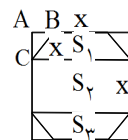


۳۷- هرگاه طول ضلع ۸ ضلعی برابر x باشد، خواهیم داشت:



$$AB = \frac{\sqrt{2}}{2}x \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = x + 2AB = (\sqrt{2} + 1)x = a$$

مساحت ۸ ضلعی مرکب از ۲ دوزنقه و ۱ مستطیل است. قاعده‌های دوزنقه x و a و ارتفاع آن برابر $AB = AC$ است. در نتیجه داریم:

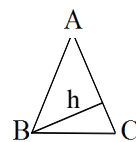
$$S_{\text{ضلعی ۸}} = 2S_1 + S_2 = 2\left(\frac{(x+a) \cdot AC}{2}\right) + x \cdot a = (x+a)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + ax$$

$$\frac{S_{\text{مربع}}}{S_{\text{ضلعی ۸}}} = \frac{a^2}{ax + \frac{\sqrt{2}}{2}x(a+x)} = \frac{[(\sqrt{2}+1)x]^2}{x\left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}(a+x)\right)} = \frac{(3+2\sqrt{2})x^2}{x\left((\sqrt{2}+1)x + \frac{\sqrt{2}}{2}((\sqrt{2}+2)x)\right)}$$

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1+1+\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

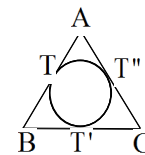
۳۸- یادآوری: مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از ساقها برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.



$$S_{ABC} = \frac{h \cdot AC}{2} = 6 \Rightarrow h = \frac{12}{AC} = 3 \Rightarrow DE + DF = h = 3$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۹- مطابق شکل طول ضلع مثلث برابر است با:

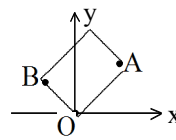


$$AB = AT + BT = AT + BT' = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

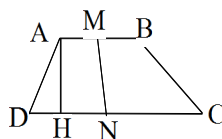
۴۰- با توجه به شکل مساحت مستطیل برابر است با:



$$OA \cdot OB = \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۴۱- می‌دانیم مساحت هر دوزنقه برابر است با نصف مجموع دو قاعده ضربدر ارتفاع.



$$S_{AMND} = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2}\right)AH \Rightarrow S_{AMND} = \frac{1}{4}(AB + CD)AH = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

بنابراین مساحت اشکال $AMND$, $MBCN$ برابر بوده و هر کدام نصف مساحت $ABCD$ هستند. بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

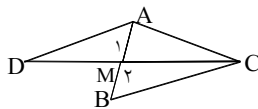
۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{مساحت مستطیلی} = ax \quad b = \lambda x^3 - 1 = a \times (2x - 1) \Rightarrow a = \frac{\lambda x^3 - 1}{2x - 1} = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\text{محیط مستطیلی} = 2(a + b) = 2(2x^2 + 2x + 1 + 2x - 1) = 8x^2 + 8x$$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هرگاه میانه‌ی CM را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D

امتداد دهیم، خواهیم داشت:



$$\left. \begin{array}{l} CM = MD \\ AM = MB \\ M_1 = M_2 \text{ (متقابل به راس)} \end{array} \right\} \widehat{AMD} = \widehat{BMC} \Rightarrow S_{ABC} = S_{ACD}$$

باتوجه به اینکه بین اضلاع مثلث ACD رابطه‌ی فیثاغورث برقرار است. بنابراین می‌توان گفت این مثلث در رأس A قائمه است.

$$CD = \sqrt{10}, \quad AC = 2 \quad \text{و} \quad AD = BC = \sqrt{6} \Rightarrow S_{ACD} = \frac{AD \times AC}{2} = \frac{\sqrt{6} \times 2}{2} = \sqrt{6}$$

۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه در مثل EFM، ضلع EF ثابت است، بنابراین مساحت فوق زمانی ماکزیمم خواهد بود که ارتفاع وارد بر ضلع EF یعنی MH ماکزیمم باشد.

چون نقطه M روی خطی موازی EF و بفصلی MH از آن قرار دارد. بیشترین مقدار MH زمانی خواهد بود که این خط اضلاع مستطیل را مطابق شکل مقابل تنها در ۱ نقطه قطع کند و آن حالتی است که نقطه M بر رأس C منطبق گردد، در این حالت طول ارتفاع MH برابر است با:

$$\left. \begin{array}{l} AF = FB \\ AE = ED \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BD} = \frac{AM}{AN} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} AM = \frac{1}{2} AN = MN \\ EF = \frac{BD}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow CH = CK + HK = AN + MN = \frac{3}{2} AN$$

در مثل قائمه‌ی ABD و AN ارتفاع وارد بر وتر می‌باشد، در نتیجه:

$$AB \cdot AD = AN \cdot BD \Rightarrow AN = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{4 \times 2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow CH = \frac{3}{2} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}, \quad BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{20}$$

$$S_{\widehat{CEF}} = \frac{EF \cdot CH}{2} = \frac{\frac{BD}{2} \times CH}{2} = \frac{\frac{\sqrt{20}}{2} \times \frac{6}{\sqrt{5}}}{2} = 3$$

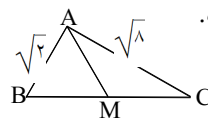
و نهایتاً داریم:

$$S_{\widehat{ABC}} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{h_c}{h_b} = \frac{b}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_b} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. یاد آوری: میانه‌ی وارد بر وتر در مثل قائمه، نصف وتر است.

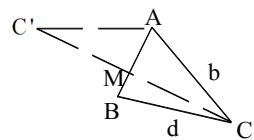


$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2 + 8} = \sqrt{10} \Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چهارضلعی از دو مثلث قائمه تشکیل شده است.

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$S_{\text{کل}} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{3 \times 4}{2} + \frac{5 \times 12}{2} = 36$$



۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر میانه CM را به اندازه خودش امتداد دهیم نقطه C' حاصل می‌شود که همواره: مساحت AC'C = مساحت ABC

در گزینه ۱ اضلاع ۵ و ۴ و ۳ هستند که

در گزینه ۲ اضلاع ۴ و ۵ و ۳ هستند که

در گزینه ۳ اضلاع ۴ و ۳ و ۳ هستند

در گزینه ۴ اضلاع ۴ و ۴ و ۶ هستند

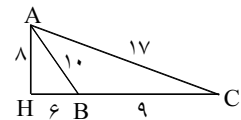
۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} HC = \sqrt{17^2 - 6^2} = 15 \\ BH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \quad BC = 21 \\ MH = \frac{BC}{2} - BH = 10.5 - 6 = 4.5 \end{array} \right\} \frac{S_{AHM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4.5}{15}}{\frac{1}{2} \times \frac{6}{21}} = \frac{3}{14}$$

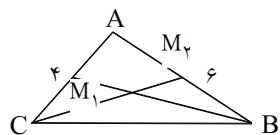
۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حالت اول:

با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} HC = \sqrt{17^2 - 6^2} = 15 \\ BH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \end{array} \right. \Rightarrow BC = 21 \Rightarrow S = \frac{BC \times h_a}{2} = \frac{21 \times 8}{2} = 84$$



$$S = \frac{BC \times h_a}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36 \quad \text{حالت دوم:}$$



۵۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$BM_1 = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \Rightarrow \frac{BM_1}{CM_1} = \frac{\sqrt{40}}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$CM_1 = \sqrt{16 + 9} = 5$$

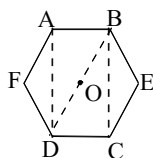
۵۷- گزینه ۴ صحیح است. می‌دانیم مساحت مربع برابر است با نصف مجذور قطرش:

$$BC = x = A'B$$

$$A'C' = 2 \left(\frac{\sqrt{r}}{r} A'B \right) + BC = (\sqrt{r} + 1)x = A'B'C'D'$$

قطر مربع $A'B'C'D'$

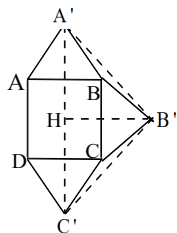
$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} (\sqrt{r} + 1)^2 x^2}{x^2} = \frac{r + 2\sqrt{r}}{2} = 2 + \sqrt{r}$$



۵۸- گزینه ۴ صحیح است. چهارضلعی ABCD یک مستطیل است.

$$\left. \begin{array}{l} AB = 2 \\ BD = 2OB = 2AB = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow BC = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$



۵۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مربع $BC = a$

$$B'H = \frac{\sqrt{r}}{r} a + \frac{a}{r}$$

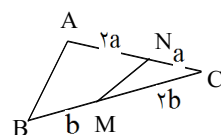
$$A'C' = 2B'H$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{B'H \times A'C'}{2} = (B'H)^2 = \left(\frac{\sqrt{r} + 1}{r} \right)^2 a^2$$

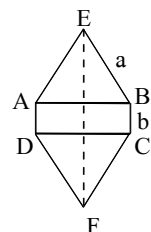
$$S_{ABCD} = a^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABCD}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{r} + 1}{r} \right)^2 a^2}{a^2} = \left(\frac{\sqrt{r} + 1}{r} \right)^2 = \frac{r + 2\sqrt{r}}{r} = 1 + \frac{\sqrt{r}}{r}$$

۵۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر مثلث، مساحت برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع آن در سینوس زاویه بین دو ضلع است.



$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{ra \times rb \sin C}{2} \\ S_{MNC} = \frac{a \times b \sin C}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \frac{2}{9}$$



۵۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S_{AEBCFD} = 2S_{ABCD}$$

$$ab + 2 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 2ab \Rightarrow ab = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{rb}{\sqrt{3}} = a$$

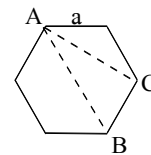
$$\frac{a}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۵۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

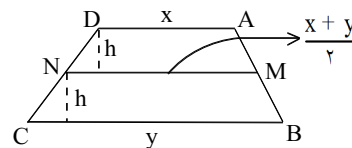
$$AB = 2a$$

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2aa \cos 120} = a\sqrt{3}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

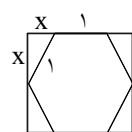


۵۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{(x+y+y)}{2} \times h}{\frac{(x+y+x)}{2} \times h} = 2 \Rightarrow \frac{x+2y}{2x+y} = 2 \Rightarrow 2x = y$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = 2$$



$$x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{مربع} = 2x + 1 = \sqrt{2} + 1$$

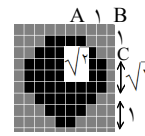
$$\text{محیط مربع} = 4(\sqrt{2} + 1)$$

$$\text{مساحت مربع} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{محیط مربع} = 4(\sqrt{2} + 1) \\ \text{مساحت مربع} = (\sqrt{2} + 1)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{محیط مربع}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{4(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)^2} = 4(\sqrt{2} - 1)$$

۵۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل داریم:

۶۰- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل ۸ ضلعی را در مربعی محاط می‌کنیم.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$$

$$S_{\text{ضلعی ۸}} = S_{\text{مربع}} - 4S$$

$$\text{مساحت هشت ضلعی} = (2 + \sqrt{2})^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 + 4\sqrt{2} - 2 = 4 + 4\sqrt{2}$$

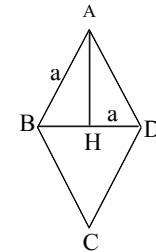
۶۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: قطر هر مربع به ضلع a برابر $a\sqrt{2}$ می‌باشد، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است.

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$S_2 = a^2$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

۶۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$S_{\text{لوزی}} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \times a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{2}}{\frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$S' = 6 \times \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}$$

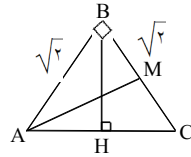
۶۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

$$\Delta ABM: AM = \sqrt{2 + \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$BH = 1$ میانه‌ی وارد بر وتر است.

$$\frac{AM}{BH} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$



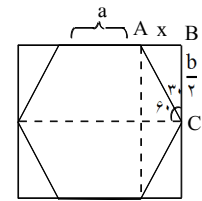
$$\widehat{ABC}: x = \frac{a}{2}$$

۶۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} = a^2 \Rightarrow \frac{b^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$b = \sqrt{3}a \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{شش ضلعی}} = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

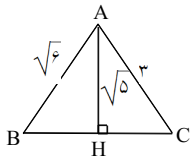
$$\frac{S_{\text{مثلث}}}{S_{\text{شش ضلعی}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{8}}{\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}} = \frac{1}{12}$$

$$HC = \sqrt{9 - 5} = 2$$

$$BH = \sqrt{6 - 5} = 1$$

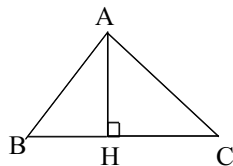
$$BC = 3$$

۶۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



بزرگ‌ترین ضلع ۳

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BH}{\frac{1}{2}AH \times CH} = \frac{BH}{CH} = \frac{1}{2}$$

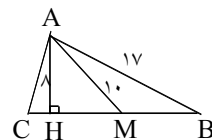


۶۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

۶۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

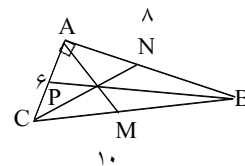
$$\begin{cases} S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \\ h = \frac{a \sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{h} = \frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

۶۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} \triangle AHM \Rightarrow HM &= \sqrt{100 - 64} = 6 \\ \triangle AHB \Rightarrow HB &= \sqrt{289 - 64} = 15 \\ MB = MC = 9 &\Rightarrow BC = a = 18 \end{aligned}$$

۶۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

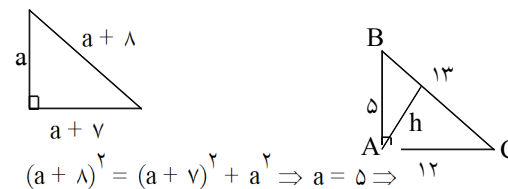


$$\begin{aligned} BP^2 &= 6^2 + 9^2 = 13 \\ CN^2 &= 3^2 + 16^2 = 52 \\ AM &= \frac{BC}{2} \Rightarrow AM^2 = 25 \\ BP^2 + CN^2 + AM^2 &= 150 \end{aligned}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = 150$$

راه دوم:

۷۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.



$$(a+8)^2 = (a+v)^2 + a^2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 12$$

$$13h = 5 \times 12 \Rightarrow h = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13} \quad h \times BC = AB \times AC$$

۷۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. اگر a ضلع مثلث متساوی الاضلاع باشد آنگاه $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. اگر a عدد طبیعی باشد و

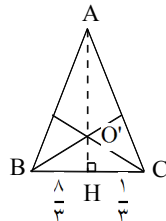
$$a = 1 \text{ آنگاه } S = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ که در گزینهها نیست و اگر } a = 2 \text{ آنگاه } S = \sqrt{3} \text{ که در گزینهی ۱ وجود دارد.}$$

۷۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. اگر m_a, m_b, m_c طول سه میانهی مثلث ABC باشد (مساحت مثلث ساخته شده

$$S_{ABC} = \frac{4}{3} \left(\frac{6 \times 8}{2} \right) = 32 \text{ پس مساحت مثلث } ABC \text{ پس}$$

۷۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث متساوی الساقین میانهی وارد بر قاعده ارتفاع نیز هست.

$$HC = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{64}{9}} = 2$$



$$S_{ABC} = 6 \times S_{OHC} = 6 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} = 16$$

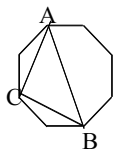
۷۴- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. چون میانه وارد بر یک ضلع نصف آن است پس مثلث قائم الزاویه است.

۷۵- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12 \\ a_1 + 6d + a_1 + 7d + a_1 + 8d = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = 12 \\ 3a_1 + 21d = 48 \end{cases} \Rightarrow \frac{3a_1 + 21d}{18d} = \frac{36}{36} \Rightarrow d = 2$$

۷۶- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. در n ضلعی منظم هر زاویه داخلی $\frac{\pi}{n}$ است و زاویه بین دو قطر متوالی یا یک ضلع و

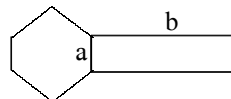
قطر مجاور آن $\frac{\pi}{n}$ است. پس با توجه به شکل مثلث ABC قائم الزاویه متساوی الساقین است،



$$AB = AC\sqrt{2} \text{ و } AC = CB \text{ بنابراین } \frac{AB}{AC} = \sqrt{2} \text{ است.}$$

۷۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

مساحت مستطیل $\frac{1}{3}$ = مساحت 6 ضلعی

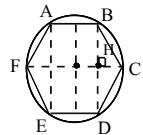


$$6 \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} ab \Rightarrow \frac{b}{a} = 18 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

۸۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. دایره‌ی محیطی شش‌ضلعی را در نظر بگیریم. اگر شعاع این دایره را $R=1$ فرض کنیم می‌توانیم از نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° و 60° نتیجه بگیریم که:

$$\begin{cases} BD = 2BH = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \\ AB = 2OH = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ CH = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{ABDE} = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \\ S_{BCD} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABDE}}{S_{BCD}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 4$$



۸۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

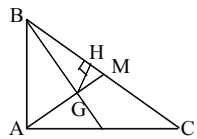
$$BC = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$$

$$S_{ABC} = \frac{7 \times 24}{2} = 12 \times 7 = 84$$

$$S_{GMB} = \frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{1}{6} \times 84 = 14$$

$$S_{BGM} = \frac{1}{2} GH \times BM \Rightarrow 14 = \frac{1}{2} GH \times \frac{25}{2} \Rightarrow GH = \frac{2}{25}$$

۸۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



$$\frac{\text{مربع بزرگ}}{\text{مربع کوچک}} = \frac{S}{S'} = \frac{49}{25} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{14}{a'} \Rightarrow a' = 10$$

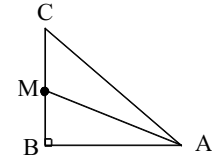
$$\Rightarrow S_{AB} = \frac{1}{2}(S - S') = \frac{1}{2}((14)^2 - (10)^2) = \frac{96}{2} = 48$$

۸۵- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

۷۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. چون $BC^2 + AB^2 = AC^2$ پس مثلث ABC در رأس B قائمه است. بزرگ‌ترین میانه بر کوچک‌ترین ضلع فرود می‌آید.

$$\widehat{ABM} : AM^2 = MB^2 + AB^2$$

$$AM^2 = \left(\frac{\sqrt{43}}{2}\right)^2 + 9 = \frac{43}{4} + 9 = \frac{43}{4} + \frac{36}{4} = \frac{79}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{79}}{2}$$

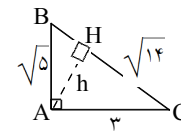


۷۹- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. مثلث با ابعاد $\sqrt{14}$, ۳, $\sqrt{5}$ قائم الزویه است زیرا: $(\sqrt{14})^2, 3^2, (\sqrt{5})^2$

کوتاه‌ترین ارتفاع بر بزرگ‌ترین ضلع فرود می‌آید پس کوتاه‌ترین ارتفاع بر وتر فرود می‌آید.

$$AB \times AC = AH \times BC$$

$$3\sqrt{5} = h\sqrt{14} \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{70}}{14}$$



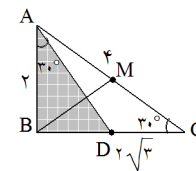
۸۰- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ارتفاع و مساحت به ترتیب $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ است.

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{12} \Rightarrow a^2 = \frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8}$$

$$\text{ارتفاع } h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$$

۸۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مثلث را با طول اضلاع داده شده رسم می‌کنیم. این مثلث در رأس B قائم الزویه

است. چون در رابطه‌ی فیثاغورث صدق می‌کند. (\widehat{ABC}) مثلث قائم الزویه است. پس میانه‌ی BM نصف وتر است، یعنی $BM = 2$. اما برای محاسبه‌ی طول نیم‌ساز زاویه‌ی A یعنی AD، دقت کنید که ضلع AB نصف وتر است، پس حتماً $\widehat{C} = 30^\circ$ و $\widehat{A} = 60^\circ$ است. پس:



$$\widehat{ABD} : \cos A = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{AD}{BM} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

تالیس و تشابه - سراسری

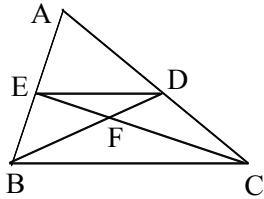
۱- اندازه محیطهای دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۵ و ۸ است، اگر مساحت مثلث بزرگتر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچکتر کدام است؟

$$6\frac{2}{9} \text{ (۴)}$$

$$7\frac{2}{9} \text{ (۳)}$$

$$6\frac{1}{9} \text{ (۲)}$$

$$7\frac{1}{9} \text{ (۱)}$$



۲- در مثلث ABC شکل زیر به فرض آنکه پاره خطهای BD و CE میانههای اضلاع مثلث باشند نسبت مساحت مثلث EFD به مساحت مثلث ABC کدام است؟

$$\frac{1}{8} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{12} \text{ (۱)}$$

$$\frac{1}{5} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{6} \text{ (۳)}$$

۳- در کدام حالت دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه‌اند؟

- (۱) وترها و ارتفاعهای نظیر دو وتر متناسب باشند.
 (۲) وترها و شعاع دایره محیطی متناسب باشند.
 (۳) وترها و مربع‌های یک ضلع دیگر متناسب باشند.
 (۴) وترها و میان‌های نظیر دو وتر متناسب باشند.

۴- طول ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه ۲۴ و نسبت دو پاره خطی که ارتفاع روی وتر پدید می‌آورد $\frac{9}{16}$ است طول وتر کدام است؟

$$55 \text{ (۴)}$$

$$50 \text{ (۳)}$$

$$45 \text{ (۲)}$$

$$40 \text{ (۱)}$$

۵- نقاط M, N, P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC را به هم وصل می‌کنیم. اگر پیرامون مثلث MNP برابر ۶ باشد، آنگاه پیرامون مثلث ABC کدام است؟

$$12 \text{ (۴)}$$

$$10 \text{ (۳)}$$

$$8 \text{ (۲)}$$

$$6 \text{ (۱)}$$

۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر جدا می‌کند به ترتیب $\frac{6}{4}$ و $\frac{3}{6}$ است. در این صورت، مجموع دو ضلع مجاور به زاویه قائمه کدام است؟

$$16 \text{ (۴)}$$

$$14 \text{ (۳)}$$

$$12 \text{ (۲)}$$

$$10 \text{ (۱)}$$

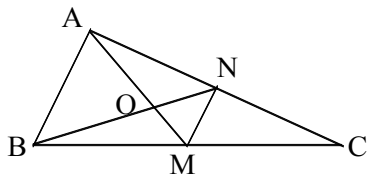
۷- در شکل زیر AM و BN دو میانه مثلث می‌باشند. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث OMN است؟

$$9 \text{ (۲)}$$

$$8 \text{ (۱)}$$

$$15 \text{ (۳)}$$

$$12 \text{ (۳)}$$



۸- اوساط یک چهارضلعی محیطی را به هم وصل کردیم حاصل الزاماً کدام چهارضلعی است؟

- (۱) لوزی
 (۲) مستطیل
 (۳) یک چهارضلعی محیطی
 (۴) متوازی‌الاضلاع

۹- نسبت مساحت شش ضلعی منتظم محیطی به مساحت شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره به شعاع R چقدر است؟

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{6}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

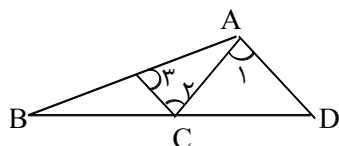
۱۰- در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد، مربعی محاط کرده‌ایم. طول ضلع این مربع کدام است؟

$$4 - 2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} - 1 \quad (3)$$

$$2\sqrt{3} - 3 \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} - 2 \quad (1)$$



۱۱- در شکل زیر زوایای $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$ ، اگر $AB = 15$ ، $AC = 6$ باشد، $\frac{BD}{CD}$ چقدر است؟

$$\frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

۱۲- کدام دو چهارضلعی متشابه‌اند؟

(۱) دو مستطیل

(۲) دو متوازی‌الاضلاع که زاویه مساوی دارند

(۳) دو لوزی که یک زاویه مساوی داشته باشند

(۴) دو ذوزنقه متساوی‌الساقین که زوایای مساوی داشته باشند

۱۳- در مربعی به ضلع ۴ واحد فاصله وسط یک ضلع از قطر مربع کدام است؟

$$1 \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

۱۴- مثلث به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ با مثلث به اضلاع ۵ و X و Y متشابه است اگر $X > 5$ و $Y > 5$ باشند. $X + Y$ کدام است؟

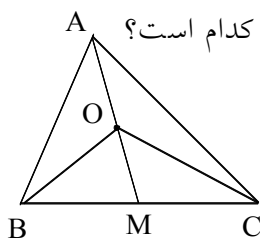
$$21 \quad (4)$$

$$\frac{61}{3} \quad (3)$$

$$20 \quad (2)$$

$$\frac{58}{3} \quad (1)$$

۱۵- در شکل مقابل، مساحت مثلثهای ABC، OBC را به ترتیب S و S' می‌نامیم. نسبت $\frac{OM}{AM}$ کدام است؟



$$\left(\frac{S'}{S}\right)^2 \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{S'}{S}} \quad (1)$$

$$\frac{S'}{S} \quad (4)$$

$$\frac{S - S'}{S} \quad (3)$$

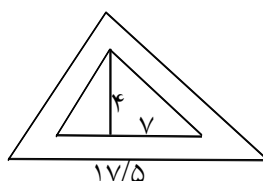
۱۶- در شکل مقابل مساحت مثلث بزرگتر کدام است؟

$$87/5 \quad (2)$$

$$88/5 \quad (1)$$

$$77/5 \quad (4)$$

$$78/5 \quad (3)$$



۱۷- نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی منتظم برابر $\frac{4}{9}$ است. اگر اندازه ضلع یکی از آنها ۶ باشد، اندازه ضلع دیگر برابر است با:

(۴) ۵ یا ۱۳

(۳) ۸ یا ۹

(۲) ۴ یا ۹

(۱) ۴ یا ۸

۱۸- در مثلث ABC، E روی AB و بین A و B و F روی AC و بین A و C است. در کدام حالت دو مثلث ABC و AEF متشابهند؟

(۱) $AF = 2, EB = 5, FC = 4, AE = 3$

(۲) $AF = 4, EB = 10, FC = 6, AE = 6$

(۳) $AF = 7, EB = 3, FC = 2, AE = 10$

(۴) $AF = 12, EB = 4, FC = 8, AE = 6$

۱۹- اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه k^2 باشد، آنگاه نسبت محیط‌های آنها کدام است؟

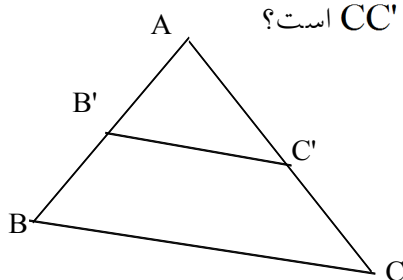
(۴) $3k$

(۳) $k + 3$

(۲) k

(۱) $\frac{k}{3}$

۲۰- در شکل زیر $BC \parallel B'C'$ و $AB = 10\text{cm}$ و $AB' = 3\text{cm}$ ، AC' چند برابر CC' است؟



(۲) $\frac{4}{10}$

(۱) $\frac{3}{10}$

(۴) $\frac{7}{10}$

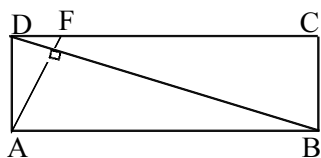
(۳) $\frac{3}{7}$

۲۱- اوساط اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کرده‌ایم، حاصل، یک مستطیل شده است. این چهارضلعی الزاماً کدام است؟

(۴) متوازی‌الاضلاع

(۳) مستطیل

(۱) دوزنقه متساوی‌الساقین (۲) لوزی



۲۲- در شکل زیر چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. F نقطه‌ای روی ضلع DC است بطوری که $AF \perp DB$. اگر $AB = 3DA$ ، DC چند برابر DF است؟

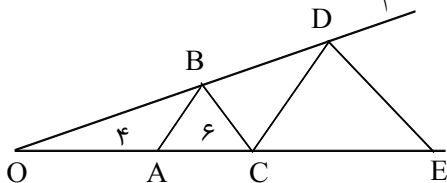
(۲) ۹

(۱) ۸

(۴) ۶

(۳) ۴

۲۳- در شکل زیر $BC \parallel DE, AB \parallel CD$ ، $OA = 4$ ، $AC = 6$ اندازه CE کدام است؟



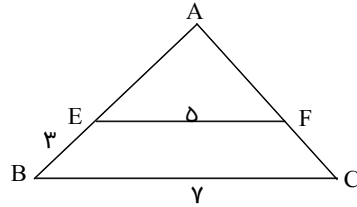
(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

(۴) ۱۸

۲۴- در مثلث شکل زیر، $EF \parallel BC$ ، $BC = 7$ ، $EF = 5$ ، $EB = 3$ سانتیمتر است. طول AE چند سانتیمتر است؟



- است؟
 (۱) ۶/۵
 (۲) ۵/۵
 (۳) ۶
 (۴) ۷/۵

۲۵- اندازه دو ضلع مقابل از یک چهارضلعی محدب برابرند. اوساط دو قطر و اوساط دو ضلع مقابل دیگر آن همواره رأسهای کدام چهار ضلعی است؟

- (۱) دوزنقه متساوی الساقین (۲) چهارضلعی محاطی (۳) لوزی (۴) متوازی الاضلاع

۲۶- در یک مثلث قائم الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر مساحت مثلث جدید است؟

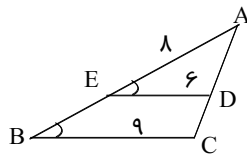
- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۲۷- AH ارتفاع مثلث قائم الزاویه ABC ، $(\hat{A} = 90^\circ)$ و HK ارتفاع مثلث AHB می باشد. کدام دو مثلث متشابه نیستند؟

- (۱) ABC و AKC (۲) AHB و AHC (۳) AHK و BHK (۴) ABH و AHK

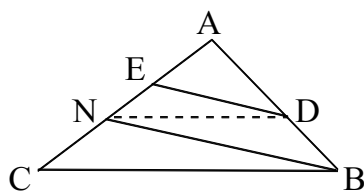
۲۸- کدام دو شکل همواره متشابه نیستند؟

- (۱) هر دو مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین
 (۲) هر دو لوزی که یک زاویه برابر داشته باشند
 (۳) هر دو شش ضلعی منتظم
 (۴) هر دو مستطیل



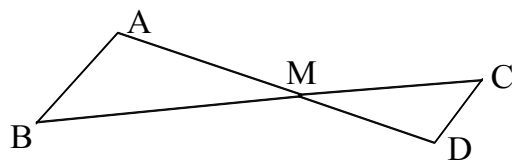
۲۹- در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{E}$ ، $AE = 8$ ، $ED = 6$ ، $BC = 9$ ، طول BE کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) ۴/۲
 (۳) ۴/۴
 (۴) ۴/۶



۳۰- در شکل مقابل $DE \parallel BN$ و $DN \parallel BC$ و $AE = 4$ و $EN = 6$ ، اندازه AC کدام است؟

- (۱) ۱۸
 (۲) ۲۰
 (۳) ۲۴
 (۴) ۲۵

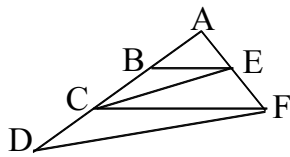


۳۱- در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{5}$ ، نسبت مساحت های دو مثلث از آن شکل کدام است؟

- (۱) ۳/۲
 (۲) ۲/۵
 (۳) ۹/۴
 (۴) ۲۵/۹

۳۲- طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتیمتر و طول کوچکترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اولی، $\frac{۲۲}{۵}$ سانتیمتر است. محیط مثلث دوم کدام است؟

- (۱) ۱۰۲ (۲) $\frac{۱۰۲}{۵}$ (۳) ۱۰۳ (۴) $\frac{۱۰۳}{۵}$

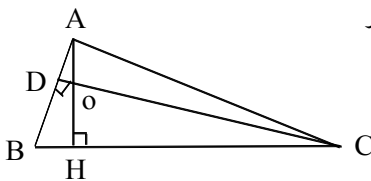


۳۳- در شکل مقابل $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$ ، اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$ آنگاه اندازه CD کدام است؟

- (۱) $\frac{۴}{۵}$ (۲) $\frac{۴}{۸}$ (۳) $\frac{۵}{۴}$ (۴) $\frac{۵}{۶}$

۳۴- یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های همنهشت است؟

- (۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۳۵- در شکل مقابل AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند اگر

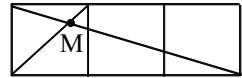
$$DO = ۵, AD = OH = \frac{1}{3} HC = ۱۲ \text{ طول } HC \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۱۶۵ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۷۵ (۴) ۱۸۰

۳۶- نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگتر چند سانتی‌متر است؟

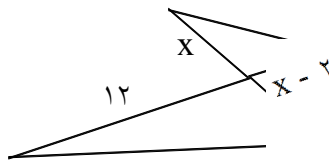
- (۱) $۲۱\sqrt{۲}$ (۲) $۲۱\sqrt{۳}$ (۳) $۲۴\sqrt{۲}$ (۴) $۲۴\sqrt{۳}$

۳۷- در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند، فاصله MA چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



- (۱) $\frac{1}{۳}$ (۲) $\frac{1}{۴}$ (۳) $\frac{۲}{۹}$ (۴) $\frac{1}{۵}$

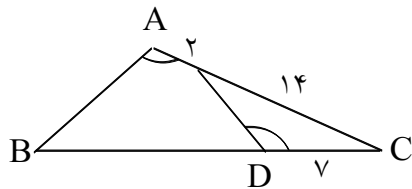
۳۸- در شکل مقابل دو مثلث متشابه‌اند، نسبت مساحت آن دو مثلث کدام است؟



- (۱) $\frac{۹}{۴}$ (۲) $\frac{۹}{۱۶}$ (۳) $\frac{۲}{۳}$ (۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۹- در مثلث قائم الزاویه ABC داریم $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

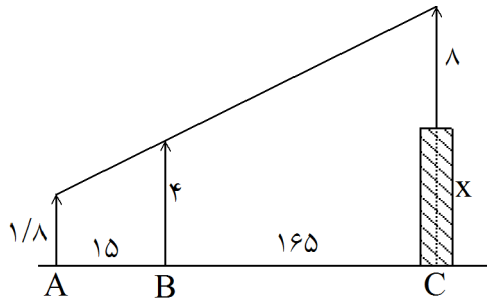


۴۰- در شکل مقابل $\hat{A} = \hat{D}$ ، طول BD چند واحد است؟

- (۱) ۲۲
(۲) ۲۳
(۳) ۲۴
(۴) ۲۵

۴۱- در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 50^\circ$ و ضلع $AB = 18$ ، در مثلث MNP داریم: $\hat{N} = 60^\circ$ و $\hat{M} = 70^\circ$. اگر مساحت مثلث ABC برابر $\frac{9}{4}$ مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چه قدر است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۶
(۳) ۲۴
(۴) ۲۷



۴۲- در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع $\frac{1}{8}$ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است، بلندی برج چند متر است؟

- (۱) $\frac{19}{8}$
(۲) $\frac{20}{2}$
(۳) $\frac{20}{8}$
(۴) $\frac{21}{2}$

۴۳- در دوزنقه‌ای به طول قاعده‌ها ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه M متقاطع‌اند، فاصله M از قاعده‌ی بزرگ‌تر، چه قدر است؟

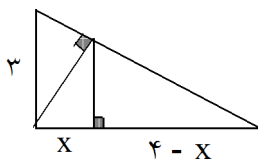
- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

۴۴- مثلث ABC مفروض است. با کنار هم قرار دادن کدام تعداد مثلث‌هایی برابر مثلث مفروض، می‌توان مثلثی متشابه با مثلث مفروض ساخت؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۲۷
(۳) ۲۵
(۴) ۲۴

۴۵- در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 2\hat{B}$ ، کدام رابطه بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟ (ضلع b مقابل زاویه‌ی B است.)

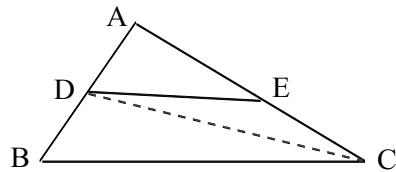
- (۱) $a^2 = bc$
(۲) $b^2 = ac$
(۳) $a^2 - b^2 = bc$
(۴) $a^2 - c^2 = bc$



۴۶- در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی X کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{44}$
(۲) $\frac{1}{56}$
(۳) $\frac{1}{64}$
(۴) $\frac{1}{96}$

۴۷- در شکل مقابل، $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ و $DE \parallel BC$ ، مساحت مثلث ADE چند درصد مثلث DEC است؟



۷۰ (۱)

۷۵ (۲)

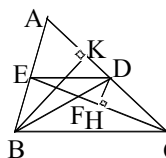
۷۸ (۳)

۸۴ (۴)

جواب تالس و تشابه - سراسری

۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم در دو مثلث متشابه نسبت محیط ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحتها برابر مجذور نسبت تشابه است.

$$\frac{S}{S'} = \left[\frac{yp}{y'p'} \right]^2 = k^2 \Rightarrow \frac{25}{S'} = \left(\frac{15}{8} \right)^2 = \frac{225}{64} \Rightarrow S' = \frac{64 \times 25}{225} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$



۲- یادآوری: مرکز ثقل مثلث میانهها را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می کند و هرگاه اوساط دو ضلع مثلثی را بهم وصل کنیم پاره خط حاصل موازی ضلع سوم مثلث است. در مثلثهایی که ارتفاع یکسان دارند مساحتها به نسبت اضلاع متناظر ارتفاعهای یکسان است و نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه برابر با مربع نسبت اضلاع آنها است. در این مساله اولاً ارتفاع مشترک دو مثلث DFC و FDE برابر DH است بنابراین:

$$S_{FBC} = 2S_{FDE} \quad \text{پس داریم:} \quad S_{FBC} = 2S_{FDE} \\ S_{DBC} = S_{BFC} + S_{DFC} = 6S_{FDE} \quad (I)$$

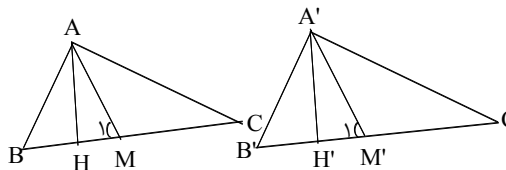
ارتفاع مشترک دو مثلث ABC و DBC است. بنابراین نسبت مساحت آنها برابر نسبت قاعده متناظر با

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \frac{AC}{CD} = 2 \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{DBC} \quad (II)$$

ارتفاع یکسان است یعنی:

$$(I), (II) \Rightarrow S_{ABC} = 12S_{FDE} \Rightarrow \frac{S_{FDE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{12}$$

پس گزینه ۱ جواب صحیح است.



۳- یادآوری: در مثلث قائم الزویه میانه نظیر وتر برابر نصف وتر و برابر شعاع دایره محیطی است بنابراین در دو مثلث قائمه همواره وترها و میانههای نظیر دو وتر متناسبند و نیازی به تشابه ندارند و متناسب بودن مربع یک ضلع به

نسبت ضلع دیگر دلیل تشابه نیست پس حالت تشابه در گزینه های ۲ و ۳ و ۴ ممکن نیست ولی حالت تشابه در حالت ۱ به سهولت قابل اثبات است.

می دانیم در مثلث قائمه میانه نظیر وتر نصف وتر است:

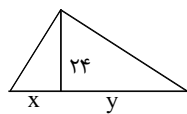
$$BC = 2AM, B'C' = 2A'M' \\ \frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{AH}{A'H'} \Rightarrow \widehat{AHM} \approx \widehat{A'H'M'} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M'_1}$$

$$AM = MC \Rightarrow \text{زاویه خارجی } M_1 = 2C, \widehat{M'_1} = 2C' \Rightarrow \begin{cases} C = C' \\ A = A' = 90 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{A'B'C'} \quad (\text{به حالت دو زاویه})$$

لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴- یادآوری: در مثلث قائم الزویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی است بین دو پاره خط ایجاد شده توسط ارتفاع روی وتر، بنابراین:



$$\begin{cases} xy = (24)^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{9}{16} \end{cases} \Rightarrow xy \times \frac{x}{y} = (24)^2 \times \frac{9}{16} \Rightarrow x^2 = (24)^2 \left(\frac{3}{4} \right)^2$$

$$\Rightarrow x = 24 \times \frac{3}{4} = 18, y = \frac{16}{9}x = 32$$

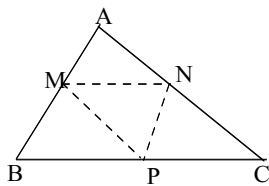
طول وتر برابر $x + y = 18 + 32 = 50$ است لذا گزینه ۳ صحیح است.

۵- می دانیم اندازه پاره خطی که وسط دو ضلع را در مثلث به هم وصل می کند،

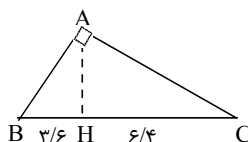
نصف ضلع سوم است. (قضیه تالس) بنابراین محیط مثلث MNP نصف محیط

مثلث ABC خواهد بود چون طول اضلاعش نصف طول اضلاع مثلث ABC

است. بنابراین محیط ABC برابر با ۱۲ است. پس گزینه ۴ صحیح است.



۶- می دانیم در مثلث قائم الزویه، هر ضلع قائم واسطه هندسی وتر و تصویر آن ضلع بر وتر است. پس:



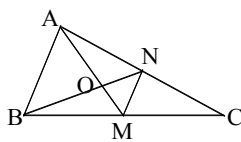
$$\begin{cases} AB^2 = BC \cdot BH = 36 \\ AC^2 = BC \cdot CH = 64 \\ BC = BH + CH = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 6 \\ AC = 8 \end{cases} \Rightarrow AB + AC = 14$$

پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

$$\frac{OM}{AM} = \frac{ON}{BN} = \frac{1}{3}$$

۷- می دانیم در هر مثلث نقطه تلاقی میانهها، میانه را به نسبت ۱/۳ تقسیم می کند یعنی:

اگر در دو مثلث، مساحتها S و S' و ارتفاع مشترک h و قاعدهها a و a' باشند.



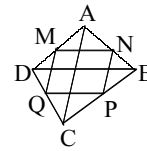
نسبت مساحتهای آنها برابر است با $\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a'h} = \frac{a}{a'}$ یعنی نسبت مساحتی

دو مثلث با ارتفاع یکسان برابر نسبت قاعدههای نظیر ارتفاع مشترک می باشد. همچنین هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند. لذا داریم:

$$\frac{S_{MNO}}{S_{MNB}} = \frac{NO}{NB} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{MNO} = \frac{1}{3}S_{MNB} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}S_{NBC} \right) = \frac{1}{6}S_{NBC} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}S_{ABC} \right) = \frac{1}{12}S_{ABC}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۸- در صورتی که ABCD یک چهارضلعی کوژ (محدب) باشد و M، N، P، Q به ترتیب اوساط اضلاع AD، AB، BC و CD باشند. (طبق قضیه تالس) داریم:



$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel \frac{1}{2}BD \\ PQ \parallel \frac{1}{2}BD \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel PQ, \quad \left. \begin{array}{l} NP \parallel \frac{1}{2}AC \\ MQ \parallel \frac{1}{2}AC \end{array} \right\} \Rightarrow NP \parallel MQ$$

بنابراین اضلاع روبرو چهارضلعی MNPQ با یکدیگر موازی و مساوی بوده و چهار ضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع است. می‌دانیم در چهار ضلعی محیطی، مجموع اضلاع روبرو برابر با مجموع دو ضلع دیگر می‌باشند یعنی: $AB + DC = AD + BC$. که این مطلب، نتیجه دیگری را به نتیجه بدست آمده اضافه نمی‌کند. بنابراین چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع بوده و گزینه ۴ صحیح است.

۹- می‌دانیم نسبت مساحت دو شکل متشابه برابر مجذور نسبت تشابه دو شکل است همچنین ۲، n ضلعی منتظم همواره متشابه هستند.

طول ضلع ۶ ضلعی منتظم محاط در دایره برابر شعاع دایره است یعنی: $R = C_6$. همچنین طول ضلع ۶ ضلعی محیط

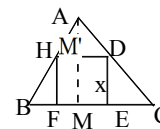
$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{C'_6}{C_6}\right)^2 = \left(\frac{2R \frac{\sqrt{3}}{3}}{R}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

بر دایره برابر $2R \operatorname{tg} 30^\circ = 2R \frac{\sqrt{3}}{3}$ می‌باشد پس داریم:

یعنی گزینه ۳ صحیح است.

نکته: طول ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R برابر $C_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ و طول ضلع n ضلعی منتظم محیطی برابر $C'_n = 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ است.

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر طول ضلع مربع x باشد، داریم:



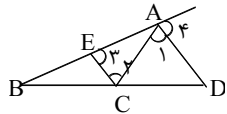
$$DH \parallel BC \quad \widehat{ADH} \Rightarrow \sim \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{AM'}{AM} = \frac{DH}{BC} \Rightarrow \frac{AM - x}{AM} = \frac{x}{BC}$$

در مثلث متساوی‌الاضلاع، اندازی ارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر ضلع آن است پس $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، پس:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - x = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow (\sqrt{3} + 2)x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = 2\sqrt{3} - 3$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

روش اول:



می‌دانیم در هر مثلث نیمساز خارجی هر زاویه ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند. پس طبق شکل مقابل داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{1} = \hat{2} \\ \text{مورب AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CE \parallel AD \\ \text{مورب AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{3} = \hat{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{3} = \hat{4} \\ \hat{3} = \hat{1} \text{ (طبق سوال)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{4} = \hat{1}$$

در نتیجه AD نیمساز برونی زاویه A از مثلث ABC است.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

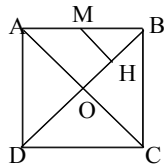
پس:

روش دوم:

در روش اول اثبات گردید که $AD \parallel CE$ طبق قضیه تالس داریم:

$$AD \parallel CE \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE} \\ \hat{2} = \hat{3} \Rightarrow AE = AC \text{ (طبق سوال)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{2}$$

۱۲- دو چند ضلعی زمانی متشابه هستند که زوایای متناظر باهم برابر و اضلاع متناظر متناسب باشند. در دو مستطیل نسبت طولها به عرضها می‌تواند برابر نباشد. در دو متوازی‌الاضلاع نسبت دو ضلع مجاور می‌تواند برابر نباشد. در دو دوزنقه با زاویه‌های مساوی نسبت قاعده‌ها بر ساقها می‌تواند برابر نباشد. اما دو لوزی که یک زاویه برابر دارند همواره متشابه‌اند. چون نسبت اضلاع همواره برابر بوده و هرگاه یک زاویه برابر داشته باشند زوایای دیگرشان نیز باهم برابر است. پس گزینه ۳ صحیح است.



۱۳- مطابق شکل، می‌دانیم AC بر BD عمود و آن را نصف می‌کند پس:

$$AB = 4 \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow AO = 2\sqrt{2}$$

نقاط M و H به ترتیب وسطهای AB و OB هستند. پس:

$$\text{قضیه تالس: } \frac{MH}{AO} = \frac{BM}{AB} = \frac{BH}{BO} = \frac{1}{2} \Rightarrow MH = \frac{1}{2}AO = \sqrt{2}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۴- در دو مثلث متشابه، اضلاع متناظر، متناسبند. چون X و Y از ضلع سوم خود یعنی ضلع بطول ۵ بزرگترند، پس ضلع

بطول ۵ کوچکترین ضلع مثلث است و با عدد ۳ متناسب می‌باشد پس:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x+y}{5+5} = \frac{5}{3} \Rightarrow x+y = 20$$

پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث‌های با قاعده‌های یکسان، نسبت مساحتها برابر با نسبت ارتفاعها می‌باشد، بنابراین طبق شکل روبرو داریم:

$$\frac{OM}{AM} = \frac{OK}{AH} = \frac{OK \times BC}{AH \times BC} = \frac{2S'}{2S} = \frac{S'}{S}$$

۱۶- دو مثلث متشابه‌اند و مساحت مثلث کوچکتر برابر $S' = \frac{1}{4} \times 4 \times 7 = 7$ می‌باشد.

در دو شکل متشابه نسبت مساحتها، مربع نسبت تشابه می‌باشد پس داریم:

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{17/5}{7}\right)^2 = \left(\frac{17}{35}\right)^2 \Rightarrow S = 2 \times 7 \times \left(\frac{35}{17}\right)^2 = 87/5$$

یعنی گزینه ۲ صحیح است.

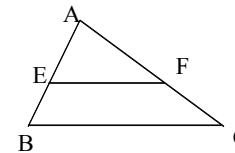
۱۷- دو پنج‌ضلعی منظم همواره با یکدیگر متشابه‌اند و نسبت مساحتهای آنها برابر با مربع نسبت تشابه آنها یا مربع اضلاع آنها است، پس نسبت اضلاع دو چند ضلعی برابر با $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ می‌باشد. اگر ضلع کوچکتر را ۶ فرض کنیم در

این صورت $\frac{6}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 9$ و اگر ضلع بزرگتر را ۶ فرض کنیم $\frac{a}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 4$ طول ضلع دیگر می‌شود. پس اندازه ضلع دیگر ۴ یا ۹ است و گزینه ۲ جواب صحیح است.

۱۸- می‌دانیم اگر $EF \parallel BC$ باشد، دو مثلث AEF و ABC متشابه‌اند و شرط توأزی

$\frac{AE}{AF} = \frac{EB}{FC}$ ، BC و EF می‌باشد (رابطه تالس). این تناسب فقط در گزینه ۴

صادق است که در آن $\frac{6}{12} = \frac{4}{8}$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۱۹- در دو مثلث متشابه، نسبت مساحتها برابر است با مربع نسبت اضلاع، پس نسبت اضلاع برابر k است لذا:

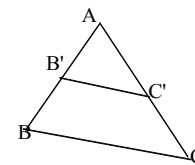
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \Rightarrow \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{ka'+kb'+kc'}{a'+b'+c'} = k$$

لذا گزینه ۲ جواب صحیح است.

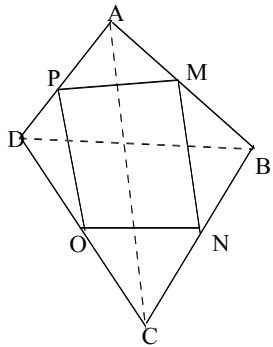
۲۰- بنابر قضیه تالس، اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر را به یک نسبت تقسیم می‌کند، پس:

$$\frac{AC'}{CC'} = \frac{AB'}{BB'} = \frac{3}{10-3} = \frac{3}{7} \Rightarrow AC' = \frac{3}{7}CC'$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.



۲۱- با توجه به چهارضلعی مقابل، چون M و N وسط AB و BC است، طبق قضیه تالس:



$$\left. \begin{array}{l} MN = \frac{AC}{2} \\ MN \parallel AC \\ OP = \frac{AC}{2} \\ OP \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} MN = OP \\ MN \parallel OP \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MP = NO \\ MP \parallel NO \end{array} \right.$$

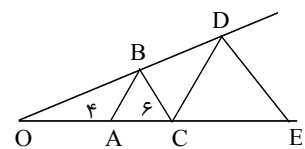
به همین صورت:

یعنی در هر ۴ ضلعی، با وصل کردن اواسط اضلاع، یک متوازی‌الاضلاع بوجود می‌آید که اضلاع آن موازی اقطار چهارضلعی است. پس برای اینکه این متوازی‌الاضلاع مستطیل شود، کافی است که اقطار این چهارضلعی بر هم عمود شوند. با توجه به گزینه‌های داده شده، فقط در لوزی الزاماً دو قطر برهم عمود هستند. لذا گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۲- در دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و AFD زاویه‌های \hat{A}_1 ، \hat{B}_1 با هم برابرند، چون هر دو متمم زاویه \hat{D}_1 هستند. پس این دو مثلث متشابه‌اند. بنابراین: از طرفی داریم $\frac{AD}{DF} = \frac{AB}{AD}$ پس $AD = \frac{1}{3}AB$

$$\frac{\frac{1}{3}AB}{DF} = \frac{AB}{\frac{1}{3}AB} \Rightarrow DF = \frac{1}{9}AB = \frac{1}{9}DC \Rightarrow DC = 9DF$$

لذا گزینه ۲ صحیح است.



۲۳- با توجه به خطوط موازی و قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OC}{CE} = \frac{OB}{BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OC}{CE} = \frac{OA}{AC} \Rightarrow$$

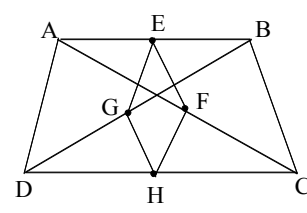
$$\frac{4+6}{CE} = \frac{4}{6} \Rightarrow CE = 15$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

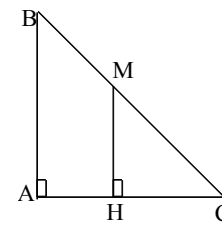
۲۴- با توجه به قضیه تالس چون $EF \parallel BC$ لذا دو مثلث AEF و ABC متشابه هستند بنابراین اضلاع متناظر، متناسبند پس:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{AE+3} = \frac{5}{7} \Rightarrow 7AE = 5AE + 15 \Rightarrow 2AE = 15/2$$

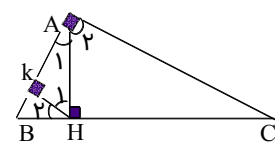
پس گزینه ۴ صحیح است.



۲۵- در مثلث ABC چون EF وسط دو ضلع AB و AC را به هم وصل کرده، پس $EF = \frac{1}{2}BC$ (قضیه تالس) و در مثلث ACD نیز به دلیل مشابه $FH = \frac{1}{2}AD$ است، به همین ترتیب در مثلثهای ABD و BDC می توان دید $EG = \frac{1}{2}AD$ و $GH = \frac{1}{2}BC$ و چون AD با BC برابر است، پس چهار ضلع چهارضلعی بدست آمده با هم برابر بوده و چهار ضلعی، لوزی است. پس گزینه ۳ صحیح است.



۲۶- می دانیم در مثلث قائمه مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب اضلاع زاویه قائمه. ابتدا شکل مورد نظر را رسم می کنیم داریم: طبق رابطه تالس $MH = \frac{1}{2}AB$ پس:
 $S_{CHM} = \frac{1}{2}HC \times MH$
 $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \times AB = \frac{1}{2} \times 2HC \times 2MH = 4S_{CHM}$
 پس گزینه ۳ صحیح است.



۲۷- با توجه به شکل تمام مثلثها غیر از گزینه ۱ دارای شرایط تشابه می باشند. طبق شکل خواهیم داشت:
 $\left. \begin{aligned} \widehat{B} + H_2 &= 90 \\ \widehat{H}_1 + H_2 &= 90 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{H}_1 \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AHK} \sim \widehat{ABH} \\ \widehat{AHK} \sim \widehat{BHK} \end{cases}$
 $\left. \begin{aligned} \widehat{B} &= \widehat{A}_2 \\ \widehat{A}_1 &= \widehat{H}_2 \end{aligned} \right\} \widehat{AHC} \Rightarrow \sim \widehat{AHB}$
 به همین ترتیب:
 پس گزینه ۱ صحیح است. یعنی ABC و AKC دارای حالت تشابه نیستند.

۲۸- می دانیم دو شکل، زمانی متشابه هستند که زاویهها نظیر به نظیر برابر و اضلاع متناظر، متناسب باشند. با توجه به تعریف تشابه هر دو مستطیل نمی توانند با هم متشابه باشند زیرا نسبت اضلاعشان متفاوت است. پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۹- چون زوایای B و E برابرند در نتیجه $BC \parallel ED$ خواهد شد مطابق قضیه تالس داریم:
 $\frac{BC}{ED} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{9}{6} = \frac{x+8}{8} \Rightarrow 72 = 6x + 48 \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4$
 بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۳۰-

طبق رابطه تالس $\frac{AE}{EN} = \frac{AD}{DB} = \frac{4}{6}$
 طبق رابطه تالس $\frac{AD}{DB} = \frac{AN}{NC} = \frac{4}{6}$
 $\left. \begin{aligned} \frac{AE}{EN} &= \frac{AD}{DB} = \frac{4}{6} \\ \frac{AD}{DB} &= \frac{AN}{NC} = \frac{4}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{NC} = \frac{4}{6} \Rightarrow NC = 15 \Rightarrow AC = AN + NC = 25$
 $AN = AE + EN = 10$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۳۱- یادآوری: نسبت مساحت ۲ شکل متشابه مجذور نسبت تشابه ۲ شکل است.

$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{S_{CDM}}{S_{ABM}} = \left(\frac{DM}{AM}\right)^2$
 $\frac{AM}{AD} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{2}{3}$
 $\Rightarrow \frac{S_{CDM}}{S_{ABM}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

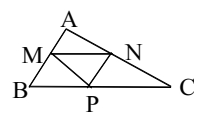
۳۲- نسبت تشابه ۲ مثلث متشابه برابر نسبت اضلاع متناظر است. اگر طول دو ضلع دیگر مثلث X و Y باشد داریم:

$\frac{22/5}{5} = \frac{x}{y} = \frac{y}{11}$
 ضلع به طول ۵ از مثلث اول با ضلع ۲۲/۵ از مثلث دوم متناظر است

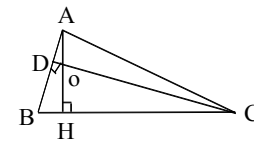
چون هر دو کوچکترین ضلع ۲ مثلث هستند.
 $\Rightarrow \begin{cases} x = 31/5 \\ y = 49/5 \end{cases} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = x + y + 22/5 = 103/5$
 بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

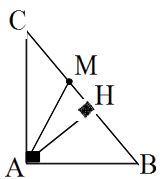
رابطه تالس در مثلث ACF: $\frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC}$
 رابطه تالس در مثلث ADF: $\frac{AE}{EF} = \frac{AC}{CD}$
 $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{8}{CD} \Rightarrow CD = \frac{24}{5} = 4/8$



۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مثلثهای کوچک هم نهشت هستند پس:
 $\frac{S}{S'} = 4 \Rightarrow \frac{a}{a'} = 2 \Rightarrow \frac{2P}{2P'} = \frac{a}{a'} = 2$



۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
 $AD = 12, OH = 36, OD = \frac{12}{5} \Rightarrow \widehat{OAD} \sim \widehat{OHC} \Rightarrow \frac{AD}{HC} = \frac{OD}{OH} \Rightarrow \frac{12}{HC} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \Rightarrow HC = 180$



۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث‌های ABC ، ABH و ACH متشابه‌اند.

$$\frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{CH}{AH} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{BH}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{3}{\sqrt{3}} BC, \quad CH = \frac{4}{\sqrt{3}} BC$$

$$BM = \frac{1}{\sqrt{3}} BC \Rightarrow MH = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}}\right) BC = \frac{1}{1\sqrt{3}} BC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BC}{\frac{1}{2} AH \cdot MH} = \frac{BC}{MH} = 1\sqrt{3}$$

روش دوم با توجه به شکل:

$$AB = \sqrt{3}, \quad AC = 2 \Rightarrow BC = \sqrt{7}, \quad BM = \frac{\sqrt{7}}{2} = CM$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$HM = BM - BH = \frac{\sqrt{7}}{2} - 3 \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{1\sqrt{4}}$$

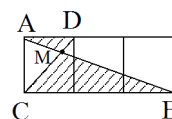
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{BC}{HM} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{7}}{1\sqrt{4}}} = 1\sqrt{4}$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\triangle MDC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{v}{16} = \frac{14}{v+x} \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{2}{v+x} \Rightarrow v+x = 32 \Rightarrow x = 25$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{49}{128} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{v}{8\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 = 24\sqrt{2}$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث‌های AMD و MBC متشابهند زیرا $AD \parallel BC$ پس:

$$AB = \sqrt{10}, \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{\sqrt{10} - AM} = \frac{1}{3}$$

$$4AM = \sqrt{10} \Rightarrow AM = \frac{1}{4}\sqrt{10}$$

$$\frac{9}{x-2} = \frac{12}{x} \Rightarrow 9x = 12x - 24 \Rightarrow x = 8$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{4}{9}$$

۴۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

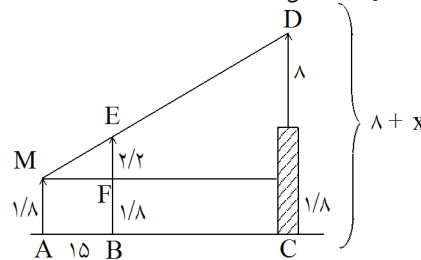
$$\widehat{ABC} : A = 70^\circ \text{ و } B = 50^\circ \text{ و } \widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} \approx \widehat{MNP}$$

$$\widehat{MNP} : \widehat{M} = 70^\circ \text{ و } \widehat{N} = 60^\circ \text{ و } \widehat{P} = 50^\circ$$

چون $\frac{S}{S'} = \frac{4}{4}$, $\widehat{N} = \widehat{C} = 60^\circ$ پس:

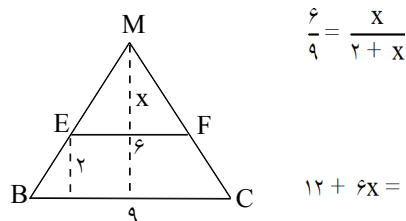
$$\frac{AB}{MP} = \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow \frac{18}{MP} = \frac{3}{2} \Rightarrow MP = 12$$

۴۲- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. از نقطه M موازی افقی رسم کرده با توجه به شکل



$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{2/2}{8+x-1/8} = \frac{15}{180} = \frac{1}{12} \Rightarrow x = 20/2$$

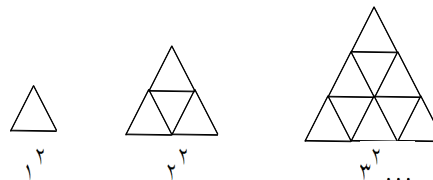
۴۳- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث MEF و MBC متشابهند. با فرض اینکه ارتفاع مثلث بزرگ تر $(x+2)$ باشد و نسبت ارتفاعها برابر نسبت تشابه.



$$\frac{6}{9} = \frac{x}{2+x}$$

$$12 + 6x = 9x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 4 + 2 = 6$$

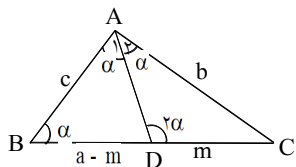
۴۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و استدلال استقرایی، تعداد مثلثهای مورد نظر، برابر عدد مربع کامل است. پس فقط با $5^2 = 25$ مثلث می توان چنین کاری کرد.



۴۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویهی A را رسم می کنیم.

$$\begin{cases} \widehat{D} = \widehat{A} = 2\alpha \\ \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 = \alpha \end{cases} \quad \widehat{ADC} \Rightarrow \sim \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{a-m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = am \\ a^2 - ma = bc \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = bc$$



۴۶- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$h^2 = x(4-x) \Rightarrow h = \sqrt{x(4-x)}$$

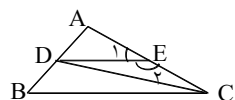
$$\frac{h}{3} = \frac{4-x}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x(4-x)}}{3} = \frac{4-x}{4} \Rightarrow \frac{x(4-x)}{9} = \frac{(4-x)^2}{16}$$

$$\Rightarrow 16x = 36 - 9x \Rightarrow x = \frac{36}{25} = 1/44$$

۴۷- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$$

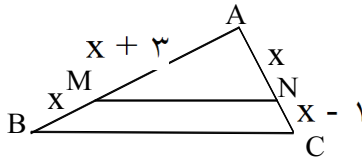
زاویای E_1 و E_2 مکمل اند پس دارای سینوسهای برابر هستند.



$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{1}{2}AE \times DE \sin E_1}{\frac{1}{2}DE \times EC \sin E_2} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3} \times 100 = \frac{200}{3} = 75$$

تالیس و تشابه - خارج از کشور

۱- در شکل مقابل، MN موازی BC است. مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟



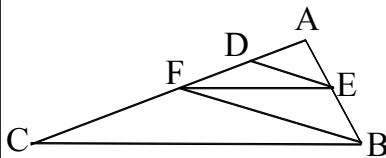
- (۱) $1\frac{2}{3}$
 (۲) $1\frac{5}{9}$
 (۳) $1\frac{7}{9}$
 (۴) $1\frac{8}{9}$

۲- در یک دوزنقه متساوی الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه‌های ساق‌ها ۵ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو ساق این دوزنقه از قاعده‌ی کوچکتر چند واحد است؟



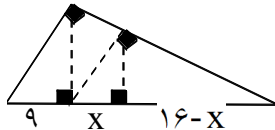
- (۱) ۵
 (۲) ۶
 (۳) ۷
 (۴) ۸

۳- در شکل مقابل $DE \parallel FB$ و $BC \parallel EF$. اگر $AD = ۳$ و $DF = ۶$ آن‌گاه BC چند برابر EF است؟



- (۱) ۲
 (۲) $2/5$
 (۳) $2/75$
 (۴) ۳

۴- در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟

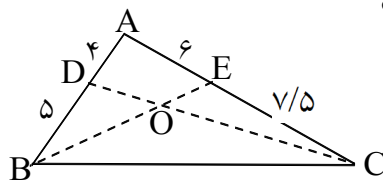


- (۱) $4/54$
 (۲) $5/36$
 (۳) $5/76$
 (۴) $6/75$

۵- در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $2/3$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟

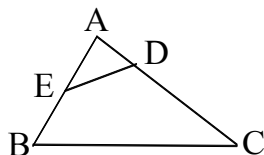
- (۱) $1/5$
 (۲) $2/25$
 (۳) $2/75$
 (۳) ۳

۶- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



- (۱) $2/3$
 (۲) $4/5$
 (۳) $5/6$
 (۴) ۱

۷- در چهارضلعی $BCDE$ ، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند. اگر $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$ ، آن‌گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



- (۱) $0/56$
 (۲) $0/64$
 (۳) $0/72$
 (۴) $0/80$

جواب تالس و تشابه - خارج از کشور

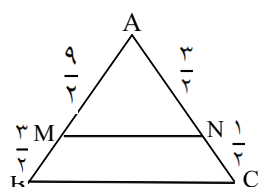
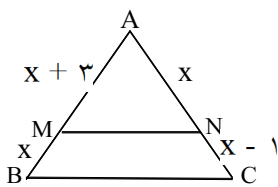
۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر MN موازی BC باشد، آن‌گاه بر اساس قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x}{x-1} \rightarrow \cancel{x} + 2x - 3 = \cancel{x} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

بنابراین شکل به صورت روبه‌رو درمی‌آید. از طرفی می‌دانیم نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر با مربع نسبت تشابه

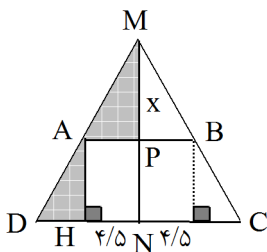
$$\frac{S_{\widehat{ABC}}}{S_{\widehat{AMN}}} = \left(\frac{AC}{AN}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$$

آن‌ها است، بنابراین:



۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث ADH با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس $4 = \sqrt{5^2 - 3^2} = AH$ به دست

می‌آید، حال در مثلث MDC از قضیه‌ی تالس استفاده می‌کنیم:

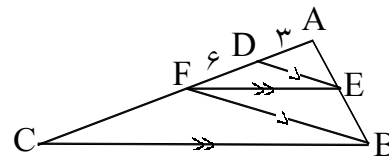


$$\frac{MP}{MN} = \frac{AB}{DC} \rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \rightarrow 3x + 12 = 5x \rightarrow x = 6$$

۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در شکل مقابل با توجه به قضیه‌ی تالس، می‌نویسیم:

$$\triangle ABC : EF \parallel BC \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\triangle ABF : DE \parallel FB \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BF} = \frac{AD}{AF} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$



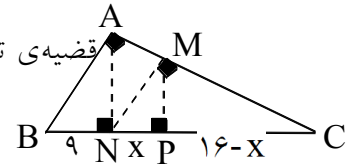
از تناسب دوم داریم $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$. آن را در تناسب اول جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 3EF$$

۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. از آنجا که MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم باشند، با توجه به

$$\triangle ABC : MN \parallel AB \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{16}{9}$$

$$\triangle ACN : MP \parallel AN \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PN} = \frac{16-x}{x}$$



چون نسبت $\frac{CM}{MA}$ در هر دو تناسب وجود دارد به راحتی نتیجه می‌گیریم که $\frac{CN}{NB} = \frac{CP}{PN}$ است، یعنی:

$$\frac{16}{9} = \frac{16-x}{x} \Rightarrow 16x = 144 - 9x \Rightarrow 25x = 144 \Rightarrow x = \frac{144}{25} = \frac{576}{100} = 5/76$$

۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو

مثلث است. اگر نسبت تشابه دو مثلث را k در نظر بگیریم، چون نسبت مساحت‌ها $\frac{2}{3}$ نسبت اضلاع (یا همان نسبت

تشابه) است، داریم:

$$= \frac{2}{3} \times \text{نسبت اضلاع} \Rightarrow k^2 = \frac{2}{3}k \xrightarrow{\div k} k = \frac{2}{3} \Rightarrow k' = \frac{1}{k} = \frac{3}{2}$$

نسبت مساحت

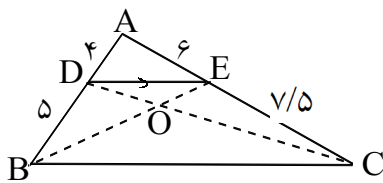
حال با داشتن نسبت تشابه دو مثلث (یعنی $k' = \frac{3}{2}$)، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر

است با:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}} = K'^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2/25$$

۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در شکل مقابل چون $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ است، در نتیجه طبق عکس قضیه‌ی تالس نتیجه

می‌گیریم که $DE \parallel BC$ بوده و چهارضلعی BCED دوزنقه می‌باشد.



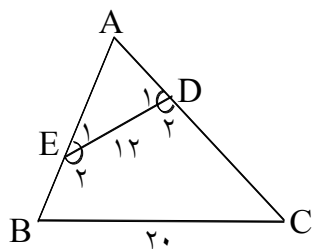
از طرفی می‌دانیم در هر دوزنقه با رسم دو قطر، دو مثلث هم مساحت به وجود می‌آید، داریم:

$$\begin{array}{c} \triangle OBD \\ \triangle OCE \end{array} \rightarrow S_1 = S_2$$

بنابراین در دوزنقه‌ی BCED با رسم دو قطر BE و CD دو مثلث OBD و OCE هم مساحت می‌باشند و در

$$\text{نتیجه ۱} = \frac{S_{OBD}}{S_{OCE}} \text{ است.}$$

۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در چهارضلعی BCDE، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند. و $BC = 20$ و $DE = 12$ است. داریم:



$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{D}_2 = 180^\circ \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_1$$

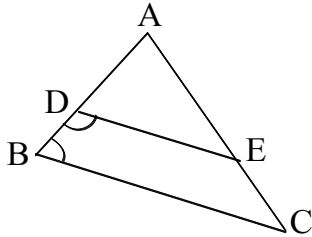
$$\begin{cases} \hat{C} + \hat{E}_2 = 180^\circ \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}_1$$

از تساوی زوایای دو مثلث ABC و ADE، نتیجه می‌گیریم، این دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها برابر با نسبت دو ضلع نظیر هم می‌باشد. دو ضلع BC و DE متناظر یک‌دیگرند. و در نتیجه نسبت تشابه $k = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ است. از طرفی می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر با مجذور نسبت تشابه آنها است. پس داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = K^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{25 - 9}{25} \Rightarrow \frac{S_{BCDE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{25} = 0.64$$

تالیس و تشابه - سنجش

۱- از به هم پیوستن اوساط اضلاع چهار ضلعی محاط در دایره کدام چهار ضلعی حاصل می‌شود؟
 (۱) مستطیل (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) چهار ضلعی محاطی (۴) چهار ضلعی محیطی



۲- در شکل مقابل دو زاویه B و D از چهار ضلعی مکمل هم‌اند و

$BC = \frac{3}{4}DE$ و $AB = 12$ ، اندازه BD کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۴/۵
 (۴) ۵

۳- در مثلث ABC میانه‌های CE و BD در نقطه F متقاطع‌اند مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث FED است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۸
 (۳) ۹
 (۴) ۱۲

۴- مثلثی با اضلاع ۴ و ۶ و $2\sqrt{3}$ و مثلث دیگر با طول اضلاع ۹ و $3\sqrt{3}$ و ۶ مفروض‌اند نسبت مساحت آنها کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$
 (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

۵- نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{3}{4}$ است. نسبت مساحت‌های آنها کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
 (۲) ۳
 (۳) $\frac{9}{4}$
 (۴) ۲

۶- در کدام نوع چهار ضلعی از بهم پیوستن اوساط اضلاع آن، مستطیل ایجاد می‌شود؟
 (۱) لوزی (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) مستطیل (۴) ذوزنقه متساوی الساقین

۷- نسبت اضلاع مستطیل $\frac{1}{3}$ است. از یک رأس خط عمود بر قطر، طول مستطیل را در M قطع می‌کند، نقطه M طول مستطیل را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{5}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{2}{5}$

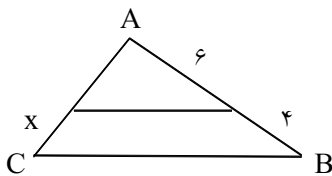
۸- نسبت مساحت دو مثلث متساوی‌الاضلاع مثل ۳ به ۴ است اگر ضلع مثلث کوچکتر $2\sqrt{3}$ باشد ضلع مثلث بزرگتر کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$
 (۲) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$
 (۳) ۴
 (۴) ۶

۹- در مثلث ABC نقاط E و F را به ترتیب بر روی اضلاع AB و AC اختیار می‌کنیم با کدام اندازه‌ها به ترتیب برابر (AF, EB, FC, AE) دو مثلث ABC و AEF متشابه‌اند؟
 (۱) (۳, ۱۲, ۹, ۶) (۲) (۸, ۴, ۶, ۱۲) (۳) (۱۲, ۸, ۴, ۶) (۴) (۱۲, ۴, ۸, ۶)

۱۰- در دو مثلث متشابه نسبت طول نیمساز داخلی کوچکترین زاویه آنها، $\frac{2}{3}$ است. مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{25}$ (۳) $\frac{2}{75}$ (۴) ۳

۱۱- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها $\frac{3}{4}$ است بزرگترین ضلع مثلث کوچکتر ۳ واحد باشد بزرگترین ضلع مثلث دوم کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$



۱۲- در شکل مقابل $AC = 7$ و دو مثلث متشابه‌اند اندازه x کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{1}$ (۲) $\frac{2}{8}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{8}$

۱۳- مساحت مثلثی با اضلاع ۶ و ۳ و $2\sqrt{2}$ چند برابر مساحت مثلث به اضلاع $\frac{4}{\sqrt{6}}$ و $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ می‌باشد؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۳

۱۴- مساحت مثلثی با اضلاع ۶ و ۳ و $2\sqrt{2}$ چند برابر مساحت مثلث به اضلاع $\frac{4}{\sqrt{6}}$ و $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ است؟
 (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۳

۱۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای نسبت اضلاع قائم ۲ به ۳ می‌باشد. اگر ارتفاع وارد بر وتر آن رسم شود، مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث متوسط است؟
 (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{13}{9}$

۱۶- اندازه دو ضلع قائم از مثلثی ۲ و $\sqrt{3}$ واحد است، ارتفاع گذرنده از رأس قائمه را رسم می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه را به دو قسمت تقسیم کند نسبت مساحت این دو مثلث کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۷- مثلثی به اضلاع ۷، ۵، ۳ با مثلثی به اضلاع $x, y, 5$ متشابه است. اگر $x > y > 5$ باشد، $x + y$ کدام است؟

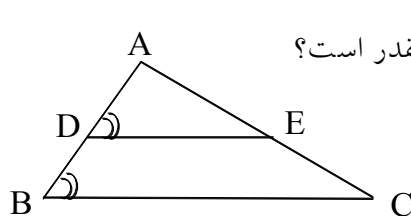
- (۱) $\frac{65}{3}$ (۲) $\frac{68}{3}$ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۱۸- مساحت مثلثی با اضلاع ۷، ۵، ۴ برابر نصف مساحت مثلثی متشابه با آن است. کوچکترین ضلع مثلث دوم کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۱۹- در مثلث ABC پاره‌خط $DE \parallel BC$ و E روی ضلع AB است. اگر $AE = 8$ ، $ED = 6$ و $BC = 9$ باشد، طول BE چقدر است؟

- (۱) $3/6$ (۲) ۴ (۳) $4/5$ (۴) $4/8$



۲۰- در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{D}$ و $AD = 8$ و $ED = 6$ و $BC = 9$ ، طول BD چقدر است؟

- (۱) $3/6$ (۲) ۴ (۳) $4/3$ (۴) $4/5$

۲۱- در کدام حالت دو مثلث ممکن است متشابه نباشند؟

- (۱) تساوی دو ضلع (۲) تساوی دو زاویه (۳) متناسب بودن دو ضلع (۴) متناسب بودن سه زاویه

۲۲- در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، ضلع $AB = CD$ می‌باشد. وسط‌های دو ضلع AD و BC و دو قطر AC و BD چهار راس کدام چهارضلعی است؟

- (۱) لوزی (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) ذوزنقه (۴) چهارضلعی محاطی

۲۳- در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. اگر کوچکترین ارتفاع از مثلث بزرگتر $\sqrt{3}$ باشد، آنگاه کوچکترین ارتفاع از مثلث دیگر چقدر است؟

- (۱) $1/4$ (۲) $1/5$ (۳) $1/6$ (۴) $1/8$

۲۴- نقاط M و N بر روی اضلاع AB و AC از مثلث چنان‌اند که $\frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت کوچکتر در شکل است؟

- (۱) $2/25$ (۲) $2/5$ (۳) $4/5$ (۴) $6/25$

۲۵- وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۵ و کوچکترین ضلع آن ۲ است واحد تصویر ضلع متوسط بر روی وتر کدام است؟

- (۱) $3/6$ (۲) $3/8$ (۳) ۴ (۴) $4/2$

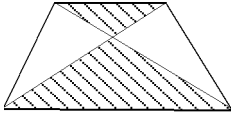
۲۶- طول اضلاع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ و ۸ واحد است، تصویر ضلع کوچک‌تر بر روی وتر کدام است؟

- (۱) $3/2$ (۲) $3/6$ (۳) $4/5$ (۴) $4/8$

۲۷- در یک ذوزنقه مساحت مثلث محدود به دو قطر و قاعده بزرگتر $2\frac{1}{4}$ برابر مساحت محدود به دو قطر و قاعده کوچکتر است. نسبت دو قاعده‌ی آن کدام است؟

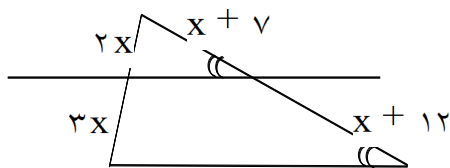
- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۲۸- در شکل مقابل نسبت مساحت‌های دو مثلث سایه زده $\frac{4}{9}$ است. اگر قاعده‌ی کوچکتر ۱۴ واحد باشد قاعده‌ی بزرگتر ذوزنقه کدام است؟



- (۱) ۲۴ (۲) ۲۱ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶

۲۹- در شکل مقابل مقدار X کدام است؟



- (۱) $2/5$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $4/5$

۳۰- مثلث ABC را به ۴ مثلث همنهشت تقسیم می‌کنیم. مجموع محیط ۴ مثلث حاصل چند برابر محیط مثلث اصلی است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۳۱- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس خارج‌اند، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی مماس مشترک خارجی و خط‌المركزین آن‌ها از مرکز دایره‌ی بزرگتر چند واحد است؟

- (۱) $11\frac{1}{3}$ (۲) $11\frac{2}{3}$ (۳) $12\frac{1}{3}$ (۴) $12\frac{2}{3}$

۳۲- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها $\frac{4}{9}$ است. نسبت طول نیمساز داخلی بزرگترین زاویه از این دو مثلث، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳۳- هر مثلث دلخواه را به کدام تعداد مثلث‌های همنهشت می‌توان تقسیم کرد؟

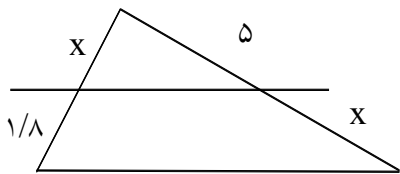
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۴- دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۳ مماس خارج‌اند خطی که مرکز آن‌ها را به هم وصل کند مماس مشترک دو دایره را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی M از مرکز دایره کوچکتر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۵- در مثلث ABC پاره خط DE موازی BC است. $AD = EC$, $AE = 5$, $DB = \frac{1}{8}$ اندازه AC کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

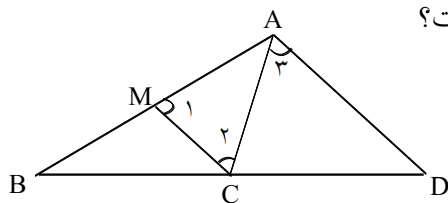


۳۶- در شکل مقابل دو خط موازی اند، x کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۴

۳۷- در مثلث ABC نقاط E و F بر روی اضلاع مثلث چنانند که $EF \parallel BC$, $EF = 6$, $BC = 8$ و $EB = 3$ اندازه AB چقدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶



۳۸- در شکل مقابل $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$ و $AB = 12$ و $AC = 8$ نسبت $\frac{BD}{CD}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۳۹- خط DE موازی ضلع BC دو ضلع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می‌کند، اگر $BC = 8$ و $AE = 3EB$ باشد. اندازه EF کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) ۶ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) ۹

۴۰- دو مثلث قائم‌الزاویه با مساوی بودن کدام اجزای متناظر آنها ممکن است متشابه نباشند؟

- (۱) وترها (۲) زاویه حاده (۳) نسبت دو ضلع قائم (۴) نسبت دو زاویه حاده

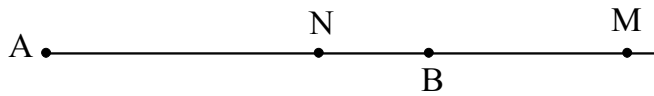
۴۱- دو قطر متوازی‌الاضلاع بر هم عمودند. با رسم این دو قطر در متوازی‌الاضلاع حداکثر چند مثلث متشابه دیده می‌شود؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۲- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها $\frac{4}{9}$ است و نسبت کوچکترین زاویه به بزرگترین زاویه آن $\frac{2}{5}$ است. نسبت نیمسازهای داخلی دو زاویه متناظر چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{4}{25}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۳- در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = 2$ ، $MA = 20$ فاصله AB چقدر است؟



- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

۴۴- مثلثی به اضلاع $\sqrt{3}$ ، ۳، a با مثلث دیگر به اضلاع $\sqrt{3}$ ، ۲، ۱ متشابه است، a کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۴

۴۵- مساحت مثلثی با اضلاع ۲ و $\sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{3}$ چند برابر مثلث به اضلاع ۲ و $2 - \sqrt{3}$ و $3 - \sqrt{3}$ است؟

- (۱) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۴) $2 - \sqrt{3}$

۴۶- یک مثلث به ۴ مثلث هم‌نهشت تقسیم شده است محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BD در نقطه O متقاطع‌اند. اگر $OH = 3$ ، $OA = \frac{1}{3}$ و $OD = 5$ ، اندازه‌ی

ارتفاع BD کدام است؟

- (۱) $8/9$ (۲) $9/6$ (۳) $10/4$ (۴) $11/2$

۴۸- در دو مثلث متساوی‌الاضلاع مساحت یکی $\frac{3}{4}$ مساحت دیگری است. اگر ضلع مثلث کوچک‌تر $2\sqrt{3}$ باشد، ضلع

مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) ۴ (۴) ۶

۴۹- در مثلث ABC دو نقطه E و F به ترتیب بر روی اضلاع AB و AC اختیار می‌کنیم به طوری که دو مثلث

ABC و AEF متشابه باشند کدام اندازه به ترتیب برای (AE) و (FC) و (EB) و (AF) مورد قبول است؟

- (۱) (۶ و ۸ و ۴ و ۱۲) (۲) (۶ و ۴ و ۸ و ۱۲) (۳) (۱۲ و ۶ و ۴ و ۸) (۴) (۶ و ۹ و ۱۲ و ۳)

۵۰- دو زاویه از مثلثی 65° و 70° و دو زاویه از مثلثی دیگر 45° و 65° درجه است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۴ برابر

مساحت مثلث دیگر باشد، نسبت اضلاع بزرگ‌تر از این دو مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{9}{13}$ (۴) $\frac{13}{14}$

۵۱- در دو مثلث متشابه اندازه‌ی بزرگ‌ترین ضلع از هر کدام $2\sqrt{3}$ ، ۹ واحد است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث دیگر است؟

- (۱) $5/25$ (۲) $6/75$ (۳) $6/25$ (۴) $6/75$

۵۲- در دو مثلث متشابه مساحت یکی $2/25$ برابر مساحت دیگری است دو ضلع a و b از مثلث اول ۲ و ۳ واحد از دو ضلع متناظر مثلث دیگر بیشتر باشد، $a + b$ چه قدر است؟

- (۱) $7/5$ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) $12/5$

۵۳- مثلثی به اضلاع a و ۶ و ۴ با مثلث دیگر به اضلاع b و ۴ و ۳ متشابه است. چند جواب برای a و b می‌توان یافت؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۴- مثلثی به اضلاع $2\sqrt{3}$ ، ۶، ۳ و مثلث دیگر به اضلاع $2\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ ، ۲ مفروض‌اند مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت دیگر است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۳

۵۵- نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{49}{128}$ است اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۱۴ واحد باشد اندازه ضلع متناظر آن در مثلث بزرگ کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) $12\sqrt{6}$ (۳) $16\sqrt{2}$ (۴) $18\sqrt{2}$

۵۶- لوزی به اقطار ۴ و ۶ واحد با لوزی دیگری به ضلع ۱۳ واحد متشابه است. مساحت لوزی بزرگ‌تر چند برابر لوزی دیگر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۳

۵۷- در کدام حالت دو مثلث ممکن است متشابه نباشند؟

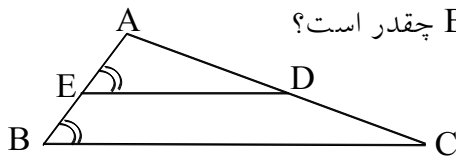
- (۱) موازی بودن اضلاع
(۲) عمود بودن اضلاع
(۳) متناسب بودن زاویه
(۴) متناسب بودن محیط و مساحت

۵۸- در کدام حالت دو مثلث مشابه نیستند؟

- (۱) متناسب بودن سه زاویه
(۲) تساوی دو ضلع
(۳) تساوی دو زاویه
(۴) متناسب بودن سه ضلع

۵۹- در یک چهارضلعی محدب دو ضلع مقابل برابرند. وسط دو قطر و وسط دو ضلع دیگر آن، همواره رأس‌های کدام چهارضلعی است؟

- (۱) چهارضلعی محاطی (۲) ذوزنقه (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) لوزی



۶۰- در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{E}$ اگر $AE = 8$ و $ED = 6$ و $BC = 9$ باشد، BE چقدر است؟

- (۱) $3/6$ (۲) ۴
(۳) $4/5$ (۴) $4/8$

۶۱- در دو مثلث متشابه نسبت محیطها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. اگر کوچکترین ارتفاع از مثلث بزرگتر $\sqrt{3}$ باشد، آنگاه کوچکترین ارتفاع از مثلث دیگر چقدر است؟

- (۱) $1/4$ (۲) $1/5$ (۳) $1/6$ (۴) $1/8$

۶۲- مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۴، ۵ برابر نصف مساحت مثلث متشابه با آن است. کوچکترین ضلع مثلث دوم کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۸

۶۳- نقاط M و N بر روی اضلاع مثلث ABC چنان قرار دارند که $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت مساحت مثلث AMN

به مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) $4/9$ (۲) $4/25$ (۳) $2/5$ (۴) $3/5$

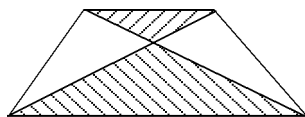
۶۴- در مثلث ABC داریم $AB < AC$ نیمساز داخلی AD رسم می‌شود. از نقطه D خطی موازی AB رسم می‌کنیم، تا AC را در E قطع کند. کدام تناسب نادرست است؟

- (۱) $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{CD}$ (۲) $\frac{CE}{ED} = \frac{CD}{BD}$ (۳) $\frac{CE}{AE} = \frac{CD}{BD}$ (۴) $\frac{CE}{AC} = \frac{AE}{AB}$

۶۵- در یک دوزنقه، مساحت مثلث محدود به دو قطر و قاعده‌ی بزرگتر $2\frac{1}{4}$ برابر مساحت محدود به دو قطر و قاعده‌ی کوچک‌تر است. نسبت دو قاعده کدام است؟

- (۱) $2/5$ (۲) $3/5$ (۳) $2/3$ (۴) $3/4$

۶۶- در شکل مقابل نسبت مساحت‌های دو مثلث سایه‌زده $\frac{4}{9}$ است. اگر قاعده کوچک‌تر ۱۴ باشد، قاعده‌ی بزرگ‌تر دوزنقه



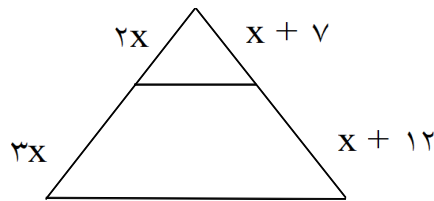
کدام است؟

۲۴ (۱)

۱۸ (۳)

۲۱ (۲)

۱۶ (۴)



۶۶- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) $\frac{4}{5}$

۶۸- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت $\frac{3}{4}$ است نسبت طول نیمساز داخلی بزرگترین زاویه از این دو مثلث است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۳) $\frac{2}{3}$
 (۴) $\frac{3}{4}$

۶۹- در مستطیل ABCD از رأس A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم. امتداد آن ضلع DC را در نقطه F قطع می‌کند. اگر $AB = 3AD$ باشد، آن گاه DC چند برابر DF است؟

- (۱) ۴
 (۲) ۶
 (۳) ۸
 (۴) ۹

۷۰- مثلثی به اضلاع ۵، y ، x متشابه مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ می‌باشد. اگر x بزرگترین ضلع مثلث باشد، x کدام است؟

- (۱) $11\frac{2}{3}$
 (۲) $11\frac{1}{3}$
 (۳) $10\frac{2}{3}$
 (۴) $10\frac{1}{3}$

۷۱- دایره‌ای به شعاع R را به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. ابتدا نقاط تقسیم شده را به هم وصل می‌کنیم تا شش ضلعی منتظمی حاصل شود. سپس از نقاط تقسیم شده مماس‌هایی بر دایره رسم می‌کنیم تا شش ضلعی دیگر به دست آید. نسبت مساحت این دو شش ضلعی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) $\frac{4}{5}$
 (۴) $\frac{3}{4}$

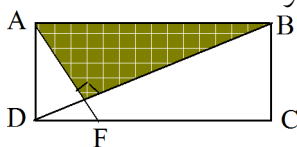
۷۲- در کدام حالت، دو مثلث ممکن است متشابه نباشند؟

- (۱) تساوی یک ضلع و تناسب دو زاویه
 (۲) تساوی یک زاویه و تناسب اضلاع آن
 (۳) تناسب سه ضلع
 (۴) تناسب سه زاویه

۷۳- در مثلث قائم‌الزاویه از وسط وتر، عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. نسبت مساحت دو مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{2}{5}$

۷۴- در مستطیل مقابل عرض آن $\frac{1}{3}$ طول آن است. اگر AF عمود بر BD باشد، DC چند برابر DF است؟



- (۱) ۵
 (۲) ۶
 (۳) ۸
 (۴) ۹

۷۵- در دایره‌ای یک شش ضلعی منتظم محیط و یک شش ضلعی منتظم محاط شده است. نسبت مساحت این دو شش ضلعی کدام است؟

$$\frac{3}{4} (4) \quad \frac{2}{3} (3) \quad \frac{3}{5} (2) \quad \frac{1}{2} (1)$$

۷۶- مثلثی به اضلاع ۳، ۵، ۷ با مثلثی به اضلاع ۵، x ، y متشابه است. اگر $x > y > 5$ باشد، $x + y$ کدام است؟

$$20 (4) \quad 18 (3) \quad 17 (2) \quad 16 (1)$$

۷۷- کوچک‌ترین ضلع مثلثی ۱۰ واحد است. نیم‌ساز زاویه‌ی کوچک‌تر، ضلع مقابل را به دو جزء تقسیم می‌کند. کوچک‌ترین جزء، چند واحد است، در صورتی که مثلث مفروض با مثلث به اضلاع ۲، ۴، ۵ متشابه است؟

$$4\frac{2}{9} (4) \quad 4\frac{2}{3} (3) \quad 4\frac{4}{9} (2) \quad 4\frac{1}{3} (1)$$

۷۸- کدام دو شکل ممکن است متشابه نباشند؟

- (۱) دو مستطیل
(۲) دو لوزی با یک زاویه برابر هم
(۳) دو مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین
(۴) دو شش ضلعی منتظم

۷۹- در مثلث ABC نقطه D بر روی AB و نقطه E بر روی AC چنان قرار دارند که $DE \parallel BC$ و $AD = 8$ و $DE = 6$ و $BC = 9$ واحد است. اندازه BD کدام است؟

$$4/5 (4) \quad 4/2 (3) \quad 4 (2) \quad 3/6 (1)$$

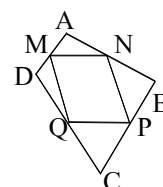
۸۰- یک مثلث را به ۴ مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کنیم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت است؟

$$4 (4) \quad 3 (3) \quad 2 (2) \quad \frac{3}{2} (1)$$

۸۱- یک مثلث را به ۴ مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کنیم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت است؟

$$4 (4) \quad 3 (3) \quad 2 (2) \quad \frac{3}{2} (1)$$

جواب تالیس و تشابه - سنجش



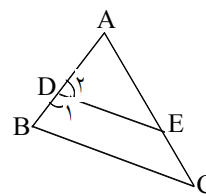
$$\left. \begin{array}{l} AN = NB \\ AM = MD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{طبق رابطه} \\ \text{تالیس} \end{array} \rightarrow MN \parallel \frac{BD}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} PQ \parallel \frac{BD}{2} \\ NP \parallel \frac{AC}{2} \\ MQ \parallel \frac{AC}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{منازای الاضلاع MNPQ}$$

به همین ترتیب

بنابراین ۴ ضلعی ABCD دارای هر ویژگی که باشد، MNPQ همواره متوازی الاضلاع خواهد بود و به خواص ۴ ضلعی ABCD بستگی ندارد بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

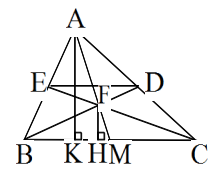


$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} + \hat{D}_1 = 180 \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_2 \Rightarrow DE \parallel BC$$

$$\text{طبق رابطه تالیس: } \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AD = \frac{2}{3} AB = 8$$

$$\Rightarrow BD = AB - AD = 12 - 8 = 4$$

۳- می دانیم نسبت مساحت ۲ شکل متشابه برابر مجذور نسبت تشابه ۲ شکل است.



$$\left. \begin{array}{l} DEF \sim BFC \Rightarrow \frac{S_{BFC}}{S_{DEF}} = \left(\frac{BF}{FD}\right)^2 = 4 \\ \frac{S_{BFC}}{S_{ABC}} = \frac{BC \cdot FH}{BC \cdot AK} = \frac{FH}{AK} = \frac{FM}{AM} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = 12$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اضلاع دو مثلث با هم متناسبند بنابراین ۲ مثلث با هم متشابهند. نسبت مساحت ۲ شکل متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آنهاست. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \text{نسبت تشابه } K = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S}{S'} = K^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

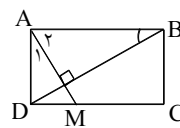
۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نسبت مساحتهای ۲ شکل متشابه، مجذور نسبت تشابه آنها و نسبت محیط ۲ شکل متشابه

$$\frac{a}{a'} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{9}{4}$$

برابر نسبت تشابه ۲ شکل است. پس:

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در چهار ضلعی محدب از بهم پیوستن اواسط اضلاع، متوازی الاضلاعی ایجاد می شود که اضلاع آن با قطرهای چهارضلعی موازیند. پس برای اینکه متوازی الاضلاع به مستطیل تبدیل شود باید اضلاع بر هم عمود باشند. لذا باید قطرهای ۴ ضلعی محدب بر هم عمود باشند که از بین گزینه ها فقط در لوزی اقطار بر هم عمودند.

متوازی الاضلاع: $MNPQ \Rightarrow \left. \begin{matrix} AM = MD \\ AN = NB \end{matrix} \right\} \text{طبق تالس} \Rightarrow MN \parallel BD$
 $PQ \parallel BD, NP \parallel MQ \parallel AC$ به همین ترتیب

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.


$$\left. \begin{matrix} A_1 + A_2 = 90^\circ \\ A_2 + B_1 = 90^\circ \end{matrix} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle ABD \Rightarrow$$

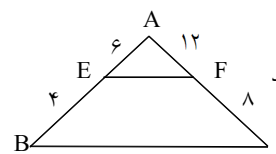
$$\frac{AD}{DM} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{DM} = 2 \Rightarrow DM = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{4} \Rightarrow \frac{DM}{MC} = \frac{1}{3}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر دو مثلث متساوی الاضلاع مشابه می باشند.

$$\frac{S}{S'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow k^2 = \frac{r}{r'} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 4$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تناسب $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ و گزینه ۴ که

$\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$ نتیجه می گیریم $EF \parallel BC$ پس دو مثلث $\triangle AEF$ و $\triangle ABC$ مشابه هستند



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در دو مثلث مشابه نسبت نیمسازها با نسبت تشابه برابر است و نسبت مساحتها برابر

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{4}{9} \Rightarrow S' = \frac{9}{4} S \Rightarrow S' = 2/25 S$$

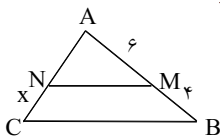
توان دوم نسبت تشابه است.

$$\frac{S}{S'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow k^2 = \frac{r}{r'} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{r}{a'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a' = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow a' = 2\sqrt{3}$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{7-x}{7}$

$$42 = 70 - 10x \Rightarrow 10x = 28 \Rightarrow x = 2/8$$



۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. راهنمایی: اگر اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسب باشند آنگاه متشابهند.

راه حل: از تناسب $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{6}}$ نتیجه می گیریم دو مثلث با نسبت $\sqrt{3}$ متشابهند پس نسبت مساحتها

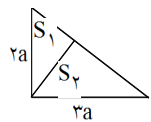
برابر $\sqrt{3}^2$ یعنی ۳ می باشد.

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسب باشند آنگاه متشابهند.

راه حل: با توجه به تناسب اضلاع $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{6}}$ نتیجه می گیریم دو مثلث با نسبت $\sqrt{3}$ متشابهند پس

نسبت مساحتها برابر $\sqrt{3}^2$ یعنی ۳ می باشد.

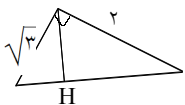
۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{\text{کل}}}{S_2} = \frac{11}{9}$$

۲ مثلث قائمه تشکیل شده با هم متشابهند.

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{\sqrt{3}k}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

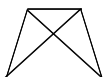
دو مثلث قائم الزاویه حاصل متشابه اند

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x+y}{y+5} = \frac{5}{3} \Rightarrow x+y = 20$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S}{S'} = k^2 \quad k = \text{نسبت تشابه} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{4}{x} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



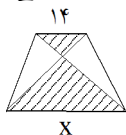
۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث متشابه‌اند یا نسبت تشابه دو قاعده $\frac{2}{3}$ است.

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

و یا با $\frac{2}{3}$

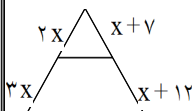
۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث هاشور زده متشابه‌اند نسبت تشابه برابر نسبت ۲ قاعده است.

$$K = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$



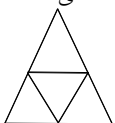
$$\frac{x}{14} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 21$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



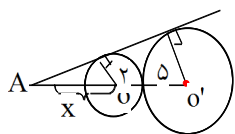
$$\frac{x+v}{x+12} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x + 21 = 2x + 24 \quad x = 3$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از به هم وصل کردن وسط اضلاع را بهم وصل کنیم ۴ مثلث هم نهشت حاصل می‌شود محیط هر مثلث نصف محیط مثلث اصلی است. بنابراین مجموع محیط ۴ مثلث ۲ برابر محیط مثلث اصلی است.



$$4 \times \frac{1}{2} = 2$$

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{x}{x+v} = \frac{R}{R'} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x = 2x + 14$$

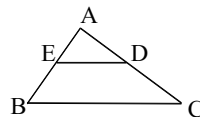
$$x = \frac{14}{3} \Rightarrow AO' = \frac{14}{3} + v = 11\frac{2}{3}$$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در دو مثلث متشابه نسبت اجزای متناظر برابر نسبت تشابه و جذر نسبت مساحت ۲

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

مثلث است. $\frac{2}{3}$ = نسبت طول نیمسازها $\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}$ = نسبت اضلاع

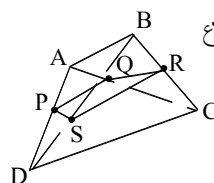
۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{AB} = \frac{6}{9} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow BE = 4$ طبق قضیه تالس



۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{AB} = \frac{6}{9} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow BD = 4$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در کتاب درسی آمده است: تساوی دو ضلع

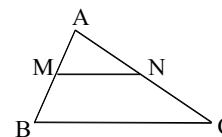
۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $PQ \parallel RS \parallel \frac{AB}{2}$, $PS \parallel RQ \parallel \frac{CD}{2}$ اضلاع



چهارضلعی RQPS مساوی و دو به دو موازی‌اند پس لوزی است.

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = 1/5$ = نسبت اضلاع = نسبت محیط‌ها

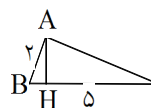
۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. MN با BC موازی بوده و ۲ مثلث AMN و ABC متشابه‌اند.



$$\frac{S_{ABC}}{A_{AMN}} = \left[\frac{AB}{AM} \right]^2 = 2/5^2 = 6/25$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AB}{MA} = \frac{5}{2} = 2/5$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $AC^2 = 25 - 4 = 21$ دو مثلث قائم الزاویه ACH و ACB مشابه‌اند.



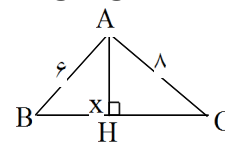
$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH$$

$$21 = 5 \times CH \Rightarrow CH = 4/2$$

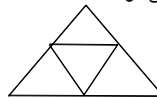
$$BC = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$\widehat{ABH} \cong \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 3/6$$

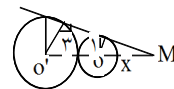
۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۳۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. از به هم وصل کردن وسط اضلاع مثلث ۴ مثلث هم‌نهشت حاصل می‌شود.



۳۴- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.



$$\frac{x}{x+4} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2$$

دو مثلث متشابه‌اند.

۳۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

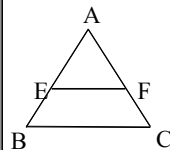
$$\frac{x}{1/8} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 3, AC = 8$$

۳۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. بنابر قضیه تالس از روی شکل داریم

$$\frac{x}{1/8} = \frac{5}{x} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

۳۷- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{x-3}{x} = \frac{6}{8} \Rightarrow 4x - 12 = 3x \Rightarrow x = 12$$

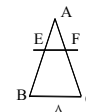


$$CM \parallel AD, AM = AC = 8$$

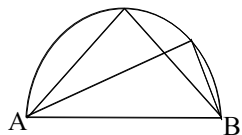
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AM} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۳۸- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

۳۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.



۴۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. در شکل مقابل وتر هر دو مثلث قائم‌الزاویه AB است، ولی متشابه نیستند.



۴۱- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. ۴ مثلث مساوی متشابه‌اند. لوزی \Rightarrow دو قطر متوازی الاضلاع عمود برهم

۴۲- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{d_1}{d_2} = \text{نسبت اضلاع} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

۴۳- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{MA}{MB} = 2 \Rightarrow MB = 10$$

$$AB = 20 - 10 = 10$$

۴۴- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$3 \sqrt{3} = a$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = 1 \cdot 2$$

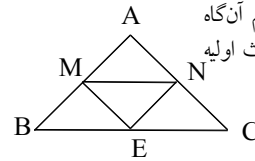
۴۵- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. این دو مثلث متشابهند زیرا اضلاع این دو مثلث متناسبند:

$$\frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر توان دوم نسبت تشابه اضلاع آنها است:

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

۴۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. اگر وسطهای سه ضلع مثلث را به هم وصل کنیم آن گاه مثلث به ۴ مثلث همنهشت تقسیم می شود. به طوری که هر یک از مثلثها با مثلث اولیه با نسبت $\frac{1}{3}$ متشابه هستند پس نسبت محیطها برابر $\frac{1}{3}$ است.

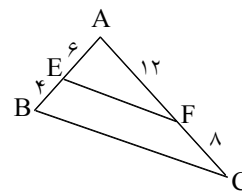


۴۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. تست غلط است. زیرا در مثلث قائم الزاویه \widehat{AOD} ضلع قائمه OD برابر ۵ می باشد از طرفی وتر $OA = \frac{1}{3}$ می باشد و این تناقض می باشد.

۴۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه هستند.

$$\frac{S}{S'} = K^2 \Rightarrow \frac{r}{\frac{r}{4}} = K^2 \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{a'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a' = 4$$

۴۹- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث \widehat{ABC} و \widehat{AEF} متشابه هستند بنابراین باید تناسب $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ یا $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$ برقرار باشد. با توجه به مقادیر داده شده تنها گزینهی ۱ می تواند درست باشد.



۵۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. این دو مثلث متشابهند زیرا دارای دو زاویه برابر هستند.

$$\frac{S}{S'} = K^2 \Rightarrow K^2 = 4 \Rightarrow K = 2$$

۵۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$K = \frac{a}{a'} = \frac{9}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{S}{S'} = K^2 = \left(\frac{9}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{81}{4 \times 3} = \frac{27}{4} = 6.75$$

۵۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S}{S'} = K^2 \Rightarrow K^2 = \frac{2}{25} \Rightarrow K^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow K = \frac{3}{2}$$

$$\text{طبق فرض تست} \Rightarrow \frac{a}{a-2} = \frac{b}{b-3} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a = 3a - 6 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 15$$

۵۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. باید اضلاع این دو مثلث متناسب باشند.

$$\frac{a}{3} = \frac{4}{b} = \frac{6}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{18}{4} \\ b = \frac{16}{4} \end{cases}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{4}{b} = \frac{6}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{4}{3} = \frac{6}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{3} \\ b = \frac{18}{4} \end{cases}$$

$$\frac{a}{3} = \frac{4}{4} = \frac{6}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases}$$

پس برای a و b چهار جواب بدست می آید.

۵۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. این دو مثلث با هم متشابه هستند زیرا اضلاع آنها متناسبند.

$$\frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{2\sqrt{3}}$$

پس نسبت مساحت های آنها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3$$

۵۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S}{S'} = \frac{49}{128} \Rightarrow K^2 = \frac{49}{128} \Rightarrow K = \frac{7}{8\sqrt{2}}$$

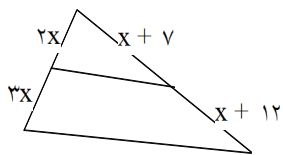
$$\frac{a}{a'} = K \Rightarrow \frac{14}{a'} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow a' = 16\sqrt{2}$$

$$a^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13} \quad \frac{S}{S'} = \left(\frac{13}{\sqrt{13}}\right)^2 = 13 \quad \text{۵۶- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.}$$

۵۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. متناسب بودن محیط و مساحت در فضایی تشابه آمده است.

۵۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. فقط در حالت تساوی دو ضلع، شرایط تشابه را ندارند.

۶۷- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{2x}{3x} = \frac{x+7}{x+12} \Rightarrow 2x + 24 = 3x + 21 \Rightarrow x = 3$$

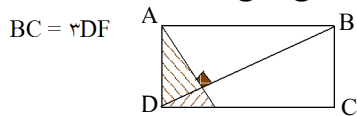
۶۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

نسبت مساحت ها برابر $\frac{3}{4}$ پس نسبت اضلاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ یا نسبت نیمساز $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۹- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث BCD , ADF متشابه است.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DF}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{\sqrt{AD}} = \frac{DF}{BC}$$

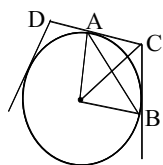
$$CD = \sqrt{BC} = \sqrt{DF} \Rightarrow \frac{DC}{DF} = \sqrt{1}$$



$$\frac{x}{y} = \frac{y}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = 35 \Rightarrow x = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$$

۷۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

۷۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



$$AB = R \text{ و } AC = \frac{1}{\sqrt{2}}R \Rightarrow DC = \frac{1}{\sqrt{2}}R$$

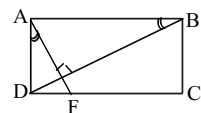
$$\frac{AB}{DC} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \text{نسبت مساحت} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2 = 2$$

۷۲- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

۷۳- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{مثلث حاصل با مثلث مفروض متشابه است.} \Rightarrow \frac{S}{S'} = K^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

۷۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{ABD} \approx \widehat{ADF} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{AD} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{2}DF \Rightarrow DC = \sqrt{2}DF$$

$$\frac{3}{4} = \text{نسبت مساحت} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{نسبت اضلاع}$$

۷۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$AB \parallel MN, CD \parallel MN \Rightarrow AB \parallel CD \text{ صحیح است.}$$

$$BC \parallel PQ, AD \parallel PQ \Rightarrow BC \parallel AD \text{ لوزی است}$$

۶۰- گزینهی ۲ صحیح است.

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB = 12 \text{ و } BE = 4$$

$$\frac{6}{9} = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \text{نسبت ارتفاع ها} = \text{نسبت اضلاع}$$

۶۱- گزینهی ۲ صحیح است.

$$\frac{S}{S'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

۶۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

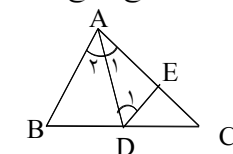
$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب به مخرج}} \frac{MA}{AB} = \frac{NA}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow MN \parallel BC$$

۶۳- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

بنابراین دو مثلث \widehat{AMN} و \widehat{ABC} متشابهاند و $K = \frac{2}{5}$ در نتیجه نسبت مساحت‌های این دو مثلث $\frac{4}{25}$ است.

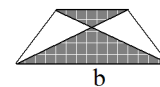
۶۴- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$DE = AE \text{ و } \frac{AB}{ED} = \frac{CA}{CE} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{CA}{CE} = \frac{AC}{CD}$$



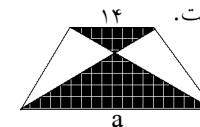
۶۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{S''}{S} \Rightarrow S = \frac{1}{2}S'' = \frac{9}{4}S' \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$



۶۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

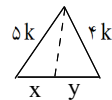
$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{14}{a}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{14}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 21$$



$$\frac{x}{y} = \frac{y}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x+y}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow x+y = 20$$

۷۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

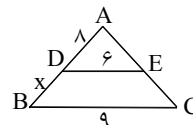
۷۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{x}{y} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{9}{4} \Rightarrow 4y = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{4} = 10$$

۷۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دو مستطیل ممکن است متشابه نباشند، نسبت اضلاع برقرار نباشد.

۷۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{6}{9} = \frac{x}{x+3} \Rightarrow 24 = 16 + 2x \Rightarrow x = 4$$

۸۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



۲ برابر \Rightarrow محیط نصف می‌شود \Rightarrow هر ضلع نصف شده

۲ \Rightarrow محیط نصف شده \Rightarrow تمام اضلاع نصف شده اند

۸۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

تالسی و تشابه - آزاد

۱- کنار ساختمانی به بلندی ۵/۵ متر، درختی است که در نقطه‌ای معین سایه آن ۱/۱ متر و سایه ساختمان ۱/۲۱ بوده، ارتفاع درخت چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱۱

۲- اگر وسطهای اضلاع یک چهارضلعی محدب را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی دیگری حاصل می‌شود که مساحت آن برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی مفروض
 (۲) $\frac{2}{3}$ مساحت چهارضلعی مفروض
 (۳) $\frac{1}{3}$ مساحت چهارضلعی مفروض
 (۴) $\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی مفروض

۳- اگر دو قطر دوزنقه قائم الزاویه‌ای برهم عمود باشند ارتفاع دوزنقه واسطه هندسی است بین:

- (۱) دوساق
 (۲) دو قاعده
 (۳) یک ساق و قاعده بزرگتر
 (۴) یک ساق و قاعده کوچکتر

۴- کدامیک از گزاره‌های زیر غلط است؟

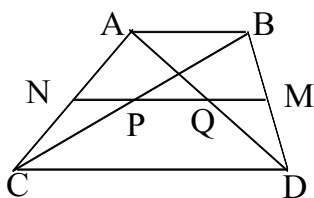
- (۱) دو مستطیل همواره متشابهند
 (۲) دلولوزی که یک زاویه متساوی داشته باشند متشابهند
 (۳) دو مربع همواره متشابهند
 (۴) دو n ضلعی منتظم همواره متشابهند

۵- اوساط اضلاع یک چهارضلعی را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم شکل حاصل مربع می‌گردد نوع چهارضلعی کدام است؟

- (۱) لوزی (۲) مستطیل (۳) مربع (۴) متوازی الاضلاع

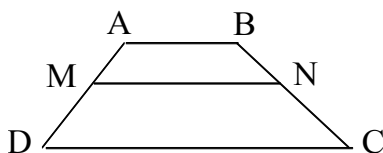
۶- روی پاره خط $AB = a$ دو نقطه M و N را به قسمی اختیار می‌کنیم که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} = 2$ در این صورت طول پاره خط MN چقدر است؟

- (۱) $\frac{a}{4}$ (۲) $\frac{a}{2}$ (۳) $\frac{a}{3}$ (۴) $\frac{2a}{3}$



۷- در دوزنقه شکل مقابل $BM = MD$ و $AN = NC$ اگر $CD = 3AB$ باشد آنگاه:

- (۱) $PQ = \frac{2CD}{3}$
 (۲) $PQ = \frac{CD}{6}$
 (۳) $PQ = \frac{4CD}{9}$
 (۴) $PQ = \frac{CD}{3}$



۸- در دوزنقه $ABCD$ اگر $AB = 3$ و $DC = 6$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}$ باشد آنگاه:

- (۱) $MN = \frac{13}{4}$
 (۲) $MN = \frac{9}{2}$
 (۳) $MN = 4$
 (۴) $MN = 5$

۹- در مثلث قائم الزاویه‌ای ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو پاره‌خط به اندازه‌های ۹ و ۴ تقسیم می‌کند. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶/۵ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۰- اگر یکی از زوایای لوزی 60° باشد با کدام شکل زیر متشابه است؟

- (۱) مربع
(۲) متوازی‌الاضلاع به زاویه 60°
(۳) لوزی که یک زاویه 60° دارد
(۴) لوزی که یک زاویه 30° دارد

۱۱- اگر اوساط اضلاع یک مستطیل را به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) لوزی (۲) مربع (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) ذوزنقه

۱۲- اگر در یک ذوزنقه، قاعده بزرگتر دو برابر قاعده کوچکتر باشد، خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند سطح ذوزنقه را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{5}{7}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۳- با کدام یک از شرایط زیر دو مثلث ABC و ADE متشابهند؟

- (۱) D و E به ترتیب بر AB و AC قرار گیرند.
(۲) $DE \parallel BC$
(۳) $\hat{B} = \hat{D}$
(۴) سه نسبت $\frac{DE}{AC}$ و $\frac{AE}{BC}$ و $\frac{AD}{AB}$ برابر باشند

۱۴- در مثلث ABC وسط دو ضلع را به هم وصل کرده‌ایم تا به یک چهارضلعی و یک مثلث تجزیه شود. نسبت مساحت چهارضلعی به مساحت مثلث چقدر است؟

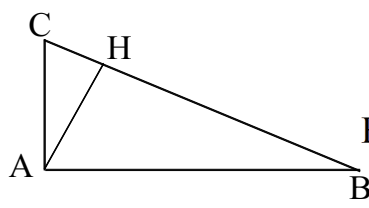
- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) ۳

۱۵- کدامیک از گزاره‌های زیر **غلط** است؟

- (۱) دو مستطیل که زوایای بین دو قطر آنها مساوی باشند متشابهند.
(۲) دو مربع در هر حال متشابهند.
(۳) دو مثلث متساوی‌الساقین که زاویه راس مساوی داشته باشند، متشابهند.
(۴) دو لوزی در هر حال متشابهند.

۱۶- در دو مثلث متشابه که محیط یکی ۳ برابر دیگری است، نسبت مساحت‌های دو مثلث چقدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۳



۱۷- در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 90^\circ$ و ارتفاع AH است. کدام گزینه **غلط** است؟

- (۱) $\overline{AC}^2 = BC \times CH$
(۲) $BC \times AH = AB \times AC$
(۳) $\overline{AH}^2 = CH \times BH$
(۴) $\overline{BH}^2 = BC \times AB$

۱۸- در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = 2$ ، اگر AM و $A'M'$ به ترتیب میانه‌های راس A و

A' باشند، نسبت $\frac{\text{مساحت } ABM}{\text{مساحت } A'C'M'}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۹- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر برابر باشد دو مثلث متشابهند
 (۲) اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه غیرقائم برابر باشد دو مثلث متشابهند
 (۳) اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه یکی از اضلاع برابر باشند دو مثلث متشابهند
 (۴) اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه وترها برابر باشند دو مثلث متشابهند

۲۰- در مثلث ABC داریم $M \in AB$ و $N \in AC$ و $MN \parallel BC$ اگر MN مساحت مثلث را به دو قسمت مساوی

تقسیم کرده باشد، آنگاه نسبت $\frac{MN}{BC}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\sqrt{2}$

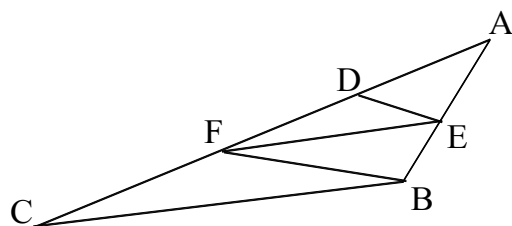
۲۱- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها $\frac{4}{9}$ است. اگر ضلع AB از مثلث کوچکتر برابر ۸ سانتی‌متر باشد. $A'B'$ در مثلث

دیگر چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۸ (۴) ۱۲

۲۲- در تصاعد عددی $\dots, 12, 8, b, a$ مجموع جملاتی که عدد دو رقمی هستند کدام است؟

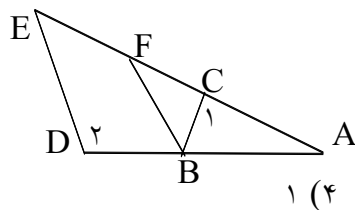
- (۱) ۱۲۰۰ (۲) ۱۳۰۰ (۳) ۱۱۹۶ (۴) ۱۱۸۸



۲۳- در شکل $AD = 2$ و $FD = 4$ و $DE \parallel FB$ و $EF \parallel BC$ است،

طول FC چقدر است؟

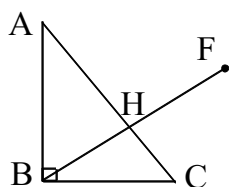
- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۹



۲۴- در شکل، $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_2$ و $BF \parallel DE$ و $AC = BD = 2$ و $AB = 3$ آنگاه

کدام است $\frac{BC}{BF}$ ؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱



۲۵- در شکل مثلث ABC قائم الزاویه $AB = 4$ و $BC = 3$ می باشد. اگر ارتفاع BH تا نقطه F امتداد دهیم، مقدار HF چقدر باشد تا دو مثلث AHF و ABH متشابه باشند؟

(۱) $\frac{64}{15}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{16}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۲۶- مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 30^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$ و $S = 20\sqrt{3}$ (مساحت مثلث) با مثلث $A'B'C'$ که در آن

$a' = \sqrt{10}$ (ضلع بزرگتر) متشابه است نسبت متشابه چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) ۸ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۴

۲۷- مثلث متساوی الساقینی که در آن $\hat{A} = 120^\circ$ (زاویه ی رأس) و مساحت آن برابر $S = \sqrt{3}$ است با مثلث

متساوی الساقینی که در آن $\hat{M} = 30^\circ$ و قاعده $MN = 6\sqrt{3}$ متشابه است. نسبت مساحت دو مثلث چقدر است؟

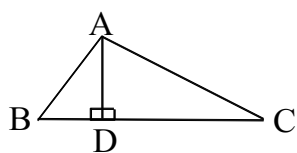
(۱) ۹ (۲) ۳ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۸۱

۲۸- اواسط اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل می کنیم یکی از زوایای چهارضلعی حاصل 60° درجه است، نسبت قطر مستطیل به ضلع بزرگ مستطیل چقدر است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

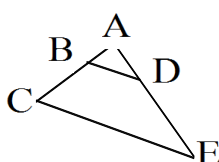
۲۹- مثلث قائم الزاویه ای به وتر چهار و ضلع دو با مثلث قائم الزاویه ای به وتر ۸ و ضلع X متشابه است. X کدام است؟

(۱) ۶ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $4\sqrt{3}$



۳۰- در شکل زیر $\frac{AB}{AD} = 2$ و $\frac{AC}{AD} = \sqrt{2}$ زاویه \widehat{BAC} چند برابر زاویه \widehat{ACD} است؟

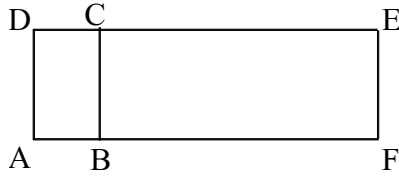
(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{7}{2}$



۳۱- در شکل $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} = \frac{2}{3}$ مساحت دوزنقه $BDEC$ چند برابر مساحت مثلث ABD است؟

(۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۳۲- در شکل دو مستطیل ABCD و BCEF متشابهند اگر $AB = 1$ و $AD = 3$ باشد مساحت ADEF چند برابر BCEF است؟

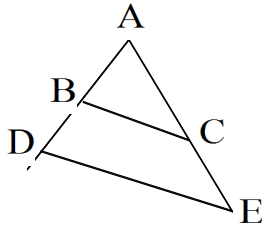


- (۱) $\frac{4}{3}$
 (۲) $\frac{9}{8}$
 (۳) $\frac{10}{9}$
 (۴) $\frac{3}{2}$

۳۳- در مستطیل ABCD زاویه‌ی بین دو قطر 60° و در مستطیل A'B'C'D' زاویه‌ی بین دو قطر 120° و طول مستطیل ۶ است. دو مستطیل:

- (۱) متشابهند و نسبت مساحت‌ها ۶ است.
 (۲) متشابه نیستند و نسبت مساحت‌ها ۱۲ است.
 (۳) متشابه نیستند و نسبت مساحت‌ها ۶ است.
 (۴) متشابهند و نسبت مساحت‌ها ۱۲ است.

۳۴- در شکل $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} = \frac{2}{3}$ مساحت چهارضلعی BCED چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

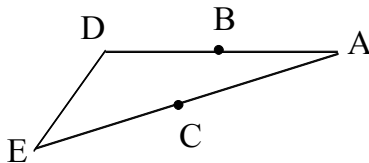


- (۱) $\frac{25}{4}$
 (۲) $\frac{21}{4}$
 (۳) $\frac{9}{4}$
 (۴) $\frac{5}{4}$

۳۵- مستطیلی به مساحت ۲۴ با مستطیلی به ضلع سه و قطر ۵ متشابه است. قطر مستطیل اولی چقدر است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$
 (۲) ۱۰
 (۳) ۸
 (۴) $6\sqrt{2}$

۳۶- در شکل اگر $AB = 2$ و $BD = 5$ و $AC = EC = x$ و دو مثلث ABC و ADE متشابه باشند آنگاه:



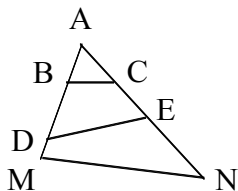
- (۱) $x = \sqrt{7}$
 (۲) $x = 2\sqrt{7}$
 (۳) $x = \sqrt{14}$
 (۴) $x = 4\sqrt{7}$

۳۷- در شکل مثلث‌های ABC و ADE و AMN متشابه‌اند. اضلاع BC و MN موازی و DE موازی آن‌ها نیست. اگر

$AB = 2$ و $AC = 3$ و $CE = 2$ و $DM = \frac{1}{2}$ باشد مساحت مثلث AMN چند برابر مساحت مثلث ADE

است؟

- (۱) $\frac{64}{25}$
 (۲) $\frac{144}{25}$
 (۳) $\frac{49}{25}$
 (۴) ۴



۳۸- در یک هشت ضلعی منتظم اوساط اضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم مساحت شکل جدید چند برابر هشت ضلعی اولیه است؟

$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۳)$$

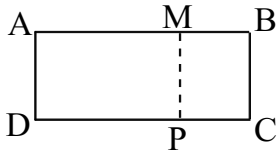
$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

۳۹- در مثلث ABC زاویه $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 40^\circ$ چند نقطه مانند M روی ضلع BC یا در امتداد آن وجود دارد که مثلث‌های ABM و ACM متشابه باشند؟

(۱) سه نقطه (۲) دو نقطه (۳) چهار نقطه (۴) یک نقطه

۴۰- چند نقطه مانند M روی ضلع AB از مستطیل $ABCD$ وجود دارد که اگر از آن نقطه به CD عمود شود و نقطه P به دست آید، و اگر $AB = 10$ و $BC = 4$ آن گاه دو مستطیل $ABCD$ و $MBCP$ متشابه است؟



- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۴۱- مثلثی به اضلاع $a = 3$ و $b = 6$ و $c = 4$ با کدام مثلث که دو ضلع آن داده شده می‌تواند متشابه باشد؟

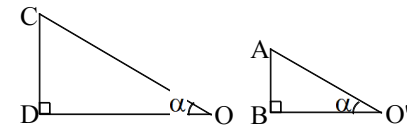
(۱) $a' = 2, b' = 4$ (۲) $a' = 1, b' = 3$ (۳) $a' = 3, b' = 5$ (۴) $a' = 2, b' = 5$

۴۲- مثلثی به اضلاع ۴ و ۴ و ۵ با کدام مثلث متشابه است؟

- (۱) مثلثی به ارتفاع‌های ۲ و ۲ و ۳ (۲) مثلثی به ارتفاع‌های ۱۶ و ۱۶ و ۲۰ (۳) مثلثی به ارتفاع‌های ۲۰ و ۲۰ و ۱۶ (۴) مثلثی به ارتفاع‌های ۵ و ۵ و ۶

جواب تالس و تشابه - آزاد

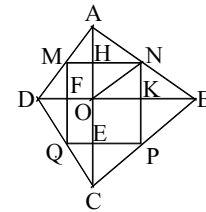
۱- مطابق شکل، فرض کنیم OD و O'B سایه‌های ساختمان CD و درخت AB باشند. با توجه به اینکه زاویه اشعه آفتاب برابر است، در نتیجه دو مثلث با یکدیگر متشابهند، بنابراین داریم:



$$\frac{OD}{O'B} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{1/21}{5/5} = \frac{5/5}{AB} \Rightarrow \frac{1}{21} = \frac{1}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5/5}{1/21} = 5$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲- هرگاه AC و BD اقطار چهار ضلعی بوده و از O به N وصل کنیم داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AN = NB \\ AM = MD \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق رابطه}} \left. \begin{array}{l} AH = HO \Rightarrow S_{\triangle AHN} = S_{\triangle NHO} \\ S_{\triangle NOK} = S_{\triangle NKB} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

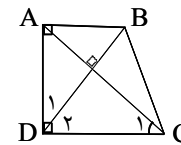
$$S_{\text{Hnko}} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOB}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} S_{\triangle HOFM} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOD} \\ S_{\triangle OEQF} = \frac{1}{2} S_{\triangle COD} \\ S_{\triangle OEPK} = \frac{1}{2} S_{\triangle BOC} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{\text{MNPQ}} = \frac{1}{4} S_{\text{ABCD}}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

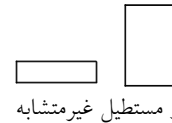
۳-



$$\left. \begin{array}{l} \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 90 \\ \hat{C}_1 + \hat{D}_2 = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow AD^2 = AB \cdot CD$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۴- دو چند ضلعی زمانی متشابه هستند که زوایای متناظر، برابر و اضلاع متناظر، متناسب باشند. دو مربع یا دو n ضلعی منتظم، چون زوایای برابر دارند و اضلاعشان با یکدیگر متناسب است، همواره متشابه‌اند. دو لوزی، هرگاه دارای یک زاویه برابر داشته باشند، دیگر زوایای آنها نیز برابر بوده و اضلاعشان نیز همواره متناسب است. اما در دو مستطیل زوایا با هم برابرند، اما اضلاع ممکن است متناسب نباشند. بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۵- $\left. \begin{array}{l} BM = AM \\ BN = NC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{رابطه تالس}} \left. \begin{array}{l} MN \parallel \frac{AC}{2} \\ PQ \parallel \frac{AC}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مNPQ متوازی الاضلاع است}$

اضلاع MNPQ با اقطار ABCD متوازی بوده و با هم برابرند، در نتیجه خواهیم داشت:

$MN = NP \Rightarrow AC = BD$, $MN \perp NP \Rightarrow AC \perp BD$

اقطار چهارضلعی ABCD برابر و بر هم عمودند، پس ABCD مربع است. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶-

$\frac{AM}{MB} = 2 \Rightarrow \frac{AM}{AM+MB} = \frac{2}{2+1} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AM = \frac{2}{3}a$

$\frac{BN}{AN} = 2 \Rightarrow \frac{BN+AN}{AN} = \frac{2+1}{1} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = 3 \Rightarrow AN = \frac{1}{3}a$

$MN = AM - AN = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a$

بنابراین:

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۷- هرگاه وسط‌ساقهای یک دوزنقه را بهم وصل کنیم قطره‌های دوزنقه را نیز نصف می‌کند. طبق قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MN = \frac{1}{2}(AB+CD) = \frac{1}{2}AB \\ NP = \frac{1}{2}AB \\ MQ = \frac{1}{2}AB \end{array} \right\} \Rightarrow NP+MQ = AB$$

$$\Rightarrow MN - (NP+MQ) = PQ = AB = \frac{1}{2}CD$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۸- هرگاه از رأس A به C وصل کنیم طبق رابطه تالس داریم:

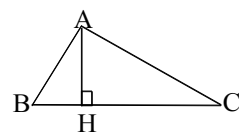
$\frac{MP}{CD} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MP = \frac{1}{3}CD = 2$

$\frac{NP}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{BC-BN}{BC} = 1 - \frac{BN}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow NP = \frac{2}{3}AB = 2$

$$MN = 2 + 2 = 4$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

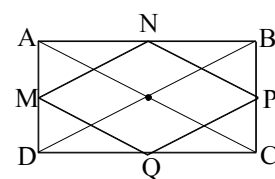
۹- یادآوری: در هر مثلث قائمه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین دو پاره‌خطی است که توسط وتر بر روی وتر ایجاد شده‌اند.



$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH^2 = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۰- دو چند ضلعی هنگامی متشابه هستند که زوایای آنها برابر بوده و اضلاع متناظر، متناسب باشند.
 دو لوزی زمانی متشابه هستند که زوایای آنها برابر باشند چون همواره اضلاع آنها با یکدیگر متناسب است و با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ پاسخ درست است.



$$\left. \begin{array}{l} AN = NB \\ AM = MD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{طبق تالس} \\ \longrightarrow MN \parallel \frac{BD}{2} \end{array}$$

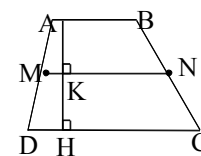
$$\left. \begin{array}{l} CQ = DQ \\ CP = PB \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{طبق تالس} \\ \longrightarrow PQ \parallel \frac{BD}{2} \end{array}$$

$$MQ \parallel NP \parallel \frac{AC}{2}$$

-۱۱

بطور مشابه:

بنابراین چهارضلعی MNPQ لوزی است و گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



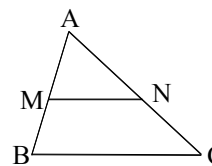
۱۲- یادآوری: خطی که اواسط دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند موازی دو قاعده و برابر نصف مجموع دو قاعده است.

$$\left. \begin{array}{l} S_{ABMN} = \frac{1}{2} AK(AB + NM) \\ S_{MNC D} = \frac{1}{2} KH(MN + CD) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S_{ABMN}}{S_{MNC D}} = \frac{x + \frac{x+yx}{2}}{yx + \frac{x+yx}{2}} = \frac{\frac{5}{2}x}{\frac{7}{2}x} = \frac{5}{7}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۳- لازمه اینکه دو مثلث متشابه باشند آن است که: (۱) دو زاویه آنها نظیر به نظیر برابر باشد یا (۲) سه ضلع از یکی با سه ضلع از دیگری متناسب باشد و یا (۳) دو ضلع از یکی با دو ضلع از دیگری متناسب بوده و زاویه بین دو ضلع در دو مثلث برابر باشد. با توجه به موارد فوق، گزینه ۴ جواب درست است.

۱۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم نسبت مساحت دو چند ضلعی متشابه برابر مجذور نسبت تشابه دو شکل است.



$$\left. \begin{array}{l} AM = MB \\ AN = NC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{طبق تالس} \\ \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} MN = \frac{BC}{2} \\ \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MNCB} = \frac{3}{4} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}} = 3$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم دو چند ضلعی هنگامی متشابهند که زوایای متناظر آنها برابر بوده و اضلاع متناظر در آنها، متناسب باشند. در لوزی، همواره اضلاع متناظر، متناسبند اما ممکن است زوایای دو لوزی با یکدیگر برابر نباشد. بنابراین گزینه ۴ همواره برقرار نبوده و پاسخ صحیح است.

۱۶- یادآوری ۱: نسبت مساحت دو شکل متشابه، برابر با مجذور نسبت تشابه آنها است.
 یادآوری ۲: نسبت محیط دو شکل متشابه برابر با نسبت تشابه آن دو شکل است.

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{rp}{r'p'}\right)^2 = (r)^2 = 9$$

اگر ۲P و ۲P' محیطهای دو مثلث باشند:

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۷- می‌دانیم مساحت هر مثلث برابر با نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع آن است، پس:

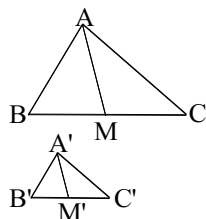
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AB \cdot AC = AH \cdot BC$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه روابط زیر برقرار است:

$$AC^2 = CH \cdot BC, \quad AB^2 = BH \cdot BC, \quad AH^2 = BH \cdot CH$$

بنابراین تنها گزینه ۴ برقرار نیست. پس گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

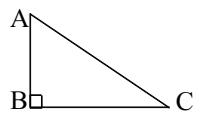
۱۸- می‌دانیم نسبت مساحت دو شکل متشابه برابر با مجذور نسبت تشابه آنها است.



$$\left. \begin{array}{l} S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC} \\ S_{A'B'M'} = S_{A'C'M'} = \frac{1}{2} S_{A'B'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}} = \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \left[\frac{AB}{A'B'}\right]^2 = 4$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

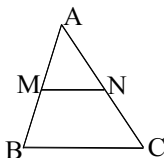
۱۹- یادآوری: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابهند.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۰- می‌دانیم نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر با مجذور نسبت تشابه آنها است. طبق شکل مقابل، چون مساحت مثلث AMN با مساحت چهارضلعی MNCB برابر است، پس:



$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AMN}}{S_{AMN} + S_{MNCB}} = \frac{1}{2} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

-۲۵

$$\widehat{AHF} \sim \widehat{ABH} \Rightarrow \frac{AH}{HF} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow HF = \frac{AH^2}{BH}$$

$$AB^2 = AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{16}{5}$$

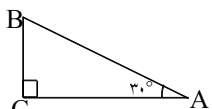
$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BH \cdot BC}{2} \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5}$$

$$\text{رابطه فیثاغورث: } AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

$$\Rightarrow HF = \frac{64}{15}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

-۲۶



$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 90^\circ$$

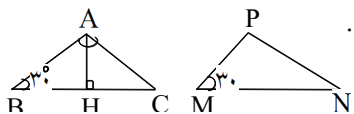
بنابراین مثلث ABC در رأس C قائمه است.

$$S_{ABC} = \frac{BC \times AC}{2} = \frac{AB}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = 20\sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = 160 \Rightarrow AB = 4\sqrt{10}$$

$$K = \frac{AB}{A'B'} = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 4$$

می‌دانیم نسبت تشابه دو شکل متشابه برابر با نسبت اضلاع متناظرشان است. پس:

بنابراین گزینه ۴ پاسخ درست است.



-۲۷ می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه نیز می‌باشد.

$$S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} BC^2 = \frac{\sqrt{3} BC^2}{12} \Rightarrow BC^2 = 12$$

$$\text{tg } B = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{3} BH = \frac{\sqrt{3}}{6} BC$$

یاد آوری: نسبت مساحت ۲ شکل متشابه برابر مجذور نسبت تشابه ۲ شکل است بنابراین:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{6\sqrt{3}}{12}\right)^2 = \frac{36 \times 3}{12} = 9$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

-۲۱ یاد آوری: هرگاه نسبت تشابه دو شکل متشابه برابر k باشد، نسبت مساحت آنها برابر k^2 است.

$$\frac{AB}{A'B'} = k \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{4}{9} = k^2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A'B'}{A'B'} = \frac{2}{3} \Rightarrow A'B' = 12$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$d = 12 - 8 = 4$$

-۲۲ در تصاعد عددی، تفاضل دو جمله متوالی مقدار قدر نسبت را مشخص می‌کند.

پس می‌توان فرض کرد که تصاعد، از اولین عدد دو رقمی یعنی ۱۲ با قدر نسبت ۴ شروع شده است و آخرین جمله مورد نظر کوچکتر از ۱۰۰ می‌باشد.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 12 + 4(n-1) \leq 99 \Rightarrow 4(n-1) \leq 87 \Rightarrow 4n - 4 \leq 87 \Rightarrow$$

$$4n \leq 91 \Rightarrow n \leq \frac{91}{4} \Rightarrow n \leq 22.75 \Rightarrow n = 22$$

بنابراین آخرین جمله دو رقمی، جمله بیست و دوم می‌باشد.

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} \Rightarrow S_{22} = \frac{22(2 \times 12 + 21 \times 4)}{2} = 11 \times 108 = 1188$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

-۲۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel FB \xrightarrow{\text{رابطه تالس}} \frac{AD}{DF} = \frac{AE}{BE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ FE \parallel BC \xrightarrow{\text{رابطه تالس}} \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow FC = 2AF = 2(AD + DF) = 12$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{A} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{ADE} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{BC}{DE}$$

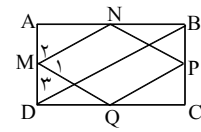
$$BF \parallel DE \xrightarrow{\text{رابطه تالس}} \frac{AB}{AD} = \frac{BF}{DE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{BF}{DE}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{با تقسیم ۲ عبارت} \\ \text{بر هم داریم} \end{array} \right\} \frac{BC}{BF} = \frac{2}{3}$$

-۲۴

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم از بهم وصل کردن اواسط اضلاع یک مستطیل، یک لوزی بوجود می‌آید. بنابراین ضلع لوزی برابر نصف قطر مستطیل است.



$\widehat{ABD} \Rightarrow MN = \frac{DB}{2}$: طبق قضیه تالس
 $M_1 = 60 \Rightarrow M_2 = M_3 = \frac{180 - M_1}{2} = 60$

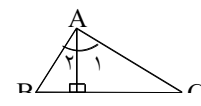
$\sin \widehat{M_2} = \frac{AN}{NM} = \frac{AB}{DB} = \frac{AB}{DB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

یکی از اضلاع قائمه مثلث دوم $\frac{4}{8} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 4$

ضلع دیگر مثلث دوم $X^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow X^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow X = 4\sqrt{3}$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$\frac{AB}{AD} = 2 \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 30^\circ \Rightarrow A_2 = 60^\circ$

$\frac{AC}{AD} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = 45^\circ \Rightarrow A_1 = 45^\circ$

$\left. \begin{matrix} \widehat{BAC} = 105 \\ \widehat{ACD} = 45 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{نسبت دو زاویه} = \frac{7}{3}$

بنابراین $A_2 = 45^\circ$ می‌باشد. پس:

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

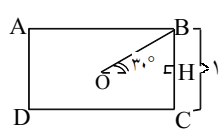
$ABD \sim ACE \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{5}$

$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow \frac{S_{ACE} - S_{ABD}}{S_{ABD}} = \frac{25 - 4}{2} = \frac{21}{4}$

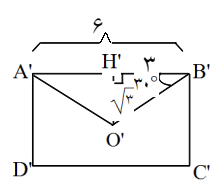
۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{BF} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{9} S_{BCEF} \Rightarrow S_{ADEF} = \frac{1}{9} S_{BCEF}$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$BH = \frac{1}{2} \Rightarrow OB = 1$
 $\Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{3}$
 $A'B' = 6 \Rightarrow O'H' = \sqrt{3} \Rightarrow A'D' = 2\sqrt{3}$



نسبت دو مستطیل مشابه $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{6}$
 $\frac{S}{S'} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{6 \times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{12}$

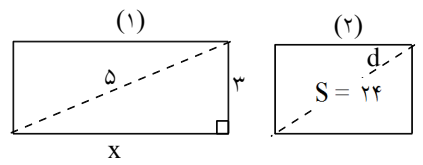
$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{5}{2}$
 ۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

دو مثلث \widehat{ADE} , \widehat{ABC} با هم متشابهند و نسبت تشابه $\frac{5}{2}$ است پس:

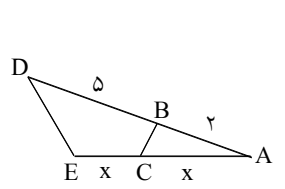
$\frac{S_{\widehat{ADE}}}{S_{\widehat{ABC}}} = \frac{25}{4} \Rightarrow S_{\widehat{ABC}} + S_{BCDE} = \frac{25}{4} S_{\widehat{ABC}} \Rightarrow S_{BCDE} = \frac{21}{4} S_{\widehat{ABC}}$

$x^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow s_1 = 3 \times 4 = 12$
 ۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

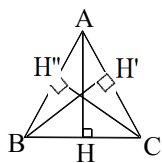
$\frac{S_2}{S_1} = \frac{24}{12} = 2 = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{2}$
 $\frac{d}{5} = \sqrt{2} \Rightarrow d = 5\sqrt{2}$



۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$\triangle ABC \sim \triangle ADE$
 $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$
 $\frac{2}{2x} = \frac{x}{v} \Rightarrow x^2 = v \Rightarrow x = \sqrt{v}$



۴۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. ارتفاعهای مثلث با اضلاع ۴ و ۴ و ۵ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta AHC : AH^2 = AC^2 - HC^2 = 16 - \frac{25}{4} = \frac{39}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$\Delta ABC : AH \times BC = BH' \times AC \Rightarrow BH' = \frac{\frac{\sqrt{39}}{2} \times 5}{4} = \frac{5\sqrt{39}}{8}$$

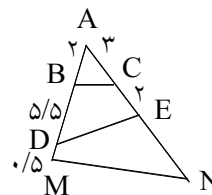
$$CH'' = BH' = \frac{5\sqrt{39}}{8}$$

پس ارتفاع های مثلث $\frac{\sqrt{39}}{2}$, $\frac{5\sqrt{39}}{8}$, $\frac{5\sqrt{39}}{8}$ است با مثلثی با ارتفاعهای ۲۰ و ۲۰ و ۱۶ متشابه است. زیرا:

$$\frac{\frac{5\sqrt{39}}{8}}{20} = \frac{5\sqrt{39}}{20} = \frac{\sqrt{39}}{4} = \frac{\frac{\sqrt{39}}{2}}{16} = \frac{\sqrt{39}}{32}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{AD} \Rightarrow AD = 7.5$$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ADE}} = \left(\frac{AM}{AE}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$$



۳۷- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

پس $DB = 5/5$ است.

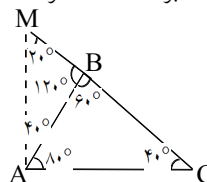
۳۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. اگر اوساط اضلاع یک n ضلعی منتظم به هم وصل کنیم مساحت n ضلعی به دست

آمده $\cos^2 \frac{180}{n}$ برابر مساحت اولیه است.

$$\text{جواب } \cos^2 \frac{180}{8} = \cos^2 22.5 = \frac{1 + \cos 45}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۳۹- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. بین BC نقطه‌ای وجود ندارد که شرایط مسئله را دارا باشد بر امتداد BC طرف B یک

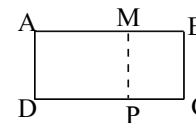
نقطه وجود دارد که با شرایط مسئله هماهنگی دارد (طبق شکل) زیرا



$$\hat{C} = \hat{MAB} = 40 \text{ در دو مثلث مشترک و}$$

۴۰- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. تنها یک نقطه M وجود دارد.

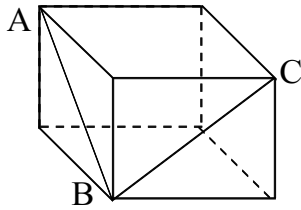
$$\frac{\text{طول بزرگ}}{\text{طول کوچک}} = \frac{\text{عرض بزرگ}}{\text{عرض کوچک}} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{4}{MB} \Rightarrow MB = 1/6$$



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{دو مثلث متشابهند}$$

۴۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

اشکال فضایی - سراسری



۱- شکل مقابل یک مکعب است، زاویه \widehat{ABC} چند درجه است؟

- (۱) ۱۳۰
(۲) ۴۵
(۳) ۶۰
(۴) ۹۰

۲- پیمانهای به شکل نیمکره با شعاع داخلی ۱۲ واحد را لبریز از آب کرده در داخل استوانه‌ای با همان شعاع قاعده می‌ریزیم ارتفاع آب داخل استوانه چند واحد بالا می‌آید؟

- (۱) ۶
(۲) ۷/۵
(۳) ۸
(۴) ۹

۳- اگر طول هر ضلع مکعب ABCDEFGH، ۱ سانتیمتر باشد و نقطه G از همه رأسها به یک فاصله باشد، اندازه GA چند سانتیمتر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۴) $\sqrt{3}$

۴- سطح جانبی مخروط دواری دو برابر سطح قاعده‌اش می‌باشد. از گسترش این مخروط بر صفحه مستوی قطاعی حاصل می‌شود، زاویه این قطاع کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$
(۲) $\frac{\pi}{2}$
(۳) π
(۴) $\frac{3\pi}{2}$

۵- مکعب مستطیلی به حجم ۴۸ و ابعاد a و ۲a و ۳a مفروض است مقدار a در این مکعب کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۶- حجم مکعب محیط بر کره به شعاع R کدام است؟

- (۱) $9R^3$
(۲) $8R^3$
(۳) $6R^3$
(۴) $4R^3$

۷- طول ضلع قاعده هرم منتظم و مربع القاعده‌ای $6\sqrt{2}$ سانتیمتر و اندازه یال جانبی آن ۱۰ سانتیمتر است. حجم این هرم چند سانتیمتر مکعب است؟

- (۱) ۱۶۲
(۲) ۱۷۲
(۳) ۱۸۲
(۴) ۱۹۲

۸- معادله کره‌ای که مرکز آن به مختصات (۳، ۲، ۱) و از نقطه (۲، -۱، -۲) می‌گذرد کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z = 49$
(۲) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 21$
(۳) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z = 49$
(۴) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 21$

۹- ظرفی به شکل مخروط دوار به ارتفاع ۱۲ سانتیمتر را پر از آب کرده و آن را در استوانه‌ای با همان سطح قاعده و ارتفاع ۶ سانتیمتر خالی می‌کنیم. فاصله سطح آب تا بالای استوانه چند سانتیمتر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{5}$

۱۰- اصل کاوالیری در مورد تساوی حجم دو جسم که قاعده آنها در یک صفحه باشد، بر کدام اصل قرار دارد؟

- (۱) تساوی سطح مقطع حاصل از تقاطع هر صفحه موازی با یک صفحه با دو جسم.
 (۲) تساوی محیط مقطع حاصل از تقاطع هر صفحه موازی با یک صفحه با دو جسم.
 (۳) تساوی سطح مقطع حاصل از تقاطع هر دو صفحه دلخواه با دو جسم.
 (۴) تساوی محیط مقطع حاصل از تقاطع هر دو صفحه دلخواه با دو جسم.

۱۱- صفحه گذرنده بر انتهای سه یال واقع بر یک راس از مکعب آن را به دو جزء تقسیم می‌کند. حجم جزء بزرگتر چند برابر حجم جزء کوچکتر است؟

- (۱) ۵ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۶

۱۲- ارتفاع و ضلع قاعده یک هرم مربع‌القاعده به ترتیب ۸ و ۱۲ سانتیمتر است حجم هرم ناقصی که قاعده بالای آن مقطع متوسط هرم است، چند سانتیمتر مکعب است؟

- (۱) ۳۱۲ (۲) ۳۱۶ (۳) ۳۲۸ (۴) ۳۳۶

۱۳- حجم مخروط دواری سه برابر حجم مخروط دوار دیگری است. اگر شعاع قاعده مخروط با حجم بیشتر، نصف شعاع قاعده مخروط دیگر باشد، نسبت ارتفاع‌های دو مخروط کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۴- تصویر یک مخروط بر یک صفحه مسطح، یک دایره است. زاویه‌ای که محور مخروط با صفحه تصویر می‌سازد چند درجه است؟

- (۱) صفر (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

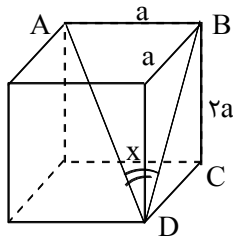
۱۵- در مخروطی که طول مولد آن برابر قطر قاعده و مساوی ۶ سانتی‌متر است، کره‌ای محاط شده، حجم کره کدام است؟

- (۱) $2\pi\sqrt{3}$ (۲) $3\pi\sqrt{3}$ (۳) $4\pi\sqrt{3}$ (۴) $6\pi\sqrt{3}$

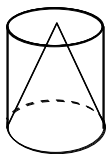
۱۶- هر مکعب چند صفحه متقارن دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۷- در شکل مقابل، مکعب مستطیلی به ابعاد a ، a و $2a$ است. تانژانت زاویه x کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{5}$



۱۸- در شکل مقابل، ارتفاع مخروط با قطر قاعده برابر است. اگر حجم مخروط $\frac{128\pi}{3}$ باشد، سطح جانبی استوانه کدام است؟

- (۱) 52π (۲) 56π (۳) 60π (۴) 64π

۱۹- صفحه‌ای موازی قاعده هرم، ارتفاع آن را نصف می‌کند. حجم هرم حاصل چه کسری از حجم هرم اولیه است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۲۰- حجم کره‌ای به شعاع R با حجم مخروطی به شعاع قاعده R برابر است ارتفاع مخروط چند برابر شعاع R است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) 3 (۴) 4

۲۱- عدد اندازه حجم یک کره، 3 برابر عدد اندازه مساحت کره است. مساحت دایره عظیمه این کره کدام است؟

- (۱) 36π (۲) 49π (۳) 64π (۴) 81π

۲۲- هرمی به حجم V را با صفحه‌ای موازی قاعده که از وسط ارتفاع نظیر این قاعده هرم می‌گذرد قطع می‌کنیم، حجم هرم ناقص برابر است با:

- (۱) $\frac{3}{4}V$ (۲) $\frac{7}{8}V$ (۳) $\frac{8}{9}V$ (۴) $\frac{15}{16}V$

۲۳- حجم استوانه دواری به ارتفاع 3 ، برابر است با 12π (واحد حجم) مساحت سطح جانبی آن برحسب واحد سطح کدام است؟

- (۱) 18π (۲) 12π (۳) 24π (۴) 36π

۲۴- حجم منشور مربع‌القاعده مایلی که طول ضلع قاعده آن $\sqrt{3}$ و یکی از وجوهش مربع و وجه دیگر آن لوزی به زاویه 60° است، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{7}$ (۲) $\frac{9}{5}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۲۵- اگر راس یک مخروط را روی صفحه‌ای به موازات صفحه قاعده تغییر دهیم:

- (۱) حجم مخروط ثابت و سطح جانبی آن تغییر می‌کند (۲) حجم مخروط و سطح جانبی آن هر دو ثابت می‌مانند
(۳) حجم مخروط و سطح جانبی هر دو تغییر می‌کنند (۴) حجم مخروط تغییر و سطح جانبی آن ثابت می‌ماند

۲۶- طول قطر مکعبی $3\sqrt{3}$ سانتیمتر است. مساحت کل مکعب چند سانتیمتر مربع است؟

- (۱) 36 (۲) 42 (۳) 48 (۴) 54

۲۷- ارتفاع هرم مربع‌القاعده منتظمی 7 و یک ضلع قاعده‌اش 8 سانتیمتر است. یال هرم چند سانتیمتر است؟

- (۱) 9 (۲) $\frac{9}{5}$ (۳) 8 (۴) $\frac{8}{5}$

۲۸- مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ را حول یکی از ضلعها دوران می‌دهیم، حجم حاصل چقدر است؟

(۱) ۱۲π (۲) ۱۶π (۳) ۱۸π (۴) ۲۴π

۲۹- اگر شعاع قاعده یک مخروط قائم با ارتفاع آن و عدد حجم مخروط با عدد سطح جانبی آن برابر باشند، شعاع قاعده مخروط کدام است؟

(۱) $۲\sqrt{۲}$ (۲) $۲\sqrt{۳}$ (۳) $۳\sqrt{۲}$ (۴) $۳\sqrt{۳}$

۳۰- سطح کل یک مکعب $۱۸\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع است. قطر مکعب چند سانتی‌متر است؟

(۱) $۳\sqrt{۴}$ (۲) $۳\sqrt{۳}$ (۳) $۲\sqrt{۳}$ (۴) $۳\sqrt{۲}$

۳۱- اگر ضلع مکعبی $\frac{1}{6}$ شود، سطح کل آن به چه نسبتی کوچک می‌شود؟

(۱) $\frac{1}{۳۶}$ (۲) $\frac{1}{۲۴}$ (۳) $\frac{1}{۱۲}$ (۴) $\frac{1}{۶}$

۳۲- اگر سطح قاعده یک هرم ناقص به ترتیب ۱۸ و ۲۷ سانتیمتر مربع و ارتفاع هرم اصلی ۱۲ سانتیمتر باشد، فاصله قاعده کوچکتر از رأس هرم چند سانتیمتر است؟

(۱) $۴\sqrt{۳}$ (۲) $۴\sqrt{۶}$ (۳) $۳\sqrt{۶}$ (۴) $۳\sqrt{۳۰}$

۳۳- صفحه هر دو دایره عظیمه یک کره

(۱) با هم موازیند (۲) بر هم عمودند (۳) در یک قطر مشترکند (۴) فاقد نقطه مشترکند

۳۴- در هرم منتظم مربع القاعده به ضلع قاعده $۲\sqrt{۳}$ ، ارتفاع هرم ۳ واحد است، سطح جانبی هرم کدام است؟

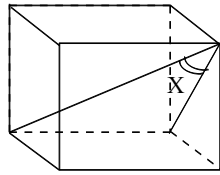
(۱) $۱۲\sqrt{۶}$ (۲) ۱۸ (۳) ۴۲۴ (۴) $۱۶\sqrt{۳}$

۳۵- ارتفاع یک استوانه برابر با قطر دایره قاعده آن است. اگر تصویر استوانه بر صفحه یک مربع باشد، زاویه محور استوانه با صفحه تصویر چند درجه است؟

(۱) ۹۰° (۲) ۶۰° (۳) ۴۵° (۴) صفر

۳۶- قاعده یک مکعب مستطیل مربع است. اگر قطر قاعده و ارتفاع مکعب مستطیل هردو $۲\sqrt{۲}$ باشند، سطح جانبی مکعب مستطیل کدام است؟

(۱) ۱۸ (۲) $۱۴\sqrt{۲}$ (۳) ۲۰ (۴) $۱۶\sqrt{۲}$



۳۷- در مکعب شکل زیر زاویه X کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \text{ArcCos} \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (2) & \text{ArcCos} \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (1) \\ \text{ArcSin} \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (4) & \text{ArcSin} \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (3) \end{array}$$

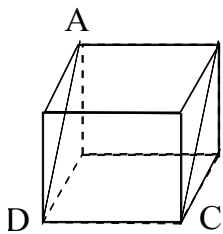
۳۸- طول یال‌های مکعب مستطیلی به ترتیب ۱ و $\sqrt{3}$ و ۲ واحد است، زاویه قطر مکعب مستطیل با یال بزرگتر چند درجه

است؟

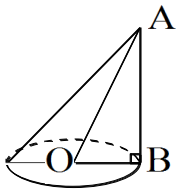
$$90 \quad (4) \quad 60 \quad (3) \quad 45 \quad (2) \quad 30 \quad (1)$$

۳۹- در مکعب شکل مقابل مساحت چهارضلعی ABCD برابر $3\sqrt{2}$ است. سطح کل مکعب

چند سانتیمتر مربع است؟



$$16 \quad (2) \quad 12 \quad (1) \\ 24 \quad (4) \quad 18 \quad (3)$$



۴۰- در شکل مقابل $\widehat{AOB} = 60^\circ$ اگر $OA = 4\sqrt{3}$ ، حجم مخروط کدام است؟

$$16\pi \quad (2) \quad 12\pi \quad (1) \\ 24\pi \quad (4) \quad 18\pi \quad (3)$$

۴۱- در یک هرم منتظم مربعی، وجوه جانبی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع $3\sqrt{2}$ است. حجم هرم چند واحد مکعب

است؟

$$36 \quad (4) \quad 34 \quad (3) \quad 18 \quad (2) \quad 12 \quad (1)$$

۴۲- مساحت کل یک منشور قائم با قاعده مربع برابر ۱۸۲ واحد سطح است. اگر مجموع ارتفاع و ضلع قاعده آن ۱۰ واحد

باشد ارتفاع منشور کدام است؟

$$7 \quad (4) \quad 6 \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad 3 \quad (1)$$

۴۳- سطح مقطع یک مکعب به طول یال ۶ واحد با صفحه‌ای گذرنده بر انتهای سه یال آن که در یک راس مشترک باشند

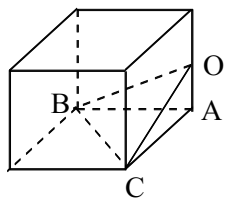
چند واحد مربع است؟

$$24 \quad (4) \quad 18\sqrt{3} \quad (3) \quad 12\sqrt{3} \quad (2) \quad 18 \quad (1)$$

۴۴- سه راس A و B و C از مکعبی را چنان انتخاب می‌کنیم که هر دو راس آن از یک یال نباشد مساحت مثلث ABC

چند برابر مساحت یک وجه مکعب است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$



۴۵- در شکل مقابل O وسط یال مکعب است حجم هرم OABC چند برابر حجم مکعب است؟

$$\frac{1}{12} \quad (2)$$

$$\frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{9} \quad (3)$$

۴۶- در داخل کره‌ای به شعاع ۶ واحد بزرگترین استوانه ممکن به ارتفاع ۸ واحد قرار دارد حجم این استوانه چند واحد مکعب است؟

$$160\pi \quad (4)$$

$$144\pi \quad (3)$$

$$132\pi \quad (2)$$

$$120\pi \quad (1)$$

۴۷- برای محاسبه سطح کره به طور مستقیم کدام اصل به کار رفته است؟

(۲) کاوالیری در مورد سطح

(۱) کاوالیری در مورد منحنی

(۴) تقسیم حجم کره به شبه‌مخروطهای بسیار و بسیار زیاد

(۳) کاوالیری در مورد حجم

۴۸- دو منشور قائم یکسان را، که قاعده آنها مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۳، در وجه بزرگتر که یک مربع است، به هم می‌چسبانیم، قطر مکعب مستطیل حاصل چند واحد است؟

$$7 \quad (4)$$

$$3\sqrt{5} \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$4\sqrt{2} \quad (1)$$

۴۹- حجم یک کره به شعاع a با حجم یک مخروط به شعاع قاعده‌ی 2a برابر است. طول ارتفاع مخروط کدام است؟

$$\frac{3}{2}a \quad (4)$$

$$\frac{2}{3}a \quad (3)$$

$$2a \quad (2)$$

$$a \quad (1)$$

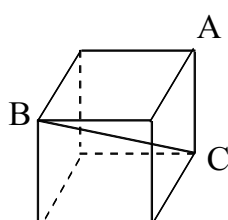
۵۰- حجم یک کره به شعاع a برابر با حجم یک استوانه به شعاع قاعده‌ی $\frac{a}{2}$ است. طول ارتفاع استوانه کدام است؟

$$\frac{16a}{3} \quad (4)$$

$$\frac{14a}{3} \quad (3)$$

$$5a \quad (2)$$

$$4a \quad (1)$$



۵۱- در مکعب شکل مقابل فاصله‌ی رأس A از قطر BC چند برابر یال مکعب است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

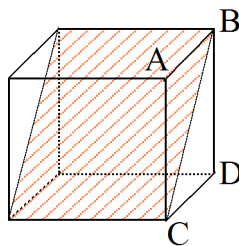
۵۲- حجم یک کره، $\sqrt{2}$ برابر حجم مخروط قائم است. اگر شعاع قاعده مخروط برابر شعاع کره باشد، فاصله رأس مخروط تا محیط قاعده آن، چند برابر شعاع قاعده است؟

$$2\sqrt{13} \quad (4)$$

$$\sqrt{10} \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$



۵۳- در مکعب شکل مقابل، زاویه صفحه قطری سایه زده با صفحه وجه $ABCD$ ، چند درجه است؟

- (۱) ۳۰
(۲) ۴۵
(۳) ۶۰
(۴) ۹۰

۵۴- در داخل نیم کره به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگترین منشور قائم با قاعده‌ی مربع طوری ساخته شده است که قطر مربع برابر $\sqrt{3}$ است، حجم منشور کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\sqrt{6}$
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) ۲

۵۵- مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه‌ی قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$
(۲) π
(۳) $\frac{4\pi}{3}$
(۴) 2π

۵۶- در یک چهاروجهی منتظم، از وسط هر یال آن صفحه‌ای موازی وجه مقابل می‌گذرانیم، تا ۴ هرم کوچک‌تر، از چهاروجهی مفروض جدا کند. حجم جسم باقی‌مانده چند برابر حجم چهاروجهی اولیه است؟

- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{2}$

۵۷- قاعده‌ی یک مکعب مستطیل، به شکل مربع است و ارتفاع آن برابر قطر این مربع است. زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال کوچک‌تر آن چند درجه است؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۳۰
(۳) ۴۵
(۴) ۶۰

جواب اشکال فضایی - سراسری

۱- AB، AC و BC هر کدام قطرهای وجوه مکعب بوده و در نتیجه طول هر ۳ پاره خط باهم برابر است لذا مثلث ABC متساوی الاضلاع بوده و زاویه \widehat{ABC} برابر 60° خواهد بود. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲- ارتفاع استوانه را h فرض می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{نیمکره}} &= \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi(12)^3 \\ V_{\text{استوانه}} &= \pi R^2 h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3}\pi(12)^3 = \pi \times (12)^2 \times h \Rightarrow 8\pi = \pi h \Rightarrow h = 8$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳- چون G از همه رأسها به یک فاصله است، پس G محل برخورد قطرهای مکعب می‌باشد و در نتیجه:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{نصف طول قطر} = GA = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3} \Rightarrow GA = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

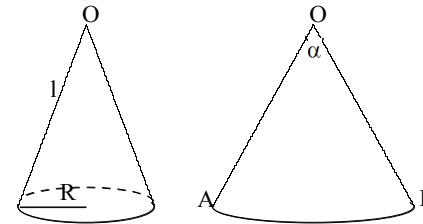
۴- طبق شکل داریم:

$$S = \pi R \cdot l \quad \text{مساحت جانبی مخروط دوار}$$

$$S' = \pi R^2 \quad \text{مساحت قاعده مخروط دوار}$$

$$S = 2S' \Rightarrow \pi R \cdot l = 2\pi R^2 \Rightarrow l = 2R \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB} &= OA \cdot \alpha \\ OA &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = 1 \cdot \alpha \quad (\alpha \text{ رادیان}) \quad (2)$$



این قطاع از گسترش مخروط دوار فوق بدست آمده است. پس اندازه کمان \widehat{AB} برابر با محیط قاعده مخروط است، یعنی:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB} &= 2\pi R \\ (2) : \widehat{AB} &= 1 \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\pi R = 1 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi R}{1} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

زاویه قطاع حاصل 2π رادیان است و گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۵- حجم مکعب مستطیل برابر است با حاصلضرب سه بعد آن بنابراین:

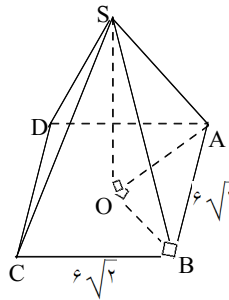
$$3a \cdot 2a \cdot a = 48 \Rightarrow 6a^3 = 48 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۶- وقتی مکعبی محیط بر کره است کره در مکعب محاط است بنابراین فاصله دو وجه روبروی مکعب از هم برابر قطر کره است پس طول اضلاع مکعب $2R$ است. حجم مکعب به ضلع $2R$ برابر است با:

$$V = (2R)^3 = 8R^3$$

پس گزینه ۲ صحیح است.



۷- یادآوری: حجم هرمی با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با $V = \frac{1}{3}S \cdot h$

در هر هرم منتظم، ارتفاع وارد بر قاعده از مرکز قاعده می‌گذرد.

O مرکز قاعده و محل تلاقی اقطار مربع است، پس OA نصف قطر مربع است:

$$(2OA)^2 = AB^2 + BC^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 = 144 \Rightarrow$$

$$2OA = AC = 12 \Rightarrow OA = 6$$

از طرفی SOA یک مثلث قائم‌الزاویه است:

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow SO = 8$$

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}(AB)^2 \times SO = \frac{1}{3}(6\sqrt{2})^2 \times 8 = 192$$

پس:

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۸- می‌دانیم معادله کره به مرکز (α, β, γ) و شعاع R برابر است با $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$ جایگذاری نقطه $(2, -1, -2)$ در معادله کره خواهیم داشت:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = R^2 \Rightarrow (2 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 + (-2 - 3)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = 35$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 21$$

پس معادله کره پس از ساده شدن بصورت مقابل می‌باشد:

بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۹- می‌دانیم حجم مخروط با سطح قاعده S و ارتفاع h برابر $V = \frac{1}{3}S \cdot h$ و حجم استوانه با سطح قاعده S و ارتفاع h برابر $V = S \cdot h$ می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{1}{3}S \cdot h = 2S \Rightarrow h = 6 \quad \text{استوانه} \quad V = S \cdot h = 6S \quad \leftarrow \quad h'' = \frac{h}{3} = 2$$

حجم آب در هر دو یکسان است و چون مخروط پر از آب است بنابراین حجم آب با حجم مخروط برابر است پس: ارتفاع آب در استوانه $h' = 4 \Rightarrow h' = 4$

استوانه تا ارتفاع ۴ شامل آب است و چون ارتفاع استوانه ۶ سانتیمتر است بنابراین فاصله سطح آب تا بالای استوانه برابر $6 - 4 = 2$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۰- یادآوری: اصل کواپری: «هرگاه قاعده‌های دو جسم در یک صفحه باشند و ارتفاع آن دو جسم یکسان باشد و هر صفحه موازی قاعده بر روی اجسام، مقاطع هم مساحت ایجاد کند دو شکل هم حجم می‌باشند.» طبق این اصل گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۱- هرگاه صفحه‌ای از نقاط A، B و C بگذرد جزء کوچکتر (OABC) یک هرم می‌باشد. می‌دانیم حجم هرم با سطح مقطع S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

مساحت مقطع هرم اگر طول ضلع مکعب را a بگیریم مساحت یک وجه مکعب (AOB) و ارتفاع هرم مذکور (CO) برابر ضلع مکعب می‌باشد پس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} h = a \\ S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow V_{\text{هرم}} = \frac{1}{6} a^3, V_{\text{مکعب}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{جزء بزرگتر}} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6} a^3 \end{array} \right.$$

پس حجم قسمت بزرگتر ۵ برابر حجم هرم است. یعنی گزینه ۱ صحیح است.

۱۲- اگر در یک هرم صفحه‌ای موازی قاعده رسم کنیم آنرا به یک هرم کوچکتر و یک هرم ناقص تبدیل می‌کند و هرم کوچکتر همواره با هرم اولیه متشابه است. نسبت حجم دو شکل متشابه برابر مکعب نسبت متشابه آنها است حال اگر

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

حجم هرم اولیه و V_2 حجم هرم کوچکتر باشد. داریم:

$$\text{حجم هرم ناقص برابر است با: } V_1 - V_2 = V_1 - \frac{1}{8} V_1 = \frac{7}{8} V_1$$

$$V = \frac{1}{3} S h$$

می‌دانیم حجم هرمی به ارتفاع h و مساحت قاعده S برابر است با:

بنابراین حجم هرم اولیه با قاعده مربع برابر است با:

$$V_1 = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} (12 \times 12) \times 8 = 384 \Rightarrow V_{\text{هرم ناقص}} = \frac{7}{8} \times 384 = 336$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

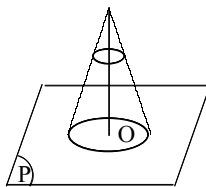
۱۳- می‌دانیم حجم مخروط دوار به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر است با مساحت قاعده آن در ثلث ارتفاع یعنی

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h \text{ و طبق فرض سوال داریم } R_1 = \frac{1}{2} R_2, V_1 = 3V_2 \text{ , با جایگذاری داریم:}$$

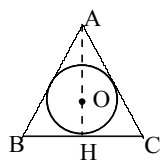
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi R_1^2 \times h_1}{\frac{1}{3} \pi R_2^2 \times h_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow 3 = \left(\frac{1}{2} \frac{R_2}{R_2}\right)^2 \times \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4} \times \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = 12$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

۱۴- می‌دانیم که اگر صفحه P عمود بر محور مخروط باشد، مقطع حاصل دایره خواهد بود بطوریکه مرکز آن دایره روی محور مخروط و تصویر و مولد دلخواه، شعاع دایره است. چون تصاویر بر روی صفحات موازی، برابر یکدیگرند، پس تصویر یک مخروط وقتی سطح دایره را می‌پوشاند که صفحه تصویر عمود بر محور مخروط باشد و یا به عبارت دیگر زاویه مخروط با صفحه تصویر 90° باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.



۱۵- می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع مرکز دایره محاطی مرکز ثقل مثلث است بطوریکه همواره فاصله آن تا ضلع مقابلش $\frac{1}{3}$ طول ارتفاع مثلث است.



مطابق شکل، مخروط و کره محاط شده در آن از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره محاطی آن حول ارتفاع AH ایجاد می‌شود. در نتیجه شعاع کره برابر با $OH = \frac{1}{3} AH$ می‌باشد.

در مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 \Rightarrow AH^2 = 36 - 9 \Rightarrow AH = 3\sqrt{3} \Rightarrow R = OH = \sqrt{3}$$

حجم کره مورد نظر برابر است با:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times 3\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۱۶- صفحه قطری هر مکعب، صفحه تقارن آن است. هر مکعب ۶ قطر دارد پس شش صفحه قطری دارد. همچنین مکعب نسبت به صفحات عمود متصف هم تقارن است (صفحاتی که بر وجه‌های روبرو عمود بوده و از مرکز قاعده‌های آنها می‌گذرند). که تعدادشان ۳ می‌باشد. بنابراین هر مکعب ۹ صفحه تقارن داشته و گزینه ۴ صحیح است.

۱۷- با توجه به شکل، یال AB عمود بر وجه مقابل خود و در نتیجه عمود بر BD است. یعنی مثلث ABD در رأس B قائمه است، بنابراین $\text{tg } x = \frac{AB}{BD}$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه BCD داریم:

$$BD^2 = (a\sqrt{5})^2 + a^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{5} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{a}{a\sqrt{5}} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۱۸- اگر شعاع قاعده مخروط R فرض شود، ارتفاع مخروط ۲R خواهد بود. از طرفی حجم مخروط برابر $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$ می‌باشد. بنابراین:

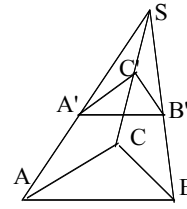
$$\frac{128}{3} \pi = \frac{1}{3} \pi R^2 (2R) \Rightarrow R^3 = 64 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow h = 2R = 8$$

بنابراین حجم جانی استوانه برابر است با:

$$S = 2\pi R \cdot h = 2\pi \times 4 \times 8 \Rightarrow S = 64\pi$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۱۹- نسبت مساحت‌های شکل‌های متشابه برابر توان دوم و نسبت حجم‌های شکل‌های متشابه برابر با توان سوم نسبت متشابه می‌باشد. از طرفی صفحه‌ای که موازی قاعده هرم، آن را قطع می‌کند، یک هرم متشابه با هرم اولیه ایجاد می‌کند، بنابراین:



$$\left. \begin{array}{l} \frac{S'}{S} = K^2 \\ \frac{h'}{h} = K \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3}S' \cdot h'}{\frac{1}{3}S \cdot h} = \frac{S'}{S} \times \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{V'}{V} = K^3$$

در این پرسش $K = \frac{1}{2}$ پس $\frac{V'}{V} = \frac{1}{8}$. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۲۰- حجم کره به شعاع R برابر با $\frac{4}{3}\pi R^3$ و حجم مخروط به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ است بنا به فرض:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = 4R \Rightarrow \frac{h}{R} = 4$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

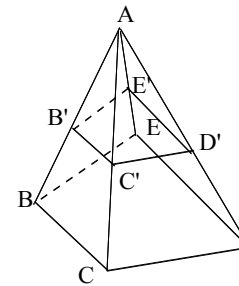
۲۱- دایره عظیمه هر کره دایره‌ای است که شعاع آن با شعاع کره برابر می‌باشد و مرکز آن نیز بر مرکز کره منطبق می‌باشد.

$$V_{\text{کره}} = 3S_{\text{کره}} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 3 \times 4\pi R^2 \Rightarrow R = 9 \Rightarrow S_{\text{دایره عظیمه}} = \pi R^2 = 81\pi$$

گزینه ۴ صحیح است.

۲۲- یادآوری: ۱- هرگاه صفحه‌ای موازی قاعده هرم رسم شود آن را به ۲ هرم متشابه با رأس مشترک تبدیل می‌کند. ۲- نسبت حجم دو هرم متشابه با توان سوم نسبت ارتفاع‌های آنها برابر است.

صفحه‌ای که موازی قاعده هرم می‌گذرد و یال‌های هرم را قطع می‌کند، هرم اصلی را (هرم ABCDE) به یک هرم ناقص و یک هرم کامل (هرم ABC'D'E') تقسیم می‌کند. برای هرم ABC'D'E' داریم:



$$\frac{V_{\text{هرم ABC'D'E'}}}{V_{\text{هرم ABCDE}}} = \left(\frac{\text{ارتفاع هرم ABC'D'E'}}{\text{ارتفاع هرم ABCDE}} \right)^3$$

اگر حجم هرم ABC'D'E' را V' و ارتفاع آن را h' بگیریم، و چون صفحه از وسط ارتفاع هرم اصلی گذشته پس

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow V' = \frac{1}{8}V$$

$h' = \frac{1}{2}h$ است و داریم:

$$\text{حجم هرم ناقص} = V - V' = V - \frac{1}{8}V = \frac{7}{8}V$$

لذا گزینه ۲ صحیح است.

۲۳- حجم استوانه با شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر با $V = \pi R^2 h$ می‌باشد. پس:

$$V = \pi R^2 \times 3 = 12\pi \Rightarrow R = 2$$

مساحت جانبی استوانه برابر با $S = 2\pi R h$ می‌باشد، پس:

$$S = 2\pi \times 2 \times 3 = 12\pi$$

بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.

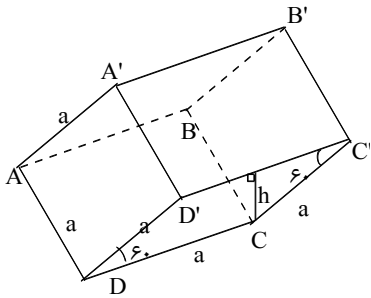
۲۴- ABCD قاعده و مربع است. همچنین A'B'C'D' نیز مربع می‌باشد و CDD'C' لوزی با زاویه ۶۰ درجه است. ارتفاع منشور برابر با ارتفاع لوزی است، پس:

$$h = a \sin 60 = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

مساحت قاعده منشور: $S = a^2 = (\sqrt{3})^2 = 3 = S_{\text{ABCD}}$

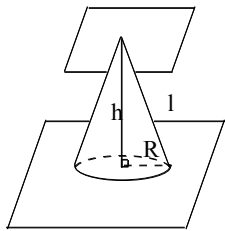
$$V = h \cdot S \Rightarrow V = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.



۲۵- حجم مخروط بصورت $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ و سطح جانبی آن $S = \pi R l$ می‌باشد.

با تغییر رأس مخروط روی صفحه موازی با صفحه قاعده h ثابت می‌ماند، چون دو صفحه موازی هستند لذا فاصله بین آنها که طبق تعریف فاصله یک نقطه از یکی تا صفحه دیگر است همواره ثابت بوده و برابر مقدار h است. پس حجم ثابت می‌ماند، ولی l تغییر می‌کند، پس سطح جانبی تغییر خواهد کرد. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 3$$

۲۶- می‌دانیم طول قطر مکعبی به ضلع a برابر با $a\sqrt{3}$ است، پس:

$$S = 6a^2 = 6 \times 9 = 54$$

مساحت کل مکعب به ضلع a برابر است با $6a^2$ (۶ مربع مساوی به مساحت a^2) بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

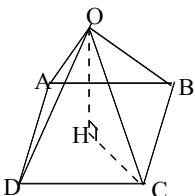
۲۷- از آنجاکه هرم مربع‌القاعده و منتظم است، پس ارتفاع هرم بر مرکز مربع فرود می‌آید. لذا مثلث OHC یک مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع CH در آن، نصف قطر مربع است.

پس:

$$\left. \begin{array}{l} CH = \frac{1}{2}(\sqrt{2}a) = \frac{1}{2}\sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2} \\ OH = v \end{array} \right\} \Rightarrow OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow$$

$$OC^2 = 49 + 16 \times 2 = 81 \Rightarrow OC = 9$$

طول یال هرم برابر ۹ سانتیمتر است. بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.



۲۸- هرگاه مثلث ABC را حول ضلع BC دوران دهیم A روی دایره‌ای بمرکز H و شعاع AH و در صفحه‌ای عمود بر BC حرکت می‌کند. بنابراین شکل حاصل، دو مخروط یکسان است که در قاعده مشترک هستند. یال هر مخروط، ضلع مثلث و شعاع قاعده آن ارتفاع مثلث و ارتفاع آن (BH) نصف ضلع مثلث است. می‌دانیم حجم مخروط برابر است با $\frac{1}{3}$ مساحت قاعده ضربدر ارتفاع آن، پس:

یادآوری: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع نظیر هر ضلع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول ضلع مثلث است.

$$V_{کل} = 2 \times \frac{1}{3} (\pi(AH)^2) CH$$

$$\left. \begin{aligned} AH &= \frac{\sqrt{3}}{2} a = 2\sqrt{3} \\ CH &= \frac{1}{2} a = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = 2 \times \frac{1}{3} \pi (2 \times \sqrt{3})^2 \times 2 = 16\pi$$

بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.

۲۹- می‌دانیم حجم و سطح جانبی مخروط قائم به ارتفاع h و شعاع قاعده R و طول یال l به $l = \sqrt{2}R$ قرار زیر است: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ ، $S_{جانبی} = \pi Rl$

در این مسئله داریم $R = h$ و جانبی $V = S$ و با توجه به شکل $l = \sqrt{2}R$ ، بنابراین:

$$V = S_{جانبی} \Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^2 h = \pi Rl \Rightarrow \frac{1}{3}R^3 = \sqrt{2}R^2 \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$$

لذا گزینه ۳ جواب صحیح است.

۳۰- هر مکعب ۶ سطح دارد و اگر طول هر ضلع مکعب a باشد، داریم:

$$S = 6a^2 = 18\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} \Rightarrow a = \sqrt[4]{27}$$

$$\text{قطر مکعب} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a \Rightarrow \text{قطر مکعب} = \sqrt{3} \times \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{243} = 3\sqrt[4]{3}$$

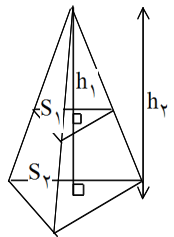
بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۳۱- اگر ضلع مکعب a باشد، با توجه به اینکه مکعب ۶ وجه مربعی شکل دارد، مساحت کل آن برابر با $6a^2$ می‌باشد. اگر ضلع $\frac{1}{6}$ شود، مساحت برابر با $\frac{a^2}{6}$ می‌شود، پس نسبت دو مساحت برابر است با:

$$\frac{\frac{a^2}{6}}{6a^2} = \frac{a^2}{36a^2} = \frac{1}{36}$$

لذا گزینه ۱ درست است.

۳۲- می‌دانیم در دو هرم متشابه نسبت مساحت‌های قاعده با مجذور نسبت ارتفاع‌های آنها برابر است. در دو هرم (مطابق شکل) که متشابه هستند (چون قاعده‌ها موازی هستند) داریم:



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{18}{27} \Rightarrow h_1^2 = \frac{18 \times 144}{27} = 96 \Rightarrow h_1 = 4\sqrt{6}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

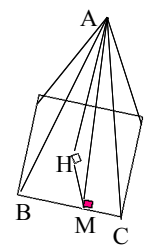
۳۳- می‌دانیم صفحه گذرنده از دایره عظیمه یک کره از مرکز آن عبور می‌کند، پس تمام صفحات از یک نقطه یعنی مرکز کره عبور می‌کنند. در ضمن اشتراک هر دو صفحه متقاطع همواره خط است بطوریکه این خط از مرکز کره عبور می‌کند. لذا هر دو صفحه گذرنده از مرکز کره در قطری از کره مشترکند پس گزینه صحیح گزینه ۳ می‌باشد.

۳۴- طبق شکل زیر AM بر روی وجه ABC می‌باشد HM فاصله مرکز مربع تا ضلع مربع است که برابر نصف ضلع مربع است. برای محاسبه AM در مثلث AHM داریم:

$$AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12}$$

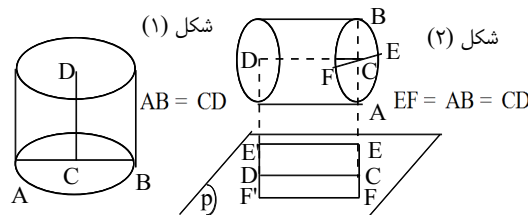
$$S_{جانبی} = 2S_{ABC} = 2 \times \frac{1}{2} AM \times BC = 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{12} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{36} = 24$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



۳۵- استوانه را طبق شکل ۱ در نظر می‌گیریم، اگر استوانه را 90° بچرخانیم داریم:

(شکل ۲)، مشاهده می‌شود شکل $EFF'E'$ مربع می‌باشد یعنی زاویه استوانه با صفحه صفر می‌باشد و محور استوانه موازی صفحه p است و گزینه ۴ صحیح است.



۴۰- می دانیم حجم مخروط برابر است با $\frac{1}{3}$ مساحت قاعده در ارتفاع آن.

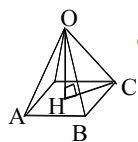
$$\sin(\widehat{AOB}) = \frac{AB}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow OB = \sqrt{OA^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}(\pi OB^2) \cdot AB = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 24\pi$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

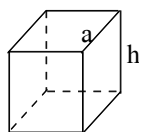
۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} OH^2 = OC^2 - CH^2 \\ CH = \frac{\sqrt{2}}{2} BC \text{ (نصف قطر مربع)} \\ OC = BC \end{array} \right\} OH^2 = OC^2 - \frac{1}{2}OC^2 =$$



$$= \frac{1}{2}OC^2 = \frac{1}{2}(3\sqrt{2})^2 = 9 \Rightarrow OH = 3$$

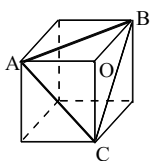
$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع هرم} = \frac{1}{3}BC^2 \times OH = \frac{1}{3}(3\sqrt{2})^2 \times 3 = 18$$



۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مساحت وجه‌های جانبی + مساحت قاعده $= 2 \times$ مساحت کل منشور

$$2a^2 + 4a \times h = 182 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2ah = 91 \\ a + h = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+h)^2 - h^2 = 91 \Rightarrow 100 - h^2 = 91 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$$

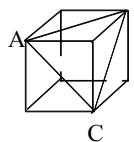


۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هرگاه سطح مقطع مورد نظر مثلث \widehat{ABC} باشد، مطابق شکل اضلاع این مثلث قطرهای وجوه مکعب می‌باشند، پس داریم:

$$AB = \sqrt{2}AO = \frac{2}{\sqrt{2}}a$$

چون \widehat{ABC} متساوی‌الاضلاع است، بنابراین:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}a\right)^2 = 18\sqrt{3}$$



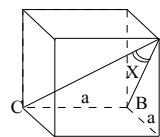
۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و هر ضلع آن $a\sqrt{2}$ می‌باشد. B.

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{\text{یک وجه}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۶- چون قطر قاعده مکعب $\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$ است و همچنین قاعده مربع می‌باشد پس طول ضلع آن با استفاده از رابطه فیثاغورث برابر $a = 2$ می‌شود. حال سطح جانبی بروش زیر محاسبه می‌شود.

$$BM = 2\sqrt{2} \Rightarrow S = 2S_{ABMN} + 2S_{ADPN} = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} + 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.



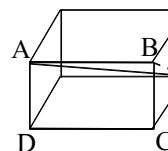
$$AB^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}a$$

۳۷- می‌دانیم هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد بر تمام خطوط آن صفحه عمود است. BC بر صفحه مستطیلی که AB قطری از آن است عمود است در نتیجه بر AB نیز عمود است لذا $\widehat{ABC} = 90^\circ$ بنابراین:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \cos x = \frac{AB}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x = \text{ArcCos} \frac{\sqrt{6}}{3}$$

پس گزینه ۱ صحیح است.



۳۸- هرگاه AM قطر مکعب مستطیل و AB یال بزرگتر آن باشد داریم:

$$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\widehat{ABM} = 90^\circ \Rightarrow \sin \widehat{BAM} = \frac{BM}{AM} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BAM} = 45^\circ$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

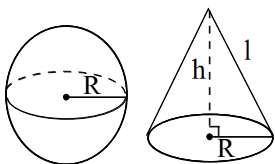
۳۹- AD قطر فرعی مکعب بوده و طول آن برابر است با: $\sqrt{2}AB$

۴ ضلعی $ABCD$ مستطیل است لذا داریم:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = AB \times \sqrt{2}AB = \sqrt{2}AB^2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{مکعب}} = 6AB^2 = 6(\sqrt{3})^2 = 18$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۵۲- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \sqrt{2} \times \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = 2\sqrt{2}R$$

$$l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + 8R^2} = 3R \Rightarrow \frac{l}{R} = 3$$

۵۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

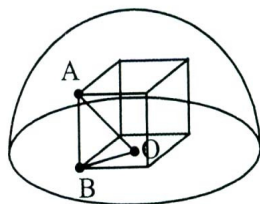
۵۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} OB = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} \\ OA = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$= \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$$

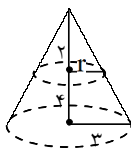
ارتفاع \times (مساحت مربع) = حجم منشور

$$= \left(\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$



$$\frac{r}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{6} \Rightarrow r = 1$$

$$\text{حجم مخروط کوچک} = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$



۵۵- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

۵۶- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. اگر هر ضلع چهاروجهی منتظم $2a$ باشد، آن‌گاه هر ضلع ۴ چهاروجهی منتظم

کوچک‌تر a خواهد بود. در ضمن حجم چهاروجهی منتظم به ضلع a از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{12} a^3$ بدست می‌آید.

$$\text{حجم چهاروجهی اولیه} = \frac{\sqrt{3}}{12} (2a)^3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3$$

$$\text{حجم چهار هرم} = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \Rightarrow \text{حجم یک هرم کوچک تر} = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3$$

$$\text{حجم جسم باقی مانده} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$$

۴۵- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{هرم } V = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{2}\right) \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{12}$$

$$\text{مکعب } V = a^3$$

$$r^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$$

$$V = \pi (2\sqrt{5})^2 \times 8 = 160\pi$$

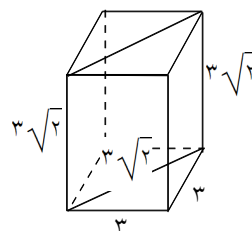


۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکعب مستطیل حاصل به ابعاد ۳ و ۳ و $3\sqrt{2}$ می‌باشد.

$$\text{قطر} = \sqrt{9 + 9 + 18} = 6$$



$$\frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{1}{3} (\pi (2a)^2 \cdot h)$$

۴۹- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

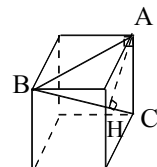
$$\frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 h \Rightarrow h = a$$

۵۰- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{4}{3} \pi a^3 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 h \Rightarrow \frac{4}{3} a^3 = \frac{a^2 h}{4} \Rightarrow h = \frac{16}{3} a$$

۵۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به رابطه فیثاغورث در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)

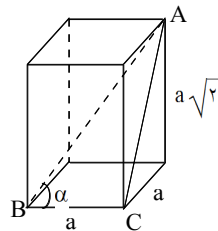


$$AC = a \text{ و } BC = a\sqrt{3} \text{ و } AB = a\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2} \Rightarrow \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \times h}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۵۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. مثلث \widehat{ABC} قائم‌الزاویه است.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

اشکال فضایی - خارج از کشور

۱- قاعده‌ی یک هرم منتظم، مربعی است به ضلع ۶ واحد و ارتفاع یکی از وجه‌های جانبی آن برابر ۵ واحد است. حجم این هرم چند واحد مکعب است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۴۵ (۳) ۴۸ (۴) ۵۴

۲- در داخل یک کره به شعاع R ، بزرگ‌ترین مکعب ممکن قرار دارد. نسبت حجم کره به حجم این مکعب، چند برابر $\pi\sqrt{3}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۳- در یک مکعب، مرکز تقارن هر وجه جانبی آن، راس‌های یک هشت وجهی منتظم‌اند. حجم این هشت وجهی منتظم، چند برابر حجم مکعب است؟ (دو هرم منتظم در قاعده مشترک)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴- از داخل یک استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده‌ی ۲ واحد بزرگ‌ترین مخروط ممکن را خارج کرده‌اند. شکل باقی‌مانده را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط به فاصله‌ی ۱ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

- (۱) $1/44\pi$ (۲) $1/54\pi$ (۳) $1/56\pi$ (۴) $1/75\pi$

۵- اگر هر سه صفحه‌ی متمایز بر صفحه‌ی P عمود باشند، آن‌گاه فصل مشترک‌های دو به دو این سه صفحه‌ی متمایز، کدام وضعیت را نمی‌پذیرد؟

- (۱) فصل مشترک ندارند (۲) منطبق (۳) موازی (۴) متقاطع

۶- ابعاد مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۱ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ است. زاویه‌ی بین قطر این مکعب مستطیل با بزرگ‌ترین یال آن چند درجه است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵

۷- حجم یک هرم مربع القاعده به ضلع a و ارتفاع a ، برابر حجم یک مخروط به شعاع قاعده‌ی a است. طول ارتفاع مخروط کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{\pi}$ (۲) $\frac{\pi}{a}$ (۳) $\frac{\sqrt{a}}{\pi}$ (۴) $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$

۸- بر کره‌ای به شعاع R کوچک‌ترین استوانه‌ی ممکن را محیط می‌کنیم. نسبت سطح کل استوانه به سطح کره چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۹- دو مکعب مستطیل یکسان به طور کامل در یک مکعب به طول یال ۶ واحد جای گرفته‌اند. طول قطر هریک از این دو مکعب مستطیل کدام است؟

۹ (۴)

$6\sqrt{2}$ (۳)

$3\sqrt{6}$ (۲)

$4\sqrt{3}$ (۱)

۱۰- در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه‌ی قائم با سطح جانبی 48π محاط شده است. حجم بیش‌تر این استوانه چه قدر است؟

144π (۴)

108π (۳)

98π (۲)

96π (۱)

۱۱- در یک مخروط به ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر، صفحه‌ای به چه فاصله از قاعده‌ی مخروط رسم کنیم که حجم مخروط بزرگ ۱۲۵ برابر حجم مخروط کوچک باشد؟

۵ (۴)

۷ (۳)

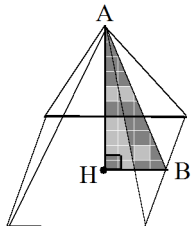
۸ (۲)

۶ (۱)

جواب اشکال فضایی - خارج از کشور

۱- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل $HB = 3$ می باشد، حال در \widehat{AHB} با استفاده از رابطه ی فیثاغورس

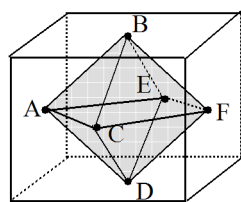
$$V = \frac{1}{3} \times S \cdot h = \frac{1}{3} (6^2) \times 4 = 48 \quad \text{داریم } AH = 4 \text{ حال حجم هرم برابر است با:}$$



۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. در این حالت قطر کره برابر با قطر مکعب خواهد شد و در نتیجه اگر ضلع مکعب برابر

$$a \text{ و شعاع کره برابر } R \text{ باشد، داریم:} \quad 2R = \sqrt{3}a \rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{4}{3}\pi \times \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi = \frac{1}{2}(\pi\sqrt{3})$$



۳- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. همان طور که در شکل ملاحظه می کنید دو هرم $ABCDE$ و $FBCDE$ از قاعده به هم چسبیده اند و یک ۸ وجهی منتظم را به وجود آورده اند که اندازه ی

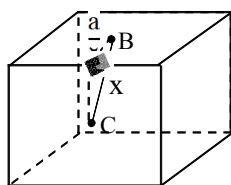
ارتفاع وارد بر قاعده ی $BCDE$ در هر کدام از این هرم ها نصف طول ضلع مکعب یعنی $\frac{a}{2}$ است. اما برای پیدا کردن حجم هرم باید مساحت قاعده را نیز پیدا کنیم که با توجه به شکل زیر، هر یک از اضلاع مربع قاعده با استفاده از رابطه ی فیثاغورث به دست می آید:

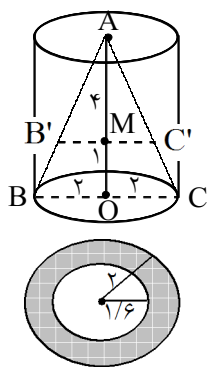
$$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2}$$

و چون هشت وجهی ایجاد شده منتظم است پس همه ی یال های آن با هم برابرند، در نتیجه:

$$V_{\text{هشت وجهی}} = 2V_{ABCDE} = 2\left(\frac{1}{3}Sh\right) = \frac{2}{3}(x^2)\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{6}$$

$$\rightarrow \frac{V_{\text{هشت وجهی}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{1}{6}$$



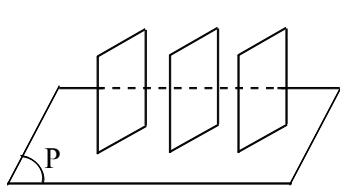


$$\frac{MB'}{OB} = \frac{AM}{AO} \rightarrow \frac{MB'}{2} = \frac{4}{5} \rightarrow MB' = 1/6$$

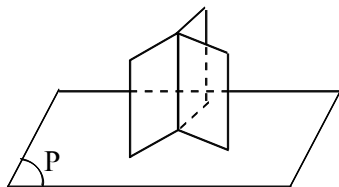
۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر صفحه‌ای به موازات قاعده و به فاصله‌ی ۱ واحد از آن را با استوانه‌ی قائم تقاطع دهیم، مقطع حاصل دایره‌ای به مرکز M و به شعاع ۲ است و اگر همان صفحه را با مخروط داخلی تقاطع دهیم، مقطع حاصل دایره‌ای به مرکز M و شعاع $MB' = MC' = 1/6$ است. در نتیجه وقتی مخروط را از داخل استوانه درمی‌آوریم، مقطع حاصل از تقاطع با صفحه‌ی فوق‌الذکر به صورت مقابل است و داریم:

$$\text{مساحت مقطع} = \pi(2)^2 - \pi(1/6)^2 = (4 - 1/36)\pi = 143/36\pi$$

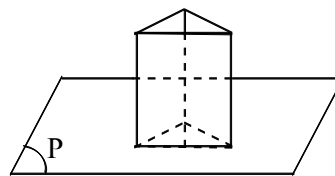
۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل‌های زیر فقط گزینه‌ی ۴ ممکن نیست و در نتیجه پاسخ تست است.



گزینه‌ی ۱

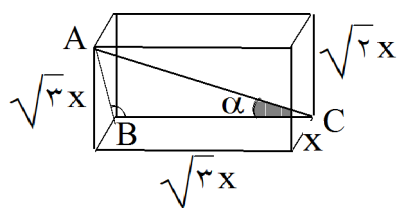


گزینه‌ی ۲



گزینه‌ی ۳

۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم ابعاد مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۱ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ است. بنابراین ابعاد این



مکعب مستطیل x ، $\sqrt{2}x$ و $\sqrt{3}x$ می‌باشند. ابتدا به این نکته توجه کنید که قطر مربعی به اضلاع x و $\sqrt{2}x$ است، بنابراین

$$AB = \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 + x^2} = \sqrt{3}x$$

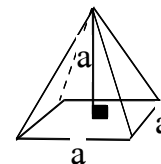
این مکعب مستطیل با بزرگ‌ترین یال آن، به شکل مقابل به دقت توجه کنید. مثلث ABC در رأس B قائمه است. از طرفی چون دو ضلع AB و BC هم طول‌اند، در نتیجه این مثلث قائم‌الزاویه، متساوی الساقین می‌باشد. پس زاویه‌ی بین قطر و بزرگ‌ترین یال (یعنی زاویه‌ی α) برابر 45° است.

۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3}a^2 \times a = \frac{1}{3}a^3$$

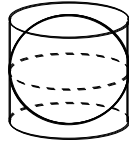
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{r=a} \frac{1}{3}\pi a^2 \times h$$

$$\Rightarrow V_{\text{هرم}} = V_{\text{مخروط}} \Rightarrow \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}\pi a^2 h \Rightarrow a = \pi h \Rightarrow h = \frac{a}{\pi}$$



۸- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر شعاع کره R باشد، مطابق شکل، شعاع قاعده ی استوانه $r = R$ و ارتفاع استوانه $h = 2R$ خواهد بود. حال با توجه به روابط سطح کل استوانه و سطح کره داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{سطح کل استوانه} &= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi R(2R) + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 \\ \text{سطح کره} &= 4\pi R^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\text{سطح کل استوانه}}{\text{سطح کره}} = \frac{6\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{2}$$



۹- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. مکعبی به طول یال ۶ واحد را در نظر می گیریم. برای این که در داخل این مکعب، دو مکعب مستطیل یکسان به طور کامل جا بگیرد، می توانیم صفحه ای را دقیقاً از وسط ارتفاع این مکعب عبور دهیم. با انجام این کار، مکعب به دو مکعب مستطیل یکسان تقسیم می شود که قاعده ی این دو مکعب مستطیل با قاعده ی مکعب یکسان بوده و تنها ارتفاع آن دو، نصف ارتفاع مکعب است. بنابراین ابعاد این دو مکعب مستطیل یکسان برابر ۳ و ۶ و ۶ واحد می باشد.

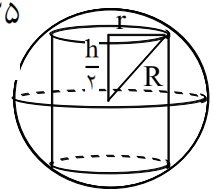
از طرفی می دانیم اگر اندازه های یال های مکعب مستطیل a ، b و c باشند، قطر این مکعب مستطیل برابر با $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ خواهد بود بنابراین:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{81} = 9$$

۱۰- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه ی قائم با سطح جانبی 48π محاط شده است. داریم:

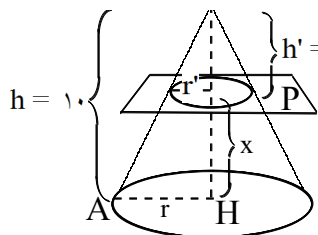
$$\begin{cases} S_{\text{جانبی}} = 2\pi r h = 48\pi \Rightarrow r h = 24 \\ r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r h = 24 \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{12}{r} \Rightarrow \frac{h^2}{4} = \frac{144}{r^2} \\ r^2 + \frac{h^2}{4} = 25 \Rightarrow r^2 + \frac{144}{r^2} = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (r^2)^2 - 25r^2 + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 9 \Rightarrow h = 8 \Rightarrow V = \pi r^2 h = 72\pi \\ r^2 = 16 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow V = \pi r^2 h = 96\pi \end{cases}$$



۱۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر در یک مخروط به ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر، صفحه‌ای به چه فاصله‌ی از قاعده‌ی مخروط رسم کنیم که حجم مخروط بزرگ ۱۲۵ برابر حجم مخروط کوچک‌تر است. پس داریم:

$$V_{\text{مخروط کوچک}} = 125 \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi r'^2 h'}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = 125 \Rightarrow \frac{r'^2 h'}{r^2 h} = 125 \Rightarrow \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right) = 125 \quad (*)$$



در مثلث OAH طبق قضیه‌ی تالس، داریم:

$$\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'} = \frac{10}{10-x}$$

حال اگر در رابطه‌ی (*) به جای نسبت $\frac{r}{r'}$ و $\frac{h}{h'}$ مقدار $\frac{10}{10-x}$ را جایگزین

کنیم. X به دست می‌آید.

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{h'}\right) = 125 \Rightarrow \left(\frac{10}{10-x}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{10-x}\right) = 125 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{10}{10-x}\right)^3 = 125 \Rightarrow \frac{10}{10-x} = 5 \Rightarrow 10-x = 2 \Rightarrow x = 8 \text{ سانتی متر}$$

اشکال فضایی - سنجش

۱- مخروط قائم دواری را با صفحه‌ای موازی قاعده قطع می‌دهیم. اگر مساحت مقطع حاصل $\frac{4}{9}$ مساحت قاعده مخروط

باشد، حجم مخروط ناقص حاصل چند برابر حجم مخروط اولیه است؟

$$\frac{4}{9} \text{ (۱)} \quad \frac{5}{9} \text{ (۲)} \quad \frac{8}{27} \text{ (۳)} \quad \frac{19}{27} \text{ (۴)}$$

۲- حجم یک منشور مربع‌القاعده به ضلع a ، 18 برابر حجم یک هرم مربع‌القاعده به ضلع a است. ارتفاع منشور چند برابر ارتفاع هرم است؟

$$3 \text{ (۱)} \quad 6 \text{ (۲)} \quad 9 \text{ (۳)} \quad 12 \text{ (۴)}$$

۳- طول هر ضلع از مکعبی برابر $\sqrt{3}$ و نقطه G از تمام رأس‌ها به یک فاصله است، فاصله نقطه G از هر رأس کدام است؟

$$1 \text{ (۱)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۳)} \quad 3 \text{ (۴)}$$

۴- در منشور مربع‌القاعده مایل طول ضلع قاعده آن $\sqrt{3}$ و یکی از وجوه آن مربع و وجه دیگر آن، لوزی با زاویه 60° است. حجم منشور کدام است؟

$$\frac{9}{4} \text{ (۱)} \quad \frac{9}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۳)} \quad 3 \text{ (۴)}$$

۵- از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع 4 و 3 واحد حول وترش جسمی با کدام حجم ایجاد می‌شود؟

$$\frac{21}{3}\pi \text{ (۱)} \quad \frac{28}{3}\pi \text{ (۲)} \quad \frac{24}{3}\pi \text{ (۳)} \quad \frac{25}{3}\pi \text{ (۴)}$$

۶- در هر مکعب سینوس زاویه بین قطر مکعب با یکی از یالهای گذرنده بر یک رأس آن کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ (۱)} \quad \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (۴)}$$

۷- در یک هرم ناقص مساحت دو قاعده 12 و 27 واحد مربع است. اگر ارتفاع هرم اصلی 12 باشد فاصله رأس هرم از قاعده کوچکتر چقدر است؟

$$4 \text{ (۱)} \quad 5 \text{ (۲)} \quad 6 \text{ (۳)} \quad 8 \text{ (۴)}$$

۸- در یک مخروط قائم شعاع قاعده برابر ارتفاع آن است، عدد سطح جانبی و عدد حجم مخروط برابرند، شعاع قاعده مخروط کدام است؟

$$2\sqrt{2} \text{ (۱)} \quad 2\sqrt{3} \text{ (۲)} \quad 3\sqrt{2} \text{ (۳)} \quad 3\sqrt{3} \text{ (۴)}$$

۹- در یک مکعب زاویه بین دو قطر مربع‌های جانبی گذرنده بر یک رأس چند درجه است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

۱۰- قطر یک مکعب برابر $3\sqrt{3}$ می‌باشد. سطح کل آن کدام است؟

- (۱) $9\sqrt{6}$ (۲) $12\sqrt{6}$ (۳) $18\sqrt{3}$ (۴) $24\sqrt{3}$

۱۱- ابعاد مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد، اگر سطح کل آن ۱۹۸ واحد مربع باشد، حجم آن کدام است؟

- (۱) ۱۲۶ (۲) ۱۳۵ (۳) ۱۵۳ (۴) ۱۶۲

۱۲- مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع ۳ واحد برابر 24π واحد سطح است، حجم آن کدام است؟

- (۱) 54π (۲) 48π (۳) 45π (۴) 42π

۱۳- حجم استوانه دوار به ارتفاع ۳ واحد برابر 48π واحد حجم است، مساحت جانبی آن چند واحد سطح است؟

- (۱) 36π (۲) 27π (۳) 24π (۴) 18π

۱۴- در هرم منتظم مربع القاعده به ضلع ۸ واحد طول یال جانبی آن ۹ واحد است، حجم هرم کدام است؟

- (۱) $\frac{434}{3}$ (۲) $\frac{448}{3}$ (۳) ۱۵۲ (۴) ۱۶۰

۱۵- در یک هرم مربع القاعده ضلع قاعده‌ی آن ۸ واحد و اندازه‌ی یال جانبی آن ۹ واحد است. ارتفاع هرم کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) $7/5$ (۴) $4\sqrt{3}$

۱۶- حجم استوانه دوار با ارتفاع ۶ برابر 24π واحد مکعب است سطح جانبی آن کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 18π (۳) 24π (۴) 36π

۱۷- در یک استوانه دوار عدد سطح جانبی با عدد حجم آن برابر است، شعاع قاعده این استوانه کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۸- از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۶ و ۸ حول وتر جسمی با کدام حجم ایجاد می‌شود؟

- (۱) $\frac{201}{6\pi}$ (۲) $\frac{203}{4\pi}$ (۳) $\frac{210}{6\pi}$ (۴) $\frac{230}{4\pi}$

۱۹- حجم بزرگترین مخروط محاط در داخل یک مکعب به طول یال ۳ واحد کدام است؟

- (۱) $1/75\pi$ (۲) $2/25\pi$ (۳) $2/75\pi$ (۴) $3/25\pi$

۲۰- ارتفاع استوانه‌ای را نصف و شعاع قاعده آن را دو برابر می‌کنیم سطح جانبی و حجم آن چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) سطح جانبی دو برابر - حجم ثابت
(۲) سطح جانبی ثابت - حجم دو برابر
(۳) سطح جانبی و حجم دو برابر
(۴) سطح جانبی و حجم ثابت

۲۱- سطح جانبی استوانه دوار به ارتفاع ۶ واحد برابر 24π واحد مربع است، حجم آن کدام است؟

- (۱) 18π (۲) 24π (۳) 28π (۴) 36π

۲۲- مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع ۱۸ و ۱۲ واحد را حول هر یک از اضلاع آن دوران می‌دهیم نسبت حجم‌های دو شکل حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{9}$

۲۳- داخل یک مکعب به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگترین استوانه ممکن را قرار می‌دهیم، حجم استوانه چقدر است؟

- (۱) $\pi\sqrt{3}$ (۲) 2π (۳) 3π (۴) $2\pi\sqrt{3}$

۲۴- از داخل یک مکعب به طول یال واحد بزرگترین مخروط قائم ممکن را برداشته‌ایم. حجم باقیمانده چند واحد مکعب است؟

- (۱) $1 - \frac{\pi}{6}$ (۲) $1 - \frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{8}$

۲۵- در داخل مکعبی به طول یال واحد بزرگترین کره ممکن قرار می‌دهیم، حجم این کره چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

۲۶- پیمانه‌ای به شکل نیمکره با شعاع داخلی ۱۲ واحد را لبریز از آب کرده داخل استوانه‌ای با همان شعاع قاعده می‌ریزیم. آب داخل استوانه چند واحد بالا می‌آید؟

- (۱) ۶ (۲) $7/5$ (۳) ۸ (۴) ۹

۲۷- در داخل یک مکعب بزرگترین کره ممکن را قرار می‌دهیم و نسبت حجم این کره به حجم مکعب کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{3\pi}{8}$

۲۸- پیمانه‌ای به شکل نیمکره با قطره داخلی ۹ واحد را لبریز از آب کرده داخل استوانه با همان شعاع قاعده می‌ریزیم، ارتفاع آب داخل استوانه چند واحد بالا می‌آید؟

- (۱) $2/5$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $4/5$

۲۹- اگر ضلع مکعبی را در $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ضرب کنیم، سطح آن در کدام عدد ضرب می‌شود؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۰- ضلع مکعبی در $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ضرب شده، سطح کل آن در کدام عدد ضرب می‌شود؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۱- سطح کل چهاروجهی منتظم که طول یال آن برابر ۱ واحد باشد، چند واحد مربع است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۳۲- مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ واحد را حول یکی از ضلع‌ها دوران می‌دهیم، حجم حادث چقدر است؟

- (۱) 12π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 24π

۳۳- اضلاع مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۳ و ۲ و ۱ می‌باشد. اگر سطح جانبی آن $\frac{99}{4}$ واحد باشد، حجم آن کدام است؟

- (۱) $20/25$ (۲) $20/75$ (۳) $21/25$ (۴) $21/5$

۳۴- اضلاع مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۲ و ۲ و ۱ است و قطر مکعب مستطیل ۱۲ واحد است، سطح کل آن چقدر است؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۹۶ (۳) ۲۱۶ (۴) ۲۵۶

۳۵- از دوران مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ واحد حول یک ضلع جسمی حادث می‌شود. حجم آن کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 24π

۳۶- در مکعب مفروض فاصله‌ی دو رأس غیر واقع بر یک وجه ۳ واحد است. حجم آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۳۷- حجم یک مکعب برابر $2\sqrt{2}$ واحد مکعب است. قطر این مکعب کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$

۳۸- از یک مکعب، کنج سه قائمه که یال‌های آن برابر یال مکعب است، برداشته شده است حجم باقیمانده چند برابر حجم مکعب اصلی است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۳۹- صفحه‌ای از انتهای سه یال گذرا بر یک رأس مکعبی می‌گذرد، و مکعب را به دو قسمت تقسیم می‌کند حجم قسمت بزرگتر چند برابر حجم قسمت کوچکتر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۰- از دوران مربع به ضلع $3\sqrt{2}$ واحد در حول قطر آن جسمی با کدام حجم حاصل می‌شود؟

- (۱) 24π (۲) 21π (۳) 18π (۴) 12π

۴۱- طول یال چهاروجهی منتظم برابر ۲ واحد است. سطح کل آن کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) ۶ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۴۲- ارتفاع هرم منتظم مربع‌القاعده ۷ و ضلع قاعده‌ی آن ۸ واحد است، یال هرم چند واحد است؟

- (۱) $7/5$ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۴۳- در یک هرم با قاعده‌ی ۲۷ واحد مربع و ارتفاع ۱۸ واحد صفحه‌ای موازی قاعده، مقطعی به مساحت ۱۲ واحد مربع ایجاد کرده است. فاصله‌ی این صفحه تا سطح قاعده هرم کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۴- مقطع یک صفحه با یک سطح منشوری مربع‌القاعده کدام چهارضلعی نمی‌تواند باشد؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) لوزی (۴) ذوزنقه

۴۵- صفحه گذرنده بر انتهای سه یال در یک رأس از مکعب به قطر $3\sqrt{2}$ واحد آن را دو جزء تقسیم می‌کند. حجم جزء

بزرگتر کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{6}$ (۲) $5\sqrt{3}$ (۳) $5\sqrt{6}$ (۴) $6\sqrt{2}$

۴۶- در مکعب مستطیل به ابعاد ۵ و ۳ و ۲ واحد، سطح کل چند واحد مربع است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۶۲ (۳) ۵۸ (۴) ۵۶

۴۷- قاعده‌ی یک هرم منتظم، مربعی به ضلع ۸ واحد و یال هرم نیز برابر ۹ واحد است ارتفاع هرم کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۸- سطح قاعده‌ی هرم ۲۷ واحد مربع و ارتفاع آن ۱۲ واحد با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی این هرم را قطع می‌دهیم. سطح مقطع حاصل ۱۸ واحد مربع است، فاصله راس هرم تا این صفحه کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{6}$ (۲) $3\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۴۹- فاصله‌ی نقطه‌ی O از تمام رأس‌های مکعبی برابر $\sqrt{3}$ واحد است، حجم مکعب چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۵۰- در یک استوانه دوار، عدد سطح جانبی با عدد حجم آن برابر است شعاع قاعده این استوانه کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۵۱- از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۶ و ۸ واحد دور وترش کدام حجم حاصل می‌شود؟

- (۱) $76/8\pi$ (۲) $79/2\pi$ (۳) $81/6\pi$ (۴) $84/6\pi$

۵۲- حجم بزرگترین مخروط محاط در داخل مکعب به طول یال ۳ واحد چند برابر π است؟

- (۱) $1/75$ (۲) $2/25$ (۳) $2/75$ (۴) $3/25$

۵۳- مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائم ۱۲ و ۱۸ واحد را حول هر یک از این دو ضلع دوران می‌دهیم، نسبت حجم‌های دو شکل حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۴- در یک مکعب سه رأس دوجه دو غیر واقع بر یک یال، رأس‌های مثلثی‌اند. مساحت این مثلث چند برابر مساحت یک وجه مکعب است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۵۵- در داخل مکعبی به قطر $4\sqrt{3}$ بزرگ‌ترین استوانه‌ی ممکن محاط شده‌است. سطح کل استوانه کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 24π

۵۶- حجم استوانه دوار به ارتفاع ۶ واحد برابر 24π واحد مکعب است. سطح جانبی آن کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 18π (۳) 24π (۴) 36π

۵۷- مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ واحد را حول بزرگ‌ترین ضلع خود دوران می‌دهیم، حجم حاصل چند برابر π است؟

- (۱) $7/2$ (۲) $8/1$ (۳) $9/6$ (۴) $10/8$

۵۸- در یک استوانه ارتفاع نصف و شعاع قاعده دو برابر می‌شود. تغییرات سطح جانبی و حجم آن چگونه است؟

- (۱) سطح دو برابر - حجم ثابت
(۲) سطح و حجم دو برابر
(۳) سطح ثابت - حجم دو برابر
(۴) سطح و حجم ثابت

۵۹- سطح جانبی مخروطی به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع $2\sqrt{6}$ برابر کدام است؟

- (۱) 30π (۲) 35π (۳) 45π (۴) 48π

۶۰- از دوران یک مستطیل به ابعاد ۳ و ۵ واحد حول ضلع بزرگتر جسمی با کدام حجم ایجاد می‌شود؟

- (۱) 45π (۲) 54π (۳) 60π (۴) 75π

۶۱- داخل یک مکعب به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگ‌ترین استوانه ممکن قرار داده شده‌است. سطح کل استوانه چقدر است؟

- (۱) 2π (۲) 4π (۳) 6π (۴) $2\pi\sqrt{3}$

۶۲- در داخل یک مکعب به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگ‌ترین استوانه‌ی ممکن قرار گرفته‌است. سطح کل این استوانه کدام است؟

- (۱) $2\pi\sqrt{3}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) 6π

۶۳- از داخل یک مکعب به طول یال واحد بزرگترین مخروط قائم ممکن را برداشته‌ایم، حجم باقیمانده کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (1) \quad \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad 1 - \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad 1 - \frac{\pi}{12} \quad (4)$$

۶۴- در داخل مکعبی به طول یال واحد بزرگترین کره ممکن را قرار می‌دهیم. حجم این کره کدام است؟

$$\frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \frac{3\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

۶۵- حجم مکعبی $\frac{\sqrt{2}}{4}$ حجم مکعب دیگر است. قطر مکعب بزرگ‌تر چند برابر قطر مکعب کوچک‌تر است؟

$$\sqrt{2} \quad (1) \quad 1/5 \quad (2) \quad \sqrt{3} \quad (3) \quad \sqrt{6} \quad (4)$$

۶۶- اگر نسبت اضلاع دو مکعب $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، نسبت حجم‌های آن کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (4)$$

۶۷- پیمانه‌ای به شکل نیم‌کره به قطر داخلی ۲۴ واحد را لبریز از آب کرده، داخل استوانه‌ای با همان شعاع قاعده می‌ریزیم. ارتفاع آب داخل استوانه چند واحد بالا می‌آید؟

$$6 \quad (1) \quad 7/5 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 9 \quad (4)$$

۶۸- مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد را حول یکی از ضلع‌ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟

$$12\pi \quad (1) \quad 16\pi \quad (2) \quad 18\pi \quad (3) \quad 24\pi \quad (4)$$

۶۹- اضلاع مکعب مستطیل متناسب با اعداد ۲ و ۲ و ۱ و سطح کل آن ۴۰۹۶ واحد مربع است. قطر آن چند واحد است؟

$$45 \quad (1) \quad 54 \quad (2) \quad 36 \quad (3) \quad 48 \quad (4)$$

۷۰- اضلاع مکعب مستطیل با اعداد ۱، ۲، ۳ متناسب است. اگر سطح کل آن $\frac{99}{2}$ واحد باشد، حجم آن کدام است؟

$$20/25 \quad (1) \quad 20/75 \quad (2) \quad 21/25 \quad (3) \quad 21/5 \quad (4)$$

۷۱- از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد حول یک ضلع جسمی حادث می‌شود. حجم آن کدام است؟

$$12\pi \quad (1) \quad 16\pi \quad (2) \quad 18\pi \quad (3) \quad 24\pi \quad (4)$$

۷۲- در مکعبی به حجم $24\sqrt{3}$ فاصله‌ی دو رأس غیرواقع بر یک وجه کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (1) \quad 2\sqrt{6} \quad (2) \quad 3\sqrt{3} \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

۷۳- حجم یک مکعب برابر $2\sqrt{2}$ واحد این مکعب است. قطر این مکعب کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$

۷۴- از یک مکعب کنج سه قائم که یال‌های آن برابر یال مکعب است، برداشته شده است. حجم باقیمانده چند برابر حجم مکعب اصلی است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۷۵- ارتفاع یک استوانه برابر قطر قاعده آن است. تصویر استوانه بر یک صفحه، یک مربع است. زاویه‌ی محور استوانه با صفحه تصویر چند درجه است؟

- (۱) صفر (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

۷۶- مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد را حول یکی از اضلاع دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه قدر است؟

- (۱) 8π (۲) 12π (۳) 16π (۴) 18π

۷۷- در مخروطی که مولد آن برابر قطر قاعده و مساوی ۶ واحد است، کره‌ای محاط شده است. حجم کره کدام است؟

- (۱) $2\pi\sqrt{3}$ (۲) $3\pi\sqrt{3}$ (۳) $4\pi\sqrt{3}$ (۴) $6\pi\sqrt{3}$

۷۸- قاعده‌ی هرم منتظم مربع به ضلع $2\sqrt{3}$ واحد است. عدد حجم هرم با عدد سطح قاعده برابر است. سطح جانبی آن کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۷۹- اندازه‌ی هر یال مکعب ۳ واحد است. صفحه‌ای از انتهای سه یال گذرنده بر یک رأس، مکعب را به دو جزء تقسیم می‌کند. حجم جزء کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{7}{5}$ (۳) ۶ (۴) $\frac{4}{5}$

۸۰- مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد را حول یکی از اضلاع دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

- (۱) 8π (۲) 9π (۳) 12π (۴) 16π

۸۱- ارتفاع استوانه‌ای دو برابر شعاع قاعده‌ی آن است. تصویر این استوانه بر یک صفحه، یک مربع است. زاویه‌ی صفحه‌ی تصویر با محور استوانه چند درجه است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸۰

۸۲- در هرم منتظم مربع‌القاعده به مساحت قاعده ۱۲ واحد مربع عدد حجم هرم با عدد سطح قاعده برابر است. سطح جانبی آن کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۸۳- در یک مکعب صفحه‌ی گذرنده بر قطر یک وجه آن که از یال‌ها نگذرد، سطح مکعب را در کدام چهارضلعی قطع می‌کند؟

- (۱) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین
 (۲) لوزی
 (۳) متوازی‌الاضلاع
 (۴) مستطیل

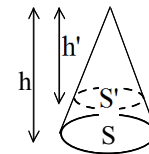
۸۴- قطر یک مکعب مستطیل $3\sqrt{11}$ و قاعده آن مربع است به قطر $3\sqrt{2}$ ، سطح کل مکعب مستطیل کدام است؟

- (۱) ۹۸
 (۲) ۱۰۸
 (۳) ۱۱۴
 (۴) ۱۲۶

۸۵- مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه‌ی قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$
 (۲) π
 (۳) $\frac{4\pi}{3}$
 (۴) $\frac{5\pi}{3}$

جواب اشکال فضایی - سنجش



۱- می‌دانیم نسبت مساحت‌های قاعده دو مخروط برابر مجذور نسبت ارتفاعات آنها و نسبت حجم آن دو، برابر توان سوم ارتفاعات ۲ مخروط است.

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{2}{3}$$

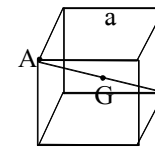
$$\Rightarrow \frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow \frac{\text{حجم مخروط ناقص}}{\text{حجم کل}} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

$$\left. \begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} &= \text{حجم منشور} \\ a^2 \times h_1 & \\ \text{ارتفاع هرم} \times \text{مساحت قاعده} &= \frac{1}{3} \times \text{حجم هرم} \\ \frac{1}{3} a^2 \times h_2 & \end{aligned} \right\} -2$$

$$\Rightarrow a^2 \times h_1 = 18 \left(\frac{1}{3} a^2 \times h_2\right) = 6 a^2 h_2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = 6$$

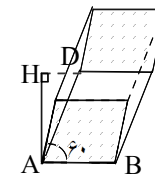
بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.



۳- نقطه‌ای داخل مکعب، که از تمام رئوس به یک فاصله است مرکز مکعب و وسط قطر اصلی مکعب است. هرگاه طول ضلع مکعب a باشد، خواهیم داشت:

$$AB = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \Rightarrow GA = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

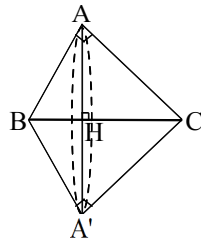


۴- قاعده منشور مربعی به ضلع $\sqrt{3}$ است. هرگاه ABCD یک وجه این منشور باشد که یک لوزی است، ارتفاع این منشور با یال AD زاویه 30° می‌سازد، بنابراین خواهیم داشت:

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$$

$$V = \text{حجم منشور} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = (\sqrt{3})^2 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.



۵- شکل حاصل در مخروط از قاعده بهم چسبیده می‌باشد بطوریکه ارتفاعهای ۲ مخروط BH و CH بوده و شعاع قاعده‌های آنها، AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث ABC است.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

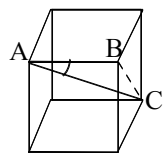
$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \Rightarrow 5AH = 12 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

می‌دانیم حجم مخروط برابر است با $\frac{1}{3}$ مساحت قاعده در ارتفاع آن.

$$V_1 + V_2 = \left(\frac{1}{3}\pi(AH)^2 \times BH\right) + \left(\frac{1}{3}\pi(AH)^2 \times CH\right) = \frac{\pi}{3} AH^2 (BH + CH)$$

$$= \frac{\pi}{3} AH^2 \times BC \Rightarrow \text{حجم کل} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{12}{5}\right)^2 \times 5 = \frac{\pi}{3} \times \frac{288}{5}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.



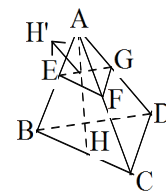
۶- در مثلث ABC، زاویه B قائمه بوده و وتر آن برابر قطر مکعب است. هرگاه طول هر ضلع

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

مکعب برابر a باشند داریم:

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این هرم می‌تواند هر قاعده‌ای داشته باشد که ما برای ساده شدن آن را مثلث القاعده فرض کردیم.

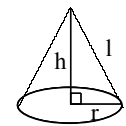


$$AH' = x, AH = h \Rightarrow \frac{\text{سطح قاعده کوچکتر}}{\text{سطح قاعده بزرگتر}} = \frac{12}{27} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

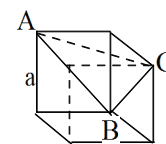
نسبت مساحت ۲ شکل تشابه برابر مجذور نسبت تشابه ۲ شکل $\left(\frac{AH'}{AH}\right)$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{12}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 8$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر h ارتفاع، r شعاع قاعده و l یال مخروط باشند داریم:



$$\left. \begin{aligned} r &= h \\ S &= \pi r l \\ V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ l &= \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2}r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi r \times \sqrt{2}r = \frac{1}{3} \pi r^3 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$$



۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون سه قطر AB و BC و AC با هم مساوی و

مساوی $\sqrt{2}a$ هستند (قطرهای وجهای مکعب) لذا مثلث ABC متساوی الاضلاع

است و تمام زاویه‌های آن 60° هستند.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ضلع مکعب = a

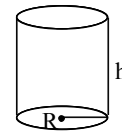
$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 6a^2 = 6 \times \sqrt{3^2} = 6\sqrt{3^2} = 18\sqrt{3}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هرگاه ابعاد مکعب مستطیل X و ۲X و ۳X باشند، داریم:

$$S = 2[(X \times 2X) + (X \times 3X) + (2X \times 3X)] = 22X^2 = 198 \Rightarrow X^2 = 9 \Rightarrow X = 3 \Rightarrow$$

$$\text{حجم } V = X(2X)3X = 6X^3 = 162$$



۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت جانبی استوانه برابر محیط قاعده ضربدر ارتفاع استوانه

$$(2\pi R) \times h = 24\pi \Rightarrow R = 4$$

$$h = 3$$

می باشد.

$$V = \pi R^2 \times h = \pi \times 16 \times 3 = 48\pi$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مساحت جانبی استوانه برابر حاصلضرب محیط قاعده‌ی آن در ارتفاع استوانه است.

$$V = \pi R^2 \times h \Rightarrow \pi R^2 \times 3 = 48\pi \Rightarrow R^2 = 16, R = 4$$

بنابراین:

$$S = (2\pi R) \times h = (2\pi \times 4) \times 3 = 24\pi$$

$$AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



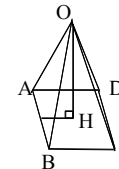
$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{11 - 22} = 7$$

$$V = \frac{1}{3}(\text{مساحت قاعده}) \times \text{ارتفاع هرم} = \frac{1}{3}(8 \times 8) \times 7 = \frac{448}{3}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هرگاه OH ارتفاع هرم باشد، نقطه‌ی H مرکز قاعده‌ی

$$AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8 = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

(مربع) می باشد.



$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{11 - 22} = 7$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ارتفاع \times مساحت قاعده = حجم استوانه

$$24\pi = S \times 6 \Rightarrow S = 4\pi \Rightarrow \pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$$

$$2\pi R h = 2\pi R h = 2\pi(2)(6) = 24\pi$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

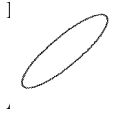
$$\pi R h = \pi R^2 h \Rightarrow R = 2$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH = \frac{4 \times 8}{10} = 4/5$$

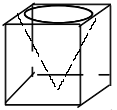
از دوران مثلث قائم الزاویه حول وتر آن دو مخروط ایجاد می شود.

حجم مخروط دوم + حجم مخروط اول = حجم جسم



$$\text{حجم جسم} = \frac{1}{3} \pi AH^2 \times BH + \frac{1}{3} \pi AH^2 \times CH$$

$$\text{حجم جسم} = \frac{1}{3} \pi AH^2 \times (BH + CH) = \frac{1}{3} \pi AH^2 \times BC = \frac{1}{3} \pi (4/5)^2 \times 10 = \frac{230/4\pi}{3}$$



۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ارتفاع این مخروط برابر یال مکعب و شعاع قاعده آن

برابر نصف یال مکعب می باشد.

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 (3) = \frac{9}{4\pi} = 2/5\pi$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سطح جانبی استوانه از رابطه‌ی $2\pi R h$ بدست می آید. پس با نصف کردن ارتفاع سطح

جانبی نصف می شود و با دو برابر کردن شعاع قاعده سطح دو برابر می شود پس در مجموع سطح تغییری نمی کند در

ضمن حجم استوانه از رابطه $\pi R^2 h$ بدست می آید. پس با نصف کردن ارتفاع حجم نصف می شود و با دو برابر کردن

شعاع قاعده حجم چهار برابر می شود پس در مجموع حجم دو برابر می شود.

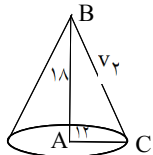
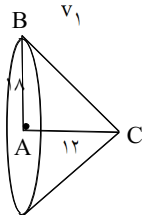
$$S = 2\pi R h \Rightarrow 24\pi = 2\pi R \times 6 \Rightarrow R = 2$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{حجم} = \pi R^2 h \Rightarrow \text{حجم} = \pi(2)^2(6) = 24\pi$$

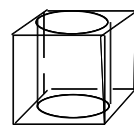
۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در هر دو حالت یک مخروط ایجاد می شود و حجم هر مخروط از رابطه $v = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

بدست می آید.



$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi (12)^2 \times 12}{\frac{1}{3} \pi (18)^2 \times 18} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر a ضلع مکعب باشد آنگاه $a\sqrt{3}$ قطر مکعب است در ضمن $\frac{a}{\sqrt{3}}$ شعاع قاعده استوانه و



ارتفاع استوانه است. $a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

$$\text{حجم استوانه} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \pi R^2 h = \pi(1)^2(2) = 2\pi$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قاعده مخروط دایره‌ای به قطر یال مکعب بوده ارتفاع آن نیز با یال مکعب برابر است.

$$V = (1)^3 - \frac{1}{3} \left(\pi \times \frac{1}{4} \times 1 \right) = 1 - \frac{\pi}{12}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{قطر کره} = 1$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

قطر کره برابر طول یال مکعب است.

$$\text{حجم آب} = V_{\text{نیمکره}} - \frac{2}{3} \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{2}{3} R = \frac{2}{3} (12) = 8$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حجم مکعب $V_1 = a^3$

$$V_2 = \text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{6} a^3 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi}{6}$$

قطر کره برابر طول ضلع مکعب است.

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h \Rightarrow \pi R^2 h = \frac{2\pi}{3} R^2 \Rightarrow \text{حجم نیمکره} = \frac{2\pi}{3} R^2$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$h = \frac{2}{3} R \Rightarrow h = \frac{2}{3} (4/5) = 3$$

$$S = 6a^2$$

$$S' = 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 = \frac{6a^2}{2} \Rightarrow S' = \frac{S}{2}$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$S = 6a^2$$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$S' = 6 \left(a \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 6a^2 \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

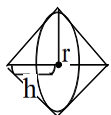
۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴ وجهی منتظم یک هرم با وجه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع است.

$$S_{\text{کل}} = 4S_{\text{مثلث}} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ارتفاع مخروط $\frac{a}{\sqrt{3}}$ و شعاع قاعدی مخروط $\frac{a}{2}$ و حجم حاصل دو برابر حجم یک مخروط است.

$$V = 2 \left(\frac{1}{3} \pi \times \frac{r^2 a}{4} \times \frac{a}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi a^3}{4} \Rightarrow V = 16\pi$$



شکل حاصل دو مخروط از قاعده به هم چسبیده است

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$K, 2K, 3K \Rightarrow \text{اضلاع مکعب مستطیل} \Rightarrow S = \text{جانبی} \Rightarrow 2(2K^2 + 3K^2 + 6K^2) = \frac{99}{4}$$

$$K^2 = \frac{99}{4 \times 11} = \frac{9}{4} \Rightarrow K = \frac{3}{2}$$

$$V = 6K^3 = 6 \times \frac{27}{8} = \frac{81}{4} = 20.25$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$d = \sqrt{2k^2 + 2k^2 + k^2} = 3k \quad 3k = 12 \quad k = 4$$

$$8, 8, 4 \Rightarrow S_{\text{کل}} = (64 + 32 + 32) \times 2 = 256$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شکل حاصل دو مخروط از قاعده به هم چسبیده به شعاع قاعدی $H_A = 2\sqrt{3}$

و ارتفاع مخروط $h = 2 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ است.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow V = 2 \left[\frac{1}{3} \pi \times 12 \times 2 \right] = 16\pi$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فاصله ۲ رأس غیر واقع بر یک وجه برابر قطر اصلی مکعب است.

$$\alpha\sqrt{3} = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{3} \quad V = \alpha^3 = 3\sqrt{3}$$

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{2} \Rightarrow d = a\sqrt{3} = \sqrt[3]{6}$$

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
حجم باقیمانده $\Rightarrow \frac{5}{6}a^3$ حجم هرم = $\frac{1}{3}a \times \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$ = حجم کنج برداشته شده

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
حجم مکعب = a^3 حجم هرم = $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}a^2\right) \times a = \frac{1}{6}a^3$
نسبت دو حجم = $\frac{\frac{5}{6}a^3}{\frac{1}{6}a^3} = 5$ حجم باقیمانده = $\frac{5}{6}a^3$

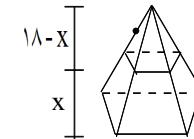
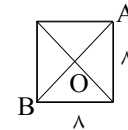
۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل حاصل ۲ مخروط از قاعده به هم چسبیده است.
نصف قطر مربع $R = h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$



$$R = h = r \Rightarrow V = 2 \left(\frac{1}{3} \pi R^2 h \right) = \frac{2}{3} \pi (a \times r) = 18\pi$$

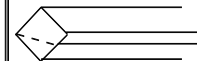
۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $\frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ سطح کل = $\frac{4\sqrt{3}}{4}$ مساحت یک وجه

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مقطع حاصل اضلاع موازی هم‌اند. دوزنقه غیرممکن است.

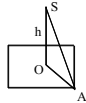


۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

حجم هرم جدا شده $V_1 = \frac{1}{6}a^3 = \sqrt{6}$ $\Rightarrow V_1 = \frac{1}{6}a^3 = \sqrt{6}$ حجم مکعب $a\sqrt{3} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{6} \Rightarrow V = 6\sqrt{6}$
حجم قطعه بزرگتر = $6\sqrt{6} - \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$

۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $2(6 + 10 + 15) = 62$ سطح کل

۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S = 2V \quad S' = 18 \Rightarrow \frac{x}{12} = \sqrt{\frac{18}{27}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x = 12 \sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{6}$$

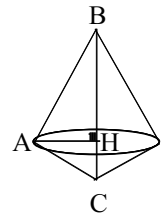
۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a^3 = 8$$

$$2\pi R h = \pi R^2 h \Rightarrow R = 2$$

۵۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از دوران مثلث قائم الزاویه حول وترش، دو مخروط ایجاد می‌شود:

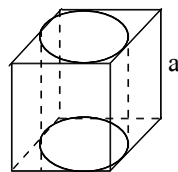


$$V = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times BH + \frac{1}{3}\pi AH^2 \times CH = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times BC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 10 = 6 \times 8 \Rightarrow AH = 4/5$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(4/5)^2 \times 10 = 76/15\pi$$



۵۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل می توان بزرگ ترین استوانه را درون مکعب قرار داد. به طوری که ارتفاع استوانه برابر یال مکعب و شعاع قاعدهی آن مساوی نصف یال مکعب است.

$$a\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$$

$$\text{سطح کل استوانه} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

$$\text{سطح کل استوانه} = 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)(a) + 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

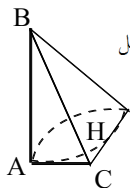
$$\text{سطح کل استوانه} = \frac{3\pi(4)^2}{2} = 24\pi$$

۵۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow 24\pi = \pi R^2 (6) \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$$

$$S = 2\pi Rh = 2\pi(2)(6) = 24\pi$$

۵۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. اگر مثلث با این اضلاع قائم الزاویه را حول وتر دوران دهیم آن گاه دو مخروط ایجاد می شود.

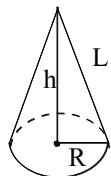


$$\text{حجم شکل حاصل} = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times BH + \frac{1}{3}\pi AH^2 \times CH = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times BC \quad (1)$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$\text{حجم} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \times (5) = \frac{1}{3}\pi \times \frac{144}{5} = 9\frac{2}{5}\pi$$

۵۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. سطح جانبی استوانه از رابطهی $2\pi Rh$ به دست می آید پس با نصف شدن ارتفاع و دو برابر شدن شعاع قاعده سطح جانبی تغییری نمی کند و حجم استوانه از رابطهی $\pi R^2 h$ به دست می آید پس با نصف شدن ارتفاع حجم نصف می شود و با دو برابر شدن شعاع قاعده حجم چهار برابر می شود پس در کل حجم دو برابر می شود بنابراین گزینهی ۳ درست است.

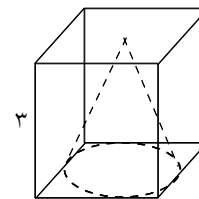


۵۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. اگر L مولد مخروط باشد آنگاه سطح جانبی مخروط از رابطهی πRL بدست می آید.

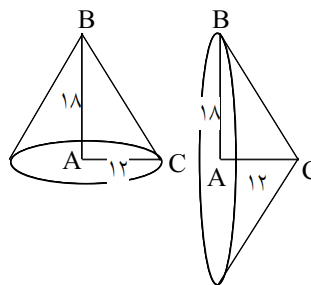
$$L^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow L^2 = 25 + 24 = 49 \Rightarrow L = 7$$

$$\text{سطح جانبی} = \pi RL = \pi(5)(7) = 35\pi$$

۵۲- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. بزرگ ترین مخروط محاط در مکعب، ارتفاعی برابر یال مکعب دارد و شعاع قاعدهی آن نصف یال مکعب می باشد:



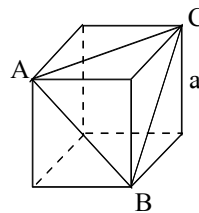
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 (a) = \frac{9}{4}\pi = 2\frac{1}{4}\pi$$



۵۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. شکل های حاصل دو مخروط می باشد:

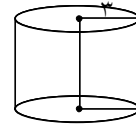
$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi AC^2 \times AB = \frac{1}{3}\pi(12)^2(18) \\ V_2 &= \frac{1}{3}\pi AB^2 \times AC = \frac{1}{3}\pi(18)^2(12) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi(12)^2(18)}{\frac{1}{3}\pi(18)^2(12)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

۵۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $a\sqrt{2}$ است.



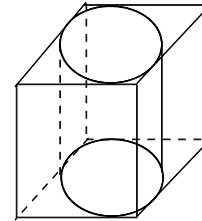
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\text{وجه یک}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(a\sqrt{2})^2}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۶۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. شکل حاصل یک استوانه با ارتفاع ۵ و شعاع قاعده ۳ می باشد.



$$\text{حجم} = \pi R^2 h = \pi (3)^2 (5) = 45\pi$$

۶۱- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

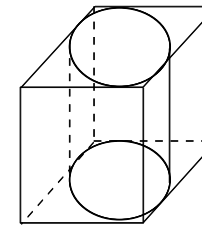


$$\text{قطر مکعب} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

اگر درون مکعب بزرگترین استوانه را قرار دهیم در این صورت ارتفاع استوانه برابر یال مکعب و شعاع قاعده استوانه مساوی نصف یال مکعب است.

$$S = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi(1)(2) + 2\pi(1)^2 = 6\pi$$

۶۲- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



$$\text{قطر مکعب} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

اگر درون مکعب بزرگترین استوانه را قرار دهیم در این صورت ارتفاع استوانه برابر یال مکعب و شعاع قاعده استوانه مساوی نصف یال مکعب است.

$$S = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi(1)(2) + 2\pi(1)^2 = 6\pi$$

۶۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{\pi}{12}$ \Rightarrow حجم مخروط $1 - \frac{\pi}{12}$ = حجم باقی مانده

۶۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$ $R = \frac{1}{2}$ \Rightarrow قطر کره = ۱

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d_2 = \sqrt{2}d_1$$

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۶۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

حجم استوانه = حجم نیم کره

$$\frac{1}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h \Rightarrow \frac{1}{3}R = h \xrightarrow{R=12} \frac{1}{3} \times 12 = h \Rightarrow h = 4$$

۶۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{دو برابر مخروط} \quad R = 2\sqrt{3} \Rightarrow V = 2\left(\frac{1}{3}\pi R^2 h\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} \times 4 \times 3 \times 2\right) = 16\pi$$

۶۹- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$a, 2a, 2a \Rightarrow 2(4 + 2 + 2)a^2 = 4096 \Rightarrow a^2 = \frac{4096}{16} = 256 \Rightarrow a = 16$$

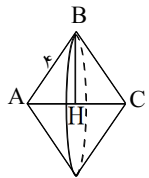
$$\text{قطر} = \sqrt{a^2 + 2a^2 + 2a^2} = 2a = 32$$

۷۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a, 2a, 2a \text{ و } 2(2a^2 + 2a^2 + 2a^2) = \frac{99}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2} \Rightarrow \text{حجم} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

۷۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. BH شعاع قاعدهی مخروط است و برابر $\frac{2\sqrt{3}}{3}a = 2\sqrt{3}$ و ارتفاع AH برابر $\frac{a}{3} = 2$ می باشد.



$$2 \text{ برابر حجم مخروط} = \text{حجم جسم حاصل} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{3}\pi R^2 h\right) = \frac{2}{3}\pi (2\sqrt{3})^2 (2) = 16\pi$$

۷۲- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$a^2 = 24\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 8 \times 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}\sqrt{3} \Rightarrow d = a\sqrt{3} = 6$$

$$a^2 = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} \quad d = a\sqrt{3} = \sqrt{6}$$

۷۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{5}{6} \text{ باقیمانده} \Rightarrow \frac{1}{3}a \times \frac{a^2}{2} = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{6}V \Rightarrow \frac{5}{6} \text{ حجم کنج سه قائم}$$

۷۴- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

۷۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. 90° = زاویهی تصویر و تصویر ارتفاع = تصویر قطر پس محور استوانه موازی صفحهی تصویر است. لذا زاویه صفر درجه است.

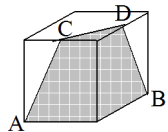
$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \Rightarrow \frac{1}{3} h = 1 \Rightarrow h = 3$$

۸۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{سطح جانبی} = 4 \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \right) = 24$$

۸۳- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.



$AB \parallel CD \Rightarrow$ دوزنقه \Rightarrow دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین
 $AC = BD$

۸۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$a, a, b \Rightarrow \sqrt{a^2 + a^2 + b^2} = 3\sqrt{11} \Rightarrow 2a^2 + b^2 = 99 \Rightarrow b = 9$$

$$\sqrt{a^2 + a^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \text{سطح کل} = 2(9 + 27 + 27) = 126$$

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{3}R = 1$$

۸۵- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$

۷۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{دو برابر حجم مخروط} = \text{حجم حاصل}$$

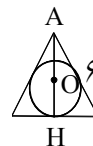
$$\text{ارتفاع مخروط} = \frac{4}{3} = 2$$

$$\text{شعاع قاعده مخروط} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 \times 2 = 8\pi \Rightarrow \text{حجم حاصل} = 16\pi$$

۷۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

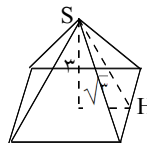
$$AH = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3} \Rightarrow OH = R = \sqrt{3}$$



$$V = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3})^3 = 4\pi\sqrt{3}$$

۷۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \Rightarrow h = 3$$

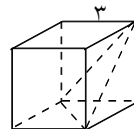


$$SH = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{سطح مثلث جانبی} = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}) = 6$$

$$\text{سطح جانبی} = 4 \times 6 = 24$$

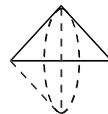
۷۹- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{1}{3}a \left(\frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{1}{6}a^3 \Rightarrow V = \frac{1}{6}(27) = 4.5$$



۸۰- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$2\sqrt{3} = \text{شعاع قاعده‌ی هرم} \Rightarrow \text{ارتفاع هرم} = 2 \Rightarrow \text{دو برابر حجم هرم} = \text{حجم حاصل}$



$$\text{حجم حاصل} = 2 \left(\frac{1}{3}\pi \times 12 \times 2 \right) = 16\pi$$

$$h = 2R$$

۸۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$180^\circ \Rightarrow$ صفحه موازی محور استوانه \Rightarrow تصویر قطر = تصویر ارتفاع

اشکال فضایی - آزاد

- ۱- اگر دو مخروط دوار که شعاع قاعده یکی دو برابر دیگری است معادل باشند (حجم مساوی) کدام درست است؟
 (۱) ارتفاع اولی نصف ارتفاع دومی است
 (۲) ارتفاع اولی ربع ارتفاع دومی است
 (۳) ارتفاع اولی ثلث ارتفاع دومی است
 (۴) ارتفاع اولی دو برابر ارتفاع دومی است

- ۲- سطح جانبی مخروط قائم دواری را که شعاع قاعده آن $\frac{1}{3}$ طول مولدش می باشد در امتداد یک مولد باز کرده ایم، زاویه قطاع حاصل برابر است با:

$$\pi \quad (1) \quad \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

- ۳- هرگاه مثلث قائم الزاویه ای را که یک زاویه 60° دارد حول وتر و ضلع بزرگتر دوران دهیم نسبت حجمها برابر است با:

$$\frac{7}{4} \quad (1) \quad \frac{5}{4} \quad (2) \quad \frac{3}{4} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

- ۴- قاعده هرمی مربعی به ضلع a است. اگر ارتفاع آنرا به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم و دو صفحه موازی قاعده از نقاط تقسیم رسم کنیم نسبت مساحت های دو قاعده هرمهای حاصل چقدر است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{9} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4)$$

- ۵- دو استوانه دارای حجم های مساوی هستند و شعاع قاعده یکی ۳ برابر دیگری است. نسبت ارتفاع های آنها چقدر است؟

$$\frac{1}{9} \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad 81 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

- ۶- شعاع قاعده مخروط دواری برابر ۶ و ارتفاع آن مساوی ۸ می باشد. سطح جانبی آن برابر است با:

$$120\pi \quad (1) \quad 60\pi \quad (2) \quad 64\pi \quad (3) \quad 36\pi \quad (4)$$

- ۷- تعداد فرجه های هرمی که قاعده آن n ضلعی محدب است برابر است با:

$$2n \quad (1) \quad n \quad (2) \quad n + 1 \quad (3) \quad 2n + 1 \quad (4)$$

- ۸- قاعده یک نیمکره و قاعده یک مخروط مشترک است. نسبت بیشترین حجم مخروط به حجم نیمکره چقدر است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

- ۹- حجم استوانه ای 60 cm^3 است. حجم مخروطی که سطح قاعده و ارتفاع آن با سطح قاعده و ارتفاع استوانه مساوی است کدام است؟

$$20 \quad (1) \quad 30 \quad (2) \quad 40\pi \quad (3) \quad \text{هیچکدام} \quad (4)$$

۱۰- نسبت حجم کره‌ای به سطح آن برابر مقدار عددی ۶ است. در این صورت، شعاع کره چقدر است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۳

۱۱- اگر طول قطر یک مکعب $2\sqrt{3}$ باشد اندازه سطح کل مکعب چقدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) $12\sqrt{3}$ (۳) ۲۴ (۴) $24\sqrt{3}$

۱۲- وجوه جانبی هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای مثلثی به قاعده ۱۰ و ارتفاع ۱۳ سانتیمترند. سطح کل هرم چند سانتیمتر مربع است؟

- (۱) ۵۲۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۲۶۰

۱۳- متوازی‌السطوح چند یال دارد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۱۴- حجم هرم منتظمی که قاعده آن مربع و تمام یالهایش به طول a است برابر با $\frac{\sqrt{2}}{6}$ است، مقدار a برابر است با:

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۱

۱۵- اگر شعاع قاعده مخروطی را سه برابر و ارتفاع آن را ثلث کنیم، حجم مخروط
(۱) تغییر نمی‌کند (۲) ثلث می‌شود (۳) ۹ برابر می‌شود (۴) ۳ برابر می‌شود

۱۶- ارتفاع یک مخروط سه برابر شعاع قاعده آن است. اگر حجم مخروط 8π باشد شعاع قاعده چقدر است؟

- (۱) $R = 2$ (۲) $R = 3$ (۳) $R = 1$ (۴) $R = \frac{3}{2}$

۱۷- مساحت کل مکعبی برابر ۹۶ سانتیمتر مربع است. حجم آن چقدر است؟

- (۱) ۹۶ (۲) ۸۱ (۳) ۶۴ (۴) ۳۶

۱۸- نسبت حجم دو کره ۱۶ است. نسبت شعاعهای دو کره چقدر است؟

- (۱) ۴ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) $2\sqrt[3]{2}$ (۴) ۲

۱۹- اگر ابعاد یک مکعب مستطیل $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ باشند طول قطر مکعب چقدر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۰- اگر S سطح و V حجم کره‌ای به شعاع R باشند نسبت $\frac{V}{S}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{R}$ (۳) $\frac{4R}{3}$ (۴) $\frac{R}{3}$

۲۱- نسبت حجم کره‌ای به شعاع R به حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده $\frac{R}{2}$ و ارتفاع R چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{16}{3}$ (۴) $\frac{3}{16}$

۲۲- یک مکعب مستطیل چند فرجه دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۲۳- اگر در یک مخروط از وسط ارتفاع، صفحه‌ای بر آن عمود کنیم حجم مخروط ناقص جدید چه کسری از حجم مخروط است؟

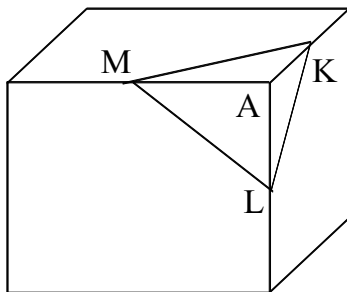
- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۴- اگر اندازه سطح کره‌ای به شعاع $2R$ برابر ۹ باشد، اندازه سطح کره‌ای به شعاع R چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۲۵- اگر طول یال هرم منتظم مثلث القاعده‌ای برابر $\sqrt{2}$ باشد، حجم آن چقدر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$



۲۶- در مکعب شکل مقابل K و L و M وسطهای سه یال هستند. حجم هرم A_{AMLK} چه کسری از حجم مکعب است؟

- (۱) $\frac{1}{48}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{24}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۲۷- در یک مخروط طول ارتفاع $h_1 = 1$ و طول شعاع قاعده $r_1 = 2$ است و در مخروط دیگری طول ارتفاع $h_2 = 2$ و طول شعاع قاعده $r_2 = 1$ است، سطح جانبی اولی چند برابر سطح جانبی دومی است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۸- اگر صفحه‌ای عمود بر ارتفاع مخروط آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کند نسبت ارتفاع دو مخروط حاصل چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۴

۲۹- در کره‌ای به شعاع R یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم این کره به مکعب نامبرده کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi (1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\pi (2) \quad \frac{\sqrt{6}}{3}\pi (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\pi (4)$$

۳۰- سطح کل منشوری که قاعده‌اش لوزی به اقطار ۶ و ۸ و ارتفاعش مساوی محیط قاعده آن باشد، برابر است با:

$$428 (1) \quad 224 (2) \quad 228 (3) \quad 448 (4)$$

۳۱- در یک مخروط شعاع قاعده را دو برابر و ارتفاع را ۹ برابر می‌کنیم. حجم چه تغییری می‌کند؟
 (۱) ۱۸ برابر می‌شود (۲) ۳۶ برابر می‌شود (۳) ۱۸۲ برابر می‌شود (۴) ۸۱ برابر می‌شود

۳۲- مربعی به قطر یک سانتی‌متر را حول قطرش دوران می‌دهیم. حجم حاصل برابر است با:

$$\frac{\pi}{12} (1) \quad \frac{\pi}{4} (2) \quad \frac{\pi}{8} (3) \quad \pi (4)$$

۳۳- کره‌ای در مکعبی به ضلع a محاط شده است. حجم کره چقدر است؟

$$\frac{4\pi a^3}{3} (1) \quad \frac{\pi a^3}{8} (2) \quad \frac{\pi a^3}{6} (3) \quad \frac{32\pi a^3}{8} (4)$$

۳۴- سطح جانبی هرم مربع‌القاعده منتظمی که ارتفاع آن ۸ و ضلع قاعده‌اش ۱۲ باشد چقدر است؟

$$120 (1) \quad 384 (2) \quad 192 (3) \quad 240 (4)$$

۳۵- در هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای به ضلع قاعده a و ارتفاع a مساحت جانبی چقدر است؟

$$a^2\sqrt{3} (1) \quad \frac{a^2\sqrt{5}}{2} (2) \quad a^2\sqrt{5} (3) \quad \frac{a^2\sqrt{3}}{2} (4)$$

۳۶- اضلاع مکعب مستطیلی با اعداد ۱ و ۲ و ۲ متناسب‌اند. اگر حجم مکعب مستطیل ۸ باشد طول قطر آن چقدر است؟

$$4\sqrt{2} (1) \quad 9\sqrt{2} (2) \quad 3\sqrt{2} (3) \quad 9\sqrt{4} (4)$$

۳۷- حجم مکعبی به ضلع a برابر حجم استوانه‌ای به ارتفاع a و قطر قاعده d است آنگاه:

$$d = \frac{a}{\sqrt{\pi}} (1) \quad d = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} (2) \quad d = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} (3) \quad d = a (4)$$

۳۸- حجم کره‌ای به قطر $\frac{2}{\pi}$ از نظر عددی چند برابر سطح کره است؟

$$3 (1) \quad \frac{1}{3} (2) \quad \frac{1}{3\pi} (3) \quad \frac{\pi}{3} (4)$$

۳۹- در یک استوانه اگر شعاع قاعده را نصف و ارتفاع را چهار برابر کنیم آنگاه حجم استوانه:
 (۱) چهار برابر می‌شود. (۲) تغییر نمی‌کند. (۳) دو برابر می‌شود. (۴) نصف می‌شود.

۴۰- حجم مکعبی به ضلع چهار از نظر عددی چند برابر سطح کل مکعب است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۲

۴۱- مساحت کل مکعبی که در داخل کره‌ای محاط شده، چند برابر سطح کره محیطی است؟

- (۱) 2π (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (۴) $\frac{2}{\pi}$

۴۲- در کدام گزینه هرم مربع‌القاعده منتظم دارای حجم بیشتری است؟

- (۱) ارتفاع ۳ و ضلع قاعده ۱
 (۲) ارتفاع ۲ و قطر قاعده $\sqrt{2}$
 (۳) ارتفاع $\sqrt{3}$ و قطر قاعده $\sqrt{2}$
 (۴) ارتفاع $\sqrt{3}$ و ضلع قاعده $\sqrt{3}$

۴۳- کدام شکل حجمش از بقیه بیشتر است؟

- (۱) حجم مکعبی به ضلع R
 (۲) حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده R و ارتفاع R
 (۳) حجم هرم مربع‌القاعده‌ای به ضلع R و ارتفاع R
 (۴) حجم کره‌ای به شعاع R

۴۴- سطح کل مکعبی به ضلع k با سطح کل مکعب مستطیلی به اضلاع a, ۲a, ۲a برابر است. قطر مکعب چند برابر قطر مکعب مستطیل است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

۴۵- مساحت کره‌ی محیط بر مکعبی به ضلع a چند برابر مساحت کره‌ی محاطی داخل مکعب است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) ۱۲ (۳) ۴ (۴) ۳

۴۶- مساحت کره‌ی محیطی بر مکعبی به ضلع a چند برابر مساحت کل مکعب است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۴۷- در یک استوانه سطح جانبی چهار برابر حجم استوانه است شعاع قاعده این استوانه چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۴

۴۸- حجم مکعبی به قطر $2\sqrt{6}$ چقدر است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) $32\sqrt{2}$ (۳) $16\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۴۹- حجم کره‌ای به شعاع R نصف سطح کره است. شعاع کره چه قدر است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{3}{2} \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (4)$$

۵۰- سطح کره‌ای محیط بر یک مکعب به ضلع a چند برابر سطح کل مکعب است؟

$$\pi \quad (1) \quad \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{2\pi}{5} \quad (3) \quad \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

۵۱- استوانه‌ای به ارتفاع ۴ در داخل کره‌ای به شعاع ۵ محاط است. حجم کره چند برابر حجم استوانه است؟

$$\frac{125}{21} \quad (1) \quad \frac{125}{7} \quad (2) \quad \frac{125}{63} \quad (3) \quad \frac{125}{84} \quad (4)$$

۵۲- اگر قطر یک مکعب به طول K باشد، حجم آن کدام است؟

$$\frac{k^3}{3} \quad (1) \quad \frac{k^3}{\sqrt{3}} \quad (2) \quad \frac{k^3}{3\sqrt{3}} \quad (3) \quad \frac{k^3}{9} \quad (4)$$

۵۳- در استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳ حجم چند برابر مساحت جانبی است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

۵۴- مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۵ و ۱۲ را یکبار حول ضلع به طول ۵ و یکبار حول ضلع به طول ۱۲ دوران می‌دهیم.

نسبت حجم دو شکل به دست آمده چه قدر است؟

$$\frac{25}{144} \quad (1) \quad \frac{36}{81} \quad (2) \quad \frac{5}{12} \quad (3) \quad \frac{7}{15} \quad (4)$$

۵۵- حجم کره‌ای به شعاع ۱۰، چند برابر حجم مکعب مستطیل محاط در کره به ابعاد ۴ و ۴ و a است؟

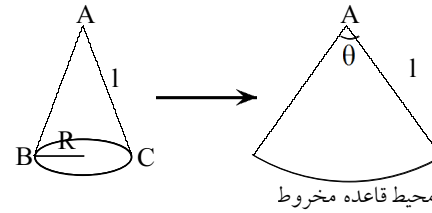
$$\frac{125}{12\sqrt{23}} \quad (1) \quad \frac{250\pi}{3\sqrt{23}} \quad (2) \quad \frac{125\pi}{24\sqrt{23}} \quad (3) \quad \frac{125\pi}{6\sqrt{23}} \quad (4)$$

جواب اشکال فضایی - آزاد

۱- حجم مخروط با شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر با $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ است.

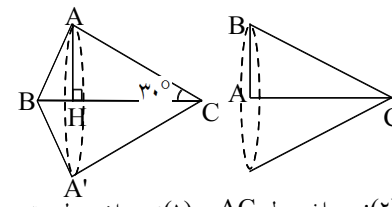
$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2 \Rightarrow R_1^2 h_1 = R_2^2 h_2 \Rightarrow \left. \begin{aligned} R_1 &= 2R_2 \\ h_1 &= \frac{h_2}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2R_2^2 h_1 = R_2^2 h_2 \Rightarrow h_1 = \frac{h_2}{4}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$R = \frac{l}{4} \left. \begin{aligned} 2\pi R &= l\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\pi R = 2R\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\pi$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



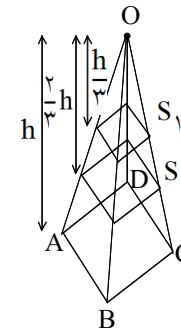
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot CH}{\frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot AC} = \frac{AH^2 \cdot BC}{AB^2 \cdot AC}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left[\frac{AC}{2}\right]^2 \cdot BC}{\left[\frac{BC}{2}\right]^2 \cdot AC} = \frac{AC}{BC} = \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(۱): دوران حول وتر

(۲): دوران حول AC

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۴- یادآوری: صفحات موازی قاعده، هرم را به چند هرم متشابه تقسیم می‌کنند بطوریکه

نسبت مساحت آنها با مجذور ارتفاعاتشان برابر است.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\left(\frac{h}{3}\right)^2}{\left(\frac{2h}{3}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$V_{\text{کره}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^2} = \frac{R}{3} \Rightarrow R = 18$$

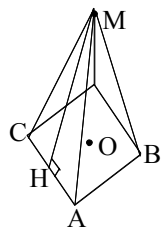
۱۰- یادآوری: حجم و سطح کره‌ای به شعاع R برابر $\frac{4}{3}\pi R^3$ و $4\pi R^2$ است.

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۱- می‌دانیم طول قطر مکعب به ضلع a برابر $\sqrt{3}a$ و سطح کل آن برابر $6a^2$ است، پس:

$$\sqrt{3}a = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow S_{\text{کل}} = 6a^2 = 6 \times 4 = 24$$

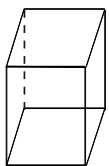
بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S = 4 \left(\frac{1}{2} MH \times AC \right) + AB^2 \Rightarrow S = 4 \left(\frac{1}{2} \times 13 \times 10 \right) + 100 = 360$$

$$S = 4 \left(\frac{1}{2} \times 13 \times 10 \right) + 100 = 360$$

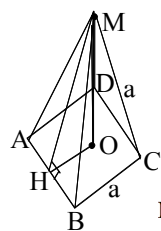
بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۱۳- متوازی‌السطوح منشوری است که قاعده آن متوازی‌الاضلاع است.

دو قاعده بطوریکه هر قاعده دارای ۴ یال است و ۴ یال نیز بر دو قاعده عمود شده است. بنابراین

متوازی‌السطوح مجموعاً ۱۲ یال دارد. بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۱۴- در هرم منتظم، وجوه جانبی، مثلثهای متساوی‌الاضلاع هستند.

$$MO = \sqrt{MH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} MA\right)^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} MO &= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow a=1 \end{aligned} \right\}$$

ارتفاع قاعده $S_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}S$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

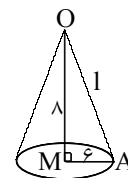
۵- اگر V_1 و V_2 حجم دو استوانه باشد، داریم:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \pi R_1^2 h_1 \\ V_2 &= \pi R_2^2 h_2 \\ R_1 &= 2R_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_1 = V_2 \Rightarrow \pi R_1^2 h_1 = \pi R_2^2 h_2 \Rightarrow$$

$$(2R_2)^2 h_1 = R_2^2 h_2 \Rightarrow 4R_2^2 h_1 = R_2^2 h_2 \Rightarrow h_2 = 4h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{4}h_2$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۶- سطح جانبی مخروط دوار با شعاع قاعده R و طول مولد l برابر $S = \pi Rl$ است.



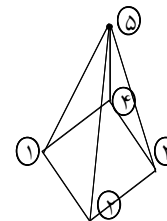
$$l = AO = \sqrt{OM^2 + AM^2} = 10 \Rightarrow S_{\text{جانبی}} = \pi(6)(10) = 60\pi$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۷- در هرمی با قاعده n ضلعی، n فرجه در قاعده وجود می‌آید.

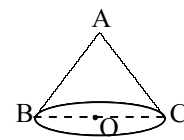
چون قاعده n راس دارد، هرم n یال جانبی دارد که تشکیل n فرجه می‌دهند. بنابراین در

مجموع، هرم 2n فرجه دارد. لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۸- مخروط زمانی بیشترین حجم را دارد که ارتفاع آن بیشینه گردد و بیشترین ارتفاع آن

بطوریکه بر نیمکره محاط گردد برابر R می‌باشد.



$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{نیمکره}}} = \frac{\frac{1}{3}(\pi R^2)h}{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} = \frac{h}{2R} = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۹- حجم استوانه به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر $\pi R^2 h$ و حجم مخروط با همان شعاع و ارتفاع برابر $\frac{1}{3}\pi R^2 h$

است.

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{استوانه}} &= \pi R^2 h = 60 \\ V_{\text{مخروط}} &= \frac{1}{3}\pi R^2 h \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}V_{\text{استوانه}} = \frac{60}{3} = 20$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۵- می‌دانیم حجم مخروطی با شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ است.

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \\ R_1 &= rR_1, h_1 = \frac{1}{r}h_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_r = \frac{1}{3}\pi R_r^2 h_r = \frac{1}{3}\pi (rR_1)^2 \left(\frac{1}{r}h_1\right) = \pi R_1^2 h_1 = rV_1$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۶- حجم مخروط به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ است، پس:

$$h = rR \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 (rR) = \pi R^3 = 8\pi \Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۷- مساحت و حجم مکعبی به طول ضلع a برابر $6a^2$ و a^3 است.

$$S_{\text{کل}} = 6a^2 = 96 \Rightarrow a^2 = \frac{96}{6} = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow V_{\text{حجم}} = a^3 = 4^3 = 64$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ درست است.

۱۸- می‌دانیم حجم کره‌ای به شعاع R برابر $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ است.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = 16 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۹- می‌دانیم طول قطر مکعب مستطیلی با ابعاد a و b و c برابر $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ است.

$$\text{قطر مکعب} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{12 + 2 + 2} = \sqrt{16} = 4$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۰- سطح و حجم کره‌ای به شعاع R برابر با $4\pi R^2$ و $\frac{4}{3}\pi R^3$ است.

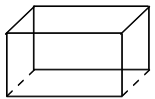
$$\frac{V_{\text{کره}}}{S_{\text{کره}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

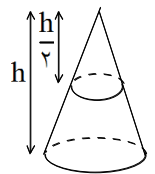
۲۱- می‌دانیم حجم کره‌ای به شعاع R برابر $\frac{4}{3}\pi R^3$ و حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر $\pi R^2 h$ است.

$$\frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{استوانه}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 h} = \frac{\frac{4}{3}R^3}{\left(\frac{R}{2}\right)^2 (R)} = \frac{\frac{4}{3}R^3}{\frac{R^3}{4}} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{1} = \frac{16}{3}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۲۲- از برخورد هر دو صفحه، یک فرجه پدید می‌آید. در مکعب مستطیل، ۱۲ صفحه دودو متقاطع وجود دارد (۱۲ یال دارد) بنابراین مکعب مستطیل، ۱۲ فرجه دارد. لذا گزینه ۴ پاسخ درست است.



۲۳- یادآوری: صفحه عمود بر ارتفاع یک مخروط، آن را به دو مخروط تبدیل می‌کند بطوریکه نسبت حجم دو مخروط برابر مکعب نسبت ارتفاع دو مخروط باشد.

$$\frac{V_{\text{مخروط کوچک}}}{V_{\text{کل}}} = \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{\text{مخروط ناقص}}}{V_{\text{کل}}} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۴- می‌دانیم سطح کره‌ای به شعاع R برابر $4\pi R^2$ است.

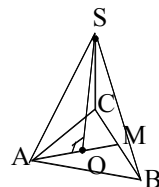
$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 4\pi (rR)^2 = 16\pi R^2 \\ S_2 &= 4\pi R^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R^2}{16\pi R^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}S_1 = \frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۵- اگر SO ارتفاع وارد بر قاعده فرض شود، O مرکز ثقل قاعده است: بنابراین:

$$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}AB\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}AB$$

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{1}{3}AB^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}AB = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}S_{ABC} \times SO = \frac{1}{3}\left(\frac{AB \times AM}{2}\right) \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(AB \times \frac{\sqrt{3}}{2}AB\right) \times \left(\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}\right) = \frac{1}{3}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲۶- حجم هرم برابر با $\frac{1}{3}$ مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

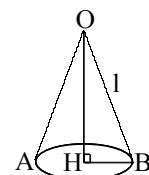
مثلاً قائمه است، بنابراین مساحت آن برابر با نصف حاصل ضرب اضلاع قائم آن یعنی $\frac{1}{2}AM \times AL$ است.

$$AK \perp \widehat{AML} \Rightarrow V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} S_{\widehat{AML}} \times AK = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} AM \times AL \right] \times AK = \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \right) = \frac{a^3}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{هرم}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{1}{48}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

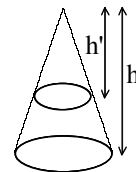
۲۷- سطح جانبی مخروط دوار با شعاع قاعده R و طول مولد l برابر $S = \pi R l$ است.



$$l = OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{h^2 + R^2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1 l_1}{\pi R_2 l_2} = \frac{2 \times \sqrt{1^2 + 2^2}}{1 \times \sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۸- هرگاه صفحه‌ای بر ارتفاع یک مخروط عمود گردد آن را به دو مخروط مشابه تبدیل می‌کند. بطوریکه نسبت حجم دو مخروط با نسبت توان سوم ارتفاعات دو مخروط برابر است.



$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h} \right)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{h}{h'} = \sqrt[3]{2}$$

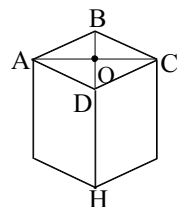
بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۹- هرگاه مکعبی در کره‌ای به شعاع R محاط شده باشد، قطر بزرگ مکعب برابر با قطر کره خواهد بود. اگر طول ضلع مکعب را a فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\sqrt{3}a = 2R \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}R \Rightarrow$$

$$\frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{8}{3\sqrt{3}}R^3} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۳۰- می‌دانیم در منشوری که محیط قاعده آن p ، مساحت قاعده S و ارتفاع آن h است، سطح کل برابر است با:

بنابراین: $DH \times (\text{محیط لوزی } ABCD) + (\text{مساحت لوزی } ABCD) \times 2 = \text{مساحت کل}$
اگر $AC = 8$ و $BD = 6$ اقطار لوزی باشند، طبق رابطه فیثاغورث در مثلث AOD داریم:

$$AD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$DH = 20, \text{ محیط لوزی} = 4 \times 5 = 20, \text{ مساحت لوزی} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24,$$

$$\text{مساحت کل منشور} = 2 \times 24 + 20 \times 20 = 448$$

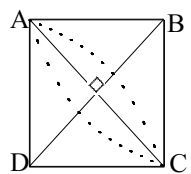
لذا گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۳۱- می‌دانیم حجم مخروطی با شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ است.

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \\ V_2 &= \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^2 h_2}{R_1^2 h_1} = \frac{(2R_1)^2 (4h_1)}{R_1^2 h_1} = 16$$

$$R_2 = 2R_1, h_2 = 4h_1$$

لذا گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۳۲- اگر مربع $ABCD$ را حول قطر BD دوران دهیم دو مخروط از قاعده بهم چسبیده بوجود می‌آید که با هم برابرند. قطر قاعده آنها برابر قطر مربع بوده و ارتفاع هر یک نصف قطر مربع است.

$$V_{\text{مربع است}} = 2 \left(\frac{1}{3}\pi R^2 h \right) = 2 \left(\frac{1}{3}\pi \left(\frac{AC}{2} \right)^2 \frac{BD}{2} \right)$$

$$V_{\text{کل}} = \frac{1}{12}\pi AC^3 = \frac{1}{12}\pi \times 1 = \frac{\pi}{12}$$

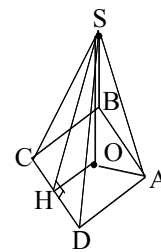
بنابراین گزینه ۱ پاسخ درست است.

$$a = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2}$$

۳۳- کره در مکعب محاط شده، پس طول ضلع مکعب برابر با قطر کره است:

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2} \right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$$

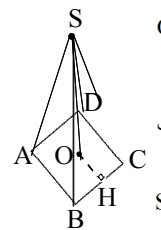
بنابراین گزینه ۳ پاسخ درست است.



$$\left. \begin{aligned} \text{سطح جانبی} &= 4 S_{\triangle SCD} = 4 \left(\frac{1}{2} CD \times SH \right) \\ SH &= \sqrt{SO^2 + OH^2} \\ OH &= \frac{AB}{2} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow SH = \sqrt{6^2 + 3^2} = 10$$

$$\text{سطح جانبی} = 2 \times 12 \times 10 = 240$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ درست است.

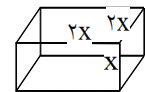


$$\text{SO ارتفاع هرم از مرکز مربع ABCD می‌گذرد پس: } OH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{رابطه فیثاغورث: } SH^2 = SO^2 + OH^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2 \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$S_{\text{جانبی}} = 4 S_{\triangle SBC} = 4 \left(\frac{1}{2} SH \cdot BC \right) = 4 \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} a \times a \right) = \sqrt{5} a^2$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.



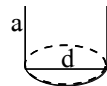
$$V = x(2x)(2x) = 4x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8}$$

$$\text{قطر مکعب مستطیل} = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{9x^2} = 3x = 3\sqrt[3]{8}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

-۳۷

$$\left. \begin{aligned} V = \text{استوانه} &= \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot a \\ V = a^3 & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\pi a d^2}{4} = a^3 \Rightarrow d^2 = \frac{4a^2}{\pi} \Rightarrow d = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}$$



بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} V = \text{حجم کره} &= \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{\pi}\right)^3 = \frac{4}{3\pi^2} \\ S = \text{مساحت کره} &= 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{4}{\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3\pi^2}}{\frac{4}{\pi}} = \frac{1}{3\pi}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

-۳۸

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

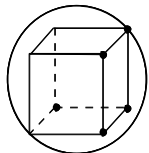
$$\frac{\text{حجم مکعب}}{\text{سطح کل}} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{حجم مکعب} = \frac{2}{3} \text{ سطح کل}$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

قطر مکعب محاط در کره با قطر کره برابر است.

$$\sqrt{3}a = 2R$$



$$(S \text{ مکعب}) = 6a^2$$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{6 \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2}{6\pi R^2} = \frac{1}{\pi}$$

$$(S' \text{ مکعب}) = 2\pi R^2$$

۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حجم هرم برابر است با: $V = \frac{1}{3} Sh$ که S (مساحت قاعده) نیز با توان دوم قطر قاعده متناسب است. بنابراین هرمی که حاصل ارتفاع ضربدر توان دوم قطر قاعده‌ی بزرگتری داشته باشد، حجم بیشتری دارد که با توجه به گزینه‌های داده شده، گزینه ۱ بیشترین حجم را دارا است.

$$V_1 = R^3 \quad V_2 = \pi R^3 \quad V_3 = \frac{1}{3} R^3 \quad V_4 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$6k^2 = 2(2a^2 + 2a^2 + 2a^2) \rightarrow 6k^2 = 12a^2 \rightarrow \frac{k}{a} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{k\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 2a^2 + 2a^2}} = \frac{k\sqrt{3}}{2a} = \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

۴۵- گزینهی ۴ صحیح است. قطر کره‌ی محیطی بر مکعب برابر قطر مکعب و قطر کره‌ی محاطی داخل مکعب برابر ضلع مکعب است پس:

$$\begin{cases} \text{قطر کره محیطی} = \sqrt{3}a \\ \text{قطر کره محاطی} = a \end{cases}$$

$$\frac{S_{\text{کره محیطی}}}{S_{\text{کره محاطی}}} = \frac{4\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 3$$

۴۶- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. قطر کره‌ی محیطی بر مکعب برابر قطر مکعب است.

$$2R = \sqrt{3}a \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{S_{\text{مساحت کره محیطی}}}{S_{\text{مساحت مکعب}}} = \frac{4\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}{6a^2} = \frac{\pi}{2}$$

۴۷- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم شعاع قاعده‌ی استوانه r و ارتفاع استوانه h باشد.

$$S = 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$\frac{S}{V} = 4 \Rightarrow 2\pi rh = 4\pi r^2 h \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

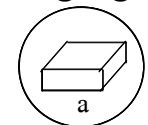
۴۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. $D = 2\sqrt{6} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}, V = a^3 = (2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$

۴۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{4} \times 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{4}{3}R = 1 \Rightarrow R = \frac{3}{4}$

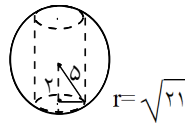
۵۰- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

قطر کره = قطر مکعب

$$a\sqrt{3} = 2R \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{S_{\text{سطح کره}}}{S_{\text{سطح مکعب}}} = \frac{4\pi R^2}{6a^2} = \frac{\pi}{2}$$



۵۱- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم استوانه}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(5)^3}{\pi(21) \times 4} = \frac{125}{63}$$

$$a = \frac{\text{قطر}}{\sqrt{3}} = \frac{K}{\sqrt{3}}$$

$$V = a^3 = \frac{K^3}{3\sqrt{3}}$$

۵۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

۵۳- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} V = \pi r^2 h \\ S = 2\pi rh \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V}{S} = \frac{r}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

۵۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه‌ی b و c مفروض‌اند. وقتی آن را حول b دوران می‌دهیم، ارتفاع b شعاع قاعده است و حجم جسم حادث از دوران برابر است با:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi c^2 b$$

و اگر حول c دوران دهیم، حجم برابر است با:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi b^2 c$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi c^2 b}{\frac{1}{3}\pi b^2 c} = \frac{c}{b}$$

در این مثال b و c یکی ۵ و یکی ۱۲ است پس جواب $\frac{5}{12}$ (یا $\frac{12}{5}$) می‌شود.

۵۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. قطر کره با قطر مکعب مستطیل برابر است.

$$20 = \sqrt{4^2 + 4^2 + a^2} \Rightarrow a = 368 \Rightarrow a = 4\sqrt{23}$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{4}{3}\pi(10)^3}{4 \times 4 \times 4\sqrt{23}} = \frac{125\pi}{6\sqrt{23}}$$