بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه تحقیق در عملیات۱

استاد مربوطه : سیاوش صالحی

تهیه کننده: سعید ارجمند

ارائه و انتشار از: وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی

www.pnu-m-s.com

افكار و برنامه هاي ذهني مديران ← مدلهاي رياضي ← حل ← دامنه جواب ← جواب بهينه ← تصميم گيري ← تحليل حساسيت

- مدلسازي

- روش ترسيمي
- روش سيمپلكس ساده
- روش سيمپلكس M
- روش دو مرحله اي
- روش ثانويه

مراحل مدلسازی

تعريف متغير هاي تصميم ← تعين تابع هدف (max or min) ← استخراج محدوديت ها

مثال1:

یک شرکت تولید کننده اسباب بازی 3 نوع اسباب بازی تولید می کند نیروی کار مورد نیاز، هزینه هر واحد تولیدی ، میزان تقاضا و قیمت فروش هر نوع اسباب بازی در جدول زیر ارائه شده است ؛ کل بودجه کارخانه200000 و کل ساعات کار 600 ساعت است . مسئله را به گونه ای فرموله (مدلسازی) کنید که سود کل تولیدات حداکثر گردد.

نوع اسباب بازی	قیمت فروش	میزان تقاضا	سود هر واحد	هزینه هر واحد	نیروی کار مورد نیاز هر واحد (ساعت)
A	2000	300	1300	700	2
B	15000	300	14000	1000	3
C	12000	150	11500	500	2

پاسخ1:

متغیر های تصمیم

- X_1: تعداد اسباب بازي نوع A كه بايد توليد شود
- X_2: تعداد اسباب بازي نوع B كه بايد توليد شود
- X_3: تعداد اسباب بازي نوع C كه بايد توليد شود

تابع هدف: $MAX(Z) = 1300x_1 + 14000x_2 + 11500x_3$

محدودیت1:سود $700x_1 + 1000x_2 + 500x_3 \le 200000$

محدودیت2:نیروی کار $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 600$

محدودیت3:A $x_1 \ge 300$

محدودیت4:B $x_2 \ge 300$

محدودیت3:C $x_3 \ge 150$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

مثال2:

یک کارخانه صنایع چوبی 2 نوع محصول میز و صندلی تولید میکند برای تولید هر واحد میز و صندلی به میزان متفاوتی از نیروی انسانی و دو نوع چوب بلوط و کاج نیاز هست برای تولید هر واحد میز به 5 فوت چوب بلوط و 2فوت چوب کاج و 4 نفر ساعت نیروی انسانی نیاز هست میزان منابع در دسترس چوب بلوط 150 فوت چوب کاج 100 فوت و نیروی انسانی 80 نفر ساعت می باشد. میزان سود هر واحد میز 12 واحد و هر واحد صندلی 8 واحد می باشد. مسئله را به گونه ای فرموله کنید که سود کل تولیدات حداکثر شود (مدیر شرکت می خواهد بداند چه میزان میز و چه میزان صندلی تولید کند و به فروش برساند تا سود او حداکثر شود.

نوع محصول	میزان چوب بلوط	میزان چوب کاج	نیروی کار مورد نیاز هر واحد (ساعت)	سود هر واحد
میز	5	2	4	12
صندلی	2	3	2	8
منابع در دسترس	150	100	8	

پاسخ2:

متغیر های تصمیم

- X_1 میز
- X_2 صندلي

تابع هدف: $MAX(Z) = 12x_1 + 18x_2$

S.T:

محدودیت1:بلوط $5x_1 + 2x_2 \le 150$

محدودیت2:کاج $2x_1 + 3x_2 \le 100$

محدودیت3:نیروی انسانی $4x_1 + 2x_2 \le 80$

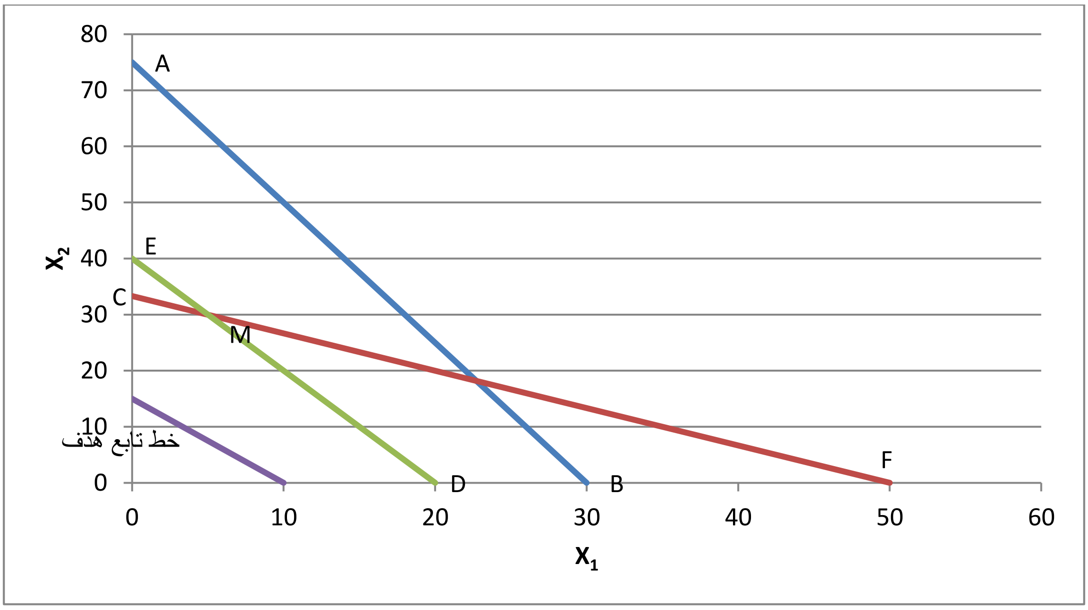
$x_1, x_2 \ge 0$

حل با استفاده از روش ترسیمی:

$$5X_1 + 2X_2 = 150 \begin{cases} A: X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 75 \leftrightarrow A\begin{pmatrix} 0 \\ 75 \end{pmatrix} \\ B: X_1 = 30 \leftarrow X_2 = 0 \leftrightarrow B\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$2X_1 + 3X_2 = 100 \begin{cases} C: X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 33.3 \leftrightarrow C\begin{pmatrix} 0 \\ 33.\overline{3} \end{pmatrix} \\ D: X_1 = 50 \leftarrow X_2 = 0 \leftrightarrow D\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$4X_1 + 2X_2 = 80 \begin{cases} E: X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 40 \leftrightarrow E\begin{pmatrix} 0 \\ 40 \end{pmatrix} \\ F: X_1 = 20 \leftarrow X_2 = 0 \leftrightarrow F\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$



در روش ترسیمی برای پیدا کردن نقطه بهینه در روش رسم خط تابع هدف ابتدا به تابع هدف یک عدد دلخواه داده و خط تابع هدف را رسم میکنیم اگر خط تابع هدف داخل منطقه موجه نبود آنرا به موازات خود حرکت داده تا داخل منطقه موجه قرار بگیرد برای پیدا کردن گوشه بهینه اگر تابع هدف MAX باشد خط تابع هدف را در جهت بیشتر شدن و اگر تابع هدف MIN باشد خط تابع هدف را در جهت کمتر شدن حرکت می دهیم آخرین نقطه ای که توسط خط تابع هدف قطع می شود گوشه بهینه است.

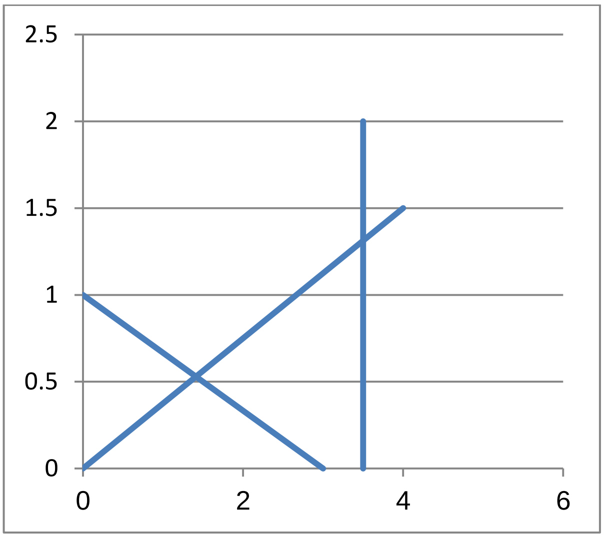
$$\max(z) = 12x_1 + 8x_2 = 120 \text{ عدد دلخواه} \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 15 \\ x_1 = 10 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

روش مختصات گوشه ها برای مشخص شدن نقطه بهینه

$$\begin{cases} D(0,0) \rightarrow Z = 0 \\ C(0,33.\bar{3}) \rightarrow Z = 266.4 \\ M(5,30) \rightarrow Z = 300 \rightarrow M \text{گوشه بهینه} \\ F(20,0) \rightarrow Z = 240 \end{cases}$$

حالتهای خاص:

- ✓ فاقد منطقه موجه: هرگاه بین محدودیتهای یک مسئله هیچ نقطه اشتراکی وجود نداشته باشد مسئله فاقد منطقه موجه است



- ✓ جواب بهینه چندگانه: هرگاه تابع هدف موازی یکی از محدودیتهای در بر گیرنده جواب بهینه باشد مسئله دارای جواب بهینه چندگانه است.

مثال3:

$\max(z) = 10x_1 + 20x_2$

$10x_1 + 6x_2 \leq 2500$

$5x_1 + 10x_2 \leq 2000$

$x_1 \text{و} x_2 \geq 0$

پاسخ3:

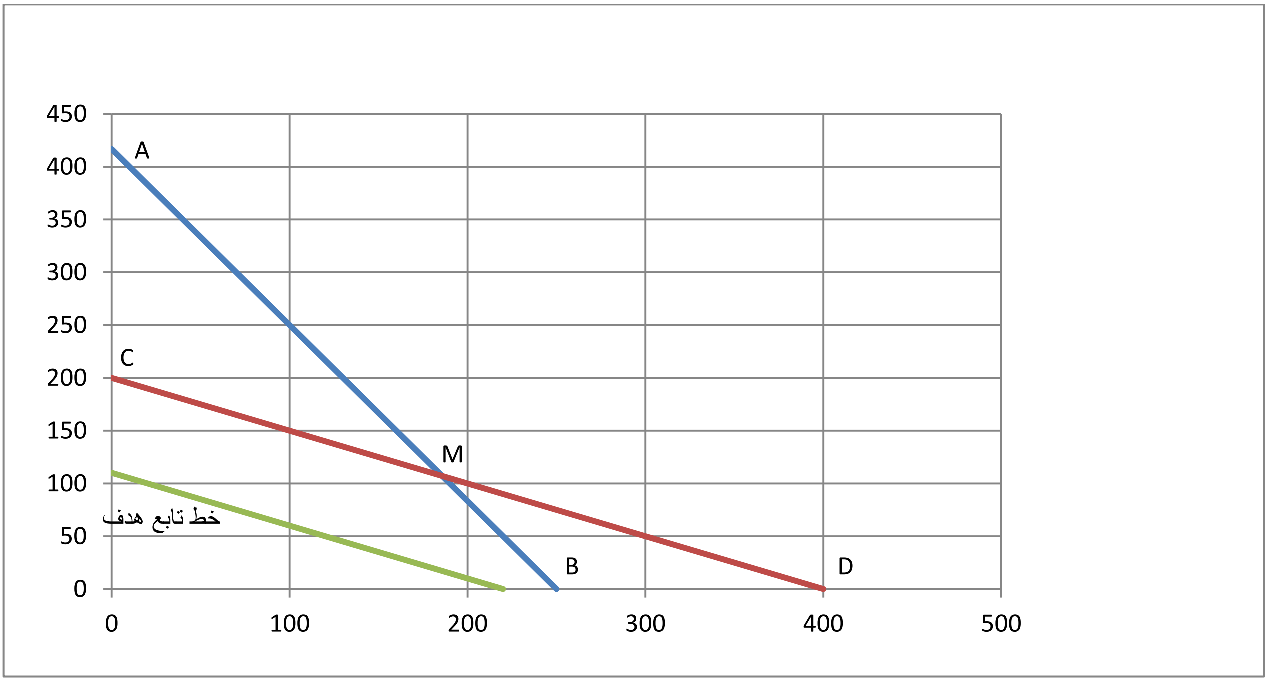
$$10x_1 + 6x_2 = 2500 \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 416.\bar{6} \ A: (0,416.\bar{6}) \\ x_1 = 250 \leftarrow x_2 = 0 \ B: (250,0) \rightarrow z = 2500 \end{cases}$$

$$5x_1 + 10x_2 = 2000 \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 200 \ C: (0,200) \rightarrow z = 4000 \\ x_1 = 400 \leftarrow x_2 = 0 \ D: (400,0) \end{cases}$$

$$\max(z) = 10x_1 + 20x_2 = 2200 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 110 \\ x_1 = 220, x_2 = 0 \end{cases} \text{مختصات خط تابع هدف}$$

برای بدست آوردن نقطه تلاقی دو خط (محدودیت) از روش دو معادله و دو مجهول استفاده می کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} 10x_1 + 6x_2 = 2500 \\ 5x_1 + 10x_2 = 2000 \\ \text{-------------------------} \\ 14x_2 = 1500 \rightarrow x_2 = 107.1, x_1 = 185.8 \end{array}\right. \rightarrow m(185.8,107.1) \text{نقطه بهینه}$$



✓ ناحیه جواب نامحدود:

- جواب بهینه محدود: هرگاه در حالت منطقه موجه نامحدود قرار بگیریم هرگاه همواره نقاطی مشترک بین منطقه موجه و تابع هدف وجود داشته باشد مسئله دارای حالت خاص منطقه موجه نامحدود ، جواب بهینه نامحدود می باشد.

مثال4:

$\max(z) = 6x_1 + 2x_2$

S.T:

$2x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 4$

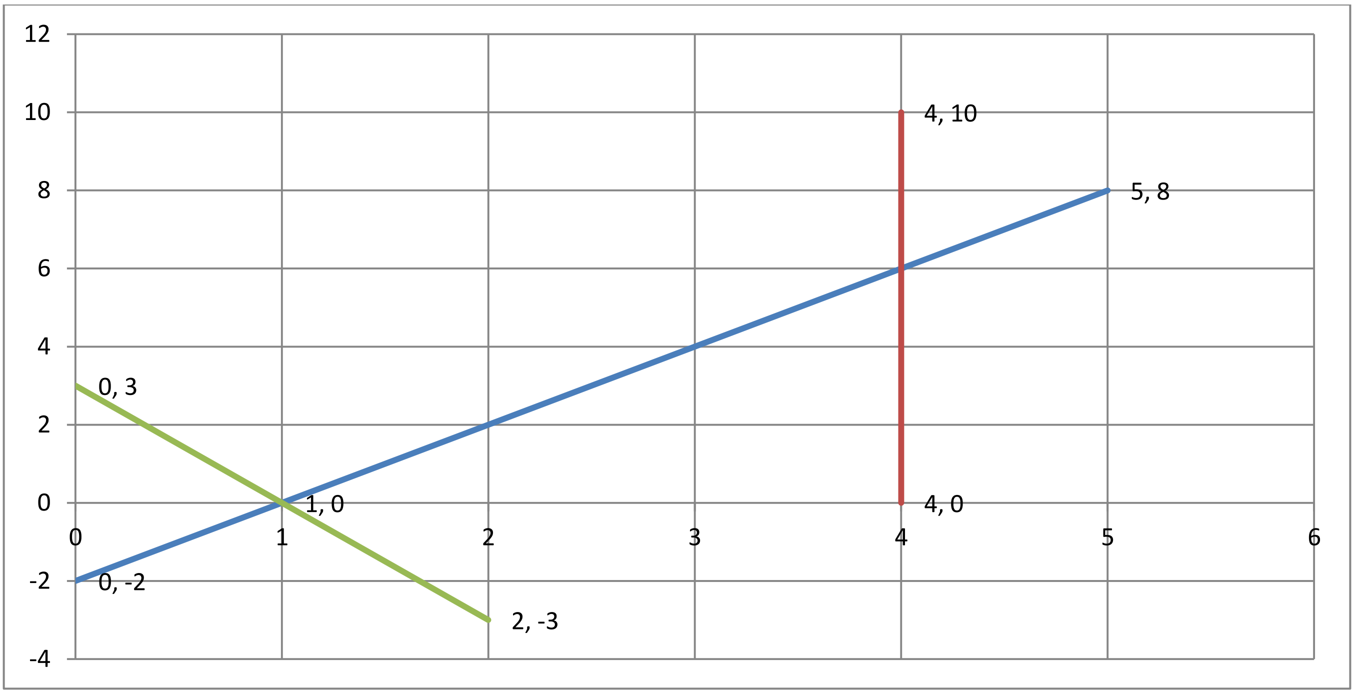
$x_1 و x_2 \geq 0$

پاسخ4:

$$2x_1 - x_2 = 2 \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = -2 \ A:(0,-2) \\ x_1 = 1 \leftarrow x_2 = 0 \ B:(1,0) \end{cases}$$

$x_1 = 4$

$$\max(z) = 6x_1 + 2x_2 = 6 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 3 \\ x_1 = 1, x_2 = 0 \end{cases}$$ مختصات خط تابع هدف



- جواب بهینه محدود:

مثال5:

$\max(z) = 6x_1 - 2x_2$

S.T:

$x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 4$

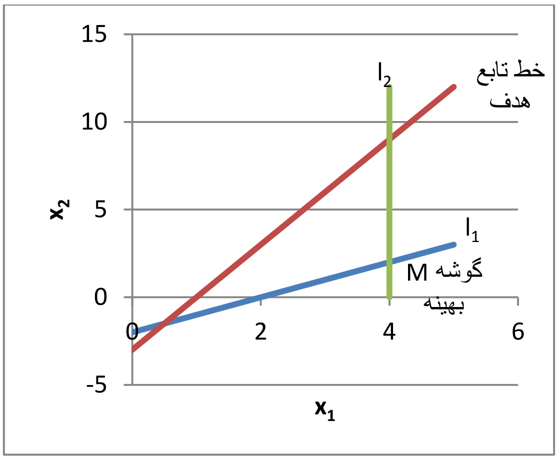
x_1 و $x_2 \geq 0$

پاسخ5:

$$x_1 - x_2 = 2 \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = -2 \ A:(0,-2) \\ x_1 = 2 \leftarrow x_2 = 0 \ B:(2,0) \end{cases}$$

$x_1 = 4$

$$\max(z) = 6x_1 - 2x_2 = 6 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = -3 \\ x_1 = 1, x_2 = 0 \end{cases}$$ مختصات خط تابع هدف



مثال6:

$\min(z) = 6x_1 + 3x_2 = 12$

S.T:

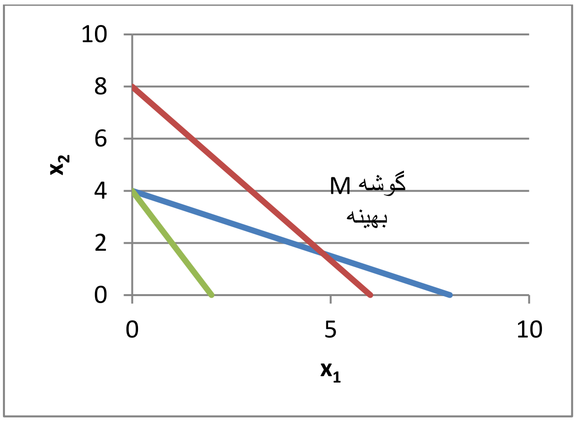
$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 24 \end{Bmatrix}$$

x_1و$x_2 \geq 0$

پاسخ6:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 4 \\ x_1 = 8 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \\ 4x_1 + 3x_2 = 24 \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 8 \\ x_1 = 6 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$6x_1 + 3x_2 = 12 \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 4 \\ x_1 = 2, x_2 = 0 \end{cases}$$



✓ ناحیه جواب تبهگن: هرگاه در روش ترسیمی یک نقطه از محل تقاطع بیش از 2 معادله حدی به‌وجود آمده باشد مسئله تبهگن است.

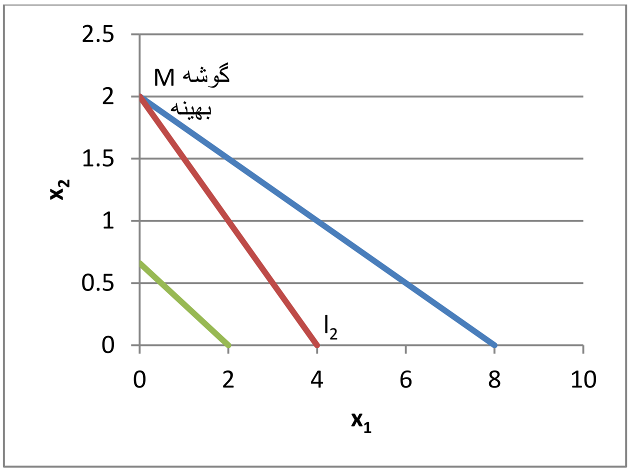
مثال7:

$\max(z) = 3x_1 + 9x_2 < 0$

$x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



پاسخ7:

$$x_1 + 4x_2 = 8 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 2 \ \mathrm{A}: (0,2) \\ x_1 = 8 \leftarrow x_2 = 0 \ \mathrm{B}: (8,0) \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2 \ A: (0,2) \\ x_1 = 4, x_2 = 0 \ D: (4,0) \end{cases}$$

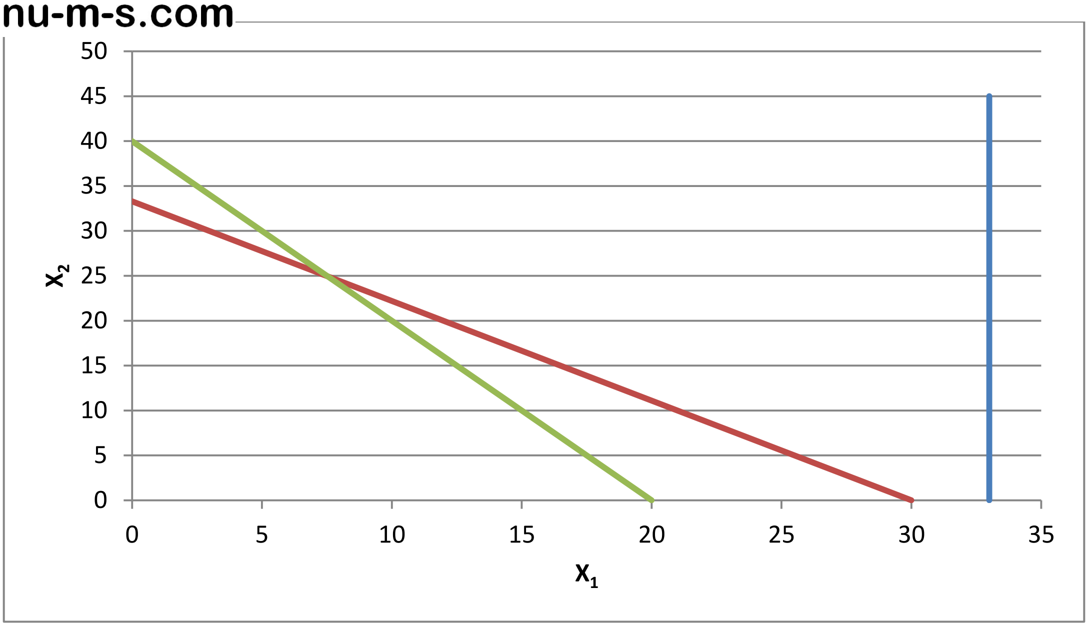
$$\max(z) = 3x_1 + 9x_2 = 6 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0.\bar{6} \\ x_1 = 2, x_2 = 0 \end{cases}$$

محدودیت

- موثر: محدوديتي است كه در تشكيل منطقه موجه دخالت داشته باشد
- زائد: محدوديتي است كه در تشكيل منطقه موجه دخالت نداشته باشد

محدودیت

- الزام آور:محدوديتي است موثر كه نقطه بهينه بر روي معادله حدي مربوط به آن محدوديت واقع شده است
- غير الزام آور:



پاسخ سوال 12 صفحه59:

ماه	تعداد تلویزیون سفارش داده شده
1	1200
2	2100
3	2400
4	3000
5	4000

تولید ساعات عادی 2000 دستگاه با هزینه100000

تولید ساعات اضافه کاری 600 دستگاه با هزینه150000

هزینه انبار داری 2000

$$\left\{\begin{matrix} R_1 = \text{تعداد تولید ماه اول ساعات عادی} \\ R_2 = \text{تعداد تولید ماه دوم ساعات عادی} \\ R_3 = \text{تعداد تولید ماه سوم ساعات عادی} \\ R_4 = \text{تعداد تولید ماه چهارم ساعات عادی} \\ R_5 = \text{تعداد تولید ماه پنجم ساعات عادی} \end{matrix}\right\} R_i = (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\left\{\begin{matrix} O_1 = \text{تعداد تولید ماه اول ساعات اضافه} \\ O_2 = \text{تعداد تولید ماه دوم ساعات اضافه} \\ O_3 = \text{تعداد تولید ماه سوم ساعات اضافه} \\ O_4 = \text{تعداد تولید ماه چهارم ساعات اضافه} \\ O_5 = \text{تعداد تولید ماه پنجم ساعات اضافه} \end{matrix}\right\} O_i = (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\left.\begin{cases} I_1 = \text{تعداد تولید ماه اول ساعات عادی} \\ I_2 = \text{تعداد تولید ماه دوم ساعات عادی} \\ I_3 = \text{تعداد تولید ماه سوم ساعات عادی} \\ I_4 = \text{تعداد تولید ماه چهارم ساعات عادی} \end{cases}\right\} I_i = (i = 1,2,3,4)$$

$$\min(z) = 100000(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) + 150000\sum_{i=1}^{5} O + 2000\sum_{i=1}^{4} I$$

S.T:

$\sum_{i=1}^{5} R_i \leq 2000$, $\sum_{i=1}^{5} O_i \leq 600$, $R_1 + O_1 - I_1 \geq 1200$, $R_2 + O_2 + I_1 - I_2 \geq 2100$

, $R_3 + O_3 + I_2 - I_3 \geq 2400$, $R_4 + O_4 + I_3 - I_4 \geq 3000$, $R_5 + O_5 + I_4 \geq 4000$,

$R_i, O_i, I_i \geq 0$

روش سیمپلکس:

ویژگی های یک مسئله با فرم استاندارد:

- تابع هدف فرم استاندارد داشته باشد یعنی max باشد
- همه محدودیت ها کوچکتر مساوی باشند
- همه متغیر ها غیر صفر هستند

سیمپلکس عمدتا کار خود را از مبدا مختصات شروع می کند .

متغیر های برابر ساز : متغیر های غیر منفی هستند که به محدودیتهای کوچکتر مساوی با علامت مثبت اضافه و از محدودیتهای بزرگتر و مساوی کم می شود تا معادلات را به نامعادله تبدیل کند .

S مثبت است هرگاه s داخل منطقه موجه باشد

S منفی است هرگاه s خارج از منطقه موجه باشد

S صفر است هرگاه s روی محدودیت واقع شود

در روش سیمپلکس متغیر اساسی متغیری است با مقدار غیر صفر و متغیر های غیر اساسی متغیر های با مقدار صفر می باشند.

مثال8:

$\max(z) = 12x_1 + 8x_2$

s.t:

$5x_1 + 2x_2 \leq 150$

$2x_1 + 3x_2 \leq 100$

$4x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1, x_2 \geq 0$

پاسخ8:

$z - 12x_1 - 8x_2 = 0$

$5x_1 + 2x_2 + s_1 = 150$

$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 100$

$4x_1 + 2x_2 + s_3 = 80$

x_1وx_2وs_1وs_2و$s_3 \geq 0$

بایستی به ازای تعداد محدودیت ها متغیر های اساسی شروع مسئله داشته باشیم.

تابلوی مقدماتی		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
z		-12	-8	0	0	0	0
متغیرهای اساسی شروع مسئله	s_1	5	2	1	0	0	150
	s_2	2	3	0	1	0	100
	s_3	4	2	0	0	1	80

در جداول سیمپلکس متغیر های اساسی بایستی حتما شرط پایه ای بودن را داشته باشند (یکه بودن) ؛ در غیر اینصورت باید شرط یکه بودن را فراهم کنیم.

$x_1 = 0$ {چون روش سیمپلکس کار خود را از مبدا مختصات شروع می کند}

$x_2 = 0$ {چون روش سیمپلکس کار خود را از مبدا مختصات شروع می کند}

$s_1 = 150$

$s_2 = 100$

$s_3 = 80$

شرط پایه ای بودن یعنی اینکه مقدار آن متغیر در محل تلاقی سطر و ستون عدد 1 و در بقیه سطر ها صفر باشد.

شرط بهینگی یعنی هرگاه در سطر z عدد منفی نداشته باشیم جدول بهینه است.

اگر در سطر z عدد منفی داشتیم منفی ترین مقدار آن را انتخاب می کنیم ؛ متغیر مربوط به آنرا متغیر ورودی می نامیم و ستونی که متغیر ورودی در آن قرار دارد را انتخاب کرده و ستون لولا می نامیم.

برای انتخاب متغیر خروجی اعداد سمت راست را نظیر به نظیر بر اعداد مثبت ستون لولا تقسیم می کنیم ؛ کوچکترین مقدار را انتخاب کرده و متغیر مربوط به آن را متغیر خروجی می نامیم ؛ سطری که متغیر خروجی در آن قرار دارد را انتخاب و سطر لولا می نامیم ، عدد محل تلاقی سطر و ستون لولا را عدد لولا می نامیم.

تابلو2:

گام اول: شرط پایه‌ای بودن را برای متغیر های اساسی برقرار می کنیم.

گام دوم: سطر جدید لولا را می نویسیم با استفاده از فرمول زیر:

$$\text{سطر جدید لولا} = \frac{\text{سطر قدیم لولا}}{\text{عدد لولا}}$$

گام سوم بقیه اعداد را با استفاده از فرمول زیر می نویسیم:

سطر جدید = سطر قدیم − (ضریب مربوطه در ستون لولا) (سطر جدید لولا)

پاسخ 2 با استفاده از روش سیمپلکس:

سطر جدید z=[-12 -8 0 0 0 0]-(-12)[1 1/2 0 0 1/4 20]=[0 -2 0 0 3 240]

سطر جدید s_1=[5 2 1 0 0 150]-(5)[1 1/2 0 0 1/4 20]=[0 -1/2 1 0 -5/4 50]

سطر جدید s_2=[2 3 0 1 0 100]-(2)[1 1/2 0 0 1/4 20]=[0 2 0 1 -1/2 60]

	I	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
	z	0	-2	0	0	3	240
متغیر های اساسی	s_1	0	-1/2	1	0	-5/4	50
	s_2	0	2	0	1	-1/2	30=60÷2
	x_1	1	1/2	0	0	1/4	40=20÷0.5

تابلوی 3:

سطر جدید s_1=[0 -1/2 2 0 -5/4 50]-(-1/2)[0 1 0 1/2 -1/4 30]=[0 0 1 1/4 -11/8 65]

سطر جدید x_1=[1 1/2 0 0 1/4 20]-(1/2)[0 1 0 1/2 -1/4 30]=[1 0 0 -1/4 3/8 5]

سطر جدید z=[0 -2 0 0 3 240]-(-2)[0 1 0 1/2 -1/4 30]=[0 0 0 1 5/2 300]

	II	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
	z	0	0	0	1	5/2	300
متغیر های اساسی	s_1	0	0	1	1/4	-11/8	65
	x_2	0	1	0	1/2	-1/4	30
	x_1	1	0	0	-1/4	3/8	5

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 30 \\ s_1 &= 65 \\ s_2 &= 0 \\ s_3 &= 0 \\ z^* &= 300 \end{aligned} \quad \max(z) = 12x_1 + 8x_2 = 300$$

مثال 9:

$\max(z) = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$

s.t:

$3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30$

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 40$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

پاسخ 9:

$z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30$

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40$

x_1, x_2, x_3 و s_1 و $s_2 \ge 0$

تابلوی مقدماتی		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
z		-4	-3	-6	0	0	0
متغیر های اساسی	s_1	3	1	3	1	0	30÷3=10
	s_2	2	2	3	0	1	40÷3=13.3

سطر جدید s_2=[2 2 3 0 1 40]-(3)[1 1/3 1 1/3 0 10]=[-1 1 0 -1 1 10]

سطر جدید z=[-4 -3 -6 0 0 0]-(-6)[1 1/3 1 1/3 0 10]=[2 -1 0 2 0 60]

I		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
z		2	-1	0	2	0	60
متغیر های اساسی	x_3	1	1/3	1	1/3	0	10÷1/3=30
	s_2	-1	1	0	-1	1	10÷1=10

سطر جدید x_3=[1 1/3 1 1/3 0 10]-(1/3)[-1 1 0-1 1 10]=[4/3 0 1 2/3 -1/3 20/3]

سطر جدید z=[2 -1 0 2 0 60]-(-1)[-1 1 0 -1 1 10]=[1 0 0 1 1 70]

II		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
z		1	0	0	1	1	70
متغیرهای اساسی	x_3	4/3	0	1	2/3	-1/3	20/3
	x_2	-1	1	0	-1	1	10

جدول بهینه است

شرط موجه بودن مثبت بودن ردیف b است

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = 20/3 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ z^* = 70 \end{array} \quad \max(z) = 70$$

روش M بزرگ

در این روش برای محدودیتهای بزرگتر مساوی و مساوی از متغیر مصنوعی R استفاده می کنیم .

متغیر های مصنوعی متغیر هایی هستند که در روش سیمپلکس با استفاده از آنها محدودیتهای بزرگتر مساوی و محدودیتهای مساوی را به حالت تساوی تبدیل می کنیم ؛ با اضافه کردن متغیر مصنوعی به محدودیت موجب بزرگتر شدن منطقه موجه می گردد به گونه ای که مبدا مختصات نیز جز منطقه موجه آن محدودیت قرار بگیرد.

با بزرگتر شدن منطقه موجه این احتمال به وجود می آید که جواب بهینه بر روی یکی از نقاط گوشه منطقه موجه ناشی از اضافه شدن محدودیت مصنوعی واقع شود که چون در منطقه اصلی موجه مسئله قرار ندارد بنابر این موجه نیست برای جلوگیری از این امر جریمه ای معادل M به متغیر مصنوعی R در تابع هدف (MR) در تابع هدف max از سمت راست تابع هدف کم و به سمت راست تساوی تابع هدف MIN اضافه می شود.

مثال10:

$\min(z) = -3x_1 + x_2 + x_3$

s.t:

$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11$

$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$

$-2x_1 + x_3 = 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

پاسخ10:

$$\min(z) = -3x_1 + x_2 + x_3 + MR_2 + MR_3 \rightarrow \max(-z) = 3x_1 - x_2 - x_3 - MR_2 - MR_3$$
$$\rightarrow -z - 3x_1 + x_2 + x_3 + MR_2 + MR_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + R_2 = 3$$

جایی که هم S باشد هم R را به عنوان متغیر اساسی وارد تابلو می کنیم

$$-2x_1 + x_3 + R_3 = 1$$

$$x_1 و x_2 و x_3 و S_1 و S_2 و R_2 و R_3 \geq 0$$

نکته: به محدودیتهای کوچکتر و مساوی فقط S اضافه می شود ؛ به محدودیتهای بزرگتر و مساوی R اضافه و S کم می شود و در محدودیتهای مساوی فقط R اضافه می شود.

تابلوی مقدماتی		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_2	R_3	b
z		-3	1	1	0	0	M	M	0
متغیرهای اساسی شروع مسئله	s_1	1	-2	1	1	0	0	0	11
	$(-M)R_2$	-4	1	2	0	-1	1	0	3
	$(-M)R_3$	-2	0	1	0	0	0	1	1

در روش M بزرگ ابتدا شرط پایه‌ای بودن را برای متغیرهای اساسی برقرار می کنیم (مقادیر M در سطر Z بایستی به 0 تبدیل شوند) به این منظور M− برابر سطرهای متغیر مصنوعی را با سطر Z جمع می کنیم و در سطر z تابلوی بعدی می نویسیم ؛ از اینجا به بعد مانند سیمپلکس ساده عمل می کنیم.

I		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_2	R_3	b
z		$-3+6M$	$1-M$	$1-3M$	0	M	0	0	$-4M$
متغیرهای اساسی	S_1	1	-2	1	1	0	0	0	11÷1=11
	R_2	-4	1	2	0	-1	1	0	3÷2=3/2
	R_3	-2	0	1	0	0	0	1	1÷1=1

این مثال به نتیجه نمی رسد

روش دو مرحله ای

مرحله اول: حداقل کردن تابع هدف متغیر های مصنوعی

مرحله دوم : حل مدل

در روش دو مرحله ای پس از اضافه کردن متغیر های مصنوعی به محدودیتهای بزرگتر و مساوی یا مساوی ؛ یک تابع هدف حداقل $(MIN(W))$ برای مجموع متغیر های مصنوعی تشکیل می دهیم سپس در مرحله اول تابع هدف متغیر های مصنوعی را حل می کنیم تا زمانی که در سطر W عدد منفی نداشته باشیم سپس وارد مرحله دوم می شویم .

نکته: در جداول مقدماتی مرحله اول و دوم ابتدا بایستی شرط پایه ای بودن را برای متغیر های اساسی برقرار کنیم .

مثال11:

$\max(z) = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

s.t:

$x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15$

$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

پاسخ11:

$z - 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 0$

$x_1 + 5x_2 - 3x_3 - S_1 + R_1 = 15$

$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_2 = 20$

$x_1 + x_2 + x_3 + R_3 = 5$

x_1وx_2وx_3وS_1وS_2وR_1و$R_3 \geq 0$

$\min(w) = R_1 + R_3$

$MAX(-W) = -R_1 - R_3 \rightarrow -W + R_1 + R_3 = 0$

تابلوی مقدماتی مرحله اول		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_3	b
w		0	0	0	0	0	1	1	**0**
متغیرهای اساسی شروع مسئله	$(-1)R_1$	1	5	-3	-1	0	1	0	**15**
	S_2	5	-6	10	0	1	0	0	**20**
	$(-1)R_3$	1	1	1	0	0	0	1	**5**

در تابلو نهایی مرحله اول ستون متغیر های مصنوعی را حذف می کنیم سپس سطر z را جایگزین سطر W می کنیم ؛ تابلوی مقدماتی مرحله دوم بدست می آید در تابلوی مقدماتی مرحله دوم شرط پایه ای بودن را برای متغیر های اساسی فراهم می کنیم تا به تابلوی شماره 1 مرحله دوم برسیم سپس مسئله را از طریق سیمپلکس عادی حل می کنیم . شرط بهینگی آن است که در سطر z مقدار منفی نداشته باشیم .

تابلوی I مرحله اول		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_3	b
w		-2	-6	2	1	0	0	0	**-20**
متغیرهای اساسی	R_1	1	5	-3	-1	0	1	0	**15**
	S_2	5	-6	10	0	1	0	0	**20**
	R_3	1	1	1	0	0	0	1	**5**

سطر جدید S_2=[5 -6 10 0 1 0 0 20]-(-6)[1/5 1 -3/5 -1/5 0 1/5 0 3]=[19/5 0 32/5 -6/5 1 6/5 0 38]

سطر جدید R_3=[1 1 1 0 0 0 1 5]-(1)[1/5 1 -3/5 -1/5 0 1/5 0 3]=[4/5 0 8/5 1/5 0 1/5 1 2]

سطر جدید w=[-2 -6 2 1 0 0 0 -20]-(-6)[1/5 1 -3/5 -1/5 0 1/5 0 3]=[-4/5 0 -8/5 -1/5 0 6/5 0 -2]

تابلوی II مرحله اول		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_3	b
w		-4/5	0	-8/5	-1/5	0	6/5	0	**-2**
متغیرهای اساسی	x_2	1/5	1	-3/5	-1/5	0	1/5	0	**3**
	S_2	19/5	0	32/5	-6/5	1	6/5	0	**23/4**
	R_3	4/5	0	8/5	1/5	0	1/5	1	**5/4**

جدید S_2=[19/5 0 32/5 -6/5 1 6/5 0 38]-(-32/5)[1/2 0 1 1/8 0 1/8 5/8 5/4]=[3/5 0 0 -2 1 2/5 -4 30]

x_2=[1/5 1 -3/5 -1/5 0 1/5 0 3]-(-3/5)[1/2 0 1 1/8 0 1/8 5/8 5/4]=[1/2 1 0 -1/8 0 11/40 3/8 15/4]

سطر جدید w=[-4/5 0 -8/5 -1/5 0 6/5 0 -2]-(-8/5)[1/2 0 1 1/8 0 1/8 5/8 5/4]=[0 0 0 0 0 7/5 1 0]

تابلوی III مرحله اول		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_3	b
w		0	0	0	0	0	7/5	1	**0**
متغیرهای اساسی	x_2	1/2	1	0	-1/8	0	11/40	3/8	**15/4**
	S_2	3/5	0	0	-2	1	2/5	-4	**30**
	x_3	1/2	0	1	1/8	0	1/8	5/8	**5/4**

در تابلو نهایی مرحله اول ستون متغیر های مصنوعی را حذف می کنیم و سطر Z را جایگزین سطر W می کنیم تابلوی مقدماتی مرحله دوم به دست می آید در تابلو مقدماتی مرحله دوم متغیر های اساسی را یکه می کنیم (شرط پایه ای بودن) ؛ به جدول شماره 1 مرحله دوم می رسیم ؛ از این به بعد مانند سیمپلکس ساده عمل می کنیم . شرط بهینگی آن است که در سطر Z مقدار منفی نداشته باشیم .

تابلوی مقدماتی مرحله دوم		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
Z		-5	6	7	0	0	**0**
متغیرهای اساسی شروع مسئله	x_2	1/2	1	0	-1/8	0	**15/4**
	S_2	3/5	0	0	-2	1	**30**
	x_3	1/2	0	1	1/8	0	**5/4**

سطر جدید s_2=[3/5 0 0 -2 1 30]-(3/5)[1 0 2 1/2 0 5/2]=[0 0 -6/5 -23/10 1 33/2]

سطر جدید x_2=[1/2 1 0 -1/8 0 15/4]-(1/2)[1 0 2 1/2 0 5/2]=[0 1 -1 -3/8 0 25/4]

سطر جدید Z=[-5 6 7 0 0 0]-(-5)[1 0 2 1/2 0 5/2]=[0 0 17 5/2 0 25/2]

تابلوی I مرحله دوم		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
Z		0	0	17	5/2	0	**25/2**
متغیرهای اساسی	x_2	0	1	-1	-3/8	0	**25/4**
	S_2	0	0	-6/5	-23/10	1	**33/2**
	x_1	1	0	2	1/2	0	**5/2**

مثال 12:

$\max(z) = x_1 + x_2$

s.t

$3x_1 + 2x_2 \leq 20$

$2x_1 + 3x_2 \leq 20$

$x_1 + 2x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

پاسخ12:

$\min(w) = R_3 \rightarrow \max(-w) = -R_3 \rightarrow -w + R_3 = 0$

$z - x_1 - x_2 = 0$

$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 20$

$2x_1 + 3x_2 + S_2 = 20$

$x_1 + 2x_2 - S_3 + R_3 = 2$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, R_3 \geq 0$

تابلوی مقدماتی مرحله اول		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_3	b
w		0	0	0	0	0	1	**0**
متغیرهای اساسی شروع مسئله	S_1	3	2	1	0	0	0	**20**
	S_2	2	3	0	1	0	0	**20**
	$(-1)R_3$	1	2	0	0	-1	1	**2**

تابلوی I مرحله اول		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_3	b
w		-1	-2	0	0	1	0	**-2**
متغیرهای اساسی	S_1	3	2	1	0	0	0	**20**
	S_2	2	3	0	1	0	0	**20**
	R_3	1	2	0	0	-1	1	**2**

سطر جدید s_2=[2 3 0 1 0 0 20]-(3)[1/2 1 0 0 -1/2 1/2 1]=[1/2 0 0 1 3/2 -3/2 17]

سطر جدید S_1=[3 2 1 0 0 0 20]-(2)[1/2 1 0 0 -1/2 1/2 1]=[2 0 1 0 1 -1 18]

سطر جدید w=[-1 -2 0 0 1 0 -2]-(-2)[1/2 1 0 0-1/2 1/2 1]=[0 0 0 0 0 1 0]

تابلوی II مرحله اول (تابلو نهایی)		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_3	b
w		0	0	0	0	0	1	**0**
متغیرهای اساسی	S_1	2	0	1	0	1	-1	**18**
	S_2	1/2	0	0	1	3/2	-3/2	**17**
	x_2	1/2	1	0	0	-1/2	1/2	**1**

تابلوی مقدماتی مرحله دوم		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z		-1	-1	0	0	0	**0**
متغیرهای اساسی شروع مسئله	S_1	2	0	1	0	1	**18**
	S_2	1/2	0	0	1	3/2	**17**
	x_2	1/2	1	0	0	-1/2	**1**

[-1 -1 0 0 0 0]-(-1)[1 2 0 0 -1 2]=[0 1 0 0 -1 2]=z سطر جدید

[2 0 1 0 1 18]-(2)[1 2 0 0 -1 2]=[0 -4 1 0 3 14]=S_1 سطر جدید

[1/2 0 0 1 3/2 17]-(1/2)[1 2 0 0 -1 2]=[0 -1 0 1 5/2 16]=S_2 سطر جدید

تابلوی I مرحله دوم		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z		0	1	0	0	-1	**2**
متغیرهای اساسی	S_1	0	-4	1	0	3	**14**
	S_2	0	-1	0	1	5/2	**16**
	x_1	1	2	0	0	-1	**2**

[0 1 0 0 -1 2]-(-1)[0 -4/3 1/3 0 1 14/3]=[0 -1/3 1/3 0 0 20/3]=z سطر جدید

[1 2 0 0 -1 2]-(-1)[0 -4/3 1/3 0 1 14/3]=[1 2/3 1/3 0 0 20/3]=x_1 سطر جدید

[0 -1 0 1 5/2 16]-(5/2)[0 -4/3 1/3 0 1 14/3]=[0 7/3 -5/6 1 0 13/3]=S_2 سطر جدید

تابلوی II مرحله دوم		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z		0	-1/3	1/3	0	0	**20/3**
متغیرهای اساسی	S_3	0	-4/3	1/3	0	1	**14/3**
	S_2	0	7/3	-5/6	1	0	**13/3**
	x_1	1	2/3	1/3	0	0	**20/3**

[0 -1/3 1/3 0 0 20/3]-(-1/3)[0 1 -5/42 3/7 0 13/7]=[0 0 37/126 1/7 0 260/21]=z سطر جدید

[1 2/3 1/3 0 0 20/3]-(2/3)[0 1 -5/42 3/7 0 13/7]=[0 0 11/63 4/7 1 50/7]=x_1 سطر جدید

[0 -4/3 1/3 0 1 14/3]-(-4/3)[0 1 -5/42 3/7 0 13/7]=[0 0 16/63 -2/7 0 114/21]=S_3 سطر جدید

تابلوی III مرحله دوم (تابلو نهایی)		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z		0	0	37/126	1/7	0	**260/21**
متغیرهای اساسی	S_3	0	0	11/63	4/7	1	**50/7**
	x_2	0	1	-5/42	3/7	0	**12/7**
	x_1	1	0	16/63	-2/7	0	**114/21**

بهینه چند گانه:

در روش سیمپلکس هرگاه مقدار یک متغیر اساسی در سطر Z جدول بهینه برابر صفر باشد آن مسئله دارای حالت خاص بهینه چندگانه می باشد.

نمونه:

$$\max(z) = 10x_1 + 20x_2$$

s.t:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(تابلو نهایی)		x_1	x_2	S_1	S_2	b
Z		0	0	5	0	60
متغیرهای اساسی	S_2	1/2	1	-1/4	0	3
	x_2	1	0	-1/2	1	2

تبهگن:

هرگاه مقدار یک متغیر اساسی در جداول سیمپلکس برابر صفر باشد (وجود عدد صفر در ستون سمت راست برای یک یا چند سطر به جز سطر تابع هدف) مسئله دارای حالت خاص تبهگن می باشد . اگر این حالت در جدولی غیر از جدول نهایی اتفاق بیفتد تبهگن موقت و اگر در جدول نهایی باشد تبهگن دائم است.

نمونه:

$\max(z) = 3x_1 + 9x_2$

s.t:

$x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1 و x_2 \geq 0$

		x_1	x_2	S_1	S_2	b
Z		-3	-9	0	0	0
متغیرهای اساسی اولیه مسئله	S_1	1	4	1	0	8
	S_2	1	2	0	1	4
Z		-3/4	0	9/4	0	18
متغیرهای اساسی	x_2	1/4	1	1/4	0	2
	S_2	1/2	0	-1/2	1	0
Z^*		0	0	3/2	3/2	18
متغیرهای اساسی	x_2	0	1	1/2	-1/2	2
	x_1	1	0	-1	2	0

فاقد منطقه موجه:

هرگاه مقدار یک متغیر مصنوعی در جدول بهینه غیر صفر باشد (وجود متغیر اساسی مصنوعی در جدول نهایی) مسئله فاقد منطقه موجه می باشد.

نمونه:

$\max(z) = 4x_1 + 3x_2$

s.t:

$x_1 + x_2 \leq 3$

$2x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 4$

$x_1 و x_2 \geq 0$

(تابلو نهایی)		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_3	b
z^*		0	0	$\frac{m+10}{3}$	$\frac{m+1}{3}$	0	0	-2m-11
متغیرهای اساسی	x_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	1
	x_1	1	0	1/3	1/3	0	0	2
	R_3	0	0	-1/3	-1/3	-1	1	2

منطقه موجه نامحدود-جواب بهینه نا محدود وجواب بهینه محدود:

وجود ستون منفی یا صفر برای یک متغیر اساسی در تابلوی مقدماتی به مفهوم اینست که منطقه موجه مسئله نامحدود می باشد؛ هرگاه در جداول سیمپلکس متغیر ورودی وجود داشته باشد اما به دلیل منفی یا صفر بودن تمامی عناصر ستون لولا انتخاب متغیر خروجی امکان پذیر نباشد مسئله دارای حالت خاص منطقه موجه نامحدود-جواب بهینه نامحدود می باشد و هرگاه در مسئله منطقه موجه نامحدود به جواب بهینه برسیم مسئله دارای جواب بهینه محدود می باشد.

نمونه:

$\max(z) = 6x_1 + 2x_2$

s.t:

$2x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 4$

x_1 و $x_2 \geq 0$

		x_1	x_2	S_1	S_2	b
Z		-6	-2	0	0	0
متغیر های اساسی اولیه مسئله	S_1	2	-1	1	0	2
	S_2	1	0	0	1	4
Z		0	-5	3	0	6
متغیر های اساسی	x_1	1	-1/2	1/2	0	1
	S_2	0	1/2	-1/2	1	2
Z		0	0	-2	10	36
متغیر های اساسی	x_1	1	0	0	1	4
	x_2	0	1	-1	2	6

$\max(z) = 6x_1 - 2x_2$

s.t:

$2x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 4$

x_1 و $x_2 \geq 0$

		x_1	x_2	S_1	S_2	b
Z		-2	2	0	0	0
متغیر های اساسی اولیه مسئله	S_1	2	-1	1	0	1
	S_2	1	0	0	1	4
Z		0	-1	3	0	6
متغیر های اساسی	x_2	1	-1/2	1/2	0	1
	S_2	0	1/2	-1/2	1	2
Z^*		0	0	2	2	12
متغیر های اساسی	x_2	1	0	0	1	4
	x_1	0	1	-1	2	6