فصل ۱

مفاهیم اولیه

تمرین‌ها

در تمرینات ۱ تا ۸ تحقیق کنید آیا تـابع داده شـده جـواب معادلـه دیفرانـسیل نظیـر می‌باشد یا خیر؟

-۱ $y'' - y = 0 \quad , \quad y = e^x + 3e^{-x}$

-۲ $xy' + y = xe^{x^2} \quad , \quad y = \left(\frac{1}{2x}\right)e^{x^2}$

-۳ $y'' - 4y = 0 \quad , \quad y = \sin 2x$

-۴ $x^2y'' - xy' + y = 2\ln x \quad , \quad y = 2\ln x + 4$

-۵ $xy' - y - x^2e^{-x^2} = 0 \quad , \quad y = x\int_0^x e^{-t^2}dt$

(راهنمایی: معادله این دوایر به شکل $x^۲ + y^۲ - ۱ + c(y-x) = ۰$ است).

حل:

$$x^۲ + y^۲ - ۱ + c(y-x) = ۰$$

$$۲x + ۲yy' + c(y'-۱) = ۰ \quad , \quad ۲ + ۲(y')^۲ + ۲yy'' + cy'' = ۰$$

می‌توان c را از معادله اولیه یا معادله مشتق‌گیری شده به دست آورده و در معادله مربوط به مشتق دوم جاگذاری نمود.

۲۳- معادله دیفرانسیل دوایر $r = ۲c(\sin\theta - \cos\theta)$ را در مختصات قطبی به دست آورید (c پارامتر است).

حل:

$$r = ۲c(\sin\theta - \cos\theta) \quad \Rightarrow \quad r' = \frac{dr}{d\theta} = ۲c(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$c = \frac{r}{۲(\sin\theta - \cos\theta)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{۲r}{۲(\sin\theta - \cos\theta)}(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\frac{۱}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{۱ + \tan\theta}{\tan\theta - ۱}$$

۲۴- معادله دیفرانسیل خانواده دو پارامتری $y = \ln\cos(x - c_۱) + c_۲$ را به‌دست آورید.

➢ **حل:**

$$y=\ln\cos(x-c_۱)+c_۲ \quad\Rightarrow\quad y'=\tan(x-c_۱) \quad , \quad y''=۱+\tan^۲(x-c_۱)$$

$$\tan(x-c_۱)=y' \quad\Rightarrow\quad y''=۱+(y')^۲$$

در تمرینات ۲۵ تا ۲۷ نشان دهید توابع دو

$$F(x,y,z)\ \frac{۱}{۲}-\frac{\pi}{۲}\rightarrow ۰=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\operatorname{curl}\vec{F}\ \ \frac{\pi}{۲}$$

متغیری داده شده، جواب های

معادلات با مشتقات جزیی نظیر هستند.

۲۵- $u(x,t)=e^{-a^۲t}\sin x \qquad a^۲u_{xx}=u_t$

۲۶- $u(x,t)=f(x+۲t)+g(x-۲t) \qquad ۴u_{xx}=u_{tt}$

(g , f توابع دلخواه هستند)

۲۷- $z=x^۳-۳xy^۲ \qquad z_{xx}+z_{yy}=۰$

➢ **حل:**

$$u(x,t)=e^{-a^۲t}\sin x$$

$$\Rightarrow\quad u_x=e^{-a^۲t}\cos x \quad , \quad u_{xx}=-e^{-a^۲t}\sin x \quad , \quad u_t=-a^۲e^{-a^۲t}\sin x$$

جاگذاری در معادله: $a^۲u_{xx}=a^۲(-e^{-a^۲t}\sin x)=-a^۲e^{-a^۲t}\sin x=u_t$

۲۶) $u(x,t)=f(x+۲t)+g(x-۲t) \quad\Rightarrow\quad u_x=f'(x+۲t)+g'(x-۲t)$

$$u_{xx}=f''(x+۲t)+g''(x-۲t)$$

$$u_t=۲f'(x+۲t)-۲g'(x-۲t) \quad , \quad u_{tt}=۴f''(x+۲t)+۴g''(x-۲t)$$

جاگذاری در معادله: $۴u_{xx} = ۴\left[f''(x+۲t) + g''(x-۲t)\right]$

$$= ۴f''(x+۲t) + ۴g''(x-۲t) = u_{tt}$$

۲۷) $z = x^{۳} - ۳xy^{۲} \Rightarrow z_x = ۳x^{۲} - ۳y^{۲} \quad , \quad z_{xx} = ۶x$

$z_y = -۶xy \quad , \quad z_{yy} = -۶x$

جاگذاری در معادله: $z_{xx} + z_{yy} = ۶x - ۶x = ۰$

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

تمرین‌ها

معادلات جداپذیر

در تمرینات ۱ تا ۱۴ برای معادلاتی که جداپذیر هستند، جواب عمومی را به‌دست آورید.

۱- $y' = \dfrac{۱ + y^{۲}}{۱ + x^{۲}}$

۲- $y' = y^{\frac{۱}{۲}}$

۳- $y' + xy = ۳$

۴- $y' = x - xy - y + ۱$

۵- $(۱+x)y\,dx + x\,dy = ۰$

۶- $yy' = y^{۲}x^{۳} + y^{۲}x$

۷- $xy' - \frac{y}{\ln x} = xy^{۲}$

۸- $۳xy\,dx = (x^{۲}+۴)dy = ۰$

۹- $(۱+\ln x)dx + (۱+\ln y)dy = ۰$

۱۰- $y^{۴}dx + (x^{۲} - ۳y)dy = ۰$

۱۱- $a^{۲}dx = x\sqrt{x^{۲} - a^{۲}}\,dy$

۱۲- $(۱+y^{۲})\cos x\,dx = ۲(۱+\sin^{۲} x)y\,dy$

۱۳- $ye^{x+y}dy = dx$

۱۴- $y' = e^{y-x}\sin x$

حل:

۱) $y' = \frac{۱+y^{۲}}{۱+x^{۲}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{۱+y^{۲}}{۱+x^{۲}}$

معادله جداپذیر است بنابراین:

$$\frac{dy}{۱+y^{۲}} = \frac{dx}{۱+x^{۲}} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{۱+y^{۲}} = \int\frac{dx}{۱+x^{۲}} + k$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + k \quad \Rightarrow \quad y = \tan\left(\tan^{-1} x + k\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x + \tan k}{1 - x \tan k}$$

$$\tan k = c \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{x + c}{1 - cx}$$

۲) $$\frac{\partial(x + 2y)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial(4x + y)}{\partial y} \qquad y' = y^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = \int dx + c \quad \Rightarrow \quad 2y^{\frac{1}{2}} = x + c \quad \Rightarrow \quad 4y = (x + c)^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}(x + c)^2$$

۳) $$y' + xy = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + xy = 3$$

مشخص است که معادله فوق جداپذیر نیست.

۴) $$y' = x - xy - y + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x(1 - y) - (1 - y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (1 - y)(x - 1)$$

معادله فوق جداپذیر است.

$$\frac{dy}{1 - y} = (x - 1)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{1 - y} = \int (x - 1)dx + c_1$$

$$\Rightarrow \quad -\ln|1 - y| = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$1 - y = e^{-\left(\frac{x^2}{2} + x + c_1\right)} \quad \Rightarrow \quad y = 1 - ce^{-\frac{x}{2}(x+2)}$$

۵) $$(1 + x)ydx + xdy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 + x)}{x}dx + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \int \frac{dy}{y} = c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|x| + x + \ln|y| = c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|xy| = c_1 - x$$

$$|xy| = c_۲ e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{x} e^{-x}$$

۶)

$$yy' = y^۳x^۳ + y^۲x \quad \Rightarrow \quad yy' = y^۲(x^۳ + x)$$

$$\text{فرض}: z = y^۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = ۲yy' \quad \Rightarrow \quad yy' = \frac{۱}{۲}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{۱}{۲}\frac{dz}{dx} = z(x^۳ + x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = ۲(x^۳ + x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = \int ۲(x^۳ + x)dx + c_۱$$

$$\ln|z| = \frac{x^۴}{۲} + x^۲ + c_۱ \quad \Rightarrow \quad y^۲ = ce^{\frac{x^۴}{۲} + x^۲}$$

۷)

$$xy' - \frac{y}{\ln x} = xy^۲ \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\ln x} = xy^۲$$

مشخص است که معادله جداپذیر نیست.

۸)

$$۳xydx + (x^۲ + ۴)dy = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{۳x}{x^۲ + ۴}dx + \frac{dy}{y} = ۰$$

$$۳\int \frac{x}{x^۲ + ۴}dx + \int \frac{dy}{y} = c_۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{۲}\ln(x^۲ + ۴) + \ln|y| = c_۱$$

$$(x^۲ + ۴)^{\frac{۳}{۲}}|y| = c \quad \Rightarrow \quad |y| = c(x^۲ + ۴)^{-\frac{۳}{۲}}$$

۹)

$$(۱ + \ln x)dx + (۱ + \ln y)dy = ۰$$

$$\int (۱ + \ln x)dx + \int (۱ + \ln y)dy = c \quad \Rightarrow \quad x\ln x + y\ln y = c$$

۱۰)

$$y^۴dx + (x^۲ - ۳y)dy = ۰$$

مشخص است که معادله جداپذیر نیست.

۱۱) $a^۲dx = x\sqrt{x^۲ - a^۲}dy$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{a^۲dx}{x\sqrt{x^۲ - a^۲}} \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int \frac{a^۲dx}{x\sqrt{x^۲ - a^۲}} + c$$

تغییر متغیر: $x = a\sec\theta \quad \Rightarrow \quad d_x = a\sec\theta\tan\theta d\theta \quad , \quad \theta = \sec^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\Rightarrow \quad y = a\int d\theta = a\theta + c \quad \Rightarrow \quad y = a\sec^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

۱۲) $(۱+y^۲)\cos x dx = ۲(۱+\sin^۲ x)ydy \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos x\, dx}{۱+\sin^۲ x} = \frac{۲y\, dy}{۱+y^۲}$

$$\int \frac{\cos x dx}{۱+\sin^۲ x} = \int \frac{۲ydy}{۱+y^۲}$$

$\Rightarrow \quad \tan^{-۱}(\sin x) = \ln(۱+y^۲) + c_۱$ یا $\ln(۱+y^۲) = \tan^{-۱}(\sin x) + ۲$

$$ye^{x+y}dy = dx \quad \Rightarrow \quad ye^y dy = e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad \int ye^y dy = \int e^{-x}dx$$

$$(y-۱)e^y = -e^{-x} + c \quad \Rightarrow \quad (y-۱)e^y = c - e^{-x}$$

۱۴) $y' = e^{y-x}\sin x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^x}\sin x \quad \Rightarrow \quad e^{-y}dy = e^{-x}\sin x\, dx$

$$\int e^{-y}dy = \int e^{-x}\sin x dx \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = -\frac{۱}{۲}(\sin x + \cos x)e^{-x} + c_۱$$

$$\Rightarrow \quad e^{-y} = \frac{۱}{۲}(\sin x + \cos x)e^{-x} + c$$

جواب هر یک از مسایل مقدار اولیه زیر را تعیین کنید:

۱۵- $\sqrt{۱+x^۲}\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \quad , \quad y(۰) = ۰$

۱۶- $(۱-y^۲)x\frac{dy}{dx} + (۱+x^۲)y = ۰ \quad , \quad y(\frac{۱}{۲}) = ۲$

۱۷- $y' = xe^{y-x^2} \quad , \quad y(0) = 0$

۱۸- $(x+1)y' = x\sqrt{y+1} \quad , \quad y(0) = 0$

۱۹- $\dfrac{y'}{y} - x = xy \quad , \quad y(0) = 1$

۲۰- $xy' - y = 1 \quad , \quad y(2) = 3$

➢ حل:

۱۵)
$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \quad \Rightarrow \quad e^y dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$\int e^y dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad \Rightarrow \quad e^y = \sqrt{1+x^2} + c$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad e^y = \sqrt{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \ln\sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

۱۶)
$$(1-y^2)x\frac{dy}{dx} + (1+x^2)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1-y^2}{y}\right)dy + \left(\frac{1+x^2}{x}\right)dx = 0$$

$$\left(\frac{1}{y} - y\right)dy + \left(\frac{1}{x} + x\right)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\left(\frac{1}{y} - y\right)dy = -\int\left(\frac{1}{x} + x\right)dx$$

$$\ln|y| - \frac{y^2}{2} = -\ln|x| - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\ln|xy| = \frac{y^2 - x^2}{2} + c$$

$$y(\frac{1}{2}) = 2 \quad \Rightarrow \quad |n| = \frac{2^2 - (\frac{1}{2})^2}{2} + c$$

$$|n| = ۰ \Rightarrow c = -\frac{۱۵}{۸} \Rightarrow \ln|xy| = \frac{y^۲ - x^۲}{۲} - \frac{۱۵}{۸}$$

۱۷)

$$y' = xe^y e^{-x^۲} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xe^y e^{-x^۲}$$

$$e^{-y}dy = xe^{-x^۲}dx \Rightarrow \int e^{-y}dy = \int xe^{-x^۲}dx \Rightarrow -e^{-y} = -\frac{۱}{۲}e^{-x^۲} + c$$

$$y(۰) = ۰ \Rightarrow -۱ = -\frac{۱}{۲} + c \Rightarrow c = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow -e^{-y} = -\frac{۱}{۲}e^{-x^۲} - \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y = \ln\left(\frac{۲}{e^{-x^۲} + ۱}\right)$$

۱۸)

$$(x+۱)y' = x\sqrt{y+۱} \Rightarrow (x+۱)\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y+۱}$$

$$\frac{xdx}{x+۱} = \frac{dy}{\sqrt{y+۱}} \Rightarrow \left(۱ - \frac{۱}{x+۱}\right)dx = \frac{dy}{\sqrt{y+۱}}$$

$$\int\left(۱ - \frac{۱}{x+۱}\right)dx = \int\frac{dy}{\sqrt{y+۱}} \Rightarrow x - \ln|x+۱| = ۲\sqrt{y+۱} + c$$

$$y(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ - ۰ = ۲ + c \Rightarrow c = -۲$$

$$x - \ln|x+۱| = ۲\sqrt{y+۱} - ۲$$

۱۹)

$$\frac{y'}{y} - x = xy \Rightarrow \frac{۱}{y}\frac{dy}{dx} - x = xy \Rightarrow \frac{۱}{y}\frac{dy}{dx} = x(۱+y)$$

$$\frac{dy}{y(۱+y)} = xdx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{y} - \frac{۱}{۱+y}\right)dy = xdx \Rightarrow \int\left(\frac{۱}{y} - \frac{۱}{۱+y}\right)dy = \int xdx$$

۶- $y'' + y = ۰ \quad , \quad y = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷} + \cdots$

۷- $y'' + y' = ۲ \quad , \quad y_۱ = ۲x \quad , \quad y_۲ = ۲x - ۳$

۸- $y' = y^{\frac{۱}{۲}} \quad , \quad y_۱(x) \equiv ۰ \quad , \quad y_۲(x) = \frac{x^۲}{۴} \quad , \quad x \geq ۰$

➢ **حل:**

۱) $y = e^x + ۳e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y' = e^x - ۳e^{-x} \quad , \quad y'' = e^x + ۳e^{-x}$

جاگذاری در معادله: $y'' - y = (e^x + ۳e^{-x}) - (e^x + ۳e^{-x}) = ۰$

بنابراین تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل است.

۲) $y = \left(\frac{۱}{۲x}\right)e^{x^۲} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{۱}{۲x^۲}e^{x^۲} + ۲x\left(\frac{۱}{۲x}\right)e^{x^۲} = e^{x^۲}\left(-\frac{۱}{۲x^۲} + ۱\right)$

جاگذاری در معادله: $xy' + y = xe^{x^۲}\left(-\frac{۱}{۲x^۲} + ۱\right) + \left(\frac{۱}{۲x}\right)e^{x^۲} = xe^{x^۲}$

بنابراین تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل نیست.

۳) $y = \sin ۲x \quad \Rightarrow \quad y' = ۲\cos ۲x \quad , \quad y'' = -۴\sin ۲x$

جاگذاری در معادله: $y'' - ۴y = -۴\sin ۲x - ۴\sin ۲x = -۸\sin ۲x \neq ۰$

بنابراین تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل نیست.

۴) $y = ۲\ln x + ۴ \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{۲}{x} \quad , \quad y'' = -\frac{۲}{x^۲}$

جاگذاری در معادله: $x^۲y'' - xy' + y = x^۲\left(-\frac{۲}{x^۲}\right) - x\left(\frac{۲}{x}\right) + ۲\ln x + ۴ = ۲\ln x$

بنابراین تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل است.

$$\ln|y|-\ln|۱+y|=\frac{x^۲}{۲}+c \quad\Rightarrow\quad \ln\left|\frac{y}{۱+y}\right|=\frac{x^۲}{۲}+۲$$

$$y(۰)=۱ \quad\Rightarrow\quad \ln(\frac{۱}{۲})=۰+c \quad\Rightarrow\quad c=\ln\frac{۱}{۲}=-\ln ۲$$

۲۰)

$$xy'-y=۱ \quad\Rightarrow\quad x\frac{dy}{dx}-y=۱ \quad\Rightarrow\quad x\frac{dy}{dx}=y+۱$$

$$\frac{dy}{y+۱}=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{y+۱}=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|y+۱|=\ln|x|+c$$

$$y(۲)=۳ \quad\Rightarrow\quad \ln ۴=\ln ۲+c \quad\Rightarrow\quad c=\ln ۴-\ln ۲=\ln\frac{۴}{۲}=\ln ۲$$

$$\ln|y+۱|=\ln|x|+\ln ۲ \quad\Rightarrow\quad \ln|y+۱|=\ln|۲x|$$

$$y+۱=۲x \quad\Rightarrow\quad y=۲x-۱$$

معادلات همگن

در تمرینات ۱ تا ۱۲ برای معادلاتی که همگن هستند جواب عمومی را به دست آورید:

۱- $(۵x-۲y)y'-y=۲x$

۲- $x\cos\left(\frac{x}{y}\right)y'=x\sin\left(\frac{x}{y}\right)+y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$

۳- $(x^۲+y^۲)dy+۲x(x+y)dx=۰$

۴- $y(x^۲-xy+y^۲)+xy'(x^۲+xy+y^۲)=۰$

۵- $xy'=y+\sqrt{x^۲+y^۲}$

۶- $xdy - ydx = \sqrt{xy}dx$

۷- $y' = e^{-\frac{y}{x}} + y$

۸- $-x^{۲}ydx + (x^{۳} + y^{۲})dy = ۰$

۹- $\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\right)dx + \left(\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}\right)dy = ۰$

۱۰- $xydx - (x^{۲} - y^{۲})dy = ۰$

۱۱- $\left(x\tan\left(\frac{y}{x}\right) + y\right)dx - xdy = ۰$

۱۲- $\left(x^{۳} + y^{۲}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\right)dx - xy\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}dy = ۰$

حل:

۱) $(۵x - ۲y)y' - y = (۵x - ۲y)\frac{dy}{dx} - y = ۲x$

$$\Rightarrow \quad (۵x - ۲y)dy - (۲x + y)dx = ۰$$

معادله همگن مرتبه اول است.

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + ۲x}{۵x - ۲y} = \frac{(\frac{y}{x}) + ۲}{۵ - ۲(\frac{y}{x})}$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\frac{y}{x} = v$:
$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}+v=\frac{v+۲}{۵-۲v} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{۲(v-۱)^{۲}}{۵-۲v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=\frac{(۵-۲v)}{۲(v-۱)^{۲}} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dx}{dx}=\int\frac{(۵-۲v)}{۲(v-۱)^{۲}}dv$$

با انتگرال‌گیری رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Rightarrow \quad c+\ln x=-\ln(v-۱)-\frac{۳}{۲(v-۱)}$$

به‌جای لا، مقدار $\frac{y}{x}$ را جایگزین می‌کنیم:

$$\Rightarrow \quad \ln|x|+\ln\left|\frac{y}{x}-۱\right|=\ln|y-x|=\frac{-۳x}{۲(y-x)}-c \quad \Rightarrow \quad y-x=e^{-c}e^{\frac{-۳x}{۲(y-x)}}$$

$$\Rightarrow \quad x-y=Ae^{\frac{-۳x}{۲(y-x)}} \quad , \quad A=-e^{-c}$$

۲)
$$\begin{cases} M(x,y)=x\cos\left(\frac{y}{x}\right) & \text{همگن مرتبه اول} \\ N(x,y)=x\sin(\frac{y}{x})+y\cos(\frac{y}{x}) & \text{همگن مرتبه اول} \end{cases}$$

معادله همگن مرتبه اول است

با تقسیم دو طرف معادله بر $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$y'=\frac{dy}{dx}=tg\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad \frac{y}{x}=v \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}=tg(v)+v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=\frac{dv}{tgv} \quad \Rightarrow \quad \ln|x|=\ln|\sin v|+\ln c$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{x}{\sin v}\right|=\ln c \quad \Rightarrow \quad x=c\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

۳) $(x^{2}+y^{2})dx+2x(x+y)dx=0$

$$\begin{cases} N(x,y)=x^{2}+y^{2} & \text{همگن مرتبه دوم} \\ M(x,y)=2x(x+y) & \text{همگن مرتبه دوم} \end{cases}$$

معادله فوق همگن مرتبه دوم است

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v=\frac{-2x(x+y)}{x^{2}+y^{2}}=\frac{-2(1+y/x)}{1+\left(y/x\right)^{2}}=\frac{-2(1+v)}{1+v^{2}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dx}{x}=\frac{-(1+v^{2})}{v^{3}+3v+2}\quad\Rightarrow\quad \ln|x|+c=-\frac{1}{3}\ln\left|v^{3}+3v+2\right|$$

$$\Rightarrow\quad 3\ln|x|+\ln\left|v^{3}+3v+2\right|=\ln\left|v^{3}x^{3}+3x^{3}v+2x^{3}\right|=-3c=c_{1}\quad\Rightarrow$$

با جایگذاری $v=\frac{y}{x}$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\ln\left|y^{3}+3x^{2}y+2x^{3}\right|=c_{1}$$

$$\Rightarrow\quad y^{3}+3x^{2}y+2x^{3}=c_{2}\quad,\quad c_{2}=e^{c_{1}}$$

۴) $\frac{y}{x}=v$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{-y(x^{2}-xy+y^{2})}{x(x^{2}+xy+y^{2})}\quad\Rightarrow\quad x\frac{dv}{dx}+v=\frac{-v(v^{2}-v+1)}{v^{2}+v+1}$$

$$\Rightarrow\quad 2\frac{dx}{x}=\frac{-(v^{2}+v+1)}{(v^{2}+1)v}dv=-\left(\frac{1}{v^{2}+1}+\frac{1}{v}\right)dv$$

با انتگرال گیری رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\Rightarrow\quad 2\ln|x|=-\mathrm{Arctg}\,v-\ln|v|+c$$

$$\Rightarrow\quad \ln|xy|+\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=c$$

۵) $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{۱ + \left(\frac{y}{x}\right)^۲}$$

معادله همگن مرتبه اول است با $y = vx$:

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} + v = v + \sqrt{۱ + v^۲} \Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{۱ + v^۲}} = \frac{dx}{x}$$

با انتگرال‌گیری رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Rightarrow \quad \ln\left|v + \sqrt{۱ + v^۲}\right| = \ln|x| + c = \ln|Ax| \quad , \quad c = \ln A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} + \sqrt{۱ + \left(\frac{y}{x}\right)^۲} = Ax \Rightarrow \quad y + \sqrt{x^۲ + y^۲} = Ax^۲$$

۶) $$xdy - ydx = \sqrt{xy}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{xy}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}$$

توابع $\frac{y}{x}$ و $\sqrt{\frac{y}{x}}$ همگن مرتبه اول هستند. لذا معادله فوق همگن مرتبه اول است.

$$\frac{y}{x} = v \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} + v = v + \sqrt{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{v}}$$

با انتگرال‌گیری رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow \quad c + \ln|x| = ۲\sqrt{v} = ۲\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = \frac{\sqrt{x}}{۲}(c + \ln|x|)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x}{۴}(c + \ln|x|)^۲$$

۷) $$\frac{dy}{dx} = y' = e^{-\frac{y}{x}} + y$$

معادله فوق همگن نیست.

۸)

$$\begin{cases} M(x,y) = x^۳ + y & \text{همگن نیست} \\ N(x,y) = -x^۲ y & \text{همگن مرتبه ۳} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ معادله فوق همگن نیست

۹)

$$\begin{cases} N = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} & \text{همگن مرتبه اول} \\ M = \sqrt{x-y} - \sqrt{x+y} & \text{همگن مرتبه اول} \end{cases}$$

معادله فوق همگن مرتبه اول است

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow dy = x\frac{dv}{dx} + v \quad : \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{\sqrt{۱+v} + \sqrt{۱-v}}{\sqrt{۱+v} - \sqrt{۱-v}}$$

صورت و مخرج کسر را در $\frac{\sqrt{۱+v} + \sqrt{۱-v}}{\sqrt{۱+v} + \sqrt{۱-v}}$ ضرب می‌کنیم:

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{(\sqrt{۱+v} + \sqrt{۱-v})^۲}{۲v} = \frac{۱ + \sqrt{۱-v^۲}}{v}$$

پس از ساده کردن

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{vdv}{۱-v^۲ + \sqrt{۱-v^۲}} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{vdv}{(۱-v^۲) + \sqrt{۱-v^۲}}$$

$$۱-v^۲ = z^۲ \Rightarrow -vdv = zdz$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{-zdz}{z^۲ + z} = \int\frac{-dz}{۱+z} \Rightarrow \ln|x| + \ln|۱+z| = k$$

$$x(۱+z) = c \Rightarrow x + x\sqrt{۱-v^۲} = c_۰$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{x^۲ - y^۲} = c_۰$$

۱۰)

$$\begin{cases} M(x,y) = -(x^۲ - y^۲) & \text{همگن مرتبه دو} \\ N(x,y) = xy & \text{همگن مرتبه دو} \end{cases}$$

معادله فوق همگن مرتبه ۲ است

$$\frac{y}{x}=v \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}+v=\frac{v}{1-v^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{v^3}{1-v^2} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dx}{x}=\int\frac{(1-v^2)dv}{v^3}$$

با انتگرال‌گیری رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Rightarrow \quad c+\ln|x|=-\frac{1}{2v^2}-\ln|v| \quad \Rightarrow \quad c+\ln|vx|+\frac{1}{2v^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad c+\ln|y|+\frac{x^2}{2y^2}=0$$

۱۱) تابع $-x$ همگن مرتبه اول و تابع $xtg\left(\frac{y}{x}\right)+y$ نیز همگن مرتبه اول است لذا معادله فوق همگن مرتبه اول است.

$$y'=\frac{dy}{dx}=tg\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}+v=v+tgv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=\frac{dv}{(tgv)}$$

$$\Rightarrow c+\ln|x|=\ln|\sin v| \quad \Rightarrow \quad \sin v=xA \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{y}{x}\right)=xA$$

$$\Rightarrow \quad y=x\operatorname{Arc}\sin(Ax)$$

۱۲)

$$\begin{cases} M(x,y)=x^3+y^2\sqrt{x^2+y^2} & \text{همگن مرتبه ۳} \\ N(x,y)=xy\sqrt{x^2+y^2} & \text{همگن مرتبه ۳} \end{cases}$$

معادله فوق همگن مرتبه ۳ است.

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{x^3+y^2\sqrt{x^2+y^2}}{xy\sqrt{x^2+y^2}}$$

با جایگذاری $\frac{y}{x}=v$ و $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$ داریم:

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{1+v^2\sqrt{1+v^2}}{v\sqrt{1+v^2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{dx}{x}=v\sqrt{1+v^2}dv$$

با انتگرال گرفتن، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$c+\ln|x|=\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)\right)^{\frac{3}{2}}$$

جواب هر یک از مسایل مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

۱۳- $x(x+y)y'=x^2+y^2 \quad , \quad y(1)=0$

۱۴- $y'=-\frac{x+2y}{y} \quad , \quad y(1)=1$

۱۵- $(2x-5y)dx+(4x-y)dy=0 \quad , \quad y(1)=4$

۱۶- $y'=\sqrt{\frac{x+y}{2x}} \quad , \quad y(1)=2$

۱۷- $(x^2+y^2)dx-2xydy=0 \quad y(1)=1$

➢ حل:

۱۳) $$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{x(x+y)}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)}$$

معادله همگن مرتبه ۲ است.

با جایگذاری $v = {}^{y}\!/_{x}$ و $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{۱+v^۲}{۱+v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{۱+v}{۱-v}dv \Rightarrow c + \ln|x| = -(۲\ln|۱-v| + v)$$

$$= -\left[۲\ln\left|\frac{x-y}{x}\right| + \frac{y}{x}\right]$$

$$\text{at}: \quad x = ۱ \quad : y = ۰ \Rightarrow c = ۰ \Rightarrow \ln|x| + \frac{y}{x} + ۲\ln\left|\frac{x-y}{x}\right| = ۰$$

$$\frac{y}{x} + \ln\left|x\left(\frac{x-y}{x}\right)^۲\right| = ۰ \Rightarrow y = -x\ln\left|\frac{(x-y)^۲}{x}\right|$$

$$\Rightarrow \quad y = -x\ln\frac{(x-y)^۲}{|x|}$$

۱۴) معادله همگن مرتبه اول است: $\frac{y}{x} = v$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} + v = -\frac{۱+۲\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)} = -\frac{۱+۲v}{v} = -\left(\frac{۱}{v} + ۲\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{-vdv}{(v+۱)۲} \Rightarrow \ln|x| = -\left[\ln|۱+v| + \frac{۱}{۱+v}\right] + c$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|x\left(۱+\frac{y}{x}\right)\right| + \frac{۱}{۱+\frac{y}{x}} = c \Rightarrow \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = c$$

$$\text{at}: x = ۱: \quad y = ۱ \Rightarrow \ln(۲) + ۰/۵ = c \Rightarrow \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = \ln + ۰/۵$$

۱۵)

$$y' = \frac{5y-2x}{4x-y} = \frac{5v-2}{4-v}\ ,\ v = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow\quad x\frac{dv}{dx}+v = \frac{5v-2}{4-v} \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{x} = \frac{(4-v)dv}{(v-1)(v+2)}$$

$$c+\ln|x| = \int\left(\frac{1}{v-1}-\frac{2}{v+2}\right)dv = \ln|v-1|-2\ln|v+2|$$

$$\Rightarrow\quad \ln\left|\frac{x(v+2)^2}{(v-1)}\right| = c \quad\Rightarrow\quad \frac{x(v+2)^2}{(v-1)} = A$$

$$\frac{x(\frac{y}{x}+2)^2}{(\frac{y}{x}-1)} = A \quad\Rightarrow\quad \frac{(y+2x)^2}{(y-x)} = A$$

$$x=1:\quad y=4 \quad\Rightarrow\quad A=12 \quad\Rightarrow\quad \frac{(y+2x)^2}{y-x} = 12$$

۱۶)

$$y' = \sqrt{\frac{x+y}{2x}} \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)}{2}}$$

$$\frac{y}{x} = v \quad\Rightarrow\quad x\frac{dv}{dx}+v = \sqrt{\frac{1+v}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{\frac{1+v}{2}}-v}$$

$$\ln|x| = \int\frac{dv}{\sqrt{\frac{1+v}{2}}-v} \qquad 1+v = 2z^2 \quad\Rightarrow\quad dv = 4zdz$$

$$\Rightarrow\quad \ln|\quad| = \int\frac{4zdz}{(2t+1)(1-z)} = -\frac{2}{3}\left[\ln(2z+1)+2\ln(z-1)\right]+c$$

$$\ln\left|x^3\right|+\ln(2z+1)^2+\ln(z-1)^4 = 3c = \ln A$$

$$\Rightarrow\quad \left|x^3\right|(2z+1)^2(z-1)^4 = A$$

۵) $y = x\int e^{-t^{2}}dt \quad \Rightarrow \quad y' = xe^{-x^{2}} + \int_{0}^{x} e^{-t^{2}}dt$

جاگذاری در معادله: $xy' - y - x^{2}e^{-x^{2}}$

$$= x\left(xe^{-x^{2}} + \int_{0}^{x} e^{-t^{2}}dt\right) - x\int_{0}^{x} e^{-t^{2}}dt - x^{2}e^{-x^{2}} = 0$$

بنابراین تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل است.

۶) $y = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} - \frac{x^{7}}{7!}$

$\Rightarrow \quad y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x \ , \ y'' = -\sin x$

جاگذاری در معادله: $y'' + y = -\sin + \sin x = 0$

۷) $y_{1} = 2x \quad \Rightarrow \quad y_{1}' = 2 \ , \ y_{1}'' = 0$

جاگذاری در معادله: $y'' + y' = 0 + 2 = 2 \quad \Rightarrow$ y_{1} جواب معادله است

$y_{2} = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad y_{2}' = 2 \ , \ y_{2}'' = 0$

جاگذاری در معادله: $y'' + y' = 0 + 2 = 2 \quad \Rightarrow$ y_{2} جواب معادله است

۸) $y_{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1}' = 0$

$y' = y^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad \Rightarrow$ y_{1} جواب معادله است

$y_{2} = \frac{x^{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad y_{2}' = \frac{x}{2}$

جاگذاری در معادله: $\frac{x}{2} = \left(\frac{x^{2}}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow$ y_{2} جواب معادله است

۱۷)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{۱+v^۲}{۲v} \quad , \quad v = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} + v = \frac{۱+v^۲}{۲v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{۲v dv}{۱-v^۲}$$

$$\Rightarrow \quad c + \ln|x| = \ln\left|\frac{۱}{۱-v^۲}\right| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|x(۱-v^۲)\right| = -c$$

$$\Rightarrow \quad x\left[۱-\left(\frac{y}{x}\right)^۲\right] = A$$

$$x = ۱ \quad : \quad y = ۱ \quad \Rightarrow \quad A = ۰$$

$$x\left[۱-\left(\frac{y}{x}\right)^۲\right] = ۰ \quad \Rightarrow \quad y^۲ = x^۲ \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$$

معادلات کامل

در تمرینات زیر برای معادلاتی که کامل هستند جواب عمومی را به دست آورید:

۱- $(۳x^۲ + ۴xy)dx + (۲x^۲ + ۲y)dy = ۰$

۲- $(۳x^۲y + y^۲)dx = (-x^۳ + ۲xy)dy$

۳- $(x - y)dx + (-x + y + ۲)dy = ۰$

۴- $(e^x \cos y - x^۲)dx + (e^y \sin x + y^۲)dy = ۰$

۵- $(۲xy - \tan y)dx + (x^۲ - x\sec^۲ y)dy = ۰$

۶- $y' = y^{\frac{۱}{۲}}$

۷- $ye^{xy}dx + (xe^{xy} + ۱)dy = ۰$

۸- $\cos y\, dx + \sin x\, dy = ۰$

۹- $(y + \cos x)dx + (x + \sin y)dy = ۰$

۱۰- $x(8x^2y-3x)dx+(2x^4+5y)dy=0$

۱۱- $[2x+y\cos(xy)]dx+x\cos(xy)\,dy=0$

۱۲- $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$

➤ حل:

۱) $M(x,y)=3x^2+4xy$ و $N(x,y)=2x^2+2y$ است:

$M_y=4x=N_x \quad \Rightarrow$ معادله کامل است.

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=\int_{y_0}^{y} N(x,s)dx+\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt=c$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=\int_0^y[2(0)+2s]ds+\int_0^x(3t^2+4ty)dx=c$$

$$\Rightarrow \quad y^2\Big|_0^y+(x^3+2x^2y)\Big|_0^x=c \quad \Rightarrow \quad y^2+x^3+2x^2y=c$$

۲) $M(x,y)=3x^2y+y^2$ و $N(x,y)=3x^2+4xy$ است:

$M_y=6xy \quad , \quad N_x=3x^2-2y$

$\Rightarrow \quad M_y\neq N_x \quad \Rightarrow$ معادله کامل نیست

۳) $N(x,y)=-x+y+2 \quad , \quad M(x,y)=x-y$

$M_y=-1=N_x \quad \Rightarrow$ معادله کامل است

$$f(x,y)=\int_{y_0}^{y} N(x,s)ds+\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt$$

$$=\int_0^y(-0+s+2)ds+\int_0^x(t-y)dt$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}+2y\right)+\left(\frac{x^2}{2}-xy\right)=c$$

۴) $N(x,y)=e^y \sin x + y^۲ \quad , \quad M(x,y)=e^x \cos y - x^۲$

$M_y = -e^x \sin y \quad , \quad N_x = e^y \cos x$

$M_y \neq N_x \quad \Rightarrow$ معادله کامل نیست

۵) معادله کامل است لذا به روش دسته‌بندی آن را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \quad (\text{tg}y\, dx + x\sec^۲ y dy) - (x^۲ dy + ۲xydx) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad d(x\text{tg}\, y) - d(x^۲ y) = d(x^۲ y - x\text{tg}\, y)$$

$$\Rightarrow \quad x^۲ y - x\text{tg}\, y = c$$

۶) معادله کامل نیست ولی جدایی‌پذیر است.

$$y' = \frac{dy}{dx} = y^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \quad \Rightarrow \quad ۲\sqrt{y} = x + c \quad : ۴y = (x+c)^۲$$

۷) معادله کامل است. به روش بسته‌بندی آن را حل می‌کنیم:

$$ye^{xy}dx + (xe^{xy} + ۱)dy = ۰$$

$$(ye^{xy}dx + xe^{xy}dy) + dy = ۰ \quad \Rightarrow \quad dy + d(e^{xy}) = d(y + e^{xy}) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad y + e^{xy} = c$$

۸) $N(x,y) = \sin y \quad , \quad M(x,y) = \cos y$

معادله کامل نیست $\quad M_y = -\sin y \neq N_x$

۹) معادله کامل است:

$$\int_۰^x M(t,y)dt + \int_۰^y N(۰,s)ds$$

$$= \int_{\circ}^{x} (y + \cos t)dt - \int_{\circ}^{y} (\sin s)ds = c$$

$$\Rightarrow \quad xy + \sin x - \cos y = c$$

۱۰) معادله کامل است.

$$\int_{\circ}^{x} M(t, y)dt + \int_{\circ}^{y} N(\circ, s)ds = c$$

$$M(x, y) = x(\text{۸}x^{\text{۲}}y - \text{۳۰۰}) = \text{۸}x^{\text{۳}}y - \text{۳}x^{\text{۲}}$$

$$N(x, y) = \text{۲}x^{\text{۴}} + \text{۵}y$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\circ}^{x} (\text{۸}x^{\text{۳}}y - \text{۳}x^{\text{۲}})dx + \int_{\circ}^{y} \text{۵}ydy = c \quad \Rightarrow \quad \text{۴}x^{\text{۴}}y - \text{۲}x^{\text{۳}} + \text{۵}y^{\text{۲}} = A$$

$$A = \text{۲}c$$

۱۱) معادله کامل است:

$$\Rightarrow \quad \text{۲}xdx + y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy = \circ \quad \Rightarrow \quad d[y\sin(xy)] + dx^{\text{۲}}$$

$$= d[y\sin(xy) + x^{\text{۲}}] = \circ$$

$$\Rightarrow \quad x^{\text{۲}} + y\sin xy = c$$

۱۲) معادله کامل نیست.

جواب هر یک از مسائل مقدار اولیه را به دست آورید:

۱۳- $(\text{۲}x\cos y + \text{۳}x^{\text{۲}}y)dx + (x^{\text{۳}} - x^{\text{۲}}\sin y - y)dy = \circ \quad , \quad y(\circ) = \text{۲}$

۱۴- $(x - y)dx + (-x + y + \text{۲})dy = \circ \quad , \quad y(\text{۱}) = \text{۱}$

۱۵- $(ye^{xy} - \text{۲}y^{\text{۳}})dx + (xe^{xy} - \text{۶}xy^{\text{۲}} - \text{۲}y)dy = \circ \quad , \quad y(\circ) = \text{۲}$

۱۶- $(\text{۱} - xy)^{-\text{۲}}dx + \left[y^{\text{۲}} + x^{\text{۲}}(\text{۱} - xy)^{-\text{۲}}\right]dy = \circ \quad , \quad y(\text{۴}) = \text{۱}$

۱۷- $\left(\dfrac{3-y}{x^2}\right)dx+\left(\dfrac{y^2-2x}{xy^2}\right)dy=0 \quad , \quad y(-1)=2$

۱۸- $(x^2+y^2)dx+2xy\,dy=0 \quad , \quad y(1)=-1$

➢ حل:

۱۳) $N_x=3x^2-2x\sin y \quad , \quad M_y=-2x\sin y+3x^2$

پس $M_y=N_x$ و معادله کامل است.

$$\int_0^x M(t,y)dt+\int_0^y N(0,s)ds=0$$

$$\int_0^x (2t\cos y+3t^2y)dx+\int_0^y (0-y)dy=c$$

$$(x^2\cos y+x^3y)+\left(-\frac{y^2}{2}\right)=c$$

$$x=0 \quad : y=2 \quad \Rightarrow \quad c=-2 \quad \Rightarrow \quad x^2\cos y+x^3y-\frac{y^2}{2}+2=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2(\cos y+xy)-\frac{y^2}{2}+2=0$$

۱۴) معادله کامل است.

$$\int_0^x M(t,y)dt+\int_0^y N(0,s)ds=c$$

$$\int_0^x (t-y)dt+\int_0^y (0+s+2)ds=c \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}+2y=c$$

$$x=1 \quad : y=1 \quad \Rightarrow \quad c=2 \quad \Rightarrow \quad x^2-2xy+y^2+4y-4$$

$$=(x-y)^2+4(y-1)=0$$

۱۵) معادله کامل است.

با توجه به مسایل قبل: $\int_{0}^{x}(ye^{ty}-2y^{3})dt+\int_{0}^{y}(-2s)ds=c$

$\Rightarrow \quad e^{xy}-2xy^{3}-y^{2}=c$

$x=0 \quad : y=2 \quad \Rightarrow \quad c=-3 \quad \Rightarrow \quad e^{xy}-y^{2}(2xy+1)+3=0$

۱۶) معادله کامل است.

با توجه به مسایل قبل: $\int_{0}^{x}(1-ty)^{-2}dx+\int_{0}^{y}s^{2}ds=c$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y(1-xy)}-\frac{1}{y}+\frac{1}{3}y^{3}-\frac{1}{3}=c$$

$x=4 \quad : y=1 \quad \Rightarrow \quad c=-\frac{4}{3} \Rightarrow \quad \frac{3}{y(1-xy)}-\frac{3}{y}+y^{3}+3=0$

۱۷) معادله کامل است.

$$\int_{1}^{x}\left(\frac{3-y}{x^{2}}\right)dx+\int_{1}^{y}\left(1-\frac{2}{y^{2}}\right)dy=c$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{y-3}{x}-\frac{(y-3)}{1}\right]+\left[y+\frac{2}{y}-3\right]=c \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{x}+\frac{2}{y}-c=0$$

$x=-1 \quad : y=2 \quad : \quad \Rightarrow \quad c=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{x}+\frac{2}{y}-2=0$

۱۸) معادله کامل است.

$$x^{2}dx+(y^{2}dx+2xydy)=0$$

$$d\left(\frac{1}{3}x^{3}\right)+d(y^{2}x)=d(x^{3}+3y^{2}x)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^{3}+3y^{2}x=c$$

$x=1 \quad : \quad y=-1 \quad \Rightarrow \quad c=4 \quad \Rightarrow \quad x^{3}+3y^{2}x-4=0$

معادلات خطی

در تمرینات زیر معادلاتی را که خطی هستند مشخص کرده و آن‌ها را حل کنید:

۱- $y' + y\cot x = \frac{۱}{\sin x}$

۲- $yy' - ۷y = ۶x$

۳- $(x^{۲} + y^{۲})dx - ۲xy\,dy = ۰$

۴- $(\sin^{۲} x - y)dx - \tan x\,dy = ۰$

۵- $(x^{۴} + ۲y)dx - xdy = ۰$

۶- $y' + \frac{۱}{\sin x} y = y^{۲}$

۷- $۲y\,dx = (x^{۲} - ۱)(dx - dy)$

۸- $\cos x \frac{dy}{dx} = ۲ + ۲y\sin x$

۹- $dx - (۱ + ۲x\tan y)dy = ۰$

۱۰- $y' = y + ۳x^{۲}e^{x}$

۱۱- $(y - x + xy\cot x)dx + xdy = ۰$

۱۲- $y' - \frac{۳}{x - ۱} y = (x - ۱)^{۴}$

➤ حل:

۱)

$$P(x)=\cot x \qquad q(x)=\frac{۱}{\sin x}$$

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\ln\sin x}=\sin x$$

$$y=\frac{۱}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx+c\right]=\frac{۱}{\sin x}\left[\int\left(\frac{۱}{\sin x}\right)(\sin x)dx+c\right]=\frac{(x+c)}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \quad y\sin x-x=c$$

۲) خطی نیست.

۳)

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=y'=\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲xy}$$ خطی نیست

۴)

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{\sin^{۲}x-y}{tgx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}+y\cot x=\sin x\cos x$$

$$P(x)=\cot x \quad \Rightarrow \quad \mu(x)=e^{\int P(x)dx}=\sin x \quad \left(\int\cot u\,du=\ln\sin u\right)$$

$$y=\frac{۱}{\sin x}\left[\int\sin^{۲}x\cos x+c\right]=\frac{\frac{۱}{۳}\sin^{۳}x+c}{\sin x}=\frac{۱}{۳}\sin^{۲}x+\frac{c}{\sin x}$$

۵)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^{۴}+۲y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}-\left(\frac{۲}{x}\right)y=x^{۳}$$

$$p(x)=-\frac{۲}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu(x)=e^{\int p(x)dx}=x^{-۲}$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{۱}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx+c\right]=x^{۲}\left[\int x^{۳}(x^{-۲})dx+c\right]=x^{۲}\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}+c\right)$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{۱}{۴}x^{۴}+cx^{۲}$$

۶) خطی نیست

۷) معادله خطی است

$$۲y=(x^۲-۱)\left(۱-\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow y'+\left(\frac{۲}{x^۲-۱}\right)y=۱$$

$$p(x)=\frac{۲}{x^۲-۱} \Rightarrow \mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\ln\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)}=\frac{x-۱}{x+۱}$$

$$\Rightarrow y=\frac{x+۱}{x-۱}\left[\int\frac{x+۱-۲}{x+۱}dx+c\right]=\frac{x+۱}{x-۱}\left[x-۲\ln|x+۱|+c\right]$$

$$\Rightarrow y=\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)\left(x-۲\ln|x+۱|+c\right)$$

۸) $y'-\left(\frac{۲\sin x}{\cos x}\right)y=\frac{۲}{\cos x}$ معادله خطی است

$$p(x)=\frac{-۲\sin x}{\cos x}=-۲tgx \Rightarrow \mu(x)=e^{\int p(x)dx}=\cos^۲ x$$

$$y=\frac{۱}{\cos^۲ x}\left[\int ۲\cos x\,dx+c\right]=\sec^۲ x(۲\sin x+c)$$

۹) $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{۱}{۱+۲xtgy}$ خطی نیست

اگر معادله برحسب $\frac{dx}{dy}$ نوشته شود:

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}-(x)(۲tgy)=۱$$

$$p(y)=-۲tgy \Rightarrow \mu(y)=e^{\int p(y)dy}=\cos^۲ y$$

$$x=\frac{۱}{\mu(y)}\left(\int q(y)\mu(y)dy+c\right)=\frac{۱}{\cos^۲ y}\left(\frac{۲y+\sin ۲y}{۴}+c\right)$$

$$\Rightarrow ۴x\cos^۲ y-۲y-\sin ۲y-۴c\cos^۲ y=۰$$

۱۰)معادله خطی است

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} - y = ۳x^۲e^x$$

$$p(x) = -۱ \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{-x}$$

$$y = \frac{۱}{e^{-x}}\left[\int (۳x^۲e^x)(e^{-x})dx + c\right] = \frac{۱}{e^{-x}}(x^۳ + c) = x^۳e^x + ce^x$$

۱۱)

$$\Rightarrow \quad y' + \left(\cot x + \frac{۱}{x}\right)y = ۱$$

$$q(x) = ۱ \quad , \quad p(x) = \frac{۱}{x} + \cot x \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = x\sin x$$

$$y = \frac{۱}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx + c\right] = \frac{۱}{x\sin x}\left[\int x\sin x dx + c\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-x\cos x + \sin x + c}{x\sin x}$$

۱۲) معادله خطی است.

$$p(x) = \frac{-۳}{x-۱} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = (x-۱)^{-۳}$$

$$y = (x-۱)^۳\left[\int (x-۱)dx + c\right] = (x-۱)^۳\left[\frac{۱}{۲}(x-۱)^۲ + c\right]$$

$$= \frac{۱}{۲}(x-۱)^۵ + c(x-۱)^۳$$

جواب هر یک از مسایل مقدار اولیه زیر را به‌دست آورید.

۱۳- $(۱+x^۲)y' + ۲xy = -۲x \qquad y(۰) = -۱$

۱۴- $(x-۱)y' - ۳y = (x-۱)^۵ \qquad , y(-۱) = ۱۶$

۱۵- $(۱-x^۲)y' + xy = x \qquad , \qquad y(۰) = ۲$

۱۶- $y^۲dx + (۳xy-۱)dy = ۰ \qquad , \qquad y(۱) = ۱$

۹- نشان دهید تابع $y=f(x)=\begin{cases} \circ & , \quad x\le \circ \\ x^{\text{۲}} & , \quad x>\circ \end{cases}$ جواب معادله $(y')^{\text{۲}}-\text{۴}y=\circ$ در بازه $(-\infty,+\infty)$ است.

➢ **حل:**

$$y=f(x)=\begin{cases} \circ & x\le \circ \\ x^{\text{۲}} & x>\circ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y'=\begin{cases} \circ & x\le \circ \\ \text{۲}x & x>\circ \end{cases}$$

$$x\le \circ \quad \Rightarrow \quad (y')^{\text{۲}}-\text{۴}y=\circ-\circ=\circ$$

$$x>\circ \quad \Rightarrow \quad (y')^{\text{۲}}-\text{۴}y=(\text{۲}x)^{\text{۲}}-\text{۴}x^{\text{۲}}=\circ$$

بنابراین تابع داده شده جواب معادله است.

۱۰- نشان دهید معادله $|y'|+|y|+\text{۳}=\circ$ دارای جواب نیست.

➢ **حل:**

$$|y'|\ge \circ \quad , \quad |y|\ge \circ \quad \Rightarrow \quad |y'|+|y|+\text{۳}\ge \text{۳}$$

بنابراین معادله داده شده دارای جواب نیست.

۱۱- جواب منحصر به فرد معادله $(y')^{\text{۲}}+\text{۴}y^{\text{۲}}=\circ$ را تعیین کنید.

➢ **حل:**

همواره: $(y')^{\text{۲}} \quad , \quad \text{۴}y^{\text{۲}}\ge \circ$

بنابراین مجموع دو عبارت فوق موقعی برابر صفر می‌شود که هر دو صفر شوند.

$$(y')^{\text{۲}}=\text{۴}y^{\text{۲}}=\circ \quad \Rightarrow \quad y'=y=\circ$$

۱۷- $\frac{dr}{d\theta}+r\tan\theta=\cos^۲\theta \quad , \quad r(\frac{\pi}{۴})=۱$

۱۸- $y'-y=b(x) \quad , \quad y(۰)=۱$

که: $b(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ x & x\geq ۰ \end{cases}$

➢ **حل:**

۱۳) $y'+\left(\frac{۲x}{۱+x^۲}\right)y=\frac{-۲x}{۱+x^۲}$

$$p(x)=\frac{۲x}{۱+x^۲} \Rightarrow \mu(x)=e^{\int p(x)dx}=۱+x^۲$$

$$y=\frac{۱}{۱+x^۲}\left[-\int\left(\frac{۲x}{۱+x^۲}\right)(۱+x^۲)dx+c\right]=\frac{۱}{(۱+x^۲)}\left(-\int ۲x\,dx+c\right)=\frac{-x^۲+c}{۱+x^۲}$$

$$x=۰ \quad :y=-۱ \Rightarrow c=-۱ \Rightarrow y=\frac{-(۱+x^۲)}{۱+x^۲}=-۱$$

۱۴) با توجه به حل مسأله ۱۲: $y=\frac{۱}{۲}(x-۱)^۵+c(x-۱)^۳$

$$x=-۱ \quad :y=۱۶ \Rightarrow c=-۴ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x-۱)^۵-۴(x-۱)^۳$$

$$۲y-(x-۱)^۵+۸(x-۱)^۳=۰$$

۱۵) $y'+\left(\frac{x}{۱-x^۲}\right)y=\frac{x}{۱-x^۲}$

$$p(x)=\frac{x}{۱-x^۲} \Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{xdx}{۱-x^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$y=\frac{۱}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx+c\right)=\sqrt{۱-x^۲}\left(\int\left(\frac{x}{۱-x^۲}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\right)dx+c\right)$$

$$u=۱-x^۲ \quad\Rightarrow\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{۱-x^۲}(۱-x^۲)}=-\frac{۱}{۲}\int u^{-\frac{۳}{۲}}du=\frac{۱}{\sqrt{u}}=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$\Rightarrow\quad y=\sqrt{۱-x^۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}+c\right)=۱+c\sqrt{۱-x^۲}$$

$$x=۰\quad :y=۲\quad\Rightarrow\quad c=۱\quad :y=۱+\sqrt{۱-x^۲}$$

۱۶) معادله اگر برحسب $\frac{dx}{dy}$ نوشته شود خطی است.

$$\frac{dx}{dy}+\left(\frac{۳}{y}\right)x=\frac{۱}{y^۲}\qquad p(y)=\frac{۳}{y}\quad\Rightarrow\quad \mu(y)=e^{\int p(y)dy}=y^۳$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{۱}{y^۳}\left[\int(y^۳)\left(\frac{۱}{y^۲}\right)dy+c\right]=\frac{۱}{۲y}+\frac{c}{y^۳}\quad\Rightarrow\quad xy^۳-\frac{۱}{۲}(y^۲)-c=۰$$

$$x=۱\quad :y=۱\quad\Rightarrow\quad c=\frac{۱}{۲}\quad\Rightarrow\quad xy^۳-\frac{۱}{۲}y^۲-\frac{۱}{۲}=۰$$

۱۷)

$$\frac{dr}{d\theta}+r\,tg\theta=\cos^۲\theta$$

$$p(\theta)=tg\theta\quad\Rightarrow\quad \mu(\theta)=e^{\int p(\theta)d\theta}=e^{\ln\sec\theta}=\sec\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$$

$$q(\theta)=\cos^۳\theta$$

$$r=\frac{۱}{\mu(\theta)}\left(\int q(\theta)\mu(\theta)d\theta+c\right)=\cos\theta\left(\int\frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta}d\theta+c\right)$$

$$=\cos\theta(\sin\theta+c)=\sin\theta\cos\theta+c\cos\theta$$

$$\theta=\frac{\pi}{۴}\quad :r=۱\quad\Rightarrow\quad c=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad\Rightarrow\quad r=\cos\theta\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\sin\theta\right)$$

۱۸)

$$y'-y=b(x)$$

$$x\geq \circ \quad : b(x)=x \quad \Rightarrow \quad q(x)=x$$

$$p(x)=-\text{۱} \quad \Rightarrow \quad \mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-x}$$

$$y=e^{x}\int\frac{x}{e^{x}}dx+c=\frac{-(\text{۱}+x)}{e^{x}}$$

$$=e^{x}\left[\frac{-(\text{۱}+x)}{e^{x}}+c\right]=-(\text{۱}+x)+ce^{x}$$

$$x=\circ \quad : y=\text{۱} \quad \Rightarrow \quad c=\text{۲} \quad \Rightarrow \quad y-\text{۲}e^{x}+x+\text{۱}=\circ$$

معادلات برنولی

جواب عمومی معادلات برنولی زیر را پیدا کنید:

۱- $y(\text{۶}y^{\text{۲}}-x-\text{۱})dx+\text{۲}xdy=\circ$

۲- $x(\text{۱}-x^{\text{۲}})y'+(\text{۲}x^{\text{۲}}-\text{۱})y=x^{\text{۳}}y^{\text{۲}}$

۳- $\dfrac{dy}{dx}=y\cot x+\dfrac{y^{\text{۲}}}{\sin x}$

۴- $y'-\text{۲}xy=\text{۴}xy^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$

۵- $y'+\dfrac{\text{۱}}{x}y=-\text{۲}xy^{\text{۲}}$

۶- $xy'+\dfrac{y}{\text{۲}\ln x}=y^{\text{۲}}$

۷- $dy+(\text{۴}y-\text{۸}y^{-\text{۳}})x\,dx=\circ$

۸- $y'-\dfrac{\text{۱}}{x}y=-\dfrac{\text{۱}}{\text{۲}y}$

➢ **حل:**

۱)

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{۶}{۲x}\right)y^{۳}-y\left(\frac{x}{۲x}+\frac{۱}{۲x}\right)=۰$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}-\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲x}\right)y=\frac{-۳y^{۳}}{x}$$

با مقایسه‌ی این معادله با معادله برنولی:

$$p(x)=-\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲x}\right)y \quad , \quad q(x)=\frac{-۳}{x}$$

$$u=y^{۱-n}=y^{۱-۳}=\frac{۱}{y^{۲}} \quad \Rightarrow \quad u'=\frac{du}{dy}=\frac{-۲y'}{y^{۳}}$$

با تقسیم دو طرف معادله به $y^{۳}$:

$$y'y^{-۳}-\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲x}\right)y^{-۲}=\frac{-۳}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{-۱}{۲}u'-u\left(\frac{x+۱}{۲x}\right)=\frac{-۳}{x}$$

$$\Rightarrow \quad u'+u\left(\frac{x+۱}{x}\right)=\frac{۶}{x}$$

$$p(x)=\frac{x+۱}{x} \quad , \quad q(x)=\frac{۶}{x}, \quad \mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{x+\ln x}=xe^{x}$$

$$u=\frac{۱}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx+c\right)=\frac{e^{-x}}{x}\left[\int\left(\frac{۶}{x}\right)(xe^{x})dx+c\right]$$

$$=\frac{e^{-x}}{x}\left[۶e^{x}+c\right]=\frac{۶}{x}+\frac{c}{e^{x}} \quad \Rightarrow \quad xe^{x}u=۶e^{x}+cx$$

$$u=y^{-۲} \quad \Rightarrow \quad xe^{x}y^{-۲}=۶e^{x}+cx \quad \Rightarrow \quad y^{۲}=\frac{xe^{x}}{۶e^{x}+cx}$$

۲) دو طرف معادله را بر $xy^{۲}(۱-x^{۲})$ تقسیم می‌کنیم:

$$y'y^{-۲}+\frac{(۲x^{۲}-۱)}{x(۱-x^{۲})}y^{-۱}=\frac{x^{۲}}{۱-x^{۲}}$$

$$u=y^{-۱} \quad \Rightarrow \quad u'=\frac{du}{dy}=-y'y^{-۲} \quad \Rightarrow \quad u'-\frac{(۲x^{۲}-۱)}{x(۱-x^{۲})}u=\frac{-x^{۲}}{۱-x^{۲}}$$

معادله فوق خطی است لذا:

$$P(x)=\frac{-(۲x^{۲}-۱)}{x(۱-x^{۲})} \quad\Rightarrow\quad \mu(x)=e^{\int p(x)dx}=x\sqrt{۱-x^{۲}}$$

$$u=\frac{۱}{x\sqrt{۱-x^{۲}}}\left[\int x\sqrt{۱-x^{۲}}\times\left(-\frac{x^{۲}}{۱-x^{۲}}\right)dx+c\right]$$

$$=\frac{۱}{x\sqrt{۱-x^{۲}}}\left[\int -\frac{x^{۳}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx+c\right]$$

انتگرال فوق را با استفاده از تغییر متغیر $z^{۲}=۱-x^{۲}$ تعیین می‌کنیم داریم:

$$-\int\frac{x^{۳}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx=\frac{x^{۲}}{۳}\sqrt{x^{۲}-۱}+\frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۲}-۱}$$

$$\Rightarrow\quad u=\frac{۱}{y}=\frac{x}{۳}+\frac{۲}{۳x}+\frac{c}{x\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

۳) $y'-y\cot x=y^{۲}(\csc x)$

$$\Rightarrow\quad y'y^{-۲}-y^{-۱}\cot x=\csc x \qquad u=y^{-۱}\quad\Rightarrow\quad u'=-y^{-۲}y'$$

$$-u'-u\cot x=\frac{۱}{\sin x}\quad\Rightarrow\quad u'+(\cot x)u=-\csc x$$

$$p(x)=\cot x\quad\Rightarrow\quad \mu(x)=\sin x$$

$$u=\frac{۱}{\sin x}\left[\int \sin x\left(\frac{-۱}{\sin x}\right)dx+c\right]=\frac{۱}{\sin x}(-x+c)\quad\Rightarrow\quad u=\frac{۱}{y}=\frac{-x+c}{\sin x}$$

$$\Rightarrow\quad y=\frac{\sin x}{c-x}$$

۴) $n=\frac{1}{2}\quad : u=y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u'=\frac{1}{2}y'y^{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow y'y^{-\frac{1}{2}}-2xy^{\frac{1}{2}}=4x \Rightarrow u'-xu=2x \qquad q(x)=2x$$

$$p(x)=-x \Rightarrow \mu(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$u=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)(2x)dx+c\right]=e^{\frac{x^2}{2}}\left(-2e^{-\frac{x^2}{2}}+c\right)=-2+ce^{\frac{x^2}{2}}=\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow y=\left(ce^{\frac{x^2}{2}}-2\right)^2$$

۵) $y'+\left(\frac{1}{x}\right)y=-2xy^2 \Rightarrow y'y^{-2}+\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)=-2x$

$$u=y^{-1} \Rightarrow u'=-y'y^{-2} \Rightarrow -u'+\left(\frac{1}{x}\right)u=-2x$$

$$\Rightarrow u'-\left(\frac{1}{x}\right)u=2x \qquad p(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow \mu(x)=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

$$u=\frac{1}{y}=x\left[\int(2x)\left(\frac{1}{x}\right)dx=x(2x+c) \Rightarrow y=\frac{1}{x(2x+c)}\right.$$

۶) $xy'-\frac{y}{2\ln x}=y^2 \Rightarrow xy'+\frac{y}{2\ln x}=y^2$

با تقسیم دو طرف معادله بر xy^2:

$$y'y^{-2}-\frac{y^{-1}}{2x\ln x}=\frac{1}{x}\quad : \quad u=y^{-1} \Rightarrow u'=-y'y^{-2}$$

$$\Rightarrow u'+\frac{u}{2x\ln x}=-\frac{1}{x}$$

معادله فوق خطی است لذا:

$$p(x)=\frac{۱}{۲x\ln x} \Rightarrow \mu(x)e^{\frac{۱}{۲}\ln(\ln x)}=\sqrt{\ln x}$$

$$\Rightarrow \quad u=\frac{۱}{y}=\frac{۱}{\sqrt{\ln x}}\left[\int\left(-\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)dx+c\right]=-\frac{۲}{۳}\ln x+c(\ln x)^{-۱/۲}=\frac{۱}{y}$$

۷)

$$\frac{dy}{dx}+(۴y-۸y^{-۳})x=۰ \Rightarrow y'y^{۳}+۴xy^{۴}=۸x$$

$$u=y^{۴} \Rightarrow u'=\frac{du}{dy}=۴y^{۳}y' \Rightarrow \frac{۱}{۴}u'+۴xu=۸x$$

$$\Rightarrow \quad u'+(۱۶x)u=۳۲x$$

$$P(x)=۱۶x \Rightarrow \mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{۸x^{۲}}$$

معادله داده شده خطی است.

$$u=y^{۴}=e^{-۸x^{۲}}\left[\int(۳۲x)(e^{۸x^{۲}})dx+c\right]=e^{-۸x^{۲}}(۲e^{۸x^{۲}}+c)$$

$$\Rightarrow \quad y^{۴}=۲+\frac{c}{e^{۸x^{۲}}} \Rightarrow y=\left(۲+\frac{c}{e^{۸x^{۲}}}\right)^{\frac{۱}{۴}}$$

۸)

$$y'y-(\frac{۱}{x})y^{۲}=-\frac{۱}{۲} \qquad u=y^{۲} \Rightarrow u'=۲yy'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}u'-(\frac{۱}{x})u=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow u'-(\frac{۱}{x})u=-۱$$

$$q(x)=-۱\ , \quad P(x)=\frac{-۲}{x} \Rightarrow \mu(x)=e^{-۲\ln x}=x^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow \quad u=y^{۲}=x^{۲}\left[\int\left(-\frac{۱}{x^{۲}}\right)dx+c\right]=x^{۲}\left(\frac{۱}{x}+c\right)=x+cx^{۲}$$

۹- جواب معادله برنولی زیر را با شرط داده شده به‌دست آورید.

$$x(x^2-1)y'-y=x^3y^2 \quad , \quad y(2)=-\frac{1}{2}$$

حل:

با تقسیم دو طرف بر $xy^2(x^2-1)$

$$\Rightarrow y'y^2-\left[\frac{1}{x(x^2-1)}\right](y^{-1})=\frac{x^3}{x(x^2-1)}$$

$$u=y^{-1} \quad \Rightarrow \quad u'=-y'y^{-2} \quad \Rightarrow \quad u'+\left[\frac{1}{x(x^2-1)}\right]u=-\frac{x^2}{x^2-1}$$

$$P(x)=\frac{1}{x(x^2-1)} \quad \Rightarrow \quad \mu(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$q(x)=\frac{-x^2}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad u=y^{-1}=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx+c\right]$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(c-\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{cx}{\sqrt{x^2-1}}-x=\frac{1}{y}$$

$$: \quad x=2 : y=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{x}$$

عامل انتگرال‌ساز

هر یک از معادلات زیر دارای عامل انتگرال‌سازی هستند که تابعی است فقط از x یا فقط از y. برای هر یک عامل انتگرال‌ساز را به‌دست آورده و سپس جواب عمومی معادله را پیدا کنید.

۱- $(x^2-2y)dx+xdy=0$

۲- $(4x^2y^3-2y)dx+(3x^3y^2-x)dy=0$

۳- $(y^2+x^2+y)dy+xydy=0$

۴- $۲x\left(y-e^{-x^{۲}}\right)dx+dy=۰$

۵- $(x^{۴}+y^{۴})dx-xy^{۳}dy=۰$

۶- $(x^{۲}-y^{۲}+x)dx+۲xydy=۰$

۷- $y(x+y+۱)dx+x(x+۳y+۲)dy=۰$

۸- $(۳y-۲xe^{-۳x})dx+dy=۰$

۹- $y(x+y)dx+(x+۲y-۱)dy=۰$

۱۰- $(y-۲x)dx-xdy=۰$

➢ **حل:**

۱)

$$\begin{cases}M=x^{۲}-۲y\\ N=x\end{cases}\Rightarrow\quad \frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-۲-۱}{x}=-\frac{۳}{x}$$

$$\mu(x)=e^{\int -\frac{۳}{x}dx}=\frac{۱}{x^{۳}}$$

طرفین معادله در $\frac{۱}{x^{۳}}$ ضرب می‌شوند:

$$\frac{(x^{۲}-۲y)}{x^{۳}}dx+\frac{x}{x^{۳}}dy=۰\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{۱}{x}-\frac{۲y}{x^{۳}}\right)dx+\frac{dy}{x^{۲}}=۰$$

معادله فوق کامل است:

$$\int_{۱}^{x}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۲y}{x^{۳}}\right)dx+\int_{۰}^{y}dy=c\quad\Rightarrow\quad\ln x+\frac{y}{x^{۲}}=c$$

۲)

$$\begin{cases}M=۴x^{۲}y^{۳}-۲y\\ N=۳x^{۳}y^{۲}-x\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}M_y=۱۲x^{۲}y^{۲}-۲\\ N_x=۹x^{۲}y^{۲}-۱\end{cases}\Rightarrow\quad\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{۱}{x}$$

$$\Rightarrow\quad\mu(x)=e^{\int\frac{۱}{x}dx}x=x$$

طرفین معادله در x ضرب می‌شوند:

$$(۴x^۳y^۳-۲xy)dx+(۳x^۴y^۲-x^۲)dy=۰$$

$$\Rightarrow\quad \int_۰^x(۴x^۳y^۳-۲xy)dx+\int_۰^y(۰)dy=c\quad\Rightarrow\quad x^۴y^۳-x^۲y=c$$

۳)

$$\begin{cases}M=xy\\ N=y^۲+x^۲+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M_y=x\\ N_x=۲x\end{cases}\Rightarrow\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-x}{x^۲+y^۲+y}$$

چون رابطه فوق دو متغیر دارد، لذا $\frac{N_x-M_y}{M}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{x}{xy}=\frac{۱}{y}$$

$$\mu(y)=e^{\int\frac{dy}{y}}=y\quad\Rightarrow\quad\mu(y)=y$$

$$(y^۳+x^۲y+y^۲)dy+xy^۲dx=۰\quad\Rightarrow\quad\int_۰^x xy^۲dx+\int_۰^y(y^۳+y^۲)dy=c$$

$$\Rightarrow\quad ۳y^۴+۴y^۳+۶x^۲y^۲=c$$

۴)

$$\begin{cases}M(x,y)=۲x(y-e^{-x^۲})\ \Rightarrow\ M_y=۲x\\ N(x,y)=۱\ \Rightarrow\ N_x=۰\end{cases}\Rightarrow\frac{M_y-N_x}{N}=۲x$$

$$\mu(x)=e^{\int ۲xdx}=e^{x^۲}$$

معادله در $e^{x^۲}$ ضرب می‌شود:

$$۲xe^{x^۲}(y-e^{-x^۲})dx+e^{x^۲}dy=۰$$

$$\int_۰^x(۲xye^{x^۲}-۲x)dx+\int_۰^y dy=۰\quad\Rightarrow\quad y(۱+e^{x^۲})-x^۲=c\quad\Rightarrow\quad y=\frac{c+x^۲}{۱+e^{x^۲}}$$

در تمرینات ۱۲ تا ۱۵ نشان دهید خانواده توابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل نظیر است (c_1, c_2 ثابت‌های دلخواه هستند).

-۱۲ $(\cos 2x)y' + (2\sin 2x)y = 2 \quad , \quad y = c_1 \cos 2x + \sin 2x$

-۱۳ $2y\,x\,dy = (y^2 - x)dx \quad , \quad y^2 = c_1 x - x\ln x$

-۱۴ $y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad , \quad y = \ln\cos(x - c_1) + c_2$

-۱۵ $y'' - 6y' + 9y = 0 \quad , \quad y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$

➢ **حل:**

۱۲) $y = c_1 \cos 2x + \sin 2x \quad \Rightarrow \quad y' = -2c_1 \sin 2x + 2\cos 2x$

جاگذاری در معادله: $(\cos 2x)y' + (2\sin 2x)y =$

$= (\cos 2x)(-2c_1 \sin 2x + 2\cos 2x) + (2\sin 2x)(c_1 \cos 2x + \sin 2x)$

$= -2c_1 \sin 2x \cos 2x + 2\cos^2 2x + 2c_1 \sin 2x \cos 2x + 2\sin^2 2x = 0 + 2 = 2$

۱۳) $y^2 = c_1 x - x\ln x$

$\quad \Rightarrow \quad 2ydy = c_1 dx - (\ln x + 1)dx$

$\quad \Rightarrow \quad 2ydy = (c_1 - \ln x - 1)dx$

$2yx\,dy = x(c_1 - \ln x - 1)dx$

$(y^2 - x)dx = (c_1 x - x\ln x - x)dx = x(c_1 - \ln x - 1)dx$

$\Rightarrow \quad 2yx\,dy = (y^2 - x)dx$

۱۴) $y = \ln\cos(x - c_1) + c_2 \quad \Rightarrow \quad y' = -\dfrac{\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)} = -\tan(x - c_1)$

$y'' = -\left[1 + \tan^2(x - c_1)\right]$

۵) $(x^۴+y^۴)dx - xy^۳dy = ۰$

$$\Rightarrow \quad \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{۴y^۳-(-y^۳)}{-xy^۳} = -\frac{۵}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int -\frac{۵}{x}dx} = \frac{۱}{x^۵}$$

معادله در $\mu(x)$ ضرب می‌شود:

$$\left(\frac{۱}{x}+\frac{y^۴}{x^۵}\right)dx - \frac{y^۳}{x^۴}dy = ۰$$

$$\Rightarrow \quad \int_۱^x (x^{-۱}+x^{-۵}y^۴)dx - \int_۱^۳ y^۳dy = c$$

$$\Rightarrow \quad \ln x - \frac{۱}{۴}\left(\frac{y}{x}\right)^۴ + \frac{۱}{۴} = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۴\ln x - \left(\frac{y}{x}\right)^۴ + ۱ = ۰$$

۶) $$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(-۲y)-۲y}{۲xy} = -\frac{۲}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int -\frac{۲}{x}} = \frac{۱}{x^۲}$$

$$\Rightarrow \quad \left[۱+\frac{۱}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^۲\right]dx + \frac{۲y}{x}dy = ۰ \quad \Rightarrow \quad \int_۱^x \left[۱+\frac{۱}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^۲\right] + \int_۰^y ۲ydy = c$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{۱}{x}\right)y^۲ + \ln x + x = c$$

۷) $$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{(۲x+۳y+۲)-(۱+x+۲y)}{y(x+y+۱)} = \frac{۱}{y} \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int \frac{dy}{y}} = y$$

اگر معادله فوق در y ضرب شود:

$$y^۲(x+y+۱)dx + xy(x+۳y+۲)dy = ۰$$

$$\int_۰^x y^۲(x+y+۱)dx + \int_۰^y (۰)dy = c$$

$$\Rightarrow \quad x^۲y^۲ + ۲(y^۳+y^۲)x = A \quad \Rightarrow \quad A = ۲c$$

۸)
$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(3-0)}{1} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{3x}$$
$$(3ye^{3x} - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$$
$$d(ye^{3x}) - d(x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad ye^{3x} - x^2 = c$$

۹)
$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(x+2y)-1}{x+2y-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^x$$
$$e^x y(x+y)dx + (x+2y-1)e^x dy = 0$$
$$\Rightarrow \quad d(y^2e^x) + d(xye^x - ye^x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x(x+y-1)y = c$$

۱۰)
$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1-(-1)}{-x} = -\frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_1^x \left(\frac{y}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx - \int_0^y dy = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} + 2\ln x = c$$

۱۱- تحقیق کنید که هر یک از توابع داده شده زیر یک عامل انتگرال‌ساز معادله $ydx - xdy = 0$ است و سپس با استفاده از هر یک از این توابع، جواب معادله را به‌دست آورید.

الف) $\mu(y) = \frac{1}{y^2} \quad , \quad y \neq 0$

ب) $\mu(x,y) = \frac{1}{xy} \quad , \quad x \neq 0 \ , \ y \neq 0$

ت) $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \qquad x \neq 0 \ , \ y \neq 0$

ث) $\mu(x) = \frac{1}{x^2} \quad , \quad x \neq 0$

ج) $\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2} \quad , \quad x\neq \pm y$

ح) $\mu(x,y)=\dfrac{1}{(x-y)^2} \quad , \quad x\neq y$

خ) $\mu(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^2} \quad , \quad x\neq -y$

➢ **حل:**

الف) $ydx-xdy=0$

طرفین معادله را در μ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{y}-\frac{x}{y^2}dy=0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{x}{y}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=cy$$

ب) طرفین معادله را در $\dfrac{1}{xy}$ ضرب می‌کنیم:

$$ydx-xdy=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$$

$$\Rightarrow \quad \ln x-\ln y=c \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y}=A \quad \Rightarrow \quad x=Ay$$

ت)
$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{\dfrac{ydx-xdy}{y^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{y^2}}=\frac{d\left(\dfrac{x}{y}\right)}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\frac{du}{1+u^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arctg} u=\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right)=c$$

ث)
$$\frac{y}{x^2}dx-\frac{dy}{x}=0$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x}=c \quad \Rightarrow \quad y=cx$$

ج)
$$\frac{y}{x^۲-y^۲}dx-\frac{x}{x^۲-y^۲}dy=۰$$

$$\int_۰^x \frac{ydx}{x^۲-y^۲}+\int(۰)dy=\frac{۱}{y}\int_۰^x \frac{dx}{\left(\frac{x}{y}\right)^۲-۱}=c$$

$$\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{x}{y}\right)=c \Rightarrow \sin c=A=\frac{x}{y} \Rightarrow x=Ay$$

ح)
$$\frac{ydx}{(x-y)^۲}-\frac{xdy}{(x-y)^۲}=\frac{\frac{(ydx-xdy)}{y^۲}}{\frac{(x-y)^۲}{y^۲}}=\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}-۱\right)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\left(۱-\frac{x}{y}\right)}=c \Rightarrow ۱-\frac{x}{y}=A \Rightarrow \frac{x}{y}=۱-A=B \Rightarrow x=By$$

خ)
$$\frac{ydx-xdy}{(x+y)^۲}=\frac{\frac{ydx-xdy}{y^۲}}{\frac{(x+y)^۲}{y^۲}}=\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(۱+\frac{x}{y}\right)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۱}{\left(۱+\frac{x}{y}\right)}=c \Rightarrow ۱+\frac{x}{y}=A \Rightarrow x=By$$

۱۲- تحقیق کنید تابع $\mu(x,y)=\frac{۱}{x^۲+y^۲}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله:

$$(۲x^۲+۲y^۲+x)dx+(x^۲+y^۲+y)dy=۰$$

است و به کمک آن جواب معادله را به‌دست آورید.

➢ **حل:**

با ضرب کردن طرفین معادله در $\frac{1}{x^2+y^2}$ داریم:

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}+2\right)dx+\left(\frac{y}{x^2+y^2}+1\right)dy=0$$

$$dy+2dx+\frac{ydy+xdx}{x^2+y^2}=0 \quad \Rightarrow \quad y+2x+\ln\sqrt{x^2+y^2}=c$$

برای هر یک از معادلات داده شده در زیر، یک عامل انتگرال‌ساز که وابسته بـه هـر دو متغیر x و y است پیدا کنید و با استفاده از آن معادله را حل کنید. در حل معـادلات، از روابط زیر استفاده کنید:

$$d(xy)=ydx+xdy \quad , \quad d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2} \quad , \quad d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

۱۳- $(x^2+y^2-x)dx-ydy=0$

۱۴- $ydx+(x^2y^3+x)dy=0$

۱۵- $ydx+(x+x^3y^2)dy=0$

۱۶- $y(x^2+y^2-1)dx+x(x^2+y^2+1)dy=0$

۱۷- $xdy-ydx=(x^2+9y^2)dx$

۱۸- $y(x^3e^{xy}-y)dx+x(y+x^3e^{xy})dy=0$

۱۹- $\left[x\left(x^2+y^2\right)^2-y\right]dx+\left[\left(x^2+y^2\right)^2y+x\right]dy=0$

➢ **حل:**

۱۳)
$$\Rightarrow \quad ydy + xdx + \left(x^{2} + y^{2}\right)dx$$
$$\Rightarrow \quad dx = \frac{ydy + xdx}{x^{2} + y^{2}} = d\ln\sqrt{x^{2} + y^{2}}$$
$$\Rightarrow \quad x = \ln\sqrt{x^{2} + y^{2}} + c$$

۱۴) با بسط معادله و تقسیم کردن بر $(xy)^{2}$:

$$ydy + \frac{ydx + xdy}{(xy)^{2}} = d\left(\frac{1}{2}y^{2}\right) + \frac{d(xy)}{(xy)^{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y^{2} - \frac{2}{xy} = c$$

۱۵) $\mu(x) = \frac{1}{x^{3}y^{3}}$ را در معادله ضرب می‌کنیم:

$$\frac{dy}{y} + \frac{ydx + xdy}{x^{3}y^{3}} = d\ln y - \frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^{2}y^{2}}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad d\ln y^{2} = d\left(\frac{1}{x^{2}y^{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln y^{2} = \left(\frac{1}{x^{2}y^{2}}\right) + c$$

۱۶) با مرتب کردن معادله داریم:

$$xdy - ydx + (x^{2} + y^{2})(xdy + ydx) = 0$$

با ضرب کردن دو طرف در $\frac{1}{x^{2} + y^{2}}$:

$$\frac{xdy - ydx}{(x^{2} + y^{2})} + (xdy + ydx) = d\left(\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}\right) + d(xy) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + xy = c$$

$$\frac{xdy-ydx}{(x^۲+y^۲)}=\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^۲}=d\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)$$

۱۷) $xdy-ydx=(x^۲+۹y^۲)dx$

$$\Rightarrow\quad \frac{\frac{(xdy-ydx)}{x^۲}}{\frac{(x^۲+۹y^۲)}{x^۲}}=\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{۱+\left(۳\frac{y}{x}\right)^۲}=\frac{۱}{۳}d\left(\operatorname{Arctg}\frac{۳y}{x}\right)=dx$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{۳y}{x}\right)=۳x+c$$

۱۸) $-x^۳e^{xy}(xdy+ydx)-y(ydx-xdy)=۰$

$$\Rightarrow\quad e^{xy}(xdy+ydx)-\frac{y}{x^۳}(ydx-xdy)=۰$$

$$\Rightarrow\quad e^{xy}d(xy)+\frac{y}{x}d\left(\frac{y}{x}\right)=۰\quad\Rightarrow\quad e^{xy}+\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^۲}{۲}=c$$

۱۹) $x(x^۲+y^۲)^۲dx-ydx+(x^۲+y^۲)^۲ydy+xdy=۰$

$$(x^۲+y^۲)^۲(xdx+ydy)+(xdy-ydx)=۰$$

عبارت $xdy-ydx$ کامل نیست و لذا عامل انتگرال‌ساز $\frac{۱}{x^۲+y^۲}$ در معادله ضرب می‌شود:

$$(x^۲+y^۲)(xdx+ydy)+\frac{(xdy-ydx)}{(x^۲+y^۲)}=\frac{۱}{۴}d(x^۲+y^۲)^۲+d\left[\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right]=۰$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + \mathrm{Arc\,tg}\frac{y}{x} = c$$

۲۰- نشان دهید اگر $\dfrac{M_y - N_x}{N_y - M_x}$ تابعی از $z = xy$ مانند $g(z)$ باشد، آن‌گاه $\mu(z) = e^{\int g(z)dz}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ است. با استفاده از آن، برای هر یک از معادلات زیر یک عامل انتگرال‌ساز پیدا کنید و سپس جواب عمومی را به‌دست آورید.

الف) $ydx + (x + 3x^3y^4)dy = 0$

ب) $(8ydx + 8xdy) + x^2y^3(4ydx + 5xdy) = 0$

ت) $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0$

➢ حل:

کافی است نشان دهیم $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ یک معادله کامل است. یعنی:

$$[\mu M(x,y)]_y = [\mu N(x,y)]_x$$

$$(\mu M)_y = \mu M_y + M\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$(\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\mu M_y + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu N_x + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \qquad \text{(I)}$$

$$\mu = \mu(z) = \mu(xy) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial \mu}{\partial z}(y) & \text{(II)} \\[2ex] \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial z}(x) & \text{(III)} \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}),(\mathrm{II}),(\mathrm{III}) \quad \Rightarrow \quad \mu M_y + M\left[x\frac{\partial\mu}{\partial z}\right] = \mu N_x + N\left[y\frac{\partial\mu}{\partial z}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\mu}{\partial z}\left[Ny - Mx\right] = \mu(M_y - N_x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{Mx - Ny}dz = g(z)$$

با انتگرال گرفتن از رابطه فوق:

$$\ln\mu = \int g(z)dz \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int g(z)dz}$$

الف)

$$M(x,y) = y \quad , \quad N(x,y) = x + ۳x^۳y^۴$$

$$g(z) = \frac{M_y - N_x}{Ny - Mx} = \frac{۱-(۱+۹x^۲y^۴)}{(x+۳x^۳y^۴)(y) - xy} = \frac{-۳}{xy} = \frac{-۳}{z}$$

$$\mu(z) = e^{\int g(z)dz} = e^{-۳\ln z} = \frac{۱}{z^۳} \quad \Rightarrow \quad \mu(xy) = (xy)^{-۳}$$

معادله را در $\mu(xy)$ ضرب می‌کنیم تا یک معادله کامل به دست آید:

$$\left(\frac{۱}{x^۳y^۲}\right)dx + \left(۳y + \frac{۱}{x^۲y^۳}\right)dy = ۰$$

$$\frac{dx}{x^۳y^۲} + ۳ydy + \frac{dy}{x^۲y^۳} = \left(\frac{۲}{x^۳y^۲}\right)dx + ۶ydy + \left(\frac{۲}{x^۲y^۳}\right)dy = ۰$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\frac{-۱}{x^۲y^۲}\right) + d\left(۳y^۲\right) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۳y^۲ - \frac{۱}{x^۲y^۲} = c$$

$$\Rightarrow \quad ۳x^۲y^۴ - cx^۲y^۲ - c = ۰$$

ب) ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$(۴x^۲y^۴ + ۸y)dx + (۵x^۳y^۳ + ۸x)dy = ۰$$

$$\begin{cases} M = ۴x^{۲}y^{۴} + ۸y \\ N = ۵x^{۳}y^{۳} + ۸x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M_y - N_x}{Ny - Mx} = \frac{(۱۶x^{۲}y^{۳} + ۸) - (۱۵x^{۲}y^{۳} + ۸)}{(۸x + ۵x^{۳}y^{۳})y - (۴x^{۲}y^{۴} + ۸y)x} = \frac{۱}{xy} = \frac{۱}{z} = g(z)$$

$$\mu(z) = e^{\int g(z)dz} = e^{\ln z} = z \quad \Rightarrow \quad \mu(xy) = (xy)$$

معادله را در $\mu(xy) = xy$ ضرب می‌کنیم:

$$xy(۴x^{۲}y^{۴} + ۸y)dx + (۵x^{۳}y^{۳} + ۸x)xy\,dy = ۰$$

$$۸xy(ydx + xdy) + x^{۳}y^{۳}(۵xydy + ۴y^{۲}dx) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad d(۴x^{۲}y^{۲}) + d(x^{۴}y^{۵}) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad ۴x^{۲}y^{۲} + x^{۴}y^{۵} = c$$

ت) $M = y - xy^{۲} \quad , \quad N = -(x + x^{۲}y)$

$$\frac{M_y - N_x}{Ny - Mx} = \frac{(۱ - ۲xy) - (-۱ - ۲xy)}{-(x + x^{۲}y)y - (y - xy^{۲})x} = \frac{-۲}{xy} \quad \Rightarrow \quad g(z) = -\frac{۲}{z} \quad , \quad z = xy$$

$$\mu(z) = e^{\int g(z)dz} = e^{-۲\ln z} = \frac{۱}{z^{۲}} \quad \Rightarrow \quad \mu(x,y) = \frac{۱}{(xy)^{۲}} = \frac{۱}{x^{۲}y^{۲}}$$

اگر دو طرف معادله در $\mu(x,y) = \frac{۱}{x^{۲}y^{۲}}$ ضرب شوند:

$$\frac{(y - xy^{۲})}{(xy)^{۲}}dx - \frac{(x + x^{۲}y)}{(xy)^{۲}}dy = ۰ \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{۱}{x^{۲}y} - \frac{۱}{x}\right)dx - \left(\frac{۱}{xy^{۲}} - \frac{۱}{y}\right)dy = ۰$$

معادله فوق کامل است. به روش دسته‌بندی عمل می‌کنیم:

$$\left(\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}\right) + \left(\frac{dx}{x^{۲}y} - \frac{dy}{xy^{۲}}\right) = ۰$$

$$y''+(y')^{۲}+۱=-\left[۱+\tan^{۲}(x-c_{۱})\right]+\left[-\tan(x-c_{۱})\right]^{۲}+۱=۰$$

۱۵)
$$y=c_{۱}e^{۳x}+c_{۲}xe^{۳x}$$

$$\Rightarrow\quad y'=۳c_{۱}e^{۳x}+c_{۲}(۳x+۱)e^{۳x}=(۳c_{۱}+c_{۲}+۳c_{۲}x)e^{۳x}$$

$$y''=۹c_{۱}e^{۳x}+c_{۲}(۶+۹x)e^{۳x}=(۹c_{۱}+۶c_{۲}+۹c_{۲}x)e^{۳x}$$

جایگذاری در معادله : $y''-۶y'+۹y$

$$=(۹c_{۱}+۶c_{۲}+۹c_{۲}x)e^{۳x}-۶(۳c_{۱}+c_{۲}+۳c_{۲}x)e^{۳x}+۹(c_{۱}e^{۳x}+c_{۲}xe^{۳x})=۰$$

۱۶- مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل داده شده زیر را تعیین کنید:

الف) $(y'')^{۲}+۳(y')^{۳}=۰$

ب) $(y')^{\frac{۱}{۲}}=(۱+y'')^{\frac{۱}{۳}}$

ت) $y'+\ln y-۱=۰$

حل:

الف) بالاترین مرتبه مشتق ۲ است و توان آن هم ۲ است پس مرتبه ۲ و درجه ۲ است.

ب) بالاترین مرتبه مشتق ۲ است پس مرتبه ۲ است. با توجه به شکل معادله، درجه برای آن تعریف نشده است.

ت) بالاترین مرتبه مشتق ۱ است و توان آن هم ۱ است پس مرتبه ۱ و درجه ۱ است.

۱۷- مشخص کنید کدام‌یک از معادلات زیر خطی و کدام‌یک غیرخطی هستند.

الف) $y''+xy'+x^{۲}y=e^{x}$

ب) $y''+yy'+x=۰$

ت) $y''+\cos y=۰$

$$\Rightarrow \quad \frac{(-ydx+xdy)}{xy}+\frac{(ydx-xdy)}{(xy)^{۲}}=-d\ln(xy)+d\left(\frac{۱}{xy}\right)=۰$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{xy}-\ln(xy)=c$$

۲۱- هر یک از معادلات زیر دارای عامل انتگرال‌سازی به صـورت $\mu=x^m y^n$ اسـت. این عامل را به‌دست آورید و با استفاده از آن جواب عمومی را پیدا کنید.

الف) $(۳y+۴xy^{۲})dx+(۲x+۳x^{۲}y)dy=۰$

ب) $x^{۳}y^{۳}(۲ydx+xdy)-(۵ydx+۷xdy)=۰$

➢ حل:

الف) دو طرف معادله را در $M=x^m y^n$ ضرب می‌کنیم تا یک معادله کامل به دست آید.

$$(۳y^{n+۱}x^m+۴y^{n+۲}x^{m+۱})dx+(۲y^n x^{m+۱}+۳y^{n+۱}x^{m+۲})dy=۰$$

$$\begin{cases} M=۳y^{n+۱}x^m+۴y^{n+۲}x^{m+۱} \\ N=۲y^n x^{m+۱}+۳y^{n+۱}x^{m+۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=۳(n+۱)y^n x^m+۴(n+۲)y^{n+۱}x^{m+۱} \\ \dfrac{\partial M}{\partial x}=۲(m+۱)x^m y^n+۳(m+۲)x^{m+۱}y^{n+۱} \end{cases}$$

باید $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ باشد:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} ۲(m+۱)=۳(n+۱) \\ ۳(m+۲)=۴(n+۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۳n=۱ \\ ۳m-۴n=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ n=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mu=x^{۲}y$$

با ضرب دو طرف در μ:

$$x^{۲}y(۳y+۴xy^{۲})dx+(۲x+۳x^{۲}y)x^{۲}y=x^{۲}y(۳ydx+۲xdy)+x^{۳}y^{۲}(۴ydx+۳dy)$$

$$=d(y^{۲}x^{۳})+d(y^{۳}x^{۴})=۰$$

$$\Rightarrow \quad y^{۲}x^{۳}+y^{۳}x^{۴}=c$$

ب) ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$(۲x^{۳}y^{۴}-۵y)dx+(x^{۴}y^{۳}-۷x)dy=۰$$

طرفین را در $\mu=x^{m}y^{n}$ ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \quad (۲x^{۳+m}y^{۴+n}-۵x^{m}y^{n+۱})dx+(x^{۴+m}y^{۳+n}-۷x^{m+۱}y^{n})dy=۰$$

$$M=۲x^{۳+m}y^{۴+n}-۵x^{m}y^{n+۱}$$

$$N=x^{۴+m}y^{۳+n}-۷x^{m+۱}y^{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{y}=۲(۴+n)x^{۳+m}y^{۳+n}-۵(n+۱)y^{n}x^{m} \\ N_{x}=(۴+m)x^{۳+m}y^{۳+n}-۷(m+۱)x^{m}y^{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۷(m+۱)=۵(n+۱) \\ m+۴=۲(n+۴) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m=-\frac{۸}{۳} \quad , \quad n=-\frac{۱۰}{۳}$$

$$\Rightarrow \quad \mu=x^{-\frac{۸}{۳}}y^{-\frac{۱۰}{۳}}$$

با ضرب μ در معادله:

$$\left(x^{-\frac{۸}{۳}}y^{-\frac{۱۰}{۳}}\right)(x^{۳}y^{۳})(۲ydx+xdy)-\left(x^{-\frac{۸}{۳}}y^{-\frac{۱۰}{۳}}\right)(۲ydx+xdy)=۰$$

پس از مرتب کردن:

$$\left(۲x^{\frac{۱}{۳}}y^{\frac{۲}{۳}}dx+x^{\frac{۴}{۳}}y^{-\frac{۱}{۳}}dy\right)-\left(۵x^{-\frac{۸}{۳}}y^{-\frac{۷}{۳}}dx+۷x^{-\frac{۵}{۳}}y^{-\frac{۱۰}{۳}}dy\right)=۰$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}d\left(y^{\frac{۲}{۳}}x^{\frac{۴}{۳}}\right)-d\left(y^{-\frac{۷}{۳}}x^{-\frac{۵}{۳}}\right)=۰$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}x^{\frac{۴}{۳}}y^{\frac{۲}{۳}}+x^{-\frac{۵}{۳}}y^{-\frac{۷}{۳}}=c$$

۲۲- مثل تمرین ۲۰، شرایطی پیدا کنید که معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$ **دارای عامل انتگرال‌سازی به شکل‌های** $\mu(x+y)$ **یا** $\mu(x^۲+y^۲)$ **یا** $\mu(x,y)$ **یا** $\mu\left(\frac{y}{x}\right)$ **باشد.**

➢ **حل:**

اگر $\mu=\mu(x+y)$ در معادله فوق ضرب شود یک معادله کامل به دست می‌آید:

$$\mu Mdx+\mu Ndy=۰ \qquad ,z=x+y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}=۱$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial y}=\dfrac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial \mu}{\partial z}\quad (۱)=\dfrac{\partial \mu}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial x}=\dfrac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial \mu}{\partial z}\quad (۱)=\dfrac{\partial \mu}{\partial z} \end{cases}$$

برای کامل بودن معادله: $(\mu M)_y=(\mu N)_x$: $\mu\dfrac{\partial M}{\partial y}+M\dfrac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\dfrac{\partial N}{\partial x}+N\dfrac{\partial \mu}{\partial x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dz}=\frac{\mu(M_y-N_x)}{N-M} \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{\mu}\frac{d\mu}{dz}=\frac{M_y-N_x}{N-M}$$

$$\frac{M_y-N_x}{N-M}=g(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{\mu}\frac{d\mu}{dz}=g(z) \quad \Rightarrow \quad \mu=e^{\int g(z)dz}$$

۲۳- ثابت کنید اگر $F(x,y)$ **تابع همگن و از درجه** k **نسبت به** x **و** y **باشد، داریم:**

(قضیه اویلر) $xF_x+yF_y=kF$

➢ **حل:**

چون F نسبت به y و x همگن از مرتبه k است:

$$F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k F(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial(\lambda x)}\cdot\frac{\partial(\lambda x)}{\partial\lambda}+\frac{\partial F}{\partial(\lambda y)}\cdot\frac{\partial(\lambda y)}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial(\lambda x)}(x)+\frac{\partial F}{\partial(\lambda y)}(y)=k\lambda^{k-1}F$$

$$\Rightarrow\quad xF_x+yF_y=k\lambda^{k-1}F$$

$$\lambda=1\quad\Rightarrow\quad xF_x+yF_y=F$$

۲۴- به کمک تمرین ۲۳ نشان دهید اگر معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ همگن و $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ همگن و $Mx+Ny\neq 0$، آن‌گاه $\frac{1}{Mx+Ny}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است و با استفاده از آن جواب معادلات همگن زیر را به‌دست آورید.

الف) $xydx-(x^2+2y^2)dy=0$

ب) $(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0$

ت) $y^2dx+(x^2-xy-y^2)dy=0$

➢ **حل:**

M و N همگن از درجه k هستند. طبق مسئله ۲۳:

$$\begin{cases}xM_x+yM_y=KM\\ xN_x+yN_y=KN\end{cases}$$

چون μ عامل انتگرال‌ساز است پس: $(\mu M)_x=(\mu N)_y$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)=\frac{Ny\frac{\partial M}{\partial y}-MN-My\frac{\partial N}{\partial y}}{(Mx+Ny)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)=\frac{Mx\dfrac{\partial N}{\partial x}-MN-Nx\dfrac{\partial M}{\partial x}}{(Mx+Ny)^{۲}} \quad , \quad (Mx+Ny)\neq ۰$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Mx\frac{\partial N}{\partial x}-MN-Nx\frac{\partial M}{\partial x}=Ny\frac{\partial M}{\partial y}-MN-My\frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad M\left(x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}\right)=N\left(x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad M(xN_x+yN_y)=N(xM_x+yM_y)$$

$$\Rightarrow \quad M(KN)=N(KM) \qquad \Rightarrow \qquad KMN=KMN$$

که به ترتیب عکس هم می‌توان عمل کرد.

الف) معادله همگن درجه دوم است.

$$\mu(x,y)=\frac{۱}{Mx+Ny}=\frac{۱}{(xy)x+y\left[-(x^{۲}+۲y^{۲})\right]}=\frac{-۱}{۲y^{۳}}$$

اگر μ در معادله ضرب شود:

$$\left(\frac{-x}{۲y^{۲}}\right)dx+\left(\frac{x^{۲}}{۲y^{۳}}+\frac{۱}{y}\right)dy=۰$$

معادله کامل است و به روش دسته‌بندی حل می‌شود:

$$\left(\frac{x^{۳}}{۲y^{۳}}dy-\frac{x}{۲y^{۲}}dx\right)+\frac{۱}{y}\cdot dy=۰$$

$$d\left(-\frac{x^{۲}}{۴y^{۳}}\right)+d\ln y=۰ \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^{۲}}{۴y^{۳}}+\ln y=c$$

ب)
$$\mu(x,y)=\frac{1}{Mx+Ny}=\frac{1}{(x^4+y^4)x+y(-xy^3)}=x^{-5}$$

معادله را در x^{-5} ضرب می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5}\right)dx-\left(\frac{y^3}{x^4}\right)dy=0$$

$$\left(\frac{dx}{x}\right)+\left(\frac{y^4}{x^5}-\frac{y^3}{x^4}\right)dy=\frac{dx}{x}+\frac{y^3}{x^4}\left(\frac{y}{x}-1\right)dy=0$$

$$d\ln x-d\left(\frac{y^4}{4x^4}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \ln x-\frac{y^4}{4x^4}=\ln x-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^4=c$$

ت)
$$\frac{1}{Mx+Ny}=\frac{1}{(y^2)(x)+(x^2-xy-y^2)y}=\frac{1}{x^2y-y^3}=\mu(x,y)$$

با ضرب μ در دو طرف معادله:

$$\frac{ydx}{x^2-y^2}+\left[\frac{x^2-y^2-xy}{y(x^2-y^2)}\right]dy=\frac{ydx}{x^2-y^2}+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{x^2-y^2}\right)dy=0$$

$$M_y=N_x=\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\int_0^x\frac{y}{x^2-y^2}dx+\int_1^y\frac{1}{y}dy=c \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)+\ln y=c$$

مسیرهای قائم و مایل

۱- مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $x^2+y^2=2cx$

ب) $y=\dfrac{x}{cx+1}$

ت) $x^2-y^2=2cx$

➢ **حل:**

الف)

$$x^{۲}+y^{۲}-۲cx=۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=F_x=۲(x-c) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=F_y=۲y \end{cases}$$

$$y^{-۱}=\frac{-F_x}{F_y}=\frac{c-x}{y} \qquad \text{(I)}$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۲cx=۰ \quad \Rightarrow \quad c=\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲x} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{(I)},\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad y^{-۱}=\frac{\dfrac{x^{۲}+y^{۲}}{۲x}-x}{y}=\frac{y^{۲}-x^{۲}}{۲xy}$$

پس شیب منحنی عمود بر این منحنی برابر است با:

$$y'=-\left(\frac{۲xy}{y^{۲}-x^{۲}}\right)$$

معادله مسیر عمود از حل این معادله، که یک معادله همگن است، به دست می‌آید.

$$y'=-\frac{۲xy}{y^{۲}-x^{۲}} \;:\; y=vx \quad \Rightarrow \quad v+x\frac{dv}{dx}=\frac{-۲v}{v^{۲}-۱}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{v(۱+v^{۲})}{۱-v^{۲}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=\frac{(۱-v^{۲})}{۱+v^{۲}}dv$$

پس از انتگرال گیری:

$$\ln x+c=\ln\left(\frac{v}{۱+v^{۲}}\right) \quad \Rightarrow \quad c_۱x=\frac{v}{۱+v^{۲}}$$

با جایگذاری $v=\dfrac{y}{x}$

$$y=c_۱(x^{۲}+y^{۲}) \quad \Rightarrow \quad (x^{۲}+y^{۲})=c_۲y$$

ب)

$$y=\frac{x}{cx+1} \Rightarrow \begin{cases} y'=\dfrac{1}{(1+cx)^2} \\ y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 \end{cases}$$

با جانشینی $-\frac{1}{y'}$ به جای y' شیب خانواده قائم به دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{x^2}{y^2}$$

مسیر عبور، با حل معادله فوق به دست می‌آید:

$$y^2dy+x^2dx=0 \Rightarrow \int y^2dy=-\int x^2dx \Rightarrow y^3+x^3=c$$

ت)

$$x^2-y^2=2cx \Rightarrow \begin{cases} y'=\dfrac{x-2}{y} \\ c=\dfrac{x^2-y^2}{2x} \end{cases} \Rightarrow y'=\frac{x-\dfrac{x^2-y^2}{2x}}{y}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

با جایگذاری $-\frac{1}{y'}$ به جای y':

$$\Rightarrow y'=\frac{-2xy}{x^2+y^2}$$

$$v=\frac{y}{x} \Rightarrow v+x\frac{dv}{dx}=\frac{-2v}{1+v^2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=-\frac{(v^3+3v)}{1+v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=-\frac{(1+v^2)}{v^3+3v} \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\ln x+c=\int\frac{-(1+v^2)}{v^3+3v}=-\frac{1}{3}\ln\left[v(3+v^2)\right]$$

$$\Rightarrow 3\ln x+\ln\left[v(3+v^2)\right]=c_1 \Rightarrow x^3v(3+v^2)=c_2$$

$$x^3\left(\frac{y}{x}\right)+\left[3+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]=c_2 \Rightarrow 3x^2y+y^3=u$$

۲- مقدار k را طوری به‌دست آورید که سهمی‌های $y=c_1x^2+k$، مسیرهای قائم بیضی‌های $x^2+2y^2-y=c_2$ باشند (c_1 و c_2 پارامتر هستند).

➢ **حل:**

$$x^2+2y^2-y=c_2 \quad\Rightarrow\quad 2x+4yy'-y'=0 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{4y-1}$$

$$y'\to\frac{-1}{y'} \;:\; \frac{-1}{y'}=\frac{-2x}{4y-1} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{4y-1}{2x} \qquad \text{(I)}$$

$$y=c_1x^2+k \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c_1=\dfrac{y-k}{x^2} \\ y'=2c_1x=2\left(\dfrac{y-k}{x^2}\right)x=\dfrac{2(y-k)}{x} \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{(I)},\text{(II)} \quad\Rightarrow\quad \frac{4y-1}{2x}=\frac{2(y-k)}{x} \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{4}$$

۳- مقدار n را طوری به‌دست آورید که منحنی‌های $x^n+y^n=c_1$، مسیرهای قائم خانواده $y=\dfrac{x}{1-c_2x}$ باشند.

➢ **حل:**

$$y=\frac{x}{1-c_2x} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y'=\dfrac{1}{(1-c_2x)^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 \\ 1-c_2x=\dfrac{x}{y} \end{cases}$$

$$y'\to-\frac{1}{y'} \;:\; -\frac{1}{y'}=\left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad y'=-\left(\frac{x}{y}\right)^2 \qquad \text{(I)}$$

$$x^n + y^n = c \ : \ y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{nx^{n-1}}{ny^{n-1}} = -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{(I)} \text{ و } \text{(II)} \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{x}{y}\right)^{2} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad n-1=2 \quad \Rightarrow \quad n=3$$

۴- نشان دهید مسیرهای قائم خانواده $\frac{x^2}{a^2+c}+\frac{y^2}{b^2+c}$ $(b>0\ ,\ a>0)$ متعلق به همین خانواده است (c پارامتر است).

➢ **حل:**

با مشتق گرفتن از معادله داریم:

$$\frac{2x}{a^2+c}+\frac{2yy'}{b^2+c}=0 \qquad \Rightarrow \qquad (b^2+c)(x)+yy'(a^2+c)=0$$

$$\Rightarrow \quad c(x+yy')+(b^2x+yy'a^2)=0 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{-b^2x-yy'a^2}{x+yy'}$$

c را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{x^2}{a^2+c}+\frac{y^2}{b^2+c}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2-\dfrac{(b^2x+yy'a^2)}{x+yy'}}+\frac{y^2}{b^2-\dfrac{(b^2x+yy'a^2)}{x+yy'}}=\frac{x(x+yy')}{a^2-b^2}+\frac{y(x+yy')}{(b^2-a^2)y'}=1$$

$$\Rightarrow \quad (x+yy')(x-\frac{y}{y'})=a^2-b^2$$

$$y' \to -{}^{-1}\!/_{y'} \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{y}{y'}\right)\left(x+yy'\right)=a^2-b^2$$

ث) $y' + (\cos x)y = e^x$

ج) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

ح) $y^2 dx = x dy$

➢ **حل:**

الف)

با توجه به تعریف معادله دیفرانسیل خطی مشخص است که معادله داده شده خطی است.

ب) به علت وجود جمله yy' غیرخطی است.

ت) به علت وجود جمله $\cos y$ غیرخطی است.

ث) خطی است.

ج) به علت وجود جمله $\sin\theta$ غیرخطی است.

ح)

$$y^2 dx = x dy \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{x} = 0 & \text{نسبت به } y \text{ غیرخطی است.} \\ \frac{dx}{dy} - \left(\frac{1}{y^2}\right)x = 0 & \text{نسبت به } x \text{ خطی است.} \end{cases}$$

۱۸- معادله دیفرانسیل کلیه دوایری را که مرکز آن‌ها روی محور yها واقع است، به دست آورید.

➢ **حل:**

معادله دایره‌ای به شعاع R و مرکز (α, β) عبارت است از: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

۵- خانواده منحنی‌هایی را به‌دست آورید که با هر یک از منحنی‌های خانواده $y=\frac{c}{x}$، زاویه $\frac{\pi}{۴}$ درست کند.

➢ **حل:**

$$y=\frac{c}{x} \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{c}{x^۲}=\frac{c}{x}\left(-\frac{۱}{x}\right)=\frac{-y}{x}$$

$$tg\phi_۱=y' \quad , \quad tg\phi_۲=-\frac{y}{x} \quad \phi_۱-\phi_۲=\frac{\pi}{۴} \quad\Rightarrow\quad tg(\phi_۱-\phi_۲)=۱ \qquad \text{(I)}$$

$$tg(\phi_۱-\phi_۲)=\frac{tg\phi_۱-tg\phi_۲}{۱+tg\phi_۱\cdot tg\phi_۲}=\frac{y'+\frac{y}{x}}{۱+y'(-\frac{y}{x})} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{(I),(II)} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'+\frac{y}{x}}{۱+y'(-\frac{y}{x})}=۱ \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{۱-(\frac{y}{x})}{۱+(\frac{y}{x})}=\frac{x-y}{x+y}$$

معادله کامل است: $(x-y)dx+(x+y)dy=۰ \quad : \int_۰^x (x-y)dx+\int_۰^y (y)dy=c$

$$\Rightarrow \quad x^۲-۲xy+y^۲=(x-y)^۲=k$$

مسیرهای قائم در مختصات قطبی

۶- فرض کنید $r=f(\theta)$ معادله یک منحنی در مختصات قطبی باشد. می‌دانیم زاویه Ψ مماس بر این منحنی با شعاع حامل برابر است با:

$$\tan\Psi=\frac{r}{r'}=\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

با فرض این‌که $r=f_{1}(\theta)$ و $r=f_{2}(\theta)$ معادله دو منحنی در مختصات قطبی باشند که در نقطه (r,θ) هم را قطع می‌کنند و:

$$\tan\Psi_{1}=\frac{f_{1}(\theta)}{f_{1}'(\theta)}\ ,\ \tan\Psi_{2}=\frac{f_{2}(\theta)}{f_{2}'(\theta)}$$

نشان دهید شرط عمود بودن دو منحنی در نقطه (r,θ) آن است که:

$$\tan\Psi_{1}=\frac{1}{\tan\Psi_{2}}$$

حل:

برای این‌که دو منحنی بر هم عمود باشند باید: $\psi_{1}-\psi_{2}=\frac{\pi}{2}$

که ψ_{1} و ψ_{2} زاویه هریک از مماس‌های منحنی‌هاست:

$$\Rightarrow\quad \psi_{2}=-\left(\frac{\pi}{2}-\psi_{1}\right)\quad\Rightarrow\quad tg\psi_{2}=-(\cot\psi_{1})=-\frac{1}{tg\psi_{1}}$$

۷- با استفاده از تمرین ۶، مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های زیر را در مختصات قطبی به‌دست آورید:

الف) $r=c(1+\cos\theta)$

ب) $r=c\sin\theta$

ت) $r=c\sin 2\theta$

حل:

الف)

$$r=c(1+\cos\theta)\quad\Rightarrow\quad r'=\frac{dr}{d\theta}=-c\sin\theta$$

$$\Rightarrow\quad tg\psi_{1}=\frac{r}{r'}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\frac{\theta}{2}$$

برای مسیرهای قائم:

$$\operatorname{tg}\psi_۲ = \frac{-۱}{\operatorname{tg}\psi_۱} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{۲}\right) = \frac{r}{r'} \quad \Rightarrow \quad r = -r'\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

$$\frac{dr}{r} = -\cot\left(\frac{\theta}{۲}\right)d\theta \quad \Rightarrow \quad \ln r = -۲\ln\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right) + c \quad \Rightarrow \quad \ln\left(r\sin^۲\frac{\theta}{۲}\right) = c$$

$$\Rightarrow \quad r\sin^۲\frac{\theta}{۲} = c \quad \Rightarrow \quad r = c\csc^۲\frac{\theta}{۲}$$

ب)

$$r = c\sin\theta \quad \Rightarrow \quad r' = c\cos\theta = \frac{dr}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\psi_۱ = \frac{r}{r'} = \operatorname{tg}\theta$$

$$\operatorname{tg}\psi_۲ = \frac{-۱}{\operatorname{tg}\psi_۱} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{r'} = -\frac{۱}{\operatorname{tg}\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{r} = -\operatorname{tg}\theta d\theta$$

پس از انتگرال‌گیری:

$$c + \ln r = \ln(\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \ln c_۱ r = \ln\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad c_۱ r = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad r = c_۲\cos\theta$$

ت)

$$r = c\sin ۲\theta \quad \Rightarrow \quad r' = ۲c\cos ۲\theta = \frac{dr}{d\theta}$$

$$\operatorname{tg}\psi_۱ = \frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{tg}۲\theta}{۲} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\psi_۲ = \frac{-۱}{\operatorname{tg}\psi_۱} = \frac{-۲}{\operatorname{tg}۲\theta} = \frac{r}{r'}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{r} = -\frac{۱}{۲}\operatorname{tg}۲\theta . d\theta$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{۱}{۲}\int \operatorname{tg}۲\theta\, d\theta = \int\frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۴}\ln(\cos ۲\theta) = \ln r + c$$

$$\ln(\cos ۲\theta)^{\frac{۱}{۴}} = \ln(c_۱ r) \quad \Rightarrow \quad r^۴ = \frac{\cos ۲\theta}{c_۱{}^۴} = c_۲\cos ۲\theta$$

$$\Rightarrow \quad r = c_۳(\cos ۲\theta)^{\frac{۱}{۴}}$$

معادلات ریکاتی

۱- معادلـه مرتبـه اول $y'+P(x)y+Q(x)y^{2}=R(x)$ کـه در آن P، Q و R تـوابعی پیوسته از x هستند، معادله ریکاتی نامیده می‌شود. نـشان دهیـد اگـر $y_{1}=u(x)$ یـک جواب معادله ریکـاتی باشـد، آن‌گـاه معادلـه دارای جـواب‌هـای دیگـری بـه شـکل $y=u(x)+\dfrac{1}{v(x)}$ نیز هست که $v(x)$ در معادله خطی زیر صادق است:

$$v'-\left(2uQ(x)+P(x)\right)v=Q(x)$$

➢ حل:

$$y(x)=u(x)+\frac{1}{v(x)}=y_{1}(x)+\frac{1}{v(x)}$$

$$\Rightarrow \quad y'(x)=y_{1}'(x)-\frac{v'(x)}{v^{2}(x)}$$

$$y'+P(x)y+Q(x)y^{2}=R(x)$$

$$\left[y_{1}'(x)-\frac{v'(x)}{v^{2}(x)}\right]+P(x)\left[y_{1}(x)+\frac{1}{v(x)}\right]+Q(x)\left[y_{1}(x)+\frac{1}{v(x)}\right]^{2}=R(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_{1}'-\frac{v'}{v^{2}}z+Py_{1}+\frac{P}{v}+Qy_{1}^{2}+Q\left(\frac{2y_{1}}{v}\right)+\frac{Q}{v^{2}}=R$$

$$\Rightarrow \quad (y_{1}'+Py_{1}+Q\,y_{1}^{2})-\frac{1}{v^{2}}(v'-Pv-2Qy_{1}v-Q)=R$$

$y_{1}=u(x)$ در معادله صدق می‌کند پس:

$$y_{1}'+Py_{1}+Qy_{1}^{2}=R$$

$$\Rightarrow \quad v'-Pv-2Qy_{1}v-Q=0 \quad \Rightarrow \quad v'-v(P+2Qy_{1})=v'-v(P+2Qu)=0$$

پس $v(x)$ در معادله فوق صدق می‌کند و $u(x)+\dfrac{1}{v(x)}$ جواب معادله ریکاتی است.

۲- با استفاده از تمرین ۱، جواب عمومی معادلات ریکاتی داده شده زیر را که یک جواب آن‌ها مشخص شده است، به‌دست آورید.

الف) $y' + (2x-1)y - y^2 = x^2 - x + 1 \quad , \quad y_1 = x$

ب) $y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1 \quad , \quad y_1 = 1$

ت) $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x \quad , \quad y_1 = e^x$

ث) $y' = x^3(y-x)^2 + \dfrac{y}{x} \quad , \quad y_1 = x$

➢ **حل:**

الف)

$$\begin{cases} P(x) = 2x - 1 \\ Q(x) = -1 \\ u(x) = x = y_1(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v' - (2uQ + P)v = Q \quad \Rightarrow \quad v' - \left[2x(-1) + 2x - 1\right]v = -1 \quad \Rightarrow \quad v' + v = -1$$

معادله فوق جدایی‌پذیر است.

$$v' = \frac{dv}{dx} = -(1+v) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v+1} = -dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln(v+1) = -x + c \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^{c-x} - 1$$

$$y = u(x) + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{1}{\left(\dfrac{e^c}{e^x}\right) - 1} = x + \frac{e^x}{e^c - e^x} = x + \frac{e^x}{A - e^x}$$

ب)

$$\begin{cases} P(x) = 2x - 1 \\ Q(x) = -x \\ u(x) = 1 = y_1(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v'-(2uQ+P)v=Q \quad \Rightarrow \quad v'-[2(1)(-x)+2x-1]=-x$$

معادله روبرو خطی است.
$$\Rightarrow \quad v'+1=-x$$

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int (1)dx}=e^{x}$$

$$v=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx+c\right]=\frac{1}{e^{x}}\left[\int (-x)e^{x}dx+c\right]=1-x+ce^{-x}$$

$$y=u(x)+\frac{1}{v(x)}=1+\frac{1}{1-x+ce^{-x}}$$

ت)

$$\begin{cases} P(x)=-1 \\ Q(x)=-e^{-x} \\ u(x)=e^{x}=y_1(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v'-(2uQ+P)v=Q \quad \Rightarrow \quad v'-\left[2e^{x}(-e^{-x})-1\right]v=-e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad v'+3v+e^{-x}=0$$

معادله فوق خطی است.

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int 3dx}=e^{3x}$$

$$v=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx+c\right]=\frac{1}{e^{3x}}\left[\int (-e^{-x})(e^{3x})dx+c\right]$$

$$=e^{-3x}\left[-\frac{1}{2}e^{2x}+c\right]=\frac{-1}{2e^{x}}+\frac{c}{e^{3x}}=\frac{-e^{2x}+2c}{2e^{3x}}$$

$$\Rightarrow \quad y=u(x)+\frac{1}{v(x)}=e^{x}+\frac{1}{\frac{-e^{2x}+2c}{2e^{3x}}}=e^{x}+\frac{2e^{3x}}{2c-e^{2x}}$$

$$=\frac{2ce^{x}-e^{3x}+2e^{3x}}{2c-e^{2x}}=\frac{2ce^{x}+e^{3x}}{2c-e^{2x}}$$

ث) با مرتب کردن معادله داریم:

$$y'+\left(2x^4-\frac{1}{x}\right)y-x^3y^2=x^5$$

$$\begin{cases} P(x)=2x^4-\dfrac{1}{x} \\ Q(x)=-x^3 \\ y_1=x=u(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad v'-(2uQ+P)v=Q \quad\Rightarrow\quad v'-\left[2(x)(-x^3)+2x^4-\frac{1}{x}\right]v=Q$$

$$\Rightarrow\quad v'+\left(\frac{1}{x}\right)v=-x^3$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$$

$$v(x)=x^{-1}\left[\int(-x^3)(x)dx+c\right]$$

$$=x^{-1}\left[-\frac{1}{5}x^5+c\right]=-\frac{x^4}{5}+\frac{c}{x}=\frac{-x^5+5c}{5x}=\frac{k-x^5}{5x}$$

$$y=u(x)+\frac{1}{v(x)}=x+\frac{1}{\dfrac{k-x^5}{5x}}=x+\frac{5x}{k-x^5}$$

۳- معادله ریکاتی $y'+y+y^2=2$ دارای جواب‌های ثابت است. این جواب‌ها را به‌دست آورید و جواب عمومی معادله را نیز پیدا کنید.

➢ **حل:**

با مقایسه معادله با معادله عمومی ریکاتی: $P(x)=Q(x)=1$

اگر $y(x)=k$ جواب معادله باشد: $y(x)=k \quad\Rightarrow\quad y'(x)=0$

$$0+k+k^2=2 \quad\Rightarrow\quad (k+2)(k-1)=0$$

$$\begin{cases} k_۱ = ۱ & \Rightarrow \quad y_۱(x) = ۱ = u_۱(x) \\ k_۲ = -۲ & \Rightarrow \quad y_۲(x) = -۲ = u_۲(v) \end{cases}$$

$$y = u_۱(x) + \frac{۱}{v} = ۱ + \frac{۱}{v} \quad \Rightarrow$$

$$v' - [۲u_۱Q + P]v = Q \quad \Rightarrow \quad v' - [۲(۱)(۱) + ۱]v = ۱ \quad \Rightarrow \quad v' - ۳v = ۱$$

$$\frac{dv}{dx} = ۱ + ۳v \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{۱ + ۳v} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۳}\ln(۳v + ۱) = x + c$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{۱}{۳}\left[e^{۳(x+c)} - ۱\right]$$

$$y = u_۱ + \frac{۱}{v} = ۱ + \frac{۳}{e^{۳(x+c)} - ۱}$$

$$y = u_۲(x) + \frac{۱}{v} = -۲ + \frac{۱}{v} \quad : v' - [۲u_۲Q + P]v = Q$$

$$v' - [۲(-۲)(۱) + ۱]v = ۱ \quad \Rightarrow \quad v' + ۳v = ۱ \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{۱ - ۳v} = \int dx$$

$$-\frac{۱}{۳}\ln(۱ - ۳v) = x + c \quad : ۱ - ۳v = e^{-۳(x+c)}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{۱}{۳}\left[۱ - e^{-۳(x+c)}\right] = \frac{۱}{۳}\left[۱ - \frac{۱}{e^{۳(x+c)}}\right] = \frac{e^{۳(x+c)} - ۱}{۳e^{۳(x+c)}}$$

$$y = u_۲ + \frac{۱}{v} = -۲ + \frac{۳e^{۳(x+c)}}{e^{۳(x+c)} - ۱}$$

معادلاتی که به همگن یا جداپذیر تبدیل می‌شوند:

۱- نشان دهید معادله دیفرانسیل به شکل:

$$y' = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}$$

که در آن $aB - bA \neq ۰$، با تبدیل:

$$x = X + h \quad , \quad y + Y + k$$

به یک معادله همگن تبدیل می‌شود که h , k از دستگاه معادلات زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases} ah + bk + c = ۰ \\ Ah + Bk + C = ۰ \end{cases}$$

همچنین نشان دهید اگر $aB = bA = ۰$ شود معادله با تغییر متغیر $ax + by = u$، به یک معادله جداپذیر تبدیل می‌شود.

➢ **حل:**

۱) مقادیر $x = X + h$ و $y = Y + k$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$y = Y + k \quad \Rightarrow \quad y' = Y'$$

$$Y' = \frac{a(X+h) + b(Y+k) + c}{A(X+h) + b(Y+k) + C} = \frac{aX + bY + (ah + bk + c)}{AX + BY + (Ah + Bk + C)}$$

برای همگن بودن معادله، در صورت ومخرج نباید مقادیر ثابت وجود داشته باشد پس:

$$\begin{cases} ah + bk + c = ۰ \\ Ah + Bk + C = ۰ \end{cases}$$

پس اگر h و k در دستگاه روبرو صدق کنند، تبدیل‌های فوق سبب همگن شدن معادله می‌گردد.

۲- با استفاده از تمرین ۱، جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را به‌دست آورید:

الف) $y' = \dfrac{x + ۲y - ۴}{۲x + y - ۵}$

ب) $y' = \dfrac{-x - ۲y + ۱}{۳(x + ۲y)}$

ت) $(y - ۲)dx - (x - y - ۱)dy = ۰$

ث) $(x - ۴y - ۹)dx + (۴x + y - ۲)dy = ۰$

➢ **حل:**

الف) $y' = \dfrac{x + ۲y - ۴}{۲x + y - ۵}$

$$\begin{cases} a = ۱ \quad b = ۲ \quad c = -۴ \\ A = ۲ \quad B = ۱ \quad C = -۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + ۲k - ۴ = ۰ \\ ۲h + k - ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = ۲ \\ k = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X + h = X + ۲ \\ y = Y + K = Y + ۱ \end{cases} \Rightarrow \quad Y' = \frac{X + ۲Y}{۲X + Y}$$

$$\frac{Y}{X} = v \quad : X\frac{dv}{dX} + v = \frac{X + ۲(Xv)}{۲X + (Xv)} = \frac{۱ + ۲v}{۲ + v} \quad \Rightarrow \quad X\frac{dv}{dX} = \frac{۱ - v^۲}{۲ + v}$$

$$\Rightarrow \quad \int\left(\frac{۲ + v}{۱ - v^۲}\right)dv = \int\left(\frac{\frac{۳}{۲}}{۱ - v} + \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ + v}\right)dv = \int\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}\ln\left[\frac{(۱ - v)^۳}{۱ + v}\right] = \ln X + C \quad \Rightarrow \quad \ln\left[\frac{(۱ - v)^۳}{۱ + v}\right] = \ln(C_۱X^۲)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(۱ - \frac{Y}{X}\right)^۳}{۱ + \frac{Y}{X}} = C_۱X^۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{(X - Y)^۳}{X^۳}}{\frac{(X + Y)}{X}} = \frac{(X - Y)^۳}{X^۲(X + Y)} = C_۱X^۲$$

$$\Rightarrow \quad (X - Y)^۳ = C_۱X^۴(X + Y)$$

$$\begin{matrix} X = x - ۲ \\ Y = y - ۱ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad (x - y - ۱)^۳ = c_۱(x - ۲)^۴(x + y - ۳)$$

ب)

$$y' = \frac{-x - ۲y + ۱}{۳(x + ۲y)} = \frac{-x - ۲y + ۱}{۳x + ۶y}$$

$$\begin{cases} a = -۱ \quad b = -۲ \quad c = ۱ \\ A = ۳ \quad B = ۶ \quad C = ۰ \end{cases} : aB - bA = ۰ \quad \Rightarrow \quad u = ax + by = -x - ۲y$$

$$\Rightarrow \quad u' = -۱ - ۲y' \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{۱}{۲}(۱ + u')$$

با جایگذاری متغیر جدید u:

$$y' = \frac{-x - ۲y + ۱}{۳(۱ + ۲y)} = \frac{u + ۱}{۳u} = \frac{۱}{۲}(۱ + u') \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{۲(u + ۱)}{۳u} - ۱ = \frac{۲ - u}{۳u}$$

بنابراین معادله دوایری که مرکز آن‌ها روی محور yها واقع است به صورت زیر است:

$$(x-۰)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \quad \Rightarrow \quad x^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

$$۲x+۲(y-\beta)y'=۰ \quad \Rightarrow \quad ۱+(y-\beta)y''+(y')^۲=۰$$

β را بین دو معادله فوق حذف می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$y'\left[۱+(y')^۲\right]-xy''=۰$$

۱۹- معادله دیفرانسیل کلیه دوایر در صفحه به شعاع ۱ را به دست آورید (از تعریف انحنای یک منحنی استفاده نمایید).

➢ **حل:**

روش اول:

با توجه به توضیح مسئله قبل معادله دوایری با شعاع ۱ عبارتست از:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=۱ \qquad \text{(I)}$$

$$۲(x-\alpha)+۲y'(y-\beta)=۰ \quad \text{(II)}$$

$$۱+(y-\beta)y''+(y')^۲=۰ \quad \text{(III)}$$

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad y-\beta=-\frac{(y')^۲+۱}{y''} \quad \xrightarrow{\text{(II)}} \quad ۲(x-\alpha)+۲y'\left(-\frac{(y')^۲+۱}{y''}\right)=۰$$

$$\Rightarrow \quad x-\alpha=\frac{y'\left[(y')^۲+۱\right]}{y''}$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{y'\left[(y')^۲+۱\right]}{y''}\right\}^۲+\left\{\frac{(y')^۲+۱}{y''}\right\}^۲=۱ \quad \Rightarrow \quad \left[۱+(y')^۲\right]^۳=(y'')^۲$$

روش دوم:

شعاع انحنای دایره‌ای به شعاع ۱ عبارتست از: $\rho=۱$

$$\int\frac{3u\,du}{2-u}=\int dx \quad\Rightarrow\quad 3u+6\ln(u-2)=-x+c$$

$$\Rightarrow\quad x+3u+6\ln(u-2)=c \quad : u=-x-2y$$

$$x+3(-x-2y)+6\ln(-x-2y-2)=c \quad\Rightarrow\quad x+3y+c_1=3\ln(x+2y+2)$$

ت)

$$(y-2)dx-(x-y-1)dy=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=y'=\frac{y-2}{x-y-1}$$

$$\begin{cases} a=0 & b=1 & c=-2 \\ A=1 & B=-1 & C=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-2=0 \\ h-k-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=3 \\ k=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=X+3 \\ y=Y+2 \end{cases} \Rightarrow \frac{dY}{dX}=Y'=\frac{Y}{X-Y}=\frac{\frac{Y}{X}}{1-\frac{Y}{X}}$$

$$v=\frac{Y}{X} \quad\Rightarrow\quad X\frac{dv}{dX}+v=\frac{v}{1-v} \quad\Rightarrow\quad \frac{dX}{X}=\frac{1-v}{v^2}dv$$

$$\Rightarrow\quad \int\frac{dX}{X}=\int\left(\frac{1-v}{v^2}\right)dv=\int\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{v}\right)dv \quad\Rightarrow\quad \ln X=-\frac{1}{v}-\ln v-\ln c$$

$$-\left(\frac{1}{v}\right)=\ln CX+\ln v \quad\Rightarrow\quad -\frac{X}{Y}=\ln\left[CX\left(\frac{Y}{X}\right)\right]=\ln CY$$

$$\Rightarrow\quad \frac{-(x-3)}{y-2}=\ln\left[C(y-2)\right]$$

$$\Rightarrow\quad x=3+(2-y)\ln\left[C(y-2)\right]$$

ث)

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x-4y-9}{4x+y-2} \qquad \begin{cases} a=1 & b=-4 & c=-9 \\ A=4 & B=1 & C=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h-۴k-۹=۰ \\ ۴h+k-۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=۱ \\ k=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=X+۱ \\ y=Y-۲ \end{cases} \Rightarrow Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{۴Y-X}{۴X+Y}$$

$$=\frac{۴\left(\frac{Y}{X}\right)-۱}{۴+\left(\frac{Y}{X}\right)}$$

$$\frac{Y}{X}=v \Rightarrow X\frac{dv}{dx}+v=\frac{۴v-۱}{۴+v} \Rightarrow \frac{dX}{X}=\frac{-(۴+v)}{۱+v^۲}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dX}{X}=-\int\frac{(۴+v)}{۱+v^۲}dv=-\left[\int\frac{۴dv}{۱+v^۲}+\int\frac{v}{۱+v^۲}dv\right]$$

$$\Rightarrow \ln X+C=-\left[۴\operatorname{Arc\,tg}v+\frac{۱}{۲}\ln(۱+v^۲)\right]$$

$$\Rightarrow A\operatorname{Arc\,tg}v+\ln(۱+v^۲)+۲\ln X+C_۱=۰$$

$$۸\operatorname{Arc\,tg}v+\ln\left[X^۲(۱+v^۲)\right]+C_۱=۸\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{Y}{X}\right)+\ln\left[X^۲+Y^۲\right]+C_۱=۰$$

$$\begin{matrix} X=x-۱ \\ Y=y-۲ \end{matrix} \Rightarrow ۸\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{y+۲}{x-۱}\right)+\ln\left[(x-۱)^۲+(y+۲)^۲\right]+C_۱=۰$$

۳- جواب مسأله مقدار اولیه زیرا را به‌دست آورید:

$$y'=\frac{۴(۳x+y-۲)}{۳x+y} \quad , \quad y(۱)=۰$$

➢ حل:

متغیر جدید u را در معادله جایگذاری می کنیم:

$$۳x+y=u \Rightarrow y'=u'-۳=\frac{۴(u-۲)}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx}=u'=\frac{۷u-۸}{u}$$

$$\int\frac{udu}{\text{۷}u-\text{۸}}=\int dx \quad\Rightarrow\quad \frac{\text{۱}}{\text{۷}}\int\frac{(\text{۷}u-\text{۸})+\text{۸}}{\text{۷}u-\text{۸}}du=\int du$$

$$\frac{\text{۱}}{\text{۷}}\left[u+\frac{\text{۸}}{\text{۷}}\ln(\text{۷}u-\text{۸})\right]=x+c \quad\Rightarrow\quad u+\frac{\text{۸}}{\text{۷}}\ln(\text{۷}u-\text{۸})=\text{۷}x+c_{\text{۱}}$$

$$(\text{۳}x+y)+\frac{\text{۸}}{\text{۷}}\ln(\text{۲۱}x+\text{۷}y-\text{۸})=\text{۷}x+c_{\text{۱}}$$

$$\Rightarrow\quad \ln(\text{۲۱}x+\text{۷}y-\text{۸})=\left(\frac{\text{۲۸}x-\text{۷}y}{\text{۸}}\right)+c_{\text{۲}}$$

$$x=\text{۱}\quad :y=\text{۰}\quad\Rightarrow\quad c_{\text{۲}}=(\ln\text{۱۳})-\frac{\text{۲۸}}{\text{۸}}$$

$$\Rightarrow\quad \ln(\text{۲۱}x+\text{۷}y-\text{۸})=\frac{(\text{۲۸}x-\text{۷}y)}{\text{۸}}+\ln(\text{۱۳})-\frac{\text{۲۸}}{\text{۸}}$$

$$=\ln\text{۱۳}+\frac{(\text{۲۸}x-\text{۷}y-\text{۲۸})}{\text{۸}}$$

۴- جواب عمومی معادله $y'=(\text{۹}x+\text{۴}y+\text{۱})^{\text{۲}}$ را پیدا کنید.

➢ حل:

متغیر جدید u را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$u=\text{۹}x+\text{۴}y \quad\Rightarrow\quad u'=\text{۹}+\text{۴}y' \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{\text{۱}}{\text{۴}}(u'-\text{۹})$$

$$\frac{\text{۱}}{\text{۴}}(u'-\text{۹})=(u+\text{۱})^{\text{۲}} \quad\Rightarrow\quad u'=\text{۴}(u+\text{۱})^{\text{۲}}+\text{۹}=\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow\quad \int dx=\int\frac{dx}{\text{۴}(u+\text{۱})^{\text{۲}}+\text{۹}} \quad : x+c=\frac{\text{۱}}{\text{۶}}\operatorname{Arc\,tg}\left[\frac{\text{۲}}{\text{۳}}(u+\text{۱})\right]$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\text{۲}}{\text{۳}}(u+\text{۱})=tg(\text{۶}x+\text{۶}c)=tg(\text{۶}x+c_{\text{۱}})$$

$$\Rightarrow\quad tg(\text{۶}x+c_{\text{۱}})=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}(\text{۹}x+\text{۴}y+\text{۱})$$

معادلات کلرو

۱- جواب عمومی و جواب غیرعادی معادلات کلرو زیر را پیدا کنید.

الف) $y = xy' - ۴(y')^۳$

ب) $y = xy' - e^{y'}$

➢ **حل:**

الف) $y = xy' - ۴(y')^۳$

برای جواب عمومی $y' = c \quad \Rightarrow \quad y = cx - ۴c^۳$

برای جواب غیرعادی $y' = p \quad \Rightarrow \quad y = xp - ۴p^۳ \quad \Rightarrow \quad f(p) = -۴p^۳$

$$x = -f'(p) = ۱۲p^۲y \quad ,$$

$$y = -pf'(p) + f(p) = -۱۲p^۳ - ۴p^۳ = -۱۶p^۳$$

$$p^۲ = \frac{۱}{۱۲}x \quad \Rightarrow \quad y^۲ = ۲۵۶p^۶ = ۲۵۶(p^۲)^۳ = ۲۵۶\left(\frac{x}{۱۲}\right)^۳$$

$$\Rightarrow \quad y^۲ = \frac{۴}{۲۷}x^۳$$

ب) برای جواب عمومی: $y' = c \quad \Rightarrow \quad y = cx - e^c$

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad y = xp - e^p \quad \Rightarrow \quad f(p) = -e^p$$

برای جواب غیرعادی:

$$x = -f'(p) = e^p$$

$$y = -pf'(p) + f(p) = -p(-e^p) + (-e^p)$$

$$= e^p(p-۱)$$

$$\Rightarrow \quad p = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad y = e^{\ln|x|}(\ln|x| - ۱) = |x|(\ln|x| - ۱)$$

۲- یک معادله کلرو به‌دست آورید که جواب غیرعادی آن $y = x - x^{3}$ باشد.

حل:

اگر معادله به صورت $y = xp + f(p)$ باشد، $y' = p$، داریم:

$$x = -f'(p)$$

$$y = -pf'(p) + f(p)$$

$$y = x - x^{3} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -3x^{2} + 1 = -3\left[-f'(p)\right]^{2} + 1 = p$$

$$\Rightarrow \quad f'(p) = \sqrt{\frac{1}{3}(1-p)} = \frac{df}{dp} \quad \Rightarrow \quad df = \sqrt{\left(\frac{1-p}{3}\right)}\,dp$$

$$\Rightarrow \quad f(p) = 2\left(\frac{1-p}{3}\right)\sqrt{\frac{1-p}{3}} = 2\left(\frac{1-y'}{3}\right)\sqrt{\frac{1-y'}{3}}$$

$$y = xp + f(p) = xy' + 2\left(\frac{1-y'}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

تمرین: جواب عمومی و جواب غیرعادی معادله لاگرانژ $y - x(y')^{2} + (y')^{2}$ را پیدا کنید.

حل:

$$p = y \Rightarrow \; p - p^{2} = (2Px + 2p)\frac{dp}{dx}$$

$$p = 0 \;,\; p = 1 \;\; \Rightarrow \;\; p - p^{2} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; p\frac{dp}{dx} = 0$$

جواب خاص: $$p = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{dy}{dx} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; y = 0$$

جواب خاص: $$p = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{dy}{dx} = 1 \;\; \Rightarrow \;\; y = x + 1$$

$$p - p^{2} \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{dx}{dp} - \frac{2p}{p - p^{2}}x = \frac{2p}{p - p^{2}}$$

جواب معادله خطی فوق: $x = -1 + \dfrac{c}{(1-p)^2}$

$$\begin{cases} x = -1 + \dfrac{c}{(1-p)^2} \\ y = xp^2 + p^2 \end{cases}$$

از حذف p در دستگاه فوق: $y = (c + \sqrt{x+1})^2$

معادلات قابل تبدیل به معادلات مرتبه اول

جواب عمومی هر یک از معادلات مرتبه دوم زیر را به‌دست آورید.

۱- $y'' = y'$

۲- $2y'' = e^y$

۳- $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$

۴- $y'' = 1 - (y')^2$

۵- $(y'')^2 = \left(1 - (y')^2\right)^3$

۶- $xy'' = y' + 1$

۷- $yy' = y''\sqrt{y^2 + (y')^2} - y'y''$

۸- $yy'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0$

معادلات قابل تبدیل به معادلات مرتبه اول:

۱) $y'' = y'$

$$y' = u \quad \Rightarrow \quad y'' = uu' = u\frac{du}{dy}$$

$$u\frac{du}{dy} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad u = y + c$$

$$y' = u = y + c = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y+c} = dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y+c| = |x| + c_1$$

$$y = e^{x+c_1} - c \quad \Rightarrow \quad y = c_2 e^x - c$$

۲) $2y'' = e^y$

$$y' = u \quad \Rightarrow \quad y'' = u\frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(u\frac{du}{dy}\right) = e^y \quad \Rightarrow \quad 2udu = e^y dy$$

$$\Rightarrow \quad u^2 = (y')^2 = ce^y \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{ce^y} = c_1 e^{\frac{y}{2}} = \frac{dy}{dx}$$

$$c_1 dx = e^{-\frac{y}{2}} dy \quad \Rightarrow \quad c_1 x + c_2 = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{y}{2}}$$

$$\frac{y}{2} = -\ln|-2(c_1 x + c_2)| \quad \Rightarrow \quad y = -2\ln|2(c_1 x + c_2)|$$

۳) $y' = u \Rightarrow y'' = \frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$x = \sinh^{-1} u + c_1 \quad \Rightarrow \quad u = \sinh(x - c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(x - c_1) \quad \Rightarrow \quad y = \cosh(x + c_2) + c_3$$

۴) $y'' = 1 - (y')^2 \quad : y' = u \quad \Rightarrow \quad y'' = u\frac{du}{dy}$

$$u\frac{du}{dy} = 1 - u^2 \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int \frac{udu}{1-u^2}$$

$$\Rightarrow \quad y + c = -\frac{1}{2}\ln|1-u^2|$$

$$\Rightarrow \quad 1-u^2 = e^{-2(y+c)} = e^{-2y+c_1}$$

$$\Rightarrow \quad u = \sqrt{1-e^{-2y+c_1}} = \sqrt{1-\frac{c_2}{e^{2y}}} \;\; , \;\; c_2 = e^{c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{e^{2y}-c_2}{e^{2y}}} = \frac{\sqrt{e^{2y}-c_2}}{e^{y}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{y}dy}{\sqrt{e^{2y}-c_2}} = dx \quad \Rightarrow \quad \ln\left(e^{y}+\sqrt{e^{2y}-c_2}\right) = x + c_3$$

$$\Rightarrow \quad e^{y} + \sqrt{e^{2y}-c_2} = e^{x+c_3} = c_4 e^{x}$$

$$(e^{2y}-c_2) = (c_4 e^{x} - e^{y})^2$$

۵)

$$y' = u \quad \Rightarrow \quad y'' = u\frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \left[u\,{}^{du}\!/\!_{dy}\right]^2 = (1+u^2)^3 \Rightarrow \quad \frac{udu}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2}} = dy$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} = y + c \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+u^2} = \frac{-1}{y+c}$$

$$\Rightarrow \quad 1+u^2 = 1+(y')^2 = \left(\frac{-1}{y+c}\right)^2 = \frac{1}{(y+c)^2}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{1-(y+c)^2}{(y+c)^2}} = \frac{\sqrt{1-(y+c)^2}}{(y+c)} = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{(y+c)dy}{\sqrt{1-(y+c)^2}} \quad \Rightarrow \quad x + c_1 = \sqrt{1-(y+c)^2}$$

$$(x+c_1)^2 + (y+c)^2 = 1$$

(۶
$$xy'' = y' + ۱ \quad : y' = u \quad \Rightarrow \quad y'' = u'$$

$$\Rightarrow \quad x\left(\frac{du}{dx}\right) = u + ۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{(۱+u)} \quad : \ln|cx| = \ln|u+۱|$$

$$u + ۱ = cx \quad \Rightarrow \quad y' = u = cx - ۱ = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = (cx - ۱)dx \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{c}{۲}\right)(x^۲) - x + c_۱ \;\Rightarrow\; y = c_۲x^۲ - x + c_۱$$

(۷
$$yy' = y''\sqrt{y^۲ + (y')^۲} \quad - y'y''$$

$$\Rightarrow \quad y'' = \frac{yy' + y'y''}{\sqrt{y^۲ + y'^۲}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y^۲ + y'^۲} = y' + c$$

$$\Rightarrow \quad c_۱ + ۲cy' - y^۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad c_۱ = c^۲$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^۲ - c_۱}{۲c} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{(۲c)dy}{y^۲ - c_۱}$$

$$x + c_۳ = \ln\left|\frac{y-c}{y+c}\right|$$

جواب دیگر معادله $y = k$ است.

(۸
$$y' = u \quad \Rightarrow \quad y'' = u\frac{du}{dy}$$

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right) + u^۲ - u^۳\ln y = ۰ \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{u}{y}\right) = \frac{u^۲}{y}\ln y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{u^۲}\frac{du}{dy} + \frac{۱}{uy} = \frac{\ln y}{y} \quad : \frac{۱}{u} = t \quad \Rightarrow \quad \frac{-۱}{u^۲}du = dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dy} - \frac{t}{y} = \frac{-\ln y}{y} \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int\left(-\frac{۱}{y}\right)dy} = \frac{۱}{y}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{۱}{\left(\frac{۱}{y}\right)}\int\left(\frac{۱}{y}\right)\left(\frac{-\ln y}{y}\right)dy + c\Big]$$

$$v=\ln y \quad \Rightarrow \quad dv=\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad dy=ydv=e^{v}dv$$

$$t=e^{v}\left[-\int ve^{-v}dv+c\right]=e^{v}(e^{-v}+ve^{-v}+c)=۱+v+ce^{v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{u}=\frac{۱}{y'}=۱+\ln y+cy \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۱+\ln y+cy}$$

$$\Rightarrow \quad dx=dy(۱+\ln y+cy)$$

$$\Rightarrow \quad x=y\ln y+\frac{c}{۲}y^{۲}+c'$$

جواب هر یک از مسائل مقدار اولیه زیر را تعیین کنید:

۹- $xy''+y'+x=۰ \quad , \quad y(۰)=y'(۰)=۰$

۱۰- $yy''-(y')^{۲}=y^{۴} \quad , \quad y(۰)=۱ \; , \; y'(۰)=۰$

۱۱- $(y'')^{۲}-۲y''-۲xy'+(y')^{۲}+x^{۲}=۰ \quad , \quad y(۰)=\frac{۱}{۲} \; , \; y'(۰)=۱$

۱۲- $yy''+(y')^{۲}=۱ \quad , \quad y(۰)=۱ \; , \; y'(۰)=۱$

۱۳- $y''y^{۳}=۱ \quad , \quad y(\frac{۱}{۲})=y'(\frac{۱}{۲})=۱$

۱۴- $۳y''=y^{-\frac{۵}{۳}} \quad , \quad y(۰)=y'(۰)=۱$

۱۵- $y''=\frac{y'}{x}\left(۱+\ln\frac{y'}{x}\right) \quad , \quad y(۱)=\frac{۱}{۲} \; , \; y'(۱)=۱$

➢ **حل:**

۹) $$u=y' \quad \Rightarrow \quad u'=y''=\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{du}{dx}\right)+u+x=۰$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{u+x}{-x}=\frac{\left(\frac{u}{x}\right)+۱}{-۱}$$

$$\rho=\frac{۱}{k}=\frac{\left[۱+(y')^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}{|y''|}$$

$$\rho=۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{\left[۱+(y')^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}{|y''|}=۱ \quad \Rightarrow \quad \left[۱+(y')^{۲}\right]^{۳}=(y'')^{۲}$$

۲۰- معادله دیفرانسیل کلیه سهمی‌هایی که محور آن‌ها، محور xها و فاصله رأس تا کانون برابر a باشد، را به دست آورید.

حل:

معادله مربوط به سهمی‌هایی که محور آن‌ها محور xها و فاصله رأس تا کانون آن‌ها برابر α باشد عبارت است از: $y^{۲}=۴a(x-c)$

$$\Rightarrow \quad ۲yy'=۴a \quad \Rightarrow \quad yy'=۲a$$

۲۱- معادله دیفرانسیل کلیه سهمی‌هایی که محور آن‌ها، محور xها باشد را به‌دست آورید.

حل:

معادله مربوط به سهمی‌هایی که محور آن‌ها محور xها باشد عبارتست از: $y^{۲}=۴b(x-c)$

$$\Rightarrow \quad ۲yy'=۴b \quad \Rightarrow \quad yy''+(y')^{۲}=۰$$

توجه داشته باشید که در مسئله ۲۰، a معلوم و c پارامتر بود ولی در مسئله ۲۲، b , c هر دو پارامتر بودند.

۲۲- معادله دیفرانسیل کلیه دوایر گذرنده از تقاطع دایره $x^{۲}+y^{۲}=۱$ و خط $y=x$ را به دست آورید.

$$\frac{u}{x}=v \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}=-(v+۱)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dv}{۲v+۱}=-\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{۱}{۲}\ln|۲v+۱|=-\ln|x|+k$$

$$\Rightarrow\quad \ln|۲v+۱|+\ln|x^۲|=c_۱ \quad,\quad c_۱=۲k$$

$$\ln|(۲v+۱)(x)^۲|=c_۱ \quad\Rightarrow\quad (۲v+۱)(x)^۲=c_۲$$

$$\left[۲\left(\frac{u}{x}\right)+۱\right](x^۲)=c_۲ \quad\Rightarrow\quad ۲ux+x^۲=۲y'x+x^۲=c_۲$$

$$x=۰: y'=۱ \quad\Rightarrow\quad c_۲=۰ \quad :۲y'x+x^۲=۰ \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{۱}{۲}x$$

$$\Rightarrow\quad y=-\frac{۱}{۴}x^۲+c_۳$$

$$x=۰: y=۱ \quad\Rightarrow\quad c_۳=۰ \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{۱}{۴}x^۲$$

(۱۰

$$y'=u \quad\Rightarrow\quad y''=u\frac{du}{dy}$$

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right)-u^۲=y^۴ \quad :u^۲=t \quad\Rightarrow\quad ۲udu=dt$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dt}{dy}-۲\left(\frac{t}{y}\right)=۲y^۳ \quad\Rightarrow\quad \mu=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\left(-\frac{۲}{y}\right)dy}=y^{-۲}$$

$$\Rightarrow\quad t=u^۲=y^۲\left[\int(۲y^۳)\left(\frac{۱}{y^۲}\right)dy+c\right]=y^۴+cy^۲$$

$$y(۰)=۱ \quad,\quad y'(۰)=۰ \quad\Rightarrow\quad c=-۱$$

$$u^۲=y^۴-y^۲ \quad\Rightarrow\quad u=y'=y\sqrt{y^۲-۱}=\frac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{dy}{y\sqrt{y^۲-۱}}$$

$$\Rightarrow\quad x+c_۱=\operatorname{Arc}\sec(y) \quad\Rightarrow\quad y=\sec(x+k_۱)$$

$$x=۰: y=۱ \quad\Rightarrow\quad k=۰ \quad\Rightarrow\quad y=\sec x$$

(۱۱

$$u = y' \quad \Rightarrow \quad u' = y'' = \frac{du}{dx}$$

$$(u')^۲ - ۲u' - ۲ux + (u^۲ + x^۲) = ۰ \quad \Rightarrow \quad (u' - ۱)^۲ + (u - x)^۲ = ۱$$

$$u' - ۱ = \pm\sqrt{۱ - (u - x)}$$

$$\Rightarrow \quad u = \sin(x + k) + x = y'$$

$$x = ۰ : y' = ۱ \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi}{۲} \quad \Rightarrow \quad y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{۲}\right) + x = \cos x + x = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int (x + \cos x)dx \quad \Rightarrow \quad y = \sin x + \frac{x^۲}{۲} + c$$

$$x = ۰ : y = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad y = \sin x + \frac{۱}{۲}(x^۲ + ۱)$$

(۱۲

$$y' = u \quad \Rightarrow \quad y'' = u\frac{du}{dy} \quad \Rightarrow \quad y\left(u\frac{du}{dy}\right) + u^۲ = ۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{udu}{۱ - u^۲}$$

$$\ln|y| = -\frac{۱}{۲}\ln\left|۱ - u^۲\right| + c \quad \Rightarrow \quad \ln\left|y^۲(۱ - u^۲)\right| = ۲c = c_۱$$

$$\Rightarrow \quad y^۲(۱ - u^۲) = y^۲\left[۱ - (y')^۲\right] = c_۲ \quad \Rightarrow \quad ۱ - (y')^۲ = \frac{c_۲}{y^۲}$$

$$x = ۰ : y = y' = ۱ \quad \Rightarrow \quad c_۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad y' = ۱ = \frac{dy}{dx}$$

$$\begin{cases} y = x + c_۳ \\ y(۰) = ۱ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_۳ = ۱ \quad \Rightarrow \quad y = x + ۱$$

(۱۳

$$y' = u \quad \Rightarrow \quad y'' = u\frac{du}{dy} \quad \Rightarrow \quad \left(u\frac{du}{dy}\right)y^۳ = ۱ \quad \Rightarrow \quad udu = \frac{dy}{y^۳}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}u^۲ + c = \left(-\frac{۱}{۲}\right)y^{-۲} \quad \Rightarrow \quad (y')^۲ + \frac{۱}{y^۲} = c_۱$$

$$x=\frac{۱}{۲}: y=y'=۱ \quad\Rightarrow\quad c_۱=۲ \quad\Rightarrow\quad y'=\sqrt{۲-\left(\frac{۱}{y}\right)^۲}=\frac{\sqrt{۲y^۲-۱}}{y}$$

$$dx=\frac{ydy}{\sqrt{۲y^۲-۱}} \quad\Rightarrow\quad x+c_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲y^۲-۱}$$

$$x=\frac{۱}{۲}: y=۱ \Rightarrow c_۲=۰$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲y^۲-۱} \quad\Rightarrow\quad y^۲-۲x^۲=\frac{۱}{۲}$$

۱۴) $$۳y''=y^{-\frac{۵}{۳}}$$

$$y'=u \quad\Rightarrow\quad y''=u\frac{du}{dy} \quad\Rightarrow\quad ۳\left(u\frac{du}{dy}\right)=y^{-\frac{۵}{۳}} \quad\Rightarrow\quad ۳udu=\frac{dy}{yy^{\frac{۲}{۳}}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{۳}{۲}u^۲=\frac{-۳}{۲y^{\frac{۲}{۳}}}+c$$

$$(y')^۲+y^{\frac{۲}{۳}}=c_۱ \quad\Rightarrow\quad y'=\sqrt{c_۱-\frac{۱}{y^{\frac{۲}{۳}}}}=\sqrt{\frac{c_۱y^{\frac{۲}{۳}}-۱}{\sqrt[۳]{y}}}$$

$$x=۰: y=y'=۱ \quad\Rightarrow\quad c_۱=۲ \quad\Rightarrow\quad y'=\sqrt{\frac{۲y^{\frac{۲}{۳}}-۱}{\sqrt[۳]{y}}}=\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow\quad dx=\frac{\sqrt[۳]{y}dy}{\sqrt{۲y^{\frac{۲}{۳}}-۱}} \quad\Rightarrow\quad x+c=\frac{۱}{۴}\left[(۲y^{\frac{۲}{۳}}-۱)\sqrt{۲y^{\frac{۲}{۳}}-۱}+۳\sqrt{۲y^{\frac{۲}{۳}}-۱}\right]$$

$$x = 0 : y = y' = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$\Rightarrow \quad 4(x+1) = (2y^{\frac{2}{3}} - 1)\sqrt{2y^{\frac{2}{3}} - 1} + 3\sqrt{2y^{\frac{2}{3}} - 1}$$

$$= 2\sqrt{2y^{\frac{2}{3}} - 1}\,(y^{\frac{2}{3}} + 1)$$

مسایل گوناگون

جواب معادلات زیر را به‌دست آورید.

۱- $(y^3 + y + 1)dx + x(x - 3y^2 - 1)dy = 0$

۲- $(x^5 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

۳- $y^3 \sec^2 x\,dx - (1 - 2y^2 \tan x)dy = 0$

۴- $xy\,dx + (y^4 - 3x^2)dy = 0$

۵- $y\,dx + x(x^2 y - 1)dy = 0$

۶- $y\,dx = x(1 + xy^4)dy$

۷- $y' = \tan y \cot x - \sec y \cos x$

۸- $y(x-1)dx - (x^2 - 2x - 2y)dy = 0$

۹- $4dx + (x - y + 2)^2 dy = 0$

۱۰- $(xy - \sin x)dx + x^2 dy = 0$

۱۱- $y' = \sin(x + y)$

۱۲- $2x^3 y' = y(y^2 + 3x^2)$

۱۳- $y' = 1 + 6xe^{x-y}$

۱۴- $2y\,dx + x(x^2 \ln y - 1)dy = 0$