ترکیبیات واحتمال

ترکیبیات

اصل شمارش: منظور از اصل شمارش، شمردنِ تعدادِ حالاتِ قرار گیری اشیا در کنار هم است. برای این کار روش‌هایی وجود دارد که در ادامه به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

اصل ضرب: اگر عمل A به m طریق و عمل B به طور مستقل از عمل اول، به n طریق قابل انجام باشد، آنگاه عمل A و B به $m \times n$ طریق قابل انجام خواهد بود.

مثال: با داشتن ۳ پیراهن و ۲ شلوار با رنگ‌های مختلف، طبق اصل ضرب به $۶ = ۲ \times ۳$ طریق مختلف می‌توان لباس پوشید.

اصل جمع: اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق قابل انجام باشد، آنگاه عمل A یا B به $m+n$ طریق قابل انجام خواهد بود.

استاد!! از کجا میشه فهمید که یه تست با اصل ضرب حل میشه یا اصل جمع؟

معلم: سوال خیلی خوبی پرسیدی، ببین اگر در یک تست بین دو یا چند عمل کلمه **و** به کار رفت، تعداد حالات انجام آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم اما اگر کلمه **یا** به کار رفت تعداد حالات انجام آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

تست۱: چند عدد سه رقمی با ارقام فرد وجود دارد که بر عدد ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه (۳)

ارقام عدد مورد نظر باید فرد باشند، بنابراین فقط می‌توانیم از ارقام $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ استفاده کنیم. در ضمن این عدد باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد پس فقط عدد ۵ می‌تواند در جایگاه یکان قرار گیرد و برای جایگاه‌های دیگر تکرار ارقام مجاز است. پس در جایگاه دهگان و صدگان هر ۵ رقم می‌توانند قرار گیرند.

$$\underbrace{۱}_{\text{فقط عدد ۵}} \times ۵ \times ۵ \Rightarrow ۵ \times ۵ \times ۱ = ۲۵$$

چرا تکرار ارقام رو مجاز فرض کردیم؟

معلم: وقتی صورت یک سوال شرط نداشته باشد تکرار ارقام را مجاز فرض می‌کنیم.

تست۲: چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

پاسخ: گزینه (۳)

در این تست باید از ارقام {۱,۳,۵,۷,۹} استفاده کنیم و تکرار ارقام مجاز نیست زیرا می‌خواهیم عدد چهار رقمی با ارقام متمایز بسازیم. چون می‌خواهیم عدد مورد نظر از ۳۰۰۰ بزرگتر باشد، پس در جایگاه هزارگان فقط می‌توانیم از ارقام ۳، ۵، ۷ و ۹ استفاده کنیم.

۴ × ۴ × ۳ × ۲ = ۹۶

ارقام ۳، ۵، ۷ و ۹

یکی از سه رقم باقی مانده از جایگاه هزارگان و عدد ۱

تست ۳: با ارقام {۰,۱,۲,۳,۴} چند عدد زوج سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۰ ۳) ۳۸ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه (۲)

در این سوال باید هم از اصل ضرب استفاده کنیم و هم از اصل جمع:

حالت اول: رقم صفر در جایگاه یکان باشد؛

۴ × ۳ × ۱ = ۱۲

فقط رقم صفر

حالت دوم: رقم صفر در جایگاهی غیر از یکان باشد. در این صورت صفر فقط می‌تواند در جایگاه دهگان قرار گیرد؛

۳ × ۱ × ۲ = ۶

ارقام ۲ یا ۴

فقط صفر

چرا رقم صفر نمی‌تونه در جایگاه صدگان قرار بگیره؟

معلم: با این همه اطلاعات لابد می‌خوای کنکور هم بدی!! ☺ اگر صفر در جایگاه صدگان قرار بگیره، عددمون تبدیل میشه به یک عدد دو رقمی که مدنظر طراح سوال نیست.

حالت سوم: کلاً رقم صفر در عدد نباشد.

۳ × ۲ × ۲ = ۱۲

ارقام ۲ یا ۴

چون حالت اول **یا** حالت دوم **یا** حالت سوم هر کدام به تنهایی ما را به هدفمان می‌رساند، پس باید از اصل جمع استفاده کنیم:

۱۲ + ۶ + ۱۲ = ۳۰

جایگشت

جایگشت: منظور از جایگشت نحوه قرارگیری اشیا در کنار هم است.

فاکتوریل: حاصلضرب اعداد ۱ تا n را، $n!$ (n فاکتوریل) گویند.

$$\forall n \in W \; ; \; n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \ldots \times ۱$$

ویژگی‌های فاکتوریل:

۱) $۰! = ۱$ (قرارداد)

۲) $۱! = ۱$

۳) $n! = n(n-۱)(n-۲)!$

جایگشت n شی متمایز: به نحوه قرارگیری n شی متمایز در کنار یکدیگر به طوری که ترتیب قرارگیری آن‌ها مهم باشد جایگشت گویند.

جایگشت n شی متمایز برابر $n!$ است: $P_n = n!$

جایگشت یکی درمیان:

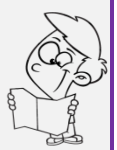
نوع اول: اعضای دو گروه برابر نباشند $m! \times n!$

نوع دوم: اعضای دو گروه برابر باشند $۲ \times n! \times n!$

جایگشت n شی غیر متمایز (جایگشت با تکرار): اگر در میان n شی موجود، $n_۱$ تای آن شبیه به هم، $n_۲$ تای آن شبیه به هم و ... باشند، آنگاه تعداد جایگشت‌های اشیا موجود برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱! \; n_۲! \; \ldots n_k!}$$

روش بسته بندی: اگر بخواهیم چند شی خاص همواره کنار هم قرار بگیرند، آن اشیا را درون یک بسته قرار می‌دهیم، سپس جایگشت این بسته را با اشیای دیگر حساب می‌کنیم.



استاد! من دیدم توی خیلی از سوال‌ها مثلاً میگن فلان اشیا خاص کنار هم قرار نگیرند توی این مدل سوال‌ها باید چیکار کنیم؟

معلم: این شد یه سوال خوب! خب ما میایم اول تعداد جایگشت‌هایی رو که آن اشیا خاص کنار هم هستند رو حساب می‌کنیم سپس از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم.

تست۴: چند عدد ۵ رقمی فرد با ارقام ۴,۴,۰,۵,۵ می‌توان نوشت؟

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۳۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه (۱)

ابتدا باید ارقام داده شده را متمایز در نظر بگیریم، یعنی باید با ۵ رقم متفاوتی که در اختیار داریم یک عدد ۵ رقمی فرد بسازیم و در انتها جواب به دست آمده را به خاطر وجود ارقام تکراری ۴ و ۵ تقسیم بر $۲!۲!$ کنیم:

$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ \Rightarrow$

ارقام ۴ یا ۴ یا یکی از ۵ های باقی مانده

ارقام ۵ یا ۵

$\frac{۳\times۲\times۳!}{۲!۲!}=۹$

تست۵: حروف کلمه LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی۸۴)

۱) ۵۴۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) ۷۲۰

پاسخ: گزینه (۴)

طبق روش بسته بندی، حروفی که قرار است کنار هم قرار گیرند را درون یک بسته قرار می‌دهیم. دو حرف A را درون یک بسته و دو حرف G را درون بسته‌ای دیگر قرار می‌دهیم، این دو بسته به همراه حروف باقی مانده تشکیل ۶ شی متمایز می‌دهند:

L R N E AA GG $\Rightarrow$ $۶!=۷۲۰$

تست۶: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند کدام است؟

(سراسری تجربی۹۲ – خارج از کشور)

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینه (۲)

معلم: رادین! نکته این تست دقیقاً همون چیزیه که توی درسنامه قبل پرسیدی. پس حلش کن ببینم چیکار می‌کنی.

بله استاد! چون سوال گفته S ها کنار هم نباشن پس ما اول باید جایگشت‌هایی رو که Sها کنار هم هستند رو حساب کنیم و از تعداد کل جایگشت‌ها کم کنیم. البته استاد حواسم هست که وقتی می‌خوام تعداد کل جایگشت‌ها رو حساب کنم از درس «جایگشت با تکرار» باید استفاده کنم:

جایگشت‌هایی که Sها کنار هم هستند. $\Rightarrow$ SS Y T E M $\Rightarrow$ $۵!=۱۲۰$

حالا می‌خوام کل جایگشت‌ها رو حساب کنم پس اول همه رو متمایز فرض می‌کنم و در نهایت بر !۲ (به خاطر S های تکراری) تقسیم می‌کنم که میشه: $\frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$ و جواب این سوال به صورت زیر به دست میاد:

$۳۶۰-۱۲۰=۲۴۰$

معلم: آفرین رادین! عالی بود.

تست۷: با جا به جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد ۶ رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟ (سراسری تجربی۹۲ – خارج از کشور)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه (۲)

چون تعداد ارقام ۲ و سایر ارقام غیر از ۲ با هم برابر هستند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

۲		۲		۲		$\Rightarrow$	$۳\times۲\times۱=۶$
	۲		۲		۲	$\Rightarrow$	$۳\times۲\times۱=۶$

$\Rightarrow \quad ۲\times۳!=۱۲$

استاد من گیج شدم! مگه نگفتید وقتی اعضای دو گروه برابر باشند تعداد حالت‌های یکی در میان چیدن اونا از رابطه $۲\times n!\times n!$ به دست میاد؛ پس چرا اینجا $۲\times۳!\times۳!$ نشد؟

معلم: رادین جان! در این قسمت اعضای دو گروه برابر هستند اما یکی از گروه‌ها فقط شامل ۲ است و با جا به جایی این ارقام حالت جدیدی به وجود نمی‌آید. پس نیاز به !۳ جایگشت بین این ۲ ها نداریم.

انتخاب r شی از میان n شی

ترتیب: تعداد حالات انتخاب r شی از میان n شی، هرگاه ترتیب انتخاب r شی مهم باشد:

$$P(n,r)=(n)_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثلاً اگر بخواهیم از بین مجموعه‌ای از کتاب‌ها ۵ کتاب انتخاب کنیم و بعد از انتخاب، آن‌ها را در قفسه یک کتابخانه بچینیم باید از ترتیب استفاده کنیم. زیرا ترتیب چیدن کتاب‌ها در قفسه یک کتابخانه مهم خواهد بود.

ترکیب: تعداد حالات انتخاب r شی از میان n شی، هرگاه ترتیب انتخاب r شی مهم نباشند.

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثلاً اگر بخواهیم از بین مجموعه‌ای از کتاب‌ها فقط ۵ کتاب انتخاب کنیم باید از ترکیب استفاده نماییم، زیرا ترتیب انتخاب این کتاب‌ها برایمان اهمیت ندارد.

رابطه بین ترتیب و ترکیب:

$$P(n,r)=C(n,r)\times r!$$

ویژگی‌های مهم ترکیب:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+۱}=\binom{n+۱}{k+۱}$$

$$\binom{a+b}{a}=\binom{a+b}{b}$$

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$$

$$\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$$

$$\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$$

$$\binom{n}{۲}=\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

زیرمجموعه: تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با: ۲^n

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

$$\text{تعداد کل زیرمجموعه‌ها} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } n \text{ عضوی}} = 2^n$$

زیرمجموعه‌های محض: تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه به غیر از خود مجموعه را زیرمجموعه‌های محض گویند.

تست۸: از هر یک از مدارس E, D, C, B, A چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند، به چند طریق می‌توان ۳سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟ (سراسری تجربی۹۲)

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

پاسخ: گزینه (۴)

می‌خواهیم ۳ دانش‌آموز انتخاب کنیم به طوری که هر کدام از یک مدرسه مختلف باشند. بنابراین ابتدا از بین ۵ مدرسه موجود باید ۳ مدرسه انتخاب کنیم یعنی $\binom{5}{3}$

حالا از هر مدرسه که ۴ دانش‌آموز دارد باید ۱ دانش‌آموز انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

تست۹: از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان سه نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد، به طوری که لااقل دو نفر از آن‌ها دانش‌آموز تجربی باشند؟ (سراسری تجربی۹۰ – خارج از کشور)

۱) ۳۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه (۳)

وقتی در سوال گفته شده از بین ۳ نفر حداقل ۲ نفر دانش‌آموز تجربی باشند یعنی:

(هر ۳ نفر تجربی) **یا** (۱ نفر ریاضی **و** ۲ نفر تجربی)

$$\binom{5}{2}\binom{3}{1} + \binom{5}{3} = 40$$

تست۱۰: با ارقام ۱,۲,۳,...,۹ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت به طوری که درست دو رقم آن زوج باشد؟ (بدون تکرار ارقام) (سراسری ریاضی۹۴)

۱) ۶۴۰۰ ۲) ۷۲۰۰ ۳) ۸۴۰۰ ۴) ۹۶۰۰

پاسخ: گزینه (۲)

از بین ۵ جایگاه موجود باید دو جایگاه را برای اعداد زوج انتخاب کنیم که به $\binom{5}{2}$ طریق حالت مختلف امکان پذیر است. در این دو جایگاه ارقام ۲,۴,۶,۸ می‌توانند قرار گیرند و چون تکرار ارقام مجاز نیست برای یکی از جایگاه‌ها ۴ رقم و برای جایگاه دیگر ۳ رقم باقی می‌ماند.

اما برای ۳ جایگاهی که باید اعداد فرد در آن‌ها قرار گیرند ارقام ۱,۳,۵,۷,۹ را داریم که برای یکی از جایگاه‌ها ۵ رقم، برای جایگاه دوم ۴ رقم و برای جایگاه آخر ۳ رقم در دسترس خواهد بود، بنابراین داریم:

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ جایگاه برای ارقام زوج}} \times \underbrace{(۴\times ۳)}_{\text{پر کردن ۲ جایگاه با ارقام زوج}} \times \underbrace{(۵\times ۴\times ۳)}_{\text{پر کردن ۳ جایگاه دیگر با ارقام فرد}} = ۷۲۰۰$$

تست ۱۱: اگر در یک سالن همایش دو ردیف صندلی و در هر ردیف ۴ صندلی وجود داشته باشد، به چند طریق ۳ دانش‌آموز سال دهم و ۲ دانش‌آموز سال یازدهم می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند به طوری که دانش‌آموزان سال یازدهم حتماً در ردیف دوم باشند؟

۱) ۱۴۴۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۱۷۲۰ ۴) ۳۸۰

پاسخ: گزینه (۱)

از ردیف دوم که شامل ۴ صندلی است می‌بایست ۲ صندلی انتخاب کنیم که به $\binom{۴}{۲}$ حالت امکان پذیر است و این صندلی‌ها را به ۲ دانش‌آموز سال یازدهم به $!۲$ حالت اختصاص دهیم چون برای دانش‌آموزان سال دهم هیچ شرطی نداریم، می‌توانیم تمام صندلی‌های باقی مانده را به آن‌ها اختصاص دهیم. بنابراین از ۶ صندلی باقی مانده به $\binom{۶}{۳}$ حالت، ۳ صندلی را انتخاب می‌کنیم و به $!۳$ حالت به دانش‌آموزان سال دهمی اختصاص می‌دهیم.

$$\binom{۴}{۲}\times ۲!\times \binom{۶}{۳}\times ۳! = ۱۴۴۰$$

استاد! مگه ما بعد از اینکه ۲ صندلی را از بین ۴ صندلی برای پایه یازدهم انتخاب می‌کنیم نباید به ترتیب به دو دانش آموز یازدهمی اختصاص بدهیم؛ این مگه نشد مثل سوالی که بعد از انتخاب کتاب می‌خواستیم به ترتیب توی قفسه کتابخونه بچینیم. خب! پس اینجا هم ترتیب برامون مهمه دیگه، سوال من اینه که میشه از روش ترتیب حلش کرد؟

معلم: آفرین رادین جان! تشخیصت فوق‌العاده بود. بله کاملاً درست میگی، چون بعد از انتخاب باید این جایگاه‌ها رو به ترتیب بین دانش‌آموزان پخش کنیم میشه به صورت زیر هم حلش کرد:

$$P(۴,۲)\times P(۶,۳)=\frac{۴!}{۲!}\times\frac{۶!}{۳!}=۱۴۴۰$$

تست ۱۲: مجموعه $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\},c\}$ شامل چند زیرمجموعه ۳ عضوی شامل عضو a و فاقد عضو b است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه (۴)

در زیرمجموعه ما که باید شامل سه عضو باشد حتما عضو a حضور دارد پس ما باید دنبال ۲ عضو باقی مانده بگردیم و چون سوال خواسته زیرمجموعه عضو b را شامل نشود باید ۲ عضو باقی مانده را از مجموعه $\{\{a\},\{a,b\},c\}$ انتخاب کنیم:

$$\binom{۳}{۲}=۳$$