



-۱

هندسه ۱

متمم زاویه A برابر  $A - 90^\circ$  و مکمل زاویه A برابر  $180^\circ - A$  می باشد.

تست ۱: اگر مجموع دو زاویه  $170^\circ$  باشد مجموع مکمل های آنها کدام است؟

(۱)  $180^\circ$  (۲)  $190^\circ$  (۳)  $170^\circ$

پاسخ: فرض کنیم A و B دو زاویه مطلوب باشند. داریم:

$$A + B = 170$$

$$180^\circ - A + 180^\circ - B = 360^\circ - (A + B) = 360^\circ - 170^\circ = 190^\circ$$

پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تست ۲: اگر مکمل های دو زاویه متمم یکدیگر باشند و تفاضل آن دو زاویه  $70^\circ$  باشد آنگاه اندازه زاویه بزرگتر کدام است؟

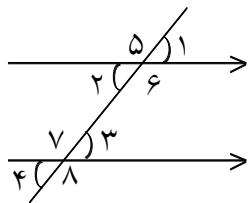
(۱)  $100^\circ$  (۲)  $90^\circ$  (۳)  $170^\circ$  (۴)  $110^\circ$

پاسخ: فرض کنیم دو زاویه مطلوب باشند. داریم:

$$\begin{cases} 180^\circ - A + 180^\circ - B = 90^\circ \\ A - B = 70^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A - B = -270^\circ \\ A - B = 70^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = 100^\circ, \hat{A} = 170^\circ$$

پس گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

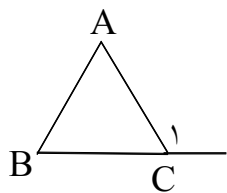
۲- قضیه خطوط موازی و مورب: اگر دو خط موازی را موربی قطع کند آنگاه زوایای حاده ایجاد شده با هم و زوایای منفرجه ایجاد شده با هم مساویند و یک زاویه حاده با یک زاویه منفرجه مکمل است و برعکس.



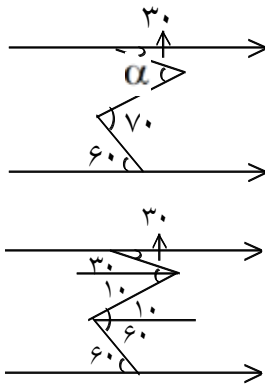
$$\begin{array}{cccc} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{5} & \hat{6} & \hat{7} & \hat{8} \\ \hat{1} + \hat{6} & = & \hat{3} + \hat{8} & = 180^\circ \end{array}$$

۳- در هر مثلث مجموع زوایای داخلی  $180^\circ$  درجه و مجموع زوایای خارجی  $360^\circ$  درجه است.

۴- در هر مثلث زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن.



$$\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$$



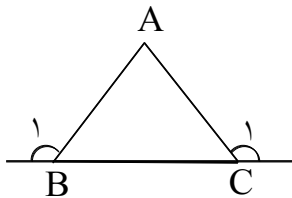
۵- تست ۱: در شکل مقابل اندازه زاویه  $\alpha$  کدام است؟

- (۱) ۴۵  
(۲) ۳۵  
(۳) ۴۰  
(۴) ۳۰

پاسخ: از رئوس  $\alpha$  و  $70^\circ$  دو خط به موازات دو خط موازی در شکل رسم می‌کنیم. در این صورت با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب زاویه  $70^\circ$  درجه به دو زاویه  $60^\circ$  و  $10^\circ$  و زاویه  $\alpha$  به دو زاویه  $10^\circ$  و  $30^\circ$  تقسیم می‌شود. پس  $\alpha = 40^\circ$  بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تست ۲: اگر در یک مثلث مجموع دو زاویه خارجی سه برابر زاویه داخلی غیرمجاور آن‌ها باشد آنگاه نوع مثلث کدام است؟

- (۱) قائم‌الزاویه (۲) متساوی‌الساقین (۳) متساوی‌الاضلاع (۴) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

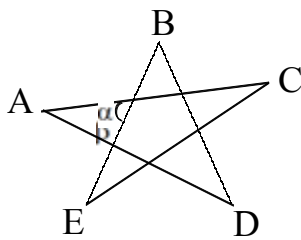


پاسخ: فرض کنیم در مثلث  $\triangle ABC$  داشته باشیم  $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 2\widehat{A}$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 = \widehat{A} + \widehat{C} \\ \widehat{C}_1 = \widehat{A} + \widehat{B} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow$$

$$2\widehat{A} = 2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow 2\widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow 2\widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow$$

پس مثلث قائم‌الزاویه است و گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



تست ۳: در شکل مقابل مجموع زوایای  $E$  و  $D$  و  $C$  و  $B$  و  $A$  کدام است؟

- (۱)  $180^\circ$   
(۲)  $90^\circ$   
(۳) بین  $90^\circ$  و  $180^\circ$   
(۴) کمتر از  $90^\circ$

پاسخ: در شکل زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  زاویه خارجی مثلث هستند. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \widehat{E} + \widehat{C} \\ \beta = \widehat{B} + \widehat{D} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \alpha + \beta = \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E}$$

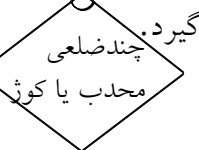
$$180^\circ - \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E}$$

$$180^\circ = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{C} + \widehat{E}$$

پس گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۶- به خم ساده بسته‌ای که با پاره‌خط ایجاد می‌شود چند ضلعی می‌گوییم.

۷- یک چندضلعی محدب است در صورتی که داشته باشیم:



چندضلعی

محدب یا کوژ

۱- پاره‌خطی که هر دو نقطه درون چند ضلعی را به هم وصل می‌کند درون چند ضلعی قرار گیرد.

۲- هر زاویه داخلی آن کوچکتر از  $180^\circ$  درجه باشد.

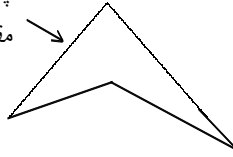
۳- امتداد هر ضلع آن شکل را قطع نکند.



۸- یک چندضلعی مقعر است در صورتی که داشته باشیم:

۱- لاقط دو نقطه درون شکل باشد به طوری که از پاره‌خطی که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند، بیرون شکل قرار گیرد.

چندضلعی  
مقعر یا کاو



۲- لاقط یک زاویه بزرگتر از  $180^\circ$  درجه داشته باشد.

۳- لاقط امتداد یک ضلع آن شکل را قطع کند.



۹- هر  $n$  ضلعی محدب دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱- از هر راس آن  $n - 3$  قطر می‌گذرد.

۲- تعداد کل اقطار برابر است با:  $\frac{1}{2}n(n - 3)$ .

۳- مجموع زوایای داخلی به صورت مقابل محاسبه می‌شود:  $(n - 2)180$

۴- مجموع زوایای خارجی  $360$  درجه است.

تست ۱: از دو رأس غیرمجاور یک ده ضلعی محدب در مجموع چند قطر می‌گذرد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

پاسخ: از هر رأس ده ضلعی هفت قطر می‌گذرد پس از دو رأس آن ۱۴ قطر می‌گذرد ولی یکی از قطرهای دوبار محاسبه شده است. پس تعداد قطرهای رسم شده  $13 = 7 + 7 - 1$  می‌باشد. بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تست ۲: یک ده ضلعی محدب حداکثر چند زاویه داخلی حاده دارد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا اگر یک  $n$  ضلعی محدب بیش از سه زاویه داخلی حاده داشته باشد آن‌گاه معادل آن است که تعداد زاویه‌های خارجی منفرجه در  $n$  ضلعی بیشتر از سه تا می‌باشد در این صورت جمع زاویه‌های خارجی از  $360$  درجه بیشتر می‌شود و این ممکن نیست.

تست ۳: اگر مجموع زوایای داخلی یک  $n + k$  ضلعی محدب و یک  $k - n$  ضلعی محدب  $1440$  درجه باشد آن‌گاه  $k$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

پاسخ:  $(n + k - 2)180 + (k - n - 2)180 = 1440$

$$2k - 4 = 8$$

$$k = 6$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تست ۴: اگر مجموع زوایای داخلی یک چندضلعی محدب به جز یکی از آن‌ها  $2570^\circ$  باشد آن‌گاه آن یک زاویه کدام است؟

(۱) ۳۰ (۲) ۱۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰

پاسخ: می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی در هر  $n$  ضلعی محدب مضرب  $180$  است پس داریم:

$$(n - 2)180 = 2570 + \alpha$$

$$(n - 2)180 = 14 \times 180 + 50 + \alpha \Rightarrow \alpha = 130$$

پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تست ۵: اگر به تعداد اضلاع یک  $n$  ضلعی محدب یکی اضافه کنیم آن‌گاه به تعداد اقطار آن چقدر اضافه می‌شود؟

(۱)  $n - 1$  (۲)  $n - 1$  (۳)  $n + 1$  (۴)  $2n - 1$

پاسخ:  $\frac{1}{2}(n + 1)(n - 2) - \frac{1}{2}n(n - 3) = n - 1$  تعداد اقطار  $n$  ضلعی - تعداد اقطار  $n + 1$  ضلعی

پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



- ۱۰- متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاعش دو به دو موازیند.  
 در متوازی‌الاضلاع خصوصیات زیر وجود دارد.  
 ۱- در متوازی‌الاضلاع اضلاع مقابل مساویند و برعکس.  
 ۲- در متوازی‌الاضلاع قطرهای منصفند و برعکس.  
 ۳- در متوازی‌الاضلاع زوایای مقابل مساوی و زوایای مجاور مکملند و برعکس.  
 ۴- اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و مساوی باشند آن‌گاه متوازی‌الاضلاع است.
- ۱۱- مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه قائمه داشته باشد یا چهارضلعی است که سه زاویه قائمه دارد.  
 در مستطیل قطرهای مساویند و برعکس.
- ۱۲- لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاورش مساویند و یا چهارضلعی است که اضلاعش برابرند. در لوزی  
 قطرهای برهم عمود و نیمساز هستند و برعکس.
- ۱۳- مربع متوازی‌الاضلاعی است که هم لوزی و هم مستطیل باشد.



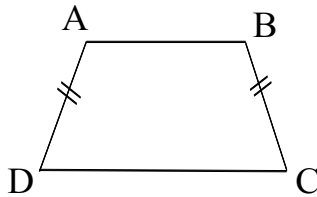
۱۴- دوزنقه چهارضلعی است که فقط دو ضلع مقابلش موازیند و دو ضلع دیگر موازی نیستند.

در دوزنقه متساوی الساقین خصوصیات زیر وجود دارند:

۱- زوایای مجاور به قاعده برابرند.  $\hat{A} = \hat{B}, \hat{D} = \hat{C}$

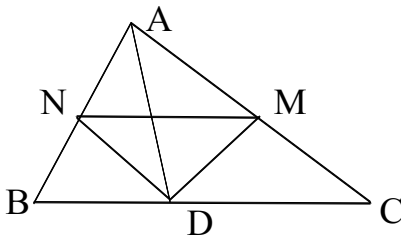
۲- زوایای مقابل مکملند.  $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180$

۳- اقطار مساویند.  $AC = BD$

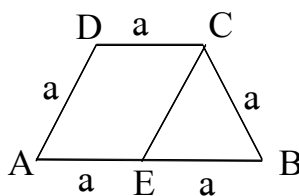


تست ۱: اگر در مثلث  $\widehat{ABC}$  از نقطه D پای نیمساز زاویه A دو خط به موازات دو ضلع دیگر ترسیم کنیم تا آن دو ضلع را در M و N قطع کند، آن گاه پاره خطهای AD و MN کدام ویژگی را دارا هستند؟  
 (۱) مساویند. (۲) منصفند (۳) عمودند (۴) عمود منصفند.

پاسخ: چهارضلعی ANDM متوازی الاضلاعی است ولی از آن جایی که AD نیمساز است نتیجه می گیریم این چهارضلعی لوزی می باشد و در لوزی اقطار عمود منصف یکدیگرند. پس گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



تست ۲: اگر در دوزنقه ABCD داشته باشیم  $AD = DC = BC = \frac{AB}{2}$  آن گاه



کوچکترین زاویه دوزنقه کدام است؟

(۱) ۳۰ (۲) ۴۵

(۳) ۶۰ (۴) ۷۵

پاسخ: این دوزنقه متساوی الساقین است. اگر CE را موازی AD ترسیم کنیم آن گاه دوزنقه به یک لوزی و یک مثلث متساوی الاضلاع تقسیم می شود پس  $\hat{B} = 60$ . بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تست ۳: اگر در یک دوزنقه دو ساق با قاعده کوچک برابر بوده و قطر با قاعده بزرگ برابر باشد آن گاه اندازه یکی از زوایای این دوزنقه کدام است؟

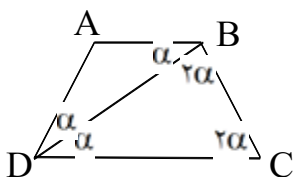
(۱) ۶۸ (۲) ۷۲

(۳) ۷۴ (۴) ۷۵

پاسخ: اگر زاویه  $\widehat{BDC}$  برابر  $\alpha$  باشد آن گاه مطابق شکل داریم:

$$\widehat{BDC} = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 36 \Rightarrow \hat{C} = 2\alpha = 72^\circ$$

پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



تست ۴: کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

(۱) متوازی الاضلاعی که اقطارش منصف یکدیگر هستند مستطیل است.

(۲) متوازی الاضلاعی که اقطارش منصف و مساویند مربع است.

(۳) لوزی که قطرهای مساوی دارد مربع است.

(۴) چهارضلعی که اقطارش بر هم عمود بوده و مساوی باشند مربع است.

پاسخ: گزینه ۱ نادرست است. زیرا منصف بودن قطرهای متوازی الاضلاع ویژگی همیشگی آن است.

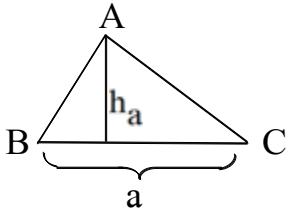
گزینه ۲ نادرست است زیرا مساوی بودن قطرهای متوازی الاضلاع مستطیل بودن آن را بوجود می آورد.

گزینه ۳ درست است.

گزینه ۴ نادرست است زیرا متوازی الاضلاعی که این خصوصیات را داشته باشد، مربع است. مثال نقض چهارضلعی مقابل است.

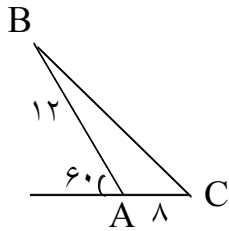


۱۵- مساحت هر مثلث را می توان به یکی از دو صورت زیر بدست آورد:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a \quad \begin{cases} a = \frac{2S}{h_a} \\ h_a = \frac{2S}{a} \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$



تست ۱: در شکل مقابل مساحت مثلث  $\widehat{ABC}$  کدام است؟

$$12 \quad (2) \qquad 12\sqrt{3} \quad (1)$$

$$24 \quad (4) \qquad 24\sqrt{3} \quad (3)$$

پاسخ: با توجه به فرمول مساحت به کمک زاویه داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 120^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

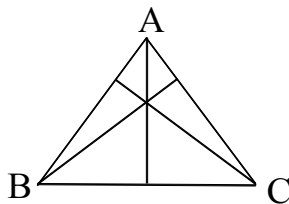
پس گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تست ۲: اگر در مثلثی مساحت ۱۲ و محیط برابر ۱۸ باشد آن گاه مجموع عکس ارتفاعات این مثلث کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4) \qquad \frac{3}{2} \quad (3) \qquad \frac{4}{3} \quad (2) \qquad \frac{3}{4} \quad (1)$$

پاسخ: اگر  $h_a$  و  $h_b$  و  $h_c$  ارتفاعات مثلث  $\widehat{ABC}$  باشند داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{2S}{a}} + \frac{1}{\frac{2S}{c}} + \frac{1}{\frac{2S}{b}} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{18}{2 \times 12} = \frac{3}{4}$$



پس گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تست ۳: در مثلث با اضلاع ۲ و ۳ و ۳ اندازه ارتفاع وارد بر ضلع ۳ کدام است؟

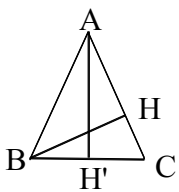
$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (4) \qquad \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3) \qquad \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (2) \qquad \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (1)$$

پاسخ: ارتفاع AH در مثلث متساوی الساقین ABC میانه هم هست.

$$AH'^2 = AC^2 - CH'^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow AH' = 2\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH' \times BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

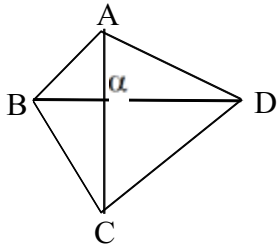
$$BH = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$



پس گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

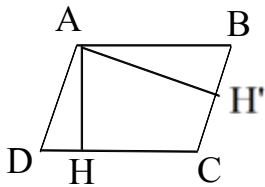


۱۶- مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر در سینوس زاویه بین دو قطر.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha$$

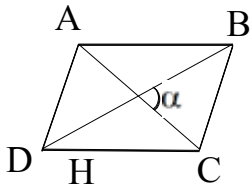
۱۷- مساحت یک متوازی الاضلاع را می توان به صورت زیر تعیین کرد:



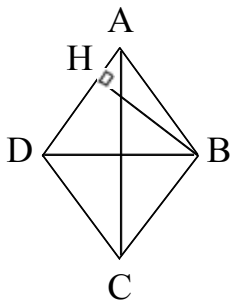
الف)  $S_{ABCD} = AH \times DC = AH' \times BC$

ب)  $S_{ABCD} = AB \times AD \times \sin A$

ج)  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha$



۱۸- مساحت یک لوزی را می توان به صورت زیر تعیین کرد.

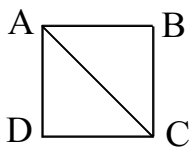


الف)  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$

ب)  $S_{ABCD} = AB^2 \times \sin A$

ج)  $S_{ABCD} = BH \times AD$

۱۹- مساحت یک مربع را می توان به صورت زیر تعیین کرد:



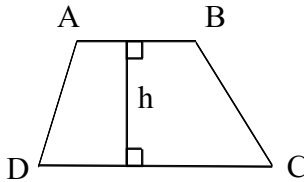
الف)  $S_{ABCD} = AB^2$

ب)  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC^2$





۲۰- مساحت یک ذوزنقه به صورت زیر تعیین می شود.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}h (AB + DC)$$

تست ۱: مساحت مستطیل با اندازه قطر ۲ سانتی متر که زاویه بین قطرهاش ۳۰ درجه باشد کدام است؟

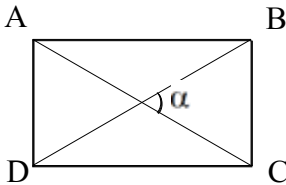
$$\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

پاسخ: در مستطیل قطرها برابرند داریم:



$$S = \frac{1}{2}AC \times BD \times \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ \Rightarrow S = 1$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تست ۲: اگر در متوازی الاضلاع ABCD از رأس A عمودهای AM و AN را به ترتیب بر قطر BD و ضلع BC وارد کرده باشیم، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟

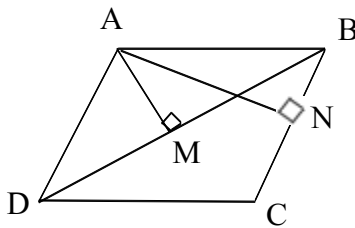
$$2AM \times BC = AN \times BD \quad (۲)$$

$$AM \times BC = AN \times BD \quad (۱)$$

$$2AM \times BD = AN \times BC \quad (۴)$$

$$AM \times BD = AN \times BC \quad (۳)$$

پاسخ: با توجه به شکل داریم:



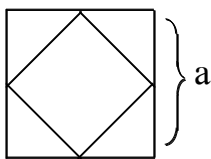
$$AN \times BC = S_{ABCD}$$

$$AM \times BD = 2S_{ABD} = S_{ABCD}$$

$$\left. \begin{array}{l} AN \times BC = S_{ABCD} \\ AM \times BD = 2S_{ABD} = S_{ABCD} \end{array} \right\} \Rightarrow AN \times BC = AM \times BD$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تست ۳: اگر وسطهای اضلاع یک مربع را به هم وصل کنیم آن گاه نسبت مساحت های دو چهارضلعی حاصل کدام است؟



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

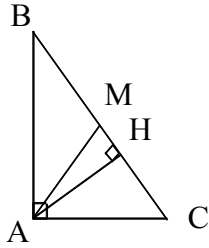
$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

پاسخ: اگر وسطهای اضلاع یک مربع را به هم وصل کنیم مربع دیگری حاصل می شود که اگر a ضلع بزرگ باشد

آن گاه a قطر مربع کوچک خواهد بود. بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S_{\text{مربع کوچک}}}{S_{\text{مربع بزرگ}}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a^2} = \frac{1}{2}$$



۲۱- در هر مثلث قائم الزاویه  $\widehat{ABC}$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) روابط زیر برقرار است

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \quad \text{۱- قضیه ی فیثاغورث:}$$

۲- با رسم ارتفاع وارد بر وتر دو مثلث قائم الزاویه ایجاد شده با مثلث اولیه مشابه می شود.  
 $AH \Rightarrow \widehat{AHC} \sim \widehat{AHB} \sim \widehat{ABC}$

$$AH^2 = BH \times CH$$

۳- ارتفاع وارد بر وتر واسط هندسی بین دو قطعه ی ایجاد شده روی وتر است.

$$AC^2 = CH \times BC$$

۴- هر ضلع قائمه واسطه هندسی بین تصویر آن ضلع روی وتر و وتر می باشد.

$$AB^2 = BH \times BC$$

۵- هر ضلع قائمه واسطه هندسی بین تصویر آن ضلع روی وتر و وتر می باشد.

۶- حاصل ضرب ارتفاع وارد بر وتر در وتر با حاصل ضرب دو ضلع قائمه آن برابر است.

$$AH \times BC = AB \times AC = 2S_{\widehat{ABC}}$$

$$\widehat{B} = 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{1}{2}BC$$

۷- ضلع مقابل به زاویه  $30^\circ$  درجه نصف وتر است.

$$\widehat{B} = 45^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$$

۸- ضلع مقابل به زاویه  $45^\circ$  درجه  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  وتر است.

$$\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$$

۹- ضلع مقابل به زاویه  $60^\circ$  درجه  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  وتر است.

$$\text{میانه } AM \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC$$

۱۰- میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

$$\text{مجموع مربعات سه میانه} = \frac{3}{4}BC^2$$

۱۱- مجموع مربعات سه میانه مثلث برابر  $\frac{3}{4}$  مربع وتر است.

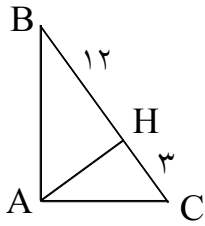
۱۲- اگر یک زاویه مثلث  $15^\circ$  درجه باشد آن گاه ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر است.

$$\widehat{B} = 75^\circ \text{ یا } 15^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{4}BC$$



۲۲- تست ۱: اگر در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر روی وتر پاره خطهایی به اندازه‌های ۳ و ۱۲ ایجاد کرده باشد آن گاه مساحت مثلث کدام است؟

- ۳۶ (۱)      ۱۸ (۲)      ۴۵ (۳)      ۵۴ (۴)



$$AH^2 = BH \times CH$$

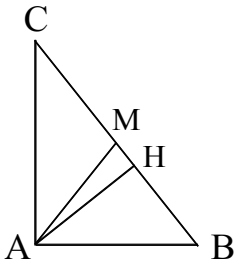
پاسخ: گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$AH^2 = 12 \times 3 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

$$S = \frac{1}{2} \times AH \times BC \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 6 \times 15 = 45$$

تست ۲: در مثلث  $\widehat{ABC}$ ,  $(\widehat{A} = 90^\circ)$  ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. اگر HC و HB به ترتیب ۴ و ۹ واحد باشند مساحت مثلث AMH کدام است؟

- ۴/۵ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۷/۵ (۴)



$$AH^2 = BH \times CH$$

پاسخ:

$$AH^2 = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

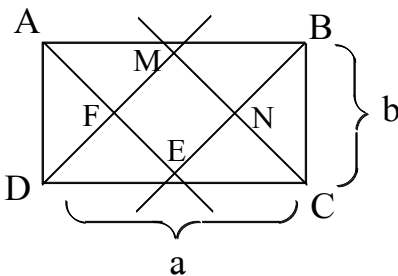
$$MH = BM - BH \Rightarrow MH = \frac{13}{2} - 4 = \frac{5}{2}$$

$$S_{AMH} = \frac{1}{2} AH \times MH \Rightarrow S_{AMH} = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7/5$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تست ۳: در یک مستطیل با اضلاع a و b از برخورد نیمسازهای داخلی آن یک چهارضلعی ایجاد می‌شود. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

- $\frac{1}{4}(a^2 - b^2)$  (۴)       $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$  (۳)       $\frac{1}{4}(a - b)^2$  (۲)       $\frac{1}{4}(a + b)^2$  (۱)



پاسخ: از برخورد نیمسازهای یک مستطیل، مربع ایجاد می‌شود.

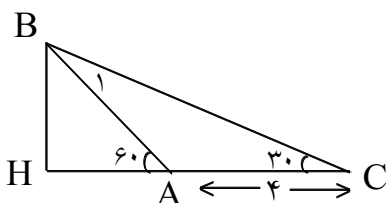
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{MDC} : \widehat{D}_1 = 45 \quad MC = \frac{\sqrt{2}}{2} a \\ \widehat{BNC} : \widehat{B}_1 = 45 \Rightarrow NC = \frac{\sqrt{2}}{2} b \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2}}{2} (a - b) \Rightarrow S_{MNEF} = MN^2 = \frac{1}{4} (a - b)^2$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تست ۴: در شکل مقابل اندازه ارتفاع BH کدام است؟

- ۲ (۱)       $2\sqrt{3}$  (۳)      ۴ (۲)       $\sqrt{3}$  (۴)



پاسخ: زاویه  $\widehat{B}_1$  برابر ۳۰ درجه است. پس مثلث  $\widehat{ABC}$  متساوی الساقین

$$\widehat{ABH} : \widehat{A} = 60 \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} (4) = 2\sqrt{3}$$

است بنابراین  $AB = 4$  داریم:

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۲۳- در مثلث متساوی الساقین خصوصیات زیر وجود دارد:

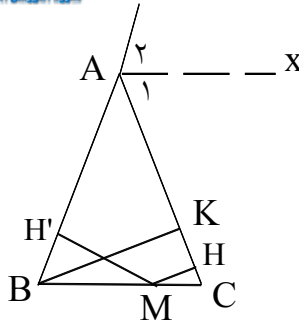
$$AB = AC \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C} \quad (\text{الف})$$

(ب) ارتفاع، میانه، نیمساز و عمود منصف وارد بر قاعده بر هم منطبقند.

(ج) نیمساز زاویه خارجی رأس با قاعده موازی است.  $Ax \parallel BC$

(د) مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

$$M \in BC \Rightarrow MH + MH' = BK$$



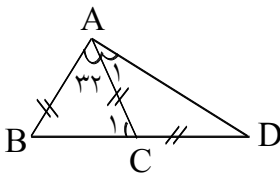
تست ۱: اگر در مثلث  $\widehat{ABC}$  داشته باشیم  $(\hat{A} = 32^\circ \text{ و } AB = AC)$  و ضلع BC را به اندازه AB امتداد دهیم تا به نقطه D برسیم آن گاه زاویه ی  $\widehat{ADC}$  کدام است؟

۳۹ (۴)

۳۸ (۳)

۳۷ (۲)

۳۶ (۱)



$$\hat{C}_1 = \frac{180 - 32}{2} = 74$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{A}_1 + \hat{D}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}_1 = 2\hat{D}_1 \Rightarrow 74 = 2\hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = 37$$

پاسخ:

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

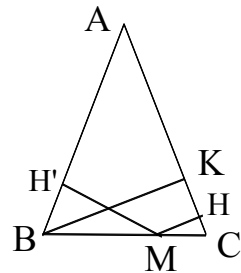
تست ۲: اگر در مثلث  $\widehat{ABC}$  داشته باشیم  $AB = AC = 3$  و  $\hat{B} = 75^\circ$ ، آن گاه مجموع فاصله های نقطه ی دلخواه M از دو ضلع AB و AC کدام است؟

۳ (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)



$$\hat{B} = 75^\circ \Rightarrow \hat{C} = 75^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30$$

$$MH + MH' = BK$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = 30 \Rightarrow BK = \frac{AC}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow MH + MH' = \frac{3}{2}$$

پاسخ:

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

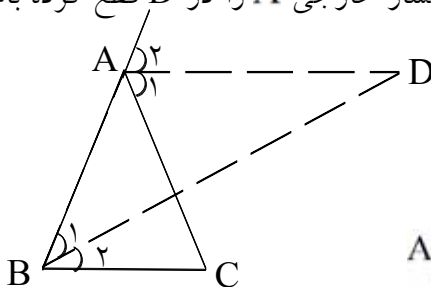
تست ۳: اگر در مثلث  $\widehat{ABC}$ ،  $(AB = AC)$ ، نیمساز داخلی زاویه  $\hat{B}$  نیمساز خارجی  $\hat{A}$  را در D قطع کرده باشد، اندازه AD کدام است؟

$2BC$  (۲)

BC (۱)

$2AB$  (۴)

AC (۳)



پاسخ: نیمساز خارجی AD با قاعده BC موازی است.

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel BC \\ \text{مورب BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D} = \hat{B}_2 \left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D} = \hat{B}_1 \Rightarrow AD = AB$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۲۴- مثلث متساوی الاضلاع دارای خصوصیات زیر می باشد:

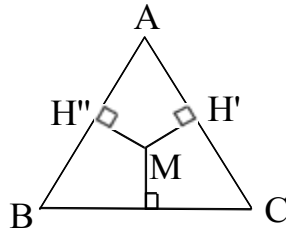
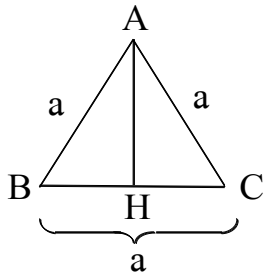
$$AB = AC = BC \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C} = \hat{A} \quad (\text{الف})$$

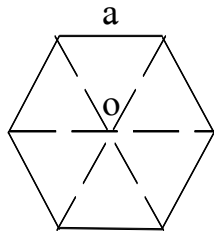
$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad (\text{ب})$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad (\text{ج})$$

(د) مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث تا سه ضلع برابر ارتفاع مثلث می باشد.

$$MH + MH' + MH'' = h$$





۲۵- شش ضلعی منتظم دارای خصوصیات زیر می باشد:

الف)  $6a =$  محیط شش ضلعی منتظم

ب)  $6 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) =$  مساحت شش ضلعی منتظم

تست ۱: اگر مساحت مثلث متساوی الاضلاعی برابر  $\sqrt{3}$  باشد ارتفاع آن کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$       (۲)  $2\sqrt{3}$       (۳)  $3\sqrt{2}$       (۴) ۳

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

پاسخ:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} (2) \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تست ۲: اگر مجموع فواصل یک نقطه دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاعی از ضلعها برابر یک باشد آن گاه بین S مساحت مثلث و  $2P$  محیط مثلث کدام رابطه برقرار است؟

- (۱)  $2P = 3S$       (۲)  $2P = 3S$       (۳)  $3P = 2S$       (۴)  $3S = P$

پاسخ: می دانیم مجموع فواصل نقطه‌ای درون مثلث متساوی الاضلاع تا سه ضلع آن برابر ارتفاع است. داریم:  $h = 1$

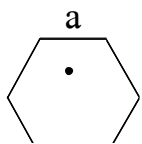
$$\frac{S}{2P} = \frac{\frac{1}{2} a \times h}{3a} = \frac{1}{6} h = \frac{1}{6} \Rightarrow 6S = 2P \Rightarrow 3S = P$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تست ۳: اگر مساحت ۶ ضلعی منتظمی  $\sqrt{10.8}$  باشد آن گاه مجموع فاصله‌های یک نقطه دلخواه درون آن از اضلاعش

کدام می باشد؟

- ۱۹  $4\sqrt{3}$       (۲)  $6\sqrt{3}$       (۳)  $8\sqrt{3}$       (۴)  $12\sqrt{3}$



پاسخ: مجموع فواصل هر نقطه درون ۶ ضلعی منتظم تا اضلاعش مساوی ۶ برابر ارتفاع (فاصله مرکز

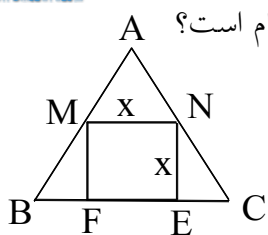
۶ ضلعی تا یکی از اضلاع) می باشد.

$$S = \sqrt{10.8} \Rightarrow 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = \sqrt{10.8} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} (2) \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

$$\text{مجموع فواصل} = 6h = 6\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۲۶- اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع یک، مربعی محاط کرده باشیم آن گاه ضلع مربع کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{3} - 3$
- (۲)  $2\sqrt{3} + 3$
- (۳)  $\sqrt{3}$
- (۴)  $2\sqrt{3}$

پاسخ: اگر ضلع مربع را  $x$  در نظر بگیریم آن گاه چون مثلث  $\widehat{AMN}$  متساوی الاضلاع است پس  $MN = AN = x$  داریم:

$$\widehat{C} = 60^\circ \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{3}}{2} NC \Rightarrow NC = \frac{2x}{\sqrt{3}} \\ AN = x \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 1 = \frac{2x}{\sqrt{3}} + x \Rightarrow 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2 - 3} = 2\sqrt{3} - 3$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۷- به دو نسبت مساوی تناسب می گوئیم. مثلاً  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  یک تناسب است.

هر تناسب دارای خصوصیات زیر می باشد. به عبارتی از هر تناسب می توان تناسب جدیدی به صورت زیر نتیجه گرفت:



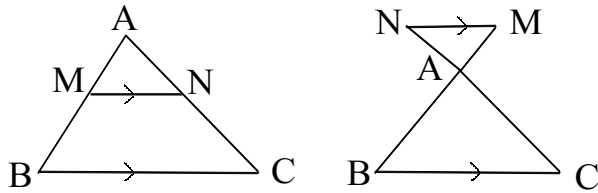
تست ۱: اگر  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$  باشد آن گاه حاصل  $\frac{3y - 3}{3x - 2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{6}$
- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۳)  $\frac{4}{3}$
- (۴)  $\frac{3}{4}$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3y}{3x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3y - 3}{3x - 2} = \frac{3}{2}$$

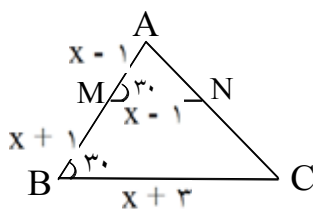
پاسخ:

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۲۸- قضیه تالس: اگر خطی موازی با یک ضلع مثلثی رسم شود آن‌گاه بر دو ضلع دیگر یا امتداد دو ضلع دیگر پاره‌خطهای متناسب ایجاد می‌کند.

$$MN \parallel BC \left\{ \begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{NC} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \end{array} \right.$$



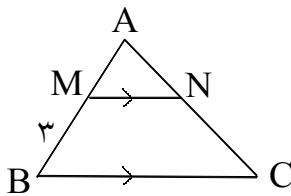
تست ۱: در شکل مقابل X برابر کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

پاسخ: از تساوی زوایای ۳۰ درجه در شکل نتیجه می‌گیریم  $MN \parallel BC$ .

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{x-1}{2x} = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow 2x = x+3 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

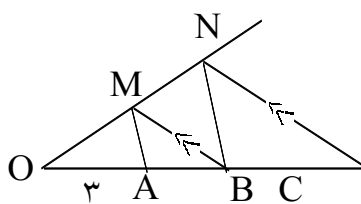


تست ۲: در شکل مقابل  $BC = \frac{1}{5} MN$  است. اندازه AB چقدر است؟

- ۴ (۱)
- ۶ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{AB-3}{AB} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}AB = \frac{3}{5} \Rightarrow AB = 9$$

پس گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



تست ۳: در شکل مقابل  $OA = 3$  و  $AC = 9$  اندازه OB کدام است؟

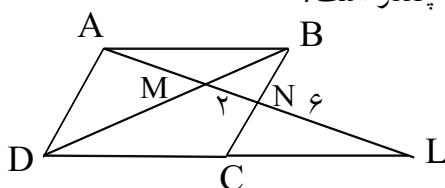
- ۴ (۱)
- ۶ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

$$\begin{aligned} AM \parallel BN &\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON} & MB \parallel NC &\Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OM}{ON} \\ \Rightarrow \frac{OA}{OB} &= \frac{OB}{OC} & \Rightarrow OB^2 &= 3 \times 12 \Rightarrow OB = 6 \end{aligned}$$

پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تست ۴: در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است. طول پاره‌خط AM چقدر است؟

- ۲ (۱)
- $2\sqrt{3}$  (۲)
- ۳ (۴)
- ۴ (۳)

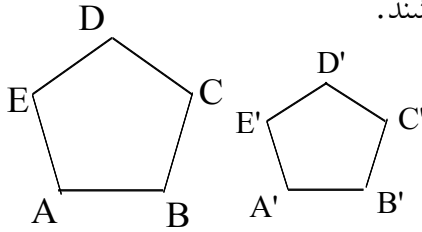


پاسخ:

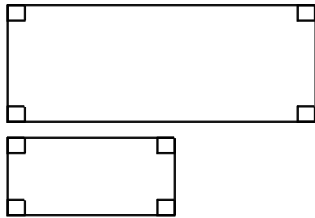




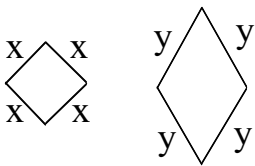
۲۹- دو چندضلعی متشابه هستند هرگاه اضلاعشان متناسب و زوایای آنها برابر باشند.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \text{ و } \dots \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots \end{array} \right\} \Leftrightarrow ABCDE \sim A'B'C'D'E'$$



۳۰- دو مستطیل با وجود آن که زوایای برابر دارند لزومی ندارد متشابه باشند. زیرا ممکن است اضلاعشان متناسب نباشند.



۳۱- دو لوزی با وجود آن که اضلاعشان متناسب است، لزومی ندارد متشابه باشند. زیرا ممکن است زوایای برابر نداشته باشند.

۳۲- هر دو n ضلعی منتظم متشابهند.

۳۳- در دو شکل متشابه به نسبت اضلاع متناظر نسبت تشابه می‌گوئیم و آن را با K نمایش می‌دهیم. در ضمن در دو شکل متشابه نسبت تمام اجزای متناظر با نسبت تشابه متناظر است به جز نسبت مساحت‌ها که با توان دوم برابر است.  $K^2$

۳۴- فقط در مثلث از حالت‌های زیر می‌توان برای تشابه استفاده کرد.

(۱) (ضضض) (۲) (زضز) (۳) (ضضض)

تست ۱: اگر نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه  $\frac{۵۲}{۱۱۷}$  باشد آن‌گاه نسبت محیط‌های آن‌ها کدام است؟

(۱)  $\frac{۲}{۹}$  (۲)  $\frac{۳}{۲}$  (۳)  $\frac{۴}{۹}$  (۴)  $\frac{۴}{۳}$

$$\frac{S}{S'} = \frac{۵۲}{۱۱۷} \Rightarrow K^2 = \frac{۴}{۹} \Rightarrow K = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{۲}{۳} \text{ یا } \frac{۳}{۲}$$

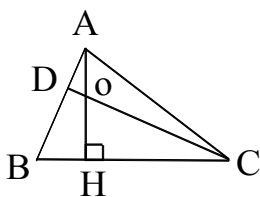
پاسخ:

پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تست ۲: در شکل مقابل AH و CD ارتفاع‌های مثلث  $\widehat{ABC}$  هستند. اگر داشته باشیم

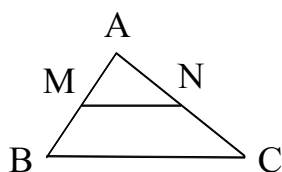
$\frac{1}{3}OH = ۵$   $OD = AD = ۱۲$  آن‌گاه اندازه CH است؟

(۱) ۱۶۵ (۲) ۱۷۰  
(۳) ۱۷۵ (۴) ۱۸۰



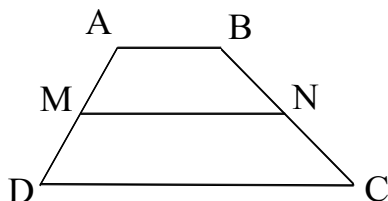
پاسخ: دو مثلث  $\widehat{OHC}$  و  $\widehat{OAD}$  متشابه هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O} = \hat{O} \\ \hat{D} = \hat{H} = ۹۰ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADO} \sim \widehat{OHC} \Rightarrow \frac{OH}{OD} = \frac{HC}{AD} \Rightarrow \frac{۳۶}{۱۲} = \frac{HC}{۱۲} \Rightarrow HC = ۱۸۰$$



۳۵- پاره‌خطی که وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند موازی ضلع سوم و مساوی نصف ضلع سوم است.

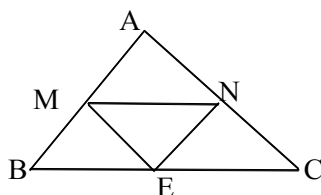
$$\left. \begin{array}{l} M \text{ وسط } AB \\ N \text{ وسط } AC \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel BC, MN = \frac{BC}{2}$$



۳۶- پاره‌خطی که وسطهای دو ساق دوزنقه‌ای را به هم وصل کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع دو قاعده است.

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ وسط } AD \\ N \text{ وسط } BC \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel AB, MN = \frac{AB + DC}{2}$$

۳۷- یک مثلث را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم کرده‌ایم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت است؟



۲ (۲)

 $\frac{3}{2}$  (۱)

۴ (۴)

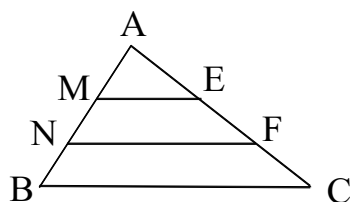
۳ (۳)

پاسخ: اگر وسطهای اضلاع مثلث را به هم وصل کنیم آن‌گاه مثلث به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌شود. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MN = \frac{1}{2} BC \\ NE = \frac{1}{2} AB \\ ME = \frac{1}{2} AC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{محیط } MNE = \frac{1}{4} (\text{محیط } ABC)$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تست ۲: اگر در مثلث ABC داشته باشیم  $AM = MN = NB$  و  $AE = EF = FC$  آن‌گاه مجموع  $ME + NF$  کدام است؟



۲ BC (۲)

BC (۱)

 $\frac{2}{3} BC$  (۴) $\frac{3}{2} BC$  (۳)

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} ME \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{ME}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow ME = \frac{1}{3} BC$$

پاسخ:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} NF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{AB} = \frac{NF}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow NF = \frac{2}{3} BC$$

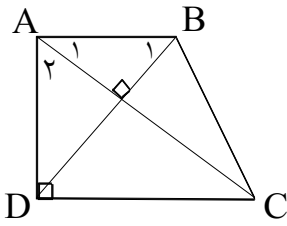
از جمع دو رابطه بالا نتیجه می‌گیریم:  $ME + NF = BC$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۳۸- مسئله: ثابت کنید اگر در یک ذوزنقه قائم الزاویه اقطار بر هم عمود باشند، آن گاه ارتفاع ذوزنقه واسطه هندسی بین دو قاعده است.

پاسخ:



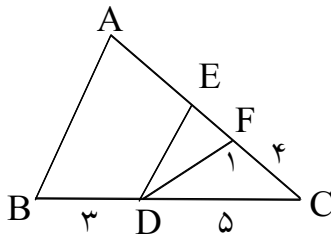
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = 90 \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 \\ \widehat{A} = \widehat{D} = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABD} \sim \widehat{ADC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \times DC$$

۳۹- در شکل مقابل زاویه B مساوی  $\widehat{F}_1$  می باشد. اگر  $AB \parallel DE$  باشد آن گاه نسبت

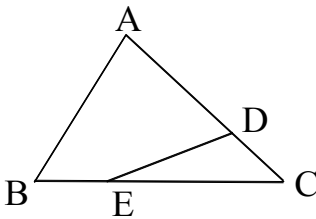
کدام است؟  $\frac{FD}{ED}$



$\frac{3}{5}$ (۲)	$\frac{4}{5}$ (۱)
$\frac{2}{3}$ (۴)	$\frac{2}{5}$ (۳)

۴۰- در شکل مقابل  $\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$  است. نسبت مساحت مثلث  $\widehat{ABC}$  به مساحت

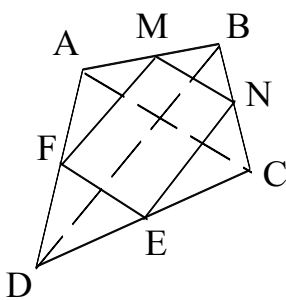
مثلث  $\widehat{DEC}$  کدام است؟



$\frac{7}{2}$ (۲)	$\frac{9}{2}$ (۱)
$\frac{9}{4}$ (۴)	$\frac{7}{3}$ (۳)

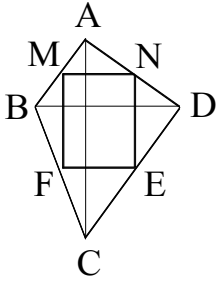
۴۱- اگر وسطهای اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم یک متوازی الاضلاع ساخته می شود. در ضمن محیط متوازی الاضلاع MNEF برابر مجموع دو قطر چهارضلعی ABCD است.

$$\text{محیط MNEF} = AC + BD$$

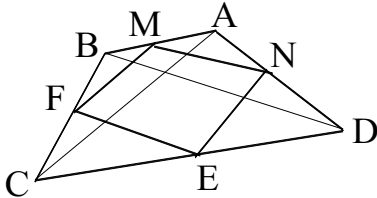




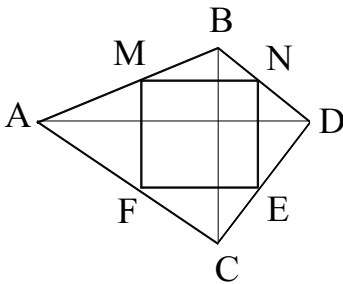
۴۲- در حالت خاص می‌تواند چهارضلعی MNEF به صورت‌های زیر باشد.



الف) اگر  $AC \perp BD$  آن‌گاه MNEF مستطیل است.



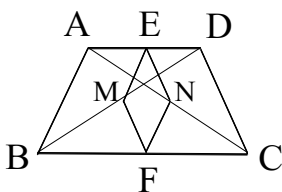
ب) اگر  $AC = BD$  آن‌گاه MNEF لوزی است.



ج) اگر  $AC = BD$  و  $AC \perp BD$  آن‌گاه MNEF مربع است.

۴۳- در یک چهارضلعی وسط‌های دو ضلع مقابل را به هم وصل کرده‌ایم. در این صورت دو پاره‌خط ایجاد شده کدام ویژگی را دارند؟

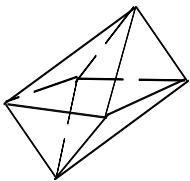
- (۱) مساویند (۲) عمودند (۳) منصفند (۴) عمود منصفند



۴۴- اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مساوی باشند آن‌گاه وسط‌های دو قطر و وسط‌های دو ضلع دیگر رئوس کدام چهارضلعی خواهند بود؟

- (۱) متوازی‌الاضلاع (۲) لوزی (۳) مستطیل (۴) ذوزنقه

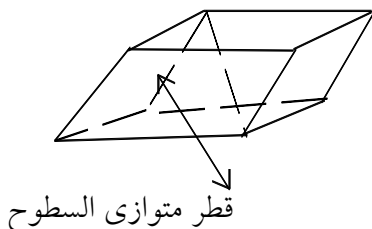
۴۵- به شکل فضایی که از هر طرف به صفحه محدود می‌باشد، چندوجهی می‌گوییم.

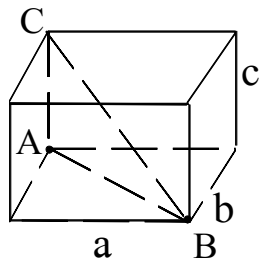


۴۶- به فصل مشترک دو وجه یک چندضلعی یال و به فصل مشترک هر دو یال یک رأس می‌گوئیم. به عنوان نمونه هشت وجهی مقابل دارای ۱۲ یال و ۶ رأس می‌باشد.

۴۷- به شش وجهی که تمام وجه‌های آن متوازی‌الاضلاع باشد متوازی‌السطوح می‌گوییم.

۴۸- در متوازی‌السطوح به پاره‌خطی که دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کند قطر می‌گوئیم. هر متوازی‌السطوح دارای ۶ وجه، ۱۲ یال و ۸ رأس و ۴ قطر می‌باشد.





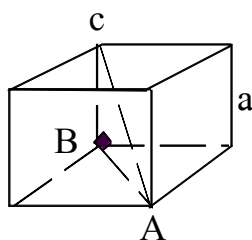
۴۹- به متوازی السطوحی که وجه‌های آن مستطیل باشند مکعب مستطیل می‌گوییم. در هر مکعب مستطیل داریم:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ قطر وجه}$$

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ قطر}$$

$$S = 2(ab + ac + bc) \text{ کل}$$

$$V = abc \text{ حجم}$$



۵۰- به متوازی السطوحی که وجه‌های آن مربع باشد مکعب می‌گوییم. در هر مکعب داریم:

$$AB = a\sqrt{2} \text{ قطر وجه}$$

$$AC = a\sqrt{3} \text{ قطر}$$

$$S = 6a^2 \text{ جانبی}$$

$$S = 6a^2 \text{ کل}$$

$$V = a^3 \text{ حجم}$$

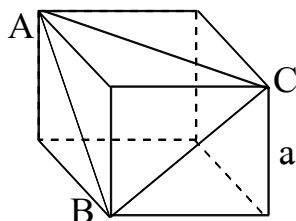
۵۱- اگر در یک مکعب اندازه قطر  $\sqrt{12}$  باشد آن‌گاه حجم این مکعب کدام است؟

$$3\sqrt{3} \text{ (۴)}$$

$$27 \text{ (۳)}$$

$$2\sqrt{2} \text{ (۲)}$$

$$8 \text{ (۱)}$$



۵۲- اگر در مکعب شکل مقابل مساحت مثلث  $\widehat{ABC}$  برابر  $4\sqrt{3}$  باشد آن‌گاه مساحت

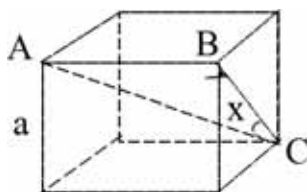
جانبی این مکعب کدام است؟

$$18 \text{ (۲)}$$

$$26 \text{ (۱)}$$

$$36 \text{ (۴)}$$

$$32 \text{ (۳)}$$



۵۳- در مکعب شکل مقابل کسینوس زاویه X کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (۲)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (۱)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \text{ (۴)}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ (۳)}$$

۵۴- اگر ابعاد مکعب مستطیلی با اعداد ۱ و ۲ و ۲ متناسب باشند و قطر این مکعب مستطیل برابر ۹ باشد، آن‌گاه حجم آن کدام است؟

$$121 \text{ (۴)}$$

$$108 \text{ (۳)}$$

$$96 \text{ (۲)}$$

$$81 \text{ (۱)}$$

۵۵- در مکعب مستطیل با ابعاد ۳ و ۴ و ۵ زاویه بین ضلع بزرگتر و قطر کدام است؟

$$\text{ArcCos} \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (۴)}$$

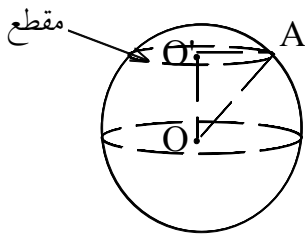
$$\text{ArcCos} \frac{1}{3} \text{ (۳)}$$

$$60 \text{ (۲)}$$

$$45 \text{ (۱)}$$



۵۶- کره مجموعه نقاطی از فضا می باشد که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابتی می باشند.

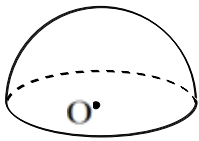


۵۷- مقطع هر صفحه با کره یک دایره است. اگر فاصله صفحه ای که کره را قطع می کند تا مرکز کره را داشته باشیم آن گاه شعاع مقطع به صورت زیر بدست

$$\text{می آید. } O'A = \sqrt{R^2 - OO'^2}$$

۵۸- در کره به شعاع R این روابط برقرار است:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  حجم و  $S = 4\pi R^2$  مساحت

۵۹- در نیمکره به شعاع R روابط زیر برقرار است:



$$S = 2\pi R^2 \text{ جانبی نیمکره}$$

$$S = 3\pi R^2 \text{ کل نیمکره}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 \text{ کل نیمکره}$$

تست ۱: اگر مساحت یک نیمکره برابر  $27\pi$  باشد آن گاه حجم آن کدام است؟

$$32\pi \text{ (۴)}$$

$$27\pi \text{ (۳)}$$

$$18\pi \text{ (۲)}$$

$$21\pi \text{ (۱)}$$

$$S = 27\pi \text{ کل}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 \text{ نیمکره}$$

$$3\pi R^2 = 27\pi$$

$$V = \frac{2}{3}\pi (3)^3 \text{ نیمکره}$$

پاسخ: گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$R^2 = 9$$

$$V = 18\pi \text{ نیمکره}$$

$$R = 3$$

۶۰- اگر کره ای در یک مکعب محاط شده باشد آن گاه نسبت حجم کره به حجم مکعب کدام است؟

$$\frac{\pi}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ (۱)}$$

۶۱- اگر صفحه ای به فاصله ۳ سانتی متر از مرکز کره ای به شعاع ۵ آن را قطع کند آن گاه مساحت مقطع حاصل کدام است؟

$$20\pi \text{ (۴)}$$

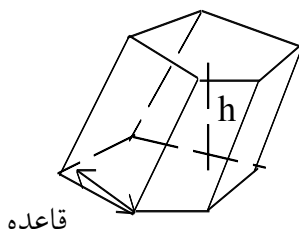
$$18\pi \text{ (۳)}$$

$$16\pi \text{ (۲)}$$

$$12\pi \text{ (۱)}$$

۶۲- به چندوجهی که دو وجه آن مساوی و موازی و سایر وجه هایش متوازی الاضلاع باشد، منشور می گوئیم.

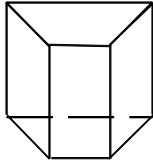
در منشور به دو وجه موازی و مساوی و به فاصله ای دو قاعده ارتفاع می گوئیم.



منشور ۵ ضلعی مایل

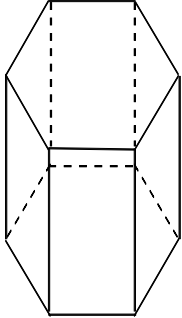


۶۳- به منشوری که یال‌های جانبی آن با ارتفاع برابر باشند منشور قائم می‌گوییم.



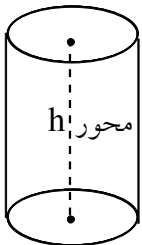
منشور قائم چهارضلعی

۶۴- به منشور قائمی که قاعده‌هایش چندضلعی منتظم باشند، منشور منتظم می‌گوییم. در منشور منتظم وجه‌های جانبی مستطیل‌های مساوی هستند.



منشور منتظم ۶ ضلعی

۶۵- به شکل فضایی شبیه به منشور که قاعده‌هایش دایره باشند، استوانه می‌گوییم.



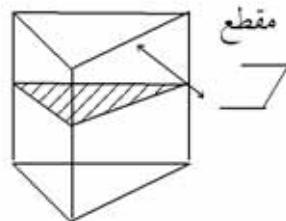
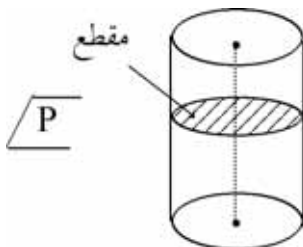
۶۶- به خطی که مراکز دو قاعده استوانه را به هم وصل می‌کند، محور استوانه می‌گوییم.

۶۷- اگر محور استوانه ارتفاع باشد آن‌گاه استوانه قائم می‌باشد.

۶۸- از دوران یک مستطیل حول یکی از اضلاع آن استوانه قائم ایجاد می‌شود.

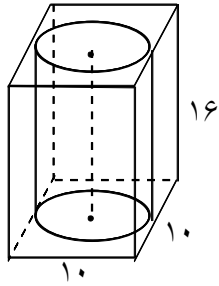
۶۹- در استوانه و منشور روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} &= \text{مساحت جانبی استوانه قائم یا منشور منتظم} \\ \text{مساحت قاعده} \times 2 + \text{مساحت جانبی} &= \text{مساحت کل} \\ \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} &= \text{حجم} \end{aligned}$$



۷۰- هر صفحه موازی با قاعده‌ی یک منشور یا یک استوانه این دو شکل فضایی را قطع کند، آن‌گاه مقطع حاصل با قاعده مساوی خواهد بود.

۷۱- در حقیقت متوازی السطوح، مکعب و مکعب‌مستطیل نوعی منشور هستند. در ضمن مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع باشد یک منشور منتظم می‌باشد.

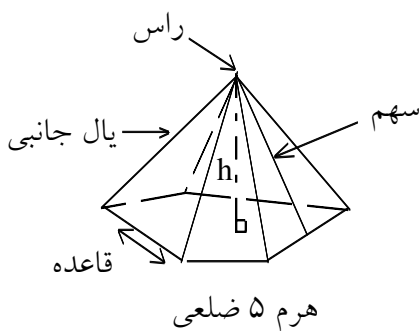


۷۲- در شکل مقابل استوانه‌ای در یک مکعب مستطیل محاط شده است حجم بین استوانه و مکعب مستطیل کدام است؟

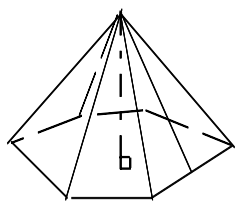
- (۱) ۳۴۳  
(۲) ۳۴۴  
(۳) ۳۴۶  
(۴) ۳۴۸

۷۳- اگر در یک منشور منتظم ۶ ضلعی قاعده ۲، ارتفاع منشور برابر نصف محیط قاعده باشد، آن‌گاه حجم منشور کدام است؟

- (۱)  $۳۲\sqrt{۳}$   
(۲)  $۳۶\sqrt{۳}$   
(۳)  $۲۸\sqrt{۳}$   
(۴)  $۲۴\sqrt{۳}$

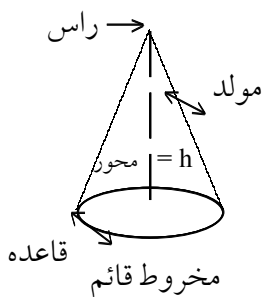


۷۴- به چند وجهی که همه‌ی وجه‌های آن به جز یکی از آن‌ها از یک نقطه عبور کند هرم می‌گوئیم. در هرم وجه‌های جانبی مثلث می‌باشند. به ارتفاع وجه جانبی هرم، سهم گفته می‌شود.



۷۵- اگر در هرمی قاعده چندضلعی منتظم باشد و ارتفاع از مرکز قاعده عبور کند آن‌گاه به آن هرم منتظم می‌گوئیم. در هرم منتظم وجه‌های جانبی مثلث متساوی‌الساقین هستند.

هرم منتظم ۶ ضلعی



۷۶- مخروط شکل فضایی شبیه به هرم است که قاعده‌ی آن به جای چندضلعی دایره است. اگر در یک مخروط ارتفاع و محور مخروط مساوی باشند آن مخروط قائم می‌باشد.

۷۷- از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه آن مخروط قائم ایجاد می‌شود.

۷۸- در مخروط و هرم روابط زیر همواره برقرار هستند.

$$\pi RL = \text{مولد} \times \text{نصف محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی مخروط قائم}$$

$$\text{سهم} \times \text{نصف محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی هرم منتظم}$$

$$\text{مساحت قاعده} + \text{مساحت جانبی} = \text{مساحت جانبی کل هر دو شکل}$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \frac{1}{3} \times \text{حجم هر دو شکل}$$





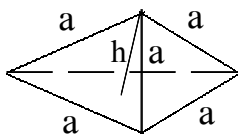
۷۹- اگر شعاع یک مخروط را دو برابر و ارتفاع آن را نصف کنیم، حجم مخروط چه تغییری می کند؟  
 (۱) دو برابر می شود (۲) نصف می شود (۳) تغییر نمی کند (۴) چهار برابر می شود

۸۰- یک مخروط به ارتفاع ۱۲ سانتی متر را پر از آب می کنیم و آن را در یک استوانه با همان قاعده ی مخروط و ارتفاع ۶ سانتی متر خالی می کنیم. فاصله ی سطح آب تا بالای استوانه کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۲/۵

۸۱- اگر وسط های سه یال هم رس یک مکعب را به هم وصل کنیم آن گاه مکعب به دو قسمت تقسیم می شود. حجم قسمت بزرگتر چندبرابر حجم قسمت کوچکتر است؟

(۱) ۴۶ (۲) ۴۷ (۳) ۴۸ (۴) ۴۹



۸۲- به هرمی که با چهار مثلث متساوی الاضلاع ساخته می شود چهاروجهی منتظم می گوئیم. در چهاروجهی منتظم خصوصیات زیر وجود دارند:

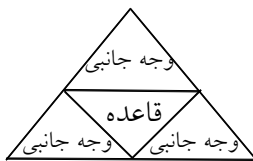
$$۱) h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$$

$$۲) \text{حجم چهاروجهی منتظم} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a \right) = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

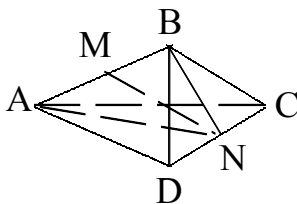
$$۳) \text{مساحت چهاروجهی منتظم} = 3 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$$

$$۴) \text{مساحت کل چهاروجهی منتظم} = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = \sqrt{3} a^2$$

۸۳- شکل گسترده ی یک چهاروجهی منتظم به صورت زیر می باشد.



۸۴- مسئله: ثابت کنید پاره خطی که وسط های دو یال متنافر را در یک چهاروجهی منتظم به هم وصل می کند بر آن دو یال عمود است.

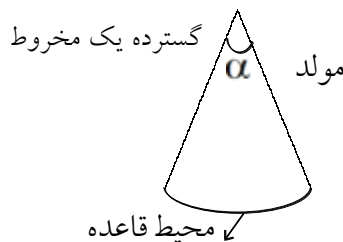


برهان: فرض کنیم  $M$  وسط  $AB$  و  $N$  وسط  $CD$  باشد. در این صورت مثلث  $\triangle ABN$  متساوی الساقین خواهد بود. (زیرا  $AN = BN$ ) و در این مثلث متساوی الساقین  $MN \perp AB$  یعنی  $MN$  میانه بوده پس ارتفاع نیز است.

از طرفی در مثلث متساوی الساقین  $\triangle MDC$  به همین ترتیب می توان ثابت کرد  $MN$  نیز بر  $DC$  عمود می باشد.

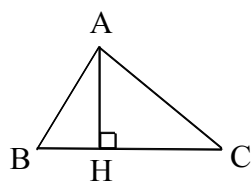
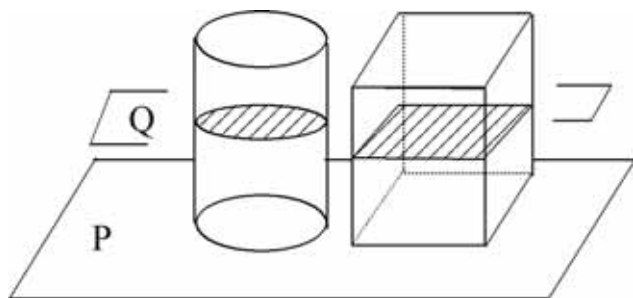


۸۵- اگر سطح جانبی یک مخروط را روی یک صفحه باز کنیم آن گاه قطاعی از دایره ایجاد می شود به طوری که شعاع آن برابر مولد مخروط و طول کمان آن برابر محیط قاعده مخروط می باشد، به همین علت زاویه این قطاع به صورت زیر محاسبه می شود.



$$\alpha = \frac{\text{محیط قاعده}}{\text{مولد}} \text{ بر حسب رادیان}$$

۸۶- اصل کاوالیری در مورد حجمها: اگر قاعده های دو شکل فضایی را روی صفحه P قرار دهیم بطوریکه هر صفحه موازی با P یا هر دو شکل را قطع کند یا هیچ کدام را قطع نکند و در صورت مقطع های حاصل هم مساحت شوند آن گاه دو شکل حاصل هم حجم هستند.



۸۷- مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده آن.  $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

از فرمول مساحت می توان دو رابطه ی زیر را به دست آورد. که در حل تست ها به کار می رود.

$$a = \frac{2S}{h_a} \text{ و } h_a = \frac{2S}{a}$$

سوال: اگر در مثلث ABC بین اضلاع رابطه ی  $a^2 = 2bc$  برقرار باشد آن گاه کدام رابطه بین ارتفاعها برقرار است؟

$$(1) \quad h_a^2 = h_b h_c \quad (2) \quad h_a = h_b h_c \quad (3) \quad h_a^2 = 2h_b h_c \quad (4) \quad 2h_a^2 = h_b h_c$$

پاسخ: با توجه به نکته ی ۲ در رابطه ی  $a^2 = 2bc$  به جای اضلاع مقادیر مساوی آنها را بر حسب ارتفاعها قرار

$$a^2 = 2bc \Rightarrow \left(\frac{2S}{h_a}\right)^2 = 2\left(\frac{2S}{h_b}\right)\left(\frac{2S}{h_c}\right) \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b h_c} \Rightarrow 2h_a^2 = h_b h_c \text{ می دهیم.}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

سوال: اگر S مساحت مثلث ABC و P نصف محیط آن باشد آن گاه حاصل عبارت  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$  کدام است؟

$$(1) \quad \frac{P}{S} \quad (2) \quad \frac{S}{P} \quad (3) \quad \frac{2S}{P} \quad (4) \quad \frac{S}{2P}$$

پاسخ: با توجه به نکته بالا در رابطه ی  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$  به جای ارتفاعها مقادیر مساوی آنها را بر حسب اضلاع قرار

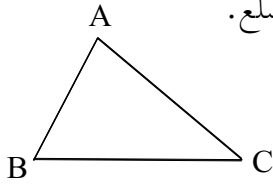
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{2S}{a}} + \frac{1}{\frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{2S}{c}} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} \text{ می دهیم.}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



۸۸- مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه ی بین آن دو ضلع.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$



سوال: اگر در مثلث  $ABC$  داشته باشیم.  $AB = 4$  و  $AC = 3$  و زاویه ی  $A$  متغیر باشد آن گاه بیش ترین مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

(۱) ۱۲      (۲)  $6\sqrt{3}$       (۳) ۶      (۴)  $4\sqrt{3}$

پاسخ: با توجه به نکته ی بالا داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \sin A \Rightarrow S_{ABC} = 6 \sin A$$

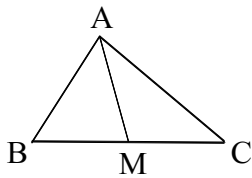
$$\text{Max } S_{ABC} = 6$$

می دانیم بیشترین مقدار  $\sin A$  برابر ۱ است داریم.

بنابراین گزینه ۳ درست است.

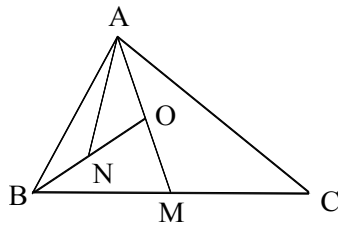
۸۹- در هر مثلث با رسم یک میانه، مثلث به دو مثلث هم مساحت تقسیم می شود.

$$\text{میانه } AM \Rightarrow S_{ABM} = S_{ACM}$$



سوال: در شکل مقابل اگر  $O$  وسط میانه ی  $AM$  و  $N$  وسط  $BO$  باشد آن گاه نسبت مساحت مثلث  $ABN$  به مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{1}{4}$       (۳)  $\frac{1}{6}$       (۴)  $\frac{1}{8}$



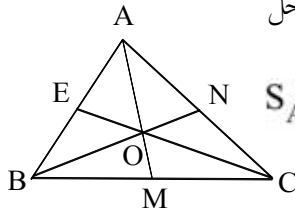
پاسخ: با توجه به نکته ی بالا داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ABO}: \text{ میانه } AN \Rightarrow S_{ABN} = \frac{1}{2} S_{ABO} \\ \widehat{ABM}: \text{ میانه } BO \Rightarrow S_{ABO} = \frac{1}{2} S_{ABM} \\ \widehat{ABC}: \text{ میانه } AM \Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{ABN} = \frac{1}{8} S_{ABC}$$

بنابراین گزینه ۴ درست است.



۹۰- در هر مثلث با رسم هر سه میانه مثلث به شش مثلث هم مساحت تقسیم می شود. اگر  $O$  محل تلاقی میانه های مثلث  $ABC$  باشد آن گاه داریم.



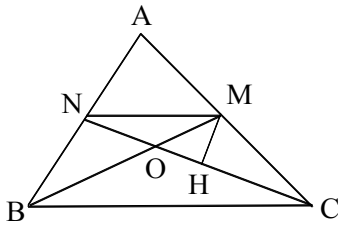
$$S_{AON} = S_{NOC} = S_{MOC} = S_{BOM} = S_{BOE} = S_{AOE}$$

بنابراین هر یک از مثلث های فوق  $\frac{1}{6}$  مثلث  $ABC$  مساحت دارند.

سؤال: اگر در مثلث  $ABC$  میانه های  $BM$  و  $CN$  همدیگر را در نقطه ی  $O$  قطع کرده باشند آن گاه مساحت مثلث  $MNO$  چه کسری از مساحت مثلث  $ABC$  است؟

$$\frac{1}{6} \quad (1) \qquad \frac{1}{8} \quad (2) \qquad \frac{1}{12} \quad (3) \qquad \frac{1}{16} \quad (4)$$

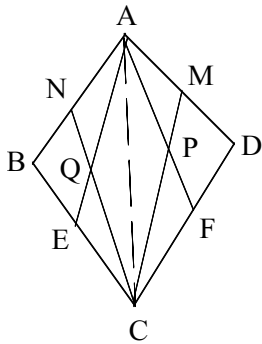
پاسخ: دو مثلث  $OMN$  و  $OMC$  دارای ارتفاع مشترک هستند البته اگر این ارتفاع از رأس  $M$  رسم شود. داریم:



$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{OMN}}{S_{OMC}} &= \frac{\frac{1}{2}MH \times ON}{\frac{1}{2}MH \times OC} = \frac{ON}{OC} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{S_{OMC}}{S_{ABC}} &= \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{OMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{12}$$

بنابراین گزینه ۳ درست است.

سؤال: اگر در چهارضلعی  $ABCD$  نقاط  $M$  و  $N$  و  $E$  و  $F$  وسط اضلاع آن باشند آن گاه نسبت مساحت چهارضلعی  $APCQ$  به مساحت  $ABCD$  کدام است؟



$$\frac{1}{3} \quad (1) \qquad \frac{1}{2} \quad (2) \qquad \frac{1}{4} \quad (3) \qquad \frac{1}{6} \quad (4)$$

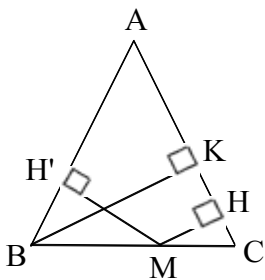
پاسخ: اگر از  $A$  به  $C$  وصل کنیم آن گاه  $P$  محل تلاقی میانه های مثلث  $ADC$  و  $Q$  محل تلاقی میانه های مثلث  $ABC$  است. پس با توجه به نکته بالا خواهیم داشت.

$$\left. \begin{aligned} S_{APC} &= \frac{1}{3}S_{ADC} \\ S_{AQC} &= \frac{1}{3}S_{ABC} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} S_{APCQ} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

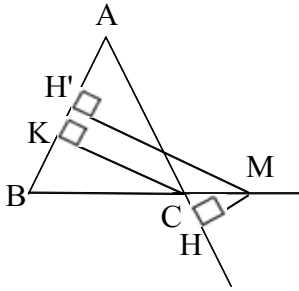
۹۱- مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

$$AB = AC \Rightarrow MH + MH' = BK$$

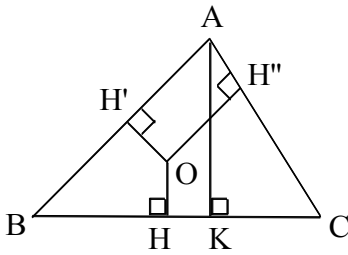




۹۲- قدر مطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه در امتداد قاعده هر مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر ارتفاع وارد بر ساق است.  $AB = AC \Rightarrow |MH - MH'| = CK$



۹۳- مجموع فاصله‌های هر نقطه دلخواه درون یا روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن برابر ارتفاع مثلث است.  $OH + OH' + OH'' = AK$



سوال: مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ مفروض است. مجموع فواصل نقطه‌ی دلخواه M روی ضلع این مثلث از دو ضلع دیگر کدام است؟

$$۴\sqrt{۳} \quad (۲)$$

$$۲\sqrt{۳} \quad (۱)$$

$$۴\sqrt{۲} \quad (۴)$$

$$۳\sqrt{۲} \quad (۳)$$

پاسخ: با توجه به نکته‌ی بالا داریم.

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجموع فواصل M از دو ضلع} \\ = h \\ h = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع فواصل M از دو ضلع} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

سوال: اگر در مثلث متساوی‌الاضلاعی مجموع فواصل نقطه M درون مثلث از سه ضلع برابر ۱ باشد. آن‌گاه بین اندازه مساحت S و محیط ۲P کدام رابطه برقرار است؟

$$S = P^۲ \quad (۴)$$

$$S = P \quad (۳)$$

$$S = ۲P \quad (۲)$$

$$۳S = P \quad (۱)$$

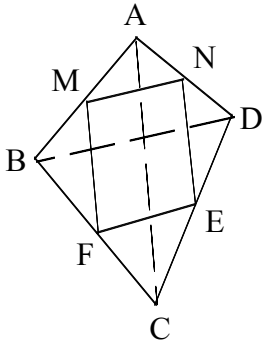
$$\text{پاسخ: با توجه به نکته‌ی بالا داریم: } h = ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲ \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times \frac{۴}{۳} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ ۲P = ۳a \Rightarrow ۲P = ۳ \times \frac{۲}{\sqrt{۳}} \Rightarrow P = \sqrt{۳} \end{array} \right\} \Rightarrow ۳S = P$$

پس گزینه ۱ درست است.



۹۴- اگر وسط های اضلاع یک چهار ضلعی دلخواه را به ترتیب به هم وصل کنیم چهار ضلعی حاصل یک متوازی الاضلاع است.



زیرا با توجه به رابطه ی تالس اضلاع چهار ضلعی حاصل دو به دو با اقطار چهار ضلعی اولیه موازی و نصف آن ها می باشند. به همین علت محیط چهار ضلعی حاصل برابر مجموع دو قطر چهار ضلعی اولیه است.

$$MN \parallel EF \parallel BD \text{ و } MN = EF = \frac{BD}{2}$$

$$NE \parallel MF \parallel AC \text{ و } NE = MF = \frac{AC}{2}$$

$$\text{محیط } MNEF = AC + BD$$

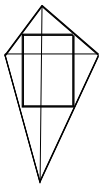
سؤال: اگر وسط های اضلاع مقابل یک چهار ضلعی را به هم وصل کنیم آنگاه پاره خط های حاصل همواره کدام ویژگی را دارند؟

- (۱) عمودند (۲) منصفند (۳) مساویند (۴) هر سه

پاسخ: با توجه به نکته بالا چهار ضلعی حاصل از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک متوازی الاضلاع به دست آمده است و اقطار این متوازی الاضلاع پاره خط های مورد نظر این سؤال می باشند پس منصف یکدیگرند. بنابراین گزینه ۲ درست است.

سؤال: اگر اقطار یک چهار ضلعی بر هم عمود باشند آنگاه اوساط اضلاع آن رئوس کدام چهار ضلعی است؟

- (۱) متوازی الاضلاع (۲) مستطیل (۳) لوزی (۴) مربع

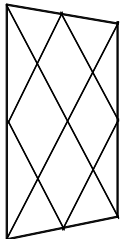


راه حل: گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نکته ی بالا چهار ضلعی حاصل متوازی الاضلاعی است که اضلاعش با اقطار این چهار ضلعی موازیند، پس اضلاع چهار ضلعی حاصل نیز بر هم عمودند به عبارتی چهار ضلعی حاصل مستطیل است.

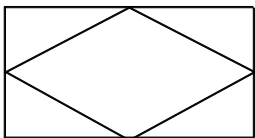
سؤال: اگر اقطار یک چهار ضلعی با هم مساوی باشند آنگاه اوساط آن رئوس کدام چهار ضلعی است؟

- (۱) متوازی الاضلاع (۲) مستطیل (۳) لوزی (۴) مربع

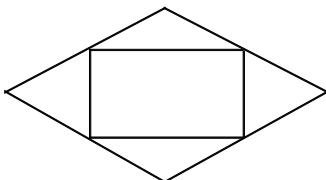
پاسخ: با توجه به نکته ی بالا چهار ضلعی حاصل متوازی الاضلاعی است که اضلاعش دو به دو نصف اقطار چهار ضلعی اولیه هستند. از آنجایی که اقطار این چهار ضلعی با هم مساویند پس اضلاع چهار ضلعی حاصل نیز با هم برابرند به عبارتی چهار ضلعی حاصل لوزی است. بنابراین گزینه ۳ درست است.

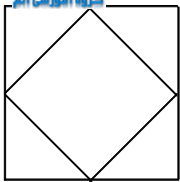


۹۵- اگر وسط های اضلاع یک مستطیل را به هم وصل کنیم چهار ضلعی حاصل لوزی است.

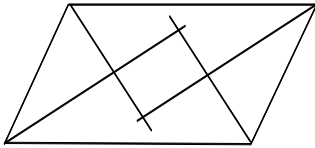


۹۶- اگر وسط های اضلاع یک لوزی را به هم وصل کنیم یک مستطیل حاصل می شود.

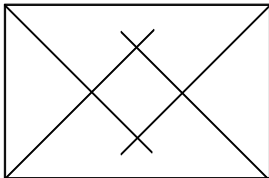




۹۷- اگر وسط‌های اضلاع یک مربع را به هم وصل کنیم یک مربع حاصل می‌شود.



۹۸- از برخورد نیمسازهای متوازی‌الاضلاع یک مستطیل حاصل می‌شود.



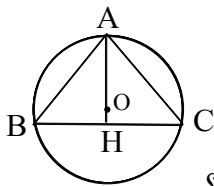
۹۹- از برخورد نیمسازهای مستطیل یک مربع حاصل می‌شود.

۱۰۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایره محیطی مثلث  $\frac{2}{3}$  ارتفاع مثلث است. زیرا در این مثلث

عمود منصف همان میانه است. پس در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  شعاع دایره محیطی

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{2}{3}h \\ AH = h &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

مثلث برابر است با:



سوال: اگر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی  $\sqrt{3}$  باشد آنگاه شعاع دایره محیطی مثلث کدام است؟

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{3} \quad (1) \\ & \sqrt{3} \quad (2) \\ & \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3) \\ & \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (4) \end{aligned}$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow R = 2 \frac{\sqrt{3}}{3}$$

پاسخ:

بنابراین گزینه ۴ درست است.

سوال: زوایای مثلثی با اعداد ۱ و ۵ و ۶ متناسب است. مرکز دایره محیطی مثلث کجا قرار می‌گیرد؟

(۱) خارج مثلث (۲) درون مثلث (۳) وسط ضلع بزرگتر (۴) روی رأس مثلث

پاسخ: فرض کنید  $A$  و  $B$  و  $C$  زوایای مثلث باشند، داریم:

$$\left. \begin{aligned} A + B + C &= 180^\circ \\ \frac{A}{1} &= \frac{B}{5} = \frac{C}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A}{1} = \frac{B}{5} = \frac{C}{6} = \frac{A+B+C}{1+5+6} = \frac{180}{12} = 15 \Rightarrow \begin{cases} A = 15 \\ B = 75 \\ C = 90 \end{cases}$$

پس مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین مرکز دایره محیطی آن وسط وتر قرار دارد. پس گزینه ۳ درست است.



۱۰۱- در مثلث متساوی الاضلاع شعاع دایره محاطی  $\frac{1}{3}$  ارتفاع است. اگر  $a$  ضلع مثلث باشد داریم:

$$\left. \begin{array}{l} r = \frac{1}{3}h \\ h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

مثال: مساحت مثلث متساوی الاضلاع محیط بر دایره‌ای برابر  $27\sqrt{3}$  واحد مربع است. اندازه مساحت مربع محاط در همان دایره چقدر است؟

پاسخ: با توجه به نکته بالا شعاع دایره محاطی مثلث متساوی الاضلاع برابر ثلث ارتفاع آن است.

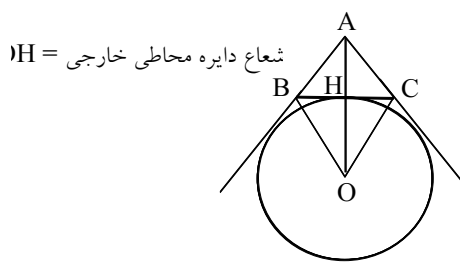
$$\left. \begin{array}{l} S = 27\sqrt{3} \\ S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 27\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow a^2 = 108 \Rightarrow a = 6\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{3} \Rightarrow h = 9 \Rightarrow R = \frac{1}{3}h \Rightarrow R = 3$$

اگر مربع در دایره محاط باشد آنگاه قطر مربع با قطر دایره برابر است.

$$\text{قطر مربع} = 2R \Rightarrow a\sqrt{2} = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = a^2 = 18$$

پس گزینه ۲ درست است.



شعاع دایره محاطی خارجی = OH

۱۰۲- در مثلث متساوی الاضلاع شعاع دایره محاطی خارجی برابر ارتفاع مثلث است.

زیرا در مثلث متساوی الاضلاع ABC اگر O محل تلاقی نیمسازهای خارجی زوایای B و C باشد آنگاه دو مثلث ABC و OBC به حالت دو زاویه و ضلع بین برابر هستند پس  $OH = AH$ .



## استدلال ۱ - سراسری

۱- کدام عبارت زیر نادرست است؟

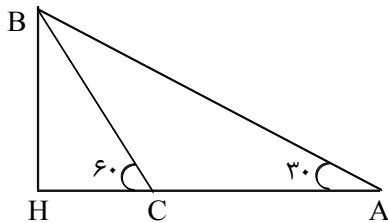
- (۱) در هر مثلث ارتفاع وارد بر هر ضلع از دو ضلع دیگر کوچکتر یا مساوی است.  
 (۲) در هر مثلث ارتفاع وارد بر هر ضلع از میانه نظیر آن ضلع کوچکتر است.  
 (۳) مثلثی هست که ارتفاع وارد بر یک ضلع آن از میانه نظیر آن ضلع کوچکتر است.  
 (۴) مثلثی هست که ارتفاع وارد بر یک ضلع و عمود منصف همان ضلع دو خط موازی متمایز نیستند.

۲- اندازه ۳ زاویه مثلثی با اعداد ۵ و ۴ و ۱ متناسب است این مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی الاضلاع (۲) متساوی الساقین (۳) قائم الزاویه (۴) منفرجه الزاویه

۳- در شکل زیر زاویه A برابر ۳۰ درجه و زاویه C برابر ۶۰ درجه است اگر طول AC برابر ۵۰ متر باشد طول AH چند متر است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۸۰ (۳) ۸۵ (۴) ۹۰



۴- در پنج ضلعی منتظم ABCDE اگر دو قطر BD و CE یکدیگر را در M قطع کنند. چهارضلعی ABME کدام است؟

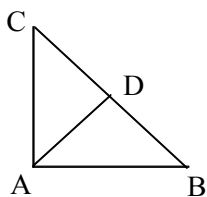
- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) لوزی (۴) دوزنقه متساوی الساقین

۵- مقطع یک صفحه با یک سطح منشوری مربع القاعده کدام چهارضلعی نمی تواند باشد؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) لوزی (۴) دوزنقه متساوی الساقین

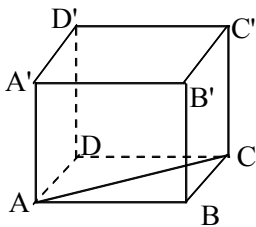
۶- در شکل مقابل مثلث ABC قائم الزاویه و مثلث ADB متساوی الاضلاع است. اگر  $AC=6$  باشد طول وتر BC کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{3}$  (۲)  $5\sqrt{2}$  (۳)  $6\sqrt{2}$  (۴)  $5\sqrt{3}$



۷- در شکل مقابل صفحه‌ی گذرنده از AC (که از یالها نگذرد) سطح مکعب را در کدام چهار ضلعی قطع می کند؟

- (۱) دوزنقه متساوی الساقین (۲) لوزی (۳) متوازی الاضلاع (۴) مستطیل



۸- دو زاویه‌ی A و B متمم اند. اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر  $\frac{4}{9}$  اندازه مکمل زاویه‌ی B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۳۶ (۳) ۶۳ (۴) ۷۲

- ۹- چهارضلعی حاصل از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی هر مستطیل همواره کدام است؟  
 (۱) لوزی (۲) مربع (۳) مستطیل (۴) متوازی الاضلاع
- ۱۰- یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین برابر ۱۰۰ درجه است نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟  
 (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۴۰
- ۱۱- برقاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، دو نقطه M و N را چنان اختیار می‌کنیم که  $BM = NC$  این نقاط را به رأس A وصل می‌کنیم مثلث AMN همواره چگونه است؟  
 (۱) غیرمشخص (۲) متساوی‌الاضلاع (۳) متساوی‌الساقین (۴) قائم‌الزاویه
- ۱۲- سه نقطه A (۰, -۱) و B (۳, ۱) و C (۲, -۴) سه رأس یک مثلث‌اند. این مثلث همواره چگونه است؟  
 (۱) متساوی‌الاضلاع (۲) متساوی‌الساقین است ولی قائم‌الزاویه نیست  
 (۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است (۴) قائم‌الزاویه است ولی متساوی‌الساقین نیست
- ۱۳- در مثلثی که  $\hat{A} = 2\hat{B}$  و زاویه  $\hat{C} = 30^\circ$ ، زاویه  $\hat{B}$  چند درجه است؟  
 (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰
- ۱۴- اگر P یعنی «چهارضلعی ABCD دو قطرش مساوی است» و Q یعنی «چهارضلعی ABCD مستطیل است» کدام گزاره درست است؟  
 (۱) P شرط لازم و کافی برای Q است  
 (۲) P شرط کافی برای Q است  
 (۳) Q شرط کافی برای P است  
 (۴) Q شرط لازم برای P است
- ۱۵- اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، طول ارتفاع وارد بر قاعده برابر کدام است؟  
 (۱) نصف طول قاعده (۲) طول میانه یک ضلع دیگر  
 (۳) طول شعاع دایره محیطی مثلث (۴) طول نیمساز زاویه مقابل به قاعده
- ۱۶- یک ساق مثلث متساوی‌الساقین را از طرف راس مثلث به اندازه خودش ادامه می‌دهیم، نقطه حاصل و قاعده مثلث چه نوع مثلثی تشکیل می‌دهد؟  
 (۱) قائم‌الزاویه (۲) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین  
 (۳) متساوی‌الساقین (۴) منفرجه‌الزاویه
- ۱۷- در مثلثی  $A = \frac{\pi}{2}$ ،  $B = 3C$ ، نسبت اضلاع  $\frac{b}{c}$  کدام است؟  
 (۱)  $\sqrt{2} - 1$  (۲) ۲ (۳)  $1 + \sqrt{2}$  (۴) ۳
- ۱۸- در مثلث متساوی‌الساقین  $\hat{B} = \hat{C}$  مقدار  $\frac{b}{a} \cdot \sin \frac{A}{2}$  چقدر است؟  
 (۱) ۲ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{1}{2}$

۱۹- کدام چهار ضلعی الزاماً یک مربع است؟

- (۱) متوازی‌الاضلاعی که اقطارش عمود منصف هم باشند  
 (۲) مستطیلی که بر یک دایره محیط شود  
 (۳) لوزی که بر یک دایره محیط شود  
 (۴) دوزنقه متساوی‌الساقینی که اقطارش عمود منصف هم باشند

۲۰- فصل مشترک هر صفحه با سطح منشوری که مقطع قائم آن مربع است، کدام چهار ضلعی است؟  
 (۱) دوزنقه (۲) لوزی (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) مستطیل

۲۱- در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ،  $(AB = AC)$  نیمساز خارجی  $\hat{A}$  و نیمساز داخلی  $\hat{B}$  در نقطه  $D$  متلاقض اند. طول پاره خط  $AD$  برابر کدام جزء مثلث است؟

- (۱)  $AC$  (۲) طول نیمساز داخلی زاویه  $\hat{B}$   
 (۳)  $BC$  (۴) شعاع دایره محیطی

۲۲- یکی از زوایای مثلث متساوی‌الساقین برابر  $100^\circ$  است. نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

- (۱)  $25^\circ$  (۲)  $30^\circ$  (۳)  $35^\circ$  (۴)  $40^\circ$

۲۳- نقطه‌ای در بیرون یک دایره به قطر  $10$  واحد قرار دارد. با کدام استدلال می‌توان گفت که فاصله آن نقطه تا مرکز دایره بیشتر از  $5$  واحد است؟

- (۱) درک شهودی (۲) استقرایی (۳) استنتاجی (۴) تمثیلی

۲۴- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد  $8$  و  $5$  و  $2$  می‌باشد. اندازه کوچکترین زاویه خارجی این مثلث چند درجه است؟

- (۱)  $72$  (۲)  $82$  (۳)  $84$  (۴)  $96$

۲۵- در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  ( $\hat{A} = 32^\circ$ ,  $AC = AB$ ) قاعده  $BC$  را به اندازه‌ی ساق تا نقطه  $D$  امتداد می‌دهیم. زاویه  $\hat{ADC}$  چند درجه است؟

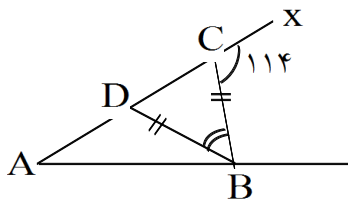
- (۱)  $36^\circ$  (۲)  $34^\circ$  (۳)  $37^\circ$  (۴)  $39^\circ$

۲۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر برابر  $26$  درجه است. کوچک‌ترین زاویه مثلث چند درجه است؟

- (۱)  $24$  (۲)  $28$  (۳)  $32$  (۴)  $34$

۲۷- از به هم وصل کردن وسط ضلع‌های مربعی یک مربع جدید ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع بزرگتر به کوچکتر کدام است؟

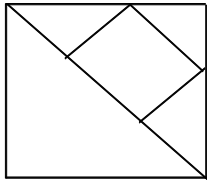
- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $4$



۲۸- در شکل مقابل زاویه  $\widehat{BCX} = 114^\circ$  زاویه  $\widehat{CBD}$  چند درجه است؟

- (۱) ۴۴  
(۲) ۴۶  
(۳) ۴۸  
(۴) ۵۲

۲۹- در شکل مقابل هر دو چهار ضلعی مربع اند، مساحت مربع بزرگتر چند برابر مساحت کوچکترین مثلثها است؟



- (۱) ۱۲  
(۲) ۱۶  
(۳) ۱۸  
(۴) ۲۴

۳۰- در مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائم ۶ و ۸ واحد فاصله تلاقی میانهها از بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

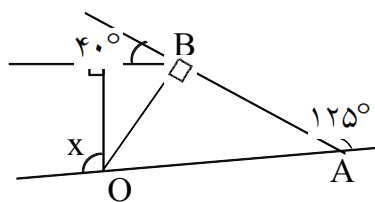
- (۱)  $1/5$   
(۲)  $1/6$   
(۳)  $1/8$   
(۴) ۲

۳۱- مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $\sqrt{6}$  واحد را به سه مثلث همنهشت تقسیم کرده ایم اندازه ضلع بزرگتر از یک مثلث همنهشت چقدر است؟

- (۱) ۱  
(۲)  $\sqrt{2}$   
(۳)  $\frac{3}{2}$   
(۴)  $\sqrt{3}$

۳۲- در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره خطهای  $BM = BA$  و  $CN = CA$  را جدا می کنیم. اگر زاویه  $\widehat{A} = 72^\circ$  باشد، زاویه  $\widehat{MAN}$  چند درجه است؟

- (۱) ۵۴  
(۲) ۵۲  
(۳) ۴۸  
(۴) ۴۲



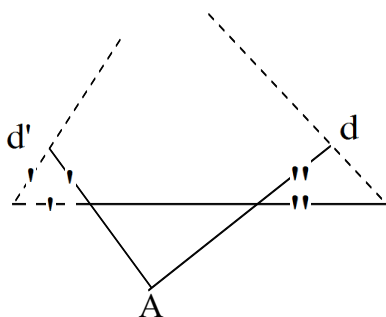
۳۳- در شکل مقابل  $\widehat{A} = 125^\circ$  و  $\widehat{B} = 40^\circ$  است، زاویه X چند درجه است؟

- (۱) ۱۰۵  
(۲) ۱۱۰  
(۳) ۱۱۵  
(۴) ۱۲۵

۳۴- در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی الساقین اند. زاویه  $\widehat{A} = 100^\circ$

دو خط d و d' با زاویه چند درجه متقاطع اند؟

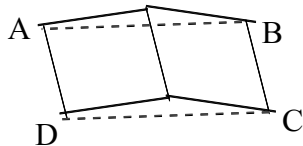
- (۱) ۲۰  
(۲) ۵۰  
(۳) ۴۵  
(۴) ۴۰



۳۵- در یک دوزنقه‌ی متساوی الساقین، از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی، کدام چهار ضلعی حاصل می شود؟

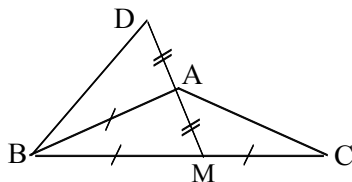
- (۱) مستطیل  
(۲) محاطی  
(۳) متوازی الاضلاع  
(۴) لوزی

۳۶- در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه‌ی  $60^\circ$  درجه، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگ‌ترین زاویه متوازی‌الاضلاع



ABCD چند درجه است؟

- (۱) ۱۰۰  
(۲) ۱۰۵  
(۳) ۱۲۰  
(۴) ۱۳۵



۳۷- در شکل مقابل،  $\widehat{D} + \widehat{C} = 61^\circ$  اندازه‌ی زاویه‌ی  $\widehat{ABC}$  چند درجه است؟

- (۱) ۳۹  
(۲) ۵۶  
(۳) ۵۸  
(۴) ۶۱

## جواب استدلال ۱- سراسری

۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است زیرا در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر قاعده با هم مساویند.

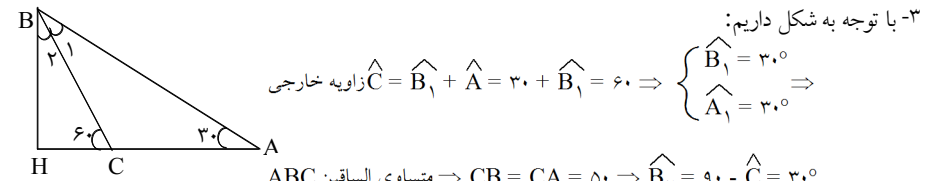
۲- زاویه‌های مثلث با اعداد ۵ و ۴ و ۱ متناسب است پس یک زاویه برابر  $5x$  یک زاویه برابر  $4x$  و یک زاویه برابر  $x$  است.

$$جمع\ زوایای\ داخلی\ مثلث = 180 \Rightarrow 5x + 4x + x = 180 \Rightarrow 10x = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{10} \Rightarrow x = 18$$

پس زاویه‌های مثلث برابر است با:

$$\begin{cases} 5 \times 18 = 90^\circ \\ 4 \times 18 = 72^\circ \\ 1 \times 18 = 18^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{چون یکی از زاویه‌ها } 90^\circ \text{ درجه است پس مثلث قائم الزاویه است.}$$

بنابراین گزینه ۳ جواب صحیح است.



۳- با توجه به شکل داریم:

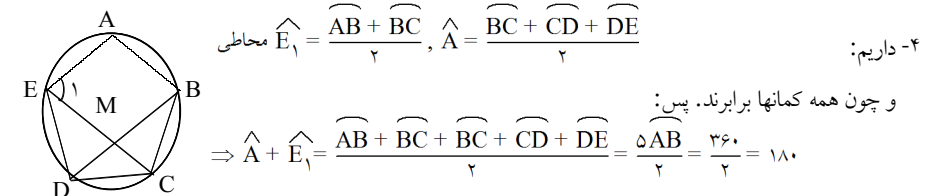
$$\begin{cases} \hat{B}_1 = 30^\circ \\ \hat{A}_1 = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = \hat{B}_1 + \hat{A} = 30^\circ + \hat{B}_1 = 60^\circ$$

$$ABC \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow CB = CA = 50 \Rightarrow \hat{B}_2 = 90^\circ - \hat{C} = 30^\circ$$

می‌دانیم در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه  $30^\circ$  درجه نصف وتر است پس:

$$CH = \frac{1}{2}CB = 25 \Rightarrow AH = AB + CH = 75$$

پس گزینه ۱ جواب صحیح است.



۴- داریم:

$$\hat{E}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2}, \hat{A} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE}}{2}$$

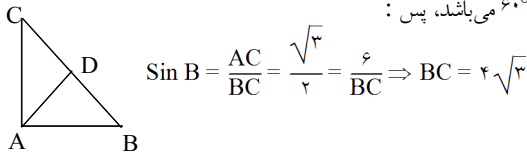
و چون همه کمانها برابرند. پس:

$$\hat{A} + \hat{E}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE}}{2} = \frac{5\widehat{AB}}{2} = \frac{5 \times 36^\circ}{2} = 90^\circ$$

در چهار ضلعی ABME مجموع دو زاویه مجاور  $180^\circ$  می‌باشد پس ۴ ضلعی متوازی الاضلاع خواهد بود. لذا در هر پنج ضلعی منتظم هر قطر، موازی ضلعی از آن پنج ضلعی است که دو رأس آن ضلع در یک طرف قطر قرار دارند. پس:  $AE \parallel BD, CE \parallel AB$  در نتیجه چهارضلعی ABME متوازی الاضلاع است که دو ضلع AB و AE برابرند. پس متوازی الاضلاع اخیر لوزی است. یعنی گزینه ۳ صحیح است.

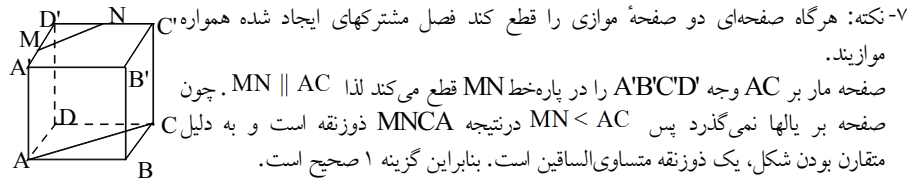
۵- اگر صفحه‌ای دو صفحه موازی را قطع کند، فصل مشترک‌های ایجاد شده که دو خط هستند موازیند. لذا در چهارضلعی ایجاد شده، اضلاع روبرو موازی هم هستند. پس چهارضلعی ایجاد شده، دوزنقه متساوی الساقین نمی‌تواند باشد. یعنی گزینه ۴ صحیح است.

۶- در مثلث متساوی الاضلاع همه زاویه‌ها برابر با  $60^\circ$  می‌باشد، پس:



$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$$

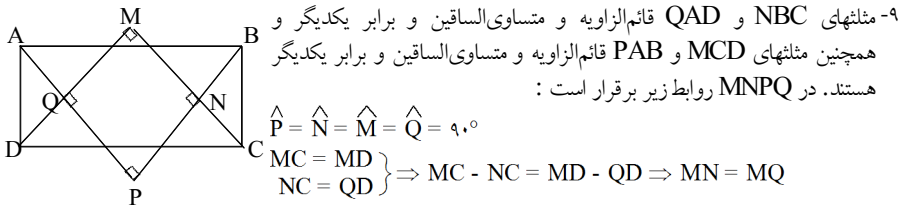
بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



۷- نکته: هرگاه صفحه‌ای دو صفحه موازی را قطع کند فصل مشترک‌های ایجاد شده همواره موازیند. صفحه مار بر AC و وجه A'B'C'D' را در پاره خط MN قطع می‌کند لذا  $MN \parallel AC$ . چون صفحه بر یالها نمی‌گذرد پس  $MN < AC$  در نتیجه MNCA دوزنقه است و به دلیل C متقارن بودن شکل، یک دوزنقه متساوی الساقین است. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{cases} \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \\ \hat{A} = \frac{4}{9}(180 - B) \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 72^\circ \\ \hat{B} = 18^\circ \end{cases}$$



۹- مثلثهای QAD و NBC قائم الزاویه و متساوی الساقین و برابر یکدیگر و همچنین مثلثهای MCD و PAB قائم الزاویه و متساوی الساقین و برابر یکدیگر هستند. در روابط زیر برقرار است:

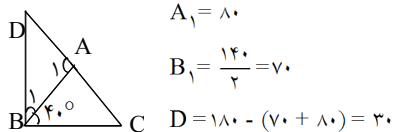
$$\left. \begin{cases} \hat{P} = \hat{N} = \hat{M} = \hat{Q} = 90^\circ \\ MC = MD \\ NC = QD \end{cases} \right\} \Rightarrow MC - NC = MD - QD \Rightarrow MN = MQ$$

پس شکل حاصل، مربع است و گزینه ۲ صحیح است.

۱۰- چون در هر مثلث فقط یک زاویه می‌تواند منفرجه باشد الزاما زاویه  $100^\circ$  زاویه راس مثلث متساوی الساقین است. فرض

می‌کنیم  $A=100$  است چون مثلث متساوی الساقین است پس  $AB = AC$  در نتیجه  $B = C = \frac{180 - 100}{2} = 40$  می‌باشد.

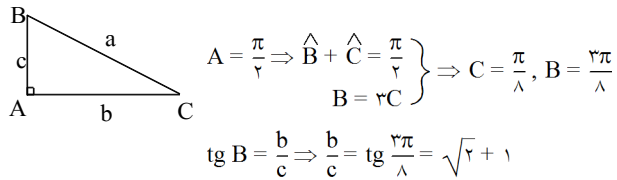
می‌دانیم نیمساز خارجی زاویه A با قاعده BC موازی است پس مورد سؤال تعیین زاویه نیمساز خارجی B با امتداد ساق AC است. در مثلث ABD داریم (طبق شکل):



$$\begin{aligned} A_1 &= 80 \\ B_1 &= \frac{140}{2} = 70 \\ D &= 180 - (70 + 80) = 30 \end{aligned}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۱۷- طبق فرض:

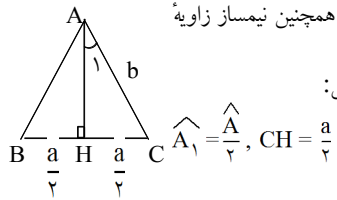


$$\left. \begin{aligned} A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\pi}{2} \\ B = rC \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = \frac{\pi}{\lambda}, B = \frac{r\pi}{\lambda}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \operatorname{tg} \frac{r\pi}{\lambda} = \sqrt{r+1}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۱۸- می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، بر میانه قاعده و همچنین نیمساز زاویه رأس منطبق است.



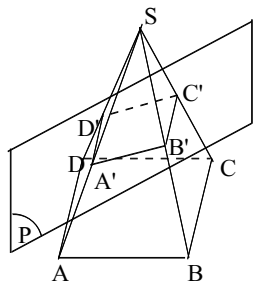
چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، AH میانه BC نیز می‌باشد، پس:

$$\widehat{A}_1 = \frac{\widehat{A}}{2}, CH = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \sin A_1 = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۱۹- گزینه یک در لوزی نیز صادق است و الزاماً مربع را تشریح نمی‌کند. در گزینه ۲، مستطیلی که بتواند بر دایره محیط شود باید نیمساز زوایایش هم‌مس باشد که در اینصورت تبدیل به مربع می‌شود. پس گزینه ۲ مربع را توصیف می‌کند. هر لوزی می‌تواند بر یک دایره محیط‌شود، پس گزینه ۳ نیز صحیح نیست. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.



۲۰- فرض می‌کنیم صفحه P منشور SABCD را قطع کرده است و چهار ضلعی

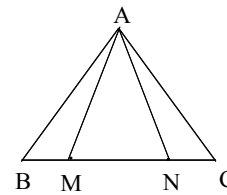
A'B'C'D' را بوجود آورده است.

هرگاه صفحه موازی قاعده باشد سطح منشوری را به دو هرم متشابه تقسیم می‌کند در آنصورت سطح مقطع مربع خواهد بود اما هرگاه صفحه موازی قاعده

نباشد، سطح مشترک حاصل یک متوازی‌الاضلاع خواهد بود. بنابراین مقطع حاصل، همواره یا مربع و یا متوازی‌الاضلاع است. با توجه به اینکه مربع، خود

نوعی متوازی‌الاضلاع است، می‌توان نتیجه گرفت که شکل حاصل، همواره متوازی‌الاضلاع است. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} CN = BM \\ AC = AB \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ANC} \text{ (ض ض ض)} \\ \widehat{C} = \widehat{B} \end{aligned} \right\}$$



با توجه به تساوی دو مثلث  $\widehat{AMB}$  و  $\widehat{ANC}$  به حالت (ض ض ض) دو ضلع نظیر در آنها یعنی AN و AM مساوی می‌شوند، بنابراین مثلث  $\widehat{AMN}$  متساوی‌الساقین می‌باشد. و گزینه ۳ صحیح است.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{13}$$

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{13}$$

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{26}$$

با توجه به اندازه اضلاع مثلث چون  $|AB| = |AC|$  است پس مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد و از طرفی چون اندازه سه ضلع در قضیه فیثاغورث یعنی  $|AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$  صدق می‌کند پس قائم‌الزاویه است. بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه می‌باشد. و گزینه ۳ صحیح است.

۱۳- می‌دانیم در هر مثلث مجموع ۳ زاویه برابر  $180^\circ$  است.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{C} = 30^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} = 150^\circ \\ \widehat{A} = 2\widehat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3\widehat{B} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 50^\circ$$

گزینه ۱ صحیح است.

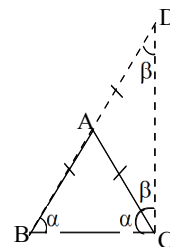
۱۴- می‌دانیم که اگر چهارضلعی مستطیل باشد، دو قطرش برابر خواهند بود ولی عکس این موضوع صادق نیست. لذا گزاره شرطی چنین بیان می‌شود  $Q \Rightarrow P$  یعنی Q شرط کافی برای P است. پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

۱۵- می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبقند. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$AC = AD \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD} = \beta \quad ; \quad (\text{DBC جدید})$$

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

بنابراین مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود. پس گزینه ۱ جواب صحیح است.





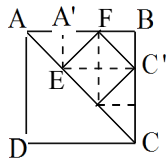
$$\frac{S}{S'} = \frac{a \times a}{\frac{a \times a}{2}} = 2$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$BCX = 114^\circ \Rightarrow \widehat{DCB} = 66^\circ$$

$$BC = BD \Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{DCB} = 66^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 48^\circ$$



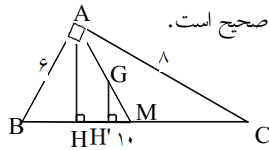
۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

کوچکترین مثلث، مثلث  $\widehat{BFC}$  با تقسیم بندی شکل داریم:

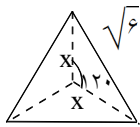
$$\left. \begin{aligned} S_{BFC'} &= \frac{1}{9} S_{ABC} \\ S_{ABC} &= \frac{1}{7} S_{ABCD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{BFC'} = \frac{1}{18} S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = 18 S_{BFC'}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{6 \times 8}{2} \\ S &= \frac{AH \times 10}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH = \frac{6 \times 8}{10} = 4/8$$

$$\frac{GM}{AM} = \frac{GH'}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow GH' = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \times 4/8 = 1/6$$



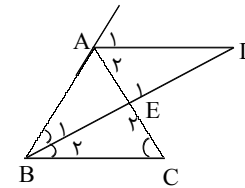
۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنا به قضیه کسینوسها مطابق شکل داریم:

هر یک از ۳ مثلث همنهشت متساوی الساقین است. به طوری که زاویه ی راس آن  $120^\circ$  درجه است.

$$x^2 + x^2 - 2xx \cos 120^\circ = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow 3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$



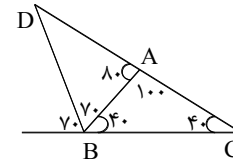
۲۱- ابتدا شکل را رسم می کنیم، چون BD و AD نیمساز و  $AB = AC$  است پس

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A}_1 &= \widehat{A}_3 \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 &= \widehat{B} + \widehat{C} \text{ زاویه خارجی} \\ \widehat{B} &= \widehat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A}_3 = \widehat{C}$$

پس در دو مثلث ADE و EBC داریم:  $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_3$  و  $\widehat{A}_3 = \widehat{C}$  پس  $\widehat{B}_3 = \widehat{D}$  می باشد یعنی:

$$\widehat{B}_3 = \widehat{B}_1 = \widehat{D} \Rightarrow ADB \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow AD = AB = AC$$

لذا گزینه ۱ صحیح است.

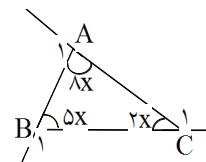


$$\widehat{B} + \widehat{C} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{A} \text{ زاویه خارجی} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{D} = 180 - (70 + 40 + 40) = 30^\circ$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۳- با توجه به اینکه فاصله هر نقطه خارج دایره از مرکز آن، از شعاع دایره بزرگتر است بنابراین می توان گفت که فاصله نقطه از مرکز دایره، از شعاع دایره که برابر نصف قطر آن یعنی ۵ واحد است، بزرگتر است بنابراین این مطلب را می توان طبق استدلال استنتاجی اثبات نمود بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

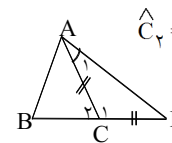


$$2x + 5x + 8x = 15x = 180^\circ \Rightarrow x = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 8x = 96^\circ \Rightarrow A_1 = 180 - A = 84^\circ \\ B = 5x = 60^\circ \Rightarrow B_1 = 120^\circ \\ C = 2x = 24^\circ \Rightarrow C_1 = 156^\circ \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: کوچکترین زاویه خارجی مثلث مربوط به بزرگترین زاویه داخلی مثلث (A) می باشد.

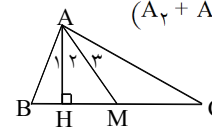


$$\widehat{C}_3 = \widehat{B} = \frac{180 - A}{2} = \frac{148}{2} = 74^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 = 180 - \widehat{C}_3 = 106^\circ$$

$$AC = CD \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{D} = \frac{180 - \widehat{C}_1}{2} = \frac{74}{2} = 37^\circ$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم میانه ی نظیر وتر، نصف وتر است.

$$\left. \begin{aligned} AM = MC &\Rightarrow \widehat{A}_3 = \widehat{C} \\ (\widehat{A}_3 + \widehat{A}_3) + C &= 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_3 + \widehat{A}_3 = 90 - C = B \\ \widehat{B} - \widehat{C} &= \widehat{A}_3 = 26^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{C} &= 90^\circ \end{aligned} \right\}$$

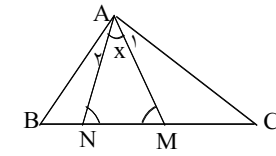


$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} &= 58^\circ \\ \widehat{C} &= 32^\circ \end{aligned} \right\} \text{ باحل دستگاه فوق داریم:}$$

نکته: در مثلث قائمه زاویه ی بین ارتفاع و میانه ی وارد بر وتر برابر با تفاضل زوایای حاده ی مثلث است.



۳۲- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.



$$\hat{N} = \hat{x} + \hat{A}_1$$

$$\hat{M} = \hat{x} + \hat{A}_2$$

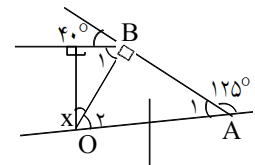
می‌دانیم

$$\begin{cases} \hat{N} + \hat{M} + \hat{x} = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{x} + \hat{A}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\hat{x} + \hat{A}_1 + \hat{x} + \hat{A}_2 + \hat{x}}_{180^\circ} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{x} = 180^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$$

۳۳- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$40 + \hat{B}_1 + 90 = 180 \Rightarrow \hat{B}_1 = 50^\circ$$

$$90 + 50 + \hat{O}_1 = 180 \Rightarrow \hat{O}_1 = 40^\circ$$

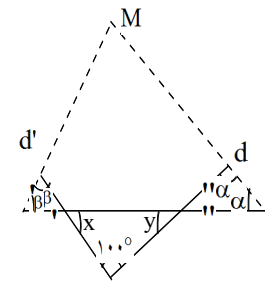


$$A_1 = 180 - 125 = 55^\circ$$

$$\hat{O}_2 + 90 + 55 = 180 \Rightarrow \hat{O}_2 = 35^\circ$$

$$\hat{x} + \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180 \Rightarrow \hat{x} + 40 + 35 = 180 \Rightarrow x = 105^\circ$$

۳۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



$$x + y = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta + (x + y) = 2 \times 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

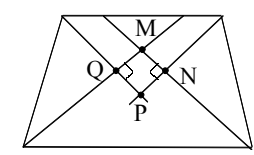
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$M = 90^\circ$$

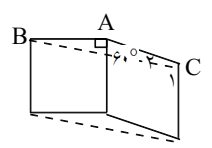
۳۵- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:

$$\hat{Q} + \hat{N} = 180^\circ$$

در نتیجه چهارضلعی MNPQ محاطی است.

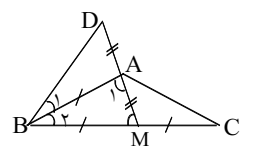


۳۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. مثلث متساوی الساقین است.



$$\hat{C}_2 = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ \Rightarrow C_1 = 120^\circ - 15^\circ = 105^\circ$$

۳۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. دو مثلث ABD و AMC به حالت (ض ز ض) مساوی اند، پس:  $\hat{B}_1 = \hat{C}$ . بنابراین



$$\hat{M}_1 = 61, \hat{A}_1 = 61 \text{ در نتیجه } \hat{D} + \hat{B}_1 = 61$$

$$\widehat{ABC} = \hat{B}_2 = 180 - (61 + 61) = 58$$

## استدلال ۱- خارج از کشور

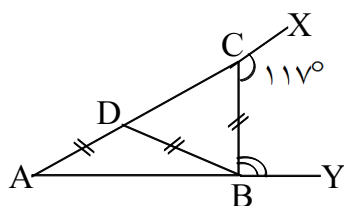
۱- در مثلثی زوایای A و B و C به نسبت ۷ و ۴ و ۷ تقسیم شده‌اند. زاویه‌ای که نیمساز داخلی A با نیمساز خارجی B می‌سازد، چند درجه است؟

$$15^\circ \text{ (4)}$$

$$75^\circ \text{ (3)}$$

$$52/5^\circ \text{ (2)}$$

$$35^\circ \text{ (1)}$$



۲- در شکل مقابل  $\widehat{BCX} = 117^\circ$ . زاویه‌ی  $\widehat{CBY}$  چند درجه است؟

$$94/5 \text{ (2)}$$

$$93 \text{ (1)}$$

$$96 \text{ (4)}$$

$$95/5 \text{ (3)}$$

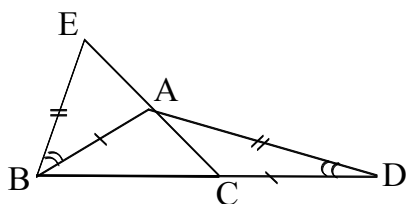
۳- با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$$AB = AC \text{ (1)}$$

$$AB = BC \text{ (2)}$$

$$AE = BC \text{ (3)}$$

$$AE = AC \text{ (4)}$$



۴- مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع درون مربع، در یک ضلع مشترک‌اند. در مثلث غیرقائمه‌الزاویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع است، زاویه‌ی بزرگ‌تر چند برابر زاویه‌ی کوچک‌تر است؟

$$9 \text{ (4)}$$

$$8 \text{ (3)}$$

$$7/5 \text{ (2)}$$

$$7 \text{ (1)}$$

۵- یک مثلث متساوی‌الاضلاع به سه مثلث هم‌نهشت تقسیم شده است. زاویه‌های هر مثلث هم‌نهشت کدام است؟

$$120^\circ \text{ و } 30^\circ \text{ و } 30^\circ \text{ (4)}$$

$$90^\circ \text{ و } 60^\circ \text{ و } 30^\circ \text{ (3)}$$

$$90^\circ \text{ و } 30^\circ \text{ و } 30^\circ \text{ (2)}$$

$$60^\circ \text{ و } 60^\circ \text{ و } 60^\circ \text{ (1)}$$

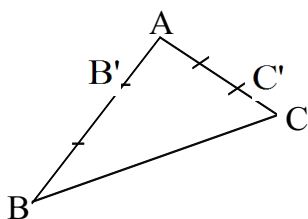
۶- در شکل  $BB' = 2AB'$  و  $AC' = 2CC'$ . مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث  $AB'C'$  است؟

$$6 \text{ (2)}$$

$$9 \text{ (1)}$$

$$\frac{9}{2} \text{ (4)}$$

$$\frac{9}{4} \text{ (3)}$$



## جواب استدلال ۱- خارج از کشور

۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث مجموع زوایای داخلی  $180^\circ$  می شود، پس در مثلث ABC داریم:

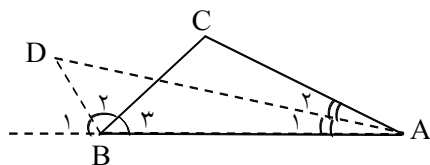
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = x + 4x + 7x = 180^\circ \rightarrow x = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 15^\circ \\ \hat{B} = 4 \times 15^\circ = 60^\circ \end{cases}$$

هم چنین داریم:

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ \rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 60^\circ$$

حال در مثلث ADB داریم:

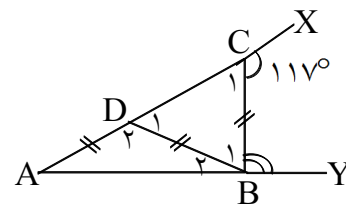
$$\hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{A}_1 + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow 60^\circ + 60^\circ + 7/5^\circ + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow \hat{D} = 52/5^\circ$$



۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در شکل زیر، مثلث های ABD و BCD متساوی الساقین بوده و زوایای مجاور قاعده ی آنها برابرند. با توجه به این توضیح داریم:

$$\hat{BCX} = 117^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 63^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 = 63^\circ \Rightarrow$$

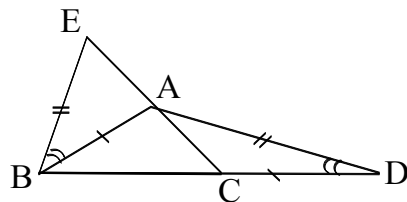
$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (63^\circ + 63^\circ) = 54^\circ$$



$$\hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{B}_2 \xrightarrow{\hat{A} = \hat{B}_1} 2\hat{B}_2 = 63^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 = 31/5^\circ$$

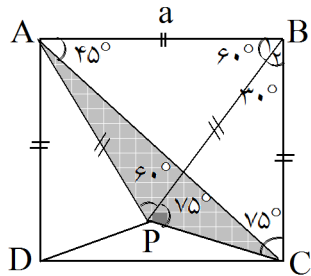
$$\Rightarrow \hat{CBY} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) = 180^\circ - (54^\circ + 31/5^\circ) = 180^\circ - 85/5^\circ = 94/5^\circ$$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث ADC و ABE به حالت «ضرض» هم نهشت هستند. بنابراین



$$AE = AC$$

۴- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مثلث متساوی الاضلاعی را در درون مربع طوری قرار می دهیم که در یک ضلع مشترک باشند. حال با توجه به شکل مقابل داریم:

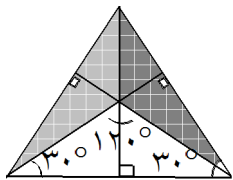


چون مثلث BPC متساوی الساقین است ( $BP = BC$ )، نتیجه می گیریم زوایای مجاور قاعده ی این مثلث هر کدام برابر  $\frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$  می باشند. یعنی:

$$\widehat{BPC} = \widehat{BCP} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{APC} = \widehat{BPC} + \widehat{APB} = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \text{ (زاویه ی بزرگ تر)}$$

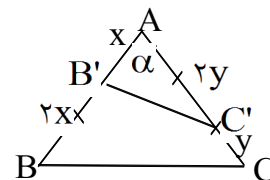
بنابراین نسبت زاویه ی بزرگ تر به زاویه ی کوچک تر در مثلث APC برابر با  $\frac{135^\circ}{15^\circ} = 9$  است. (توجه کنید که زاویه ی دیگر مثلث APC (زاویه ی متوسط) برابر با  $30^\circ$  است.)

۵- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. برای این که یک مثلث متساوی الاضلاع را به سه مثلث هم نهشت (متساوی) تقسیم کنیم. باید از محل هم رسی میانه ها که همان محل هم رسی نیمسازها، عمود منصف ها و ارتفاع ها می باشد، سه خط به سه رأس این مثلث وصل کنیم. با کمی دقت به راحتی پی می بریم زوایای داخلی این سه مثلث هم نهشت برابر  $30^\circ$  و  $30^\circ$  و  $120^\circ$  است.



۶- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مجاور در سینوس زاویه ی بین آنها، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{\frac{1}{2}(rx)(ry)\sin\alpha}{\frac{1}{2}x(ry)\sin\alpha} = \frac{r}{x}$$



## استدلال ۱ - سنجش

۱- از به هم پیوستن اوساط اضلاع چهار ضلعی محاط در دایره کدام چهار ضلعی حاصل می‌شود؟  
 (۱) مستطیل (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) چهار ضلعی محاطی (۴) چهار ضلعی محیطی

۲- زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۵ و ۴ و ۱ می‌باشد. نوع مثلث کدام است؟  
 (۱) منفرجه‌الزاویه (۲) متساوی‌الساقین (۳) هر سه زاویه حاده (۴) قائم‌الزاویه

۳- اضلاع مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و  $\sqrt{3}$  است، بزرگترین زاویه آن چند درجه است؟  
 (۱)  $75^\circ$  (۲)  $105^\circ$  (۳)  $90^\circ$  (۴)  $120^\circ$

۴- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ است. ضلع بزرگتر چند برابر ضلع متوسط است؟  
 (۱)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۵- در مثلث متساوی‌الساقین  $\triangle ABC$  قاعده  $BC$  از هر دو طرف با اندازه‌های برابر تا  $M$  و  $N$  امتداد می‌دهیم. اگر در مثلث  $AMN$  کوچکترین زاویه  $25^\circ$  درجه باشد، بزرگترین زاویه آن چند درجه است؟  
 (۱)  $110^\circ$  (۲)  $125^\circ$  (۳)  $130^\circ$  (۴)  $120^\circ$

۶- دو زاویه از مثلثی برابر  $50^\circ$  درجه است. نیمساز زاویه خارجی یکی از زاویه‌ها با امتداد ضلع مقابل زاویه‌ای برابر چند درجه می‌سازد؟  
 (۱)  $15^\circ$  (۲)  $20^\circ$  (۳)  $25^\circ$  (۴)  $30^\circ$

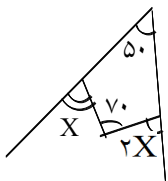
۷- اندازه زاویه‌های مثلثی  $35^\circ$  و  $55^\circ$  است، زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع آن چند درجه است؟  
 (۱)  $10^\circ$  (۲)  $15^\circ$  (۳)  $20^\circ$  (۴)  $25^\circ$

۸- با رسم دو قطر از یک پنج ضلعی منتظم، کدام چهار ضلعی محدب در داخل آن ایجاد می‌شود؟  
 (۱) لوزی (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) دوزنقه (۴) مستطیل

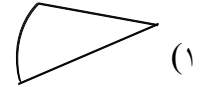
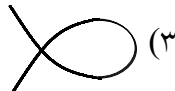
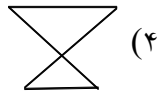
۹- در مثلثی اندازه‌ی دو زاویه  $40^\circ$  و  $80^\circ$  است. با امتداد ضلع بزرگتر، مثلث متساوی‌الساقینی با ساق ضلع کوچکتر از مثلث مفروض می‌سازیم، کوچکترین زاویه‌ی ایجاد شده چند درجه است؟  
 (۱)  $20^\circ$  (۲)  $25^\circ$  (۳)  $30^\circ$  (۴)  $40^\circ$

۱۰- در شکل مقابل زاویه  $X$  چند درجه است؟

(۱)  $30^\circ$  (۲)  $35^\circ$  (۳)  $40^\circ$  (۴)  $45^\circ$



۱۱- کدام شکل زیر یک خم ساده است؟



۱۲- در یک پنج ضلعی مجموع زاویه‌های خارجی آن چند درجه است؟

۴۵۰ (۴)

۴۰۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۲۷۰ (۱)

۱۳- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۵ و ۳ و ۲ است، نسبت میانه وارد بر ضلع بزرگتر به همان ضلع کدام است؟

$\frac{3}{5}$  (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

$\frac{1}{3}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

۱۴- در مثلث  $ABC$  نقطه‌ی  $M$  وسط  $BC$  است و  $2AM = BC$  و اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی  $C$  اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی

$B$  است، زاویه‌ی  $C$  از این مثلث چند درجه است؟

۵۰ (۴)

۴۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

۱۵- در مثلث  $ABC$  نقطه  $M$  وسط  $BC$  است و  $BC = 2AM$  و اندازه زاویه خارجی  $C$  دو و نیم برابر اندازه زاویه داخلی  $B$  است، زاویه  $C$  از این مثلث چند درجه است؟

۵۰ (۴)

۴۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

۱۶- در مثلث متساوی‌الاضلاع  $\widehat{ABC}$  ضلع  $BC$  را از طرف  $C$  به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی  $D$  امتداد می‌دهیم در مثلث  $\widehat{ABD}$  نسبت زاویه‌ها کدام است؟

۴ و ۲ و ۱ (۴)

۴ و ۳ و ۱ (۳)

۵ و ۳ و ۲ (۲)

۳ و ۲ و ۱ (۱)

۱۷- با رسم دو قطر از یک پنج ضلعی منتظم کدام چهار ضلعی محدب در داخل آن ایجاد می‌شود؟  
 (۱) دوزنقه (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) مستطیل (۴) لوزی

۱۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  ضلع  $BC$  را از طرف  $C$  به اندازه خود تا نقطه  $D$  امتداد می‌دهیم در مثلث  $ABD$  نسبت زاویه‌ها کدام است؟

۵ و ۳ و ۲ (۴)

۴ و ۳ و ۱ (۳)

۴ و ۲ و ۱ (۲)

۳ و ۲ و ۱ (۱)

۱۹- در مثلث  $ABC$  داریم:  $\widehat{B} = \widehat{C}$ ، ضلع  $AB$  را از طرف  $A$  به اندازه خود تا نقطه‌ی  $D$  امتداد می‌دهیم زاویه‌ی  $\widehat{BCD}$  چگونه است؟

(۴) نامشخص

(۳) قائمه

(۲) منفرجه

(۱) حاده

۲۰- در مثلثی به اضلاع  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{3}$  و ۲ کسینوس زاویه‌ی بزرگتر کدام است؟

$\frac{\sqrt{6}}{12}$  (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۲)

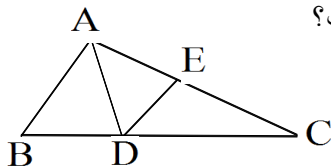
$\frac{\sqrt{6}}{6}$  (۱)

۲۱- در مثلث متساوی الساقین، یکی از ساق‌ها را به اندازه‌ی خود امتداد می‌دهیم، نقطه حاصل را به رأس سوم مثلث وصل می‌کنیم. بزرگترین زاویه حاصل چگونه است؟  
 (۱) حاده (۲) قائمه (۳) منفرجه (۴) بستگی به زاویه رأس دارد

۲۲- در مربعی به مساحت ۷۲ واحد مربع، خطی که رأس مربع را به وسط ضلع مقابل وصل کند قطر مربع را در  $M$  قطع می‌کند. فاصله  $M$  تا مرکز مربع کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲)  $\frac{2}{4}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴) ۳

۲۳- از سه رأس یک مثلث خطوطی موازی اضلاع آن رسم می‌کنیم تا مثلث جدیدی حاصل شود، مساحت مثلث دوم حاصل چند برابر مساحت مثلث اولیه است؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۴- در دوزاویه‌ی مجاور و مکمل اندازه‌ی یکی ۴ برابر دیگری است. زاویه‌ی بین نیمسازها چند درجه است؟  
 (۱) ۶۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰



۲۵- در شکل مقابل  $DE \parallel AB$  و  $AD$  نیمساز زاویه‌ی  $A$  است. کدام تساوی درست است؟  
 (۱)  $AD = DB$  (۲)  $AD = AB$   
 (۳)  $EC = DC$  (۴)  $DE = AE$

۲۶- در دو زاویه‌ی مجاور و متمم اندازه‌ی یکی سه برابر دیگری است. زاویه‌ی بین نیمساز آن‌ها چند درجه است؟  
 (۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۴۵ (۴) ۶۰

۲۷- در یک مثلث قائم الزاویه نیمسازهای دو زاویه‌ی حاده با یکدیگر زاویه‌ای برابر چند درجه می‌سازند؟  
 (۱) ۲۹۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵

۲۸- در یک مثلث متساوی الساقین یکی از ساق‌ها را از طرف رأس به اندازه‌ی خود امتداد داده و نقطه‌ی پایانی را به رأس سوم آن وصل می‌کنیم بزرگترین مثلث حاصل کدام نوع است؟  
 (۱) قائم الزاویه (۲) منفرجه الزاویه (۳) متساوی الاضلاع (۴) نامشخص

۲۹- نیمسازهای داخلی دو زاویه از مثلثی با یکدیگر زاویه‌ی ۱۳۵ درجه می‌سازند، ارتفاع‌های این مثلث در کجا متقاطع‌اند؟  
 (۱) بر رأس (۲) بیرون مثلث (۳) روی یک ضلع (۴) داخل مثلث

۳۰- در یک مثلث متساوی الساقین بزرگترین زاویه‌ی آن ۸۰ درجه است. بزرگترین ضلع را از دو طرف به اندازه‌ی ضلع مجاور خود امتداد می‌دهیم و دو نقطه‌ی حاصل را به رأس سوم وصل می‌کنیم. کوچکترین زاویه‌ی مثلث حاصل چند درجه است؟  
 (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۳۱- دو زاویه‌ی مجاور مکمل یکدیگرند، اگر اندازه‌ی یکی بر حسب درجه برابر نصف اندازه‌ی دیگری بر حسب گراد باشد، زاویه‌ی بین نیمسازهای این دو زاویه چند رادیان است؟

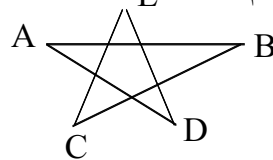
$$\frac{\pi}{2} \quad (1) \quad \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{3\pi}{7} \quad (3) \quad \frac{2\pi}{5} \quad (4)$$

۳۲- قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین را از دو طرف به اندازه‌ی ساق‌ها امتداد می‌دهیم رأس مثلث را به دو نقطه‌ی حاصل وصل می‌کنیم اگر کوچکترین زاویه در مثلث حاصل ۲۵ درجه باشد زاویه‌ی رأس مثلث اولیه چند درجه است؟

$$90 \quad (1) \quad 85 \quad (2) \quad 80 \quad (3) \quad 75 \quad (4)$$

۳۳- در مثلث ABC داریم  $a = b \cos c + c \cos B$  نوع مثلث کدام است؟  
 (۱) قائم الزاویه (۲) متساوی الساقین (۳) منفرجه الزاویه (۴) نامشخص

۳۴- در شکل مقابل مجموع زاویه‌های A, B, C, D, E کدام است؟



$$180^\circ \quad (2) \quad 135 \quad (1) \\ 270^\circ \quad (3) \quad \text{نامشخص} \quad (4)$$

۳۵- در مثلث ABC داریم  $AB = AC$  نقطه‌ی تلاقی نیمساز خارجی A نیمساز داخلی B را در D قطع می‌کند. طول پاره‌خط AD برابر کدام است؟

$$AB \quad (1) \quad BC \quad (2) \quad \text{شعاع دایره‌ی محیطی} \quad (3) \quad \text{شعاع دایره‌ی محاطی} \quad (4)$$

۳۶- در پنج ضلعی منظم امتداد اضلاع یک دیگر را در A و B و C و D و E قطع می‌کنند مجموع ۵ زاویه حاصل از امتداد اضلاع چند درجه است؟

$$120 \quad (1) \quad 135 \quad (2) \quad 180 \quad (3) \quad 370 \quad (4)$$

۳۷- در مثلث ABC، ارتفاع AH ارتفاع مثلث a, b, c اندازه اضلاع مثلث باشند. حاصل  $b \cos C + c \cos B$  برابر کدام است؟

$$a \quad (1) \quad \text{ارتفاع AH} \quad (2) \quad \text{تصویر AH روی ضلع a} \quad (3) \quad \text{نصف محیط} \quad (4)$$

۳۸- در مثلث متساوی الساقین  $AB = AC$  و  $\hat{A} = 80^\circ$  قاعده را از دو طرف به اندازه‌ی ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. کوچکترین زاویه‌ی مثلث ADE چند درجه است؟

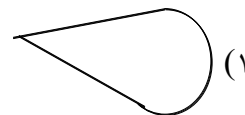
$$18 \quad (1) \quad 20 \quad (2) \quad 25 \quad (3) \quad 27 \quad (4)$$

۳۹- تعداد نقاط واقع در صفحه‌ی یک مثلث که از هر سه میانه‌ی آن به یک فاصله غیر صفر باشد کدام است؟

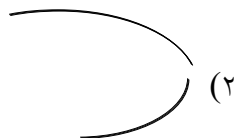
$$0 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$



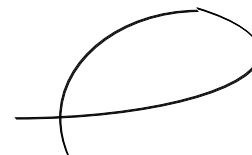
۴۰- کدام شکل یک خم ساده است؟



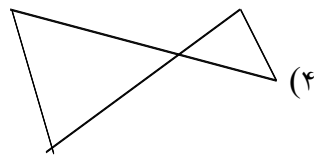
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۴۱- در مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵، یک رأس و وسط دو ضلع دیگر آن، سه رأس یک مثلثند. مساحت مثلث کدام است؟

۱۲/۵ (۴)

۹ (۳)

۷/۵ (۲)

۵ (۱)

۴۲- در مثلثی  $\hat{A} = 60^\circ$  و  $\hat{B} = 75^\circ$  و  $a = \sqrt{6}$ ، اندازه‌ی ضلع  $c$  چه قدر است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

 $2\sqrt{2}$  (۲) $\sqrt{3}$  (۱)

۴۳- در یک چهارضلعی اندازه دو زاویه مقابل ۵۰ و ۷۰ درجه است. نسبت دو زاویه خارجی دیگر، ۱ به ۲ می‌باشد، بزرگ‌ترین زاویه‌ی این چهار ضلعی چند درجه است؟

۱۴۰ (۴)

۱۳۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۱۰ (۱)

۴۴- محیط مثلث متساوی‌الاضلاع  $6\sqrt{3}$  واحد است، مساحت آن چقدر است؟

 $4\sqrt{3}$  (۴) $3\sqrt{3}$  (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۴۵- در مثلث  $ABC$  نقطه  $M$  وسط  $BC$  است و  $BC = 2AM$ ، اندازه زاویه خارجی  $\hat{C}$  دو و نیم برابر اندازه زاویه داخلی  $B$  است. زاویه  $C$  از این مثلث چند درجه است؟

۶۰ (۴)

۴۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

۴۶- در مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  ضلع  $BC$  را از طرف  $C$  به اندازه خود تا  $D$  امتداد می‌دهیم در مثلث  $ABD$  نسبت زاویه‌ها کدام است؟

۲، ۳، ۵ (۴)

۱، ۳، ۴ (۳)

۱، ۲، ۴ (۲)

۱، ۲، ۳ (۱)

۴۷- از برخورد نیمسازهای داخلی کدام چهارضلعی، مستطیل ایجاد می‌شود؟

(۴) محیط بر دایره

(۳) متوازی‌الاضلاع

(۲) محاط در دایره

(۱) دوزنقه

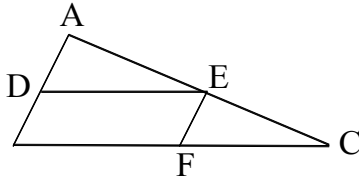
۴۸- در ذوزنقه‌ای قائم‌الزاویه نسبت قاعده‌ها  $\frac{2}{3}$  است. وسط ساق قائم به وسط قاعده‌ی کوچک تر وصل شده‌است. مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت ذوزنقه‌ی اصلی است؟

(۱)  $\frac{1}{6}$       (۲)  $\frac{1}{8}$       (۳)  $\frac{1}{9}$       (۴)  $\frac{1}{10}$

۴۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یکی از زاویه‌ها ۵۲ درجه است، زاویه‌ی بین وتر و میانه وارد بر آن چند درجه است؟

(۱) ۶۲      (۲) ۶۴      (۳) ۷۶      (۴) ۷۸

۵۰- در شکل مقابل چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.  $AD = ۸$  و  $DE = ۶$  و  $FC = ۳$  محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟



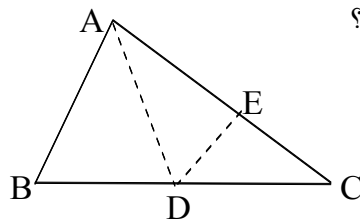
(۱) ۱۸      (۲) ۲۰      (۳) ۲۱      (۴) ۲۲

۵۱- از رأس یک مثلث خطوطی موازی اضلاع آن رسم می‌کنیم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت مثلث اولیه است؟

(۱) ۲      (۲)  $2\sqrt{2}$       (۳) ۳      (۴) ۴

۵۲- در دو زاویه‌ی مجاور و مکمل اندازه‌ی یکی ۴ برابر دیگری است، زاویه‌ی بین نیمسازها چند درجه است؟

(۱) ۶۰      (۲) ۷۵      (۳) ۸۰      (۴) ۹۰



۵۳- در شکل مقابل  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  و  $DE \parallel AB$ . کدام تساوی درست است؟

(۱)  $AD = AB$   
(۲)  $AD = DB$   
(۳)  $EC = DC$   
(۴)  $DE = AE$

۵۴- در دو زاویه‌ی مجاور و متمم اندازه‌ی یکی سه برابر دیگری است زاویه‌ی بین نیمساز آنها چند درجه است؟

(۱) ۱۵      (۲) ۳۰      (۳) ۴۵      (۴) ۶۰

۵۵- اگر زاویه‌ی خارجی در هر رأس  $n$  ضلعی منتظم، ۱۵ درجه باشد،  $n$  کدام است؟

(۱) ۱۸      (۲) ۲۵      (۳) ۲۴      (۴) ۳۲

۵۶- زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۱، ۱ و ۳ هستند. ضلع بزرگ‌تر را از هر دو طرف به اندازه‌ی ضلع دیگر امتداد می‌دهیم. دو نقطه‌ی حاصل را به رأس سوم وصل می‌کنیم. بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث حاصل چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی آن است؟

(۱) ۶      (۲) ۷      (۳) ۸      (۴) ۹

۵۷- در یک متوازی‌الاضلاع یک ضلع ۳ برابر ضلع دیگر است، خط گذرا بر محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع را به دو ذوزنقه تقسیم می‌کند، اگر نسبت مساحت دو ذوزنقه  $K$  باشد، تغییرات  $K$  کدام است؟

$$K = 1 \quad (1) \quad K = \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \leq K \leq 1 \quad (3) \quad \frac{2}{3} < K \leq 1 \quad (4)$$

۵۸- زاویه‌ی مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند، اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث ۴ واحد باشد، ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 2\sqrt{3} \quad (3) \quad 4\sqrt{3} \quad (4)$$

۵۹- سه نقطه‌ی  $A(-1, 7)$ ,  $B(2, -3)$ ,  $C(6, 0)$  رأس‌های متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  هستند. مختصات رأس  $D$  کدام است؟

$$(5, 6) \quad (1) \quad (2, 9) \quad (2) \quad (2, 10) \quad (3) \quad (3, 10) \quad (4)$$

۶۰- کدام بیان برای درک شهودی نادرست است؟  
 (۱) استدلال حتمی (۲) استدلال موقت (۳) دانش غریزی (۴) احساس بدون استدلال

۶۱- در مثلث  $ABC$  رابطه‌ی  $\sin A = 2 \sin B \cos C$  بین زاویه‌ها برقرار است. نوع مثلث کدام است؟  
 (۱) قائم‌الزاویه (۲) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین  
 (۳) متساوی‌الساقین (۴) غیرمشخص

۶۲- در مثلث  $ABC$  داریم  $a = 2b = 6$ ,  $c = 3b - 1$  نیمساز خارجی زاویه  $A$  امتداد ضلع مقابل را در  $D$  قطع کرده است  $DC$  چقدر است؟

$$3/2 \quad (1) \quad 3/5 \quad (2) \quad 3/6 \quad (3) \quad 3/7 \quad (4)$$

۶۳- در مثلث  $ABC$  از نقطه  $D$  محل تلاقی نیمساز زاویه  $A$  با ضلع  $BC$  خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن دو ضلع را در  $M$ ,  $N$  قطع کند  $AD$ ,  $MN$  نسبت بهم کدام وضع را دارند؟  
 (۱) فقط عمود بر هم (۲) فقط منصف هم  
 (۳) زاویه بین آنها مکمل  $\hat{A}$  (۴) عمود منصف هم

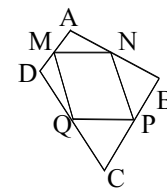
۶۴- در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$  و  $A = 42^\circ$  است)، قاعده‌ی  $BC$  را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی  $E$  امتداد می‌دهیم.  $A$  را به  $E$  وصل می‌کنیم. کوچک‌ترین زاویه‌ی بزرگ‌ترین مثلث حاصل چند درجه است؟

$$34 \quad (1) \quad 34/5 \quad (2) \quad 35/5 \quad (3) \quad 36 \quad (4)$$

۶۵- نقطه‌ی  $M$  درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $6\sqrt{3}$  قرار دارد. مجموع فواصل  $M$  از سه ضلع این مثلث کدام است؟

$$6 \quad (1) \quad 9 \quad (2) \quad 4\sqrt{3} \quad (3) \quad 4 + 3\sqrt{3} \quad (4)$$

## جواب استدلال ۱ - سنجش



$AN = NB$   
 $AM = MD$

طبق رابطه تالس  $\rightarrow MN \parallel \frac{BD}{2}$

به همین ترتیب:

$$\left. \begin{array}{l} PQ \parallel \frac{BD}{2} \\ NP \parallel \frac{AC}{2} \\ MQ \parallel \frac{AC}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{موازی الاضلاع } MNPQ$$

۱- بنابراین ۴ ضلعی ABCD دارای هر ویژگی که باشد، MNPQ همواره متوازی الاضلاع خواهد بود و به خواص ۴ ضلعی ABCD بستگی ندارد بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۲- مجموع زوایای داخلی مثلث برابر  $180^\circ$  است. زوایای این مثلث برابر  $k$ ،  $2k$  و  $5k$  می‌باشد.

$$k + 2k + 5k = 10k = 180 \Rightarrow k = 18 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = k = 18 \\ \beta = 2k = 36 \\ \gamma = 5k = 90 \end{cases}$$

یکی از زوایای مثلث  $90^\circ$  بوده و در نتیجه مثلث قائمه خواهد بود. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۳- طول اضلاع مثلث عبارتند از:  $k$ ،  $2k$  و  $\sqrt{3}k$ . مشاهده می‌شود که رابطه فیثاغورث بین ۳ ضلع مثلث برقرار است در

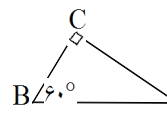
$$(\sqrt{3}k)^2 = (\sqrt{3}k)^2 + k^2$$

نتیجه، مثلث قائمه بوده و بزرگترین زاویه آن برابر  $90^\circ$  خواهد بود.

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

۴- اگر زاویه کوچکتر مثلث را برابر  $x$  اختیار کنیم ۲ زاویه دیگر  $2x$  و  $3x$  خواهند بود. داریم:

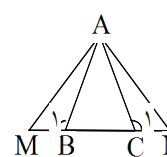
$$3x + 2x + x = 180 \Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} A = x = 30^\circ \\ B = 2x = 60^\circ \\ C = 3x = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{مثلث } ABC \text{ قائم الزاویه است}$$



ضلع متوسط AC روبرو به زاویه  $60^\circ$  است داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{3}}{3} AC$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$AB = AC$   
 $CN = BM$   
 $\hat{C}_1 = \hat{B}_1$

$\Rightarrow \hat{ACN} = \hat{ABM} \Rightarrow \Delta_{AMN}$  متساوی الساقین است

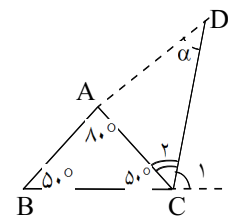
بنابراین  $\hat{M} = \hat{N} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 180^\circ - (\hat{M} + \hat{N}) = 130^\circ$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر زاویه‌ای که از برخورد نیمساز خارجی زاویه C با امتداد AB پدید می‌آید را  $\alpha$  بنامیم، داریم:

$$C_1 = C_2 = \frac{180 - 50}{2} = 65$$

$$\widehat{ACD} \text{ (زاویه خارجی)} = C_2 + \alpha \Rightarrow 80 = 65 + \alpha \Rightarrow \alpha = 15$$

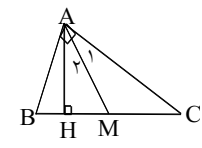


۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث مورد نظر قائم الزاویه است. و با توجه به این که میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است، خواهیم داشت:

$$AM = MC \Rightarrow A_1 = C = 35$$

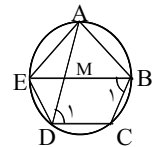
$$A_1 + A_2 + C = 90 \Rightarrow A_1 + A_2 = 90 - C = B = 55$$

$$\Rightarrow B - C = \widehat{A_2} = 20^\circ$$



نکته: در مثلث قائمه زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر برابر قدر مطلق تفاضل زوایای حاده‌ی مثلث است.

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با رسم دایره محیطی ۵ ضلعی داریم:



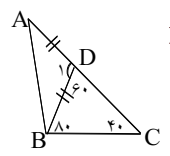
$$B_1 = \frac{\widehat{CD} + \widehat{DE}}{2}$$

$$D_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2}$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AE} + \widehat{DE}}{2} \text{ و } \widehat{M} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AE}}{2} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{M}$$

$\Rightarrow$  متوازی الاضلاع BMCD

در متوازی الاضلاع BCDM چون دو ضلع مجاورش برابرند ( $BC = CD$ ) بنابراین ۴ ضلعی لوزی خواهد بود. (متوازی الاضلاعی که اضلاع مجاورش برابرند.)



۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{D}_1 = 180 - 60 = 120 \Rightarrow \widehat{A} = \frac{180 - A_1}{2} = 30^\circ$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموع دو زاویه خارجی  $2x, x$  برابر مجموع زوایای داخلی  $50$  و  $70$  می‌باشند.

$$2x + x = 50 + 70 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شکل گزینه ۱ یک خم ساده بسته می‌باشد  
گزینه ۲ خم نیست و گزینه های ۳ و ۴ خم ساده نیستند

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در هر  $n$  ضلعی محذب مجموع زوایای خارجی برابر  $360$  درجه است.

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر  $C, B, A$  زوایای این مثلث باشند داریم.

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{2+3+5} = \frac{180}{10} = 18$$

$$\begin{cases} A = 36 \\ B = 54 \\ C = 90 \end{cases}$$

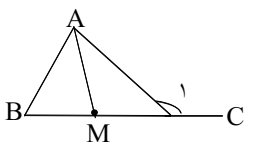
پس مثلث  $\widehat{ABC}$  قائم الزاویه است و در این مثلث میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس.

راه حل: چون  $AM = \frac{BC}{2}$  پس زاویه A قائمه است.

$$\widehat{C}_1 = 2/5 \widehat{B} \Rightarrow 90 + B = 2/5 B \Rightarrow 1/5 B = 90 \Rightarrow B = 60$$

$$B + C = 90 \Rightarrow C + 60 = 90 \Rightarrow C = 30$$

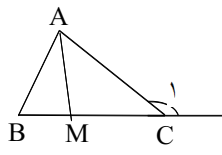


۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس. از آنجایی که

$AM = \frac{BC}{2}$  پس زاویه A قائم است.

$$\widehat{C}_1 = 2/5 \widehat{B} \Rightarrow 90 + B = 2/5 B \Rightarrow 1/5 B = 90 \Rightarrow B = 60$$

$$B + C = 90 \Rightarrow C + 60 = 90 \Rightarrow C = 30$$

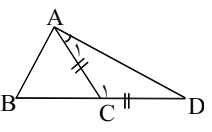


۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

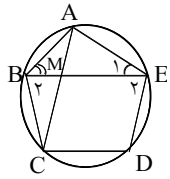
$$\widehat{C}_1 = 120^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{D} = \frac{180 - 120}{2} = 30^\circ$$

$$\widehat{BAD} = 60 + 30 = 90$$

$$\left. \begin{matrix} \widehat{B} = 60 \\ \widehat{D} = 30 \end{matrix} \right\} \text{ زوایا با اعداد ۱، ۲، ۳ متناسبند}$$



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با رسم دایره محیطی پنج ضلعی داریم:

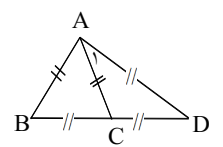


$$\widehat{B}_2 = \widehat{E}_2 \Rightarrow \text{دوازده BEDC}$$

$$\left. \begin{matrix} \text{دوازده MEDC} \\ ED = BC \end{matrix} \right\} \text{ لوزی}$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث  $\widehat{ACD}$  مثلث متساوی الاضلاع با زاویه راس

$120$  درجه می‌باشد. پس  $\widehat{D} = 30 = \widehat{A}_1$  میباشد. پس زوایای مثلث  $\widehat{ABD}$  عبارتند از:  $30$  و  $60$  و  $90$  و این زوایا با اعداد  $1$  و  $2$  و  $3$  متناسبند.



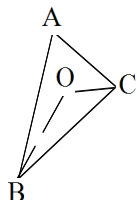
۲۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. همواره زاویه بین دو نیمساز ۲ زاویه متمم و مجاور نصف مجموع آنها است پس ۴۵ درجه است.



۲۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم  $A = 90$  است.

$$\alpha + \beta = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} = \frac{90}{2} = 45 \Rightarrow \hat{O} = 180 - 45 = 135$$

نکته: زاویه بین نیمسازهای داخلی ۲ زاویه B و C همواره برابر  $90 + \frac{A}{2}$  است.

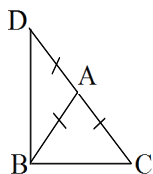


۲۸- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

(۱) قائم‌الزاویه  $\Rightarrow$  رأس B دیگر مقابل به قطر دایره است  $\Rightarrow$  دایره‌ای بر مرکز A و

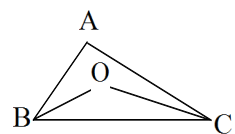
به شعاع ساق مثلث رسم شود.

(۲)  $B = 90 \Rightarrow$  میانه وارد بر ضلع CD نصف CD است.  $AB = AC = AD \Rightarrow$



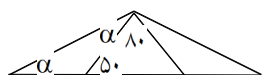
۲۹- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.  $\hat{O} = 135 \Rightarrow \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 45 \Rightarrow A = 90$

مثلث قائمه بوده و نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث بر رأس قائم (A) منطبق است.



۳۰- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$2\alpha = 50 \Rightarrow \alpha = 25$$

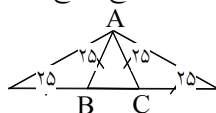


۳۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. زاویه بین نیمسازهای ۲ زاویه مکمل و مجاور همواره برابر قائمه است.

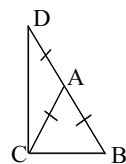
$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

۳۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\hat{B} = \hat{C} = 50 \Rightarrow \hat{BAC} = 180 - (50 + 50) = 80$$



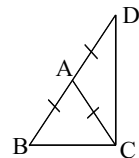
۱۹- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.  $\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow AB = AC$ . در مثلث BCD میانه‌ی وارد بر BD نصف آن است بنابراین مثلث قائمه است.



۲۰- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

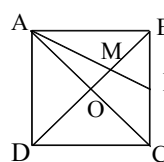
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos \theta \Rightarrow 4 = 3 + 2 - 2\sqrt{6} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

۲۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث BCD، AC میانه‌ی وارد بر ضلع BD بوده و خود نصف BD است بنابراین مثلث قائمه است.

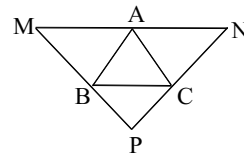


۲۲- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC، M مرکز ثقل است.  $MO = \frac{1}{3}BO$

$$S = \sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \Rightarrow BO = 6 \Rightarrow MO = 2$$



۲۳- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. چهار ضلعی‌های حاصله برای مثلث AMBC متوازی‌الاضلاع‌اند بنابراین ۴ مثلث برابرند مثلث حاصل ۴ برابر مثلث اولی است.

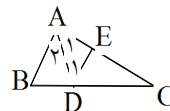


۲۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. زاویه‌ی بین نیمسازهای ۲ زاویه مکمل و مجاور همواره قائمه است.

$$\alpha + \beta = 180 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90$$

۲۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

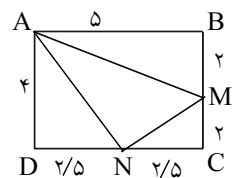
$$A_1 = A_2 = D_1 \Rightarrow AE = ED$$



۳۹- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. تنها نقطه‌ای که از هر سه میانه ی مثلث به یک فاصله است، نقطه ی برخورد آن ها می‌باشد و این فاصله برابر صفر می‌باشد.

۴۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. گزینه‌ی ۲ خم نیست و گزینه‌های ۳ و ۴ خم ساده نیستند.

۴۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. در مستطیل ABCD، مساحت مثلث AMN مورد سوال است:



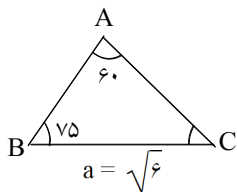
$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{ADN} + S_{MNC})$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = 20 - \left(5 + 5 + \frac{5}{2}\right) = 7\frac{1}{2}$$

۴۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \begin{matrix} \hat{A} = 60^\circ \\ \hat{B} = 75^\circ \end{matrix} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

با توجه به قضیه سینوس ها داریم:



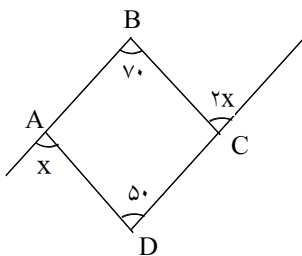
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = 2$$

۴۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض تست شکل

مقابل را خواهیم داشت.

$$x + 2x = 70 + 50 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$$

پس زاویه داخلی A برابر ۱۴۰ درجه است و بزرگترین زاویه داخلی خواهد بود.



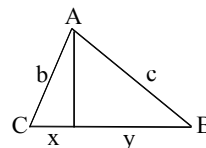
۴۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. اگر ضلع مثلث متساوی الاضلاع باشد.

$$\text{محیط} = 3a \Rightarrow 3a = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

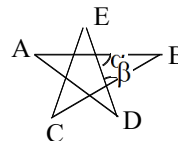
۳۳- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. در هر مثلث داریم:  
 $x = b \cos C$ ,  $y = c \cos B$ ,  $x + y = a$

بنابراین نوع مثلث نامشخص است.

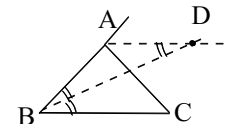


۳۴- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} A + D + \alpha = 180 \\ C + E + \beta = 180 \\ B + (180 - \alpha) + (180 - \beta) = 180 \end{cases} \Rightarrow A + B + C + D + E = 180$$



۳۵- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.



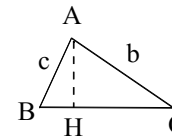
۳۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{زاویه خارجی} = 180^\circ - \frac{3 \times 180^\circ}{5} = 108^\circ \rightarrow 72^\circ = \text{زاویه پنج ضلعی منظم}$$

$$A + BC + D + E = 5 \times 72 = 360 \rightarrow A + BC + D + E = 180^\circ - 2(72) = 36^\circ$$

$$C \cos B, CH = b \cos C, BH + CH = a$$

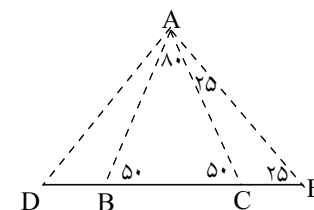
$$b \cos C + c \cos B = a$$



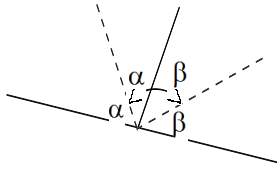
۳۷- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

۳۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$C = \frac{100 - 80}{2} = 10, \quad E = D = \frac{50}{2} = 25$$

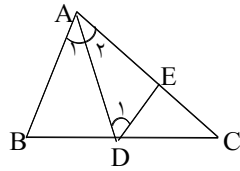


$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 90^\circ$$



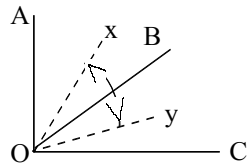
۵۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

۵۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



۵۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$xoy = \frac{AOB}{2} + \frac{BOC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



$$\frac{360}{n} = 15 \Rightarrow n = 24$$

۵۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

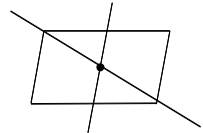
$$A = \frac{3 \times 180}{5} = 108$$

۵۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{BAC} = 108 + 18 + 18 = 144 \Rightarrow \frac{144}{18} = 8$$

۵۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

همواره متوازی الاضلاع را نصف می‌کند لذا  $K = 1$



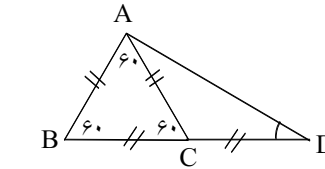
۵۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{180 \times 1}{6} = 30 \Rightarrow 30, 60, 90$$

$$4 \times 4 \sqrt{3} = 8h \quad h = 2\sqrt{3}$$

۴۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. چون میانه AM نصف BC است مثلث ABC قائم‌الزاویه است. داریم:

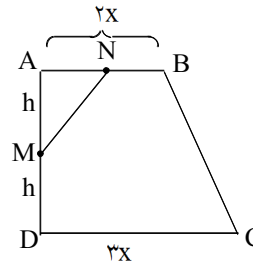
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C}_1 = 2/5B \\ \widehat{C}_1 = 90^\circ + \widehat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow 2/5B = 90^\circ + B \Rightarrow B = 60^\circ \Rightarrow C = 30^\circ$$



۴۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. مثلث  $\widehat{ACD}$  متساوی‌الساقین است. پس:  $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1 = 30^\circ$ . بنابراین اندازه‌ی زاویه‌های مثلث  $\widehat{ABD}$  برابر ۶۰ و ۹۰ و ۳۰ است.

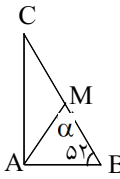
۴۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. از برخورد نیمسازهای متوازی الاضلاع یک مستطیل حاصل می‌شود.

۴۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم N وسط AB و M وسط AD باشد.



$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}h \times x}{\frac{1}{2}(2h)(2x + 3x)} = \frac{x}{10x} = \frac{1}{10}$$

$$۴۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. \alpha = 2(90 - 52) = 2(38) = 76$$



در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

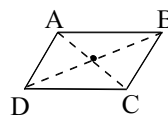
پس مثلث  $\widehat{AMC}$  متساوی‌الساقین است.

$$۵۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. محیط متوازی الاضلاع = 2(4 + 6) = 20. \frac{1}{x+8} = \frac{6}{6+3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 4$$

۵۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۴ برابر  $\Rightarrow$  مساحت برابرند.



۵۹- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



قطرها منصف اند

$$\begin{aligned} x_A + x_C &= x_B + x_D \Rightarrow -1 + 6 = 2 + x \\ y_A + y_C &= y_B + y_D \Rightarrow 0 + 7 = -3 + y \end{aligned} \Rightarrow D(3, 10)$$

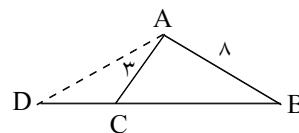
۶۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. استدلال حتمی زیرا درک شهودی به خاطر خطای حواس پنج‌گانه، قابل اعتماد نیستند.

۶۱- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin(B + C) = 2 \sin B \cos C \Rightarrow \sin B \cos C - \cos B \sin C = 0 \Rightarrow \sin(B - C) = 0$$

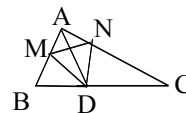
$B = C$  متساوی‌الساقین

۶۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.



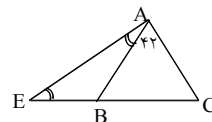
$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{DC}{5} = \frac{3}{8} \Rightarrow DC = \frac{3}{5} \times 8 = 2.4$$

۶۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. در متوازی‌الاضلاع ANDM قطر AD نیمساز است لذا لوزی است دو قطر لوزی



عمود منصف یک‌دیگرند.

۶۴- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\hat{B} = \frac{180 - 42}{2} = \frac{138}{2} = 69 \Rightarrow E = 34/5$$

۶۵- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. مجموع فواصل M از سه ضلع برابر ارتفاع می‌باشد.

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} (6\sqrt{3}) = 9 \Rightarrow \text{مجموع فواصل} = 9$$

## استدلال ۱- آزاد

- ۱- نیمسازهای زوایای داخلی دوزنقه‌ای یک چهارضلعی می‌سازند. این چهارضلعی:  
 (۱) مربع است (۲) محاطی است (۳) مستطیل است (۴) لوزی است
- ۲- نقاط  $M(4, 0, 0)$  و  $N(0, 4, 0)$  و  $P(0, 0, 4)$  سه رأس مثلث هستند، این مثلث:  
 (۱) مختلف‌الاضلاع است (۲) متساوی‌الساقین است (۳) قائم‌الزاویه است (۴) متساوی‌الاضلاع است
- ۳- در مثلث  $ABC$  زاویه‌های خارجی  $\angle B$  و  $\angle C$  به ترتیب  $120^\circ$  و  $\alpha^\circ$  و زاویه بین نیمسازهای این دو زاویه خارجی  $45^\circ$  است.  $\alpha$  چقدر است؟  
 (۱)  $150^\circ$  (۲)  $120^\circ$  (۳)  $90^\circ$  (۴)  $75^\circ$
- ۴- در مثلث متساوی‌الساقین از نقطه‌ای واقع بر قاعده دو عمود بر ساق‌ها وارد می‌کنیم. مجموع طول‌های دو عمود برابر است با؟  
 (۱) طول یک ساق (۲) طول ارتفاع وارد بر ساق  
 (۳) طول ارتفاع وارد بر قاعده (۴) طول قاعده مثلث
- ۵- اوساط اضلاع یک چهارضلعی رامتوالیاً به هم وصل می‌کنیم شکل حاصل مربع می‌گردد نوع چهارضلعی کدام است؟  
 (۱) لوزی (۲) مستطیل (۳) مربع (۴) متوازی‌الاضلاع
- ۶- تفاضل فواصل هر نقطه بر امتداد قاعده یک مثلث متساوی‌الساقین تا دوساق برابر است با:  
 (۱) ارتفاع وارد بر ساق (۲) میانه وارد بر قاعده (۳) ارتفاع وارد بر قاعده (۴) نیمساز زاویه مجاور به قاعده
- ۷- در مثلث  $\triangle ABC$  ،  $\angle B = \angle C = 70^\circ$  ، زاویه بین نیمساز  $BD$  و ارتفاع  $BH$  چقدر است؟  
 (۱)  $10^\circ$  (۲)  $15^\circ$  (۳)  $20^\circ$  (۴)  $25^\circ$
- ۸- کدام قضیه درست نیست؟  
 (۱) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمود باشد، لوزی است.  
 (۲) دوزنقه‌ای که دو قطرش برابر باشد، متساوی‌الساقین است.  
 (۳) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشد، مربع است.  
 (۴) هر چهارضلعی که دو ضلعش برابر باشد، دوزنقه است.
- ۹- کدام یک از چهار ضلعی‌های زیر یک متوازی‌الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟  
 (۱) چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد.  
 (۲) چهارضلعی که قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشند.  
 (۳) چهارضلعی که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد.  
 (۴) چهارضلعی که زوایای روبه‌رویش مساوی باشند.

۱۰- مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۶ مفروض است. اگر  $M$  یک نقطه داخل مثلث و از  $M$  سه عمود بر اضلاع وارد کنیم مجموع طولهای این سه عمود چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳) ۳ (۴)  $3\sqrt{3}$

۱۱- کدام گزینه **غلط** است؟

- (۱) دو زاویهٔ مجانب مکمل یکدیگرند.  
 (۲) نیمسازهای دو زاویهٔ متقابل به راس در یک امتدادند.  
 (۳) در مثلث دو زاویهٔ مکمل وجود ندارد.  
 (۴) دو زاویهٔ مجاور همواره متمم یکدیگرند.

۱۲- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) مربع، لوزی است که اقطارش مساویند.  
 (۲) هر چهارضلعی که اقطارش بر هم عمود باشند مربع است.  
 (۳) هر متوازی الاضلاع که اقطارش بر هم عمود باشد مربع است.  
 (۴) هر دوزنقه‌ای که یک زاویهٔ قائم داشته باشد مربع است.

۱۳- در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 40^\circ$  و  $\hat{B} = 60^\circ$  است. زاویهٔ بین ارتفاع  $AH$  و نیمساز  $AD$  چقدر است؟

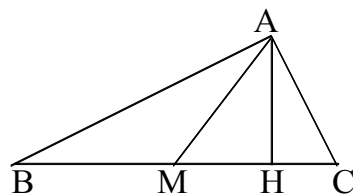
- (۱)  $10^\circ$  (۲)  $20^\circ$  (۳)  $30^\circ$  (۴)  $50^\circ$

۱۴- در متوازی الاضلاع کدام گزینه صحیح **نیست**؟

- (۱) خطی که وسط دو ضلع روبرو را به هم وصل می‌کند محور تقارن است.  
 (۲) زوایای مجاور مکمل‌اند.  
 (۳) مرکز تقارن نقطهٔ تلاقی دو قطر است.  
 (۴) فاصلهٔ دو ضلع روبرو ثابت است.

۱۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ )، ارتفاع  $AH$  و میانه  $AM$  زاویهٔ

$\angle B = 30^\circ$  است، کدام گزینه درست است؟



$$AH = \frac{AM}{4} = \frac{AB}{4} \quad (2) \qquad AH = MH = \frac{BC}{4} \quad (1)$$

$$MH = \frac{AM}{2} = \frac{BC}{4} \quad (4) \qquad AH = \frac{MC}{2} = \frac{AC}{2} \quad (3)$$

۱۶- نقاط  $A(2, -1)$  و  $B(0, 1)$  و  $C(-1, 0)$  سه راس یک مثلث هستند. طول میانهٔ  $CM$  برابر است با:

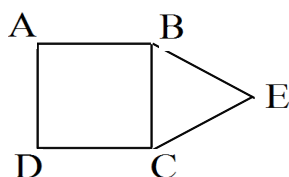
- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{2}$

۱۷- مجموع دو زاویهٔ  $120^\circ$  است. مجموع مکمل‌های آن دو زاویه چقدر است؟

- (۱)  $240^\circ$  (۲)  $120^\circ$  (۳)  $180^\circ$  (۴)  $300^\circ$

۱۸- در مثلث  $ABC$ ،  $\angle B = 40^\circ$  و  $\angle C = 80^\circ$  زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز نظیر راس  $A$  چقدر است؟

- (۱)  $10^\circ$  (۲)  $20^\circ$  (۳)  $40^\circ$  (۴)  $30^\circ$



۱۹- مربع ABCD و مثلث متساوی الاضلاع BEC در شکل داده شده، زاویه  $\angle DAE$  چقدر است؟

- (۱)  $75^\circ$   
 (۲)  $60^\circ$   
 (۳)  $45^\circ$   
 (۴)  $70^\circ$

۲۰- استدلال استقرایی یعنی .....

- (۱) روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است  
 (۲) روش نتیجه گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته ایم  
 (۳) استدلالی است که از حکم کلی، حکم جزئی را نتیجه می گیریم  
 (۴) روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه نامحدودی از مشاهدات است

۲۱- اگر A و B و C زاویه های یک مثلث به ترتیب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ متناسب باشند و نیمسازها در نقطه D متقاطع باشند، زاویه ADC کدام است؟

- (۱)  $145^\circ$   
 (۲)  $120^\circ$   
 (۳)  $95^\circ$   
 (۴)  $140^\circ$

۲۲- زوایای  $\angle A$  و  $\angle B$  مکملند. اگر زاویه A دو برابر زاویه B باشد حاصل  $\angle 2A - \angle 3B$  چقدر است؟

- (۱)  $90^\circ$   
 (۲)  $30^\circ$   
 (۳)  $120^\circ$   
 (۴)  $60^\circ$

۲۳- نقاط  $A(4, 2)$ ،  $B(1, -1)$ ،  $C(6, -1)$  سه راس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH چقدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲) ۱  
 (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$   
 (۴)  $\frac{7}{2}$

۲۴- در مثلث ABC زاویه بین نیمساز زاویه A و نیمساز زاویه B برابر  $110^\circ$  است. زاویه C کدام است؟

- (۱)  $70^\circ$   
 (۲)  $110^\circ$   
 (۳)  $40^\circ$   
 (۴)  $35^\circ$

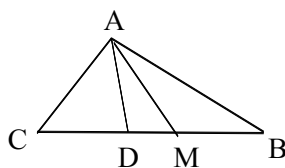
۲۵- در دوزنقه متساوی الساقین به قاعده ۱۲ و ۴ طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است اوساط اضلاع را بهم وصل می کنیم محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

- (۱)  $4\sqrt{5}$   
 (۲)  $8\sqrt{5}$   
 (۳)  $4\sqrt{10}$   
 (۴)  $8\sqrt{10}$

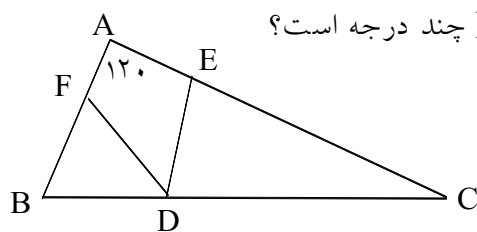
۲۶- نیمساز زوایای داخلی یک مستطیل مربعی می سازند که یک راس آن روی محیط مستطیل است آنگاه نسبت اضلاع مستطیل چقدر است؟

- (۱)  $\frac{4}{3}$   
 (۲)  $\sqrt{2}$   
 (۳)  $2\sqrt{2}$   
 (۴) ۲

۲۷- در شکل AD نیمساز و  $AM = MB$  اگر  $\hat{B} = 30^\circ$  و  $\widehat{DAM} = 20^\circ$  زاویه  $\hat{C}$  چقدر است؟



- (۱)  $30^\circ$   
 (۲)  $40^\circ$   
 (۳)  $50^\circ$   
 (۴)  $20^\circ$



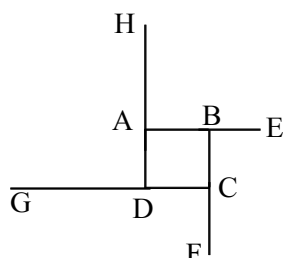
۲۸- در شکل زیر  $\angle A = 120^\circ$  و  $CD = CE$  و  $BF = BD$  زاویه FDE چند درجه است؟

(۱) ۶۰

(۲) ۳۰

(۳) ۱۵

(۴) ۴۵



۲۹- در مربع ABCD اضلاع را مطابق شکل امتداد می‌دهیم  $BE = AB$  و

$CF = 2BC$  و  $DG = 3CD$  و  $AH = 4AD$  بزرگترین زاویه

چهارضلعی EFGH کدام است؟

 $\hat{E}$  (۲) $\hat{H}$  (۱) $\hat{G}$  (۴) $\hat{F}$  (۳)

۳۰- در یک مستطیل به اضلاع ۶ و ۸ اوساط اضلاع را متوالیاً بهم وصل می‌کنیم. محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

(۴) ۵

(۳) ۴۰

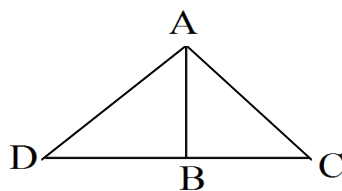
(۲) ۱۰

(۱) ۲۰

۳۱- در مثلث متساوی‌الاضلاعی به مساحت  $8\sqrt{3}$  طول ارتفاع کدام است؟

 $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (۴) $4\sqrt{6}$  (۳) $2\sqrt{6}$  (۲) $\sqrt{6}$  (۱)

۳۲- در شکل  $AD = \sqrt{2}AB$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = 2BC = 2$  زاویه DAC چند درجه است؟

 $105^\circ$  (۲) $135^\circ$  (۱) $75^\circ$  (۴) $90^\circ$  (۳)

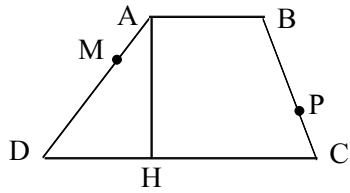
۳۳- مساحت لوزی به ضلع a که یک زاویه  $60^\circ$  دارد چند برابر شش ضلعی منتظمی به ضلع a است؟

 $\frac{1}{4}$  (۴) $\frac{1}{3}$  (۳) $\frac{1}{2}$  (۲) $\frac{1}{6}$  (۱)

۳۴- در مثلثی  $AB = \sqrt{2}$  و  $BC = \sqrt{2}$  و  $AC = 2$  میانه AM چند برابر طول نیمساز به رأس B است؟

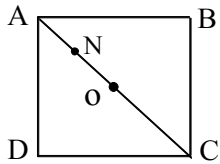
 $\sqrt{5}$  (۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$  (۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (۲) $\sqrt{10}$  (۱)

۳۵- در دوزنقه‌ی شکل مقابل ارتفاع  $AH = 9$  و  $CD = 2AB$  و  $\frac{MD}{MA} = \frac{BP}{PC}$  . مساحت مثلث  $MBP$  چه قدر است؟



- (۱) ۶  
(۲) ۱۲  
(۳) ۳  
(۴) ۱۸

۳۶- در شکل، ضلع مربع  $AB = 6$  و  $\frac{NC}{NA} = \frac{3}{2}$  ، فاصله‌ی  $N$  از مرکز مربع کدام است؟

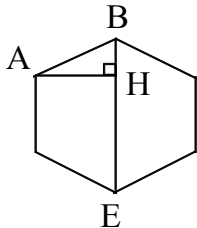


- (۱)  $\frac{6\sqrt{2}}{5}$   
(۲)  $\frac{3\sqrt{2}}{5}$   
(۳)  $\frac{12\sqrt{2}}{5}$   
(۴)  $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

۳۷- در یک دوزنقه متساوی‌الساقین اوساط اضلاع را متوالیاً به هم وصل کرده‌ایم در چهار ضلعی حاصل طول یک ضلع برابر ۴ و یک زاویه  $120^\circ$  است مساحت دوزنقه چقدر است؟

- (۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $4\sqrt{3}$  (۳)  $8\sqrt{3}$  (۴)  $16\sqrt{3}$

۳۸- در شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ مطابق شکل طول عمودی که از  $A$  بر قطر  $BE$  رسم می‌شود چقدر است؟

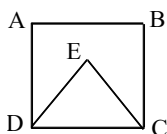


- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
(۲)  $\sqrt{3}$   
(۳)  $2\sqrt{3}$   
(۴)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۳۹- در مثلثی که زاویه‌ها به نسبت ۲ و ۳ و ۷ هستند (زاویه بزرگ‌تر  $A$ ) اگر  $D$  محل تلاقی سه نیم‌ساز باشد حاصل  $\angle ADB + \angle ADC - \angle BDC$  کدام است؟

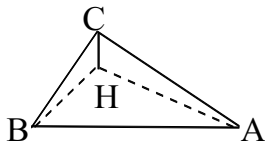
- (۱)  $105^\circ$  (۲)  $75^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $90^\circ$

۴۰- در شکل  $ABCD$  ، مربع به ضلع  $a$  و مثلث  $DEC$  متساوی‌الاضلاع است. فاصله‌ی  $E$  تا  $AB$  چه قدر است؟



- (۱)  $a \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$   
(۲)  $a \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$   
(۳)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$   
(۴)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

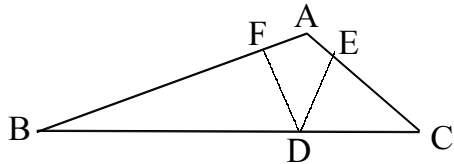
۴۱- در مثلث  $ABC$  که در آن  $\hat{A} = 40^\circ$  و  $\hat{B} = 60^\circ$  و  $H$  محل تلاقی سه ارتفاع است. زاویه  $\hat{AHC}$  چند برابر زاویه  $\hat{BHC}$  است؟



(۲)  $\frac{5}{7}$   
(۴)  $\frac{7}{5}$

(۱)  $\frac{5}{6}$   
(۳)  $\frac{6}{7}$

۴۲- در شکل  $\angle B + \angle C = 40^\circ$  و  $CE = CD$  و  $BF = BD$  چند برابر زاویه  $\angle FDE$  است؟



(۱) ۷  
(۲) ۳  
(۳) ۵  
(۴) ۹

۴۳- در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  کدام گزینه عدد بزرگ تری نشان می دهد؟

- (۲) مساحت  
(۴) حاصل ضرب سه ضلع

- (۱) حاصل ضرب سه ارتفاع  
(۳) عکس محیط

## جواب استدلال ۱- آزاد

۱- می‌دانیم نیمسازهای دو زاویه مکمل بر هم عمودند.

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} = 90^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{P} = 90^\circ \end{cases}$$

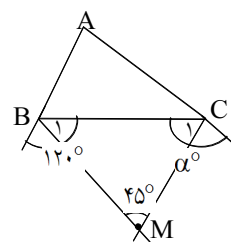
دو رابطه فوق نشان می‌دهد که زوایای روبروی چهارضلعی MNPQ مکمل یکدیگرند که این شرط محاطی بودن چهارضلعی است. پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲- فاصله دو نقطه  $A(a, b, c)$  و  $B(a', b', c')$  برابر  $AB = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}$

است. با توجه به نقاط داده شده:

$$MN = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}, \quad MP = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}, \quad NP = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

با توجه به نتایج فوق  $MN = NP = MP$  می‌باشد، پس مثلث متساوی‌الاضلاع بوده، گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



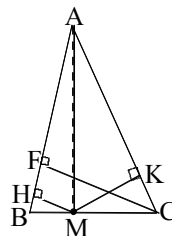
$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \frac{120}{2} = 60^\circ \\ \hat{C}_1 = \frac{\alpha}{2} \\ \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{M} = 180 \end{cases} \Rightarrow 60 + \frac{\alpha}{2} + 45 = 180 \Rightarrow \alpha = 150^\circ$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از رأس A به نقطه‌ی M وصل می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ACM} &= \frac{1}{2}MH \cdot AB + \frac{1}{2}MK \cdot AC = \frac{AB}{2}(MH + MK) \\ S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2}CF \cdot AB \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$MH + MK = CF$$

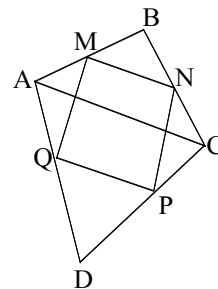


$$\left. \begin{aligned} BM = AM \\ BN = NC \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{رابطه تالس}} \left. \begin{aligned} MN &\parallel \frac{AC}{2} \\ PQ &\parallel \frac{AC}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مNPQ متوازی الاضلاع است}$$

اضلاع MNPQ با اقطار ABCD متوازی بوده و با هم برابرند، در نتیجه خواهیم داشت:

$$MN = NP \Rightarrow AC = BD, \quad MN \perp NP \Rightarrow AC \perp BD$$

اقطار چهارضلعی ABCD برابر و بر هم عمودند، پس مربع ABCD است. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

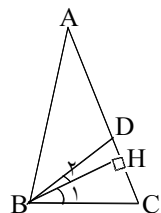


۶- هرگاه M نقطه‌ای دلخواه بر قاعده مثلث بوده و از آن به نقطه A وصل کنیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \widehat{AMC} = \frac{1}{2}AC \cdot MH \\ S_2 &= \widehat{AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot MK \\ AB &= AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_1 - S_2 = \frac{1}{2}AB(MH - MK)$$

$$S_1 - S_2 = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB(MH - MK) = \frac{1}{2}AB \cdot BF \Rightarrow MH - MK = BF$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۷- می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر  $180^\circ$  است.

$$\left. \begin{aligned} BD \text{ نیمساز} : \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = 35^\circ \\ BH \text{ ارتفاع} : \hat{B}_1 = 90 - \hat{C} = 20^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{B}_2 = 35 - 20 = 15^\circ$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۸- گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ تعریف‌های لوزی، دوزنقه متساوی‌الساقین و مربع هستند، اما لازمه اینکه یک چهارضلعی، دوزنقه باشد آن است که دو ضلع آن موازی (و نه الزاماً برابر) باشند. بنابراین گزینه ۴ پاسخ درست است.

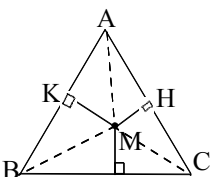
۹- با توجه به تعریف متوازی‌الاضلاع، گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ درست می‌باشند. در گزینه ۱ باید دو ضلع موازی، مساوی هم باشند تا شکل متوازی‌الاضلاع گردد در حالی که این نکته در این گزینه قید نشده است. لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۰- اگر از M به سه رأس وصل کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle AMB} + S_{\triangle AMC} + S_{\triangle BMC} \\ \frac{a \cdot h}{2} &= \frac{1}{2}MK \cdot AB + \frac{1}{2}MH \cdot AC + \frac{1}{2}MF \cdot BC = \frac{1}{2}a(MK + MH + MF) \\ \Rightarrow MH + MK + MF &= h \end{aligned}$$

می‌دانیم ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$  است، پس:  $MH + MK + MF = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.





۱۱- گزینه‌های ۱ و ۲ طبق قضایای کتاب درسی همواره برقرارند.

می‌دانیم در هر مثلث مجموع زوایا برابر  $180^\circ$  است. هرگاه  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  زوایای مثلثی بوده و  $\alpha$  و  $\beta$  مکمل یکدیگر باشند، خواهیم داشت:

$$\alpha = 180 - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ \left. \begin{array}{l} \\ \gamma > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$$

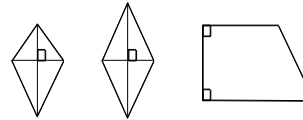
درحالیکه مجموع زوایای مثلث باید  $180^\circ$  باشد ( $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ )، بنابراین نتیجه بدست آمده غیرممکن است. پس دو زاویه مثلث نمی‌تواند مکمل باشند.

طبق تعریف دو زاویه مجاور لزوماً متمم یکدیگر نیستند. بنابراین گزینه ۴ پاسخ درست است.

۱۲- در چهار ضلعی که اقطارش بر هم عمودند، شرط مربع بودن آن است که

اقطار یکدیگر را نصف نیز بکنند.

متوازی‌الاضلاعی که اقطارش بر هم عمود است، لوزی است.



دوازدهم‌ای که یک زاویه قائمه دارد، دوازدهمی قائم‌الزاویه است. بنابراین تنها گزینه ۱ صحیح و پاسخ درست است.

$$13- \quad AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \frac{\widehat{A}}{2} = 20^\circ$$

$$\text{ارتفاع } AH \Rightarrow \widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 30^\circ$$

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{A}_3 + 20^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = 10^\circ$$

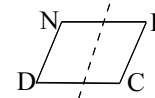
بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز زاویه‌ی A برابر است با  $\frac{|\widehat{B} - \widehat{C}|}{2}$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ طبق تعریف متوازی‌الاضلاع صحیح هستند.

متوازی‌الاضلاع فاقد محور تقارن است. بنابراین گزینه ۱ صحیح نبوده و پاسخ درست است.

نکته: محور تقارن اگر ضلعی را قطع کند، بر آن عمود است.

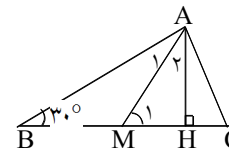


۱۵- میدانیم در هر مثلث قائمه‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است و ضلع مقابل

به زاویه  $30^\circ$  نیز نصف وتر است.

$$AM = \frac{BC}{2} = BM \Rightarrow \widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B} = 30^\circ$$

$$\text{زاویه خارجی } \widehat{M}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{A}_2 = 90^\circ - \widehat{M}_1 = 30^\circ$$



$$\widehat{AHM}: \left. \begin{array}{l} H = 90^\circ \\ \widehat{A}_2 = 30^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow MH = \frac{AM}{2}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۶- برای محاسبه طول میانه CM کافی است مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AB را محاسبه نماییم.

$$\left. \begin{array}{l} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow M(1, 0)$$

بنابراین طول پاره‌خط CM برابر است با:

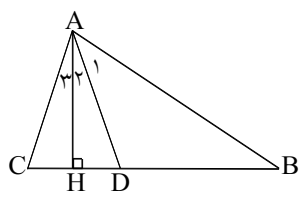
$$CM = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(1 + 1)^2 + (0 - 0)^2} = 2$$

لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۷- میدانیم مکمل زاویه  $\alpha$  برابر با  $180 - \alpha$  است. اگر اندازه دو زاویه را  $\alpha$  و  $\beta$  فرض کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 120^\circ \\ (180 - \alpha) + (180 - \beta) = 360 - (\alpha + \beta) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع مکملها} = 360 - 120 = 240^\circ$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ درست است.



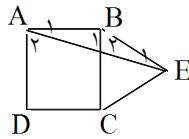
$$18- \quad \left. \begin{array}{l} \widehat{D}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{B} = \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{B} \\ \widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180 - (40 + 80) = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\widehat{D}_1 = 30 + 40 = 70^\circ$$

$$\widehat{A}_2 = 90 - \widehat{D}_1 = 90 - 70 = 20^\circ$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

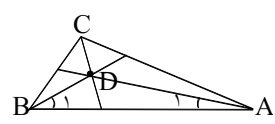


$$\widehat{ABE}: \left\{ \begin{array}{l} AB = BE \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{E}_1 \\ \widehat{A}_1 + \widehat{E}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$2\widehat{A}_1 + 90 + 60 = 180 \Rightarrow \widehat{A}_1 = 15^\circ \Rightarrow \widehat{DAE} = 90 - \widehat{A}_1 = 75^\circ$$

۲۰- طبق قضایای کتاب، گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در استدلال استقرایی، با توجه به تعداد محدودی از مشاهدات، به

یک نتیجه کلی که هنوز صحت آن محرز نشده است، می‌رسیم.



$$A = k, B = 2k, C = 3k \Rightarrow k = 30^\circ \Rightarrow A = 30^\circ, B = 60^\circ, C = 90^\circ$$

بنابراین مثلث ABC در رأس C قائمه است.

$$A_1 = \frac{\hat{A}}{2} = 15^\circ$$

$$C_1 = \frac{\hat{C}}{2} = 45^\circ$$

$$\hat{ADC} = 180 - (A_1 + C_1) = 180 - (15 + 45) = 120^\circ$$

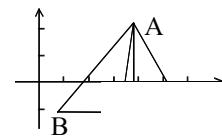
بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\hat{A} + \hat{B} = 180$$

$$\hat{A} = 2\hat{B}$$

$$3\hat{B} = 180 \Rightarrow B = 60^\circ \Rightarrow A = 120^\circ \Rightarrow 2\hat{A} - 3\hat{B} = 240 - 180 = 60^\circ$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



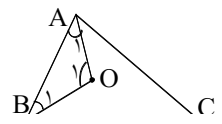
$$MH = x_H - x_M$$

۲۳- با توجه به شکل مشخص است که: پس برای محاسبه MH کافی است  $x_H$  و  $x_M$  را محاسبه کنیم:

$$\left. \begin{aligned} x_H &= x_A \\ x_A &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_H = 4$$

$$\left. \begin{aligned} \text{وسط } M \text{ پاره خط } BC \Rightarrow x_M &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_H - x_M = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow MH = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.



۲۴- هرگاه O نقطه تلاقی نیمسازهای زوایای A و B باشد داریم:

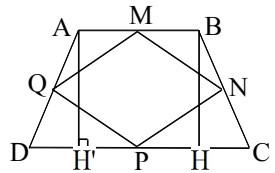
$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} \quad (1) \quad \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} \quad (2)$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O}_1 = 180 \Rightarrow \hat{O}_1 = 180 - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) \xrightarrow{(1)} \hat{O}_1 = 180 - \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{O} = 180 - \left(\frac{180 - \hat{C}}{2}\right) = 90 + \frac{\hat{C}}{2} = 110 \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.



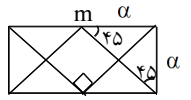
$$DH' = HC = \frac{12 - 4}{2} = 4$$

$$\text{قطر } DB = \sqrt{BH'^2 + DH'^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{محیط } MNPQ = (ABCD) = (4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

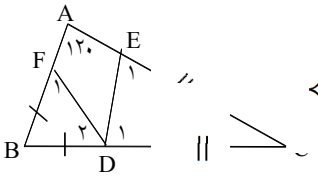
۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه m وسط ضلع مستطیل می افتد پس نسبت طول مستطیل به عرض مستطیل ۲ است.



۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون  $BM = AM$  است لذا  $\hat{BAM} = 30^\circ$

است و از طرفی چون AD نیمساز  $\hat{A}$  است  $\hat{DAC} = 50^\circ$  پس  $\hat{A} = 100^\circ$  و چون مجموع زوایای داخلی مثلث ABC برابر  $180^\circ$  است در نتیجه  $\hat{C} = 50^\circ$  خواهد بود.

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left\{ \begin{aligned} E_1 &= \hat{D}_1 \\ F_1 &= \hat{D}_2 \end{aligned} \right. \Rightarrow B + C + 2(D_1 + D_2) = 360^\circ \Rightarrow D_1 + D_2 = 150^\circ$$

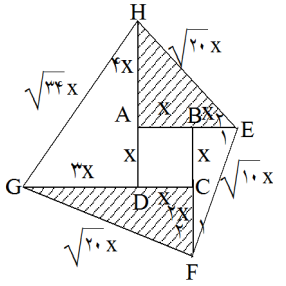
$$B + C = 60$$

$$\hat{FDE} = 30^\circ \text{ پس}$$

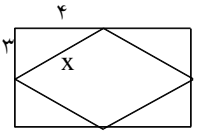
۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و تساوی دو مثلث هاشور خورده، داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{E}_1 &> \hat{F}_1 \\ \hat{E}_2 &= \hat{F}_2 \end{aligned} \right. \Rightarrow \hat{E} > \hat{F}$$

پس E بزرگترین زاویه ی چهارضلعی EFGH است.



۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چهارضلعی حاصل، یک لوزی است.



$$x^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$$

$$\text{محیط لوزی} = 4x = 16\sqrt{2}$$

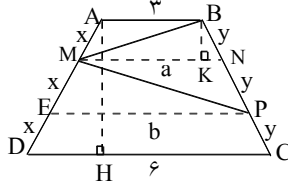
۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2} \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$$

۳۵- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. از M پاره خط MN را موازی با AB و از P پاره خط PE را موازی با AB رسم می کنیم. اگر  $MN = a$  و  $PE = b$  داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{3+b}{2} \\ b = \frac{a+6}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = 5$$

$$BK = \frac{1}{3}AH = 3 \quad S_{MBP} = 2S_{MBN} = 2 \times \frac{4 \times 3}{2} = 12$$

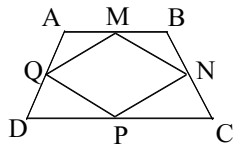


۳۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. اگر O مرکز مربع باشد. داریم:

$$\frac{NC}{NA} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AC}{NA} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{6\sqrt{2}}{NA} = \frac{5}{2} \Rightarrow NA = \frac{12\sqrt{2}}{5}$$

$$oA = oA - AN \Rightarrow oN = \frac{6\sqrt{2}}{2} - \frac{12\sqrt{2}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

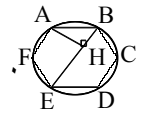
۳۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. اگر اواسط اضلاع دوزنقه متساوی الساقین را متوالیاً به هم وصل کنیم لوزی حاصل می شود که مساحت آن نصف مساحت چهارضلعی است.



$$S_{MNPQ} = MN \cdot NP \cdot \sin 60 = 8\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = 16\sqrt{3}$$

۳۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.



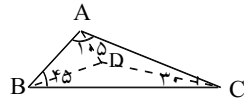
قائم الزاویه ABH  $\hat{A}BH = 60^\circ$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB) = 2\sqrt{3}$$

$$2x + 3x + 7x = 180$$

$$x = 15 \Rightarrow \hat{C} = 30, \hat{B} = 45, \hat{A} = 105$$

$$\angle ADB + \angle ADC - \angle BDC = 105^\circ + 112/5 - 122/5 = 75^\circ$$



۳۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

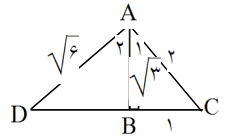
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \angle B = 90^\circ$$

در مثل قائم الزاویه ضلع روبه رو به زاویه  $30^\circ$  نصف وتر است و چون  $\angle A_1 = 30^\circ$  داریم  $BC = \frac{1}{2}AC$

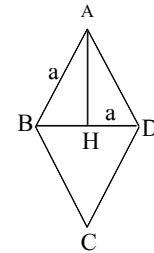
$$\cos(\angle A_2) = \frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle A_2 = 45^\circ$$

$$\angle A = \angle A_1 + \angle A_2 = 75^\circ$$

۳۲- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



۳۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.



$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$S = \frac{2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) \times a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

$$S' = 6 \times \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = 3\sqrt{3}a^2$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{2}}{3\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{6}$$

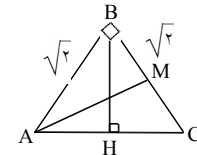
۳۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

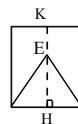
$(AB^2 + BC^2 = AC^2)$  مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است.

$$\triangle ABM: AM = \sqrt{2 + \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$BH = 1$  میانهی وارد بر وتر است.

$$\frac{AM}{BH} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$



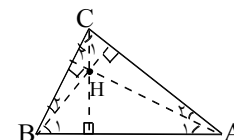


$$EH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$EK = a - \frac{\sqrt{3}}{2}a = a \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که H نقطه تلاقی ۳ ارتفاع است.



$$\hat{A}_1 = 30^\circ, \hat{A}_2 = 10^\circ$$

$$\hat{B}_2 = 10^\circ, \hat{B}_1 = 50^\circ$$

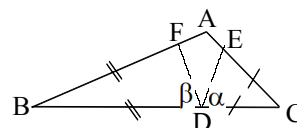
$$\hat{C}_2 = 30^\circ, \hat{C}_1 = 50^\circ$$

$$\text{پس } \frac{\hat{AHC}}{\hat{BHC}} = \frac{120^\circ}{140^\circ} = \frac{6}{7}$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 40^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 40^\circ = 360^\circ$$

۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\angle BAC}{\angle FED} = \frac{120^\circ}{20^\circ} = 6 \text{ بنابرین } \hat{BAC} = 120^\circ \text{ و } \hat{FDE} = 20^\circ \text{ پس } \alpha + \beta = 160^\circ$$



۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{ضلع } a = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{ارتفاع } h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}, S = \frac{a^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16} = 0.32$$

$$\text{حاصل ضرب سه ضلع} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0.64$$

$$\text{عکس محیط} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0.38$$

$$\text{حاصل ضرب به ارتفاع} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0.42$$

پس حاصل ضرب ۳ ضلع بزرگتر از بقیه است.

## مساحت و فیثاغورس - سراسری

۱- مساحت یک دایره  $38/465$  سانتی متر مربع است قطر دایره چند سانتی متر است؟ ( $\pi = 3/14$ )

(۱) ۹ (۲) ۷ (۳)  $6/5$  (۴)  $4/5$

۲- اگر در مثلث  $ABC$ ،  $BM$  و  $CN$  دو ارتفاع نظیر رأسهای  $B$  و  $C$  بوده و  $AB$  برابر  $6$  سانتیمتر،  $AC$  برابر  $10$  سانتیمتر،  $BM$  برابر  $3$  سانتیمتر باشد، طول  $CN$  کدام است؟

(۱)  $2$  سانتیمتر (۲)  $4$  سانتیمتر (۳)  $5$  سانتیمتر (۴)  $7$  سانتیمتر

۳- در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 45^\circ$ ، اندازه‌ی ارتفاع  $BH$  برابر با  $3$  متر و مساحت مثلث برابر با  $\frac{9}{2}(1 + \sqrt{3})$  مترمربع است ضلع  $a$  چند متر است؟

(۱)  $3$  (۲)  $4/5$  (۳)  $5$  (۴)  $6$

۴- در مثلث  $ABC$ ، دو ارتفاع  $AH$  و  $BH'$  را رسم کرده‌ایم. در این صورت نسبت  $\frac{AH}{BH'}$  برابر کدام است؟

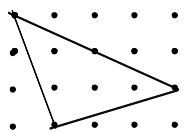
(۱)  $\frac{AC}{BC}$  (۲)  $\frac{(AC)^2}{(BC)^2}$  (۳)  $\frac{BC}{AC}$  (۴)  $\frac{(BC)^2}{(AC)^2}$

۵- در مثلث  $ABC$  داریم:  $A = \frac{\pi}{2}$  و  $\text{tg } B = \sqrt{2}$  و  $a = 3\sqrt{3}$  اندازه ضلع  $c$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{6}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $2$  (۴)  $3$

۶- در لوزی  $ABCD$ ،  $AB = 5$  و  $\cos A = -\frac{3}{5}$  مساحت آن کدام است؟

(۱)  $15$  (۲)  $18$  (۳)  $20$  (۴)  $25$

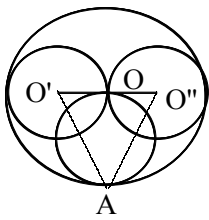


۷- در شکل زیر فاصله هر دو نقطه متوالی بصورت افقی یا عمودی برابر واحد است؟ طول ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع مثلث چقدر است؟

(۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$  (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۸- قطعه خط  $AB$  به طول  $6$  سانتیمتر را روی دو محور عمود برهم تصویر کرده‌ایم. طول تصویر روی یکی از محورها  $3$  سانتیمتر است طول تصویر روی دیگری چقدر است؟

(۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $3\sqrt{2}$  (۴)  $3\sqrt{3}$

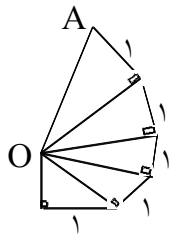


۹- در شکل زیر دایره بزرگ به مرکز  $O$  و به شعاع ۵ سانتیمتر است. مساحت مثلث  $O'O''A$  چند سانتیمتر مربع است؟ ( $O'$  و  $O''$  مرکز دو دایره کوچک)

- (۱) ۱۰  
(۲)  $12/5$   
(۳) ۱۵  
(۴)  $17/5$

۱۰- اگر طول اضلاع مثلثی ۲ و ۳ و ۳ سانتیمتر باشد طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چند سانتیمتر است؟

- (۱)  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$   
(۲)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$   
(۳)  $\sqrt{2}$   
(۴)  $\sqrt{3}$



۱۱- در شکل زیر طول پاره خط  $OA$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲)  $\sqrt{5}$   
(۳)  $\sqrt{6}$   
(۴)  $\sqrt{7}$

۱۲- در نیمدایره‌ای به شعاع  $R$  مثلث قائم الزاویه‌ای را که وتر آن بر قطر منطبق است، محاط کرده‌ایم. اگر مساحت مثلث نصف مساحت نیم‌دایره باشد، ارتفاع مثلث کدام مضرب  $R$  است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{4}$   
(۲)  $\frac{\pi}{5}$   
(۳)  $\frac{\pi}{6}$   
(۴)  $\frac{\pi}{7}$

۱۳- طول اضلاع مثلثی ۵ و ۴ و ۳ سانتیمتر است. اندازه تصویر میانه نظیر ضلع بزرگتر بر آن ضلع چند سانتیمتر می‌باشد؟

- (۱)  $0/6$   
(۲)  $0/7$   
(۳)  $0/75$   
(۴)  $0/8$

۱۴- فاصله نقطه  $p$  واقع در داخل مستطیل  $ABCD$  از راس  $A$ ،  $B$  و  $C$  به ترتیب ۱۰، ۳ و ۴ متر است. فاصله نقطه  $p$  از  $D$  چند متر است؟

- (۱)  $\sqrt{75}$   
(۲)  $\sqrt{95}$   
(۳)  $\sqrt{103}$   
(۴)  $\sqrt{107}$

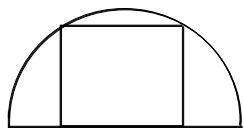
۱۵- یک زاویه‌ی دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای ۴۵ درجه است. اگر ارتفاع و قاعده کوچک دوزنقه هر دو ۶ سانتی‌متر باشد، مساحت دوزنقه چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) ۵۴  
(۲) ۵۲  
(۳) ۵۰  
(۴) ۴۸

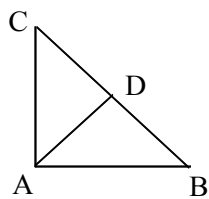
۱۶- محیط یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین  $(1 + \sqrt{2})$  سانتیمتر است مساحت آن چند است؟

- (۱) ۹  
(۲)  $6\sqrt{2}$   
(۳) ۱۲  
(۴)  $9\sqrt{2}$

۱۷- در شکل زیر شعاع نیم‌دایره برابر  $7/5$  سانتیمتر است. مساحت مربع چند سانتیمتر است؟



- (۱) ۳۰  
(۲) ۳۶  
(۳) ۴۵  
(۴) ۵۴



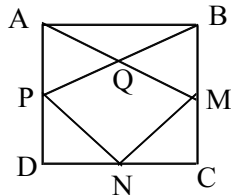
۱۸- در شکل مقابل مثلث  $ABC$  قائم الزاویه و مثلث  $ADB$  متساوی الاضلاع است. اگر  $AC=6$  باشد طول وتر  $BC$  کدام است؟

$$5\sqrt{3} \quad (4)$$

$$6\sqrt{2} \quad (3)$$

$$5\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4\sqrt{3} \quad (1)$$



۱۹- در شکل مقابل مربع  $ABCD$  و  $P, N, M$  به ترتیب وسط اضلاع  $AD, DC, BC$  هستند. مساحت چهار ضلعی  $MNPQ$  چند برابر مساحت  $ABCD$  است؟

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$\frac{4}{7} \quad (2)$$

$$\frac{3}{7} \quad (1)$$

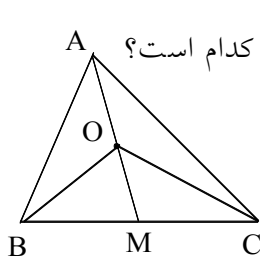
۲۰- اگر طول دو ضلع یک متوازی الاضلاع ثابت و یک زاویه آن تغییر کند، کدام گزینه در مورد محیط و مساحت آن صحیح است؟

(۲) محیط ثابت - مساحت متغیر

(۱) محیط متغیر - مساحت متغیر

(۴) محیط ثابت - مساحت ثابت

(۳) محیط متغیر - مساحت ثابت



۲۱- در شکل مقابل، مساحت مثلثهای  $ABC$ ،  $OBC$  را به ترتیب  $S$  و  $S'$  می نامیم. نسبت  $\frac{OM}{AM}$  کدام است؟

$$\left(\frac{S'}{S}\right)^2 \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{S'}{S}} \quad (1)$$

$$\frac{S'}{S} \quad (4)$$

$$\frac{S - S'}{S} \quad (3)$$

۲۲- طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای  $1 + 2X$  و  $1 - 2X$  و  $X$  است طول ضلع متوسط کدام است؟

$$19 \quad (4)$$

$$17 \quad (3)$$

$$15 \quad (2)$$

$$13 \quad (1)$$

۲۳- از چهار رأس یک چهار ضلعی خطهایی موازی قطرها رسم می کنیم. از تلاقی این خطوط یک چهارضلعی حاصل می شود. نسبت مساحت چهار ضلعی اول به چهارضلعی حاصل شده، کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

۲۴- در یک مثلث قائم الزاویه به زاویه قائمه  $\hat{B}$  رابطه  $b^2 = 2ac$  برقرار است. زاویه  $\hat{C}$  چند درجه است؟

$$75 \quad (4)$$

$$60 \quad (3)$$

$$45 \quad (2)$$

$$30 \quad (1)$$

۲۵- در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه یک زاویه  $35^\circ$  است. اندازه زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر این مثلث کدام است؟

$$45^\circ \quad (4)$$

$$30^\circ \quad (3)$$

$$20^\circ \quad (2)$$

$$15^\circ \quad (1)$$

۲۶- ماکزیم مساحت مثلثهای محاط در دایره به شعاع R کدام است؟

$$\sqrt{3}R^2 \quad (1) \quad \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 \quad (3) \quad 3\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \quad (4)$$

۲۷- ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه، وتر را به دو قسمت به طولهای ۳ و ۱۲ سانتیمتر تقسیم کرده است. مساحت این مثلث چند سانتیمتر مربع است؟

$$26 \quad (1) \quad 45 \quad (2) \quad 42 \quad (3) \quad 40 \quad (4)$$

۲۸- فرض کنیم نقطه C نقطه متغیری از دایره به شعاع R و AB وتر ثابتی از آن به فاصله  $\frac{R}{2}$  از مرکز دایره باشد. اگر

مساحت مثلث ABC ماکزیمم باشد، آنگاه زاویه B کدام است؟

$$\frac{\pi}{6} \quad (1) \quad \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

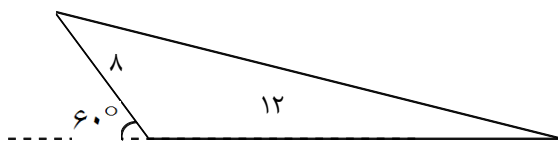
۲۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC،  $b = 5$  و  $\cos B = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ . طول وتر این مثلث چقدر است؟

$$6 \quad (1) \quad 7 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 9 \quad (4)$$

۳۰- قاعده یک مثلث بر طول مستطیل منطبق و عرض مستطیل  $\frac{5}{12}$  ارتفاع وارد بر این قاعده مثلث است. مساحت مثلث چه

کسری از مساحت مستطیل است؟

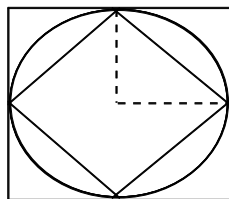
$$\frac{6}{5} \quad (1) \quad \frac{5}{6} \quad (2) \quad \frac{5}{4} \quad (3) \quad \frac{4}{5} \quad (4)$$



۳۱- مساحت مثلث شکل زیر چقدر است؟

$$16\sqrt{3} \quad (1) \quad 24\sqrt{3} \quad (2) \quad 24 \quad (3) \quad 24 \quad (4)$$

۳۲- هر دو چهارضلعی زیر مربع هستند. نسبت مساحت مربع بزرگ به مساحت مربع کوچک چقدر است؟



$$2 \quad (1) \quad \sqrt{2} \quad (2) \quad \sqrt{3} \quad (3) \quad 2\sqrt{2} \quad (4)$$

۳۳- ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه را رسم کرده‌ایم. مساحت یکی از دو مثلث دو برابر مساحت دیگری است.

اگر طول این ارتفاع برابر ۴ باشد، مساحت مثلث اولیه چقدر است؟

$$9\sqrt{2} \quad (1) \quad 10\sqrt{2} \quad (2) \quad 11\sqrt{2} \quad (3) \quad 12\sqrt{2} \quad (4)$$



۳۴- اگر  $A(4, 4)$  و  $C(1, 1)$  دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۸

۳۵- اگر به یک ضلع زاویه قائم در یک مثلث قائم‌الزاویه ۵ واحد اضافه شود ....

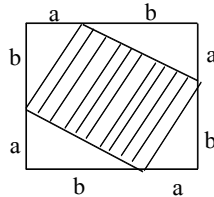
- (۱) به مساحت آن  $\frac{2}{5}$  برابر ضلع دیگر اضافه می‌شود (۲) به مساحت آن ۵ واحد اضافه می‌شود  
(۳) به مساحت آن  $\frac{2}{5}$  واحد اضافه می‌شود (۴) مساحت آن  $\frac{2}{5}$  برابر می‌شود

۳۶- طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دو ضلع زاویه قائم آن ۵ و ۱۲ سانتی‌متر است، چند سانتی‌متر است؟

- (۱)  $\frac{30}{7}$  (۲)  $\frac{30}{11}$  (۳)  $\frac{60}{13}$  (۴)  $\frac{60}{11}$

۳۷- مربعی در داخل مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین طوری محاط شده است که دو ضلع آن بر روی دو ضلع زاویه قائم مثلث و یک رأس آن واقع بر وتر مثلث است. مساحت مثلث چند برابر مساحت مربع است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$



۳۸- در شکل مقابل مساحت چهارضلعی هاشورزده کدام است؟

- (۱)  $(a + b)^2$   
(۲)  $a^2 + b^2$   
(۳)  $a^2 + 2ab$   
(۴)  $b^2 + 2ab$

۳۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای  $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ ، اندازه ارتفاع وارد بر وتر برابر ۹ و  $\cos B = \frac{2}{3}$ ، اندازه ضلع  $b$  کدام است؟

- (۱)  $13/5$  (۲)  $12/5$  (۳)  $4\sqrt{5}$  (۴)  $3\sqrt{5}$

۴۰- مساحت مثلث  $ABC$  سه برابر مساحت مثلث  $A'B'C'$  است. اگر ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  نصف ارتفاع وارد بر ضلع  $B'C'$  باشد، قاعده  $BC$  چند برابر قاعده  $B'C'$  است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۴۱- فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۴۲- اگر محیط یک مثلث متساوی‌الساقین ۱۸ واحد و ارتفاع وارد بر قاعده ۳ واحد باشد، مساحت مثلث چند واحد مربع است؟

- (۱)  $6\sqrt{2}$  (۲) ۹ (۳)  $6\sqrt{3}$  (۴) ۱۲

۴۳- در یک مستطیل مقدار ثابتی را از عرض آن کم کرده و همان مقدار را به طول آن می‌افزاییم تا مستطیل جدیدی حاصل شود. تغییر مساحت و محیط مستطیل چگونه‌اند؟

- (۱) مساحت ثابت و محیط کمتر  
 (۲) مساحت کمتر و محیط بیشتر  
 (۳) مساحت کمتر و محیط ثابت  
 (۴) مساحت بیشتر و محیط ثابت

۴۴- طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای  $2X + 1$ ،  $2X - 1$ ،  $X$  است ( $X > 1$ ). طول ضلع متوسط کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

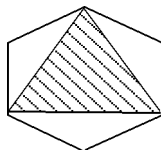
۴۵- از مستطیلی به ابعاد  $X + 3$  و  $X + 5$  یک مستطیل دیگر به ابعاد  $X - 1$  و  $X + 4$  را حذف کرده‌ایم، مساحت باقیمانده کدام است؟

- (۱)  $4X + 17$  (۲)  $5X + 17$  (۳)  $4X + 19$  (۴)  $5X + 19$

۴۶- طول ساق یک مثلث متساوی الساقین  $\sqrt{185}$  سانتی‌متر و طول قاعده آن ۱۲ سانتی‌متر است. مساحت مثلث چند سانتیمتر مربع است؟

- (۱)  $24\sqrt{3}$  (۲) ۴۲ (۳)  $30\sqrt{2}$  (۴) ۴۸

۴۷- اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم شکل مقابل ۴ باشد. مساحت مثلث سایه زده شده چند واحد



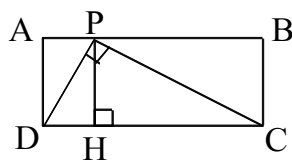
- مربع است؟  
 (۱)  $12\sqrt{3}$  (۲)  $16\sqrt{2}$  (۳)  $16\sqrt{3}$  (۴)  $18\sqrt{2}$

۴۸- در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $A = \frac{\pi}{2}$ )  $AC = 2 AB$  ارتفاع  $AH$  رسم شده است. مساحت مثلث  $ABC$  چند

برابر مساحت مثلث  $ABH$  است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۹- در مستطیل شکل مقابل  $P = 90^\circ$  و  $AP = BP = 9$ . طول  $DP$  کدام است؟



- (۱) ۵ (۲)  $3\sqrt{3}$  (۳)  $4\sqrt{2}$  (۴) ۶

۵۰- در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ارتفاع  $AH$  و میانه  $AM$  را رسم می‌کنیم اگر  $HB$  و  $HC$  به ترتیب ۴ و ۹ واحد باشند مساحت مثلث  $AMH$  کدام است؟

- (۱)  $4/5$  (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)  $7/5$

۵۱- در دوزنقه قائم الزاویه‌ای نسبت دو قاعده برابر  $\frac{2}{3}$  است. اگر وسط قاعده کوچک را به وسط ساق قائمه وصل کنیم مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت دوزنقه اصلی است؟

$$(1) \frac{1}{10} \quad (2) \frac{1}{9} \quad (3) \frac{1}{8} \quad (4) \frac{1}{6}$$

۵۲- در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌های میانه و ارتفاع وارد بر وتر به ترتیب ۳ و  $2\sqrt{2}$  است، اندازه ضلع متوسط این مثلث کدام است؟

$$(1) 3\sqrt{2} \quad (2) 2\sqrt{5} \quad (3) 2\sqrt{6} \quad (4) 3\sqrt{3}$$

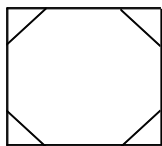
۵۳- در یک مستطیل وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم، نسبت مساحت مستطیل به مساحت شکل حاصله کدام است؟

$$(1) \sqrt{2} \quad (2) 2 \quad (3) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4) 3$$

۵۴- در یک مستطیل با طول و عرض  $2\sqrt{6}$  و  $2\sqrt{3}$ ، فاصله هر رأس از قطر مستطیل کدام است؟

$$(1) \sqrt{2} \quad (2) 2 \quad (3) 3 \quad (4) 2\sqrt{2}$$

۵۵- در شکل مقابل مساحت مربع دو واحد است. مساحت هشت ضلعی منتظم کدام است؟



$$(1) 4(\sqrt{2}-1) \quad (2) 4(2-\sqrt{2}) \quad (3) 2(\sqrt{2}-1) \quad (4) 2(2-\sqrt{2})$$

۵۶- اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ و ۶ واحد است، عمود منصف وتر، امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی M از نزدیکترین رأس این مثلث چند واحد است؟

$$(1) 7/5 \quad (2) 8 \quad (3) \sqrt{10} \quad (4) \frac{25}{3}$$

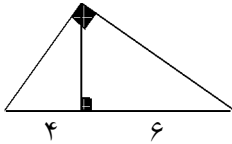
۵۷- هر یک از رأس‌های یک مربع بر روی اضلاع مربع دیگری است. اگر نسبت مساحت این دو مربع  $\frac{5}{8}$  باشد، رأس مربع کوچک ضلع مربع بزرگ را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{3} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{2}{3}$$

۵۸- در مستطیلی به ابعاد ۱۳ و ۶ واحد، نقطه‌ی M بر روی ضلع بزرگتر قرار دارد و خطوط واصل از M به دو رأس دیگر مستطیل بر هم عموداند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین رأس مستطیل از M کدام است؟

$$(1) 3 \quad (2) 3/5 \quad (3) 4 \quad (4) 4/5$$

۵۹- در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل، اندازه‌ی بزرگ‌ترین میانه کدام است؟



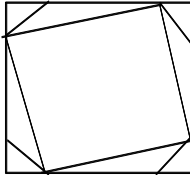
$$\sqrt{65} \quad (2)$$

$$\sqrt{50} \quad (1)$$

$$\sqrt{75} \quad (4)$$

$$\sqrt{70} \quad (3)$$

۶۰- در شکل مقابل اندازه طول اضلاع هشت ضلعی منتظم ۲ واحد است. مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟



$$4(2 + \sqrt{2}) \quad (2)$$

$$4(1 + \sqrt{2}) \quad (1)$$

$$8(2 + \sqrt{2}) \quad (4)$$

$$8(1 + \sqrt{2}) \quad (3)$$

۶۱- در یک متوازی‌الاضلاع وسط دو ضلع غیر موازی را به هم وصل می‌کنیم. متوازی‌الاضلاع به دو قسمت نامساوی تقسیم می‌شود، مساحت قسمت بزرگ‌تر چند برابر مساحت قسمت کوچک‌تر است؟

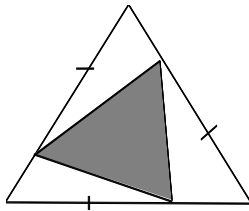
$$8 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

۶۲- هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



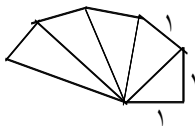
$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{9} \quad (3)$$

۶۳- مثلث‌های قائم‌الزاویه، در یک رأس مشترک، که اندازه‌ی یک ضلع قائم آن‌ها ۱ واحد است، چنان رسم می‌شوند که ضلع قائم دیگر آن، وتر مثلث قبلی است. مساحت نهمین مثلث کدام است؟



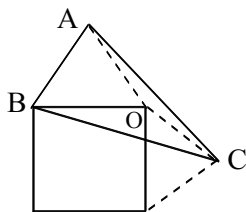
$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

۶۴- در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$1 + \sqrt{3} \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (3)$$

۶۵- از بین مثلث‌هایی که در ضلع ثابت  $AB = 16$  مشترک و مساحت هر یک از آنان ۴۸ واحد مربع باشد، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

$$38 \quad (4)$$

$$36 \quad (3)$$

$$34 \quad (2)$$

$$32 \quad (1)$$

۶۶- در مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم ۳ و  $\sqrt{7}$  است. ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است. فاصله‌ی پای قائم از وسط

وتر، کدام است؟

$$\frac{1}{2} (۴)$$

$$\frac{2}{5} (۳)$$

$$\frac{1}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{4} (۱)$$

## جواب مساحت و فیثاغورس - سراسری

۱- اگر شعاع دایره باشد، مساحت دایره از رابطه  $S = \pi R^2$  بدست می آید. پس:

$$38/465 = 3/14 \times R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{38/465}{3/14} = 12/25 \Rightarrow R = \sqrt{12/25} = 2/5$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

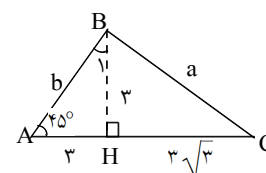
$$\text{قطر} = 2 \times R = 2 \times 2/5 = 4/5$$

پس گزینه ۲ درست است.

۲- مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BM \times AC = \frac{1}{2} CN \times AB \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times 10 = \frac{1}{2} \times 6 \times CN \Rightarrow CN = 5$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل داریم:

$$S = \frac{1}{2} BH \cdot AC \Rightarrow AC = \frac{rS}{BH} = \frac{9(1 + \sqrt{3})}{3} = 3 + 3\sqrt{3}$$

با توجه به آن که در مثلث قائم‌الویه ABH زاویه A = 45 است لذا  $\hat{A} = \hat{B}_1 = \hat{B}$  و یا  $\hat{B} = 90 - A = 45$

$$AH = BH = r \Rightarrow HC = AC - AH = 3\sqrt{3}$$

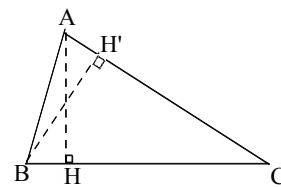
در مثلث قائمه BHC طبق رابطه فیثاغورث:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow a^2 = r^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

۴- می‌دانیم که مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع پس:

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{AC \cdot BH'}{2} \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{AC}{BC}$$

بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.



۵- طبق شکل با توجه به اینکه مثلث ABC قائمه است داریم:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}c \\ \text{رابطه فیثاغورث: } \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 = (3\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2}c)^2 + c^2 = 3c^2 \Rightarrow C = 3$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۶- لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است و می‌دانیم مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصلضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع، پس ابتدا سینوس زاویه بین دو ضلع را محاسبه می‌کنیم:

$$C \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow S = AB \cdot AD \cdot \sin A = 5 \times 5 \times \frac{4}{5} = 20$$

بنابراین گزینه ۳ جواب صحیح است.

$$AB = \sqrt{1 + 3^2} = \sqrt{10}, AC = \sqrt{10}, BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad -7$$

بنابراین مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. چون بزرگترین ضلع (وتر) قاعده مثلث نیز می‌باشد، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نظیر وتر نیز خواهد بود و می‌دانیم در هر مثلث قائمه میانه نظیر وتر، نصف وتر است بنابراین:

$$h = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

روش دوم:

با انتخاب دستگاه مختصات سه نقطه  $A(1, 0), C(4, 1), B(0, 3)$  رأسهای مثلث بوده و معادله خط ضلع بزرگتر برابر است با:

$$BC: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{1 - 3}{4 - 0}(x - 0) \Rightarrow 2y + x - 6 = 0$$

و فاصله نقطه  $A(1, 0)$  از این خط ارتفاع وارد بر BC خواهد بود:

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0 + 1 - 6|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$$

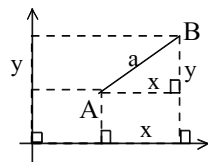
در قسمت فوق از رابطه فاصله نقطه  $(x_1, y_1)$  از خط  $ax + by + c = 0$  استفاده گردیده است که برابر است با:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

لذا گزینه ۳ جواب صحیح است.

۸- یادآوری: اگر پاره خط به طول a روی دو محور عمود برهم تصویر شوند و طول تصویرها x و y باشند داریم:  $x^2 + y^2 = a^2$  پس:  $x^2 + y^2 = 6^2 \Rightarrow y = 3\sqrt{3}$

و گزینه ۴ جواب صحیح است.



۹- در دو دایره مماس خارج خط مرکزین بر مماس مشترک داخلی دو دایره عمود است و طول خط مرکزین برابر مجموع شعاعهای دو دایره است پس:

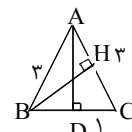
$$O'O'' = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R = 5$$

مماس مشترک داخلی دو دایره  $O'$  و  $O''$  عمود بر خط مرکزین  $O'O''$  بوده و به علت تقارن شکل از  $A$  می‌گذرد. بنابراین ارتفاع مثلث  $AO'O''$  مساوی پاره خط  $OA = R = 5$  بوده و مساحت مثلث مطلوب برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} O'O'' \times OA = 12/5$$

یعنی گزینه ۲ صحیح است.

۱۰- روش اول: در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه‌ی نظیر قاعده نیز می‌باشد پس داریم:



$$\widehat{ADC}: AD^2 = AC^2 - CD^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AD = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{مساحت مثلث} = S_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} \Rightarrow a \cdot h_a = b \cdot h_b \Rightarrow 5 \times 4 = 3 \cdot h_b \Rightarrow h_b = \frac{20}{3}$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

روش دوم: می‌دانیم در هر مثلث مساحت طبق رابطه هرون برابر است با:

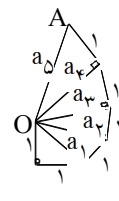
$$\begin{cases} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ p = \frac{a+b+c}{2} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} S = \sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)} = \sqrt{4} \\ p = \frac{2+3+3}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{3 \times BH}{2} = \sqrt{4} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{4}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

۱۱- طبق رابطه فیثاغورث اگر طول وترها را بطور متوالی  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$  بنامیم داریم:

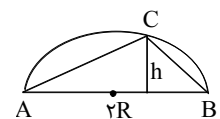


$$\begin{aligned} a_1^2 &= 1^2 + 1^2 = 2, & a_2^2 &= a_1^2 + 1^2 = 3 \\ a_3^2 &= a_2^2 + 1^2 = 4, & a_4^2 &= a_3^2 + 1^2 = 5 \\ a_5^2 &= a_4^2 + 1^2 = 6 \Rightarrow a_5 = \sqrt{6} \Rightarrow OA = a_5 = \sqrt{6} \end{aligned}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۱۲- مساحت مثلث برابر است با:  $\frac{1}{2}(\pi R)h = Rh$  و مساحت نیم‌دایره برابر است با

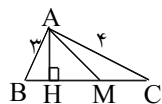
$$\frac{1}{2}(\pi R^2)$$



$$Rh = \frac{1}{2}(\pi R^2) \Rightarrow h = \frac{\pi}{2} R \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{\pi}{2}$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

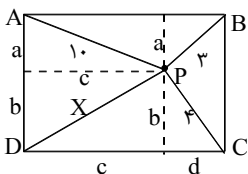
۱۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، باید  $MH$  را به دست آوریم.



$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}, \quad BM = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}$$

$$MH = BM - BH = \frac{5}{2} - \frac{9}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

۱۴- روش اول: با توجه به روابط فیثاغورث برای مثلثهای قائمه طبق شکل داریم:



$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 100 \Rightarrow c^2 - d^2 = 100 - 9 \\ a^2 + d^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 + d^2 = 16 \Rightarrow c^2 - d^2 = x^2 - 16 \\ b^2 + c^2 = x^2 \end{cases}$$

در نتیجه  $x^2 - 16 = 100 - 9 \Rightarrow x = \sqrt{107}$  و بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

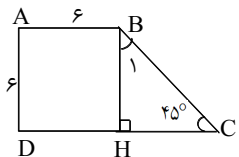
روش دوم:

هرگاه  $P$  نقطه‌ای دلخواه در صفحه مستطیل  $ABCD$  باشد همواره خواهیم داشت:

با جایگذاری خواهیم داشت:  $Pd = \sqrt{107}$  در نتیجه  $100 + 16 = 9 + Pd^2$

۱۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. طبق شکل چهارضلعی  $ABHD$  مربع است چون ۴

زاویه قائمه دارد و دو ضلع مجاورش برابرند پس:

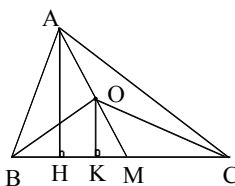


$$\begin{cases} BH = DA = 6 \\ \widehat{C} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = 90 - 45 = 45^\circ \Rightarrow CH = BH = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow DC = 6 + 6 = 12$$

$$S = \frac{6(6+12)}{2} = 54$$

مساحت دوزنقه برابر با نصف حاصل ضرب ارتفاع در مجموع دو قاعده است پس



۲۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث‌های با قاعده‌های یکسان، نسبت مساحتها برابر با نسبت ارتفاعها می‌باشد، بنابراین طبق شکل روبرو داریم:

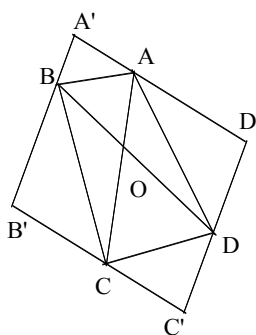
$$\frac{OM}{AM} = \frac{OK}{AH} = \frac{OK \times BC}{AH \times BC} = \frac{2S'}{2S} = \frac{S'}{S}$$

۲۲- طبق رابطه فیثاغورث:

$$(2x+1)^2 = (2x-1)^2 + x^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 \Rightarrow 8x = x^2$$

$$\Rightarrow x = 8, 2x - 1 = 15, 2x + 1 = 17$$

پس طول ضلع متوسط برابر  $15 = 2x - 1$  می‌باشد و گزینه ۲ صحیح است.



۲۳- اگر ABCD چهار ضلعی اولیه باشد و  $A'D' \parallel B'C' \parallel BD$  و  $A'B' \parallel D'C' \parallel AC$  داشته‌باشد. برای چهار ضلعی OAA'B داریم که:

نکته: در هر متوازی الاضلاع، هر قطر آن را به ۲ مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌کند.

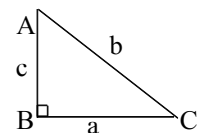
$$\left. \begin{array}{l} AA' \parallel OB \\ BA' \parallel OA \end{array} \right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } OAA'B \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{OAA'B}$$

به همین ترتیب چهار ضلعیهای  $OCC'D$ ,  $OAD'D$  و  $OBB'C$  متوازی الاضلاع خواهند شد. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{OAA'B} \\ S_{OAD} = \frac{1}{2} S_{OAD'D} \\ S_{ODC} = \frac{1}{2} S_{OCC'D} \\ S_{OBC} = \frac{1}{2} S_{OBB'C} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{OAB} + S_{OAD} + S_{ODC} + S_{OBC}$$

$$= \frac{1}{2} (S_{OAA'B} + S_{OAD'D} + S_{OCC'D} + S_{OBB'C}) \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{A'B'C'D'}$$

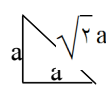
گزینه ۲ صحیح است.



$$-24 \left. \begin{array}{l} \text{طبق سوال: } b^2 = 2ac \\ \text{با توجه به رابطه فیثاغورث: } b^2 = a^2 + c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + c^2 = 2ac$$

$$\Rightarrow (a-c)^2 = 0 \Rightarrow a = c$$

یعنی مثلث ABC مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است. پس  $C = 45^\circ$  است. گزینه ۲ صحیح است.



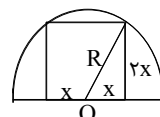
۱۶- اگر طول هر ضلع این مثلث را a بنامیم، طول وتر  $a\sqrt{2}$  است. پس داریم:

$$\text{محیط} = 2a + a\sqrt{2} = 6 + 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow S = 9$$

و مساحت برابر خواهد بود با:

پس گزینه ۱ صحیح است.



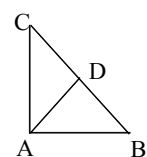
۱۷- با توجه به تقارن شکل، مرکز دایره در وسط ضلع مربع است داریم:

$$R^2 = (2x)^2 + x^2 \Rightarrow R^2 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{5} R^2$$

$$S = (2x)^2 = 4x^2 \Rightarrow S = \frac{4}{5} R^2 = \frac{4}{5} (5 \times 5) = 45$$

مساحت مربع چنین است:

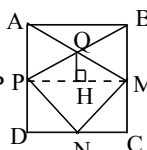
پس گزینه ۳ صحیح است.



$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$$

۱۸- در مثلث متساوی الاضلاع همه زاویه‌ها برابر با  $60^\circ$  می‌باشد، پس:

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



۱۹- فرض می‌کنیم طول هر ضلع مربع برابر a باشد. هرگاه از M به P وصل کنیم داریم:

$$S_{MNPQ} = S_{MPQ} + S_{MNP}$$

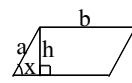
چون M و P وسط اضلاع روبرو هستند لذا فاصله ضلع CD از MP برابر نصف ضلع مربع است.

$$S_{MNP} = \frac{MP \times MP}{2} = \frac{\text{ارتفاع وارد بر } MP}{2} = \frac{a \times \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$$

ABMP مستطیل است و فاصله محل برخورد قطرهای آن تا طول مستطیل برابر نصف عرض آن است یعنی

$$QH = \frac{1}{2} AP = \frac{a}{4} \Rightarrow S_{MPQ} = \frac{MP \times QH}{2} = \frac{a \times \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{8} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3}{8} a^2$$

پس گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S = b \cdot h$$

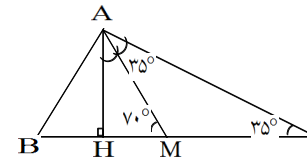
$$\sin x = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin x \Rightarrow \text{مساحت} = ab \sin x, \text{ محیط} = 2(a+b)$$

۲۰- اگر a و b اضلاع متوازی الاضلاع و X زاویه بین آنها باشد:

با تغییر X، مقدار محیط ثابت می‌ماند درحالیکه مساحت آن تغییر می‌کند. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

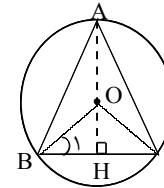


۲۵- با توجه به شکل و این نکته که میانه وارد بر وتر نصف وتر است، مثلث AMC متساوی الساقین خواهد بود، در مثلث AMC زاویه خارجی  $\widehat{M}$  است، بنابراین:



بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.

۲۶- می دانیم مساحت مثلث محاط در دایره وقتی ماکزیمم است که مثلث متساوی الاضلاع باشد. همچنین مرکز دایره محیطی، محل برخورد نیمسازهای سه زاویه مثلث است. بنابراین BO نیمساز B بوده و داریم:



$$\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} BO = \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow BC = 2BH = \sqrt{3}R$$

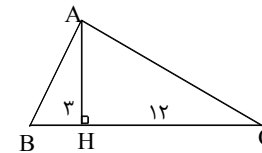
$$OH^2 = BO^2 - BH^2 = R^2 - \frac{3}{4}R^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OH = \frac{R}{2}$$

$$AH = AO + OH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$$

$$S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}R \times R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۲۷- می دانیم که در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین دو قطعه ایجادشده کرده. پس:

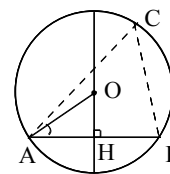


$$\left. \begin{aligned} AH^2 &= BH \cdot CH = 3 \times 12 = 36 \Rightarrow AH = 6 \\ BC &= BH + CH = 3 + 12 = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2}AH \cdot BC$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 15 \times 6 = 45$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۸- در مثلث قائم الزاویه  $\widehat{OAH}$ :



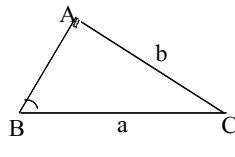
$$OH = \frac{R}{2} = \frac{OA}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{O} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$$

بنابراین اندازه زاویه C برابر مقدار ثابت ۶۰ درجه است. در مثلث ABC قاعده AB ثابت است، پس برای ماکزیمم شدن مساحت باید ارتفاع وارد بر آن ماکزیمم باشد یعنی C روی

عمودمنصف AB قرار گیرد (انتهای قطر دایره) پس  $CB = CA$  خواهد بود و  $\widehat{B} = \widehat{A} = \frac{\pi}{3}$ . پس مثلث متساوی الاضلاع خواهد شد. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۹- می دانیم که همواره  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (زاویه دلخواه).

چون زاویه  $\widehat{B}$  حاده است، پس:



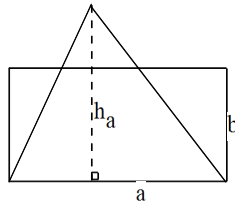
$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{24}{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$$

$$\sin \widehat{B} = \frac{5}{7} = \frac{b}{a} = \frac{5}{a} \Rightarrow a = 7$$

از طرفی سینوس زاویه B برابر است با نسبت ضلع b به وتر، پس:

بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.

۳۰-  $S_1 = \frac{1}{2}ah_a$  مساحت مثلث و  $S_2 = ab$  مساحت مستطیل

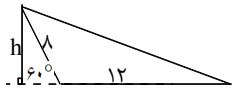


و نیز داریم  $b = \frac{5}{12}h_a$  در نتیجه:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}ah_a}{ab} = \frac{1}{2} \frac{h_a}{b} = \frac{h_a}{2(\frac{5}{12}h_a)} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۳۱- در مثلث مقابل چون یک زاویه منفرجه وجود دارد ارتفاع وارد بر ضلع به طول ۱۲ خارج مثلث قرار می گیرد.



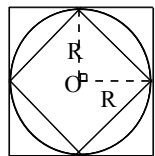
با توجه به شکل، ارتفاع وارد بر ضلع به طول ۱۲ برابر است با:  $\sin 60^\circ = \frac{h}{8}$

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 60^\circ = 24\sqrt{3}$$

یا  $h = 8 \sin 60^\circ$ . پس مساحت مثلث برابر است با:

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۳۲- اگر شعاع دایره را R در نظر بگیریم، با توجه به شکل ضلع مربع بزرگ برابر با ۲R و نصف قطر مربع کوچک برابر با R می باشد. بنابراین ضلع مربع کوچک برابر  $\sqrt{2}R$  خواهد بود.

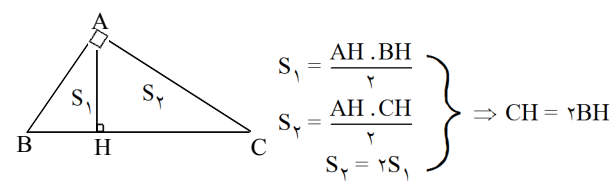


می دانیم نسبت مساحت دو مربع برابر با مربع نسبت اضلاع آن است:

$$\frac{S}{S'} = \frac{(2R)^2}{(\sqrt{2}R)^2} = 2$$

بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.

۳۳- با توجه به شکل مقابل :



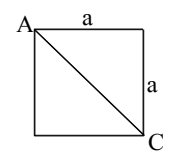
$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{AH \cdot BH}{2} \\ S_2 &= \frac{AH \cdot CH}{2} \\ S_2 &= 2S_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow CH = 2BH$$

از طرفی می دانیم در مثل قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی دو قطعه ایجاد شده روی وتر است، پس :

$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow \begin{cases} BH \cdot CH = 4^2 = 16 \Rightarrow 2BH^2 = 16 \Rightarrow BH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ CH = 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$BC = BH + CH = 6\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{4 \times 6\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

بنابراین گزینه ۴ جواب صحیح است.



۳۴- چون A و C رئوس مقابل یک مربع می باشند، پس AC برابر قطر مربع می باشد، پس:

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

طبق رابطه فیثاغورث طول ضلع مربع بصورت زیر محاسبه می شود:

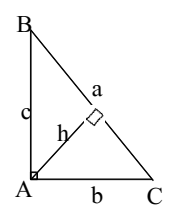
$$AC^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 2a^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

مساحت مربع برابر با  $a^2 = 9$  بوده و گزینه ۳ صحیح است.

۳۵- در مثل قائم الزاویه اگر دو ضلع قائمه a و b باشد، مساحت بصورت  $S = \frac{1}{2}ab$  است. اگر ضلع b از مثل را ۵ واحد اضافه نماییم، تغییر مساحت برابر است با:

$$S' = \frac{1}{2}a(b+5) = \frac{1}{2}ab + 5/2a$$

پس به مقدار مساحت ۲/۵ برابر ضلع دیگر افزوده می شود. پس گزینه ۱ صحیح است.



۳۶- می دانیم در مثل قائم الزاویه مساحت برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع قائم مثلث.

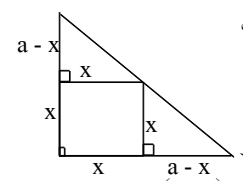
$$a^2 = b^2 + c^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = 13$$

با توجه به شکل:

$$S = \frac{1}{2}cb = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow 5 \times 12 = 13 \times h \Rightarrow h = \frac{60}{13}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

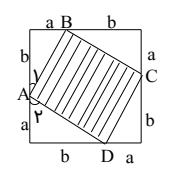
۳۷- می دانیم در مثل قائم الزاویه نصف حاصلضرب دو ضلع زاویه قائمه برابر مساحت مثلث می باشد.



اگر هر ضلع قائم مثلث، a فرض شود، مساحت مثلث برابر با  $\frac{a \times a}{2} = \frac{a^2}{2}$  و مساحت مربع برابر با  $x^2$  می باشد. مساحت هر یک از دو مثلث کوچک برابر با  $\frac{x(a-x)}{2}$  می باشد. مجموع مساحت های مثلث های کوچک و مربع برابر با مساحت مثلث بزرگ است، پس:

$$\frac{ax(a-x)}{2} + x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow ax - x^2 + x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{4}} = 2$$

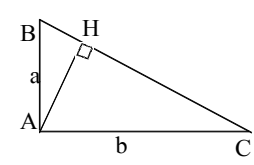
بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



۳۸- با توجه به قضیه فیثاغورث هر ضلع چهارضلعی هاشور خورده برابر  $\sqrt{a^2 + b^2}$  است. از طرفی چون  $A_1 + A_2 = 90^\circ$  لذا اضلاع چهارضلعی و زوایای آن باهم برابرند در نتیجه چهارضلعی هاشور زده مربع می باشد و مساحت آن بصورت زیر است:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2} = a^2 + b^2$$

پس گزینه ۲ درست است.



۳۹- یادآوری: هرگاه دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  متمم یکدیگر باشند  $\sin \alpha$  با  $\cos \beta$  برابر است. با توجه به شکل داریم:

$$\cos B = \sin C = \frac{AH}{b} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{9}{b} \Rightarrow b = 13/5$$

لذا گزینه ۱ صحیح است.

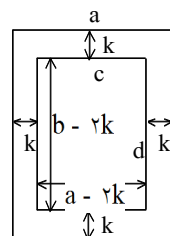
۴۰- اگر h ارتفاع وارد بر ضلع BC از مثلث ABC و h' ارتفاع وارد بر ضلع B'C' از مثلث A'B'C' باشد:

$$h = \frac{h'}{2} \text{ یا } h' = 2h$$

$$\frac{BC \times h}{2} = \frac{B'C' \times 2h}{2} \Rightarrow BC = 2B'C'$$

بنابراین گزینه ۳ جواب صحیح می باشد.

۴۱- با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} \text{محیط اتاق: } (a+b) \times 2 = 20 \\ \text{مساحت اتاق: } ab = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 10 \\ ab = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$\text{محیط قالی } b = (a - 2k + b - 2k) \times 2 = 12 \Rightarrow a + b - 4k = 6 \Rightarrow k = 1$$

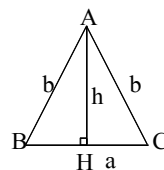
$$c = a - 2k = 4 - 2 = 2, \quad d = b - 2k = 6 - 2 = 4$$

$$\text{مساحت قالی} = cd = 4 \times 2 = 8$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴می دانیم در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نیز

می باشد. لذا  $BH = \frac{a}{2}$ . با توجه به شکل مقابل:



$$\begin{cases} 2b + a = 18 \\ h^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 \\ h = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}, \quad S = \frac{1}{2}ah = 12$$

۴۳- اگر طول مستطیل را  $a$  و عرض آن را  $b$  بنامیم و مقدار ثابت ذکر شده در مسئله را  $x$  بنامیم، خواهیم داشت:

$$\text{مقداری ثابت} = [(b-x) + (a+x)] \times 2 = (a+b) \times 2 = \text{محیط}$$

$$\text{مساحت} = (a+x)(b-x) = ab + (b-a)x - x^2$$

چون  $a < b$  است، پس مساحت کمتر می شود. بنابراین گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$x > 1 \Rightarrow x < 2x - 1 < 2x + 1$$

۴۴- طبق فرض سوال داریم:

پس ضلع وسط  $1 - 2x$  است طبق رابطه فیثاغورث داریم:

$$(2x+1)^2 = x^2 + (2x-1)^2 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow 2x-1 = 15$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

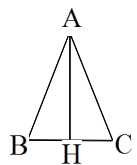
۴۵- مساحت مستطیل با ابعاد  $x+3$  و  $x+5$  برابر است با:  $(x+3)(x+5)$ .

مساحت مستطیل با ابعاد  $x-1$  و  $x+4$  برابر است با:  $(x-1)(x+4)$ .

$$\begin{aligned} \text{مساحت باقیمانده} &= (x+3)(x+5) - (x-1)(x+4) = (x^2 + 8x + 15) - (x^2 + 3x - 4) \\ &= 5x + 19 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۴۶- یادآوری: ارتفاع وارد بر قاعده در مثلث متساوی الساقین میانه قاعده نیز می باشد.



$$\left. \begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\ BH &= \frac{BC}{2} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{15 - 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 7 \times 12 = 42$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

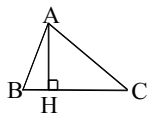
۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث سایه زده شده مثلث متساوی الاضلاعی است که طول ضلع آن برابر قطر کوچک ۶ ضلع منتظم است و می دانیم، قطر کوچک ۶ ضلعی منتظم، برابر ضلعش می باشد، بنابراین داریم:

$$\text{ضلع مثلث} = \sqrt{3} \times 4 \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}$$

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ABH} \sim \widehat{ABC} &\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC \\ \widehat{ACH} \sim \widehat{ABC} &\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \cdot BC \end{aligned} \right\} CH \cdot BC = BH \cdot BC \Rightarrow CH = BH$$

طبق فرض:  $AC = 2AB$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABM}} = \frac{AH \times BC}{\frac{AM \cdot BM}{2}} = \frac{BC}{BH} = 5$$

بنابراین خواهیم داشت:  $BH = \frac{1}{5}BC$  در نتیجه:

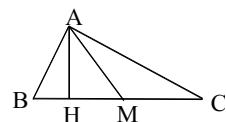
۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه  $\widehat{DPC}$ ، ارتفاع وارد بر وتر است، داریم:

$$PH^2 = DH \cdot CH = AP \cdot PB \Rightarrow PH^2 = 3 \times 9 = 27 \Rightarrow PH = AD = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

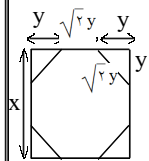
$$3AP = 9 \Rightarrow AP = 3$$

$$\text{(رابطه فیثاغورس)} \quad DP^2 = AD^2 + AP^2 = 27 + 9 = 36 \Rightarrow DP = 6$$

۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} MH &= MB - BH = 6/5 - 4 = 2/5 \\ AH^2 &= BH \cdot HC \Rightarrow AH = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{AMH} = \frac{6 \times 2/5}{2} = 7/5$$



۵۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = 2y + \sqrt{2}y \Rightarrow x = (2 + \sqrt{2})y$$

بنا بر فرض مساحت مربع ۲ واحد است یعنی  $x^2 = 2$  پس داریم:

$$2 = (2 + \sqrt{2})^2 y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{6 + 4\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = S_{\text{مربع}} - 4S_{\text{مثل قائم الزاویه}} \Rightarrow \text{مساحت هشت ضلعی} = 2 - 2y^2 = 2(1 - y^2)$$

$$= 2 \left( \frac{2 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \right) = 4(\sqrt{2} - 1)$$

۵۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

قرار می‌دهیم  $MC = z$

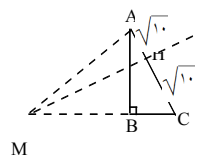
$$AB = 6, BC = 2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{10}$$

$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} AB \cdot MC = \frac{1}{2} MH \cdot AC$$

$$6z = \sqrt{z^2 - 10} \times 2\sqrt{10} \Rightarrow 3z = \sqrt{10z^2 - 100}$$

$$9z^2 = 10z^2 - 100 \Rightarrow z^2 = 100 \Rightarrow z = 10$$

$$MB = MC - BC \Rightarrow MB = 8$$

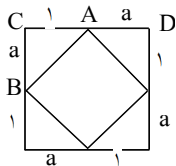


M

$$AB = \sqrt{1 + a^2}$$

$$\frac{s'}{s} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{1 + a^2}{(1 + a)^2} = \frac{5}{8} \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{1}{3}$$



۵۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

روش اول:

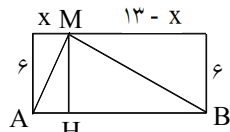
$$x(13 - x) = MH^2$$

$$x(13 - x) = 36 \Rightarrow x = 4$$

$$MB^2 + MA^2 = AB^2$$

$$36 + (13 - x)^2 + 36 + x^2 = 169 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 26x + 72 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ و } x = 9$$

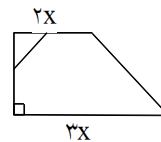


روش دوم:

با توجه به شکل:

$$S = \frac{1}{2}(3x + 2x)h = \frac{5}{2}xh$$

۵۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

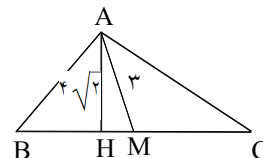


$$S = \frac{1}{2}x \times \frac{h}{2} = \frac{1}{4}xh \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

۵۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. میانه وارد بر وتر نصف و تراست پس:  $\begin{cases} BC = 6 \\ MC = 3 \end{cases}$

در مثل AHM با توجه به رابطه فیثاغورس  $MH = 1$

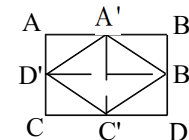
$$AC = \sqrt{HC^2 + AH^2} = 2\sqrt{6} : \text{AHC در مثل}$$



۵۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$S_{ABCD} = a \times b \text{ مستطیل} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{لوزی}}} = 2$$

$$S_{A'B'C'D'} = \frac{a \times b}{2} = \frac{a \times b}{2} \text{ لوزی}$$



۵۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

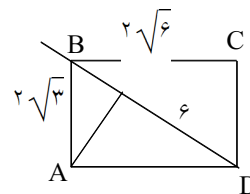
$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24 + 12} = \sqrt{36}$$

$$d \text{ (قطر)} = 6$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times h \times 6$$

$$S_{\text{مستطیل}} = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} \Rightarrow S_{\text{مستطیل}} = 2S_{ABD}$$

$$6 \times h = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{18}}{3} = 2\sqrt{2}$$

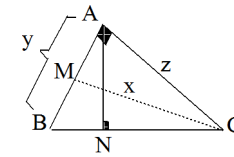


۵۹- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. اگر ارتفاع AN را برابر x در نظر بگیریم داریم:

$$x^2 = 4 \times 6 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$y^2 = 16 + 24 = 40 \rightarrow y = 2\sqrt{10}$$

$$z^2 = 10^2 - 40 = 60 \rightarrow z = \sqrt{60}$$

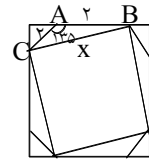


در مثل CMA:

$$CM^2 = AM^2 + AC^2$$

$$CM^2 = 10 + 60 = 70 \rightarrow CM = \sqrt{70}$$

۶۰- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به مثلث ABC و قضیه کسینوسها



$$x^2 = 4 + 4 - 2 \times 2 \times \cos 135 \Rightarrow x^2 = 8 + 4\sqrt{2}$$

۶۱- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

راه اول: با توجه به شکل اگر وسطها را به هم وصل کنیم ۸ مثلث هممساحت به دست می‌آید.

$$\frac{S_{ADEF}}{S_{ABC}} = \frac{2a \times h}{\frac{1}{2} \times a \times \frac{h}{2}} = 8 \Rightarrow \frac{S_{BCFED}}{S_{ABC}} = 7$$

راه دوم:

$$S = 2 \times \frac{h \times 2x}{2} = rhx$$

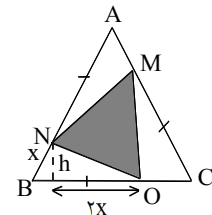
۶۲- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. مساحت مثلثهای سفید برابر است با:

مساحت مثلثهای هاشورخورده برابر است با:

$$S(MNO) = S(ABC) - 3S(MCO) = \frac{rh \times rx}{2} - rhx = \frac{rhx}{2}$$

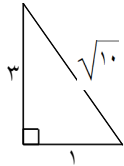
$$S(ABC) = \frac{rh \times rx}{2} = \frac{9hx}{2}$$

$$\frac{S(MNO)}{S(ABC)} = \frac{\frac{rhx}{2}}{\frac{9hx}{2}} = \frac{1}{9}$$



فاصلهی ۲x برابر فاصلهی OB است.

۶۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. وتر مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{4}$  و ..... می‌باشد پس مثلث نهم



دارای وتر  $\sqrt{10}$  است و شکل آن به صورت زیر است.

$$S = \frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2}$$

۶۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. مثلث OAB، مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ می‌باشد و مثلثهای OAC و OBC

$$S_{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 = \sqrt{3}$$

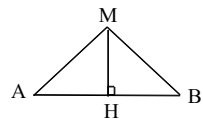
متساوی‌الساقین به ساق ۲ هستند.

$$S_{AOC} = S_{BOC} = \frac{1}{2} (2)(2) = 1$$

$$S_{ABC} = \sqrt{3} + 1 + 1 = \sqrt{3} + 2$$

۶۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. مساحت و قاعده ثابت است پس ارتفاع MH ثابت می‌باشد. پس در صورتی کم‌ترین

محیط برای مثلث MAB ایجاد می‌شود که مثلث متساوی‌الساقین باشد.



$$AH = 8 \text{ و } MH = 6 \Rightarrow MA = MB = 10$$

$$\text{محیط} = 10 + 10 + 16 = 36$$

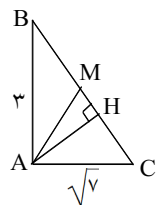
۶۶- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 7 = 16 \Rightarrow BC = 4$$

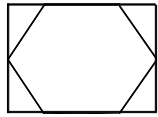
$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 7 = CH \times 4 \Rightarrow CH = \frac{7}{4}$$

$$CM = \frac{BC}{2} = 2$$

$$MH = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$



## مساحت و فیثاغورس - خارج از کشور



۱- در شکل مقابل، مساحت شش ضلعی منتظم چند برابر مساحت مستطیل محیط بر آن است؟

$$\frac{11}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{6} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

۲- یک متوازی‌الاضلاع از یک مربع و دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی مساوی هم تشکیل شده است. اگر مساحت مربع و یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب ۶۴ و ۲۴ واحد مربع باشند، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$$54 \quad (4)$$

$$48 \quad (3)$$

$$36 \quad (2)$$

$$32 \quad (1)$$

۳- در مربعی به ضلع  $a$ ، کوچک‌ترین مربع ممکن را به طریقی محاط می‌کنیم که هر راس مربع بر روی ضلع مربع اصلی قرار گیرد. نسبت ضلع این مربع به ضلع مربع اصلی کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

۴- در داخل یک مربع به ضلع  $\sqrt{3}$  مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع  $\sqrt{3}$  رسم می‌کنیم، مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این مثلث کدام است؟

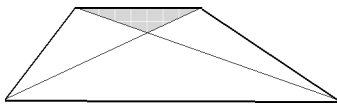
$$2 \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

۵- قاعده‌ی بزرگ‌تر دوزنقه دو برابر قاعده‌ی کوچک‌تر آن است. مساحت کل دوزنقه چند برابر مساحت مثلث سایه‌زده است؟



$$8 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

$$10 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

۶- در مثلثی به اضلاع ۱۵ و ۱۲ و ۹، طول بزرگترین میانه کدام است؟

$$\frac{\sqrt{657}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{657}}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{657} \quad (2)$$

$$7/5 \quad (1)$$

۷- در شش ضلعی منتظم به ضلع  $4\sqrt{3}$ ، طول کوتاه‌ترین قطر کدام است؟

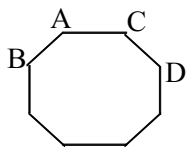
$$8\sqrt{3} \quad (4)$$

$$24 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۸- در هشت ضلعی منتظم، مساحت مثلث  $ABD$  چند برابر مساحت مثلث  $ABC$  است؟



$$2 + 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2 + \sqrt{2} \quad (1)$$

$$2 + 4\sqrt{2} \quad (4)$$

$$1 + \sqrt{2} \quad (3)$$

۹- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، دو قطر عمود برهم‌اند. اگر قاعده‌های این دوزنقه ۱۴ و ۲ واحد باشند، اندازه‌ی ساق کدام است؟

- (۱) ۸  
(۲) ۹  
(۳) ۱۰  
(۴) ۱۲

۱۰- در مثلث  $ABC$  طول  $AB = ۴$  و  $BC = ۳$  و  $AC = ۶$  و طول ارتفاع  $AH$  برابر  $\frac{۱}{k}$  است. مجموع طول دو ارتفاع دیگر کدام است؟

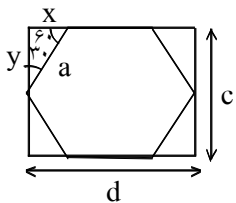
- (۱)  $\frac{۴}{۵k}$   
(۲)  $\frac{۵}{k}$   
(۳)  $\frac{۵}{۴k}$   
(۴)  $\frac{۴}{k}$

## جواب مساحت و فیثاغورس - خارج از کشور

۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم ضلع شش ضلعی منتظم برابر  $a$  باشد، در این صورت مساحت شش

ضلعی منتظم برابر است با  $S_1 = 6 \left( \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right)$ . اما برای محاسبه‌ی مساحت مستطیل باید اضلاع آن را به دست آوریم و با توجه به این که هر زاویه‌ی داخلی ۶ ضلعی منتظم  $120^\circ$  است، زاویه‌های خارجی برابر  $60^\circ$  است.

$$x = \frac{a}{2} \text{ و } y = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad \begin{cases} c = 2y = \sqrt{3}a \\ d = \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 2a \end{cases} \rightarrow S_2 = cd = 2\sqrt{3}a^2 \rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{6a^2 \sqrt{3}}{2\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{4}$$

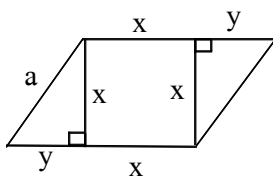


۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مساحت مربع برابر است با  $S = x^2$  و مساحت هر یک از مثلث‌ها برابر است با

$$S = \frac{xy}{2}, \text{ بنابراین:}$$

$$x^2 = 64 \rightarrow x = 8$$

$$\frac{xy}{2} = 24 \rightarrow \frac{8 \times y}{2} = 24 \rightarrow y = 6 \rightarrow a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

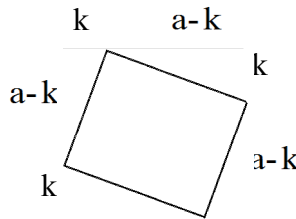


بنابراین محیط متوازی الاضلاع به ابعاد ۱۰ و  $14 = 8 + 6$  برابر است با:  $2(10 + 14) = 48$ .



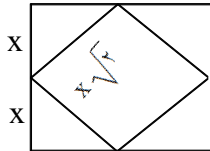
۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.  $y = \sqrt{k^2 + (a - k)^2}$  ضلع مربع کوچک

برای می‌نیم شدن  $y$ ، کافی است  $f(k) = k^2 + (a - k)^2$  می‌نیم شود، بنابراین:



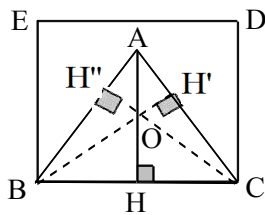
$$f'(k) = 0 \rightarrow 2k - 2(a - k) = 0 \rightarrow k = \frac{a}{2}$$

بنابراین باید راس‌های مربع کوچک‌تر در وسط اضلاع مربع بزرگ‌تر قرار بگیرد، در نتیجه:



$$\frac{x\sqrt{2}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC}$



$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{1}{2} OH \times BC + \frac{1}{2} OH'' \times AB + \frac{1}{2} OH' \times AC$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 = \frac{1}{2} OH \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} OH'' \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} OH' \times \sqrt{3}$$

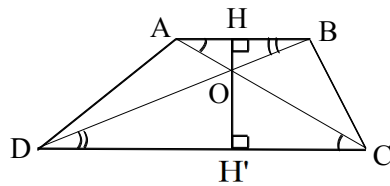
$$\rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} (OH + OH' + OH'') \rightarrow OH + OH' + OH'' = \frac{3}{2}$$

روش دوم: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $AOH'$  زاویه‌ی  $A$  برابر با  $30^\circ$  است (زیرا  $AH$  نیمساز زاویه‌ی  $A$  در مثلث  $\triangle ABC$  است). بنابراین در مثلث  $AOH'$ ،  $OH'$  نصف وتر  $AO$  است. به همین ترتیب در مثلث  $AOH''$  ثابت می‌شود که  $OH''$  نیز نصف  $AO$  است. پس:

$$OH' + OH'' = \frac{AO}{2} + \frac{AO}{2} = AO \rightarrow OH + OH' + OH'' = OH + AO = AH =$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

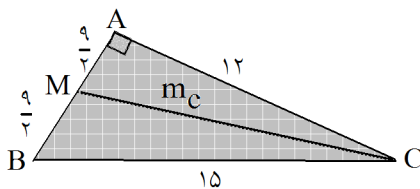
۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به توازی  $AB$  و  $CD$  و مورب بودن قطرها، مطابق شکل  $\widehat{B} = \widehat{D}$  و  $\widehat{A} = \widehat{C}$  و در نتیجه مثلث‌های  $OAB$  و  $OCD$  متشابه‌اند داریم:



$$\frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{CD} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{OH}{OH' + OH} = \frac{1}{2+1}$$

$$\rightarrow \frac{OH}{HH'} = \frac{1}{3} \rightarrow HH' = 3OH$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{OAB}} = \frac{\frac{1}{2}(AB + CD) \times HH'}{\frac{1}{2}AB \times OH} = \frac{(AB + 2AB) \times 3OH}{AB \times OH} = \frac{9 AB \times OH}{AB \times OH} = 9$$



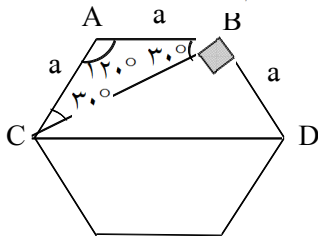
۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. بزرگ‌ترین میانه بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود. از آنجایی که  $15^2 = 12^2 + 9^2$  پس مثلث قائم الزاویه است. حال در مثلث  $\widehat{AMC}$  داریم:

$$m_c^2 = 12^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 144 + \frac{81}{4} = \frac{657}{4} \rightarrow m_c = \frac{\sqrt{657}}{2}$$

۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در شش ضلعی منتظم به ضلع  $a$ ، طول کوتاه‌ترین قطر  $a\sqrt{3}$  و طول بزرگ‌ترین قطر

$$d_1 = a\sqrt{3} = (4\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 12 \quad \text{۲a است، بنابراین:}$$

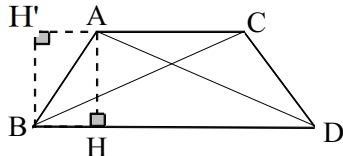
توجه: بد نیست دلیل حکم فوق را بدانید، هر زاویه‌ی شش ضلعی منتظم  $120^\circ = \frac{6-2}{6} \times 180^\circ$  است.



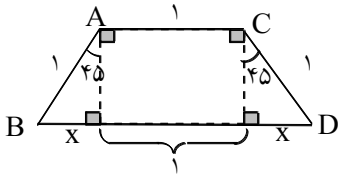
$$\widehat{ABC} : BC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ} = \sqrt{3a^2} \rightarrow BC = \sqrt{3}a$$

$$\widehat{BCD} : CD = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + a^2} = \sqrt{4a^2} \rightarrow CD = 2a$$

۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{S_{\widehat{ABD}}}{S_{\widehat{ABC}}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}BH' \times AC} \xrightarrow{AH = BH'} \frac{S_{\widehat{ABD}}}{S_{\widehat{ABC}}} = \frac{BD}{AC}$$



اگر طول AC را ۱ فرض کنیم، کافی است طول BD را به دست آوریم تا مساله حل شود، هر زاویه‌ی داخلی ۸ ضلعی منتظم برابر با  $135^\circ = \frac{(8-2)}{8} \times 180^\circ$  است،

بنابراین  $\widehat{AHB}$  یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است و در نتیجه  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

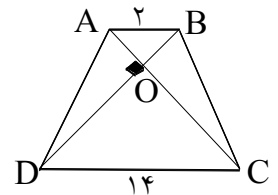
بنابراین  $BD = 1 + 2x = 1 + \sqrt{2}$ .

۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مثلث‌های OAB و OCD قائم‌الزاویه‌ای متساوی‌الساقین هستند. بنابراین

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \xrightarrow{OA = OB} 2OA^2 = 4 \Rightarrow OA^2 = OB^2 = 2 \quad \text{داریم:}$$

$$OC^2 + OD^2 = CD^2 \xrightarrow{OC = OD} 2OC^2 = 196 \Rightarrow OC^2 = OD^2 = 98$$

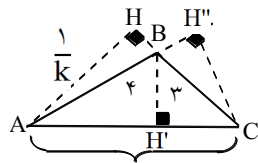
$$AD^2 = OA^2 + OD^2 = 2 + 98 = 100 \Rightarrow AD = BC = 10$$



۱۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC طول  $AB = 4$ ،  $BC = 3$  و

$AC = 6$  و طول ارتفاع AH برابر با  $\frac{1}{k}$  است. از طرفی در هر مثلث نسبت طول

دو ضلع، برابر با عکس نسبت طول ارتفاع‌های نظیر آنها است، بنابراین:



$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{CH''} &\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\frac{1}{k}}{CH''} \Rightarrow CH'' = \frac{3}{4k} \\ \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{BH'} &\Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{\frac{1}{k}}{BH'} \Rightarrow BH' = \frac{1}{2k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow BH' + CH'' = \frac{1}{2k} + \frac{3}{4k} = \frac{5}{4k}$$

## مساحت و فیثاغورس - سنجش

۱- مساحت یک مربع به ضلع  $a$  دو برابر مساحت یک لوزی به ضلع  $a$  است. تانژانت نصف زاویه کوچکتر لوزی کدام است؟

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ (۳)} \quad 2 - \sqrt{2} \text{ (۲)} \quad 2 - \sqrt{3} \text{ (۱)}$$

۲- مساحت یک لوزی به طول ضلع ۵ واحد و زاویه بزرگتر برابر  $\text{ArcCos}\left(\frac{-3}{5}\right)$ ، کدام است؟

$$22/5 \text{ (۴)} \quad 20 \text{ (۳)} \quad 17/5 \text{ (۲)} \quad 15 \text{ (۱)}$$

۳- در مثلثی  $\hat{C} = 75$  و  $\hat{A} = 45$  و  $b = 6$  است. ضلع  $a$  کدام است؟

$$3\sqrt{5} \text{ (۴)} \quad 3\sqrt{2} \text{ (۳)} \quad 2\sqrt{7} \text{ (۲)} \quad 2\sqrt{6} \text{ (۱)}$$

۴- ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، وتر را به طولهای ۳ و ۱۲ واحد تقسیم کرده است. مساحت مثلث چند واحد مربع است؟

$$45 \text{ (۴)} \quad 36 \text{ (۳)} \quad 48 \text{ (۲)} \quad 42 \text{ (۱)}$$

۵- در مثلث قائم‌الزاویه  $(\hat{B} = \frac{\pi}{3})$  رابطه  $b^2 = 2ac$  برقرار است، زاویه  $\hat{C}$  چند درجه است؟

$$75^\circ \text{ (۴)} \quad 60^\circ \text{ (۳)} \quad 45^\circ \text{ (۲)} \quad 30^\circ \text{ (۱)}$$

۶- طول مستطیل منطبق بر قاعده‌ی یک مثلث و عرض مستطیل  $\frac{5}{12}$  ارتفاع وارد بر این قاعده‌ی مثلث است. مساحت مثلث چند برابر مساحت مستطیل است؟

$$1/25 \text{ (۴)} \quad 0/8 \text{ (۳)} \quad 1/2 \text{ (۲)} \quad 0/9 \text{ (۱)}$$

۷- در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر مساحت مثلث را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، اگر اندازه‌ی ارتفاع برابر ۴ باشد، مساحت مثلث اولیه چقدر است؟

$$15 \text{ (۴)} \quad 12\sqrt{2} \text{ (۳)} \quad 12 \text{ (۲)} \quad 9\sqrt{2} \text{ (۱)}$$

۸- در یک مثلث قائم‌الزاویه اضلاع دو ضلع قائم متناسب با اعداد ۲ و ۳ است. و طول وتر آن ۲۶ واحد، کوچکترین ضلع آن کدام است؟

$$2\sqrt{13} \text{ (۴)} \quad 4\sqrt{13} \text{ (۳)} \quad 2\sqrt{39} \text{ (۲)} \quad 4\sqrt{26} \text{ (۱)}$$

۹- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BD رسم شده است، نسبت  $\frac{AH}{BD}$  کدام است؟

$$\frac{AC}{BC} \text{ (۴)} \quad \frac{AB}{AC} \text{ (۳)} \quad \frac{AC}{AB} \text{ (۲)} \quad \frac{BC}{AC} \text{ (۱)}$$

۱۰- فاصله‌ی وسط ضلع یک مربع از قطر آن چند برابر ضلع مربع است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۱۱- مساحت مثلث متساوی‌الساقین ۱۲ واحد مربع و قاعده‌ی آن ۸ واحد است. اندازه‌ی نیمساز داخلی زاویه‌ی بین دو ساق آن چند واحد است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴) ۶

۱۲- در یک مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو جزء ۴ و ۹ واحدی تقسیم کرده است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۳۶ (۳) ۳۹ (۴) ۴۲

۱۳- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۴ و ۵ و ۹ می‌باشد زاویه بین میانه و ارتفاع نظیر ضلع بزرگتر چند درجه است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای کوچکترین زاویه برابر ۴۰ درجه است، زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر چند درجه است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۵- مساحت مربعی ۷۲ واحد مربع است، طول قطر آن کدام است؟

- (۱) ۶ (۲)  $6\sqrt{3}$  (۳) ۹ (۴) ۱۲

۱۶- از یک قطعه سیم به طول  $6\sqrt{3}$  یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم، ارتفاع این مثلث کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷- در یک مربع به طول ضلع ۴ واحد نقاط  $A, B, C, D$  بر روی هر یک از اضلاع چنان اختیار شده که فاصله آن نقاط از سر یک قطر مربع برابر واحد است. مساحت چهارضلعی  $ABCD$  چند درصد مساحت مربع است؟

- (۱) ۳۲ (۲)  $32/5$  (۳) ۳۶ (۴)  $37/5$

۱۸- در مثلث  $ABC$  نقطه‌ی  $M$  وسط  $BC$  است و  $2AM = BC$  اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی  $C$   $\frac{5}{4}C$  اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی

$B$  است، زاویه‌ی  $C$  از این مثلث چند درجه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۱۹- در مثلث  $ABC$  نقطه‌ی  $M$  وسط  $BC$  است و  $BC = 2AM$  و اندازه‌ی زاویه خارجی  $C$  دو و نیم برابر اندازه‌ی زاویه داخلی  $B$  است، زاویه  $C$  از این مثلث چند درجه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۲۰- مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول وتر ۱۲ واحد و ارتفاع  $h$  قابل رسم است، کدام مقدار برای  $h$  مورد قبول نیست؟

- (۱) ۵ (۲)  $5/5$  (۳) ۶ (۴)  $6/5$

۲۱- در مثلث ABC داریم  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $AC = 1$  ارتفاع AH برابر کدام است؟

- (۱) Cos B (۲) tg B (۳) Cos C (۴) tg C

۲۲- مساحت مثلثی به طول اضلاع  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{3}$  و ۱ کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۳- فاصله‌ی نقطه (۰- و ۰) از خط به معادله  $3x - 4y = 6$  کدام است؟

- (۱)  $0/4$  (۲)  $0/6$  (۳)  $0/8$  (۴)  $1/2$

۲۴- در مثلث قائم‌الزاویه یکی از زاویه‌ها ۵۲ درجه است. زاویه بین وتر و میانه وارد بر آن چند درجه است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۶۸ (۳) ۷۶ (۴) ۷۸

۲۵- طول دو ضلع از مثلثی  $\sqrt{2}$  و ۱ و مساحت آن  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  است. اندازه ضلع سوم چقدر است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۳

۲۶- در یک مربع ۱ واحد از بعد آن کم کرده و به بعد دیگر ۱ واحد اضافه می‌کنیم. تا مستطیل ایجاد شود. افزایش تغییر مساحت و محیط کدام است؟

- (۱) مساحت ۱ و محیط صفر  
(۲) مساحت ۱- و محیط صفر  
(۳) مساحت صفر و محیط ۱  
(۴) مساحت صفر و محیط ۱-

۲۷- نسبت اضلاع قائم از مثلثی  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  و میانه آن ۸ واحد است، ضلع متوسط چقدر است؟

- (۱)  $8\sqrt{3}$  (۲) ۹ (۳)  $9\sqrt{3}$  (۴) ۱۲

۲۸- در مثلث به اضلاع ۵ و ۷ و ۸ ارتفاع وارد بر ضلع بزرگتر آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند. کوچکترین قسمت کدام است؟

- (۱)  $1/5$  (۲) ۲ (۳)  $2/5$  (۴) ۳

۲۹- طول مستطیلی دو برابر عرض آن است، اگر قطر مستطیل  $4\sqrt{5}$  باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۳۰- در مثلثی سه زاویه داخلی متناسب با اعداد ۳ و ۲ و ۱ می‌باشند، ضلع متوسط چند برابر ضلع کوچکتر است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

۳۱- در مربعی به ضلع سه واحد مستطیلی محاط می‌کنیم که هر راس مستطیل ضلع مربع را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، مساحت کوچکترین مستطیل کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۳۲- مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع  $۳\sqrt{۳}$  واحد مربع است، میانه این مثلث چقدر است؟

- (۱)  $\sqrt{۳}$  (۲)  $\frac{۳}{۲}$  (۳)  $۲\sqrt{۳}$  (۴) ۳

۳۳- دو مثلث الزاویه در وتر مشترک‌اند با تساوی کدام دو جزء ممکن است متشابه هم نباشند؟  
(۱) ارتفاع وارد بر وتر (۲) میانه وارد بر وتر (۳) زاویه حاده (۴) ضلع قائم

۳۴- در مثلث قائم الزاویه نسبت دو ضلع قائم ۱ به ۲ است اگر مساحت مثلث ۸ واحد مربع باشد، ضلع متوسط مثلث کدام است؟

- (۱)  $\frac{۴}{۵}$  (۲) ۶ (۳)  $۳\sqrt{۲}$  (۴)  $۴\sqrt{۲}$

۳۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یک زاویه حاده برابر  $۲۵^\circ$  است زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر چند درجه است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴) ۴۵

۳۶- در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو ضلع ثابت و یک زاویه متغیر است، مساحت و محیط آن چگونه است؟

- (۱) محیط ثابت، مساحت ثابت  
(۲) محیط ثابت، مساحت متغیر  
(۳) محیط متغیر، مساحت متغیر  
(۴) محیط متغیر، مساحت ثابت

۳۷- محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین  $(۳ + ۳\sqrt{۲})$  واحد است. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱)  $۲\sqrt{۲}$  (۲)  $\frac{۲}{۲۵}$  (۳)  $\frac{۲}{۷۵}$  (۴) ۳

۳۸- در نیمدایره به قطر  $AB = ۵$ ، وتر  $CD = ۳$  موازی  $AB$  رسم شده است،  $tg C$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{۵}{۳}$  (۲) -۲ (۳)  $-\frac{۳}{۲}$  (۴)  $\frac{۵}{۳}$

۳۹- محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین  $(۳ + ۳\sqrt{۲})$  واحد است، مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) ۳ (۲)  $\frac{۲}{۷۵}$  (۳)  $\frac{۲}{۲۵}$  (۴)  $۲\sqrt{۲}$

۴۰- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند. ضلع بزرگتر چند برابر ضلع متوسط است؟

- (۱)  $\sqrt{۳}$  (۲)  $\frac{۳}{۲}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۴۱- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند، ضلع بزرگتر چند برابر ضلع متوسط است؟

$$\sqrt{3} \quad (1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (3) \quad \sqrt{2} \quad (4)$$

۴۲- در یک مثلث قائم الزاویه یکی از زاویه‌های حاده سه برابر زاویه‌ی دیگر است. نسبت دو ضلع قائم کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad 2 - \sqrt{2} \quad (3) \quad 1 + \sqrt{2} \quad (4)$$

۴۳- طول اضلاع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ و ۸ واحد است، تصویر ضلع کوچک‌تر بر روی وتر کدام است؟

$$3/2 \quad (1) \quad 3/6 \quad (2) \quad 4/5 \quad (3) \quad 4/8 \quad (4)$$

۴۴- مساحت دوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌های ۸ و ۶ واحد و طول ساق  $\sqrt{5}$  چقدر است؟

$$12 \quad (1) \quad 14 \quad (2) \quad 15 \quad (3) \quad 16 \quad (4)$$

۴۵- در نیم‌دایره‌ای به شعاع ۵ واحد قطر آن را به نسبت ۱۶ و ۹ تقسیم می‌کنیم. از نقطه تقسیم شده خطی بر قطر عمود

می‌کنیم تا نیم‌دایره در A قطع کند نزدیک‌ترین فاصله A از دو سر قطر کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 8 \quad (4)$$

۴۶- در مثلث قائم الزاویه‌ای طول وتر برابر  $15\sqrt{6}$  واحد است. اگر ارتفاع وارد بر وتر آن را به نسبت ۲ و ۳ تقسیم کند

اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

$$12 \quad (1) \quad 16 \quad (2) \quad 18 \quad (3) \quad 20 \quad (4)$$

۴۷- زاویه‌ی مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد اگر کوچکترین ضلع مثلث ۴ واحد باشد ارتفاع وارد بر بزرگترین

ضلع این مثلث کدام است؟

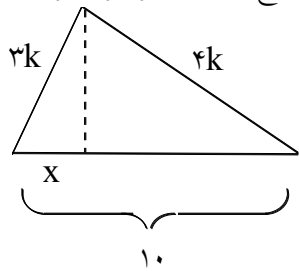
$$2 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 4\sqrt{3} \quad (3) \quad 2\sqrt{3} \quad (4)$$

۴۸- زاویه‌های مثلث ABC در رابطه‌ی  $\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1}$  صدق می‌کنند نسبت  $\frac{BC}{AC}$  کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (1) \quad \frac{3}{2} \quad (2) \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$



۴۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای نسبت به دو ضلع قائم ۳ به ۴ و طول وتر ۱۰ واحد است. تصویر ضلع کوچک‌تر بر وتر کدام



است؟

۳/۶ (۲)

۳/۲ (۱)

۴/۵ (۴)

۴/۲ (۳)

۵۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه دو ضلع قائم ۹ و ۱۲ واحد است ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

۸/۴ (۴)

۸/۱ (۳)

۷/۲ (۲)

۶/۴ (۱)

۵۱- در مثلث قائم‌الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم، مساحت دوزنقه حاصل چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۳/۵ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)

۳/۴ (۲)

۲/۳ (۱)

۵۲- در مکعب مستطیل به ابعاد ۵ و ۳ و ۲ واحد، سطح کل چند واحد مربع است؟

۵۶ (۴)

۵۸ (۳)

۶۲ (۲)

۶۴ (۱)

۵۳- جمله‌ی n ام یک تصاعد عددی (۴n-۱) است، مجموع ۱۲ جمله‌ی اول آن کدام است؟

۳۶۰ (۴)

۳۰۰ (۳)

۲۸۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

۵۴- در مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم ۳ و  $\sqrt{3}$  است، میانه‌ی وارد بر وتر چقدر است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

$\sqrt{3}$  (۲)

$2\sqrt{3}$  (۱)

۵۵- در دایره‌ای به شعاع R دو مستطیل به ترتیب محاط و محیط شده‌اند، نسبت مساحت‌های این دو مستطیل کدام است؟

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$\frac{1}{3}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

۵۶- در مثلث ABC دو نقطه‌ی D و E روی اضلاع مثلث و  $DE \parallel BC$  و  $BC = ۳DE$  است. مساحت دوزنقه DEBC

چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۵۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای کوچکترین زاویه ۴۰ درجه است. زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر چند درجه است؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

۵۸- در مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی ۳۰ درجه ارتفاع وارد بر وتر آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند. نسبت مساحت‌های این

دو مثلث کدام است؟

۵ و ۲ (۴)

۴ و ۱ (۳)

۳ و ۲ (۲)

۳ و ۱ (۱)

۵۹- مثلث قائم الزاویه‌ای با بزرگترین ضلع ۱۸ واحد و ارتفاع  $h$  قابل رسم است، کدام عدد برای  $h$  مورد قبول نیست؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳) ۹ (۴)  $\frac{9}{5}$

۶۰- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۲ و ۳ و ۵ است نسبت میانه وارد بر ضلع بزرگتر به همان ضلع کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

۶۱- مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر ۱۵ و ارتفاع  $h$  قابل رسم است، کدام عدد برای اندازه  $h$  درست نیست؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳)  $\frac{7}{5}$  (۴) ۸

۶۲- در مثلث  $ABC$  داریم  $\hat{B} = \hat{C}$  ضلع  $AB$  را از طرف  $A$  به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی  $D$  امتداد می‌دهیم. زاویه‌ی  $\hat{BCD}$  چگونه است؟

- (۱) حاده (۲) قائمه (۳) منفرجه (۴) نامشخص

۶۳- مساحت مثلثی به اضلاع  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$  و ۱ کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۴- در یک مربع ۳ واحد از بعد آن کم و به بعد دیگر ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا مستطیل ایجاد شود. افزایش تغییر مساحت و محیط به ترتیب کدام است؟

- (۱) صفر و ۶- (۲) ۹- و صفر (۳) صفر و ۶ (۴) ۹ و صفر

۶۵- در مثلثی  $AB = \frac{2}{3} AC = 4$  و  $\hat{A} = 120^\circ$  مساحت مثلث کدام است؟

- (۱)  $6\sqrt{3}$  (۲)  $8\sqrt{3}$  (۳) ۹ (۴) ۱۲

۶۶- طول مستطیلی دو برابر عرض آن است، اگر قطر مستطیل  $4\sqrt{5}$  باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۶۷- طول دو ضلع از مثلثی  $\sqrt{2}$  و ۱ و مساحت آن  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  است، اندازه‌ی ضلع سوم کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴) ۲

۶۸- نسبت اضلاع قائم از مثلثی  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  و میانه‌ی آن ۸ واحد است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱)  $24\sqrt{3}$  (۲)  $32\sqrt{3}$  (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۶۹- در مثلثی به اضلاع ۵ و ۷ و ۸ ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ‌تر آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قسمت کدام است؟

$$\frac{3}{10} (1) \quad \frac{5}{11} (2) \quad \frac{6}{13} (3) \quad \frac{7}{11} (4)$$

۷۰- محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین  $3(1 + \sqrt{2})$  واحد است. مساحت این مثلث کدام است؟

$$2\sqrt{2} (1) \quad 2/25 (2) \quad 2/75 (3) \quad 3 (4)$$

۷۱- محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین  $5 + 5\sqrt{2}$  واحد است. مساحت این مثلث کدام است؟

$$5/25 (1) \quad 5/75 (2) \quad 6/25 (3) \quad 6/75 (4)$$

۷۲- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند. ضلع بزرگ‌تر چند برابر ضلع متوسط است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} (1) \quad \sqrt{3} (2) \quad \frac{3}{2} (3) \quad 2 (4)$$

۷۳- نسبت اضلاع قائم در مثلثی  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  است. اگر ارتفاع وارد بر وتر این مثلث قائم‌الزاویه رسم شود، مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث متوسط است؟

$$1/25 (1) \quad 1/75 (2) \quad 2 (3) \quad 2/25 (4)$$

۷۴- دو مثلث قائم‌الزاویه در وتر مشترک‌اند. با تساوی کدام دو جزء دیگر ممکن است مساوی هم نباشند؟  
(۱) ارتفاع وارد بر وتر (۲) میانه‌ی وارد بر وتر (۳) زاویه‌ی حاده (۴) ضلع قائم

۷۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به مساحت ۸ واحد مربع، اندازه‌ی ضلع کوچک‌تر نصف ضلع متوسط است. اندازه‌ی وتر کدام است؟

$$2\sqrt{10} (1) \quad 3\sqrt{5} (2) \quad 4\sqrt{2} (3) \quad 5\sqrt{2} (4)$$

۷۶- طول دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ و ۸ واحد است. اندازه‌ی کوچک‌ترین ارتفاع کدام است؟

$$3/2 (1) \quad 4/8 (2) \quad 4/5 (3) \quad 3/6 (4)$$

۷۷- در یک مثلث قائم‌الزاویه، دو ضلع قائم متناسب با اعداد  $1 + \sqrt{2}$  و ۱ می‌باشند. نسبت دو زاویه‌ی حاده‌ی آن کدام است؟

$$\frac{1}{3} (1) \quad \frac{2}{3} (2) \quad \frac{3}{4} (3) \quad \frac{1}{3} (4)$$

۷۸- در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین دو نیمساز زاویه‌ی حاده‌ی آن، چند درجه است؟

$$90 (1) \quad 115 (2) \quad 120 (3) \quad 135 (4)$$

۷۹- در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی دو ضلع قائم ۱۵ و ۲۰ واحد است. سینوس زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر این مثلث کدام است؟

- (۱)  $0/28$  (۲)  $0/35$  (۳)  $0/24$  (۴)  $0/32$

۸۰- در مثلث قائم الزاویه اندازه وتر ۵ و کوچک‌ترین ضلع ۲ واحد است. تصویر ضلع متوسط بر روی وتر کدام است؟

- (۱)  $3/6$  (۲)  $3/8$  (۳)  $4$  (۴)  $4/2$

۸۱- در یک مثلث متساوی‌الساقین یکی از ساق‌ها را از طرف رأس به اندازه خود امتداد داده و نقطه پایانی را به رأس سوم آن وصل می‌کنیم. بزرگ‌ترین مثلث حاصل کدام نوع است؟

- (۱) قائم الزاویه (۲) منفرجه الزاویه (۳) متساوی الاضلاع (۴) نامشخص

۸۲- مساحت دوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌های ۶ و ۸ واحد و طول ساق  $\sqrt{5}$  کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۸۳- در مثلث منفرجه‌الزاویه، وسط سه ضلع را به هم وصل می‌کنیم. مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) نامشخص

۸۴- در مثلث قائم‌الزاویه طول وتر برابر  $15\sqrt{6}$  واحد است. اگر ارتفاع وارد بر وتر، آن را به نسبت ۲ و ۳ تقسیم کند، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۸۵- قاعده‌ی مثلثی منطبق بر طول مستطیل و عرض مستطیل  $\frac{5}{11}$  ارتفاع وارد بر این قاعده است. مساحت مثلث چه کسری از مساحت مستطیل است؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{4}{5}$  (۴)  $\frac{6}{5}$

۸۶- در مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌ی وتر ۱۲ واحد و یک زاویه ۳۰ درجه است. از وسط وتر، عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت این مثلث جدید کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{3}$  (۲)  $6\sqrt{3}$  (۳)  $\frac{9}{2}\sqrt{3}$  (۴)  $9\sqrt{3}$

۸۷- در مثلث ABC، میانه‌های AM و CN در نقطه‌ی G متقاطع‌اند. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث GMN است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۸۸- در مثلث متساوی الساقین، طول یک ساق  $\frac{3}{4}$  قاعده‌ی آن است. اگر اندازه‌ی ساق مثلث ۹ واحد باشد، ارتفاع وارد بر آن

چه قدر است؟

$$4\sqrt{3} \text{ (4)} \quad 4\sqrt{2} \text{ (3)} \quad 3\sqrt{3} \text{ (2)} \quad 3\sqrt{2} \text{ (1)}$$

۸۹- محیط مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین  $6(1 + \sqrt{2})$  واحد است. مساحت آن کدام است؟

$$12 \text{ (4)} \quad 9\sqrt{2} \text{ (3)} \quad 9 \text{ (2)} \quad 6\sqrt{2} \text{ (1)}$$

۹۰- اندازه‌ی اضلاع مثلثی ۱۰ و ۸ و ۶ واحد است، تصویر میانه‌ی نظیر ضلع بزرگ‌تر بر آن ضلع چند واحد است؟

$$1/2 \text{ (4)} \quad 1/4 \text{ (3)} \quad 1/5 \text{ (2)} \quad 1/6 \text{ (1)}$$

۹۱- در مثلث ABC میانه‌های AM و BN در نقطه O متقاطع‌اند. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث OMN است؟

$$15 \text{ (4)} \quad 12 \text{ (3)} \quad 9 \text{ (2)} \quad 6 \text{ (1)}$$

۹۲- در مثلثی به اضلاع ۹ و ۹ و ۶ واحد، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق مثلث کدام است؟

$$4\sqrt{3} \text{ (4)} \quad 4\sqrt{2} \text{ (3)} \quad 3\sqrt{3} \text{ (2)} \quad 3\sqrt{2} \text{ (1)}$$

۹۳- در مثلث متساوی الساقین، قطر دایره‌ی محیطی برابر یکی از اضلاع مثلث است. اگر محیط این مثلث  $6(1 + \sqrt{2})$

واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

$$9\sqrt{2} \text{ (4)} \quad 6\sqrt{2} \text{ (3)} \quad 12 \text{ (2)} \quad 9 \text{ (1)}$$

۹۴- محیط مثلث قائم الزاویه برابر ۱۸ و ارتفاع وارد بر وتر آن ۳ واحد است. مساحت مثلث کدام است؟

$$16 \text{ (4)} \quad 12 \text{ (3)} \quad \frac{81}{7} \text{ (2)} \quad 4\sqrt{3} \text{ (1)}$$

## جواب مساحت و فیثاغورس - سنجش

۱- یادآوری: مساحت یک لوزی با طول ضلع  $a$  و زاویه  $\alpha$  برابر است با:  $S = a^2 \sin \alpha$  مساحت:

$$S_{\text{مربع}} = 2S \Rightarrow a^2 = 2a^2 \sin \alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

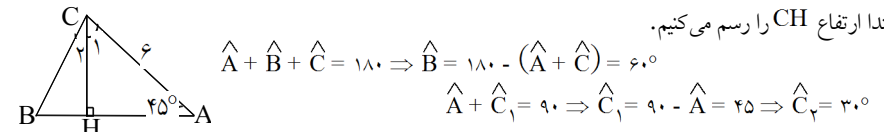
بنابراین نصف زاویه کوچکتر لوزی برابر با  $15^\circ$  و تنازات آن نیز برابر با  $2 - \sqrt{3}$  می‌باشد. پس گزینه ۱ پاسخ درست است.

۲- می‌دانیم مساحت لوزی با طول ضلع  $a$  و زاویه  $\alpha$  برابر  $S = a^2 \sin \alpha$  است.

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{\text{لوزی}} = 5^2 \times \frac{4}{5} = 20$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

۳- ابتدا ارتفاع  $CH$  را رسم می‌کنیم.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C}) = 60^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{C}_1 = 90 \Rightarrow \hat{C}_1 = 90 - \hat{A} = 45 \Rightarrow \hat{C}_2 = 30^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رابطه فیثاغورث در} \\ \text{مثلث قائمه} \\ \text{ACH} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AH^2 + CH^2 = AC^2 \\ AH = CH \end{array} \right\} \Rightarrow AH = CH = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = 3\sqrt{2}$$

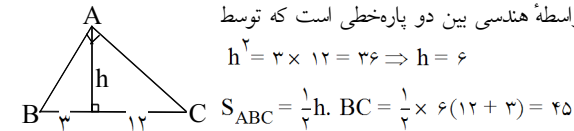
$$\cos \hat{C}_2 = \frac{CH}{BC} \Rightarrow BC = \frac{CH}{\cos \hat{C}_2} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

۴- نکته: ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائمه، واسطه هندسی بین دو پاره‌خطی است که توسط

$$h^2 = 3 \times 12 = 36 \Rightarrow h = 6$$

ارتفاع بر روی وتر ایجاد می‌گردد.



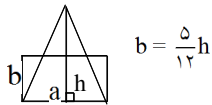
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} h \cdot BC = \frac{1}{2} \times 6 \times (12 + 3) = 45$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

$$B = 90^\circ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{رابطه: } b^2 = a^2 + c^2 \\ \text{فیثاغورث} \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + c^2 = 2ac \text{ یا } a^2 + c^2 - 2ac = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0 \quad -5$$

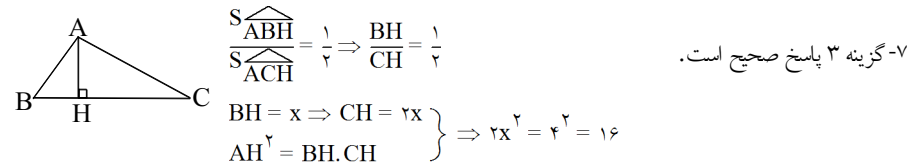
در نتیجه، مثلث، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین بوده و اندازه‌های دو زاویه دیگر مثلث برابر  $45^\circ$  است. بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$b = \frac{5}{12} h$$

$$S = \left( \frac{12}{5} b \times a \right) \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\text{مثلث}}}{S_{\text{مستطیل}}} = \frac{\frac{5}{12} ab}{ab} \Rightarrow \frac{5}{12} = 1/2$$



$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{1}{2}$$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

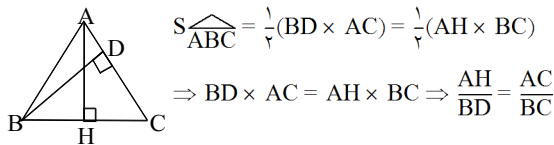
$$\left. \begin{array}{l} BH = x \Rightarrow CH = 2x \\ AH^2 = BH \cdot CH \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^2 = 4^2 = 16$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow BC = BH + CH = 3x = 6\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{4 \times 6\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هرگاه اضلاع مثلث، برابر  $2x$  و  $3x$  باشند، خواهیم داشت.

$$(2x)^2 + (3x)^2 = 26^2 \Rightarrow 13x^2 = 26^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{13} \Rightarrow 2x = 4\sqrt{13}$$

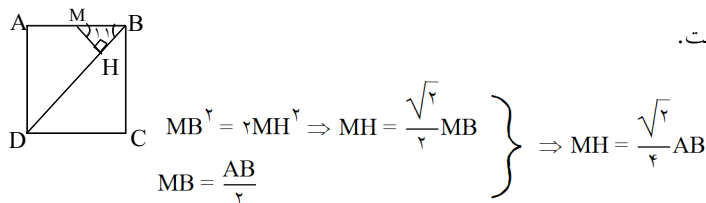
۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (BD \times AC) = \frac{1}{2} (AH \times BC)$$

$$\Rightarrow BD \times AC = AH \times BC \Rightarrow \frac{AH}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

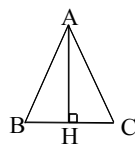
۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{array}{l} MB^2 = 2MH^2 \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{2} MB \\ MB = \frac{AB}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{4} AB$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده بر نیمساز زاویه بین ۲ ساق منطبق است. بنابراین خواهیم داشت:

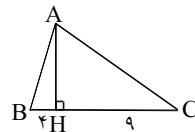
$$S = \frac{AH \times BC}{2} = ۱۲ \Rightarrow \frac{AH \times ۸}{2} = ۱۲ \Rightarrow AH = ۳$$



۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث قائمه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین پاره‌خطهایی است که توسط این ارتفاع بر روی وتر ایجاد می‌شوند.

$$AH^2 = BH \cdot CH = ۳۶ \rightarrow AH = ۶$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{۶ \times ۱۳}{2} = ۳۹$$



۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر تفاضل دو زاویه حاد است. اگر A و B و C زوایای مثلث باشند

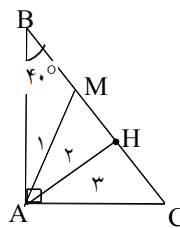
$$\frac{A}{4} = \frac{B}{5} = \frac{C}{9} \Rightarrow \frac{A}{4} = \frac{B}{5} = \frac{C}{9} = \frac{A+B+C}{9+5+4} = \frac{۱۸۰}{۱۸} = ۱۰ \begin{cases} A = ۴۰ \\ B = ۵۰ \\ C = ۹۰ \end{cases}$$

$$|B - A| = ۱۰ = \text{زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر}$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم  $\hat{B} = ۴۰$  از آنجائیکه در مثلث قائم الزاویه

میانه وارد بر وتر نصف وتر است نتیجه می‌گیریم مثلث  $\widehat{ABM}$  متساوی الساقین است پس  $\hat{A}_1 = ۴۰$  از طرفی  $\hat{C}_1 = ۵۰$  پس  $\hat{A}_3 = ۴۰$  داریم.

$$A_2 = ۹۰ - (A_1 + A_3) = ۹۰ - (۴۰ + ۴۰) = ۱۰$$



۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هرگاه طول ضلع مربع را a فرض کنیم قطر آن  $\sqrt{2}a$  می‌باشد لذا:

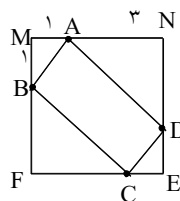
$$a^2 = ۷۲ \Rightarrow a = ۶\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}a = ۱۲$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول این قطعه سیم محیط مثلث متساوی الاضلاع است. اگر a ضلع مثلث متساوی الاضلاع باشد، داریم:

$$\text{محیط} = ۳a \Rightarrow ۶\sqrt{3} = ۳a \Rightarrow a = ۲\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3}) = ۳$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل ABCD یک مستطیل است.



$$AB^2 = AM^2 + BM^2 = ۲ \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

$$AD^2 = AN^2 + ND^2 = ۱۸ \Rightarrow AD = \sqrt{۱۸} \Rightarrow S_{ABCD} = ۶$$

$$S_{MNEF} = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

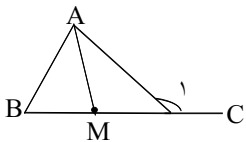
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNEF}} = \frac{۶}{۱۶} = ۳۷/۵ \%$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس.

راه‌حل: چون  $AM = \frac{BC}{2}$  پس زاویه A قائمه است.

$$\hat{C}_1 = ۲/۵B \Rightarrow ۹۰ + B = ۲/۵B \Rightarrow ۱/۵B = ۹۰ \Rightarrow B = ۶۰$$

$$B + C = ۹۰ \Rightarrow C + ۶۰ = ۹۰ \Rightarrow C = ۳۰$$

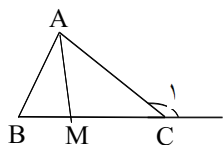


۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس. از آنجائیکه

$AM = \frac{BC}{2}$  پس زاویه A قائم است.

$$\hat{C}_1 = ۲/۵\hat{B} \Rightarrow ۹۰ + B = ۲/۵B \Rightarrow ۱/۵B = ۹۰ \Rightarrow B = ۶۰$$

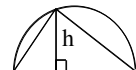
$$B + C = ۹۰ \Rightarrow C + ۶۰ = ۹۰ \Rightarrow C = ۳۰$$



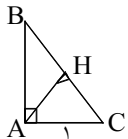
۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این مثلث در دایره‌ای به قطر وتر محاط است و بیشترین مقدار h

$$\text{Max} = h = \frac{۱۲}{2} = ۶$$

برای آن شعاع دایره (نصف وتر است)



۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

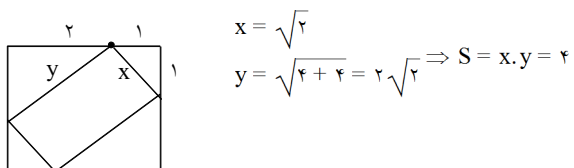


$$۱^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow S = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$d = \frac{|۰ + ۴ - ۶|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴ \Leftarrow ۳x - ۲y - ۶ = ۰$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$x = \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S = x \cdot y = 4$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

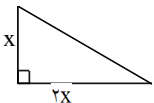
$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$



۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

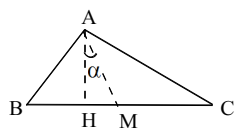
$$\text{میانه} = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. میانه وارد بر وتر همواره نصف وتر است بنابراین معلوم بودن یا نبودن آن هیچ تاثیری بر مساله ندارد.



$$S = \frac{x \times 2x}{2} = x^2 = 4 \Rightarrow x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x = 4\sqrt{2}$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



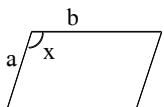
$$\alpha = \widehat{HAC} - \widehat{MAC}$$

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$= (90 - C) - (C) = 90 - 2C = |B - C|$$

$$C = 25^\circ \Rightarrow B = 65^\circ \Rightarrow \alpha = 40^\circ$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



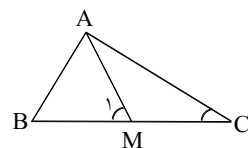
$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin x$$

مساحت متغیر است  $2(a + b) =$  محیط ثابت است

$$2a + a\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

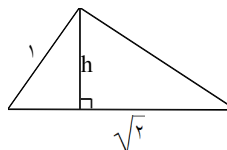
$$s = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$



۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. میانه برابر نصف وتر است.

$$AM = MC \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{A_1} + C + \widehat{2C} \Rightarrow \widehat{M_1} = 76^\circ$$

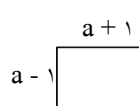
$$B = 52^\circ \Rightarrow C = 28^\circ$$



$$S = \frac{a \times h}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times h}{2} \Rightarrow h = 1$$

مطابق شکل h ضلع به طول ۱ منطبق می‌گردد پس مثلث قائم‌الزاویه است.

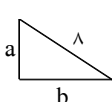
$$C^2 = a^2 + b^2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow C = \sqrt{3}$$



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت مستطیل  $(a+1)(a-1) = a^2 - 1 = a^2 + (-1)$

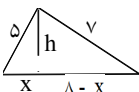
محیط مستطیل  $2[(a+1) + (a-1)] = 4a = 4a + 0$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ b^2 = 3a^2 \end{cases}$$

$$a^2 = 4 \times 16 \Rightarrow a = 8 \text{ و } b = 8\sqrt{3}$$

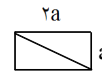


$$h^2 = 25 - x^2 = 49 - (8-x)^2 \Rightarrow 24 - 64 + 16x = 0$$

$$x = 2/5$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{قطر}^2 = a^2 + 4a^2 = (4\sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 = 16$$



۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = 4, 2a = 8 \Rightarrow \text{مساحت} = 32$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اندازه زاویه‌ها  $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 30 \Rightarrow 30, 60, 90$  زوایای مثلث

ضلع متوسط برابر  $\sqrt{3}$  در ضلع کوچک ضلع متوسط مقابل به زاویه ۶۰ و ضلع کوچکتر مقابل به زاویه ۳۰

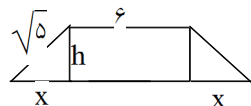
$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

است.



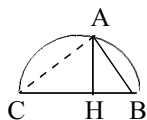
۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x = \frac{8-6}{2} = 1 \\ h^2 = 5 - 1 \Rightarrow h = 2 \quad S = \frac{2(6+8)}{2} = 14 \end{cases}$$



۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC در رأس A قائمه است.

$$BH = \frac{9}{25} \times 10 = \frac{18}{5}, \quad AB^2 = BH \times BC = \frac{18}{5} \times 10 \Rightarrow AB = 6$$

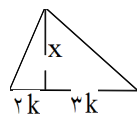


۴۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$5k = 15\sqrt{6} \quad k = 3\sqrt{6}$$

$$x^2 = (2k)(3k) = 6k^2 = 6(3\sqrt{6})^2 = 36 \times 9$$

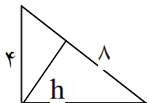
$$x = 6 \times 3 = 18$$



۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1, 2, 3 \Rightarrow A = \frac{180}{6} = 30, \quad B = 60, \quad C = 90$$

مثلث قائم الزاویه به زاویه  $30^\circ$  درجه طول وتر دو برابر کوچکترین ضلع و برابر ۸ واحد است ضلع متوسط  $4\sqrt{4}$  واحد است.



$$8 \times h = 4 \times 4\sqrt{3} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1} \Rightarrow A = 90, \quad B = 60, \quad C = 30 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$9k^2 + 16k^2 = 100 \Rightarrow k = 2$$

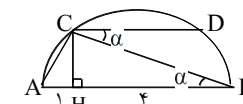
$$(3k)^2 = x \times 10 = (6)^2 \quad x = 3/6$$

$$a^2 = 144 + 81 = 225 \quad a = 15$$

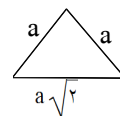
$$a \cdot h = 9 \times 12 \Rightarrow h = \frac{9 \times 12}{15} = \frac{9 \times 4}{5} = 3.6$$

۵۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



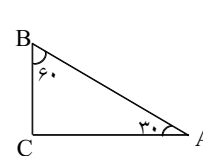
$$\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow CH^2 = 1 \times 4 \Rightarrow CH = 2, \quad \text{tg } c = \text{tg}(90 + \alpha) = -\text{Cotg } \alpha = \frac{-4}{2} = -2$$



$$ra + a\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} \quad a = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 2}$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1/2$$

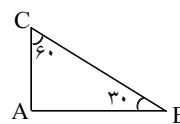


$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{3}}{3} AC$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{A} = x, \quad \widehat{B} = 2x, \quad \widehat{C} = 3x$$

$$x + 2x + 3x = 180 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \text{مثلث قائمه است}$$



$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \text{مثلث قائمه است}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

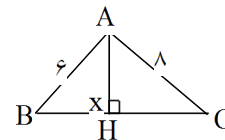
$$\alpha + 3\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 22.5 \Rightarrow \text{tg } 22.5 = \frac{1 - \cos 45}{\sin 45} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Cotg } 22.5 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$$

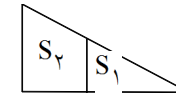
$$BC = \sqrt{64 + 36} = 10$$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{ABH} \cong \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 3.6$$



۵۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

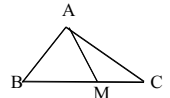


۵۲- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.  $۶۲ = ۲(۶ + ۱۰ + ۱۵)$  = سطح کل

۵۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a_1 = ۳ \quad a_{12} = ۴۷ \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(a_1 + a_n) \rightarrow S_{12} = \frac{12}{۲}(۳ + ۴۷) = ۳۰۰$$

۵۴- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.



تذکر: در مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

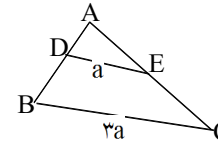
۵۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. تمام مثلث‌های قائم الزاویه متساوی الساقین کوچک برابری.



$$\text{لذا } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{۲}$$

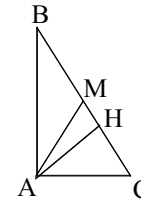
۵۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$S_{ABC} = ۹S_{ADE} \Rightarrow \text{مساحت دوزنقه} = ۸S_{ADE}$$



۵۷- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم الزاویه زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر مساوی قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی حاده است. اگر  $\angle B = ۴۰^\circ$  آنگاه  $\angle C = ۵۰^\circ$  و داریم:

$$\widehat{HAM} = |B - C| = ۱۰$$

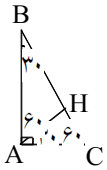


۵۸- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

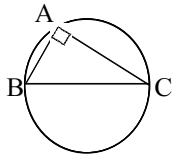
$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BH}{\frac{1}{2} AH \times CH} = \frac{BH}{CH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} AB}{\frac{1}{2} AC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \sqrt{3} \times \frac{AB}{AC} = \sqrt{3} \times \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = ۳$$

بنابراین نسبت مساحت این دو مثلث برابر یک به سه است.



۵۹- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. این مثلث قائم الزاویه در دایره‌ای به قطر BC = ۱۸ محاط است و در این صورت بیشترین ارتفاع h برابر شعاع دایره یعنی ۹ می‌باشد پس گزینه ۴ برای مقدار h قابل قبول نیست.



۶۰- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث مجموع زوایا ۱۸۰ درجه است پس داریم.

$$۲x + ۳x + ۵x = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۰x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۱۸$$

بنابراین زوایای مثلث عبارتند از:

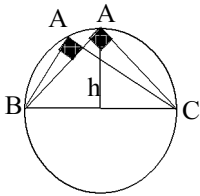
$$\widehat{A} = ۲ \times ۱۸ = ۳۶$$

$$\widehat{B} = ۳ \times ۱۸ = ۵۴$$

$$\widehat{C} = ۵ \times ۱۸ = ۹۰$$

و در مثلث قائم الزاویه نسبت میانه وارد بر وتر به وتر برابر  $\frac{1}{۲}$  است.

۶۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. چنین مثلثی در یک دایره به قطر ۱۵ قرار دارد و رلس قائمه روی این دایره تغییر می‌کند با توجه به شکل بزرگترین ارتفاع مثلث برابر شعاع دایره یعنی  $\frac{7}{5}$  است پس  $h = ۸$  قابل قبول نیست.



۶۲- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. قائمه  $\widehat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow$  میانه‌ی مثلث برابر نصف ضلع متناظر است.

$$۶۳- \text{گزینهی ۱ صحیح است. } S = \frac{1}{۲}(۱ \times \sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow (\sqrt{۳})^2 = ۱^2 + (\sqrt{۲})^2$$

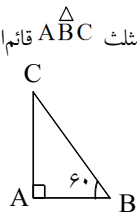
$$۶۴- \text{گزینهی ۲ صحیح است. } -۹, \text{ صفر } \Rightarrow -۹ = \text{تغییر مساحت} = \text{محیط ثابت} = a^2 - ۹ \Rightarrow a \times a = a^2$$

۷۲- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} 1+2+3 &= 6 \\ 180 \div 6 &= 30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 3 \times 30 = 90 \\ \hat{B} = 2 \times 30 = 60 \\ \hat{C} = 1 \times 30 = 30 \end{cases}$$

بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین BC ضلع بزرگ‌تر و AC ضلع متوسط است.

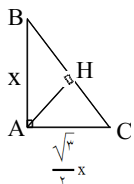
$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{BC}} = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



۷۳- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ABC داشته باشیم:  $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ,  $AB = x$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = \frac{7}{4}x^2 \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{7}}{2}x$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times \frac{\sqrt{7}}{2}x = x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x$$

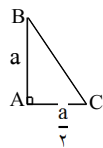


$$AB^2 = BH \times BC = x^2 = BH \times \frac{\sqrt{7}}{2}x \Rightarrow BH = \frac{2}{\sqrt{7}}x$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times AC}{\frac{1}{2}AH \times BH} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{\frac{2\sqrt{3}}{7}x^2} = \frac{7}{4} = 1.75$$

۷۴- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است. بنابراین با تساوی دو وتر مسلماً میانه‌های وارد بر وتر هم مساوی خواهند بود پس این اطلاع جدیدی برای تساوی مثلث‌ها نیست.

۷۵- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{a^2}{2} = 8 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} AB &= 4\sqrt{2} \\ AC &= 4\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 = 32 + 32 = 64 \Rightarrow BC = 8$$

$$BH = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \quad S = \frac{1}{2}BH \cdot AC = 6\sqrt{3} \quad \text{گزینهی ۱ صحیح است.}$$

$$\begin{aligned} x &= 2y & x^2 + y^2 &= (4 + 5) = 9 & 4y^2 + y^2 &= 16 \times 5 \\ y &= 4 & x &= 8 & \Rightarrow S &= 32 \end{aligned} \quad \text{گزینهی ۳ صحیح است.}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(1 \times \sqrt{2}) \Rightarrow \text{دو ضلع عمود بر همند} \quad \text{ضلع سوم} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \quad \text{گزینهی ۳ صحیح است.}$$

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}, a^2 + b^2 = 256\right) \Rightarrow b = a\sqrt{3} \quad a^2 + 3a^2 = 256 \Rightarrow a = 8$$

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(8 \times 8\sqrt{3}) = 32\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 25 \\ y^2 + h^2 = 49 \end{cases} \quad y^2 - x^2 = 24 \quad (y-x)(y+x) = 24 \quad \text{گزینهی ۲ صحیح است.}$$

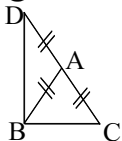
$$\begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 8 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{11}{2}, \quad x = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{11}$$

$$a + a + a\sqrt{2} = 3(1 + \sqrt{2}) \quad a(2 + \sqrt{2}) = 3(1 + \sqrt{2}) \quad \text{گزینهی ۲ صحیح است.}$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$\Rightarrow a(2 + \sqrt{2}) = 5(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{25}{4} = 6.25 \quad \text{گزینهی ۳ صحیح است.}$$

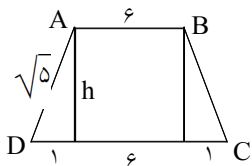
۸۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.



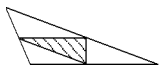
قائم الزاویه  $\hat{D}BC = 90^\circ \Rightarrow BA = AD = AC \Rightarrow \hat{D}BC = 90^\circ$

$$h = \sqrt{5-1} = 2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(6+8) \times 2 = 14$$

۸۲- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

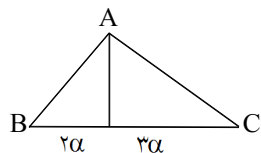


۸۳- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.



۴ برابر  $\Rightarrow$  هر چهار مثلث معادل هم‌اند.

۸۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.



$$BH = 2(3\sqrt{6}) = 6\sqrt{6}$$

$$AH^2 = BH \cdot CH = 9 \times 36$$

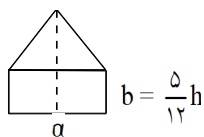
$$CH = 3(3\sqrt{6}) = 9\sqrt{6}$$

$$AH = 18$$

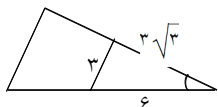
۸۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} a \cdot h \quad \text{مساحت مستطیل} = \frac{5}{12} a \cdot h$$

$$\frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot h}{\frac{5}{12} a \cdot h} = \frac{6}{5}$$



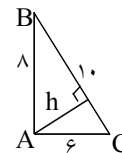
۸۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.



$$S = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

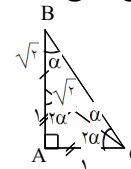
$$a^2 = 64 + 36 \Rightarrow a = 10$$

$$6 \times 8 = 10 \times h \Rightarrow h = 4/8$$



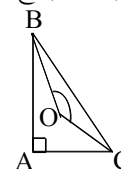
۷۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

۷۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

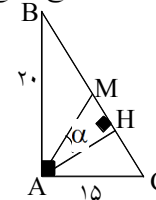


$$\alpha \text{ زاویه کوچک تر}, \quad 2\alpha + \alpha = 3\alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{3\alpha} = \frac{1}{3}$$

۷۸- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



۷۹- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

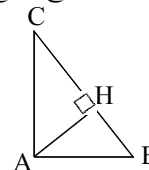


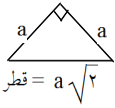
$$BC = 25, \quad AM = 12/5, \quad BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{225}{25} = 9, \quad HM = 12/5 - 9 = 3/5$$

$$\sin \alpha = \frac{3/5}{12/5} = \frac{3}{12} = 1/4$$

۸۰- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویه  $\hat{ABC}$   $AB = 2$  و  $BC = 5$  داریم:

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 4 = 5BH \Rightarrow BH = 4/5 \Rightarrow CH = 5 - 4/5 = 21/5$$



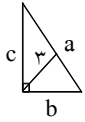


قطر دایره =  $a\sqrt{2}$

۹۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. این مثلث، قائم الزاویه نیز هست. داریم:

$$(2a + a\sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a\sqrt{2} = 6 \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{(3\sqrt{2})^2}{2} = 9$$

۹۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

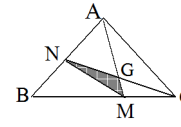


$$a = \frac{224}{42} = \frac{54}{7}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 18 \\ a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + 6a = (b + c)^2 \Rightarrow a^2 + 6a = (18 - a)^2 \\ \Rightarrow 6a = 224 - 36a \text{ و } 3a = bc \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{54}{7} = \frac{81}{7}$$

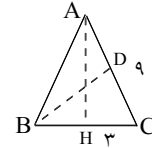
۸۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (\text{مساحت } ABC) = \frac{1}{4} (\text{مساحت } ABC)$



$$NG = \frac{1}{3} NC \Rightarrow \widehat{GMN} \text{ مساحت} = \frac{1}{9} (\text{مساحت } MNC)$$

$$\widehat{GMN} \text{ مساحت} = \frac{1}{12} (\text{مساحت } ABC) \Rightarrow \text{برابر } 12$$

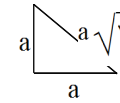
۸۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{3}{9} = 9 \Rightarrow \text{طول قاعده} = 9 \times \frac{2}{3} = 6 \Rightarrow AH = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}$$

$$AH \cdot BC = AC \cdot BD \Rightarrow 6\sqrt{2} \times 6 = 9 \times BD \Rightarrow BD = 4\sqrt{2}$$

۸۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

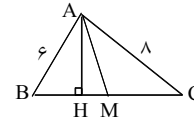


$$2a + a\sqrt{2} = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} a^2 = 9$$

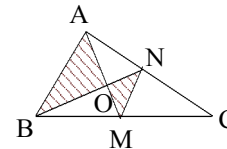
۹۰- مثلث قائم الزاویه است.  $6^2 + 8^2 = 10^2$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = 3/6, BM = 5 \Rightarrow MH = 1/4$$

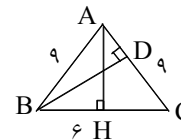
۹۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$OA = 2OM \Rightarrow \text{مساحت } OAB = 4 \text{ برابر مساحت } OMN \Rightarrow \text{از تشابه دو مثلث } OMN$$

$$12 \text{ برابر } \Rightarrow \text{سه برابر مساحت مثلث } OAB = \text{مساحت مثلث } ABC$$

۹۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$AH = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}$$

$$AH \cdot BC = BD \cdot AC \Rightarrow 6\sqrt{2} \times 6 = 9 \times BD \Rightarrow BD = 4\sqrt{2}$$

## مساحت و فیثاغورس - آزاد

۱- نقطه A به عرض ۳ واقع بر محور عرضها، نقطه B به طول ۴ واقع بر محور طولها و O مبدا مختصات، تشکیل مثلثی می‌دهند. مساحت این مثلث چقدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۲

۲- اگر وسطهای اضلاع یک چهارضلعی محدب را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی دیگری حاصل می‌شود که مساحت آن برابر است با:

- (۱)  $\frac{1}{4}$  مساحت چهارضلعی مفروض  
 (۲)  $\frac{2}{3}$  مساحت چهارضلعی مفروض  
 (۳)  $\frac{1}{3}$  مساحت چهارضلعی مفروض  
 (۴)  $\frac{1}{4}$  مساحت چهارضلعی مفروض

۳- در یک مثلث  $A = 45^\circ$  و ارتفاع  $BH = 3$  است. اگر مساحت این مثلث برابر  $\frac{9}{2}(1 + \sqrt{3})$  باشد طول ضلع a چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳)  $\frac{4}{5}$  (۴) ۳

۴- در مثلث قائمه‌ای که اضلاعش ۳ و ۴ هستند، فاصله مرکز ثقل تا وتر مساوی است با؟

- (۱)  $\frac{4}{5}$  (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)  $\frac{1}{2}$

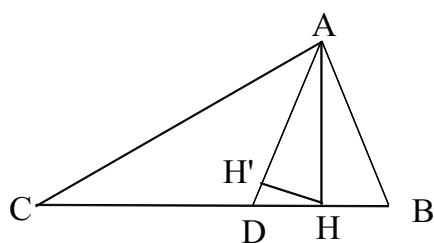
۵- در هر مربع به ضلع a مجموع یک ضلع و یک قطر برابر است با:

- (۱)  $\frac{3a}{2}$  (۲)  $a(\sqrt{2} - 1)$  (۳)  $a(\sqrt{3} + 1)$  (۴)  $a(\sqrt{2} + 1)$

۶- اگر در مثلث ABC میانه‌های اضلاع AB و AC بر هم عمود باشند،  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$  برابر است با؟

- (۱)  $\frac{9}{2}\overline{BC}^2$  (۲)  $3\overline{BC}^2$  (۳)  $4\overline{BC}^2$  (۴)  $5\overline{BC}^2$

۷- خطی که اوساط دو قاعده دوزنقه را به هم وصل می‌کند، آن را به دو چهارضلعی تقسیم می‌کند که با هم: (۱) هم‌ارزند (۲) متشابهند (۳) متساویند (۴) هیچکدام



۸- در مثلث ABC (شکل زیر)  $\angle B - \angle C = 30^\circ$ ، ارتفاع AH و AD نیمساز است. فاصله نقطه H از نیمساز برابر است با:

- (۱)  $\frac{1}{3}AH$  (۲)  $\frac{1}{4}AD$   
 (۳)  $\frac{1}{3}AD$  (۴)  $\frac{1}{8}BC$

۹- نقاط  $A(0, 0, 2)$  و  $B(0, 2, 0)$  و  $C(2, 0, 0)$  مفروضند، مساحت  $ABC$  چقدر است؟

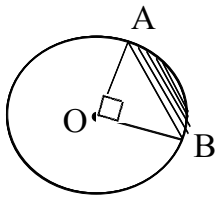
- (۱)  $3\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{6}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

۱۰- در مثلث متساوی الساقین که طول ساق  $b$  و طول قاعده  $a$  باشد، مساحت برابر است با:

- (۱)  $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 + b^2}$  (۲)  $\frac{a}{4}\sqrt{4b^2 + a^2}$  (۳)  $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$  (۴)  $\frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$

۱۱- در مثلث  $ABC$ ،  $AB = 5$  و  $AC = 4$  و  $\cos A = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱)  $5\sqrt{15}$  (۲)  $\frac{5\sqrt{15}}{2}$  (۳)  $5$  (۴)  $\frac{5}{2}$



۱۲- در شکل مقابل  $R = 6\text{ cm}$  و  $\angle AOB = 90^\circ$  اندازه سطح هاشورزده چقدر است؟

- (۱)  $36(\pi - 1)$  (۲)  $18(\pi - 1)$  (۳)  $18(\pi - 2)$  (۴)  $9(\pi - 2)$

۱۳- سطح بین کمان و ضلع چهار ضلعی منتظم محاط در دایره برابر است با:

- (۱)  $\frac{R^2(\pi - 2)}{4}$  (۲)  $\frac{\pi R^2 - \pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi R^2 - 2\pi}{2}$  (۴)  $\frac{R^2(\pi - 1)}{2}$

۱۴- در متوازی الاضلاع  $ABCD$  نقطه  $M$  روی امتداد  $AB$  است. اگر مساحت متوازی الاضلاع  $S$  و مساحت مثلث  $MDC$  برابر  $S'$  فرض شود، کدام درست است؟

- (۱)  $S = S'$  (۲)  $S = 2S'$  (۳)  $S = 3S'$  (۴) هیچکدام

۱۵- در مربعی مجموع یک ضلع و قطر برابر  $2 + \sqrt{8}$  می باشد. مساحت مربع چقدر است؟

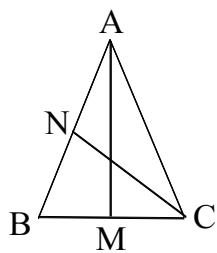
- (۱)  $2$  (۲)  $4$  (۳)  $6$  (۴)  $8$

۱۶- طول اضلاع مثلثی  $a$  و  $a + 1$  و  $a + 2$  است. به ازاء چه مقدار  $a$  این مثلث قائم الزاویه است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $3$  و  $4$

۱۷- در مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع  $6$  و  $8$  مجموع مربعات میانه چقدر است؟

- (۱)  $90$  (۲)  $120$  (۳)  $150$  (۴)  $180$



۱۸- در شکل زیر طول میانه‌های  $AM = 9$  و  $CN = 7/5$  می‌باشد و ضلع  $BC = 8$  است. مساحت مثلث  $ABC$  چقدر است؟

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۱۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول اضلاع زاویه قائمه  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{2}$  است. طول ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

$\frac{\sqrt{30}}{5}$  (۴)

$\sqrt{6}$  (۳)

$\sqrt{5}$  (۲)

$\frac{\sqrt{6}}{5}$  (۱)

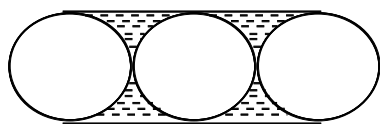
۲۰- اگر در مثلثی سه میانه رسم شود در داخل این مثلث شش مثلث به وجود می‌آید. در مورد این شش مثلث کدام گزینه صحیح است؟

(۴) هیچکدام

(۳) هم‌مساحتند

(۲) متشابهند

(۱) متساویند



۲۱- سه دایره مساوی به شعاع  $R$  مطابق شکل بر هم مماسند و مراکز آنها روی یک خط راست است. سطح هاشورخورده چقدر است؟

$2R^2(4 - \pi)$  (۴)

$R^2(8 - \pi)$  (۳)

$2R(4 - \pi)$  (۲)

$R^2(4 - \pi)$  (۱)

۲۲- از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل که طول و عرضش  $a$  و  $b$  است، یک چهارضلعی پدید می‌آید. سطح این چهارضلعی چقدر است؟

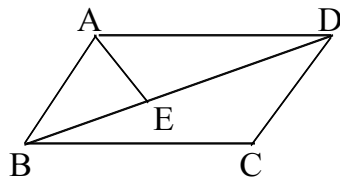
$\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  (۴)

$\frac{1}{2}(a - b)^2$  (۳)

$\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$  (۲)

$\frac{1}{2}ab$  (۱)

۲۳- در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  داریم:  $ED = 2BE$ . مساحت مثلث  $AED$  چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



$\frac{1}{3}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

$\frac{4}{9}$  (۴)

$\frac{2}{5}$  (۳)

۲۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول اضلاع  $AB = 2\sqrt{2}$  و  $AC = \sqrt{17}$  است، طول میانه وارد بر وتر چقدر است؟

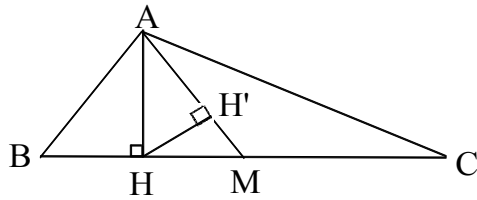
$\frac{5}{4}$  (۴)

$\frac{5}{2}$  (۳)

۵ (۲)

$\frac{2}{5}$  (۱)





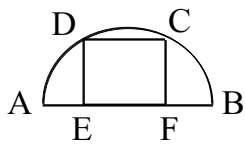
۲۵- در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $A = 90^\circ$ ) ارتفاع  $AH$  و میانه  $AM$  و  $\widehat{H'} = 90^\circ$  و  $HH' = 1$  و  $BC = 4$ ، آنگاه:

$$S_{AHM} = 2 \quad (2) \quad S_{AHM} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$S_{AHM} = 1 \quad (4) \quad S_{AHM} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

۲۶- اگر  $m_a$  و  $m_b$  و  $m_c$  به ترتیب اندازه‌های میانه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه و  $m_a$  اندازه میانه وارد بر وتر باشد آنگاه  $m_b^2 + m_c^2$  برابر است با:

$$2m_a^2 \quad (4) \quad 4m_a^2 \quad (3) \quad m_a^2 \quad (2) \quad 5m_a^2 \quad (1)$$



۲۷- در شکل زیر شعاع نیم‌دایره  $7/5$  سانتی‌متر است، مساحت مربع محاط در نیم‌دایره چند سانتیمتر مربع است؟

$$45 \quad (4) \quad 36 \quad (3) \quad 30 \quad (2) \quad 54 \quad (1)$$

۲۸- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای نسبت اضلاع زاویه قائمه  $\frac{1}{4}$  است. اگر مساحت مثلث ۹ واحد سطح باشد طول وتر چقدر است؟

$$5\sqrt{3} \quad (4) \quad 3\sqrt{5} \quad (3) \quad 3\sqrt{2} \quad (2) \quad 2\sqrt{3} \quad (1)$$

۲۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول ارتفاع وارد بر وتر نصف یکی از اضلاع زاویه قائمه است. مساحت مثلث بر حسب طول ارتفاع چقدر است؟

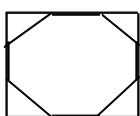
$$3h^2 \quad (4) \quad 2h^2\sqrt{3} \quad (3) \quad 2h^2 \quad (2) \quad \frac{2h^2}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

۳۰- اگر نقاط  $M_1(0, 0)$  و  $M_2(2, 0)$  و  $M_3(0, 3)$  پای میانه‌های مثلث  $ABC$  باشد، مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

$$9 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 6 \quad (2) \quad 12 \quad (1)$$

۳۱- نسبت طول دو ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای  $\frac{3}{4}$  است. اگر مساحت مثلث ۲۴ باشد طول ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

$$6 \quad (4) \quad 1/2 \quad (3) \quad 4/8 \quad (2) \quad 2/4 \quad (1)$$



۳۲- یک هشت ضلعی در یک مربع مطابق شکل محاط شده، اگر ضلع هشت ضلعی  $\sqrt{2}$  باشد ضلع مربع کدام است؟

$$2 + 2\sqrt{2} \quad (4) \quad 2 + \sqrt{2} \quad (3) \quad 1 + \sqrt{2} \quad (2) \quad 4 + \sqrt{2} \quad (1)$$

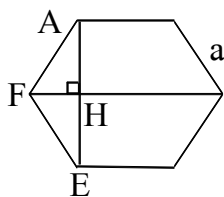
۳۳- در مثلث  $ABC$  طول  $BC = 4$  و  $\hat{A} = 60^\circ$  است. ماکزیمم مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟  
 (۱)  $8\sqrt{3}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳) ۸ (۴)  $4\sqrt{3}$

۳۴- در مثلث  $ABC$  طول  $BC = 5$  و طول میانه‌های وارد بر اضلاع دیگر ۶ و  $\frac{9}{4}$  است. طول ارتفاع  $AH$  چقدر است؟  
 (۱)  $7/2$  (۲)  $4/8$  (۳)  $3/6$  (۴)  $2/4$

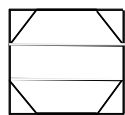
۳۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه طول وتر  $\sqrt{3}$  و طول یکی از اضلاع برابر یک است. مساحت مثلث چند برابر ضلع دیگر است؟

(۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۲ (۴)  $\sqrt{2}$

۳۶- در شش ضلعی منتظم به ضلع  $a$  (شکل زیر) حاصل  $AE \times FH$  چقدر است؟



(۱)  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$  (۲)  $a^2 \sqrt{3}$  (۳)  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  (۴)  $\frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$



۳۷- نسبت مساحت مربع به مساحت هشت ضلعی منتظم محاط در آن مطابق شکل کدام است؟  
 (۱)  $\frac{3 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$  (۲)  $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}}$  (۳)  $\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$  (۴)  $\frac{6 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}$

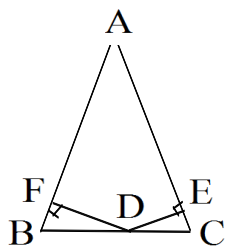
۳۸- مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است. اگر مساحت مثلث ۶ و طول ضلع  $AB$  برابر ۴ باشد آنگاه:

(۱)  $DE + DF = 3$

(۲)  $DE + DF = \frac{3}{2}$

(۳)  $DE + DF = 2$

(۴)  $DE + DF = 1$

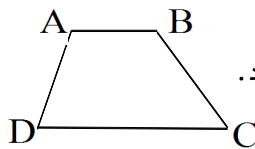


۳۹- از نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  بر دایره‌ای به شعاع دو، سه مماس  $AT$  و  $BT'$  و  $CT''$  به طولهای  $2\sqrt{3}$  رسم شده، اگر مثلث

$ABC$  متساوی‌الاضلاع باشد مساحت مثلث چقدر است؟

(۱)  $36\sqrt{3}$  (۲)  $24\sqrt{3}$  (۳)  $18\sqrt{3}$  (۴)  $12\sqrt{3}$

۴۰- نقاط  $A(3, 3)$  و  $B(-1, 1)$  و  $O(0, 0)$  سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟  
 (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۹



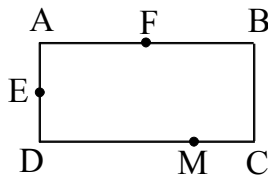
- ۴۱- ذوزنقه غیر متساوی الساقین ABCD در کدام حالت به دو ذوزنقه معادل تقسیم می‌شود؟  
 (۱) وسط AB را به وسط CD وصل کنیم.  
 (۲) وسط AD به وسط BC وصل شود.  
 (۳) از وسط AB بر CD عمود کنیم.  
 (۴) از وسط CD بر AB عمود کنیم.

۴۲- مستطیلی دارای مساحت  $1 - 8x^2$  و عرض  $1 - 2x$ ، محیط آن به چه صورت است؟

(۱)  $8x^2 + 8x$  (۲)  $4x^2 + 2x + 1$  (۳)  $4x^2 + 4x$  (۴)  $8x^2 + 4x + 2$

۴۳- مساحت مثلث ABC که در آن  $BC = \sqrt{6}$  و  $AC = 2$  و میانه CM برابر  $\frac{\sqrt{10}}{2}$  است. چقدر است؟

(۱)  $\sqrt{10}$  (۲)  $\sqrt{6}$  (۳) ۲ (۴)  $2\frac{\sqrt{3}}{3}$



۴۴- نقاط E و F اواسط اضلاع مستطیل و نقطه M روی محیط مستطیل حرکت می‌کند  
 ماکزیمم مساحت مثلث EFM چقدر است؟ ( $4 = AB$ ,  $2 = AD$ )

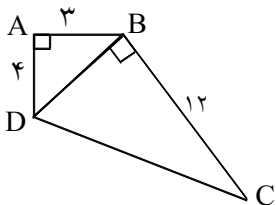
(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۳

۴۵- در مثلث ABC طول اضلاع  $a = 4$ ,  $b = 6$ ,  $c = 8$  حاصل  $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_b}$  چقدر است؟

(۱)  $\frac{9}{4}$  (۲)  $\frac{4}{9}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{2}{3}$

۴۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{8}$  طول میانه وارد بر وتر چقدر است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{10}}{2}$  (۲)  $\sqrt{10}$  (۳)  $2\sqrt{10}$  (۴)  $\frac{\sqrt{10}}{4}$

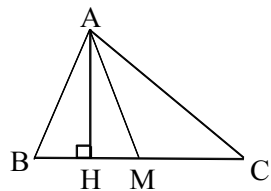


۴۷- مساحت چهار ضلعی مقابل چقدر است؟  $\angle A = \angle B = 90^\circ$   
 (۱) ۶۴ (۲) ۷۲ (۳) ۳۶ (۴) ۳۲

۴۸- در کدام گزینه مساحت مثلثی که با معلومات دو ضلع و طول میانه وارد بر ضلع سوم رسم شده بزرگتر است؟

(۱)  $a = 3$  و  $b = 4$  و  $m_c = 2/5$  (۲)  $a = 3$  و  $b = 5$  و  $m_c = 2$   
 (۳)  $a = 3$  و  $b = 3$  و  $m_c = 2$  (۴)  $a = 4$  و  $b = 4$  و  $m_c = 3$

۴۹- در شکل AH ارتفاع است و AM میانه است اگر  $AC = 17$  و  $AB = 10$  و  $AH = 8$



نسبت  $\frac{S_{AHM}}{S_{ABC}}$  کدام است؟

(۲)  $\frac{3}{7}$

(۱)  $\frac{3}{14}$

(۴)  $\frac{3}{8}$

(۳)  $\frac{3}{16}$

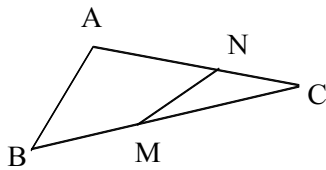
۵۰- در مثلث ABC طول ارتفاع  $h_a = 8$  و  $b = 17$  و  $c = 10$  مساحت این مثلث کدام است؟

(۴) ۸۴ و ۳۶

(۳) ۸۴ و ۴۲

(۲) فقط ۳۶

(۱) فقط ۸۴



۵۱- در شکل  $\frac{CN}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$  نسبت مساحت‌های  $\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}}$  کدام است؟

(۲)  $\frac{1}{4}$

(۱)  $\frac{1}{3}$

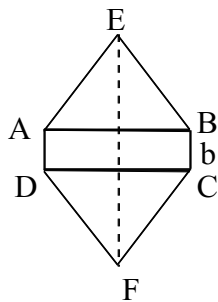
(۴)  $\frac{8}{27}$

(۳)  $\frac{2}{9}$

۵۲- بر روی طول‌های مستطیل ABCD دو مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته‌ایم. اگر نسبت مساحت

چند ضلعی AEBCFD به مستطیل ABCD برابر ۳ باشد، طول مستطیل چند برابر عرض

آن است؟



(۲)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۱)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(۴) ۲

(۳)  $\sqrt{3}$

۵۳- در شش ضلعی منتظم بزرگترین قطر چند برابر کوچکترین قطر است؟

(۴)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۳)  $\sqrt{3}$

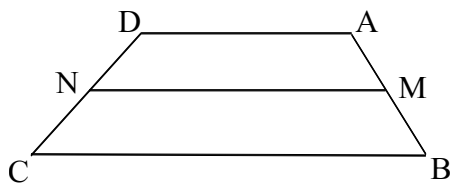
(۲) ۲

(۱)  $2\sqrt{3}$

۵۴- در دوزنقه ABCD اوساط اضلاع AB و CD را به هم وصل کرده‌ایم.

اگر مساحت چهارضلعی MBCN دو برابر مساحت چهارضلعی

AMND باشد، نسبت  $\frac{BC}{AD}$  کدام است؟



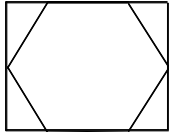
(۴) ۴

(۳) ۵

(۲) ۳

(۱) ۲

۵۵- هشت ضلعی منتظمی به ضلع یک مطابق شکل داخل مربعی محاط شده، از نظر عددی محیط مربع چند برابر مساحت آن است؟



$$\begin{aligned} & 4\sqrt{2} - 2 \quad (2) \\ & 4\sqrt{2} - 1 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{2} - 4 \quad (1) \\ & 4\sqrt{2} \quad (3) \end{aligned}$$

۵۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع  $AB = 6$  و  $AC = 4$  نسبت میانه  $BM_1$  به میانه  $CM_2$  کدام است؟ ( $\hat{A} = 90^\circ$ )

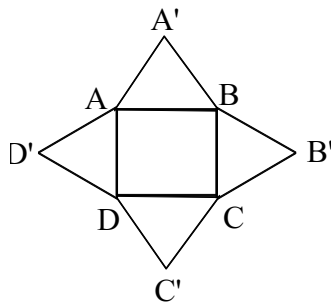
$$\frac{2\sqrt{10}}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (3)$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{5} \quad (1)$$

۵۷- در شکل زیر  $ABCD$  مربع و روی هر ضلع آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. نسبت مساحت چهار ضلعی  $A'B'C'D'$  به مربع چقدر است؟



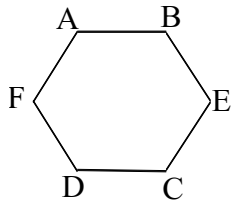
$$3 \quad (2)$$

$$3 - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (4)$$

$$1 + 2\sqrt{3} \quad (3)$$

۵۸- در شش ضلعی منتظم به ضلع دو مساحت چهار ضلعی  $ABCD$  چه قدر است؟



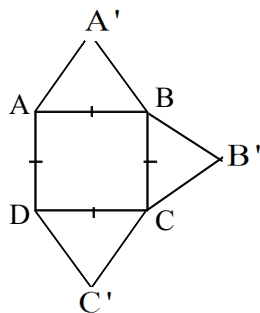
$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$1 + 2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$4\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

۵۹- روی سه ضلع مربعی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع می‌سازیم. مساحت مثلث  $A'B'C'$  چند برابر مساحت مربع است؟



$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$4 + 2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

۶۰- مساحت هشت ضلعی منتظم به ضلع  $\sqrt{2}$  کدام است؟

$$4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$4 + 4\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2 + \sqrt{2} \quad (2)$$

$$1 + \sqrt{2} \quad (1)$$

۶۱- روی قطر مربعی به ضلع  $a$  مثلث متساوی الاضلاعی می‌سازیم. مساحت مثلث چند برابر مساحت مربع است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (۳)} \quad 2\sqrt{3} \text{ (۲)} \quad \sqrt{2} \text{ (۱)}$$

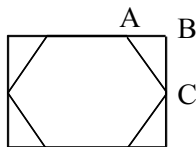
۶۲- مساحت لوزی به ضلع  $a$  که یک زاویه  $60^\circ$  دارد چند برابر شش ضلعی منتظمی به ضلع  $a$  است؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۱)}$$

۶۳- در مثلثی  $AB = \sqrt{2}$  و  $BC = \sqrt{2}$  و  $AC = 2$  میانه  $AM$  چند برابر طول نیمساز به رأس  $B$  است؟

$$\sqrt{5} \text{ (۴)} \quad \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (۲)} \quad \sqrt{10} \text{ (۱)}$$

۶۴- شش ضلعی منتظمی در مستطیل محاط شده مساحت مثلث  $ABC$  چه کسری از مساحت شش ضلعی است؟

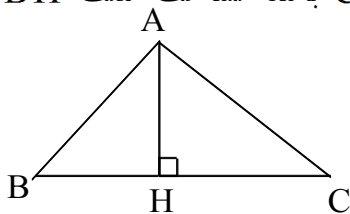


$$\frac{1}{24} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{8} \text{ (۱)} \\ \frac{1}{12} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۳)}$$

۶۵- در مثلث حاده الزاویه‌ای  $AC = 3$  و  $AB = \sqrt{6}$  و ارتفاع  $AH = \sqrt{5}$  طول بزرگترین ضلع کدام است؟

$$3 \text{ (۴)} \quad \sqrt{15} \text{ (۳)} \quad 4 \text{ (۲)} \quad 6 \text{ (۱)}$$

۶۶- در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). اگر  $BH = 2$  و  $CH = 3$  باشد مساحت مثلث  $ABH$  چند برابر مساحت مثلث  $ACH$  است؟



$$\frac{4}{9} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۱)} \\ \frac{9}{4} \text{ (۴)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۳)}$$

۶۷- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع  $2\sqrt{3}$  چند برابر ارتفاع آن است؟

$$1 \text{ (۴)} \quad \sqrt{3} \text{ (۳)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۱)}$$

۶۸- در مثلثی  $h_a = 8$  و  $m_a = 10$  و  $c = 17$  ضلع  $a$  کدام می‌تواند باشد؟

$$21 \text{ (۴)} \quad 18 \text{ (۳)} \quad 9 \text{ (۲)} \quad 6 \text{ (۱)}$$

۶۹- در مثلثی به اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ مجموع مجذورات طول سه میانه چقدر است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۲۰۰ (۴)  $\frac{800}{3}$

۷۰- در مثلث قائم الزاویه‌ای به طول اضلاع  $a$  و  $a + 7$  و  $a + 8$  طول ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

- (۱)  $\frac{60}{13}$  (۲)  $\frac{30}{13}$  (۳)  $\frac{120}{13}$  (۴) ۱۲

۷۱- اگر طول ضلع مثلث متساوی الاضلاعی عدد طبیعی باشد مساحت مثلث کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{2}$  (۳) ۲ (۴)  $\sqrt{5}$

۷۲- مساحت مثلث  $ABC$  که طول سه میانه‌ی آن اعداد ۶ و ۸ و ۱۰ است، کدام است؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۶۴ (۳) ۳۲ (۴) ۱۶۲

۷۳- مساحت مثلث  $ABC$  که طول سه میانه‌ی آن ۵ و ۵ و ۸ است چه قدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۲۶ (۴) ۱۶

۷۴- در مثلث  $ABC$  ضلع  $BC = 10$  و میانه‌ی  $AM$  برابر ۵ است. این مثلث:

- (۱) در رأس  $A$  حاده است.  
 (۲) در رأس  $A$  قائمه است.  
 (۳) در رأس  $A$  منفرجه است.  
 (۴) هر سه حالت می‌تواند باشد.

۷۵- در یک تصاعد عددی مجموع جملات اول و دوم و سوم برابر ۱۲ و مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم برابر ۴۸ است. قدرنسبت تصاعد کدام است؟

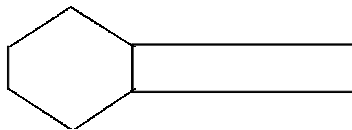
- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۷۶- در هشت ضلعی منتظمی به ضلع  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  توان دوم بزرگ‌ترین قطر چند برابر توان دوم کوچک‌ترین قطر است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳) ۴ (۴)  $2\sqrt{2}$

۷۷- بر روی ضلع مستطیلی شش ضلعی منتظم ساخته‌ایم اگر مساحت شش ضلعی  $\frac{1}{3}$  مساحت مستطیل باشد، طول مستطیل

چند برابر عرض آن است؟



- (۲)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$   
 (۴)  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۳)  $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

۷۸- در مثلث ABC که  $AB = 3$  و  $AC = 4$  و  $BC = \sqrt{7}$  طول بزرگ‌ترین میانه کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{43}}{2}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{\sqrt{37}}{2}$

۷۹- در مثلثی به طول اضلاع  $\sqrt{5}$  و ۳ و  $\sqrt{14}$  طول کوتاه‌ترین ارتفاع کدام است؟

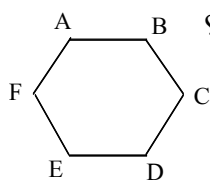
(۱)  $\frac{\sqrt{70}}{28}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳)  $\frac{3\sqrt{70}}{14}$  (۴) ۲

۸۰- در مثلث متساوی‌الاضلاعی به مساحت  $\sqrt{12}$  طول ارتفاع چه قدر است؟

(۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $3\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{6}$

۸۱- در مثلث با اضلاع  $AB = 2$  و  $BC = \sqrt{12}$  و  $AC = 4$ ، طول نیم‌ساز AD چند برابر طول میانه‌ی BM است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۲)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (۳)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\frac{3\sqrt{3}}{3}$



۸۲- در شش‌ضلعی منتظم شکل، مساحت چهارضلعی ABDE چند برابر مساحت مثلث BCD است؟

(۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴)  $2\sqrt{3}$

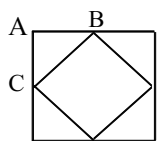
۸۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع ۷ و ۲۴، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی سه میانه از بزرگ‌ترین ضلع چه قدر است؟

(۱)  $\frac{6}{72}$  (۲)  $\frac{3}{36}$  (۳)  $\frac{2}{24}$  (۴)  $\frac{4}{48}$

۸۴- مساحت شش‌ضلعی منتظمی به ضلع  $\sqrt{12}$  چند برابر طول کوچک‌ترین قطر این شش‌ضلعی است؟

(۱)  $6\sqrt{3}$  (۲)  $12\sqrt{3}$  (۳)  $4\sqrt{3}$  (۴)  $3\sqrt{3}$

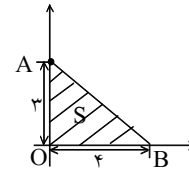
۸۵- در شکل، مساحت مربع بزرگ  $\frac{49}{25}$  مربع کوچک است. اگر ضلع مربع بزرگ ۱۴ باشد، مساحت مثلث ABC چه قدر است؟



(۱) ۴۸ (۲) ۲۴ (۳) ۱۲ (۴) ۶



## جواب مساحت و فیثاغورس- آزاد

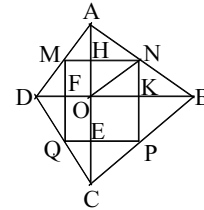


$$S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

-۱

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲- هرگاه AC و BD اقطار چهار ضلعی بوده و از O به N وصل کنیم داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AN = NB \\ AM = MD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{طبق رابطه} \\ \text{تالس} \end{array} \rightarrow AH = HO \Rightarrow S_{\widehat{AHN}} = S_{\widehat{NHO}} \Rightarrow S_{\widehat{NOK}} = S_{\widehat{NKB}} \text{ به همین ترتیب}$$

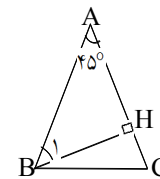
$$S_{\widehat{HNKO}} = \frac{1}{2} S_{\widehat{AOB}}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} S_{\widehat{HOFM}} = \frac{1}{2} S_{\widehat{AOD}} \\ S_{\widehat{OEQF}} = \frac{1}{2} S_{\widehat{COD}} \\ S_{\widehat{OEPK}} = \frac{1}{2} S_{\widehat{BOC}} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{\widehat{MNPQ}} = \frac{1}{2} S_{\widehat{ABCD}}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = 45^\circ \Rightarrow AH = BH = 3 \\ S_{\widehat{ABC}} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} \times 3 \times AC = \frac{9}{2} (1 + \sqrt{3}) \Rightarrow AC = 3 + 3\sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$



$$CH = 3\sqrt{3} \Rightarrow BC = \sqrt{CH^2 + BH^2} = \sqrt{27 + 9} = 6$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۴- فرض کنیم G مرکز ثقل مثلث باشد، با توجه به اینکه مرکز ثقل، میانه‌ها را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند:

$$\frac{GM}{AG} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$$

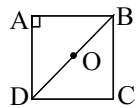
$$\text{رابطه فیثاغورث: } BC^2 = AC^2 + AB^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC = 5$$

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} AB \times AC \Rightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$GK \parallel AH \xrightarrow{\text{طبق رابطه تالس}} \frac{GK}{AH} = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow GK = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \times \frac{12}{5} = \frac{4}{5}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ درست است.

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}a \Rightarrow AB + BD = a + \sqrt{2}a = a(\sqrt{2} + 1)$$



بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BON}: BO^2 + ON^2 = BN^2 \Rightarrow \frac{4}{9}m_b^2 + \frac{1}{9}m_c^2 = \frac{AB^2}{4} \\ \widehat{COM}: CO^2 + OM^2 = CM^2 \Rightarrow \frac{4}{9}m_c^2 + \frac{1}{9}m_b^2 = \frac{AC^2}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB^2 + AC^2}{4} = \frac{5}{9}(m_b^2 + m_c^2)$$

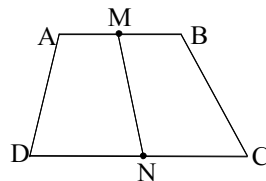
$$\Rightarrow \frac{AB^2 + AC^2}{4} = \frac{5}{9}(m_b^2 + m_c^2)$$

$$\widehat{BOC}: BO^2 + CO^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) = BC^2 \Rightarrow m_b^2 + m_c^2 = \frac{9}{4}BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = 5BC^2$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۶- خط MN دوزنقه را به دو دوزنقه کوچکتر که ارتفاعشان برابر است تقسیم می‌کند.

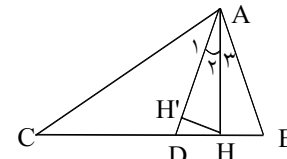


$$\left. \begin{array}{l} S_{AMND} = \frac{1}{2}h(AM + DN) \\ AM = MB, DN = CN \\ S_{BMNC} = \frac{1}{2}h(BM + CN) \end{array} \right\} \Rightarrow S_{AMND} = S_{BMNC}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۸- یادآوری: هرگاه یک زاویه از مثلث قائمه‌ای  $15^\circ$  باشد، ارتفاع وارد بر وتر

$\frac{1}{4}$  وتر است.



$$\left. \begin{aligned} \widehat{A_1} &= 90^\circ - \widehat{B} \\ \widehat{A_1} + \widehat{A_2} &= 90^\circ - \widehat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_2 + A_1 - A_3 = \widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{A_2} = 15^\circ \Rightarrow HH' = \frac{1}{4}AD$$

$$\widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{A_1}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۹- می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع  $a$  برابر  $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  است.

$$AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad AC = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

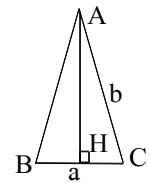
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$$

مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است، پس مساحت آن برابر است با:

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۰- میدانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد، پس:

$$AH = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}} \Rightarrow$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot AH = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}} = \frac{1}{4}a \sqrt{4b^2 - a^2}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۱- یادآوری: مساحت مثلثی با طول اضلاع  $a$  و  $b$  و زاویه بین  $\alpha$  برابر  $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$  است.

$$\cos A = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۲- در یک دایره، مساحت قطعه‌ای به زاویه مرکزی  $90^\circ$  برابر با  $\frac{1}{4}$  مساحت دایره است، پس:

$$S_{\text{ماشور زده}} = S_{AOB} - S_{\widehat{AOB}} = \frac{1}{4}S_{\text{دایره}} - S_{\widehat{AOB}} = \frac{1}{4}(\pi R^2) - \frac{1}{4}AO \cdot BO =$$

$$R^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right) = 9\pi - 18 = 9(\pi - 2)$$

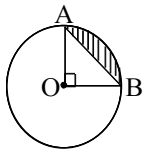
بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۳- زاویه مقابل به چهارضلعی منتظم محاط در دایره (مربع) برابر  $90^\circ$  است.

$$S = \text{سطح هاشور خورده} = S_{AOB} - S_{\widehat{AOB}} = \frac{1}{4}S_{\text{دایره}} - \frac{1}{4}AO \cdot OB \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{4}R^2 = R^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} S_{\text{متوازی الاضلاع}} &= AK \times CD \\ S_{\widehat{MCD}} &= \frac{1}{2}(CD \times MH) \\ AB \parallel CD &\Rightarrow MH = AK \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\text{متوازی الاضلاع}} = 2S_{\widehat{MCD}} \quad -14$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۵- می‌دانیم اندازه قطر مربع به طول  $a$  برابر  $\sqrt{2}a$  است، پس:

$$a + \sqrt{2}a = a(\sqrt{2} + 1) = 2 + \sqrt{8} = 2(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow S_{\text{مربع}} = a^2 = 4$$

پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۶- بزرگترین ضلع مثلث (وتر) برابر  $a + 2$  است، پس طبق رابطه فیثاغورث:

$$(a + 2)^2 = (a + 1)^2 + a^2 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 = a^2 + 2a + 1 + a^2 \Rightarrow 2a + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۷- می‌دانیم در مثل قائمه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است. طبق رابطه فیثاغورث:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = 5$$

$$\left. \begin{aligned} BN^2 &= AB^2 + AN^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4} \\ CP^2 &= AC^2 + AP^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4} \\ AM^2 &= \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow BN^2 + CP^2 + AM^2 = \frac{5}{4}(AB^2 + AC^2) + \frac{BC^2}{4}$$

$$= \frac{5}{4}(36 + 64) + \frac{100}{4} = 150$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۸- می‌دانیم در هر مثلث، میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند.

$$\left. \begin{aligned} OM &= \frac{1}{3}AM = 3 \\ CO &= \frac{2}{3}CN = 5 \\ CM &= \frac{1}{3}BC = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5^2 = 4^2 + 3^2 \xrightarrow{\text{طبق عکس فیثاغورث}} \hat{M} = 90^\circ$$

بین اضلاع مثلث COM رابطه فیثاغورث برقرار است و در نتیجه مثلث قائمه است. پس:

$$\widehat{ABC} \Rightarrow S_{\widehat{ABC}} = \frac{1}{2}AM \times BC = \frac{1}{2} \times 9 \times 8 = 36$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۹- رابطه فیثاغورث:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow BC = \sqrt{5}$

$$S_{\widehat{ABC}} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در دو مثلث با ارتفاع یکسان، نسبت مساحت‌ها برابر با نسبت قاعده‌هایشان است.

$$\frac{S_{BOM}}{S_{COM}} = \frac{BM}{CM} = 1$$

$$S_{AOP} = S_{BOP}, S_{AON} = S_{CON}$$

به همین ترتیب:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{OH}{AK} = \frac{OM}{AM} = \frac{1}{3} \\ \frac{S_{BOC}}{S_{BOC}} = 2S_{BOM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{BOM} = \frac{1}{6}S_{ABC}$$

از طرفی:

بنابراین مساحت هر مثلثی که ایجاد می‌گردد،  $\frac{1}{6}$  مساحت کل می‌باشد، در نتیجه ۶ مثلث بوجود آمده، معادلند (هم‌مساحت هستند).

۲۱- به علت تقارن موجود در شکل، مساحت چهار قسمت هاشور خورده با یکدیگر برابر است.

$$S_{\text{قطوع}} = S_{ABOO'} - (S_{AOC} + S_{BO'C}) = S_{ABOO'} - 2S_{AOC}$$

چون شعاع دو دایره با هم برابر است، مماس مشترک خارجی AB موازی و برابر OO' است. قطوع AOC ربع دایره است، پس مساحت آن نیز برابر ربع مساحت دایره است.

$$S_{\text{هاشور خورده}} = AB \times AO - 2 \left( \frac{1}{4} \pi R^2 \right) = 2R \times R - \frac{\pi R^2}{2} = 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\text{هاشور زده } S = 4 \left( 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2} \right) = 8R^2 - 2\pi R^2 = 2R^2(4 - \pi)$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 = \hat{D}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{N} = 90^\circ, AN = DN \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{M} = 90^\circ, AM = BM \\ \widehat{AND} = \widehat{BQC} \Rightarrow AN = BQ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

به علت تقارن شکل

$$AM - AN = BM - BQ \Rightarrow MN = MQ$$

بنابراین چهارضلعی MNPQ مربع است.

$$MN = AM - AN = \frac{\sqrt{2}}{2}AB - \frac{\sqrt{2}}{2}AD = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) \Rightarrow S_{MNPQ} = MN^2 = \frac{1}{2}(a - b)^2$$

بنابراین گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۲۸- یادآوری: در مثلث قائمه، مساحت مثلث برابر با نصف حاصلضرب اضلاع زاویه قائمه است.  
مطابق شکل داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \\ \frac{AB}{BC} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 4 = \frac{1}{2} AB \cdot (2AB) \Rightarrow \begin{cases} AB = 2 \\ BC = 4 \end{cases}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

طبق رابطه فیثاغورث:

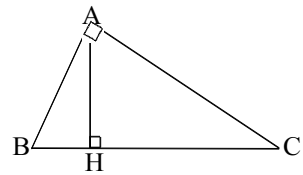
بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۹- فرض کنیم  $AH = \frac{AC}{2}$  باشد. بنابراین در مثلث قائم الزاویه  $ACH$ ، ضلع

$AH$  نصف وتر است، پس:

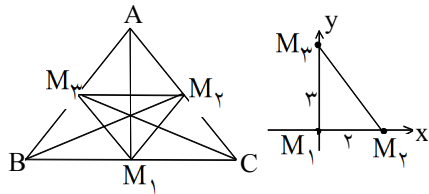
$$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 30^\circ$$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2AC}{\sqrt{3}}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AH \cdot \frac{2AC}{\sqrt{3}} = \frac{AH}{\sqrt{3}} \cdot AC = \frac{AH}{\sqrt{3}} \cdot 2AH = \frac{2AH^2}{\sqrt{3}}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ درست است.



۳۰- مثلثی که رئوس پای میانه‌های مثلثی است، با آن مثلث

مشابه و نسبت تشابه آنها  $\frac{1}{4}$  است. در دو شکل مشابه،

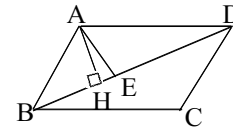
نسبت مساحت‌های دو شکل برابر با مجذور نسبت تشابه دو شکل است.

با توجه به مختصات داده شده،  $M_1$  و  $M_2$  و  $M_3$  رئوس

یک مثلث قائم‌الزاویه در رئوس  $M_1$  را می‌سازند. پس:

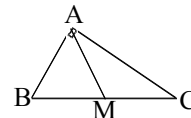
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle M_1 M_2 M_3}} = (\gamma)^2 = 4 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 4 S_{\triangle M_1 M_2 M_3} = 4 \left[ \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \right] = 12$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABE}} &= \frac{AH \times DE}{AH \times BE} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{2}{3} \\ \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABCD}} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABCD}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$



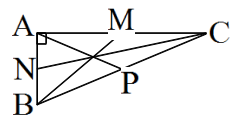
۲۴- می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.  
رابطه فیثاغورث:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8 + 17 = 25 \Rightarrow BC = 5 \Rightarrow$   
 $AM = \frac{1}{2} BC = \frac{5}{2}$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۵- در مثلث قائمه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس:

$$AM = \frac{BC}{2} = 2 \Rightarrow S_{\triangle AHM} = \frac{1}{2} \times AM \times HH' = \frac{1}{2} (2 \times 1) = 1$$

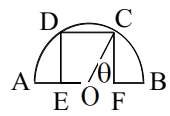
بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۲۶- رابطه فیثاغورث

$$\begin{cases} m_b^2 = AB^2 + AM^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} \Rightarrow m_b^2 + m_c^2 = \frac{5}{4}(b^2 + c^2) = \frac{5}{4}a^2 \\ m_c^2 = AC^2 + AN^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} \end{cases}$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است بنابراین:  
بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سؤال است.



۲۷- به علت تقارن شکل، O وسط EF قرار دارد.

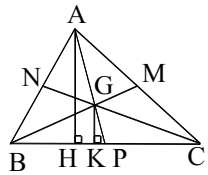
$$\begin{cases} OF = \frac{EF}{2} \Rightarrow OF = \frac{CF}{2} \\ EF = CF \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{4} CF^2 = R^2$$

$$S_{\text{مربع}} = CF^2 = \frac{4}{5} R^2 = \frac{4}{5} \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 45$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح سؤال است.

۳۴- می‌دانیم فاصلهٔ هم‌رسی میانه‌های مثلث از یک رأس برابر  $\frac{2}{3}$  طول میانه است.

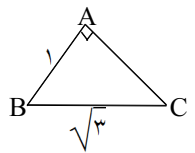
$$\left. \begin{aligned} BG &= \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}(6) = 4 \\ CG &= \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\right) = 3 \\ BC &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} BC^2 = BG^2 + CG^2 \Rightarrow \widehat{BGC} = 90^\circ \\ S_{\triangle BGC} = \frac{1}{2}BG \cdot CG = 6 \end{cases}$$



$$\frac{S_{\triangle BGC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{GK \cdot BC}{AH \cdot BC} = \frac{GK}{AH} = \frac{GP}{AP} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BGC} = 3 \times (6) = 18$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = 18 \Rightarrow AH = \frac{36}{BC} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$$

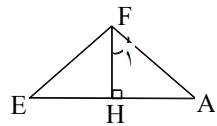
بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.



۳۵- رابطه فیثاغورث:  $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 1 + AC^2 = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}AC$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.



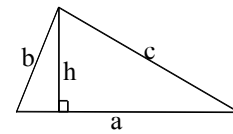
۳۶- مثلث AEF متساوی‌الساقین است. می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ یک شش‌ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{\text{مجموع زوایای مثلث‌های تشکیل دهنده ی آن}}{6} = \frac{4 \times 180}{6} = 120^\circ$$

$$\widehat{F}_1 = \widehat{AFE} = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \widehat{F}_1 = \frac{1}{2} = \frac{FH}{AF} \Rightarrow FH = \frac{a}{2} \\ \sin \widehat{F}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{AF} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ AE = 2AH = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \sqrt{3}a \end{cases}$$

$$AE \times FH = \sqrt{3}a \times \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

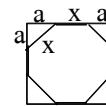
بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.



$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}c \\ S = \frac{1}{2}bc \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}c\right)c = 24 \Rightarrow c = 8, b = 6$$

رابطه فیثاغورث:  $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \Rightarrow S = \frac{1}{2}ah \Rightarrow 24 = \frac{1}{2}10h \Rightarrow h = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$

پس گزینه ۲ پاسخ درست است.



$$x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$$

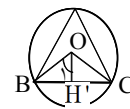
$$\text{طول ضلع مربع} = x + 2a = 2 + \sqrt{2}$$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق شکل مقابل:



۳۳- قاعده BC از مثلث ثابت است بنابراین مساحت مثلث زمانی ماکزیمم است که ارتفاع AH ماکزیمم گردد و این ارتفاع زمانی که از مرکز دایره بگذرد به حداکثر مقدار خود می‌رسد ( $A'H'$ )

$$\widehat{A}' = 60^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{O}_1 = \frac{\widehat{BOC}}{2} = 60^\circ \quad (1)$$



$$\text{tg } \widehat{O}_1 = \frac{BH'}{OH'} = \frac{BC}{2} \Rightarrow OH' = \frac{BC}{2 \text{tg } 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Sin } \widehat{O}_1 = \frac{BH'}{BO} = \frac{BH'}{R} \Rightarrow R = \frac{BH'}{\text{Sin } 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$A'H' = A'O + OH' = R + OH' = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle A'BC} = \frac{A'H' \times BC}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 4}{2} = 4\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.