

در نامعادلات درجه ۱ همه را به یک طرف می‌بریم و ساده می‌کنیم - علامت ضرب x در بالا را پس از آن ضرب می‌کنیم - با علامت

نامعادله مقایسه می‌کنیم و طبق بالا عمل می‌کنیم. مثال:

$$\frac{2x-1}{x+3} \geq 1 \rightarrow \frac{2x-1}{x+3} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-1-x-3}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+3} \geq 0$$

$\rightarrow x=4$
 $\rightarrow x=-3$

در نامعادلات بجهت دست راست به این شکل عمل می‌کنیم:

$x < -3$ یا $x > 4$ ← خارج دوریه

سادگی نمی‌گیرد چون در خارج است

همه را به یک طرف برده و ساده می‌کنیم - در جدول تعیین علامت اولین علامت سمت چپ، نسبت بزرگترین توان صورت به مخرج را به دست می‌آید و به متغیر آن عدد منفی فرض می‌دهیم تا علامت مشخص شود - برای تعیین سایر علامت‌ها با توجه به نوع ریشه‌ها، ریشه‌های ساده و مکرر فرد علامت را عوض می‌کنند اما ریشه‌های مکرر زوج تغییری نمی‌دهند.

* انواع ریشه‌ها

ساده $x-3=0 \rightarrow x=3$ ساره $x^2-4=0 \rightarrow x=2$ یا $x=-2$

$(x-3)^2=0 \rightarrow x=3$ مکرر زوج که توان بالای ۱ را نیز هم است

$(x-3)^3=0 \rightarrow x=3$ مکرر فرد

مثال:

$$\frac{(x^3-1)^4 (x^2-4)}{(x^2+3x+2)^3 (x+1)} \geq 0$$

تعیین اولین علامت $\rightarrow \frac{x^3 \times x^2}{x^2 \times x^2} = x$ منفی x منفی

ساده	مکرر فرد	مکرر فرد	مکرر زوج	x
۲	۱	۱	۲	
+	-	-	+	-

علامت $\rightarrow x \geq 2$ یا $-1 < x < 1$

بدون ریشه $x=1$ یا $x=-2$

دو بار تکرار شده به عنوان ریشه

* اگر در معادله یا نامعادله‌ای، جواب کامل درگزینده‌ها بود ← از عدد گذاری استغناء کنید.

* اگر به عبارتی رسیدید که همواره مثبت (مثلاً $x+1$ یا $\Delta < 0$ یا $a > 0$) یا در مطلق و... و یا همواره منفی ($\Delta < 0$ و $a < 0$ و یا $-x-1$ و...) رسیدید می‌توانید آن‌ها را در نظر بگیرید و فقط اگر ریشه راستند ریشه‌ها را در آخر بررسی کنید.

@konkor_movafagh
09121009650

- * در عبارات درجه ۲
- (۱) $a > 0$ } همواره نامنفی $ax^2+bx+c \geq 0$
 - (۲) $a > 0$ } همواره مثبت $ax^2+bx+c > 0$
 - (۳) $a < 0$ } همواره نامنفی $ax^2+bx+c \leq 0$
 - (۴) $a < 0$ } همواره منفی $ax^2+bx+c < 0$

- دامنه و برد: به مولفه‌های اول هر دانه و مولفه‌های دوم برد می‌گویند.

- (۱) دامنه توابع هند جمله‌ای R است.
- (۲) رادیکال با فرجه فرد تأثیری در دامنه ندارد.
- (۳) در رادیکال با فرجه زوج باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر و مساوی صفر قرار دهیم و نامعادله را حل کنیم.
- (۴) در توابع کسری باید ریشه‌های منخرج را از دامنه اصلی حذف کنیم.
- (۵) قدر مطلق و جزء صحیح تأثیری در دامنه ندارد. (قدر مطلق و جزء صحیح دور کل تابع نه درون آن)
- (۶) سینوس و کسینوس تأثیری در دامنه ندارد.

$$y = \log_B^A \rightarrow D = \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ B \neq 1 \end{cases} \quad (۹)$$

$$F(x) = \text{tg} x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow D = R - (k\pi + \frac{\pi}{2}) \quad (۷)$$

$$F(x) = \text{ctg} x \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow D = R - k\pi \quad (۸)$$

- * در بدت آوردن دامنه نباید عبارت را ساده کنیم.
- * برای بدت آوردن دامنه تابع چند ضابطه‌ای باید بین شرایط اجتماع بگیریم پس محدودیت‌ها هر ضابطه را حل کنیم.
- * برای همگی به خاطر بسازید: در کلیه مباحث ریاضی هرگاه به قدر مطلق برخورد کردیم ریشه‌های داخل آن را بدت آورده و آن را نقیض علامت می‌کنیم.

(T) تجربی ۹۲ اگر $F(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، دامنه تابع $F(3-x)$ کدام است؟

$$F(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$

$\begin{matrix} \text{الف) } [0, 2] & \text{ب) } [0, 3] \\ \text{ج) } [1, 2] & \text{د) } [1, 3] \end{matrix}$

$\begin{matrix} a+b+c=0 \\ x_1=1 \quad x_2=3 \end{matrix}$

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0$$

$\rightarrow 1 \leq x \leq 3$

۱- اعمال جبری روی توابع: * به شرطی که دامنه‌ی در تابع اشتراک داشته باشند *

@konkor_movafagh
09121009650

$$(F+g)x = F(x) + g(x) \rightarrow D_{F+g} = D_F \cap D_g$$

$$(F-g)x = \text{" - " } \rightarrow D_{F-g} = \text{" - "}$$

$$(F \times g)x = \text{" \times " } \rightarrow (F \times g)x = \text{" - "}$$

$$\left(\frac{F}{g}\right)x = \frac{F(x)}{g(x)} \rightarrow D \frac{F}{g} = D_F \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$(F \circ g)x = F(g(x)) \rightarrow D_{F \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_F\}$$

- ترکیب دو تابع

$$(g \circ f)x = \text{برعکس بالایی‌ها}$$

(T) تجربی خارج از کشور ۹۰: اگر $F(x) = x^2 - x - 2$ و $F(g(x)) = x^2 + x - 2$ آنگاه $(F+g)x$ کدام است

$$F(g(x)) = g(x) - g(x) - 2 = x^2 + x - 2$$

✓ الف) $x^2 - 1$

$$\xrightarrow{\text{انگار د}} \left(g(x) - \frac{1}{f}\right)^2 - \frac{1}{f} = \left(x + \frac{1}{f}\right)^2 - \frac{1}{f} \rightarrow g(x) - \frac{1}{f} = f(x + \frac{1}{f})$$

ب) $x^2 + 1$

ج) $x^2 - 2x$

د) $x^2 + 2x$

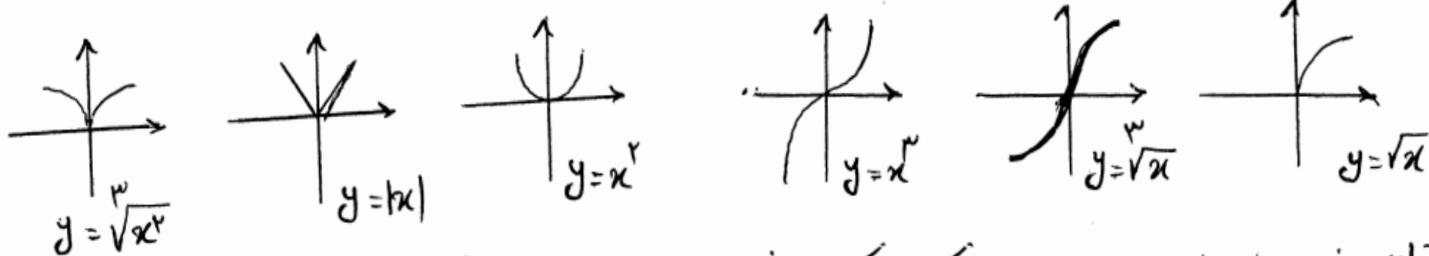
$$\rightarrow \begin{cases} g(x) = x + 1 \rightarrow (F+g)x = x^2 + 1 \\ g(x) = -x \rightarrow (F+g)x = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

- تابع یک به یک: تابعی که برای x فقط یک y وجود داشته باشد یعنی مولفه‌های دوم تکراری نباشند.

نه نمودار خطی هر خطی موازی محور OX ها نباید نمودار تابع ۱-۱ را در حد اکثر ۱ نقطه قطع کند.

برای بررسی ۱-۱ نبودن سه توابع برعکس قبل، این بار به y عدد ثابت x ما بررسی کرد.

* چند نمودار مهم *



* توابع چند جمله‌ای با درجه زوج همواره یک به یک نیستند و درجه فرد مشخص نیست *

* توابع همگرافیک همواره یک به یک هستند *
 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

* خط $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن تابع است *

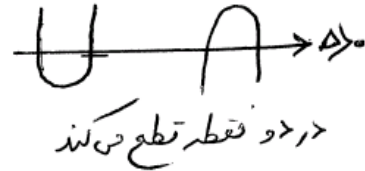
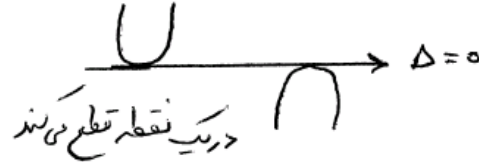
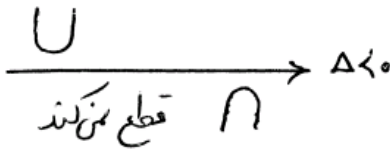
$a > 0$ (دکانه رو به بالا)

$a < 0$ (دکانه رو به پایین)

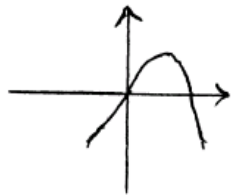
$$\min\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

$$\max\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

- چند حالت مختلف نمودار: (برخورد توابع با محور x ها، همان ریشه های معادله است):



مثال: معنی $y = ax^2 - (a+2)x + c$ از ناحیه دوم نمی گذرد، حدود a را تعیین کنید.
چون معادله ضرب ثابت (c) ندارد از مبدأ مشخص نمی گذرد و چون از ناحیه دوم نمی گذرد شکل آن اینگونه است



$$x^2 \text{ ضرب } < 0 \Rightarrow a < 0 \quad (1)$$

$$P = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \frac{0}{a} = 0 \rightarrow \text{گمی نمی کنند}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{c+2}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} a+2 < 0 \Rightarrow a < -2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \boxed{a < -2}$$

* هرگاه در تابی ماکسیموم یا مینیموم داده شود رخص کنند که مربوط به طول یا عرض است ← منظور عرض است

$$1) x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

سائل S و P : روابط مقابل را به خاطر بسپارید:

$$2) x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$$

$$3) \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

مثال) در معادله $x^2 + x - 1 = 0$ حاصل $5x_1^2 + 3x_2^2$ را بریت آورید $(x_2 > x_1)$

طبق معادله: $S = -1$

$P = -1$

$$D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{5}$$

$$\hookrightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow x_1 - x_2 = \boxed{-\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} 5x_1^2 + 3x_2^2 &= 4x_1^2 + x_1^2 + 4x_2^2 - x_2^2 \\ &= 4(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \\ &= 4(S^2 - 2P) + D \times S = \\ &= 4(1 + 2) - \sqrt{5}(-1) = \boxed{12 + \sqrt{5}} \end{aligned}$$

۳) تجربی ۹۰ خارج از کور: به ازای کدام مقدار m ریشه‌ها حقیقی معادله $m x^2 + 3x + x^2 = 2$ معلوم می‌گردند؟

$$\Rightarrow P = \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{m^2 - 2}{x} = 1 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \begin{cases} m = -1 & \checkmark \\ m = 2 & \times \end{cases}$$

* اگر در ریشه قرینه باشند $\leftarrow \frac{-b}{a} = 0 \leftarrow b = 0$ (باید و) مختلف علامه باشند.

* " " " " معکوس " " $\leftarrow \frac{c}{a} = 1 \leftarrow c = a$

* " " " " عکس و قرینه باشند $\leftarrow \frac{c}{a} = -1 \leftarrow c = -a$

* هرگاه در ریشه داده شود و خود معادله خواسته شود، S و P را بدست آورده و از معادله $x^2 - Sx + P = 0$ استفاده می‌کنیم.

* یکی از ریشه‌های معادله $a - \sqrt{b}$ باشد، ریشه دیگر $a + \sqrt{b}$ است و بالعکس.

- تشکیل معادله درجه دوم جدید: هرگاه یک معادله درجه ۲ داده شود و معادله درجه ۲ دیگری خواسته شود که ریشه‌ها هر دو بر حسب ریشه‌های معادله قدیم داده شده باشند، ریشه‌ها جدید را y و ریشه‌های قدیم را x می‌نامیم و y را بر حسب x می‌نویسیم x را بر حسب y مرتب کرده و در معادله قدیم برمی‌گردانیم.

مثال: (معادله درجه دوم بنویسید که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند)

جدید = y
قدیم = x

$$y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y} \rightarrow (\sqrt{y})^2 - 3\sqrt{y} - 2 = 0 \rightarrow y - 3\sqrt{y} - 2 = 0$$

$$\rightarrow y - 2 = 3\sqrt{y}$$

توان ۲

$$\rightarrow y^2 - 4y + 4 = 9y$$

$$\rightarrow y^2 - 13y + 4 = 0$$

- تابع قدر مطلق:

* این تابع خطی نیست، باید که کار اصلی قدر مطلق چیست؟ قدر مطلق درون خود را بررسی می‌کنند. اگر مثبت باشد به آن دست نمی‌زنند و اگر منفی باشد آن را در یک منفی ضرب می‌کنند. به طوری که در برخورد با قدر مطلق باید داخل آن را دقیق علامت کنیم تا قدر مطلق برآید و مثبت شود. برای این کار ریشه داخل آن را بدست می‌آوریم.

قوانین قدر مطلق:

- | | |
|---|---|
| <p>۱) $x \geq 0$</p> <p>۲) $xy = x y$</p> <p>۳) $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y } \quad y \neq 0$</p> <p>۴) $-x = x$</p> <p>* ۵) $\sqrt[n]{x^n} = x$</p> <p>۶) $x = a \rightarrow x = \pm a$</p> | <p>۷) $x < a \rightarrow -a < x < a$</p> <p>۸) $x > a \rightarrow x > a \text{ یا } x < -a$</p> <p>۹) $f(x) = g(x) \rightarrow f(x) = \pm g(x)$</p> <p>* ۱۰) $x+y \leq x + y$ اصل نامی منطقی</p> <p>اگر x و y هم علامت باشند: حالت تری</p> <p>" " مختلف علامه " : حالت کوچکتر</p> |
|---|---|

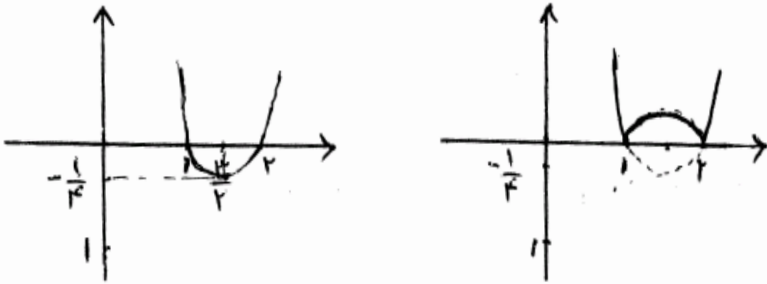
* در سوالات این دو طرف با معادله قدر مطلق بود می توانیم دو طرف را به توان n برسانیم *

- نمودار $|f(x)| = y$: نمودار را بدین قدر مطلق رسم می کنیم و پس قسمت ها را بین محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم و قسمت های بالایی را حذف می کنیم.

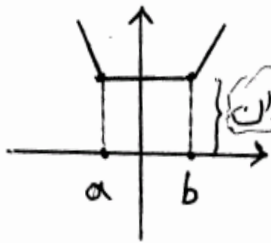
$y = |x^2 - 3x + 2|$ $a > 0 \rightarrow \min(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$

مثال:

x	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	$-\frac{1}{4}$	0



- نمودار $y = |x-a| + |x-b|$: ریشه های داخل قدر مطلق را در دستگاه مشخص می کنیم و هر کدام را به اندازه اختلاف دوری به بالا می بردیم (مقدارهای)

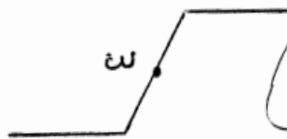


اختلاف بین ریشه ها = کف مقداری

کف مقداری $y \geq$ برد

جمع ریشه ها $\Rightarrow x = \frac{\dots}{2}$ محور تقارن

- نمودار $y = |x-a| - |x-b|$: ریشه های داخل قدر مطلق را بدست آورده، هر کدام را در محل تابع برمی گردانیم تا y بدست آید و به این ترتیب



در نقطه ای جادوی شود که شکل از دور آن را رسم می شود.

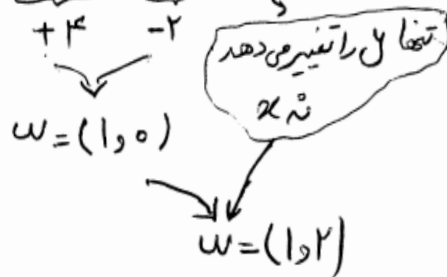
محور تقارن $w = (\frac{\text{جمع ریشه ها}}{2}, 0)$

اختلاف ریشه ها $\ll y \ll$ قرینه اختلاف ریشه ها = برد

مثال: برد و مرکز تقارن تابع $y = |x-4| - |x+2| + 2$ را تعیین کنید.

$-4 \leq y \leq 6$

\Downarrow
 $-4 \leq y \leq 8$



- تابع جزء صحیح :

$x \in \mathbb{R} \rightarrow x = n + p \quad n \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq p < 1 \rightarrow [x] = n$

- برای رسم توابعی که درون آن‌ها جزء صحیح به کار رفته باید فاصله داده شده را بی‌عیباً برداریم و مقدار جزء صحیح را بدست آوریم.
 پس نمودار بدست آمده را در فاصله مشخص رسم کردیم.

سوال: نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{[x]+1}$ در فاصله $[-2, 1]$ از چه اجزایی تشکیل شده است؟

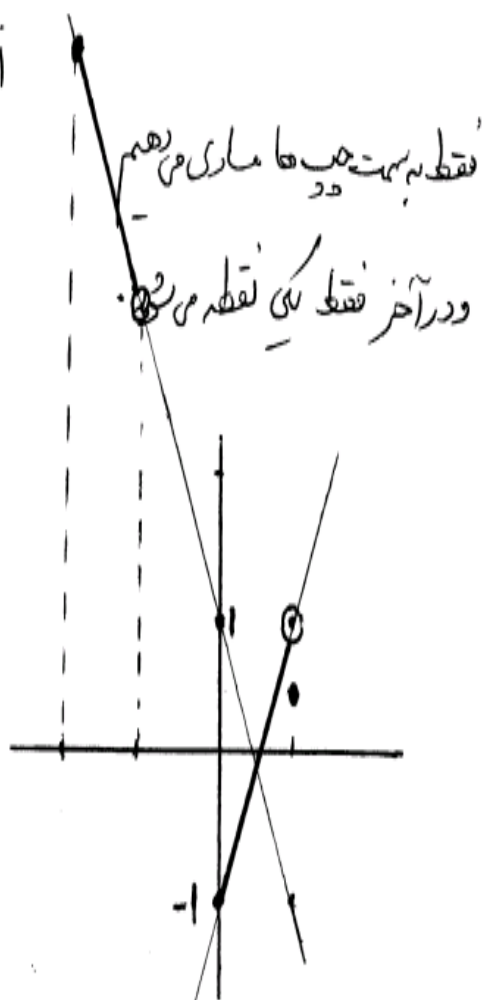
$-2 < x < -1 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = \frac{2x-1}{-2+1} = -2x+1$ $\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline y & -1 \end{array}$

$-1 < x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = \frac{2x-1}{-1+1}$ غ X

$0 < x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = \frac{2x-1}{0+1} = 2x-1$ $\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline y & 1 \end{array}$

$x=1 \xrightarrow{\text{نقطه}} y = \frac{1}{2}$ $(1, \frac{1}{2})$

رقت‌های آبی نمودار اصلی است



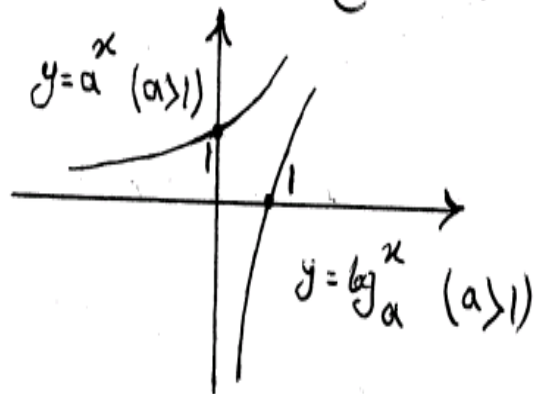
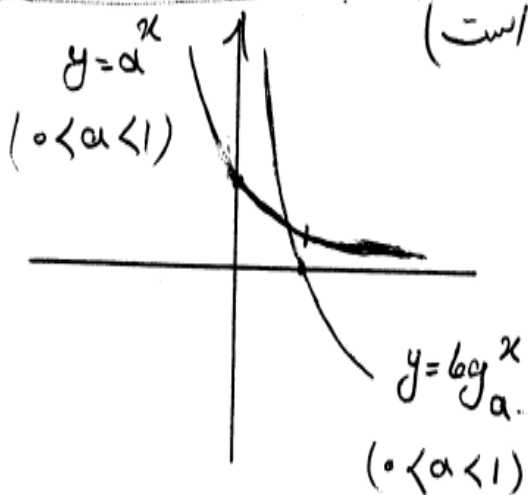
* در حالت $[Kx]$ باید فاصله را ستاب با معکوس K جدا کرد.

سوال: $y = 2[\frac{x}{2}] + 1$ را در فاصله $x \in [-2, 4]$ ؟

$K = \frac{1}{2} \rightarrow$ $2 \leq x < 4$
 $2 \leq \frac{x}{2} < 4 \rightarrow -2 \leq x < 8$
 $0 \leq x < 2$ $4 \leq x < 6$

$x=4$

قوانین توابع نمایی و لگاریتمی: (تابع لگاریتم معکوس نمایی است)



اگر پایه لگاریتم عدد نپیر (e ≈ ۲,۷۱۸) باشد آن را لگاریتم نپیری می‌گویند $[\log_e^a = \ln a]$

۱) $\log_a^1 = 0$

۲) $\log_a^a = 1$

۳) $\log_c^a (a \times b) = \log_c^a a + \log_c^a b$ قانون زیاده

۴) $\log_c^a \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c^a a - \log_c^a b$ قانون زیاده

۵) $\log_b^a a^n = n \log_b^a a \rightarrow \log_b^a a^n = \frac{n}{m} \log_b^a a$

۶) $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ (برای تغییر مبنا) $\rightarrow \log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$

۷) $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

۸) $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a} \rightarrow a^{\log_a^b} = b$

۹) $\log_c^a = \log_c^b \iff a = b$

قوانین لگاریتم:

۱۰) $a < b \rightarrow \begin{cases} \log_c^a < \log_c^b & c > 1 \\ \log_c^a > \log_c^b & 0 < c < 1 \end{cases}$

۱۱) $\log_c^a < \log_c^b \rightarrow \begin{cases} a > b & 0 < c < 1 \\ a < b & c > 1 \end{cases}$

۱۲) \log_B^A خاصه $\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ B \neq 1 \end{cases}$ هر سه باید همزمان برقرار باشد

اگر a و b بر وجهی معادله $x^2 - 10x + 1 = 0$ باشند حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ چیست؟

✓ (الف) ۲ - (ب) ۱ - (ج) صفر - (د) ۱

$$\log(a \cdot b) - \log(a+b) = \log \frac{a \cdot b}{a+b} = \log \frac{P}{S} = \log \frac{1}{10} = \log \frac{1}{10} = -1$$

- برای حل معادلات نامی باید پایه‌ها را یکسان کرد.

مثال: معادله $4^x + 7^x + 6^x = 0$

$\frac{x}{2} = t \rightarrow t^2 + 7t + 6 = 0$

$$\begin{cases} t = -1 \rightarrow \frac{x}{2} = -1 \rightarrow x = -2 \\ t = -6 \rightarrow \frac{x}{2} = -6 \rightarrow x = -12 \end{cases}$$

معادله جواب ندارد

* بعد از حل معادله باید جوابها را در معادله اولیه بگزارد و شرایط دامنه را بررسی کرد.

* (۲) تجربی ۸۹: اگر $\log_3^x + \log_3^y = 2$ و $x^2 + y^2 = 44$ $\rightarrow \log_4^{x+y} = ?$

✓ (الف) ۱.۵ (ج) ۲
 (ب) ۲.۵ (د) ۳

$$\log_3^{xy} = 2 \rightarrow 3^2 = 9 = xy$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 44 + 2 \times 9 = 62$$

$$\rightarrow x+y = \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \sqrt{62} \rightarrow \log_4^{x+y} = \log_4^{\sqrt{62}} = \log_{2^2}^{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}$$

برای حل نامعادلات لگاریتمی: مانند معادله آن را ساخت و گوییم تا به کمی از این حالات برسیم:

$$\log_c^a < \log_c^b \Rightarrow \begin{cases} a < b & c > 1 \\ a > b & 0 < c < 1 \end{cases}$$

$$\log_c^a < b \Rightarrow \begin{cases} a < c^b & c > 1 \\ a > c^b & 0 < c < 1 \end{cases}$$

* بعد از حل نامعادله باید رابطه عبارات لگاریتمی را بدست آورد و با جواب نامعادله اشتراک گرفت.

مثال: اگر $0 < x < 1$ و $2^x = 3$ و $2^x = 3$ و $2^x = 3$ کوچکترین عدد x را بیابید رقم اعشار حساب کنید.

$$2^{-x} < 10^{-2} \rightarrow \log_2^{-x} < \log_2 10^{-2} \rightarrow -x \log_2 2 < -2 \log_2 10 \Rightarrow x > \frac{2 \log_2 10}{\log_2 2} = \frac{2 \times 3.32}{1} = 6.64 \rightarrow x > 19.93$$

$$P(t) = P(t_0) \times e^{kt}$$

- تابع رشد و زوال: فرم کلی آن اینگونه است:

$k > 0$ ضرب رشد
 $k < 0$ ضرب زوال

$P(t)$ مقدار ثانویه
 $P(t_0)$ " اولیه

(۲) تجربی ۹۲: در شروع یک نوع گسب ۱۴۰۰ باکتری موجود است. تعداد باکتریها پس از t دقیقه به صورت $F(t) = Ae^{kt}$ است. پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است!

$$7000 = 1400 \times e^{0.4t} \rightarrow 5 = e^{0.4t} \rightarrow \log_5 = 0.4t \rightarrow t = 24$$

(الف) ۲۱
 (ب) ۲۸
 (ج) ۳۵
 (د) ۴۲