)\;,\quad Im\,(\bar{z}) = -\,Im\,(z)$$
$$|\bar{z}| = |z|\;,\quad Arg\,(\bar{z}) = -\,Arg\,(z)$$

ب)

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2\;,\quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2\;,\quad \overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1\,/\,\bar{z}_2$$

پ)

چون $z + \bar{z} = 2a$، $z - \bar{z} = 2ib$ و $z\bar{z} = a^2 + b^2$، لذا

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}\;,\quad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}\;,\quad z\bar{z} = |z|^2$$

ت)

از رابطه $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\,\overline{(z_1 z_2)} = z_1\bar{z}_1 \cdot z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2|z_2|^2$ دوباره نتیجه می‌گیر

$$|z_1\, z_2| = |z_1|\;|z_2|$$

ث)

چون $|z_2 - z_1| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$ فاصله بین دو نقطه z_1 و z_2 است، بنابراین با استفاده نامساوی مثلث همواره

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

مثال ۱۲:

نشان دهید $\overline{[(3+7i)^2/(8-6i)]} = (3-7i)^2/(8+6i)$

حل: داریم:

$$\overline{[(3+7i)^2/(8-6i)]} = \overline{(3+7i)}^2/\overline{(8-6i)}$$

$$= (3+7i)\;\overline{(3+7i)}/\overline{(8-6i)} = \overline{(3-7i)}^2/(8+6i)$$

□

مثال ۱۳:

اگر $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$، عبارت $|z_2-z_1|^2$ را برحسب مدول و آرگومان z_1 و z_2 بیان کنید.

حل: داریم $\bar{z} = re^{-i\theta}$

$$\begin{aligned}|z_2 - z_1|^2 &= (z_2 - z_1)\,\overline{(z_2 - z_1)}\\ &= (z_2 - z_1)\,(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)\\ &= (r_2e^{i\theta_2} - r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{-i\theta_2} - r_1e^{-i\theta_1})\\ &= r_2^2 + r_1^2 - r_1r_2(e^{i(\theta_2-\theta_1)} + e^{-i(\theta_2-\theta_1)})\end{aligned}$$

چون

$$e^{i(\theta_2-\theta_1)} = \cos(\theta_2-\theta_1) + i\sin(\theta_2-\theta_1)$$

و

$$e^{-i(\theta_2-\theta_1)} = \cos(\theta_2-\theta_1) - i\sin(\theta_2-\theta_1)$$

لذا داریم

$$|z_2 - z_1|^2 = r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1).$$

□

مثال ۱۴:

نمایش مکان نقاط $|z| = 4$، $|z|<4$ و $2<|z|<4$ را مشخص کنید.

حل: چون $|z|$ فاصله نقطه z از مبدأ است پس $|z| = 4$ نمایش دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۴ است. همچنین $|z|<4$ نمایش نقاط داخل دایره و $2<|z|<4$ نمایش نقاط واقع بین دو دایره $|z| = 4$ و $|z| = 2$ هستند.

□

۱-۵. شکل‌های هندسی در صفحه مختلط

در مثال قبل دیدیم که $|z| = R$ نمایش دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R است، بنابرا
$|z-z_0| = R$ نمایش دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R خواهد بود. سایر شکل‌های هندسی مقدماتی ر
مانند بیضی‌ها، هذلولی‌ها، سهمی‌ها و خطوط می‌توان در صفحه مختلط بیان نمود. بعنوان م
$|z+1| + |z-1| = 2a$ برای $a>1$ نمایش یک بیضی به کانون‌های ۱ و ۱- است،
$|z+1| + |z-1| < 2a$ نقاط داخل بیضی را مشخص می‌کند. همچنین $|z-1| = |z+1|$ م
کلیه نقاطی است که از دو نقطه $z_1 = -1$ و $z_2 = 1$ به یک فاصله‌اند، پس مکان عمود منصف پاره
z_1z_2، یعنی محور موهومی است. منحنی $Re(z) \le 0$ و $Im(z) = 0$ بخش نامثبت محور حق
است.

از نقطه نظر محاسباتی، روش کلی بیان منحنی‌ها در صفحه مختلط استفاده از شکل پارامتری آنهاس
بعبارت دیگر نقاط روی خم $x = f(t)$، $y = g(t)$، $t_1 \le t \le t_2$ بصورت مخ
$z = x + iy = f(t) + i\,g(t)$، $t_1 \le t \le t_2$ بیان می‌گردد. پس دایره $x = 2\cos t$، $= 2\sin t$
$0 \le t < 2\pi$ بصورت

$$= 2\cos t + 2i\sin t = 2(\cos t + i\sin t) = 2e^{i\theta}$$

برای $0 \le t < 2\pi$ و پاره‌خط $x = t$، $y = t$، $-1\le t\le 1$ به شکل $z = (1+i)t$، $-1\le t\le 1$
می‌شوند.

در زیر شکل پارامتری چند خم داده شده است:

۱- دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R	$0 \le t < 2\pi$	$z = z_0 + Re^{it}$
۲- پاره‌خط از نقطه z_1 به نقطه z_2	$0 \le t \le 1$	$z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t$
۳- خط $x = a$		$z = a + it$
۴- خط $y = b$		$z = t + ib$

مثال ۱۵:

نمودار مکان هندسی نقاط زیر را در صفحه مختلط مشخص کنید.

الف) $|z+i| \le 4$ ب) $Im\, z \ge 1$ پ) $Im\,(z+\frac{1}{z}) = 0$

ت) $|arg\, z| < \frac{\pi}{4}$ ث) $|\frac{1}{z}| > 1$ ج) $|\frac{z+1}{z-1}| = 2$ چ) $z = i \sin t$

حل: الف) داخل و روی دایره‌ای به مرکز $-i$ و شعاع ۴.

ب) چون $Im\, z = y$، پس نقاط $y \ge 1$، یعنی نقاط روی و بالای خط $y = 1$.

پ)
$$Im(z+\frac{1}{z}) = Im(x+iy+\frac{1}{x+iy}) = Im\,(x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2})$$
$$= y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0$$

و یا $y(1-\frac{1}{x^2+y^2}) = 0$ که نقاط روی محور xها ($y=0$) و یا روی دایره $x^2+y^2=1$ است.

توجه کنید که چون $z \neq 0$، پس مجموعه نقاط مبدأ مختصات را شامل نیست.

ت) $-\frac{\pi}{4} < arg\, z < \frac{\pi}{4}$، نقاط بین نیم خط‌های $y=x$، $y=-x$ در ربع اول و چهارم.

ث)
$$|\frac{1}{z}| = |\frac{1}{x+iy}| = \frac{1}{|x+iy|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > 1$$

نقاط $x^2+y^2<1$، داخل دایره‌ای به شعاع واحد که مبدأ مختصات را شامل نیست (چون $z \neq 0$).

ج)
$$|\frac{z+1}{z-1}| = \frac{|z+1|}{|z-1|} = \frac{|x+iy+1|}{|x+iy-1|} = \frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 2$$

پس $4y^2 + 4(x-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$ که پس از ساده کردن معادله مکان بصورت $(x-\frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$ نتیجه می‌شود که دایره‌ای به مرکز $(\frac{5}{3}, 0)$ و شعاع $\frac{4}{3}$ است.

چ) در اینجا $Re\,(z) = 0$ و $-1 \le Im\,(z) = \sin t \le 1$ است. پس مکان بخشی از محور موهومی بین نقاط i و $-i$ است. ❐

۱-۶. توپولوژی صفحه مختلط

فرض کنید z_0 یک عدد مختلط باشد. یک ε **همسایگی** از z_0 مجموعه همه نقاطی از صفحه z است که فاصله‌اش از z_0 کمتر از ε باشد، یعنی مجموعه همه zهایی است که $|z-z_0|<\varepsilon$، که در حقیقت مجموعه نقاط داخل دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع ε است.

فرض کنید R مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختلط باشد. متمم R، $C-R$، مجموعه نقاطی است که در

R واقع نیست. نقطه z_0 یک **نقطه داخلی** R نامیده می‌شود اگر یک ε همسایگی از z_0 در R باشد. نقط
یک **نقطه خارجی** R نامیم اگر یک ε همسایگی در $C-R$ باشد. در غیر اینصورت نقطه را **نقطه مرز**
نامیم.

مجموعه همه نقاط مرزی R، مرز R و مجموعه همه نقاط داخلی R، **داخل R** نامیده می‌شوند. مجموعه
است، اگر تمام نقاط آن نقاط داخلی باشد. متمم یک مجموعه باز را مجموعه **بسته** نامیم. مثلاً مجموعه همه
بطوریکه $|z|<1$، باز و مجموعه همه نقاط z بطوریکه $|z| \le 1$، بسته‌است.

مجموعه R را **کران دار** نامیم اگر عدد مثبت حقیقی M موجود باشد بطوریکه تمام zهای واقع در
شرط $|z|<M$ صدق کنند. اگر این شرایط برقرار نباشد، مجموعه R را **بی کران** خوانیم. بعنوان
مجموعه نقاط داخل یک بیضی کران‌دار، ولی مجموعه نقاط واقع در ربع اول بی‌کران است.

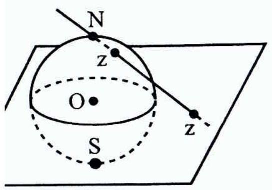
مجموعه R را **همبند** نامیم اگر R یک تکه باشد، بعبارتی بتوان هر دو نقطه واقع در ناحیه را توسط
خط شکسته در درون ناحیه بهم وصل کرد.

یک مجموعه همبند باز را **حوزه** یا **دامنه** می‌نامیم. حوزه R را **همبند ساده** نامیم اگر متمم آن همبند باش
بیان دیگر R شامل هیچ حفره‌ای در درون خود نباشد، مجموعه $1<|z|<4$ همبند ساده نیست.

۱-۷. صفحه توسیع یافته مختلط

در بسیاری از کاربردهای اعداد مختلط مفید است که دستگاه C را با الحاق نماد ∞، نقطه واقع د
گسترش دهیم. این مجموعه جدید، **صفحه توسیع یافته مختلط**، M نامیده شده و نقطه ∞ در ق
جبری زیر صدق می‌کند.

$$a+\infty = \infty + a = \infty \quad , \quad \frac{a}{\infty} = 0 \quad (a \neq \infty)$$
$$b.\infty = \infty.b = \infty \quad , \quad \frac{b}{0} = \infty \quad (b \neq 0)$$



یک مدل هندسی مناسب برای M کره واحد (کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد) در فضای سه بعدی است. در این مدل به هر نقطه z در صفحه، نقطه z'، محل تقاطع خط zN با کره، را متناظر می‌کنیم در نتیجه N متناظر با نقطه ∞ و S متناظر با مبدأ مختصات می‌گردد (شکل مجاور). این کره به **کره ریمان** موسوم است. واضح است که به این طریق هر خط راست در c، متناظر با یک دایره گذرنده بر N روی

می‌شود این روش مشخص کردن نقاط را **تصویر استریوگرافیک** می‌نامند.

مثالهای گوناگون:

مثال ۱۶:

بخش‌های حقیقی و موهومی $\frac{z+2}{z-1}$ را بدست آورید.

حل:

$$\frac{z+2}{z-1} = \frac{(x+2)+iy}{(x-1)+iy} = \frac{(x+2)+iy}{(x-1)+iy}\cdot\frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$$

$(x+2)(-iy)+(x-1)(iy) = -3iy$

?

$$= \frac{(x+2)(x-1)+y^2+i(-3y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Re\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \frac{x^2+y^2+x-2}{(x-1)^2+y^2} \quad \text{و} \quad Im\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$$

□

مثال ۱۷:

ریشه‌های سوم عدد $\frac{3+\sqrt{3}\,i}{1+i}$ را بدست آورید.

حل: شکل قطبی عدد $3+\sqrt{3}i$ برابر $2\sqrt{3}\,e^{\pi i/6}$، و شکل قطبی عدد $1+i$ برابر $\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}$ است، پس

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{1/3} = \left(\frac{2\sqrt{3}\,e^{\pi i/6}}{\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}}\right)^{1/3} = \left(\sqrt{6}\,e^{-\pi i/12}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\sqrt{6}\,e^{(-\pi/12+2k\pi)i}\right)^{1/3}$$

$$= \sqrt[6]{6}\,e^{(-\pi/36+2k\pi/3)i}$$

برای $k=0,1,2$، سه ریشه محاسبه می‌گردند.

□

مثال ۱۸:

نشان دهید که همواره

الف) $|Re(z)|+|Im(z)|\le\sqrt{2}\,|z|$

ب) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z}_2)$

الف) اگر $z=x+iy$، می‌خواهیم نشان دهیم $|x|+|y|\le\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$، با مجذور کردن طرفین و

انتقال جملات به یک طرف تساوی داریم:

$$x^2+y^2+2|x||y| \le 2(x^2+y^2)$$

$$x^2+y^2-2|x||y| \ge 0 \Rightarrow (|x|-|y|)^2 \ge 0$$

که همواره برقرار است.

ب) داریم:

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1$$

امّا

$$z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1 = (x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_2+iy_2)(x_1-iy_1)$$

$$= 2(x_1x_2+y_1y_2) = 2\,Re(z_1\bar{z}_2)$$

پس

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z}_2)$$

□

مثال ۱۹:

نشان دهید که اگر $|z|=1$ یا $|w|=1$ بوده و $\bar{z}w\ne 1$ باشد، آنگاه $\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|=1$.

حل: فرض کنید $|z|=1$ باشد، پس $z\bar{z}=|z|^2=1$. داریم:

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{z\bar{z}-\bar{z}w}\right| = \frac{|z-w|}{|\bar{z}|\,|z-w|} = \frac{1}{|\bar{z}|} = 1$$

به همین نحو می‌توان وقتی که $|w|=1$ است استدلال کرد.

□

مثال ۲۰:

با استفاده از نامساوی مثلث نشان دهید که برای نقاط داخل حلقه $3<|z|<4$ همواره

$$\left|\frac{z}{z^2+1}\right|<\frac{1}{2}$$

حل: با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$\big||z^2|-1\big| \le |z^2+1| \le |z^2|+1$$

پس

$$\frac{1}{|z^2+1|} \le \frac{1}{\big||z^2|-1\big|} < \frac{1}{|9-1|} = \frac{1}{8}$$

در نتیجه

$$\left|\frac{z}{z^2+1}\right| = \frac{|z|}{|z^2+1|} < \frac{4}{|z^2+1|} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

□

مثال ۲۱:

ثابت کنید

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n = \frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

حل: با فرض $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ داریم:

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n = \left(\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}\right)^n = \frac{\cos n\alpha + i\sin n\alpha}{\cos n\alpha - i\sin n\alpha}$$

$$= \frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

□

مثال ۲۲:

نشان دهید چند جمله‌ای $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$ بر x^2+1 بخش‌پذیر است.

حل: چون $(x+i)(x-i) = x^2+1$ و ریشه‌های آن $\pm i$ است، نشان می‌دهیم $f(i)=f(-i)=0$، داریم:

$$f(i) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - i\sin n\alpha = (e^{i\alpha})^n - (\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)^n$$

$$= e^{ni\alpha} - e^{ni\alpha} = 0$$

به همین نحو می‌توان ثابت کرد $f(-i) = 0$.

□

مثال ۲۳:

ثابت کنید که معادله هر خط راست یا دایره در صفحه z را می‌توان بصورت

(۱) $\alpha z\bar z + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$ نوشت که در آن γ یک عدد حقیقی و β یک عدد مختلط است.

حل: معادله کلیه دوایر یا خطوط بصورت زیر است:

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

با جانشینی $x = \frac{z+\bar z}{2}$ و $y = \frac{z-\bar z}{2i}$ در معادله داریم:

$$A(z\bar z) + B\left(\frac{z+\bar z}{2}\right) + C\left(\frac{z-\bar z}{2i}\right) + D = 0$$

و یا

$$A(z\bar z) + \left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2i}\right)z + \left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2i}\right)\bar z + D = 0$$

با فرض $A=\alpha$، $\frac{B}{2}+\frac{C}{2i}=\beta$ و $D=\gamma$ شکل (۱) حاصل می‌شود. اگر $A=\alpha=0$، آنگاه معادله خط بصورت $\beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$ نتیجه می‌شود.

□

مثال ۲۴:

اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط متمایز باشند، نشان دهید معادله $|z-z_1| = k\,|z-z_2|$ برای $k\neq 0$ و ۱ نمایش یک دایره است.

حل: داریم

$$|z-z_1|^2 = k^2\,|z-z_2|^2$$

لذا

$$(z-z_1)(\bar z-\bar z_1) = k^2(z-z_2)(\bar z-\bar z_2)$$

و یا

$$z\bar z - z_1\bar z - \bar z_1 z + z_1\bar z_1 = k^2(z\bar z - z_2\bar z - \bar z_2 z + z_2\bar z_2)$$

$$(1-k^2)z\bar z - (\bar z_1 - k^2\bar z_2)z - (z_1 - k^2 z_2)\bar z + |z_1|^2 - k^2|z_2|^2 = 0$$

اگر

$\alpha = 1-k^2$، $\beta = -(\bar z_1 - k^2\bar z_2)$ و $\gamma = |z_1|^2 - k^2|z_2|^2$

باشد، معادله دایره (مثال ۲۳)

$$\alpha z\bar z + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$$

نتیجه می‌شود.

□

مثال ۲۵:

نشان دهید:

$$S(\theta) = \sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \cdot \sin\frac{n\theta}{2}$$

حل: چون $\sin n\theta = Im\,(e^{ni\theta})$، پس

$$S(\theta) = Im\,(e^{i\theta}) + Im\,(e^{2i\theta}) + \dots + Im\,(e^{ni\theta}) = Im\,(e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{ni\theta})$$

$$= Im\left(\frac{e^{i\theta}\,(1 - e^{in\theta})}{1 - e^{i\theta}}\right) = Im\left[\frac{e^{i\theta}\, e^{ni\theta/2}(e^{-ni\theta/2} - e^{ni\theta/2})}{e^{i\theta/2}\,(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})}\right]$$

$$= \frac{\sin\,(n\theta/2)}{\sin\,(\theta/2)}\, Im\,(e^{(n+1)\theta i/2}) = \frac{\sin\,(n+1)\theta/2 \,.\, \sin n\theta/2}{\sin\,(\theta/2)}$$

□

مثال ۲۶:

ثابت کنید اگر $|a| < 1$، آنگاه

$$1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + \dots = \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

حل: چون $|a| < 1$، پس می‌توان با فرض $z = ae^{i\theta}$ نوشت:

$$1 + ae^{i\theta} + a^2e^{2i\theta} + \dots = \frac{1}{1 - ae^{i\theta}}$$

و یا

$$(1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + \dots) + i(a\sin\theta + a^2\sin 2\theta + \dots)$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{i\theta}} = \frac{1 - a\cos\theta + ia\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

با برابر قرار دادن بخش‌های حقیقی دو طرف، نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

□

مثال ۲۷:

اگر z_1، z_2 و z_3 رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع باشند، نشان دهید:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$$

حل: چون کلیه زوایای مثلث برابر $\frac{\pi}{3}$ است، بنا بر خاصیت (ت) بخش ۱-۳ داریم

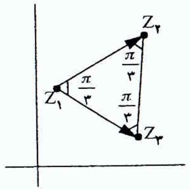
$$\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

با نوشتن شکل قطبی به صورت $z = |z|e^{i\theta}$ داریم

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| e^{\pi/3\, i}$$

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| e^{\pi/3\, i}$$

چون $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_1|$ لذا



$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = e^{\pi/3\, i}$$

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = e^{\pi/3\, i}$$

پس

$$\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$$

و یا

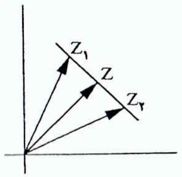
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$$

□

مثال ۲۸:

معادله خط راست گذرنده از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را تعیین کنید.

حل: فرض کنید $z_1 = x_1 + iy_1$، $z_2 = x_2 + iy_2$ و $z = x + iy$ نقطه دلخواهی روی خط باشد. چون z_1 و z_2 و z در یک امتدادند پس



$$z - z_1 = t(z_2 - z_1)$$

که در آن t یک عدد حقیقی است. بنابراین

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

و یا

$$z = (1 - t)z_1 + t\,z_2$$

اگر $0 \le t \le 1$ در نظر بگیریم، معادله پاره‌خط واصل از z_1 به z_2 نتیجه می‌شود.

□

مثال ۲۹:

نشان دهید اگر z_0 یک ریشه چند جمله‌ای $P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ برای a_kهای حقیقی باشد، آنگاه $\overline{z_0}$ نیز ریشه آن است.

حل: داریم

$$P_n(z_0) = a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

از طرفی

$$\overline{P_n(z_0)} = \overline{a_n z_0^n + \dots + a_0} = a_n \overline{z_0}^n + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0$$

پس $\overline{z_0}$ نیز ریشه $P_n(z)$ است.

□

مثال ۳۰:

با استفاده از جواب‌های معادله $z^n - 1 = 0$ نشان دهید که اگر n یک عدد فرد باشد، آنگاه

$$Re(e^{2\pi i/n} e^{4\pi i/n} \dots e^{2(n-1)\pi i/n}) = -1$$

حل: ریشه‌های معادله $z^n - 1 = 0$ برابر $z_1 = 1$، $z_2 = e^{2\pi i/n}$، $z_3 = e^{4\pi i/n}$، ... و $z_n = e^{2(n-1)\pi i/n}$ است. حاصلضرب این ریشه‌ها برابر $(-1)^{n+1}$ است، لذا

$$Re(z_1 z_2 \dots z_n) = (-1)^{n+1} \quad \text{و} \quad Im(z_1 z_2 \dots z_n) = 0$$

برای n فرد $Re(z_1 z_2 \dots z_n) = -1$.

□

تمرینات

اعداد مختلط

۱- معادله زیر را حل کنید (x و y مقادیری حقیقی هستند).

$$2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - (y - x + 3)i$$

۲- نشان دهید معادلات زیر فاقد جوابند.

الف) $\cos x + \sin x + 2i(\cos x - \sin x) = 1 + i$

ب) $e^{x+iy} = 0$

شکل دکارتی اعداد زیر را بنویسید.

۳- $e^{i\pi/2}$ ۴- $8e^{7i\pi/3}$ ۵- $2ie^{-3i\pi/4}$

۶- $e^{2+i\pi}$ ۷- $e^{i\pi/4}\, e^{-i\pi}$

مقدار $Arg(z)$ را برای اعداد زیر تعیین کنید.

۸- $1 - i$ ۹- $-\sqrt{3} + i$ ۱۰- $(-1 - i\sqrt{3})^2$

۱۱- $2/(1 + i\sqrt{3})$ ۱۲- $(1 + i\sqrt{3}) / (1 + i)^2$

شکل قطبی اعداد زیر را بنویسید.

۱۳- -4 ، ۱۴- $-7i$ ، ۱۵- $\sqrt{2}\, i$ ، ۱۶- $-2\sqrt{3} - 2i$ ، ۱۷- -1

۱۸- $-i$ ، ۱۹- $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ ، ۲۰- $-1 + \sqrt{3}i$ ، ۲۱- $2 - 2i$

۲۲- $1 - 2i$ ، ۲۳- $-3 - 4i$ ، ۲۴- $1/(1 - i)^2$ ، ۲۵- $3 + 4i$

اعمال روی اعداد مختلط

محاسبات زیر را انجام داده و جواب‌ها را به صورت $a + bi$ بنویسید.

۲۶- $(3 - 2i) - i\,(4 + 5i)$ ، ۲۷- $\overline{(1 + i)\,(2 + i)}\,(3 + i)$

۲۸- $(i - 1)^3$ ، ۲۹- $\dfrac{1 + 2i}{3 - 4i} - \dfrac{4 - 3i}{2 - i}$

۳۰- $\frac{(۴-i)(۱-۳i)}{-۱+۲i}$ ، ۳۱- $\overline{(۱+i\sqrt{۳})(i+\sqrt{۳})}$

اگر $z_۱ = ۴ - ۳i$ و $z_۲ = -۱ + ۲i$، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

۳۲- $|۲\bar{z}_۱ - ۳\bar{z}_۲ - ۲|$ ، ۳۳- $\bar{z}_۱ - \bar{z}_۲$

۳۴- $|z_۱ - z_۲|$ ، ۳۵- $|z_۱ + z_۲|$

کمیت‌های زیر را تعیین کنید.

۳۶- $Re\,[(۱+i)(۲+i)]$ ، ۳۷- $Re\,(i-۱)^۳$

۳۸- $Re\,[(x_۱+iy_۱)(x_۱-iy_۱)]$ ، ۳۹- $Re\,[(۴-۳i)/(۲-i)]$

۴۰- $Re\,[(x_۱-iy_۱)^۲]$ ، ۴۱- $Im\,[(x_۱+iy_۱)^۳]$

کمیت‌های زیر را تعیین کنید.

۴۲- $|(۱+i)(۲+i)|$ ، ۴۳- $|(۱+i)^{۵۰}|$

۴۴- $|(۴-۳i)/(۲-i)|$ ، ۴۵- $|z\bar{z}|$ ، $z = x+iy$

اعمال زیر را انجام دهید.

۴۶- $(\frac{\sqrt{۳}-i}{\sqrt{۳}+i})^۴(\frac{۱+i}{۱-i})^۵$ ، ۴۷- $۳(\frac{۱+i}{۱-i})^۲ - ۲(\frac{۱-i}{۱+i})^۳$

۴۸- $(i^۴+i^۹+i^{۱۶})/(۲-i^۵+i^{۱۰}-i^{۱۵})$

عبارات زیر را محاسبه کنید.

۴۹- $(۱-i\sqrt{۳})^۳(\sqrt{۳}+i)^۲$ ، ۵۰- $(\sqrt{۳}+i)^۶$

عبارات زیر را محاسبه کنید.

۵۱- $(-۲+۲i)^{۱/۳}$ ، ۵۲- $(-۶۴)^{۱/۴}$ ، ۵۳- $(۱۶i)^{۱/۴}$

۵۴- ریشه‌های $z^{۳/۲} = ۴\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲}\,i$ را تعیین کنید.

۵۵- جواب‌های معادله $z^۲ + (۱+i)z + ۵i = ۰$ را تعیین کنید.

۵۶- جواب‌های معادله $z^۲ + (i-۲)z + (۳-i) = ۰$ را تعیین کنید.

۵۷- معادله $z^۴ + z^۲ + ۱ = ۰$ را حل کنید.

۵۸- نشان دهید در معادله $a_n z^n + \dots + a_۱ z + a_۰ = ۰$ که در آن ضرایب a_k اعدادی حقیقی بوده و n یک عدد طبیعی است، اگر $z = a + bi$ یک ریشه باشد آنگاه $\bar{z} = a - bi$ نیز یک ریشه است و از آن نتیجه بگیرید که اگر n فرد باشد معادله دارای حداقل یک ریشه حقیقی است.

۵۹- اگر $z_۱ = i$ یک ریشه معادله $z^۴ - ۴z^۳ + ۶z^۲ - ۴z + ۵ = ۰$ باشد، با استفاده از تمرین ۵۸ سایر ریشه‌های معادله را بدست آورید.

۶۰- نشان دهید که اگر در معادله تمرین ۵۸ کلیه ضرایب a_k صحیح بوده و $z = \frac{p}{q}$، p و q دو عدد صحیح نسبت به هم اولند، یک ریشه معادله باشد در این صورت p عدد $a_۰$ و q عدد a_n را می‌شمارند.

۶۱- با استفاده از تمرین ۶۰ کلیه ریشه‌های معادله $۶z^۴ - ۲۵z^۳ + ۳۲z^۲ + ۳z - ۱۰ = ۰$ را تعیین کنید.

با استفاده از جواب‌های معادله $z^n - ۱ = ۰$ ، $n = ۲,۳,\dots$ اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

۶۲- $Im\,(e^{۲\pi i/n}\, e^{۴\pi i/n} \dots e^{۲(n-۱)\pi i/n}) = ۰$

۶۳- $\cos\frac{۲\pi}{n} + \cos\frac{۴\pi}{n} + \dots + \cos\frac{۲(n-۱)\pi}{n} = -۱$

۶۴- $\sin\frac{۲\pi}{n} + \sin\frac{۴\pi}{n} + \dots + \sin\frac{۲(n-۱)\pi}{n} = ۰$

۶۵- اگر $z_k \neq ۱$، n امین ریشه عدد واحد باشد، نشان دهید:

$$۱ + z_k + z_k^۲ + \dots + z_k^{n-۱} = ۰$$

۶۶- اگر $z_۰ = ۱$، $z_۱$، $z_۲$، ...، $z_{n-۲}$ و $z_{n-۱}$، n ریشه عدد واحد باشند، ثابت کنید.

$$(z-z_۱)(z-z_۲)\cdots(z-z_{n-۱}) = ۱ + z + z^۲ + \dots + z^{n-۱}$$

خم‌ها و نواحی در صفحه مختلط

نمودار روابط زیر را تشریح کنید.

۶۷- $|z-i| = ۲$ ، ۶۸- $|z+۱-۲i| = ۲$

۶۹- $|z+۲i| \le ۱$ ، ۷۰- $|z+۲i| + |z-۲i| = ۶$

۷۱- $|z-۳| - |z+۳| = ۴$ ، ۷۲- $Re\,(z+۱) = ۰$

۷۳- $Im\,(z^۲) = ۴$ ، ۷۴- $Im\,(z-۲i) > ۶$

۷۵- $z(\bar{z}+۲)=۳$

۷۶- کدام یک از نقاط زیر داخل دایره $|z-i| = ۱$ واقع است؟

الف) $\frac{۱}{۲}+i$ ب) $۱+\frac{i}{۲}$ پ) $\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ت) $-\frac{۱}{۲}+i\sqrt{۳}$

۷۷- خم $z(t) = t^{۲}+۲t+i(t+۱)$ را:

الف) برای $-۱ \le t \le ۰$ ، ب) برای $۱ \le t \le ۲$ رسم کنید.

۷۸- معادله پارامتری خط بین دو نقطه زیر را تعیین کنید:

الف) مبدأ مختصات و $۱+i$ ، ب) i و $۱+i$ ، پ) ۲ و $۱+i$

۷۹- معادله پارامتری بخشی از خم $y = x^{۲}$ بین نقاط زیر را بنویسید.

الف) مبدأ مختصات تا $۲+۴i$ ، ب) $۱+i$ تا مبدأ مختصات

۸۰- معادله پارامتری بخشی از دایره $|z| = ۱$ بین نقاط $-i$ تا i را بنویسید اگر:

الف) خم نیم دایره سمت راست باشد. ب) خم نیم دایره سمت چپ باشد.

۸۱- معادله پارامتری بخشی از دایره $|z| = ۱$ بین نقاط ۱ تا i را بنویسید اگر

الف) پارامتری کردن در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت روی ربع دایره باشد:

ب) پارامتری کردن در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد.

۸۲- منحنی $Re(\frac{۱}{z}) = \frac{۱}{۴}$ نمایش چه خمی در صفحه z است؟

مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

الف) $\{z \mid Re(z) > ۱\}$ ب) $\{z \mid -۱ < Im(z) \le ۲\}$

پ) $\{z \mid |z-۲-i| \le ۲\}$ ت) $\{z \mid |z+۳i| > ۱\}$

ث) $\{re^{i\theta} \mid ۰<r<۱,\ -\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}\}$ ج) $\{re^{i\theta} \mid r>۱,\ \frac{\pi}{۴}<\theta<\frac{\pi}{۳}\}$

چ) $\{z \mid |z|<۱$ یا $|z-۴|<۱\}$

۸۳- هر یک از مجموعه‌ها را رسم کنید.

۸۴- کدام یک از مجموعه‌ها بازند؟

۸۵- کدام یک از مجموعه‌ها همبندند؟

۸۶- کدام یک از مجموعه‌ها حوزه‌اند؟

۸۷- کدام یک از مجموعه‌ها بسته‌اند؟

۸۸- کدام یک از مجموعه‌ها کراندارند؟

تمرینات گوناگون

۸۹- نشان دهید که اگر $|z| = ۱$ و $zw \ne ۱$ آنگاه $\left|\frac{z-w}{۱-\bar{z}w}\right| = ۱$.

۹۰- ثابت کنید اگر $z+\frac{۱}{z}$ حقیقی باشد، آنگاه یا z حقیقی است و یا قدر مطلق آن برابر ۱ است.

۹۱- نشان دهید روی دایره $z = Re^{i\theta}$ داریم $|e^{iz}| = e^{-R\sin\theta}$.

۹۲- نشان دهید که مکان $\left|\frac{۱+z}{۱-z}\right| = k$ برای $k = ۱$، یک خط راست و برای $k \ne ۱$، نمایش یک دایره است.

۹۳- اگر اعداد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ در تساوی $\frac{z_۱-z_۳}{z_۲-z_۳} = \frac{z_۲-z_۱}{z_۳-z_۱}$ صدق کنند با توجه به معانی هندسی هر عبارت نشان دهید $|z_۲-z_۱| = |z_۳-z_۲| = |z_۱-z_۳|$.

۹۴- اگر $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ و $z_۴$ بردارهای موقعیت رئوس چهار ضلعی $ABCD$ باشند، نشان دهید چهار ضلعی متوازی الاضلاع است اگر و فقط اگر داشته باشیم $z_۱-z_۲+z_۳-z_۴ = ۰$.

۹۵- شرط لازم و کافی برای اینکه سه نقطه $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ روی یک خط راست واقع باشند چیست؟

۹۶- شرط لازم و کافی برای اینکه چهار نقطه $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ و $z_۴$ روی یک دایره واقع باشند چیست؟

۹۷- حاصل جمع‌های زیر را بیابید.

الف) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

ب) $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n - 1)x$

۲

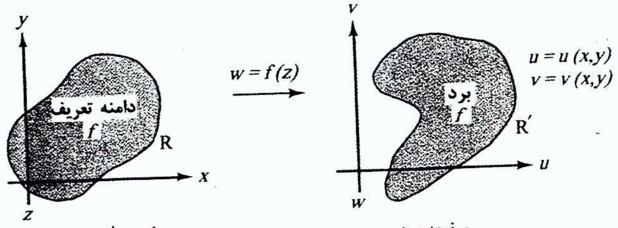
توابع مختلط، حد و پیوستگی، مشتق، توابع تحلیلی و خواص آنها

مفاهیم مطرح شده در این فصل گسترش مفاهیم آشنای حساب دیفرانسیل وانتگرال توابع حقیقی در توابع مختلط است که مهمترین مفهوم آن توابع تحلیلی است. در واقع، آنالیز مختلط بویژه به توابع تحلیلی می‌پردازد و با وجود اینکه بخشی از ساده‌ترین توابع تحلیلی نیستند، بخش عظیم توابع باقی مانده شاخه‌ای از ریاضیات را پدید می‌آورند که از نقطه نظر تئوری یکی از زیباترین و از نقطه نظر کاربردی یکی از مفیدترین شاخه‌های ریاضیات محسوب می‌گردد.

۲-۱. توابع مختلط

یک **تابع مختلط از متغیر مختلط**، قاعده‌ای است که به هر عدد مختلط $z = x + iy$ یک عدد مختلط دیگری چون $w = u + iv$ نسبت دهد و این بدین معنی است که متناظر با هر مقدار z در ناحیه R، ما یک یا بیش از یک مقدار برای w داریم. در اینصورت می‌نویسیم $w = f(z)$ و گوییم w مقدار تابع f در نقطه z است. توابع حقیقی از متغیرهای حقیقی نیز بهمین شکل تعریف می‌شدند و $y = f(x)$ از نظر هندسی با نموداری در صفحه xy مشخص می‌گردید. متأسفانه یک چنین نموداری برای $w = f(z)$ موجود نیست، زیرا برای رسم به فضای چهار بعدی نیاز داریم. در عوض ما اطلاعات خود را در مورد تابع با رسم دو صفحه متمایز مختلط، یکی برای مقادیر z و دیگری برای مقادیر w، و مشخص کردن تناظر بین نقاط یا مجموعه نقاط در این دو صفحه مشخص می‌کنیم. صفحه z را **صفحه دامنه** و صفحه w

را صفحه برد تابع f می‌نامند.



اگر تابع f نقاط ناحیه R را در صفحه z به نقاط ناحیه R' در صفحه w نقش کند، در اینصورت تابع f را یک **نگاشت** از صفحه z به صفحه w می‌نامیم و می‌گوییم «تابع f مجموعه R را به مجموعه R' می‌نگارد». نگاشت f **یک به یک** است اگر هرگاه $f(z_1) = f(z_2)$، آنگاه $z_1 = z_2$؛ **و پوشا** است اگر $R' = f(R)$. $f(R)$ را نقش یا **تصویر مجموعه** R تحت نگاشت f می‌نامند.

اگر به هر مقدار z یک و فقط یک مقدار w متناظر شود، آنگاه w را یک **تابع یک مقداری** از z نامیم، در غیر اینصورت تابع را **چند مقداری** می‌نامند. به عنوان مثال $w = \frac{1}{z}$ یک تابع یک مقداری از z، امّا $w = \sqrt{z}$ یک تابع دو مقداری از z است. تابع اول در کلیه نقاط صفحه z جز $z = 0$ تعریف شده است و تابع دوم دو مقدار برای هر $z \neq 0$ نتیجه می‌دهد.

تابع $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ را که در آن n یک عدد طبیعی و ضرایب a_k اعدادی مختلط هستند، **تابع چند جمله‌ای** می‌نامند. خارج قسمت دو چند جمله‌ای **یک تابع گویا** نامیده می‌شود. دامنه یک چند جمله‌ای تمام اعداد مختلط و دامنه یک تابع گویا کلیه اعداد مختلط بجز ریشه‌های مخرج آن است، مثلاً تابع $f(z) = \frac{2z + 1}{z^3 + z}$ در کلیه نقاط جز نقاط 0 ، i و $-i$ تعریف شده است.

اگر $w = f(z)$ یک تابع مختلط باشد، آنگاه بخش‌های حقیقی و موهومی آنرا بترتیب با $u(z) = u(x,y)$ و $v(z) = v(x,y)$ نمایش می‌دهیم.

$$\boxed{Re\big(f(z)\big) = u(z) \quad , \quad Im\big(f(z)\big) = v(z)}$$

تعیین بخش‌های حقیقی و موهومی توابع مختلط برای بررسی رفتار آنها ضروری است و برای تعیین آنها از شکل‌های دکارتی یا قطبی z استفاده می‌شود.

مثال ۱:

بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = z^2$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از شکل دکارتی z داریم:

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

بنابراین $u = Re\big(f(z)\big) = x^2 - y^2$ و $v = Im\big(f(z)\big) = 2xy$

همچنین شکل قطبی z نتیجه می‌دهد:

$$f(z) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta} = r^2 \cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta$$

پس $u = r^2 \cos 2\theta$ و $v = r^2 \sin 2\theta$ می‌باشند که همان u و v مختصات دکارتی است.

□

مثال ۲:

بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ را نتیجه بگیرید.

حل: شکل دکارتی z نتیجه می‌دهد:

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

پس $u = Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ و $v = Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$

استفاده از شکل قطبی $u = \cos\theta / r$ و $v = -\sin\theta / r$ را نتیجه می‌دهد.

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \sin\theta)$$

□

مثال ۳:

بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = e^z$ را نتیجه بگیرید.

حل: با استفاده از شکل دکارتی داریم:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \, . \, e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

بنابراین $u = Re\,(e^z) = e^x \cos y$ و $v = Im\,(e^z) = e^x \sin y$

در اینجا شکل قطبی z برای تعیین u و v مناسب نیست.

□

مثال ۴:

بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{x+iy} + e^{-x-iy}) = \frac{1}{2}e^x(\cos y + i \sin y) + \frac{1}{2}e^{-x}(\cos y - i \sin y)$$
$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cos y + i\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\sin y$$
$$= \cosh x \, . \, \cos y + i \sinh x \, . \, \sin y$$

بنابراین

$$v(x,y) = \sinh x \sin y \, , \; u(x,y) = \cosh x \cos y$$

□

مثال ۵:

بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = \sqrt{z}$ را تعیین کنید.

حل: در اینجا نمی‌توان از شکل دکارتی z استفاده کرد، پس از شکل قطبی آن استفاده می‌کنیم. در استفاده از شکل‌های قطبی باید حساسیت $u(r,\theta)$ و $v(r,\theta)$ را نسبت به تغییر آرگومان سنجید. بدین دلیل همواره $z = r\,e^{i(\theta+2k\pi)}$ در نظر می‌گیریم که در آن θ آرگومان اصلی z است، پس داریم:

$$f(z) = \sqrt{r\,e^{i(\theta+2k\pi)}} = \sqrt{r}\,e^{i(\theta/2+k\pi)}$$
$$= \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right)$$

چون برای kهای زوج، $f(z) = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ برای $-\pi < \theta \leq \pi$ است، لذا

$$(1) \qquad v(r,\theta) = \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} \quad , \quad u(r,\theta) = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$$

برای kهای فرد، $f(z) = \sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ برای $-\pi < \theta \leq \pi$ است، لذا

$$(2) \qquad v(r,\theta) = -\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} \quad , \quad u(r,\theta) = -\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$$

یعنی تابع $\sqrt{z}$ دارای دو مجموعه u و v است که قرینه یکدیگر نسبت به مبدأ مختصات هستند. پس این تابع برای هر مقدار z دو مقدار، یکی برای u و v روابط (۱) و دیگری برای u و v روابط (۲)، نتیجه می‌دهد. بهمین نحو می‌توان نشان داد که تابع $f(z) = \sqrt[n]{z}$ برای هر n طبیعی دارای n مجموعه متمایز u و v است.

□

تعیین صفرهای یک تابع

z_0 را صفر تابع $f(z)$ نامیم اگر $f(z_0) = 0$ باشد. برای تعیین صفرهای یک تابع کافی است بخش‌های حقیقی و موهومی آن را تواماً برابر صفر قرار دهیم.

مثال ۶:

معادله $e^z + 2 = 0$ را حل کنید (یعنی صفرهای تابع $e^z + 2$ را بیابید).

حل: با توجه به مثال ۳ نتیجه می‌گیریم که باید:

$$(1) \qquad Re\,(e^z + 2) = e^x \cos y + 2 = 0$$
$$(2) \qquad Im\,(e^z + 2) = e^x \sin y = 0$$

باشند. از رابطه (۲) نتیجه می‌گیریم $\sin y = 0$، پس از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم $\cos y = -1$ (حالت $\cos y = 1$ معادله ممتنع $e^x = -2$ را نتیجه می‌دهد)، پس $e^x = 2$.

بنابراین $x = \ln 2$ و $y = (2k+1)\pi$ و جوابهای معادله برای کلیه kهای صحیح بصورت زیر است:

$$z = x + iy = \ln 2 + (2k+1)\pi i \qquad k = 0, \pm 1, \dots$$

□

۲-۲. حدود و پیوستگی توابع مختلط

تعاریف حدود و پیوستگی توابع مختلط مشابه توابع حقیقی است. اگر f در حوزه R تعریف شده و z_0 یک نقطه در R باشد، آنگاه:

تعریف- تابع $f(z)$ در z_0 دارای حد L است، $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$، به شرط آنکه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$

موجود باشد، بطوریکه هرگاه $0<|z-z_0|<\delta$ آنگاه $|f(z)-L|<\varepsilon$.

می‌توان مشابه حدود توابع حقیقی ثابت کرد که حد یک تابع مختلط در صورت وجود منحصر بفرد است.

$f(z)$ را در z_0 **پیوسته** نامیم اگر $f(z_0)=L$ باشد.

یک تابع پیوسته تابعی است که در تمام نقاط تعریف خود پیوسته باشد.

بسادگی می‌توان نتیجه گرفت که نتایج معمول مربوط به حدود حاصلجمع، حاصلضرب و خارج قسمت توابع مشابه با توابع حقیقی برقرار است. تنها اختلاف آن است که برخلاف حالت حقیقی، فقط یک حد در بینهایت داریم. قضایای مربوط به حاصلجمع، حاصلضرب، خارج قسمت و ترکیب توابع حقیقی پیوسته نیز همچنان برقرارند.

در حقیقت حد یک تابع مختلط همچون پیوستگی آن، مشابه حدود و پیوستگی توابع دو متغیره حقیقی است. قضایای اساسی زیر در محاسبه حدود و تشخیص پیوستگی توابع مختلط مفیدند.

قضیه ۱- شرط لازم و کافی برای وجود حد تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در $z_0=x_0+iy_0$ آن است که توابع حقیقی دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در $z_0=(x_0,y_0)$ دارای حد باشند.

قضیه ۲- شرط لازم و کافی برای پیوستگی تابع $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ در $z_0=x_0+iy_0$ آن است که توابع حقیقی دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در $z_0=(x_0,y_0)$ پیوسته باشند.

با توجه به قضایای فوق، چون بخش‌های حقیقی و موهومی توابع چند جمله‌ای در همه نقاط پیوسته‌اند، نتیجه می‌گیریم که توابع چند جمله‌ای در همه نقاط پیوسته هستند. همچنین خارج قسمت دو چند جمله‌ای، تابع گویا، در همه نقاط بجز در ریشه‌های مخرج آن پیوسته است.

مثال ۷:

تحقیق کنید تابع $f(z)=\dfrac{z^3+z+1}{e^z+2}$ در چه نقاطی پیوسته است.

حل: تابع چند جمله‌ای z^3+z+1 در کلیه نقاط پیوسته است. همچنین چون $u(x,y)=Re\,(e^z+2)=e^x\cos y+2$ و $v(x,y)=Im\,(e^z+2)=e^x\sin y$ در کلیه نقاط پیوسته‌اند، پس تابع مخرج، e^z+2، در کلیه نقاط پیوسته است. بنابراین تابع $f(z)$ در کلیه نقاط جز صفرهای مخرج یعنی نقاط $z=\ln 2+(2k+1)\pi i$ برای کلیه kهای صحیح (مثال ٦) پیوسته است.

□

مثال ۸:

نشان دهید که تابع $f(z)=\dfrac{\bar z}{z}$ در $z=0$ دارای حد نیست.

حل:

روش اول - چون تابع $u(x,y)=Re\,(\dfrac{\bar z}{z})=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در $(0,0)$ فاقد حد است (زیرا حد آن روی مسیرهای $y=0$ و $x=0$ متمایز است $\lim\limits_{\substack{x=0\\y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1$ و $\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$) پس $f(z)$ در $z=0$ فاقد حد است.

روش دوم - وقتی $z\to 0$ آنگاه $x\to 0$ و $y\to 0$، بنابراین

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x-iy}{x+iy}$$

روی مسیر $y=0$ مقدار حد برابر ۱ و روی مسیر $x=0$ مقدار حد برابر ۱- است. پس چون حد تابع در صورت وجود منحصر بفرد است، پس این تابع فاقد حد در $z=0$ است.

روش سوم - با استفاده از شکل قطبی z داریم

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z}=\lim_{r\to 0}\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{-2i\theta}$$

چون مقدار حد به θ وابسته است، پس تابع فاقد حد است.

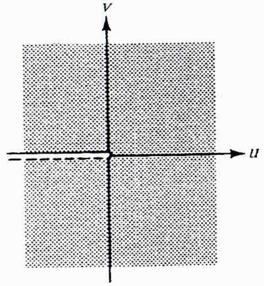
□

قضایای (۱) و (۲) را می‌توان برای تابع $f(z)=u(r,\theta)+i\,v(r,\theta)$، برای $-\pi<\theta\le\pi$ و $r\ge 0$ تعمیم داد.

مثال ۹:

تحقیق کنید تابع $f(z) = lnr + i\theta$ در چه نقاطی پیوسته است. $(-\pi < \theta \le \pi)$.

حل: در اینجا $u(r,\theta) = lnr$ و $v(r,\theta) = \theta$ است. تابع $u(r,\theta)$ در کلیه نقاط $r > 0$ یعنی کل صفحه مختلط بجز نقطه $z = 0$ پیوسته است. تابع $v(r,\theta)$ فقط برای $\theta \in (-\pi,\pi)$ پیوسته است. به عبارت دیگر این تابع در $\theta = \pi$ یعنی نقاط روی نیم محور منفی حقیقی پیوسته نیست. پس نتیجه می‌گیریم که $f(z)$ در کلیه نقاط $r > 0$ و $\theta \in (-\pi,\pi)$ پیوسته است. نقاط ناپیوستگی در شکل مجاور با نقطه چین جدا شده است.



□

۲-۳. مشتق تابع مختلط

مشتق تابع $w = f(z)$ در نقطه $z = z_0$، مشابه مشتق توابع حقیقی یک متغیره بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{f'(z_0) = \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}} \qquad (1)$$

در تعریف (۱)، $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ یک متغیر مختلط است، بنابراین برای موجود بودن مشتق لازم است که حد نسبت $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ مستقل از روش میل کردن Δz به سمت صفر، به عدد یگانه $f'(z_0)$ میل کند.

مثال ۱۰:

مشتق تابع $f(z) = z^2$ را در نقطه $z_0 = i$ بدست آورید.

حل: داریم:

$$f'(i) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(i + \Delta z)^2 - i^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2i + \Delta z) = 2i$$

□

می‌توان نشان داد:

۱) قوانین مشتقگیری توابع حقیقی در توابع مختلط نیز معتبرند. بخصوص به شرط موجود بودن

مشتقات f و g داریم:

الف) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

ب) $(fg)' = f'g + fg'$

ج) $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2 \qquad (g \neq 0)$

د) $(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$ (قاعده زنجیره‌ای)

۲) تابع چند جمله‌ای $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ در کلیه نقاط مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با $p'(z) = na_n z^{n-1} + \cdots + a_1$.

۳) تابع گویای $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ در کلیه نقاط بجز صفرهای مخرج مشتق‌پذیر است.

۴) اگر $\lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{0}{0}$ و $P(z)$ و $Q(z)$ در همسایگی از z_0 مشتق‌پذیر باشند، برای محاسبه حدود به تعداد لازم می‌توان از قاعده هوپیتال استفاده کرد.

مثال ۱۱:

$\lim_{z \to i} (z - i) \frac{2\bar{z} + 1}{2z^3 + iz^2 + 2z + i}$ را با استفاده از قاعده هوپیتال حساب کنید.

حل:

$$\lim_{z \to i} \frac{(z - i)(2\bar{z} + 1)}{2z^3 + iz^2 + 2z + i} = \lim_{z \to i} \frac{z - i}{2z^3 + iz^2 + 2z + i} \cdot \lim_{z \to i} (2\bar{z} + 1)$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{1}{6z^2 + 2iz + 2} \lim_{z \to i} (2\bar{z} + 1) = \frac{1}{6i^2 + 2i^2 + 2} (-2i + 1) = \frac{1}{3} i - \frac{1}{6}$$

در حد اول در حالت $\frac{0}{0}$ از قاعده هوپیتال استفاده شده است.

□

مثال ۱۲:

نشان دهید تابع $f(z) = \bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای دارای مشتق نیست.

حل: در نقطه دلخواه z_0 داریم:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z_0+\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z_0}+\overline{\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

حد فوق روی مسیر $\Delta y = 0$ برابر مقدار ۱ و روی مسیر $\Delta x = 0$ برابر مقدار ۱- است. پس حد فوق در هیچ نقطه موجود نبوده و بنابراین $f(z)$ در هیچ نقطه‌ای دارای مشتق نیست.

❐

شرایط کوشی ریمن

واضح است که اگر در مثال قبل روی دو مسیر $\Delta y = 0$ و $\Delta x = 0$ مقادیر حدود موجود بوده و با هم برابر می‌شدند، نمی‌توانستیم نتیجه بگیریم که این حد مشترک، مشتق تابع است زیرا امکان داشت روی مسیر دیگری مقدار آن متمایز می‌گردید، به عبارت دیگر می‌توان گفت که برابر بودن حدود روی دو مسیر $\Delta x = 0$ و $\Delta y = 0$ در یک نقطه، شرط لازم (و نه کافی) برای مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه است. این حقیقت در قضیه زیر بیان شده و روابط مهمی موسوم به روابط **کوشی ریمن** از آن استخراج شده است.

قضیه ۳- اگر تابع $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ در نقطه $z_0=(x_0,y_0)$ دارای مشتق باشد، آنگاه مشتقات نسبی $u(x,y)$ و $v(x,y)$ نسبت به x و y موجود بوده و در شرایط زیر موسوم به شرایط کوشی ریمن صدق می‌کنند:

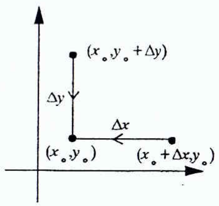
$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\ ,\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$$

در این صورت داریم:

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+i\,v_x(x_0,y_0)$$

اثبات - اگر در نقطه z_0 نمو Δw را بصورت ترکیب نموهای u و v به شکل $\Delta w = \Delta u + i\,\Delta v$ در نظر بگیریم داریم:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta z}+i\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta z}$$



روی مسیر $\Delta y = 0$ داریم:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

روی مسیر $\Delta x = 0$ داریم:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

$$=\frac{1}{i}u_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$

اگر $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر باشد، باید این دو حد برابر باشند که از برابری آنها شرایط کوشی ریمن نتیجه می‌شود.

مثال ۱۳:

نشان دهید که تابع $f(z) = z^2$ در کلیه نقاط در شرایط کوشی ریمن صدق می‌کند. مشتق تابع را با فرض موجود بودن آن در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ بدست آورید.

حل: چون $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$، بنابراین $u(x,y) = x^2-y^2$ و $v(x,y) = 2xy$ و داریم:

$$u_x = v_y = 2x\ ,\ u_y=-v_x=-2y$$

یعنی تابع در کلیه نقاط در شرایط کوشی ریمن صدق می‌کند.

مشتق تابع در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ برابر است با:

$$f'(z_0)=u_x(z_0)+i\,v_x(z_0)$$

$$=2x_0+i(2y_0)=2(x_0+iy_0)=2z_0$$

مثال ۱۴:

نشان دهید تابع $f(z) = \bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

حل: چون $f(z) = x - iy$، بنابراین $u(x,y) = x$ و $v(x,y) = -y$، از طرفی

$$u_x = 1 \quad , \quad u_y = 0 \quad , \quad v_x = 0 \quad , \quad v_y = -1$$

$1 \neq -1$

بنابراین رابطه $u_x = v_y$ در هیچ نقطه‌ای برقرار نیست. یعنی تابع فوق در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

□

شرط کافی برای وجود مشتق تابع $f(z)$ در نقطه z_0 در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۴- اگر $f(z) = u(z) + iv(z)$ در یک همسایگی نقطه z_0 تعریف شده و در آن نقطه در شرایط کوشی ریمن صدق کند و اضافه بر آن در آن همسایگی توابع $u(z)$ و $v(z)$ دارای مشتقات نسبی پیوسته نسبت به x و y باشند، آنگاه $f'(z_0)$ موجود است.

به عبارت دیگر اگر توابع u_x، u_y، v_x، v_y در یک همسایگی از نقطه z_0 پیوسته باشند، آنگاه معادلات کوشی ریمن نه فقط شرایط لازم برای وجود مشتق $f(z) = u + iv$ در نقطه z_0، بلکه شرایط کافی برای وجود مشتق در این نقطه را فراهم می‌سازند.

اثبات - بنابر قضایای مشتق پذیری توابع دو متغیره، چون مشتقات نسبی توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در یک همسایگی از z_0 پیوسته‌اند، لذا اگر Δu و Δv بترتیب نموهای u و v در z_0 باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \Delta u = u_x\,\Delta x + u_y\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y \\ \Delta v = v_x\,\Delta x + v_y\,\Delta y + \varepsilon_3\,\Delta x + \varepsilon_4\,\Delta y \end{cases}$$

که ε_1،ε_2،ε_3 و ε_4 با میل کردن Δx و Δy بسمت صفر، به صفر میل می‌کنند. با استفاده از شرایط کوشی ریمن روابط فوق را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Delta u = u_x\,\Delta x - v_x\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

$$\Delta v = v_x\,\Delta x + u_x\,\Delta y + \varepsilon_3\,\Delta x + \varepsilon_4\,\Delta y$$

پس

$$\Delta u + i\,\Delta v = (u_x + iv_x)\,(\Delta x + i\Delta y) + \delta_1\Delta x + \delta_2\Delta y$$

که δ_1 و δ_2 با میل کردن Δx و Δy بسمت صفر، به صفر میل می‌کنند.

حال داریم:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = u_x + iv_x + \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\delta_1\Delta x + \delta_2\,\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = u_x + iv_x$$

پس مشتق تابع در z_0 عدد منحصر بفرد $u_x(z_0) + iv_x(z_0)$ است.

مثال ۱۵:

نشان دهید با وجود اینکه تابع زیر در $z_0 = 0$ در شرایط کوشی ریمن صدق می‌کند، ولی در آن نقطه فاقد مشتق است.

$$f(z) = \begin{cases} (x^3 + iy^3)/(x^2 + y^2) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

حل: حد زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x^3 + i\,\Delta y^3}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\,(\Delta x + i\Delta y)}$$

روی مسیر $\Delta y = 0$ مقدار حد برابر است با: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x^3} = 1$

روی مسیر $\Delta x = 0$ مقدار حد برابر است با: $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{i\Delta y^3}{i\Delta y^3} = 1$

پس تابع در شرایط کوشی ریمن صدق می‌کند. اما از طرفی روی مسیر $\Delta x = \Delta y$ داریم:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + i)\,\Delta x^3}{2\Delta x^2\,(1 + i)\,\Delta x} = \frac{1}{2}$$

پس حد در $z_0 = 0$ موجود نیست. به عبارت دیگر تابع در این نقطه فاقد مشتق است.

□

مثال ۱۶:

تحقیق کنید تابع $f(z) = z\bar{z}$ فقط در نقطه $z = 0$ مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن در این نقطه صفر است.

حل: چون $f(z) = x^2 + y^2$، پس $u(x,y) = x^2 + y^2$ و $v(x,y) = 0$.

مشتقات نسبی برابرند با $u_x = 2x$، $u_y = 2y$، $v_x = 0$ و $v_y = 0$.

با قرار دادن مشتقات در شرایط کوشی ریمن داریم که باید $2x = 0$ و $2y = 0$ گردند. پس نقطه $x=0$ و $y=0$ و یا به عبارتی دیگر $z=0$ تنها نقطه‌ای است که تابع در آن نقطه در شرایط کوشی ریمن صدق می‌کند. علاوه بر آن چون مشتقات جزئی در کلیه نقاط پیوسته‌اند، پس تابع در این نقطه دارای مشتق است و داریم:

$$f'(0) = f'(0,0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0$$

□

مثال ۱۷:

تحقیق کنید تابع $f(z) = x^2 + y^2 + 2xyi$ در چه نقاطی مشتق‌پذیر است. $f'(-1)$ و $f'(2i)$ را محاسبه کنید.

حل: در اینجا $u(x,y) = x^2 + y^2$، $v(x,y) = 2xy$، بنابراین

$$u_x = 2x \quad \text{و} \quad u_y = 2y \quad , \quad v_x = 2y \quad \text{و} \quad v_y = 2x$$

با اعمال شرایط کوشی ریمن داریم:

$$2x = 2x \quad \text{و} \quad 2y = -2y$$

پس تابع فقط در نقاطی در شرایط کوشی ریمن صدق می‌کند که در آنها $y = 0$ باشد، چون مشتقات نسبی u و v در کلیهٔ نقاط پیوسته‌اند، پس تابع فقط روی خط $y = 0$ (محور حقیقی) دارای مشتق است و

$$f'(z) = f'(x,0) = u_x(x,0) + iv_x(x,0) = 2x$$

بنابراین $f'(-1) = -2$ است و چون $2i$ روی محور حقیقی نیست، تابع در این نقطه فاقد مشتق است.

□

مثال ۱۸:

تحقیق کنید تابع $f(z) = e^z$ در کلیه نقاط دارای مشتق بوده و مشتق آن برابر خود تابع است.

حل: در مثال ۳ این فصل دیدیم که برای این تابع $u(x,y) = e^x \cos y$ و $v(x,y) = e^x \sin y$ است. چون $u_x = e^x \cos y$، $u_y = -e^x \sin y$، $v_x = e^x \sin y$ و $v_y = e^x \cos y$، نتیجه می‌گیریم که شرایط کوشی ریمن در کلیه نقاط برقرار است. همچنین با توجه به پیوستگی مشتقات جزئی u و v نتیجه می‌گیریم که

$f(z)$ در کلیه نقاط مشتق‌پذیر است و

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + i\, e^x \sin y = e^z$$

□

شرایط کوشی ریمن در مختصات قطبی

اگر $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$، آنگاه با محاسبه شرایط کوشی ریمن در مختصات قطبی با فرض پیوستگی مشتقات جزئی u_r، v_r، u_θ و v_θ در یک همسایگی نقطه غیر صفر z، این شرایط بصورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\boxed{u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta}$$

در اینصورت مشتق تابع برابر است با:

$$\boxed{f'(z) = (u_r + iv_r)\, e^{-i\theta}}$$

مثال ۱۹:

تحقیق کنید تابع $f(z) = \ln r + i\theta$ برای $r > 0$ و $\theta \in (-\pi , \pi)$ در شرایط کوشی ریمن صدق می‌کند. مشتق تابع را تعیین کنید.

حل: تابع فوق در فاصله داده شده پیوسته است (مثال ۹). با محاسبه مشتقات جزئی $u(r,\theta) = \ln r$ و $v(r,\theta) = \theta$ داریم:

$$u_r = \frac{1}{r} \quad , \quad u_\theta = 0 \quad , \quad v_r = 0 \quad , \quad v_\theta = 1$$

که در شرایط کوشی ریمن برای مختصات قطبی صدق می‌کنند. چون مشتقات نسبی مرتبه اول در فواصل داده شده پیوسته‌اند پس مشتق تابع برابر است با:

$$f'(z) = (u_r + iv_r)\, e^{-i\theta} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

□

$(\ln z)' = \frac{1}{z}$

۲-۴. توابع تحلیلی

مفهوم تحلیلی بودن یک تابع به معنی مشتقپذیری در یک حوزه از صفحه مختلط است.

> تابع $w = f(z)$ را در $z = z_0$ تحلیلی نامیم اگر همسایگی از z_0 موجود باشد که در هر نقطه آن $f(z)$ دارای مشتق گردد. در اینصورت z_0 را یک نقطه **عادی** تابع می‌نامیم.

تابعی که در هر نقطه حوزه R تحلیلی باشد، در R تحلیلی می‌نامند. تابعی که در کل اعداد مختلط تحلیلی باشد تابع **تام** نامیده می‌شود. نقاط مرزی حوزه‌ای که تابع $f(z)$ در آن حوزه تحلیلی بوده ولی در خارج آن غیر تحلیلی است، **نقاط تکین یا منفرد** تابع نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر:

> z_0 یک نقطه تکین تابع $f(z)$ است اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی نبوده ولی در هر همسایگی از z_0 شامل نقاط تحلیلی از تابع گردد.

قضایای مشتق پذیری برای توابع تحلیلی نیز برقرارند، مثلاً حاصلجمع، تفاضل، حاصلضرب و ترکیب دو تابع تحلیلی، تحلیلی است. خارج قسمت دو تابع تحلیلی به جز در صفرهای مخرج در سایر نقاط تحلیلی است.

مثال ۲۰:

تحقیق کنید که توابع زیر در چه نقاطی تحلیلی هستند. نقاط تکین آنها را بیابید.

الف) $\bar{z}$ ب) $z\bar{z}$ پ) $x^2 + y^2 + 2xyi$

ت) $\ln r + i\theta \quad r > 0 \ , \ -\pi < \theta \le \pi$ ث) $\frac{z+2}{z^3+z}$ ج) e^z

چ) $e^{iz} + e^{-iz}$

حل: الف) در مثال ۱۴ مشاهده کردیم که این تابع در هیچ نقطه‌ای دارای مشتق نیست. پس این تابع در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نبوده و بنابراین فاقد نقطه تکین است.

ب) در مثال ۱۶ نتیجه گرفتیم که این تابع فقط در نقطه $z = 0$ دارای مشتق است، پس تابع $z\bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نبوده و بنابراین فاقد نقطه تکین است.

پ) در مثال ۱۷ نتیجه گرفتیم که تابع فقط روی محور حقیقی دارای مشتق است، پس این تابع نیز در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نبوده و بنابراین فاقد نقطه تکین است.

ت) در مثال ۱۹ مشاهده کردیم که این تابع در کلیه نقاط جز مبدأ مختصات و نیم محور منفی محور حقیقی، یعنی در کلیه نقاط جز نقاطی که برای آنها $Im(z) = 0$ و $Re(z) \le 0$ مشتق‌پذیر است. پس در این ناحیه تحلیلی نیز هست و نقاط تکین آن همان نقاطی هستند که تابع در آنها تحلیلی نیست.

ث) تابع فوق خارج قسمت دو چند جمله‌ای بوده و بنابراین در کلیه نقاط جز ریشه‌های مخرج یعنی

نقاط $z = 0$ ، $z = i$ و $z = -i$ مشتق‌پذیر است. پس در سایر نقاط تحلیلی بوده و این سه نقطه نقا
تکین تابع می‌باشند.

ج) در مثال ۱۸ نتیجه گرفتیم که تابع e^z یک تابع تام است. یعنی در کلیه نقاط تحلیلی است، پس فاق
نقاط تکین است.

چ) چون e^{iz} ترکیب دو تابع تام e^z و iz است، بنابراین تابعی تام است. بهمین نحو e^{-iz} نیز تابعی تا
است. پس حاصل جمع آنها نیز تابعی تام بوده و فاقد نقطه تکین است.

> نقطه تکین z_0 را یک نقطه **تکین تنها** نامیم اگر همسایگی از نقطه z_0 موجود باشد که در آن همسایگی
> تنها نقطه تکین تابع نقطه z_0 باشد. در غیر اینصورت نقطه تکین را **غیر تنها** نامند.

نقاط تکین تابع $\frac{z+2}{z^3+z}$ (مثال ۲۰ قسمت ث) همگی تنها هستند ولی نقاط تکین تاب
$\ln r + i\theta$ (مثال ۲۰ قسمت ت) همگی غیر تنها می‌باشند.

توابع تحلیلی دارای خواص بسیار مهم و مفیدی هستند که ما در زیر به چند نمونه از آنها اشاره می‌کنی
نکات عمده اثبات این خواص در تمرینات این فصل بیان خواهد شد. در فصل‌های بعد به خواص
دیگری از توابع تحلیلی خواهیم پرداخت.

خاصیت اول: اگر بخش‌های حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $f(z) = u(z) + iv(z)$ در حوزه R، دارا
مشتقات نسبی مرتبه دوم پیوسته باشند، این بخش‌ها در معادله پتانسیل $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ در آن حو
صدق می‌کنند، یعنی:

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ v_{xx} + v_{yy} = 0}$$

در آینده نشان خواهیم داد که یک تابع تحلیلی در z_0، نه فقط شامل مشتق اول در این نقطه، بلکه شام
مشتقات همه مراتب در z_0 است که وجود و پیوستگی تمام مشتقات نسبی u و v را تضمین می‌کند. ل
اگر یک تابع در یک حوزه از صفحه تحلیلی باشد، کلیه مشتقات آن $f'(z)$ ، $f''(z)$ ... نیز در آن حو
تحلیلی می‌گردند.

تابعی که دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته بوده و در معادله پتانسیل صدق کند، تابع **هارمونیک** یا **همس**
نامیده می‌شود. خاصیت (۱) بیان می‌کند که بخش‌های حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $f(z)$ همس

هستند. در اینصورت $v = Im\,(f(z))$ را **مزدوج هارمونیک** یا مزدوج همساز $u = Re\,(f(z))$ می‌خوانند.

مثال ۲۱:

نشان دهید $Re\,(e^z)$ یک تابع همساز است.

حل: چون $u = Re\,(e^z) = e^x \cos y$، $u_{xx} = e^x \cos y$ و $u_{yy} = -e^x \cos y$ پس داریم:

$$u_{xx} + u_{yy} = ۰$$

چون u_{xx} و u_{yy} در کلیه نقاط پیوسته‌اند، پس $Re\,(e^z)$ همساز است.

□

مثال ۲۲:

مزدوج همساز $u(x,y) = ۲xy + ۲x$ را تعیین کرده و آنرا $v(x,y)$ بنامید. اگر $f(z) = u(z) + iv(z)$ و $f(i) = ۳i$، $f(۱)$ را تعیین کرده و سپس $f'(i)$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از شرایط کوشی ریمن داریم:

$$v_y = u_x = ۲y + ۲ \quad , \quad v_x = -u_y = -۲x$$

با انتگرال‌گیری از دو رابطه نتیجه می‌گیریم:

$$v = -x^۲ + \phi_۲(y) \quad , \quad v = y^۲ + ۲y + \phi_۱(x)$$

با مقایسه روابط فوق داریم: $\phi_۱(x) = -x^۲ + c$ و $\phi_۲(y) = y^۲ + ۲y + c$، پس

$$v(x,y) = y^۲ + ۲y - x^۲ + c$$

مزدوج همساز u است. از طرفی

$$f(z) = u + iv = ۲xy + ۲x + i\,(y^۲ + ۲y - x^۲ + c)$$
$$= (۲x + ۲iy) + ۲xy + i\,(-x^۲ + y^۲) + ic$$
$$= ۲(x + iy) - i\,(x^۲ - y^۲ + ۲ixy) + ic$$
$$= ۲z - iz^۲ + ic$$

چون $f(i) = ۳i$، پس $f(i) = ۲i + i + ic = ۳i + ic = ۳i$

و یا $c = ۰$، بنابراین $f(z) = ۲z - iz^۲$ و $f(۱) = ۲ - i$. همچنین:

$$f'(i) = u_x(i) + iv_x(i) = u_x(۰,۱) + iv_x(۰,۱)$$
$$= (۲ + ۲) + i(۰) = ۴$$

□

می‌توان نشان داد که هرگاه تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحلیلی باشد، آنگاه آن را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$f(z) = u(z,۰) + iv(z,۰)$$

کافی است توجه کنیم که اگر $y = ۰$ باشد آنگاه

$$f(x) = u(x,۰) + iv(x,۰)$$

حال با جانشینی z به جای x نتیجه بالا به دست می‌آید. از این خاصیت برای تعیین سریعتر تابع $f(z)$ استفاده می‌کنیم به عنوان مثال در مثال ۲۲

$$f(z) = ۲xy + ۲x + i(y^۲ + ۲y - x^۲ + c)$$

با جانشینی $y = ۰$ و $x = z$ نتیجه می‌گیریم

$$f(z) = ۲z + i(-z^۲ + c)$$

که همان نتیجه قبل است.

مثال ۲۳:

نشان دهید که اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y)$ در تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ باشد، آنگاه $u(x,y)$ مزدوج همساز $-v(x,y)$ است؟

حل: چون $u(x,y)$ مزدوج همساز $v(x,y)$ است لذا تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحلیلی است، پس تابع

$$if(z) = iu(x,y) - v(x,y)$$

نیز تحلیلی است و بنابراین $u(x,y)$ مزدوج همساز $-v(x,y)$ است.

□

مثال ۲۴:

نشان دهید $f(z) = x^2 - 2iy$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

حل: چون $u(x, y) = x^2$ در هیچ حوزه‌ای همساز نیست.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 \neq 0$$

پس $f(z)$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

□

خاصیت دوم - اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی از z در حوزه R باشد، آنگاه خانواده منحنی‌های $u(x,y) = c_1$ و $v(x,y) = c_2$ در هر نقطه R که در آن $f'(z) \neq 0$ مسیرهای متعامد یکدیگر هستند (یعنی هر منحنی از یک خانواده بر کلیه منحنی‌های دیگر خانواده عمود است).

به عنوان مثال چون تابع $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$ یک تابع تحلیلی در کل اعداد مختلط است، پس خانواده هذلولی‌های $x^2 - y^2 = c_1$ و خانواده توابع هموگرافیک $2xy = c_2$ مسیرهای متعامد یکدیگرند.

برای مشاهده این خاصیت توابع تحلیلی کافی است توجه کنیم که اگر z_0 نقطه دلخواهی در R باشد و دو منحنی $u(x,y) = c_1$ و $v(x,y) = c_2$ از این نقطه عبور کنند، آنگاه حاصل ضرب زاویه‌های آنها، y'_u و y'_v برابر ۱- است، زیرا داریم

$$y'_u y'_v = \left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = \frac{u_x}{u_y}\left(\frac{-u_y}{u_x}\right) = -1$$

مثال ۲۵:

مسیرهای متعامد خانواده منحنی $2xy + 2x = c$ را تعیین کنید.

حل: اگر $u = 2xy + 2x$، آنگاه مزدوج هارمونیک آن در مثال ۲۲ برابر $v = y^2 + 2y - x^2 + c$ نتیجه گردید. پس مسیرهای متعامد خانواده منحنی $y^2 + 2y - x^2 = c$ است.

□

خاصیت سوم - اگر $f(z) = u(z) + iv(z)$ در حوزه R تحلیلی باشد و در این حوزه داشته باشیم $\varnothing(u(z), v(z)) = 0$ (یعنی تابع $u(z)$ و $v(z)$ وابسته تابعی باشند)، آنگاه $f(z)$ یک تابع ثابت است.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که اگر در تابع تحلیلی $f(z)$، توابع $Re(f)$، $Im(f)$، $|f|$ یا $Arg(f)$ ثابت باشند، آنگاه f ثابت است.

اثبات خاصیت سوم مشابه روش مثال زیر است.

مثال ۲۶:

اگر $f(z) = u(z) + iv(z)$ یک تابع تام بوده و داشته باشیم $u^2 = v$، نشان دهید $f(z)$ یک تابع ثابت است.

حل: چون f یک تابع تام است، پس در کلیه نقاط صفحه مختلط در شرایط کوشی ریمن صدق می‌کند، یعنی

$$u_y = -v_x \quad (1) \qquad \text{و} \qquad u_x = v_y \quad (2)$$

با مشتق‌گیری نسبت به x و y از رابطه $u^2 = v$ داریم

$$2uu_y = v_y \quad (3) \qquad \text{و} \qquad 2uu_x = v_x \quad (4)$$

با قرار دادن روابط (۱) و (۲) در تساوی‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم:

$$2uu_y = u_x \quad (5) \qquad \text{و} \qquad 2uu_x = -u_y \quad (6)$$

با قرار دادن u_x رابطه (۵) در عبارت (۶) داریم

$$4u^2 u_y = -u_y$$

و یا $(4u^2 + 1)\, u_y = 0$. پس $u_y = 0$ و از (۵) نتیجه می‌گیریم $u_x = 0$. بنابراین از روابط (۳) و (۴) داریم $v_x = v_y = 0$. یعنی توابع u و v دارای مشتقات صفر نسبت به x و y هستند. به عبارتی دیگر این توابع ثابتند، پس $f(z)$ ثابت است.

□

تمرینات

توابع مختلط

۱- اگر $f(z) = z(2-z)$، مقادیر زیر را بیابید.

الف) $f(1+i)$ ، ب) $f(2-2i)$

۲- اگر $f(z) = (1 + z)/(1 - z)$، مقادیر زیر را تعیین کنید.

الف) $f(i)$ ، ب) $f(1 - i)$

۳- هرگاه $f(z) = f(x + iy) = e^{x}(\cos y + i \sin y)$، مقادیر زیر را تعیین کنید.

الف) $f(0)$ ، ب) $f(1)$ ، پ) $f(\pi i/4)$ ، ت) $f(1 + \pi i/4)$

ث) $f(2\pi i/3)$ ، ج) $f(2 + \pi i)$

۴- هرگاه $f(z) = f(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$ که در آن $\theta = Arg(z)$، مقادیر زیر را بیابید.

الف) $f(1)$ ، ب) $f(1 + i)$ ، پ) $f(-2)$ ، ت) $f(-\sqrt{3} + i)$

بخش‌های حقیقی و موهومی توابع زیر را تعیین کنید.

۵- $f(z) = 2z^{2} - 3iz$ ، ۶- $f(z) = z + 1/z$

۷- $f(z) = (1 - z)/(1 + z)$ ، ۸- $f(z) = z^{1/2}$

۹- $f(z) = e^{3iz}$ ، ۱۰- $f(z) = \cos z$

۱۱- $f(z) = \sin 2z$ ، ۱۲- $f(z) = z^{2} e^{2z}$

معادلات زیر را حل کنید.

۱۳- $e^{3z} = 1$ ، ۱۴- $e^{4z} = i$

حدود و پیوستگی

با استفاده از قاعده هوپیتال درستی حدود زیر را تحقیق کنید.

۱۵- $\lim_{z \to i} \frac{z^{2} - 2iz - 1}{z^{4} + 2z^{2} + 1} = -\frac{1}{4}$ ، ۱۶- $\lim_{z \to 2i} \frac{z^{2}+4}{2z^{2}+(3-4i)z-6i} = \frac{16+12i}{25}$

۱۷- $\lim_{z \to e^{\pi i/3}} (z - e^{\pi i/3}) \frac{z}{z^{3} + 1} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} i$

۱۸- نشان دهید تابع $f(z) = (z^{2} + 1)/(z^{2} - 3z + 2)$ در کلیه نقاط خارج دایره $|z| = 2$ پیوسته است.

۱۹- نشان دهید $f(z) = z/(z^{4} + 1)$ در کلیه نقاط داخل و روی دایره $|z| = 1$ بجز چهار نقطه پیوسته است. آن نقاط را بیابید.

کلیه نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

۲۰- $f(z) = \frac{2z - 3}{z^{2} + 2z - 2}$ ، ۲۱- $f(z) = \frac{3z^{2} + 4}{z^{4} - 16}$

۲۲- فرض کنید $f(z) = Re(z)/|z|$ که در آن $z \neq 0$ و $f(0) = 1$، آیا f در مبدأ مختصات پیوسته است؟ چرا؟

مشتق - شرایط کوشی ریمن

۲۳- نشان دهید $f(z) = z^{2}\bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

۲۴- نشان دهید $f(z) = z\, Im(z)$ فقط در $z = 0$ مشتق‌پذیر است. $f'(0)$ را تعیین کنید.

۲۵- نشان دهید تابع زیر در $z = 0$ مشتق‌پذیر نیست ولی در آن نقطه در شرایط کوشی ریمن صدق می‌کند.

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z}^{2}/z & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

۲۶- نشان دهید در مختصات قطبی معادلات کوشی ریمن به شکل زیر تبدیل می‌گردند.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

۲۷- فرض کنید $f(z) = (\ln r)^{2} - \theta^{2} + 2i\theta \ln r$ که در آن $r > 0$ و $-\pi < \theta \le \pi$. نشان دهید f برای $r > 0$ و $-\pi < \theta < \pi$ مشتق‌پذیر است. $f'(z)$ را تعیین کنید.

توابع تحلیلی

۲۸- اگر $f(z)$ تحلیلی باشد، نشان دهید در مختصات قطبی داریم: $f'(z) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r}$

۲۹- نشان دهید اگر $f(z)$ و $\overline{f(z)}$ توابع تام باشند، آنگاه $f(z)$ ثابت است.

۳۰- نشان دهید اگر $f(z) = u(z) + iv(z)$ در حوزه D تحلیلی بوده و داشته باشیم $|f(z)| = 2$، آنگاه f در آن حوزه ثابت است.

۳۱- فرض کنید $f(z) = u(z) + iv(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد. خانواده منحنی‌های $u(x,y) = c_1$ و $v(x,y) = c_2$ را در نظر گرفته و با اثبات متعامد بودن دو عضو دلخواه از آنها در نقطه تقاطع $z_0 = (x_0, y_0)$ نشان دهید که دو خانواده مسیرهای متعامد یکدیگرند.

با استفاده از خواص توابع تحلیلی، مسیرهای متعامد خانواده منحنی‌های زیر را بیابید.

۳۲- $x^3y - xy^3 = c$ ، ۳۳- $e^{-x}\cos y + xy = c$

۳۴- نشان دهید اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در حوزه R تحلیلی باشد، آنگاه با قرار دادن $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ در $f(z)$ تابعی فقط از متغیر z نتیجه می‌شود.

توابع همساز- مزدوج همساز

۳۵- تحت چه شرایطی $e^{\alpha x}\cos\beta y$ همساز است؟ اگر $u = e^{\alpha x}\cos\beta y$ آنگاه
$u_{xx} + u_{yy} = (\alpha^2-\beta^2)e^{\alpha x}\cos\beta y$

۳۶- نشان دهید:

الف) تابع $u = 2x(1-y)$ همساز است.

ب) مزدوج همساز آن، v را بیابید.

پ) $f(z) = u + iv$ را برجسب z بنویسید.

۳۷- تمرین قبل را برای تابع $u = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ تکرار کنید.

تحقیق کنید کدام یک از توابع زیر همساز هستند. برای هر یک مزدوج همساز آن را محاسبه کرده و تابع $f(z) = u + iv$ را بر حسب z بنویسید.

۳۸- $3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ ، ۳۹- $2xy + 3xy^2 - 2y^3$

۴۰- $xe^x\cos y - y\,e^x\sin y$ ، ۴۱- $e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)$

۴۲- الف) نشان دهید تابع $u = \ln[(x-1)^2 + (y-2)^2]$ در هر ناحیه‌ای که شامل نقطه (۲و۱) نیست، همساز است.

ب) مزدوج همساز آن v را بیابید.

پ) $f(z) = u + iv$ را برحسب z بنویسید.

۴۳- نشان دهید هرگاه $u(x,y)$ همساز باشد، آنگاه $u(x,-y)$ نیز همساز است.

اگر $u(x,y)$ همساز باشد تحت چه شرایطی $u(ax,by)$ نیز همساز است؟

۴۴- کلیه توابعی به صورت $u = f(x^2 + y^2)$ را تعیین کنید که همساز هستند.

۴۵- اگر u و v در حوزه R همساز باشند، نشان دهید $\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ در R تحلیلی است.

تمرینات گوناگون

۴۶- تابع تحلیلی $f(z)$ را بطریقی تعیین کنید که $f(1+i) = 0$ و $Re(f'(z)) = 3x^2 - 4y - 3y^2$.

۴۷- اگر $f(0) = 3 - 2i$، $Im(f'(z)) = 6x(2y-1)$ و $f(1) = 6 - 5i$، مقدار $f(1+i)$ را بیابید.

*۴۸- نشان دهید اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحلیلی باشد، آنگاه:

الف) $f(z) = 2u(z/2, -iz/2) +$ ثابت

ب) $f(z) = 2i\,v(z/2, -iz/2) +$ ثابت

۴۹- با استفاده از مسئله قبل $f(z)$ را بیابید اگر

الف) $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ، ب) $v = \sinh x \cos y$

*۵۰- الف) نشان دهید در توابع تحلیلی همواره داریم $\nabla^2|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$

ب) رابطه را برای $f(z) = z^2 + iz$ تحقیق کنید.

۳

آشنایی با توابع مختلط مقدماتی

در فصل قبل دیدیم که تغییر توابع-چند جمله‌ای و گویا، از متغیر حقیقی x به متغیر مختلط z، به توابعی تحلیلی منجر می‌گردد. در واقع این دو تابع مثالهایی خاص نبوده و در حقیقت تمام توابع مقدماتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی، مانند توابع نمایی، لگاریتمی، مثلثاتی و هذلولی وقتی که بطور مناسب در صفحه مختلط گسترش یابند به توابعی تحلیلی تبدیل می‌شوند. در این فصل گسترش این توابع و خواص آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳-۱. تابع نمایی

کار را با تابع نمایی e^z شروع می‌کنیم، این تابع یکی از مهمترین توابع آنالیز مختلط است و آنرا بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{e^z = e^x (\cos y + i \sin y)} \qquad (۱)$$

توجه کنید که وقتی z یک متغیر حقیقی است (یعنی $y = Im\ (z) = ۰$)، آنگاه این تابع بر تابع e^x منطبق می‌گردد. در مثالهای ۳ و ۱۸ فصل ۲، بخش‌های حقیقی و موهومی تابع e^z و همچنین مشتق آن محاسبه گردید و دیدیم که این تابع یک تابع تام است و

$$\boxed{(e^z)' = e^z}$$

در تعریف (۱)، افزایش ۲π به مقدار y، مقدار تابع را تغییر نمی‌دهد، بنابراین تابع فوق یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $۲\pi i$ است زیرا $e^{z+۲\pi i} = e^{x+(y+۲\pi)i} = e^z$، بنابراین

$$\boxed{e^{z+۲\pi i} = e^z}$$

پس تابع فوق یک به یک نیست زیرا بعنوان مثال برای $z=۰$ و $z=۲\pi i$ یک مقدار نتیجه می‌شود. همچنین چون بخش‌های حقیقی و موهومی این تابع نمی‌توانند توأماً صفر گردند، نتیجه می‌گیریم:

$$\boxed{e^z \neq ۰}$$

ولی بر خلاف تابع e^x حقیقی، تابع e^z می‌تواند سایر مقادیر مختلط را اختیار کند (مثال ۶ فصل ۲ را ببینید). به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که مشابه تابع e^x در توابع حقیقی داریم:

$$\boxed{e^{z_۱} . e^{z_۲} = e^{z_۱+z_۲} \quad ، \quad e^{z_۱}/e^{z_۲} = e^{z_۱-z_۲}}$$

۳-۲. توابع مثلثاتی

انگیزه مادر تعریف توابع مثلثاتی $\sin z$ و $\cos z$ روابط $\cos y = \frac{۱}{۲}(e^{iy}+e^{-iy})$ و $\sin y = \frac{۱}{۲i}(e^{iy}+e^{-iy})$ است که از فرمول‌های اویلر $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ و $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ نتیجه می‌شوند. با گسترش این تعاریف در صفحه مختلط داریم:

$$\boxed{\cos z = \frac{۱}{۲}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad ، \quad \sin z = \frac{۱}{۲i}(e^{iz} - e^{-iz})}$$

چون توابع e^{iz} و e^{-iz} توابعی تام هستند، نتیجه می‌گیریم که $\cos z$ و $\sin z$ نیز توابعی تام می‌باشند. با مشتقگیری مستقیم از تابع $\sin z$ داریم:

$$(\sin z)' = \frac{۱}{۲i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) = \cos z$$

به عبارت دیگر فرمول‌های مشتقگیری توابع حقیقی $\sin x$ و $\cos x$ برقرار خواهند ماند.

$$\boxed{(\cos z)' = -\sin z \quad ، \quad (\sin z)' = \cos z}$$

چهار تابع دیگر مثلثاتی $\tan z$، $\cot z$، $\sec z$ و $\csc z$ مشابه توابع حقیقی تعریف می‌شوند و داریم:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \tan z = \sin z/\cos z & ، & \cot z = \cos z/\sin z \\ \sec z = ۱/\cos z & ، & \csc z = ۱/\sin z \end{array}}$$

مثال ۱:

بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $cos\ z$ را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{aligned}
cos\ z &= \frac{۱}{۲}\,(e^{iz} + e^{-iz}) \\
&= \frac{۱}{۲}\,(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\
&= \frac{۱}{۲}\,(e^{-y+ix} + e^{y-ix}) \\
&= \frac{۱}{۲}\,[e^{-y}(cos\ x + i\ sin\ x) + e^{y}(cos\ x - i\ sin\ x)] \\
&= cos\ x\, \frac{e^{y} + e^{-y}}{۲} - i\ sin\ x\, \frac{e^{y} - e^{-y}}{۲} \\
&= cos\ x\ cosh\ y - i\ sin\ x\ sinh\ y
\end{aligned}$$

□

پس

$$\boxed{Re\ (cos\ z) = cos\ x\ cosh\ y \quad ، \quad Im(cos\ z) = -sin\ x\ sinh\ y}$$

به همین نحو می‌توان نشان داد که:

$$\boxed{Re(sin\ z) = sin\ x\ cosh\ y \quad ، \quad Im(sin\ z) = cos\ x\ sinh\ y}$$

مثال ۲:

صفرهای تابع $cos\ z$ را نتیجه بگیرید.

حل: صفرهای $cos\ z$ نقاطی هستند که در آن نقاط $cos\ z = ۰$ است، بنابراین در این نقاط باید بخش‌های حقیقی و موهومی تابع تواماً صفر گردند، یعنی

$\cos z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$$(۱) \quad cos\ x\ cosh\ y = ۰ \qquad ، \qquad (۲) \quad -sin\ x\ sinh\ y = ۰$$

چون همواره $cosh\ y \neq ۰$، پس از رابطه (۱) داریم $cos\ x = ۰$، پس $sin\ x \neq ۰$ و بنابراین از (۲) داریم $sinh\ y = ۰$. یعنی صفرهای $cos\ z$ را می‌توان از حل معادلات $cos\ x = ۰$ و $sinh\ y = ۰$ بدست آورد، که جواب‌ها برابرند با $x = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۲}$ و $y = ۰$. بنابراین صفرها برابر $z = x + iy = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۲}$ برای کلیه kهای صحیح است که همان صفرهای حقیقی $cos\ x$ می‌باشند.

□

$\sin z \longrightarrow z = k\pi$

صفرها

مثال ۳:

تحقیق کنید تابع $sec\ z$ در چه نقاطی تحلیلی است. نقاط تکین آنرا بدست آورده و مشتق تابع را محاسبه کنید.

حل: $sec\ z = ۱/cos\ z$، پس تابع فوق در کلیه نقاط جز صفرهای مخرج آن، یعنی صفرهای $cos\ z$ تحلیلی است. بنابراین $sec\ z$ بجز نقاط $z = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۲}$ برای kهای صحیح، که نقاط تکین تنها هستند، در کلیه نقاط تحلیلی است. با استفاده از فرمولهای مرسوم مشتق‌گیری نتیجه می‌گیریم:

$$(sec\ z)' = \left(\frac{۱}{cos\ z}\right)' = \frac{sin\ z}{cos^{۲}\ z} = sec\ z\ .\ tan\ z$$

□

می‌توان گفت:

صفرهای توابع $sin\ z$ و $cos\ z$ همان صفرهای توابع حقیقی $sin\ x$ و $cos\ x$، یعنی $z = k\pi$ و $z = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۲}$ برای کلیه kهای صحیح می‌باشند.

مشتقات کلیه توابع مثلثاتی مانند توابع حقیقی محاسبه شده و دوره تناوب آنها نیز یکسان است. تمام خواص مرسوم این توابع در دستگاه حقیقی، برای متغیرهای مختلط نیز معتبر است و اثبات آنها بسادگی با استفاده از تعاریف این توابع نتیجه می‌شود. به عنوان مثال:

$$cos^{۲}\ z + sin^{۲}\ z = \frac{۱}{۴}\,(e^{iz} + e^{-iz})^{۲} + \frac{۱}{۴i^{۲}}\,(e^{iz} - e^{-iz})^{۲} = ۱$$

۳-۳. توابع هذلولوی

توابع هذلولوی مشابه توابع حقیقی $cosh\ x$ و $sinh\ x$ تعریف می‌شوند:

$$\boxed{cosh\ z = \frac{۱}{۲}\,(e^{z} + e^{-z}) \quad ، \quad sinh\ z = \frac{۱}{۲}\,(e^{z} - e^{-z})}$$

سایر توابع هذلولوی نیز مانند توابع حقیقی متناظر تعریف می‌گردند. مشتقات توابع هذلولوی و روابط بین این توابع نیز مشابه توابع حقیقی است.

اتحادهای زیر با استفاده از تعاریف توابع نتیجه می‌گردند.

$cosh\ iz = cos\ z$	$sinh\ iz = i\ sin\ z$
$cos\ iz = cosh\ z$	$sin\ iz = i\ sinh\ z$

به عنوان مثال

$$\cosh iz = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$

از روابط فوق به سادگی می‌توان خواص توابع هذلولولی را از روی توابع مثلثاتی نتیجه گرفت. مثلاً چون $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ برای kهای صحیح، صفرهای $\cos z$ هستند، از رابطهٔ $\cosh iz=\cos z$ نتیجه می‌گیریم که $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}i$ صفرهای تابع $\cosh z$ می‌گردند. به همین طریق نتیجه می‌گیریم که $z=k\pi i$ برای کلیه kهای صحیح، صفرهای تابع $\sinh z$ می‌باشند. یعنی

صفرهای توابع $\sinh z$ و $\cosh z$ بترتیب $k\pi i$ و $(2k+1)\frac{\pi}{2}i$ برای همه kهای صحیح است.

بطور کلی کلیه روابط مثلثاتی برای توابع هذلولوی معتبرند به شرط آنکه در این روابط به جای $\cos z$ و $\sin z$، به ترتیب توابع $\cosh z$ و $i\sinh z$ را جانشین کنیم.

مثال ۴:

بسط $\cosh(z_1+z_2)$ را تعیین کنید.

حل: چون

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

بنابراین با تبدیل $\cos z$ به $\cosh z$ و $\sin z$ به $i\sinh z$ داریم:

$$\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

❑

مثال ۵:

بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $\cosh z$ را تعیین کرده و سپس $|\cosh z|$ را مشخص کنید.

حل:

$$\cosh z = \cosh(x+iy) = \cosh x \,.\, \cosh iy + \sinh x \,.\, \sinh iy$$
$$= \cosh x \,.\, \cos y + i \sinh x \,.\, \sin y$$

بنابراین

$$u = Re(\cosh z) = \cosh x \cos y$$
$$v = Im(\cosh z) = \sinh x \sin y$$

پس

$$|\cosh z| = \sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y}$$
$$= \sqrt{\cosh^2 x(1-\sin^2 y) + (\cosh^2 x - 1)\sin^2 y}$$
$$= \sqrt{\cosh^2 x - \sin^2 y}$$

۳-۴. تابع لگاریتم

انگیزه ما برای تعریف این تابع بعنوان معکوس تابع نمایی e^z، مشاهده رابطه زیر است که بر اساس خواص تابع لگاریتم حقیقی نتیجه می‌گردد.

$$\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta$$

بنابراین ما تابع لگاریتم را برای $z \neq 0$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i \arg z}$$

پس

$$\boxed{Re(\ln z) = \ln|z| \quad , \quad Im(\ln z) = \arg z}$$

بنابراین تابع فوق نسبت به تغییر آرگومان z حساس بوده و یک تابع چند مقداری است.

مثال ۶:

مقادیر $\ln(1+i)$، $\ln(-2)$ و $\ln i$ را حساب کنید.

حل:

$$\ln(1+i) = \ln|1+i| + i \arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$
$$\ln(-2) = \ln|-2| + i \arg(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi)$$
$$\ln(i) = \ln|i| + i \arg(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

❑

اگر در شکل قطبی z از آرگومان **اصلی** استفاده کنیم، تابع $Ln\, z$ تعریف می‌شود که آنرا شاخه **اصلی تابع لگاریتم** می‌نامند.

$$\boxed{Ln\, z = \ln|z| + i\, Arg(z)}$$

در حقیقت داریم:

$$\boxed{\ln z = Ln\, z + 2k\pi i}$$

مقادیر اصلی مثال ۶ که برای $k=0$ نتیجه می‌گردند به ترتیب برابر $\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$، $\ln 2 + i\pi$ و $i\frac{\pi}{2}$ هستند.

با توجه به مثالهای ۹ و ۱۹ فصل ۲ نتیجه می‌گیریم که این تابع بجز نقاط روی نیم خط $Im(z)=0$ و $Re(z) \le 0$، در سایر نقاط پیوسته و تحلیلی است و اضافه بر آن

$$\boxed{(Ln\, z)' = \frac{1}{z}}$$

نیم خط فوق را **خط برش** تابع نامیده و دو سر خط برش، یعنی نقاط ۰ و ∞ را **نقاط شاخه‌ای** تابع می‌خوانند.

در حقیقت تابع $Ln\ z$ معکوس بخشی از تابع e^z برای $-\pi < arg(e^z) = y \leq \pi$ است.

در مورد بکارگیری از قواعد لگاریتم حقیقی در تابع $Ln\ z$ باید هشیار بود. مثال زیر نشان می‌دهد که روابط $Ln\ z^n = n\ Ln\ z$ و $Ln\ z_1 z_2 = Ln\ z_1 + Ln\ z_2$ می‌توانند برای برخی اعداد مختلط برقرار نباشند.

مثال ۷:

نشان دهید $Ln\ (i-1)^2 \neq 2Ln\ (i-1)$.

$$
\begin{aligned}
Ln\ (i-1)^2 &= Ln\ (-2i) = ln\ |-2i| + i\ Arg\ (-2i) \\
&= ln 2 - i\ \frac{\pi}{2} \\
2Ln(i-1) &= 2(ln|i-1| + i\ Arg\ (i-1)) \\
&= 2ln\ \sqrt{2} + \frac{3\pi}{2}\ i
\end{aligned}
$$

پس $Ln\ (i-1)^2 \neq 2Ln\ (i-1)$. بنابراین

$$Ln(i-1)\ (i-1) \neq Ln\ (i-1) + Ln\ (i-1)$$

❐

در هر حال روابط زیر همواره صحیح است.

$$ln\ z^n = n\ ln\ z$$

$$ln\ z_1 z_2 = ln\ z_1 + ln\ z_2$$

$$ln\ \frac{z_1}{z_2} = ln\ z_1 - ln\ z_2$$

۳-۵. تابع توانی

اگر $z \neq 0$ بوده و a یک عدد مختلط باشند، تابع توانی z^a بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{z^a = e^{a\ ln\ z}}$$

چون $ln\ z$ یک تابع چند مقداری است، پس در حالت کلی z^a نیز چند مقداری است. مقدار

$$\boxed{z^a = e^{a\ Ln\ z}}$$

به **مقدار اصلی** z^a موسوم است. توجه کنید که چون z^a ترکیب دو تابع تحلیلی است، خود آن نیز یک

تابع تحلیلی می‌گردد و با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\boxed{(z^a)' = a\ z^{a-1}}$$

مثال ۸:

با استفاده از تعریف تابع توانی کلیه مقادیر i^{-3}، $i^{1/3}$، $i^{\sqrt{2}}$ و i^i را محاسبه کنید.

حل: چون

$$i^a = e^{a ln i} = e^{a(ln|i| + i\ arg\ i)} = e^{a(\pi/2 + 2k\pi)i}$$

پس داریم:

$$i^{-3} = e^{-3(\pi/2 + 2k\pi)i} = e^{(-3\pi/2 - 6k\pi)i} = e^{-3\pi i/2}$$

برای کلیه kهای صحیح یک مقدار حاصل می‌شود.

$$i^{1/3} = e^{1/3(\pi/2 + 2k\pi)i} = e^{(\pi/6 + 2k\pi/3)i}$$

برای $k = 0,1,2$ سه مقدار حاصل می‌شود.

$$i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}(\pi/2 + 2k\pi)i} = e^{(\sqrt{2}\pi/2 + 2\sqrt{2}k\pi)i}$$

برای kهای صحیح متمایز، مقادیر متمایز حاصل می‌شود.

$$i^i = e^{i(\pi/2 + 2k\pi)i} = e^{-(\pi/2 + 2k\pi)}$$

برای kهای صحیح متمایز، مقادیر متمایز حاصل می‌شود.

❐

بطور کلی اگر z یک عدد مختلط غیر صفر باشد، آنگاه z^a:

الف) برای a صحیح غیر صفر یک مقداری است.

ب) برای $a = \frac{m}{n}$ گویا، n مقداری و مقادیر آن روی یک دایره واقعند.

پ) برای a اصم، دارای بیشمار مقدار است و مقادیر آن روی یک دایره واقعند.

ت) برای a غیر حقیقی، دارای بیشمار مقدار است و مقادیر آن روی یک پیچ دوار واقعند.

۳-۶. تابع ریشه

اگر $a = \frac{1}{n}$، آنگاه $z^{1/n}$ را تابع ریشه می‌نامند و داریم:

$$\boxed{z^{1/n} = e^{1/n\ ln\ z}}$$

تابع فوق یک تابع n مقداری است. شاخه اصلی این تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{z^{۱/n} = e^{۱/n\, Ln\, z}}$$

این تابع نیز مانند $Ln\, z$ در کلیه نقاط جز روی نیم خط نامثبت محور حقیقی پیوسته و تحلیلی است. این نیم خط، خط برش تابع بوده و دوباره نقاط شاخه‌ای ۰ و ∞ هستند.

۳-۷. توابع معکوس مثلثاتی و هذلولوی

توابع معکوس مثلثاتی و هذلولوی بر حسب تابع لگاریتم قابل تعریف هستند و می‌توان خواص آنها را از روی تابع لگاریتم تعیین کرد.

مثال ۹:

شکل لگاریتمی تابع معکوس $sin\, z$ که آنرا با $w = sin^{-۱}\, z$ مشخص می‌کنیم، بدست آورید.

حل: چون $z = sin\, w$، بنابراین داریم:

$$z = sin\, w = \frac{۱}{۲i}(e^{iw} - e^{-iw})$$

و یا

$$e^{۲iw} - ۲iz e^{iw} - ۱ = ۰$$

از حل معادله اخیر داریم:

$$e^{iw} = iz + \sqrt{۱ - z^۲}$$

پس

$$w = sin^{-۱}\, z = -i\, ln\,(iz + \sqrt{۱ - z^۲})$$

□

همواره داریم:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} cos^{-۱}\, z = -i\, ln\,(z + i\sqrt{۱ - z^۲}) & ، & cosh^{-۱}\, z = ln\,(z + \sqrt{z^۲ - ۱}) \\ sin^{-۱}\, z = -i\, ln\,(iz + \sqrt{۱ - z^۲}) & ، & sinh^{-۱}\, z = ln\,(z + \sqrt{z^۲ + ۱}) \\ tan^{-۱}\, z = \frac{i}{۲}\, ln\, \frac{i + z}{i - z} & ، & tanh^{-۱}\, z = \frac{۱}{۲}\, ln\, \frac{۱ + z}{۱ - z} \end{array}}$$

دقت کنید که کلیه این توابع برحسب z چند مقداری هستند. با در نظر گرفتن شاخه‌های خاصی از تابع ریشه و لگاریتم این توابع یک مقداری و تحلیلی می‌گردند (چون در اینصورت ترکیبی از توابع تحلیلی‌اند).

مثال ۱۰:

مقادیر $tan^{-۱}(۲ + i)$ را بدست آورید.

حل:

$$tan^{-۱}(۲ + i) = \frac{i}{۲}\, ln\, \frac{۲i + ۲}{-۲} = \frac{i}{۲}\, ln\,(-i - ۱)$$

$$= \frac{i}{۲}(ln\, |-i - ۱| + i\, arg\,(-i - ۱))$$

$$= \frac{i}{۲}(ln\, \sqrt{۲} + i\,(-\frac{۳\pi}{۴} + ۲k\pi))$$

$$= \frac{۳\pi}{۸} - k\pi + \frac{i}{۲}\, ln\, \sqrt{۲}$$

□

مثال‌های گوناگون

مثال ۱۱:

نشان دهید $tan\, iz = i\, tanh\, z$.

حل:

$$tan\, iz = \frac{sin\, iz}{cos\, iz} = \frac{i\, sinh\, z}{cosh\, z} = i\, tanh\, z$$

□

مثال ۱۲:

نشان دهید همواره $cot\, z \neq i$.

حل:

$$cot\, z = \frac{cos\, z}{sin\, z} = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})/۲}{(e^{iz} - e^{-iz})/۲i}$$

اگر

$$= i\, \frac{e^{۲iz} + ۱}{e^{۲iz} - ۱} = i$$

آنگاه

$$e^{۲iz} + ۱ = e^{۲iz} - ۱ \Rightarrow ۱ = -۱$$

که ممتنع است.

□

مثال ۱۳:

نشان دهید $|sinh\, y| \leq |cos\, z| \leq cosh\, y$

حل: چون

$$v = Im\,(cos\, z) = -sin\, x\, sinh\, y \quad ، \quad u = Re\,(cos\, z) = cosx\, .\, cosh\, y$$

پس

$$\begin{aligned}|\cos z| &= \sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{\cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y}\\ &= \sqrt{(1-\sin^2 x)\cosh^2 y + \sin^2 x(\cosh^2 y - 1)}\\ &= \sqrt{\cosh^2 y - \sin^2 x} \le |\cosh y| = \cosh y\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}|\cos z| &= \sqrt{1+\sinh^2 y - (1-\cos^2 x)}\\ &= \sqrt{\sinh^2 y + \cos^2 x} \ge |\sinh y|\end{aligned}$$

که نتیجه مطلوب است.

□

مثال ۱۴:

معادله $\sin z = i$ را حل کنید.

حل: باید دستگاه $Re(\sin z) = \sin x\cosh y = 0$ و $Im(\sin z) = \cos x\sinh y = 1$ را حل کنیم. چون $\cosh y \neq 0$ پس $\sin x = 0$ و بنابراین $\cos x = \pm 1$، پس $\sinh y = \pm 1$. جوابها $x = 2k\pi$، $y = \sinh^{-1}(1)$ و $x = (2k+1)\pi$، $y = -\sinh^{-1}(1)$ می‌باشند. پس $z = 2k\pi + i\sinh^{-1}(1)$ و $z = (2k+1)\pi - i\sinh^{-1}(1)$ برای همه kهای صحیح جواب‌های معادله هستند.

□

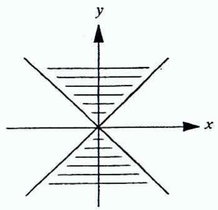
مثال ۱۵:

جوابهای نامعادله $|e^{z^2}| \le 1$ را بدست آورید.

حل: چون $e^{z^2} = e^{x^2-y^2+2xyi}$، پس

$$|e^{z^2}| = |e^{x^2-y^2}||e^{2xyi}| = |e^{x^2-y^2}| = e^{x^2-y^2}$$

نامعادله $e^{x^2-y^2} \le 1$ نتیجه می‌دهد که $x^2-y^2 \le 0$ و یا $y^2 \ge x^2$، یا $|y| \ge |x|$. فضای جواب نامعادله در شکل مجاور با سایه مشخص شده است.



□

مثال ۱۶:

مقدار اصلی $(1+i)^{2-i}$ را بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}(1+i)^{2-i} &= e^{(2-i)Ln(1+i)} = e^{(2-i)(\ln|1+i| + iArg(1+i))}\\ &= e^{(2-i)(\ln\sqrt{2} + \pi i/4)}\\ &= e^{2\ln\sqrt{2}+\pi/4+i(\pi/2-\ln\sqrt{2})}\\ &= 2e^{\pi/4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{2}\right)\right)\\ &= 2e^{\pi/4}(\sin(\ln\sqrt{2}) + i\cos(\ln\sqrt{2}))\end{aligned}$$

□

مثال ۱۷:

مقدار $|z^z|$ را بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}z^z &= e^{z\ln z} = e^{(x+iy)(\ln|z| + i\arg z)}\\ &= e^{x\ln|z| - y\arg z + i(y\ln|z| + x\arg z)}\\ &= e^{x\ln|z| - y\arg z}\, e^{i(y\ln|z| + x\arg z)}\end{aligned}$$

پس

$$|z^z| = e^{x\ln|z| - y\arg z}$$

□

مثال ۱۸:

تحقیق کنید که تابع $Ln(2z+i-1)$ در چه نقاطی: **الف)** تعریف شده است. **ب)** پیوسته است. **پ)** تحلیلی است.

حل:

الف) تابع فوق در نقاطی که $2z+i-1=0$ است، یعنی نقطه $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ تعریف نشده است.

ب و پ) این تابع در کلیه نقاط جز نقاطی که برای آنها $Im(2z+i-1)=0$ و $Re(2z+i-1)\le 0$ می‌باشد پیوسته و تحلیلی است. چون $Re(2z+i-1) = 2x-1$ و $Im(2z+i-1) = 2y+1$، پس تابع برای کلیه مقادیر z بجز نقاط روی نیم خط $y = -\frac{1}{2}$ و $x \le \frac{1}{2}$ پیوسته و تحلیلی است.

□

مثال ۱۹:

تحقیق کنید توابع زیر در چه نقاطی تحلیلی هستند.

الف) $sin\,(e^z)$ ب) $\frac{e^z}{z^2+3}$ پ) $\frac{1}{e^z-1}$ ت) $\frac{\sqrt[3]{z-4}}{z^2+1}$

حل:

الف) تابع فوق ترکیب دو تابع تام است، پس در کلیه نقاط تحلیلی است.

ب) این تابع خارج قسمت دو تابع تام است، پس در کلیه نقاط جز صفرهای مخرج $\pm\sqrt{3}\,i$، تحلیلی است.

پ) $1/(e^z-1)$ در کلیه نقاط جز صفرهای مخرج یعنی نقاطی که برای آنها $e^z-1=0$ است تحلیلی است. این نقاط $z=2k\pi i$ برای کلیه kهای صحیح می‌باشند.

ت) تابع $\sqrt[3]{z-4}$ در کلیه نقاط جز نقاطی که $Im(z-4)=0$ و $Re\,(z-4)\le 0$ است، یعنی نقاط $y=0$ و $x\le 4$، تحلیلی است. پس تابع در کلیه نقاط جز نقاط روی نیم خط $y=0$ و $x\le 4$ و نقاط $z=\pm i$ (ریشه‌های مخرج) تحلیلی است.

□

مثال ۲۰:

تحقیق کنید که تابع $Ln(e^z+1)$ در چه نقاطی تحلیلی است.

حل: تابع e^z+1 یک تابع تام است. تابع $Ln(e^z+1)$ در کلیه نقاط جز نقاطی که برای آنها $Im(e^z+1)=0$ و $Re(e^z+1)\le 0$ باشد، تحلیلی است. پس باید این نقاط را از حل دستگاه $e^x\sin y=0$ و $e^x\cos y+1\le 0$ بدست آورد. از اولین معادله نتیجه می‌گیریم $\sin y=0$ پس $\cos y=1$ یا $\cos y=-1$. جواب $\cos y=1$ معادلهٔ $e^x+1\le 0$ را نتیجه می‌دهد که بی جواب است. جواب $\cos y=-1$ معادلهٔ $-e^x+1\le 0$ یا $e^x\ge 1$ و یا $x\ge 0$ را نتیجه می‌دهد. پس جوابهای دستگاه نقاط روی نیم خطهای $y=(2k+1)\pi$ و $x\ge 0$ برای همه kهای صحیح است.

□

مثال ۲۱:

تحقیق کنید تابع $\cos\bar{z}$ در چه نقاطی:

الف) پیوسته است. ب) مشتق‌پذیر است. پ) تحلیلی است.

حل:

$$\cos\bar{z}=\cos(x-iy)=\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y$$

پس

$$u(x,y)=\cos x\cosh y \quad ، \quad v(x,y)=\sin x\sinh y$$

الف) چون بخش‌های حقیقی و موهومی این تابع در کلیه نقاط پیوسته‌اند، پس تابع $\cos\bar{z}$ در کلیه نقاط پیوسته است.

ب) چون

$$u_y=\cos x\sinh y \quad ، \quad u_x=-\sin x\cosh y$$

$$v_y=\sin x\cosh y \quad ، \quad v_x=\cos x\sinh y$$

اعمال شرایط کوشی ریمن نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases}-\sin x\cosh y=\sin x\cosh y\\ \cos x\sinh y=-\cos x\sinh y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sin x\cosh y=0\\ 2\cos x\sinh y=0\end{cases}$$

که حل دستگاه جواب $z=k\pi$ برای کلیه kهای صحیح را نتیجه می‌دهد. پس تابع فوق در نقاط $z=(x,y)=(k\pi,0)$ دارای مشتق است.

پ) چون این تابع در هیچ حوزه‌ای از صفحه z مشتق‌پذیر نیست. پس در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

□

مثال ۲۲:

تحقیق کنید که تابع $f(z)=\begin{cases}\dfrac{Lnz}{z-1} & z\ne 1\\ 1 & z=1\end{cases}$ در $z=1$ تحلیلی است.

حل:

$$f'(1)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(1+\Delta z)-f(1)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{Ln(1+\Delta z)/\Delta z-1}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{Ln(1+\Delta z)-\Delta z}{\Delta z^2}=\frac{-1}{2}$$

مقدار حد با استفاده از قاعده هوپیتال نتیجه شده است.

پس این تابع در $z=1$ دارای مشتق است. همچنین در هر همسایگی از این نقطه که شعاع همسایگی کوچکتر از یک باشد، تابع مشتق‌پذیر است. نتیجه می‌گیریم تابع فوق در $z=1$ تحلیلی است (در حقیقت تابع فوق در کلیه نقاط جز بخش منفی محور حقیقی و مبدأ مختصات تحلیلی است).

□

مثال ۲۳:

نقاط تکین تابع $csc \frac{1}{z}$ را محاسبه کرده و نوع آنها را تعیین کنید.

حل: تابع $csc \frac{1}{z} = \frac{1}{sin\ 1/z}$ در کلیه نقاط جز صفرهای $sin\ 1/z$ و $z=0$ تحلیلی است. پس $z = \frac{1}{k\pi}$ برای $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ و $z = 0$ نقاط تکین این تابع می‌باشند. کلیه این نقاط تکین تنها هستند جز $z=0$، زیرا می‌توان k را به اندازه کافی بزرگ فرض کرد تا هر همسایگی از نقطه $z=0$ نقاط تکینی از مجموعه نقاط $\frac{1}{k\pi}$ را شامل گردد.

□

مثال ۲۴:

مقدار $ln(-i)$ را روی شاخه‌ای از تابع لگاریتم که برای آن $0 < \theta \le 2\pi$ حساب کنید.

حل:

$$ln(-i) = ln|-i| + i\ arg\ (-i)$$
$$= i\ (\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}\ i$$

□

مثال ۲۵:

مقدار $(-i)^i$ را حساب کنید با فرض اینکه $0 < \theta \le 2\pi$ باشد.

$$(-i)^i = e^{i\ ln(-i)} = e^{i\ (ln|-i|\ +\ i\ arg(-i))}$$
$$= e^{-\frac{3\pi}{2}}$$

□

تمرینات

توابع مثلثاتی

نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

۱- $cot\ z$ ، ۲- $\frac{1}{z} - sec\ z$ ، ۳- $tan(\pi z)/(z^3 - z)$

نشان دهید:

۴- $tan\ \overline{z} = \overline{tan\ z}$ ، ۵- $\overline{sin\ z} = sin\ \overline{z}$

۶- معادله $sin\ z = cosh\ 4$ را حل کنید.

۷- نشان دهید توابع $\overline{sin\ z}$ و $cos\ \overline{z}$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیستند.

۸- نشان دهید که همواره $cot\ z \ne \pm i$.

توابع هذلولوی

نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

۹- $coth\ z$ ، ۱۰- $\frac{1}{z} - sech\ z$ ، ۱۱- $tanh\ (\pi z)/(z^2 + 1)$

نشان دهید:

۱۲- $sinh\ (-z) = -sinh\ z$ ، ۱۳- $coth(-z) = -coth\ (z)$

بخش‌های حقیقی و موهومی توابع زیر را تعیین کنید.

۱۴- $sinh\ 2z$ ، ۱۵- $z\ cosh\ z$

نشان دهید:

۱۶- $sinh\ (z_1 + z_2) = sinh\ z_1\ cosh\ z_2 + cosh\ z_1\ sinh\ z_2$

۱۷- $cosh\ (2z) = cosh^2\ z + sinh^2\ z$

مقادیر زیر را تعیین کنید.

۱۸- $4sinh\ (\pi i/3)$ ، ۱۹- $cosh\ (2k + 1)\ \pi i/2 \quad k = 0, \pm 1, \dots$

۲۰- $coth(3\pi i/4)$

۲۱- نشان دهید همواره $|tanh\ \pi(1 + i)/4| = 1$

توابع نمایی و لگاریتمی

۲۲- اگر $z = 6e^{\pi i/3}$، مقدار $|e^{iz}|$ را حساب کنید.

مقادیر زیر را یافته و مقدار اصلی را در هر یک مشخص کنید.

۲۳- $ln(-4)$ ، ۲۴- $ln(3i)$ ، ۲۵- $ln(\sqrt{3} - i)$ ، ۲۶- $ln(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i)$

۲۷- نشان دهید:

$$ln(z - 1) = \frac{1}{2}\ ln[(x - 1)^2 + y^2] + i\ tan^{-1}\ [y/(x - 1)] + 2k\pi i$$

هرگونه محدودیتی را قید کنید.

توابع توانی و ریشه

کلیه مقادیر زیر را بیابید.

۲۸- $(1 + i)^i$ ، ۲۹- $1^{\sqrt{2}}$

۳۰- $Re[(1 - i)^{1+i}]$ ، ۳۱- $|(-i)^{-i}|$

۳۲- نشان دهید کلیه مقادیر $(1 - i)^{\sqrt{2}i}$ روی یک خط مستقیم واقعند.

۳۳- بخش‌های حقیقی و موهومی z^z را بیابید.

توابع معکوس مثلثاتی و هذلولوی

۳۴- نشان دهید:
$$\cos^{-1}(z) = \frac{1}{i} \ln (z + \sqrt{z^2 - 1})$$
هرگونه محدودیتی را قید کنید.

۳۵- نشان دهید برای شاخه‌ای از تابع $\tanh^{-1}(z)$ که در آن $\tanh^{-1}(0) = 0$، داریم
$$\tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2} Ln \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

۳۶- نشان دهید:
$$Re(\sin^{-1} z) = \frac{1}{2} [\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}]$$

تمرینات گوناگون

نقاط تکین توابع زیر را تعیین کرده و نوع آنها را مشخص کنید.

۳۷- $\frac{z^2 - 3z}{z^2 + 2z + 2}$ ، ۳۸- $\frac{\ln (z + 3i)}{z^2}$

۳۹- $\csc \left(\frac{1}{z}\right)$ ، ۴۰- $\sqrt{z (z^2 + 1)}$

۴۱- $\cos z/(z + i)^3$

۴۲- نشان دهید ریشه‌های معادله $\sin z = a$ برای $-1 \le a \le 1$ حقیقی است.

۴۳- نشان دهید هرگاه برای همه zها داشته باشیم $|\sin z| \le 1$، آنگاه z حقیقی است.

۴۴- نشان دهید برای $|y| \ge 1$، همواره داریم $|\csc z| \le 2e/(e^2 - 1)$

۴۵- ماکزیمم $|\cos z|$ را روی مربع $0 \le Re(z) \le 2\pi$ و $0 \le Im(z) \le 2\pi$ تعیین کنید.

*۴۶- نشان دهید کلیه جواب‌های معادله $\tan z = z$ حقیقی است.

*۴۷- نشان دهید کلیه جواب‌های معادله $z \tan z = k$ برای $k > 0$ حقیقی است.

۴۸- اگر a و b اعدادی حقیقی باشند نشان دهید $\left(\frac{ia - 1}{ia + 1}\right)^{ib} = e^{-2b \cot^{-1} a}$.

۴۹- مقدار $\lim_{z \to i} \frac{\tan^{-1} (z^2 + 1)^2}{\sin^2 (z^2 + 1)}$ را روی شاخه‌ای که در آن $\tan^{-1}(0) = 0$ است تعیین کنید.

۵۰- نشان دهید $\lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{1/z^2} = e^{-1/6}$.

۵۱- نشان دهید اگر $f(z)$ در حوزه R تحلیلی بوده و در آن ناحیه $f(z) f'(z) \ne 0$، آنگاه تابع $g(z) = Ln\ |f(z)|$ در R همساز است.

۵۲- نشان دهید تابع زیر یک تابع تام است.

$$f(z) = \begin{cases} \cos z/(z^2 - \frac{\pi^2}{4}) & z \ne \pm \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{\pi} & z = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۴

انتگرال‌های مختلط

اگر $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ و $dz = dx+idy$، آنگاه طبیعی به نظر می‌رسد که انتگرال مختلط تابع $f(z)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\int f(z)dz = \int (u + iv)(dx + i\,dy) = \int u\,dx - v\,dy + i\int u\,dy + v\,dx$$

انتگرال‌های فوق از نوع انتگرال‌های منحنی الخط هستند که ما قبلاً در نظریه توابع دو متغیره با آنها آشنا شده‌ایم. در زیر قبل از تعریف دقیق انتگرال‌های مختلط، به طور اختصار برخی خواص انتگرال‌های روی خم را در صفحه مرور می‌کنیم.

۴-۱. مروری بر انتگرال‌های روی خم در صفحه

۱- $\int_c P(x , y)\,dx + Q(x , y)\,dy$ روی خم باز یا بسته c در صفحه xy تعریف می‌شود.

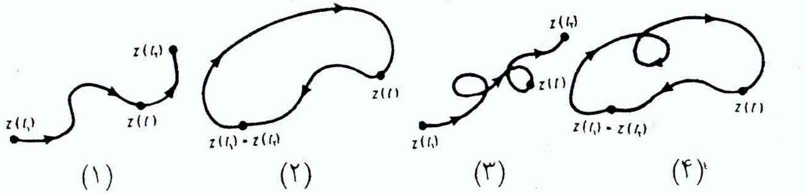
۲- خم c در صفحه xy به شکل پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ برای $t_1 \le t \le t_2$ بیان می‌گردد.

خم را **هموار** نامیم اگر $f'(t)$ و $g'(t)$ در این فاصله موجود و پیوسته بوده و هر دو با هم صفر نباشند. خم را **بسته** نامیم اگر $f(t_1) = f(t_2)$ و $g(t_1) = g(t_2)$، در غیر این صورت خم را **باز** نامند.

خم را **ساده** نامیم اگر $f(u) = f(v)$ و $g(u) = g(v)$، آنگاه $u = v$ (مگر در حالتی که برای خم‌های بسته

$u = t_1$ و $v = t_2$ باشد)، یعنی خم خودش را قطع نکند.

خم‌های (۱) و (۲) در شکل زیر ساده و خم‌های (۳) و (۴) غیر ساده‌اند.



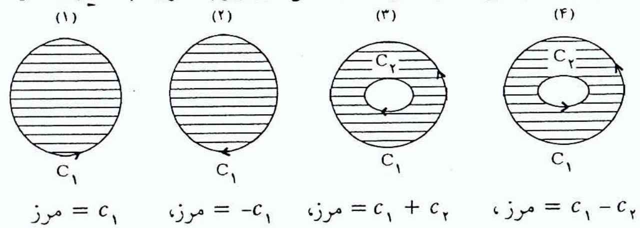
با تغییر t از t_1 تا t_2 به طور طبیعی جهتی بر روی خم c مشخص می‌شود، در این صورت خم را **جهت دار** می‌نامند.

اگر c یک خم جهت دار باشد، خم $-c$ همان خم c است که در جهت عکس پیموده شده است، یعنی برای خم $-c$، t از t_2 تا t_1 تغییر می‌کند.

هر خم بسته ناحیه را به سه بخش افراز می‌کند:

ناحیه داخل آن که یک ناحیه کراندار است. ناحیه خارج آن که یک ناحیه بی‌کران است. نقاط روی آن که مرز ناحیه نامیده می‌شود.

جهت مثبت یک خم بسته، جهتی است که اگر در آن سوی حرکت کنیم، ناحیه داخل خم در سمت چپ ما واقع گردد. مرزهای نواحی هاشور خورده در شکل‌های زیر به طور مثبت جهت دار شده‌اند.



۳- ناحیه داخل خم بسته c را با R مشخص می‌کنیم.

ناحیه R را **همبند** نامیم اگر بتوان هر دو نقطه در داخل آن را با یک خط شکسته در درون ناحیه به یکدیگر متصل کرد.

ناحیه R را **ساده** نامیم اگر ناحیه فاقد حفره باشد، در غیر اینصورت آنرا **مرکب** می‌نامیم. نواحی (۱) و

(۲) در شکل صفحه قبل نواحی همبند ساده و نواحی (۳) و (۴) نواحی همبند مرکب هستند. برای نواحی ساده، سوی مثبت مرز در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. برای نواحی مرکب سوی مثبت برای مرز خارجی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و برای مرزهای داخلی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

۴- اگر c یک خم ساده قطعه به قطعه هموار باشد $\int_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ **انتگرال منحنی الخط روی خم C** نامیده می‌شود. شرط کافی برای وجود انتگرال، قطعه به قطعه پیوسته بودن توابع $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ در ناحیه‌ای در صفحه شامل خم c است.

انتگرال‌های روی خم را می‌توان برای خم‌های باز یا بسته تعریف کرد، اگر انتگرال روی خم بسته c تعریف شود از نماد $\oint$ استفاده می‌کنیم.

خواص این انتگرال‌ها مشابه انتگرال‌های توابع یک متغیره به شرح زیر است:

$$\int_c Af + Bg = A\int_c f + B\int_c g$$

$$\int_{c_1+c_2} = \int_{c_1} + \int_{c_2} \quad \text{و} \quad \int_{-c} = -\int_c$$

خاصیت $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ که در انتگرال‌های حقیقی همواره برقرار است، اینجا فقط در شرایطی خاص برقرار است.

۵- روش‌های محاسبه این انتگرال‌ها روی خم‌های باز یا بسته به شرح زیر است:

الف- روش کلی

روش کلی محاسبه، جانشینی شکل پارامتری خم در تابع زیر انتگرال است که نهایتاً یک انتگرال حقیقی برحسب پارامتر t (پارامتر خم) نتیجه می‌شود.

ب- استفاده از قضیه گرین

اگر خم بسته c مرز ناحیه همبند D باشد، آنگاه به شرط پیوستگی مشتقات نسبی مرتبه اول $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ در D، می‌توان از **فرمول گرین** زیر موسوم به **فرمول گرین** برای محاسبه انتگرال روی خم‌های بسته استفاده کرد.

$$\oint_c P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

پ- انتگرال‌گیری مستقیم

اگر مشتقات نسبی مرتبه اول P و Q در ناحیه همبند ساده D با مرز c پیوسته بوده و در کل ناحیه داشته باشیم $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$، آنگاه عبارت $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ دیفرانسیل کامل نامیده می‌شود، به عبارتی دیگر تابعی چون $\phi(x,y)$ موسوم به **تابع اولیه** یا **پادانتگرال** (تابع پتانسیل) موجود است بطوریکه:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = d\phi$$

در این صورت با توجه به قضیه گرین برای هر خم ساده بسته چون c_1 در ناحیه D داریم:

$$\oint_{c_1} P(x,y)\,dx + Q\,(x,y)\,dy = 0$$

توجه کنید که این نتیجه برای هر خم بسته در نواحی همبند مرکب همواره معتبر نیست.

نتایج زیر بسادگی حاصل می‌شود:

۱- **انتگرال مستقل از مسیر است** - اگر c_1 و c_2 دو خم هموار واقع در ناحیه D باشند که نقاط P_1 و P_2 را در D به یکدیگر متصل نمایند (شکل (۱) در زیر)، آنگاه:

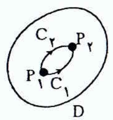
$$\int_{\substack{P_1 \\ c_1}}^{P_2} P\,dx + Q\,dy = \int_{\substack{P_1 \\ c_2}}^{P_2} P\,dx + Q\,dy$$

۲- **می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت** - اگر $d\phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$، آنگاه:

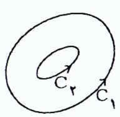
$$\int_{\substack{P_1 \\ c_1}}^{P_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\substack{P_1 \\ c_1}}^{P_2} d\phi = \phi(p_2) - \phi(p_1)$$

۳- **خم‌های بسته را می‌توان جابجا کرد** - اگر $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ در ناحیه واقع بین دو خم ساده بسته غیر متقاطع c_1 و c_2 دیفرانسیل کامل باشد (شکل ۲)، و هر دو خم نسبت به ناحیه داخل خود به شکل مثبت جهت‌دار شده باشند، آنگاه:

$$\oint_{c_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{c_2} P\,dx + Q\,dy$$



شکل ۱

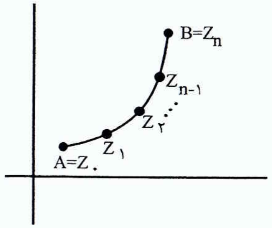


شکل ۲

حال در شرایطی هستیم که می‌توانیم انتگرال‌های مختلط را تعریف کنیم.

۲-۴. تعریف انتگرال‌های مختلط

فرض کنید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابعی پیوسته از z بوده و c یک منحنی قطعه به قطعه هموار از A به B مطابق شکل مجاور باشد. c را توسط نقاط z_k برای $k = 1, 2, \ldots, n-1$ به n زیر فاصله Δs_k تقسیم می‌کنیم. فرض کنید $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ وتر متناظر با Δs_k باشد، همچنین فرض کنید که در هر زیر فاصله روی c نقاط دلخواه $\eta_k = \alpha_k + i\beta_k$ را انتخاب می‌کنیم. حد مجموع $\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta z_k$ وقتی که n بنحوی به بینهایت میل کند که وتر Δz_k به سمت صفر میل نماید، انتگرال $f(z)$ روی c نامیده می‌شود.



$$\int_c f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta z_k$$

در حالت خاصی که A و B بر هم منطبق باشند، مسیر انتگرال‌گیری یک منحنی بسته است و در این صورت انتگرال فوق به **انتگرال کانتور** موسوم بوده و به صورت $\oint_c f(z)dz$ نوشته می‌شود.

در ابتدای فصل دیدیم که این انتگرال‌ها برحسب انتگرال‌های منحنی‌الخط حقیقی قابل بیانند، بنابراین خواص انتگرال‌های روی خم برای آنها معتبر خواهند بود.

۳-۴. روش کلی محاسبه

روش کلی محاسبه انتگرال‌های مختلط روی خم قطعه به قطعه هموار و ساده c، جانشینی مختصات خم c در انتگرال و تبدیل آن به انتگرال تابع یک متغیره بر حسب پارامتر t است.

مثال ۱:

$\int_c |z|\,dz$، که در آن c خط راست بین دو نقطه ۰ و $1 + i$ است را محاسبه کنید.

حل: در اینجا چون شکل پارامتری خم $x = t$، $y = t$، $0 \le t \le 1$ است، پس داریم $z(t) = t + it$ و $dz = (1 + i)\,dt$. چون $|z| = |t + it| = \sqrt{2}\,t$، بنابراین:

$$\int_c |z|\,dz = \int_0^1 \sqrt{2}t(1 + i)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

□

مثال ۲:

$\oint_{|z|=1} \bar z\, dz$ را محاسبه کنید.

حل: این بار منحنی c دایره $|z| = 1$ است. چون $z = e^{it}$، $0 \le t \le 2\pi$، $\bar z = e^{-it}$ و $dz = i e^{it}dt$، پس

$$\oint_{|z|=1} \bar z\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}dt = 2\pi i$$

□

مثال ۳:

$\int_c \frac{dz}{\sqrt z}$ را روی c، نیمه بالایی دایره واحد بر شاخه‌ای از $\sqrt z$ که در آن $\sqrt{1} = -1$ است، تعیین کنید.

حل: اگر $z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$، آنگاه $\sqrt z = \sqrt r\, e^{i(\theta/2 + k\pi)}$ که در آن $-\pi < \theta \le \pi$. این تابع دارای دو شاخه $\sqrt r\, e^{i\theta/2}$ و $\sqrt r\, e^{i(\theta/2+\pi)}$ است و $\sqrt r\, e^{i(\theta/2+\pi)}$ شاخه‌ای است که برای آن $\sqrt{1} = -1$.
(مثال ۵ فصل ۲ را ببینید). روی دایره واحد $z = e^{i\theta}$ داریم $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$. پس

$$\int_c \frac{dz}{\sqrt z} = \int_0^\pi \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i(\theta/2 + \pi)}} = \int_0^\pi ie^{i(\theta/2 - \pi)}\,d\theta$$

$$= 2e^{i(\theta/2-\pi)}\Big|_0^\pi = 2(e^{-i\pi/2} - e^{-i\pi}) = 2(1 - i)$$

□

۴-۴. قضیه کوشی و نتایج آن

شکل انتگرال‌های مختلط، استفاده از قضیه گرین و نتایج آن را در آنها مجاز می‌سازد.

قضیه کوشی: اگر R یک حوزه همبند (ساده یا مرکب) با مرز c قطعه به قطعه هموار باشد، و $f(z)$ روی و داخل c تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

(این خاصیت، معادل دیفرانسیل کامل بودن $P\,dx + Q\,dy$ در انتگرال‌های حقیقی است.)

اثبات: چون $f(z)$ تحلیلی است، پس کلیه مشتقات آن موجود و پیوسته‌اند، بنابراین مشتقات نسبی u_x، u_y، v_x، v_y نیز در R پیوسته خواهند بود و می‌توان از قضیه گرین استفاده کرد. در نتیجه با استفاده از قضیه گرین و روابط کوشی ریمان داریم:[1]

$$\oint_c f(z)dz = \oint_c udx - vdy + i\oint_c vdx + udy$$
$$= \iint_R (-v_x - u_y)dA + i\iint_R (u_x - v_y)\, dA = 0$$

مثال ۴:

$\oint_{|z|=1} e^z dz$ را محاسبه کنید.

حل: تابع e^z یک تابع تام است، پس درون و روی دایره واحد تحلیلی است. بنابراین مقدار انتگرال برابر صفر است.

□

مثال ۵:

$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2+4}dz$ را محاسبه کنید.

حل: تنها نقاط منفرد تابع $\frac{\sin z}{z^2+4}$، نقاط $\pm 2i$ می‌باشند که در داخل دایره واحد واقع نیستند. پس تابع در درون و روی دایره واحد تحلیلی است و بنابراین مقدار انتگرال صفر است.

□

مثال ۶:

$\oint_{|z|=2} [z - Re(z)]dz$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\oint_{|z|=2} (z - Re(z))dz = \oint_{|z|=2} zdz - \oint_{|z|=2} Re(z)dz$$

۱- گورسا ریاضی‌دان فرانسوی بدون استفاده از شرط پیوستگی $f'(z)$ این قضیه را اثبات نموده است، بدین دلیل این قضیه به قضیه کوشی گورسا نیز موسوم است.

چون z یک تابع تام است، مقدار اولین انتگرال برابر صفر خواهد بود. تابع $Re(z)$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست. پس برای محاسبه انتگرال دوم اجباراً از روش کلی استفاده می‌کنیم.

چون $z = 2e^{it}$، پس $Re(z) = 2\cos t = 2\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$، و $dz = 2ie^{it}dt$، و داریم:

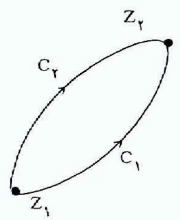
$$\oint_{|z|=2} (z - Re(z))dz = -\oint_{|z|=2} Re(z)dz = -\int_0^{2\pi} (e^{it}+e^{-it})\, 2ie^{it}\, dt$$
$$= -2i\int_0^{2\pi} (e^{2it}+1)dt$$
$$= -2i\left(\frac{e^{2it}}{2i}+t\right)\Big|_0^{2\pi} = -4\pi i$$

□

از قضیه کوشی نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱- در هر حوزه همبند ساده که $f(z)$ در آن تحلیلی است، $\int f(z)\, dz$ مستقل از مسیر انتگرال‌گیری است.

برای مشاهده این خاصیت فرض کنید z_1 و z_2 دو نقطه دلخواه و c_1، c_2 دو مسیر دلخواه بین دو نقطه و همگی در حوزه تحلیلی بودن $f(z)$ باشند. اگر $c = c_1 - c_2$، آنگاه $f(z)$ در ناحیه داخل c تحلیلی است و بنابر قضیه کوشی $\oint_{c_1-c_2} f(z)dz = 0$، با باز کردن این انتگرال نتیجه می‌شود:



$$\underset{c_1}{\int_{z_1}^{z_2}} f(z)dz = \underset{c_2}{\int_{z_1}^{z_2}} f(z)dz$$

۲- اگر $f(z)$ در حوزه R تعریف شده و $F(z)$ در این ناحیه تحلیلی باشد، همچنین در این حوزه داشته باشیم $f(z) = F'(z)$، آنگاه $F(z)$ یک تابع اولیه $f(z)$ است. حال اگر c یک خم ساده بین دو نقطه z_1 و z_2 واقع در R باشد، در اینصورت داریم:

$$\int_c f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

به عبارت دیگر اگر $f(z)$ مشتق یک تابع تحلیلی باشد، در این صورت انتگرال آن مستقل از مسیر انتگرال‌گیری است و می‌توان از آن مستقیماً انتگرال گرفت. به خصوص اگر $z_1=z_2$، در این صورت مقدار


www.oil-yasuj.ir
سایت نفت یاسوج
کتاب ریاضی مهندسی
سایت تخصصی نفت یاسوج
Oil-yasuj
مرجع بزرگ مهندسی نفت
ارائه کتاب و جزوات مهندسی نفت
دانلودمقالات نفتی
مطالب آموزشی مهندسی نفت
گزارش کارآموزی
پروژه
گزارشکارآزمایشگاه
جزوه ریاضی مهندسی
مولف
وزین حاجی جمشید
سایت نفت یاسوج
www.oil-yasuj.ir
OIL-YASUJ
Dr.Movahedinia
Phone: 09364969437
Fax: 0123 456 789
Email: yasujoil@gmail.com
Website: www.oil-yasuj.ir