☑ درک شهودی

انسان برای شناخت و درک آنچه که در پیرامون اوست از شهودش کمک می گیرد و با تجربه ی خود پدیده ها را توصیف می کند ولی واضح است که این شناخت علاوه بر اینکه متکی بر استدلال نیست دارای ابهام و خطا است. پس انسان برای رسیدن به آگاهی صحیح وکامل نیاز به ابزار های قویتر دیگری مانند استدلال جهت رسیدن به حقایق وکشف روابط دارد.درک شهودی به ما کمک می کند که مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدسهای جالب و بهتری برای اثبات احکام مختلف بزنیم ولی این حدس ها قابل اعتماد نیستند و برای اطمینان از قطعی بودن این حدس ها باید استدلال کرد.

مثلاً مردم در گذشته های دور باور دارند که زمین مسطح است وگرد بودن آن را قبول نداشتند زیرا با شهود آنها مطابقت نداشت.

***

☑ استدلال تمثیلی (قیاسی)

گاهی انسان برای توصیف پدیده ها از تمثیل کمک می گیرد.منظور از تمثیل یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است. این مشابهت در زمینه شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات های ریاضی کمک می کند.

***

☑ انواع استدلال

عمل ارائه ی دلیل برای اثبات یک گزاره را استدلال می نامند. به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

۱- استدلال استقرایی

استدلالی است که بر اساس تعداد محدودی مشاهده (حالت) ما را به نتیجه ی کلی می رساند.

مثال ۱) ادعا شده است که عبارت $P(x) = x^{۲} + x + ۴۱$ به ازای x های طبیعی اعداد اول بیشتر از ۴۱ را نتیجه می دهد. صحت این ادعا را به روش استقرایی بررسی کنید.

حل: با مشاهده ی حالت های زیر نتیجه می گیریم که عبارت داده شده به ازای هر x طبیعی یکی از اعداد اول بیشتر از ۴۱ را نتیجه می دهد.

نتیجه	$P(x)$	x	
عدد اول	$P(۱) = (۱)^{۲} + ۱ + ۴۱ = ۴۳$	۱	حالت اول
عدد اول	$P(۲) = (۲)^{۲} + ۲ + ۴۱ = ۴۷$	۲	حالت دوم
عدد اول	$P(۳) = (۳)^{۲} + ۳ + ۴۱ = ۵۳$	۳	حالت سوم
عدد اول	$P(۴) = (۴)^{۲} + ۴ + ۴۱ = ۶۱$	۴	حالت چهارم
....	....	....	....

توجه: در جدول فوق تمام حالت ها بررسی نشده اند،پس این نتیجه قطعی نبوده و لذا نتیجه ی بدست آمده احتمالی است. در واقع با ادامه ی جدول وقتی $x = ۴۱$ در نظر گرفته شود $P(x)$ برابر۱۷۶۳ می شود که بر ۴۱ بخش پذیر بوده و عدد اول نیست پس نتیجه ی فوق نادرست است.

مثال ۲) ادعا شده است که مجموع هر تعداد از اعداد فرد متوالی ابتدا از یک، مربع کامل است. صحت این ادعا را به روش استقرایی بررسی کنید.

حل: با مشاهده ی حالت های زیر نتیجه می گیریم که مجموع هر تعداد از اعداد فرد متوالی ابتدا از یک، مربع کامل است.

نتیجه	حالت
مربع کامل	$۱ = ۱$
مربع کامل	$۱ + ۳ = ۴$
مربع کامل	$۱ + ۳ + ۵ = ۹$
مربع کامل	$۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۱۶$
....	....

توجه کنید که در الگوی فوق تمام حالات ها بررسی نشده اند، لذا برای اطمینان قطعی از این نتیجه نیاز به ابزار قوی تری مانند استدلال استنتاجی یا اصل استقرای ریاضی وجود دارد که بعداً توضیح داده می شوند.

❋❋❋

۲- استدلال استنتاجی

استدلالی است که بر اساس حقایق درست پذیرفته شده ما را به یک نتیجه گیری کلی می رساند.

مثال: ادعا شده است که مجموع هر دو عدد فرد،یک عدد زوج است. صحت این ادعا را به روش استنتاجی بررسی کنید.

حل: قرار می دهیم

$y = ۲k_۱ + ۱ \ , \ \ k_۱ \in Z$ فرد

$y = ۲k_۲ + ۱ \ , \ \ k_۲ \in Z$ فرد

حال داریم

$$x + y = (۲k_۱ + ۱) + (۲k_۲ + ۱) = ۲k_۱ + ۲k_۲ + ۲ = ۲(\underbrace{k_۱ + k_۲ + ۱}_{k}) = ۲k$$

یعنی حاصل همواره عدد زوج است.

تمرین: هریک از گزاره های زیر را به روش استنتاجی ثابت کنید.

۱) ثابت کنید که مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج همواره یک عدد فرد است.

۲) ثابت کنید که مجموع هر دو عدد زوج همواره یک عدد زوج است.

۳) ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد زوج همواره یک عدد زوج است.

۴) ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد فرد همواره یک عدد فرد است.

۵) ثابت کنید که حاصل ضرب یک عدد فرد و یک عدد زوج همواره یک عدد زوج است.

۶) ثابت کنید که اگر هفت برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم،حاصل همواره عددی فرد است.

۷) ثابت کنید که مربع هر عدد فرد همواره فرد است.

۸) ثابت کنید که مربع هر عدد زوج همواره زوج است.

۹) ثابت کنید که حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است.

حل: کافی است ثابت کنیم که حاصل ضرب هم بر۲ وهم بر ۳ بخش پذیر است.

قرار می دهیم. $p = x.y.z = k(k+۱)(k+۲)$

بررسی بخش پذیری بر۲

- ✓ اگر k زوج باشد پس p بر ۲ بخش پذیر است.
- ✓ اگر k فرد باشد لذا $k+۱$ زوج است پس p نیز بر ۲ بخش پذیر می باشد.

بررسی بخش پذیری بر ۳

- ✓ اگر kمضرب ۳ باشد پس p بر ۳ بخش پذیر است.
- ✓ اگر k مضرب ۳ نباشد لذا $k+۱$ یا $k+۲$مضرب ۳ است پس p نیز بر۳ بخش پذیر می باشد.

۱۰) ثابت کنید که مجموع دو زاویه حاده همیشه کمتر از ۱۸۰ درجه است.

۱۱) اگر m و n دو عدد صحیح فرد باشند، ثابت کنید که $m^۲ - n^۲$ بر ۸ بخش پذیر است.

حل :

$$m^۲ - n^۲ = (۲a+۱)^۲ - (۲b+۱)^۲ = (۴a^۲+۴a+۱) - (۴b^۲+۴b+۱)$$
$$= (۴a^۲+۴a) - (۴b^۲+۴b) = ۴\underbrace{a(a+۱)}_{۲p} - ۴\underbrace{b(b+۱)}_{۲q} = ۸p - ۸q = ۸(p-q) = ۸r$$

۱۲) تفاوت های بین انواع استدلال را بنویسید.

حل:

استقرایی	از جزء به کل است.	متکی بر تعداد محدودی مشاهده است.	تجربی است.	نتایج آن احتمالی است.
استنتاجی	از کل به جزءاست.	متکی بر حقایق پذیرفته شده است.	منطقی است.	نتایج آن قطعی است.

***

☑ مثال نقض

مثال نقض (استثنا)مثالی است که نشان می دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است.

مثال:گزاره ی « توان دوم هر عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است.» یک گزاره ی نادرست است،زیرا توان دوم عدد یک برابر یک است واز آن بزرگتر نیست. در اینجا عدد «۱»یک مثال نقض برای رد درستی این گزاره محسوب می شود.

تمرین: برای رد درستی گزاره های زیر یک مثال نقض بیاورید.

الف) حاصل جمع هر دو عدد گنگ همواره یک عدد گنگ است.

ب) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ همواره یک عدد گنگ است.

ج) برای هر دو عدد حقیقی ومثبت y و x همواره داریم. $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

د) برای هر دو عدد حقیقی y و x همواره داریم. $[x+y]=[x]+[y]$

تذکر:

۱- برای اثبات درستی یک گزاره باید استدلال کرد که این استدلال باید از نوع استنتاجی و متکی بر یک حقیقت یا اصل می باشد.

۲- برای رد درستی یک گزاره ارائه ی یک مثال نقض کافی است.

***

☑ قضیه

قضیه گزاره ی کلی است که همواره درست می باشد.

مانند:

۱- در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دوضلع دیگر برابر است.

۲- برای هر زاویه ی x همواره $Sin^{۲}x + Cos^{۲}x = ۱$ است.

۳- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت y و x همواره $\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$ است.

۴- مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۵- برای هر دو مجموعه ی B و A همواره $A - B = A \cap B'$

واضح است که هر قضیه یک *<u>جمله ی شرطی</u>* است لذا دارای دو قسمت اصلی می باشد.

فرض: آن قسمت از قضیه است که درستی آن را قبول داریم.

حکم: آن قسمت از گزاره است که درستی آن را ثابت می کنیم.

پس هر قضیه دارای الگویی به شکل زیر است.

اگر $\underbrace{\text{.........p.........}}_{\text{فرض}}$ آنگاه $\underbrace{\text{.........q.........}}_{\text{حکم}}$.

$$p \Rightarrow q$$

مثال:

قضیه: حاصل جمع هر دو عدد گویا یک عدد گویا است.

به سادگی می توان این قضیه را به صورت شرطی به شکل زیر نوشت وفرض وحکم آن را تعیین کرد.

« اگر y و x دو عدد گویا باشند،آنگاه $x + y$ نیز گویا است.»

فرض: $x, y \in Q$

حکم: $(x + y) \in Q$

توجه داشته باشید که هرعدد را که بتوان آنرا به شکل یک کسر که صورت ومخرج آن عدد صحیح بوده ومخرج آن ناصفر باشد را عدد گویا (منُطق) می نامند. به عبارت دیگر هر عدد به شکل $x=\frac{a}{b},a,b\in Z,b\neq ۰$ یک عدد گویا است.

اگر عددی گویا نباشد،آن را گنگ (اصم) می نامند.

تمرین : قضیه ی فوق را ثابت کنید.

اثبات: قرار می دهیم.

گویا $x \to x=\frac{a}{b},a,b\in Z,b\neq ۰$

گویا $y \to y=\frac{c}{d},c,d\in Z,d\neq ۰$

لذا :

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

حالنشان می دهیم که حاصل جمع جمع شرایط عدد گویا را دارد.

$\begin{cases} a\in Z,d\in Z \to ad\in Z \\ b\in Z,c\in Z \to bc\in Z \end{cases} \to (ad+bc)\in Z$ صورت عدد صحیح است.

$\{b\in Z,d\in Z \to bd\in Z$ مخرج عدد صحیح است.

$\{b\neq ۰,d\neq ۰ \to bd\neq ۰$ مخرج غیر صفر است.

پس $x+y$ یک عدد گویا است.

***

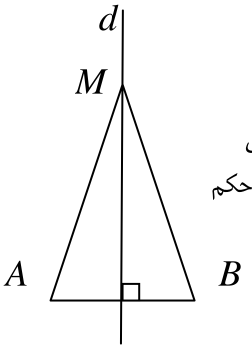
☑ قضیه ی عکس

اگر جای فرض وحکم قضیه ای را جابجا کنیم یک گزاره ی شرطی جدیدی بدست می آید که آن را عکس قضیه می گویند.

اگر عکس قضیه ای درست باشد،آنرا قضیه ی عکس می نامند. $q \Rightarrow p$

مثال:

قضیه: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط قرار دارد از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.



فرض: $M \in d$

حکم: $AM = BM$

عکس قضیه: هر نقطه که از دو سر پاره خطی به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

فرض: $AM = BM$

حکم: $M \in d$

توجه داشته باشید که در مثال فوق عکس قضیه، درست است و لذا یک قضیه است ولی ممکن است عکس قضیه ، درست (قضیه) نباشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: عکس قضیه ی ***«اگر y و x دو عدد گویا باشند، آنگاه $x + y$ نیز گویا است.»*** درست نیست و لذا یک قضیه نمی باشد.

«اگر $x + y$ گویا باشد،آنگاه y و x نیز هر دو گویا هستند.»

تمرین: دلیل نادرستی گزاره ی فوق را بنویسید.

حل: عدد صفر که گویا است را می توان به صورت مجموعی از دو عدد گنگ ولی قرینه مانند $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ نوشت.

***

☑ قضیه ی دو شرطی

هرگاه عکس یک قضیه خود نیز یک قضیه باشد،از ترکیب این دو قضیه می توان یک قضیه ی جدید موسوم به قضیه ی دو شرطی بدست آورد. $p \Leftrightarrow q$

هر قضیه دو شرطی دارای یکی از الگو های زیر است.

- ✓ اگر p آنگاه q و برعکس.
- ✓ p اگر و فقط اگر q.
- ✓ p شرط لازم و کافی برای q است.

مثال:

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است. $p \Rightarrow q$

قضیه ی عکس: اگردریک مثلث مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

$$q \Rightarrow p$$

قضیه ی دو شرطی: که به سه شکل بیان می شود.

- ✓ اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است و برعکس
- ✓ مثلث قائم الزاویه است، اگر و تنها اگر مربع وتر آن با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.
- ✓ شرط لازم وکافی برای قائم الزاویه بودن مثلث آن است که مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.

$$p \Leftrightarrow q$$

تذکر: برای اثبات یک قضیه ی دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ باید قضیه ی $p \Rightarrow q$ و عکس آن یعنی $q \Rightarrow p$ را ثابت کنیم.

***

☑ ویژگی عکس نقیض یک قضیه

اگر فرض وحکم قضیه ای را جابجا ونقیض[1] کنیم،گزاره ی حاصل همواره یک گزاره ی درست خواهد بود. این گزاره را قضیه ی عکس نقیض می نامند.

مثال:

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است. $p \Rightarrow q$

---

[1] . با تغییر ارزش یگ گزاره ،گزاره ی نقیض بدست می آید، یعنی نقیض یک گزاره ی درست یک گزاره ی نادرست است و نقیض یک گزاره ی نادرست یک گزاره ی درست است. برای تعیین گزاره ی نقیض کافی است که فعل گزاره را از حالت مثبت به حالت منفی و برعکس تغییرکنیم.

مثال:

گزاره: $\sqrt{۲}$ یک عدد گویا است. (نادرست) p

نقیض گزاره: $\sqrt{۲}$ یک عدد گویا نیست. (درست) $\neg p$

مثال:

گزاره: مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه نیست. (نادرست)

نقیض گزاره: مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است. (درست)

قضیه ی عکس نقیض: اگر در مثلثی مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر نباشد، آنگاه آن مثلث قائم الزاویه نیست.

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

توجه کنید که یک قضیه و عکس نقیض آن معادل هستند یعنی اثبات یک قضیه به معنی اثبات عکس نقیض آن است.

***

☑ اثبات بازگشتی

گاهی برای اثبات قضیه ها بهتر است که حکم قضیه را به کمک عملیات درست تغییر داده تا به یک رابطه ی بدیهی ویا فرض قضیه برسیم.سپس برای تکمیل اثبات باید نشان داد که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند،در غیر این صورت درستی اثبات تأیید نمی شود.

این روش اثبات که به اثبات بازگشتی موسوم است، بیشتر در مورد نا مساوی ها ی عددی رایج است.

مثال: ثابت کنید که میانگین حسابی دو عدد حقیقی و مثبت بیشتر یا مساوی میانگین هندسی آنها است.

یعنی اگر y و x دو عدد حقیقی و مثبت باشند، آنگاه $\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$

حل: اثبات به روش بازگشتی

$$\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$$
$$\leftrightarrow x+y \geq ۲\sqrt{xy}$$
$$\longleftrightarrow (x+y)^۲ \geq (۲\sqrt{xy})^۲$$
$$\leftrightarrow x^۲ + ۲xy + y^۲ \geq ۴xy$$
$$\leftrightarrow x^۲ + ۲xy + y^۲ - ۴xy \geq ۰$$
$$\leftrightarrow x^۲ - ۲xy + y^۲ \geq ۰$$

$\leftrightarrow (x-y)^۲ \geq ۰$. بدیهی است

رابطه به دست آمده بدیهی (همواره درست) است . چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

***

تمرین: ثابت کنید که مجموع هر عدد گویای مثبت و معکوس آن حداقل برابر ۲ است.

یعنی اگر $a,b>۰$ آنگاه $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$

تمرین: اگر y و x دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید. $x^۲+y^۲\geq ۲(x+y-۱)$

تمرین: اگر y و x دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید. $y^۲+۱\geq ۲x(y-x+۱)$

تمرین: اگر z و y و x سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید. $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+xz$

راهنمایی : ابتدا دو طرف را در ۲ ضرب کنید.

حل : اثبات به روش بازگشتی

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+xz$$
$$\xleftrightarrow{\times ۲} ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲xz$$
$$\leftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲+x^۲-۲xz+z^۲+y^۲-۲yz+z^۲\geq ۰$$
$$\leftrightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰$$

رابطه به دست آمده بدیهی (همواره درست) است . چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

***

تمرین: اگر b و a دو عدد حقیقی باشند و $a+b>۰$، ثابت کنید. $\frac{a^۳+b^۳}{a+b}\geq ab$

حل : اثبات به روش بازگشتی

$$\frac{a^۳+b^۳}{a+b}\geq ab$$
$$\leftrightarrow a^۳+b^۳\geq ab(a+b)$$
$$\leftrightarrow (a+b)(a^۲-ab+b^۲)\geq ab(a+b)$$
$$\leftrightarrow a^۲-ab+b^۲\geq ab$$
$$\leftrightarrow a^۲-۲ab+b^۲\geq ۰$$
$$\leftrightarrow (a-b)^۲\geq ۰$$

رابطه به دست آمده بدیهی (همواره درست) است . چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

***

☑ اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

اگر یک گزاره ی شرطی دارای دو یا چند نتیجه باشد و از بین این چند نتیجه فقط یکی از آنها مورد نظر باشد، در این صورت نشان می دهیم که تمام نتیجه گیری ها بجز آن نتیجه درست نمی باشند. این شیوه ی استدلال که یک نوع استدلال استنتاجی است را اثبات غیر مستقیم می نامند.

در اثبات یک قضیه به روش غیر مستقیم نشان می دهیم که خلاف حکم درست نیست. بنا بر این در استفاده از این روش گام های زیر را داریم.

گام۱) فرض می کنیم که خلاف حکم درست است.

گام۲) نشان می دهیم که این فرض حقایق پذیرفته شده ی قبلی یا فرض قضیه را نقض می کند.

گام۳) حال که به تناقض رسیده ایم، معلوم می شود که حکم درست است نه خلاف آن

مثال: با استفاده از برهان خلف نشان دهید که اگر n عدد صحیح و $n^۲$ فرد باشد،آنگاه n نیز فرد است.

حل:

فرض: $n^۲$ فرد
حکم : n فرد

فرض کنیم که n فرد نباشد پس زوج است.

$$n = ۲k, k \in Z \rightarrow n^۲ = (۲k)^۲ = ۴k^۲ = ۲(۲k^۲) = ۲k'$$

یعنی $n^۲$ زوج است و این خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تمرین: با استفاده از برهان خلف نشان دهید که اگر m عدد صحیح و $m^۲$ زوج باشد،آنگاه m نیز زوج است.

تمرین: اگر n عدد صحیح و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضرب ۳ است.

حل: گیریم که n مضرب ۳ نباشد. پس

$$n = ۳k + ۱ \rightarrow n^۲ = (۳k + ۱)^۲ \rightarrow n^۲ = ۹k^۲ + ۶k + ۱ \rightarrow n^۲ = ۳(۳k^۲ + ۲k) + ۱ \rightarrow n^۲ \neq ۳k'$$
$$n = ۳k + ۲ \rightarrow n^۲ = (۳k + ۲)^۲ \rightarrow n^۲ = ۹k^۲ + ۱۲k + ۴ \rightarrow n^۲ = ۳(۳k^۲ + ۴k + ۱) + ۱$$
$$\rightarrow n^۲ \neq ۳k'$$

یعنی $n^۲$ مضرب ۳ نیست واین خلاف فرض می باشد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تعریف: دو عدد طبیعی را نسبت به هم اول (متباین)گویند، هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها برابر یک باشد. مانند دو عدد ۳ و ۵ یا دو عدد ۱۲ و ۱۷

تعریف:کسر $\frac{p}{q}$را تحویل ناپذیر (ساده نشدنی) گویند، هرگاه صورت ومخرج آن نسبت به هم اول باشند. مانند کسر $\frac{۳}{۵}$

توجه کنید که:

۱- در هر کسر تحویل ناپذیر عامل مشترکی غیر از یک بین صورت ومخرج آن وجود ندارد.

۲- هر عدد گویا را می توان به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۲}$ یک عدد گنگ است.

حل: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که عدد $\sqrt{۲}$ گنگ نباشد پس گویا است و می توان آن را به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

$$\sqrt{۲}=\frac{a}{b}(a,b\in Z,b\neq ۰)\to(\sqrt{۲})^{۲}=(\frac{a}{b})^{۲}\to ۲=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\to a^{۲}=۲b^{۲}$$

یعنی $a^{۲}$ زوج است .پس a نیز زوج است قرار می دهیم $a=۲k$.

$$\Rightarrow(۲k)^{۲}=۲b^{۲}\to ۴k^{۲}=۲b^{۲}\to ۲k^{۲}=b^{۲}$$

یعنی $b^{۲}$ هم زوج است.پس b نیز زوج است.درنتیجه صورت و مخرج کسر $\sqrt{۲}=\frac{a}{b}$ بر ۲ بخش پذیرند و این با تحویل ناپذیر بودن آن تناقض دارد.لذا فرض خلف باطل وحکم ثابت است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۳}$ یک عدد گنگ است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۵}$ یک عدد گنگ است.

تمرین: نشان دهید که $۲\sqrt{۳}$ یک عدد گنگ است.

حل: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که عدد $۲\sqrt{۳}$ گویا است .پس می توان آن را به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

$$۲\sqrt{۳} = \frac{a}{b}(a,b \in Z, b \neq ۰) \rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a}{۲b}$$

یعنی $\sqrt{۳}$ را می توان به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت و این با گنگ بودن $\sqrt{۳}$ تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۵۰}$ یک عدد گنگ است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۲}+۱$ یک عدد گنگ است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۱+\sqrt{۵}}$ یک عدد گنگ است.

تمرین: نشان دهید که $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ یک عدد گنگ است.

حل: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که عدد $\sqrt{۲}$ - $\sqrt{۳}$ گویا است. پس می توان آن را به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت.

$$\sqrt{۲} - \sqrt{۳} = \frac{a}{b}(a,b \in Z, b \neq ۰) \rightarrow \sqrt{۲}b - \sqrt{۳}b = a \rightarrow \sqrt{۲}b = a + \sqrt{۳}b$$

$$\rightarrow (\sqrt{۲}b)^۲ = (a+\sqrt{۳}b)^۲ \rightarrow ۲b^۲ = a^۲ + ۲\sqrt{۳}ab + ۳b^۲ \rightarrow ۲b^۲ - ۳b^۲ - a^۲ = ۲\sqrt{۳}ab$$

$$\rightarrow -b^۲ - a^۲ = ۲\sqrt{۳}ab \rightarrow \sqrt{۳} = \frac{-b^۲ - a^۲}{۲ab}$$

یعنی $\sqrt{۳}$ را می توان به صورت یک کسر تحویل ناپذیر نوشت و این با گنگ بودن $\sqrt{۳}$ تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

***

☑ دو اصل مهم در ریاضیات

۱- اصل استقرای ریاضی

در فرایند استدلال استقرایی با جمع آوری مشاهدات به طور تجربی می توان ادعا هایی را نشان داد ولی نمی توان در حالت کلی آنها را قبول کرد.برای اثبات ادعا های خود به یک ابزار دقیق و قوی تری یعنی اصل استقرای ریاضی نیازمندیم. این اصل به صورت زیر است.

> ***اصل استقرای ریاضی***
>
> فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره ی عدد طبیعی n باشد.اگر $P(۱)$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای $k \geq ۱$ درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست است.

مثال: به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که

« مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی ابتدا از یک مربع کامل است.»

یعنی: $P(n): ۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=n^۲$

حل:

$P(۱)$ درست است. $P(۱): ۱=۱^۲$

فرض استقرا $P(k): ۱+۳+۵+...+(۲k-۱)=k^۲$

حکم استقرا $P(k+۱): ۱+۳+۵+...+(۲k-۱)+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$

طرف اول حکم $\underbrace{۱+۳+۵+...+(۲k-۱)}_{k^۲}+(۲k+۱)=k^۲+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$

تمرین: به کمک اصل استقرای ریاضی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید.

الف) $۲+۴+۶+...+۲n=n(n+۱)$

ب) $۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

تمرین: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید که

الف) $۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

ب) $۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳=[\frac{n(n+۱)}{۲}]^۲$

ج) $۲+۶+۱۰+...+(۴n-۲)=۲n^۲$

د) $۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+...+n(n+۱)=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$

تمرین: برای هر عدد صحیح و مثبت n ثابت کنید که:

$$\frac{۱}{۲^۱}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+...+\frac{۱}{۲^n}=۱-\frac{۱}{۲^n}$$

تمرین: مجموع جملات زیر را حدس بزنید و ادعای خود را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+...+\frac{۱}{n(n+۱)}=$$

حدس: $=\frac{n}{n+۱}$

تمرین: ثابت کنید که به ازاء هر عدد طبیعی n عبارت $۸^n-۱$ بر ۷ بخش پذیر است.

حل:

$p(n):۸^n-۱=۷m,m\in N$

$p(۱):۸^۱-۱=۷(۱)$ $p(۱)$ درست است.

$p(k):۸^k-۱=۷r,r\in N$ فرض استقرا

$p(k+۱):۸^{k+۱}-۱=۷t,t\in N$ حکم استقرا

اثبات: دو طرف فرض استقرا را در عدد ۸ ضرب می کنیم.

$$۸\times(۸^k-۱)=۸\times(۷r)\rightarrow۸^{k+۱}-۸=۷\times(۸r)\xrightarrow{+۷}۸^{k+۱}-۸+۷=۷\times(۸r)+۷$$
$$\rightarrow۸^{k+۱}-۱=۷\times(\underbrace{۸r+۱}_{t})\rightarrow۸^{k+۱}-۱=۷t$$

تمرین: به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی nعبارت $۴^{۲n}-۱$ بر ۵ بخش پذیر است.

تمرین: با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n عبارت $۴^{n}+۱۵n-۱$ بر ۹ بخش پذیر است.

حل:

$$p(n): ۴^{n}+۱۵n-۱=۹m, m\in N$$

$$p(۱): ۴^{۱}+۱۵\times۱-۱=۹\times۲$$ $p(۱)$ درست است.

$$p(k): ۴^{k}+۱۵k-۱=۹r, r\in N$$ فرض استقرا

$$p(k+۱): ۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱=۹t, t\in N$$ حکم استقرا

اثبات: بنا بر فرض استقرا داریم.

$$۴^{k}+۱۵k-۱=۹r \xrightarrow{\times۴} ۴\times(۴^{k}+۱۵k-۱)=۴\times(۹r) \rightarrow ۴^{k+۱}+۶۰k-۴=۹(۴r)$$
$$\rightarrow ۴^{k+۱}+۱۵k+۴۵k+۱۵-۱-۱۸=۹(۴r) \rightarrow ۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱=۹(۴r)-۴۵k+۱۸$$
$$\rightarrow ۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱=۹(\underbrace{۴r-۵k+۲}_{t}) \rightarrow ۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱=۹t$$

تمرین : اگر $a\geq-۱$ و $n\in N$ ،آنگاه به کمک استقرای ریاضی درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید.

$$(۱+a)^{n}\geq۱+na$$

حل:

$$p(n): (۱+a)^{n}\geq۱+na$$

$$p(۱): (۱+a)^{۱}\geq۱+۱(a)$$ $p(۱)$ درست است.

$$p(k): (۱+a)^{k}\geq۱+ka$$ فرض استقرا

$$p(k+۱): (۱+a)^{k+۱}\geq۱+(k+۱)a$$ حکم استقرا

اثبات:

اگر $a=-۱$ در این صورت $[۱+(-۱)]^{k+۱}\geq۱+(k+۱)(-۱)\rightarrow۰\geq-k\rightarrow۰\leq k$ که چون $k\in N$ حکم استقرا بدیهی است

اگر $a>-۱$ در این صورت $۱+a>۰$.

حال دو طرف فرض استقرا را در $1+a$ ضرب می کنیم.

$$(1+a)^k \geq 1+ka \to (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka) \to (1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka) \ *$$

از طرفی داریم.

بدیهی

$$ka^2 \geq 0 \xrightarrow{+(1+ka+a)} 1+ka+a+ka^2 \geq 1+ka+a \to 1+a+ka+ka^2 \geq 1+ka+a$$

$$(1+a)+ka(1+a) \geq 1+(k+1)a \to (1+a)(1+ka) \geq 1+(k+1)a \ *$$

با مقایسه ی دو نتیجه ستاره دار حکم استقرا ثابت است. یعنی $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$

***

توجه کنید که گاهی لازم است مرحله ی اول استقرا از یک عدد طبیعی بیشتر از یک[۲] آغاز شود. در این صورت برای اثبات احکام از اصل استقرای تعمیم یافته کمک می گیریم.

اصل استقرای تعمیم یافته

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره ی عدد طبیعی n باشد.اگر $P(m)$ برای $m>1$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k \geq m$ درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ نیز درست است.

تمرین: ثابت کنید که به ازاء هر عدد طبیعی $n \geq 7$ رابطه ی $n! > 3^n$ همواره بر قرار است.

$P(n): n! > 3^n$

حل:

$P(7): 7! > 3^7 \to 5040 > 2187$ درست است. $p(7)$

$P(k): k! > 3^k$ فرض استقرا

$P(k+1): (k+1)! > 3^{(k+1)}$ حکم استقرا

حال دو طرف فرض را در $k+1$ ضرب می کنیم.

$$k! > 3^k \xrightarrow{\times(k+1)} (k+1)k! > (k+1)3^k \to (k+1)! > (k+1)3^k \ *$$

از طرفی داریم:

$$k \geq 7 \to k+1 > 7 \to (k+1) > 3 \xrightarrow{\times 3^k} (k+1)3^k > 3 \times 3^k \to (k+1)3^k > 3^{k+1} \ *$$

۲. این عدد را پایه ی استقرا می نامند.

و با مقایسه ی نتایج ستاره دار واضح است که $(k+۱)!>۳^{(k+۱)}$

توجه:

۱ : برای هر سه عدد حقیقی c و b و a اگر $b>c$ و $a>b$ آنگاه $a>c$.

۲ : برای هر عدد طبیعی k همواره داریم $(k+۱)\times k!=(k+۱)!$

....

تمرین: حکم زیر را در نظر بگیرید.

$$۲^n<n!$$

الف : پایه ی استقرا را تعیین کنید.(مرحله ای که استقرا از آن شروع می شود.)

ب : به کمک اصل استقرای ریاضی این حکم را اثبات کنید.

تمرین: با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که

الف) تعداد قطر های هر n ضلعی محدب برابر $D(n)=\dfrac{n(n-۳)}{۲}$است.

ب) مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی محدب برابر $S(n)=(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است.

توجه:

$(k-۱)$ + تعداد قطر های k ضلعی = تعداد قطر های $k+۱$ ضلعی

یعنی : $$D(k+۱)=D(k)+(k-۱)$$

۱۸۰+ مجموع زاویه های k ضلعی = مجموع زاویه های $k+۱$ ضلعی

یعنی $$S(k+۱)=S(k)+۱۸۰$$

....

۲- اصل لانه کبوتری (اصل حجره ها)

یکی دیگر از اصول مهم در ریاضیات که در حل بسیاری از مسائل کار برد دارد اصل لانه کبوتری یا اصل دیریکله است.این اصل به صورت زیر است.

اگر m کبوتر و n لانه وجود دارد.در صورتی که تعداد کبوتر ها بیش از تعداد لانه ها باشد($m>n$) در این صورت حداقل یک لانه وجود خواهد داشت که حاوی بیش از یک

تمرین: ۸ نفر در یک میهمانی شرکت کرده اند،ثابت کنید که حد اقل ۲ نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده اند.

حل: می دانیم که هر هفته ۷ روز است، اگر میهمانان را به منزله ی کبوتر و روز های هفته را به منزله ی لانه در نظر بگیریم وچون ۷ < ۸ پس با توجه به تقسیم زیر و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نفر در یک روز هفته متولد شده اند.

۸ | ۷
۷ | ۱
۱

۱+۱=۲

تمرین: از ۱۸ نفردانش آموز یک کلاس ثابت کنید که حد اقل ۳ نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده اند.

حل: می دانیم که هر هفته ۷ روز است، اگر دانش آموزان را به منزله ی کبوتر و روز های هفته را به منزله ی لانه در نظر بگیریم وچون ۷ < ۱۸ پس با توجه به تقسیم زیر و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۳ نفر در یک روز هفته متولد شده اند.

۱۸ | ۷
۱۴ | ۲
۴

۲+۱=۳

تمرین: از ۴۰۰ دانش آموز یک مدرسه،حداقل چند نفر در یک ماه سال متولد شده اند؟چرا؟

حل: می دانیم که هر سال۱۲ماه است، اگر دانش آموزان را به منزله ی کبوتر و ماه ها ی سال را به منزله ی لانه در نظر بگیریم وچون ۱۲ < ۴۰۰ پس با توجه به تقسیم زیر و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۳۴ نفر در یک ماه سال متولد شده اند.

۴۰۰ | ۱۲
۳۹۶ | ۳۳
۴

۳۳+۱=۳۴

تمرین: ثابت کنید که اگر S یک زیر مجموعه ی ۷ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اگر اعضای S را بر عدد ۶ تقسیم کنیم،حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقی مانده ی یکسان خواهند بود.

حل: اعضای مجموعه ی S را به منزله ی کبوتر واعضای مجموعه ی باقی مانده های تقسیم بر۶ را لانه فرض می کنیم. چون ۶ < ۷ پس طبق اصل لانه کبوتر و با توجه به تقسیم زیر واضح است که حداقل دو عضو از مجموعه ی S دارای باقی مانده ی برابر خواهند بود.

۷ | ۶
۶ | ۱
۱

۱+۱=۲

توجه: مجموعه ی باقی مانده های تقسیم اعداد صحیح بر عدد ۶ می شود.

{۰,۱,۲,۳,۴,۵}

تمرین: ثابت کنید که اگر S یک زیر مجموعه ی ۹ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اگر اعضای S را بر عدد ۴ تقسیم کنیم،دست کم سه عضو از این مجموعه دارای باقی مانده ی یکسان خواهند بود.

تمرین: نشان دهید هر زیر مجموعه از مجموعه ی $S=\{۱,۲,۳,...,۹\}$ که دارای ۶ عضو باشد،حداقل دو عضو داردکه مجموع آنها برابر ۱۰ است.

حل: هر یک از مجموعه های $\{۴,۶\}$و $\{۳,۷\}$و $\{۲,۸\}$و $\{۱,۹\}$ (مجموع هر دو عضوآنها برابر۱۰ است.) را به منزله ی لانه و هر یک از اعضاء زیر مجموعه های ۶ عضوی را کبوتر فرض می کنیم.چون $۴<۶$ پس طبق اصل لانه کبوتری ومطابق تقسیم مقابل حداقل ۲ عضو از مجموعه ی ۶ عضوی مجموع هر دوی آنها برابر۱۰ است.

$$\begin{array}{r|l} ۶ & ۴ \\ \hline \underline{۴} & ۱ \\ ۲ & \end{array}$$

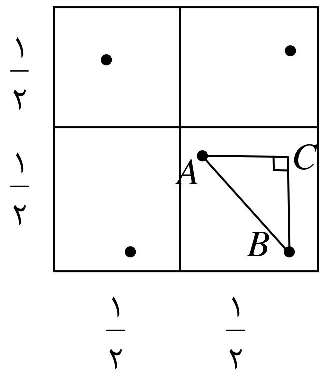
۱+۱=۲

تمرین: پنج نقطه داخل مربعی به ضلع یک سانتی متر مفروض هستند،ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

حل: اگر مربع را به چهار مربع به ضلع $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنیم و این چهار مربع را لانه و ۵ نقطه را کبوتر فرض کنیم ، چون $۴<۵$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه در یک مربع کوچک قرار می گیرند.حال طبق رابطه ی فیثاغورس داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۵ & ۴ \\ \hline \underline{۴} & ۱ \\ ۱ & \end{array}$$

۱+۱=۲



$$\begin{cases} AB^{۲}=AC^{۲}+BC^{۲} \\ AC<\frac{۱}{۲}\rightarrow AC^{۲}<\frac{۱}{۴} \\ BC<\frac{۱}{۲}\rightarrow BC^{۲}<\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\therefore\rightarrow AC^{۲}+BC^{۲}<\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\rightarrow AB^{۲}<\frac{۱}{۲}\rightarrow AB<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

یعنی حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

تمرین: پنج نقطه داخل مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع ۲ قرار دارند.ثابت کنید دست کم دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از یک است.

تمرین: ده نقطه داخل یک مربع به ضلع ۳ قرار دارند، ثابت کنید که دست کم دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از $\sqrt{۲}$ است.

تمرین: هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و۶ متر انتخاب می کنیم. ثابت کنید که حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از $۲\sqrt{۲}$ متر را دارند.

تمرین: در یک کلاس حد اقل ۶ نفر در یک روز هفته متولد شده اند،کمترین تعداد دانش آموزان این کلاس را تعیین کنید.

حل: هر یک از دانش آموزان را کبوتر و هر یک از روز های هفته را لانه فرض می کنیم.با توجه به اصل لانه کبوتر ی و با توجه به تقسیم زیر حداقل تعداد دانش آموزان این کلاس ۳۶ نفر است.

$$\begin{array}{r|l} x & ۷ \\ \hline \underline{۳۵} & ۵ \\ ۱ & \end{array}$$

$$۶-۱=۵$$

$$x=(۷\times ۵)+۱=۳۶$$

تمرین: به تعداد ۵۰ ورزشکار مرد در رشته های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهر های تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. ثابت کنید حداقل ۵ ورزشکار هم رشته و هم شهری هستند.

حل: روش اول:

هر یک از ۵۰ ورزشکار را کبوتر و هر یک از رشته های ورزشی را لانه فرض می کنیم. چون $(۳<۵۰)$ پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل ۱۷ نفر هم رشته هستند.

$$\begin{array}{r|l} ۵۰ & ۳ \\ \hline \underline{۴۸} & ۱۶ \\ ۲ & ۱۶+۱=۱۷ \end{array}$$

حال هر یک از ۱۷ ورزشکار هم رشته را کبوتر و هر یک از شهر ها را لانه فرض می کنیم. چون $(۴<۱۷)$ پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل۵ نفر از ورزشکاران هم رشته، همشهری هستند.

$$\begin{array}{r|l} ۱۷ & ۴ \\ \hline \underline{۱۶} & ۴ \\ ۱ & ۴+۱=۵ \end{array}$$

روش دوم:

هر یک از ۵۰ ورزشکار را کبوتر و هر یک از رشته – شهر های موجود $(۱۲=۴\times۳)$ را لانه فرض می کنیم.چون $(۱۲<۵۰)$ پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل ۵ نفر هم رشته و هم شهری هستند.

$$\begin{array}{r|l} ۵۰ & ۱۲ \\ \hline \underline{۴۸} & ۴ \\ ۲ & ۴+۱=۵ \end{array}$$

....

تمرین : در یک آزمون ریاضی ۱۰۲۵ نفر شرکت کرده اند.آیا حداقل دو شرکت کننده یافت می شود که حرف اول نام و حرف اول نام خانوادگی آن ها به زبان فارسی یکسان باشد؟ چرا ؟

....

تمرین: با استفاده از برهان خلف اصل لانه کبوتری را اثبات کنید.

حل: هرگاه m کبوتر و n لانه داشته باشیم بطوری که $m>n$ و در همه ی لانه ها کمتر از ۲ کبوتر وجود خواهد داشت.اگر تعداد کبوتر ها در هر لانه کمتر از ۲ باشد،مجموع کل کبوتر های جا شده در لانه ها کمتر یا مساوی n می گردد،یعنی $m \le n$ واین با فرض $m>n$ متناقض است.

....

تذکر:

۱ : اگر m تعداد کبوتر ها و n تعداد لانه ها و $m>n$ با توجه به اصل لانه کبوتری می توان گفت که دست کم یک لانه وجود دارد که در آن حداقل $\left[\frac{m}{n}\right]+۱$ کبوتر قرار می گیرد[3].

۲ : اگر m تعداد کبوتر ها و n تعداد لانه ها و $m>n$ آنگاه حداقل در یک لانه بیش از $\left[\frac{m-۱}{n}\right]$ کبوتر قرار می گیرد.

❊❊❊

۳ - منظور از نماد $[x]$ همان جزء صحیح x است.

☑ مفهوم مجموعه (Set)

مجموعه دسته ای از اشیای متمایز و کاملاً مشخص می باشد.

منظور از متمایز این است که می توان بدون تردید دو شیئی را مجزا حساب کرد و منظور از کاملاً مشخص این است که بدون تردید می توان گفت که شیئی معینی در مجموعه ی مورد نظر قرار دارد یا خیر.

مثال: هر یک از موارد زیر یک مجموعه مشخص می کند.

- ✓ اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۳
- ✓ رنگهای پرچم ایران
- ✓ مقسوم علیه های مشترک دو عدد ۱۸و۱۲
- ✓ حروف الفبای صدا دار انگلیسی
- ✓ اعداد اول

که مجموعه ی آخر بر خلاف دیگر مجموعه ها بی پایان است.

هر یک از اشیاء تشکیل دهنده ی مجموعه را عضو یا عنصر (Element)آن مجموعه می نامند. مـثلاً اگـر $S = \{۲,۳,۴,۵\}$ در این صورت ۴ یکی از عضو های مجموعه ی S است ($۴ \in S$) ولی ۱ عضو S نیست ($۱ \notin S$) .

توجه: هر یک از موارد زیر یک مجموعه مشخص نمی کنند،زیرا شامل یک واژه ی تعریف نشده و نامشخص می باشند و لذا نمی توان اشیاء را کاملاً شناخت و یا متمایز نمود.

- ✓ دانش آموزان زرنگ کلاس
- ✓ دبیران خوش فکر آموزشگاه
- ✓ دانش آموزان باسلیقه ی آموزشگاه

☑ نمایش مجموعه

طبق قرار داد مجموعه را با یکی از حروف بزرگ الفبای لاتین نامگذاری می کنندو بصورت های زیر نمایش می دهند.

۱. نمایش تفصیلی یا گسترده (از طریق نام بردن اعضاء)

۲. نمایش توصیفی (از طریق بیان خاصیتی برای اعضاء)

۳. نمایش هندسی یا نمودار وِن (از طریق رسم شکل هندسی بسته)

اگر در نمایش توصیفی از علائم ریاضی استفاده شود، می گوییم که مجموعه را با **علائم ریاضی** نمایش داده ایم. در این نمایش اگر $P(x)$ خاصیتی برای اعضاء مجموعه ی S باشد،در این صورت می نویسند:

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

تمرین: مجموعه ی اعداد طبیعی وفرد کمتر از ۱۰ را به صورت های فوق نمایش دهید.

حل:

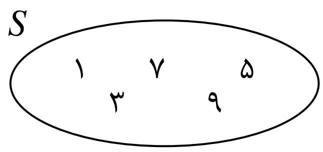
۱. نمایش تفصیلی

$$S = \{۱,۳,۵,۷,۹\}$$

۲. نمایش توصیفی

$$S = \{x \mid x \in N, x < ۱۰, x = ۲k - ۱\}$$

۳. نمایش هندسی



تمرین: مجموعه ی $S = \{۳ - \sqrt{۲}, ۳ + \sqrt{۲}\}$ را با علائم ریاضی نمایش دهید.

***

☑ مجموعه ی تهی

اگر مجموعه ای دارای عضو نباشد،آنرا تهی می نامند. مانند مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۱۱

مجموعه ی تهی را با نماد Φ یا $\{\}$ نمایش می دهند.

☑ تساوی دو مجموعه

دو مجموعه را مساوی گویند، هرگاه در هیچ کدام عضوی نباشد که در دیگری یافت نشود.یعنی اعضاء هـر دو یکـسان باشـد.

مانند دو مجموعه ی زیر

$$\left.\begin{array}{r} A=\{۱,۲,۳\} \\ B=\{۱,۱,۳,۲,۲,۲\} \end{array}\right\} \rightarrow A=B$$

توجه کنید که در یک مجموعه تغییر ترتیب عضوها و همچنین تکرار آنها مجموعه را تغییر نمی دهد.

تمرین: مجموعه های زیر مساویند،مقدار b و a را بیابید.

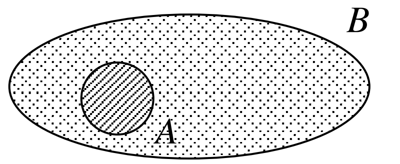
$$A=\{۱,\{a\},\{a,b\}\}$$
$$B=\{\{۳\},\{۲,۳\},۱\}$$

***

☑ زیر مجموعه ی یک مجموعه

مجموعه ی A را زیر مجموعه ی B گویند، هرگاه هر عضو A در مجموعه ی B باشد.یعنی

$$(\forall x\in A \rightarrow x\in B) \Leftrightarrow A\subseteq B$$

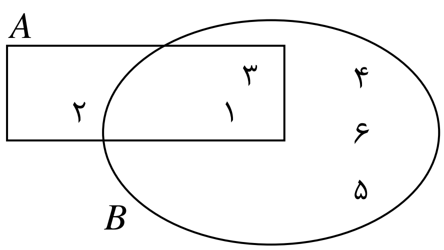


مثلاً مجموعه ی $A=\{۲,۳,۵\}$ زیر مجموعه ی،مجموعه ی $B=\{۱,۲,۳,....,۹\}$ می باشد.

اگـر عـضوی در مجموعــه ی A باشـد کـه در مجموعــه ی B نباشـد،

می گویند A زیر مجموعه ی B نیست و می نویسند $A \not\subseteq B$.

مثلاً در نمودار مقابل مجموعه ی A زیر مجموعه ی B نمی باشد.



قضیه ی۱) هر مجموعه زیر مجموعه ی خودش است.($S \subseteq S$)

اثبات:(به روش برهان خلف) فرض کنیم که $S \subseteq S$ نباشد.یعنی اینکه در مجموعه ی S عضوی وجود دارد که در خود مجموعه ی S نباشد و این تناقض است.پس حکم درست است نه خلاف آن.

***

قضیه ی۲) مجموعه ی تهی زیر مجموعه ی تمام مجموعه ها است .($\Phi \subseteq S$)

اثبات:(به روش برهان خلف) فرض کنیم که $\Phi \subseteq S$ نباشد.یعنی اینکه در مجموعه ی Φ عضوی وجود دارد که در خود مجموعه ی S نباشد.این تناقض است چون مجموعه ی تهی فاقد عضو است.پس حکم درست است نه خلاف آن.

***

قضیه ی۳) اگر $B \subseteq C$ و $A \subseteq B$ آنگاه $A \subseteq C$ است.

اثبات :

$$\left\langle \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow (x \in A \to x \in B) \\ B \subseteq C \Rightarrow (x \in B \to x \in C) \end{array} \right. \Rightarrow (x \in A \to x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$

***

قضیه ی۴) اگر $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$ آنگاه $A = B$ است.

اثبات:

$$\left\langle \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow (x \in A \to x \in B) \\ B \subseteq A \Rightarrow (x \in B \to x \in A) \end{array} \right.$$

لذا تمام عضو های دو مجموعه ی B **و** A یکسان است یعنی $A = B$.

***

قضیه ی۵) تعداد کل زیر مجموعه های هر مجموعه ی n عضوی برابر ۲^n است.

اثبات: بدیهی است که هر عضو مجموعه ی S دو حالت (یا عضو زیر مجموعه هست یا نیست)دارد. پس بنا به اصل شمارش(ضرب)،تعداد کل حالت ها (زیر مجموعه ها) می شود.

$$\underbrace{۲ \times ۲ \times ... \times ۲}_{n \text{ مرتبه}} = ۲^n$$

نتیجه: مجموعه ی تهی تنها دارای یک زیر مجموعه است.

$$n = ۰ \Rightarrow ۲^{n} = ۲^{۰} = ۱$$

❋❋❋

قضیه ی ۶) تعداد زیر مجموعه های r عضوی از یک مجموعه ی nعضوی برابر $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$ است.

اثبات: بدیهی است که تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعـه ی n عـضوی، بـا تعـداد انتخـاب هـای r عـضو از nعضو($r \le n$) است.تعداد این انتخاب ها برابر $\binom{n}{r}$ می باشد.

❋❋❋

تمرین: مجموعه ی $S = \{x, y, \varphi\}$ را در نظر بگیرید.

الف) تعداد کل زیر مجموعه ها ی مجموعه ی Sرا بیابید.

ب) تمام زیر مجموعه های این مجموعه را بنویسید.

❋❋❋

تمرین: تمام زیر مجموعه ها ی مجموعه ی $A = \{x \mid x^{۲} - ۴x = ۵\}$ را بنویسید.

❋❋❋

تمرین: مجموعه ی $B = \{\{\varphi\}, \varphi, ۵, \{\varphi, \{۰\}\}\}$داده شده است.

الف) مجموعه ی Bچند زیر مجموعه ی دو عضوی دارد؟

ب) تمام زیرمجموعه های دو عضوی این مجموعه را مشخص کنید.

❋❋❋

تمرین: تعداد زیر مجموعه ها ی یک مجموعه ی kعضوی ۲۲۴مجموعه بیشتر از تعداد زیـر مجموعـه هـای مجموعـه ی $k - ۳$ عضوی است،مقدار k را بیابید.

حل:

۲۲۴+ تعداد زیر مجموعه های مجموعه ی $k - ۳$ عضوی= تعداد زیر مجموعه های k عضوی

$$\to ۲^k = ۲^{k-۳} + ۲۲۴$$
$$\to ۲^k - ۲^{k-۳} = ۲۲۴$$
$$\to ۲^{k-۳} \times ۲^۳ - ۲^{k-۳} = ۲۲۴$$
$$\to ۲^{k-۳}(۸-۱) = ۲۲۴ \to ۲^{k-۳} = \frac{۲۲۴}{۷} \to ۲^{k-۳} = ۳۲ \to ۲^{k-۳} = ۲^۵$$
$$\to k-۳ = ۵ \to k = ۸$$

***

تمرین: اگر $n \in N$ باشد، ثابت کنید که $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۳}+\ldots+\binom{n}{n} = ۲^n$

حل: واضح است که تعداد کل زیر مجموعه های r عضوی از یک مجموعه ی n عضوی برابر تعداد کل زیر مجموعه ها ی مجموعه است. یعنی:

+ تعداد زیر مجموعه های دو عضوی+ تعداد زیر مجموعه های یک عضوی + تعداد زیر مجموعه ها ی هیچ عضوی

تعداد کل زیر مجموعه ها= زیر مجموعه های nعضوی + ...

لذا
$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۳}+\ldots+\binom{n}{n} = ۲^n$$

***

☑ زیر مجموعه های محض

هر زیر مجموعه از یک مجموعه که با خود آن مجموعه برابر نباشد را زیر مجموعه ی محض (اکید یا سره) مـی نامنـد. مـثلاً: مجموعه ی $A = \{۱,۳\}$ یک زیر مجموعه ی سره ی مجموعه ی $B = \{۱,۲,۳\}$است، زیرا $A \neq B$

نتیجه:

۱. هر زیر مجموعه ی n عضوی دارای $۲^n - ۱$ زیر مجموعه ی سره است.

۲. مجموعه ی تهی زیر مجموعه ی سره ندارد.

***

تمرین: تعداد زیر مجموعه های اکید یک مجموعه ی k عضوی به تعداد ۲۳ زیر مجموعه بیشتر از تعداد کل زیر مجموعـه های مجموعه ی $k-۲$ عضوی است.مقدار k را بیابید.

حل:

$$۲^{k}-۱=۲^{k-۲}+۲۳\to ۲^{k}-۲^{k-۲}=۲۴\to ۲^{k-۲}\times ۴-۲^{k-۲}=۲۴$$
$$\to ۲^{k-۲}\times(۴-۱)=۲۴\to ۲^{k-۲}\times ۳=۲۴\to ۲^{k-۲}=۸\to ۲^{k-۲}=۲^{۳}$$
$$\to k-۲=۳\to k=۵$$

***

☑ مجموعه ی توانی

مجموعه ی شامل تمام زیر مجموعه های یک مجموعه را مجموعه ی توانی آن مجموعه می نامند. به عبارت ساده تر اگر X یک مجموعه باشد، مجموعه ی کلیه ی زیر مجموعه های X را مجموعه ی توانی آن می نامند و آن را با $P(X)$ نمایش می دهند.

تمرین: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ مجموعه ی توانی A را بنویسید.

حل:

$$P(A)=\{\Phi,\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱,۲,۳\}\}$$

نتیجه: اگر X یک مجموعه ی n عضوی باشد، در این صورت $P(X)$ دارای ۲^{n} عضو است.

***

☑ مجموعه ی متناهی

هر مجموعه که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد را مجموعه ی متناهی می نامند و اگر چنین نباشد مجموعه را نامتناهی می گویند.

مثلاً: مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی متناهی است ولی مجموعه ی اعداد طبیعی نامتناهی است.

تعداد عضوهای یک مجموعه ی متناهی مانند S را عدد اصلی (کاردینال) آن مجموعه می نامند و به یکی از صورت های $n(S)$ یا $|S|$ نمایش می دهند.

تذکر:

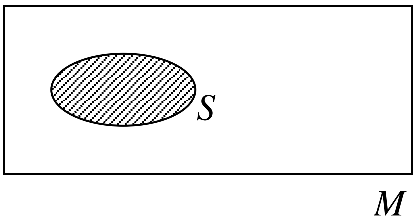
۱. مجموعه ی $\{x\in R\,|\,۰<x<۱\}$ نامتناهی است.

۲. مجموعه ی تهی بنا به تعریف متناهی است.

***

☑ مجموعه ی مرجع

هر مجموعه که مجموعه های دیگر زیر مجموعه ی آن فرض می شوند را مجموعه ی مرجع (جهانی) می نامند و آن را با M یا U نمایش می دهند.



$S \subseteq M$

تمرین: هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) اگر $S \subseteq \Phi$ آنگاه $S = \Phi$.

ب) اگر $M \subseteq S$ آنگاه $S = M$.

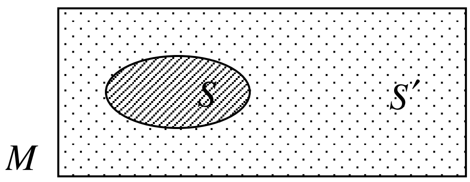
حل: الف) $\begin{cases} S \subseteq \Phi \\ \Phi \subseteq S \end{cases} \to S = \Phi$ ب) $\begin{cases} M \subseteq S \\ S \subseteq M \end{cases} \to S = M$

***

☑ مجموعه ی متمم

اگر M مجموعه ی مرجع و S زیر مجموعه ای از آن باشد، در این صورت اعضایی که در مرجع باشند ولی درمجموعه ی S نباشند،مجموعه ای تشکیل می دهند که آنرا متمم S می نامند.

متمم یک مجموعه مانند S را با S' یا S^c یا $\bar{S}$ نمایش می دهند.



$S \subseteq M$
$S' \subseteq M$

$$\boxed{S' = \{x \mid x \in M \wedge x \notin S\}}$$

تمرین: اگر $M = \{x \in Z \mid |x| \le ۳\}$ مجموعه ی مرجع باشد، متمم مجموعه ی $A = \{x \mid x^۳ - x = ۰\}$ را بنویسید.

نتیجه:

۱. متمم مجموعه ی مرجع،مجموعه ی تهی است. $(M' = \Phi)$

۲. متمم مجموعه ی تهی ،مجموعه ی مرجع است. $(\Phi' = M)$

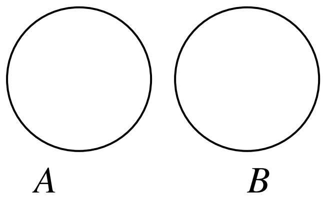
تمرین: ثابت کنید که متمم متمم هر مجموعه برابر همان مجموعه است. ($(S')' = S$)

حل:

$$(S')' = \{x \mid x \in M \wedge x \notin S'\} = \{x \mid x \in M \wedge x \in S\} = S$$

***

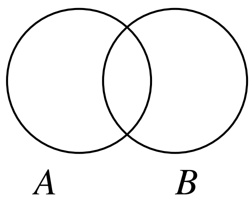
☑ مجموعه های مجزا



دو مجموعه ی غیر تهی را جدا از هم (مجزا) گویند،هرگاه هیچ عضو مـشترکی نداشـته باشند.

برای مثال مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی فرد و مجموعـه ی اعـداد طبیعـی یـک رقمی زوج جدا از هم هستند.

نتیجه : هر مجموعه ومتمم آن جدا از هم هستند.



اگر دو مجموعه جدا از هم نباشند(دارای عضو یا اعضای مشترک) آنها را متقاطع می گویند.

برای مثال اعداد طبیعی یک رقمی زوج واعداد اول یک رقمی مجزا نیستند.

توجه: در رسم نمودار ون برای دو مجموعه آنها را متقاطع رسم می کنیم. مگر اینکه خلاف آن مشخص شده باشد.

تمرین:اگر B و A دو مجموعه از مجموعه ی مرجع Mباشند و $A \subseteq B$ آنگاه $B' \subseteq A'$

حل:

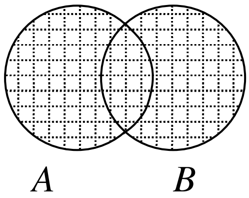
$$x \in B' \rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \rightarrow x \in A'$$
$$\therefore B' \subseteq A'$$

***

☑ جبر مجموعه ها

الف) اجتماع (اتحاد)

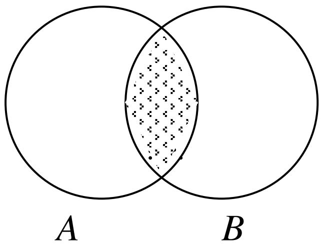
اگر B و A دو مجموعه باشند، $A \bigcup B$ مجموعه ی عضو هایی است که یا عضو A یا عضو B یا هر دو باشند.



$$\boxed{A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$$

ب) اشتراک (مقطع)

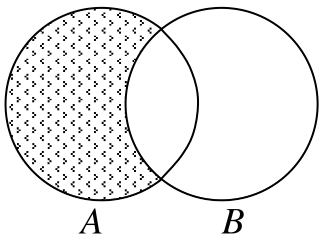
اگر B و A دو مجموعه باشند، $A \bigcap B$ مجموعه ی عضو هایی است که هم عضو A وهم عضو B باشند.



$$\boxed{A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$

ج) تفاضل

اگر B و A دو مجموعه باشند، $A - B$ مجموعه ی عضو هایی است که در A باشند ولی در B نباشند.



$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}}$$

تمرین: اگر $A = \{x \in N \mid x < ۵\}$ و $B = \{x \in N \mid ۲ < x \leq ۵\}$ مجموعه های زیر را بنویسید.

۱) $A \bigcup B$ ۲) $A \bigcap B$ ۳) $A - B$ ۴) $B - A$

نتیجه:

۱. هر مجموعه زیر مجموعه ی اجتماعش با مجموعه ی دلخواه دیگر است .

$$A \subseteq (A \bigcup B) \text{ و } B \subseteq (A \bigcup B)$$

۲. اشتراک دو مجموعه زیر مجموعه ی هر یک از آنها است.

$$(A \bigcap B) \subseteq A \text{ و } (A \bigcap B) \subseteq B$$

۳. اشتراک دو مجموعه زیر مجموعه ی اجتماع آنها است.

$$(A \bigcap B) \subseteq (A \bigcup B)$$

۴. تفاضل دو مجموعه زیر مجموعه ی اولی است. $(B-A)\subseteq B$ و $(A-B)\subseteq A$

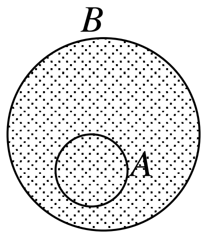
۵. اجتماع و اشتراک دو مجموعه خاصیت جابجایی دارند ولی تفاضل آنها جابجایی نیست.

$A\bigcup B=B\bigcup A$ و $A\bigcap B=B\bigcap A$ و $A-B\neq B-A$

۶. اشتراک هر دو مجموعه ی جدا از هم B و A تهی است. $A\bigcap B=\Phi$

۷. دو مجموعه ی $A-B$ و $B-A$ جدا از هم هستند.یعنی $(A-B)\bigcap(B-A)=\Phi$

***



قضیه ی ۷) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\bigcup B=B$ و برعکس

فرض : $A\subseteq B$ حکم : $A\bigcup B=B$

اثبات :

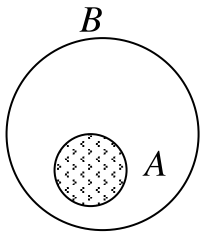
$$x\in A\bigcup B\rightarrow(x\in A\vee x\in B)\xrightarrow{A\subseteq B}(x\in B\vee x\in B)\rightarrow x\in B\Rightarrow A\bigcup B\subseteq B$$

از طرفی می دانیم که $B\subseteq A\bigcup B$ لذا : $A\bigcup B=B$

....

فرض : $A\bigcup B=B$ حکم: $A\subseteq B$

اثبات : $$A\subseteq A\bigcup B\xrightarrow{A\bigcup B=B}A\subseteq B$$



قضیه ی ۸) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\bigcap B=A$ و برعکس

فرض : $A\subseteq B$ حکم : $A\bigcap B=A$

اثبات :

$$x\in A\rightarrow(x\in A\wedge x\in A)\xrightarrow{A\subseteq B}(x\in A\wedge x\in B)\rightarrow x\in A\bigcap B\Rightarrow A\subseteq A\bigcap B$$

از طرفی می دانیم که $A\bigcap B\subseteq A$ لذا : $A\bigcap B=A$

....

فرض : $A\bigcap B=A$ حکم: $A\subseteq B$

اثبات : $$A\bigcap B\subseteq B\xrightarrow{A\bigcap B=A}A\subseteq B$$

***

نتیجه: اگر S یک مجموعه از مجموعه ی مرجع M باشد،در این صورت احکام زیر همواره برقرار هستند.

۱. $S \bigcup S = S$	۴. $S \bigcup M = M$	۷. $S \bigcap S' = \Phi$	۱۰. $S - S = \Phi$
۲. $S \bigcup \Phi = S$	۵. $S \bigcap S = S$	۸. $S \bigcap M = S$	۱۱. $S - \Phi = S$
۳. $S \bigcup S' = M$	۶. $S \bigcap \Phi = \Phi$	۹. $M - S = S'$	۱۲. $S - S' = S$

نتیجه: اگر B و A دو مجموعه باشند، در این صورت احکام زیر همواره برقرار هستند.

۱. $A \bigcup (A \bigcup B) = A \bigcup B$	۴. $A \bigcap (A \bigcap B) = A \bigcap B$
۲. $A \bigcap (A \bigcup B) = A$	۵. $A \bigcup (A - B) = A$
۳. $A \bigcup (A \bigcap B) = A$	۶. $A \bigcap (A - B) = A - B$

قضیه ی ۹) اگر B و A دو مجموعه از مجموعه ی مرجع M باشند،آنگاه $A - B = A \bigcap B'$ **(قضیه ی تفاضل اشتراک)**

اثبات :

$$x \in A - B \rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \rightarrow (x \in A \wedge x \in B') \rightarrow x \in A \bigcap B'$$
$$\Rightarrow A - B \subseteq A \bigcap B'$$

$$x \in A \bigcap B' \rightarrow (x \in A \wedge x \in B') \rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \rightarrow x \in A - B$$
$$\Rightarrow A \bigcap B' \subseteq A - B$$

$$\therefore \ A - B = A \bigcap B'$$

***

تمرین: قضیه ی فوق را با استفاده از نمودار ون نیز ثابت کنید.

***

قضیه ی ۱۰) اگر C و B و A سه مجموعه باشند،آنگاه

خاصیت شرکت پذیری اجتماع	الف) $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$
خاصیت شرکت پذیری اشتراک	ب) $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$
خاصیت توزیع پذیری اجتماع نسبت به اشتراک	ج) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$
خاصیت توزیع پذیری اشتراک نسبت به اجتماع	د) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

اثبات:

الف:

$$
\begin{aligned}
x\in A\bigcup(B\bigcup C) &\to x\in A\vee x\in(B\bigcup C)\\
&\to x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)\\
&\to(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C\\
&\to x\in(A\bigcup B)\vee x\in C)\\
&\to x\in(A\bigcup B)\bigcup C
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow A\bigcup(B\bigcup C)\subseteq(A\bigcup B)\bigcup C$$

$$
\begin{aligned}
x\in(A\bigcup B)\bigcup C &\to x\in(A\bigcup B)\vee x\in C\\
&\to(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C\\
&\to x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)\\
&\to x\in A\vee x\in(B\bigcup C)\\
&\to x\in A\bigcup(B\bigcup C)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow(A\bigcup B)\bigcup C\subseteq A\bigcup(B\bigcup C)$$

$$\therefore\quad A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$$

....

ب: ....

$$
\begin{aligned}
x\in A\bigcap(B\bigcap C) &\to x\in A\wedge x\in(B\bigcap C)\\
&\to x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)\\
&\to(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C\\
&\to x\in(A\bigcap B)\wedge x\in C)\\
&\to x\in(A\bigcap B)\bigcap C
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow A\bigcap(B\bigcap C)\subseteq(A\bigcap B)\bigcap C$$

$$
\begin{aligned}
x\in(A\bigcap B)\bigcap C) &\to x\in(A\bigcap B)\wedge x\in C\\
&\to(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C\\
&\to x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)\\
&\to x\in A\wedge x\in(B\bigcap C)\\
&\to x\in A\bigcap(B\bigcap C)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow(A\bigcap B)\bigcap C\subseteq A\bigcap(B\bigcap C)$$

$$\therefore\quad A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$$

ج : ....

$$x\in A\cup(B\cap C)\rightarrow x\in A\vee x\in(B\cap C)$$
$$\rightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$$
$$\rightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$$
$$\rightarrow(x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)$$
$$\rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$\rightarrow(x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)$$
$$\rightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$$
$$\rightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$$
$$\rightarrow x\in A\vee x\in(B\cap C)$$
$$\rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$$
$$\Rightarrow(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$$

$$\therefore\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

د : ....

$$x\in A\cap(B\cup C)\rightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C)$$
$$\rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)$$
$$\rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$$
$$\rightarrow(x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)$$
$$\rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$\Rightarrow A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$\rightarrow(x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)$$
$$\rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$$
$$\rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)$$
$$\rightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C)$$
$$\rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$$
$$\Rightarrow(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$$

$$\therefore\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

❋❋❋

نکته: برای هر دو مجموعه ی B و A داریم

۱. $x \notin (A \bigcup B) \to x \notin A \wedge x \notin B$

۲. $x \notin (A \bigcap B) \to x \notin A \vee x \notin B$

***

قضیه ی ۱۱) اگر B و A دو مجموعه از مجموعه ی مرجع M باشند،آنگاه

۱. $(A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$ **۲.** $(A \bigcap B)' = A' \bigcup B'$

تساوی های فوق به **قوانین دمورگان** موسومند.

اثبات :

:۱

$$x \in (A \bigcup B)' \to x \notin (A \bigcup B) \to x \notin A \wedge x \notin B \to x \in A' \wedge x \in B' \to x \in A' \bigcap B'$$
$$\Rightarrow (A \bigcup B)' \subseteq A' \bigcap B'$$

$$x \in A' \bigcap B' \to x \in A' \wedge x \in B' \to x \notin A \wedge x \notin B \to x \notin (A \bigcup B) \to x \in (A \bigcup B)'$$
$$\Rightarrow A' \bigcap B' \subseteq (A \bigcup B)'$$

$$\therefore\ (A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$$

: ۲

$$x \in (A \bigcap B)' \to x \notin (A \bigcap B) \to x \notin A \vee x \notin B \to x \in A' \vee x \in B' \to x \in A' \bigcup B'$$
$$\Rightarrow (A \bigcap B)' \subseteq A' \bigcup B'$$

$$x \in A' \bigcup B' \to x \in A' \vee x \in B' \to x \notin A \wedge x \notin B \to x \notin (A \bigcap B) \to x \in (A \bigcap B)'$$
$$\Rightarrow A' \bigcup B' \subseteq (A \bigcap B)'$$

$$\therefore (A \bigcap B)' = A' \bigcup B'$$

***

تمرین: قوانین دمورگان را با استفاده از نمودار ون ثابت کنید.

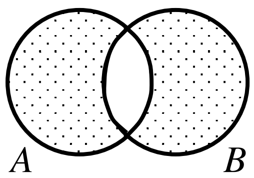
تمرین : به کمک جبر مجموعه های ثابت کنید که $(A - B)' = B \bigcup A'$

***

☑ تفاضل متقارن دو مجموعه

تفاضل متقارن دو مجموعه ی B و A که با $A\Delta B$ نشان داده می شود، مجموعه ی عضوهایی است که دقیقاً به یکـی از دو مجموعه ی A یا B تعلق دارند.یعنی:

$$A\Delta B=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$$



تمرین: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۴,۵,۶\}$ مجموعه ی $A\Delta B$ را مشخص کنید.

***

نتیجه:

۱ : تفاضل متقارن دو مجموعه خاصیت جابجایی دارد. یعنی $A\Delta B=B\Delta A$

اثبات:

$$A\Delta B=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=(B\bigcup A)-(B\bigcap A)=B\Delta A$$

۲ : برای هر دو مجموعه ی B و A تساوی زیر همواره برقرار است

$$A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A)$$

اثبات:

$$\begin{aligned}A\Delta B&=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcap B)'\\&=[A\bigcap(A\bigcap B)']\bigcup[B\bigcap(A\bigcap B)']=[A\bigcap(A'\bigcup B')]\bigcup[B\bigcap(A'\bigcup B')]\\&=[(A\bigcap A')\bigcup(A\bigcap B')]\bigcup[(B\bigcap A')\bigcup(B\bigcap B')]\\&=[\Phi\bigcup(A\bigcap B')]\bigcup[(B\bigcap A')\bigcup\Phi]=(A\bigcap B')\bigcup(B\bigcap A')=(A-B)\bigcup(B-A)\end{aligned}$$

۳- برای هر دو مجموعه ی B و A تساوی زیر همواره برقرار است

$$A\Delta B=(A\bigcap B')\bigcup(A'\bigcap B)$$

اثبات:

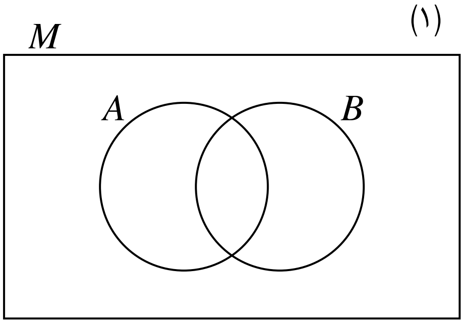
$$A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A)=(A\bigcap B')\bigcup(B\bigcap A')=(A\bigcap B')\bigcup(A'\bigcap B)$$

***

☑ حل چند تمرین:

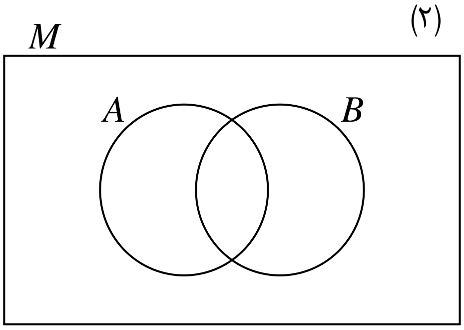
۱ : در هر مورد مجموعه ی داده شده را هاشور بزنید.

(۱)



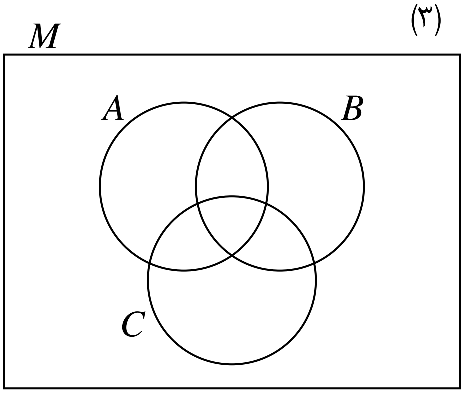
$(A-B)\bigcup(B-A)$

(۲)



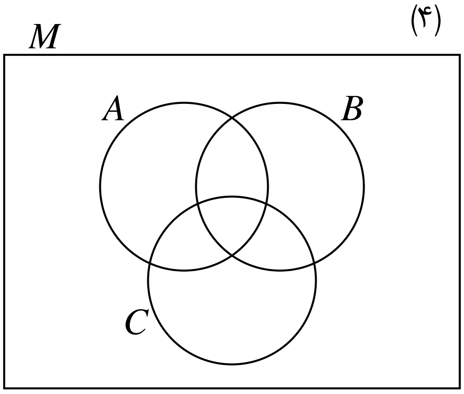
$(A\Delta B)'$

(۳)



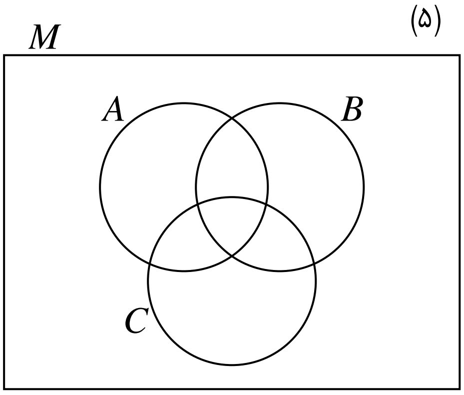
$(A\bigcup B)\bigcap C$

(۴)



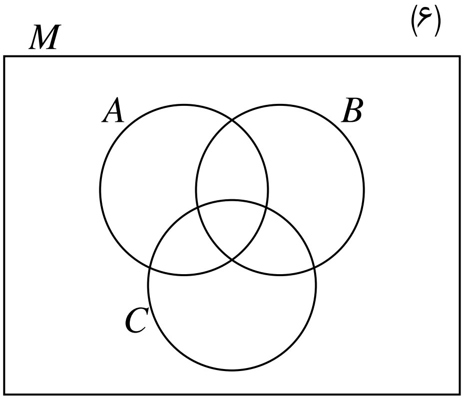
$A-(B\bigcap C)$

(۵)



$(A\bigcup B)-C$

(۶)



$(A\bigcup B)\bigcap C'$

۲ : به کمک نمودار ون تساوی زیر را ثابت کنید. $A'-B'=B-A$

۳ : اگر $B\subseteq A$ و $B\subseteq A'$ ثابت کنید که $B=\Phi$

۴ : هر یک از احکام زیر را به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید.

الف) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ب) $(A - B) \cap B = \Phi$

ج) $A' - B' = B - A$

د) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

هـ) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$

و) $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

ز) $(A \cup B) \cap (C - A)' = A \cup (B - C)$

ح) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

اثبات:

الف)

$$
\begin{aligned}
&(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' \\
&= (A \cap B) \cap (A' \cup C') = [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C')] \\
&= [(A \cap A') \cap B] \cup [(A \cap (B \cap C')] = (\Phi \cap B) \cup [(A \cap (B - C)] \\
&= \Phi \cup [A \cap (B - C)] = A \cap (B - C)
\end{aligned}
$$

ب)

$$(A - B) \cap B = (A \cap B') \cap B = A \cap (B' \cap B) = A \cap \Phi = \Phi$$

ج)

$$A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

د)

$$A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \Phi \cup (A \cap B) = A \cap B$$

هـ)

$$
\begin{aligned}
(A - B) \cap C &= (A \cap B') \cap C = A \cap (B' \cap C) \\
&= A \cap (C \cap B') = (A \cap C) \cap B' = (A \cap C) - B
\end{aligned}
$$

و)

$$
\begin{aligned}
&(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap (B' \cap C') \\
&= (A \cap B' \cap C') \cup (B \cap B' \cap C') = [(A - B) \cap C'] \cup \Phi = (A - B) - C
\end{aligned}
$$

ز)

$$
\begin{aligned}
&(A \cup B) \cap (C - A)' = (A \cup B) \cap (C \cap A')' = (A \cup B) \cap [C' \cup (A')'] = \\
&= (A \cup B) \cap (C' \cup A) = (A \cup B) \cap (A \cup C') = A \cup (B \cap C') = A \cup (B - C)
\end{aligned}
$$

ح)

$$(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)=[(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)]-[(A\bigcap B)\bigcap(A\bigcap C)]$$
$$=[(A\bigcap(B\bigcup C)]-[(A\bigcap(B\bigcap C)]=A\bigcap[(B\bigcup C)-(B\bigcap C)]=A\bigcap(B\Delta C)$$

۴ : به کمک نمودار ون ثابت کنید که

$$(A\Delta B)'=(A\bigcup B)'\bigcup(A\bigcap B)$$

۵ : به کمک جبر مجموعه ها تساوی های زیر را ثابت کنید.

ج) $A\Delta A=\Phi$

الف) $A\bigcap(A-B)'=A\bigcap B$

د) $A'\Delta B'=A\Delta B$

ب) $A\Delta A'=M$

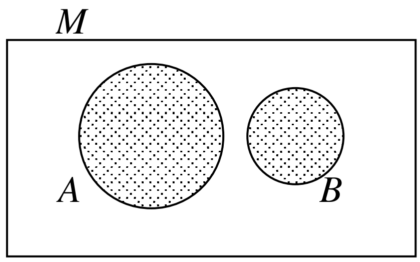
***

☑ ویژگی های مجموعه های متناهی و شمارش پذیر

قضیه ی ۱۲) برای هر دو مجموعه ی متناهی و جدا از هم B و A داریم.

$$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)$$

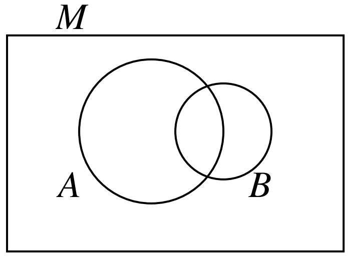
اثبات :



چون دو مجموعه ی B و A متناهی و جدا از هم هستند، لذا هیچ عضو مشترکی ندارند،پس $n(A)+n(B)$ با $n(A\bigcup B)$ برابر است.

نتیجه ۱: برای هر دو مجموعه ی متناهی B و A داریم

$$n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$$



اثبات : چون دو مجموعه ی $A-B$ و $A\bigcap B$ جدا از هم هستند، لذا طبق قضیه ی قبل داریم:

$$n[(A-B)\bigcup(A\bigcap B)]=n(A-B)+n(A\bigcap B)$$

از طرفی چون $(A-B)\bigcup(A\bigcap B)=A$ پس :

$$n(A)=n(A-B)+n(A\bigcap B)$$

در نتیجه : $n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$

نتیجه ۲: برای هر دو مجموعه ی متناهی B و A داریم

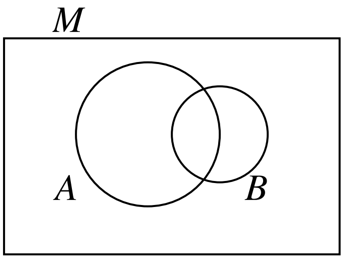
$$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$$

اثبات : چون دو مجموعه ی $A-B$ و B جدا از هم هستند، لذا طبق قضیه ی قبل داریم:

$$n[(A-B)\bigcup B]=n(A-B)+n(B)$$

از طرفی چون $(A-B)\bigcup B=A\bigcup B$ همچنین

$n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$ پس :



$$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$$

***

تمرین : تعداد اعداد طبیعی سه رقمی بخش پذیر بر ۷ را تعیین کنید.

توجه: برای تعیین تعداد اعداد بخش پذیر بر k ابتدا اولین و آخرین عدد بخش پذیر بر k را تعیین نموده و آنها را به ترتیب a و b می نامیم ، سپس فرمول[1] زیر را به کار می گیریم.

$$n=\frac{b-a}{k}+۱$$

***

تمرین: مجموعه ی مرجع $M=\{۱,۲,۳,...,۱۰۰۰\}$ داده شده است. مطلوبست تعیین:

الف: تعداد اعضای بخش پذیر بر۳ — ب) تعداد اعضای بخش پذیر بر۵

ج) تعداد اعضای بخش پذیر بر ۳و۵ (بخش پذیر بر ۱۵) — د) تعداد اعضای بخش پذیر بر ۳یا ۵

هـ) تعداد اعضایی که بر ۳ بخش پذیر باشند ولی بر ۵ بخش پذیر نباشند.(فقط بخش پذیر بر۳)

و) تعداد اعضایی که بر ۵ بخش پذیر باشند ولی بر ۳ بخش پذیر نباشند. (فقط بخش پذیر بر۵)

[1] . اگر ابتدای مجموعه عدد ۱ باشد. برای تعیین تعداد اعداد بخش پذیر بر k می توان فرمول زیر را نیز به کار برد.

$$n=[\frac{N}{k}]$$

که در آن N تعداد کل اعضای مجموعه است.

تمرین: تعداد اعضای مجموعه ی $M = \{11,12,13, \dots ,99\}$ که بر ۴ یا ۱۰ بخش پذیر باشند، را بیابید.

***

تمرین: در یک میهمانی ۴۵ نفر مرد شرکت کرده اند و بجز۲ نفر هر کدام از آنها کفش مشکی یا کت قهوه ای پوشـیده انـد. در صورتی که بدانیم ۳۰ نفر کفش مشکی و ۲۳ نفر کت قهوه ای پوشیده اند،تعیین کنید:

الف) چند نفر کفش مشکی و کت قهوه ای پوشیده اند. ب) چند نفر فقط کفش مشکی پوشیده اند.

ج) چند نفر فقط کت قهوه ای مشکی پوشیده اند. د) چند نفر یا کفش مشکی یا کت قهوه ای پوشیده اند.

تمرین: ثابت کنید که اگر S یک مجموعه ی دلخواه و متناهی از مجموعه ی متناهی و مرجع M باشد، در این صورت:

$$n(S') = n(M) - n(S)$$

اثبات:

$$n(S') = n(M - S) = n(M) - n(M \cap S) = n(M) - n(S)$$

تمرین: با توجه به تمرین قبل حساب کنید که چند نفر کفش مشکی نپوشیده اند؟

تمرین: در یک کلاس ۳۷ نفری ۱۷ نفر عضو کتابخانه و ۲۵ نفر عضو بسیج دانش آموزی هستند. اگر ۳ نفر عضو هیچ یک از این گروه ها نباشند، تعیین کنید چند نفر هم عضو کتابخانه و هم عضو بسیج هستند.

تمرین: در یک کنفرانس ۴۵ نفری ۳۰ نفر کلاه دارند و ۲۱ نفر عینک زده اند که از این بین ۸ نفر هم کلاه و هم عینک دارند. مطلوب است تعیین افرادی که:

الف: عینکی هستند ولی کلاه ندارند. ب: فقط یکی از کلاه یا عینک را دارند. ج: نه کلاه دارند و نه عینک

***

تمرین: تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است. از این افراد ۳۷ نفر مرد و ۲۰ نفر برای عمل جراحی بستری شده اند. اگـر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی مرد باشند، در این صورت چند نفر از ۶۳ بیمار نه مرد و نه برای عمل جراحی بستری شده اند.

***

تمرین: برای هر سه مجموعه ی متناهی C و B و A ثابت کنید که:

$$n(A\bigcup B\bigcup C)$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$$

اثبات:

$$n(A\bigcup B\bigcup C)=n[(A\bigcup B)\bigcup C]=n(A\bigcup B)+n(C)-n[(A\bigcup B)\bigcap C]$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)+n(C)-n[(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)]$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)+n(C)-[n(A\bigcap C)+n(B\bigcap C)-n[(A\bigcap C)\bigcap(B\bigcap C)]]$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)+n(C)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$$

تمرین: در یک آزمایشگاه فنی اتومبیل پس از انجام آزمایش روی ماشین ها دریک روز نتایج زیر بدست آمد.

۲۰ دستگاه سالم هستند. ۱۲ دستگاه نقص ترمز دارند. ۵ دستگاه نقص چراغ دارند. ۸ دستگاه نقص فرمان دارند. ۵ دستگاه نقص ترمز و فرمان دارند. ۲ دستگاه نقص ترمز و چراغ دارند. ۳ دستگاه نقص چراغ و فرمان دارند.۱ دستگاه هر سه نقص را دارد. حساب کنید، در این روز از چند دستگاه آزمایش به عمل آمده است.

***

☑ افراز یک مجموعه

اگر A یک مجموعه ی غیر تهی باشد،گوییم که مجموعه ی A به n زیر مجموعه ی A_n و...و $A_۲$ و $A_۱$ افراز شده است، هرگاه:

الف) هیچ یک از زیر مجموعه ها تهی نباشد. یعنی $\forall i \quad ۱ \le i \le n \quad \to A_i \ne \Phi$

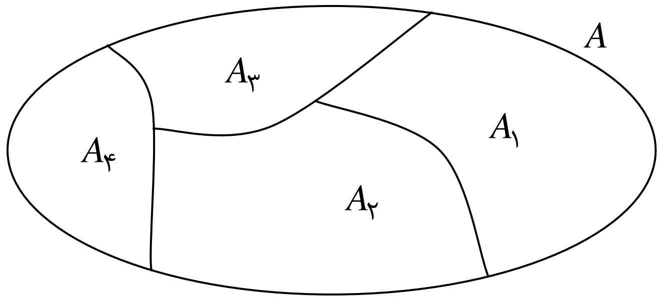
ب) اشتراک هر دو زیر مجموعه ی متمایز تهی باشد. یعنی

$$\forall i, j \quad ۱ \le i \le n, ۱ \le j \le n \quad \xrightarrow{i \ne j} A_i \cap A_j = \Phi$$

ج) اجتماع تمام زیر مجموعه ها با مجموعه ی اصلی برابر باشد. یعنی $A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$

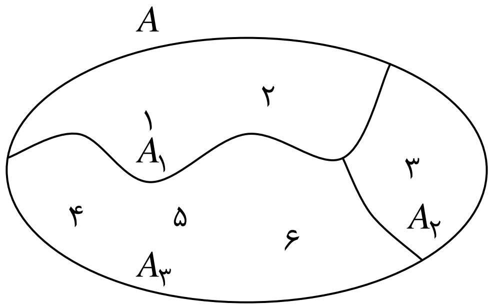
به شکل مقابل توجه کنید.

این شکل مجموعه ی A را به ۴ زیر مجموعه افراز کرده است.



مثال: اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ آنگاه مجموعه های زیر یک افراز از مجموعه ی A است.

$$A_1 = \{۱,۲\}, A_2 = \{۳\}, A_3 = \{۴,۵,۶\}$$



تمرین: تمام افراز های ممکن برای مجموعه $B = \{a,b,c\}$ را بنویسید.

حل: این مجموعه دارای ۵ افراز متفاوت است.

۱) $\{a\},\{b\},\{c\}$ ۲) $\{a\},\{b,c\}$ ۳) $\{b\},\{a,c\}$

۴) $\{c\},\{a,b\}$ ۵) $\{a,b,c\}$

***

☑ زوج مرتب

اگر b و a دو شیئ باشند به طوری که ترتیب قرار گرفتن آنها مهم باشد، دراین صورت (a,b)را یک زوج مرتب می نامند.

عدد a را مؤلفه ی اول و عدد b را مؤلفه ی دوم می گویند.

نتیجه: دو زوج مرتب وقتی مساویند که مؤلفه های نظیر به نظیر آنها یکسان باشد.

$$(a,b)=(c,d)\leftrightarrow a=c,b=d$$

تمرین: در هر مورد مقدار y و x را طوری بیابید که دو زوج مرتب داده شده مساوی باشند.

۱) $(۲x-y,۷)=(-۱,x+۲y)$

۲) $(x+y,۶)=(-۵,xy)$

۳) $((x-۱)^۲+(y+۳)^۲,۳)=(۰,۳)$

۴) $(x^۲+y^۲+۴x-۶y+۱۳,۱)=(۰,۱)$

۵) $(x^۲+y^۲,۶)=(۱۳,xy)$

۶) $(x^۲-۵x+۵,۱)=(-۱,۱)$

***

☑ ضرب دکارتی دو مجموعه

اگر Bو A دو مجموعه باشند، $A\times B$ مجموعه ی زوج های مرتبی است که مؤلفه ی اول آنها عضو A و مؤلفه ی دوم آنها عضو Bباشند.

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$$

تمرین: اگر $B=\{۲,۵\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ باشد.مجموعه های زیر را تعیین کرده و نمودار هر یک از آنها را رسم کنید.

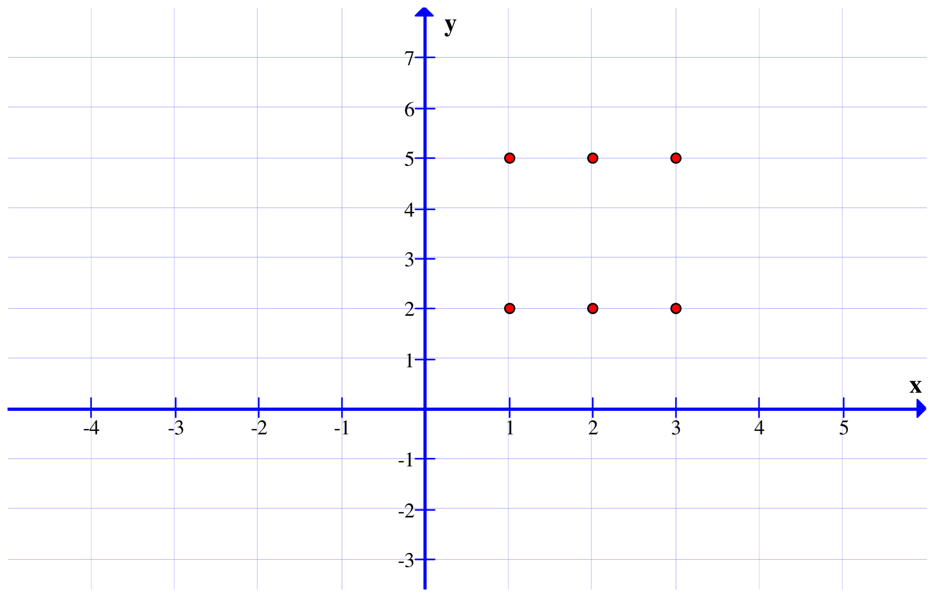
۱) $A\times B=$ ۲) $B\times A=$ ۳) $A^۲=$

حل:

۱)

A \ B	۲	۵
۱	(۱و۲)	(۱و۵)
۲	(۲و۲)	(۲و۵)
۳	(۳و۲)	(۳و۵)

$$A\times B=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵)\}$$



نتیجه: اگر B و A دو مجموعه باشند، در این صورت:

۱) $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

۲) $n(A^{۲})=n(A).n(A)$

۳) $A\times B\neq B\times A$

۴) $A\times \Phi=\Phi\times A=\Phi$

تمرین: اگر $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $A=\{۱,۴,۵\}$ باشد.مجموعه ی $A\times B-B^{۲}$ را با عضوهایش بنویسید.

تمرین: اگر $n(A^{۲}\cap B^{۲})=۱$ و $n(A)=۴$ باشد.تعداد زیر مجموعه های مجموعه ی $A^{۲}-B^{۲}$ را بدست آورید.

تمرین: ثابت کنیدکه اگر $A\times B=\Phi$ آنگاه حداقل یکی از دو مجموعه B یا A تهی است و برعکس

$$A\times B=\Phi\leftrightarrow A=\Phi\vee B=\Phi$$

اثبات:

حالت اول $\quad A\times B=\Phi\rightarrow A=\Phi\vee B=\Phi$

اثبات (به روش برهان خلف) اگر $A \neq \Phi$ و $B \neq \Phi$ باشد،آنگاه وجود دارد $x \in A$ و $y \in B$ بطوری که $(x, y) \in A \times B$ و این مخالف فرض است.

حالت دوم $\quad A = \Phi \vee B = \Phi \rightarrow A \times B = \Phi$

اگر $A = \Phi$ و $B \neq \Phi$ باشد،آنگاه وجود دارد $A \times B = \Phi \times B = \Phi$

اگر $A \neq \Phi$ و $B = \Phi$ باشد،آنگاه وجود دارد $A \times B = A \times \Phi = \Phi$

اگر $A = \Phi$ و $B = \Phi$ باشد،آنگاه وجود دارد $A \times B = \Phi \times \Phi = \Phi$

***

تمرین: حکم مقابل را ثابت کنید.

$$\begin{cases} A \times B = A \times C \\ A \neq \Phi \end{cases} \rightarrow B = C$$

اثبات:

$$y \in B \xrightarrow{A \neq \Phi \rightarrow \exists x \in A} (x, y) \in A \times B \xrightarrow{A \times B = A \times C} (x, y) \in A \times C \rightarrow y \in C$$
$$\Rightarrow B \subseteq C$$

$$y \in C \xrightarrow{A \neq \Phi \rightarrow \exists x \in A} (x, y) \in A \times C \xrightarrow{A \times C = A \times B} (x, y) \in A \times B \rightarrow y \in B$$
$$\Rightarrow C \subseteq B$$

$$\therefore B = C$$

***

☑ آشنایی با مجموعه های پیوسته و ویژگی های آنها

تاکنون بیشتر با مجموعه هایی آشنا شدیم که بین هر دو عضو متوالی آنها عضو دیگری در مجموعه وجود ندارد. این چنین مجموعه هایی را گسسته می نامند. مانند

$$A = \{x \in N \mid ۱ < x \leq ۵\} = \{۲,۳,۴,۵\}$$

یک مجموعه می تواند پیوسته باشد، یعنی بین هر دو عضو آن عضو دیگری نیز قرار دارد. مانند

$$A = \{x \in R \mid ۱ < x \leq ۵\} = (۱,۵]$$

این مجموعه ها می توانند از نوع یک بعدی (طولی) ، دو بعدی(سطحی) و یا سه بعدی(حجمی) نیز باشند.

مانند:

۱- مجموعه ی $A=\{x\in R \mid ۱\le x<۳\}$ که پیوسته و یک بعدی است.

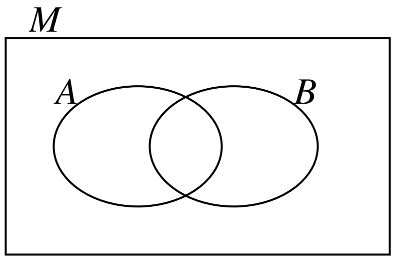
۲- مجموعه ی $B=\{(x,y)\in R^۲ \mid x^۲+y^۲<۴, ۱\le x<۳\}$ که پیوسته و دو بعدی است.

تمرین : با فرض $A_i=[-i^۲,i)$ حاصل $\bigcap_{i=۱}^{۳} A_i$ را تعیین کنید.

تمرین: اگر $A_i=[-i,۴-i]$ و $i\in\{۱,۲,۳,۴\}$ مجموعه های $\bigcap_{i=۱}^{۴} A_i$ و $\bigcup_{i=۱}^{۴} A_i$ را مشخص کنید.

تمرین : اگر $A_n=\{x\in N \mid x>۲^n\}$ آنگاه $\bigcup_{n=۱}^{۴} A_n-\bigcap_{n=۱}^{۴} A_n$ را تعیین کنید.

توجه : مجموعه ها ی پیوسته دارای ویژگی هایی مشابه ویژگی های مجموعه ها ی گسسته نیز می باشند. برای مثال در مجموعه های دو بعدی داریم:



۱) $S(A\bigcup B)=S(A)+S(B)-S(A\bigcap B)$

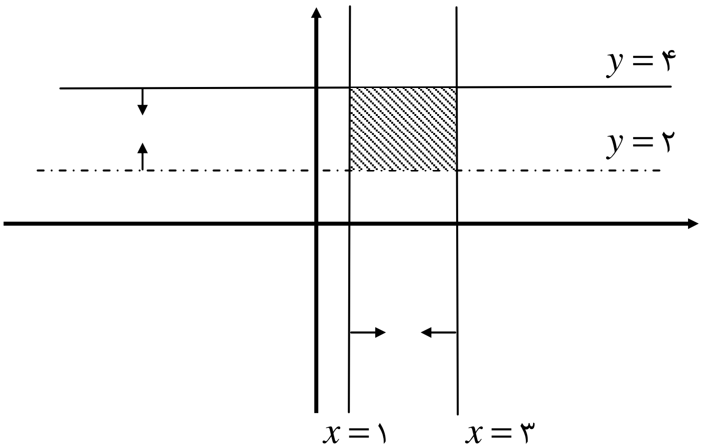
۲) $S(A-B)=S(A)-S(A\bigcap B)$

۳) $S(A')=S(M)-S(A)$

تمرین: اگر $A=\{x\in R \mid ۱\le x\le ۳\}$ و $B=\{x\in R \mid ۲<x\le ۴\}$ مجموعه ی $A\times B$ را با نماد ریاضی نوشته و سپس نمودار آن را در صفحه نمایش دهید.

حل:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}=\{(x,y)\mid ۱\le x\le ۳, ۲<y\le ۴\}$$



تمرین: حاصل ضرب دکارتی هر یک از مجموعه های زیر را در دستگاه محور های مختصات رسم کنید.

$$۱)\quad A=(-۱,۲] \text{ و } B=[-۳,۲] \qquad (A\times B)=?$$

$$۲)\quad A=(۱,+\infty) \text{ و } B=(۱,۳] \qquad (B\times A)=?$$

$$۳)\quad A=[۱,۲] \text{ و } B=(-\infty,۲] \qquad (A\times B)=?$$

***

توجه:

با توجه با آنچه که تاکنون گفته شد برای رسم نمودار یک مجموعه از نوع پیوسته ی سطحی، به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱: معادله ی متناظر با هر نا معادله را تشکیل می دهیم.

۲: نمودار هر معادله ی بدست آمده را رسم می کنیم. (در صورتی که نا معادله ی متناظر آن شامل مساوی باشد نمودار کامل و اگر شامل مساوی نباشد نمودار بصورت نقطه چین رسم می شود.)

توجه: هر معادله به شکل $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ معادله ی یک دایره به مرکز (α,β) و شعاع R می باشد.

نتیجه: هر معادله به شکل $x^۲+y^۲=R^۲$ دایره ای به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع R می باشد.

۳: برای تعیین ناحیه ی مجموعه ی جواب برای هر نامعادله ، یک نقطه ی دلخواه روی صفحه انتخاب نموده و مختصات آنرا در نامعادله قرار می دهیم. واضح است که نتیجه ی بدست آمده از این کار یا درست یا نادرست خواهد بود. اگر این نتیجه درست باشد،لازم است ناحیه ی شامل آن نقطه را قبول کنیم و اگر نادرست باشد،لازم است ناحیه ای را قبول کنیم که شامل آن نقطه نباشد.

تذکر:اگر مجموعه ی داده شده شامل دو یا چند نامعادله باشد، پس از رسم نمودار هریک و تعیین ناحیه ها ، اشتراک ناحیه ها را قبول کنید.

تمرین: نمودار مجموعه ی زیر را رسم کنید.

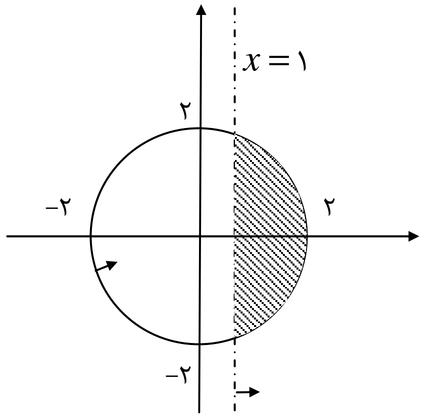
$$A=\{(x,y)\in R^۲ \mid x^۲+y^۲\le ۴, x>۱\}$$

حل:

$$x^۲ + y^۲ \le ۴ \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x^۲ + y^۲ = ۴ \\ ۰ + ۰ \le ۴ \end{array} \right.$$

معادله ی هم ارز: دایره به مرکز(۰و۰) وشعاع ۲

نقطه ی (۰,۰)



$$x > ۱ \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = ۱ \\ ۰ > ۱ \end{array} \right.$$

معادله ی هم ارز

نقطه ی (۰,۰)

تمرین: در هر یک از موارد زیر نمودار مجموعه ی داده شده را در صفحه نمایش دهید.

۱) $A = \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ > ۱\}$

۲) $B = \{(x, y) \mid y \ge x^۲, ۱ \le y < ۲\}$

۳) $C = \{(x, y) \mid |۲x + y| < ۱\}$

۴) $D = \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ \le ۵, [x] = ۱\}$

۵) $E = \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ > ۴, x^۲ + y^۲ \le ۵\}$

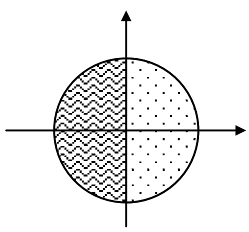
۶) $F = \{(x, y) \mid x \ge ۱, y > ۳\}$

تمرین: اگر $A = \{x \mid -۲ \le x < ۲\}$ و $B = \{x \mid -۱ \le x \le ۱\}$ نمودار $A^۲ - B^۲$ را رسم کنید.

تمرین: اگر $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le ۴\}$ و $B = \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ \le ۴\}$ نمودار $A - B$ را رسم کنید.

تمرین : نشان دهید که مجموعه ی $A = \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ \le ۱\}$ به دو زیر مجموعه ی زیر افراز شده است؟

$A_1 = \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ \le ۱, x \ge ۰\}$ و $A_2 = \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ \le ۱, x < ۰\}$



☑ رابطه

اگر A و B دو مجموعه ی دلخواه و R مجموعه ای از زوج های مرتب باشد ، بطوری که مولفه های اول زوج های مرتب R عضو مجموعه ی A و مولفه های دوم زوج های مرتب آن عضو مجموعه ی B باشند، یعنی $R \subseteq A \times B$. در این صورت گویند R رابطه ای از A در B است.[1]

اگر $R \subseteq A \times A$ در این صورت می گویند، رابطه ی R روی A است.

مثال : اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۲,۳,۵,۶\}$ در این صورت هر یک از مجموعه های زیر رابطه ای از A در B است.

$$R_۱ = \{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۳),(۲,۲),(۳,۳)\}$$

$$R_۲ = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳),(۲,۲)\}$$

$$R_۳ = \{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۳)\}$$

که در تمام موارد مجموعه ی داده شده زیر مجموعه ی $A \times B$ است.

تمرین: اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۲,۳,۴,۵\}$ در این صورت رابطه ای از B در A بنویسیدکه به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$R = \{(x,y) \mid x \in B, y \in A, x \le y\}$$

حل: در ابتدا $B \times A$ را تعیین می کنیم و سپس زیر مجموعه ای از آن را می نویسیم که در آن $x \le y$ باشد.

B \ A	۱	۲	۳
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)

$$\therefore\ R = \{(۲,۲),(۲,۳),(۳,۳)\}$$

---

[1] . هر مجموعه از زوج های مرتب را یک رابطه می نامند.

تمرین: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۵\}$ در این صورت رابطه ای از A در B بنویسید که به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$R=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B, x^۲+y^۲\leq ۲۰\}$$

حل: در ابتدا $A\times B$ را تعیین می کنیم و سپس زیر مجموعه ای از آن را می نویسیم که در آن $x^۲+y^۲\leq ۲۰$ باشد.

A \ B	۲	۳	۵
۱	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۵)
۲	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۵)
۳	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۵)

$$\therefore\ R=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳)\}$$

***

تمرین: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ در هر مورد رابطه ای روی A بنویسید که به صورت زیر تعریف شده باشد.

الف) $R_۱=\{(x,y)\mid x>y\}$

ب) $R_۲=\{(x,y)\mid y=x+۱\}$

ج) $R_۳=\{(x,y)\mid x^۲+y^۲\geq ۱۰\}$

د) $R_۴=\{(x,y)\mid x=۲\}$

هـ) $R_۵=\{(x,y)\mid \ x\mid y\}$

و) $R_۶=\{(x,y)\mid \ ۲\mid x-y\}$

توجه: منظور از نماد $a\mid b$ یعنی b بر a بخش پذیر است.

حل: در ابتدا $A\times A$ را تعیین می کنیم و سپس در هر مورد زیر مجموعه ای از آن را با توجه به تعریف رابطه تعیین می کنیم.

A \ A	۱	۲	۳
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)

الف) $R_۱ = \{(۲,۱),(۳,۱),(۳,۲)\}$

ب) $R_۲ = \{(۱,۲),(۲,۳)\}$

ج) $R_۳ = \{(۱,۳),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$

د) $R_۴ = \{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳)\}$

هـ) $R_۵ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۱,۳),(۳,۳)\}$

و) $R_۶ = \{(۱,۱),(۳,۱),(۲,۲),(۱,۳),(۳,۳)\}$

***

توجه : اگر $(x,y)\in R$ باشد در این صورت می نویسند : xRy

برای مثال اگر داشته باشیم $R=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳)\}$ در این صورت $(۲,۳)\in R$ را به صورت $۲R۳$ نیز می نویسند.

***

تعریف : مجموعه ی مؤلفه های اول یک رابطه را دامنه و مجموعه ی مؤلفه های دوم آنرا برد می نامند.

$$\text{دامنه } R = \{x \mid (x,y)\in R\}$$

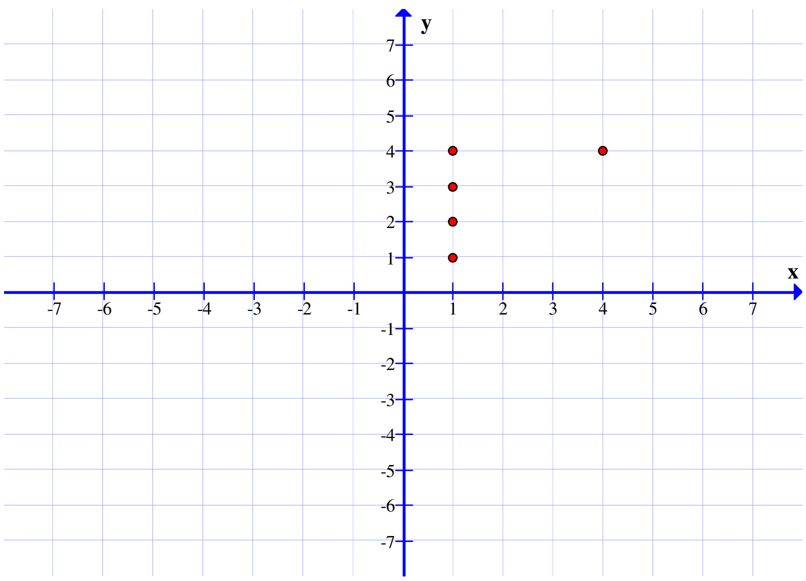
$$\text{برد } R = \{y \mid (x,y)\in R\}$$

تمرین: اگر $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $A=\{۱,۴,۵\}$ باشد.

در این صورت رابطه ی $R=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B, x\le y\}$ را با عضوهایش بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

حل :

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۴,۴)\}$$

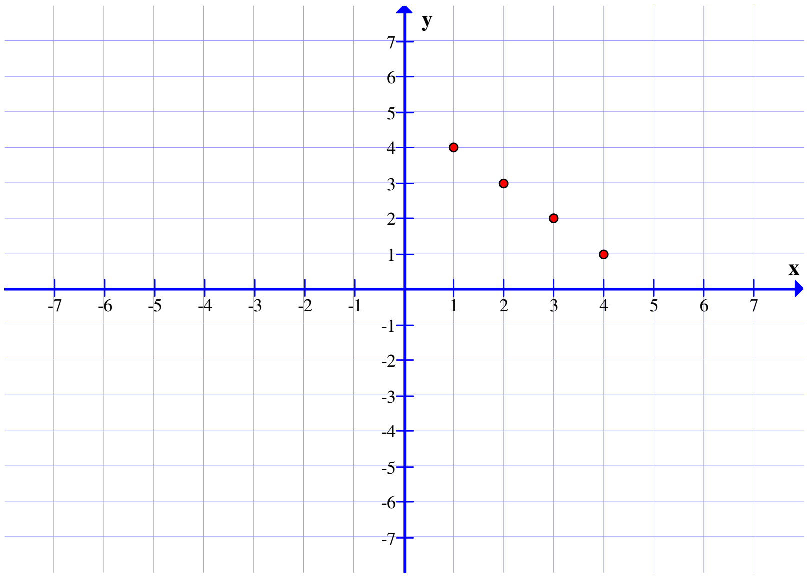


تمرین: اگر $R=\{(x,y)\mid x+y=۵\}$ رابطه ای روی N باشد.

رابطه ی R را با عضوهایش نوشته و سپس نمودار آن را رسم کنید.

حل :

$$R=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$$



تمرین: هر یک از رابطه های زیر روی R تعریف شده اند ، نمودار هر یک را رسم کنید.

۱) $R_1=\{(x,y)\mid x\le y\}$

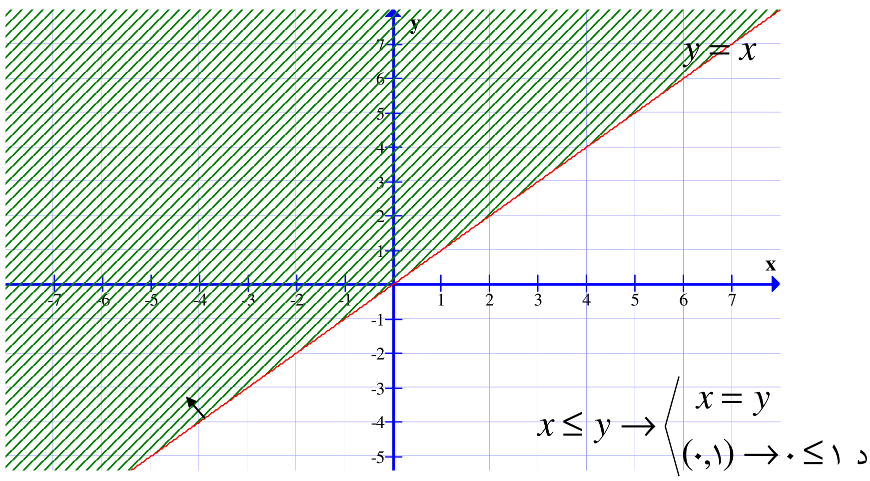
۲) $R_2=\{(x,y)\mid |x|>|y|\}$

۳) $R_3=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le ۱\}$

۴) $R_4=\{(x,y)\mid x\ge y^۲\}$

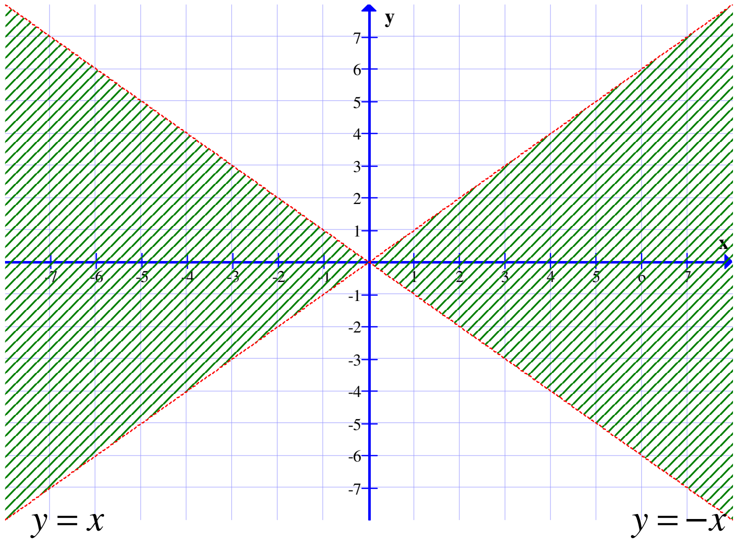
حل :

۱ :



:۲

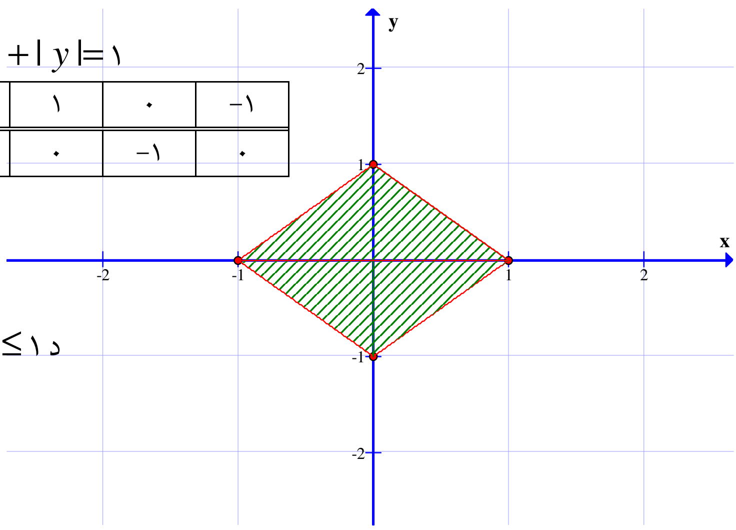
$$|x|>|y|\left\langle \begin{array}{l} |x|=|y| \to \left\langle \begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right. \\ (۱,۰) \to ۱>۰ \text{ د} \\ (-۱,۰) \to ۱>۰ \text{ د} \end{array}\right.$$



:۳

$|x|+|y|=۱$

x	۰	۱	۰	−۱
y	۱	۰	−۱	۰



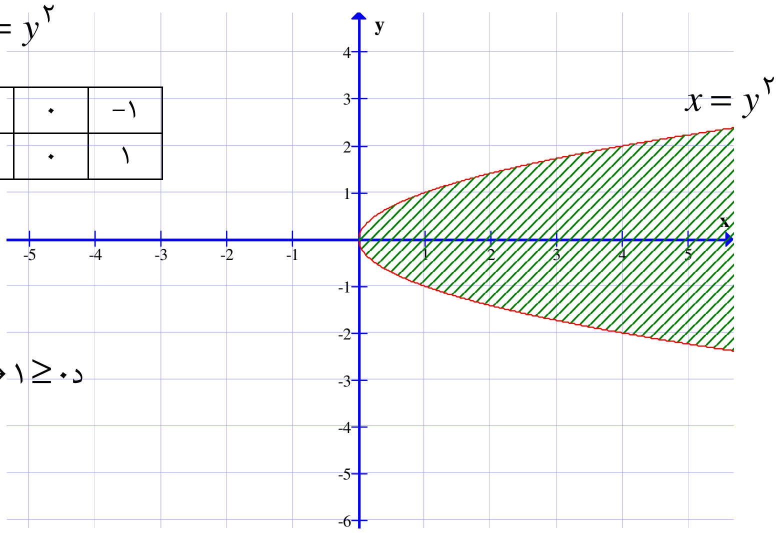
$|x|+|y|\leq ۱$

$(۰,۰) \to ۰+۰ \leq ۱$ د

:۴

$x=y^۲$

y	۱	۰	−۱
x	۱	۰	۱



$x \geq y^۲$

$(۱,۰) \to ۱ \geq ۰$ د

تمرین: اگر $B=\{(۱,۲),(۰,۱),(-۱,۳)\}$ و $A=\{(۱,۳),(۰,۱)\}$ ، و رابطه ی R از A در B به صورت زیر تعریف شده است.

$$(x,y)R(z,t)\leftrightarrow x^{۲}+y=z^{۲}+t$$

در این صورت رابطه ی R را با عضوهایش بنویسید.

حل :

$R\subseteq A\times B\to (x,y)\in A \ , \ (z,t)\in B$

$(x,y)\in A$	$(z,t)\in B$	$x^{۲}+y=z^{۲}+t$	نتیجه
$(۱,۳)$	$(۱,۲)$	$(۱)^{۲}+۳=(۱)^{۲}+۲$	نادرست
$(۱,۳)$	$(۰,۱)$	$(۱)^{۲}+۳=(۰)^{۲}+۱$	نادرست
$(۱,۳)$	$(-۱,۳)$	$(۱)^{۲}+۳=(-۱)^{۲}+۳$	درست
$(۰,۱)$	$(۱,۲)$	$(۰)^{۲}+۱=(۱)^{۲}+۲$	نادرست
$(۰,۱)$	$(۰,۱)$	$(۰)^{۲}+۱=(۰)^{۲}+۱$	درست
$(۰,۱)$	$(-۱,۳)$	$(۰)^{۲}+۱=(-۱)^{۲}+۳$	نادرست

لذا : $R=\{((۰,۱),(۰,۱)),((۱,۳),(-۱,۳))\}$

***

رابطه ی انعکاسی (بازتابی)

رابطه ی R روی A را انعکاسی گویند، هرگاه به ازای هر $x\in A$ همواره داشته باشیم $(x,x)\in R$

مثال : اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ در این صورت رابطه ی زیر روی A انعکاسی است.

$$R_{۱}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳)\}$$

ولی رابطه ی زیر انعکاسی نیست. زیرا $(۳,۳)\notin R_{۲}$

$$R_{۲}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

***

تمرین : رابطه ی زیر روی $A=\{۱,۲,۳\}$ تعریف شده است. ثابت کنید که این رابطه انعکاسی است.

$$R=\{(x,y) \mid x+y=۲k, k\in Z\}$$

حل:

روش اول : رابطه ی R را با عضوهایش مشخص می کنیم.

$$R=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۳),(۳,۱)\}$$

همانطور که ملاحظه می کنید به ازای هر $x\in A$ تمام زوج های مرتب (x,x) در R وجود دارند، لذا این رابطه انعکاسی است.

روش دوم:

$$\forall x\in A \xrightarrow{?} (x,x)\in R$$
$$\forall x\in A \to x+x=۲x \xrightarrow{x\in A, A\subseteq Z \to x=k} x+x=۲k \to (x,x)\in R$$

***

رابطه ی تقارنی

در صورتی که از $(x,y)\in R$ بتوان نتیجه گرفت $(y,x)\in R$ در این صورت رابطه ی R روی A را تقارنی گویند.

مثال : اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ در این صورت رابطه ی زیر روی A تقارنی است.

$$R_۱=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۲,۲)\}$$

ولی رابطه ی زیر تقارنی نیست. زیرا $(۱,۲)\in R_۲$ ولی $(۲,۱)\notin R_۲$

$$R_۲=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

***

تمرین : رابطه ی زیر روی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ تعریف شده است. ثابت کنید که این رابطه تقارنی است.

$$R=\{(x,y) \mid x+y=۵\}$$

حل:

روش اول : رابطه ی R را با عضوهایش مشخص می کنیم.

$$R=\{(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

همانطور که ملاحظه می کنید به ازای هر زوج (x,y) عضو R آنگاه (y,x) نیز عضو R است.لذا این رابطه تقارنی است.

روش دوم:

$$(x,y)\in R \xrightarrow{?} (y,x)\in R$$

$$(x,y)\in R \rightarrow x+y=۵ \rightarrow y+x=۵ \rightarrow (y,x)\in R$$

***

رابطه ی تعدی (تراگذری)

در صورتی که از $(y,z)\in R$ و $(x,y)\in R$ بتوان نتیجه گرفت $(x,z)\in R$ در این صورت رابطه ی R روی A را تراگذری گویند.

مثال : اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ در این صورت رابطه ی زیر روی A تراگذری است.

$$R_۱=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۱,۳)\}$$

ولی رابطه ی زیر تراگذری نیست. زیرا $(۲,۳)\in R_۲$ و $(۱,۲)\in R_۲$ ولی $(۱,۳)\notin R_۲$

$$R_۲=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۳)\}$$

***

تمرین : رابطه ی زیر روی مجموعه ی اعداد طبیعی تعریف شده است. ثابت کنید که این رابطه تراگذری است.

$$R=\{(x,y)\mid x<y\}$$

حل:

$$(x,y)\in R,(y,z)\in R \xrightarrow{?} (x,z)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in R\rightarrow x<y\\(y,z)\in R\rightarrow y<z\end{array}\right\}\rightarrow x<z\rightarrow (x,z)\in R$$

***

رابطه ی هم ارزی

رابطه ی R روی A را هم ارزی گویند ، هرگاه

الف: انعکاسی باشد. $\forall x\in A\rightarrow (x,x)\in R$

ب : تقارنی باشد. $(x,y)\in R\rightarrow (y,x)\in R$

ج : تراگذری باشد. $(x,y)\in R,(y,z)\in R\rightarrow (x,z)\in R$

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ در این صورت رابطه ی زیر روی A انعکاسی و تقارنی و تراگذری است. لذا یک رابطه ی هم ارزی است.

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۲,۱),(۱,۳),(۳,۱)\}$$

***

تمرین : مجموعه ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ را در نظر بگیرید. روی مجموعه ی A رابطه ای بنویسید که :

۱ : تقارنی و انعکاسی باشد.

۲ : تقارنی باشد و انعکاسی نباشد.

۳ : تقارنی نباشد و انعکاسی باشد.

۴ : فقط تراگذری نباشد.

۵ : هم ارزی باشد.

۶ : هم ارزی نباشد.

***

تمرین : رابطه ی $R=\{(x,y)\mid ۳\mid x-y\}$ روی Z تعریف شده است. ثابت کنید که این رابطه هم ارزی است.

حل : می دانیم که منظور از $۳\mid x-y$ یعنی اینکه $x-y$ بر ۳ بخشپذیر است. لذا $x-y=۳k$

حال ثابت می کنیم که رابطه ی فوق هر سه خاصیت انعکاسی ، تقارنی و تراگذری را دارد.

$$\forall x\in Z \xrightarrow{?} (x,x)\in R$$
$$\forall x\in Z \to x-x=۰ \to x-x=۳\times ۰ \to ۳\mid x-x \to (x,x)\in R$$

رابطه ی R انعکاسی است.

$$(x,y)\in R \xrightarrow{?} (y,x)\in R$$
$$(x,y)\in R \to ۳\mid x-y \to x-y=۳k$$
$$\xrightarrow{\times(-۱)} -x+y=-۳k \to y-x=۳(-k) \to y-x=۳k' \to ۳\mid y-x \to (y,x)\in R$$

رابطه ی R تقارنی است.

$$(x,y)\in R,(y,z)\in R \xrightarrow{?} (x,z)\in R$$
$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in R \to ۳\mid x-y \to x-y=۳k_۱\\ (y,z)\in R \to ۳\mid y-z \to y-z=۳k_۲\end{array}\right\} \xrightarrow{+} (x-y)+(y-z)=۳k_۱+۳k_۲$$
$$\to x-z=۳(k_۱+k_۲) \to x-z=۳k \to ۳\mid x-z \to (x,z)\in R$$

رابطه ی R تراگذری است.

چون رابطه ی R انعکاسی ، تقارنی و تراگذری است ، پس هم ارزی می باشد.

***

کلاس هم ارزی

اگر R یک رابطه ی هم ارزی روی A باشد، در این صورت کلاس هم ارزی a به صورت زیر تعریف می شود.

$$[a]=\{x\in A \mid xRa\}$$

عدد a را نماینده ی کلاس هم ارزی $[a]$ می نامند.

***

تمرین : رابطه ی $R=\{(x,y)\mid ۳\mid x-y\}$ روی Z تعریف شده است.

الف: ثابت کنید که این رابطه هم ارزی است. ب : کلاس [۵] را بدست آورید.

حل :

الف : پیشتر اثبات شد.

ب :

$$[۵]=\{x\in Z\mid xR۵\}=\{x\in Z\ ۳\mid x-۵\}=\{x\in Z\mid x-۵=۳k\}$$
$$=\{x\in R\mid x=۳k+۵\}=\{\dots,-۴,-۱,۲,۵,۸,۱۱,\dots\}$$

تمرین : رابطه ی $R=\{(x,y)\mid\ x^۳-x=y^۳-y\}$ روی مجموعه ی اعداد حقیقی تعریف شده است.

اولاً: ثابت کنید که این رابطه هم ارزی است. ثانیاً : کلاس هم ارزی [۰] را مشخص کنید.

حل :

$$\forall x\in R \xrightarrow{?} (x,x)\in R$$
$$\forall x\in R \to x^۳-x=x^۳-x \to (x,x)\in R$$

رابطه ی R انعکاسی است.

$$(x,y)\in R \xrightarrow{?} (y,x)\in R$$
$$(x,y)\in R \to x^۳-x=y^۳-y \to y^۳-y=x^۳-x \to (y,x)\in R$$

رابطه ی R تقارنی است.

$$(x,y)\in R,(y,z)\in R \xrightarrow{?} (x,z)\in R$$
$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in R \to x^۳-x=y^۳-y\\ (y,z)\in R \to y^۳-y=z^۳-z\end{array}\right\}\to x^۳-x=z^۳-z \to (x,z)\in R$$

رابطه ی R تراگذری است.

چون رابطه ی R انعکاسی ، تقارنی و تراگذری است ، پس هم ارزی می باشد.

$$[\cdot] = \{x \in R \mid xR\cdot\} = \{x \in R \mid x^{۳} - x = \cdot^{۳} - \cdot\}$$
$$= \{x \in R \mid x^{۳} - x = \cdot\} = \{x \in R \mid x(x^{۲} - ۱) = \cdot\} = \{-۱, \cdot, ۱\}$$

***

بررسی رابطه ها روی فضای دو بعدی

تا کنون تمام رابطه ها را در فضا های یک بعدی بررسی کرده ایم . اکنون در پی آن هستیم که رابطه ها را در فضا های دو بعدی مانند $A^{۲}$ یا در حالت کلی $Z^{۲}$ یا $R^{۲}$ بررسی کنیم.

تعریف : رابطه ی R روی $A^{۲}$ را هم ارزی گویند، هرگاه:

الف: انعکاسی باشد. $\forall (x,y) \in A^{۲} \to (x,y)R(x,y)$

ب : تقارنی باشد. $(x,y)R(z,t) \to (z,t)R(x,y)$

ج : تراگذری باشد. $\left.\begin{matrix}(x,y)R(m,n)\\(m,n)R(z,t)\end{matrix}\right\} \to (x,y)R(z,t)$

***

تمرین: رابطه ی زیر روی $R^{۲}$ تعریف شده است ، ثابت کنید که این رابطه هم ارزی است.

$$(a,b)R(c,d) \leftrightarrow a + d = b + c$$

حل:

$$\forall (x,y) \in R^{۲} \xrightarrow{?} (x,y)R(x,y)$$
$$\forall (x,y) \in R^{۲} \to x + y = y + x \to (x,y)R(x,y)$$

رابطه ی R انعکاسی است.

$$(x,y)R(z,t) \xrightarrow{?} (z,t)R(x,y)$$
$$(x,y)R(z,t) \to x + t = y + z \to t + x = z + y \to z + y = t + x \to (z,t)R(x,y)$$

رابطه ی R تقارنی است.

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)R(m,n)\\(m,n)R(z,t)\end{array}\right\}\xrightarrow{?}(x,y)R(z,t)$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)R(m,n)\rightarrow x+n=y+m\\(m,n)R(z,t)\rightarrow m+t=n+z\end{array}\right\}\rightarrow x+n+m+t=y+m+n+z$$

$$\rightarrow x+t=y+z\rightarrow (x,y)R(z,t)$$

رابطه ی R تراگذری است.

چون رابطه ی R انعکاسی ، تقارنی و تراگذری است ، پس هم ارزی می باشد.

***

کلاس هم ارزی

اگر R یک رابطه ی هم ارزی روی $A^۲$ باشد، در این صورت کلاس هم ارزی (a,b) به صورت زیر تعریف می شود.

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in A^۲ \mid (x,y)R(a,b)\}$$

زوج (a,b) را نماینده ی کلاس هم ارزی $[(a,b)]$ می نامند.

تمرین: اگر $Z^*=Z-\{۰\}$ و رابطه ی R را روی $(Z^*)^۲$ به صورت زیر تعریف کنیم.

$$(a,b)R(c,d)\leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

الف : ثابت کنید که این رابطه هم ارزی است.

ب : کلاس هم ارزی $(۱,۱)$ را بیابید.

حل:

$$\forall (x,y)\in (Z^*)^۲\xrightarrow{?}(x,y)R(x,y)$$

$$\forall (x,y)\in (Z^*)^۲\rightarrow \frac{x}{y}=\frac{x}{y}\rightarrow (x,y)R(x,y)$$

رابطه ی R انعکاسی است.

$$(x,y)R(z,t)\xrightarrow{?}(z,t)R(x,y)$$

$$(x,y)R(z,t)\rightarrow \frac{x}{y}=\frac{z}{t}\rightarrow \frac{z}{t}=\frac{x}{y}\rightarrow (z,t)R(x,y)$$

رابطه ی R تقارنی است.

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)R(m,n)\\(m,n)R(z,t)\end{array}\right\}\xrightarrow{?}(x,y)R(z,t)$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)R(m,n)\rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{m}{n}\\(m,n)R(z,t)\rightarrow \dfrac{m}{n}=\dfrac{z}{t}\end{array}\right\}\rightarrow \frac{x}{y}=\frac{z}{t}\rightarrow (x,y)R(z,t)$$

رابطه ی R تراگذری است.

چون رابطه ی R انعکاسی ، تقارنی و تراگذری است ، پس هم ارزی می باشد.

$$[(۱,۱)]=\{(x,y)\in (Z^{*})^{۲} \mid (x,y)R(۱,۱)\}=\{(x,y)\in (Z^{*})^{۲} \mid \frac{x}{y}=\frac{۱}{۱}\}=\{(x,y)\in (Z^{*})^{۲} \mid x=y\}$$

تمرین: رابطه ی R روی $Z^{۲}$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$(a,b)R(c,d)\leftrightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}+d^{۲}$$

الف : ثابت کنید که این رابطه هم ارزی است.

ب : کلاس هم ارزی (۲,۵)را بیابید.

حل:

$$\forall (x,y)\in Z^{۲}\xrightarrow{?}(x,y)R(x,y)$$
$$\forall (x,y)\in Z^{۲}\rightarrow x^{۲}+y^{۲}=x^{۲}+y^{۲}\rightarrow (x,y)R(x,y)$$

رابطه ی R انعکاسی است.

$$(x,y)R(z,t)\xrightarrow{?}(z,t)R(x,y)$$
$$(x,y)R(z,t)\rightarrow x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}+t^{۲}\rightarrow z^{۲}+t^{۲}=x^{۲}+y^{۲}\rightarrow (z,t)R(x,y)$$

رابطه ی R تقارنی است.

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)R(m,n)\\(m,n)R(z,t)\end{array}\right\}\xrightarrow{?}(x,y)R(z,t)$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)R(m,n)\rightarrow x^{۲}+y^{۲}=m^{۲}+n^{۲}\\(m,n)R(z,t)\rightarrow m^{۲}+n^{۲}=z^{۲}+t^{۲}\end{array}\right\}\rightarrow x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}+t^{۲}\rightarrow (x,y)R(z,t)$$

رابطه ی R تراگذری است.

چون رابطه ی R انعکاسی ، تقارنی و تراگذری است ، پس هم ارزی می باشد.

$$[(۲,۵)] = \{(x,y) \in Z^۲ \mid (x,y)R(۲,۵)\} = \{(x,y) \in Z^۲ \mid x^۲ + y^۲ = ۲^۲ + ۵^۲\}$$
$$= \{(x,y) \in Z^۲ \mid x^۲ + y^۲ = ۲۹\}$$

در واقع کلاس هم ارزی (۲,۵) دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\sqrt{۲۹}$ می باشد.

***

بارم بندی جبر و احتمال (پایه ی سوم ریاضی)

فصل	نوبت اول	نوبت دوم و شهریور و دی
اول	۱۰	۵/۵
دوم (تا بخش ۲– ۸ در صفحه ی ۶۷)	۱۰	۵/۵
دوم (از بخش ۲–۸ در صفحه ی ۶۷ تا آخر فصل)	–	
سوم	–	۲
چهارم	–	۷
جمع	۲۰	۲۰

باسمه تعالی

گذری بر نظریه ی احتمال

پدیده ها را از نظر پیش بینی وقوع آنها می توان به دو دسته تقسیم کرد.

الف) پدیده های قطعی : پدیده های که می توان نتیجه ی وقوع آنها را قبل از وقوع به طور یقین تعیین کرد.

مثلاً : طلوع خورشید در پایان یک شب ، سرد بودن هوا بعد از بارش برف ، افتادن سیب بعد از جدا شدن از درخت

ب) پدیده های تصادفی : پدیده هایی که نمی توان نتیجه ی آنها را پیش از وقوع به طور یقین تعیین کرد.

مثلاً:نتیجه ی یک مسابقه ی فوتبال، نتیجه ی پرتاب یک سکه، نتیجه ی پرتاب یک تاس، نتیجه ی یک قرعه کشی

احتمال که معادل کلمه ی شانس است ، در توصیف پدیده های تصادفی به کار می رود. در این قبیل پدیده ها نتایج وقوع را نمی توان پیش بینی کرد و لذا اطمینان از آنچه که رخ خواهد داد، نداریم . به هر حال می توان فهرستی از نتایج پدیده های تصادفی تهیه کرد. مثلاً در پرتاب یک سکه ممکن است ، رو (شیر) و ممکن است پشت (خط) بیاید. در این صورت می نویسند: $S=\{P\ ,\ R\}$

مجموعه ی همه ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را **فضای نمونه ای** می نامند و آن را با S نمایش می دهند. هر یک از اعضای فضای نمونه ای را **برآمد** می گویند.

تمرین : در هر یک از موارد زیر فضای نمونه ای را نوشته و تعداد برآمد های آن را تعیین کنید.

الف : پرتاب یک سکه

حل :

$$S=\{P\ ,\ R\} \qquad \to n(S)=۲$$

ب : پرتاب دو سکه هم زمان (یا یک سکه دو بار)

حل :

$$S=\{PP,PR,RP,RR\} \qquad \to n(S)=۴$$

ج : پرتاب سه سکه هم زمان (یا یک سکه سه بار)

حل:

$$S=\{PPP,PPR,PRP,RPP,RRP,RPR,PRR,RRR\} \qquad \to n(S)=۸$$

نتیجه : تعداد برآمد های فضای نمونه ای پرتاب n سکه همزمان (یا یک سکه n بار) برابر ۲^n است.

د : پرتاب یک تاس

حل :

$$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \qquad \to n(S) = ۶$$

هـ : پرتاب دو تاس همزمان (یا یک تاس دو بار)

حل :

$$\begin{array}{cccccc} (۱,۱) & (۱,۲) & (۱,۳) & (۱,۴) & (۱,۵) & (۱,۶) \\ (۲,۱) & (۲,۲) & (۲,۳) & (۲,۴) & (۲,۵) & (۲,۶) \\ (۳,۱) & (۳,۲) & (۳,۳) & (۳,۴) & (۳,۵) & (۳,۶) \\ (۴,۱) & (۴,۲) & (۴,۳) & (۴,۴) & (۴,۵) & (۴,۶) \\ (۵,۱) & (۵,۲) & (۵,۳) & (۵,۴) & (۵,۵) & (۵,۶) \\ (۶,۱) & (۶,۲) & (۶,۳) & (۶,۴) & (۶,۵) & (۶,۶) \end{array}$$

$$S = \{(۱,۱),(۱,۲),\ldots,(۶,۶)\} \qquad \to n(S) = ۳۶$$

نتیجه : تعداد برآمد های فضای نمونه ای پرتاب n تاس همزمان (یا یک تاس n بار) برابر ۶^n است.

و : پرتاب یک تاس و یک سکه همزمان

$$\begin{array}{cc} (R,۱) & (P,۱) \\ (R,۲) & (P,۲) \\ (R,۳) & (P,۳) \\ (R,۴) & (P,۴) \\ (R,۵) & (P,۵) \\ (R,۶) & (P,۶) \end{array}$$

$$S = \{(R,۱),(P,۱),(R,۲),\ldots,(P,۶)\} \qquad \to n(S) = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

نتیجه : تعداد برآمد های فضای نمونه ای پرتاب m سکه و n تاس همزمان برابر $۲^m \times ۶^n$ است.

ز : استخراج یک مهره از بین ده مهره داخل کیسه که روی هر یک از آنها عددی منحصر بفرد از یک تا ده نوشته شده باشد.

$$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\} \qquad \to n(S) = ۱۰$$

نتیجه : تعداد برآمد های فضای نمونه ای استخراج n مهره از m مهره داخل کیسه برابر $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$ است.

***

تمرین : در استخراج دو مهره از ۶ مهره داخل کیسه ای به صورت تصادفی ابتدا تعداد برآمد های فضای نمونه ای را نوشته و سپس تمام برآمد ها را بنویسید.

حل : تعداد برآمد های فضای نمونه ای $\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۲!(۶-۲)!}=\frac{۶\times ۵\times ۴!}{۲\times ۱\times ۴!}=۱۵$

حال اگر این مهره ها a و b و c و d و e و f نامگذاری شوند، در این صورت :

برآمد های فضای نمونه ای به صورت زیر می شوند.

$$\begin{matrix} a,b & b,c & c,d & d,e & e,f \\ a,c & b,d & c,e & d,f & \\ a,d & b,e & c,f & & \\ a,e & b,f & & & \\ a,f & & & & \end{matrix}$$

***

توجه : اگر n یک عدد طبیعی باشد، تساوی های زیر را به خاطر داشته باشیم.

۱) $\binom{n}{۰}=۱$

۲) $\binom{n}{n}=۱$

۳) $\binom{n}{۱}=n$

۴) $\binom{n}{n-۱}=n$

۵) $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

۶) $\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

***

اصل ضرب : اگر عملی به m طریق و عمل دیگری به n طریق انجام گیرند. این دو عمل با هم دیگر به $m \times n$ طریق انجام خواهند شد.

***

تمرین : ظرف A حاوی ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است و ظرف B حاوی ۲ مهـره سـفید و یـک مهـره سـیاه است. از هر دو ظرف دو مهره به تصادف خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه ای را بنویسید.

حل:

$$\overbrace{\binom{۵}{۲}}^{A} \times \overbrace{\binom{۳}{۲}}^{B} = \frac{۵ \times ۴}{۲} \times \frac{۳ \times ۲}{۲} = ۱۰ \times ۳ = ۳۰$$

***

تمرین : ظرف A حاوی ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است و ظرف B حاوی ۲ مهـره سـفید و یـک مهـره سـیاه است. از ظرف A سه مهره و از ظرف B دو مهره به تصادف خارج مـی کنـیم. تعـداد اعـضای فـضای نمونـه ای را بنویسید.

حل:

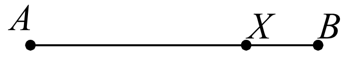
$$\overbrace{\binom{۵}{۳}}^{A} \times \overbrace{\binom{۳}{۲}}^{B} = \frac{۵ \times ۴}{۲} \times \frac{۳ \times ۲}{۲} = ۱۰ \times ۳ = ۳۰$$

توجه : اصل ضرب برای تعداد محدودی عمل قابل تعمیم است.

***

تمرین: قطعه نخی به طول ۱۰۰ سانتی متر را به تصادف از یک نقطه قطع می کنیم. فضای نمونه ای را بنویسید.

حل : بدیهی است که قطعه نخ را به صورت زیر نمایش داد و x یک نقطه از آن است.

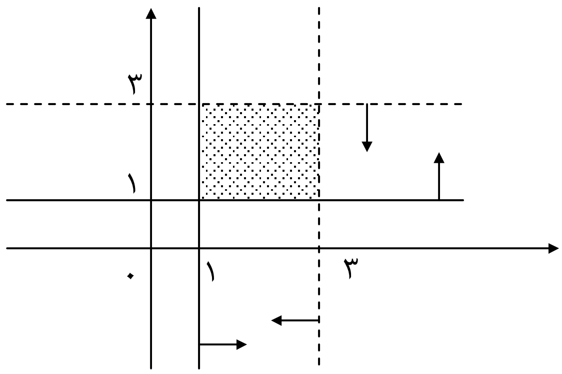


$$S = \{X \mid X \in AB\} = \{X \mid AX < AB\} = \{X \mid AX < ۱۰۰\}$$

تمرین : دو عدد به تصادف از فاصله ی $(۱,۳]$ انتخاب می کنیم. فضای نمونه ای را نوشته و نمودار آن را رسم کنید.

حل :

$$S=\{(x,y)\mid ۱\le x<۳,۱\le y<۳\}=[۱,۳)\times[۱,۳)$$

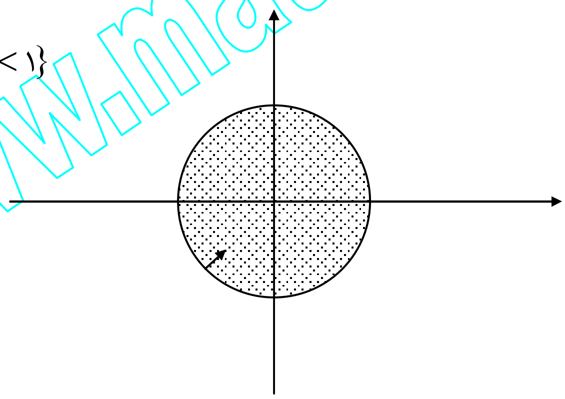


***

تمرین : یک تیر به تصادف به سمت یک سیبل به شعاع ۱ متری رها می کنیم. فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

حل:

$$S=\{(x,y)\mid x^۲+y^۲<۱\}$$



***

انواع فضای نمونه ای

با توجه به مثال هایی که تاکنون مطرح گردید. مشاهده می شود که دو نوع فضای نمونه ای قابل بررسی است.

الف : فضای نمونه ا ی گسسته : مجموعه ی متناهی و شمارش پذیر از اعضا می باشد.

مانند : فضای نمونه ا ی پرتاب سکه، تاس و ....

ب : فضای نمونه ای پیوسته: مجموعه ی نامتناهی و شمارش ناپذیر از اعضا می باشد. این نوع فضای نمونه ای ممکن است، زیر مجموعه ی اعداد حقیقی (R)،مانند: انتخاب یک نقطه از یک پاره خط ، یا زیر مجموعه ی صـفحه ($R^۲$)، مانند : انتخاب یک نقطه از دورن یک مربع به صورت تصادفی

***

پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را پیشامد تصادفی می نامند و آنرا با یک حرف بزرگ لاتین مانند E نمایش می دهند.

تمرین : در پرتاب یک تاس ، پیشامد آن را بنویسید که عدد اول رخ دهد.

حل :

$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه ای

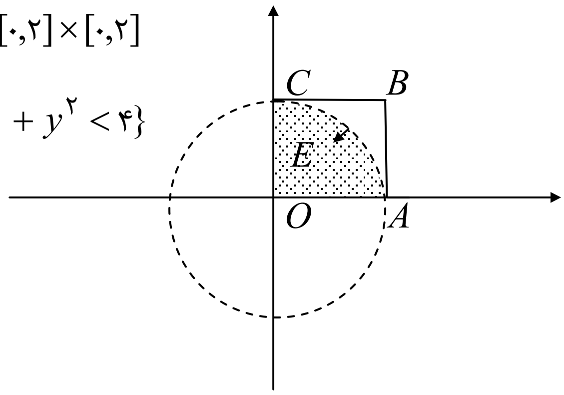
$E = \{۲,۳,۵\}$ پیشامد تصادفی

تمرین : نقطه ی (x,y) را به تصادف از مربع $[۰,۲]$ انتخاب می کنیم. پیشامد آن را بنویسید که مجموع مربعات طول و عرض آن نقطه کمتر از ۴ باشد.

حل :

$S = \{(x,y) \mid ۰ \le x \le ۲, ۰ \le y \le ۲\} = [۰,۲] \times [۰,۲]$ فضای نمونه ای

$E = \{(x,y) \mid ۰ \le x \le ۲, ۰ \le y \le ۲, x^۲ + y^۲ < ۴\}$ پیشامد تصادفی



توجه : اگر E یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S باشد. واضح است که :

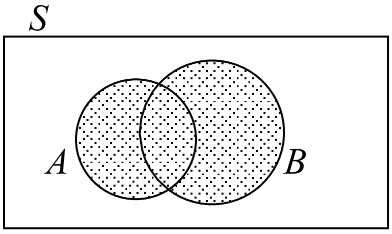
$$\Phi \subseteq E \subseteq S$$

اگر $E = \Phi$ باشد، پیشامد E را **غیر ممکن** می نامند.مثلاً در پرتاب تاس انتظار داریم عدد بیشتر از۱۰ بیاید.

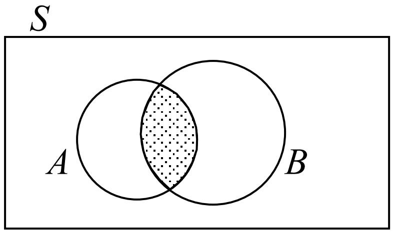
اگر $E = S$ باشد، پیشامد E را **حتمی** می نامند. مثلاً در پرتاب تاس انتظار داریم عدد کمتر از ۱۰ بیاید.

***

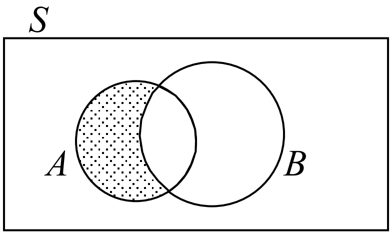
جبر پیشامد ها(عملیات روی پیشامد ها)



الف : اجتماع دو پیشامد A و B که با نماد $A\bigcup B$ نوشته می شـود، پیشامدی است که با رخ دادن پیشامد A یـا پیـشامد B یـا هـر دو رخ دهد.



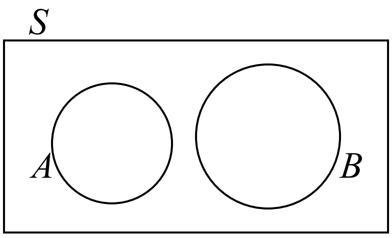
ب : اشتراک دو پیشامد A و B که با نمـاد $A\bigcap B$ نوشـته مـی شـود، پیشامدی است که با رخ دادن هر دو پیشامد A و B رخ دهد.



ج : تفاضل پیشامد Bاز پیشامد A که با نماد $A-B$ نوشته می شـود، پیشامدی است که با رخ دادن A و رخ ندادن Bرخ دهد.

***

پیشامدهای ناسازگار



دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه هر دو با هم رخ ندهند. به عبارت دیگر اشتراک آنها تهی است.

$$A\bigcap B=\Phi$$

***

تمرین : تاسی را پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد رخ دادن عدد بزرگتر از ۵ و B پیـشامد رخ دادن عـدد کمتـر از ۳ باشد. نشان دهید که این دو پیشامد ناسازگارند.

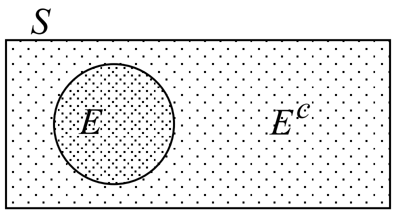
حل :

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\rightarrow n(S)=۶$

عدد بزرگتر از ۵ $A=\{۶\}$ عدد کمتر از ۳ $B=\{۱,۲\}$

و چون $A\bigcap B=\{\}$ این دو پیشامد ناسازگارند.

پیشامد مکمل



اگر S فضای نمونه ای و E یک پیشامد تصادفی از آن باشد، پیشامدی را که متناظر با رخ ندادن E می باشد، مکمل E می نامند و آن را با E' یا E^c نمایش می دهند. بدیهی است که $E' = S - E$

***

تمرین : تاسی را پرتاب می کنیم. پیشامد آن را بنویسید که

الف : عدد فرد یا عدد اول رخ دهد.

ب : عدد فرد و عدد اول رخ دهد.

ج : عدد فرد رخ دهد و عدد اول ندهد.

د : عدد زوج رخ دهد. (عدد فرد نیاید.)

حل: واضح است که $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ حال قرار می دهیم:

$A = \{۱,۳,۵\}$ پیشامد رخ دادن عدد فرد

$B = \{۲,۳,۵\}$ پیشامد رخ دادن عدد اول

الف :

$A \bigcup B = \{۱,۲,۳,۵\}$

ب:

$A \bigcap B = \{۳,۵\}$

ج:

$A - B = \{۱\}$

د :

$A' = S - A = \{۲,۴,۶\}$

***

تمرین : یک نقطه به شکل (x,y) به تصادف از مستطیل $[۰,۴]\times[۰,۲]$ انتخاب می کنیم و دو پیشامد A و B را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A=\{(x,y)\,|\,۰\le x\le ۴,۰\le y\le ۲,x^{۲}+y^{۲}<۴\}$$

$$B=\{(x,y)\,|\,۰\le x\le ۳,۰\le y\le ۱\}$$

در هر مورد نمودار پیشامد داده شده را رسم کنید.

۱) $A\bigcup B$

۲) $A\bigcap B$

۳) $A-B$

۴) $B-A$

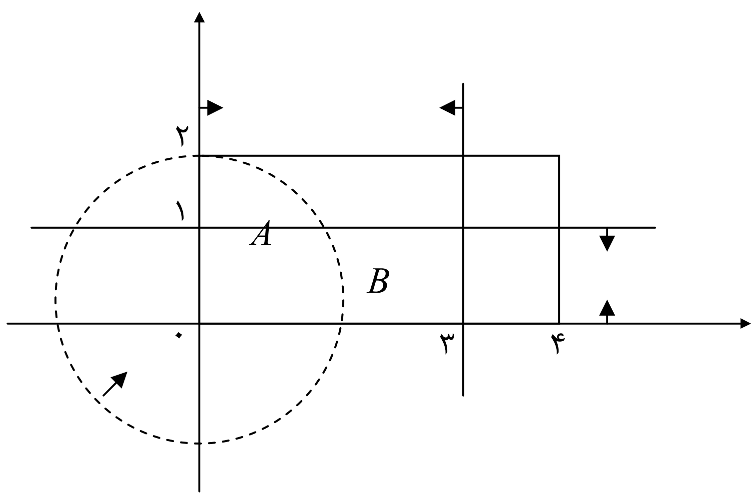
۵) A'

۶) B'

۷) $A'\bigcap B'$

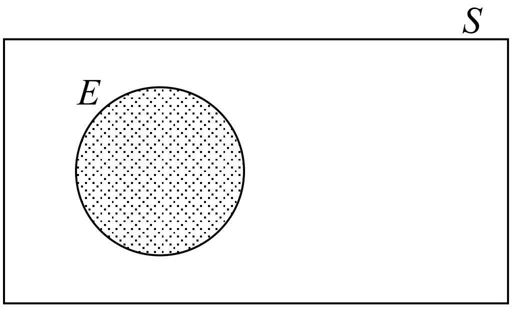
۸) $A\Delta B$

حل: ابتدا نمودار فضای نمونه ای و دو پیشامد B و A را رسم می کنیم . سپس در هر مورد مجموعه ی داده شده را هاشور می زنیم.



***

احتمال



اگر E یک پیشامد از فضای نمونه ای S باشد. در این صورت احتمال وقوع پیشامد E را با توجه به نوع فضای نمونه ای ، به یکی از صورت های زیر تعریف می کنیم.

الف : اگر E و S متناهی و گسسته (شمارا) باشند. در این صورت ، خارج قسمت تعداد اعضای پیشامد تصادفی بر تعداد اعضای فضای نمونه ای نظیر آن را احتمال وقوع پیشامد تصادفی می نامند.

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

ب : اگر E و S نامتناهی و پیوسته (ناشمارا) باشند. در این صورت ، حالت های زیر را داریم:

۱: اگر E و S زیر مجموعه ی R باشند ، خارج قسمت طول بازه ی E بر طول بازه ی S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی می نامند.

$$P(E)=\frac{l(E)}{l(S)}$$

۲: اگر E و S زیر مجموعه ی $R^۲$ باشند ، خارج قسمت سطح E بر سطح S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی می نامند.

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}$$

۳: اگر E و S زیر مجموعه ی $R^۳$ باشند ، خارج قسمت حجم E بر حجم S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی می نامند.

$$P(E)=\frac{V(E)}{V(S)}$$

***

تمرین : در پرتاب یک تاس ، احتمال آن را حساب کنید که مضرب ۳ بیاید.

حل :

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \quad \rightarrow n(S)=۶$

پیشامد تصادفی $E=\{۳,۶\} \quad \rightarrow n(E)=۲$

احتمال آمدن مضرب ۳ $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

***

تمرین : ۲۰ کارت که روی هر یک از آنها شماره ای منحصر بفرد از یک تا بیست نوشته شده است ، خوب بـه هـم زده و یک کارت از بین آنها استخراج می کنیم. احتمال آن را بنویسید که :

الف : عدد فرد بیاید. ج : عدد بزرگتر از ۱۳ بیاید. هـ : عدد کمتر از ۲۴ بیاید.

ب : عدد اول بیاید. د : عدد بیشتر ۲۵ بیاید.

حل :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}\rightarrow n(S)=۲۰$

الف: ....

$A=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹\}\quad\rightarrow n(A)=۱۰$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

ب : ....

$B=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}\quad\rightarrow n(B)=۸$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

ج : ....

$C=\{۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}\quad\rightarrow n(C)=۷$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۷}{۲۰}$$

د : ....

$D=\{\}=\Phi\quad\rightarrow n(D)=۰$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۰}{۲۰}=۰$$

هـ : ....

$$E=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}\rightarrow n(E)=۲۰$$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۲۰}{۲۰}=۱$$

***

تمرین : سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که :

الف : سه بار رو بیاید.

ب : فقط دو پشت بیاید.

ج : دو پشت به دنبال هم بیاید.

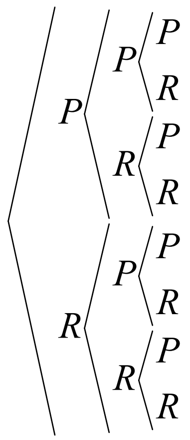
د : سه سکه همنام رخ دهد.

هـ : لاقل دو رو بیاید.

و : حداکثر دو پشت رخ دهد.

ز : سکه ی اول و سکه دوم همنام باشند.

حل :



$$S=\{PPP,PPR,PRP,PRR,RPP,RPR,RRP,RRR\}\rightarrow n(S)=۲\times۲\times۲=۸$$

الف : ....

$$A=\{RRR\}\rightarrow n(A)=۱$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$$

ب : ....

$$B=\{PPR,PRP,RPP\}\rightarrow n(B)=۳$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

ج : ....

$$C=\{PPP,PPR\ ,RPP\}\rightarrow n(C)=۳$$
$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

د : ....

$$D=\{PPP,RRR\}\rightarrow n(D)=۲$$
$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

هـ : ....

$$E=\{RPR,PRR,RRP,RRR\}\rightarrow n(E)=۴$$
$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

و : ....

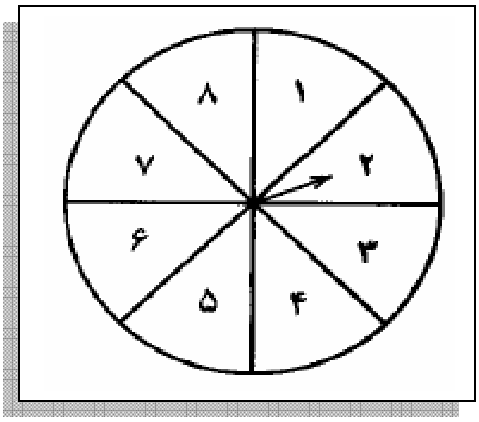
$$F=\{RRR,PRR,RPR,RRP,PPR,PRP,RPP\}\rightarrow n(F)=۷$$
$$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{۷}{۸}$$

ز : ....

$$G=\{PPP,PPR\ ,RRP,RRR\}\rightarrow n(G)=۴$$
$$P(G)=\frac{n(G)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

***

تمرین : عقربه ای مطابق شکل زیر ، پس از به حرکت در آمدن به تصادف روی یکی از ۸ ناحیـه ی شـکل مـی ایـستد و عددی را نشان می دهد.



الف : فضای نمونه ای را بنویسید.

ب : احتمال آن را به دست آورید که عقربه عدد اول را نشان دهد.

ج : احتمال آن را به دست آورید که عقربه روی مضرب ۳ بایستد.

د : احتمال آن را به دست آورید که عقربه عدد اول یا فرد را نشان دهد.

تمرین : دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. فضای نمونه ای را تشکیل دهید و احتمال آن را حساب کنید که :

الف : مجموع شماره های دو تاس برابر ۶ شود. ج : مجموع شماره های دو تاس مضربی از ۵ شود.

ب : مجموع شماره های دو تاس بیشتر از ۹ شود. د : تفاضل شماره های دو تاس صفر شود.

حل : فضای نمونه ای

$$\begin{array}{cccccc}
(۱,۱) & (۱,۲) & (۱,۳) & (۱,۴) & (۱,۵) & (۱,۶) \\
(۲,۱) & (۲,۲) & (۲,۳) & (۲,۴) & (۲,۵) & (۲,۶) \\
(۳,۱) & (۳,۲) & (۳,۳) & (۳,۴) & (۳,۵) & (۳,۶) \\
(۴,۱) & (۴,۲) & (۴,۳) & (۴,۴) & (۴,۵) & (۴,۶) \\
(۵,۱) & (۵,۲) & (۵,۳) & (۵,۴) & (۵,۵) & (۵,۶) \\
(۶,۱) & (۶,۲) & (۶,۳) & (۶,۴) & (۶,۵) & (۶,۶)
\end{array}$$

$$n(S) = ۳۶$$

الف : ....

$$A = \{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\} \quad \rightarrow n(A) = ۵$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۳۶}$$

ب : ....

$$B = \{(۴,۶),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\} \quad \rightarrow n(B) = ۶$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

ج : ....

$$C = \{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\} \quad \rightarrow n(C) = ۷$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۷}{۳۶}$$

د : ....

$$D = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\} \quad \rightarrow n(A) = ۶$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

تمرین : ۴۰ کارت هم اندازه به رنگ های سبز و قرمز و سفید و آبی داریم. روی هر یک از آنها شماره های یک تا ده نوشته شده است. تعداد کارت های رنگ های مختلف با هم مساوی است. اگر کارت ها را خوب به هم بزنیم و سپس یک کارت استخراج کنیم، احتمال آن را حساب کنید که :

الف: کارت بیرون آمده آبی باشد. ب : شماره ی کارت بیرون آمده عدد اول باشد.

ج : شماره ی کارت بیرون آمده بر ۶ بخش پذیر باشد. د : کارت بیرون آمده سبز و شماره ی روی آن مضرب ۳ باشد.

حل :

فضای نمونه ای

سفید	آبی	سبز	قرمز
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰

$$\Rightarrow n(S)=۴۰$$

الف :

$$\Rightarrow n(A)=۱۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۴۰}=\frac{۱}{۴}$$

ب :

$$\Rightarrow n(B)=۱۶$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۴۰}=\frac{۲}{۵}$$

ج :

$$\Rightarrow n(C)=۴$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۴}{۴۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

د :

$$\Rightarrow n(D)=۳$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۳}{۴۰}$$

***

تمرین : در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۲ مهره آبی و ۳ مهره سبز وجود دارد. از این کیسه یک مهره به تصادف استخراج می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که :

الف : مهره ی بیرون آمده سبز باشد. ب : مهره ی بیرون آمده سبز یا سفید باشد.

ج : مهره ی بیرون آمده سبز نباشد.

حل : تعداد کل مهره ها ۱۰ است.

الف : تعداد مهره های سبز ۳ است. $P(A)=\frac{۳}{۱۰}$

ب : تعداد مهره های سبز یا سفید ۸ است. $P(B)=\frac{۸}{۱۰}$

ج : تعداد مهره هایی که سبز نیستند برابر ۷ است. $P(C)=\frac{۷}{۱۰}$

***

تمرین : از بین اعداد طبیعی از ۱۰ تا ۱۰۰ به تصادف یک عدد انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد انتخاب شده مضرب ۸ باشد.

حل :

$$S=\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۱۰۰\}\rightarrow n(S)=b-a+۱=۱۰۰-۱۰+۱=۹۱$$
$$E=\{۱۶,۲۴,...,۹۶\}\rightarrow n(E)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۶}{۸}+۱=۱۱$$
$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۹۱}$$

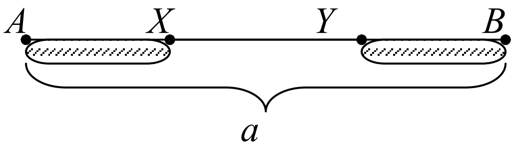
***

تمرین : یک عدد به تصادف از فاصله ی $[۲,۵]$ انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد بدست آمده عضو فاصله ی $[۳,۵]$ باشد.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} S=[۲,۵]\rightarrow L(S)=۵-۲=۳ \\ E=[۳,۵]\rightarrow L(E)=۵-۳=۲ \end{array}\right\}\rightarrow P(E)=\frac{L(E)}{L(S)}=\frac{۲}{۳}$$

تمرین : قطعه نخی به طول a به تصادف از یک نقطه قطع می شود. مطلوبست احتمال اینکه یـک قطعـه بیـشتر از دو برابر قطعه ی دیگر باشد.



حل: ابتدا قطعه نخ را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم. در این صورت بدیهی است که

$$S=\{X \mid X\in AB\}=\{X \mid AX<AB\}=\{X \mid AX<a\}\rightarrow L(S)=a$$

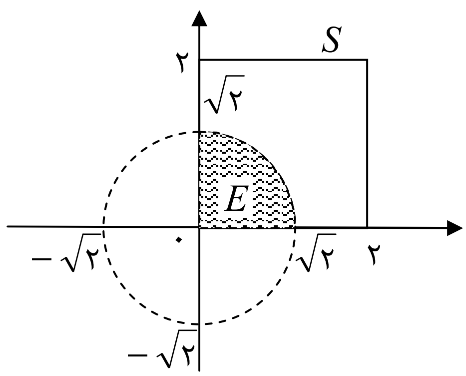
$$E=\{X \mid AX<\frac{XB}{۲}\}\rightarrow L(E)=۲(\frac{۱}{۳}a)=\frac{۲}{۳}a$$

$$P(E)=\frac{L(E)}{L(S)}=\frac{\frac{۲}{۳}a}{a}=\frac{۲}{۳}$$

***

تمرین : نقطه ی (x,y)را به تصادف از فاصله ی $[۰,۲]$ انتخاب می کنیم.احتمـال اینکـه $x^۲+y^۲<۲$ باشـد، چقـدر است.

حل :



$$A(S)=a^۲=۲^۲=۴$$

$$A(E)=\frac{\pi R^۲}{۴}=\frac{\pi(\sqrt{۲})^۲}{۴}=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\frac{\pi}{۲}}{۴}=\frac{\pi}{۸}$$

***

تمرین : یک تیر به تصادف به سمت یک سیبل به شعاع ۲ متری رها می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که

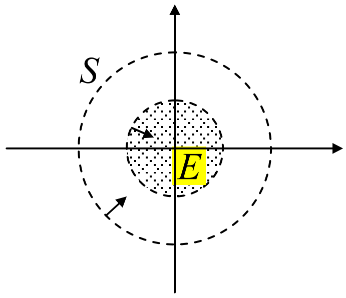
الف : این تیر در شعاع کمتر از ۱ متری مرکز به سیبل برخورد کند.

ب : الف : این تیر در شعاع بیشتر از ۱ متری مرکز به سیبل برخورد کند.

حل:

فضای نمونه ای $S=\{(x,y)\,|\,x^{۲}+y^{۲}<۴\}\rightarrow A(S)=\pi(۲)^{۲}=۴\pi$

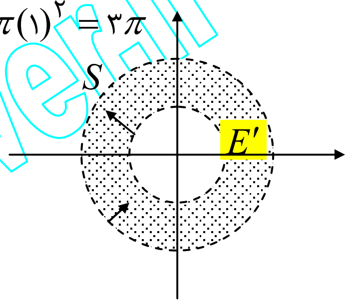
الف)



پیشامد تصادفی $E=\{(x,y)\,|\,x^{۲}+y^{۲}<۱\}\rightarrow A(E)=\pi(۱)^{۲}=\pi$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۴}$$

ب)



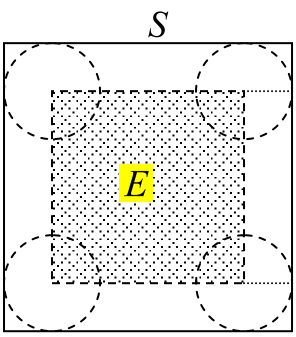
پیشامد تصادفی $E'=\{(x,y)\,|\,x^{۲}+y^{۲}>۱\}\rightarrow A(E')=\pi(۲)^{۲}-\pi(۱)^{۲}=۳\pi$

$$P(E')=\frac{A(E')}{A(S)}=\frac{۳\pi}{۴\pi}=\frac{۳}{۴}$$

***

تمرین: سکه ای به شعاع یک سانتی متر را به طرف مربعی به ضلع ۵ سانتی متر می اندازیم. احتمال آن را بیابید که سکه کاملاً داخل مربع قرار گیرد.

حل: بیرونی ترین سکه هایی که کاملاً درون مربع قرار می گیرند، بر اضلاع آن مماس می باشند. لذا مراکز چنین سکه هایی مربعی به ضلع ۳ سانتی متر تشکیل می دهند.



$$۵-(۱+۱)=۳$$

$$A(S)=۵^{۲}=۲۵$$

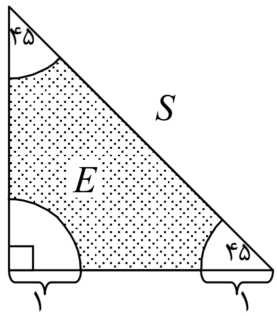
$$A(E)=۳^{۲}=۹$$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{۹}{۲۵}$$

***

تمرین: نقطه ای به تصادف درون مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین که طول هر ساق آن ۳ سانتی متر است، انتخاب می کنیم. مطلوبست محاسبه ی احتمال آن که فاصله ی این نقطه از هر رأس مثلث بیشتر از یک سانتی متر باشد.

حل: مجموع مساحت قطاع های بوجود آمده روی رئوس مثلث ، با در نظر گرفتن زاویه ها ، برابر مساحت یک نیم دایره به شعاع یک سانتی متر است.



$$A(S)=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳=\frac{۹}{۲}$$

$$A(E)=\frac{۹}{۲}-\frac{۱}{۲}\times \pi(۱)^{۲}=\frac{۹-\pi}{۲}$$

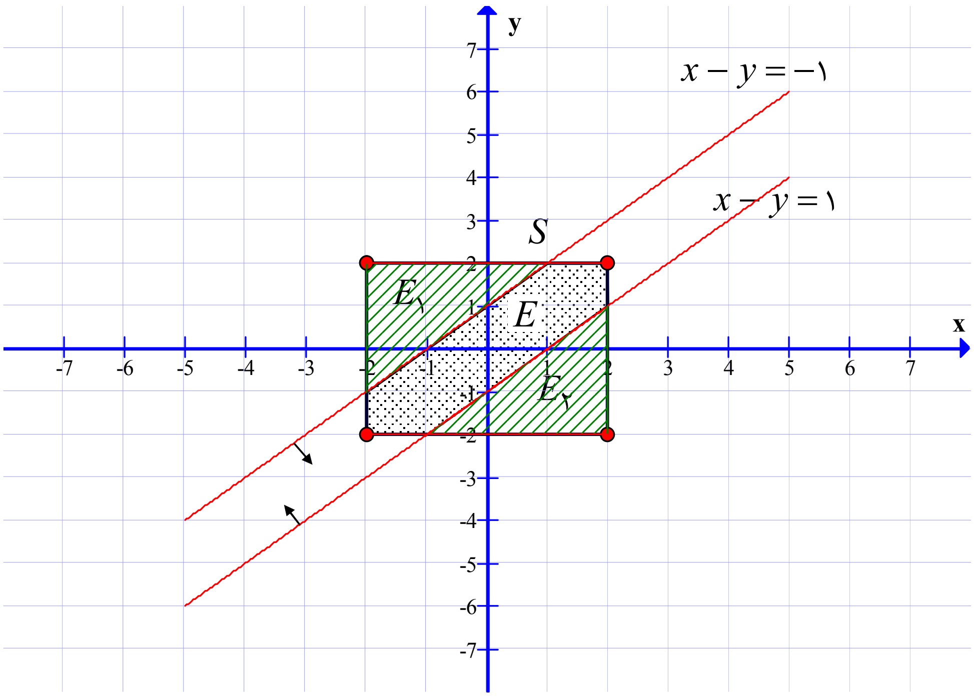
$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\frac{۹-\pi}{۲}}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۹-\pi}{۹}$$

***

تمرین: دو عدد به تصادف از فاصله ی $[-۲,۲]$ انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که قدرمطلق تفاضل این دو عدد از یک کمتر باشد.

حل :

$$E=\{(x,y)\mid |x-y|<۱\}=\{(x,y)\mid -۱<x-y<۱\}$$



$$A(S)=a^{۲}=۴^{۲}=۱۶$$

$$A(E)=A(S)-A(E_۱)-A(E_۲)$$

$$\xrightarrow{A(E_۱)=A(E_۲)} A(E)=A(S)-۲A(E_۱)=۱۶-۲(\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳)=۱۶-۹=۷$$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{۷}{۱۶}$$

***

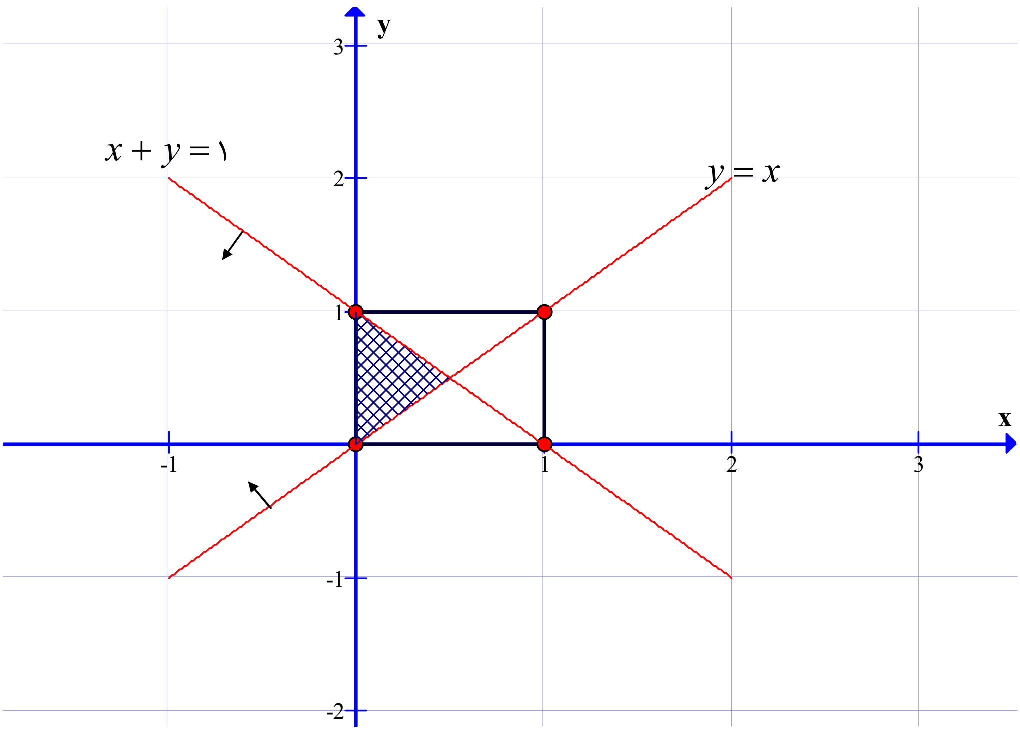
تمرین : درون مربعی به ضلع یک ، نقطه ی (x,y) به طور تصادفی انتخاب می شود. احتمال آن را پیدا کنید که $x\le y\le ۱-x$ باشد.

حل : برای این آزمایش فضای نمونه ای زیر را می توان در نظر گرفت.

$$S=\{(x,y)\,|\,۰<x<۱,۰<y<۱\}=(۰,۱)\times(۰,۱)$$

همچنین پیشامد تصادفی زیر است.

$$E=\{(x,y)\,|\;x\le y\le ۱-x\;\}\qquad \to\begin{cases} x\le y\to x-y\le ۰\\ y\le ۱-x\to x+y\le ۱\end{cases}$$



اکنون با توجه به شکل داریم: $A(E)=\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۱}{۴}$ و $A(S)=۱\times ۱=۱$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\frac{۱}{۴}}{۱}=\frac{۱}{۴}$$

***

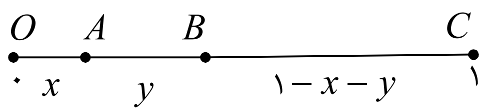
تمرین : در بازه ی $[۰,۱]$ دو نقطه به طور تصادفی طوری انتخاب می شوند که بازه را به سه پاره خط تقسیم کنند. احتمال این را پیدا کنید که سه پاره خط تشکیل یک مثلث بدهند.

حل : برای این آزمایش فضای نمونه ای زیر را می توان در نظر گرفت.

$$S=\{(x,y)\,|\,۰<x<۱, ۰<y<۱\}=(۰,۱)\times(۰,۱)$$

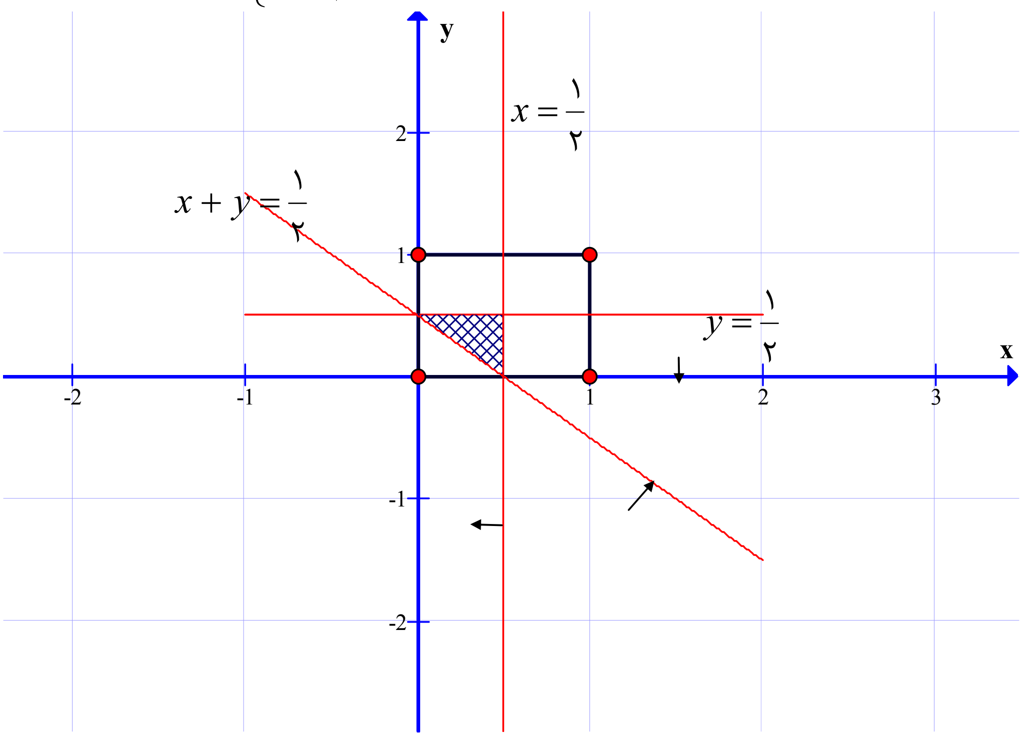
در این حالت طول پاره خط های سازنده ی مثلث به شکل زیر در خواهند آمد.

x و y و $۱-x-y$



حال با توجه به قضیه ی نامساوی مثلثی ، پیشامد تصادفی زیر را تعریف می کنیم.

$$\begin{cases} x+y>۱-x-y \\ x+(۱-x-y)>y \\ y+(۱-x-y)>x \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x+y>\frac{۱}{۲} \\ y<\frac{۱}{۲} \\ x<\frac{۱}{۲} \end{cases}\rightarrow E=\{(x,y)\,|\,x+y>\frac{۱}{۲}\,,\,y<\frac{۱}{۲}\,,\,x<\frac{۱}{۲}\}$$



اکنون با توجه به شکل داریم: $A(E)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}$ و $A(S)=۱\times۱=۱$

$$P(E)=\frac{A(E)}{A(S)}=\frac{\frac{۱}{۸}}{۱}=\frac{۱}{۸}$$

***

تذکر: اگر E یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S باشد. در این صورت:

الف : $P(S)=۱$ ب : $P(\Phi)=۰$ ج : $۰\leq P(E)\leq ۱$

***

نتیجه : برای هر پیشامد تصادفی گسسته که دارای k برآمد باشد. همواره داریم.

$E=\{e_۱,e_۲,...,e_k\}$

برآمد	$e_۱$	$e_۲$	$e_۳$	....	e_k
احتمال	$P(e_۱)$	$P(e_۲)$	$P(e_۳)$	....	$P(e_k)$

$$P(E)=P(e_۱)+P(e_۲)+...+P(e_k)=\sum_{i=۱}^{k}P(e_i)$$

پس مجموع احتمالات وقوع هر یک از برآمد های فضای نمونه ای برابر یک است. یعنی :

$S=\{s_۱,s_۲,...,s_n\}$

برآمد	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	....	s_n	جمع
احتمال	$P(s_۱)$	$P(s_۲)$	$P(s_۳)$	....	$P(s_n)$	۱

$$P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+...+P(s_n)=\sum_{i=۱}^{n}P(s_i)=۱$$

***

تمرین : درستی نتیجه ی فوق را در پرتاب یک سکه سالم و پرتاب یک تاس سالم بررسی کنید.

حل : بررسی برای پرتاب یک سکه ی سالم

برآمد	R	P	جمع
احتمال	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱

$$P(S) = P(R) + P(P) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

بررسی برای پرتاب یک تاس سالم

برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
احتمال	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۱

$$P(S) = P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱$$

***

تمرین : سکه ای در پرتاب طوری سنگینی می کند که احتمال آمدن رو دو برابر احتمال آمدن پشت است. احتمال آمدن رو و پشت را محاسبه کنید.

حل :

برآمد	R	P	جمع
احتمال	$۲x$	x	۱

$$P(S) = ۲x + x = ۱ \rightarrow ۳x = ۱ \rightarrow x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \begin{cases} P(R) = ۲x = ۲(\frac{۱}{۳}) = \frac{۲}{۳} \\ P(P) = x = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

***

تمرین : تاسی طوری ساخته شده است که وقتی پرتاب شود، احتمال آمدن عدد زوج دو برابر احتمال آمدن عدد فرد است.

مطلوبست محاسبه ی :

الف : احتمال آمدن عدد ۵　　ب : احتمال آمدن عدد ۴　　ج : احتمال پیشامد $\{۲,۳,۵\}$

حل :

برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
احتمال	x	$۲x$	x	$۲x$	x	$۲x$	۱

$$P(S)=x+۲x+x+۲x+x+۲x=۱\rightarrow ۹x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

$$P(۵)=x=\frac{۱}{۹}$$

$$P(۴)=۲x=۲(\frac{۱}{۹})=\frac{۲}{۹}$$

$$P(\{۲,۳,۵\})=P(۲)+P(۳)+P(۵)=۲x+x+x=۴x=۴(\frac{۱}{۹})=\frac{۴}{۹}$$

***

تمرین : تاسی طوری ساخته شده است که وقتی پرتاب شود، احتمال آمدن عدد زوج سه برابر احتمال آمدن عدد فرد است.

اگر در یک پرتاب تاس ، A پیشامد وقوع عدد بزرگتر از ۲ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.

حل:

برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
احتمال	x	$۳x$	x	$۳x$	x	$۳x$	۱

$$P(S)=x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱\rightarrow ۱۲x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(A)=P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=x+۳x+x+۳x=۸x=۸\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

***

تمرین : با توجه به جدول زیر :

الف : مقدار x را تعیین کنید.

ب : احتمال پیشامد $\{a,b\}$ را تعیین کنید.

برآمد	a	b	c	جمع
احتمال	$۳x$	x	$۲x$	۱

حل:

$$P(S)=۳x+x+۲x=۱ \rightarrow ۶x=۱ \rightarrow x=\frac{۱}{۶}$$

$$P(\{a,b\})=P(a)+P(b)=۳x+x=۴x=۴(\frac{۱}{۶})=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

تمرین: فرض کنیم $S=\{a,b,c,d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی باشد و داشته باشیم $P(d)=\frac{۳}{۸}$ و $P(a)=P(b)=۷P(c)$.

الف : مقدار $P(b)$ را محاسبه کنید. ب : مقدار $P(\{a,c\})$ را بیابید.

حل : با توجه به مسئله داریم :

برآمد	a	b	c	d	جمع
احتمال	$۷x$	$۷x$	x	$\frac{۳}{۸}$	۱

$$P(S)=۷x+۷x+x+\frac{۳}{۸}=۱ \rightarrow ۱۵x=\frac{۵}{۸} \rightarrow x=\frac{۱}{۲۴}$$

$$P(b)=۷x=۷(\frac{۱}{۲۴})=\frac{۷}{۲۴}$$

$$P(\{a,c\})=P(a)+P(c)=۷x+x=۸x=۸(\frac{۱}{۲۴})=\frac{۱}{۳}$$

***

تمرین: در فضای نمونه ای $S=\{a,b,c\}$ اگر داشته باشیم : $P\{a,b\}=۳p\{c\}$

در این صورت، مقدار $P(c)$ را محاسبه کنید.

حل : با توجه به مسئله داریم :

برآمد	a	b	c	جمع
احتمال	$۳x$		x	۱

$$P(S)=۳x+x=۱ \rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

$$P(c)=x=\frac{۱}{۴}$$

قوانین احتمال :

اگر A و B دو پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S باشند، در این صورت :

الف :

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$

این رابطه را قانون شمول و عدم شمول می نامند.

ب :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)$$

ج:

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲\times P(A\bigcap B)$$

د: اگر E^c مکمل پیشامد E باشد، در این صورت:

۱ : اجتماع دو پیشامد E و E^c برابر فضای نمونه ای است.

$$E\bigcup E^c=S\rightarrow P(E\bigcup E^c)=P(S)=۱$$

۲ : اشتراک دو پیشامد E و E^c تهی است. یعنی دو پیشامد E و E^c ناسازگارند. پس:

$$E\bigcap E^c=\Phi\rightarrow P(E\bigcap E^c)=P(\Phi)=۰$$

حال با توجه به دو نتیجه ی فوق خواهیم داشت:

$$P(E\bigcup E^c)=P(E)+P(E^c)-P(E\bigcap E^c)$$
$$\rightarrow ۱=P(E)+P(E^c)-۰\rightarrow P(E)+P(E^c)=۱$$

پس :

$$P(E)=۱-P(E^c) \quad \text{یا} \quad P(E^c)=۱-P(E)$$

***

هـ: اگر A و B دو پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S و $A=B$ باشند.آنگاه $P(A)=P(B)$.

ولی عکس این مطلب درست نمی باشد.

نتیجه : اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، در این صورت:

الف : $P(A\bigcap B)=P(\Phi)=٠$

ب : $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$

ج : $P(A-B)=P(A)$

د : $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)$

***

تمرین : تاسی را پرتاب می کنیم.

الف : احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد یا مضربی از ۳ رخ دهد.

ب : احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد و مضربی از ۳ رخ دهد.

ج : احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد رخ دهد و مضرب ۳ رخ ندهد.

حل :

فضای نمونه ای $S=\{١,٢,٣,۴,۵,۶\}\rightarrow n(S)=۶$

عدد فرد $A=\{١,٣,۵\}$

مضرب ۳ $B=\{٣,۶\}$

الف :

$$A\bigcup B=\{١,٣,۵,۶\}\rightarrow n(A\bigcup B)=۴$$
$$\Rightarrow P(A\bigcup B)=\frac{n(A\bigcup B)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{٢}{٣}$$

ب :

$$A\bigcap B=\{٣\}\rightarrow n(A\bigcap B)=١$$
$$\Rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(S)}=\frac{١}{۶}$$

ج :

$$A-B=\{۱,۵\}\rightarrow n(A-B)=۲$$
$$\Rightarrow P(A-B)=\frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

تمرین : اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم :

$$P(A)=\frac{۲}{۵} \text{ و } P(B)=\frac{۱}{۴} \text{ و } P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰}$$

مطلوبست محاسبه ی :

الف : $P(A\cup B)$ ب : $P(A-B)$ ج: $P(A\Delta B)$

حل :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۸+۵-۲}{۲۰}=\frac{۱۱}{۲۰}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۴-۱}{۱۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲\times P(A\cap B)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۴}-۲\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۸+۵-۴}{۲۰}=\frac{۹}{۲۰}$$

***

تمرین : احتمال اینکه دانش آموزی از درس های فیزیک و ریاضی نمره بیاورد، به ترتیب ۰/۴ و ۰/۳ است. اگر احتمال گذراندن حداقل یکی از آن دو درس ۰/۶ باشد. احتمال آن را حساب کنید که این دانش آموز از هر دو درس نمره بیاورد.

حل:

$$P(F)=۰/۴ \quad , \quad P(R)=۰/۳ \quad , \quad P(F\cup R)=۰/۶ \quad , \quad P(F\cap R)=?$$
$$P(F\cup R)=P(F)+P(R)-P(F\cap R)$$
$$۰/۶=۰/۴+۰/۳-x\rightarrow ۰/۶=۰/۷-x\rightarrow ۰/۶-۰/۷=-x\rightarrow -۰/۱=-x\rightarrow ۰/۱=x$$
$$\Rightarrow P(F\cap R)=x=۰/۱$$

***

تمرین : برای کارکنان یک اداره جدول زیر تنظیم شده است. حال یک نفر به تصادف از بین آنها انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که:

الف : بازی شخص انتخاب شده متوسط باشد.

	خوب	متوسط	ضعیف	جمع
فوتبال	۱۰	۱۸	۵	۳۳
بسکتبال	۱۸	۵	۹	۳۲
والیبال	۴	۱۰	۱	۱۵
جمع	۳۲	۳۳	۱۵	۸۰

ب: این شخص در تیم بسکتبال باشد.

ج: بازی این شخص متوسط و او در تیم بسکتبال باشد.

د : بازی این شخص خوب یا او در تیم والیبال باشد.

هـ : این شخص در تیم بسکتبال نباشد.

حل:

الف: $P(A)=\frac{۳۳}{۸۰}$

ب: $P(B)=\frac{۳۲}{۸۰}$

ج: $P(A\bigcap B)=\frac{۵}{۸۰}$

د: $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۳۲}{۸۰}+\frac{۱۵}{۸۰}-\frac{۴}{۸۰}=\frac{۴۳}{۸۰}$

هـ : $P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۳۲}{۸۰}=\frac{۴۸}{۸۰}=\frac{۳}{۵}$

***

تمرین : در پرتاب یک تاس احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد یا مضرب ۴ بیاید.

حل: چون تمام اعداد فرد مضرب ۴ نیستند، لذا پیشامد های آمدن عدد فرد و مضرب های ۴ ناسازگار هستند.از طرفی

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\rightarrow n(S)=۶$

عدد فرد $A=\{۱,۳,۵\}\rightarrow n(A)=۳$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مضرب۴ $B=\{۴\}\rightarrow n(B)=۱$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(A \cap B) = P(\Phi) = ۰$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} = \frac{۳+۱}{۶} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

***

تمرین: اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را روی صد کارت می نویسیم و یک کارت به تصادف از میان آنها استخراج می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه عدد روی این کارت:

الف : بر ۴ یا بر ۶ بخش پذیر باشد. ب : بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد.

ج : فقط بر یکی از دو عدد ۴ یا ۶ بخش پذیر باشد.

حل :

$$S = \{۱,۲,۳,...,۱۰۰\} \rightarrow n(S) = b - a + ۱ = ۱۰۰ - ۱ + ۱ = ۱۰۰$$

بخش پذیر بر۴ $A = \{۴,۸,...,۹۶,۱۰۰\} \rightarrow n(A) = \frac{b-a}{k} + ۱ = \frac{۱۰۰ - ۴}{۴} + ۱ = ۲۵$

بخش پذیر بر۶ $B = \{۶,۱۲,...,۹۶\} \rightarrow n(B) = \frac{b-a}{k} + ۱ = \frac{۹۶ - ۶}{۶} + ۱ = ۱۶$

بخش پذیر بر۱۲(ک م م ۴ و۶) $A \cap B = \{۱۲,۲۴,...,۹۶\} \rightarrow n(A \cap B) = \frac{b-a}{k} + ۱ = \frac{۹۶ - ۱۲}{۱۲} + ۱ = ۸$

الف :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۲۵}{۱۰۰} + \frac{۱۶}{۱۰۰} - \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{۳۳}{۱۰۰}$$

ب :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۲۵}{۱۰۰} - \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{۱۷}{۱۰۰}$$

ج:

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - ۲ \times P(A \cap B) = \frac{۲۵}{۱۰۰} + \frac{۱۶}{۱۰۰} - ۲ \times \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{۲۵ + ۱۶ - ۱۶}{۱۰۰} = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴}$$

تمرین : در یک روز سرد زمستانی، احتمال آمدن برف ۰/۷۰ می باشد احتمال آن را حساب کنید که برف نیاید.

حل:

$P(E)=۰/۷۰$ احتمال آمدن برف

$P(E^c)=۱-P(E)=۱-۰/۷۰=۰/۳۰$ احتمال نیامدن برف

***

تمرین : تاسی را دو بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که مجموع شماره های ظاهر شده ۳ نباشد.

حل :

$$n(S)=۳۶$$
$$A=\{(۱,۲),(۲,۱)\}\rightarrow n(A)=۲$$
$$P(A^c)=۱-P(A)=۱-\frac{۲}{۳۶}=\frac{۳۶-۲}{۳۶}=\frac{۳۴}{۳۶}=\frac{۱۷}{۱۸}$$

***

تمرین : اگر A یک پیشامد از یک آزمایش تصادفی باشد و احتمال وقوع A با شش برابر احتمال وقوع A^c مساوی باشد.

احتمال وقوع A^c را حساب کنید.

حل :

$$P(A^c)=x\rightarrow P(A)=۶x$$
$$P(A)+P(A^c)=۱\rightarrow ۶x+x=۱\rightarrow ۷x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۷}$$

***

تمرین : اگر $P(A)=\frac{۲}{۱۰}$ و $P(B)=\frac{۵}{۱۰}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰}$ باشد. تساوی های زیر را کامل کنید.

الف : $P(A^c)=$ ج : $P(A\cup B)=$ هـ : $P(A\cup B)^c=$

ب : $P(B^c)=$ د : $P(A\cap B)^c=$

حل :

$$P(A^c)=۱-P(A)=۱-\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱۰-۲}{۱۰}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}$$

$$P(B^c)=۱-P(B)=۱-\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱۰-۵}{۱۰}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۵}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

$$P(A\bigcap B)^{c}=۱-P(A\bigcap B)=۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱۰-۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}$$

$$P(A\bigcup B)^{c}=۱-P(A\bigcup B)=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۵-۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

***

تمرین : اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، و داشته باشیم: $P(B^{c})=\frac{۳}{۷}$ و $P(A)=\frac{۲}{۷}$

در این صورت $P(A\bigcup B)$ را حساب کنید.

حل :

$$P(B)=۱-P(B^{c})=۱-\frac{۳}{۷}=\frac{۷-۳}{۷}=\frac{۴}{۷}$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)=\frac{۲}{۷}+\frac{۴}{۷}=\frac{۶}{۷}$$

***

تمرین : اگر $P(A)=\frac{۳}{۵}$ و $P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۵}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۵}$ مطلوبست تعیین :

۱: $P(A-B)$ ۳: $P(A\bigcup B)$ ۵: $P(A^{c}\bigcap B^{c})$

۲: $P(B)$ ۴: $P(A\bigcup B)^{c}$ ۶: $P(A\Delta B)^{c}$

حل:

:۱

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)\rightarrow P(A-B)=\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

:۲

$$P(B-A)=P(B)-P(A\bigcap B)\rightarrow\frac{۱}{۵}=P(B)-\frac{۱}{۵}\rightarrow P(B)=\frac{۲}{۵}$$

:۳

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

:۴

$$P(A\bigcup B)^{c}=۱-P(A\bigcup B)=۱-\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

:۵

$$P(A^{c}\bigcap B^{c})=P(A\bigcup B)^{c}=\frac{۱}{۵}$$

:۶

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲\times P(A\bigcap B)=\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}-۲\times\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

$$P(A\Delta B)^{c}=۱-P(A\Delta B)=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

❀❀❀

تمرین: سه نفر A و B و C در یک مسابقه شرکت کرده اند، احتمال برد A دو برابر احتمال برد B و احتمال برد C ، $\frac{۱}{۳}$ احتمال برد A است.

الف : احتمال برد A چقدر است.

ب : احتمال باخت C چقدر است.

حل : با توجه به مسئله داریم :

برآمد	A	B	C	جمع
احتمال	$۲x$	x	$\frac{۱}{۳}(۲x)$	۱

$$P(S)=۲x+x+\frac{۲}{۳}x=۱\rightarrow\frac{۱۱}{۳}x=۱\rightarrow x=\frac{۳}{۱۱}$$

$$P(A)=۲x=۲(\frac{۳}{۱۱})=\frac{۶}{۱۱}$$

$$P(C)^{c}=P(A)+P(B)=۲x+x=۳x=۳(\frac{۳}{۱۱})=\frac{۹}{۱۱}$$

توجه :

$$P(C)^c = ۱ - P(C) = ۱ - \frac{۲}{۳}x = ۱ - \frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۱۱}) = \frac{۹}{۱۱}$$

***

تمرین : اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند. هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ب) $P(A - B) = P(A)$

حل:

الف : برای هر دو پیشامد ناسازگار A و B ، واضح است که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \xrightarrow{\div n(S)} \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$$
$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ب : چون دو پیشامد A و B ناسازگارند، لذا :

$$A - B = A - (A \cap B) = A \rightarrow A - B = A \rightarrow P(A - B) = P(A)$$

***

تمرین : اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند. هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ب) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اثبات :

الف : واضح است که دو پیشامد $A - B$ و $A \cap B$ ناسازگار هستند. پس :

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$
$$\rightarrow P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)]$$
$$\rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$
$$\rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ب: واضح است که پیشامد های $A - B$ و B ناسازگار هستند. لذا:

$$A \bigcup B = (A - B) \bigcup B$$
$$\to P(A \bigcup B) = P[(A - B) \bigcup B]$$
$$\to P(A \bigcup B) = P(A - B) + P(B)$$
$$\to P(A \bigcup B) = P(A) - P(A \bigcap B) + P(B)$$
$$\to P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$$

تمرین : اگر A و B دو پیشامد دلخواه و $B \subseteq A$ باشند، هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A - B) = P(A) - P(B)$ ب) $P(B) \leq P(A)$

اثبات :

الف :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \bigcap B) \xrightarrow{A \bigcap B = B} P(A - B) = P(A) - P(B)$$

ب :

$$B \subseteq A \to \Phi \subseteq A - B \to P(\Phi) \leq P(A - B) \xrightarrow{P(\Phi) = ۰} ۰ \leq P(A - B)$$
$$\to ۰ \leq P(A) - P(B) \to P(B) \leq P(A)$$

***

تمرین : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - ۲ \times P(A \bigcap B)$

ب) $P(A^c \bigcap B^c) = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \bigcap B)$

اثبات :

الف:

$$P(A \Delta B) = P[(A \bigcup B) - (A \bigcap B)] = P(A \bigcup B) - P[(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcap B)]$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap B) = P(A) + P(B) - ۲ \times P(A \bigcap B)$$

ب:

$$P(A^c \bigcap B^c) = P(A \bigcup B)^c = ۱ - P(A \bigcup B)$$
$$= ۱ - (P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)) = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \bigcap B)$$

***

تمرین : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B از فضای نمونه ای S ثابت کنید که :

$$P(A^c \cup B) - P(A \cap B) = P(A^c)$$

حل:

$$P(A^c \cup B) - P(A \cap B) = P(A^c) - P(A^c \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A^c) - \underbrace{P(B \cap A^c)} + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)} = P(A^c) - P(B - A) + P(B - A) = P(A^c)$$

تمرین : اگر A و B و C سه پیشامد دلخواه باشند. ثابت کنید که :

$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

اثبات :

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$$
$$= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$
$$= \overbrace{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}^{P(A \cup B)} + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - (P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)])$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

***

تمرین : شخصی از شهر اصفهان دیدن می کند، احتمال اینکه از عالی قاپو بازدید کند ۰/۷۴ و احتمال اینکه از بازار اصفهان بازدید کند ۰/۷۰ و احتمال اینکه از مسجد جامع بازدید کند ۰/۶۴ و احتمال اینکه از عالی قاپو و بازار هر دو دیدن کند ۰/۴۶ و احتمال اینکه بازار اصفهان و مسجد جامع را ببیند ۰/۴۴ و احتمال اینکه از عالی قاپو و مسجد جامع دیدن کند ۰/۷۲ و احتمال اینکه به بازدید هر سه مکان برود ۰/۳۴ است. احتمال اینکه این شخص لااقل یکی از این سه مکان را دیدن کند، چقدر است.

حل: ابتدا تعریف می کنیم.

$P(A) = ۰/۷۴$ احتمال بازدید از عالی قاپو

$P(B) = ۰/۷۰$ احتمال بازدید از بازار

$P(C) = ۰/۶۴$ احتمال بازدید از مسجد جامع

$P(A \cap B) = ۰/۴۶$ احتمال بازدید از عالی قاپو و بازار

$P(A \cap C) = ۰/۷۲$ احتمال بازدید از عالی قاپو و مسجد جامع

$P(B \cap C) = ۰/۴۴$ احتمال بازدید از بازار و مسجد جامع

$P(A \cap B \cap C) = ۰/۳۴$ احتمال بازدید از هر سه مکان

$P(A \cup B \cup C) = ?$ احتمال بازدید حداقل یکی

$$P(A\bigcup B\bigcup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\bigcap B) - P(A\bigcap C) - P(B\bigcap C) + P(A\bigcap B\bigcap C)$$
$$= ۰/۷۴ + ۰/۷۰ + ۰/۶۴ - ۰/۴۶ - ۰/۷۲ - ۰/۴۴ + ۰/۳۴ = ۰/۸۰$$

***

نتیجه : اگر A و B و C سه پیشامد ناسازگار باشند. در این صورت :

$$P(A\bigcup B\bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

***

بحث های تکمیلی احتمال

آزمایش برنولی : هر آزمایش که فضای نمونه ای آن تنها دارای دو عضو باشد، را آزمایش برنولی می نامند. مانند نتیجه ی پرتاب یک سکه ، نتیجه ی پاسخ تصادفی یک سئوال تستی

اگر در یک آزمایش برنولی فقط یک پیشامد مورد نظر باشد، آن را پیروزی[1] با احتمال p و دیگری را شکست با احتمال q می نامند.

برآمد	پیروزی	شکست	جمع
احتمال	p	q	۱

$$p+q=۱$$

***

تمرین : یک سکه ی طوری ساخته شده است که احتمال آمدن رو سه برابر احتمال آمدن پشت است. احتمال آن را حساب کنید که در یک بار پرتاب رو بیاید.

حل: این آزمایش ، یک آزمایش برنولی است . لذا:

برآمد	R	P	جمع
احتمال	$۳x$	x	۱

$$۳x+x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

$$\therefore\ P(R)=۳x=۳(\frac{۱}{۴})=\frac{۳}{۴}$$

تابع احتمال : برای مفاهیم مربوط به احتمال نیز می توان تابع تعریف نمود. این تابع با دو شرط زیر را تابع توزیع احتمال یا به اختصار تابع احتمال می نامند.

$$۱)\ \cdot\leq P(X_i)\leq ۱ \qquad \text{و} \qquad ۲)\ \sum_{i=۱}^{n}P(X_i)=۱$$

[1]. در آزمایش های دو حالته (برنولی) پیشامدی که مسئله در پی آن است را پیروزی و دیگری را شکست انتخاب کنید.

مثال : تابع زیر یک تابع احتمال می باشد.

$$P(X_i)=\begin{cases}\frac{۱}{۶} & X_i=۱,۲,۳,۴\\ \frac{۱}{۳} & X_i=۵\end{cases}$$

این تابع را می توان به شکل زیر نیز نوشت.

X_i	۱	۲	۳	۴	۵	جمع
$P(X_i)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	۱

تمرین : نشان دهید که تابع زیر نیز یک تابع توزیع احتمال است.

$$P(X_i)=\frac{۲X_i-۱}{۳۶} \qquad X_i=۱,۲,۳,۴,۵,۶$$

***

تابع احتمال دو جمله ای : اگر آزمایش برنولی را n بار به طور مستقل تکرار کنیم. نوع آزمایش را آزمایش دو جمله ای می نامند. احتمال پیروزی به اندازه ی X_i از کل n بار تکرار آزمایش به صورت زیر است.

$$P(X_i)=\binom{n}{X_i}p^{X_i}.q^{n-X_i} \qquad X_i=۰,۱,۲,....,n$$

که در آن p و q احتمال پیروزی و شکست در یک بار آزمایش برنولی است.

مثال: پرتاب n سکه با هم دارای توزیع دو جمله ای است.

***

تمرین : یک سکه طوری ساخته شده است که احتمال آمدن رو $\frac{۱}{۴}$ و پشت $\frac{۳}{۴}$ است. این سکه را ۸ بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه سه بار رو آید را به دست آورید.

حل: آمدن رو را پیروزی و آمدن پشت را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p=\frac{۱}{۴}\rightarrow q=\frac{۳}{۴}$$

$$P(۳) = \binom{۸}{۳} \times (\frac{۱}{۴})^{۳} \times (\frac{۳}{۴})^{۵} = ۰/۲۴$$

تمرین : خانواده ای دارای ۶ فرزند است. اگر احتمال تولد فرزند پسر و تولد فرزند دختر مساوی باشد. احتمال اینکه ۲ فرزند، پسر باشد را بدست آورید.

حل: تولد فرزند پسر را پیروزی و تولد فرزند دختر را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p = \frac{۱}{۲} \rightarrow q = \frac{۱}{۲}$$

$$P(۲) = \binom{۶}{۲} \times (\frac{۱}{۲})^{۲} \times (\frac{۱}{۲})^{۴} = \binom{۶}{۲} \times (\frac{۱}{۲})^{۶} = ۰/۲۳$$

***

تمرین : به دانش آموزی ۱۰ سئوال تستی چهار گزینه ای داده شده است و قرار شد که او به گزینه ها به تصادف پاسخ دهد.

الف : چقدر احتمال دارد که او ۷ سئوال را پاسخ صحیح دهد؟

ب : چقدر احتمال دارد که او حداقل به ۷ سئوال پاسخ صحیح دهد؟

حل: پاسخ صحیح را پیروزی و پاسخ غلط را شکست فرض می کنیم. پس:

الف :

$$p = \frac{۱}{۴} \rightarrow q = \frac{۳}{۴}$$

$$p(۷) = \binom{۱۰}{۷} \times (\frac{۱}{۴})^{۷} \times (\frac{۳}{۴})^{۳} =$$

ب :

$$P(X=۷) + P(X=۸) + P(X=۹) + P(X=۱۰)$$
$$= \binom{۱۰}{۷} \times (\frac{۱}{۴})^{۷} \times (\frac{۳}{۴})^{۳} + \binom{۱۰}{۸} \times (\frac{۱}{۴})^{۸} \times (\frac{۳}{۴})^{۲} + \binom{۱۰}{۹} \times (\frac{۱}{۴})^{۹} \times (\frac{۳}{۴})^{۱} + \binom{۱۰}{۱۰} \times (\frac{۱}{۴})^{۱۰} \times (\frac{۳}{۴})^{۰}$$
$$= ?$$

***

تمرین : به دانش آموزی ۱۰ سئوال تستی چهار گزینه ای داده شده است و قرار شد که او به گزینه ها بـه تـصادف پاسـخ دهـد. چقدر احتمال دارد که او ۴ سئوال را پاسخ غلط دهد؟

حل: پاسخ غلط را پیروزی و پاسخ صحیح را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p = \frac{۳}{۴} \rightarrow q = \frac{۱}{۴}$$

$$P(۴) = \binom{۱۰}{۴} \times (\frac{۳}{۴})^{۴} \times (\frac{۱}{۴})^{۶} = ۱۶۸۰ \times \frac{۸۱}{۲۵۶} \times \frac{۱}{۴۰۹۶} = ۰/۱۲$$

***

تمرین : احتمال اینکه یک دانه ی ذرت رشد کند، ۰/۲۵ است. اگر ۱۰۰ دانه از این دانه ها کاشته شود.چقدر احتمال دارد کـه ۲۰ تای آنها رشد کند؟

حل: رشد دانه را پیروزی و و عدم رشد آن را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴} \rightarrow q = \frac{۳}{۴}$$

$$P(۲۰) = \binom{۱۰۰}{۲۰} \times (\frac{۱}{۴})^{۲۰} \times (\frac{۳}{۴})^{۸۰} =$$

***

نتیجه: در پرتاب یک سکه به تعداد n بار اگر احتمال آمدن رو و پشت برابر باشند. احتمال k بار پیروزی بـه شـکل زیـر اسـت. $(۰ \le k \le n)$

$$p = \frac{۱}{۲} \rightarrow q = \frac{۱}{۲}$$

$$p(k) = \binom{n}{k} \times (\frac{۱}{۲})^{k} \times (\frac{۱}{۲})^{n-k} = \binom{n}{k} \times (\frac{۱}{۲})^{n} = \binom{n}{k} \times \frac{۱}{۲^{n}} = \frac{\binom{n}{k}}{۲^{n}}$$

توجه داشته باشید که این نتیجه برای پرتاب یک سکه ی سالم ، تولد نوزاد، پاسخ تصادفی به سئوال های دو گزینه ای و .... که در تمام آنها $p = q = \frac{۱}{۲}$ باشد، بکار می رود.

***

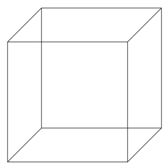
تمرین: سکه ای را ۱۰۰ بار انداخته ایم، احتمال آمدن ۶۰ بار پشت را بدست آورید.

حل:

$$p = q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(۶۰) = \binom{۱۰۰}{۶۰} \times \frac{۱}{۲^{۱۰۰}} =$$

تمرین : سه وجه مکعبی زرد و سه وجه دیگر آن سبز می باشند. این مکعب را ۷ بار پرتاب می کنیم. چقدر احتمال دارد که ۳ بار سبز بیاید.

حل :



$$p = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \to q = \frac{۱}{۲}$$
$$P(۳) = \binom{۷}{۳} \times \frac{۱}{۲^{۷}} = ۳۵ \times \frac{۱}{۱۲۸} = \frac{۳۵}{۱۲۸}$$

تمرین: یک تاس سالم را ۷ بار انداخته ایم. احتمال آن را حساب کنید که ۵ بار عدد زوج ظاهر شود.

حل:

$$p = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \to q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(۵) = \frac{\binom{۷}{۵}}{۲^{۷}} = \frac{۲۱}{۱۲۸}$$

***

تابع احتمال هندسی : گاهی در آزمایش های تصادفی، فضای نمونه ای شامل دو گروه m و n عضوی می باشد. احتمال انتخاب k عضو که X_i تای آنها از بین گروه m عضوی و بقیه از گروه n عضوی باشد، به شکل زیر محاسبه می شود.

$$P(X_i)=\frac{\overbrace{\binom{m}{X_i}}^{\text{گروه اول}}\times\overbrace{\binom{n}{k-X_i}}^{\text{گروه دوم}}}{\text{کل}\ \binom{m+n}{k}}$$

***

تمرین : از کلاس دوم یک دبیرستان ۴ نفر و از کلاس سوم ۷ نفر داوطلب بازی در تیم والیبال شده اند، در صورتی که بازی در تیم فقط برای ۶ نفر ازآنها امکان دارد. احتمال آن را حساب کنید که ۲ نفر از کلاس دوم و ۴ نفر از کلاس سوم انتخاب شوند.

حل :

$$P(x)=\frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۷}{۴}}{\binom{۱۱}{۶}}=\frac{۶\times ۳۵}{۴۶۲}=\frac{۵}{۱۱}$$

تمرین: با توجه به تمرین قبل احتمال آن را حساب کنید که حداقل ۵ نفر از کلاس سوم انتخاب شوند.

حل:

$$P(x)=\frac{\binom{۴}{۱}\times\binom{۷}{۵}}{\binom{۱۱}{۶}}+\frac{\binom{۴}{۰}\times\binom{۷}{۶}}{\binom{۱۱}{۶}}=\frac{۴\times ۲۱}{۴۶۲}+\frac{۱\times ۷}{۴۶۲}=\frac{۱۲}{۶۶}+\frac{۱}{۶۶}=\frac{۱۳}{۶۶}$$

***

تمرین: سه لامپ از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها بدون هیچگونه آثار خارجی معیوب می باشند، انتخاب می کنیم.

الف : احتمال آن را تعیین کنید که هیچکدام معیوب نباشند.

ب : احتمال آن را تعیین کنید که فقط یک لامپ معیوب باشد.

حل :

الف) $P(x)=\dfrac{\binom{۵}{۰}\times\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۵}{۳}}=\dfrac{۱\times ۱۲۰}{۴۵۵}=\dfrac{۲۴}{۹۱}$

ب) $P(x)=\dfrac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۵}{۳}}=\dfrac{۵\times ۴۵}{۴۵۵}=\dfrac{۴۵}{۹۱}$

***

تمرین: ۶ نفر زن و ۷ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده اند. با این حال امکان استخدام تنها برای ۷ نفر از آنها وجود دارد. مطلوبست احتمال اینکه :

الف: ۵ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

ب : فقط یک زن انتخاب شود.

ج : ۴ زن و ۳ مرد انتخاب شوند.

د : بیش از ۴ مرد انتخاب شوند.

حل :

الف) $P(x)=\dfrac{\binom{۶}{۵}\times\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۳}{۷}}=\dfrac{۶\times ۲۱}{۱۷۱۶}=\dfrac{۱۰۵}{۱۴۳}$

ب) $P(x)=\dfrac{\binom{۶}{۱}\times\binom{۷}{۶}}{\binom{۱۳}{۷}}=\dfrac{۶\times ۷}{۱۷۱۶}=\dfrac{۷}{۲۸۶}$

ج) $P(x)=\dfrac{\binom{۶}{۴}\times\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۳}{۷}}=\dfrac{۱۵\times ۳۵}{۱۷۱۶}=\dfrac{۱۷۵}{۵۷۲}$

د)

$$P(x)=\frac{\binom{۶}{۲}\times\binom{۷}{۵}}{\binom{۱۳}{۷}}+\frac{\binom{۶}{۱}\times\binom{۷}{۶}}{\binom{۱۳}{۷}}+\frac{\binom{۶}{۰}\times\binom{۷}{۷}}{\binom{۱۳}{۷}}=\frac{۱۵\times ۲۱}{۱۷۱۶}+\frac{۶\times ۷}{۱۷۱۶}+\frac{۱\times ۱}{۱۷۱۶}=\frac{۳۱۵+۴۲+۱}{۱۷۱۶}=\frac{۳۵۸}{۱۷۱۶}=\frac{۱۷۹}{۵۸۵}$$

***

تمرین: از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۲ سیب فاسد ، ۴ سیب به طور تصادفی بیرون می آوریم. مطلوبست احتمال آنکه هر ۴ سیب سالم باشند.

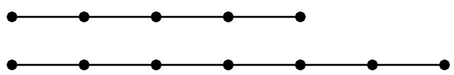
حل :

$$P(x)=\frac{\binom{۴}{۴}\times\binom{۲}{۰}}{\binom{۶}{۴}}=\frac{۱\times ۱}{۱۵}=\frac{۱}{۱۵}$$

***

تمرین : دوازده نقطه مطابق شکل زیر روی دو خط موازی قرار دارند، از این نقطه ها، سه نقطه به تصادف انتخاب می کنیم.

احتمال اینکه این سه نقطه رأس های یک مثلث باشند، را به دست آورید.



حل : می توان این نقطه ها را دو گروه ۵ نقطه ای و ۷ نقطه ای در نظر گرفت.

حال برای ایجاد مثلث باید دو نقطه از یک گروه و یک نقطه از گروه دیگر انتخاب کرد. در این صورت داریم:

$$P(x)=\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۲}{۳}}+\frac{\binom{۵}{۲}\times\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۵\times ۲۱}{۲۲۰}+\frac{۱۰\times ۷}{۲۲۰}=\frac{۱۷۵}{۲۲۰}=\frac{۳۵}{۴۴}$$

***

توجه : تابع احتمال هندسی برای بیش از دو گروه نیز قابل تعمیم است.

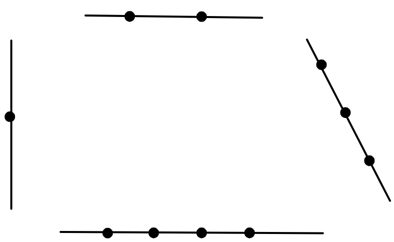
***

تمرین: ۳ نفر دانش آموز از کلاس سوم و ۴ نفر از کلاس دوم و ۵ نفر از کلاس اول داوطلب بازی در تیم شطرنج دبیرستان شده اند. در صورتی که بازی در تیم فقط برای ۶ نفر امکان دارد، احتمال آن را حساب کنید که ۲ نفر از سوم و یک نفر از دوم و بقیه از اول انتخاب شوند.

حل :

$$P(x)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۲}{۶}}=\frac{۳\times۴\times۱۰}{۹۲۴}=\frac{۱۰}{۷۷}$$

تمرین: از میان ۱۰ نقطه مطابق شکل زیر ، چهار نقطه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آنرا بیابید که با این ۴ نقطه یک چهارضلعی ساخته شود که روی هر خط فقط یک رأس آن قرار بگیرد.



حل :

$$P(x)=\frac{\binom{۱}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۱\times۲\times۳\times۴}{۲۱۰}=\frac{۴}{۳۵}$$

***

تمرین : از بین ۲ افسر و ۴ سرباز و۳ منشی ،کمیته ای ۵ نفره تشکیل می دهیم. مطلوب است احتمال آنکه

الف : در کمیته، منشی وجود نداشته باشد.

ب : در کمیته ، حداکثر یک سرباز وجود داشته باشد.

***