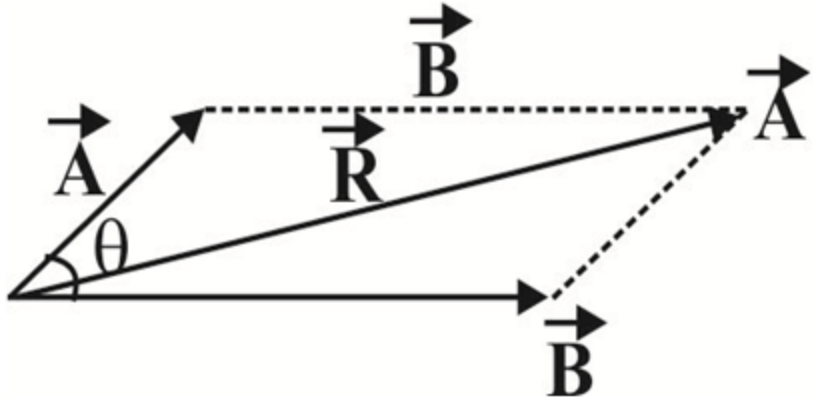
اندازه گیری و بردار

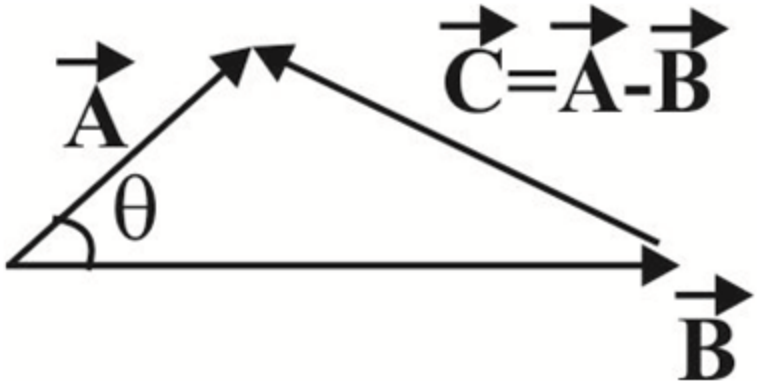
تفاضل و برآیند بردارها

اگر زاویه ی بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر θ باشد، برآیند آنها $(\vec{R})$ به صورت زیر ترسیم شده و بزرگی آن عبارت است از:



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \quad , \quad R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABCos\theta}$$

اگر $\vec{C}$ بردار حاصل از تفاضل $\vec{A}-\vec{B}$ باشد، آنگاه داریم:



$$\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}\quad ,C=\sqrt{A^{۲}+B^{۲}-۲AB\cos\theta}$$

تذکر :

اگر $0 \leq \theta < 90$ باشد $R < C$ است.

اگر $\theta = 90^\circ$ باشد $R = C$ است.

اگر $90 < \theta \leq 180^\circ$ باشد $R < C$ است.

یعنی اگر زاویه ی بین دو بردار از 0° تا 180° افـــزایش یابـــد،

بزرگی برآیند کاهش و بزرگی تفاضل آن ها افزایش می یابد.

تذکر:

اگر دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هم اندازه باشند، آنگاه بردار $\mathbf{R}$ نیمساز زاویه ی θ است.

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\sqrt{۲(۱+\cos\theta)} = ۲\mathbf{A}\cos(\frac{\theta}{۲})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\sqrt{۲(۱-\cos\theta)} = ۲\mathbf{A}\sin(\frac{\theta}{۲})$$

تذکر:

اگر برآیند ۳ بردار صفر شود، هر بردار، قرینـــه برآینـــد دو بردار دیگر است.

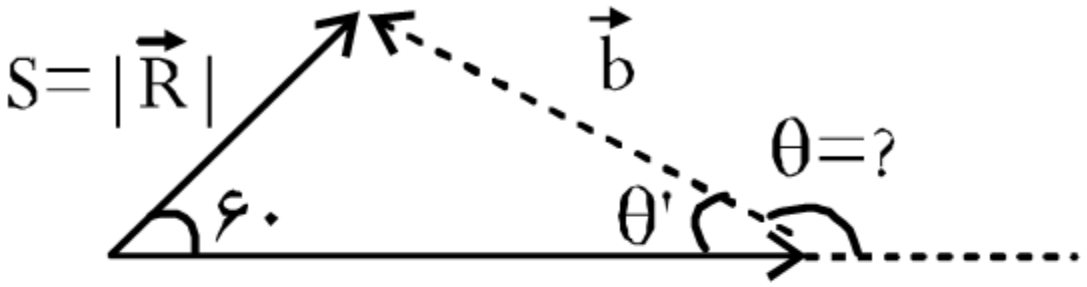
$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0 \rightarrow \vec{C}=-(\vec{A}+\vec{B})$$

۱) برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با بردار $\vec{a}$ زاویه ی 60° می سازد. اگر اندازه ی بردار $\vec{a}$ ، ۱۰ واحد و اندازه ی بردار برآیند ۵ واحد باشد، زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۹۰

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۵۰

۱) چون زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و بردار برآیند $\vec{R}$ معلوم است، ابتدا این دو بردار را رسم کرده و سپس با توجه به قاعده‌ی جمع برداری، بردار $\vec{b}$ را رسم می‌نماییم (روش چندضلعی) نهایتاً با توجه به مثلث ایجاد شده و استفاده از قانون کسینوس‌ها ابتدا اندازه‌ی بردار و نهایتاً زاویه‌ی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آوریم.



$$b^{۲} = a^{۲} + R^{۲} - ۲aR\cos ۶۰ \qquad |\vec{a}| = ۱۰$$

$$b^{۲} = (۵)^{۲} + (۱۰)^{۲} - ۲ \times ۵ \times ۱۰ \times \cos ۶۰ = ۷۵$$

$$\rightarrow b = ۵\sqrt{۳}$$

$$R^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos\theta'$$

$$(۵)^{۲} = (۱۰)^{۲} + (۵\sqrt{۳})^{۲} - ۲(۱۰)(۵\sqrt{۳})\cos\theta'$$

$$\cos\theta' = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \theta' = ۳۰^{\circ} \Rightarrow \theta = ۱۸۰ - \theta' = ۱۵۰^{\circ}$$

توجه کنید به کمک شکل مسأله، معلوم می‌شود، زاویه‌ی مورد نظر منفرجه است(یعنی گزینه‌ی «۲» یا گزینه‌ی «۴») و این که اگر زاویه‌ی 120° صحیح باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع می‌گردد که با توجه به بزرگی بردارها نمی‌تواند صحیح باشد. بنابراین با رسم یک شکل مناسب بدون حل مسأله می‌توان گزینه‌ی «۴» را انتخاب نمود.

گزینه «۴» صحیح است.

۲) برآیند سه نیروی $F_1 = 3N , F_2 = 8N , F_3 = 7N$ برابر صفر است. زاویه‌ی بین دو نیروی F_1 , F_2 چند رادیان است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$

۲) $\frac{\pi}{6}$

۳) $\frac{2\pi}{3}$

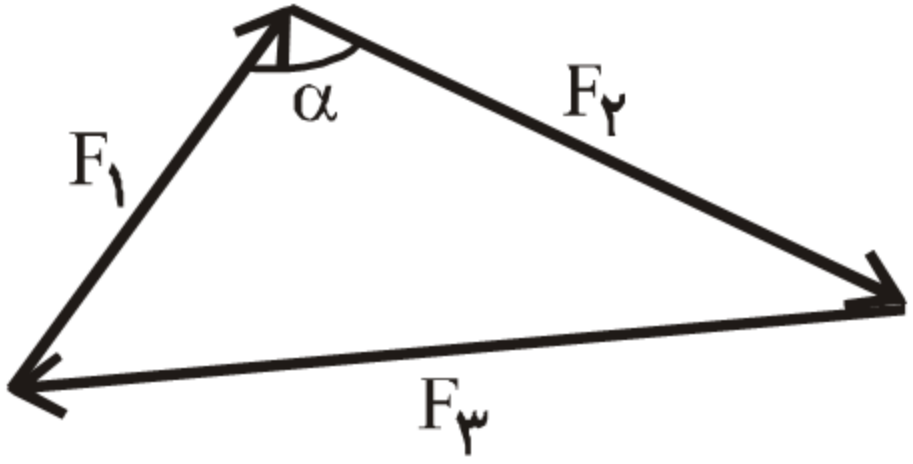
۴) $\frac{5\pi}{6}$

۲) چون برآیند سه نیرو صفر است، سه نیرو تشکیل یک مثلث می دهند در این‌صورت اندازه ی ضلع سوم مثلث $(F_۳)$ ، برابر است با اندازه ی برایند دو بردار دیگر.

$$F_۳ = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۲\cos\alpha} \Rightarrow$$

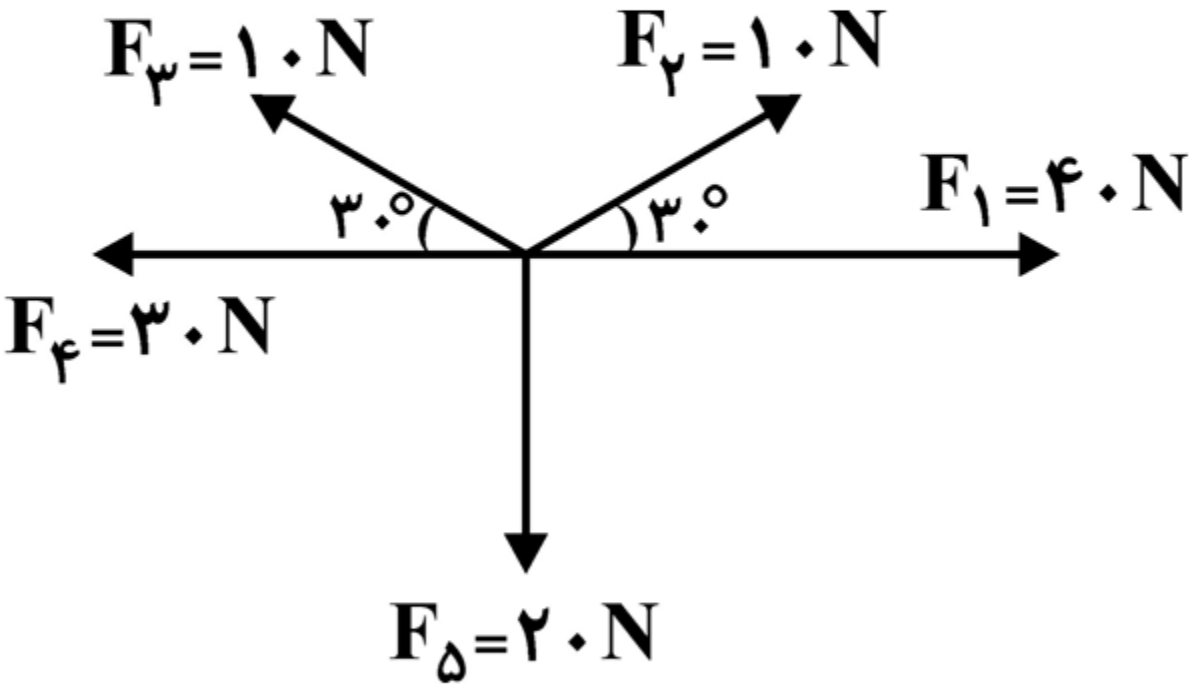
$$۷ = \sqrt{۳^۲ + ۸^۲ + ۲\times۳\times۸\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{۲\pi}{۳}\,\text{rad}$$



گزینه «۳» صحیح است.

۳) در شکل زیر، برایند نیروها چند نیوتون است؟



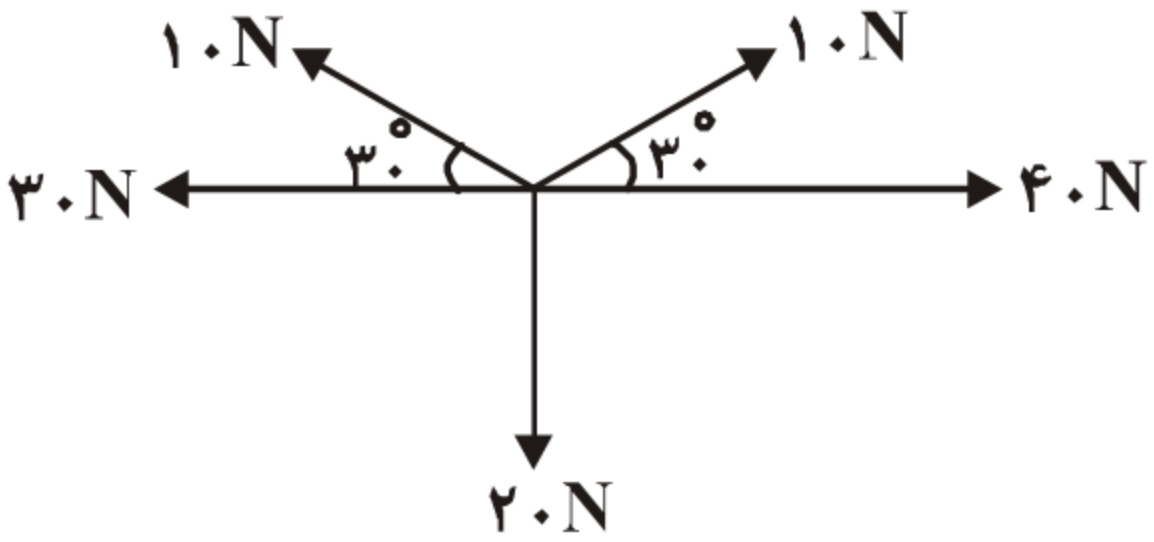
۱) ۱۵

۲) ۱۰

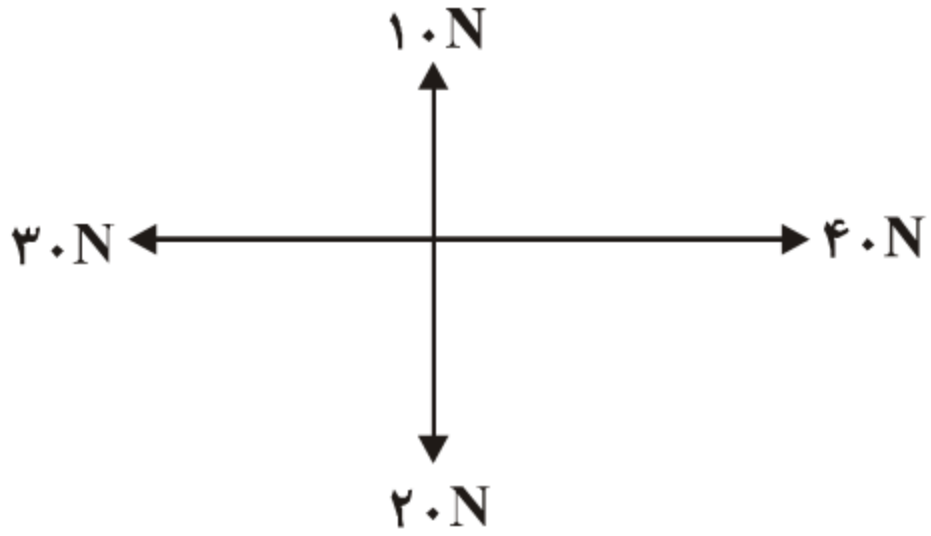
۳) $5\sqrt{2}$

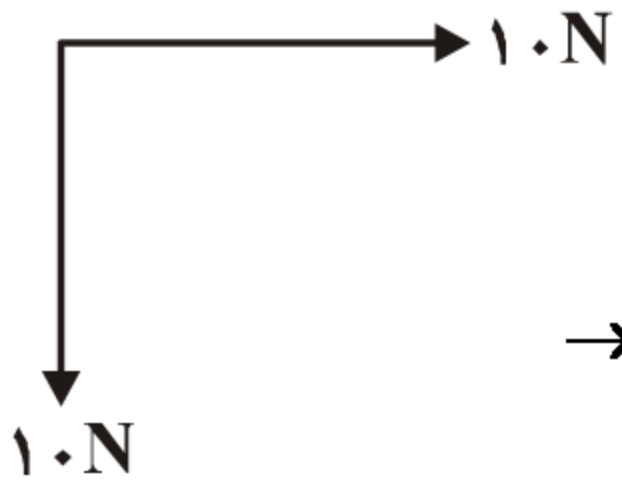
۴) $10\sqrt{2}$

در ابتدا برایند دو نیروی ۱۰ نیوتنی را محاسبه کرده و بعد از آن برایند نیروهای همراستا را تعیین و در نهایت برایند بردارها را معلوم می‌کنیم. می‌دانیم که برایند دو بردار هم اندازه نیم‌ساز زاویه‌ی بین آن‌ها بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\Sigma F = ۲F\cos\frac{\theta}{۲} \xrightarrow{F=۱۰N\,,\,\theta=۱۲۰^\circ} \Sigma F = ۲\times ۱۰\times \cos ۶۰^\circ = ۱۰N$$



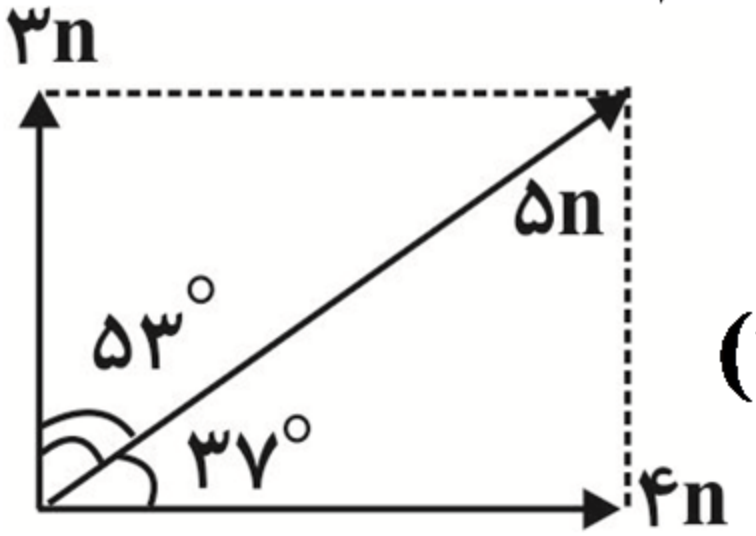


$$\rightarrow R=\sqrt{(۱۰)^{۲}+(۱۰)^{۲}} \rightarrow R=۱۰\sqrt{۲}N$$

گزینه «۴» صحیح است.

اعداد فیثاغورثی

در تعیین برآیند و یا تفاضل دو بردار عمود بر هم بردارهای خاصی با بزرگی های خاص وجود دارند که آنها را به صورت زیر دسته بندی کنیم:



$$(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$$

۴) برایند سه نیرو با اندازه‌های $F_1 = ۱۲N$ ، $F_2 = ۱۶N$ و $F_3 = ۲۰N$ برابر صفر است. بزرگی تفاضل دو نیروی $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_1$ چند نیوتون است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵

۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۴) از آن‌جـــایی کـــه اعـــداد $۱۲N$ و $۱۶N$ و $۲۰N$، اعـــداد فیثاغورثی‌اند (مضاربی از ۳ و ۴ و ۵) می‌باشند، بنـــابراین دو بردار کوچک‌تر$(F_۲, F_۱)$بر هم عمودند و برآیند بردار بزرگ‌تر $(F_۳)$ را خنثی می‌کند. از طرفی چون دو برابر $F_۱$ و $F_۲$ بر هم عمودند، تفاضل این دو نیرو (R') برابر است با:

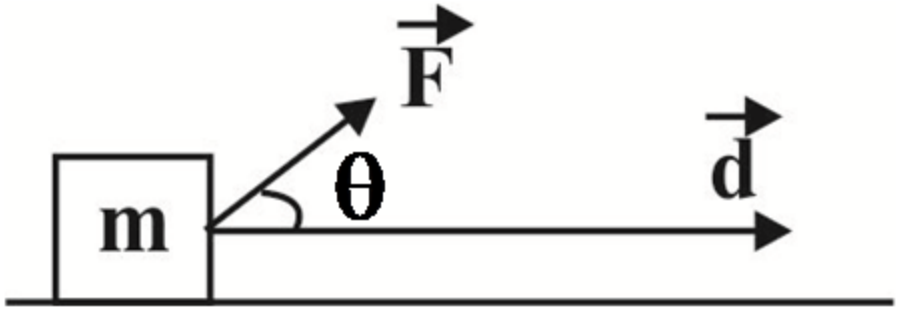
$$R' = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲} = ۲۰N$$

گزینه «۴» صحیح است.

کار و انرژی

کار و انرژی

کار نیروی ثابتF:



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \rightarrow W = F.d.\cos\theta$$

قضیه ی کار و انرژی:

کار برآیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر تغییر انرژی جنبشی آن است.

$$\Sigma W = \Delta k \xrightarrow{k=\frac{1}{2}mv^2}$$

$$\Sigma w = k_2 - k_1 = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2)$$

بدیهی است که اگر جسمی با سرعت ثابت حرکت کند، کار برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است.

کار نیروی وزن (میدان گرانش): کار این نیرو به هیچ وجه به مسیر بستگی ندارد و تابعی از جابه جایی جسم در راستای قائم است.

(+) وقتی جسم پایین می آید.

$$W_g = \pm mgh$$

(-) وقتی جسم بالا می رود.

بدیهی است که در یک مسیر بسته (رفت و برگشت) کـار نیروی وزن صفر است.

کار نیروی اصطکاک: کار نیروی اصطکاک همواره منفی است که به صورت گرما تبدیل شود.کار نیروی اصطکاک در یک مسیر رفت و برگشت ۲ برابر کار آن در رفت یا برگشت است.

انرژی مکانیکی و پایستگی انرژی:

می دانیم که انرژی مکانیکی یک جسم برابر مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی آن است که در صورت عدم حضور نیروی ناپایستار، انرژی مکانیکی جسم ثابت است.

در صورت عدم حضور نیروهای ناپایستار

$$E = U + K \longrightarrow E = \text{ثابت}$$

$$\Delta E = 0 \rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

تـــذکر: اگـــر نیـــروی ناپایســـتاری ماننـــد نیـــروی اصطکاک داشته باشیم آنگاه داریم:

$$E_1 = E_2 + |W_F|$$

۵) جسم A به جرم m از ارتفاع ۱۰ متری سطح زمین و جسم B به جرم ۲m از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین رها می‌شوند. انرژی جنبشی جسم B در لحظه‌ی رسیدن به زمین چند برابر انرژی جنبشی جسم A در لحظه‌ی رسیدن به زمین است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

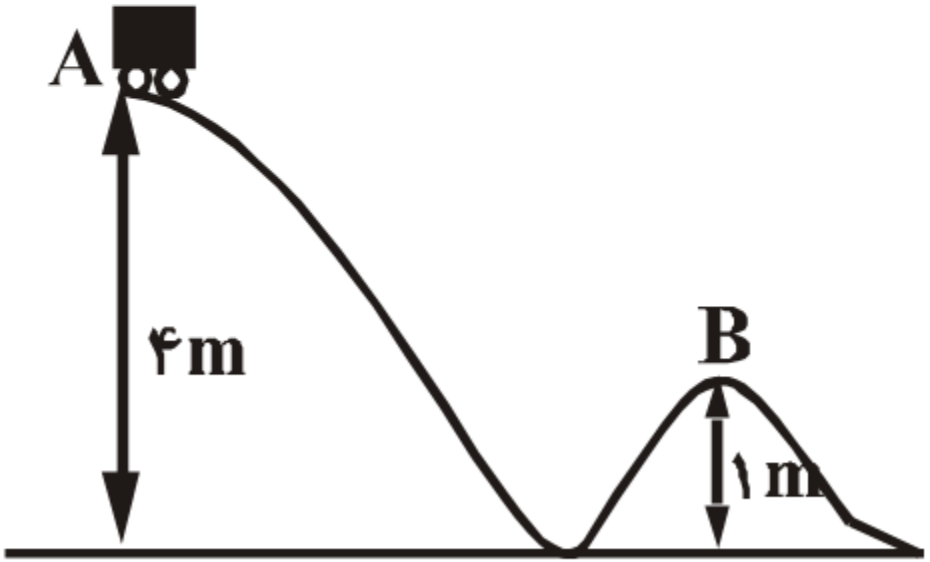
۵) بنابر قانون پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی هر دو جسم در لحظه ی برخورد به زمین برابر انرژی پتانسیل اولیه ی آن ها است،

$$\frac{K_B}{K_A}=\frac{U_B}{U_A}=\frac{m_B g h_B}{m_A g h_A} \xrightarrow[m_A=m,h_A=۱۰m]{m_B=۲m,h_B=۲۰m}$$

$$\frac{K_B}{K_A}=\frac{۲m\times ۲۰}{m\times ۱۰}\rightarrow \frac{K_B}{K_A}=۴$$

گزینه «۳» صحیح است.

۶) مطابق شکل، ارابه‌ای به جرم m از نقطه‌ی A با سرعت ۲ متر بر ثانیه می‌گذرد، سرعت آن هنگام عبوراز نقطه‌ی B چند متر بر ثانیه است؟(از اصطکاک صرف‌نظر شود و $g = ۱۰ m/s^۲$)



۱) ۴
۲) ۸
۳) $\sqrt{۴۶}$
۴) بستگی به جرم دارد.

۶) طبق قانون پایستگی انرژی مکانیکی، چون در طول مسیر نیروی تلف‌کننده‌ی انرژی وجود ندارد، پس انرژی مکـــانیکی در نقطه‌ی A و B برابر می‌باشد.

$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$v_A = ۲ \ , \ h_A = ۴$$

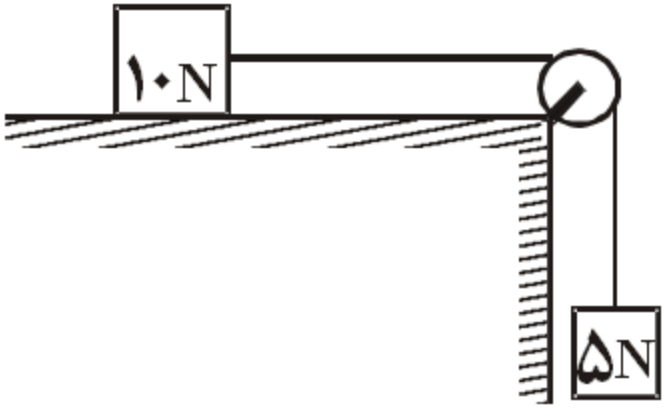
$$v_B = ? \ , \ h_B = ۱$$

$$\frac{۱}{۲}m(۲)^{۲}+m\times ۱۰\times ۴=\frac{۱}{۲}m(V_B)^{۲}+m\times ۱۰\times ۱$$

$$\Rightarrow ۳۲m=\frac{۱}{۲}mV_B^{۲}\Rightarrow V_B=۸m/s$$

گزینه «۲» صحیح است.

۷) در شکل مقابل، سیستم از حال سکون رها می‌شود و بعد از ۲ متر جابه‌جایی، مجموع انرژی جنبشی وزنه‌ها به $8J$ می‌رسد. ضریب اصطکاک سطح افقی چه‌قدر است ؟ ($g=10m/s^2$ و جرم نخ و قرقره و اصطکاک آن‌ها ناچیز است.)



۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲

۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۷) هنگامی‌که جسم ۵ نیوتنی به اندازه‌ی ۲ متر پایین می‌آید، انرژی پتانسیلی که سیستم از دست می دهد برابر است با:

$$U = mgh = ۵ \times ۲ = ۱۰J$$

اگراصطکاک نباشد انرژی جنبشی سیستم باید همین مقدار افزایش یابد، ولی انرژی جنبشی سیستم پس از جابه جایی وزنه ها برابر ۸ ژول است، پس انرژی‌ای که در اثر جابه جایی اجسام تلف شده، برابر با:

$$w_f = ۸ - ۱۰ = -۲J \rightarrow w_f = -f_k .d \xrightarrow{d=۲m}$$

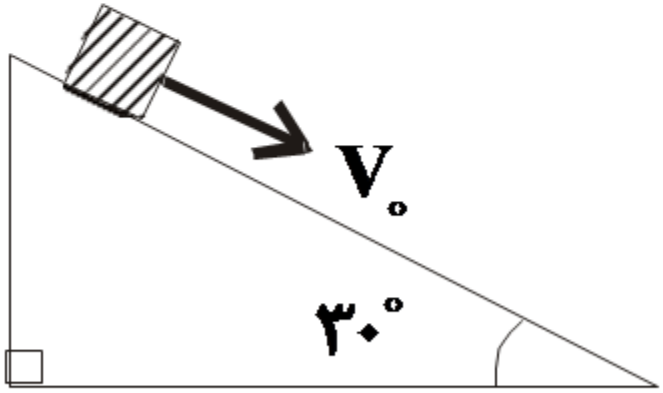
$$-f_k \times ۲ = -۲ \rightarrow f_k = ۱N$$

$$f_k = \mu mg \xrightarrow{mg=۱۰N} ۱ = \mu \times ۱۰ \rightarrow \mu = ۰/۱$$

گزینه «۱» صحیح است.

۸) جسمی به جرم $2kg$ را مطابق شکل با سرعت اولیه‌ی $5\ m/s$ مماس بر سطح رو به پائین پرتاب می‌کنیم. اگر سرعت جسم پس از ۱۲ متر جابه‌جایی روی سطح به $8\ m/s$ برسد، کار نیروی اصطکاک چند ژول است؟

$(g = 10\ m/s^2)$



۱) -42 ۲) -45

۳) -63 ۴) -81

۸) اگر ارتفاع سطح شیب‌دار را h و طول آن را x فرض کنیم داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \frac{x}{۲} = ۶m$$

در ضمن می‌دانیم تغییر در انرژی مکانیکی برابرکار نیروی اصطکاک است:

$$E_۲ - E_۱ = W_f$$

(مبدأ پتانسیل را نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که سرعت جسم به $8\ m/s$ می‌رسد.)

$$(\frac{1}{2}mV^2+0)-(\frac{1}{2}mV_0^2+mgh)=W_f \Rightarrow W_f=64-(25+120)$$

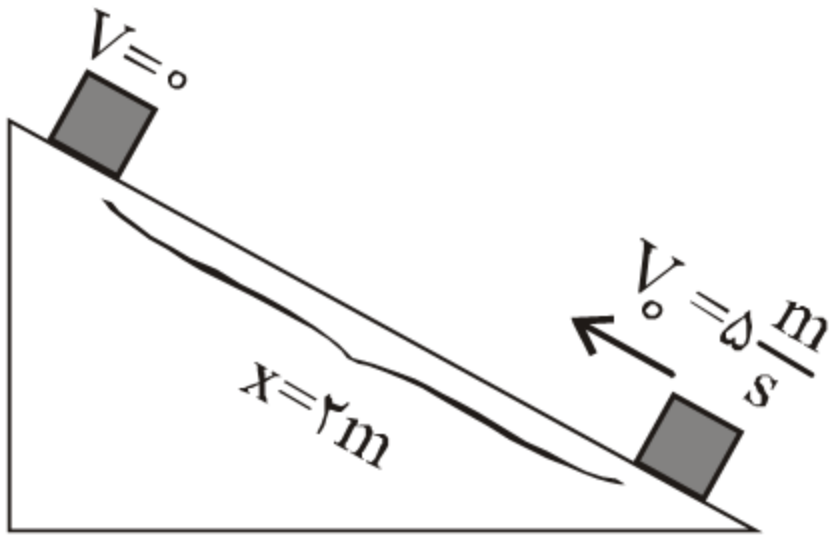
$$=64-145=-81 \quad \text{ژول}$$

گزینه «۴» صحیح است.

۹)جسمی به جرم $۲kg$ را از پایین سطح شیبداری که با افق زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازد، با سرعت اولیه‌ی $۵\frac{m}{s}$ مماس با سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. جسم روی سطح به اندازه‌ی $۲m$ بالا می‌رود و سپس به نقطه‌ی پرتاب برمی‌گردد. کار نیروی اصطکاک در این مسیر رفت و برگشت چند ژول است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) صفر ۲) ۵- ۳) ۱۰- ۴) ۲۰-

(۹



گزینه «۳» صحیح است.

۱۰) گلوله‌ای به جرم ۱۰۰ گرم از ارتفاع ۱۰ متری سطح زمین با سرعت $۲\frac{m}{s}$ به طور قائم روبه پایین پرتاب می‌شود. اگر کار نیروی مقاومت هوا در طول مسیر، $-۲J$ باشد، انرژی جنبشی گلوله در لحظه‌ی برخورد به زمین چند ژول است؟

$(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۸
۲) ۸/۲
۳) ۱۰/۲
۴) ۱۲/۲

۱۰) ابتدا کل انرژی اولیه‌ی جسم را حساب می‌کنیم:

$$E_۱ = K_۱ + U_۱ = \frac{۱}{۲} m v_۱^۲ + mgh$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۰/۱ \times ۴ + ۰/۱ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰/۲ J$$

با توجه به قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$E_۱ - |W_f| = E_۲ \rightarrow E_۲ = K_۲ = ۱۰/۲ - ۲ = ۸/۲ J$$

گزینه «۲» صحیح است.