فیلترها و سنتز مدار

تقریب فیلترها

مقدمه

- فیلتر ها مدارهایی هستند که تنها قسمتی از باند فرکانسی را از خود عبور می دهند و یا اینکه در طیف سیگنال های ورودی خود تغییرات ایجاد می کنند.

جهت طراحی فیلترها

- مشخصه ایده آل دامنه یا فاز آنها توسط منحنی هایی پیوسته و دارای مشتق محدود تقریب زده می شود.
- سپس با استفاده از تقریب های مطلوب دامنه یا فاز، توابع تبدیل H(s) فیلترها بدست آمده و تحقق داده می شوند.

انواع فیلترها

- فیلترها را می توان به دو گروه انتخابگر فرکانس (Frequency selective) و عمومی یا دلخواه (General) تقسیم نمود.

فیلترهای انتخابگر فرکانس

- پایین گذر LPF
- بالاگذر HPF
- میان گذر BPF
- میان نگذر BRF

انواع فیلترها

کاربردهای فیلتر های عمومی

- ترمیم دامنه پاسخ فرکانسی (Amplitude Equalizer) یک مدار جهت رفع اعوجاج دامنه آن (Amplitude Distortion)

- ترمیم تاخیر پاسخ فرکانسی (Delay Equalizer) یک مدار جهت رفع اعوجاج فاز آن (Phase Distortion)

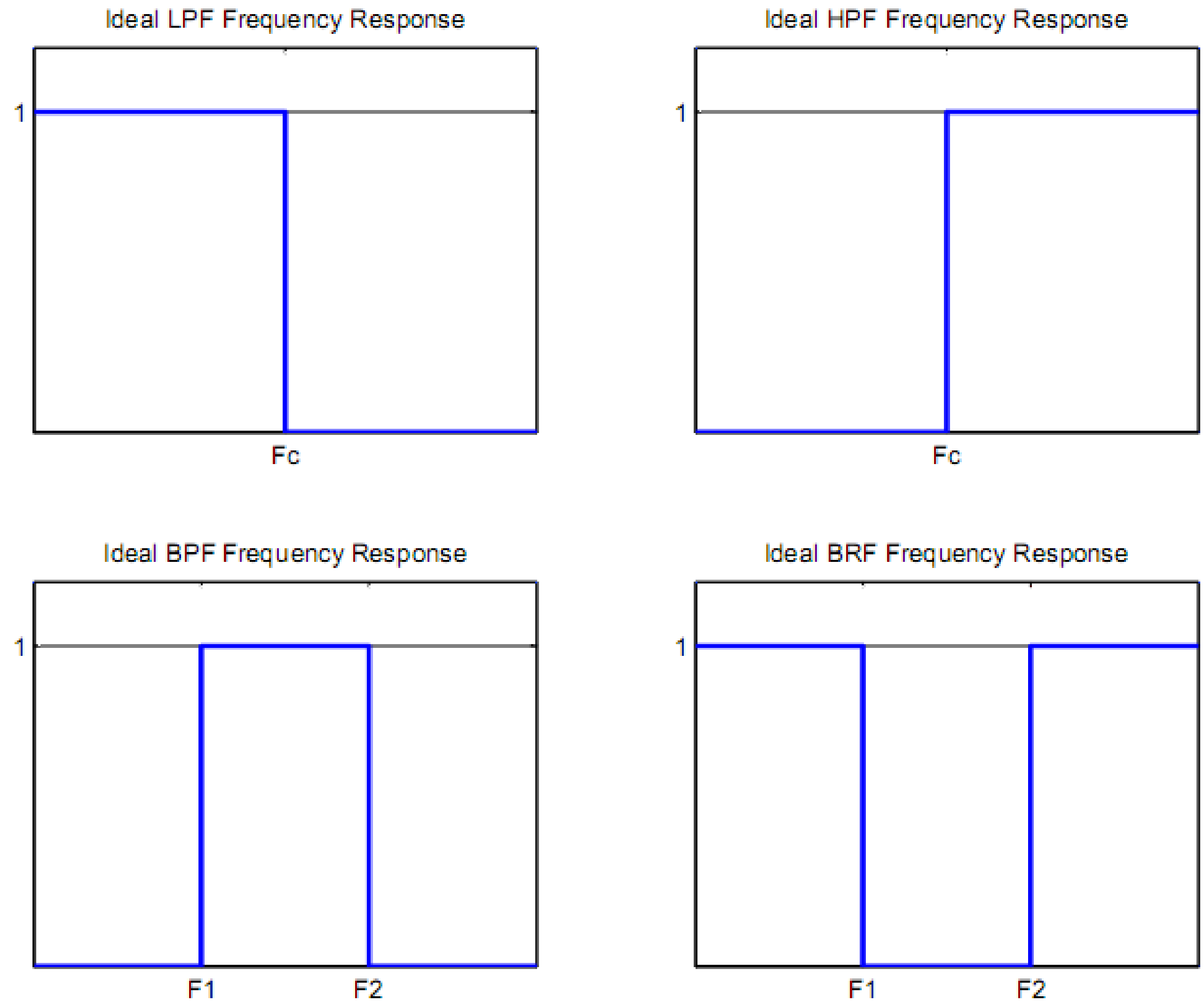
- شکل دهی سیگنال های دیجیتالی (Data Transmission Filter)

انواع فیلترها

کاربردهای فیلتر های انتخابگر فرکانس

- انتخاب یک باند فرکانسی در سیستم هایی مثل گیرنده ها و پردازشگرها
- حذف یک فرکانس یا باند فرکانسی نامطلوب
- کاهش توان نویز سیگنال ها
- حذف تداخلات بین دستگاه های مختلف الکتریکی و الکترونیکی
- کاهش پهنای باند سیگنال های گذرا

مشخصه ی ایده آل ۴ نوع فیلتر انتخابگر فرکانس



تقریب فیلترها

تقریبا تمامی فیلترها در حالت ایده آل خود غیر قابل تحقق می باشند که علت آن غیر علی (noncasual) بودن آنهاست. به عنوان مثال پاسخ ضربه فیلتر ایده آل پایین گذر با پهنای باند ω_c چنین می باشد.

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \sin c(\frac{\omega_c}{\pi} t)$$

جهت رفع این اشکال، از تقریب فیلترها (Filter Approximation) استفاده می شود. هدف از تقریب فیلترها، تقریب زدن مشخصه ایده آل آنها توسط تابعی پیوسته بر حسب فرکانس است بطوری که تابع تبدیل مربوطه قابل تحقق باشد. در تقریب فیلترها، بنا به میزان اهمیت دامنه یا فاز فیلتر از تقریب دامنه یا تقریب فاز استفاده می شود.

تقریب فیلترهای عمومی

روش های تقریب فیلترهای عمومی

- روش درونیابی (Interpolation)
- روش بسط تیلور
- روش فاکتورهای باترورث

در روش درونیابی، یک تابع کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای هایی بر حسب ω^2 هستند را به عنوان دامنه یا تانژانت فاز در نظر می گیریم. ضرایب مجهول این چند جمله ایها طوری انتخاب می شوند تا منحنی دامنه یا فاز حاصله در چندین نقطه بر منحنی دامنه یا فاز فیلتر دلخواه منطبق شود.

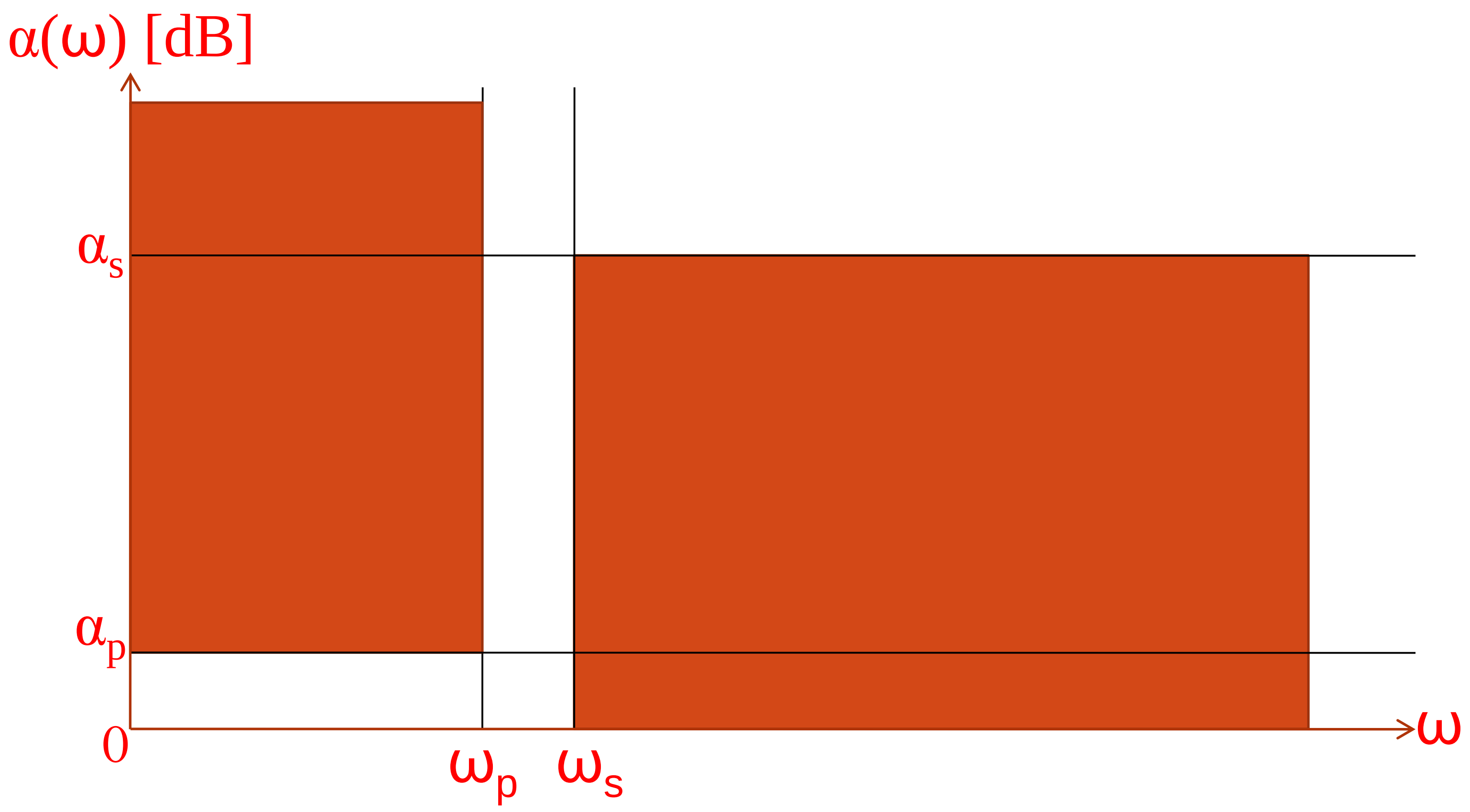
تقریب فیلترهای انتخابگر فرکانس

برای تقریب مشخصه ی دامنه ی فیلترهای انتخاب گر فرکانس

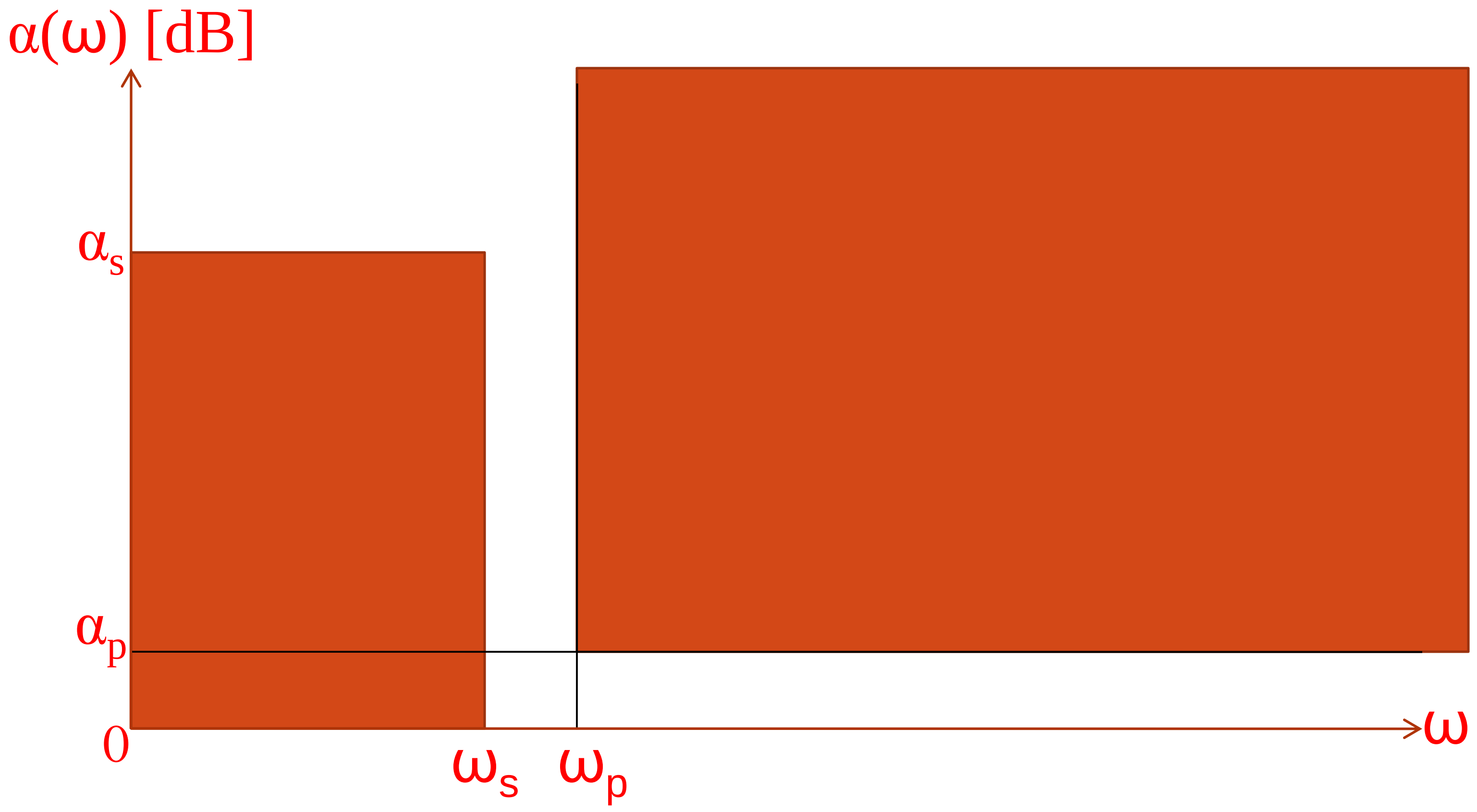
1. برای آنها یک دیواره ی تضعیف تعریف می کنیم که دارای سه ناحیه عبور(Pass Band)، قطع(Stop Band) و گذر(Transition Band) باشد.

2. پس از تعریف دیواره ی تضعیف، از توابع فرکانسی خاصی جهت تقریب دامنه ی فیلترها استفاده می کنیم، بطوریکه تمامی این توابع در داخل محدوده ی مجاز دیواره ی تضعیف قرار داشته باشند.

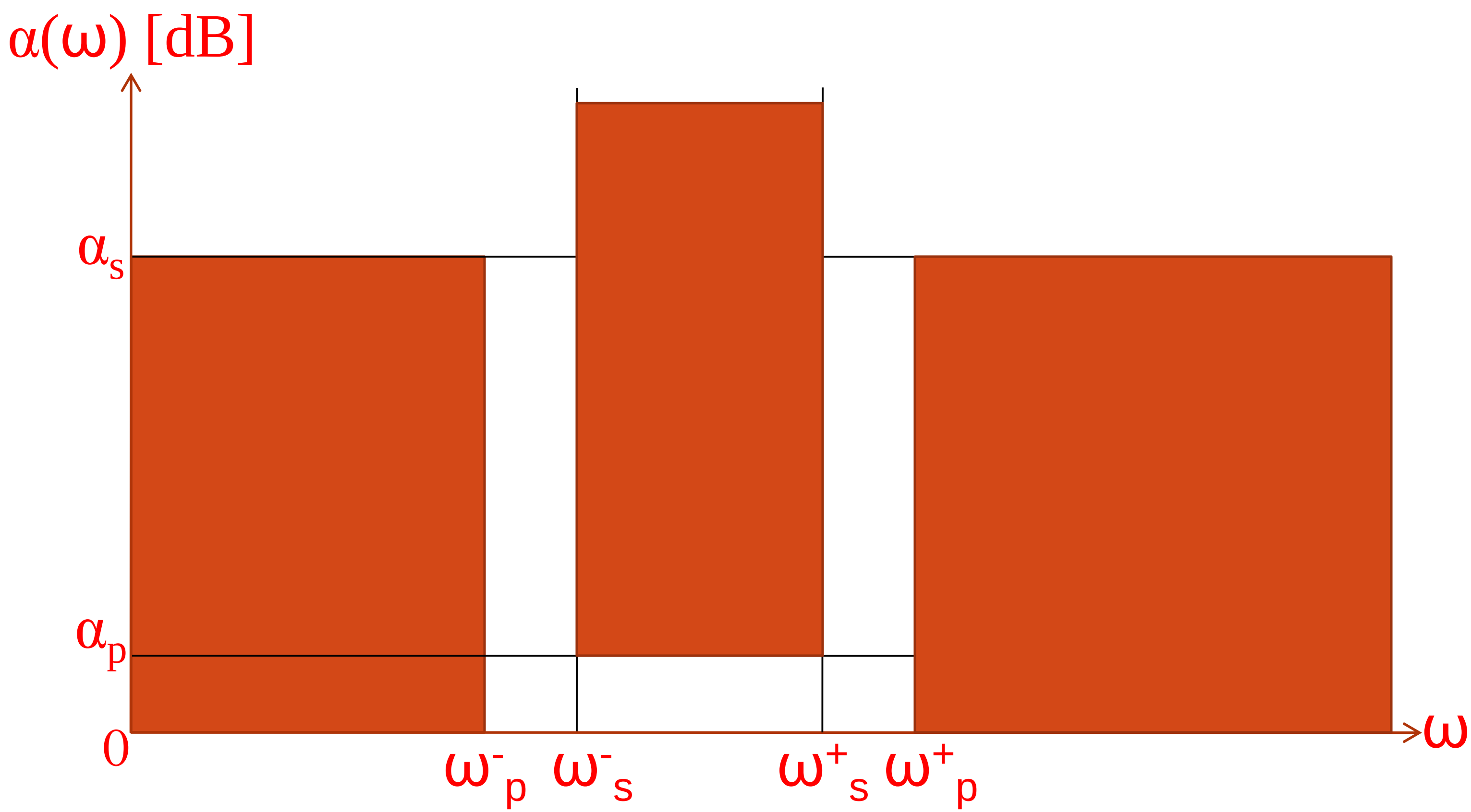
دیواره ی تضعیف برای LPF



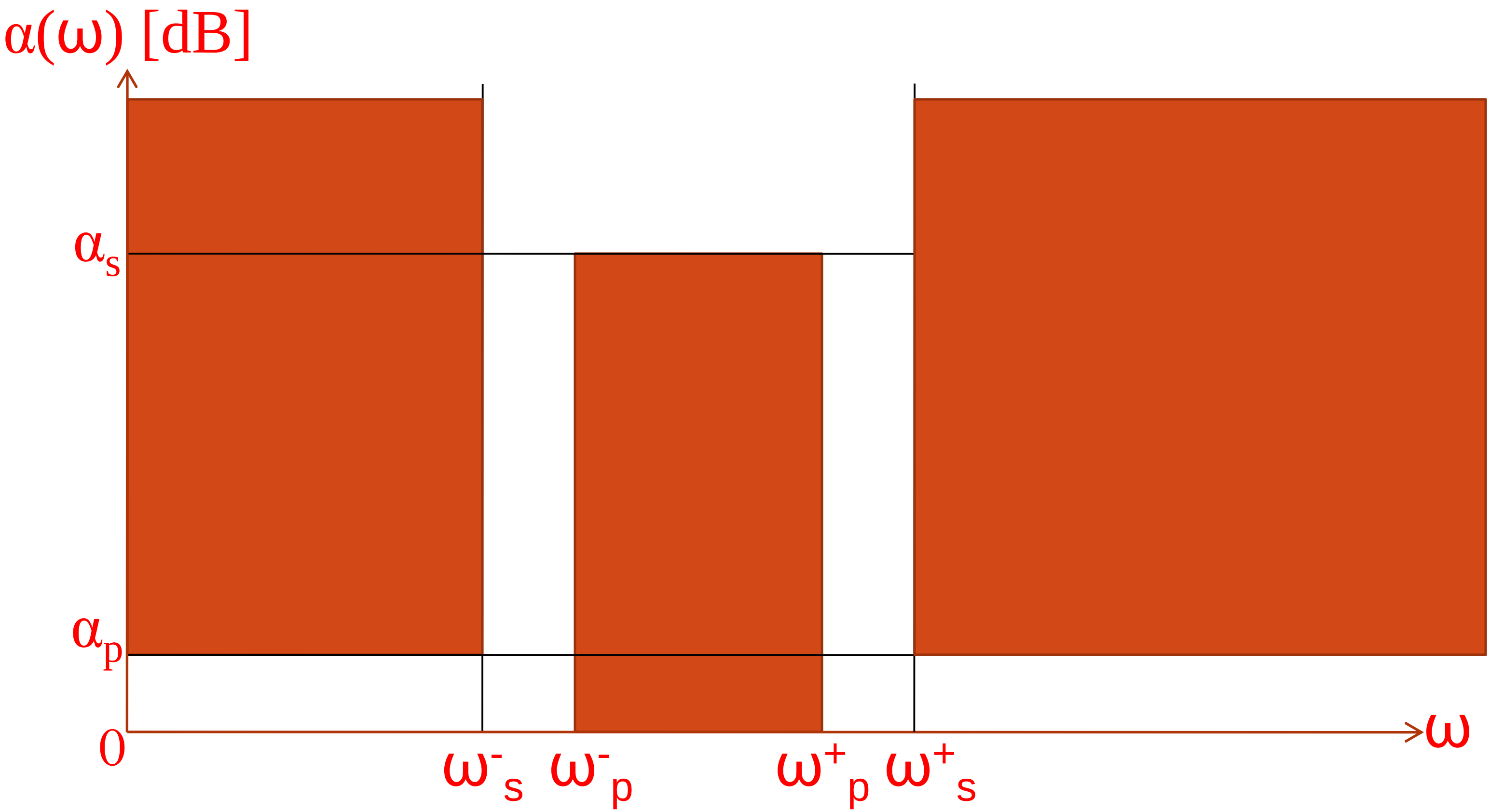
دیواره ی تضعیف برای HPF



دیواره ی تضعیف برای BPF



دیواره ی تضعیف برای BRF



تابع تضعیف تقریب

اگر تابع تبدیل تقریب H(jω) باشد تابع تضعیف به صورت زیر تعریف می شود.

$$\alpha(\omega) = -10\log(\left|H(j\omega)\right|^2)dB$$

برای اینکه تابع تبدیل تقریب فیلتر در محدوده ی دیواره های تضعیف قرار گیرد لازم است که شروط زیر برقرار باشند.

$$\alpha(\omega_p) \le \alpha_p$$

$$\alpha(\omega_s) \ge \alpha_s$$

فیلتر پایین گذر با تقریب باتروورث

- تقریب باتروورث از همه ی تقریب های هم مرتبه ی خود در باند عبور تخت تر است و به همین خاطر فیلتر **maximally flat** نامیده می شود.
- تقریب باتروورث (Butterworth) برای دامنه فیلتر پایین گذر به این صورت است.

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\omega/\omega_c\right)^{2n}}$$

- به این ترتیب تابع تضعیف به شکل زیر به دست می آید.

$$\alpha(\omega) = 10\log(1+(\omega/\omega_c)^2)[dB]$$

خصوصیات تقریب باترورث

1. دارای سه نقطه ی ثابت است.

$$|H(j0)|^2 = 1, |H(j\omega_c)|^2 = \frac{1}{2}, |H(j\infty)|^2 = 0$$

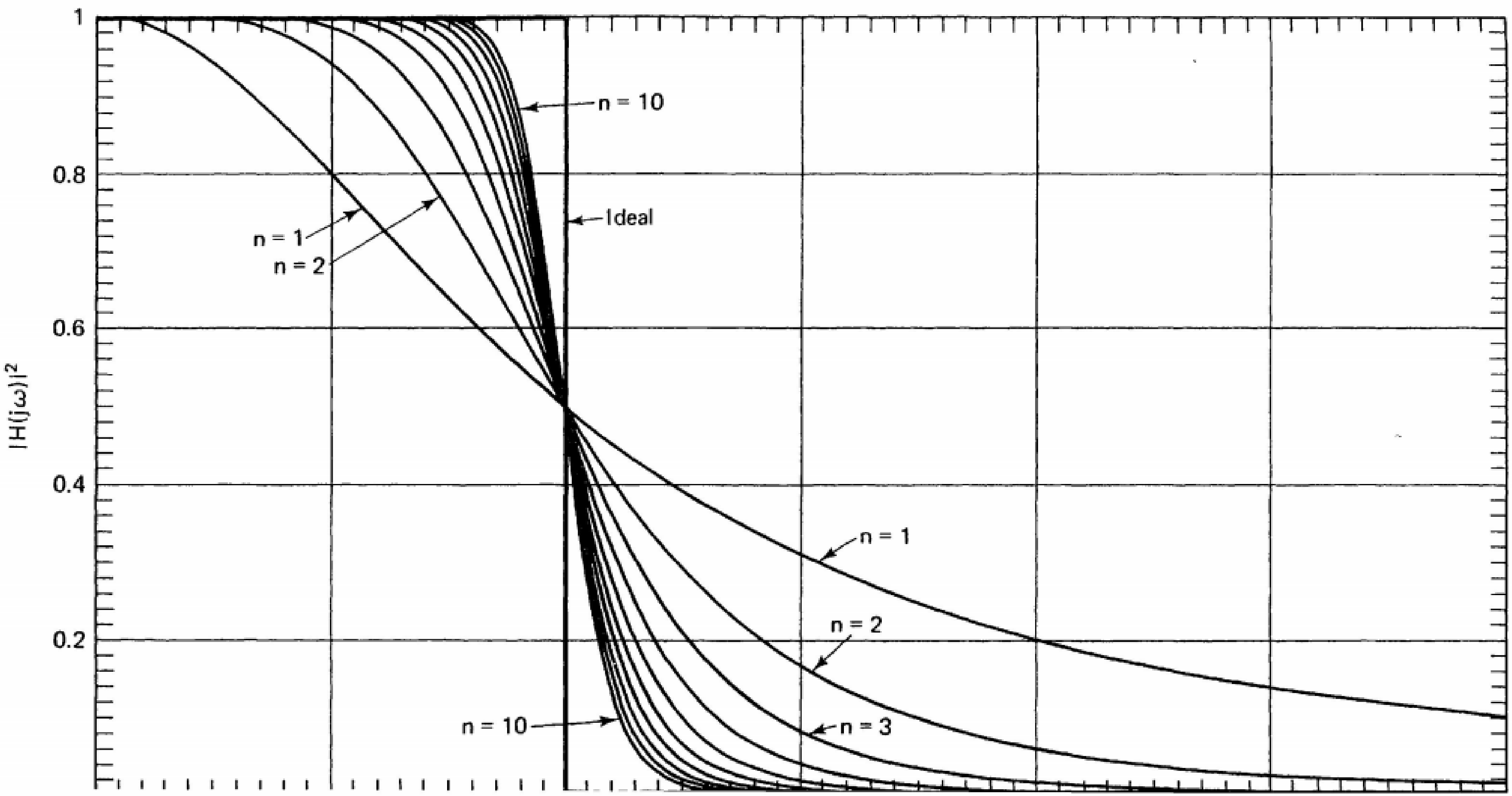
2. منحنی تقریب باترورث همواره بر حسب فرکانس نزولی است.
3. تقریب باترورث دارای حداکثر یکنواختی در باند عبور می باشد.
4. دارای شیب تضعیف ثابت می باشد.

در باند قطع $\omega >> \omega_c$:

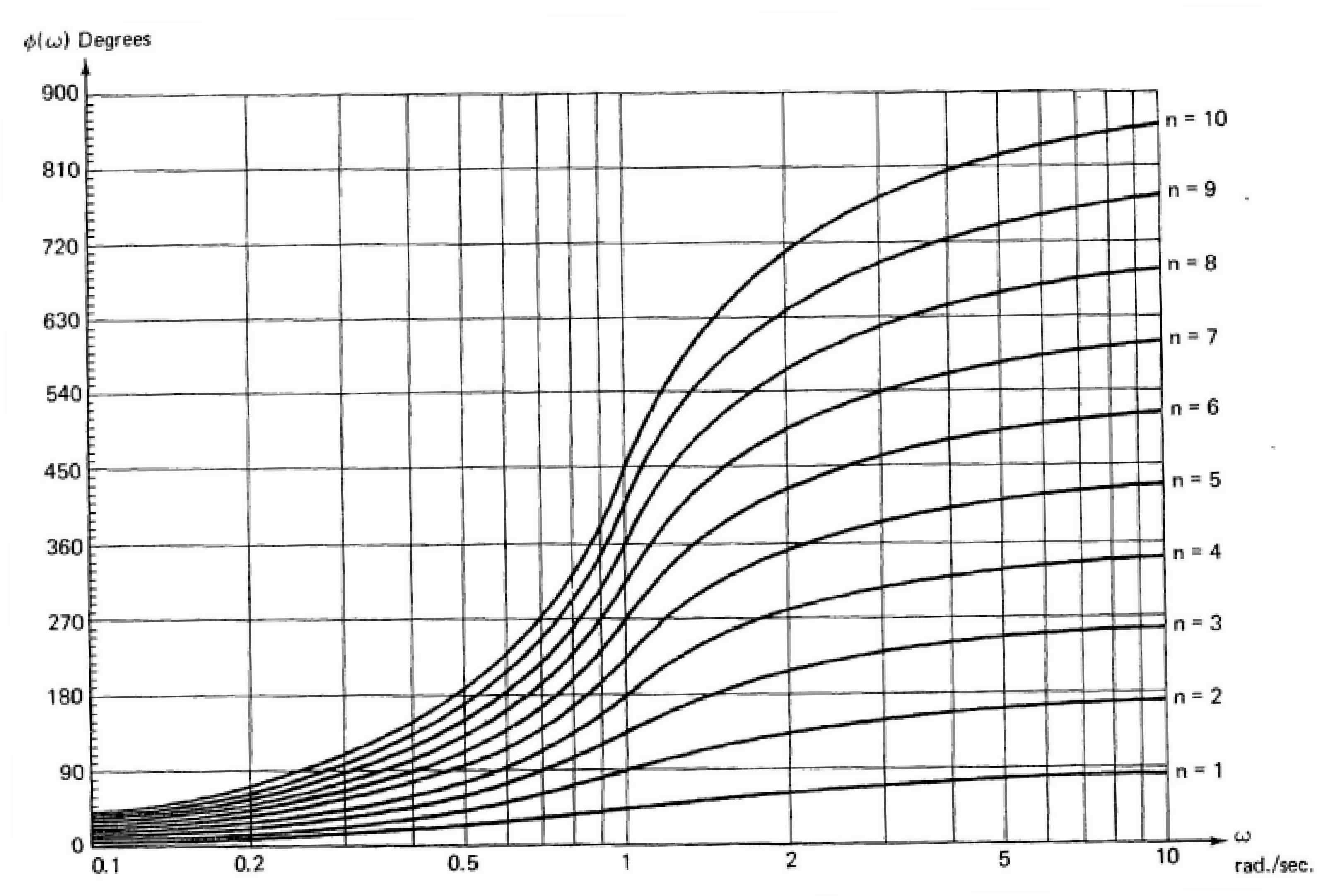
$$\alpha(\omega) = 10\log(\omega/\omega_c)^{2n} = 20n\log(\omega/\omega_c)[dB]$$

بنابراین شیب تضعیف 20n dB/dec = 6n dB/oct می باشد.

دامنه ی فیلتر باترورث نرمالیزه



فاز فیلتر باتروورث نرمالیزه



تابع تبدیل تقریب باترورث نرمالیزه

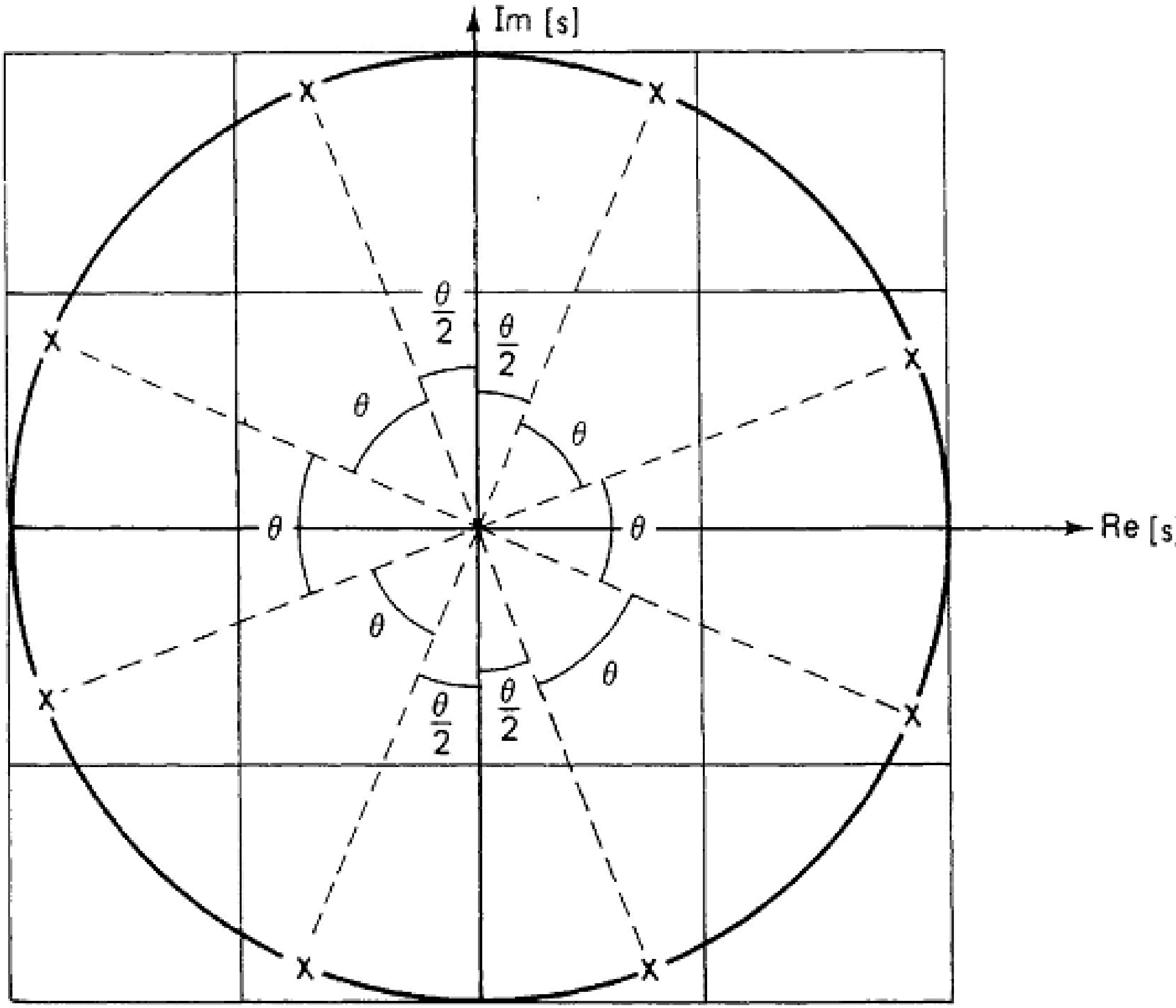
با استفاده از مشخصه ی دامنه ی تقریب باترورث تابع تبدیل این تقریب را در حالت نرمالیزه بدست می آوریم.

$$H(s)H(-s)=\left|H(j\omega)\right|^2=\frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

که قطب های آن عبارتند از:

$$s_k=e^{j\frac{(2k-1)\pi}{2n}}=\begin{cases} e^{j\frac{(2k-1)\pi}{2n}} & \text{برای n های زوج} \\ e^{j\frac{k\pi}{n}} & \text{برای n های فرد} \end{cases}$$

محل قطب های تقریب باتروورث نرمالیزه

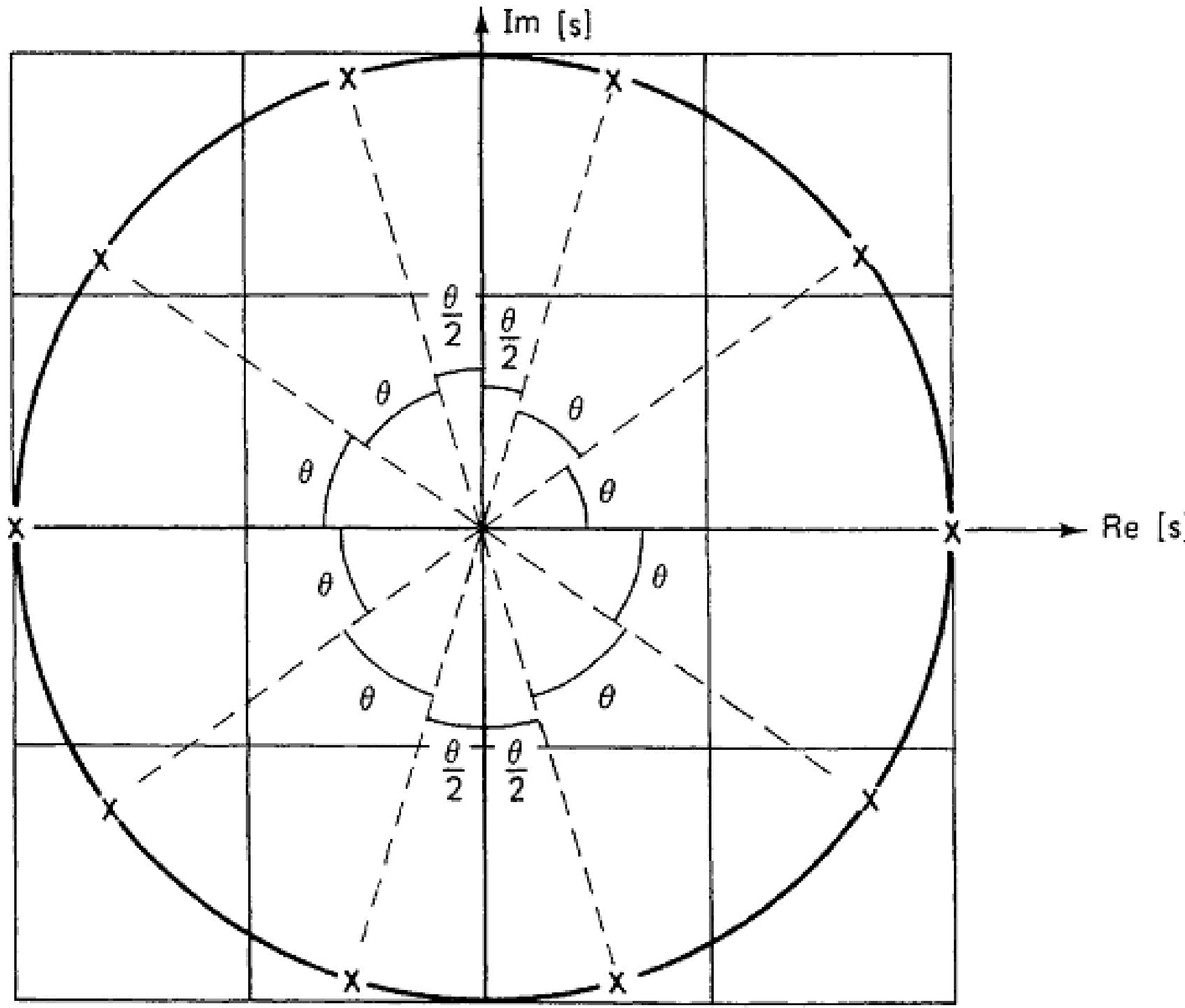


تقریب از درجه ی ۴

$n = 4$

$\theta = 45$

محل قطب های تقریب باترورث نرمالیزه



تقریب از درجه ی ۵

$n = 5$

$\theta = 36$

تابع تبدیل تقریب باتروورث نرمالیزه

با انتخاب قطب های سمت چپ محور موهومی خواهیم داشت:

$$H(s)=\prod_{k-left}^{n}\frac{1}{1-s_k}=\prod_{k-left}^{n}\frac{1}{1-(\sigma_k+j\omega_k)}$$

$$H(s)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{k}^{n/2}\frac{1}{s^2-2\sigma_k s+1} & \text{برای n های زوج}\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{s+1}\prod_{k}^{(n-1)/2}\frac{1}{s^2-2\sigma_k s+1} & \text{برای n های فرد}\end{cases}$$

چندجمله ای های تقریب باترورث

درجه	چند جمله ای های باترورث
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.4142s + 1$
3	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
4	$s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1$
5	$s^5 + 3.2361s^4 + 5.2361s^3 + 5.2361s^2 + 3.2361s + 1$
6	$s^6 + 3.8637s^5 + 7.4641s^4 + 9.1416s^3 + 7.4641s^2 + 3.8637s + 1$
7	$s^7 + 4.4940s^6 + 10.0978s^5 + 14.5918s^4 + 14.59186s^3 + 10.0978s^2 + 4.4940s + 1$
8	$s^8 + 5.1258s^7 + 13.1317s^6 + 21.8462s^5 + 25.6884s^4 + 21.8462s^3 + 13.1371s^2 + 5.1258s + 1$
9	$s^9 + 5.7588s^8 + 16.5817s^7 + 31.1634s^6 + 41.9864s^5 + 41.9864s^4 + 31.1634s^3 + 16.5817s^2 + 5.7588s + 1$
10	$s^{10} + 6.3925s^9 + 20.4317s^8 + 42.8021s^7 + 64.8824s^6 + 74.2334s^5 + 64.8824s^4 + 42.8021s^3 + 20.4317s^2 + 6.3925s + 1$

مثال – ص ۱۵۲ کتاب دکتر امیرحسینی

یافتن تابع تبدیل تقریب باترورث نرمالیزه درجه ۳

قطب های تابع تبدیل با توجه به فرد بودن درجه تقریب عبارتند از:

$$s_1 = -1, s_{2,3} = -\cos(\pi/3) \pm j\sin(\pi/3) = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس تابع تبدیل چنین خواهد شد:

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

محل قطب های تقریب باتروورث غیر نرمالیزه

- مکان هندسی قطب های تقریب باتروورث غیر نرمالیزه نیز از ضرب نمودن فرکانس قطع ω_c در قطب های تقریب باتروورث نرمالیزه بدست می آید.

مثال – ص ۱۵۳ کتاب دکتر امیرحسینی

یافتن تابع تبدیل تقریب باتروورث درجه ۴ با فرکانس قطع 1KHz

در این مثال $\omega_c = 2000\pi$ بوده و قطب های تابع تبدیل با توجه به زوج بودن درجه تقریب عبارتند از:

$$s_{1,2} = [-\cos(\pi/8) \pm j\sin(\pi/8)]\omega_c = (-0.924 \pm j0.383)\omega_c$$

$$s_{3,4} = [-\cos(\pi/8 + \pi/4) \pm j\sin(\pi/8 + \pi/4)]\omega_c = (-0.383 \pm j0.924)\omega_c$$

مثال – ص ۱۵۳ کتاب دکتر امیرحسینی

بنابراین تابع تبدیل چنین خواهد شد.

$$H(s) = \frac{1}{(s/\omega_c)^2 + 1.848(s/\omega_c) + 1} \times \frac{1}{(s/\omega_c)^2 + 0.766(s/\omega_c) + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s/\omega_c)^4 + 2.614(s/\omega_c)^3 + 3.415(s/\omega_c)^2 + 2.614(s/\omega_c) + 1}$$

درجه ی تقریب باترورث

$$\alpha(\omega_p) \le \alpha_p \Rightarrow 10\log(1+(\omega_p/\omega_c)^{2n}) \le \alpha_p \Rightarrow (\omega_c/\omega_p)^{2n} \ge \frac{1}{10^{\alpha_p/10}-1}$$

$$\alpha(\omega_s) \ge \alpha_s \Rightarrow 10\log(1+(\omega_s/\omega_c)^{2n}) \ge \alpha_s \Rightarrow (\omega_s/\omega_c)^{2n} \ge 10^{\alpha_s/10}-1$$

با ادغام دو نامساوی فوق

$$(\frac{\omega_s}{\omega_p})^{2n} \ge \frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1} \Rightarrow$$

$$n \ge \frac{\log\sqrt{(10^{\alpha_s/10}-1)/(10^{\alpha_p/10}-1)}}{\log(1/k)}, k=\frac{\omega_p}{\omega_s}<1$$

درجه ی تقریب باترورث

اگر فرکانس قطع هم داده شود، آنگاه درجه فیلتر بزرگترین درجه حاصل از روابط (I) و (II) زیر خواهد بود.

$$\alpha(\omega_p) \le \alpha_p \Rightarrow (\omega_c/\omega_p)^{2n} \ge \frac{1}{10^{\alpha_p/10}-1} \Rightarrow$$

$$n \ge -\frac{\log(\sqrt{10^{\alpha_p/10}-1})}{\log(\omega_c/\omega_p)} (I)$$

$$\alpha(\omega_s) \ge \alpha_s \Rightarrow (\omega_s/\omega_c)^{2n} \ge 10^{\alpha_s/10}-1 \Rightarrow$$

$$n \ge \frac{\log(\sqrt{10^{\alpha_s/10}-1})}{\log(\omega_s/\omega_c)} (II)$$

مثال – ص ۱۵۴ کتاب دکتر امیرحسینی

یافتن درجه ی فیلتر باترورث با مشخصات داده شده

$$\alpha_p = 0.46dB, \alpha_s = 20dB, \omega_p = 0.5, \omega_s = 2$$

$n \geq 2.45$ به دست می آید، بنابراین $n=3$ انتخاب می شود.

همچنین با استفاده از $n=3$ خواهیم داشت:

$$(\omega_c/0.5)^6 \geq \frac{1}{10^{0.46/10}-1} \Rightarrow \omega_c \geq 0.72$$

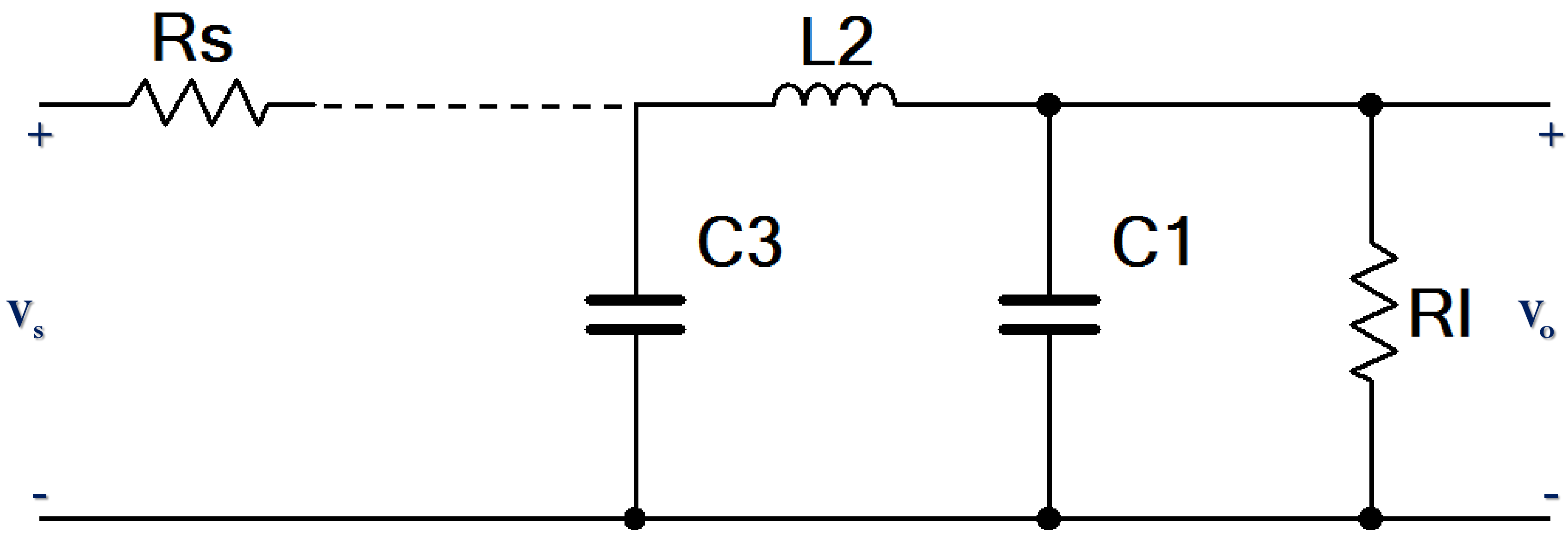
$$(2/\omega_c)^6 \geq 10^{20/10}-1 \Rightarrow \omega_c \leq 0.93$$

$$0.72 \leq \omega_c \leq 0.93$$

تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب باترورث

- پس از یافتن درجه تقریب، قطب ها و سپس تابع تبدیل فیلتر به دست می آیند.
- تابع تبدیل $H(s)$ حاصله نیز با استفاده از روشهای غیر فعال و یا فعال قابل تحقق خواهد بود.
- البته با توجه به استفاده ی زیاد از تحقق پسیو فیلترهای باترورث به ویژه در فرکانس های بالا، روابطی ساده برای محاسبه المان های مدارهای نردبانی وجود دارند که به مهمترین آنها اشاره می شود.
- معمولا در طراحی ها برای سادگی ابتدا یک تابع انتقال فیلتر نرمالیزه سنتز می شود و سپس با استفاده از تغییر مقیاس فرکانسی و امپدانس روی عناصر به فیلتر خواسته شده می رسیم.

تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب باتروورث با شرط $R_L \geq R_S$



مدار نردبانی برای فیلتر باتروورث نرمالیزه با شرط $R_L \geq R_S$

تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب باتروورث با شرط $R_L \geq R_S$

$$\alpha_i = 2\sin(\frac{\pi i}{2n}); \beta_i = 2\cos(\frac{\pi i}{2n}); \lambda = (\frac{R_L/R_S - 1}{R_L/R_S + 1})^{\frac{1}{n}}$$

- ابتدا اولین خازن محاسبه می شود.

$$C_1 = \frac{\alpha_1}{R_L(1-\lambda)}$$

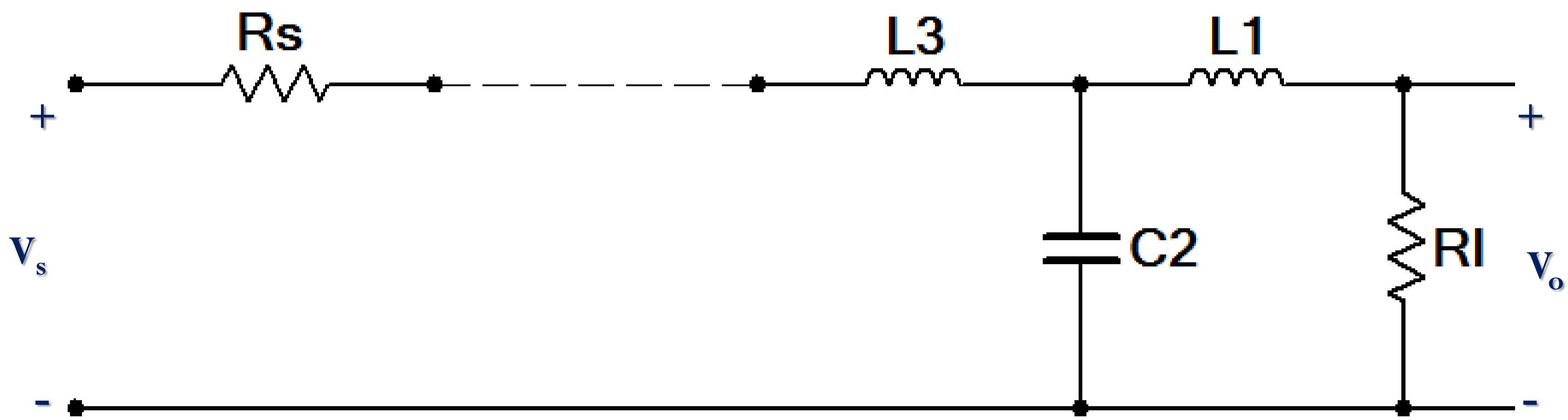
- سپس با استفاده ی متوالی و متناوب از دو رابطه زیر بازاء مقادیر مجاز m، مقادیر دیگر المان ها نیز محاسبه می شوند.

$$C_{2m-1}L_{2m} = \frac{\alpha_{4m-3}\alpha_{4m-1}}{1-\lambda\beta_{4m-2}+\lambda^2}$$

$$C_{2m+1}L_{2m} = \frac{\alpha_{4m-1}\alpha_{4m+1}}{1-\lambda\beta_{4m}+\lambda^2}$$

$$m = \begin{cases} 1,2,\ldots,\frac{n-1}{2} & \text{برای nهای زوج} \\ 1,2,\ldots,\frac{n}{2} & \text{برای nهای فرد} \end{cases}$$

تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب باترورث با شرط $R_L \le R_S$



مدار نردبانی برای فیلتر باترورث نرمالیزه با شرط $R_L \le R_S$

تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب باتروورث با شرط $R_L \leq R_S$

$$\alpha_i = 2\sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right);\ \beta_i = 2\cos\left(\frac{\pi i}{2n}\right);\ \lambda = \left(\frac{1-R_L/R_S}{1+R_L/R_S}\right)^{\frac{1}{n}}$$

- ابتدا اولین سلف محاسبه می شود.

$$L_1 = \frac{\alpha_1 R_L}{(1-\lambda)}$$

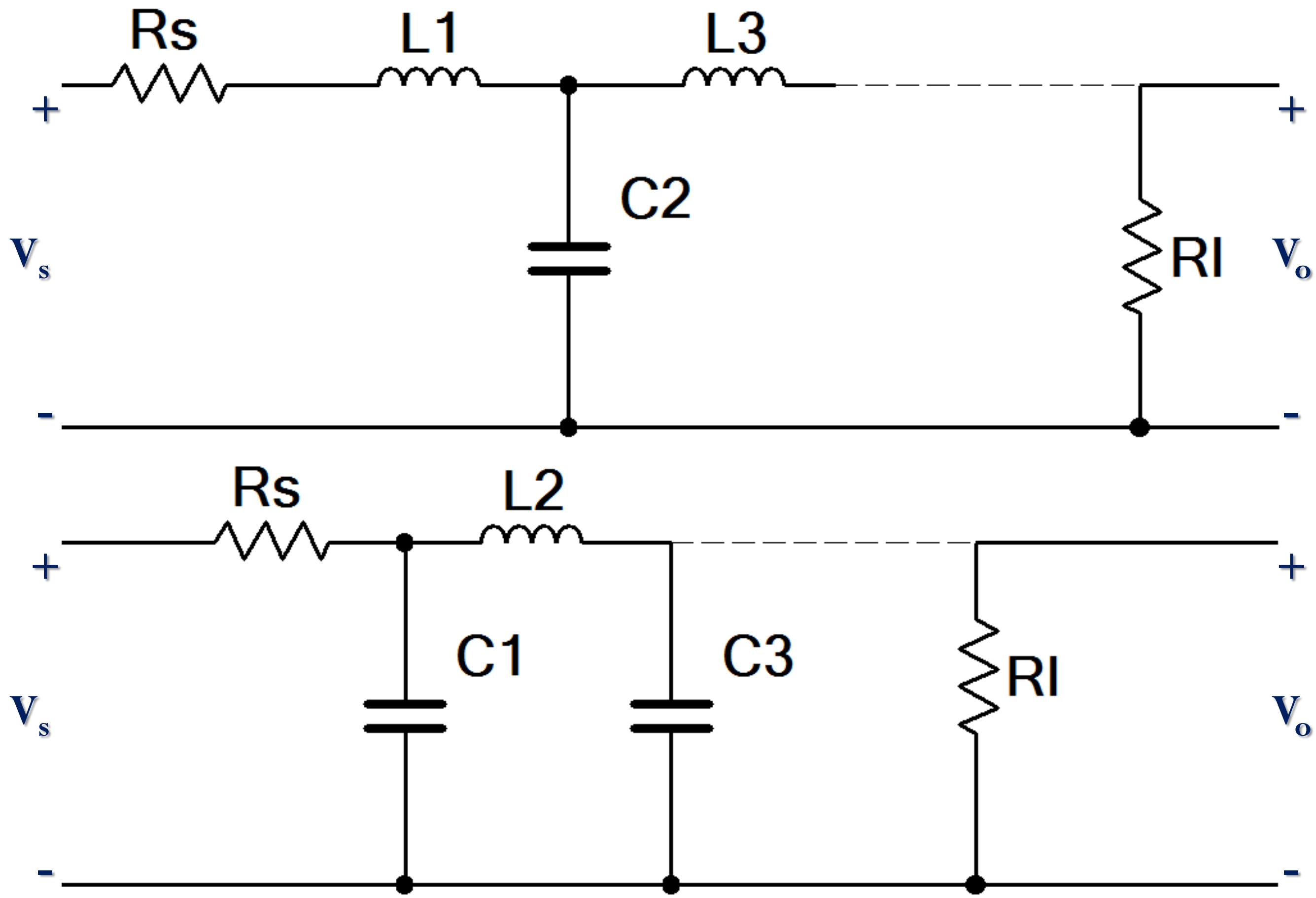
- سپس با استفاده ی متوالی و متناوب از دو رابطه زیر بازاء مقادیر مجاز m، مقادیر دیگر المان ها نیز محاسبه می شوند.

$$L_{2m-1}C_{2m} = \frac{\alpha_{4m-3}\alpha_{4m-1}}{1-\lambda\beta_{4m-2}+\lambda^2}$$

$$L_{2m+1}C_{2m} = \frac{\alpha_{4m-1}\alpha_{4m+1}}{1-\lambda\beta_{4m}+\lambda^2}$$

$$m = \begin{cases} 1,2,\ldots,\frac{n-1}{2} & \text{برای nهای زوج} \\ 1,2,\ldots,\frac{n}{2} & \text{برای nهای فرد} \end{cases}$$

تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب باترورث با شرط $R_L=R_S$



تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب باتروورث با شرط $R_L=R_S$

- با استفاده از رابطه زیر مقادیر تمامی المان ها برای $R_L=R_S=1\Omega$ محاسبه می شوند.

$$(L_m, C_m) = 2\sin\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right); m = 1,2,\ldots,n$$

مقادیر المان های فیلتر باتروورث نرمالیزه به ازای $R_L=R_S=1\Omega$					
N:(L,C)	1	2	3	4	5
1	2.00				
2	1.41	1.41			
3	1.00	2.00	1.00		
4	0.76	1.85	1.85	0.76	
5	0.62	1.62	2.00	1.62	0.62

مثال – ص ۱۳۷ کتاب مهندس خدادادی

فیلتر باترورث نرمالیزه با مشخصات زیر:

1) مشخصه ی باند عبور

$$\left|H(j0.5)\right|^2 > 0.9 \Rightarrow \omega_p = 0.5, \alpha_p = 2.107dB$$

2) مشخصه ی باند توقف

$$\left|H(j2)\right|^2 < 0.1 \Rightarrow \omega_s = 2, \alpha_s = 46.05dB$$

3) مقاومت ورودی و خروجی

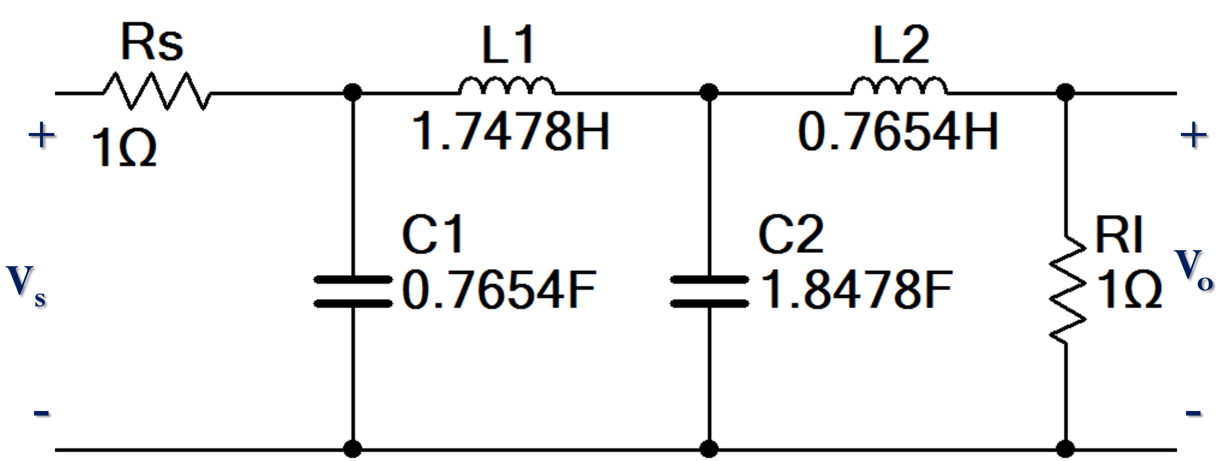
$$R_L = R_S = 1\Omega$$

مثال – ص ۱۳۷ کتاب مهندس خدادادی

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{0.5}{2} = 0.25,$$

$$n \geq \frac{\log \sqrt{(10^{4.605} - 1)/(10^{0.2107} - 1)}}{\log(4)} = \frac{5.5372}{1.3863} = 3.9942 \Rightarrow \mathrm{n} = 4;$$

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

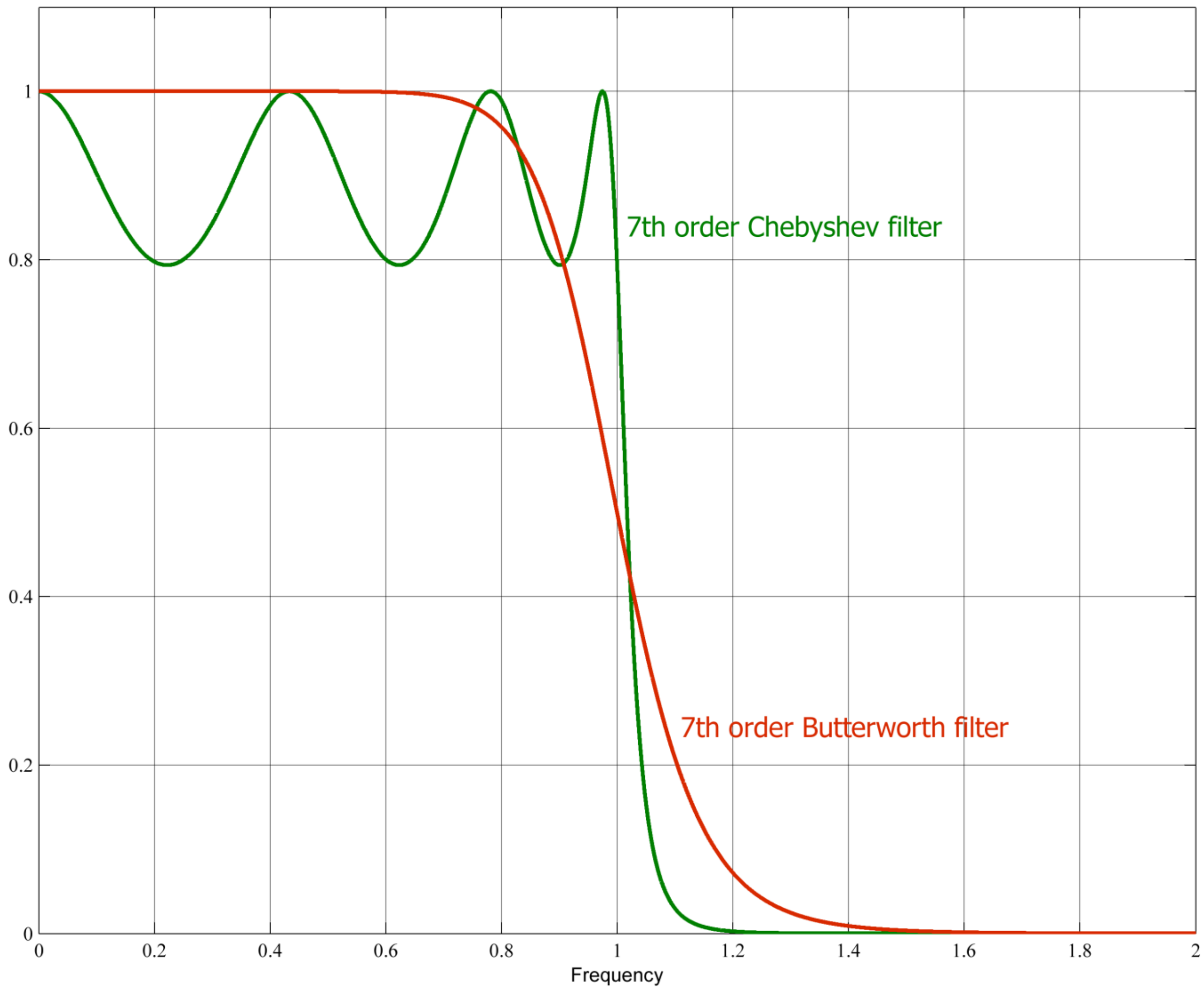


نارسایی فیلتر باتروورث

- فیلتر باتروورث از همه ی فیلترهای هم مرتبه ی خود در **باند عبور** به حالت ایده آل نزدیک تر است.
- در فیلتر باتروورث تاکید بر رفتار پاسخ فرکانسی در **باند عبور** است.
- نمی توانیم ادعا کنیم سایر مشخصه های فیلتر باتروورث از فیلترهای هم مرتبه ی خود به حالت ایده آل نزدیک تر است.

- فیلتر چبی شف از همه ی فیلترهای هم مرتبه ی خود در **باند گذر** شیب بیشتری دارد و در نتیجه فیلتر چبی شف در **باند گذر** نزدیک ترین فیلتر به فیلتر ایده آل است.

مقایسه ی فیلتر باتروث و چبی شف



خصوصیات چند جمله ای های چبی شف

$$T_n(\omega) = \cos(n\cos^{-1}\omega)$$
$$T_n(\omega) = \cosh(n\cosh^{-1}\omega)$$

با توجه به روابط مثلثاتی، رابطه بازگشتی زیر را برای چند جمله ای های چبی شف خواهیم داشت.

$$T_n(\omega) = \cos(nx), T_n(\omega) = \cosh(nx)$$
$$\cos((n+1)x) = 2\cos(nx)\cos x - \cos((n-1)x)$$
$$\cosh((n+1)x) = 2\cosh(nx)\cosh x - \cosh((n-1)x)$$
$$T_{n+1}(\omega) = 2\omega T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$$

خصوصیات چند جمله ای های چبی شف

به عنوان مثال چند جمله ایهای چبی شف درجه های صفر تا ۳ بدین صورت هستند.

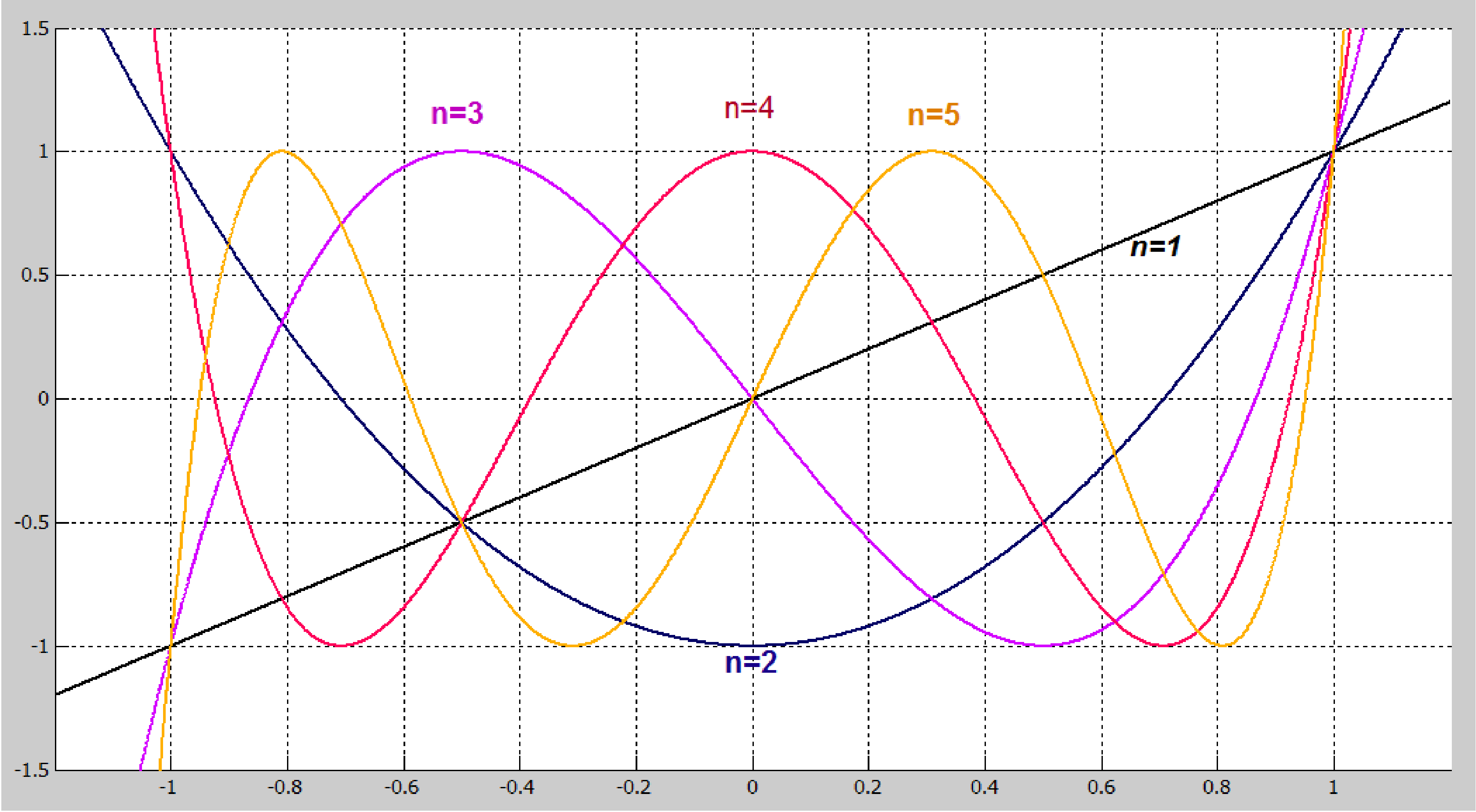
$$T_0(\omega) = \cos(0) = 1$$

$$T_1(\omega) = \cos x = \omega$$

$$T_2(\omega) = \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 2\omega^2 - 1$$

$$T_3(\omega) = \cos(3x) = 3\cos x + 4\cos^3 x = 4\omega^3 - 3\omega$$

چند جمله ای های چبی شف درجه۱ تا ۵



خصوصیات چند جمله ای های چبی شف

همانگونه که مشاهده کردیم:

1. چند جمله ای های چبی شف به ازای $1 \leq |\omega|$ دارای ریپل یکسان هستند.
2. در محدوده ی $1 \geq |\omega|$ دارای شیب صعودی یکنوا می باشند.
3. تعداد ریپل ها و شیب صعود با افزایش درجه ی این چند جمله ای هاافزایش می یابند.
4. به ازای nهای فرد چند جمله ای ها فرد و به ازای nهای زوج چند جمله ای ها زوج هستند.

فیلتر پایین گذر با تقریب چبی شف

تقریب چبی شف برای دامنه فیلتر پایین گذر بدین صورت تعریف می شود.

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$

به این ترتیب تابع تضعیف به شکل زیر به دست می آید.

$$\alpha(\omega) = 10\log(1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c))[dB]$$

می توان ثابت کرد که چند جمله ای های چبی شف، بیشترین شیب و مقدار تضعیف را نسبت به هر چند جمله ای دیگر هم درجه خود ایجاد می کنند.

خصوصیات تقریب چبی شف

1. دارای سه نقطه ی ثابت است.

$$\left|H(j0)\right|^2 = \begin{cases} 1 : odd\_n \\ \dfrac{1}{1+\varepsilon^2} : even\_n \end{cases}, \left|H(j\omega_c)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}, \left|H(j\infty)\right|^2 = 0$$

2. تقریب چبی شف دارای ریپل با دامنه یکسان در باند عبور بوده (Equiripple Filter) و تعداد تحدب ها و تقعرهای آن برابر با درجه تقریب می باشد. مقدار ریپل که همان حداکثر تضعیف در باند عبور است، چنین تعریف می شود.

$$R = 10\log(1+\varepsilon^2)[dB] \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{R/10} - 1}$$

خصوصیات تقریب چبی شف

3. در باند قطع همواره نزولی است.
4. دارای شیب ثابت تضعیف می باشد.

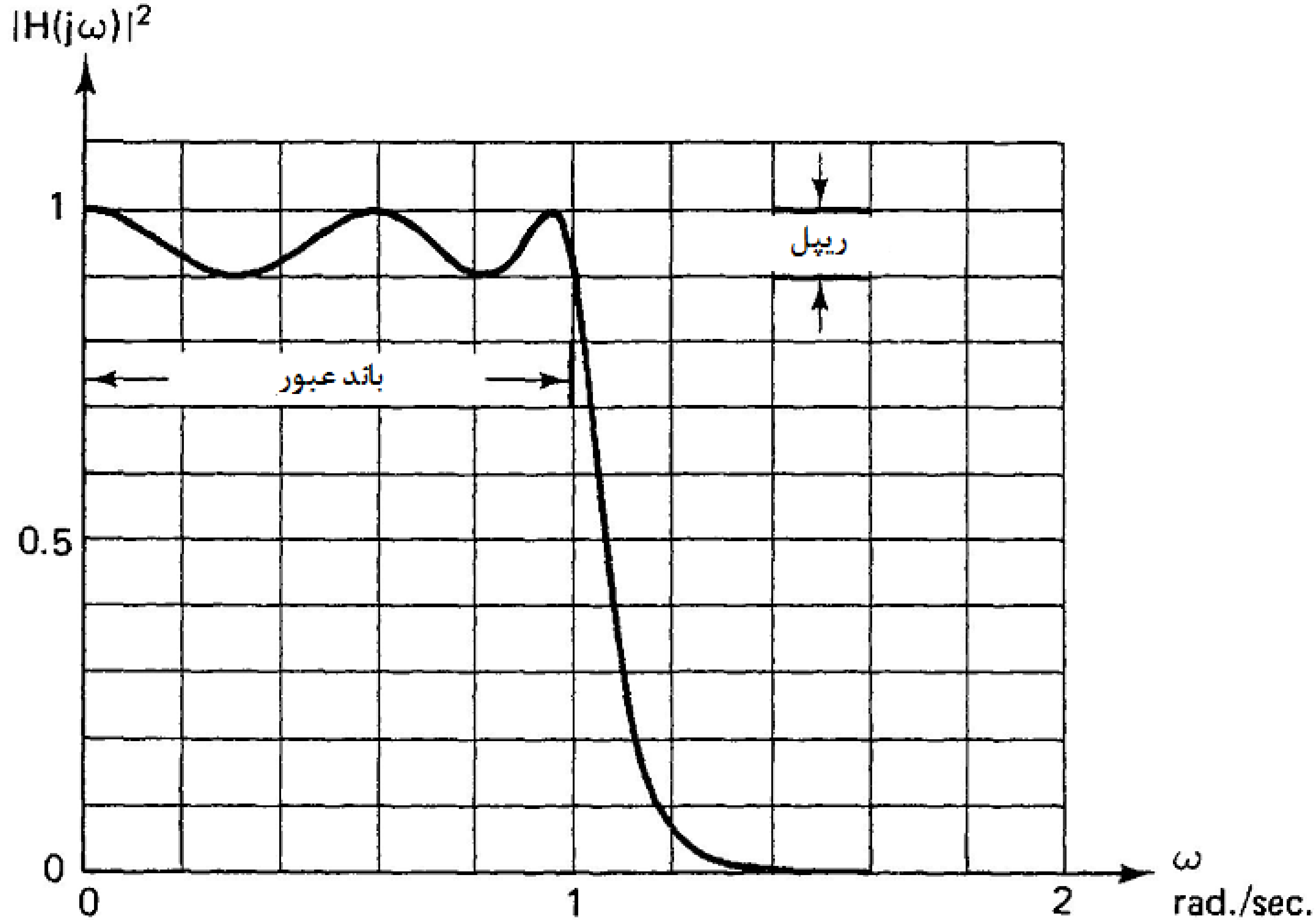
$$\lim_{x\to\infty} T_n(x) = 2^{n-1}x^n \Rightarrow$$

$$\alpha(\omega) \approx 10\log(\varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)) = 10\log(\varepsilon^2 2^{2(n-1)}(\omega/\omega_c)^{2n})$$

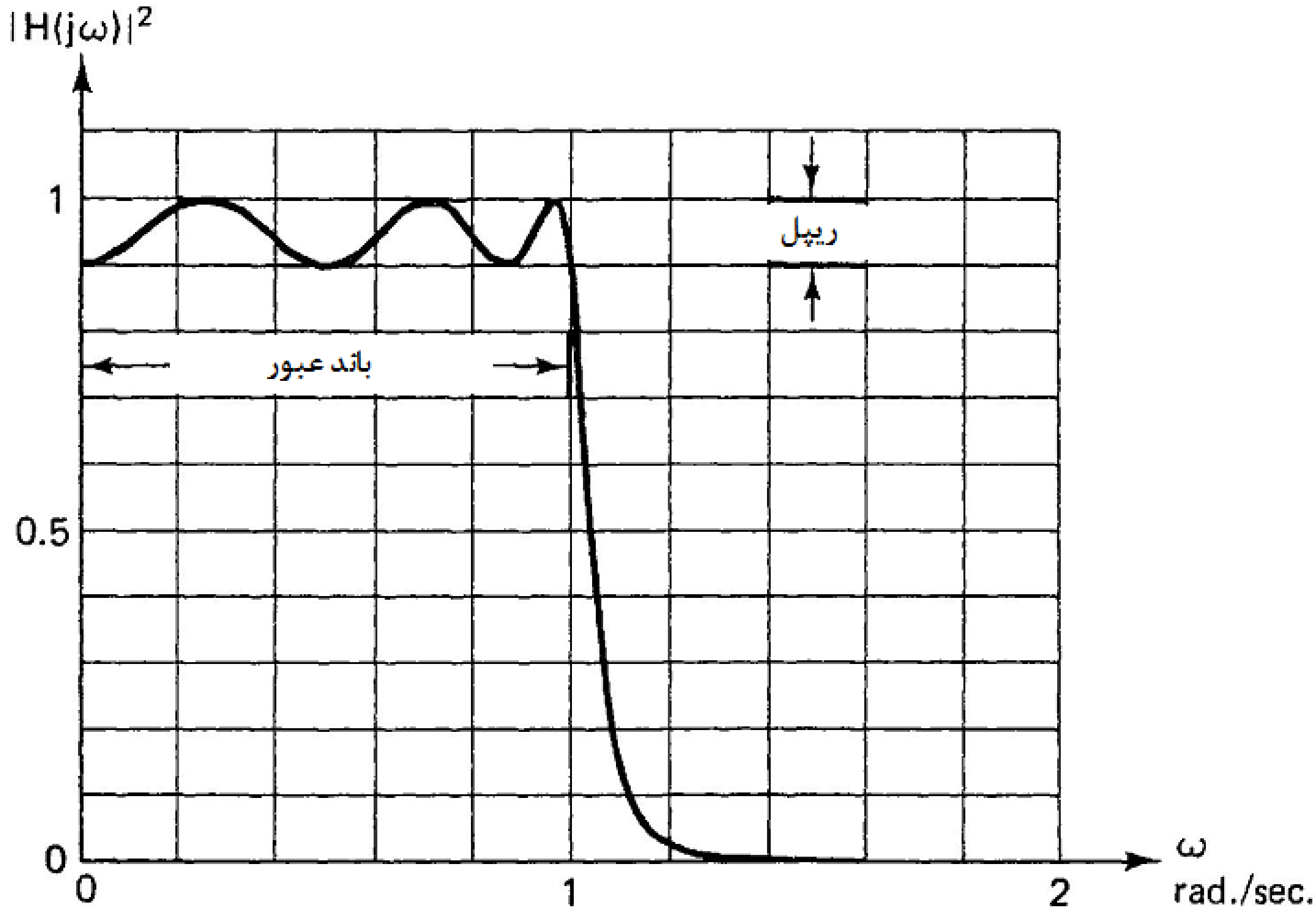
$$\Rightarrow \alpha(\omega) = 20\log(\omega/\omega_c) + 6(n-1) + 20\log\varepsilon$$

بنابراین شیب تضعیف همانند تقریب باترورث 20n dB/dec=6ndB/oct می باشد. ولی اندازه ی تضیف 6(n-1)dB بیشتر از فیلتر باترورث است.

دامنه ی فیلتر چبی شف نرمالیزه ی مرتبه ۵



دامنه ی فیلتر چبی شف نرمالیزه ی مرتبه ۶



تابع تبدیل تقریب چبی شف نرمالیزه

محل ریشه های تابع تبدیل تقریب چبی شف عبارتست از:

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k$$

$$\begin{cases} \sigma_k = a\cos\left(\dfrac{2k+n-1}{2n}\pi\right) \\ \omega_k = b\sin\left(\dfrac{2k+n-1}{2n}\pi\right) \end{cases}$$

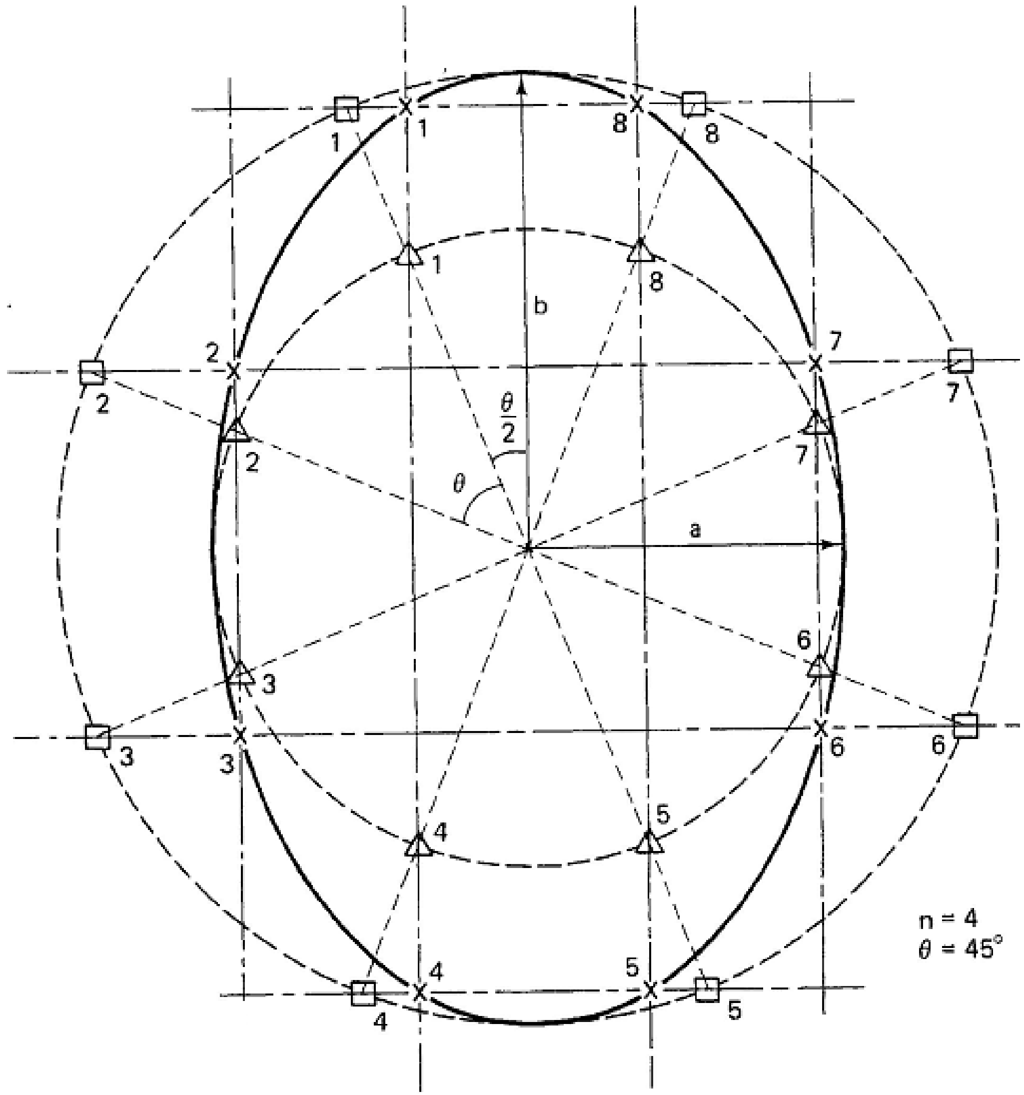
که در آن k می تواند 2nعدد صحیح متوالی باشد و a وb چنین تعریف می شوند.

$$a = \sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\left(1/\varepsilon\right)\right), b = \cosh\left(\frac{1}{n}\cosh^{-1}\left(1/\varepsilon\right)\right) > a$$

تابع تبدیل تقریب چبی شف نرمالیزه

- مکان هندسی قطب های تقریب چبی شف نرمالیزه روی یک بیضی قائم با قطر کوچک 2a و قطر بزرگ 2b می باشد.
- قسمت حقیقی قطب های چبی شف، aبرابر قسمت حقیقی قطب های باترورث است.
- قسمت موهومی قطب های چبی شف، bبرابر قسمت موهومی قطب های باترورث است.
- می توان قطب های تابع تبدیل چبی شف را از روی قطب های تابع تبدیل باترورث به دست آورد.
- مکان هندسی قطب های تابع تبدیل غیر نرمالیزه از ضرب نمودن فرکانس قطع در قطب هاب تقریب چبی شف نرمالیزه به دست می آید.

محل قطب های تقریب چبی شف نرمالیزه



تابع تبدیل تقریب چبی شف نرمالیزه

با انتخاب قطب های سمت چپ محور موهومی خواهیم داشت:

$$H(s) = \prod_{k-left}^{n} \frac{1}{1-s_k} = \prod_{k-left}^{n} \frac{1}{1-(\sigma_k + j\omega_k)}$$

$$H(s) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k}^{n/2} \frac{1}{s^2 - 2\sigma_k s + 1} & \text{برای n های زوج} \\ \displaystyle\frac{1}{s+1} \prod_{k}^{(n-1)/2} \frac{1}{s^2 - 2\sigma_k s + 1} & \text{برای n های فرد} \end{cases}$$

مثال – ص ۱۶۱کتاب دکتر امیرحسینی

یافتن تابع تبدیل تقریب چبی شف نرمالیزه درجه ۳ با ریپل 1dB

ابتدا سه پارامتر اولیه را محاسبه می کنیم

$$\varepsilon = \sqrt{10^{R/10} - 1} = 0.509$$

$$a = \sinh\left(\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{0.509}\right)\right) = 0.494, b = \cosh\left(\frac{1}{3}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{0.509}\right)\right) = 1.115$$

سپس قطب های تابع تبدیل مشخص می شوند

$$s_1 = -a = -0.494$$

$$s_{2,3} = -a\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \pm j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}b = -0.247 \pm j0.966$$

مثال – ص ۱۶۱کتاب دکتر امیرحسینی

نهایتا تابع تبدیل با توجه به H(0)= 1 بدست می آید.

$$H(s)=\frac{0.491}{(s+0.494)(s^2+0.494s+0.994)}$$

$$H(s)=\frac{0.491}{s^3+0.988s^2+1.238s+0.491}$$

مثال – ص ۱۶۱کتاب دکتر امیرحسینی

یافتن تابع تبدیل تقریب چبی شف درجه ۴ با ریپل 1dB تا فرکانس 1KHz

$$\omega_c = 2000\pi, H(0) = 1\Big/\sqrt{1+\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{R/10} - 1} = 0.509; a = 0.364; b = 1.064$$

$$s_{1,2} = [-a\cos(\frac{\pi}{8}) \pm j\sin(\frac{\pi}{8})b]\omega_c = (-0.336 \pm j0.407)\omega_c$$

$$s_{3,4} = [-a\cos(\frac{3\pi}{8}) \pm j\sin(\frac{3\pi}{8})b]\omega_c = (-0.139 \pm j0.983)\omega_c$$

$$H(s) = \frac{0.244}{(s/\omega_c)^4 + 0.950(s/\omega_c)^3 + 1.451(s/\omega_c)^2 + 0.740(s/\omega_c) + 0.274}$$

درجه ی تقریب چبی شف

$$\omega_c = \omega_p$$

$$n \ge \frac{\cosh^{-1}\sqrt{(10^{\alpha_s/10}-1)\big/(10^{\alpha_p/10}-1)}}{\cosh^{-1}(1/k)}, k = \frac{\omega_p}{\omega_s} < 1$$

مثال – ص ۱۶۱کتاب دکتر امیرحسینی

یافتن درجه ی فیلتر پایین گذر چبی شف با مشخصات داده شده

$$\alpha_p = 0.46dB, \alpha_s = 20dB, \omega_p = 0.5, \omega_s = 2$$

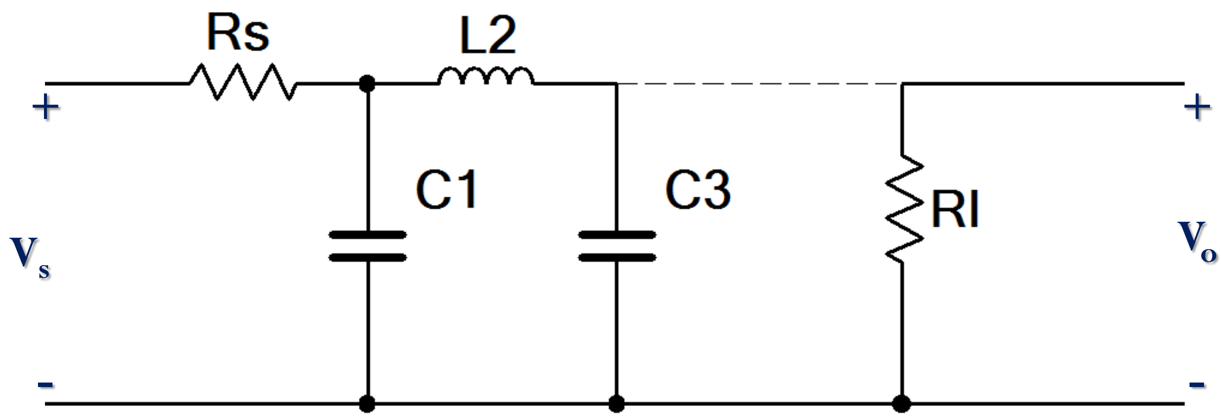
$n \ge 1.98$ به دست می آید که نزدیکترین مقدار به آن $n=2$ می باشد.

$$\omega_p = \omega_c = 0.5$$

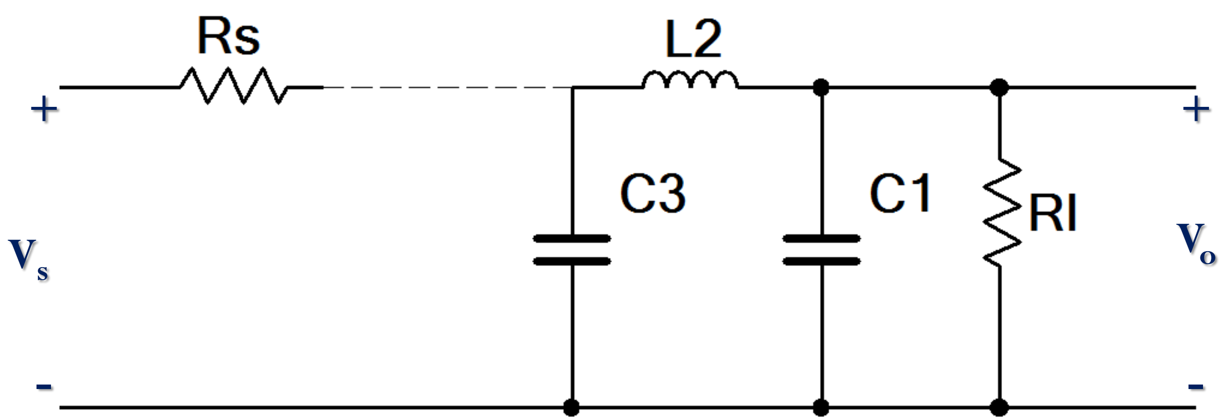
تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب چبی شف

- تابع تبدیل تقریب چبی شف یک تابع تمام قطب است.
- به این ترتیب با روش دارلینگتون قابل پیاده سازی است.
- صفرهای انتقال تابع در بی نهایت قرار دارند پس برای پیاده سازی از روش کائر ۱ استفاده می کنیم.
- تقریب چبی شف درجه ی زوج دارای افت dc می باشد که باید در پیاده سازی لحاظ شود.

تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب چبی شف



$R_L \leq R_S$



$R_L \geq R_S$

تحقق فیلتر پایین گذر با تقریب چبی شف

خازن ها و سلف های مدارها با استفاده از روابط زیر به دست می آیند:

$$C_{2m-1}L_{2m}=\frac{4\alpha_{4m-3}\alpha_{4m-1}}{b_{2m-1}(x,y)}$$

$$C_{2m+1}L_{2m}=\frac{4\alpha_{4m-1}\alpha_{4m+1}}{b_{2m}(x,y)}$$

$$m=\begin{cases}1,2,\ldots,\frac{n-1}{2} & \text{برای nهای زوج}\\ 1,2,\ldots,\frac{n}{2} & \text{برای nهای فرد}\end{cases}$$

$$C_1=\begin{cases}\frac{2\alpha_1}{(x-y)R_L} \; if R_L \geq R_s\\ \frac{2\alpha_1}{(x-y)} \; if R_L \leq R_s\end{cases}$$

$$b_i(x,y)=x^2-\beta_{2i}xy+y^2+\alpha_{2i}^2$$

$$\alpha_i=2\sin\frac{\pi i}{2n};\beta_i=2\cos\frac{\pi i}{2n}$$

$$\gamma=[\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}]^{1/n};\delta=[\sqrt{\frac{1-a}{\varepsilon^2}}+\sqrt{\frac{1-a}{\varepsilon^2}+1}]^{1/n}$$

$$x=\gamma-\frac{1}{\gamma};y=\delta-\frac{1}{\delta}$$

فیلتر چبی شف معکوس

تقریب چبی شف معکوس برای دامنه فیلتر پایین گذر بدین صورت تعریف می شود.

$$\left|H(j\omega)\right|^2=\frac{\varepsilon^2T_n^2\left(\omega_c/\omega\right)}{1+\varepsilon^2T_n^2\left(\omega_c/\omega\right)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\varepsilon^2T_n^2\left(\omega_c/\omega\right)}}$$

به این ترتیب تابع تضعیف به شکل زیر به دست می آید.

$$\alpha(\omega)=10\log(1+\frac{1}{\varepsilon^2T_n^2\left(\omega_c/\omega\right)})[dB]$$

فیلتر چبی شف معکوس

مقدار ریپل که همان حداقل تضعیف در باند قطع است، چنین تعریف می شود.

$$R_s = 10\log(1 + 1/\varepsilon^2)[dB]$$

$$\varepsilon = 1/\sqrt{10^{R_s/10} - 1}$$

به این ترتیب تابع تضعیف به شکل زیر به دست می آید.

$$\alpha(\omega) = 10\log(1 + \frac{1}{\varepsilon^2 T_n^2(\omega_c/\omega)})[dB]$$

فیلتر چبی شف معکوس

- فیلترهای باتروورث و چبی شف هیچ صفر محدودی ندارند و همه ی صفرهای آن ها در بی نهایت واقع شده است؛ به همین خاطر به آن ها فیلترهای تمام قطب گفته می شود.
- فیلتر چبی شف معکوس علاوه بر قطب های محدود، در باند توقف دارای صفر محدود نیز می باشد.
- این فیلترها به راحتی از فیلتر چبی شف به دست می آیند و نسبت به فیلتر چبی شف مشخصه ی فاز بهتری نیز در باند عبور دارند.
- به دلیل وجود صفر محدود سنتز این فیلتر از پیچیدگی بیشتری نسبت به فیلترهای تمام قطب برخوردار است.

محل صفرها و قطب های تقریب چبی شف معکوس

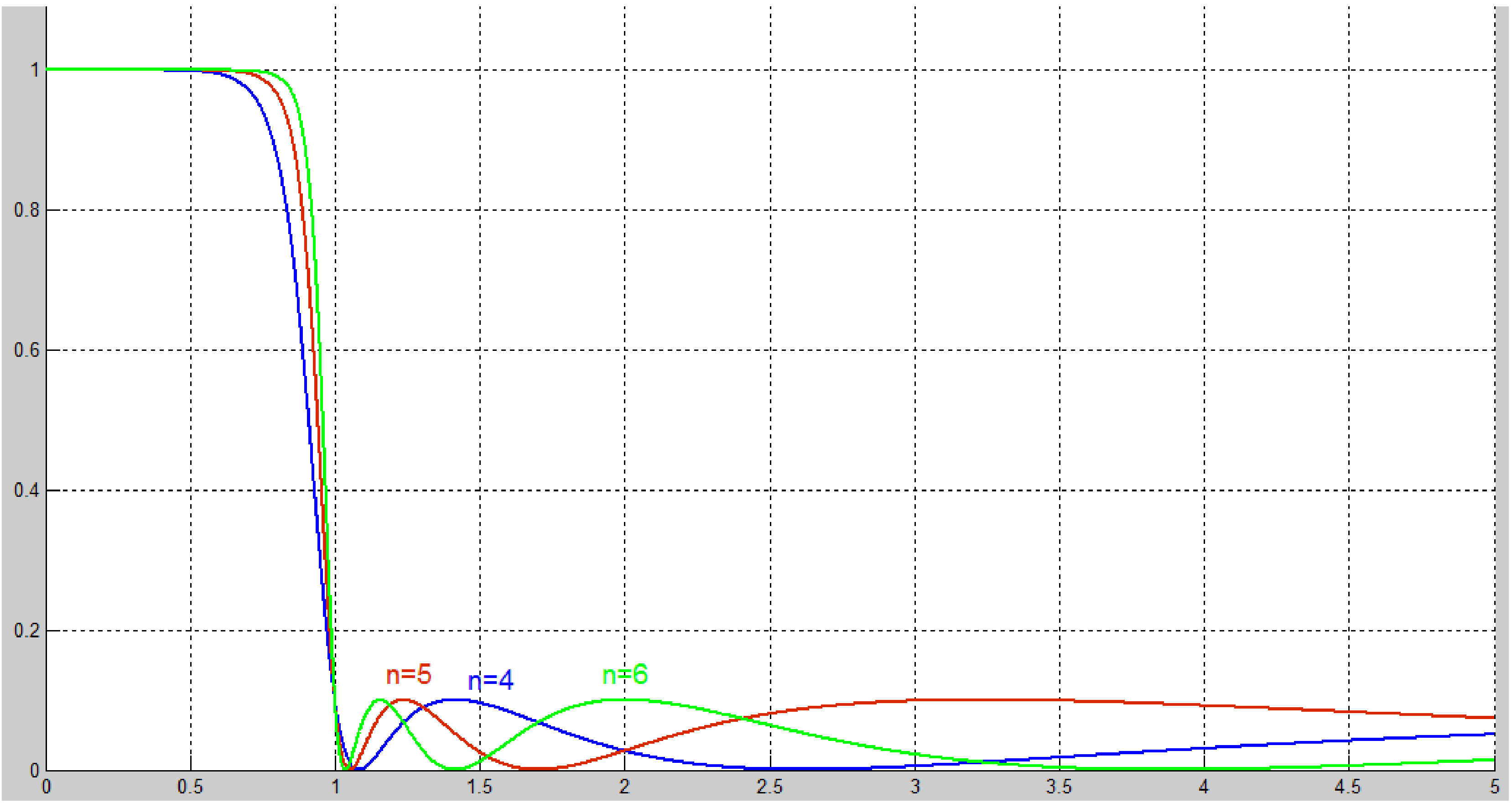
- با مقایسه تقریب چبی شف معمول و معکوس، نتیجه می شود که قطب های تقریب چبی شف معکوس نرمالیزه، عکس قطب های تقریب چبی شف عادی می باشند.
- صفرهای تقریب چبی شف معکوس هم روی محورموهومی قرار دارند.

$$H(s)H(-s)=0 \Rightarrow T_n^2(\frac{j}{s})=0 \Rightarrow \cos^2(n\cos^{-1}(\frac{j}{s}))=0$$

$$\Rightarrow n\cos^{-1}(\frac{j}{s})=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow s= j\Big/\cos(\pm(2k+1)\frac{\pi}{2})$$

برای محاسبه ی درجه ی فیلتر چبی شف معکوس نیز از $\omega_c=\omega_s$ استفاده می کنیم.

دامنه ی فیلتر چبی شف معکوس



فیلتر بیضوی(کائر)

- در واقع این فیلتر ترکیبی از دو فیلتر چبی شف و چبی شف معکوس است و به عبارت دیگر هم در باند عبور و هم در باند توقف ریپلی با دامنه ی یکسان دارد.
- مزیت این فیلتر نسبت به فیلترهای قبل، شیب تندتر فیلتر است که از این جهت پاسخ فیلتر را به فیلتر ایده آل نزدیک تر می کند.
- این فیلتر نسبت به فیلترهای قبلی با صرفه تر است زیرا برای تحقق شرایط یکسان به مرتبه ی کمتری نیاز است.
- تابع تبدیل فیلتر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_n^2(\omega)}$$

فیلتر بیضوی(کائر)

- برای nهای فرد تا $k=(n-1)/2$ تابع R_n به صورت زیر تعریف می شود.

$$R_n(\omega)=\frac{\omega(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)\ldots(\omega_k^2-\omega^2)}{(1-\omega_1^2\omega^2)(1-\omega_2^2\omega^2)\ldots(1-\omega_k^2\omega^2)}$$

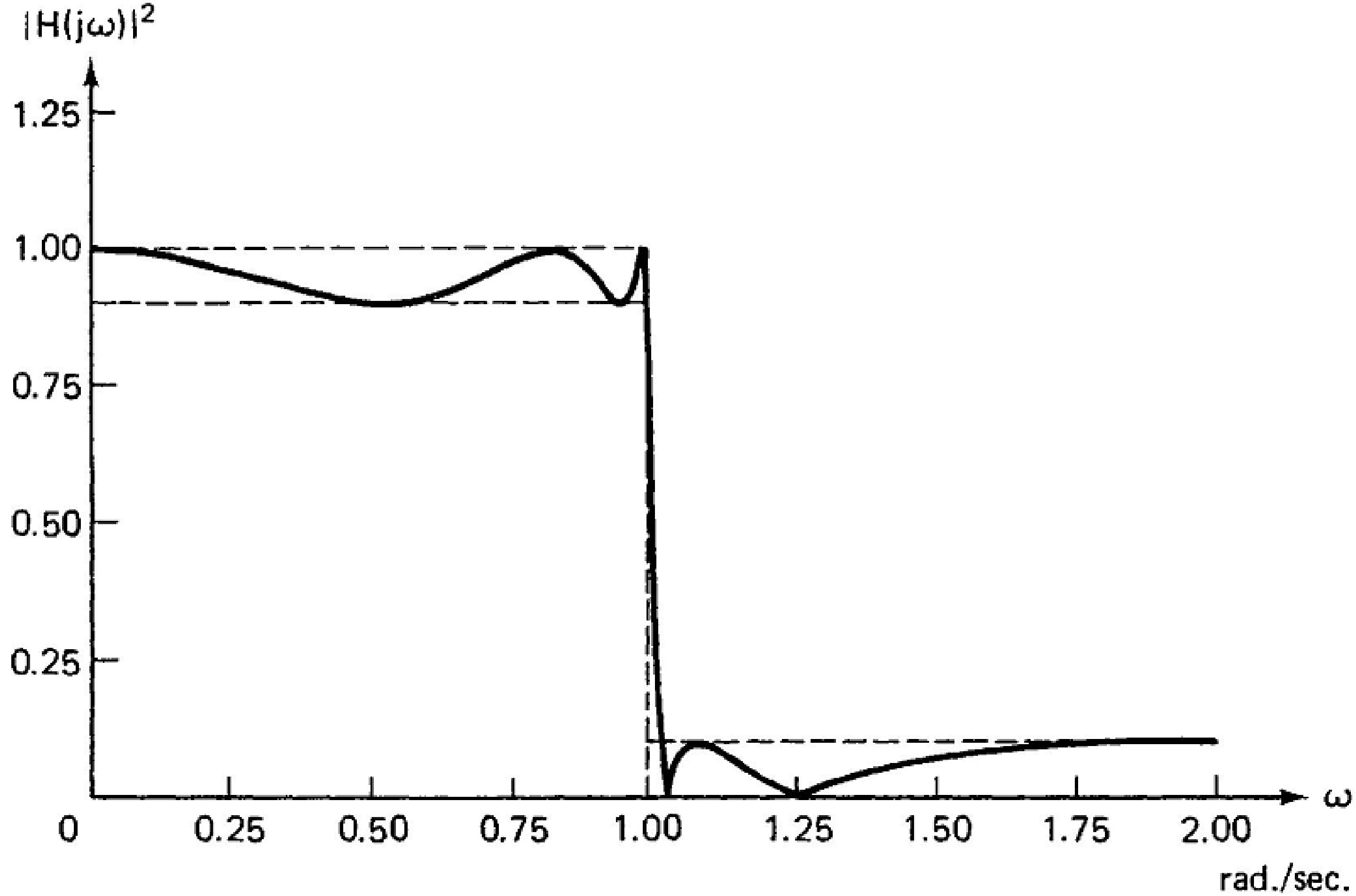
- برای nهای زوج تا $k=n/2$ تابع R_n به صورت زیر تعریف می شود.

$$R_n(\omega)=\frac{\omega(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)\ldots(\omega^2-\omega_k^2)}{(1-\omega_1^2\omega^2)(1-\omega_2^2\omega^2)\ldots(1-\omega_k^2\omega^2)}$$

- که در آن ها ω_i رابطه زیر را دارد.

$$0<\omega_i<1; i=1,2,\ldots,k$$

دامنه ی فیلتر بیضوی مرتبه ی ۵



پارامترهای فیلتر بیضوی(کائر)

- حداکثر تضعیف مجاز در باند عبور $\alpha_p = 10\log(1+\varepsilon^2)$
- حداقل تضعیف مورد نیاز در باند توقف $\alpha_s = 10\log(1+\varepsilon^2 R_n^2(\frac{\omega_s}{\omega_p}))$
- مرتبه

$$n \geq F(C) \times F(D)$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\ln(x + 2x^5 + 15x^9)$$

$$C(A) = \frac{1}{16A^2}(1+\frac{1}{2A^2}), A = \sqrt{(10^{\alpha_s/10}-1)\big/(10^{\alpha_p/10}-1)}$$

$$D(\Omega_s) = \frac{\sqrt{\Omega_s}-1}{2\sqrt{\Omega_s}+2}, \Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_p}$$

مثال

مرتبه ی یک فیلتر بیضوی با مشخصات داده شده

$$f_p = 15KHz, \alpha_p = 1.5dB, f_s = 20KHz, \alpha_p = 30dB$$

$$A = \sqrt{(10^3 - 1)/(10^{0.15} - 1)} = 49.209, \Omega_s = \frac{20k}{15k} = 1.33$$

$$C(A) = \frac{1}{16(49.209)^2}(1 + \frac{1}{2(49.209)^2}) = 2.58 \times 10^{-5}$$

$$D(\Omega_s) = \frac{\sqrt{1.33} - 1}{2\sqrt{1.33} + 2} = 0.036$$

$$F(C) = -3.363, F(D) = -1.058 \Rightarrow n \geq 3.558 \Rightarrow n = 4$$

تابع تبدیل فیلتر بیضوی نرمالیزه ی مرتبه فرد

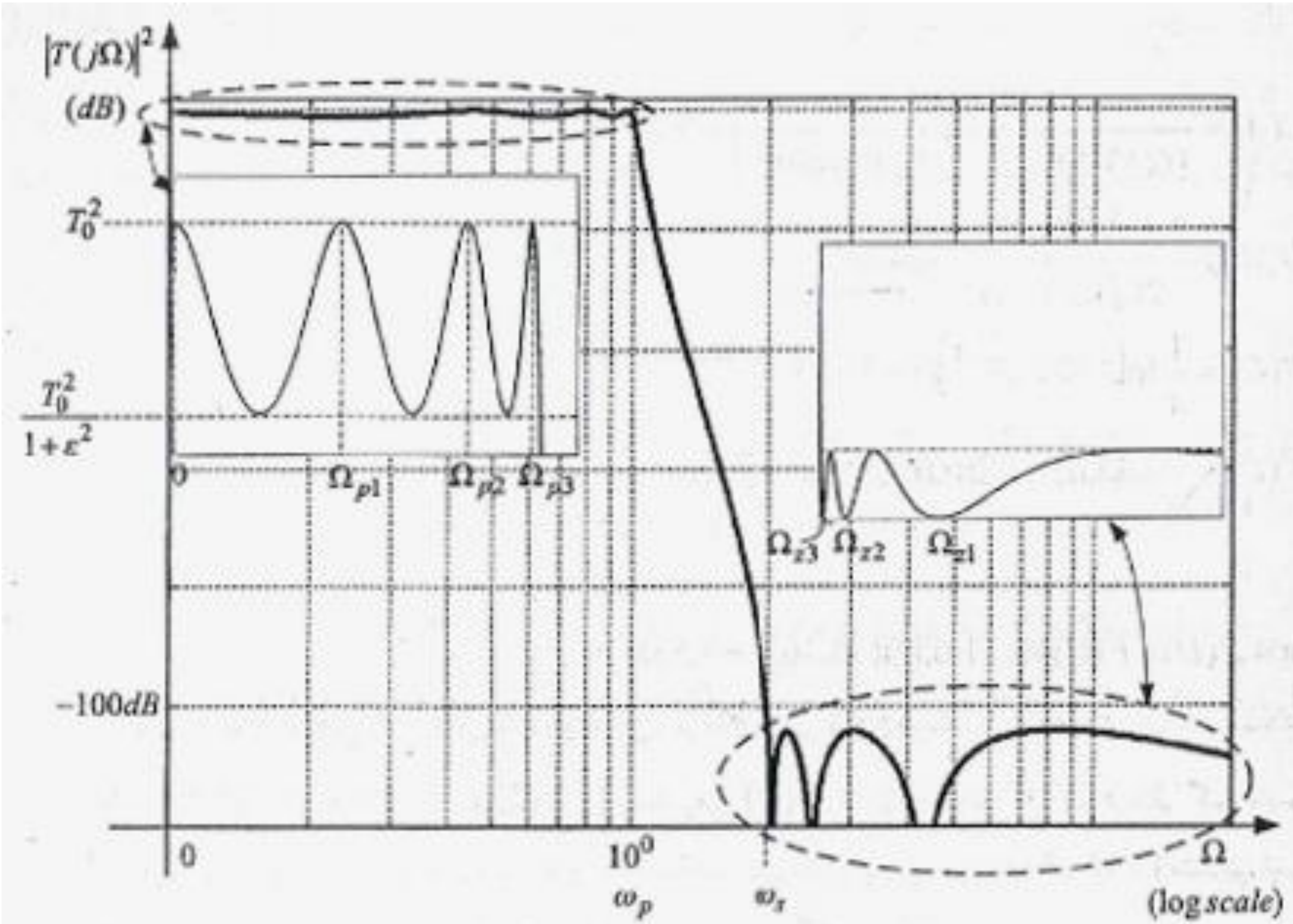
$$T_o(s)=\frac{T_0\prod_{i=1}^{(n-1)/2}(s^2+\omega_i^2)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0}$$

- مرتبه ی چند جمله ای صورت n-1 و مرتبه ی چند جمله ای مخرج n است.
- این تابع دارای صفرهای محدود به صورت زیر می باشد.

$$s=\pm j\omega_i$$

- این فیلتر دارای $(n+1)/2$ قله در باند عبور است که یکی از آن ها در $\omega=0$ واقع شده است.
- این فیلتر دارای $(n-1)/2$ صفر محدود در باند توقف می باشد و یک صفر نیز در بی نهایت دارد.

تابع تبدیل فیلتر بیضوی نرمالیزه ی مرتبه فرد



شکل۲-۱۲ مشخصه‌ی اندازه‌ی یک فیلتر بیضوی نرمالیزه با $n=7$، $\omega_s = 2$، $\alpha_p = 1dB$ و $\alpha_s = 104.268dB$ به همراه شکل‌های بزرگ‌شده‌ی باند عبور و باند توقف در مقیاس خطی.

تابع تبدیل فیلتر بیضوی نرمالیزه ی مرتبه زوج

نوع ۱

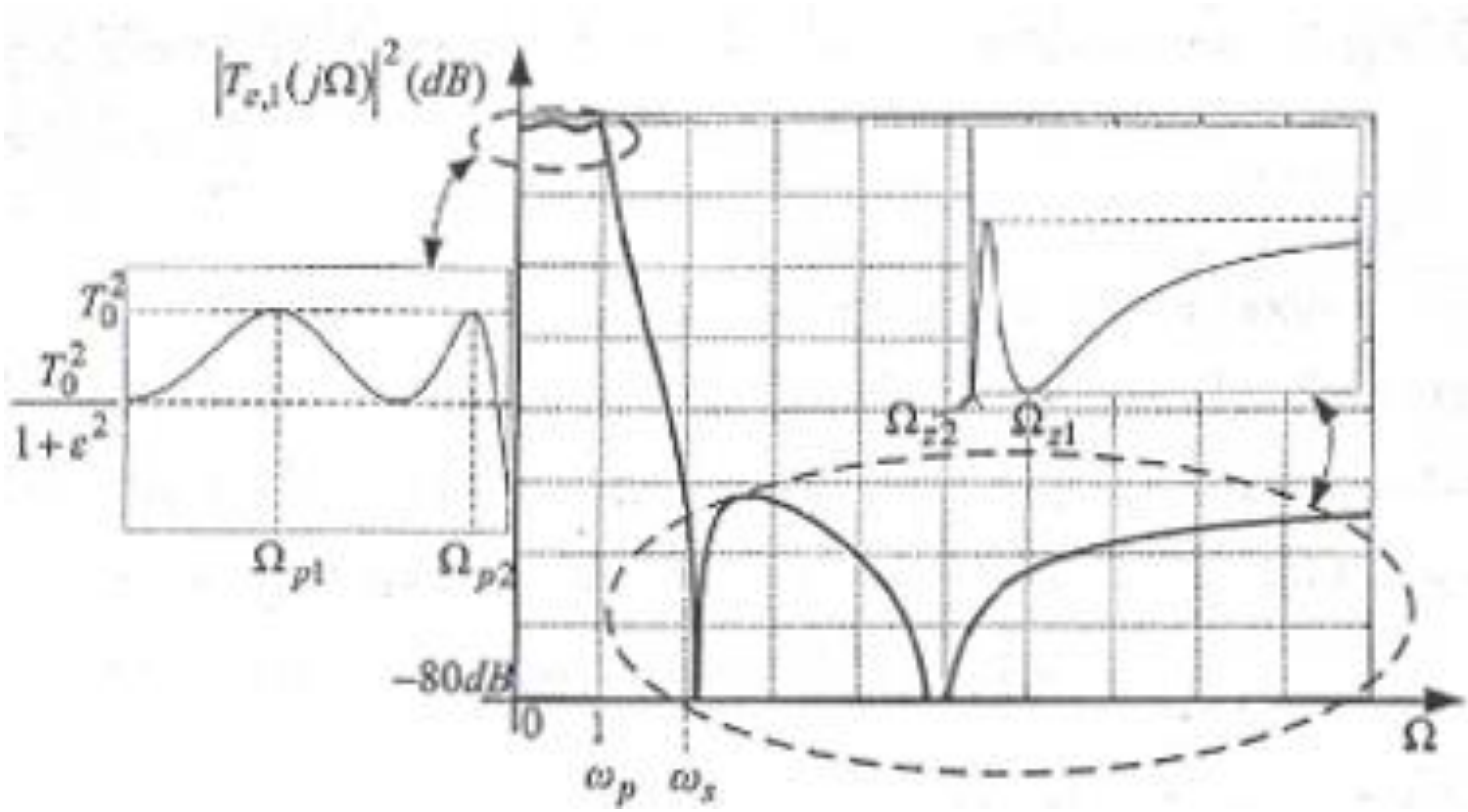
$$T_{e,1}(s) = \frac{T_0 \prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \omega_i^2)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- مرتبه ی چند جمله ای صورت و مخرج برابر n است.
- این تابع دارای صفرهای محدود به صورت زیر می باشد.

$$s = \pm j\omega_i$$

- این فیلتر دارای n/2 قله در باند عبور است که یکی از آن ها در $\omega=0$ واقع شده است.
- این فیلتر دارای n/2 صفر محدود در باند توقف می باشد و یک صفر نیز در بی نهایت دارد.

تابع تبدیل فیلتر بیضوی نرمالیزه ی مرتبه زوج نوع۱

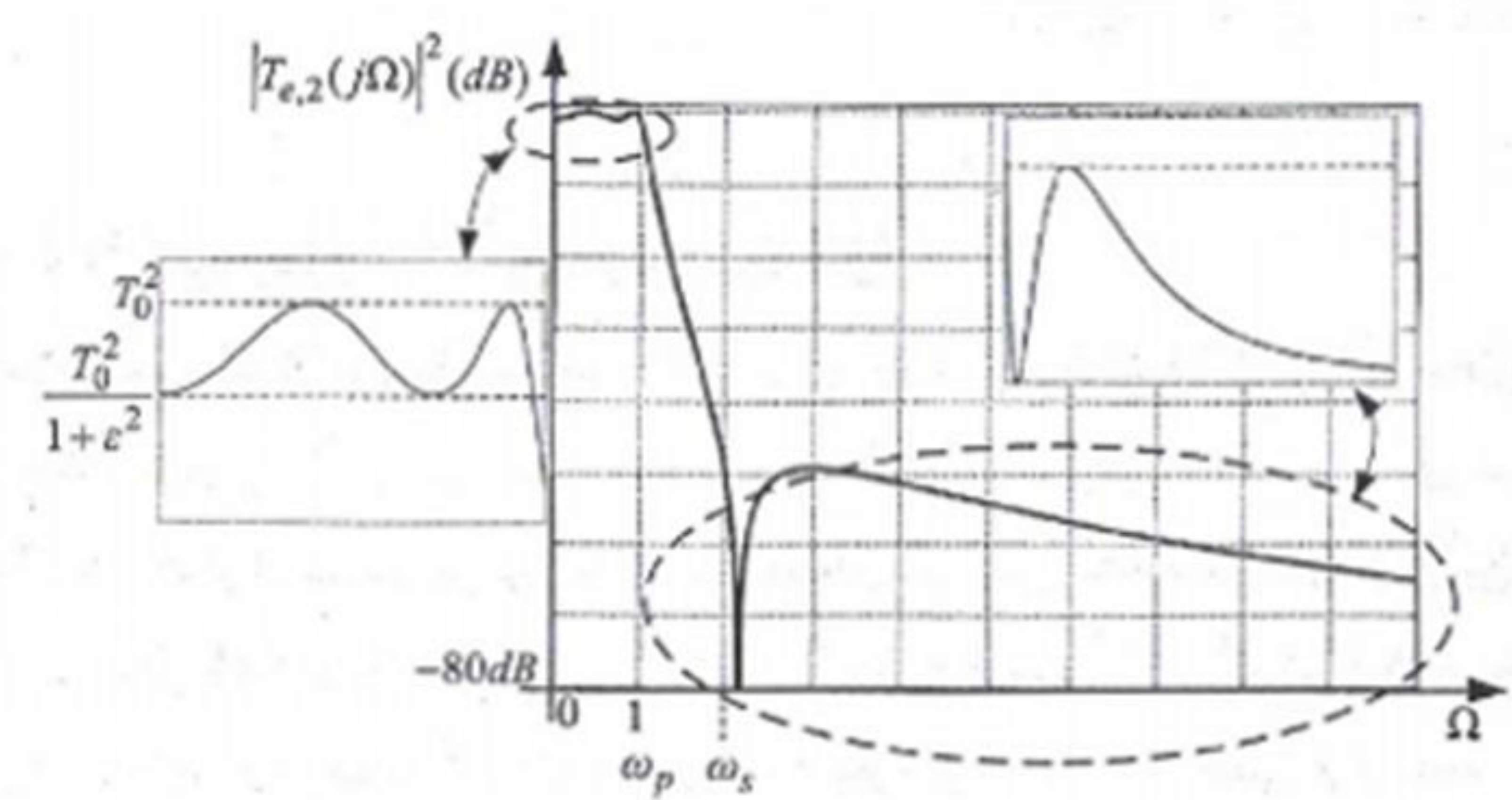


تابع تبدیل فیلتر بیضوی نرمالیزه ی مرتبه زوج نوع ۲

$$T_{e,2}(s) = \frac{T_0 \prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \omega_i^2)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- تابع تبدیل نوع یک دارای صفر در بی نهایت نیست و در نتیجه در سنتز غیر فعال نردبانی آن نیاز به ترانسفورمر پیش می آید که باعث افزایش هزینه و کاهش دقت فیلتر می شود.
- تابع نوع یک نیاز به اصلاح دارد؛ ضمن اصلاح با یک تبدیل فرکانسی بزرگترین فرکانسی که در آن مقدار تابع تبدیل صفر می شود به بی نهایت شیفت داده می شود.
- درجه ی چند جمله ای صورتت n-2 و درجه ی چند جمله ای مخرج n است.

تابع تبدیل فیلتر بیضوی نرمالیزه ی مرتبه زوج نوع ۲

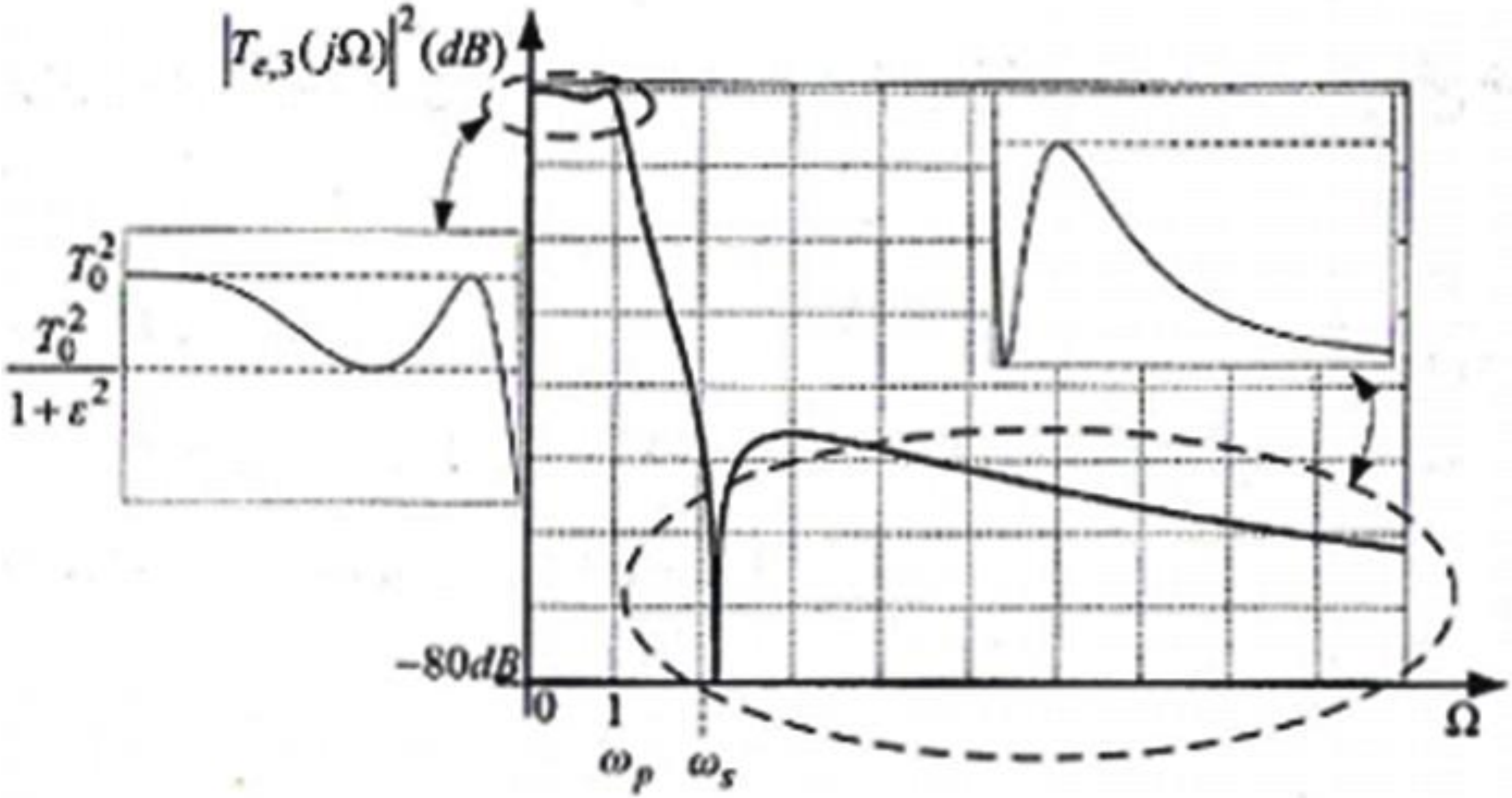


تابع تبدیل فیلتر بیضوی نرمالیزه ی مرتبه زوج نوع۳

$$T_{e,3}(s)=\frac{T_0\prod_{i=1}^{n/2}(s^2+\omega_i^2)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

- تابع تبدیل نوع دوم برای وقتی که مقاومت های منبع و بار یکسان نیستند مناسب است.
- در حالتی که این دو مقاومت یکسان هستند به علت عدم صفر انتقال در مبدا در سنتز نردبانی غیر فعال مجددا به ترانسفورمر نیاز خواهیم داشت.
- برای حل این مشکل می توان به کمک یک تبدیل فرکانسی دیگر محل اولین صفر تابع را مبدا شیفت داد.

تابع تبدیل فیلتر بیضوی نرمالیزه ی مرتبه زوج نوع۳



فیلتر پایین گذر با تقریب بسل

- در بعضی کاربردها که در آن ها اعوجاج فاز بسیار مخرب است، باید مشخصه ی تاخیر حتی الامکان یکنواخت باشد.
- در تقریب بسل مشخصه ی فاز فیلتر پایین گذر ایده آل تقریب زده می شود.
- اندازه و فاز تابع تبدیل فیلتر بسل به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} H(j\omega) = \dfrac{1}{M(j\omega) + N(j\omega)} \\ \angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\dfrac{N(j\omega)/j}{M(j\omega)}\right) = -\dfrac{1}{j}\tanh^{-1}\dfrac{N(j\omega)}{M(j\omega)} \end{cases}$$

فیلتر پایین گذر با تقریب بسل

- برای به دست آوردن M(s) و N(s) از رابطه ی زیر استفاده می کنیم.
- برای فیلتر درجه ی n کافیست n جمله ی اول کسر نوشته شود.

$$\frac{M(s)}{N(s)} = \coth(T_0 s) = \frac{1}{T_0 s} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{T_0 s} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{T_0 s} + \cfrac{1}{\cfrac{7}{T_0 s} + \dots}}}$$

- به عنوان مثال با نوشتن سه جمله ی اول داریم:

$$\frac{M(s)}{N(s)} = \coth(T_0 s) = \frac{1}{T_0 s} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{T_0 s} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{T_0 s}}} = \frac{6(T_0 s)^2 + 15}{(T_0 s)^3 + 15(T_0 s)}$$

فیلتر پایین گذر با تقریب بسل

- طبیعی ترین انتخاب برای M(s) و N(s) به صورت زیر خواهد بود.

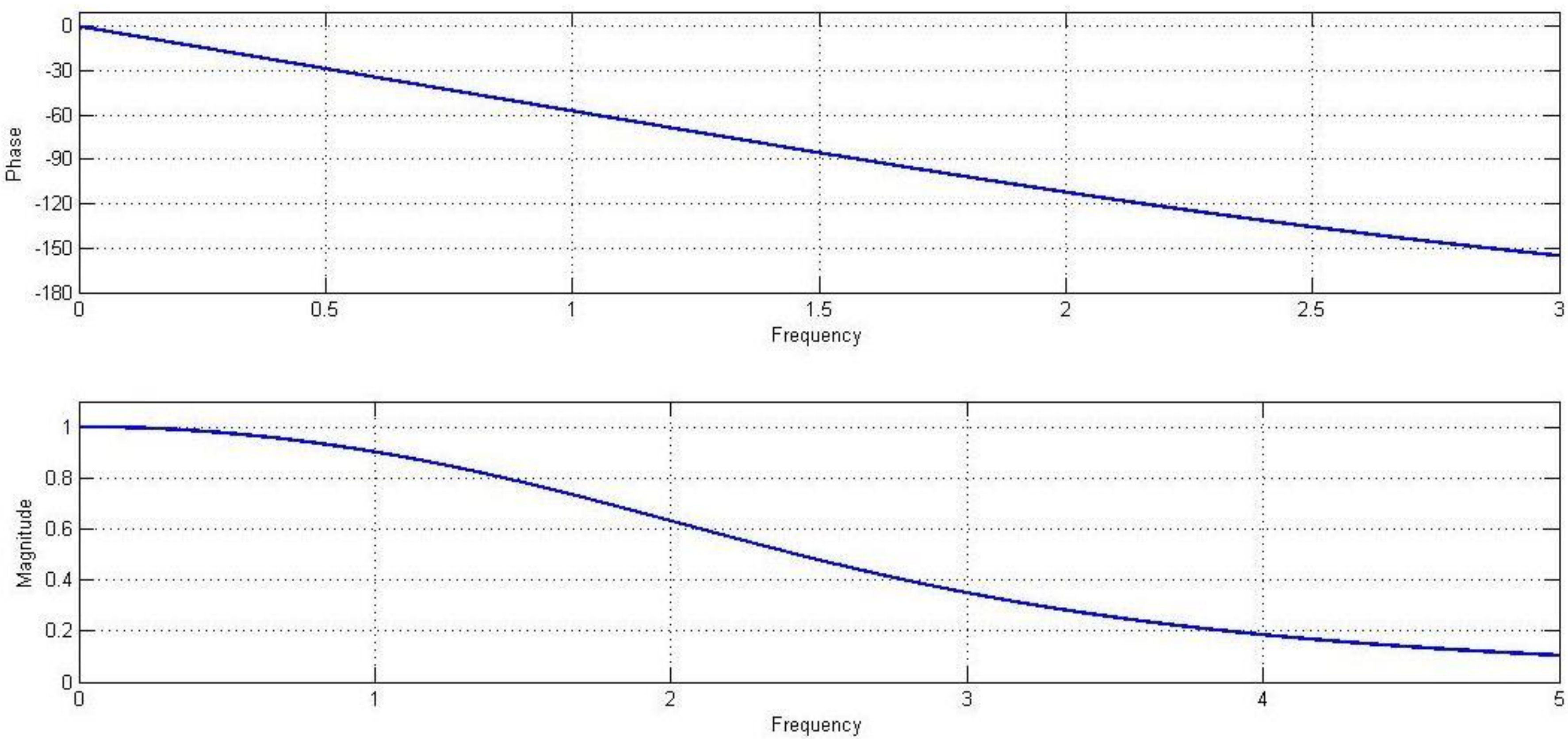
$$\begin{cases} M(s) = 6(T_0 s)^2 + 15 \\ N(s) = (T_0 s)^3 + 15(T_0 s) \end{cases}$$

- پس تابع تبدیل فیلتر به شکل زیر خواهد بود و به ازای تاخیر ۱ ثانیه:

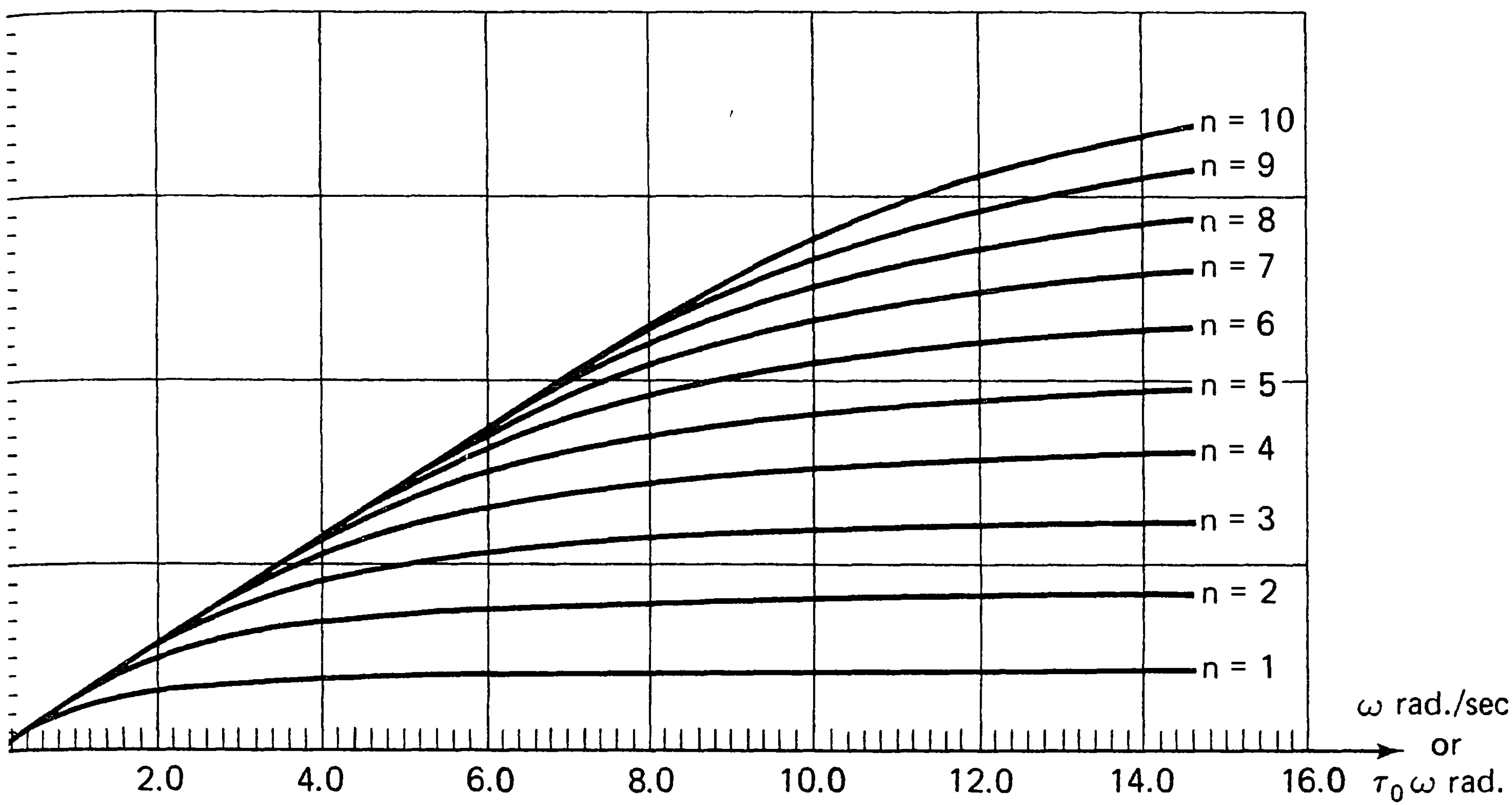
$$\begin{cases} M(s) = 6(T_0 s)^2 + 15 \\ N(s) = (T_0 s)^3 + 15(T_0 s) \end{cases}$$

$$H(s) = \frac{15}{(T_0 s)^3 + 6(T_0 s)^2 + 15(T_0 s) + 15} \xrightarrow{T_0 = 1} \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

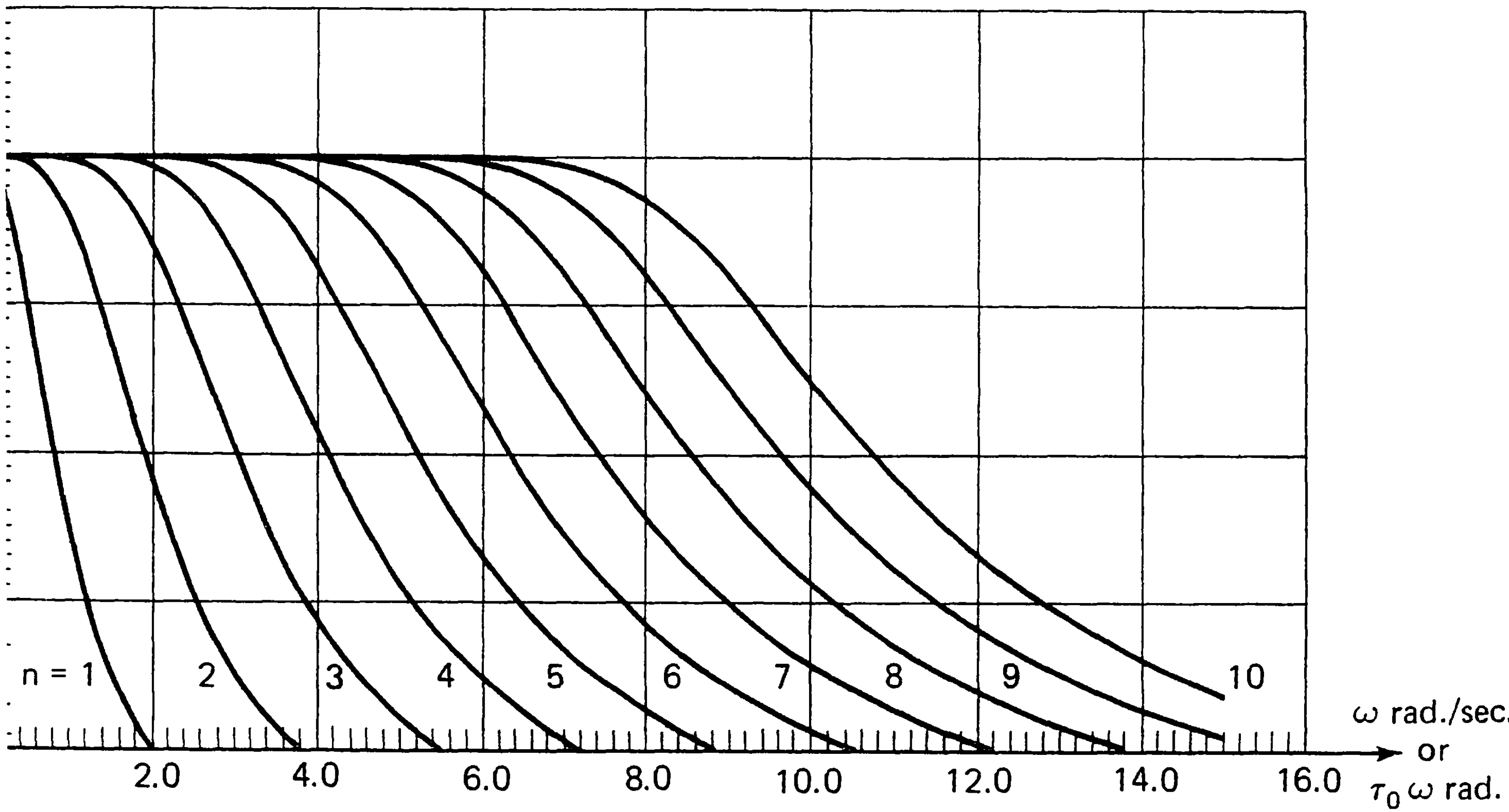
مشخصه ی دامنه و فاز فیلتر مورد بحث



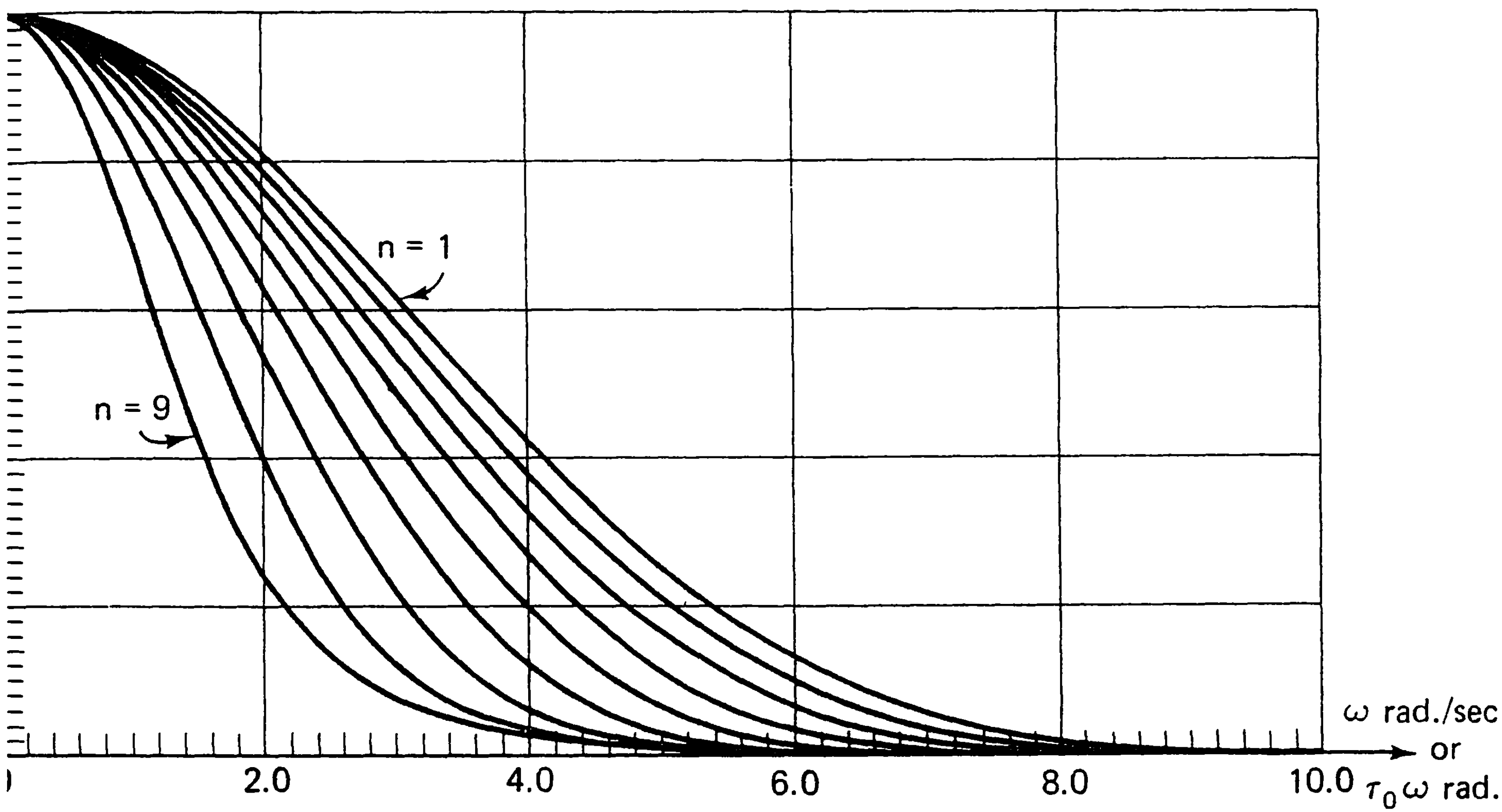
مشخصه ی فاز فیلتر بسل



مشخصه ی تاخیر فیلتر بسل



مشخصه ی دامنه ی فیلتر بسل



ویژگی های تقریب ها

ویژگیهای مهم تقریب ها به ازای یک درجه معین، عبارتند از:

- یکنواختی مشخصه دامنه در باند عبور
- یکنواختی مشخصه تاخیر در باند عبور
- شیب مشخصه دامنه در باند گذر
- توان نویز خروجی
- سهولت ساخت و تنظیم

- ✓ توان نویز خروجی یک فیلتر، متناسب با سطح زیر منحنی مربع مشخصه دامنه آن می باشد.
- ✓ وجود صفرهای انتقال روی محور موهومی و نیز نزدیک بودن قطب ها به محور موهومی، ساخت و تنظیم فیلترها را دشوار می کنند.

مقایسه ی بین انواع تقریب ها

نوع تقریب: نوع ویژگی	باترورث	چبی شف معمول	چبی شف معکوس	بیضوی	بسل
یکنواختی دامنه	خیلی خوب	بد	خوب	بد	متوسط
یکنواختی تاخیر	خوب	متوسط	متوسط	بد	خیلی خوب
شیب تضعیف	متوسط	خوب	خوب	خیلی خوب	بد
توان نویز خروجی	متوسط	خیلی خوب	خوب	خوب	بد
سهولت ساخت و تنظیم	خوب	متوسط	بد	بد	خیلی خوب

ویژگی های تقریب ها

- در واقع، ویژگی های تقریب ها به مکان قطب ها و صفرهای انتقال آنها مربوط می شود.
- در صورتی که محل قطب ها و صفرها را مابین محل قطب ها و صفرهای دو فیلتر با دو نوع تقریب متفاوت انتخاب کنیم، یک فیلتر بینابین یا transitional خواهیم داشت.
- مسلما انتظار می رود که خصوصیات فیلتر بینابین ترکیبی از خصوصیات آن دو فیلتر متفاوت باشد.
- به عنوان مثال، برای داشتن فیلتری با ترکیبی از ویژگیهای دو فیلتر باترورث و بسل، متوسط قطب های آنها را بعنوان قطب های یک فیلتر بینابین در نظر می گیریم.

مثال – ص ۱۷۵کتاب دکتر امیرحسینی

تابع تبدیل یک فیلتر بینابین حاصل از دو فیلتر باتروورث و بسل

قطب های فیلتر باتروورث نرمالیزه درجه۲

$$s_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

قطب های فیلتر بسل نرمالیزه درجه ۲ (پس از آن که اندازه آنها برابر یک شده باشند)

$$s_{1,2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm j\frac{1}{2}$$

بنابراین تابع تبدیل فیلتر بینابین چنین خواهد شد.

$$H(s) = \frac{1}{(s+(\sqrt{3}+\sqrt{2})/4+j(1+\sqrt{2})/4)(s+(\sqrt{3}+\sqrt{2})/4-j(1+\sqrt{2})/4)}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2+1.5731s+0.9830}$$

تبدیلات فیلترها

تبدیل پایین گذر به بالا گذر

$$s \to \frac{\omega_c}{s} \Rightarrow \omega \to \frac{\omega_c}{\omega} \Rightarrow \omega_L = \frac{\omega_c}{\omega_H}$$

تبدیل پایین گذر به میان گذر

$$s \to \frac{s^2+\omega_0^2}{Bs} \Rightarrow \omega \to \frac{\omega^2-\omega_0^2}{B\omega} \Rightarrow \omega_L = \frac{\omega_B^2-\omega_0^2}{B\omega_B}$$

تبدیل پایین گذر به میان نگذر

$$s \to \frac{Bs}{s^2+\omega_0^2} \Rightarrow \omega \to \frac{B\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \Rightarrow \omega_L = \frac{B\omega_R}{\omega_R^2-\omega_0^2}$$

طراحی و تحقق فیلتر ها

- جهت طراحی فیلتر های بالاگذر، میان گذر و میان نگذر، ابتدا نوع، درجه و تابع تبدیل تقریب را به دست می آوریم و سپس تابع تبدیل حاصله را به صورت فعال یا غیر فعال تحقق می دهیم.
- جهت تعیین درجه ی فیلترهای بالاگذر، میان گذر و میان نگذر، ابتدا فرکانس های تعیین کننده ی آن ها را با استفاده از تبدیلات فیلترها به فرکانس های معادل در فیلتر های پایین گذر نگاشت می کنیم.
- سپس درجه ی فیلتر را با استفاده از روابط مربوط به فیلترهای پایین گذر و با استفاده از فرکانس های معادل و مقدار گزینایی (selectivity) حاصله می یابیم.

مقدار گزینایی (selectivity) فیلترها

$$k = \begin{cases} \dfrac{\omega_p}{\omega_s} & \text{پایین گذر} \\[2ex] \dfrac{\omega_s}{\omega_p} & \text{بالاگذر} \\[2ex] \dfrac{\omega_p^+ - \omega_p^-}{\omega_s^+ - \omega_s^-} & \text{میان گذر} \\[2ex] \dfrac{\omega_s^+ - \omega_s^-}{\omega_p^+ - \omega_p^-} & \text{میان نگذر} \end{cases}$$

$$\boxed{\omega_p^- \omega_p^+ = \omega_s^- \omega_s^+ = \omega_0^2}$$

مثال – ص ۱۸۰کتاب دکتر امیرحسینی

مطلوبست درجه ی فیلتر چبی شف بالاگذر دارای ریپل 0.1dB از فرکانس 10KHzبه بعد و حداقل تضعیف 40dB در فرکانس های کوچکتر از 6.5KHz

$$f_p = f_c = 10KHz,\ f_s = 6.5KHz, \alpha_p = 0.1dB, \alpha_s = 40dB$$

$$n \ge \frac{\cosh^{-1}\sqrt{(10^{\alpha_s/10}-1)\big/(10^{\alpha_p/10}-1)}}{\cosh^{-1}(1/k)}, k = \frac{f_s}{f_p} = 0.65$$

$$n \ge 7.21 \Rightarrow n = 8$$

جهت تحقق پسیو فیلتر چبی شف بهتر است درجه ی آن فرد باشد که در این صورت n=9 انتخاب می شود.

مثال – ص ۱۸۰کتاب دکتر امیرحسینی

مطلوبست یافتن درجه ی فیلتر باترورث میان گذر با فرکانس مرکزی 16KHz و پهنای باند 3dB برابر با 3.2KHz و حداقل تضعیف 30dB در فرکانس های بیشتر از 19.1KHz.

$$f_0 = 16KHz, B = 2\pi \times 3.2\,{}^{KRad}\!/_{\sec}, f_s^+ = 19.1KHz$$

$$\alpha_p = 3dB, \alpha_s = 30dB$$

$$f_p^+ = 17.68KHz, f_p^- = 14.48KHz, f_s^- = 13.4KHz$$

$$n \geq \frac{\log\sqrt{(10^{\alpha_s/10}-1)/(10^{\alpha_p/10}-1)}}{\log(1/k)}, k = \frac{f_p^+ - f_p^-}{f_s^+ - f_s^-} = 0.5614$$

$$n \geq 5.99 \Rightarrow n = 6$$

مثال – ص ۱۸۰کتاب دکتر امیرحسینی

مطلوبست یافتن درجه ی فیلتر باترورث میان نگذر با تضعیف 3dB از فرکانس 950Hz تا 1050Hz و حداقل تضعیف 40dB در فرکانس های بین 990Hz تا 1010Hz.

$$f_p^+ = 1050\,Hz,\ f_p^- = 1050\,Hz$$

$$\alpha_p = 3dB, \alpha_s = 40dB$$

$$990\,Hz \to (1050 \times 950)/1010 = 987.6Hz$$

$$f_s^+ = 1010\,Hz,\ f_s^- = 987.6Hz$$

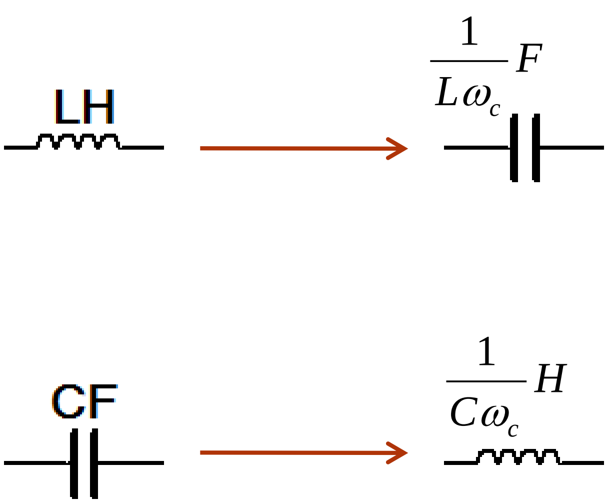
$$n \geq \frac{\log\sqrt{(10^{\alpha_s/10}-1)/(10^{\alpha_p/10}-1)}}{\log(1/k)}, k = \frac{f_s^+ - f_s^-}{f_p^+ - f_p^-} = 0.224$$

$$n \geq 3.08 \Rightarrow n = 4 or 3$$

$$f_0 = \sqrt{1050 \times 950} = 998.7Hz, B = 2\pi \times 100\,{Rad}/{\sec}$$

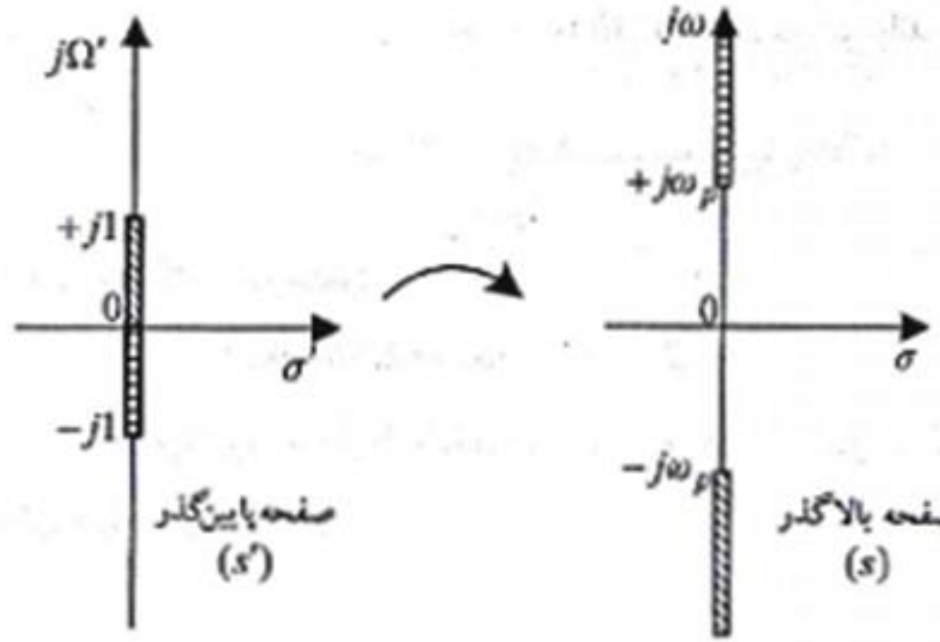
تحقق غیر فعال فیلترها

- جهت تحقق غیر فعال انواع فیلترهای انتخابگر فرکانسی با استفاده از عناصر پسیو و فشرده، ابتدا فیلتر پاییت گذر نرمالیزه ی متناظر با آن ها را طراحی نموده و تحقق می دهیم.
- سپس تبدیل فیلتر مناسب را بر المان های مدار و تابع تبدیل آن ها اعمال می نماییم.



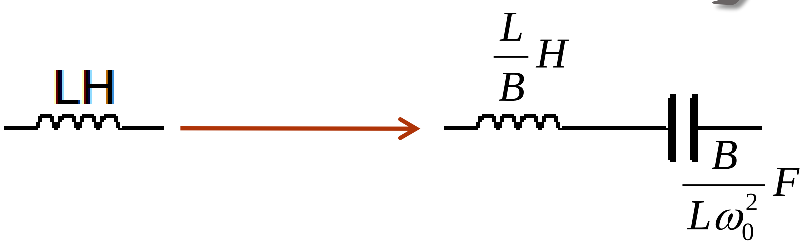
اثر اعمال تبدیل پایین گذر به بالاگذر بر سلف ها و خازن ها

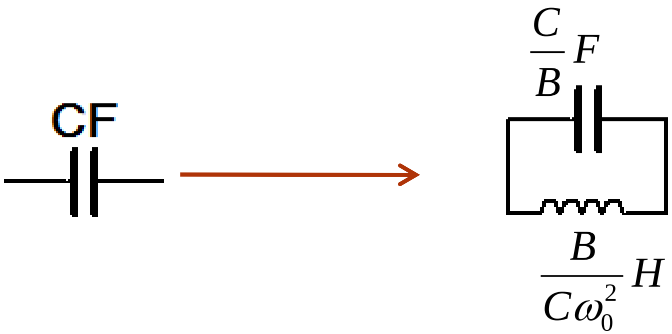
نگاشت پایین گذر به بالا گذر



نگاشت پایین گذر به بالاگذر در حالت ایده‌آل(s و s' به ترتیب فرکانس‌های مختلط در فیلترهای بالاگذر و پایین گذر می‌باشند).

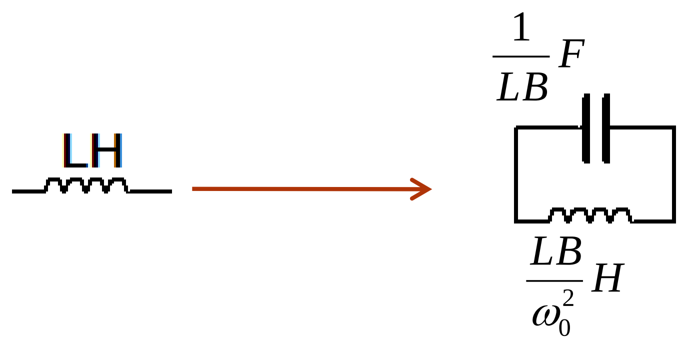
تحقق غیر فعال فیلترها

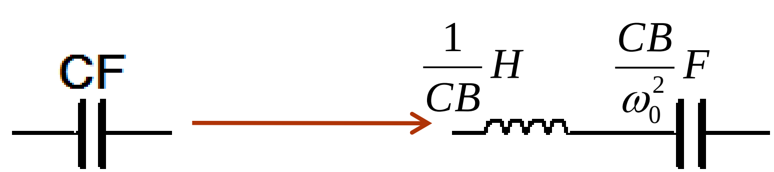




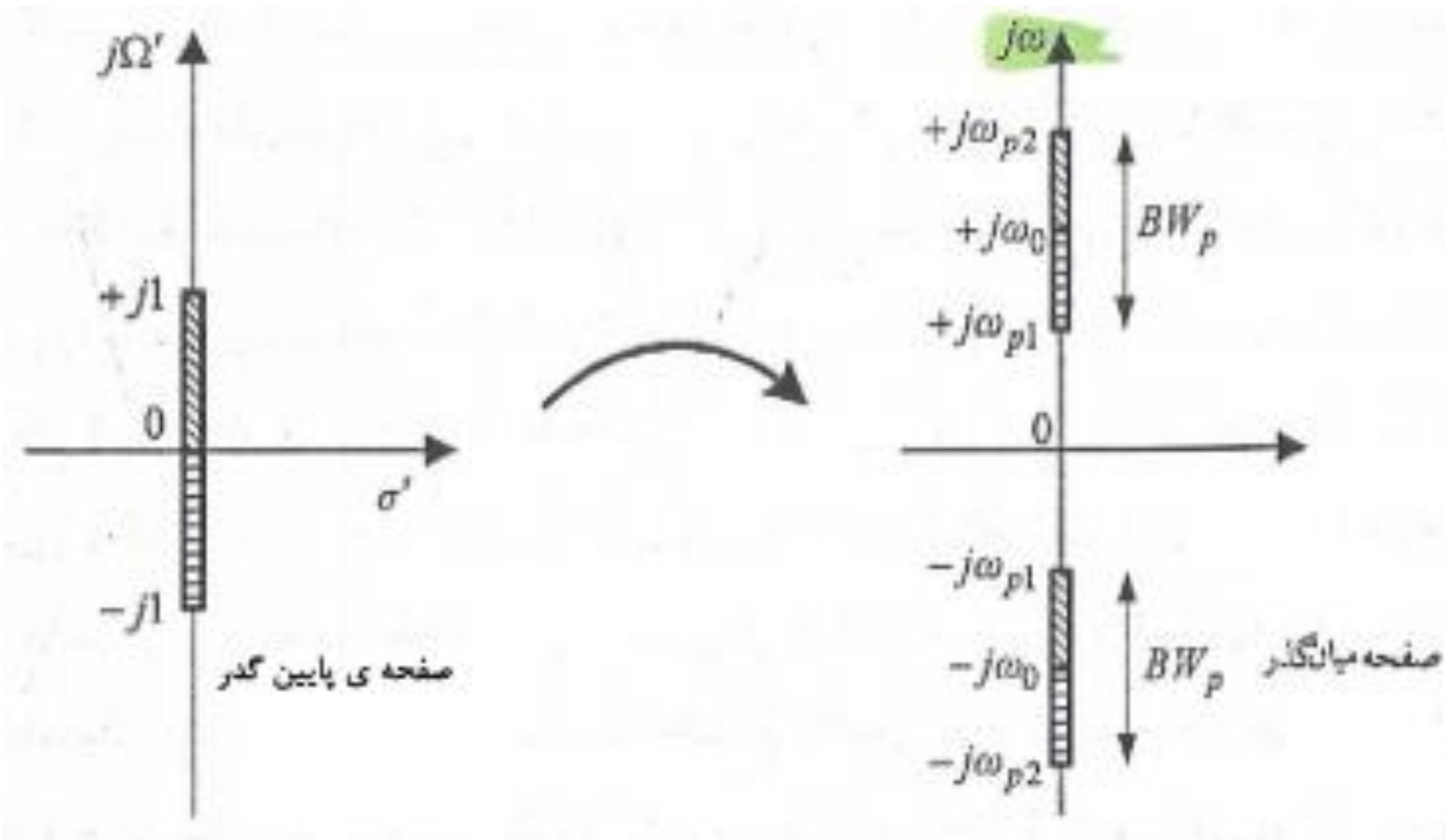
اثر اعمال تبدیل پایین
گذر به میان گذر بر سلف
ها و خازن ها

اثر اعمال تبدیل پایین
گذر به میان نگذر بر
سلف ها و خازن ها

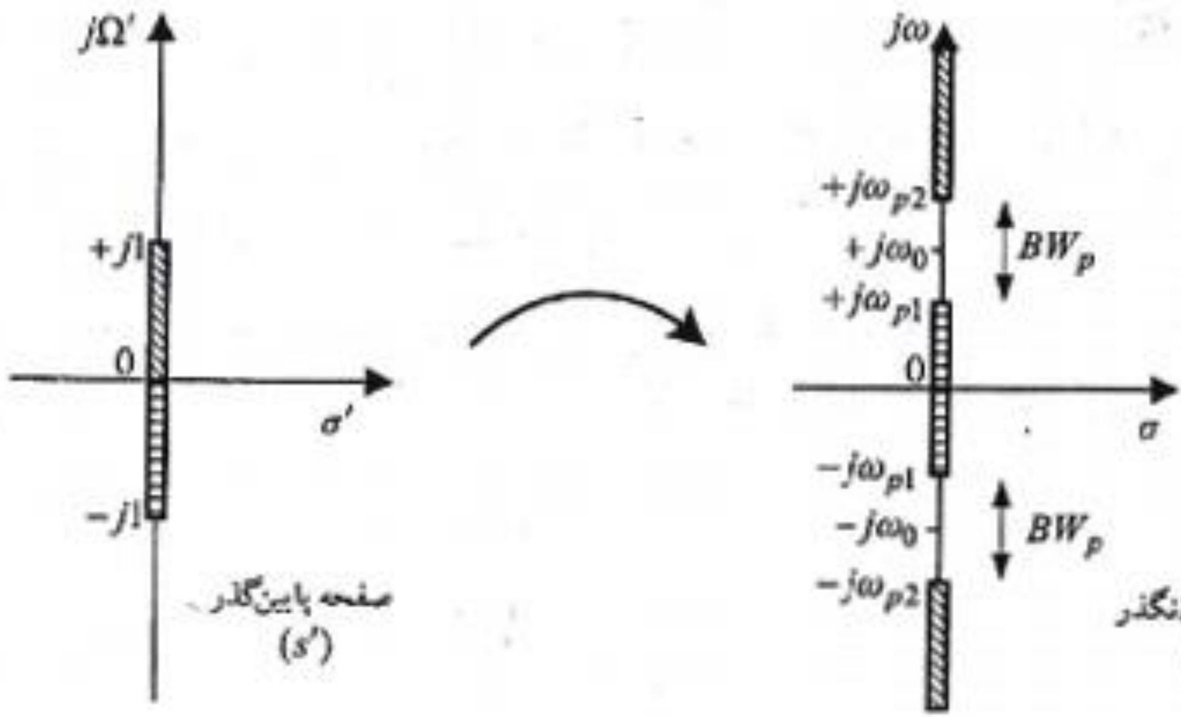




نگاشت پایین گذر به میان گذر



نگاشت پایین گذر به میان نگذر



نگاشت پایین گذر به میان‌نگذر در حالت ایده‌آل.

مثال – ص ۱۸۲کتاب دکتر امیرحسینی

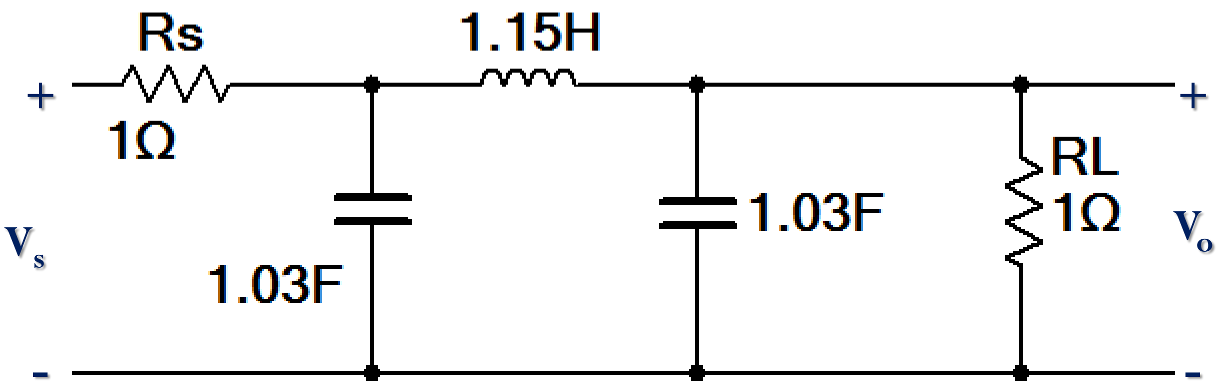
مطلوبست مدار و تابع تبدیل مربوط به فیلتر بالاگذر چبی شف درجه۳ با ریپل 0.1dB از فرکانس 10MHz به بعد.

$$\omega_c = 2\pi \times 10^7 \; {Rad}/{\sec}$$

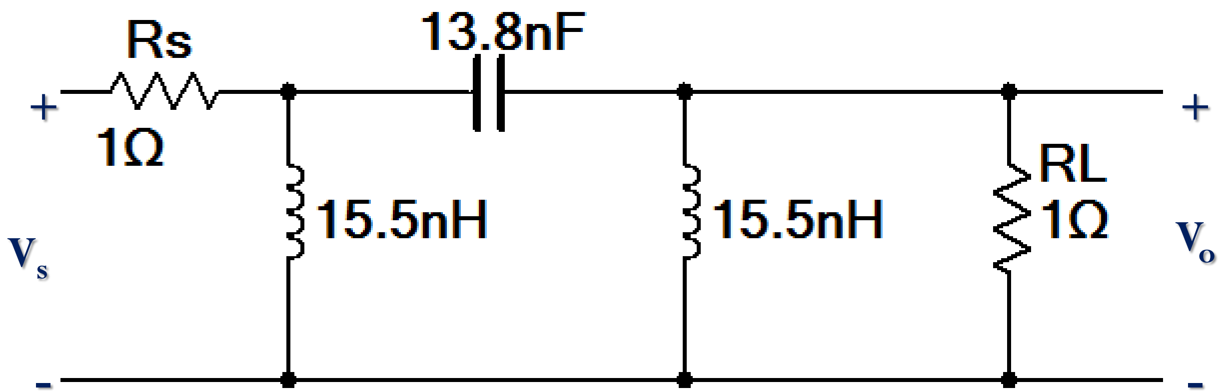
$$H(s) = H_N\left(\frac{\omega_c}{s}\right) = \frac{0.82}{\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^3 + 1.94\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^2 + 2.63\left(\frac{\omega_c}{s}\right) + 1.64}$$

$$H(s) = \frac{0.82 s^3}{1.64 s^3 + 1.22 \times 10^8 s^2 + 1.04 \times 10^{16} s + 2.48 \times 10^{23}}$$

مثال – ص ۱۸۲کتاب دکتر امیرحسینی



مدار پایین گذر معادل



مدار بالاگذر مطلوب

مثال – ص ۱۸۳کتاب دکتر امیرحسینی

مطلوبست مدار و تابع تبدیل مربوط به فیلتر میان گذر باترورث درجه ۲ با فرکانس مرکزی 16MHz و پهنای باند 3dB برابر 1MHz.

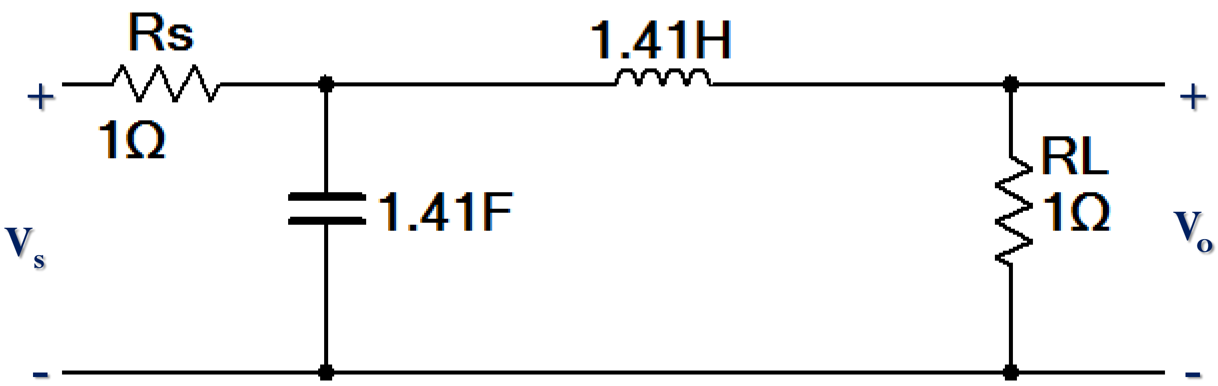
$$\omega_0 = 2\pi \times 16 \, {}^{MRad}\!/_{\sec}$$

$$B = 2\pi \times 1 \, {}^{MRad}\!/_{\sec}$$

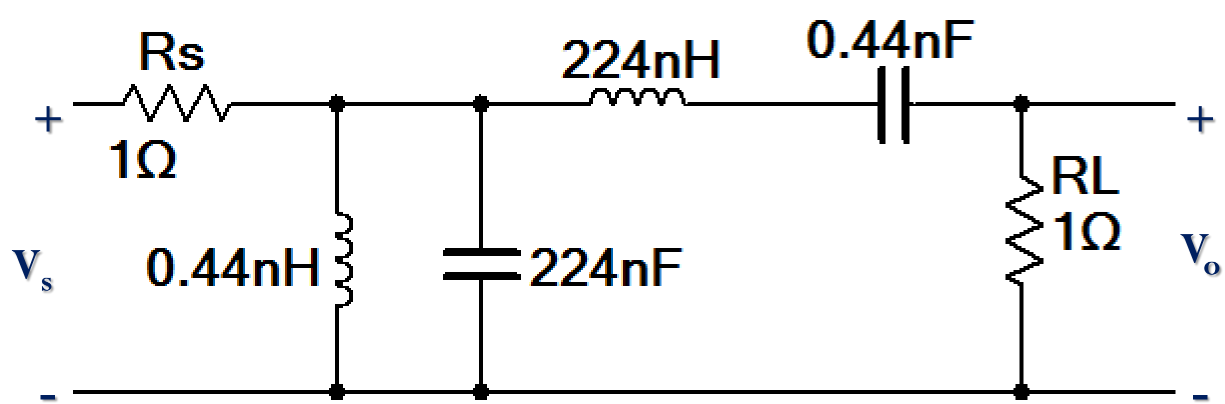
$$H(s) = H_N\left(\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}\right) = \frac{0.5}{\left(\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}\right) + 1}$$

$$H(s) = \frac{1.97 s^2}{s^4 + 8.88\times 10^6 s^3 + 2\times 10^{16} s^2 + 8.88\times 10^{22} s + 10^{32}}$$

مثال – ص ۱۸۳کتاب دکتر امیرحسینی



مدار پایین گذر معادل



مدار میان گذر مطلوب

مثال – ص ۱۸۳کتاب دکتر امیرحسینی

مطلوبست مدار و تابع تبدیل مربوط به فیلتر میان نگذر باترورث درجه ۲ با فرکانس مرکزی 16MHz و پهنای باند 3dB برابر 1MHz.

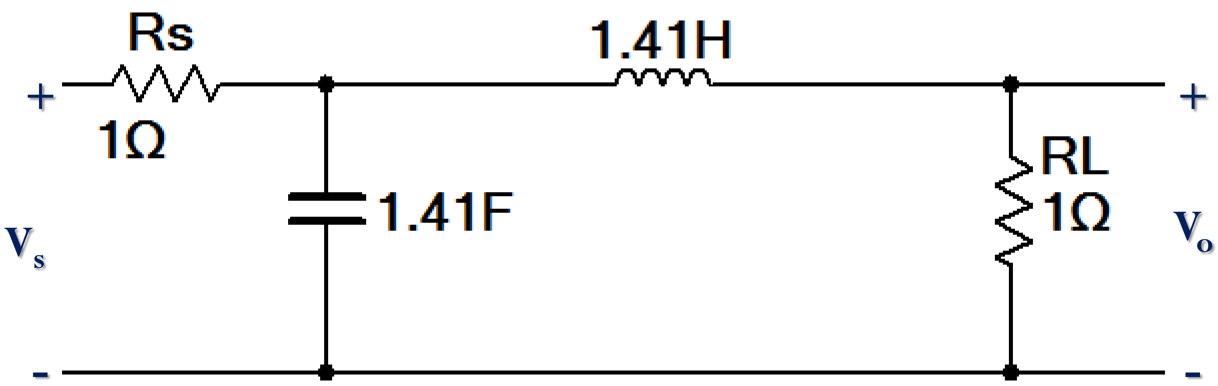
$$\omega_0 = 2\pi \times 16 \, {}^{MRad}\!/_{\sec}$$

$$B = 2\pi \times 1 \, {}^{MRad}\!/_{\sec}$$

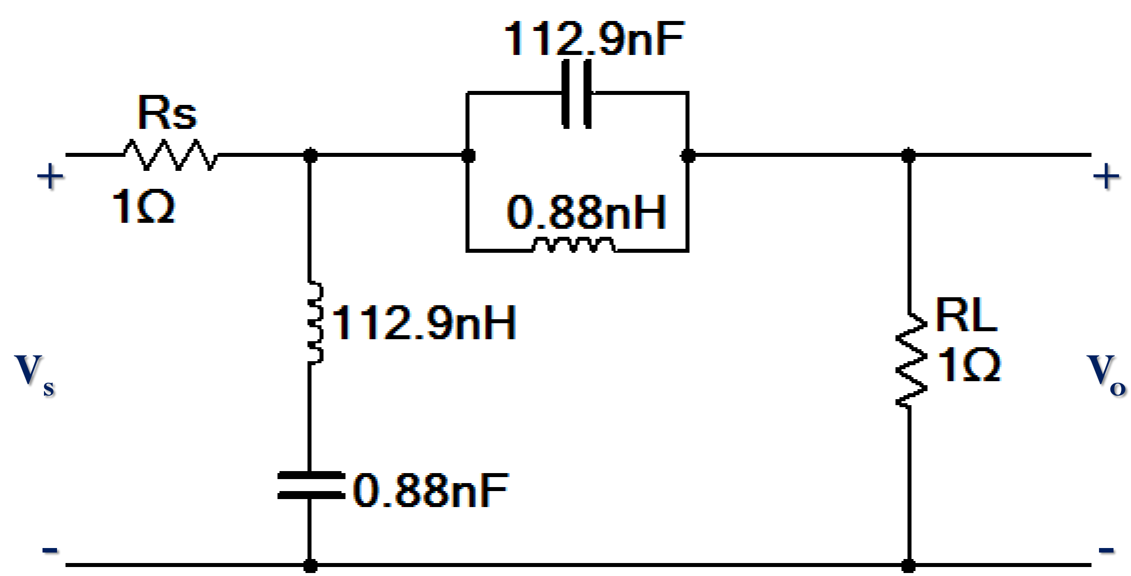
$$H(s) = H_N\left(\frac{Bs}{s^2+\omega_0^2}\right) = \frac{0.5}{\left(\frac{Bs}{s^2+\omega_0^2}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{Bs}{s^2+\omega_0^2}\right) + 1}$$

$$H(s) = \frac{0.5(s^2+10^{16})^2}{s^4 + 8.88\times 10^6 s^3 + 2\times 10^{16} s^2 + 8.88\times 10^{22} s + 10^{32}}$$

مثال – ص ۱۸۲کتاب دکتر امیرحسینی



مدار پایین گذر معادل



مدار میان نگذر مطلوب

سایر روش های تحقق فیلترها

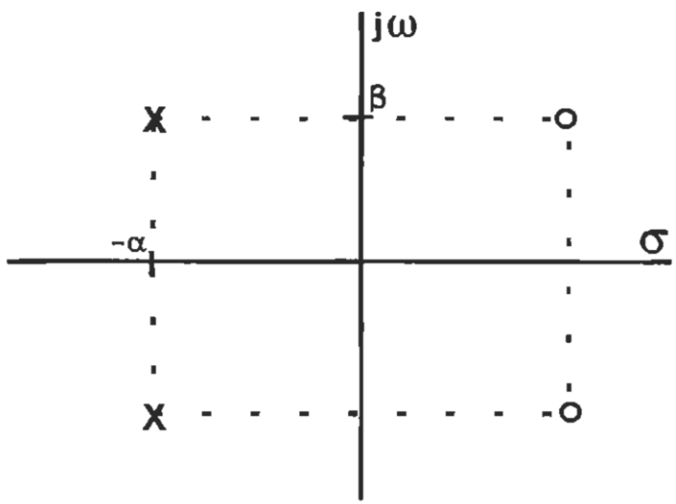
- ✓ تحقق فعال تابع تبدیل به صورت مستقیم برای جلوگیری از ایجاد سلف در مدار
- ✓ تحقق خط انتقالی در فرکانس های خیلی بالای رادیویی و مایکروویوی که استفاده از عناصر فشرده RLC را غیر ممکن می کند. در این روش از خطوط انتقال و موجبرها استفاده می شود.
- ✓ تحقق فیلترها با استفاده از معکوس کننده های امپدانسی

فیلترهای تمام گذر

- فیلترهایی هستند که مشخصه ی دامنه ی آن ها در تمامی فرکانس ها ثابت می باشد.

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = 1$$

- به عنوان شیفت دهنده ی فاز، تاخیر دهنده و ترمیم کننده ی مشخصه های فاز و تاخیر مدارها به کار می روند.
- تحقق فیلترها با استفاده از معکوس کننده های امپدانسی



نمودار صفر و قطب یک فیلتر تمام گذر درجه ۲

تابع تبدیل فیلترهای تمام گذر

$$H(s)=\frac{M(s)-N(s)}{M(s)+N(s)}$$

$$\left|H(j\omega)\right|^2=\frac{M(j\omega)-N(j\omega)}{M(j\omega)+N(j\omega)}\times\frac{M(j\omega)+N(j\omega)}{M(j\omega)-N(j\omega)}=1$$

$$\angle H(j\omega)=\angle(M(j\omega)-N(j\omega))-\angle(M(j\omega)+N(j\omega))$$

$$\Rightarrow \angle H(j\omega)=-2\tan^{-1}\left(\frac{N(j\omega)/j}{M(j\omega)}\right)$$

تابع تبدیل فیلترهای تمام گذر

- برای فیلتر بسل فاز از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{N(j\omega)/j}{M(j\omega)}\right)$$

- و فاز برای یک فیلتر تمام گذر عبارتست از:

$$\angle H(j\omega) = -2\tan^{-1}\left(\frac{N(j\omega)/j}{M(j\omega)}\right)$$

- واضح است که فاز فیلتر تمام گذر باید دوبرابر فاز فیلتر بسل انتخاب شود.