مشت نمونه‌ی خروار

ریاضیات پایه

«تصاعد»

آموزش به هم‌راه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

احسان موسوی

سجاد ثمودی

تهران

انتشارات علمی فار

راه‌نمای کتاب

سلام! ریاضیات پایه در کنکور خیلی مهم است! خیلی! چون حدود بیست درصد تست‌ها از ریاضیات پایه است؟ نچ! چون یادگیری این مباحث نسبت به هندسه و مباحث ریاضیات پیش‌دانشگاهی بسیار ساده‌تر است. پس حیف است که وقتی کاری این‌قد ساده است، شما از کنارش به همین سادگی بگذرید.

ما در این کتاب **۶ فصل** داریم:

محاسبات جبری و معادلات

تابع

مثلثات

تابع نمایی و لگاریتم

دنباله و تصاعد

آمار و مدل‌سازی

هر فصل به دو یا چند بخش کوچک‌تر تقسیم شده‌است. سعی کرده‌ایم که هر بخش، استقلال معنایی داشته باشد و بتوانید آن را یک‌ضرب بخوانید. تست‌های این کتاب یا تألیفی است، که سعی شده در راستای کنکور باشد و خیلی سلیقه‌مان را درگیرش نکنیم؛ یا تست‌های سراسری و آزاد داخل یا خارج از کشور است. بدون اغراق می‌توانیم بگوییم که همه‌ی تست‌های کنکور در هفت سال اخیر را در این کتاب می‌توانید ببینید. پس با زدن این تست‌ها، می‌توانید امیدوار باشید که آن‌قدر نمونه‌های مختلف دیده‌اید که سر جلسه‌ی کنکور هم از پس حل تست‌های ریاضیات پایه برمی‌آیید.

روش خواندن کتاب چه‌طوری است؟

شما ابتدا شروع به خواندن پلکان آموزش می‌کنید. متن درس را دقیق می‌خوانید. مثال بعد از مبحث آموزش را می‌بینید. بعد می‌روید سراغ کادر تست‌هایی که در ادامه‌اش آمده است. تست‌ها را بهتر است یکی‌یکی حل کنید و پاسخ‌ش را ببینید. در این مرحله نیازی نیست زمان بگیرید. مهم این است که پله‌پله که تست‌های سخت‌تر می‌شوند، توانایی خودتان را در حل مسئله بالا ببرید.

بعد از این مرحله، در آخر هر فصل، پلکان آزمون وجود دارد. این‌جا باید خود را محک بزنید. هر فصل حداقل یک آزمون «ساده و متوسط» و حداقل یک آزمون «استاندارد» دارد. البته بعضی فصل‌ها چهار تا آزمون هم دارند. بستگی به اهمیت فصل دارد. زمان بگیرید و با آزمون «ساده و متوسط» شروع کنید. بعد به سراغ آزمون‌های «استاندارد» بروید. بعد هم با خیال راحت بروید سر جلسه‌ی کنکور!

در آخر هم بگوییم که این فصل نمونه‌ی کتاب را که خواندید، لطف می‌کنید اگر برای ما نظرتان را بفرستید:

Email: phare.math@gmail.com

فهرست:

بخش ۱: دنباله و تصاعد ۲

بخش ۲: مجموع جمله‌های دنباله‌ها ۱۷

پلکان آزمون ۲۸

فصل ۱ تصاعد

شناسنامه فصل

این فصل را به دو بخش تقسیم کرده‌ایم. بخش اول در مورد مفهوم دنباله، تصاعد حسابی و تصاعد هندسی بحث می‌کنیم. در کتاب درسی ریاضیات سال دوم این مباحث آمده است. بخش دوم در مورد مجموع جملات تصاعدهاست. این بحث برای رشته‌ی ریاضی در کتاب حسابان و برای رشته‌ی تجربی در کتاب پیش‌دانشگاهی آمده است. ما برای انسجام مطلب، کل این مباحث را در فصل جمع‌وجور کرده‌ایم. این فصل، به‌واقع مبحث پیچیده‌ای ندارد. پس با خیال راحت پیش بروید! یادتان هم باشد که حتماً هر سال حداقل یک تست در کنکور از این فصل می‌آید.

	تألیفی	سراسری	آزاد
تعداد تست‌ها	۸۲	۲۶	۲۲

فهرست

پلکان آموزش ۲

پاسخ پلکان آموزش ۱۰

بخش ۱ دنباله و تصاعد

پلکان آموزش

۱ـ مفهوم دنباله

هر تعدادی از اعداد را که پشت سر هم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد می‌نامیم. به هر عدد که در یک دنباله قرار گرفته است، یک جمله‌ی آن دنباله گفته می‌شود. جمله‌ی n اُم دنباله را که n یک عدد طبیعی دل‌خواه است، **جمله‌ی عمومی** دنباله می‌نامند. جمله‌ی n اُم یک دنباله را معمولاً با a_n یا b_n یا ... و خود دنباله را با $\{a_n\}$ یا $\{b_n\}$ یا ... نمایش می‌دهند. برای مثال دنباله‌ی اعداد طبیعی زوج به صورت روبه‌رو است:

$$\underbrace{۲,۴,۶,\dots,۲n}_{\text{جمله‌ی عمومی: } ۲n},\dots$$

مثال ۱ **جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. هر کدام از دنباله‌ها را با چند جمله‌ی ابتدایی‌اش نشان دهید.**

$$a_n = ۲n^۲ - ۱ \qquad b_n = \frac{۱}{n+۱} \qquad c_n = \sin\frac{n\pi}{۲}$$

خیلی ساده است دیگر! در هر حالت مقدار n را برابر ۱، ۲، ۳ و ... قرار می‌هیم تا جمله‌های دنباله‌ها به‌دست بیایند:

$$a_n = ۲n^۲ - ۱ \Rightarrow \begin{cases} n=۱ \Rightarrow a_۱ = ۱ \\ n=۲ \Rightarrow a_۲ = ۷ \\ n=۳ \Rightarrow a_۳ = ۱۷ \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \{a_n\}: ۱,۷,۱۷,\dots$$

جمله‌های دنباله‌ی a_n در حال زیاد شدن هستند. به این دنباله‌ها، دنباله‌های **صعودی** می‌گوییم.

$$b_n = \frac{۱}{n+۱} \Rightarrow \begin{cases} n=۱ \Rightarrow a_۱ = \frac{۱}{۲} \\ n=۲ \Rightarrow a_۲ = \frac{۱}{۳} \\ n=۳ \Rightarrow a_۳ = \frac{۱}{۴} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \{b_n\}: \frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\dots$$

جمله‌های دنباله‌ی b_n در حال کم‌شدن هستند. به این دنباله‌ها، دنباله‌های **نزولی** می‌گوییم.

$$c_n = \sin\frac{n\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} n=۱ \Rightarrow a_۱ = \sin\frac{\pi}{۲} = ۱ \\ n=۲ \Rightarrow a_۲ = \sin\pi = ۰ \\ n=۳ \Rightarrow a_۳ = \sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱ \\ n=۴ \Rightarrow a_۴ = \sin ۲\pi = ۰ \\ n=۵ \Rightarrow a_۵ = \sin\frac{۵\pi}{۲} = ۱ \\ n=۶ \Rightarrow a_۶ = \sin ۳\pi = ۰ \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \{c_n\}: ۱,۰,-۱,۰,۱,۰,-۱,۰,۱,\dots$$

جمله‌های دنباله‌ی c_n به‌طور تناوبی تکرار می‌شوند. به این دنباله‌ها، دنباله‌های **تناوبی** می‌گوییم.

۱ ـ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $...,-2,2,-\frac{16}{9},2,-4$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $a_n=\frac{2\times(-2)^n}{n}$ ۲) $a_n=\frac{(-2)^{n+1}}{n^2}$ ۳) $a_n=\frac{2^{2n}}{n}$ ۴) $a_n=\frac{4\times(-1)^{n+1}}{n}$

۲ ـ جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n=\begin{cases}\frac{n^2}{4} & \text{زوج } n\\ \frac{n^2-1}{8} & \text{فرد } n\end{cases}$ است. مجموع جمله‌های چهارم و نهم این دنباله چه‌قدر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۳ ـ جمله‌ی $3+2n$ اُم دنباله‌ای برابر $\frac{2n^2+6n+5}{n+2}$ است. جمله‌ی هفتم این دنباله چه‌قدر است؟

۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{25}{4}$ ۳) $\frac{36}{16}$ ۴) $\frac{49}{25}$

۴ ـ در دنباله‌ی $b_1=b_2=2$ و $b_{n+1}=b_n+b_{n-1}-1$، جمله‌ی هشتم برابر است با:

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۵ ـ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $a_1=1$ و $a_n=a_{n-1}+2n-1$ کدام است؟

۱) $a_n=\frac{n^2}{n+1}$ ۲) $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ ۳) $a_n=\frac{n(n+1)^2}{2}$ ۴) $a_n=n^2$

۲ ـ دنباله‌ی حسابی

نام دیگر «دنباله‌ی حسابی»، «دنباله‌ی عددی» است!

دنباله‌هایی را که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از **افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی** به‌دست می‌آید، دنباله‌ی حسابی می‌نامیم و به این مقدار ثابت «قدرنسبت» دنباله می‌گوییم. برای نمونه دنباله‌ی زیر را ببینید:

$$3 \xrightarrow{+4} 7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+4} 15 \xrightarrow{+4} 19 \xrightarrow{+4} \dots$$

واضح است که دنباله‌ی بالا چه‌گونه ساخته می‌شود! عدد ۳ اولین جمله‌ای این دنباله است. این عدد با ۴ جمع می‌شود و جمله‌ی دوم که ۷ است تولید می‌شود. همین‌طور برای تولید جمله‌ی سوم، جمله‌ی دوم باز هم با همان ۴ جمع می‌شود و عدد ۱۱ تولید می‌شود و...

در این‌حالت اگر جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی a و قدرنسبت این دنباله d باشد، جملات دنباله به صورت زیر خواهند بود:

$$a \xrightarrow{+d} \underbrace{a+d}_{\text{جمله‌ی دوم}} \xrightarrow{+d} \underbrace{a+2d}_{\text{جمله‌ی سوم}}, \dots, \underbrace{a+(n-1)d}_{\text{جمله‌ی } n \text{ اُم}} \xrightarrow{+d} \underbrace{a+nd}_{\text{جمله‌ی } (n+1) \text{ اُم}}, \dots$$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت d برابر می‌شود با:

$$\mathbf{a_n=a_1+(n-1)d}$$

مثال ۱۰ **جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی $5,11,17,\dots$ را به‌دست بیاورید.**

برای به‌دست‌آوردن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی، باید «جمله‌ی اول» و «قدرنسبت» دنباله را داشته باشیم. با یک نگاه می‌بینیم که جمله‌ی اول برابر ۵ است. پس: $a_1=5$

حالا قدرنسبت چند است؟ مگر نه این‌که قدرنسبت در دنباله‌ی حسابی، اختلاف دو جمله‌ی متوالی است؟! پس این‌جا به‌راحتی می‌توانیم نتیجه بگیریم که: $d=a_2-a_1=a_3-a_2=6$

حالا با داشتن a_1 و d می‌توانیم جمله‌ی عمومی را بنویسیم:

$$a_n=a_1+(n-1)d \xrightarrow[d=6]{a_1=5} a_n=5+(n-1)\times 6 \Rightarrow \mathbf{a_n=6n-1}$$

صعودی و نزولی: در دنباله‌ی حسابی، اگر قدرنسبت مثبت باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدرنسبت منفی باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند. به نوع اول، دنباله‌ی صعودی و به نوع دوم، دنباله‌ی نزولی می‌گوییم.

برای مثال دو دنباله‌ای را که با جمله‌ی ۳ شروع می‌شود و قدرنسبت یکی برابر ۵ و دیگری برابر ۵- است نگاه کنید:

$d=5:\ 3,8,13,18,\dots \Rightarrow$ دنباله‌ی صعودی

$d=-5:\ 3,-2,-7,-12,\dots \Rightarrow$ دنباله‌ی نزولی

ویژگی‌های مهم دنباله‌های حسابی

① **تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی در تصاعد حسابی برابر قدرنسبت تصاعد است.**

② **اگر a_p و a_q دو جمله‌ی متفاوت و دل‌خواه از دنباله‌ی حسابی باشند، قدرنسبت تصاعد برابر است با:** $d=\frac{a_p-a_q}{p-q}$

③ **اگر a_1 را جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی و a_n را جمله‌ی آخر آن بدانیم، تعداد جملات دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$ محاسبه می‌شود.**

«**دنباله‌ی** حسابی» و «**تصاعد** حسابی»، دو واژه برای یک مفهوم یکسان هستند. گیج نشوید!

واسطه‌ی حسابی: یک تصاعد حسابی به‌صورت $\dots,a,b,c,\dots$ را در نظر بگیرید. سه عدد a، b و c سه جمله‌ی متوالی این تصاعد حسابی هستند. در تصاعد حسابی، رابطه‌ی سه جمله‌ی متوالی به این صورت است که «**وسطی، میانگین دو تای کناری است**»، به زبان ریاضی یعنی: $b=\frac{a+c}{2}$

در این حالت می‌گوییم b واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c است.

۶ ـ جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. کدام دنباله تشکیل تصاعد عددی می‌دهد؟

۱) $a_n=\frac{8}{n}-1$ ۲) $a_n=8n-n^2$ ۳) $a_n=8+\frac{n}{8}$ ۴) $a_n=\frac{n^3}{8}$

۷ ـ در یک تصاعد حسابی، جمله‌ی دوم ۲ برابر جمله‌ی هفتم است. مقدار کدام جمله‌ی این تصاعد برابر صفر است؟

۱) پنجم ۲) ششم ۳) دوازدهم ۴) سیزدهم

۸ ـ مقدار x چه‌قدر باشد تا $x+2$, $6x+4$, $10x+8$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد حسابی باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹ ـ اعداد $5p-1$، $3p+4$ و $2p+3$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدرنسبت این تصاعد کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۴)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰ ـ در یک تصاعد حسابی $t_p=q$ و $t_q=p$ و $p\neq q$، قدرنسبت تصاعد کدام است؟

۱) $p-q$ ۲) -1 ۳) $q-p$ ۴) ۱

۱۱ ـ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. اگر طول وتر این مثلث ۱۵ باشد، مجموع طول دو ضلع دیگر چه‌قدر خواهد بود؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۲ ـ اگر به قدرنسبت یک تصاعد عددی ۳ واحد اضافه کنیم، به جمله‌ی ششم دنباله‌ی حاصل، چند واحد اضافه می‌شود؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۱۵

۱۳ ـ در یک تصاعد عددی $t_1+t_7+t_{13}=39$، اگر $t_5=5$ باشد، قدرنسبت تصاعد چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) -4

۱۴ ـ در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع دو جمله‌ی اول برابر ۹/۵ و مجموع جملات سوم و چهارم، برابر ۶/۵ است. قدرنسبت آن کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۵ ـ تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک تصاعد عددی، ۵ و مجموع دو جمله‌ی دهم و دوازدهم، ۲۵ است. جمله‌ی بیست‌ویکم این تصاعد کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۴ ـ خارج از کشور)*

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۳۸/۵

۱۶ ـ در تصاعد حسابی $a_1 = 1$ و $a_2 = \frac{5}{3}$ حاصل $\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{33} + a_{35} + a_{37}}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۵)*

۱) $\frac{35}{71}$ ۲) $\frac{105}{71}$ ۳) $\frac{7}{17}$ ۴) $\frac{21}{17}$

۱۷ ـ تعداد عددهای دو رقمی‌ای که باقی‌مانده‌ی تقسیم‌شان بر ۹ برابر ۲ باشد، برابر است با:

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۸ ـ اگر در یک تصاعد حسابی $a_1 + a_2 + a_{12} = 30$ باشد، جمله‌ی پنجم (a_5) چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۹ ـ در یک تصاعد حسابی $a_n + a_p = a_{n-1}$ است. در این تصاعد $\frac{a_1}{d}$ کدام است؟

۱) p ۲) $-p$ ۳) $n - p$ ۴) $2n - 4$

۲۰ ـ در یک تصاعد حسابی نزولی، مجموع سه جمله‌ی متوالی برابر ۲۷ و حاصل‌ضرب این سه جمله برابر ۲۸۸ شده است. قدرنسبت این تصاعد چند است؟

۱) -8 ۲) -7 ۳) -6 ۴) -4

۲۱ ـ در تصاعد حسابی $1, \frac{4}{5}, \cdots$ جملات $a_5, a_{10}, a_{15}, \dots$ تشکیل تصاعد دیگری می‌دهند. قدرنسبت این تصاعد، چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) -1 ۳) -5 ۴) $\frac{1}{5}$

۲۲ ـ در تصاعد عددی $-7, 2, 11, \dots$ اولین جمله‌ای که بزرگ‌تر از ۴۲۰ است، کدام است؟

۱) ۴۲۲ ۲) ۴۲۳ ۳) ۴۲۴ ۴) ۴۲۵

۲۳ ـ تصاعد حسابی به جمله‌ی اول ۶۳ و قدرنسبت ۴− چند جمله‌ی مثبت دارد؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۴)*

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۲۴ ـ در یک تصاعد حسابی $a_1 = 5$ و $a_3 = 9$، آن‌گاه $a_7 + a_8 + a_9$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۶ ـ خارج از کشور)*

۱) ۱۹ ۲) ۳۸ ۳) ۵۷ ۴) ۷۶

۲۵ ـ در یک تصاعد حسابی $a_5 + a_6 = 3$ و $a_8 + a_9 = -2$ ، حاصل $a_{13} + a_{15}$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۷ ـ خارج از کشور)*

۱) $\frac{-55}{6}$ ۲) $\frac{-37}{6}$ ۳) $\frac{-5}{6}$ ۴) $\frac{-67}{6}$

۲۶ ـ در تصاعد حسابی $1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \dots$ جمله‌ی اول را با $\frac{3}{5}$ و جمله‌ی دوم را با $\frac{2}{5}$ و جمله‌ی سوم را با $\frac{1}{5}$ و... جمع می‌کنیم. جمله‌ی نود و سوم تصاعد جدید چه‌قدر است؟

۱) $\frac{139}{3}$ ۲) ۱۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۲۷ ـ در تصاعدهای عددی $4, 7, 10, \dots$ و $5, 9, 13, \dots$ چند جمله‌ی مساوی کوچک‌تر از ۵۰ وجود دارد؟

۱) چهار جمله ۲) پنج جمله ۳) سه جمله ۴) دو جمله

۲۸ ـ بیست جمله‌ی اول تصاعد حسابی به جمله‌ی اول $a_1 = 3$ و قدرنسبت $d_1 = 2$ با بیست جمله‌ی اول تصاعد حسابی به جمله‌ی اول $b_1 = 2$ و قدرنسبت $d_2 = 3$ چند جمله‌ی مساوی دارند؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۴)*

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۹ ـ بین دو عدد که تفاضل آن‌ها ۷۲۰ است، پنج واسطه‌ی عددی درج شده است. قدرنسبت تصاعد چه‌قدر است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۲۰

۳۰ ـ بین دو عدد ۱۹ و ۳۹، چهار واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم تا یک تصاعد حسابی نزولی ایجاد شود. مجموع این چهار واسطه چه‌قدر است؟

۱) ۱۰۹ ۲) ۱۱۴ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۲۱

۳ـ دنباله‌ی هندسی

به دنباله‌هایی که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) با **ضرب یک مقدار ثابت در جمله‌ی قبلی** به دست می‌آید، دنباله‌ی هندسی می‌گویند.

به دنباله‌ی روبه‌رو نگاه کنید:

$$\overset{\times ۳}{\frown}\ \overset{\times ۳}{\frown}\ \overset{\times ۳}{\frown}\ \overset{\times ۳}{\frown}$$
$$۵ \quad ۱۵ \quad ۴۵ \quad ۱۳۵ \quad \dots$$

دنباله‌ی بالا این‌گونه ساخته می‌شود که جمله‌ی اول **در یک عدد ثابت** (که این‌جا برابر ۳ است) **ضرب می‌شود** و جمله‌ی دوم به‌دست می‌آید. جمله‌ی دوم هم در همان عدد ضرب می‌شود و جمله‌ی سوم به‌دست می‌آید و الی آخر.

در یک دنباله‌ی هندسی، هر جمله (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب یک مقدار ثابت مانند q در جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. q را «قدرنسبت» این دنباله می‌نامند. اگر اولین جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی a و قدرنسبت آن q باشد، جملات این دنباله به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{array}{cccccccc} \times q & \times q & \times q & & & \times q & & \\ a, & aq, & aq^{۲}, & aq^{۳}, & \dots, & aq^{n-۱}, & aq^{n}, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & & a_n & a_{n+۱} & \end{array}$$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی

جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدرنسبت q برابر می‌شود با:

$$\mathbf{a_n = a_۱ q^{n-۱}}$$

مثال ۳ **جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی ...,۲,۸,۳۲,۱۲۸ را به‌دست بیاورید.**

اول از همه می‌دانیم که جمله‌ی اول $a_۱ = ۲$ است. در ضمن می‌دانیم که در تصاعد هندسی قدرنسبت از تقسیم دو جمله‌ی متوالی بر هم به‌دست می‌آید. پس:

$$q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۳}{a_۲} = \frac{a_۴}{a_۳} = ۴$$

حالا نوشتن جمله‌ی عمومی کاری دارد؟!

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی: $a_n = a_۱ q^{n-۱} \xrightarrow[q=۴]{a_۱=۲} a_n = ۲\times ۴^{n-۱} = ۲\times (۲^۲)^{n-۱}$
$= ۲\times ۲^{۲n-۲} = ۲^{۲n-۱} \Rightarrow \mathbf{a_n = ۲^{۲n-۱}}$

واسطه‌ی هندسی: یک تصاعد هندسی به‌صورت ...,a,b,c,... را در نظر بگیرید. سه عدد a، b و c سه جمله‌ی متوالی این تصاعد هندسی هستند. به عدد b **واسطه‌ی هندسی** a و c می‌گوییم و داریم:

$$\mathbf{b^۲ = ac}$$

دلیلش هم خیلی ساده است! خودتان فکر کنید!

ویژگی‌های مهم دنباله‌های هندسی

① اگر a_m و a_n دو جمله‌ی متفاوت و دل‌خواه از دنباله باشند، قدرنسبت دنباله یا همان q از رابطه‌ی $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$ به دست می‌آید.

② در دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q اگر $q > ۰$ و $a_۱ \neq ۰$ باشد دنباله یک‌نواست و اگر $q < ۰$ باشد، دنباله غیریک‌نواست.

③ اگر بخواهیم بین a و k، m عدد قرار دهیم به گونه‌ای که تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند، قدرنسبت دنباله از رابطه‌ی $q^{m+۱} = \frac{k}{a}$ به دست می‌آید.

یک‌نوا یعنی یا «همواره صعودی» یا «همواره نزولی»

۳۱ ـ در تصاعد هندسی ...,۴,۶,۹ مجموع جملات پنجم و ششم چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱۳۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳۲۴}{۱۶}$ ۳) $\frac{۴۰۵}{۴}$ ۴) $\frac{۴۰۵}{۸}$

۳۲ ـ اگر a_1 و a_2 و a_3 سه جمله اول یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ باشند، کدام گزینه سه جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی هستند؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۱) a_3+a_2 و a_2+a_1 و a_1+1 ۲) a_3+16 و a_2+4 و a_1+1

۳) a_3+3 و a_2+2 و a_1+1 ۴) a_3+4 و a_2+2 و a_1+1

۳۳ ـ اگر $5x+1$ و $6x$ و $7x-2$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی باشند، چند مقدار قابل قبول برای x وجود خواهد داشت؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش‌تر از ۲

۳۴ ـ در یک تصاعد هندسی $a_2a_4=2a_5$ است. جمله اول کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۲)*

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $2\sqrt{2}$

۳۵ ـ در تصاعد هندسی ...,۹,۱۲,۱۶ ، حاصل a_6-a_5 کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۹}$ ۲) $\frac{۶۴}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱۲۸}{۹}$ ۴) $\frac{۲۵۶}{۲۷}$

۳۶ ـ در یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲، حاصل $\frac{a_1a_7}{a_2^2}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۶)*

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) ۱۶ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

۳۷ ـ جمله نهم یک تصاعد هندسی ۵ برابر جمله‌ی ششم آن است. نسبت جمله‌ی یازدهم به جمله‌ی پنجم برابر است با:

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۵

۳۸ ـ در یک تصاعد عددی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی صعودی‌اند. قدرنسبت تصاعد هندسی کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۷ ـ خارج از کشور)*

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۹ ـ در یک تصاعد عددی جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این تصاعد، صفر است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۸)*

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۴۰ ـ قدرنسبت دو تصاعد هندسی برابر و جمله‌ی اول یکی چهار برابر جمله‌ی اول دیگری است. جمله nاُم تصاعد اول چند برابر جمله‌ی nاُم تصاعد دوم است؟

۱) ۴ ۲) $4n$ ۳) 4^n ۴) n^4

۴۱ ـ واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $7^2\times5\times2^2$ و $11^2\times5^3\times2^2$ کدام است؟

۱) ۷۷۰۰ ۲) ۷۸۰۰ ۳) ۸۵۰۰ ۴) ۸۷۰۰

۴۲ ـ در یک تصاعد هندسی حاصل‌ضرب نُه جمله اول برابر هشت است. ($a_1a_2...a_9=8$) آن‌گاه حاصل‌ضرب $a_2.a_4.a_6.a_8$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۱) $2\sqrt[3]{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt[4]{2}$ ۴) ۴

۴۳ ـ بین دو عدد ۳ و ۱۹۲ پنج واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. مجموع واسطه‌ها برابر کدام‌یک از گزینه‌ها می‌تواند باشد؟

۱) ۵۵− ۲) ۶۶− ۳) ۷۷− ۴) ۸۸−

۴۴ ـ دو تصاعد هندسی با جمله‌های اول یک‌سان را در نظر بگیرید. قدرنسبت تصاعد اول برابر ۳− و قدرنسبت تصاعد دوم برابر ۲۷ است. جمله‌ی هفتم از تصاعد دوم، با جمله‌ی چندم از تصاعد اول برابر است؟

۱) بیستم ۲) نوزدهم

۳) هیجدهم ۴) با هیچ‌کدام از جمله‌های تصاعد اول برابر نیست.

۴ـ دنباله‌ی تقریبات اعشاری

برای به‌دست‌آوردن دنباله‌ی تقریبات اعشاری، ابتدا یک عدد کسری مانند $\frac{a}{b}$ را در نظر می‌گیریم. وقتی عمل تقسیم a بر b را انجام دهیم، خارج‌قسمتی به دست می‌آید که تشکیل یک عدد اعشاری می‌دهد. با اضافه‌کردن هر بخش از اعداد اعشاری (یعنی دهم، صدم و ...) دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخته می‌شود که جملات آن به عدد گویای $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند یا میل پیدا می‌کنند.

این دنباله‌ی اعداد اعشاری برای اعداد حقیقی مثبت ساخته می‌شود که باید به عدد x نزدیک شوند. با توجه به توضیحات بیان‌شده، جمله‌ی nاُم این دنباله یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و جمله‌ی بعدی با اضافه‌کردن یک رقم اعشار به جمله‌ی قبلی حاصل می‌شود. بنابراین جمله‌ی nاُم تقریب اعشاری x با n رقم اعشار است.

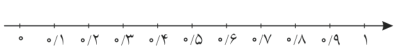
به‌عنوان مثال با تقسیم ۱۳ بر ۶ دنباله‌ی اعشاری که خارج‌قسمت آن تشکیل می‌دهد به‌صورت زیر است: ... , ۲/۱۶۶۶ , ۲/۱۶۶ , ۲/۱۶ , ۲/۱

نحوه‌ی ساختن دنباله‌ی تقریبات اعشاری: ابتدا مشخص می‌کنیم عدد گویای موجود، بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد. بین این دو عدد صحیح را به ده قسمت تقسیم کرده و عدد دهم عدد اعشاری را انتخاب می‌کنیم. به همین شیوه عدد صدم، هزارم و ... را به دست آورده و در هر مرحله با افزودن یک عدد اعشاری دنباله‌ی تقریبات اعشاری موردنظر را تشکیل می‌دهیم.

مثال عدد $x=\frac{۵}{۷}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم دنباله‌ای از اعداد اعشاری را پیدا کنیم که جملات آن به $\frac{۵}{۷}$ میل می‌کنند.

مرحله‌ی اول: عدد $\frac{۵}{۷}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

بین صفر و ۱. $۰<\frac{۵}{۷}<۱$



مرحله‌ی دوم: حال روی محور اعداد، فاصله‌ی بین صفر و ۱ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. x بین کدام دو عدد قرار می‌گیرد؟

باید دقیق‌ترین محدوده را تعیین کنیم. به‌راحتی دیده می‌شود که $\frac{۵}{۱۰}<\frac{۵}{۷}$ است، پس به جست‌جویمان در بعد از ۰/۵ ادامه می‌دهیم.

$$\frac{۵}{۷}>\frac{۶}{۱۰} \quad , \quad \frac{۵}{۷}>\frac{۷}{۱۰} \quad , \quad \frac{۵}{۷}<\frac{۸}{۱۰} \quad \Rightarrow \mathbf{\frac{۷}{۱۰}<\frac{۵}{۷}<\frac{۸}{۱۰}}$$

مرحله‌ی سوم: حالا نوبت رقم دوم بعد از اعشار است. بازه‌ی بین ۰/۷ و ۰/۸ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. عدد $\frac{۵}{۷}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

$$\frac{۷۱}{۱۰۰}<\frac{۵}{۷} \quad , \quad \frac{۷۲}{۱۰۰}>\frac{۵}{۷} \quad \Rightarrow \mathbf{۰/۷۱<\frac{۵}{۷}<۰/۷۲}$$

مرحله‌ی چهارم: می‌رسیم به سومین رقم بعد از اعشار. بازه‌ی بین ۰/۷۱ و ۰/۷۲ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. عدد $\frac{۵}{۷}$ بین کدام دو تا قرار دارد؟

$$\frac{۷۱۱}{۱۰۰۰}<\frac{۵}{۷} \quad , \quad \frac{۷۱۲}{۱۰۰۰}<\frac{۵}{۷} \quad , \quad \frac{۷۱۳}{۱۰۰۰}<\frac{۵}{۷} \quad , \quad \frac{۷۱۴}{۱۰۰۰}<\frac{۵}{۷} \quad , \quad \frac{۷۱۵}{۱۰۰۰}>\frac{۵}{۷}$$

$$\Rightarrow \mathbf{۰/۷۱۴<\frac{۵}{۷}<۰/۷۱۵}$$

با تکرار مراحل بالا، دنباله‌ای ساخته می‌شود که به عدد موردنظر نزدیک می‌شود. برای $x=\frac{۵}{۷}$، دنباله به‌صورت روبه‌رو است: ۰/۷ , ۰/۷۱ , ۰/۷۱۴,...

۴۵ ـ کسر متعارفی مساوی عدد اعشاری $۱/\overline{۶۹}$ به‌صورت $\frac{p}{q}$ است که $(p,q)=۱$، مجموع ارقام q کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۶ ـ کسر مولد بسط ده‌گانی ...۰/۱۳۳۳ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۹۰}$ ۲) $\frac{۱۳}{۹۹}$ ۳) $\frac{۱۲}{۹۰}$ ۴) $\frac{۱۲}{۹۹}$

۵ ـ نزدیک‌شدن جملات دنباله به یک عدد

ابتدا باید تشخیص دهیم در چه صورتی جملات دنباله به یک عدد نزدیک می‌شوند. اگر جملات دنباله را از یک عدد معین کم کنیم و تک‌تک جملات حاصل‌شده به عدد صفر نزدیک شوند، می‌توانیم بگوییم جملات دنباله‌ی موردنظر به آن عددی که آن را از جملات دنباله کم کردیم، نزدیک می‌شوند.

به عنوان مثال تقسیم عدد ۴ بر ۳ را در نظر گرفته و آن را به صورت دنباله‌ی تقریبات اعشاری نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم: ۱/۳ , ۱/۳۳ , ۱/۳۳۳ , ...

تفاضل این جملات از عدد $\frac{۴}{۳}$ به صفر نزدیک می‌شوند. بنابراین جملات دنباله به عدد $\frac{۴}{۳}$ نزدیک می‌شوند.

نکته: در دنباله‌ی ثابت جملات دنباله به همان مقدار ثابت نزدیک می‌شوند. فقط در این مورد خاص است که می‌توان گفت جملات دنباله **دقیقاً** همان عددی هستند که به آن نزدیک می‌شوند.

مثال ۵ جمله‌های دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{1}{n}$ با افزایش n به کدام عدد نزدیک می‌شوند؟

راه شهودی کار این است که چند جمله از دنباله را بنویسیم و روند آن را دنبال کنیم:

$$a_۱=۱ \quad , \quad a_۲=\frac{۱}{۲} \quad , \quad a_۳=\frac{۱}{۳} \quad , \quad a_۴=\frac{۱}{۴}$$

$$a_{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰} \quad , \quad a_{۱۰۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰۰} \quad , \quad a_{۱۰۰۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$$

می‌بینیم که هر چه مقدار n را بیش‌تر می‌کنیم، جمله‌های دنباله کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شوند؛ یعنی به عدد «صفر» نزدیک می‌شوند.

فهرست
پلکان آموزش ۲
پاسخ پلکان آموزش ۱۰

پاسخ تست‌های پلکان آموزش

۱ ـ ۲ چشم‌انداز: در این مدل تست‌ها، بهترین کار این است که چند جمله از جمله‌های عمومی داده‌شده را بنویسید. سپس به‌راحتی می‌توانید جمله‌ی عمومی دنباله‌ی موردنظر را تعیین کنید.

۱)
$$a_n=\frac{۲\times(-۲)^n}{n}$$
$$a_۱=\frac{۲\times(-۲)^۱}{۱}=-۴\ ,\ a_۲=\frac{۲\times(-۲)^۲}{۲}=۴$$

با توجه به این‌که جمله‌ی دوم برابر ۴ شد، این جمله‌ی عمومی مربوط به دنباله‌ی داده‌شده نیست.

۲)
$$a_n=\frac{(-۲)^{n+۱}}{n^۲}$$
$$a_۱=\frac{(-۲)^{۱+۱}}{۱}=۴$$
$$a_۲=\frac{(-۲)^{۲+۱}}{۲^۲}=-۲$$
$$a_۳=\frac{(-۲)^{۳+۱}}{۳^۲}=\frac{۱۶}{۹}$$
$$\vdots$$

بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی داده‌شده می‌تواند به‌صورت $a_n=\frac{(-۲)^{n+۱}}{n^۲}$ باشد.

۳)
$$a_n=\frac{۲^{۲n}}{n}$$

آیا در مورد این جمله‌ی عمومی نیاز به تعیین دنباله‌ی آن هست؟ صد درصد خیر! چون در دنباله‌ای که در تست آمده است، جمله‌های منفی هم دیده می‌شود؛ ولی تمامی جملات این دنباله مثبت هستند. پس این جمله‌ی عمومی هم به درد ما نمی‌خورد!

۴)
$$a_n=\frac{۴\times(-۱)^{n+۱}}{n}$$
$$a_۱=\frac{۴\times(-۱)^{۱+۱}}{۱}\ ,\ a_۲=\frac{۴\times(-۱)^{۲+۱}}{۲}=-۲$$
$$a_۳=\frac{۴\times(-۱)^{۳+۱}}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ هم جواب تست نخواهد بود.

۲ ـ ۳ پله‌ی یکم: با توجه به جمله‌ی عمومی مربوط به جملات زوج (n های زوج) مقدار جمله‌ی چهارم را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{زوج } n:\ a_n=\frac{n^۲}{۴}\Rightarrow a_۴=\frac{۴^۲}{۴}=\frac{۱۶}{۴}=۴$$

پله‌ی دوم: مقدار جمله‌ی نهم را هم با استفاده از جمله‌ی عمومی مربوط به n های فرد محاسبه می‌کنیم:

$$\text{فرد } n:\ a_n=\frac{n^۲-۱}{۸}\Rightarrow a_۹=\frac{۹^۲-۱}{۸}=\frac{۸۱-۱}{۸}=\frac{۸۰}{۸}=۱۰$$

پله‌ی سوم: مجموع جمله‌های چهارم و نهم برابر است با:

$$a_۴+a_۹=۴+۱۰=\mathbf{۱۴}$$

۳ ـ ۲ پله‌ی یکم: برای تعیین جمله‌ی هفتم ابتدا باید n ای را تعیین کنیم که به‌ازای آن $۲n+۳$ برابر ۷ می‌شود. چون ما مستقیم نمی‌توانیم n را در جمله‌ی عمومی دنباله قرار دهیم و مقدار a_n را به‌دست آوریم. پس معادله‌ی $۲n+۳=۷$ را حل می‌کنیم: $۲n+۳=۷\Rightarrow ۲n=۴\Rightarrow n=۲$

پله‌ی دوم: اگر در جمله‌ی عمومی داده‌شده n را برابر ۲ قرار دهیم، جمله‌ی هفتم را محاسبه کرده‌ایم. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_۷=\frac{۲(۲)^۲+۶(۲)+۵}{۲+۲}=\frac{۸+۱۲+۵}{۴}=\mathbf{\frac{۲۵}{۴}}$$

۴ ـ ۴ پله‌ی یکم: در دنباله‌هایی که جملات دنباله به هم وابسته هستند، برای به‌دست آوردن جمله‌ی n اُم آن دنباله راه ساده این است که از جمله‌ی اول مرحله‌به‌مرحله جلو برویم تا بتوانیم جمله‌ای n اُم را حساب کنیم.

پله‌ی دوم: با داشتن این‌که $b_۱=b_۲=۲$ است، جمله‌های دنباله را تک‌تک حساب می‌کنیم تا جمله‌ی هشتم را به‌دست آوریم. ببینید:

$$b_۳=b_۲+b_۱-۱=۲+۲-۱=۳$$
$$b_۴=b_۳+b_۲-۱=۳+۲-۱=۴$$
$$b_۵=b_۴+b_۳-۱=۴+۳-۱=۶$$
$$b_۶=b_۵+b_۴-۱=۶+۴-۱=۹$$
$$b_۷=b_۶+b_۵-۱=۹+۶-۱=۱۴$$
$$b_۸=b_۷+b_۶-۱=۱۴+۹-۱=\mathbf{۲۲}$$

راه شاید ساده‌تر؛ جمله‌های سوم به بعد این دنباله، از جمع دو جمله‌ی قبلی منهای عدد یک به‌دست می‌آیند. پس داریم:

$$۲\ ,\ ۲\ ,\ ۳\ ,\ ۴\ ,\ ۶\ ,\ ۹\ ,\ ۱۴\ ,\ \mathbf{۲۲}$$

+ -۱ + -۱

۵ ـ ۴ پله‌ی یکم: اول از همه چند جمله‌ی اول دنباله‌ی داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$

$a_3 = a_2 + 5 = 4 + 5 = 9$

$a_4 = a_3 + 7 = 9 + 7 = 16$

$a_5 = a_4 + 9 = 16 + 9 = 25$

پس جمله‌های دنباله به‌صورت ... , ۲۵ , ۱۶ , ۹ , ۴ , ۱ در می‌آید.

پله‌ی دوم: بنابراین می‌توان حدس زد که جمله‌ی nاُم دنباله، برابر مجذور n یا همان n^2 است. پس جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت $a_n = n^2$ در می‌آید.

۶ ـ ۳ چشم‌انداز: چندجمله‌ی ابتدایی هریک از دنباله‌ها را مشخص می‌کنیم. در صورتی‌که تفاضل جمله‌های متوالی با هم برابر نباشد دنباله‌ی موردنظر تشکیل یک تصاعد عددی نمی‌دهد.

شرط این‌که تفاضل جمله‌های متوالی برابر باشد، شرط لازم دنباله‌هایی بود که تشکیل تصاعد عددی می‌دادند. مقدار این اختلاف برابر قدرنسبت تصاعد است.)

۱) $a_n = \frac{8}{n} - 1$

$a_1 = 8 - 1 = 7 \ , \ a_2 = \frac{8}{2} - 1 = 4 - 1 = 3$

$a_3 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 - a_1 = 3 - 7 = -4 \\ a_3 - a_2 = \frac{5}{3} - 3 = -\frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$$

پس این دنباله تشکیل تصاعد عددی نمی‌دهد.

۲) $a_1 = 8 - 1 = 7 \ , \ a_2 = 16 - 4 = 12 \ , \ a_3 = 24 - 9 = 15$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 - a_1 = 12 - 7 = 5 \\ a_3 - a_2 = 15 - 12 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$$

این دنباله هم پَر!

۳) $a_1 = 8 + \frac{1}{8} \ , \ a_2 = 8 + \frac{2}{8} \ , \ a_3 = 8 + \frac{3}{8}$

مشخص است که مقدار جمله‌های دنباله در هر مرحله به اندازه‌ی $\frac{1}{8}$ اضافه می‌شود. پس دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = 8 + \frac{n}{8}$ تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهد.

۴) $a_1 = \frac{1}{8} \ , \ a_2 = 1 \ , \ a_3 = \frac{27}{8}$

تفاوت جمله‌های متوالی با هم برابر نیست. پس این دنباله هم تشکیل تصاعد عددی نمی‌دهد.

راه کمی هوشمندانه: راه‌حل ساده‌تر حل تست این بود که به‌عنوان جواب گزینه‌ای را انتخاب می‌کردید که در آن جمله‌ی عمومی دنباله از درجه‌ی اول باشد. تنها جمله‌ی عمومی که از **درجه‌ی اول** است همان $a_n = 8 + \frac{n}{8}$ است. به همین سادگی!

۷ ـ ۳ پله‌ی یکم: با توجه به این‌که $a_2 = 2a_7$ است، رابطه‌ی بین a_1 (جمله‌ی اول دنباله) و d (قدرنسبت تصاعد) را به‌دست می‌آوریم: بنابراین داریم:

$$a_2 = 2a_7 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} a_1 + d = 2(a_1 + 6d) = 2a_1 + 12d$$

$$\Rightarrow a_1 = -11d \Rightarrow a_1 + 11d = 0$$

پله‌ی دوم: از رابطه‌ی $a_1 + 11d = 0$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$a_1 + 11d$ همان a_{12} یا جمله‌ی دوازدهم این تصاعد است. بنابراین جمله‌ی **دوازدهم** تصاعد برابر صفر است.

۸ ـ ۳ چشم‌انداز: برای این‌که سه جمله از یک دنباله، سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد حسابی باشند، باید جمله‌ی وسط برابر میانگین دو جمله‌ی دیگر باشد؛ یعنی جمله‌ی وسط واسطه‌ی حسابی دو جمله‌ی قبل و بعد خود باشد.

پله‌ی یکم و آخر: با توجه به چشم‌انداز، مقدار x را حساب می‌کنیم. داریم:

$$6x + 4 = \frac{10x + 8 + x + 2}{2} = \frac{11x + 10}{2}$$

$$\Rightarrow 12x + 8 = 11x + 10 \Rightarrow \mathbf{x = 2}$$

۹ ـ ۴ پله‌ی یکم: با توجه به این‌که جمله‌ی وسط واسطه‌ی حسابی دو جمله‌ی دیگر است، ابتدا مقدار p را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$3p + 4 = \frac{2p + 3 + 5p - 1}{2} = \frac{7p + 2}{2} \Rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \Rightarrow p = 6$$

پله‌ی دوم: جملات متوالی دنباله به صورت ۲۹ و ۲۲ و ۱۵ درمی‌آیند. قدرنسبت تصاعد حسابی برابر است با تفاضل دو جمله‌ی متوالی:

$$d = 22 - 15 = 29 - 22 = 7$$

۱۰ ـ ۲ پله‌ی یکم: اگر t_p و t_q دو جمله‌ی دل‌خواه از تصاعد حسابی باشند، رابطه‌ی $d = \frac{t_p - t_q}{p - q}$ در مورد آن برقرار است.

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $t_p = q$ و $t_q = p$ است، مقدار قدرنسبت تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$d = \frac{t_p - t_q}{p - q} = \frac{q - p}{p - q} = \frac{-(p - q)}{p - q} = \mathbf{-1}$$

۱۱ ـ ۳ پله‌ی یکم: اضلاع مثلث قائم‌الزاویه تشکیل تصاعد عددی می‌دهند. اگر دو ضلع قائم مثلث را x و y بنامیم، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\underbrace{x \ , \ y \ , \ 15}_{\text{سه جمله‌ی متوالی از تصاعد حسابی}} \Rightarrow y = \frac{15 + x}{2} \quad \mathrm{I}$$

پله‌ی دوم: در مثلث قائم‌الزاویه رابطه‌ی فیثاغورث برقرار است. با توجه به رابطه‌ی I و رابطه‌ی فیثاغورث، مقدار x و y را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 = 225 \xrightarrow{\mathrm{I}} x^2 + \frac{(15 + x)^2}{4} = 225 \Rightarrow 4x^2 + 225 + x^2 + 30x$$

$$= 4 \times 225 \Rightarrow 5x^2 + 30x = 3 \times 225 \xrightarrow{\div 5} x^2 + 6x = 135$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = 9 \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} y = \frac{15 + 9}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

پله‌ی سوم: حاصل $x + y$ برابر است با: $x + y = 9 + 12 = \mathbf{21}$

۱۲ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** قدرنسبت جدید را $d'=d+3$ فرض می‌کنیم.

پله‌ی دوم: جمله‌ی ششم در تصاعد عددی اول برابر a_1+5d است. در تصاعد عددی جدید جمله‌ی ششم برابر است با:

$$a_6=a_1+5d'=a_1+5(d+3)=a_1+5d+15$$

بنابراین به جمله‌ی ششم **۱۵** واحد اضافه می‌شود.

۱۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** با توجه به تساوی $t_1+t_7+t_{13}=39$، رابطه‌ای بین t_1 (جمله‌ی اول تصاعد) و d (قدرنسبت تصاعد) پیدا می‌کنیم:

$$t_1+t_7+t_{13}=t_1+(t_1+6d)+(t_1+12d)$$
$$=3t_1+18d=39\xRightarrow{\div 3}t_1+6d=13$$

پله‌ی دوم: با داشتن این‌که $t_5=5$ است، به یک دو معادله و دو مجهول می‌رسیم. براساس، آن مقدار d را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}t_1+6d=13\\ t_1+4d=5\end{array}\right\}\xRightarrow{-}2d=8\Rightarrow \mathbf{d=4}$$

۱۴ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** مجموع جملات اول و دوم و مجموع جملات سوم و چهارم در یک تصاعد حسابی برابر است با:

$$a_1+a_2=a_1+(a_1+d)=2a_1+d$$
$$a_3+a_4=(a_1+2d)+(a_1+3d)=2a_1+5d$$

پله‌ی دوم: اختلاف بین a_3+a_4 و a_1+a_2 برابر $4d$ است. پس می‌توانیم d را حساب کنیم:

$$(a_3+a_4)-(a_1+a_2)=6/5-9/5=4d\Rightarrow -3=4d\Rightarrow \mathbf{d=-\frac{3}{4}}$$

۱۵ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** براساس فرض‌های موجود در تست مقدار a_1 و d را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$a_{12}-a_{10}=2d=5\Rightarrow d=\frac{5}{2}$$
$$a_{10}+a_{12}=(a_1+9d)+(a_1+11d)=2a_1+20d=25$$
$$\xrightarrow{d=\frac{5}{2}}2a_1+50=25\Rightarrow 2a_1=-25\Rightarrow a_1=\frac{-25}{2}=-12/5$$

پله‌ی دوم: با داشتن a_1 و d مقدار جمله‌ی بیست و یکم این تصاعد را حساب می‌کنیم:

$$a_{21}=a_1+20d=-12/5+20d=-12/5+50=\mathbf{37/5}$$

۱۶ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** با توجه به این‌که $a_1=1$ و $a_2=\frac{5}{3}$ است، مقدار d برابر است با:

$$d=a_2-a_1=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

پله‌ی دوم: حاصل کسر داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{33}+a_{35}+a_{37}}=\frac{(a_{15}+a_{19})+a_{17}}{(a_{33}+a_{37})+a_{35}}=\frac{2a_{17}+a_{17}}{2a_{35}+a_{35}}=\frac{3a_{17}}{3a_{35}}$$
$$=\frac{a_1+16d}{a_1+34d}=\frac{1+\frac{32}{3}}{1+\frac{68}{3}}=\frac{\frac{35}{3}}{\frac{71}{3}}=\mathbf{\frac{35}{71}}$$

توضیح؛ متوجه شدید چه‌کار کردیم که؟ به‌جای محاسبه‌ی مقدار $a_{15}+a_{19}$ دو برابر مقدار a_{17} و به‌جای مقدار $a_{33}+a_{37}$ دو برابر مقدار a_{35} را قرار دادیم. یک کم محاسبات را ساده‌تر می‌کند.

۱۷ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** تعداد اعداد دو رقمی‌ای را می‌خواهیم تعیین کنیم که جمله‌ی عمومی آن‌ها $a_n=9n+2$ است.

ابتدا اولین عدد دو رقمی و آخرین عدد دو رقمی را تعیین می‌کنیم. داریم:

اولین عدد دو رقمی $\quad a_n=9n+2\xRightarrow{n=1}a_1=11$

$$a_n=9n+2<100\Rightarrow 9n<98\xRightarrow{\div 9}n<10/8$$
$$\xRightarrow{n\in\mathbb{N}}n=10\Rightarrow a_{10}=92$$

پله‌ی دوم: می‌بینیم که جمله‌های a_1 تا a_{10} دو رقمی هستند. تعداد این اعداد دو رقمی برابر **۱۰** می‌شود.

۱۸ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم. ببینید:

$$a_1+a_2+a_{12}=a_1+(a_1+d)+(a_1+11d)$$
$$=3a_1+12d=30\Rightarrow 3(a_1+4d)=30\Rightarrow a_1+4d=10$$

پله‌ی دوم: مگر نه این‌که a_1+4d همان a_5 است؟ پس جمله‌ی پنجم این تصاعد حسابی برابر ۱۰ است.

۱۹ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** در یک تصاعد حسابی، اختلاف دو جمله‌ی متوالی برابر قدرنسبت تصاعد یا همان d است. پس در این‌جا می‌توان نوشت:

$$a_n-a_{n-1}=d \qquad \mathrm{I}$$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی به‌دست‌آمده و فرض موجود در صورت تست، مقدار $\frac{a_1}{d}$ را تعیین می‌کنیم:

$$a_n+a_p=a_{n-1}\xRightarrow{\mathrm{I}}d+a_p=0\Rightarrow d+a_1+(p-1)d=0$$
$$\Rightarrow a_1+pd=0\Rightarrow pd=-a_1\Rightarrow \frac{a_1}{d}=\mathbf{-p}$$

۲۰ ـ (۲) **چشم‌انداز:** تصاعد حسابی نزولی، تصاعدی است که در آن جملات تصاعد به یک میزان ثابت نسبت به جمله‌ی قبل کاهش پیدا کنند. **در تصاعد حسابی نزولی، قدرنسبت تصاعد منفی است.**

پله‌ی یکم: اگر x,y,z این سه جمله‌ی متوالی باشند، با توجه به این‌که $y=\frac{x+z}{2}$ است (چرا؟) داریم:

$$x+y+z=27\Rightarrow (x+z)+y=27\Rightarrow 2y+y=27$$
$$\Rightarrow 3y=27\Rightarrow y=9$$

اگر قدرنسبت را d فرض کنیم، x برابر $y-d$ و z برابر $y+d$ می‌شود.

پله‌ی دوم: با دانستن حاصل‌ضرب این ۳ جمله‌ی متوالی مقدار d را محاسبه می‌کنیم:

$$xyz=288\Rightarrow (y-d)y(y+d)=288\xRightarrow{y=9}(9-d)9(9+d)=288$$
$$\xRightarrow{\div 9}(9-d)(9+d)=32\Rightarrow 81-d^2=32\Rightarrow d^2=81-32=49$$
$$\xRightarrow{d<0}\mathbf{d=-7}$$

۲۱ ـ (۲) اختلاف دو جمله‌ی متوالی در تصاعد حسابی برابر قدرنسبت تصاعد است. اگر d' قدرنسبت تصاعد جدید و d قدرنسبت تصاعد اولیه باشد، d' برابر است با: $d = a_2 - a_1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$

$$d' = a_{10} - a_5 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 4d) = 5d = 5(-\frac{1}{5}) = -1$$

$$\Rightarrow \mathbf{d' = -1}$$

۲۲ ـ (۴) پله‌ی یکم: ابتدا جمله‌ی عمومی تصاعد یا همان a_n را تعیین می‌کنیم. با محاسبه‌ی d و با داشتن a_1، a_n برابر است با:

$$d = a_2 - a_1 = 2 - (-7) = 2 + 7 = 9$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -7 + (n-1) \times 9 = 9n - 9 - 7 = 9n - 16$$

$$\Rightarrow a_n = 9n - 16$$

پله‌ی دوم: برای تعیین اولین جمله‌ی بزرگ‌تر از ۴۲۰، باید n ای را مشخص کنیم که به‌ازای آن، نامساوی $a_n > 420$ برقرار باشد. داریم:

$$a_n > 420 \Rightarrow 9n - 16 > 420 \Rightarrow 9n > 436$$

$$a_n > 48/\sim \xRightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 49$$

پله‌ی سوم: به‌ازای $n = 49$ اولین جمله‌ی بزرگ‌تر از ۴۲۰ به‌دست می‌آید. a_{49} برابر است با: $a_{49} = (9 \times 49) - 16 = 441 - 16 = \mathbf{425}$

۲۳ ـ (۲) پله‌ی یکم: جمله‌ی عمومی تصاعد حسابی را تشکیل می‌دهیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 63 + (n-1)(-4) = -4n + 63 + 4 = -4n + 67$$

پله‌ی دوم: تعداد جمله‌هایی را تعیین می‌کنیم که به‌ازای آن رابطه‌ی $a_n > 0$ برقرار باشد. پس داریم:

$$a_n > 0 \Rightarrow -4n + 67 > 0 \Rightarrow 4n < 67 \Rightarrow n < 16/75$$

$$\xRightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$$

بنابراین تصاعد حسابی دارای ۱۶ **جمله‌ی مثبت** است.

۲۴ ـ (۳) پله‌ی یکم: مقدار d یا همان قدرنسبت تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$a_3 - a_1 = 2d \Rightarrow 9 - 5 = 2d \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $a_7 + a_9 = 2a_8$ است، حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$a_7 + a_8 + a_9 = (a_7 + a_9) + a_8 = 2a_8 + a_8 = 3a_8 = 3(a_1 + 7d)$$

$$= 3(5 + 14) = 3 \times 19 = \mathbf{57}$$

۲۵ ـ (۴) پله‌ی یکم: محاسبه‌ی a_1 و d را در دستور کار قرار می‌دهیم:

$$a_5 + a_6 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 2a_1 + 9d = 3$$

$$a_8 + a_9 = (a_1 + 7d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 15d = -2$$

با کم کردن تساوی اول از تساوی دوم، خواهیم داشت:

$$6d = -2 - 3 = -5 \Rightarrow d = -\frac{5}{6}$$

$$2a_1 + 9(\frac{-5}{6}) = 2a_1 - 7/5 = 3 \Rightarrow 2a_1 = 10/5 = \frac{21}{2}$$

پله‌ی دوم: مقدار $a_{13} + a_{15}$ برابر است با:

$$a_{13} + a_{15} = (a_1 + 12d) + (a_1 + 14d) = 2a_1 + 26d$$

$$= \frac{21}{2} + 26(-\frac{5}{6}) = \frac{21}{2} - \frac{65}{3} = \frac{63 - 130}{6} = -\frac{67}{6}$$

۲۶ ـ (۳) پله‌ی یکم: تصاعد جدید را تشکیل می‌دهیم:

$$(1 + \frac{3}{5}) \ , \ (\frac{7}{5} + \frac{2}{5}) \ , \ (\frac{9}{5} + \frac{1}{5}) \ , \ldots$$

$\frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{10}{5}, \ldots$: تصاعد جدید

پله‌ی دوم: قدرنسبت تصاعد حسابی جدید برابر است با:

$$d = a_2 - a_1 = \frac{9}{5} - \frac{8}{5} = \frac{1}{5}$$

پله‌ی سوم: جمله‌ی نود و سوم تصاعد جدید برابر است با:

$$a_{93} = a_1 + 92d = \frac{8}{5} + \frac{92}{5} = \frac{100}{5} = \mathbf{20}$$

۲۷ ـ (۱) پله‌ی یکم: جمله‌ی عمومی دو تصاعد را تشکیل می‌دهیم:

$$5, 9, 13, 17, \ldots \xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی}} a_n = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$$

$$4, 7, 10, 13, \ldots \xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی}} a_n = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

اولین جمله‌ی برابر این دو تصاعد جمله‌ی دوم با مقدار ۱۳ است. دومین مقدار مشترکی که در این دو تصاعد وجود دارد عدد ۲۵ است. بنابراین تصاعد جدید به‌صورت زیر می‌شود: $13, 25, \ldots$

پله‌ی دوم: این تصاعد یک تصاعد حسابی با جمله‌ی اول ۱۳ و قدرنسبت ۱۲ است. جمله‌های کوچک‌تر از ۵۰ این تصاعد برابر ۱۳,۲۵,۳۷,۴۹ است. پس **۴ جمله‌ی** کوچک‌تر از ۵۰ دارد.

۲۸ ـ (۲) پله‌ی یکم: جمله‌ی عمومی دو تصاعد را می‌نویسیم:

$$a_1 = 3 \ , \ d_1 = 2 \Rightarrow a_n = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

$$b_1 = 2 \ , \ d_2 = 3 \Rightarrow b_n = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$$

پله‌ی دوم: حالا تصاعد جدید (جمله‌های مشترک) را به‌دست می‌آوریم:

جملات تصاعد اول: $3, \underline{5}, 7, 9, \underline{\underline{11}}, \ldots$

جملات تصاعد دوم: $2, \underline{5}, 8, \underline{\underline{11}}, \ldots$

جملات تصاعد جدید: $5, 11, \ldots$

پس تصاعد جدید تصاعدی است با جمله‌ی اول ۵ و قدرنسبت ۶.

پله‌ی سوم: جمله‌ی بیستم هر دو دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$a_n = 2n + 1 \xRightarrow{n=20} a_{20} = 41$$

$$b_n = 3n - 1 \xRightarrow{n=20} b_{20} = 59$$

پس این دو دنباله حداکثر می‌توانند تا عدد ۴۱ جمله‌ی مشترک داشته باشند؛ یعنی: $c_n = 5 + 6(n-1) = 6n - 1 \leq 41 \Rightarrow 6n \leq 42$

$$\Rightarrow n \leq 7 \Rightarrow n = 1, 2, \ldots, 7$$

پس ۷ جمله‌ی مشترک خواهیم داشت: $5, 11, 17, 23, 29, 35, 41$

توجه کنید که: می‌توانستیم از همان اول بیست جمله‌ی آغازین هر دو تصاعد را بنویسیم و دور عددهای مشترک دایره بکشیم! این همه هم خودمان را خسته نمی‌کردیم!

۲۹ ـ (۴) پله‌ی یکم: دو عدد را a و b در نظر می‌گیریم. a اگر جمله‌ی اول تصاعد حسابی باشد و بخواهیم بین a و b پنج واسطه‌ی عددی درج کنیم، در این صورت b جمله‌ی هفتم این تصاعد خواهد بود. پس $a = a_۱$ و $b = a_۷$ است.

پله‌ی دوم: براساس نتیجه‌گیری پله‌ی یکم، قدرنسبت تصاعد با توجه به فرض انجام‌شده در صورت تست به‌راحتی تعیین می‌شود. ببینید:

$$b - a = ۷۲۰ \Rightarrow a_۷ - a_۱ = ۷۲۰ \Rightarrow ۶d = ۷۲۰ \Rightarrow \mathbf{d = ۱۲۰}$$

۳۰ ـ (۳) پله‌ی یکم: چون تصاعد حسابی نزولی است و می‌خواهیم چهار واسطه‌ی حسابی بین ۱۹ و ۳۹ داشته باشیم، جمله‌ی اول تصاعد را عدد بزرگ‌تر یا همان ۳۹ و جمله‌ی ششم تصاعد را (جمله‌ی اول ۳۹ و ۴ جمله هم واسطه‌های حسابی هستند. در مجموع ۵ جمله قبل از ۱۹ داریم) عدد کوچک‌تر یا همان ۱۹ در نظر می‌گیریم.

پله‌ی دوم: قدرنسبت تصاعد حسابی نزولی برابر است با:

$$۵d = a_۶ - a_۱ = ۱۹ - ۳۹ = -۲۰ \Rightarrow d = -۴$$

پله‌ی سوم: با تعیین ۴ واسطه‌ی عددی بین ۱۹ و ۳۹ مجموع آن‌ها را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$a_۲ = a_۱ + d = ۳۹ - ۴ = ۳۵$$
$$a_۳ = a_۲ + d = ۳۵ - ۴ = ۳۱$$
$$a_۴ = a_۳ + d = ۳۱ - ۴ = ۲۷$$
$$a_۵ = a_۴ + d = ۲۷ - ۴ = ۲۳$$

مجموع واسطه‌های عددی برابر است با: $۳۵ + ۳۱ + ۲۷ + ۲۳ = \mathbf{۱۱۶}$

۳۱ ـ (۴) پله‌ی یکم: جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی را تعیین می‌کنیم:

$$a_۱ = ۴ \ , \ a_۲ = ۶ \Rightarrow q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$
$$a_n = a_۱.q^{n-۱} = ۴(\frac{۳}{۲})^{n-۱}$$

پله‌ی دوم: تعیین جمله‌های پنجم و ششم:

$$a_۵ = ۴(\frac{۳}{۲})^{۵-۱} = ۴(\frac{۳}{۲})^۴ = ۴ \times \frac{۸۱}{۱۶} = \frac{۸۱}{۴}$$
$$a_۶ = ۴(\frac{۳}{۲})^{۶-۱} = ۴(\frac{۳}{۲})^۵ = ۴ \times \frac{۲۴۳}{۳۲} = \frac{۲۴۳}{۸}$$

پله‌ی سوم: مجموع جملات پنجم و ششم برابر است با:

$$a_۵ + a_۶ = \frac{۸۱}{۴} + \frac{۲۴۳}{۸} = \frac{۱۶۲ + ۲۴۳}{۸} = \mathbf{\frac{۴۰۵}{۸}}$$

۳۲ ـ (۴) پله‌ی یکم: $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ را تشکیل می‌دهیم:

$$a_۱ = a \ , \ a_۲ = ۲a \ , \ a_۳ = ۴a$$

پله‌ی دوم: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا مشخص کنیم کدام گزینه سه جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی است.

(۱)

$$a_۱ + ۱ = a + ۱$$
$$a_۲ + a_۱ = a + ۲a = ۳a$$
$$a_۳ + a_۲ = ۴a + ۲a = ۶a$$

این گزینه تشکیل یک تصاعد هندسی نمی‌دهد.

(۲)

$$a_۱ + ۱ = a + ۱$$
$$a_۲ + ۴ = ۲a + ۴ = ۲(a + ۲)$$
$$a_۳ + ۱۶ = ۴a + ۱۶ = ۴(a + ۴)$$

باز هم نمی‌توان نتیجه گرفت که این اعداد سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد هندسی باشند.

(۳)

$$a_۱ + ۱ = a + ۱$$
$$a_۲ + ۲ = ۲a + ۲ = ۲(a + ۱)$$
$$a_۳ + ۳ = ۴a + ۳$$

باز هم رابطه‌ی تصاعد هندسی بین این اعداد برقرار نیست.

(۴)

$$a_۱ + ۱ = a + ۱$$
$$a_۲ + ۲ = ۲a + ۲ = ۲(a + ۱)$$
$$a_۳ + ۴ = ۴a + ۴ = ۴(a + ۱)$$
$$\frac{a_۲ + ۲}{a_۱ + ۱} = ۲ = \frac{a_۳ + ۴}{a_۲ + ۲}$$

پس این اعداد تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ می‌دهند. همین گزینه جواب تست است.

۳۳ ـ (۳) چشم‌انداز: اگر سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد هندسی داشته باشیم، جمله‌ی وسط، واسطه‌ی هندسی دو جمله‌ی دیگر است. یعنی مجذور جمله‌ی وسط برابر حاصل‌ضرب جمله‌ی قبل و بعدش است.

پله‌ی یکم: با توجه به «چشم‌انداز» داریم:

$$(۶x)^۲ = (۷x - ۲)(۵x + ۱) = ۳۵x^۲ - ۳x - ۲$$
$$\Rightarrow ۳۶x^۲ = ۳۵x^۲ - ۳x - ۲ \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (x + ۲)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = -۲ \end{cases}$$

پله‌ی دوم: با داشتن این دو مقدار برای x جملات تصاعد هندسی را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$x = -۱ \Rightarrow$ جملات تصاعد: $-۴, -۶, -۹$

تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{۲}{۳}$ تشکیل شد.

$x = -۲ \Rightarrow$ جملات تصاعد: $-۹, -۱۲, -۱۶$

تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۴}$ تشکیل شد.

پس **۲** مقدار قابل‌قبول برای x وجود دارد.

۳۴ ـ (۲) با توجه به این‌که در تصاعد هندسی $a_n = a_۱q^{n-۱}$ است، مقدار $a_۱$ را تعیین می‌کنیم:

$$a_۲a_۴ = ۲a_۵ \Rightarrow (a_۱q)(a_۱q^۳) = ۲(a_۱q^۴)$$
$$\Rightarrow a_۱^۲q^۴ = ۲a_۱q^۴ \Rightarrow \mathbf{a_۱ = ۲}$$

۳۵ ـ (۴) پله‌ی یکم: با داشتن $a_۱$ و q جمله‌ی عمومی تصاعد یا همان a_n را تشکیل می‌دهیم.

$$a_۱ = ۹ \ , \ q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۱۲}{۹} = \frac{۴}{۳}$$
$$a_n = a_۱q^{n-۱} = ۹(\frac{۴}{۳})^{n-۱}$$

پله‌ی دوم: a_6 و a_5 را حساب می‌کنیم:

$$a_6 = 9(\frac{4}{3})^{6-1} = 9(\frac{4}{3})^{5} = 9(\frac{1024}{3^5}) = \frac{1024}{27}$$

$$a_5 = 9(\frac{4}{3})^{5-1} = 9(\frac{4}{3})^{4} = 9(\frac{256}{3^4}) = \frac{256}{9}$$

پله‌ی سوم: $a_6 - a_5$ برابر است با:

$$a_6 - a_5 = \frac{1024}{27} - \frac{256}{9} = \frac{1024-768}{27} = \mathbf{\frac{256}{27}}$$

۳۶ ـ (۲) با توجه به این‌که $q=2$ است، حاصل عبارت خواسته‌شده به‌راحتی محاسبه می‌شود. داریم:

$$\frac{a_1a_7}{a_2^2} = \frac{a_1(a_1q^6)}{(a_1q)^2} = \frac{a_1^2q^6}{a_1^2} = q^4 \xRightarrow{q=2} \frac{a_1a_7}{a_2^2} = 2^4 = \mathbf{16}$$

۳۷ ـ (۲) پله‌ی یکم: قدرنسبت تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$a_9 = 5a_6 \Rightarrow a_1q^8 = 5a_1q^5 \Rightarrow q^3 = 5$$

لازم نیست برای به‌دست‌آوردن q، از ۵ ریشه‌ی سوم بگیرید. فعلاً همین‌طوری به حل تست ادامه می‌دهیم!

پله‌ی دوم: نسبت $\frac{a_{11}}{a5}$ را می‌خواهیم:

$$\frac{a_{11}}{a_5} = \frac{a_1q^{10}}{a_1q^4} = q^6 = (q^3)^2 = 5^2 = \mathbf{25}$$

دیدید لازم نبود تغییراتی در تساوی $q^3 = 5$ بدهیم!!

۳۸ ـ (۴) پله‌ی یکم: چون جملات اول و پنجم و یازدهم تصاعد حسابی سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی صعودی هستند، جمله‌ی پنجم این تصاعد حسابی واسطه‌ی هندسی بین دو جمله‌ی اول و یازدهم تصاعد حسابی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$a_5^2 = a_1a_{11} \Rightarrow (a_1+4d)^2 = a_1(a_1+10d)$$
$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1d$$
$$\Rightarrow 2a_1d = 16d^2 \Rightarrow a_1 = 8d$$

پله‌ی دوم: با تعیین سه جمله‌ی متوالی تصاعد هندسی، قدرنسبت تصاعد را به‌دست می‌آوریم:

$$b_1 = a_1 = 8d$$
$$b_2 = a_5 = a_1 + 4d = 8d + 4d = 12d$$
$$b_3 = a_{11} = a_1 + 10d = 8d + 10d = 18d$$

بنابراین:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{12d}{8d} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

۳۹ ـ (۳) پله‌ی یکم: تعیین رابطه‌ی بین جمله‌ی اول و قدرنسبت تصاعد حسابی:

$$b_1 = a_3 = a_1 + 2d$$
$$b_2 = a_7 = a_1 + 6d$$
$$b_3 = a_9 = a_1 + 8d$$

پله‌ی دوم: b_2 واسطه‌ی هندسی b_1 و b_3 است:

$$b_2^2 = b_1b_3 \Rightarrow (a_1+6d)^2 = (a_1+2d)(a_1+8d)$$
$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2$$
$$\Rightarrow 2a_1d = -20d^2 \Rightarrow a_1 = -10d$$

پله‌ی سوم: a_n را برابر صفر در نظر می‌گیریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 0 \Rightarrow -10d + (n-1)d = 0 \Rightarrow \mathbf{n = 11}$$

۴۰ ـ (۱) پله‌ی یکم: تعیین جملات nاُم تصاعدهای اول و دوم:

تصاعد اول: $a_1 = 4a\ ,\ q_1 = q \Rightarrow a_n = a_1q_1^{n-1} = 4aq^{n-1}$

تصاعد دوم: $a_1 = a\ ,\ q_2 = q \Rightarrow a_n = a_2q_2^{n-1} = aq^{n-1}$

پله‌ی دوم: نسبت جمله‌ی nاُم تصاعد اول به دوم برابر **۴** است.

۴۱ ـ (۱) پله‌ی یکم: برای تعیین واسطه‌ی هندسی بین دو عدد، آن دو عدد را در هم ضرب کرده و از حاصل‌ضرب جذر می‌گیریم. مقدار حاصل‌شده همان واسطه‌ی هندسی بین دو عدد خواهد بود.

پله‌ی دوم: اگر واسطه‌ی هندسی بین دو عدد را با c نشان دهیم، مقدار c برابر است با:

$$c^2 = (2^2 \times 5 \times 7^2) \times (2^2 \times 5^3 \times 11^2) = 2^4 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^2$$
$$\Rightarrow c = 2^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 100 \times 77 = \mathbf{7700}$$

۴۲ ـ (۱) پله‌ی یکم: حاصل‌ضرب ۹ جمله‌ی اول برابر هشت است:

$$a_1a_2...a_9 = a_1^9q^{1+2+\cdots+8} = a_1^9q^{\frac{8(9)}{2}} = a_1^9q^{36} = 8$$
$$\Rightarrow (a_1q^4)^9 = 8 \Rightarrow a_1q^4 = \sqrt[9]{8} = \sqrt[3]{2}$$

پله‌ی دوم: حاصل‌ضرب $a_2.a_4.a_6.a_8$ برابر است با:

$$a_2.a_4.a_6.a_8 = a_1^4q^{1+3+5+7} = a_1^4q^{16}$$
$$(a_1q^4)^4 = (\sqrt[3]{2})^4 = \mathbf{2\sqrt[3]{2}}$$

۴۳ ـ (۲) پله‌ی یکم: جمله‌ی اول تصاعد هندسی برابر ۳ و جمله‌ی هفتم برابر ۱۹۲ است. پس قدرنسبت تصاعد برابر است با:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{192}{3} = 64 = q^6 \Rightarrow q = 2 \text{ یا } q = -2$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که تمام گزینه‌های تست منفی هستند، q را برابر ۲- در نظر گرفته و با تعیین ۵ واسطه‌ی هندسی مجموع آن‌ها را حساب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$3 \xrightarrow{\times(-2)} -6 \xrightarrow{\times(-2)} 12 \xrightarrow{\times(-2)} -24 \xrightarrow{\times(-2)} 48 \xrightarrow{\times(-2)} -96 \xrightarrow{\times(-2)} 192$$

۵ واسطه‌ی هندسی

$$\text{مجموع واسطه‌های هندسی} = -6 + 12 - 24 + 48 - 96 = \mathbf{-66}$$

۴۴ ـ ۲ **پله‌ی یکم**: تعیین جمله‌های عمومی دو تصاعد:

$a_1 = a \ , \ q = -3 \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1} = a_1(-3)^{n-1}$

$a_1 = a \ , \ q = 27 \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1} = a(27)^{n-1}$

پله‌ی دوم: تعیین جمله‌ی هفتم تصاعد دوم:

$a_7 = a(27)^{7-1} = a(3^3)^6 = 3^{18}a$

پله‌ی سوم: تعیین جمله‌ای از تصاعد اول که برابر $3^{18}a$ است. داریم:

$3^{18}a = (-3)^{n-1}a \Rightarrow n-1 = 18 \Rightarrow \mathbf{n = 19}$

توجه کنید که: چون $n-1=18$ زوج است مقدار $3^{18} = (-3)^{18}$ است.

۴۵ ـ ۳ **پله‌ی یکم**: کسر $\frac{p}{q}$ را عددی مانند x در نظر می‌گیریم. برای این‌که از شرّ قسمت اعشاری خلاص شویم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$x = 1/\overline{69} \xRightarrow{\times 100} 100x = 169/\overline{69}$

حالا اگر تفاضل $100x$ و x را حساب کنیم قسمت اعشاری عدد موردنظر حذف می‌شود. بنابراین داریم:

$100x - x = 99x = 169/\overline{69} - 1/\overline{69} = 168 \Rightarrow x = \frac{168}{99} = \frac{p}{q}$

پله‌ی دوم: چون $(p,q) = 1$ است، باید کسر به‌دست‌آمده را تا حد امکان ساده کنیم: $\frac{p}{q} = \frac{168}{99} = \frac{56}{33} \ , \ (56,33) = 1$

پله‌ی سوم: مجموع ارقام q برابر است با: $3 + 3 = 6$

۴۶ ـ ۳ **پله‌ی یکم**: ابتدا عدد اعشاری داده‌شده را به‌صورت یک عدد اعشاری متناوب نمایش می‌دهیم: $x = 0/1333... = 0/1\overline{3}$

پله‌ی دوم: حالا با راه‌کار حذف قسمت اعشاری عدد داده‌شده، کسر مولد آن‌را به‌دست می‌آوریم: $x = 0/1\overline{3} \xRightarrow{\times 10} 10x = 1/\overline{3} \xRightarrow{\times 10} 100x = 13/\overline{3}$

$100x - 10x = 90x = 13/\overline{3} - 1/\overline{3} = 12 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{12}{90}}$

فهرست
پلکان آموزش ۱۷
پاسخ پلکان آموزش ۲۲

بخش ۲ مجموع جمله‌های دنباله‌ها

پلکان آموزش

۱ـ مجموع جمله‌های دنباله‌ی حسابی

مجموعه n جمله‌ی اول یک تصاعد حسابی را با S_n نشان می‌دهیم؛ یعنی در واقع داریم:

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

مجموع جمله‌های دنباله‌ی حسابی

اگر جمله‌ی نخست دنباله را a در نظر گرفته و قدرنسبت دنباله‌ی حسابی برابر d باشد، مجموع جمله‌های دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال ۱ در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی پنجم ۱۹- و جمله‌ی دهم ۳۱ است. مجموع بیست جمله‌ی ابتدای این دنباله را به‌دست آورید. *(تمرین کتاب ریاضی عمومی رشته‌ی تجربی)*

با توجه به این‌که $a_5 = -19$ و $a_{10} = 31$ است، قدرنسبت دنباله را تعیین می‌کنیم:

$a_{10} - a_5 = 5d \Rightarrow 5d = 31 - (-19) = 31 + 19 = 50 \Rightarrow d = 10$

جمله‌ی اول دنباله یا همان a_1 را به‌دست می‌آوریم: $a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow -19 = a_1 + 40 \Rightarrow a_1 = -59$

حالا دیگر می‌توانیم مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله را حساب کنیم:

$S_{20} = \frac{20}{2}[-118 + (19 \times 10)] = 10(-118 + 190) = 10 \times 72 = 720$

ویژگی‌های مجموع جمله‌های دنباله‌های حسابی

① **مجموع n عدد طبیعی متوالی که از عدد ۱ شروع شده باشد برابر است با:**

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

② **مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی که از عدد ۱ شروع شده برابر است با:**

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

③ **مجموع n عدد طبیعی زوج متوالی که از عدد ۲ شروع شده برابر است با:**

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

④ **اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول تصاعد حسابی و S_{n-1} مجموع $n-1$ جمله‌ی اول همان تصاعد باشد، جمله‌ی nاُم یا همان a_n برابر است با:** $a_n = S_n - S_{n-1}$

مورد ③ را می‌توان از ① نتیجه گرفت. چه‌گونه؟

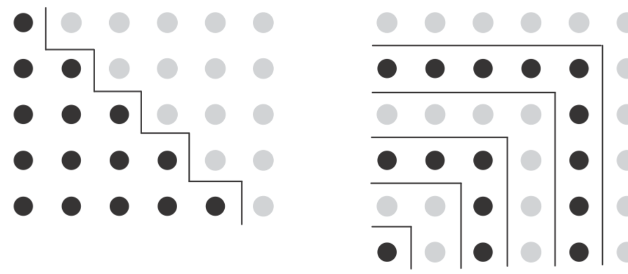
دلیل مورد④ را می‌دانید؟! کاری ندارد که! نگاه کنید:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$

حالا یک تفریق ساده، ما را به رابطه‌ی مهم $a_n = S_n - S_{n-1}$ می‌رساند!

دو شکل زیر را ببینید. به نظرتان هر کدام از شکل‌ها، اثبات شهودی کدام‌یک از رابطه‌های بالاست؟



.... (شما الان مثلاً دارید فکر می‌کنید!) ....

....

۱ ـ در تصاعد عددی که جمله‌ی n اُم آن $a_n = ۲n + ۱$ است، مجموع هفت جمله‌ی اول چه‌قدر است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۹ ۳) ۵۶ ۴) ۶۳

۲ ـ در یک تصاعد عددی جمله‌ی پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله‌ی ماقبل خود به اندازه‌ی $\frac{۱}{۲}$ کم‌تر است. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول آن کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۲)*

۱) ۲۲/۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۳۰

۳ ـ در یک تصاعد عددی $a_۶ + a_{۱۹} = ۲۵$ است. مجموع بیست‌وچهار جمله‌ی اول این تصاعد برابر است با:

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۵۰

۴ ـ در یک تصاعد حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند $(a_۲ + a_۸ = ۰)$ و جمله‌ی هفتم برابر چهار است $(a_۷ = ۴)$، مجموع هشت جمله‌ی اول چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۲)*

۱) ۱۸ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) ۸−

۵ ـ مجموع تمام اعداد طبیعی بخش‌پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۱)*

۱) ۲۴۲۰ ۲) ۲۴۵۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۵۵۰

۶ ـ اعداد $\ldots , \frac{۵}{۲} , y , x , ۱$ چهار جمله‌ی اول از یک تصاعد عددی‌اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۶ ـ خارج از کشور)*

۱) ۵۷ ۲) ۶۲/۵
۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۸

۷ ـ در تصاعد حسابی با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{۱}{۲}n + ۱$ مجموع جملات متوالی شروع از جمله‌ی دهم و ختم به جمله‌ی سی‌ام کدام است؟

۱) ۱۶۸ ۲) ۱۸۹ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۳۱

۸ ـ مجموع چند جمله از تصاعد عددی $\ldots , ۱۰ , ۶ , ۲$ برابر جمله‌ی سیزدهم است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۵)*

۱) ۱۰ جمله ۲) ۶ جمله ۳) ۵ جمله ۴) ۸ جمله

۹ ـ مجموع چند جمله‌ی تصاعد عددی $\ldots , ۱۲ , ۱۵ , ۱۸$ برابر صفر است؟

۱) ۱۱ جمله ۲) ۱۰ جمله ۳) ۱۴ جمله ۴) ۱۳ جمله

۱۰ ـ در یک تصاعد عددی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول از این تصاعد برابر صفر است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) ۱۸ ۲) ۱۹
۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۱ ـ در یک تصاعد حسابی $S_۵ = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۵ = ۱۰۰$ و $S_۴ = a_۱ + \cdots + a_۴ = ۴۴$، قدرنسبت تصاعد کدام است؟

۱) ۹− ۲) ۱۸− ۳) ۹ ۴) ۱۸

۱۲ ـ اگر مجموع هشت جمله‌ی اول از تصاعد حسابی $a_۱ = ۱ + ۲p$ و $a_۲ = p - ۱$ برابر ۶۰ باشد $(S_۸ = ۶۰)$، قدرنسبت تصاعد چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸)*

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۹− ۴) ۷−

۱۳ ـ اگر مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد حسابی از رابطه‌ی $S_n = n(3n+4)$ به‌دست بیاید، جمله‌ی هفتم تصاعد چه مقداری خواهد داشت؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۱ ۳) ۴۳ ۴) ۴۵

۱۴ ـ در یک تصاعد عددی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این تصاعد کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۵ ـ خارج از کشور)*

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹

۱۵ ـ مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۱ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۵)*

۱) ۸۱۶ ۲) ۸۵۲ ۳) ۸۶۷ ۴) ۸۸۴

۱۶ ـ یک تصاعد حسابی صعودی متناهی از سیزده جمله تشکیل شده است. مجموع این جملات برابر ۳۲۵ است. اگر اختلاف جمله‌ی اول و آخر برابر ۴۸ باشد، جمله‌ی سوم چه‌قدر می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۵

۱۷ ـ در تصاعد حسابی ... , ۲۱− , x , ۲۷− مجموع جملات منفی کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۷)*

۱) ۱۳۵− ۲) ۱۵۰− ۳) ۷۵− ۴) ۲۷۰−

۱۸ ـ اگر در یک تصاعد حسابی مجموع n جمله‌ی اول آن $S_n = n(3n+2)$ باشد، جمله‌ی n اُم این تصاعد برابر است با:

۱) $6n+1$ ۲) $6n-1$ ۳) $12n+2$ ۴) $12n-2$

۱۹ ـ مجموع $2n+1$ جمله‌ی یک تصاعد حسابی ۱۸۷ و جمله‌ی وسط ۱۷ است. n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۰ ـ مجموع چند جمله از تصاعد عددی ... , ۵ , ۳ , ۱ برابر ۶۴ است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۷ ـ خارج از کشور)*

۱) ۷ جمله ۲) ۹ جمله ۳) ۸ جمله ۴) ۶ جمله

۲۱ ـ در یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول a اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چه‌قدر افزوده خواهد شد؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۳)*

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۲۲ ـ مجموع شش عدد متوالی در یک تصاعد عددی صعودی برابر ۶۹ است. اگر بدانیم حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این عددها برابر ۷۶ است، جمله‌ی سوم چه‌قدر خواهد بود؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۳ ـ اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد: (۱),(۲,۳,۴),(۵,۶,۷,۸,۹),... مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۴ ـ خارج از کشور)*

۱) ۱۶۹۱ ۲) ۱۷۱۰ ۳) ۱۷۲۹ ۴) ۱۷۴۸

۲۴ ـ چند جمله از تصاعد حسابی ... , ۱۵ , ۹ , ۳ را باید جمع کنیم تا عدد ۶۷۵ به دست بیاید؟

۱) سیزده ۲) پانزده ۳) هفده ۴) نوزده

۲۵ ـ در یک تصاعد حسابی، مجموع شش جمله‌ی اول برابر ۱۰۲ و مجموع شش جمله‌ی بعدی برابر ۳۱۸ است. مجموع جمله‌های ششم و پانزدهم چه‌قدر است؟

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۱۸ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۲۵

۲۶ ـ بین ۱ و ۸۱ چه تعداد جمله درج شود تا مجموع جمله‌های تصاعد حسابی حاصل، برابر ۲۴۶ گردد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۷ ـ هرگاه داشته باشیم: $S = 12^2 - 11^2 + 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$، مقدار S چه‌قدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۵۵ ۳) ۷۸ ۴) ۱۰۵

۲۸ ـ اگر $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n+3) = 351$ باشد، n کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۲۹ ـ در بیست جمله‌ی اول از تصاعد عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۵ ـ خارج از کشور)*

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ ـ مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی

مانند تصاعد حسابی، در این‌جا هم مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی را با S_n نمایش می‌دهیم؛ یعنی: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1}$

مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی

اگر a جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی و q قدرنسبت همان دنباله باشد، مجموع n جمله‌ی اول این دنباله‌ی هندسی برابر است با: $S = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$

مثال ۱۲ **مجموع ده جمله‌ی ابتدای دنباله‌ی $a_n = \frac{3}{2}(-2)^n$ را به‌دست آورید.**

(تمرین کتاب ریاضی عمومی رشته‌ی تجربی)

این دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جمله‌ی اول ۳- و قدرنسبت ۲-. بنابراین S_{10} برابر است با: $S_{10} = \frac{-3(1-(-2)^{10})}{1-(-2)} = (1-1024) = 1023$

در یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت q که در آن $|q|<1$ است، مجموع **تمام** جمله‌های دنباله از رابطه‌ی $S_\infty = \frac{a}{1-q}$ محاسبه می‌شود.

به نظرتان دلیل نکته‌ی بالا چیست؟

راهنمایی هم می‌کنیم! یک عدد بین صفر و یک، وقتی به توان ∞ برسد، مقدارش به عدد صفر میل می‌کند.

۳۰ ـ تصاعد هندسی $2, x, \frac{1}{2}, \cdots$ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۶)*

۱) $\frac{41}{32}$ ۲) $\frac{21}{16}$ ۳) $\frac{11}{8}$ ۴) $\frac{23}{16}$

۳۱ ـ در یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q = 2$ مجموع شش جمله اول چند برابر مجموع سه جمله اول است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۶)*

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۲ ـ در تصاعد هندسی ... و $\frac{1}{2}$ و ۲ مجموع ۵ جمله اول چند برابر مجموع پنج جمله دوم است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۱)*

۱) 2^{10} ۲) 2^2 ۳) ۲ ۴) 2^5

۳۳ ـ در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله‌ی اول آن ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۸)*

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

۳۴ ـ حاصل $A = (1 + x + x^2 + \cdots + x^8)(1 - x + x^2 - \cdots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۲)*

۱) ۵۰۷ ۲) ۵۱۱ ۳) ۵۱۲ ۴) ۵۱۶

۳۵ ـ حاصل عبارت $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{64})+\cdots$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۷۸)*

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{4}$

۳۶ ـ حد مجموع $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \cdots$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۳۷ ـ حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی با جمله‌ی n اُم $a_n = 5(-\frac{2}{3})^{2n-1}$، برابر چند است؟

۱) -6 ۲) -5 ۳) $-\frac{30}{13}$ ۴) $-\frac{51}{5}$

۳۸ ـ حد مجموع جملات تصاعد هندسی نامحدود $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \cdots$ برابر $8 - k^2$ است. آن‌گاه k برابر است با:

۱) ± 2 ۲) ± 3 ۳) ± 4 ۴) ± 5

۳۹ ـ در تصاعد هندسی $a_1, \frac{a_1}{2}, \cdots$ مقدار S_3 و S_6 را به‌صورت $S_6 = a_6 + a_7 + \cdots$ و $S_3 = a_3 + a_4 + \cdots$ تعریف می‌کنیم. کدام رابطه بین S_3 و S_6 برقرار است؟

۱) $S_3 = \frac{S_6}{8}$ ۲) $S_3 = 8S_6$ ۳) $S_3 = S_6$ ۴) $S_3 = 3S_6$

۴۰ ـ حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی بی‌پایان برابر ۳۰ و حد مجموع مربعات آن جملات برابر ۱۵۰ است. قدر نسبت این تصاعد چه‌قدر است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{7}{5}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{7}$

۴۱ ـ توپی را از ارتفاع ۱۵ متری رها می‌کنیم. اگر پس از هر بار برخورد کردن به زمین، $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی را بالا برود، مجموع مسافتی که توپ طی می‌کند تا بایستد چه‌قدر می‌شود؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲/۵ ۳) ۲۳/۵ ۴) ۳۰

۴۲ ـ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ مفروض است. وسط اضلاع این مثلث را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث دیگری تشکیل شود. بار دیگر وسط اضلاع مثلث داخلی را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث دیگری حاصل شود و... این کار را بی‌شمار دفعه انجام می‌دهیم. مجموع محیط‌های مثلث‌ها چه‌قدر خواهد بود؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۳ ۳) ۳۶ ۴) ۳۹

۴۳ ـ حاصل $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}-\frac{1}{729}+\cdots$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۳)*

۱) $\frac{12}{27}$ ۲) $\frac{12}{29}$ ۳) $\frac{11}{26}$ ۴) $\frac{11}{27}$

۴۴ ـ بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) $30(2+\sqrt{2})$ ۲) $48\sqrt{2}$ ۳) $30(\sqrt{2}+1)$ ۴) $36(\sqrt{2}+1)$

فهرست
پلکان آموزش ۱۷
پاسخ پلکان آموزش ۲۲

پاسخ تست‌های پلکان آموزش

۱ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** مقدار a_7 (جمله‌ی هفتم) و a_1 (جمله‌ی اول) تصاعد عددی را مشخص می‌کنیم: $a_n=2n+1\Rightarrow a_7=(2\times7)+1=14+1=15$

$a_n=2n+1\Rightarrow a_1=(2\times1)+1=2+1=3$

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ مجموع هفت جمله‌ی اول تصاعد حسابی را به‌دست می‌آوریم:

$$S_7=\frac{7}{2}(a_1+a_7)=\frac{7}{2}(3+15)=\frac{7\times18}{2}=\mathbf{63}$$

۲ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** معنی عبارت «هر جمله‌ی تصاعد عددی از جمله‌ی ما قبل خود به اندازه‌ی $\frac{1}{2}$ کم‌تر است» چیست؟

یعنی قدرنسبت تصاعد عددی برابر $-\frac{1}{2}$ است و ما یک تصاعد عددی نزولی داریم.

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $a_5=3$ است، مقدار a_1 را تعیین می‌کنیم:

$$a_5=a_1+4d\xRightarrow{a_5=3,d=-\frac{1}{2}}3=a_1-2\Rightarrow a_1=5$$

پله‌ی سوم: مجموع ۱۰ جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_{10}=\frac{10}{2}[2a_1+9d]=5(10-\frac{9}{2})=5\times\frac{11}{2}=\frac{55}{2}=\mathbf{27/5}$$

۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** رابطه‌ی $a_6+a_{19}=25$ را باز می‌کنیم تا به نتایج موردنظرمان دست پیدا کنیم:

$(a_1+5d)+(a_1+18d)=25$

$2a_1+23d=25 \qquad \mathrm{I}$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی $S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$ در مورد مجموع جمله‌های تصاعد عددی، مجموع بیست و چهار جمله‌ی اول این تصاعد برابر است با:

$$S_{24}=\frac{24}{2}[2a_1+23d]\overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow}S_{24}=12\times25=300$$

۴ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** با توجه به دو رابطه‌ی $a_2+a_8=0$ و $a_7=4$، مقدار a_1 و d را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$a_2+a_8=(a_1+d)+(a_1+7d)=2a_1+8d=2(a_1+4d)=0$

$\Rightarrow a_1+4d=0\Rightarrow a_1=-4d \qquad \mathrm{I}$

$a_7=a_1+6d=4\overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow}-4d+6d=4\Rightarrow 2d=4\Rightarrow d=2$

$\overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow}a_1=-4(2)=-8$

پله‌ی دوم: مجموع ۸ جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_8=\frac{8}{2}(2a_1+7d)=4(-16+14)=4(-2)=-8$$

۵ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** دنباله‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۶ که بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ قرار دارند را مشخص می‌کنیم:

دنباله‌ی اعداد: $102, 108, 114, \ldots, 192, 198$

پله‌ی دوم: این دنباله یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول ۱۰۲ و جمله‌ی آخر ۱۹۸ است. تعداد این جملات برابر است با تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ . این تعداد از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

تعداد جملات دنباله $=[\frac{200}{6}]-[\frac{100}{6}]=[33/\overline{3}]-[16/\overline{6}]$

$=33-16=17$

یادآوری: تعداد اعداد بخش‌پذیر بر a از میان عددهای $1,2,3,\ldots,n$ برابر $[\frac{n}{a}]$ است.

پله‌ی سوم: مجموع جملات دنباله برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow S_{17}=\frac{17}{2}(102+198)=\frac{17\times300}{2}$$

$$=17\times150=\mathbf{2550}$$

۶ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** x و y به شما داده‌شده تا سرگرم شوید! خودتان را معطل این دو مجهول نکنید. جمله‌ی اول این تصاعد عددی برابر ۱ و جمله‌ی چهارم آن برابر $\frac{5}{2}$ است. بنابراین قدرنسبت تصاعد عددی برابر است با: $a_4-a_1=3d\Rightarrow\frac{5}{2}-1=3d\Rightarrow d=\frac{1}{2}$

پله‌ی دوم: با دانستن این‌که $a_1=1$ و $d=\frac{1}{2}$ است، مجموع پانزده جمله‌ی اول تصاعد را حساب می‌کنیم:

$$S_{15}=\frac{15}{2}(2a_1+14d)=\frac{15}{2}(2+7)=\frac{15\times9}{2}=\mathbf{67/5}$$

۷ ـ ۴ **پله‌ی یکم:** مقدار جمله‌ی دهم و جمله‌ی سی‌ام را حساب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$a_n=\frac{۱}{۲}n+۱\Rightarrow\begin{cases}a_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}+۱=۵+۱=۶\\ a_{۳۰}=\frac{۳۰}{۲}+۱=۱۵+۱=۱۶\end{cases}$$

پله‌ی دوم: تعداد جملات تصاعد حسابی با شروع از جمله‌ی دهم و ختم به جمله‌ی سی‌اُم برابر ۲۱ است. بنابراین مجموع این جملات برابر است با:

$$S=\frac{۲۱}{۲}(a_{۱۰}+a_{۳۰})=\frac{۲۱}{۲}(۶+۱۶)=۲۱\times۱۱=\mathbf{۲۳۱}$$

۸ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** مقدار جمله‌ی سیزدهم را حساب می‌کنیم:

$$d=a_۲-a_۱=۶-۲=۴$$

$$a_{۱۳}=a_۱+۱۲d=۲+(۱۲\times۴)=۲+۴۸=۵۰$$

پله‌ی دوم: می‌خواهیم ببینیم مجموع چند جمله از این تصاعد عددی برابر ۵۰ می‌شود. داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]=\frac{n}{۲}[۴+۴(n-۱)]=\frac{n}{۲}(۴n)=۲n^۲=۵۰$$

$$\Rightarrow n^۲=۲۵\Rightarrow \mathbf{n=۵}$$

۹ ـ ۴ **پله‌ی یکم:** قدرنسبت تصاعد عددی برابر است با:

$$d=a_۲-a_۱=۱۵-۱۸=-۳$$

پله‌ی دوم: می‌خواهیم تعیین کنیم مجموع چند جمله از این تصاعد عددی برابر صفر می‌شود. داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]=\frac{n}{۲}[۳۶-۳(n-۱)]=\frac{n}{۲}(۳۹-۳n)=۰$$

$$\overset{n\neq۰}{\Rightarrow}۳۹-۳n=۰\Rightarrow ۳n=۳۹\Rightarrow \mathbf{n=۱۳}$$

۱۰ ـ ۴ **پله‌ی یکم:** با توجه به این‌که «جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است»، داریم:

$$a_۷=\frac{۱}{۲}a_۳\Rightarrow a_۱+۶d=\frac{۱}{۲}(a_۱+۲d)\Rightarrow a_۱+۶d=\frac{a_۱}{۲}+d$$

$$\Rightarrow\frac{a_۱}{۲}=-۵d\Rightarrow a_۱=-۱۰d$$

پس جمله‌ی اول تصاعد ۱۰- برابر قدرنسبت تصاعد عددی است.

پله‌ی دوم: می‌خواهیم ببینیم مجموع چند جمله‌ی اول تصاعد برابر صفر می‌شود. S_n را برابر صفر قرار داده و مقدار n را تعیین می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]=\frac{n}{۲}[-۲۰d+(n-۱)d]=۰$$

$$\overset{n\neq۰}{\Rightarrow}d[(n-۱)-۲۰]=۰\Rightarrow n-۱=۲۰\Rightarrow \mathbf{n=۲۱}$$

۱۱ ـ ۴ **پله‌ی یکم:** یک رابطه‌ی دو معادله و دو مجهول بر اساس مجموع جملات داده‌شده تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$S_۵=۱۰۰\Rightarrow\frac{۵}{۲}(۲a_۱+۴d)=۱۰۰\Rightarrow ۵a_۱+۱۰d=۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۵(a_۱+۲d)=۱۰۰\Rightarrow a_۱+۲d=۲۰$$

$$S_۴=۴۴\Rightarrow\frac{۴}{۲}(۲a_۱+۳d)=۴۴\Rightarrow ۲a_۱+۳d=۲۲$$

پله‌ی دوم: با حل این دو معادله و دو مجهول، مقدار d یا همان قدرنسبت تصاعد را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}a_۱+۲d=۲۰\\ ۲a_۱+۳d=۲۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲a_۱-۴d=-۴۰\\ ۲a_۱+۳d=۲۲\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}-d=-۱۸\Rightarrow \mathbf{d=۱۸}$$

۱۲ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** قدرنسبت تصاعد را به‌صورت پارامتری حساب می‌کنیم. (یعنی برحسب p) داریم:

$$d=a_۲-a_۱=p-۱-(۱+۲p)=-p-۲$$

پله‌ی دوم: مجموع هشت جمله‌ی اول تصاعد عددی با جمله‌ی اول $a_۱=۱+۲p$ و قدرنسبت $d=-p-۲$ برابر ۶۰ است. p برابر است با:

$$S_۸=\frac{۸}{۲}(۲a_۱+۷d)=۴(۲a_۱+۷d)=۶۰\Rightarrow ۲a_۱+۷d=۱۵$$

$$\Rightarrow ۲(۱+۲p)+۷(-p-۲)=۲+۴p-۷p-۱۴=۱۵$$

$$-۳p=۲۷\Rightarrow p=-۹$$

پله‌ی سوم: قدرنسبت تصاعد حسابی برابر است با:

$$d=-p-۲=-(-۹)-۲=۹-۲=۷$$

۱۳ ـ ۳ **چشم‌انداز:** جمله‌ی هفتم تصاعد حسابی برابر اختلاف مجموع جمله‌های اول تا هفتم و مجموع جمله‌های اول تا ششم است.

تعمیم بدهید؛ همین مطلب برای جمله‌ی nاُم به‌صورت زیر می‌شود:

$$a_n=S_n-S_{n-۱}$$

دلیل این را در قسمت آموزش گفته‌ایم. یادتان هست که؟!

پله‌ی یکم: $S_۷$ و $S_۶$ را حساب می‌کنیم:

$$S_۷=۷[(۳\times۷)+۴]=۷(۲۱+۴)=۷\times۲۵=۱۷۵$$

$$S_۶=۶[(۳\times۶)+۴]=۶(۱۸+۴)=۶\times۲۲=۱۳۲$$

پله‌ی دوم: جمله‌ی هفتم تصاعد برابر است با:

$$a_۷=S_۷-S_۶=۱۷۵-۱۳۲=\mathbf{۴۳}$$

۱۴ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** وقتی مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعداز آن ۳۰ باشد، پس مجموع نُه جمله‌ی اول این تصاعد برابر ۴۵ است. بنابراین داریم:

$$S_۴=۱۵\Rightarrow\frac{۴}{۲}(۲a_۱+۳d)=۱۵\Rightarrow ۴a_۱+۶d=۱۵$$

$$S_۹=۴۵\Rightarrow\frac{۹}{۲}(۲a_۱+۸d)=۴۵\Rightarrow ۲a_۱+۸d=۱۰\Rightarrow a_۱+۴d=۵$$

پله‌ی دوم: مقدار $a_۱$ و d را حساب می‌کنیم:

$$a_۱+۴d=۵\Rightarrow a_۱=۵-۴d \qquad \mathrm{I}$$

$$۴a_۱+۶d\overset{\mathrm{I}}{=}۲۰-۱۶d+۶d=۱۵\Rightarrow ۱۰d=۵\Rightarrow d=\frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow}a_۱=۵-\frac{۴}{۲}=۵-۲=۳$$

پله‌ی سوم: $a_{۱۱}$ برابر است با:

$$a_{۱۱}=a_۱+۱۰d=۳+\frac{۱۰}{۲}=۳+۵=۸$$

۱۵ ــ ۳ **پله‌ی یکم:** دنباله‌ی اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۱، یک دنباله‌ی حسابی است. جمله‌های این دنباله به‌صورت زیر است:

$3, 9, 15, 21, \dots, 93, 99$

پله‌ی دوم: برای به‌دست‌آوردن این مجموع اعداد باید مجموع اعداد دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۳ و قدرنسبت ۶ را محاسبه کنیم.
هم‌چنین تعداد جملات این دنباله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\underset{\substack{\downarrow\\99}}{a_n} = \underset{\substack{\downarrow\\3}}{a_1} + (n-1)\underset{\substack{\downarrow\\6}}{d} \Rightarrow 99 = 3 + 6(n-1)$$

$$6n - 3 = 99 \Rightarrow 6n = 102 \Rightarrow n = 17$$

پس این دنباله دارای ۱۷ جمله است!

پله‌ی سوم: پس مجموع این جملات برابر است با:

$$S = \frac{17}{2}(3+99) = \frac{17\times 102}{2} = 17\times 51 = \mathbf{867}$$

۱۶ ــ ۳ **پله‌ی یکم:** فرض‌های موجود در تست را به‌طور دقیق مشخص می‌کنیم. اول از همه می‌دانیم $S_{13} = 325$ است. هم‌چنین $a_{13} - a_1 = 48$ است. بنابراین داریم:

$$a_{13} - a_1 = 48 \Rightarrow 12d = 48 \Rightarrow d = 4$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) = 325 \Rightarrow \frac{13}{2}(2a_1 + 48) = 325$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 48 = 50 \Rightarrow 2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$$

پس با یک تصاعد حسابی با جمله‌ی اول ۱ و قدرنسبت ۴ روبه‌رو هستیم.

پله‌ی دوم: جمله‌ی سوم یا a_3 برابر است با:

$$a_3 = a_1 + 2d = 1 + (4\times 2) = 1 + 8 = \mathbf{9}$$

۱۷ ــ ۱ **پله‌ی یکم:** قدرنسبت تصاعد را به‌دست می‌آوریم:

$$a_3 - a_1 = -21 - (-27) = -21 + 27 = 6 = 2d \Rightarrow d = 3$$

بنابراین یک تصاعد حسابی صعودی با قدرنسبت ۳ داریم.

پله‌ی دوم: آخرین جمله‌ی منفی این تصاعد حسابی برابر ۳- است که نهمین جمله‌ی تصاعد محسوب می‌شود. چون داریم:

$$-27, -24, -21, -18, -15, -12, -9, -6, \underset{\downarrow}{-3}$$

جمله‌ی نهم

پله‌ی سوم: مجموع جملات منفی این تصاعد حسابی را به‌دست می‌آوریم.

$$S_9 = \frac{9}{2}(-27-3) = \frac{9}{2}(-30) = 9(-15) = \mathbf{-135}$$

۱۸ ــ ۲ **پله‌ی یکم:** با توجه به رابطه‌ی داده‌شده برای محاسبه‌ی مجموع n جمله‌ی اول، مجموع $(n-1)$ جمله‌ی اول تصاعد حسابی را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{n-1} = (n-1)[(3(n-1)+2] = (n-1)(3n-3+2) = (n-1)(3n-1)$$

پله‌ی دوم: برای تعیین جمله‌ی n اُم این تصاعد، کافی است اختلاف S_n و S_{n-1} را حساب کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_n = S_n - S_{(n-1)} = n(3n+2) - (n-1)(3n-1)$$

$$= 3n^2 + 2n - 3n^2 + 4n - 1 = \mathbf{6n-1}$$

۱۹ ــ ۱ **پله‌ی یکم:** اگر $2n+1$ جمله داشته باشیم، جمله‌ی وسط جمله‌ی $(n+1)$اُم است. بنابراین $a_{n+1} = 17$ است. پس داریم:

$$a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)d = a_1 + nd = 17 \qquad \text{I}$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $S_{2n+1} = 187$ است و با استفاده از رابطه‌ی I، مقدار n را تعیین می‌کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$S_{2n+1} = \frac{2n+1}{2}[2a_1 + (2n+1-1)d] = \frac{2n+1}{2}(2a_1 + 2nd)$$

$$= (2n+1)(a_1 + nd) = 187 \xRightarrow{\text{I}} 17(2n+1) = 187 \Rightarrow 2n+1 = 11$$

$$\Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow \mathbf{n = 5}$$

۲۰ ــ ۳ می‌دانیم $S_n = 64$ است. می‌خواهیم n را به‌دست بیاوریم. با این اطلاعات که $a_1 = 1$ و $d = 2$ است. دست به کار می‌شویم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = 64 \xRightarrow{a_1=1,\, d=2} \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = n^2 = 64$$

$$\Rightarrow \mathbf{n = 8}$$

۲۱ ــ ۴ **پله‌ی یکم:** مجموع بیست جمله‌ی اول یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت d برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a + 19d) = 10(2a + 19d)$$

پله‌ی دوم: فرض می‌کنیم یک واحد به قدرنسبت اضافه شود. در این حالت مجموع بیست جمله‌ی اول را با S'_{20} نشان می‌دهیم. S'_{20} برابر است با:

$$S'_{20} = \frac{20}{2}[2a + 19(d+1)] = 10(2a + 19d + 19) = 10\underbrace{(2a + 19d)}_{S_{20}} + 190$$

$$\Rightarrow S'_{20} = S_{20} + 190$$

بنابراین به مجموع بیست جمله‌ی اول **۱۹۰** واحد اضافه خواهد شد.

۲۲ ــ ۴ **پله‌ی یکم:** کوچک‌ترین جمله را a_1 و بزرگ‌ترین جمله را a_6 در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض‌های موجود در تست، روابط را نوشته و مقدار a_1 و a_6 را محاسبه می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$S_6 = \frac{6}{2}(a_1 + a_6) = 69 \Rightarrow 3(a_1 + a_6) = 69 \Rightarrow a_1 + a_6 = 23$$

پله‌ی دوم: می‌دانیم $a_1 a_6 = 76$ است. تنها اعدادی که مجموعشان برابر ۲۳ و حاصل ضرب‌شان برابر ۷۶ می‌شود، اعداد ۱۹ و ۴ هستند. پس $a_1 = 4$ و $a_6 = 19$ است.

پله‌ی سوم: با تعیین قدرنسبت تصاعد حسابی، مقدار جمله‌ی سوم یا همان a_3 را حساب می‌کنیم:

$$a_6 - a_1 = 5d \Rightarrow 19 - 4 = 15 = 5d \Rightarrow d = 3$$

$$a_3 = a_1 + 2d = 4 + (2\times 3) = 4 + 6 = \mathbf{10}$$

۲۳ ــ ۳ **پله‌ی یکم:** ابتدا دسته‌ی دهم را تشکیل می‌دهیم. عدد آخر این دسته باید مجذور عدد ۱۰ باشد. پس آخرین عدد دسته برابر ۱۰۰ است. عدد اول دسته هم اولین عدد طبیعی بعد از مجذور عدد ۹ یا همان ۸۱ است. پس عدد اول این دسته برابر ۸۲ می‌باشد. پس این دسته به‌صورت زیر در می‌آید:

$$82, 83, 84, 85, \dots, 99, 100$$

پله‌ی دوم: این دسته یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول ۸۲ و جمله‌ی آخر ۱۰۰ است. تعداد اعضای این دسته هم برابر ۱۹ است. پس مجموع اعداد این دسته برابر است با:

$$S=\frac{۱۹}{۲}(۸۲+۱۰۰)=\frac{۱۹\times۱۸۲}{۲}=۱۹\times۹۱=\mathbf{۱۷۲۹}$$

۲۴ ـ ۲ می‌خواهیم در تصاعد حسابی با جمله‌ی اول ۳ و قدرنسبت ۶، مقداری برای n تعیین کنیم که رابطه‌ی $S_n=۶۷۵$ برقرار باشد. داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]=\frac{n}{۲}[۶+۶(n-۱)]=\frac{n}{۲}(۶n)=۳n^۲=۶۷۵$$

$$\Rightarrow n^۲=۲۲۵\Rightarrow \mathbf{n=۱۵}$$

۲۵ ـ ۲ پله‌ی یکم: در واقع $S_۶=۱۰۲$ و $S_{۱۲}-S_۶=۳۱۸$ است. پس $S_{۱۲}=۴۲۰$ است. با توجه به مقدار مجموع شش جمله‌ی اول و مجموع دوازده جمله‌ی اول، مقدار جمله‌ی اول و قدرنسبت تصاعد عددی را تعیین می‌کنیم:

$$S_۶=\frac{۶}{۲}(۲a_۱+۵d)=۱۰۲\Rightarrow ۲a_۱+۵d=۳۴$$

$$S_{۱۲}=\frac{۱۲}{۲}(۲a_۱+۱۱d)=۴۲۰\Rightarrow ۲a_۱+۱۱d=۷۰$$

با کم‌کردن رابطه‌ی اول از رابطه‌ی دوم d را حساب می‌کنیم:

$$۶d=۷۰-۳۴=۳۶\Rightarrow d=۶$$

$$۲a_۱+۵d=۳۴\xrightarrow{d=۶}۲a_۱+۳۰=۳۴\Rightarrow ۲a_۱=۴\Rightarrow a_۱=۲$$

پله‌ی دوم: جمله‌های ششم و پانزدهم را تعیین می‌کنیم:

$$a_۶=a_۱+۵d=۲+(۵\times۶)=۲+۳۰=۳۲$$

$$a_{۱۵}=a_۱+۱۴d=۲+(۱۴\times۶)=۲+۸۴=۸۶$$

پله‌ی سوم: مجموع جمله‌های ششم و پانزدهم برابر است با:

$$a_۶+a_{۱۵}=۳۲+۸۶=\mathbf{۱۱۸}$$

۲۶ ـ ۲ پله‌ی یکم: عدد ۱ را جمله‌ی اول و عدد ۸۱ را جمله‌ی nاُم فرض می‌کنیم. با توجه به این‌که $S_n=۲۴۶$ است، مقدار n را به‌دست می‌آوریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{n}{۲}(۱+۸۱)=۴۱n=۲۴۶\Rightarrow n=۶$$

پله‌ی دوم: تعداد کل جمله‌ها برابر ۶ جمله است. پس بین ۱ و ۸۱ باید **۴ جمله** درج شود تا مجموع جمله‌های تصاعد حسابی برابر ۲۴۶ شود.

۲۷ ـ ۳ خُب کاری ندارد! مجموع داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$S=۱۲^۲-۱۱^۲+۱۰^۲-۹^۲+۸^۲-۷^۲+\dots+۲^۲-۱^۲$$

$$=(۱۴۴-۱۲۱)+(۱۰۰-۸۱)+(۶۴-۴۹)+\dots+(۴-۱)$$

$$=۲۳+۱۹+۱۵+۱۱+۷+۳=\mathbf{۷۸}$$

توجه؛ در مواقعی که با یک محاسبه‌ی ساده می‌توانید مجموع یک تصاعد را حساب کنید، نیازی نیست خودتان را درگیر فرمول‌ها و نکته‌های تصاعد کنید. به خودتان اعتماد داشته باشید!

۲۸ ـ ۱ پله‌ی یکم: با یک تصاعد حسابی که جمله‌ی اول آن $a_۱=۳$ و قدرنسبت آن $d=۴$ است روبه‌رو هستیم. باید ببینیم $۴n+۳$ جمله‌ی چندم این تصاعد است با کمی دقت می‌توانیم بفهمیم که $۴n+۳$ جمله‌ی $(n+۱)$ اُم تصاعد است (چرا؟)

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی مجموع n جمله‌ی تصاعد حسابی، داریم:

$$S_{n+۱}=\frac{n+۱}{۲}[a_۱+a_{n+۱}]=۳۵۱$$

$$\Rightarrow\frac{n+۱}{۲}[۳+۴n+۳]=۳۵۱\Rightarrow (n+۱)(۲n+۳)=۳۵۱$$

$$\xrightarrow{۳۵۱=۱۳\times۲۷}n+۱=۱۳\Rightarrow \mathbf{n=۱۲}$$

۲۹ ـ ۱ پله‌ی یکم: مجموع جملات ردیف فرد برابر ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج برابر ۱۵۰ شده است. به زبان ریاضی یعنی:

$$a_۱+a_۳+a_۵+\dots+a_{۱۹}=۱۳۵\qquad \mathrm{I}$$

$$a_۲+a_۴+a_۶+\dots+a_{۲۰}=۱۵۰\qquad \mathrm{II}$$

پله‌ی دوم: سطر اول را از سطر دوم کم می‌کنیم تا ببینیم به کجا می‌رسیم:

$$\mathrm{II}-\mathrm{I}\Rightarrow(a_۲-a_۱)+(a_۴-a_۳)+(a_۶+a_۵)+\dots+(a_{۲۰}-a_{۱۹})=۱۵$$

پله‌ی سوم: می‌دانیم اختلاف دو جمله‌ی متوالی هر تصاعد حسابی برابر قدرنسبت است. بنابراین از رابطه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\underbrace{d+d+d+\dots+d}_{۱۰\text{ تا}}=۱۵\Rightarrow ۱۰d=۱۵\Rightarrow d=۱/۵$$

پله‌ی چهارم: حالا از رابطه‌ی مجموع n جمله‌ی تصاعد حسابی و II خواهیم داشت:

$$S_n=\frac{n}{۲}[a_۲+a_{۲۰}]\overset{\mathrm{I}}{=}\frac{۱۰}{۲}(a_۲+a_{۲۰})=۱۵۰$$

$$\Rightarrow ۵[(a_۱+d)+(a_۱+۱۹d)]=۱۵۰\Rightarrow ۲a_۱+۲۰d=۳۰$$

$$\xrightarrow{d=۱/۵}۲a_۱+۳۰=۳۰\Rightarrow \mathbf{a_۱=۰}$$

۳۰ ـ ۲ پله‌ی یکم: قدرنسبت تصاعد هندسی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a_۳}{a_۱}=q^۲\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۱}{۴}=q^۲\Rightarrow q=-\frac{۱}{۲}$$

چون در صورت تست شرط شده که تصاعد هندسی غیرنزولی است، پس مقدار $q=\frac{۱}{۲}$ غیرقابل قبول است.

در واقع اگر $q=\frac{۱}{۲}$ باشد، تصاعد به‌صورت $۲,۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\dots$ در می‌آید که نزولی است و به درد ما نمی‌خورد. اما اگر $q=-\frac{۱}{۲}$ باشد، تصاعد به‌صورت $۲,-۱,\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\dots$ در می‌آید که نه نزولی است و نه صعودی در واقع هِی کم و زیاد می‌شود. به این دنباله‌ها، دنباله‌ی **نوسانی** می‌گوییم.

پله‌ی دوم: مجموع شش جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_۶=\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}=\frac{۲(۱-(-\frac{۱}{۲})^۶)}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲(۱-\frac{۱}{۶۴})}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴}{۳}\times\frac{۶۳}{۶۴}=\mathbf{\frac{۲۱}{۱۶}}$$

۳۱ ـ ۴ **پله‌ی یکم:** S_6 و S_3 را به‌دست می‌آوریم:

$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}\ ,\ S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}$$

پله‌ی دوم: نسبت $\frac{S_6}{S_3}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{\frac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{1-q}}}{\frac{\cancel{a_1}(1-q^3)}{\cancel{1-q}}}=\frac{1-q^6}{1-q^3}\xrightarrow{\text{تجزیه}}\frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3}=1+q^3$$

$$\xrightarrow{q=2}\frac{S_6}{S_3}=1+2^3=1+8=\mathbf{9}$$

۳۲ ـ ۱ **پله‌ی یکم:** با توجه به این‌که $a_1=2$ و $q=\frac{1}{4}$ است. مجموع پنج جمله‌ی اول یعنی S_5 و مجموع ۵ جمله‌ی دوم یعنی $S_{10}-S_5$ (چرا؟)

پله‌ی دوم: حالا می‌رویم سراغ محاسبه‌ی نسبت این دو عبارت:

$$\frac{S_{10}-S_5}{S_5}=\frac{S_{10}}{S_5}-1=\frac{\frac{\cancel{a_1}(q^{10}-1)}{\cancel{q-1}}}{\frac{\cancel{a_1}(q^5-1)}{\cancel{q-1}}}-1=\frac{q^{10}-1}{q^5-1}-1$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}}\frac{(q^5+1)(q^5-1)}{q^5-1}-1=q^5$$

پله‌ی سوم: ما حاصل معکوس این کسر را می‌خواهیم. پس:

$$\frac{S_5}{S_{10}-S_5}=\frac{1}{q^5}=\mathbf{2^{10}}$$

۳۳ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** جمله‌ی اول و قدرنسبت تصاعد هندسی را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$a_1+a_3=1\Rightarrow a_1+a_1q^2=1\Rightarrow a_1(1+q^2)=1 \qquad \mathrm{I}$$

$$S_4=3\Rightarrow a_2+a_4=2\Rightarrow a_1q+a_1q^3=2\Rightarrow a_1q(1+q^2)=2\xrightarrow{\mathrm{I}} q=2$$

پله‌ی دوم: $a_1(1+q^2)=1\xrightarrow{q=2}a_1(1+4)=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{5}$

پله‌ی سوم: مجموع ۶ جمله‌ی اول تصاعد برابر است با:

$$S_6=\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{\frac{1}{5}(2^6-1)}{2-1}=\frac{63}{5}=\mathbf{12/6}$$

۳۴ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** هر کدام از پرانتزها مجموع ۹ جمله از یک تصاعد هندسی هستند. داریم:

$$1+x+x^2+\cdots+x^8=\frac{1(x^9-1)}{x-1}$$

$$1-x+x^2-x^3+\dots+x^8=\frac{[1(-x)^9-1]}{-x-1}$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت برحسب x:

$$\text{عبارت}=\frac{x^9-1}{x-1}\times\frac{x^9+1}{x+1}=\frac{x^{18}-1}{x^2-1}$$

پله‌ی سوم: حالا جای‌گذاری $x=\sqrt{2}$:

$$=\frac{(\sqrt{2})^{18}-1}{(\sqrt{2})^2-1}=2^9-1=\mathbf{511}$$

۳۵ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** حد مجموع داده‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$S=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{64})+\cdots$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots)$$

پله‌ی دوم: می‌دانیم حد مجموع بی‌نهایت جمله از یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت q که $|q|<1$ است، برابر $S_\infty=\frac{a}{1-q}$ می‌شود. دو بار از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=1+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

۳۶ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** حد مجموع داده‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{8}+\cdots=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)+(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots)$$

پله‌ی دوم: مانند تست قبل با محاسبه‌ی حد مجموع هریک از پرانتزهای عبارت به‌دست آمده، مقدار S را محاسبه می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$S=1-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=1-1+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

۳۷ ـ ۱ **پله‌ی یکم:** چند جمله‌ی اول این تصاعد هندسی را تشکیل می‌دهیم:

$$a_1=5(-\frac{2}{3})^{2-1}=5(-\frac{2}{3})$$

$$a_2=5(-\frac{2}{3})^{4-1}=5(-\frac{2}{3})^3$$

$$a_3=5(-\frac{2}{3})^{6-1}=5(-\frac{2}{3})^5$$

پله‌ی دوم: قدرنسبت تصاعد برابر است با:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{5(-\frac{2}{3})^3}{5(-\frac{2}{3})}=(-\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$

پله‌ی سوم: حد مجموع جملات تصاعد هندسی برابر است با:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}=\frac{5(-\frac{2}{3})}{1-\frac{4}{9}}=\frac{-\frac{10}{3}}{\frac{5}{9}}=-\frac{90}{15}=\mathbf{-6}$$

۳۸ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** حد مجموع جملات تصاعد هندسی نامحدود را حساب می‌کنیم. داریم:

$$S=\frac{a_1}{1-q}\xrightarrow{a_1=\frac{2}{3},q=\frac{1}{3}}S=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=1$$

پله‌ی دوم: مقدار k را محاسبه می‌کنیم: $k^2-8=1\Rightarrow k^2=9\Rightarrow \mathbf{k=\pm 3}$

۳۹ ـ ۲ **پله‌ی یکم:** جمله‌ی سوم و جمله‌ی ششم تصاعد هندسی را مشخص می‌کنیم:

$$q=\frac{\frac{a_1}{2}}{a_1}=\frac{1}{2}\ ,\ a_3=a_1q^2=a_1(\frac{1}{2})^2=\frac{a_1}{4}$$

$$a_6=a_1q^5=a_1(\frac{1}{2})^5=\frac{a_1}{32}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی $S=\frac{a}{۱-q}$ که در آن a جمله‌ی اول حد مجموع است، نسبت $S_۳$ و $S_۶$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S_۳}{S_۶}=\frac{\frac{a_۳}{\cancel{۱-q}}}{\frac{a_۶}{\cancel{۱-q}}}=\frac{a_۱q^۲}{a_۱q^۵}=\frac{۱}{q^۳}\xRightarrow{q=\frac{۱}{۲}}\frac{S_۳}{S_۶}=۸\Rightarrow \mathbf{S_۳=۸S_۶}$$

۴۰ ـ (۴) پله‌ی یکم: اگر جمله‌ی اول این تصاعد هندسی بی‌پایان a و قدرنسبت آن q باشد، در این صورت داریم:

$$\text{حد مجموع جملات}=S_\infty=\frac{a}{۱-q}=۳۰ \qquad \mathrm{I}$$

$$\text{حد مجموع مربع جملات}=S'_\infty=\frac{a^۲}{۱-q^۲}=۱۵۰$$

پله‌ی دوم: با ایجاد تغییراتی در روابط بالا مقدار q یا همان قدرنسبت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{a^۲}{۱-q^۲}=\frac{a\times a}{(۱-q)(۱+q)}=\frac{a}{۱-q}\times\frac{a}{۱+q}\overset{\mathrm{I}}{=}۳۰\times\frac{a}{۱+q}=۱۵۰$$

$$\overset{\div ۳۰}{\Rightarrow}\frac{a}{۱+q}=۵\Rightarrow a=۵(۱+q) \qquad \mathrm{II}$$

پله‌ی سوم:

$$\frac{a}{۱-q}=۳۰\overset{\mathrm{II}}{\Rightarrow}\frac{۵(۱+q)}{۱-q}=۳۰\Rightarrow\frac{۱+q}{۱-q}=۶$$

$$\Rightarrow ۱+q=۶-۶q\Rightarrow ۷q-۵=\ \mathbf{q=\frac{۵}{۷}}$$

۴۱ ـ (۴) پله‌ی یکم: دنباله‌ای که نشان‌دهنده‌ی مسافت طی‌شده توسط توپ در هر مرحله است را تشکیل می‌دهیم:

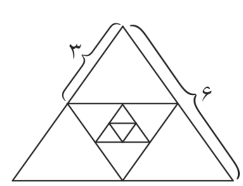
دنباله‌ی مسافت طی‌شده : $۱۵,۵,۵,\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۳},...$

پله‌ی دوم: مجموع مسافت طی‌شده به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$S_\infty=۱۵+۲(۵+\frac{۵}{۳}+\frac{۵}{۳^۲}+...)=۱۵+۲\times\frac{۵}{۱-\frac{۱}{۳}}=۱۵+۲(\frac{۵}{\frac{۲}{۳}})$$

$$۱۵+۲\times\frac{۱۵}{۲}=۱۵+۱۵=\mathbf{۳۰}$$

۴۲ ـ (۳) پله‌ی یکم: شکل گویایی از توضیحات بیان شده رسم می‌کنیم و دنباله‌ای را که شامل محیط مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است، می‌نویسیم. داریم:



محیط مثلث‌های متساوی‌الاضلاع : $۳\times۶\ ,\ ۳\times۳\ ,\ ۳\times\frac{۳}{۲}\ ,\ ...$

پله‌ی دوم: مجموع محیط مثلث‌های متساوی‌الاضلاع برابر حد مجموع تصاعد هندسی نامتناهیِ تشکیل شده است. در نتیجه داریم:

$$S_\infty=\frac{a_۱}{۱-q}=\frac{۱۸}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱۸\times۲=\mathbf{۳۶}$$

۴۳ ـ (۳) پله‌ی یکم: عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$S=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۸۱}+\frac{۱}{۲۴۳}-\frac{۱}{۷۲۹}+\cdots$$

$$=\frac{۱}{۳}+(\frac{۱}{۳})^۲-(\frac{۱}{۳})^۳+(\frac{۱}{۳})^۴+(\frac{۱}{۳})^۵-(\frac{۱}{۳})^۶+\cdots$$

$$=(\frac{۱}{۳}+(\frac{۱}{۳})^۲+(\frac{۱}{۳})^۳+\cdots)-۲((\frac{۱}{۳})^۳+(\frac{۱}{۳})^۶+\cdots)$$

پله‌ی دوم: با محاسبه‌ی حد مجموع هریک از پرانتزها مقدار S را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$S=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}-۲\times\frac{(\frac{۱}{۳})^۳}{۱-(\frac{۱}{۳})^۳}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}-۲\times\frac{\frac{۱}{۲۷}}{\frac{۲۶}{۲۷}}=\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{۲۶}$$

$$=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱۳}=\frac{۱۳-۲}{۲۶}=\mathbf{\frac{۱۱}{۲۶}}$$

۴۴ ـ (۳) پله‌ی یکم: اگر شش عدد بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$ قرار داشته باشند، در این‌صورت عدد ۲ جمله‌ی اول تصاعد هندسی و عدد $۱۶\sqrt{۲}$ جمله‌ی هشتم تصاعد هندسی است. پس قدرنسبت تصاعد هندسی برابر است با:

$$\frac{a_۸}{a_۱}=q^۷\Rightarrow\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۲}=۸\sqrt{۲}=(\sqrt{۲})^۷=q^۷\Rightarrow q=\sqrt{۲}$$

پله‌ی دوم: مجموع این هشت جمله برابر است با:

$$S_۸=\frac{a_۱(q^۸-۱)}{q-۱}=\frac{۲((\sqrt{۲})^۸-۱)}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۲(۱۶-۱)}{\sqrt{۲}-۱}$$

$$=\frac{۳۰}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{۳۰(\sqrt{۲}+۱)}{۲-۱}=\ \mathbf{۳۰(\sqrt{۲}+۱)}$$

فهرست

پلکان آزمون ۲۸
پاسخ پلکان آزمون ۳۱

پلکان آزمون

آزمون یکم (ساده و متوسط)

۳۰ دقیقه

۱ ـ مجموع ۱۰ جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی، $\frac{۳۳}{۳۲}$ برابر مجموع ۵ جمله‌ی اول همین تصاعد است. مقدار قدرنسبت این تصاعد چند است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۲ـ در یک تصاعد عددی، جمله‌ی ششم برابر ۱۳ و جمله‌ی سیزدهم برابر ۶ است. مجموع شش جمله‌ی اول، چه‌قدر از مجموع شش جمله‌ی دوم بیش‌تر است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۴ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۳ ـ اگر دو عدد ۵ و x به‌ترتیب جملات دوم و هفتم یک تصاعد عددی با قدرنسبت d و در عین حال جملات پنجم و ششم یک تصاعد هندسی با قدرنسبت q باشند، مقدار $q-d$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ ـ در یک تصاعد حسابی رابطه‌های $a_۷ + a_۹ = ۸$ و $a_۶ + a_{۱۱} = ۱۱$ برقرار هستند. مجموع ۲۰ جمله‌ی اول این تصاعد چه‌قدر می‌شود؟

۱) ۲۳۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۰۰

۵ ـ در یک تصاعد هندسی، جمله‌ی دهم ۳ برابر جمله‌ی دوم است. اگر مجموع جمله‌های اول و نهم برابر ۱۲ باشد، مقدار جمله‌ی اول چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۳− ۴) ۴−

۶ ـ در یک تصاعد عددی، مجموع سیزده جمله‌ی اول برابر ۱۰۴ است. اگر مجموع جمله‌ی اول و پنجم آن برابر صفر باشد، جمله‌ی هفتم چه‌قدر خواهد بود؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۷ ـ تصاعد عددی $-\frac{۷}{۳}, -\frac{۱۳}{۶}, -۲, \ldots$ را در نظر بگیرید. از جمله‌ی چندم به بعد، همه‌ی جمله‌های این تصاعد بزرگ‌تر از ۵۰ هستند؟

۱) ۳۱۴ ۲) ۳۱۵ ۳) ۳۱۶ ۴) ۳۱۷

۸ ـ حاصل‌ضرب کدام دو جمله در یک تصاعد هندسی، برابر مجذور جمله‌ی هفتمِ همان تصاعد می‌شود؟

۱) اول ـ دوازدهم ۲) چهارم ـ یازدهم
۳) پنجم ـ نهم ۴) سوم ـ سیزدهم

۹ ـ قدرنسبت دو تصاعد هندسی برابر و جمله‌ی اول تصاعد دوم، چهار برابر جمله‌ی اول دیگری است. جمله‌ی n اُم تصاعد اول، چند برابر جمله‌ی n اُم تصاعد دوم است؟

۱) $۲^۶$ ۲) $۲^{-۲}$ ۳) ۲^{-n} ۴) $n^۲$

۱۰ ـ اگر سه زاویه‌ی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند، یکی از زاویه‌ها حتماً برابر است با:

۱) °۹۰ ۲) °۶۰ ۳) °۴۵ ۴) °۳۰

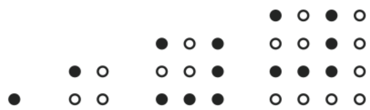
۱۱ ـ فرض کنید دنباله‌ی $x, y, ۴, \ldots$ یک تصاعد حسابی نزولی را نشان می‌دهد. اگر ۱ واحد به x اضافه کنیم، سه جمله‌ی $x+۱, y, ۴$ تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند. y کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲ ـ حاصل $\frac{3^{-2}+3^{-3}+3^{-4}+\dots}{5^{-1}+5^{-3}+5^{-5}+\dots}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) ۱

۱۳ ـ در درایه‌های مربعی شکل زیر، جمله‌ی دهم چند عضو سفید دارد؟ *(سراسری ـ انسانی ـ ۸۳)*



۱) ۵۵
۲) ۷۲
۳) ۶۵
۴) ۵۶

۱۴ ـ مجموع جملات یک تصاعد حسابی برابر ۱۶ و جمله‌ی عمومی آن $\frac{1}{16}-\frac{n}{8}$ است. این تصاعد چند جمله دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۵ ـ چه عددی باید به تک‌تک عددهای ۲۱ و ۱۱ و ۵ اضافه شود، تا سه عدد تشکیل تصاعد هندسی بدهند؟

۱) ۳ ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۳-

۱۶ ـ در یک تصاعد هندسی با جملات مثبت، اگر جمله‌ی هفتم برابر مجذور جمله‌ی دوم باشد، جمله‌ی چندم برابر مکعب جمله‌ی اول است؟

۱) نهم ۲) هشتم ۳) هفتم ۴) ششم

۱۷ ـ در یک تصاعد حسابی $S_8=a_1+a_2+\dots+a_8=76$ و $S_7=a_1+a_2+\dots+a_7=68$ است. قدرنسبت تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $-\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $-\frac{3}{7}$

۱۸ ـ اگر $a>1$ و $1-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^6}+\dots=0/98$ باشد، مقدار a برابر چه عددی خواهد بود؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۹ ـ بین دو عدد ۲ و ۴۸۶- چهار واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. مجموع این چهار واسطه چه‌قدر است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۴۰

۲۰ ـ مقدار x از معادله‌ی $-3+5+13+\dots+x=407$ چه‌قدر است؟

۱) ۵۵ ۲) ۶۶ ۳) ۷۷ ۴) ۸۸

آزمون دوم (استاندارد)

۳۰ دقیقه

۱ ـ مجموع زوایای یک شش‌ضلعی 720° است. اندازه‌ی زاویه‌ها تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. اگر بزرگ‌ترین زاویه 190° باشد، اختلاف اندازه دو زاویه‌ی متوالی چه‌قدر است؟

۱) 28° ۲) 32° ۳) 36° ۴) 40°

۲ ـ مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد عددی $\frac{2n(7n-3)}{9}$ است. قدرنسبت این تصاعد بین کدام دو عدد است؟

۱) ۲ و ۳ ۲) ۳ و ۴ ۳) ۴ و ۵ ۴) ۵ و ۶

۳ ـ موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیه‌ی ۱ واحد، هر بار که به محور برخورد کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود. اندازه‌ی محیط این نیم‌دایره‌های متوالی دنباله‌ی اعداد حقیقی است. مجموع این دنباله، کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۴)*

۱) 2π ۲) 3π
۳) $\frac{3}{2}\pi$ ۴) $\frac{5}{2}\pi$

۴ ـ در یک تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان، حد مجموع جملات پنج برابر جمله‌ی اول است. قدرنسبت چه‌قدر است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۵ ـ در یک تصاعد هندسی نزولی نامحدود، جمله‌ی اول برابر با $\frac{1}{4}$ مجموع جملات بعدی است. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی چهارم است؟

۱) $\frac{125}{64}$ ۲) $\frac{64}{25}$ ۳) $\frac{27}{64}$ ۴) $\frac{64}{125}$

۶ ـ حاصل جمع $\underbrace{9...99}_{\text{۱۵ تا}}+\cdots+999+99+9$ را حساب کنید. در عدد به‌دست‌آمده، چند رقم ۱ مشاهده می‌کنید؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۷ ـ دایره‌ای به قطر ۱ را در نظر بگیرید. دایره‌ی دیگری را رسم می‌کنیم که قطر آن با شعاع دایره‌ی اول برابر باشد و این عمل را ادامه می‌دهیم؛ یعنی پس از رسم هر دایره، دایره‌ی دیگری را به قطر برابر با شعاع دایره‌ی قبل رسم می‌کنیم. چندمین دایره محیطاش از $\frac{\pi}{900}$ کوچک‌تر می‌شود؟

۱) هشتم ۲) نهم ۳) دهم ۴) یازدهم

۸ ـ بین جمله‌ی اول و یازدهم تصاعد حسابی ...,۵,۹,۱۳ می‌خواهیم سه عدد قرار دهیم، به‌طوری که این پنج عدد تشکیل تصاعد هندسی با جمله‌های مثبت بدهند. قدرنسبت این تصاعد چند است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{3}$

۹ ـ اگر a,b,۴ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی باشند و b,a,۴ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی باشند و بدانیم که $a \neq b$ است، حاصل $a+b$ چه‌قدر خواهد بود؟

۱) صفر ۲) ۱− ۳) ۲− ۴) ۴−

۱۰ ـ جملات اول، یازدهم و سی‌ویکم یک تصاعد حسابی، تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند. قدرنسبت این تصاعد هندسی چند است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱ ـ در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۹)*

۱) $\frac{81}{16}$ ۲) ۸
۳) ۹ ۴) ۱۶

۱۲ ـ در یک تصاعد عددی جمله‌ی n اُم به‌صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این تصاعد کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۹)*

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۱۳ ـ اعداد $3\sqrt{3}$,۹,b و 3^a جملات متوالی یک تصاعد هندسی هستند. واسطه هندسی بین دو عدد $a\sqrt{3}$ و b کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۹)*

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۹

۱۴ ـ در یک تصاعد هندسی مجموع ده جمله‌ی اول $4\sqrt{2}+1$ برابر مجموع ۵ جمله اول است. در این تصاعد مجموع ۸ جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۹)*

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱۷

۱۵ ـ در دنباله $a_n = n^2 - (n+1)^2$ مجموع ۱۹ جمله اول کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۹)*

۱) ۱ ۲) ۳۹۹− ۳) ۴۰۱ ۴) ۴۰۰−

۱۶ ـ در یک تصاعد هندسی صعودی به‌صورت ...,۴,a,۹,b مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۹ ـ خارج از کشور)*

۱) $81\frac{3}{8}$ ۲) $81\frac{7}{8}$ ۳) $82\frac{3}{8}$ ۴) $83\frac{1}{8}$

۱۷ ـ در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله‌ی متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۹۰)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸ ـ در یک تصاعد عددی مجموع بیست جمله‌ی اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۶ باشد، جمله‌ی دهم کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۹۰)*

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۱۹ ـ در تصاعد هندسی ...,۱,۲,۴، مجموع چهارده جمله‌ی اول چند برابر مجموع هفت جمله‌ی اول آن است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۹۰ ـ خارج از کشور)*

۱) ۶۵ ۲) ۶۳ ۳) ۱۲۷ ۴) ۱۲۹

۲۰ ـ مجموع n جمله‌ی اول از تصاعد عددی به‌صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این تصاعد مجموع جملات شروع از جمله هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۹۰ ـ خارج از کشور)*

۱) ۹ ۲) $\frac{29}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) ۱۸

فهرست
پلکان آزمون ۲۸
پاسخ پلکان آزمون ۳۱

پاسخ‌های پلکان آزمون

پاسخ تست‌های آزمون یکم

۱ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** مجموع ده جمله‌ی اول و پنج جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی با قدرنسبت q و جمله‌ی اول a را حساب می‌کنیم:

$$S_{۱۰}=\frac{a(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}\ ,\ S_{۵}=\frac{a(q^{۵}-۱)}{q-۱}$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $S_{۱۰}=\frac{۳۳}{۳۲}S_{۵}$ است، مقدار q را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$S_{۱۰}=\frac{۳۳}{۳۲}S_{۵}\Rightarrow \frac{a(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}=\frac{۳۳}{۳۲}\times\frac{a(q^{۵}-۱)}{q-۱}$$

$$\Rightarrow (q^{۵}-۱)(q^{۵}+۱)=\frac{۳۳}{۳۲}(q^{۵}-۱)$$

$$\Rightarrow q^{۵}+۱=\frac{۳۳}{۳۲}\Rightarrow q^{۵}=\frac{۱}{۳۲}\Rightarrow \mathbf{q=\frac{۱}{۲}}$$

۲ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** با توجه به این‌که $a_{۶}=۱۳$ و $a_{۱۳}=۶$ است، مقدار $a_{۱}$ و d را تعیین می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$a_{۱۳}-a_{۶}=۷d\Rightarrow ۷d=۶-۱۳\Rightarrow d=-۱$$

$$a_{۶}=a_{۱}+۵d=a_{۱}-۵=۱۳\Rightarrow a_{۱}=۱۸$$

پله‌ی دوم: مجموع شش جمله‌ی اول را به‌دست می‌آوریم. برای محاسبه‌ی مجموع شش جمله‌ی دوم هم ابتدا مجموع دوازده جمله‌ی اول را به‌دست آورده و سپس مجموع شش جمله‌ی اول را از آن کم می‌کنیم. دست به کار می‌شویم:

$$S_{۶}=\frac{۶}{۲}(a_{۱}+a_{۶})=۳(۱۸+۱۳)=۳\times ۳۱=۹۳$$

$$S_{۱۲}=\frac{۱۲}{۲}(a_{۱}+a_{۱۲})=۶(۱۸+۷)=۶\times ۲۵=۱۵۰$$

(متوجه شدید که چرا $a_{۱۲}=۷$ است دیگه؟)

$$S_{۱۲}-S_{۶}=۱۵۰-۹۳=۵۷=S'$$

پله‌ی سوم: تفاوت مجموع شش جمله‌ی اول و دوم برابر است با:

$$S_{۶}-S'=۹۳-۵۷=\mathbf{۳۶}$$

۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** مقدار قدرنسبت تصاعد عددی یا همان d را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$a_{۲}=۵\ ,\ a_{۷}=x\Rightarrow a_{۷}-a_{۲}=۵d=x-۵\Rightarrow d=\frac{x-۵}{۵}$$

پله‌ی دوم: مقدار q یا قدرنسبت تصاعد هندسی را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۵}=۵\ ,\ a_{۶}=x\Rightarrow \frac{a_{۶}}{a_{۵}}=q=\frac{x}{۵}$$

پله‌ی سوم: $q-d$ برابر است با:

$$q-d=\frac{x}{۵}-\frac{x-۵}{۵}=\frac{x-x+۵}{۵}=\frac{۵}{۵}=\mathbf{۱}$$

۴ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** رابطه‌های داده‌شده را باز می‌کنیم و یک دستگاه دو معادله و دو مجهول برحسب جمله‌ی اول $(a_{۱})$ و قدرنسبت تصاعد (d) تشکیل می‌دهیم:

$$a_{۷}+a_{۹}=۸\Rightarrow (a_{۱}+۶d)+(a_{۱}+۸d)=۸\Rightarrow ۲a_{۱}+۱۴d=۸$$

$$\Rightarrow a_{۱}+۷d=۴ \qquad \text{I}$$

$$a_{۶}+a_{۱۱}=(a_{۱}+۵d)+(a_{۱}+۱۰d)=۲a_{۱}+۱۵d=۱۱ \qquad \text{II}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از دو معادله‌ی I و II مقدار $a_{۱}$ و d را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}a_{۱}+۷d=۴\\ ۲a_{۱}+۱۵d=۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲a_{۱}-۱۴d=-۸\\ ۲a_{۱}+۱۵d=۱۱\end{cases}\xrightarrow{+}d=۳$$

$$\xrightarrow{\text{I}}a_{۱}+۷d=۴\xrightarrow{d=۳}a_{۱}+(۷\times ۳)=a_{۱}+۲۱=۴\Rightarrow a_{۱}=-۱۷$$

پله‌ی سوم: مجموع بیست جمله‌ی اول تصاعد برابر است با:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_{۱}+۱۹d)=۱۰(-۳۴+۵۷)=۱۰\times ۲۳=\mathbf{۲۳۰}$$

۵ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** براساس این فرض که جمله‌ی دهم ۳ برابر جمله‌ی دوم است، مقدار قدرنسبت تصاعد هندسی را حساب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{a_{۱۰}}{a_{۲}}=q^{۸}=۳$$

پله‌ی دوم: حالا مقدار جمله‌ی اول را حساب می‌کنیم:

$$a_{۱}+a_{۹}=a_{۱}+a_{۱}q^{۸}=a_{۱}(۱+a^{۸})$$

$$=a_{۱}(۱+۳)=۴a_{۱}=۱۲\Rightarrow \mathbf{a_{۱}=۳}$$

توجه کنید که؛ مشاهده کردید که نیازی نیست که q را محاسبه کنیم. با توجه به روند حل، $q^{۸}$ را داریم و این برای ما کافی است. زحمت زیادی به خودتان ندهید!

۶ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** مجموع جمله‌ی اول و پنجم برابر صفر است. بنابراین یک نتیجه‌گیری مهم انجام می‌دهیم: $a_1+a_5=0 \Rightarrow a_1+(a_1+4d)=0$

$$\Rightarrow 2a_1+4d=0 \Rightarrow a_1+2d=0 \Rightarrow a_1=-2d \quad \mathrm{I}$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که مجموع سیزده جمله‌ی اول برابر ۱۰۴ است و با استفاده از رابطه‌ی I مقدار a_1 و d را تعیین می‌کنیم:

$$S_{13}=104 \Rightarrow \frac{13}{2}(2a_1+12d)=13(a_1+6d)=104$$

$$\Rightarrow a_1+6d=8 \xrightarrow{\mathrm{I}} -2d+6d=8 \Rightarrow 4d=8$$

$$\Rightarrow d=2 \xrightarrow{\mathrm{I}} a_1=-2\times 2=-4$$

پله‌ی سوم: جمله‌ی هفتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_7=a_1+6d=-4+(6\times 2)=-4+12=8$$

۷ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** قدرنسبت تصاعد عددی برابر است با:

$$d=a_2-a_1=-\frac{13}{6}-(-\frac{7}{3})=-\frac{13}{6}+\frac{7}{3}=\frac{-13+14}{6}=\frac{1}{6}$$

پله‌ی دوم: جمله‌ی عمومی تصاعد را می‌نویسیم:

$$a_n=a_1+(n-1)d=-\frac{7}{3}+(n-1)(\frac{1}{6})$$

$$=\frac{n}{6}-\frac{7}{3}-\frac{1}{6}=\frac{n}{6}-\frac{15}{6}=\frac{n}{6}-\frac{5}{2}$$

پله‌ی سوم: نامساوی $a_n>50$ را حل کرده و اولین مقدار برای n را که به‌ازای آن همه‌ی جمله‌های تصاعد از ۵۰ بزرگ‌تر است، تعیین می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$a_n>50 \Rightarrow \frac{n}{6}-\frac{5}{2}>50 \xrightarrow{\times 6} n-15>300$$

$$\Rightarrow n>315 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=\mathbf{316}$$

۸ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مجذور جمله‌ی هفتم در یک تصاعد هندسی برابر است با:

$$a_7=a_1q^6 \Rightarrow a_7^2=(a_1q^6)^2=a_1^2q^{12}$$

پله‌ی دوم: حاصل‌ضرب دو جمله‌ی تصاعد هندسی باید برابر $a_1^2q^{12}$ شود. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

(۱) $a_1.a_{12}=a_1(a_1q^{11})=a_1^2q^{11}$ ✗

(۲) $a_4.a_{11}=(a_1q^3)(a_1q^{10})=a_1^2q^{13}$ ✗

(۳) $a_5.a_9=(a_1q^4)(a_1q^8)=a_1^2q^{12}$ ✓

پس حاصل‌ضرب جمله‌های **پنجم و نهم** برابر مجذور جمله‌ی هفتم می‌شود.

(۴) $a_3.a_{13}=(a_1q^2)(a_1q^{12})=a_1^2q^{14}$ ✗

۹ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** جمله‌ی n اُم تصاعد اول و دوم را تعیین می‌کنیم:

تصاعد اول: $a_n=a_1q^{n-1}$

تصاعد دوم: $b_n=b_1q^{n-1}=4a_1q^{n-1}$

پله‌ی دوم: نسبت a_n به b_n برابر است با:

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1q^{n-1}}{4a_1q^{n-1}}=\frac{1}{4}=\mathbf{2^{-2}}$$

۱۰ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** سه زاویه‌ی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را z و y و x در نظر می‌گیریم. y واسطه‌ی حسابی بین x و z است. بنابراین داریم:

$$y=\frac{x+z}{2} \Rightarrow x+z=2y \quad \mathrm{I}$$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی I مقدار y را حساب می‌کنیم:

$$x+y+z=180 \xrightarrow{\mathrm{I}} 2y+y=180 \Rightarrow 3y=180 \Rightarrow \mathbf{y=60}$$

۱۱ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** y واسطه‌ی حسابی بین دو عدد ۴ و x و واسطه‌ی هندسی بین دو عدد ۴ و $x+1$ است. بنابراین با توجه به روابط مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی داریم: $y=\frac{x+4}{2}$, $y^2=4(x+1)$

پله‌ی دوم: با توجه به روابط به‌دست‌آمده و با یادآوری این‌که تصاعد حسابی نزولی است (قدرنسبت تصاعد حسابی باید منفی باشد) مقدار y را حساب می‌کنیم:

$$y^2=4(x+1) \xrightarrow{x=2y-4} y^2=4(2y-3)=8y-12$$

$$\Rightarrow y^2-8y+12=0 \Rightarrow (y-2)(y-6)=0 \Rightarrow \mathbf{y=2} \text{ یا } y=6$$

تنها عدد ۲ در گزینه‌ها موجود است.

۱۲ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** تغییراتی در صورت و مخرج کسر ایجاد می‌کنیم:

$$A=\frac{3^{-2}+3^{-3}+3^{-4}+\cdots}{5^{-1}+5^{-3}+5^{-5}+\cdots}=\frac{(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{3})^4+\cdots}{(\frac{1}{5})+(\frac{1}{5})^3+(\frac{1}{5})^5+\cdots}$$

پله‌ی دوم: صورت کسر تشکیل یک تصاعد هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول $\frac{1}{9}$ و قدرنسبت $\frac{1}{3}$ می‌دهد. مخرج کسر هم تصاعد هندسی بی‌پایان با جمله‌ی اول $\frac{1}{5}$ و قدرنسبت $\frac{1}{25}$ است. پس مقدار کسر برابر است با:

$$A=\frac{\dfrac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}}{\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}}=\frac{\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}}}{\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{24}{25}}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{24}}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

۱۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** مربع اول 1×1 است، مربع دوم 2×2، مربع سوم 3×3 و ... بنابراین مربع دهم 10×10 خواهد بود. دنباله‌ای که کل عضوهای سیاه و سفید را در مربع دهم نشان دهد به‌صورت زیر است:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$$

پله‌ی دوم: اعدادی که مشخص شده‌اند، تعداد عضوهای سفید هستند. بنابراین کل تعداد عضوهای سفید برابر است با:

$$3+7+11+15+19=\mathbf{55}$$

۱۴ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** از روی جمله‌ی عمومی تصاعد مقدار جمله‌ی اول را حساب می‌کنیم. داریم:

$$a_n=\frac{n}{8}-\frac{1}{16} \xrightarrow{n=1} a_1=\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{2}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$

پله‌ی دوم: با داشتن a_1 و رابطه‌ای که a_n را بیان می‌کند و هم‌چنین با دانستن این‌که $S_n=16$ است، مقدار n یا همان تعداد جمله‌های تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{16}+\frac{n}{8}-\frac{1}{16}\right)=16$$

$$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{8}\right)=32\Rightarrow n^2=16\times16=2^8\Rightarrow n=2^4=\mathbf{16}$$

**۱۵ ـ (۳) ** عدد اضافه‌شده را x فرض می‌کنیم. در این‌صورت اعداد $21+x$, $11+x$, $5+x$ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند. پس عدد $11+x$ واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $21+x$ و $5+x$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(11+x)^2=(5+x)(21+x)\Rightarrow x^2+22x+121=x^2+26x+105$$

$$\Rightarrow 4x=16\Rightarrow \mathbf{x=4}$$

۱۶ ـ (۱) پله‌ی یکم: جمله‌ی هفتم مجذور جمله‌ی دوم است. با توجه به این‌که جملات تصاعد هندسی مثبت است، رابطه‌ی بین a_1 و قدرنسبت تصاعد هندسی به‌صورت زیر است:

$$a_7=a_2^2\Rightarrow a_1q^6=(a_1q)^2=a_1^2q^2\Rightarrow a_1=q^4$$

پله‌ی دوم: فرض می‌کنیم جمله‌ی n اُم برابر مکعب جمله‌ی اول باشد. در این‌صورت n را به‌دست می‌آوریم:

$$a_n=a_1^3\xrightarrow{a_1=q^4}a_1q^{n-1}=q^{12}\xrightarrow{a_1=q^4}q^4\times q^{n-1}=q^{12}$$

$$\Rightarrow n-1=8\Rightarrow \mathbf{n=9}$$

۱۷ ـ (۴) پله‌ی یکم: با توجه به این‌که مقدار S_7 و S_8 را داریم، یک دستگاه دو معادله و دو مجهول برحسب a_1 و d تشکیل می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$S_7=\frac{7}{2}(2a_1+6d)=7(a_1+3d)=68\Rightarrow 7a_1+21d=68 \qquad \mathrm{I}$$

$$S_8=\frac{8}{2}(2a_1+7d)=76\Rightarrow 4(2a_1+7d)=76\Rightarrow 2a_1+7d=19$$

پله‌ی دوم: دستگاه دو معادله و دو مجهول را حل کرده و مقدار d را حساب می‌کنیم. داریم:

$$2a_1+7d=19\xrightarrow{\times3}6a_1+21d=57$$

$$\mathrm{I}\quad 7a_1+21d=a_1+\underbrace{(6a_1+21d)}_{57}=68\Rightarrow a_1=11$$

$$2a_1+7d=19\xrightarrow{a_1=11}22+7d=19\Rightarrow 7d=-3\Rightarrow \mathbf{d=-\frac{3}{7}}$$

۱۸ ـ (۱) پله‌ی یکم: مجموع بی‌شمار جمله از یک تصاعد هندسی برابر ۰/۹۸ شده است. جمله‌ی اول این تصاعد ۱ و قدرنسبت آن $-\frac{1}{a^2}$ است.

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی $S_\infty=\frac{a_1}{1-q}$ خواهیم داشت:

$$S_\infty=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{a^2}\right)}=0/98\Rightarrow\frac{1}{1+\frac{1}{a^2}}=0/98$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{a^2+1}=\frac{98}{100}=\frac{49}{50}\Rightarrow a^2=49\xrightarrow{a>1}\mathbf{a=7}$$

۱۹ ـ (۲) پله‌ی یکم: بین ۲ و ۴۸۶- چهار واسطه‌ی هندسی درج شده است. پس جمله‌ی اول تصاعد هندسی برابر ۲ و جمله‌ی ششم تصاعد هندسی برابر ۴۸۶- خواهد بود. بنابراین قدرنسبت تصاعد هندسی برابر است با:

$$\frac{a_6}{a_1}=\frac{-486}{2}=-243=q^5\Rightarrow q=-3$$

پله‌ی دوم: مجموع شش جمله‌ی اول تصاعد هندسی را حساب می‌کنیم:

$$S_6=\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{2((-3)^6-1)}{-3-1}=\frac{2(729-1)}{-4}=-\frac{728}{2}=-364$$

پله‌ی سوم: مجموع چهار واسطه‌ی هندسی برابر است با:

$$S=S_6-(a_1+a_6)=-364-(2-486)$$

$$=-364-(-484)=-364+484=\mathbf{120}$$

۲۰ ـ (۳) پله‌ی یکم: x جمله‌ی n اُم یک تصاعد حسابی با جمله‌ی اول ۳- و قدرنسبت ۸ است. مجموع n جمله‌ی این تصاعد حسابی برابر ۴۰۷ شده است. بنابراین n را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}[-6+8(n-1)]$$

$$=\frac{n}{2}(8n-14)=n(4n-7)=407=11\times37\Rightarrow n=11$$

پله‌ی دوم: x جمله‌ی یازدهم این تصاعد حسابی است. پس مقدار آن برابر است با:

$$x=a_{11}=a_1+10d=-3+(10\times8)=-3+80=\mathbf{77}$$

پاسخ تست‌های آزمون دوم

۱ ـ (۱) چشم‌انداز: مجموع زوایای شش ضلعی که اعضای آن تشکیل تصاعد عددی می‌دهند، همان S_6 در یک تصاعد عددی است. بزرگ‌ترین زاویه هم a_6 است. حالا که این دو مقدار را داریم می‌توانیم مقدار قدرنسبت تصاعد عددی یا همان اختلاف اندازه‌ی دو زاویه‌ی متوالی را حساب کنیم.

پله‌ی یکم: $S_6=720°$ و $a_6=190°$ است. پس a_1 برابر است با:

$$S_6=\frac{6}{2}(a_1+a_6)=3(a_1+190)=720$$

$$\Rightarrow a_1+190=240\Rightarrow a_1=50$$

پله‌ی دوم: مقدار قدرنسبت تصاعد عددی برابر است با:

$$a_6-a_1=5d\Rightarrow 190-50=140=5d\Rightarrow \mathbf{d=28}$$

۲ ـ (۲) پله‌ی یکم: مقدار S_1 و S_2 (S_1 که همان جمله‌ی اول است و S_2 مجموع دو جمله‌ی اول و دوم است) را حساب می‌کنیم. داریم:

$$S_1=a_1=\frac{2(7-3)}{9}=\frac{2\times4}{9}=\frac{8}{9}$$

$$S_2=a_1+a_2=\frac{(2\times2)(14-3)}{9}=\frac{4\times11}{9}=\frac{44}{9}$$

پله‌ی دوم: با به‌دست‌آوردن مقدار جمله‌ی دوم، مقدار قدرنسبت تصاعد هم به‌راحتی تعیین می‌شود:

$$a_1+a_2=\frac{44}{9}\Rightarrow\frac{8}{9}+a_2=\frac{44}{9}\Rightarrow a_2=\frac{36}{9}=4$$

$$d=a_2-a_1=4-\frac{8}{9}=\frac{36}{9}-\frac{8}{9}=\frac{28}{9}$$

$\frac{28}{9}$ بین دو عدد **۳ و ۴** قرار دارد.

۳ - (۴) **پله‌ی یکم:** دنباله‌ای که شعاع هر یک از این نیم‌دایره‌ها در هر مرحله تشکیل می‌دهد، به‌صورت زیر می‌شود: $\frac{1}{2}\ ,\ \underbrace{(\frac{4}{5}\times\frac{1}{2})}_{\frac{2}{5}}\ ,\ \underbrace{(\frac{4}{5}\times\frac{2}{5})}_{\frac{8}{25}}\ ,\ \dots$

پله‌ی دوم: دنباله‌ای که محیط این نیم‌دایره‌ها تشکیل می‌دهند به‌صورت زیر است: $\frac{1}{2}\pi\ ,\ \frac{2}{5}\pi\ ,\ \frac{8}{25}\pi\ ,\ \dots$

پله‌ی سوم: حد مجموع این تصاعد هندسی بی‌پایان که برابر اندازه‌ی محیط نیم‌دایره‌های متوالی است، برابر می‌شود با:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{1-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{5}}=\mathbf{\frac{5}{2}\pi}$$

۴ - (۳) حد مجموع جملات در یک تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان از رابطه‌ی $S_\infty=\frac{a_1}{1-q}$ حساب می‌شود. بنابراین q برابر است با:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}=5a_1\Rightarrow 1-q=\frac{1}{5}\Rightarrow q=1-\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

۵ - (۱) **پله‌ی یکم:** مجموع جملات بعد از جمله‌ی اول برابر است با:

$$S=\frac{a_1}{1-q}-a_1=\frac{-a_1+a_1q+a_1}{1-q}=\frac{a_1q}{1-q}$$

پله‌ی دوم: جمله‌ی اول $\frac{1}{4}$ برابر مجموع جملات بعدی است. مقدار q برابر می‌شود با:

$$a_1=\frac{1}{4}S\Rightarrow a_1=\frac{1}{4}\times\frac{a_1q}{1-q}\Rightarrow 4-4q=q\Rightarrow 5q=4\Rightarrow q=\frac{4}{5}$$

پله‌ی سوم: نسبت جمله‌ی اول به جمله‌ی چهارم برابر است با:

$$\frac{a_1}{a_4}=\frac{a_1}{a_1q^3}=\frac{1}{q^3}=\frac{1}{(\frac{4}{5})^3}=\frac{1}{\frac{64}{125}}=\mathbf{\frac{125}{64}}$$

۶ - (۲) **پله‌ی یکم:** برای محاسبه‌ی عبارت داده‌شده تغییراتی در آن ایجاد می‌کنیم. داریم:

$$A=9+99+999+\dots+\underbrace{99...9}_{\text{۱۵ تا}}$$
$$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\dots+(10^{15}-1)$$
$$=(10+10^2+10^3+\dots+10^{15})-15$$

پله‌ی دوم: عبارت داخل پرانتز تشکیل یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول و قدرنسبت ۱۰ می‌دهد. پس مقدار A برابر است با:

$$A=\frac{10(10^{15}-1)}{10-1}-15=\frac{10}{9}(10^{15}-1)-15$$
$$=\frac{10}{9}(\underbrace{99...9}_{\text{۱۵ تا}})-15=10(\underbrace{11...1}_{\text{۱۵ تا}})-15=111...10-15=\underbrace{11...1}_{\text{۱۳ تا}}095$$

بنابراین در عدد حاصل شده **۱۳** رقم ۱ مشاهده می‌شود.

۷ - (۴) **پله‌ی یکم:** دنباله‌ای را که نشان‌دهنده‌ی قطر این دایره‌های متوالی باشد، تشکیل می‌دهیم: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

پله‌ی دوم: می‌دانیم محیط دایره برابر حاصل‌ضرب قطر دایره در عدد π است. پس دنباله‌ای که نشان‌دهنده‌ی محیط این دایره‌ها باشد، به‌صورت زیر خواهد بود: $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \dots$

پله‌ی سوم: اگر محیط دایره‌ی nاُم را با a_n نشان دهیم، a_n برابر $\frac{\pi}{2^{n-1}}$ خواهد بود. مقداری برای n تعیین می‌کنیم که به‌ازای آن a_n از $\frac{\pi}{900}$ کوچک‌تر شود. داریم:

$$\frac{\pi}{2^{n-1}}<\frac{\pi}{900}\Rightarrow 2^{n-1}>900\Rightarrow n-1\ge 10\Rightarrow n\ge 11$$

محیط دایره‌ی **یازدهم** از $\frac{\pi}{900}$ کوچک‌تر می‌شود.

۸ - (۲) **پله‌ی یکم:** جمله‌ی یازدهم تصاعد حسابی را تعیین می‌کنیم:

$$a_{11}=a_1+10d=5+(10\times 4)=5+40=45$$

پله‌ی دوم: می‌خواهیم بین ۵ و ۴۵، سه واسطه‌ی هندسی درج کنیم. پس جمله‌ی پنجم آن ۴۵ خواهد بود. با توجه به این‌که تمام جمله‌ها باید مثبت باشد، پس قدرنسبت تصاعد هندسی هم باید مثبت باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{a_5}{a_1}=q^4\Rightarrow\frac{45}{5}=q^4\Rightarrow q^4=9\xrightarrow{q>0}\mathbf{q=\sqrt{3}}$$

۹ - (۲) **پله‌ی یکم:** b واسطه‌ی حسابی بین a و ۴ است. پس:

$$b=\frac{a+4}{2}$$

پله‌ی دوم: a واسطه‌ی هندسی بین b و ۴ است. پس: $a^2=4b$

پله‌ی سوم: با تعیین a و b، حاصل $a+b$ را به‌دست می‌آوریم:

$$b=\frac{a+4}{2}\xrightarrow{b=\frac{a^2}{4}}\frac{a^2}{4}=\frac{a+4}{2}\Rightarrow a^2=2a+8$$
$$\Rightarrow a^2-2a-8=0\Rightarrow(a-4)(a+2)=0\xrightarrow{a\neq 4}a=-2$$
$$b=\frac{a+4}{2}=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

پله‌ی چهارم: یک جمع ساده: $a+b=-2+1=\mathbf{-1}$

۱۰ - (۱) **پله‌ی یکم:** جمله‌ی یازدهم، واسطه‌ی هندسی بین جمله‌های اول و سی‌ویکم است. پس داریم:

$$a_{11}^2=a_1.a_{31}\Rightarrow(a_1+10d)^2=a_1(a_1+30d)$$
$$\Rightarrow a_1^2+20a_1d+100d^2=a_1^2+30a_1d$$
$$\Rightarrow 10a_1d=100d^2\Rightarrow a_1=10d$$

پله‌ی دوم: سه جمله‌ی متوالی تصاعد هندسی به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$b_1=a_1=10d$$
$$b_2=a_{11}=a_1+10d=10d+10d=20d$$
$$b_3=a_{31}=a_1+30d=10d+30d=40d$$

پله‌ی سوم: قدرنسبت تصاعد هندسی برابر است با: $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{20d}{10d}=\mathbf{2}$

۱۱ - (۴) **پله‌ی یکم:** با توجه به فرض‌های موجود در تست دستگاه دو معادله و دو مجهولی داریم که مجهول‌های آن جمله‌ی اول تصاعد هندسی و قدرنسبت تصاعد هندسی هستند. ابتدا قدرنسبت تصاعد را به‌دست می‌آوریم:

$$S_3=\frac{a(q^3-1)}{q-1}=136$$
$$S_6=\frac{a(q^6-1)}{q-1}=\frac{a(q^3-1)(q^3+1)}{q-1}=153$$

به‌جای مقدار $\frac{a(q^3-1)}{q-1}$ مقدار S_3 را قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$136(q^3+1)=153\Rightarrow q^3+1=\frac{153}{136}=\frac{9}{8}\Rightarrow q^3=\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

پله‌ی دوم: نسبت $\frac{a_1}{a_5}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{a_1}{a_5}=\frac{a_1}{a_1q^4}=\frac{1}{q^4}\xrightarrow{q=\frac{1}{2}}\frac{a_1}{a_5}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^4}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16\Rightarrow\frac{a_1}{a_5}=\mathbf{16}$$

۱۲ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** جمله‌ی اول و جمله‌ی پانزدهم تصاعد عددی را حساب می‌کنیم: $a_n=\frac{3}{2}n-5\Rightarrow a_1=\frac{3}{2}-5=\frac{3}{2}-\frac{10}{2}=-\frac{7}{2}$

$a_{15}=\frac{3}{2}\times15-5=\frac{45}{2}-\frac{10}{2}=\frac{35}{2}$

پله‌ی دوم: با داشتن مقدار a_1 و a_{15}، محاسبه‌ی S_{15} کار دشواری نیست. داریم: $S_{15}=\frac{15}{2}(a_1+a_{15})=\frac{15}{2}(-\frac{7}{2}+\frac{35}{2})$

$\Rightarrow S_{15}=\frac{15}{2}\times\frac{28}{2}=15\times7=\mathbf{105}$

۱۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** $3\sqrt{3}$ واسطه‌ی هندسی بین ۹ و 3^a است. بنابراین a برابر است با: $(3\sqrt{3})^2=9\times3^a\Rightarrow27=9\times3^a\Rightarrow3^a=3\Rightarrow a=1$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که قدرنسبت تصاعد هندسی برابر $\sqrt{3}$ است (چرا؟) مقدار b برابر است با: $\frac{b}{9}=\sqrt{3}\Rightarrow b=9\sqrt{3}$

پله‌ی سوم: واسطه‌ی هندسی بین $a\sqrt{3}$ که برابر $\sqrt{3}$ است و b که برابر $9\sqrt{3}$ می‌باشد، برابر است با: $c^2=9\sqrt{3}\times\sqrt{3}=27\Rightarrow\mathbf{c=3\sqrt{3}}$

۱۴ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** فرض موجود در تست را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم تا ببینیم چه چیزی عایدمان می‌شود. داریم:

$$S_{10}=(4\sqrt{2}+1)S_5\Rightarrow\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=(4\sqrt{2}+1)\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}$$

$$q^{10}-1=(4\sqrt{2}+1)(q^5-1)\Rightarrow(q^5-1)(q^5+1)=(4\sqrt{2}+1)(q^5-1)$$

$$\Rightarrow q^5+1=4\sqrt{2}+1\Rightarrow q^5=4\sqrt{2}=(\sqrt{2})^5\Rightarrow q=\sqrt{2}$$

پله‌ی دوم: نسبت $\frac{S_8}{S_4}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_8}{S_4}=\frac{\frac{a_1(q^8-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}}=\frac{q^8-1}{q^4-1}=\frac{(q^4-1)(q^4+1)}{(q^4-1)}=q^4+1$$

$$\xrightarrow{q=\sqrt{2}}\frac{S_8}{S_4}=(\sqrt{2})^4+1=4+1=\mathbf{5}$$

۱۵ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** اگر جمله‌ی عمومی را ساده کنیم به شکل $a_n=-2n-1$ در می‌آید. چون درجه‌ی n برابر ۱ است، با یک دنباله حسابی روبه‌رو هستیم.

پله‌ی دوم: مقدار a_1 و a_{19} را حساب می‌کنیم: $a_1=-2(1)-1=-3$

$a_{19}=-2(19)-1=-39$

پله‌ی سوم: S_{19} برابر است با:

$$S_{19}=\frac{19}{2}(a_1+a_{19})=\frac{19}{2}(-3-39)=\frac{19}{2}(-42)=-19\times21=\mathbf{-399}$$

۱۶ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** قدرنسبت تصاعد را تعیین می‌کنیم:

$$q^2=\frac{a_3}{a_1}=\frac{9}{4}\xRightarrow{q>0}q=\frac{3}{2}$$

پله‌ی دوم: مجموع شش جمله‌ی اول تصاعد هندسی برابر است با:

$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}}=\frac{4(1-\frac{729}{64})}{-\frac{1}{2}}=\frac{4(\frac{64-729}{64})}{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-\frac{665}{16}}{-\frac{1}{2}}=\frac{665}{8}=\mathbf{83\frac{1}{8}}$$

۱۷ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** اگر سه جمله‌ی متوالی را به‌صورت $\frac{a}{q}$ و a و aq در نظر بگیریم، با توجه به این‌که حاصل‌ضرب ۳ جمله برابر ۲۱۶ است، a برابر است با: $\frac{a}{q}\times a\times aq=216\Rightarrow a^3=216\Rightarrow a=6$

پله‌ی دوم: حالا q را هم تعیین و در نهایت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله را به‌دست می‌آوریم:

$\frac{a}{q}+a+aq=19\Rightarrow6(\frac{1}{q}+1+q)=19\xRightarrow{\times q}$

$6q^2-13q+6=0\Rightarrow q=\frac{2}{3},q=\frac{3}{2}$

$q=\frac{2}{3},a=6\Rightarrow$ سه جمله: ۹,۶,۴

$q=\frac{3}{2},a=6\Rightarrow$ سه جمله: ۴,۶,۹

در هر دو حالت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر **۵** است.

۱۸ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** ابتدا مقدار d را برحسب a یا جمله‌ی اول تصاعد به‌دست می‌آوریم: $S_{20}=3S_{12}\Rightarrow10(2a+19d)=3\times6(2a+11d)$

$\Rightarrow5(2a+19d)=9(2a+11d)\Rightarrow10a+95d=18a+99d$

$\Rightarrow8a+4d=0\Rightarrow2a+d=0\Rightarrow d=-2a$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $a_3=6$ است مقدار a و d را تعیین می‌کنیم:

$a_3=6\Rightarrow a+2d=6\xRightarrow{d=-2a}a-4a=6$

$-3a=6\Rightarrow a=-2\Rightarrow d=4$

پله‌ی سوم: مقدار a_{10} برابر است با: $a_{10}=a+9d=-2+36=\mathbf{34}$

۱۹ ـ (۴) نسبت $\frac{S_{14}}{S_7}$ را می‌خواهیم:

$$\frac{S_{14}}{S_7}=\frac{\frac{a_1(1-q^{14})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}}=\frac{1-q^{14}}{1-q^7}=\frac{(1-q^7)(1+q^7)}{(1-q^7)}=1+q^7$$

$=1+2^7=1+128=\mathbf{129}$

۲۰ ـ (۴) باید حاصل $S_{18}-S_6$ را حساب کنیم:

$$S_{18}-S_6=\frac{18(18-15)}{6}-\frac{6(6-15)}{6}=(3\times3)-(-9)=9+9=18$$

فهرست:

بخش ۱: تابع نمایی و لگاریتم ۲

بخش ۲: معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی و لگاریتمی ۱۱

پلکان آزمون ۱۹

فصل ۲ لگاریتم

شناسنامه فصل

فصل لگاریتم در کتاب ریاضیات سال دوم آمده است. گرچه بچه‌های تجربی در کتاب پیش‌دانشگاهی‌شان هم یک چیزهایی از لگاریتم می‌خوانند. مبحث لگاریتم هم از مباحثی است که دانش‌آموزان به‌سرعت یاد می‌گیرند. هر سال هم که حتماً در کنکور حضور دارد. خیلی حیف است که آدم به‌راحتی از کنار یک تست ساده بگذرد!

	تألیفی	سراسری	آزاد
تعداد تست‌ها	۶۰	۲۱	۲۵

فهرست
پلکان آموزش ۲
پاسخ پلکان آموزش ۷

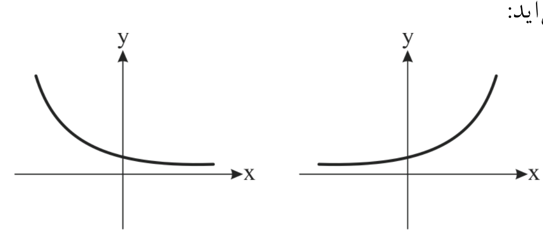
بخش ۱ تابع نمایی و لگاریتم

پلکان آموزش

۱ـ تابع نمایی

ابتدا تعریفی از تابع نمایی داشته باشیم! تابع $y=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}^+$ و $a\neq ۱$ و $a>۰$ است و x یک متغیر می‌باشد، یک تابع نمایی نامیده می‌شود. حالا می‌خواهیم در مورد دامنه و برد تابع $y=a^x$ بحث کنیم. برای این‌که به‌راحتی در مورد آن صحبت کنیم، ابتدا نمودار تابع $y=a^x$ را در دو حالت رسم می‌کنیم. یک حالت وقتی $۰<a<۱$ است و حالت دیگر $a>۱$. شکل تابع $y=a^x$ به‌صورت زیر در می‌آید:

با توجه به دو نمودار سمت راست، تابع $y=a^x$، به‌ازای $a>۱$ صعودیِ اکید و به‌ازای $۰<a<۱$ نزولی اکید است.



$y=a^x$ و $a>۱$ — $y=a^x$ و $۰<a<۱$

مشاهده می‌شود که دامنه‌ی تابع $y=a^x$ برابر $\mathbb{R}$ یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد تابع برابر بازه‌ی $(۰,+\infty)$ است.

هم‌چنین با توجه به این‌که هر خطی که به موازات محور xها رسم کنیم، نمودار تابع $y=a^x$ را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، تابع $y=a^x$ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. وارون تابع نمایی، تابع لگاریتمی است که در ادامه آن را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱ جدول زیر را مشاهده کنید و روندی را که اعداد دارند مقایسه کنید.

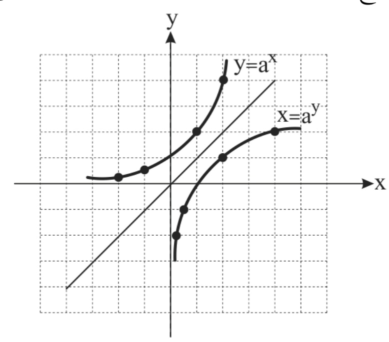
x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
۳^x	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷
$(\frac{۱}{۳})^x$	۲۷	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۲۷}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در مورد تابع $y=۳^x$ به‌ازای مقادیر منفی x مقدار تابع کم‌تر از ۱ بوده و هر چه x کوچک‌تر می‌شود مقدار تابع هم کوچک می‌شود. با افزایش مقدار x مقدار تابع افزایش پیدا کرده و نتیجه می‌گیریم تابع صعودی است. در مورد تابع $y=(\frac{۱}{۳})^x$ به‌ازای xهای منفی مقدار تابع بزرگ‌تر از یک و به‌ازای xهای منفی مقدار تابع کوچک‌تر از یک است. بنابراین با افزایش مقدار x مقدار y کاهش پیدا کرده و تابع نزولی است.

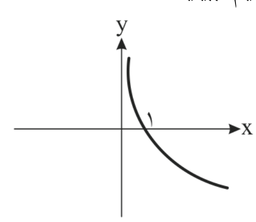
۲ـ لگاریتم و تابع لگاریتمی

گفتیم که تابع $y=a^x$ یک تابع معکوس‌پذیر است. بنابراین در ابتدا نمودار تابع معکوس آن را با استفاده از قرینه‌کردن نمودار تابع $y=a^x$ نسبت به خط $y=x$ به‌دست می‌آوریم.

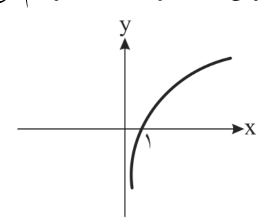
یادآوری: نمودار هر تابع و وارون آن، نسبت به خط $y=x$ تقارن دارند.



معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتمی نام دارد. تابع لگاریتمی به‌صورت $y=\log_a^x$ است. نمودار تابع $y=\log_a^x$ را به‌ازای $a>1$ و $0<a<1$ رسم می‌کنیم. ببینید:



$y=\log_a^x$ ، $0<a<1$



$y=\log_a^x$ ، $a>1$

ویژگی‌های تابع $y=\log_a^x$

۱ دامنه‌ی تعریف تابع $y=\log_a^x$ در بازه‌ی $(0,+\infty)$ قرار دارد و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ یا همان مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

۲ تابع $y=\log_a^x$ یک‌به‌یک است. چون هر خطی که به موازات محور xها رسم کنیم، نمودار تابع را در یک نقطه قطع خواهد کرد.

۳ تابع $y=\log_a^x$ وقتی $a>1$ است، صعودی اکید و وقتی $0<a<1$ است، نزولی اکید است.

۴ a هر مقدار قابل قبولی که داشته باشد، مقدار y به‌ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود.

یادآوری: از بخش «دامنه» در فصل «تابع» به یاد داریم که برای این‌که $y=\log_{\bigcirc}^{\square}$ تعریف شده باشد، باید داشته باشیم:

۱ $\square>0$

۲ $\bigcirc>0$ ، $\bigcirc\neq 1$

۳ـ قوانین لگاریتم

۳ـ۱ـ ویژگی‌های توان و رادیکال

به احتمال زیاد، بیش‌تر شما با رابطه‌های «توان» و «رادیکال» آشنا هستید. ولی این‌جا برای یادآوری، بد نیست که یک مرور دیگری به این رابطه‌های ساده اما مهم بیاندازیم:

ویژگی‌های توان

۱ $a^m\times b^m=(ab)^m$

۲ $\dfrac{a^m}{b^m}=(\dfrac{a}{b})^m$

۳ $a^m\times a^n=a^{m+n}$

۴ $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

۵ $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}\qquad(a\neq 0)$

۶ $(a^m)^n=a^{mn}$

۷ $a^0=1$

۸ $\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow a=b^n$

۹ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

۳ ـ ۲ ـ محاسبه‌ی لگاریتم یک عدد

$y=\log_a^x$ را در نظر بگیرید. به a پایه یا مبنای لگاریتم گفته می‌شود و x عددی است که جلوی لگاریتم قرار می‌گیرد.

برای تبدیل لگاریتم به رابطه‌ی نمایی، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log_b^a=c \xleftrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} a=b^c$$

برای مثال اگر $\log_۲^x=۵$ باشد، می‌توانیم بگوییم: $x=۲^۵=۳۲$

۳ ـ ۳ ـ قوانین لگاریتم

قوانین زیر در حل مسائل لگاریتم کاربرد زیادی دارد:

قوانین لگاریتم

① $\log_a^۱=۰$

② $\log_a^a=۱$

③ $\log_c^{ab}=\log_c^a+\log_c^b \quad (a,b,c\in\mathbb{R}^+, c\neq ۱)$

④ $\log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b \quad (a,b,c\in\mathbb{R}^+, c\neq ۱)$

⑤ $\log_b^{a^n}=n\log_b^a$

⑥ $\log_{b^m}^a=\frac{۱}{m}\log_b^a$

⑦ $\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}$

⑧ $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

⑨ $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$

توضیح توانی قوانین لگاریتم:

① هر عدد به توان صفر برابر ۱ است.
② هر عدد به توان ۱ برابر خودش است.
⑤ توان به پشت لگاریتم منتقل می‌شود.
⑥ معکوسِ توانِ پایه به پشت لگاریتم منتقل می‌شود.
⑧ این قاعده به «تغییر مبنا» معروف است.

مثال ۲ مقدار لگاریتم‌های داده‌شده را حساب کنید.

الف) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}^{۱۰۰۰}$ ب) $\log_{۲۷}^۹$ ج) $۸^{\log_۲^۳}$

الف) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}^{۱۰۰۰}=\log_{۱۰^{-۱}}^{۱۰^۳}=\frac{۳}{-۱}\log_{۱۰}^{۱۰}=-۳$

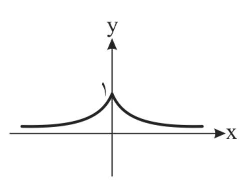
ب) $\log_{۲۷}^۹=\log_{۳^۳}^{۳^۲}=\frac{۲}{۳}\log_۳^۳=\frac{۲}{۳}$

ج) $۸^{\log_۲^۳}=۳^{\log_۲^۸}=۳^{\log_۲^{۲^۳}}=۳^{۳\log_۲^۲}=۳^۳=۲۷$

۱ ـ تابع $y=a^x$، برای $a>۳$ .... و برای $۰<a<\frac{۱}{۳}$ .... است.

۱) نزولی ـ صعودی ۲) نزولی ـ نزولی ۳) صعودی ـ نزولی ۴) صعودی ـ صعودی

۲ ـ شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۰)*



۱) $y=|۲^x|$

۲) $y=۲^{|x|}$

۳) $y=۲^{-|x|}$

۴) $y=|۲^{-x}|$

۳ ـ اگر $\log_۴^A=\frac{۳}{۲}$، مقدار A کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) ۱۶

۴ ـ حاصل $\log_{\sqrt{۳۲}}^{\frac{۱}{۴}}$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۸)*

۱) $-\frac{۵}{۴}$ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۵ ـ حاصل $\log_{x\sqrt[۳]{x}}^{\sqrt[۳]{x^۲\sqrt{x}}}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸)*

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۶ ـ اگر $\log_۵^۸ = a$ باشد، $\log_{۱۰}^{۲}$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۶ ـ خارج از کشور)*

۱) $a+۳$ ۲) $\frac{a}{a+۳}$ ۳) $۳a$ ۴) $\frac{۱}{۳a}$

۷ ـ اگر $\log_{۲۰}^{۴} = k$ باشد، حاصل $\log_۴^۵$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۵)*

۱) $\frac{۱+k}{k}$ ۲) $\frac{k}{۱-k}$ ۳) $\frac{k-۱}{k}$ ۴) $\frac{۱-k}{k}$

۸ ـ اگر $A = \log ۲$ را در نظر بگیریم، حاصل $\log\sqrt[۵]{۲۰۰}$ برابر می‌شود با:

۱) $\frac{۲A+۱}{۵}$ ۲) $\frac{۳A+۲}{۵}$ ۳) $\frac{۴A+۲}{۵}$ ۴) $\frac{A+۲}{۵}$

۹ ـ اگر $A = \log_۲^{\sqrt[۵]{e^۲}}$، حاصل $\log_{\sqrt{e}}^{۳۲}$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۱) $\frac{A}{۴}$ ۲) $\frac{A}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{A}$ ۴) $\frac{۴}{A}$

۱۰ ـ حاصل عبارت $\left|\log_{\frac{۱}{۲}} ۸\right| + \log_۸ \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۲)*

۱) $\frac{۱۹}{۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۶}$

۱۱ ـ حاصل کسر $\frac{\log ۲+\log ۳+\log ۴}{\log ۲+\frac{۱}{۲}\log ۶}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۲)*

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) ۲۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲ ـ حاصل $\log_۶^{۲\sqrt{۳}}+\log_۶^{۳\sqrt{۲}}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳

۱۳ ـ اگر $\log_{۱۲}^{۲}+\log_{۱۲}^{۳}+\log_{۱۲}^{۴} = a$ باشد، حاصل $\log_{۱۲}^{۳}+\log_{۱۲}^{۶}+\log_{۱۲}^{۱۶}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۳)*

۱) a ۲) $a+۲$ ۳) $a+۱$ ۴) $۲a+۱$

۱۴ ـ حاصل $\log_۲^{\frac{۹}{۸}}+\log_۲^{\frac{۱۰}{۹}}+\log_۲^{\frac{۱۱}{۱۰}}+\cdots+\log_۲^{\frac{۳۲}{۳۱}}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۳)*

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۵ ـ حاصل عبارت $\log_۳^۲\times\log_۴^۳\times\log_۵^۴\times\cdots\times\log_{۱۲۸}^{۱۲۷}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۸)*

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) ۷ ۳) $-\frac{۱}{۷}$ ۴) -۷

۱۶ ـ حاصل عبارت $\log_a^b.\log_b^a+\log_b^c.\log_c^b$ برابر است با:

۱) $a+b$ ۲) ۱ ۳) $b+c$ ۴) ۲

۱۷ ـ اگر $x = y^۳ = \sqrt{a}$ باشد، حاصل $\frac{۱}{۳}\log_a^x+\frac{۱}{۲}\log_a^y$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۸ ـ اگر $۴^a = ۲\sqrt{۲}$، لگاریتم $۴a+۱$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۸)*

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۹ ـ حاصل $a^{x\log_x^b} - b^{x\log_x^a}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۰)*

۱) صفر ۲) $a^a - b^b$ ۳) $a^b - b^a$ ۴) $a - b$

۲۰ ـ اگر $\log 2 = x$ و $\log 3 = y$ باشد، حاصل $\log_{18}^{96}$ کدام است؟

۱) $\frac{2y+3x}{5y+2x}$ ۲) $\frac{y+5x}{3y+x}$ ۳) $\frac{y+5x}{2y+x}$ ۴) $\frac{2y+x}{5y+2x}$

۲۱ ـ حاصل $\frac{1}{\log_2^{35!}} + \dots + \frac{1}{\log_{34}^{35!}} + \frac{1}{\log_{35}^{35!}}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳۵ ۴) نامعین

۲۲ ـ حاصل $\log\tan 10^\circ + \log\tan 20^\circ + \dots + \log\tan 80^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳ ـ اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 10x + 0/1 = 0$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

۲۴ ـ اگر $\log_4^{\sin 20^\circ} = a$، مقدار $\log_4^{\left(\frac{\sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{\sin 40^\circ}\right)}$ کدام است؟

۱) $-1-a$ ۲) $-1+a$ ۳) $1-a$ ۴) $1+a$

۲۵ ـ مقدار $\log 2/1 + \log\frac{1}{70}$ چند واحد از $\log 3$ کم‌تر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۶ ـ مقدار $\log_{21}^{0/001}$ در کدام بازه است؟

۱) $[-5,-4]$ ۲) $[-4,-3]$ ۳) $[-3,-2]$ ۴) $[-2,-1]$

۲۷ ـ اگر $\log_5^x = \frac{4}{3}$ باشد، x در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(8,9)$ ۲) $(7,8)$ ۳) $(9,+\infty)$ ۴) $(0,7)$

۲۸ ـ کدام گزینه درست است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۲)*

۱) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} > \log_{\frac{1}{2}}^{100}$ ۲) $\log_{\frac{1}{2}}^{3} > \log_3^{2}$ ۳) $\log_5^{3} > \log_3^{5}$ ۴) $\log_{\frac{1}{2}}^{3} > \log_{\frac{1}{2}}^{2}$

۲۹ ـ حاصل عبارت $\left[\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}}\right]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.) *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸)*

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۳

۳۰ ـ حاصل $\left[\log_4^{6}\right] + \left[\log_6^{2}\right]$ برابر است با: ([ ] نماد جزءصحیح است.) *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۱ ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\log_{\frac{1}{3}}^{80} > \log_{\frac{1}{3}}^{90}$ ۲) $\log_6^{7} > \log_7^{6}$ ۳) $\log_{\frac{1}{4}}^{5} > \log_3^{2}$ ۴) $\log_2^{25} > \log_4^{125}$

۳۲ ـ حاصل $A = \log_{(x-2)}^{(9x^2-36x+38)}$ به ازای $x = 5$ در کدام فاصله است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۴)*

۱) $2 < A < 3$ ۲) $3 < A < 4$ ۳) $4 < A < 5$ ۴) $5 < A < 6$

۳۳ ـ اگر $\log 2 = 0/30103$ فرض شود، عدد 2^{30} چند رقمی است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

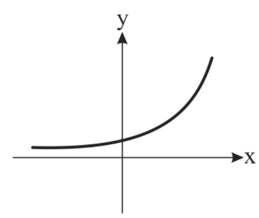
۳۴ ـ اگر بدانیم $\log 2 \simeq 0/3$ است، عدد 5^{21} چند رقمی است؟

۱) دوازده ۲) سیزده ۳) چهارده ۴) پانزده

فهرست
پلکان آموزش ۲
پاسخ پلکان آموزش ۷

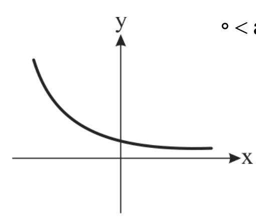
پاسخ تست‌های پلکان آموزش

۱ ـ ۳ پله‌ی یکم: نمودار تابع $y=a^x$ برای $a>3$ به‌صورت زیر است:



پس تابع $y=a^x$، برای $a>3$ **صعودی** است.

پله‌ی دوم: نمودار تابع $y=a^x$ برای $0<a<\frac{1}{3}$ را رسم می‌کنیم:

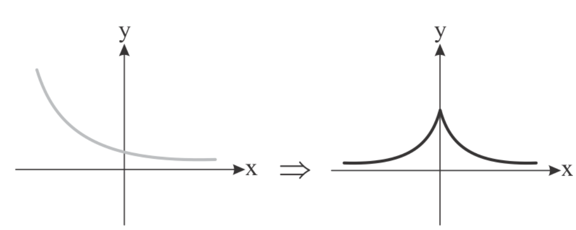


بنابراین تابع $y=a^x$ برای $0<a<\frac{1}{3}$ **نزولی** است.

۲ ـ ۳ پله‌ی یکم: مقدار y به‌ازای $x=0$ برابر ۱ است. هم‌چنین مقدار y به‌ازای تمام مقادیر x به غیر از $x=0$ از عدد یک کم‌تر است. چون پایه‌ی توان از عدد یک بزرگ‌تر است، برای این‌که مقدار تابع همواره از یک کم‌تر باشد باید مقدار توان تابع به‌ازای تمام مقادیر x منفی باشد.

پله‌ی دوم: تنها گزینه‌ای که در آن مقدار توان همواره منفی است، گزینه‌ی سوم است. چون عبارت $-|x|$ به‌ازای تمام مقادیر x (البته به غیر از صفر) منفی است. پس مقدار تابع $\mathbf{y=2^{-|x|}}$ همواره از یک کم‌تر است.

یک راه نموداری‌تر: در فصل تابع یاد گرفتیم که اگر نمودار $y=f(x)$ را به ما بدهند، برای رسم $y=f(|x|)$ ابتدا سمت چپ محور y ها را حذف می‌کنیم. سپس قرینه‌ی سمت راست محور y ها نسبت به این محور را در سمت چپ رسم می‌کنیم. در این‌جا همین اتفاق افتاده است:



$f(x)=(\frac{1}{2})^x=2^{-x}$ $\qquad$ $f(|x|)=2^{-|x|}$

۳ ـ ۲ پله‌ی یکم: با استفاده از خواص لگاریتم، حاصل $\log_4^A$ را تعیین می‌کنیم:
$$\log_4^A=\log_{2^2}^A=\frac{1}{2}\log_2^A$$

پله‌ی دوم: مقدار A طبق تعریف لگاریتم برابر می‌شود با:
$$\frac{1}{2}\log_2^A=\frac{3}{2}\Rightarrow\log_2^A=3\Rightarrow A=2^3=8$$

۴ ـ ۲ پله‌ی یکم: برای به‌دست‌آوردن حاصل لگاریتم، عدد جلوی لگاریتم و پایه‌ی لگاریتم را به اعدادی توان‌دار با پایه‌ی ۲ تبدیل می‌کنیم.

بنابراین داریم:
$$A=\log_{\sqrt{32}}^{\frac{1}{4}}=\log_{\sqrt{2^5}}^{(\frac{1}{2})^2}=\log_{2^{\frac{5}{2}}}^{2^{-2}}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم مقدار A را محاسبه می‌کنیم.

داریم:
$$A=\log_{2^{\frac{5}{2}}}^{2^{-2}}=\frac{-2}{\frac{5}{2}}\log_2^2=-\mathbf{\frac{4}{5}}$$

۵ ـ ۳ پله‌ی یکم: کمی عبارت لگاریتمی داده‌شده را ساده می‌کنیم:
$$\log_{x\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}=\log_{x.x^{\frac{1}{3}}}^{\sqrt[3]{x^2x^{\frac{1}{2}}}}=\log_{x^{\frac{4}{3}}}^{\sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}}}=\log_{x^{\frac{4}{3}}}^{x^{\frac{\frac{5}{2}}{3}}}=\log_{x^{\frac{4}{3}}}^{x^{\frac{5}{6}}}$$

پله‌ی دوم: با توجه به ویژگی‌های لگاریتم حاصل عبارت به‌دست‌آمده برابر است با:
$$\log_{x^{\frac{4}{3}}}^{x^{\frac{5}{6}}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}}\underbrace{\log_x^x}_{1}=\frac{15}{24}=\mathbf{\frac{5}{8}}$$

۶ ـ ۲ پله‌ی یکم: با توجه به فرض موجود در تست، مقدار $\log_5^2$ را به‌دست می‌آوریم:
$$\log_5^8=\log_5^{2^3}=3\log_5^2=a\Rightarrow\log_5^2=\frac{a}{3}$$

پله‌ی دوم: با توجه به مقدار $\log_5^2$، حاصل $\log_{10}^2$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:
$$\log_{10}^2=\frac{1}{\log_2^{10}}=\frac{1}{\log_2^{2\times5}}=\frac{1}{\log_2^2+\log_2^5}\xrightarrow[\log_2^5=\frac{3}{a}]{\log_5^2=\frac{a}{3}}\log_{10}^2=\frac{1}{1+\frac{3}{a}}$$
$$=\frac{1}{\frac{a+3}{a}}=\mathbf{\frac{a}{a+3}}$$

۷ ـ ④ با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، مقدار $\log_4^5$ را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log_{20}^4 = k \xRightarrow{\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}} \frac{1}{\log_4^{20}} = k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_4^{4\times5}} = \frac{1}{\log_4^4+\log_4^5} = \frac{1}{1+\log_4^5} = k$$

$$\Rightarrow 1+\log_4^5 = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_4^5 = \frac{1}{k}-1 = \mathbf{\frac{1-k}{k}}$$

۸ ـ ④ **پله‌ی یکم:** حاصل $\log\sqrt[5]{200}$ را به ساده‌ترین شکل ممکن به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\log\sqrt[5]{200} = \log(200)^{\frac15} = \frac15\log 200 = \frac15\log(2^3\times5^2)$$

$$= \frac15\log 2^3+\frac15\log 5^2 = \frac35\log 2+\frac25\log 5$$

پله‌ی دوم: $\log 2$ برابر A در نظر گرفته شده است. پس مقدار $\log 5$ برابر است با:

$$\log 10 = 1 \Rightarrow \log(2\times5) = \log 2+\log 5 = 1 \xRightarrow{\log 2=A} A+\log 5 = 1$$

$$\Rightarrow \log 5 = 1-A$$

پله‌ی سوم: حاصل $\log\sqrt[5]{200}$ برابر است با:

$$\log\sqrt[5]{200} = \frac35\log 2+\frac25\log 5 = \frac35A+\frac25(1-A)$$

$$= \frac15A+\frac25 = \mathbf{\frac{A+2}{5}}$$

۹ ـ ④ **پله‌ی یکم:** مقدار $\log_2^e$ را برحسب A حساب می‌کنیم:

$$\log_2^{\sqrt[5]{e^2}} = \log_2^{e^{\frac25}} = \frac25\log_2^e = A \Rightarrow \log_2^e = \frac52A$$

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{\sqrt e}^{32}$ برابر است با:

$$\log_{\sqrt e}^{32} = \log_{e^{\frac12}}^{2^5} = \frac{5}{\frac12}\log_e^2 = 10\log_e^2$$

$$\xRightarrow{\log_e^2=\frac{1}{\log_2^e}} \log_{\sqrt e}^{32} = \frac{10}{\log_2^e} = \frac{10}{\frac52A} = \frac{20}{5A} = \mathbf{\frac{4}{A}}$$

۱۰ ـ ② **پله‌ی یکم:** مقدار $\log_{\frac12}^8$ و $\log_8^{\frac{\sqrt2}{2}}$ برابر است با:

$$\log_{\frac12}^8 = \log_{2^{-1}}^{2^3} = \frac{3}{-1}\log_2^2 = -3$$

$$\log_8^{\frac{\sqrt2}{2}} = \log_{2^3}^{\frac{1}{\sqrt2}} = \log_{2^3}^{2^{-\frac12}} = \frac{-\frac12}{3}\log_2^2 = -\frac16$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\left|\log_{\frac12}8\right|+\log_8\frac{\sqrt2}{2} = |-3|-\frac16 = 3-\frac16 = \mathbf{\frac{17}{6}}$$

۱۱ ـ ③ **پله‌ی یکم:** با توجه به ویژگی $\log a+\log b+\log c = \log abc$ مقدار صورت کسر را حساب می‌کنیم:

$$\log 2+\log 3+\log 4 = \log(2\times3\times4) = \log 24$$

پله‌ی دوم: محاسبه‌ی مقدار مخرج کسر گام بعدی است:

$$\log 2+\frac12\log 6 = \log 2+\log 6^{\frac12} = \log 2+\log\sqrt6 = \log 2\sqrt6$$

پله‌ی سوم: با توجه به ویژگی $\frac{\log a}{\log b} = \log_b^a$ حاصل کسر را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\log 24}{\log 2\sqrt6} = \log_{2\sqrt6}^{24} = \log_{2\sqrt6}^{(2\sqrt6)^2} = 2\log_{2\sqrt6}^{2\sqrt6} = \mathbf{2}$$

۱۲ ـ ② با توجه به ویژگی $\log_c^a+\log_c^b = \log_c^{ab}$ حاصل عبارت لگاریتمی را تعیین می‌کنیم:

$$\log_6^{2\sqrt3}+\log_6^{3\sqrt2} = \log_6^{(2\times3\times\sqrt{2\times3})} = \log_6^{6\sqrt6} = \log_6^{6^{\frac32}} = \frac32\log_6^6 = \mathbf{\frac32}$$

۱۳ ـ ③ **پله‌ی یکم:** مقدار a را به شکل ساده‌تری تعیین می‌کنیم:

$$\log_{12}^2+\log_{12}^3+\log_{12}^4 = \log_{12}^{(2\times3\times4)} = \log_{12}^{24} = \log_{12}^{(12\times2)}$$

$$= \log_{12}^{12}+\log_{12}^2 = a \Rightarrow a = 1+\log_{12}^2 \Rightarrow \log_{12}^2 = a-1 \qquad \text{I}$$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی I حاصل عبارت لگاریتمی داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$A = \log_{12}^3+\log_{12}^6+\log_{12}^{16} = \log_{12}^{(3\times6\times16)} = \log_{12}^{288} = \log_{12}^{144\times2}$$

$$= \log_{12}^{144}+\log_{12}^2 = \log_{12}^{12^2}+\log_{12}^2 = 2\log_{12}^{12}+\log_{12}^2 = 2+\log_{12}^2$$

$$\xRightarrow{\text{I}} A = 2+a-1 = \mathbf{a+1}$$

۱۴ ـ ② با استفاده از ویژگی $\log_t^a+\log_t^b+\cdots+\log_t^z = \log_t^{ab\cdots z}$، حاصل عبارت لگاریتمی داده شده را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\log_2^{\frac89}+\log_2^{\frac{9}{10}}+\log_2^{\frac{10}{11}}+\cdots+\log_2^{\frac{31}{32}} = \log_2^{(\frac{8}{\cancel{9}}\times\frac{\cancel{9}}{\cancel{10}}\times\frac{\cancel{10}}{\cancel{11}}\times\cdots\times\frac{\cancel{31}}{32})}$$

$$= \log_2^{\frac{8}{32}} = \log_2\frac{2^3}{2^5} = \log_2^{2^{-2}} = -2\log_2^2 = \mathbf{-2}$$

۱۵ ـ ① **پله‌ی یکم:** اگر بخواهیم حاصل $\log_b^a\times\log_c^b$ را حساب کنیم، چه‌کار می‌کنیم؟ دست به کار می‌شویم تا حاصل این عبارت را به‌دست آوریم:

$$\log_b^a\times\log_c^b = \frac{\log_b^a}{\log_b^c} = \log_c^a$$

در محاسبه‌ی حاصل این عبارت از دو ویژگی لگاریتم استفاده کردیم.

پله‌ی دوم: نتیجه‌ی به‌دست‌آمده در پله‌ی یکم را می‌توان به حاصل‌ضرب تعداد بیش‌تری از لگاریتم‌ها که عدد جلوی لگاریتم مبنای لگاریتم قبلی است، تعمیم داد. بنابراین داریم:

$$\log_3^2\times\log_4^3\times\log_5^4\times\cdots\times\log_{128}^{127} = \log_{128}^2 = \log_{2^7}^2 = \frac17\log_2^2 = \mathbf{\frac17}$$

۱۶ ـ ④ تنها با دانستن این ویژگی از لگاریتم‌ها که $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ است، حاصل عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_a^b.\log_b^a+\log_b^c.\log_c^b = \log_a^b\frac{1}{\log_a^b}+\log_b^c\times\frac{1}{\log_b^c} = 1+1 = \mathbf{2}$$

۱۷ – (۲) به‌جای x و y مقادیر مساوی با آن برحسب a را جای‌گزین کرده و مقدار عبارت داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\frac{1}{3}\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y \xRightarrow[y^3=a^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y=a^{\frac{1}{6}}]{x=a^{\frac{1}{2}}} A=\frac{1}{3}\log_a a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\log_a a^{\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\log_a a+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\log_a a=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

۱۸ – (۱) **پله‌ی یکم:** مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$4^a=2\sqrt{2}\Rightarrow (2^2)^a=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow 2^{2a}=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow 2a=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

پله‌ی دوم: لگاریتم $4a+1$ در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$$\log_4(4a+1)=\log_4(3+1)=\log_4 4=\mathbf{1}$$

۱۹ – (۱) **پله‌ی یکم:** عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$A=a^{x\log_x b}-b^{x\log_x a}=(a^{\log_x b})^x-(b^{\log_x a})^x$$

پله‌ی دوم: با استفاده از خاصیت $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ از خواص لگاریتم مقدار A را محاسبه می‌کنیم:

$$A=(b^{\log_x a})^x-(b^{\log_x a})^x=\mathbf{0}$$

در واقع پرانتز اول را با استفاده از ویژگی گفته‌شده به پرانتز دوم تبدیل کردیم. این دو عبارت با هم یکی بودند، فقط قیافه‌شان با هم فرق داشت!

۲۰ – (۳) با استفاده از قاعده‌ی تغییر مبنا تست را حل می‌کنیم:

$$\log_{18}96=\frac{\log 96}{\log 18}=\frac{\log 3\times 2^5}{\log 3^2\times 2}=\frac{\log 3+\log 2^5}{\log 3^2+\log 2}=\frac{\log 3+5\log 2}{2\log 3+\log 2}$$

$$=\frac{y+5x}{2y+x}=\mathbf{\frac{5x+y}{x+2y}}$$

۲۱ – (۲) **پله‌ی یکم:** با توجه به ویژگی $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ تغییراتی در عبارت داده‌شده ایجاد می‌کنیم:

$$A=\frac{1}{\log_{35}35!}+\frac{1}{\log_{34}35!}+\cdots+\frac{1}{\log_2 35!}=\log_{35!}35+\log_{35!}34+\cdots+\log_{35!}2$$

پله‌ی دوم: با استفاده از ویژگی $\log_c a+\log_c b=\log_c ab$ می‌توانیم حاصل نهایی عبارت داده‌شده را حساب کنیم:

$$A=\log_{35!}35\times 34\times\cdots\times 2=\log_{35!}35!=\mathbf{1}$$

۲۲ – (۱) **پله‌ی یکم:** حاصل عبارت داده‌شده را با استفاده از ویژگی $\log_t a+\log_t b+\cdots+\log_t z=\log_t ab\cdots z$ ساده می‌کنیم. داریم:

$$\log\tan 10^\circ+\log\tan 20^\circ+\cdots+\log\tan 80^\circ$$

$$=\log(\tan 10^\circ\times\tan 20^\circ\times\cdots\times\tan 80^\circ)=A$$

پله‌ی دوم: با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ عبارت جلوی لگاریتم را ساده می‌کنیم:

$$\tan 10^\circ\times\tan 20^\circ\times\tan 30^\circ\times\cdots\times\tan 60^\circ\times\tan 70^\circ\times\tan 80^\circ$$

$$=\tan 10^\circ\times\tan 20^\circ\times\tan 30^\circ\times\cdots\times\cot 30^\circ\times\cot 20^\circ\times\cot 10^\circ$$

$$=(\tan 10^\circ\times\cot 10^\circ)\times(\tan 20^\circ\times\cot 20^\circ)\times\cdots=1$$

پله‌ی سوم: بنابراین حاصل لگاریتم برابر است با: $A=\log 1=\mathbf{0}$

۲۳ – (۱) **پله‌ی یکم:** اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده‌شده باشند، مجموع ریشه‌ها و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

یادآوری: در معادله‌ی درجه دوم به فرم $ax^2+bx+c=0$ مجموع ریشه‌ها از رابطه‌ی $S=-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها از رابطه‌ی $P=\frac{c}{a}$ محاسبه می‌شود.

بنابراین داریم:

$$S=a+b=-(\frac{-10}{1})=10$$

$$P=a.b=\frac{0/1}{1}=0/1$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$\log a+\log b-\log(a+b)=\log ab-\log(a+b)=\log 0/1-\log 10$$

$$\log 10^{-1}-\log 10=-1-1=\mathbf{-2}$$

۲۴ – (۱) **پله‌ی یکم:** عبارت مثلثاتی جلوی لگاریتم را ساده می‌کنیم. البته با یادآوری زیر:

$$\sin p+\sin q=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

حالا داریم:

$$\frac{\sin 10+\sin 50}{\sin 40}=\frac{2\sin 30\cos 20}{2\sin 20\cos 20}=\frac{1}{2\sin 20}$$

پله‌ی دوم: در سوال گفته شده که $\log_2\sin 20=a$ است. داریم:

$$\text{عبارت}=\log_2\frac{1}{2\sin 20}=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{1}{\sin 20}=\log_2 2^{-1}+\log_2(\sin 20)^{-1}$$

$$=-\underbrace{\log_2 2}_{1}-\underbrace{\log_2\sin 20}_{a}=\mathbf{-1-a}$$

۲۵ – (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار $\log 2/1+\log\frac{1}{70}$ را حساب می‌کنیم:

$$\log 2/1+\log\frac{1}{70}=\log(2/1\times\frac{1}{70})=\log 0/03=\log 3\times 10^{-2}$$

$$=\log 3+\log 10^{-2}=\log 3-2\log 10=\log 3-2$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log 3-2$، **۲ واحد** از $\log 3$ کم‌تر است.

۲۶ – (۳) **پله‌ی یکم:** ابتدا باید ببینیم که ۱۰۰۰ بین چه توان‌هایی از ۲۱ قرار دارد:

$$21^2<1000<21^3\xRightarrow{\text{معکوس}}\frac{1}{21^3}<\frac{1}{1000}<\frac{1}{21^2}$$

$$\Rightarrow 21^{-3}<0/001<21^{-2}$$

پله‌ی دوم: حالا از دو طرف نامساوی بالا، لگاریتم در پایه‌ی ۲۱ می‌گیریم:

$$\log_{21}21^{-3}<\log_{21}0/001<\log_{21}21^{-2}\Rightarrow -3<\log_{21}0/001<-2$$

یعنی این عدد در بازه‌ی $\mathbf{[-3,-2]}$ قرار دارد.

۲۷ – (۱) **پله‌ی یکم:** مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$\log_5 x=\frac{4}{3}\Rightarrow x=5^{\frac{4}{3}}\Rightarrow x=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{625}$$

پله‌ی دوم: حالا باید ببینیم که ۶۲۵ بین کدام دو عدد مکعب کامل قرار دارد:

$$6^3=216,\ 7^3=343,\ 8^3=512,\ 9^3=729$$

پس:

$$8^3<625<9^3$$

پله‌ی سوم: از نامساوی بالا ریشه‌ی سوم می‌گیریم:

$$8<\sqrt[3]{625}<9\Rightarrow \mathbf{x\in(8,9)}$$

۲۸ ـ (۱) گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) مقدار هر یک از دو لگاریتم را برحسب ضریبی از $\log_2 10$ حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{100} = \log_{2^{-1}} 10^{-2} = \frac{-2}{-1}\log_2 10 = 2\log_2 10$$

$$\log_{\frac{1}{2}}100 = \log_{2^{-1}} 10^{2} = \frac{2}{-1}\log_2 10 = -2\log_2 10$$

با توجه به این‌که $0 < \log_2 10$ است، داریم:

$$2\log_2 10 > -2\log_2 10 \Rightarrow \mathbf{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{2}}100}$$

پس گزینه‌ی ۱ گزینه‌ی درست است. به جواب صحیح رسیدیم. برای کامل شدن پاسخ دیگر گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم.

(۲) دو طرف را به ضریبی از $\log_2 3$ تبدیل می‌کنیم:

$$\log_{\frac{1}{2}}3 = \log_{2^{-1}}3 = -\log_2 3$$

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$$

$\log_2 3$ عددی مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است. پس معکوس آن عددی مثبت و کوچک‌تر از ۱ است. پس این عدد مثبت همواره از عدد منفی $-\log_2 3$ بزرگ‌تر است. بنابراین گزینه‌ی ۲ نادرست است.

(۳) $\log_4 5$ یک عدد مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است. اما $\log_5 3$ یک عدد مثبت کوچک‌تر از ۱ می‌باشد. پس رابطه‌ی $\log_5 3 > \log_4 5$ یک رابطه‌ی نادرست است.

(۴)

$$\log_{\frac{1}{2}}2 = \log_{2^{-1}}2 = -\log_2 2 = -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}3 = \log_{2^{-1}}3 = -\log_2 3 \xrightarrow{\log_2 3 > 1} -\log_2 3 < -1 \Rightarrow -\log_2 2 > -\log_2 3$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}2 > \log_{\frac{1}{2}}3$$

به رابطه‌ای عکس رابطه‌ی موجود در گزینه‌ی ۴ رسیدیم. پس گزینه‌ی ۴ هم نادرست است.

۲۹ ـ (۴) پله‌ی یکم: عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{5} = \log_{2^{\frac{1}{3}}}5^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\log_2 5 = \frac{3}{2}\log_2 5$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log_2 5$ عددی بین ۲ و $\frac{5}{2}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$2 < \log_2 5 < \frac{5}{2} \Rightarrow 3 < \frac{3}{2}\log_2 5 < \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow 3 < \log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{5} < \frac{15}{4} \Rightarrow \left[\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{5}\right] = \mathbf{3}$$

۳۰ ـ (۲) پله‌ی یکم: محدوده‌ی $\log_6 2$ و $\log_2 6$ را تعیین می‌کنیم:

$$\log_6 1 < \log_6 2 < \log_6 6 \Rightarrow 0 < \log_6 2 < 1$$

$$\log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8 \Rightarrow 2 < \log_2 6 < 3$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\left[\log_6 2\right] + \left[\log_2 6\right] = 0 + 2 = \mathbf{2}$$

۳۱ ـ (۳) گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) برای مقایسه‌ی دو عبارت لگاریتمی، اگر پایه‌ی لگاریتم عددی بین ۰ و ۱ بود، در این‌صورت هر چه‌قدر عدد جلوی لگاریتم کوچک‌تر باشد حاصل عبارت لگاریتمی بزرگ‌تر است. پس در این‌جا $\log_{\frac{1}{3}}80$ بزرگ‌تر از $\log_{\frac{1}{3}}90$ است و این گزینه درست است.

(۲) $\log_6 7$ عددی بزرگ‌تر از یک است، اما $\log_7 6$ عددی کوچک‌تر از یک است. پس رابطه‌ی $\log_6 7 > \log_7 6$ درست است.

(۳) $\log_3 2$ عددی است کوچک‌تر از یک اما $\log_{\frac{1}{4}}5 = \log_{2^{-2}}5 = -\frac{1}{2}\log_2 5$ عددی است منفی. پس رابطه‌ی $\mathbf{\log_{\frac{1}{4}}5 > \log_3 2}$ نادرست است.

(۴)

$$\log_4 125 = \log_{2^2}5^3 = \frac{3}{2}\log_2 5$$

$$\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2\log_2 5$$

$$2\log_2 5 > \frac{3}{2}\log_2 5 \Rightarrow \log_2 25 > \log_4 125$$

۳۲ ـ (۳) پله‌ی یکم: مقدار A را به‌ازای $x = 5$ به‌دست می‌آوریم:

$$x = 5 \Rightarrow A = \log_3^{(225-180+38)} = \log_3 83$$

پله‌ی دوم: باید مشخص کنیم عدد ۸۳ بین چه توان‌هایی از عدد ۳ قرار دارد. ببینیم:

$$< 83 < 3^5 \xrightarrow{\text{در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم}} \log_3 3^4 < \log_3 83 < \log_3 3^5$$

$$\Rightarrow 4 < \log_3 83 < 5 \Rightarrow \mathbf{4 < A < 5}$$

۳۳ ـ (۲) چشم‌انداز: اگر عدد x بین دو عدد 10^n و 10^{n+1} قرار داشته باشد، $n+1$ رقمی محسوب می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$10^n \le x < 10^{n+1} \Leftrightarrow \log 10^n \le \log x < \log 10^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow n\log 10 \le \log x < (n+1)\log 10 \Leftrightarrow n \le \log x < n+1$$

پس **اگر لگاریتم عددی بین n و $n+1$ باشد، عدد $n+1$ رقمی است.**

پله‌ی یکم: مقدار $\log 2^{30}$ را حساب می‌کنیم: $\log 2^{30} = 30\log 2$

پله‌ی دوم: چون $\log 2 = 0/30103$ است، خواهیم داشت:

$$30\log 2 = 30 \times 0/30103 \simeq 9/03$$

بنابراین عدد 2^{30} ، **۱۰** رقمی است.

۳۴ ـ (۴) پله‌ی یکم: مقدار $\log 5$ برابر است با:

$$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \simeq 1 - 0/3 = 0/7$$

پله‌ی دوم: تعداد ارقام عدد 5^{21} را حساب می‌کنیم:

$$\log 5^{21} = 21\log 5 \simeq 21 \times 0/7 = 14/7$$

بنابراین عدد 5^{21}، **پانزده** رقمی است.

فهرست
پلکان آموزش ۱۱
پاسخ پلکان آموزش ۱۵

بخش ۲ معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی و لگاریتمی

پلکان آموزش

۱ ـ معادله‌های نمایی

هنگامی که دو عدد توان‌دار با هم برابر هستند، اگر پایه‌هایشان برابر باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که توان‌هایشان هم برابر است: $a^{\bigcirc}=a^{\text{☁}} \Rightarrow \bigcirc=\text{☁}$

۱ ـ معادله‌ی $16^x+4^x-2=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۲ ـ معادله‌های لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی و نمایی، ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها که در بخش قبل آموختیم، معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم. در نهایت که جواب‌های معادله را به‌دست آوریم، آن‌ها را محض اطمینان در معادله‌ی اصلی چک می‌کنیم که جواب اضافی به‌دست نیاورده باشیم.

یک حالت از معادلاتی که امکان دارد با آن برخورد کنیم، معادلات به فرم $\log_{\bigcirc}^{\text{☁}}=a$ است. با شرط این‌که $\text{☁}>0$ و $\bigcirc\neq1$ و $\bigcirc>0$ است، ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از رابطه‌ی $\text{☁}=\bigcirc^{a}$ معادله را حل می‌کنیم.

منظور از ☁ در این‌جا یک چندجمله‌ای است که متغیری که می‌خواهیم تعیین کنیم در آن قرار دارد.

حالت دیگر معادلات لگاریتمی، تساوی دو عبارت لگاریتمی است. در صورتی‌که پایه‌های دو عبارت لگاریتمی برابر نبود، ابتدا آن‌ها را با استفاده از قوانین لگاریتم یکسان می‌کنیم. سپس با مساوی قراردادن عبارت‌های جلوی دو لگاریتم، معادله را حل می‌کنیم. به توضیح ریاضی زیر توجه کنید:

$$\log_a^{\bigcirc}=\log_a^{\text{☁}} \xrightarrow[a>0\,,\,a\neq1]{\text{☁}\,,\,\bigcirc>0} \text{☁}=\bigcirc$$

مثال ۱ معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید. *(تمرین کتاب ریاضی عمومی رشته‌ی تجربی)*

الف) $\log_2^{(x-1)}=3$ ب) $2\log x-\log(x+1)=1$

ج) $\log(2x-1)+\log(x-7)=\log 7$

الف) $\log_2^{(x-1)}=3 \Rightarrow x-1=2^3=8 \Rightarrow 9$

ب) $2\log x-\log(x+1)=1 \Rightarrow \log x^2-\log(x+1)=1$

$$\log\frac{x^2}{x+1}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+1}=10 \Rightarrow x^2=10x+10 \Rightarrow x^2-10x-10=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{10+\sqrt{140}}{2} \\ x_2=\dfrac{10-\sqrt{140}}{2} \end{cases}$$

از بین این دو جواب فقط x_1 قابل قبول است چون x_2 عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند.

ج) $\log(2x-1)+\log(x-7)=\log 7 \Rightarrow \log(2x-1)(x-7)=\log 7 \Rightarrow (2x-1)(x-7)=7$

$$\Rightarrow 2x^2-15x+7=7 \Rightarrow 2x^2-15x=0 \Rightarrow x(2x-15)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ‌ق‌ق} \\ x=\frac{15}{2} \end{cases}$$

این معادله فقط یک جواب داشته و $x=\frac{15}{2}$ قابل قبول است.

۲ ـ اگر $\log(3x-2)=\begin{vmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{vmatrix}$، مقدار x کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۲)*

۱) 1 ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳ ـ جواب معادله‌ی $\log_3^{\sqrt{3}}+\log_{\sqrt{3}}^{3}=\log_9^{x}$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۲)*

۱) $x=3^2$ ۲) $x=3^3$ ۳) $x=3^5$ ۴) $x=3^4$

۴ ـ معادله‌ی $\log(x-1)+\log(x-2)=\log(x^3+2)$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟ *(آزاد ـ تجربی ۸۷ ـ خارج از کشور)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵ ـ اگر $2\log(x-2)=\log(x+10)$، آن‌گاه $\log_4(x+2)$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۵)*

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶ ـ اگر $\log(x-2)=2\log 2-\log(x-4)$، حاصل $\log_5(x-3)$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۷)*

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) $\frac{1}{2}$

۷ ـ اگر $\log\frac{2}{x}+\log(x+1)=1$ باشد، لگاریتم عدد x در پایه ۸ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۳)*

۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۸ ـ از معادله‌ی لگاریتمی $2\log x=1+\log(x+\frac{12}{5})$، مقدار $\log_5^{(2x+1)}$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۵ ـ خارج از کشور)*

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۹ ـ اگر $x=8\log_4^{2\sqrt{2}}$ باشد، لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه‌ی x کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۷ ـ خارج از کشور)*

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) 3

۱۰ ـ از تساوی $\log(2x-1)+\frac{1}{2}\log x^2=\log 3$، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۸ ـ خارج از کشور)*

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۱ ـ اگر $\log_2^{12}=\alpha$ باشد، $4^{\alpha-2}$ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۶ ـ خارج از کشور)*

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) 6 ۳) 9 ۴) 18

۱۲ ـ از تساوی $\log_5(2x-1)+\log_5(3x-5)=1$ ، مقدار $\log_2(6x+3)$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۶)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳ ـ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(\log_3^x)^2+4\log_9^x=8$ چند است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{25}$

۱۴ ـ معادله $\log(x^3+3x^2+3x+1)=\log x+\log(x+1)+\log(x+3)$ چند ریشه حقیقی دارد؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۱)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵ ـ معادله $\log x+\log(x+1)+\log(x+2)=\log 6$ چند ریشه دارد؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۵)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۱

۱۶ ـ لگاریتم عددی در پایه‌ی ۵، چهار واحد از لگاریتم مجذورِ معکوس این عدد در پایه‌ی ۲۵ بیش‌تر است. لگاریتم این عدد در پایه‌ی ۱۲۵ برابر است با:

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۷ ـ اگر $\log_a^{2} = \frac{1}{\log_4^a} - \frac{1}{6}$ باشد، آن‌گاه: *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۱) $a = 8$ ۲) $a = \frac{1}{8}$ ۳) $a = \frac{1}{64}$ ۴) $a = 64$

۱۸ ـ معادله $\log_9^x + \log_{x^3}^{3} = 1$ چند ریشه حقیقی دارد؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۶)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹ ـ از معادله‌ی $\log_3^{(x^2-1)} = 1 + \log_3^{(x+3)}$، مقدار لگاریتم $(x-3)$ در مبنای ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۸۸)*

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۰ ـ کدام عدد جواب معادله $5^{2x} - 8(5^x) + 15 = 0$ است؟

۱) $\log_5^3$ ۲) $\log_3^5$ ۳) $\log_3^4$ ۴) $\log_4^3$

۲۱ ـ اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادله $x^2 - 4mx - 30 = 0$ باشد آن‌گاه مقدار کسر $\frac{\log ab}{\log a . \log b}$ برابر است با:

۱) $\frac{2m}{30}$ ۲) $-\frac{2m}{30}$ ۳) $\frac{2m}{15}$ ۴) $-\frac{2m}{15}$

۲۲ ـ کدام‌یک از مقدارهای زیر جواب دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x = \log 50 - \log 5 \end{cases}$ می‌باشند؟

۱) $y = 100$ و $x = 10$ ۲) $y = 10$ و $x = 20$ ۳) $y = 100$ و $x = 1$ ۴) $y = 10$ و $x = 2$

۲۳ ـ از دو معادله‌ی $\log(y+2) = 1$ و $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$، مقدار x کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۷ ـ خارج از کشور)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴ ـ اگر $\log xy^2 = 2$ و $\log x^2y = 4$ باشد، حاصل $\log xy^4$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۷)*

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶

۲۵ ـ اگر $4^x = 4\sqrt{2}$ و $1 + \log\sqrt{x+1} = \log y$ مقدار y کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۵)*

۱) ۷/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

۲۶ ـ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^{\log_2^x} = 16x^3$ برابر چند است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{1}{16}$

۲۷ ـ مجموع ارقام عدد $a + b$ از دستگاه معادلات $\begin{cases} \log_{25}^a - \log_5^b = 1 \\ a + 5b = 30 \end{cases}$ چند است؟ $(a,b \in \mathbb{Z})$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۸ ـ معادله‌ی $100^{(2\log\sqrt{x(x+1)} - 3\log\sqrt[3]{x})} = x + 7$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳ ـ نامعادله‌های نمایی

برای حل نامعادله‌هایی به‌صورت $a^{\square} \geq a^{\bigcirc}$ دو حالت را در نظر می‌گیریم:

۱ وقتی پایه بزرگ‌تر از ۱ باشد، جهت نامساوی تغییری نمی‌کند؛ یعنی:

$$a^{\square} \geq a^{\bigcirc} \xrightarrow{a>1} \square \geq \bigcirc$$

۲ وقتی پایه بین صفر و یک باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود؛ یعنی:

$$a^{\square} \geq a^{\bigcirc} \xrightarrow{0<a<1} \square \leq \bigcirc$$

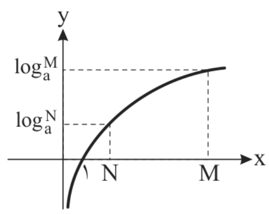
مثال ۲ جواب نامعادله‌های زیر را تعیین کنید.

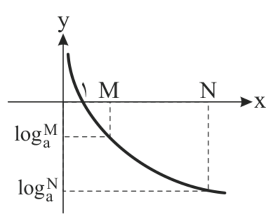
الف) $2^{3x-2} > 2^{x}$ ب) $(\frac{1}{2})^{5x} < (\frac{1}{2})^{3x+4}$

الف) $2^{3x-2} > 2^{x} \xRightarrow{2>1} 3x-2 > x \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$

ب) $(\frac{1}{2})^{5x} < (\frac{1}{2})^{3x+4} \xRightarrow{\frac{1}{2}<1} 5x > 3x+4 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$

۴ ـ نامعادلات لگاریتمی





با توجه به مقدار a در تابع $y = \log_a^x$ با ۲ حالت روبه‌رو هستیم:

① یک حالت وقتی است که **$a > 1$** است. در این حالت جهت نامعادله برای حل عوض نخواهد شد. یعنی:

$$\log_a^M \geq \log_a^N \xRightarrow[M,N>0]{a>1} M \geq N$$

$$\log_a^M \geq b \xRightarrow[M>0]{a>1} M \geq a^b$$

② حالت دیگر حالتی است که **$0 < a < 1$** باشد. در این حالت برای حل نامعادله، **جهت آن عوض خواهد شد**. یعنی:

$$\log_a^M \geq \log_a^N \xRightarrow[M,N>0]{0<a<1} M \leq N$$

$$\log_a^M \geq b \xRightarrow[M>0]{0<a<1} M \leq a^b$$

مثال ۳ جواب نامعادله‌ی $\log_3^{5x+12} > \log_3^{2x-9}$ را تعیین کنید.

مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ است. پس جهت نامساوی عوض نمی‌شود:

$\log_3^{5x+12} > \log_3^{2x-9} \Rightarrow 5x+12 > 2x-9 \Rightarrow 3x > -21 \Rightarrow x > -7$

۲۹ ـ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(\frac{1}{2})^{5x-1} > 64$ کدام است؟

۱) $x < -2$ ۲) $x < -1$ ۳) $x > -1$ ۴) $x > -2$

۳۰ ـ مجموعه جواب نامعادله $\log_{10}^{\frac{x+2}{7}} < -1$ کدام است؟

۱) $-2 < x < -\frac{13}{10}$ ۲) $-2 < x < \frac{13}{10}$ ۳) $\frac{13}{10} < x < 2$ ۴) $-\frac{13}{10} < x < 3$

۳۱ ـ مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{(x+1)}{3}} < \log_{\frac{1}{2}}^{2}$ کدام است؟

۱) $x > 1$ ۲) $-26 < x < 1$ ۳) $1 < x < 26$ ۴) $x > 26$

۳۲ ـ کدام عدد می‌تواند جواب نامعادله‌ی $\sqrt[5]{2^{\log x^3}} > 8^{\frac{1}{5}}$ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

فهرست
پلکان آموزش ۱۱
پاسخ پلکان آموزش ۱۵

پاسخ تست‌های پلکان آموزش

۱ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** ریشه‌های معادله‌ی نمایی را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$16^x + 4^x - 2 = 0 \Rightarrow (4^2)^x + 4^x - 2 = 0 \Rightarrow (4^x)^2 + 4^x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{4^x = a} a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -2 \;,\; a = 1$$

پله‌ی دوم: مقدار $a = -2$ غیرقابل‌قبول است. چون معادله‌ی $4^x = -2$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است. پس فقط $a = 1$ قابل قبول است:

$$a = 1 \Rightarrow 4^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین معادله‌ی داده‌شده تنها **۱ ریشه‌ی حقیقی** دارد.

۲ ـ (۴) **چشم‌انداز:** به $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ دترمینانِ ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می‌گویند و حاصل آن برابر $ad - bc$ است.

پله‌ی یکم: حاصل دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} = (\log 5 \times \log 5) - (\log 2 \times \log 2)$$
$$= (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2)$$
$$= (\log \frac{5}{2})(\log 10) = \log \frac{5}{2}$$

پله‌ی دوم: مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(3x - 2) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x - 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow 3x = \frac{9}{2} \Rightarrow \mathbf{x = \frac{3}{2}}$$

۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** حاصل عبارت لگاریتمی سمت چپ تساوی را حساب می‌کنیم:

$$\log_3^{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{3}}^3 = \log_3^{3^{\frac{1}{2}}} + \log_{3^{\frac{1}{2}}}^3 = \frac{1}{2}\log_3^3 + \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3^3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

پله‌ی دوم: محاسبه‌ی مقدار x به‌سادگی امکان‌پذیر است:

$$\log_9^x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 9^{\frac{5}{2}} = (3^2)^{\frac{5}{2}} = 3^5 \Rightarrow \mathbf{x = 3^5}$$

۴ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** دامنه‌ی تعریف عبارت‌های لگاریتمی را تعیین می‌کنیم. داریم:

۱) $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

۲) $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

با اشتراک‌گیری بین دو جواب به‌دست‌آمده، دامنه‌ی تعریف تابع به‌صورت $x > 2$ در می‌آید. با این دامنه‌ی تعریف تعیین‌شده عبارت $x^3 + 2$ که جلوی لگاریتم قرار دارد، عبارت لگاریتمی را تعریف‌نشده نمی‌کند. پس خیال‌مان از این بابت راحت است!

پله‌ی دوم: معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\log(x-1) + \log(x-2) = \log(x-1)(x-2) = \log(x^2 - 3x + 2)$$
$$= \log(x^3 + 2) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = x^3 + 2 \Rightarrow x^3 - x^2 + 3x = 0$$
$$\Rightarrow x(x^2 - x + 3) = 0$$

عبارت درجه‌ی دوم داخل پرانتز فاقد ریشه است. (چرا؟) تنها جواب به‌دست‌آمده $x = 0$ است. ولی با توجه به دامنه‌ی تعریف تعیین‌شده در پله‌ی یکم، این مقدار غیرقابل‌قبول است. پس **صفر** ریشه‌ی حقیقی دارد.

۵ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** معادله‌ی لگاریتمی را حل کرده و مقدار x را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$2\log(x-2) = \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10)$$
$$\Rightarrow (x-2)^2 = x + 10 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x + 10$$
$$\Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 6 \;,\; x = -1$$

مقدار $x = -1$ غیرقابل‌قبول است. چون عبارت $x - 1$ منفی می‌شود و چون این عبارت جلوی لگاریتم قرار دارد، منفی‌شدن آن به هیچ عنوان پذیرفته نیست! پس تنها جواب قابل قبول $x = 6$ است.

پله‌ی دوم: به‌ازای $x = 6$ عبارت لگاریتمی داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_4^{(x+2)} = \log_4^{(6+2)} = \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2}\log_2^2 = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

۶ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** محاسبه‌ی مقدار x اولین گام در حل تست است:

$$\log(x-2) = 2\log 2 - \log(x-4) = \log 2^2 - \log(x-4)$$
$$= \log 4 - \log(x-4) \Rightarrow \log(x-2) = \log(\frac{4}{x-4})$$
$$\Rightarrow x - 2 = \frac{4}{x-4} \Rightarrow (x-2)(x-4) = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 4$$
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

مقدار Δ برای این معادله‌ی درجه‌ی ۲ برابر ۲۰ است. پس ریشه‌های معادله برابرند با:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{5} & \text{غ‌ق‌ق} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$$

دلیل این‌که $x = 3 - \sqrt{5}$ غیرقابل‌قبول است، این است که به‌ازای آن، عبارت جلوی لگاریتم در معادله‌ی داده‌شده منفی می‌شود.

پله‌ی دوم: با تعیین‌شدن مقدار x حاصل عبارت لگاریتمی داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_{5}^{(x-3)} = \log_{5}^{(3+\sqrt5-3)} = \log_{5}^{\sqrt5} = \log_{5}^{5^{\frac12}} = \frac12\log_{5}^{5} = \mathbf{\frac12}$$

۷ ـ ۱ **پله‌ی یکم:** معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\log\frac{2}{x}+\log(x+1)=\log(\frac{2}{x})(x+1)=1 \Rightarrow (\frac{2}{x})(x+1)=10$$

$$\Rightarrow 2(x+1)=10x \Rightarrow 2x+2=10x \Rightarrow 8x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

مقدار $x=\frac14$ قابل قبول است. چون هیچ‌کدام از عبارت‌های لگاریتمی را تعریف‌نشده نمی‌کند.

پله‌ی دوم: لگاریتم x را در پایه‌ی ۸ حساب می‌کنیم:

$$\log_{8}^{x} = \log_{8}^{\frac14} = \log_{2^3}^{2^{-2}} = \frac{-2}{3}\log_{2}^{2} = -\mathbf{\frac{2}{3}}$$

۸ ـ ۴ **پله‌ی یکم:** x را حساب می‌کنیم:

$$2\log x = 1+\log(x+\frac{12}{5}) \Rightarrow \log x^2 = \log 10(x+\frac{12}{5})$$

$$\Rightarrow x^2 = 10x+24$$

$$x^2-10x-24=0 \Rightarrow (x-12)(x+2)=0 \Rightarrow x=12 \;,\; x=-2$$

$x=-2$ غیرقابل‌قبول است. پس $x=12$ تنها ریشه‌ی معادله است.

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=12$ مقدار عبارت لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$\log_{5}^{(2x+1)} = \log_{5}^{(24+1)} = \log_{5}^{25} = \log_{5}^{5^2} = 2\log_{5}^{5} = \mathbf{2}$$

۹ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** حل معادله‌ی لگاریتمی شرط اول برای رسیدن به جواب تست است:

$$x = 8\log_{4}^{2\sqrt2} = 8\log_{2^2}^{2^{\frac32}} = 8(\frac{\frac32}{2})\log_{2}^{2} = 8\times\frac34 = 2\times3 = 6$$

پله‌ی دوم: مقدار لگاریتم $4(x+3)$ در پایه‌ی x برابر است با:

$$\log_{x}^{4(x+3)} = \log_{6}^{4(6+3)} = \log_{6}^{(4\times9)} = \log_{6}^{36} = \log_{6}^{6^2} = 2\log_{6}^{6} = \mathbf{2}$$

۱۰ ـ ۱ **پله‌ی یکم:** x را حساب می‌کنیم:

$$\log(2x-1)+\frac12\log x^2 = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1)+\log\sqrt{x^2}$$

$$=\log(2x-1)+\log x = \log(2x-1)x = \log 3 \Rightarrow (2x-1)x=3$$

$$\Rightarrow 2x^2-x=3 \Rightarrow 2x^2-x-3=0 \Rightarrow (2x-3)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac32 \\ x=-1 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پله‌ی دوم: مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ برابر است با:

$$\log_{4}^{\frac{x}{3}} = \log_{4}^{\frac{\frac32}{3}} = \log_{4}^{\frac12} = \log_{2^2}^{2^{-1}} = \frac{-1}{2}\log_{2}^{2} = -\mathbf{\frac12}$$

۱۱ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** α را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_{2}^{12} = \alpha \Rightarrow \log_{2}^{(4\times3)} = \log_{2}^{4}+\log_{2}^{3} = \log_{2}^{2^2}+\log_{2}^{3} = 2+\log_{2}^{3}$$

پله‌ی دوم: $4^{\alpha-2}$ برابر است با:

$$4^{\alpha-2} = 4^{(2+\log_{2}^{3}-2)} = 4^{\log_{2}^{3}} = 3^{\log_{2}^{4}} = 3^2 = \mathbf{9}$$

۱۲ ـ ۳ **پله‌ی یکم:** مقدار x برابر است با:

$$\log_{5}^{(2x-1)}+\log_{5}^{(3x-5)} = \log_{5}^{(2x-1)(3x-5)} = 1$$

$$\Rightarrow (2x-1)(3x-5)=5 \Rightarrow 6x^2-13x+5=5$$

$$\Rightarrow 6x^2-13x=0 \Rightarrow x(6x-13)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{13}{6} \end{cases}$$

$x=0$ به این دلیل غیرقابل‌قبول است که عبارت جلوی لگاریتم‌ها به یک عدد منفی تبدیل می‌شود.

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=\frac{13}{6}$ مقدار عبارت لگاریتمی داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\log_{2}^{(6x+3)} = \log_{2}^{(13+3)} = \log_{2}^{16} = \log_{2}^{2^4} = 4\log_{2}^{2} = \mathbf{4}$$

۱۳ ـ ۱ **پله‌ی یکم:** اولین گام برای حل تست، تعیین ریشه‌های معادله‌ی لگاریتمی است. در نتیجه داریم:

$$(\log_{3}^{x})^2+4\log_{9}^{x} = (\log_{3}^{x})^2+4\log_{3^2}^{x} = (\log_{3}^{x})^2+2\log_{3}^{x} = 8$$

$$\xRightarrow{\log_{3}^{x}=A} A^2+2A=8 \Rightarrow A^2+2A-8=0 \Rightarrow (A+4)(A-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-4 \\ A=2 \end{cases}$$

پله‌ی دوم: با توجه به مقدارهای به‌دست‌آمده برای $\log_{3}^{x}$، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$\log_{3}^{x}=-4 \Rightarrow x_1=3^{-4}=\frac{1}{81}$$

$$\log_{3}^{x}=2 \Rightarrow x_2=3^2=9$$

پله‌ی سوم: حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله برابر است با:

$$x_1.x_2 = \frac{1}{81}\times9 = \frac{9}{81} = \mathbf{\frac19}$$

۱۴ ـ ۱ **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\log x+\log(x+1)+\log(x+3) = \log x(x+1)(x+3)$$

$$=\log x(x^2+4x+3) = \log(x^3+4x^2+3x)$$

پله‌ی دوم: با توجه به تساوی موجود، عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$x^3+3x^2+3x+1 = x^3+4x^2+3x \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$$

پله‌ی سوم: توجه داشته باشید که $x=-1$ غیرقابل‌قبول است، چون به غیر از $\log(x+3)$، عبارت جلوی بقیه‌ی لگاریتم‌ها یا صفر می‌شود یا برابر یک عدد منفی. پس $x=1$ تنها جواب قابل قبول است و این معادله **۱ ریشه‌ی حقیقی** دارد.

۱۵ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی را با استفاده از ویژگی $\log a+\log b+\log c=\log abc$، ساده می‌کنیم:

$$\log x+\log(x+1)+\log(x+2)=\log x(x+1)(x+2)$$
$$=\log x(x^2+3x+2)=\log(x^3+3x^2+2x)$$

پله‌ی دوم: معادله‌ی لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\log(x^3+3x^2+2x)=\log 6\Rightarrow x^3+3x^2+2x=6$$
$$\Rightarrow x^3+3x^2+2x-6=0$$

پله‌ی سوم: یکی از نکات حل معادله‌های خطی این بود که اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر بود، در این‌صورت $x=1$ یکی از ریشه‌های معادله خواهد بود. در این‌جا دو ریشه‌ی دیگر این معادله منفی است و غیرقابل قبول محسوب می‌شود. پس این معادله فقط **۱ ریشه** دارد.

۱۶ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** توضیحات فارسی موجود در تست را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم. داریم: $\log_5^x=\log_{25}^{\frac{1}{x^2}}+4$

پله‌ی دوم: با حل معادله‌ی لگاریتمی مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_5^x=\log_{5^2}^{x^{-2}}+4=\frac{-2}{2}\log_5^x+4\Rightarrow\log_5^x=-\log_5^x+4$$
$$\Rightarrow 2\log_5^x=4\Rightarrow\log_5^x=2\Rightarrow x=5^2=25$$

پله‌ی سوم: لگاریتم این عدد (همان ۲۵) در پایه‌ی ۱۲۵ برابر است با:

$$\log_{125}^{25}=\log_{5^3}^{5^2}=\frac{2}{3}\log_5^5=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

۱۷ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** با توجه به ویژگی $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$، تغییراتی در عبارت داده‌شده ایجاد می‌کنیم: $\frac{1}{\log_4^a}=\log_a^4$

پله‌ی دوم: با حل معادله، مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$\log_a^2=\log_a^4-\frac{1}{6}=\log_a^{2^2}-\frac{1}{6}=2\log_a^2-\frac{1}{6}\Rightarrow\log_a^2=\frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow a^{\frac{1}{6}}=2\xRightarrow{\text{دو طرف به توان ۶}}(a^{\frac{1}{6}})^6=2^6\Rightarrow\mathbf{a=64}$$

۱۸ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** تغییراتی در عبارت لگاریتمی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_9^x+\log_{x^3}^3=\log_{3^2}^x+\log_{x^3}^3=\frac{1}{2}\log_3^x+\frac{1}{3}\log_x^3$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $\log_3^x=\frac{1}{\log_x^3}$، مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}\log_3^x+\frac{1}{3\log_3^x}=1\xRightarrow{\log_3^x=A}\frac{1}{2}A+\frac{1}{3A}=1\Rightarrow\frac{3A^2+2}{6A}=1$$
$$\Rightarrow 3A^2-6A+2=0\Rightarrow A=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A=\log_3^x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x_1=3^{(\frac{3+\sqrt{3}}{3})}\\ A=\log_3^x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x_2=3^{(\frac{3-\sqrt{3}}{3})}\end{cases}$$

بنابراین معادله **۲ ریشه‌ی حقیقی** دارد.

۱۹ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$\log_3^{(x^2-1)}=1+\log_3^{(x+3)}\Rightarrow\log_3^{(x^2-1)}-\log_3^{(x+3)}=\log_3^{\frac{x^2-1}{x+3}}=1$$
$$\Rightarrow\frac{x^2-1}{x+3}=3\Rightarrow x^2-1=3x+9\Rightarrow x^2-3x-10=0$$
$$\Rightarrow(x-5)(x+2)=0\Rightarrow x=5\ ,\ x=-2$$

پله‌ی دوم: به‌ازای $x=-2$ عبارت $\log(x-3)$ تعریف‌نشده می‌شود. پس با $x=5$ مقدار $\log(x-3)$ در مبنای ۴ را حساب می‌کنیم:

$$\log_4^{(x-3)}=\log_4^{(5-3)}=\log_4^2=\log_{2^2}^2=\frac{1}{2}\log_2^2=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

۲۰ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** با در نظر گرفتن $A=5^x$، معادله را حل می‌کنیم:

$$5^{2x}-8(5^x)+15=(5^x)^2-8(5^x)+15=0$$
$$\Rightarrow A^2-8A+15=0\Rightarrow(A-5)(A-3)=0\Rightarrow A=5\ ,\ A=3$$

پله‌ی دوم: حالا به‌جای A، عبارت 5^x را جای‌گزین می‌کنیم:

$$5^x=3\Rightarrow x=\mathbf{\log_5^3}$$

$5^x=5\Rightarrow x=1\Rightarrow$ در بین جواب‌ها نیست

۲۱ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دو داده‌شده را به دست می‌آوریم: $x.x'=\log a.\log b=\frac{-30}{1}=-30$

$$x+x'=\log a+\log b=\log ab=-(\frac{-4m}{1})=4m$$

پله‌ی دوم: مقدار کسر برابر است با: $\frac{\log ab}{\log a.\log b}=\frac{4m}{-30}=-\mathbf{\frac{2m}{15}}$

۲۲ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** ابتدا از معادله‌ای که تنها مجهول آن x است، مقدار x را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log x=\log 50-\log 5=\log\frac{50}{5}=\log 10\Rightarrow\mathbf{x=10}$$

پله‌ی دوم: با تعیین‌شدن مقدار x و با استفاده از معادله‌ی اول، مقدار y را محاسبه می‌کنیم: $\log x+\log y=3\xRightarrow{x=10}\log 10+\log y=3$

$$\Rightarrow 1+\log y=3\Rightarrow\log y=2\Rightarrow\mathbf{y=100}$$

۲۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار y را حساب می‌کنیم:

$$\log(y+2)=1\Rightarrow y+2=10\Rightarrow y=8$$

پله‌ی دوم: با استفاده از معادله‌ی دوم، مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(y-x)+\log(4x+y)=2\xRightarrow{y=8}\log(8-x)+\log(4x+8)$$
$$=\log(8-x)(4x+8)=2\Rightarrow 4(8-x)(x+2)=10^2=100$$
$$\Rightarrow(8-x)(x+2)=25\Rightarrow\mathbf{x=3}$$

۲۴ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار x و y را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$\log xy^2=2\Rightarrow\log x+\log y^2=2\Rightarrow\log x+2\log y=2$$
$$\log x^2y=4\Rightarrow\log x^2+\log y=4\Rightarrow 2\log x+\log y=4$$

پله‌ی دوم: با حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار $\log x$ برابر ۲ و مقدار $\log y$ برابر صفر می‌شود. پس مقدار x و y برابر است با:

$$\log x = ۲ \Rightarrow x = ۱۰^{۲} = ۱۰۰$$

$$\log y = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

پله‌ی سوم: حاصل $\log xy^{۴}$ برابر است با:

$$\log xy^{۴} = \log(۱۰۰\times ۱) = \log ۱۰۰ = \mathbf{۲}$$

۲۵ ـ (۳) پله‌ی یکم: محاسبه‌ی x قدم اول است:

$$۴\sqrt{۲} = ۴^{x} \Rightarrow ۲^{۲}\times ۲^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲x} \Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۲}} = ۲^{۲x} \Rightarrow ۲x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵}{۴}$$

پله‌ی دوم: y برابر است با:

$$۱+\log\sqrt{x+۱} = \log y \xRightarrow{x=\frac{۵}{۴}} ۱+\log\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱} = ۱+\log\sqrt{\frac{۹}{۴}}$$

$$= ۱+\log\frac{۳}{۲} = \log y \Rightarrow \log ۱۰ + \log\frac{۳}{۲} = \log y$$

$$\Rightarrow \log(۱۰\times\frac{۳}{۲}) = \log ۱۵ = \log y \Rightarrow \mathbf{y = ۱۵}$$

۲۶ ـ (۱) پله‌ی یکم: دو طرف تساوی را بر $x^{۳}$ تقسیم می‌کنیم:

$$۱۶x^{۳} = x^{\log_{۲}^{x}} \xRightarrow{\div x^{۳}} ۱۶ = \frac{x^{\log_{۲}^{x}}}{x^{۳}} \Rightarrow x^{\log_{۲}^{x}-۳} = ۱۶$$

پله‌ی دوم: حالا از دو طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$\log_{۲} x^{\log_{۲}^{x}-۳} = \log_{۲} ۱۶ \Rightarrow (\log_{۲}^{x}-۳)\log_{۲}^{x}$$

$$= \log_{۲}^{۲^{۴}} \Rightarrow (\log_{۲}^{x}-۳)\log_{۲}^{x} = ۴$$

پله‌ی سوم: حالا $\log_{۲}^{x}$ را برابر a فرض می‌کنیم و یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برحسب a حل می‌کنیم: $(a-۳)a=۴\Rightarrow a^{۲}-۳a-۴=۰\Rightarrow(a-۴)(a+۱)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \Rightarrow \log_{۲}^{x} = -۱ \Rightarrow x_{۱} = \frac{۱}{۲} \\ a = ۴ \Rightarrow \log_{۲}^{x} = ۴ \Rightarrow x_{۲} = ۱۶ \end{cases}$$

پله‌ی چهارم: حاصل‌ضرب دو ریشه برابر می‌شود با: $x_{۱}x_{۲} = \frac{۱}{۲}\times ۱۶ = ۸$

۲۷ ـ (۳) پله‌ی یکم: در معادله‌ی لگاریتمی تغییراتی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_{۲۵}^{a} - \log_{۵}^{b} = \log_{۵^{۲}}^{a} - \log_{۵}^{b} = \frac{۱}{۲}\log_{۵}^{a} - \log_{۵}^{b} = \log_{۵}^{\sqrt{a}} - \log_{۵}^{b} = ۱$$

$$\Rightarrow \log_{۵}^{\frac{\sqrt{a}}{b}} = ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{b} = ۵ \Rightarrow \sqrt{a} = ۵b$$

پله‌ی دوم: مقدار a و b را حساب می‌کنیم:

$$a+۵b = ۳۰ \xRightarrow{۵b=\sqrt{a}} a+\sqrt{a} = ۳۰ \Rightarrow a = ۲۵ \xRightarrow{b=\frac{\sqrt{a}}{۵}} b = \frac{\sqrt{۲۵}}{۵} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

پله‌ی سوم: $a+b$ را حساب کرده و مجموع ارقام آن‌را تعیین می‌کنیم:

$$a+b = ۲۵+۱ = ۲۶$$

بنابراین مجموع ارقام $a+b$ برابر $۸ = ۶+۲$ است.

۲۸ ـ (۲) پله‌ی یکم: عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$۲\log\sqrt{x(x+۱)} - ۳\log\sqrt[۳]{x} = \log(\sqrt{x(x+۱)})^{۲} - \log(\sqrt[۳]{x})^{۳}$$

$$= \log(x(x+۱)) - \log x = \log\frac{x(x+۱)}{x} = \log(x+۱)$$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی $a^{\log_{c}^{b}} = b^{\log_{c}^{a}}$، معادله را حل می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$۱۰۰^{\log(x+۱)} = (x+۱)^{\log ۱۰۰} = (x+۱)^{۲} = x+۷ \Rightarrow x^{۲}+۲x+۱ = x+۷$$

$$\Rightarrow x^{۲}+x-۶ = ۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = -۳ \;,\; x = ۲$$

$x=-۳$ غیرقابل قبول است. (چرا؟) پس فقط $x=۲$ ریشه‌ی معادله است و معادله **۱ جواب طبیعی** دارد.

۲۹ ـ (۲) پله‌ی یکم: عبارت $(\frac{۱}{۲})^{۵x-۱}$ را به عبارتی توان‌دار با پایه‌ی ۲ تبدیل می‌کنیم. داریم: $(\frac{۱}{۲})^{۵x-۱} = (۲^{-۱})^{۵x-۱} = ۲^{۱-۵x}$

پله‌ی دوم: مجموعه‌ی جواب نامعادله برابر است با:

$$۲^{۱-۵x} > ۶۴ \Rightarrow ۲^{۱-۵x} > ۲^{۶}$$

$$\Rightarrow ۱-۵x > ۶ \Rightarrow ۵x < -۵ \Rightarrow \mathbf{x < -۱}$$

۳۰ ـ (۱) پله‌ی یکم: تغییراتی در نامعادله ایجاد می‌کنیم:

$$\log_{۱۰}^{\frac{x+۲}{۷}} < -۱ \Rightarrow \log_{۱۰}^{\frac{x+۲}{۷}} < \log_{۱۰}^{\frac{۱}{۱۰}}$$

پله‌ی دوم: چون $۱ < ۱۰$ است، با حذف لگاریتم جهت نامساوی تغییری نمی‌کند: $\frac{x+۲}{۷} < \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow x+۲ < \frac{۷}{۱۰} \Rightarrow x < -\frac{۱۳}{۱۰}$

پله‌ی سوم: توجه کنید که $\frac{x+۲}{۷}$ باید مثبت باشد. پس:

$$\frac{x+۲}{۷} > ۰ \Rightarrow x > -۲$$

پس جواب نامعادله $-۲ < x < -\frac{۱۳}{۱۰}$ خواهد بود.

۳۱ ـ (۴) پله‌ی یکم: مقدار $\log_{\frac{۱}{۲}}^{۲}$ برابر است با:

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{۲} = \log_{۲^{-۱}}^{۲} = -\log_{۲}^{۲} = -۱$$

پله‌ی دوم: عبارت جلوی لگاریتم همواره باید مثبت باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{x-۱}{۳} > ۰ \Rightarrow x-۱ > ۰ \Rightarrow x > -۱$$

پله‌ی سوم: با ایجاد تغییراتی در عبارت لگاریتمی، مجموعه جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم:

$$\log_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{(x+۱)}{۳}} = \log_{۳^{-۲}}^{\frac{(x+۱)}{۳}} = -\frac{۱}{۲}\log_{۳}^{\frac{(x+۱)}{۳}} < -۱$$

$$\xRightarrow{\text{دو طرف}\times(-۲)} \log_{۳}^{\frac{(x+۱)}{۳}} > ۲ \Rightarrow \frac{x+۱}{۳} > ۹ \Rightarrow x+۱ > ۲۷ \Rightarrow \mathbf{x > ۲۶}$$

۳۲ ـ (۴) پله‌ی یکم: طرفین نامعادله را به‌توان پنج می‌رسانیم:

$$\sqrt[۵]{۲^{\log x^{۳}}} > ۸^{\frac{۱}{۵}} \xRightarrow{\text{دو طرف به‌توان ۵}} ۲^{\log x^{۳}} > ۸$$

پله‌ی دوم: با در نظر گرفتن $۲^{۳} = ۸$، جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم، داریم:

$$۲^{\log x^{۳}} > ۲^{۳} \Rightarrow \log x^{۳} > ۳ \Rightarrow x^{۳} > ۱۰^{۳} \Rightarrow x > ۱۰$$

تنها جوابی که از بین گزینه‌ها در این مجموعه جواب صدق می‌کند، $\mathbf{x = ۱۱}$ است.

فهرست

پلکان آزمون ۱۹
پاسخ پلکان آزمون ۲۲

پلکان آزمون

آزمون یکم (ساده و متوسط)

۳۰ دقیقه

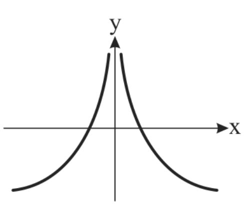
۱ ـ لگاریتم x در مبنای m برابر با لگاریتم $\sqrt[۳]{x^{۲}}$ در مبنای $\frac{۱}{n}$ است. کدام‌یک از گزینه‌ها رابطه‌ی m و n را به‌درستی نشان می‌دهد؟

۱) $m^{۲}n^{۳}=-۱$ ۲) $m^{۲}n^{۳}=۱$ ۳) $m^{۳}n^{۲}=۱$ ۴) $m^{۲}n^{۲}=-۱$

۲ ـ حاصل عبارت $\log_{۳}\frac{۱}{۲}+\log_{۳}\frac{۲}{۳}+\cdots+\log_{۳}\frac{۸۰}{۸۱}$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) -۳ ۴) -۴

۳ ـ ضابطه‌ی تابع نمودار مقابل کدام است؟



۱) $y=-\log|x|$

۲) $y=\log|x|$

۳) $y=\log x$

۴) $y=-\log x$

۴ ـ حاصل $۱۰۰^{\frac{۱}{۲}-\log\sqrt{۶}}$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۰   ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

۵ ـ اگر $\alpha=\log_{۹۶}^{۲}$ باشد، حاصل $\log_{۹۶}^{۳}+۳\log_{۹۶}^{۲}$ کدام است؟

۱) $\alpha-۱$ ۲) $۲\alpha-۱$ ۳) $۱-۲\alpha$ ۴) $۱-\alpha$

۶ ـ معادله‌ی $۱+\log_{۲}^{(x-۳)}=\log_{۲}^{(x+۵)}+\log_{۲}^{(x-۱۰)}$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) بیش‌تر از ۲

۷ ـ ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $۹^{x}-۴\times۳^{x+۱}+۲۷=۰$، چند واحد از ریشه‌ی کوچک‌تر این معادله بزرگ‌تر است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۸ ـ اگر $\log_{x}^{x-۲}\geq ۰$ باشد، آن‌گاه حدود x کدام است؟

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $[۳,+\infty)$ ۳) $[۲,۳)$ ۴) $(۲,۴]$

۹ ـ اگر $\log_{۳}^{x^{۴}}=k$ باشد، حاصل $\log_{x}^{۸۱x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴k}{۳}+۱$ ۲) $\frac{۱}{۱۶k}+۱$ ۳) $\frac{۳k}{۴}+۱$ ۴) $\frac{۱۶}{k}+۱$

۱۰ ـ اگر $\log ۲=۰/۳$ باشد، مقدار $\log ۶۲۵$ چه‌قدر است؟

۱) ۱/۲   ۲) ۲/۱   ۳) ۲/۸   ۴) ۳/۲

۱۱ ـ اگر فرض کنیم $\log ۷=۰/۸$ و $\log ۲=۰/۳$ است، حاصل $\log ۳۹۲$ چه‌قدر می‌شود؟

۱) ۲/۸   ۲) ۲/۴   ۳) ۲/۵   ۴) ۲/۲

۱۲ ـ معادله‌ی $\log 4x = 3\log x$ چند جواب است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳ ـ جواب معادله‌ی $\log\log_{2}\log_{3}^{x-1} = 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰۰۰

۱۴ ـ مقدار a چند باشد تا $\log_{4}^{196}$ یک واحد از $2\log_{4}^{a}$ بیش‌تر باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۵ ـ نامعادله‌ی $\log_{\frac{1}{2}}^{2-5x} > -4$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش‌تر از ۲

۱۶ ـ از دستگاه معادلات $\begin{cases} \log_{4}^{a} + \log_{2}^{b} = 1 \\ \log_{3}^{12a} - \log_{3}^{16b} = 1 \end{cases}$ مقدار $a^2 + b^2$ چه‌قدر به‌دست می‌آید؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

۱۷ ـ اگر $\log_{4}^{64!} = \alpha$ باشد، حاصل $\log_{2}^{63!}$ کدام است؟

۱) $\alpha + 6$ ۲) $\alpha - 6$ ۳) $2\alpha + 6$ ۴) $2\alpha - 6$

۱۸ ـ معادله‌ی $\log_{x}^{(x^4+x^2-1)} = 4$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش‌تر از ۲

۱۹ ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_{x}^{(x+3)} > \log_{x}^{(9-x)}$ کدام است؟

۱) $(3,+\infty)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(0,1)\cup(3,+\infty)$ ۴) $(0,1)\cup(3,9)$

۲۰ ـ اگر $\log_{5}^{(x^2+x+1)} + \log_{5}^{(x-1)} = 2$ باشد، حاصل $5^{3\log_{5}^{x}}$ برابر می‌شود با:

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) ۶ ۴) ۲۶

آزمون دوم (استاندارد)

۳۰ دقیقه

۱ ـ حاصل عبارت $\log\tan 5^\circ \times \log\tan 10^\circ \times \cdots \times \log\tan 75^\circ$ چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

۲ ـ حاصل کسر $\dfrac{\log_{5}^{3} + \log_{5}^{81}}{\log_{7}^{9} + \log_{7}^{243}}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{7}\log_{7}^{5}$ ۲) $\frac{7}{5}\log_{7}^{5}$ ۳) $\frac{5}{7}\log_{5}^{7}$ ۴) $\frac{7}{5}\log_{5}^{7}$

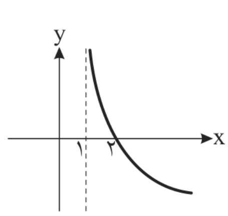
۳ ـ اگر $\log_{x}^{a} = 3$ و $\log_{y}^{a} = 4$ و $\log_{z}^{a} = 6$ باشد، حاصل $\log_{xyz}^{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۳

۴ ـ اگر $9x^2 + 25y^2 = 19xy$ باشد، $\log\dfrac{3x+5y}{7}$ واسطه‌ی حسابی بین ... و ... است.

۱) $\log 3x \ , \ \log 5y$ ۲) $\log\frac{x}{3} \ , \ \log\frac{y}{5}$ ۳) $\log x \ , \ \log y$ ۴) $\log\sqrt{x} \ , \ \log\sqrt{y}$

۵ ـ شکل روبه‌رو نمایان‌گر کدام تابع است؟



۱) $y = 2\log_{5}^{x}$

۲) $y = -\log_{0/5}^{x}$

۳) $y = \log_{0/5}^{(x-1)}$

۴) $y = 1 - \log_{5}^{(x-1)}$

۶ ـ می‌دانیم $\log 2 = 0/3$ است. با توجه به این مطلب عدد 2^{39} چند رقمی است؟

۱) یازده ۲) دوازده ۳) سیزده ۴) چهارده

۷ ـ اگر $\log_x^y = 2$ و $x = y^{\frac{1}{a}}$ باشد، حاصل $\log_5^{a^3+5a+7}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۸ ـ ریشه‌های معادله‌ی $\log(5+x) = \log(19+x) - \log(x+1)$ در کدام بازه است؟

۱) $(-10,-5)$ ۲) $(-5,0)$ ۳) $(0,5)$ ۴) $(5,10)$

۹ ـ اگر $(\log_3^x)^2 - (\log_3^y)^2 = 8$ باشد و $xy = 81$، مقدار $x+y$ برابر است با:

۱) 30 ۲) 33 ۳) 36 ۴) 39

۱۰ ـ کامل‌ترین جواب نامعادله‌ی $\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)} + \log_{\frac{1}{3}}^{(x+3)} \geq -1$ کدام بازه است؟

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-3,0)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) -2

۱۱ ـ جواب معادله‌ی $\dfrac{27^{2x} - 4}{9^x - 1} = 4 + 81^x$ چیست؟

۱) $\log_4^3$ ۲) $\log_3^2$ ۳) $\log_2^3$ ۴) $\log_3^4$

۱۲ ـ از دو معادله $\log_3^x + \log_3^y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$، لگاریتم $(x+y)$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۸۹)*

۱) $1/5$ ۲) 2 ۳) $2/5$ ۴) 3

۱۳ ـ اگر $2\log(x+1) = \log(2x+10)$، حاصل $\log_{\frac{1}{x}}^{x\sqrt{3}}$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۹)*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 3 ۳) -3 ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۴ ـ اگر $\log_{\sqrt{3}}^4 = a$ باشد، حاصل $\log_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}}$ کدام است؟ *(آزاد ـ ریاضی ـ ۸۹)*

۱) $\frac{8+a}{a+2}$ ۲) $\frac{8+a}{2a+4}$ ۳) $\frac{1+4a}{a+2}$ ۴) $\frac{1+8a}{4a+1}$

۱۵ ـ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، $\log 15$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۹)*

۱) $a+1-b$ ۲) $a+b+1$ ۳) $b+1-a$ ۴) $b-a-1$

۱۶ ـ اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6-2\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5})$، کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۹۰)*

۱) $2k$ ۲) $4k$ ۳) $1+k$ ۴) $2+4k$

۱۷ ـ اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(1-\frac{1}{A})$ در پایه ۴ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۹۰)*

۱) -3 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸ ـ اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log\sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۹۰ ـ خارج از کشور)*

۱) $1-4k$ ۲) $2-5k$ ۳) $1-2k$ ۴) $1-k$

۱۹ ـ اگر $A = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}$ آن‌گاه $|A|$ کدام است؟ *(سراسری ـ ریاضی ـ ۹۰ ـ خارج از کشور)*

۱) $2\log 1/25$ ۲) $\log 2/5$ ۳) $\log 3$ ۴) $\log 6/25$

۲۰ ـ اگر $\log_5^4 = a$ باشد، حاصل $\log 25$ کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۸۹)*

۱) $\frac{2}{a+2}$ ۲) $\frac{4}{a+4}$ ۳) $\frac{4}{a+2}$ ۴) $\frac{2}{a+4}$

فهرست

پلکان آزمون ۱۹

پاسخ پلکان آزمون ۲۲

پاسخ‌های پلکان آزمون

پاسخ تست‌های آزمون یکم

۱ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** گیج نشوید! گفته‌های تست را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم:

$$\log_{m}^{x} = \log_{\frac{1}{n}}^{\sqrt[3]{x^2}} = \log_{\frac{1}{n}}^{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{n}}^{x}$$

پله‌ی دوم: رابطه‌ی بین m و n را تعیین می‌کنیم:

$$\log_{m}^{x} = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{n}}^{x} = \log_{(\frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}}^{x} \Rightarrow m = (\frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}$$

$$\xRightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} m^2 = \frac{1}{n^3} \Rightarrow \mathbf{m^2n^3 = 1}$$

۲ ـ (۴) با استفاده از ویژگی $\log_{t}^{a} + \log_{t}^{b} + \cdots + \log_{t}^{z} = \log_{t}^{ab\cdots z}$، حاصل عبارت لگاریتمی را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_{3}^{\frac{1}{2}} + \log_{3}^{\frac{2}{3}} + \cdots + \log_{3}^{\frac{80}{81}} = \log_{3}^{(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{80}{81})} = \log_{3}^{\frac{1}{81}}$$

$$= \log_{3}^{3^{-4}} = -4\log_{3}^{3} = \mathbf{-4}$$

۳ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** تابع به‌ازای تمامی مقادیر x به‌غیر از $x = 0$ تعریف‌شده است. با توجه به این‌که عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است، پس باید عبارت جلوی لگاریتم را به‌صورت $|x|$ در نظر بگیریم. (رد گزینه‌های ۳ و ۴)

پله‌ی دوم: مقدار تابع به‌ازای $x = 10$ یک عدد منفی است. (رد گزینه‌ی ۲)

پس این نمودار تابع $\mathbf{g = -\log|x|}$ را نشان می‌دهد.

۴ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** با توجه به رابطه‌ی $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم. داریم:

$$A = 100^{\frac{1}{2} - \log\sqrt{6}} = \frac{100^{\frac{1}{2}}}{100^{\log\sqrt{6}}}$$

پله‌ی دوم: با استفاده از رابطه‌ی $a^{\log_{c}^{b}} = b^{\log_{c}^{a}}$ مقدار A را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}^{\log 100}} = \frac{10}{(\sqrt{6})^2} = \frac{10}{6} = \mathbf{\frac{5}{3}}$$

۵ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** $\log_{96}^{3}$ را برحسب α حساب می‌کنیم:

$$\log_{96}^{3} = \log_{96}^{\frac{96}{32}} = \log_{96}^{96} - \log_{96}^{32} = 1 - \log_{96}^{2^5} = 1 - 5\log_{96}^{2} = 1 - 5\alpha$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\log_{96}^{3} + 3\log_{96}^{2} = 1 - 5\alpha + 3\alpha = \mathbf{1 - 2\alpha}$$

۶ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** عبارت‌های لگاریتمی دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم. داریم:

$$\log_{2}^{(x-10)} + \log_{2}^{(x+5)} = \log_{2}^{(x-3)} + \log_{2}^{2}$$

$$\Rightarrow \log_{2}^{(x-10)(x+5)} = \log_{2}^{2(x-3)}$$

پله‌ی دوم: مبناهای عبارت‌های لگاریتمی دو طرف تساوی برابر است. پس عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$(x-10)(x+5) = 2(x-3) \Rightarrow x^2 - 5x - 50 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 44 = 0 \Rightarrow (x-11)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -4 \end{cases}$$

پله‌ی سوم: ریشه‌ی $x = -4$ قابل‌قبول نیست. چون عبارت‌های $x - 10$ و $x - 3$ را منفی می‌کند. جلوی لگاریتم هم که باید همواره مثبت باشد. پس $x = 11$ تنها ریشه‌ی معادله است. بنابراین معادله فقط **۱ ریشه** دارد.

۷ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** 3^x را برابر A در نظر می‌گیریم. معادله را به شکل ساده‌تری تشکیل می‌دهیم:

$$9^x - 4\times 3^{x+1} + 27 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 3^x(3\times 4) + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 - 12(3^x) + 27 = 0 \xRightarrow{3^x = A} A^2 - 12A + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (A-9)(A-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 9 \\ A = 3 \end{cases}$$

پله‌ی دوم: مقدار x_1 و x_2 را تعیین کرده و اختلاف آن دو را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\left.\begin{aligned} 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x_1 = 2 \\ 3^x = 3 \Rightarrow x_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 - x_2 = 2 - 1 = \mathbf{1}$$

۸ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است:

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

شرط $x > 2$، تعریف‌شده‌بودنِ مبنای لگاریتم را هم برای ما تأمین می‌کند.

پله‌ی دوم: نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\log_{x}^{x-2} \geq 0 \Rightarrow \log_{x}^{x-2} \geq \log_{x}^{1} \Rightarrow x - 2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$$

بنابراین محدوده‌ی قابل قبول برای x به‌صورت $\mathbf{[3,+\infty)}$ در می‌آید.

۹ ـ ④ **پله‌ی یکم:** سعی می‌کنیم حاصل $\log_{۳}^{x}$ را برحسب k به‌دست آوریم. داریم:
$$\log_{۳}^{x^{۴}} = k \Rightarrow ۴\log_{۳}^{x} = k \Rightarrow \log_{۳}^{x} = \frac{k}{۴}$$
پله‌ی دوم: با توجه به مقدار به‌دست‌آمده برای $\log_{۳}^{x}$، مقدار $\log_{x}^{۸۱x}$ برحسب k را تعیین می‌کنیم:
$$\log_{x}^{۸۱x} = \log_{x}^{۸۱} + \log_{x}^{x} = \log_{x}^{۳^{۴}} + ۱ = ۴\log_{x}^{۳} + ۱ = \frac{۴}{\log_{۳}^{x}} + ۱$$
$$= \frac{۴}{\frac{k}{۴}} + ۱ = \mathbf{\frac{۱۶}{k} + ۱}$$

۱۰ ـ ③ **پله‌ی یکم:** مقدار $\log ۵$ را حساب می‌کنیم:
$$\log ۵ = \log\frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$
پله‌ی دوم: $\log ۶۲۵$ برابر است با:
$$\log ۶۲۵ = \log ۵^{۴} = ۴\log ۵ = ۴ \times ۰/۷ = \mathbf{۲/۸}$$

۱۱ ـ ③ **پله‌ی یکم:** می‌دانیم $۳۹۲ = ۸ \times ۴۹$ است. بنابراین می‌توان نوشت:
$$\log ۳۹۲ = \log(۴۹ \times ۸) = \log ۴۹ + \log ۸$$
پله‌ی دوم: با داشتن مقدار $\log ۲$ و $\log ۷$، مقدار $\log ۳۹۲$ را حساب می‌کنیم:
$$\log ۳۹۲ = \log ۷^{۲} + \log ۲^{۳} = ۲\log ۷ + ۳\log ۲$$
$$= (۲ \times ۰/۸) + (۳ \times ۰/۳) = ۱/۶ + ۰/۹ = \mathbf{۲/۵}$$

۱۲ ـ ② **پله‌ی یکم:** با توجه به ویژگی‌های لگاریتم معادله را به فرمی تبدیل می‌کنیم که حل معادله برای ما راحت باشد. داریم:
$$\log ۴x = ۳\log x \Rightarrow \log ۴x = \log x^{۳}$$
پله‌ی دوم: تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^{۳} = ۴x$ به شرط این‌که عبارت‌های جلوی لگاریتم همواره مثبت باشند، مدنظر ما است:
$$x^{۳} = ۴x \Rightarrow x(x^{۲} - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x^{۲} = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$
مقادیر $x = -۲$ و $x = ۰$ غیرقابل قبول هستند. پس این معادله فقط **۱ جواب** دارد.

۱۳ ـ ② **پله‌ی یکم:** با دیدن این تعداد لگاریتم هول نشوید مرحله‌به‌مرحله پیش می‌رویم. داریم:
$$\log\log_{۲}\log_{۳}^{x-۱} = ۰ \Rightarrow \log_{۲}\log_{۳}^{x-۱} = ۱۰^{۰} = ۱$$
پله‌ی دوم: حالا مقدار x را به‌دست می‌آوریم:
$$\log_{۲}\log_{۳}^{x-۱} = ۱ \Rightarrow \log_{۳}^{x-۱} = ۲ \Rightarrow x - ۱ = ۳^{۲} = ۹ \Rightarrow \mathbf{x = ۱۰}$$

۱۴ ـ ④ **پله‌ی یکم:** حاصل $\log_{۴}^{۱۹۶}$ را محاسبه می‌کنیم:
$$\log_{۴}^{۱۹۶} = \log_{۴}^{(۴۹ \times ۴)} = \log_{۴}^{۴۹} + \log_{۴}^{۴} = \log_{۴}^{۷^{۲}} + ۱ = ۲\log_{۴}^{۷} + ۱$$
پله‌ی دوم: مقدار $\log_{۴}^{۱۹۶}$ از $۲\log_{۴}^{a}$ یک واحد بیش‌تر است. بنابراین a برابر است با:
$$\log_{۴}^{۱۹۶} = ۲\log_{۴}^{۷} + ۱ = ۲\log_{۴}^{a} + ۱ \Rightarrow \log_{۴}^{۷} = \log_{۴}^{a} \Rightarrow \mathbf{a = ۷}$$

۱۵ ـ ④ **پله‌ی یکم:** عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است:
$$۲ - ۵x > ۰ \Rightarrow ۵x < ۲ \Rightarrow x < \frac{۲}{۵}$$
پله‌ی دوم: نامعادله را حل می‌کنیم:
$$\log_{۲^{-۱}}^{۲-۵x} > -۴ \Rightarrow -\log_{۲}^{۲-۵x} > -۴ \xrightarrow{(-۱)\times \text{دو طرف}} \log_{۲}^{۲-۵x} < ۴$$
$$\Rightarrow ۲ - ۵x < ۲^{۴} \Rightarrow ۲ - ۵x < ۱۶ \Rightarrow ۵x > -۱۴ \Rightarrow x > \frac{-۱۴}{۵}$$
پله‌ی سوم: x در بازه‌ی $(-\frac{۱۴}{۵}, \frac{۲}{۵})$ قرار دارد. این بازه شامل ۳ عدد صحیح است. بنابراین پاسخ **بیش‌تر از ۲** عدد صحیح است.

۱۶ ـ ④ **پله‌ی یکم:** تغییراتی در معادلات داده‌شده ایجاد می‌کنیم تا بتوانیم a و b را تعیین کنیم:

معادله‌ی اول : $\log_{۴}^{a} + \log_{۲}^{b} = ۱ \Rightarrow \log_{۲^{۲}}^{a} + \log_{۲}^{b} = ۱$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{a} + \log_{۲}^{b} = \log_{۲}^{\sqrt{a}} + \log_{۲}^{b} = ۱$$
$$\Rightarrow \log_{۲}^{b\sqrt{a}} = ۱ \Rightarrow b\sqrt{a} = ۲ \qquad \mathrm{I}$$
معادله‌ی دوم : $\log_{۳}^{۱۲a} - \log_{۳}^{۱۶b} = \log_{۳}^{\frac{۱۲a}{۱۶b}} = \log_{۳}^{\frac{۳a}{۴b}} = ۱$
$$\Rightarrow \frac{۳a}{۴b} = ۳ \Rightarrow a = ۴b \qquad \mathrm{II}$$
پله‌ی دوم: با توجه به روابط I و II مقدار a و b را حساب می‌کنیم:
$$b\sqrt{a} = ۲ \xrightarrow{a=۴b} b(۲\sqrt{b}) = ۲ \Rightarrow b\sqrt{b} = ۱ \Rightarrow b = ۱ \xrightarrow{a=۴b} a = ۴$$
پله‌ی سوم: $a^{۲} + b^{۲}$ برابر است با: $a^{۲} + b^{۲} = ۴^{۲} + ۱^{۲} = ۱۶ + ۱ = \mathbf{۱۷}$

۱۷ ـ ④ می‌دانیم $\frac{۶۴!}{۶۴} = ۶۳!$ است. بنابراین حاصل $\log_{۲}^{۶۳!}$ برابر است با:
$$\log_{۲}^{۶۳!} = \log_{۲}^{\frac{۶۴!}{۶۴}} = \log_{۲}^{۶۴!} - \log_{۲}^{۶۴} = ۲(\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۶۴!}) - \log_{۲}^{۲^{۶}}$$
$$= ۲\log_{۴}^{۶۴!} - ۶\log_{۲}^{۲} = \mathbf{۲\alpha - ۶}$$

۱۸ ـ ① **پله‌ی یکم:** ابتدا معادله را حل می‌کنیم:
$$\log_{x}^{(x^{۴}+x^{۲}-۱)} = ۴ \Rightarrow x^{۴} + x^{۲} - ۱ = x^{۴} \Rightarrow x^{۲} - ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$
پله‌ی دوم: عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد نمی‌تواند منفی باشد. پس $x = -۱$ غیرقابل‌قبول است. هم‌چنین عددی که در مبنا قرار دارد باید مخالف ۱ باشد. پس $x = ۱$ هم غیرقابل‌قبول است. بنابراین معادله **صفر** ریشه‌ی حقیقی دارد.

۱۹ ـ ③ **پله‌ی یکم:** با فرض $x > ۱$، نامعادله را حل می‌کنیم:
$$\log_{x}^{(x+۳)} > \log_{x}^{(۹-x)} \xrightarrow{x>۱} x + ۳ > ۹ - x \Rightarrow ۲x > ۶ \Rightarrow x > ۳$$
پله‌ی دوم: با فرض $۰ < x < ۱$ بار دیگر نامعادله را حل می‌کنیم:
$$\log_{x}^{(x+۳)} > \log_{x}^{(۹-x)} \xrightarrow{۰<x<۱} x + ۳ < ۹ - x$$
$$\Rightarrow ۲x < ۶ \Rightarrow x < ۳ \xrightarrow{۰<x<۱} ۰ < x < ۱$$

پله‌ی سوم: دامنه‌ی تعریف عبارت‌های لگاریتمی را نیز تعیین کرده و مجموعه جواب نامعادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{ll} (۱) & x>۰, x\neq ۱ \\ (۲) & ۹-x>۰ \Rightarrow x<۹ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \mathbf{(۰,۱)\cup(۳,۹)}$$

۲۰ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** اول از همه معادله‌ی داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\log_{۵}^{(x^{۲}+x+۱)}+\log_{۵}^{(x-۱)}=۲ \Rightarrow \log_{۵}^{(x^{۲}+x+۱)(x-۱)}=۲$$

$$\Rightarrow (x^{۲}+x+۱)(x-۱)=۵^{۲}=۲۵ \Rightarrow x^{۳}-۱=۲۵ \Rightarrow x^{۳}=۲۶$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت لگاریتمی را حساب می‌کنیم:

$$A=۵^{۳\log_{۵}^{x}}=۵^{\log_{۵}^{x^{۳}}}=(x^{۳})^{\log_{۵}^{۵}}$$

برای تغییر در عبارت لگاریتمی از رابطه‌ی $a^{\log_{c}^{b}}=b^{\log_{c}^{a}}$ استفاده کردیم.

مقدار عبارت به‌دست‌آمده برابر است با: $A=x^{۳}=\mathbf{۲۶}$

پاسخ تست‌های آزمون دوم

۱ ـ (۱) در بین این عبارت‌های لگاریتمی عبارت $\log\tan ۴۵^{\circ}$ هم وجود دارد. می‌دانیم $\tan ۴۵^{\circ}=۱$ است. بنابراین $\log\tan ۴۵^{\circ}=۰$ است. پس حاصل عبارت داده‌شده برابر **صفر** است.

۲ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** حاصل صورت و مخرج کسر را تعیین می‌کنیم:

$$\log_{۵}^{۳}+\log_{۵}^{۸۱}=\log_{۵}^{۳}+\log_{۵}^{۳^{۴}}=\log_{۵}^{۳}+۴\log_{۵}^{۳}=۵\log_{۵}^{۳}$$

$$\log_{۷}^{۹}+\log_{۷}^{۲۴۳}=\log_{۷}^{۳^{۲}}+\log_{۷}^{۳^{۵}}=۲\log_{۷}^{۳}+۵\log_{۷}^{۳}=۷\log_{۷}^{۳}$$

پله‌ی دوم: با توجه به رابطه‌ی $\log_{b}^{a}=\frac{۱}{\log_{a}^{b}}$ حاصل کسر داده‌شده برابر است با:

$$A=\frac{۵\log_{۵}^{۳}}{۷\log_{۷}^{۳}}=\frac{\frac{۵}{\log_{۳}^{۵}}}{\frac{۷}{\log_{۳}^{۷}}}=\frac{۵\log_{۳}^{۷}}{۷\log_{۳}^{۵}}$$

پله‌ی سوم: حاصل نهایی با استفاده از رابطه‌ی $\frac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}}=\log_{b}^{a}$، برابر است با:

$$A=\mathbf{\frac{۵}{۷}\log_{۵}^{۷}}$$

۳ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار $\log_{a}^{x}$، $\log_{a}^{y}$ و $\log_{a}^{z}$ را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\log_{a}^{x}=\frac{۱}{\log_{x}^{a}}=\frac{۱}{۳}\ ,\ \log_{a}^{y}=\frac{۱}{\log_{y}^{a}}=\frac{۱}{۴}$$

$$\log_{a}^{z}=\frac{۱}{\log_{z}^{a}}=\frac{۱}{۶}$$

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{a}^{xyz}$ برابر است با:

$$\log_{a}^{xyz}=\log_{a}^{x}+\log_{a}^{y}+\log_{a}^{z}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}=\frac{۴+۳+۲}{۱۲}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$$

پله‌ی سوم: مقدار $\log_{xyz}^{a}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_{xyz}^{a}=\frac{۱}{\log_{a}^{xyz}}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}=\mathbf{\frac{۴}{۳}}$$

۴ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** با استفاده از رابطه‌ی داده‌شده، سعی می‌کنیم مقدار $\frac{۳x+۵y}{۷}$ را حساب کنیم:

$$(۳x+۵y)^{۲}=۹x^{۲}+۳۰xy+۲۵y^{۲}=(۹x^{۲}+۲۵y^{۲})+۳۰xy$$

$$\xRightarrow{۹x^{۲}+۲۵y^{۲}=۱۹xy}(۳x+۵y)^{۲}=۱۹xy+۳۰xy=۴۹xy$$

$$\Rightarrow ۳x+۵y=۷\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{۳x+۵y}{۷}=\sqrt{xy}$$

پله‌ی دوم: در فصل تصاعد دیدیم که «واسطه‌ی حسابی» همان میانگین خودمان است! یعنی اگر $\log\sqrt{xy}$ بخواهد واسطه‌ی حسابی دو عدد a,b باشد، باید داشته باشیم:

$$\log\sqrt{xy}=\frac{a+b}{۲} \Rightarrow a+b=۲\log\sqrt{xy}=\log(\sqrt{xy})^{۲} \Rightarrow a+b=\log xy$$

پله‌ی سوم: در میان گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی ۳ است که جمع دو لگاریتم برابر $\log xy$ می‌شود.

۵ ـ (۳) مقدار تابع به‌ازای $x=۲$ برابر صفر می‌شود. این موضوع فقط در مورد تابع $y=\log_{۰/۵}^{(x-۱)}$ صدق می‌کند.

۶ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** مقدار $\log ۲^{۳۹}$ را حساب می‌کنیم:

$$\log ۲^{۳۹}=۳۹\log ۲=۳۹\times ۰/۳=۱۱/۷$$

پله‌ی دوم: اگر $۱\leq x\leq ۱۰$ باشد، آن‌گاه $۰\leq \log x\leq ۱$ خواهد بود. همچنین اگر $۱۰\leq x\leq ۱۰۰$ باشد، $۱\leq \log x\leq ۲$ است. بنابراین اگر $۱۰^{۱۱}\leq x\leq ۱۰^{۱۲}$ باشد، $\log x$ در بازه‌ی $[۱۱,۱۲]$ قرار دارد. پس عدد $۲^{۳۹}$ در بازه‌ی $[۱۰^{۱۱},۱۰^{۱۲}]$ قرار دارد. بنابراین عدد $۲^{۳۹}$، **دوازده** رقمی است.

۷ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$\log_{x}^{y}=۲ \Rightarrow y=x^{۲} \qquad \mathrm{I}$$

$$x=y^{\frac{۱}{a}} \xRightarrow{\mathrm{I}} x=(x^{۲})^{\frac{۱}{a}}=x^{\frac{۲}{a}} \Rightarrow \frac{۲}{a}=۱ \Rightarrow a=۲$$

پله‌ی دوم: حاصل عبارت لگاریتمی به‌ازای $a=۲$ برابر است با:

$$\log_{۵}^{a^{۳}+۵a+۷}=\log_{۵}^{(۲^{۳}+(۵\times۲)+۷)}=\log_{۵}^{(۸+۱۰+۷)}=\log_{۵}^{۲۵}=\log_{۵}^{۵^{۲}}=\mathbf{۲}$$

۸ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** معادله‌ی لگاریتمی را به یک معادله‌ی معمولی تبدیل می‌کنیم:

$$\log(۵+x)=\log(۱۹+x)-\log(x+۱) \Rightarrow \log(۵+x)=\log\frac{۱۹+x}{(x+۱)}$$

$$\Rightarrow ۵+x=\frac{۱۹+x}{x+۱} \Rightarrow (۵+x)(x+۱)=۱۹+x$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۶x+۵=۱۹+x \Rightarrow x^{۲}+۵x-۱۴=۰$$

پله‌ی دوم: ریشه‌های این معادله‌ی درجه‌ی دو را تعیین می‌کنیم:

$$x^2+5x-14=0 \Rightarrow (x+7)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-7\end{cases}$$

پله‌ی سوم: خُب توجه کنید که $x=-7$ غیرقابل قبول است. چون عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند. پس ریشه‌ی معادله در بازه‌ی **(0,5)** قرار دارد. (در واقع $x=2$ تنها ریشه‌ی معادله است.)

۹ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** رابطه‌ی لگاریتمی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(\log_3^x)^2-(\log_3^y)^2=(\log_3^x-\log_3^y)(\log_3^x+\log_3^y)$$
$$=(\log_3^{\frac{x}{y}})(\log_3^{xy})=8$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $xy=81$ است، x را برحسب y حساب می‌کنیم:

$$\log_3^{xy}=\log_3^{81}=\log_3^{3^4}=4\log_3^3=4$$
$$4\log_3^{\frac{x}{y}}=8\Rightarrow \log_3^{\frac{x}{y}}=2\Rightarrow \frac{x}{y}=3^2=9\Rightarrow x=9y$$

پله‌ی سوم: با محاسبه‌ی مقدار x و y، مقدار $x+y$ را به‌دست می‌آوریم:

$$xy=81 \xRightarrow{x=9y} 9y^2=81\Rightarrow y^2=9 \xRightarrow{y>0} y=3 \xRightarrow{x=9y} x=9\times3=27$$

پله‌ی چهارم: حالا یک جمع ساده: $x+y=27+3=\mathbf{30}$

۱۰ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\frac13}^{(x+1)}+\log_{\frac13}^{(x+3)}=\log_{\frac13}^{(x+1)(x+3)}$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که مبنای لگاریتم کوچک‌تر از ۱ است، برای حل نامعادله جهت آن عوض می‌شود. بنابراین داریم:

$$\log_{\frac13}^{(x+1)(x+3)}\ge -1 \Rightarrow (x+1)(x+3)\le \left(\frac13\right)^{-1}\Rightarrow x^2+4x+3\le3$$
$$\Rightarrow x^2+4x\le0\Rightarrow x(x+4)\le0\Rightarrow \mathbf{-4\le x\le 0}$$

پله‌ی سوم: دامنه‌ی عبارت موردنظر برابر $x>-1$ است. با اشتراک گرفتن بین دامنه تعریف و جواب نامعادله جواب کلی برابر $\mathbf{-1<x\le0}$ است.

۱۱ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** معادله‌ی داده‌شده را به شکل ساده‌تری تبدیل می‌کنیم:

$$81^x+4=\frac{27^{2x}-4}{9^x-1}\Rightarrow (3^4)^x+4=\frac{(3^3)^{2x}-4}{(3^2)^x-1}$$
$$\Rightarrow (3^x)^4+4=\frac{(3^x)^6-4}{(3^x)^2-1}$$

پله‌ی دوم: با در نظر گرفتن $A=3^x$، معادله را حل می‌کنیم:

$$A^4+4=\frac{A^6-4}{A^2-1}\Rightarrow (A^4+4)(A^2-1)=A^6-4$$
$$\Rightarrow A^6-A^4+4A^2-4=A^6-4\Rightarrow A^4-4A^2=0$$
$$\Rightarrow A^2(A^2-4)=0\Rightarrow\begin{cases}A=0\\A^2=4\Rightarrow A=\pm2\end{cases}$$

پله‌ی سوم: مقادیر $A=0$ و $A=-2$ غیرقابل قبول هستند. (چون مقدار 3^x همواره مثبت است!) بنابراین فقط $A=2$ جواب معادله است. پس مقدار x برابر است با:

$$A=2\Rightarrow 3^x=2\Rightarrow \mathbf{x=\log_3^2}$$

۱۲ ـ (۱) **پله‌ی یکم:** تغییراتی در معادله‌ی لگاریتمی ایجاد می‌کنیم:

$$\log_3^x+\log_3^y=2\Rightarrow\log_3^{xy}=2\Rightarrow xy=3^2\Rightarrow xy=9$$

پله‌ی دوم: با استفاده از اتحاد $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$، مقدار $x+y$ را حساب می‌کنیم:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=(x^2+y^2)+2xy=46+(2\times9)$$
$$=46+18=64\Rightarrow x+y=8$$

پله‌ی سوم: مقدار لگاریتم $x+y$ در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$$\log_4^{(x+y)}=\log_4^8=\log_{2^2}^{2^3}=\frac32\log_2^2=\frac32=\mathbf{1/5}$$

۱۳ ـ (۴) **پله‌ی یکم:** مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$2\log(x+1)=\log(2x+10)\Rightarrow \log(x+1)^2=\log(2x+10)$$
$$\Rightarrow(x+1)^2=2x+10\Rightarrow x^2+2x+1=2x+10$$
$$\Rightarrow x^2=9\xRightarrow{x>0}x=3$$

(اگر $x=-3$ در نظر گرفته شود مقدار $x+1$ منفی می‌شود که غیرقابل قبول است.)

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{\frac1x}^{x\sqrt3}$ به‌ازای $x=3$ برابر است با:

$$\log_{\frac1x}^{x\sqrt3}=\log_{\frac13}^{3\sqrt3}=\log_{3^{-1}}^{3^{\frac32}}=\frac{\frac32}{-1}\log_3^3=\mathbf{-\frac32}$$

۱۴ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** با توجه به این‌که $\log_{\sqrt3}^4=a$ است، داریم:

$$\log_{\sqrt3}^4=a\Rightarrow 4=\sqrt3^a=(3^{\frac12})^a=3^{\frac a2}\Rightarrow 2^2=3^{\frac a2}$$
$$\xRightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم}} 2=3^{\frac a4}$$

پله‌ی دوم: حاصل $\log_{2\sqrt3}^{3\sqrt2}$ با توجه به این‌که $3^{\frac a4}=2$ است، برابر است با:

$$\log_{2\sqrt3}^{3\sqrt2}=\log_{3^{\frac a4}\times3^{\frac12}}^{3\times3^{\frac a8}}=\log_{3^{(\frac a4+\frac12)}}^{3^{(1+\frac a8)}}=\frac{1+\frac a8}{\frac a4+\frac12}\log_3^3=\frac{\frac{8+a}{8}}{\frac{a+2}{4}}$$
$$=\frac{8+a}{2(a+2)}=\mathbf{\frac{8+a}{2a+4}}$$

۱۵ ـ (۳) **پله‌ی یکم:** $\log15$ برابر است با:

$$\log15=\log(5\times3)=\log5+\log3$$

پله‌ی دوم: مقدار $\log5$ را با استفاده از مقدار $\log2$ حساب می‌کنیم:

$$\log5=\log\frac{10}{2}=\log10-\log2=1-\log2=1-a$$

پله‌ی سوم: بنابراین $\log15$ برابر است با:

$$\log15=1-a+b=\mathbf{b+1-a}$$

۱۶ ـ (۲) **پله‌ی یکم:** حاصل $\log(1+\sqrt5)^2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(1+\sqrt5)^2=\log(1+2\sqrt5+5)=\log(6+2\sqrt5)$$

پله‌ی دوم: با توجه به این‌که $\log 2 = k$ است، حاصل عبارت لگاریتمی $\log(6-2\sqrt{5})+\log(6+2\sqrt{5})$ برحسب k قابل محاسبه است:

$$=\log(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})=\log(36-20)$$

$$=\log 16=\log 2^4=4\log 2=\mathbf{4k}$$

۱۷ ـ ④ **پله‌ی یکم:** حاصل $2\sqrt[3]{0/25}$ را به‌صورت عددی توان‌دار با پایه‌ی ۲ می‌نویسیم:

$$3\sqrt[3]{0/25}=2\times\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=2\sqrt[3]{2^{-2}}=2\times 2^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$$

پله‌ی دوم: با تعیین مقدار A، حاصل $\log_4^{(\frac{1}{A}-1)}$ را می‌توانیم حساب کنیم:

$$A=\log_8^{2\sqrt[3]{0/25}}=\log_{2^3}^{2^{\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{1}{3}}{3}=\frac{1}{9}$$

$$\log_4^{(\frac{1}{A}-1)}=\log_4^{(9-1)}=\log_4^8=\log_{2^2}^{2^3}=\frac{3}{2}\log_2^2=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

۱۸ ـ ① **پله‌ی یکم:** حاصل $\log\sqrt[3]{1/6}$ را برحسب $\log 2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\log\sqrt[3]{1/6}=\log(1/6)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log 1/6$$

$$=\frac{1}{3}\log\frac{16}{10}=\frac{1}{3}(\log 16-\log 10)=\frac{1}{3}(\log 2^4-1)=\frac{1}{3}(4\log 2-1)$$

پله‌ی دوم: اگر $3k=\log 5$ باشد، $\log 2$ برابر $1-3k$ است. بنابراین داریم:

$$\log\sqrt[3]{1/6}=\frac{1}{3}(4\log 2-1)=\frac{1}{3}(4-12k-1)=\frac{1}{3}(3-12k)=\mathbf{1-4k}$$

۱۹ ـ ② با استفاده از قوانین لگاریتم حاصل دترمینان را به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=(\log 5\times\log 5)-(\log 2\times\log 2)=(\log 5)^2-(\log 2)^2$$

$$=(\log 5-\log 2)(\log 5+\log 2)=(\log\frac{5}{2})(\log 10)=\mathbf{\log 2/5}$$

۲۰ ـ ③ با استفاده از ویژگی‌های $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ و $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$ حاصل عبارت لگاریتمی را به‌دست می‌آوریم:

$$\log 25=\log 5^2=2\log 5=2\times\frac{\log_4^5}{\log_4^{10}}=2\times\frac{\log_4^5}{\log_4^{(2\times 5)}}$$

$$=2\times\frac{\frac{1}{\log_5^4}}{\log_4^2+\log_4^5}=2\times\frac{\frac{1}{a}}{\log_{2^2}^2+\frac{1}{\log_5^4}}=2\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{a}}=2\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a+2}{2a}}=\mathbf{\frac{4}{a+2}}$$