بنام خدا

کوانتوم پیشرفته ۱:

ساکورایی) Sakuri

کوانتوم ۱: ۴ فصل ، کوانتوم ۲: بقیه کتاب + کوانتوم نسبیتی

کتابهای خوب:

- Landau + Lifshitz Q.M. *کتاب بسیار خوبی است. (سری Landau از مرجع هایی است)
- Merzbacher
- Schief (شیف)
- Messia (مسایا)
- Feynman (کتاب مقدماتی و بسیار عمیق)

امتحان میان ترم بعد از اتمام فصل ۲ کتاب است.

Chapter 1: مفاهیم بنیادی

جلسه اول: ۸۴/۶/۲۷

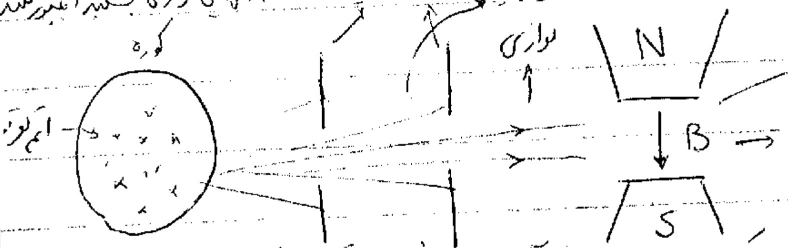
کتاب ساکورایی از فرمول بندی براکت استفاده می کند. (کتب کوانتومی روشهای متفاوتی دارند)
ابتدا با آزمایش اشترن گرلاخ نشان می دهیم که کلاسیک در مباحث اتمی جواب نمی دهد.

آزمایش اشترن گرلاخ:

این آزمایش بدین صورت است که یک باریکه از ذرات را در میدان مغناطیسی می فرستیم و سپس اثرات میدان را روی ذرات باردار را مشاهده می کنیم.

اتم نقره را که لایه های آن پر است و یک الکترون در مدار خارجی دارد. برای این از اتم نقره استفاده می کنیم چون: اتم نقره، اتم ساده ای است یعنی آرایش الکترونی آن پر است و روی لایه آخر یک الکترون دارد. بنابراین همانند این است که یک الکترون را داشته باشیم.

ذرات همه عدد زوج اند | برای این است که آنهایی موازی شوند عبور کنند



اتمها با میدان مغناطیسی برهم کنش می‌کنند.
برهم کنش ذرات باردار با میدان مغناطیسی به چه صورت است که پایین ترین سطح آن برهم کنش دوقطبی مغناطیسی است.
اتداد دلخواه است.
یک توزیع جریان می‌تواند دوقطبی، چهارقطبی و ... داشته باشد پایین ترین آن دوقطبی است.

تعریف گشتاور دوقطبی مغناطیسی برای یک جریان نسبت به یک مبدا: (مبدا $\vec{r}$)

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c}\int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')\, d^3x'$$

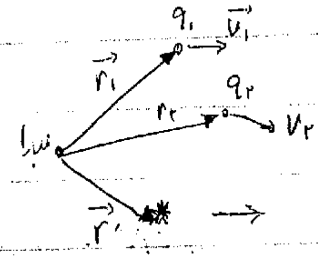
گشتاور دوقطبی مغناطیسی

اگر جریان ($\vec{J}$) حاصل از حرکت ذرات باردار باشد:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \sum_i q_i \vec{v}_i\, \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

(بار نقطه‌ای $\vec{J} = q\vec{v}$ جریان) سرعت

جمع روی بار — سرعت — محل بار ذرات نقطه‌ای



در هر نقطه مثل ($\vec{r}'$) می‌توانیم با توجه به رابطه بالا جریان را بدست آوریم.

اگر $i=1$ را در نظر بگیریم برای $\mathcal{M}$ با توجه به تابع δ انتگرال برداشته می‌شود داریم:

$$\text{تک بار داشته باشیم :} \begin{cases} i=1 \\ \mathcal{M} = \frac{1}{2c} q_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \quad \text{I} \end{cases}$$

* گشتاوری (مغناطیسی) است که بارهای الکتریکی متحرک ایجاد می‌کنند. اگر چند تا بار داشته باشیم جمع را خواهیم داشت

به یک صورت دیگر هم می‌توان نوشت: استفاده کنیم که تکانه زاویه‌ای چقدر است؟

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1$$

استفاده کنیم از اینکه میدان زاویه‌ای این ذره نسبت به نقطه مورد نظر چقدر است.

$$\text{یا} \quad \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = \frac{\vec{L}}{m} \quad \text{II}$$

(با تقطه‌ای از تکانه زاویه‌ای بار)

$$\text{II},\ \text{I} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_L = \frac{q}{2mc}\vec{L}}$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی عادی حاصل از تکانه زاویه‌ای حرکت مداری

گشتاور دوقطبی برای هر ذره‌ای که بار داشته باشد و تکانه زاویه‌ای هم داشته باشد وجود دارد. (گشتاور دوقطبی حاصل از تکانه زاویه‌ای مداری است)

هر ذره‌ای که تکانه زاویه‌ای داشته باشد، گشتاور دوقطبی مغناطیسی دارد به شرطی که بار داشته باشد.

مشاهده شده که ذرات بدون بار مثل نوترون هم گشتاور دوقطبی مغناطیسی غیر عادی دارند.
یک ذره درصورتی μ دارد که بار داشته باشد، اما بسته توزیع بار می‌تواند با داشتن بار خنثی هم μ داشته باشد.

* می‌دانیم که ذرات دارای اسپین هستند یعنی تکانه زاویه‌ای ذاتی است. اما چون این کمیت تغییر نمی‌کند و تحت حرکت تغییر نمی‌کند آیا μ_s وجود دارد؟ اگر وجود داشته باشد از چه نوع است؟
تکانه زاویه‌ای ذاتی را تحت هیچ شرایطی نمی‌توان عوض کرد و ذاتی است.
رابطه برای μ_s وجود دارد، که این رابطه را دیراک اول بصورت نظری و بعد تجربی ثابت کرد:
رابطه μ_s همانند μ_L است اما با یک ضریب خاص. (دیراک از کوانتم اثبات می‌کند.)

$$\mu_s = \frac{e g_c \vec S}{2mc}$$

بعداً این ضریب برقرار نیست!

* ذره می‌تواند L ذاتی داشته باشد، اما μ ذاتی ندارد.
* ذرات مختلف g های مختلف دارند. برای الکترون و هر ذره اسپین $\frac{1}{2}$ رابطه بصورت مقابل است یعنی
این مقدار گشتاور مغناطیسی است (magnetic moment).

$$\mu_s = \frac{e\vec S}{mc}$$

: برای الکترون یا هر ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$

* magnetic moment چنان موجودی است که اگر در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد، به اندازه $U = -\vec\mu\cdot\vec B$ انرژی خواهد داشت.

$U = -\vec\mu\cdot\vec B$ انرژی پتانسیل

* گشتاور دوقطبی مغناطیسی چنان وجودی از ماده است که به این صورت سهم در انرژی دارد. یعنی اگر انرژی یک توزیع جریان را بنویسیم و بسط دهیم این جمله مربوط به گشتاور دوقطبی مغناطیسی پدیدار می‌شود.
* جمله $U = -\vec\mu\cdot\vec B$ می‌گوید که شرطی که بر ذره اسپین‌دار در میدان مغناطیسی نیرو وارد شود این است که B متغیر باشد.
چون μ_s ثابت است و همچنین $\vec F = -\vec\nabla U$.
* نیرو مشتق پتانسیل یعنی تغییرات پتانسیل است، چون μ که ثابت است چون ذاتی است، پس فقط تغییرات B باعث ایجاد نیرو می‌شود.

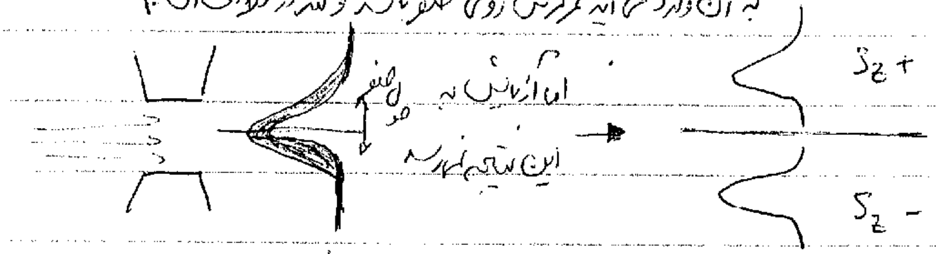
$$\vec F = -\vec\nabla U = +\nabla(\vec\mu\cdot\vec B)$$

اگر B در جهت z باشد: $\vec B = \hat k B \Rightarrow F = \vec\nabla(\mu_z B) = \mu_z \vec\nabla B(r)$

قرار دادن یک ذره اسپین‌دار در یک میدان مغناطیسی متغیر باعث می‌شود که به اندازه F نیرو بر آن وارد شود.
μ_z مولفه z گشتاور دوقطبی مغناطیسی است که مولفه z اسپین را مشخص می‌کند. پس به اندازه مولفه z
اسپین آن بر ذره نیرو وارد می‌شود. ... مولفه z اسپین ... نیرو وارد می‌شود.

آنهایی که مولفه S_z شان مثبت است، همان نیروی مثبت را دارند) و آنهایی که منفی است نیروی منفی (جاذبه) وارد می‌شود.

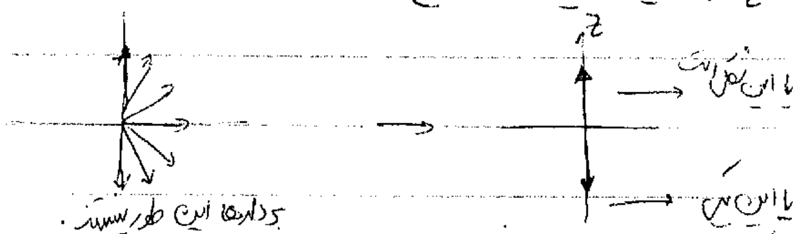
انتظاری که از آزمایش اشترن گرلاخ می‌رفت این بود که به ذرات متناسب به μ_z نیرو وارد می‌شود و چون توزیع μ_z به صورت زمینه‌ای است (هیچ جهت ارجحی وجود ندارد) انتظار می‌رفت که نیرویی که $\langle \mu_z \rangle = 0$ به آن وارد می‌آید تمرکزش روی صفر باشد و کمتر در اطراف آن.



در آزمایش تبدیل به ۲ دسته می‌شوند یک دسته به ازای S_z مثبت و یک دسته به ازای S_z منفی. انتظار کلاسیک این بود که همچنین توزیعی این ذرات داشته باشند.

این اتفاق اولین جایی است که به عنوان عدم کارایی نظریه کلاسیک با آن برخورد می‌کنیم.

اولین نکته: S_z یا $\langle \mu_z \rangle = 0$ این طور نیست و ۲ نوع شکل دارد.



یعنی اگر $\langle \mu_z \rangle = 0$ باشد، دیگر توزیع به صورت پیوسته نیست.

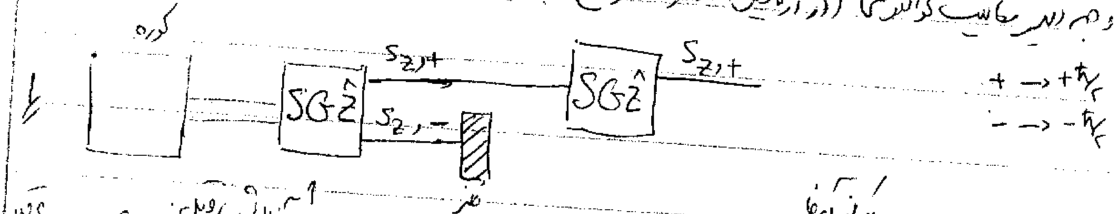
آزمایش اشترن گرلاخ نشان داد که اسپین کوانتیزه است و می‌تواند مقادیر $+\frac{\hbar}{2}$ یا $-\frac{\hbar}{2}$ را بگیرد.
آزمایش اشترن گرلاخ حساسیت‌های عجیب هم دارد.

$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$

اگر B را در جهت z بگیریم، مولفه‌های اسپین ذرات در جهت z جدا می‌شوند. همین حالت را برای x و y هم داریم.

به دستگاه اشترن گرلاخی که مولفه میدان B در جهت z است، $SG\hat{z}$ می‌گوییم.

وجه دیگر مغناطیس کوانتومی (در آزمایش اشترن گرلاخ) به این شکل است.



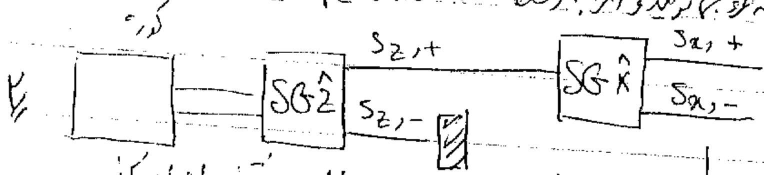
اگر بیاییم جلوی این خروجی را بگیریم با یک سد و دسته ای خروجی را دوباره بفرستیم به یک SG ẑ (دومی)

انتظار داریم که بطور طبیعی یک دسته خارج شود و دیگر $-S_z$ نداشته باشیم. یعنی میبینیم که در اینجا

جهت میدان B در جهت x است.

آزمایش با عقل کلاسیک ما میخواند.

* حال اگر بیاییم همانند قبل یک دسته خروجی تولید و آن را به دستگاه SG x̂ بفرستیم. این دستگاه x ها را جدا می‌کند



٪۵۰

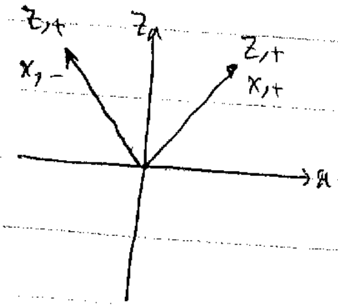
شدت خروجی ها

٪۵۰

یکی است.

چون از نظر ما شکل یکسان است. که چون در نیرو داریم $F = \mu_x \nabla B_x$ پس M_x های مختلف را جدا می‌کند.

انتظار داریم هر دو را ببینیم، چون $S_{z,+}$ ها میتوانند هم زمان بعضی ها $S_{x,+}$ و بعضی $S_{x,-}$ داشته باشند



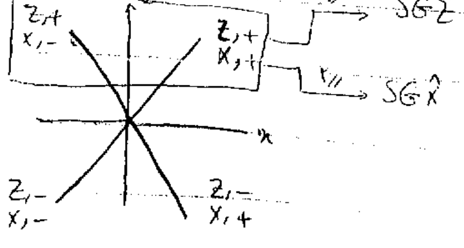
که همین طور هم هست و هر دو را میبینیم.

چرا می‌توانیم هر دو را داشته باشیم؟ چون طبق ادعای کلاسیک

آنهایی که $S_{z,+}$ هستند هم می‌توانند $S_{x,+}$ و هم $S_{x,-}$

داشته باشند. یعنی در صفحه xz بردارها به این شکل

مثلاً وجود دارند یکی $z,+$ با $x,+$ و دیگری $z,+$ با $x,-$.



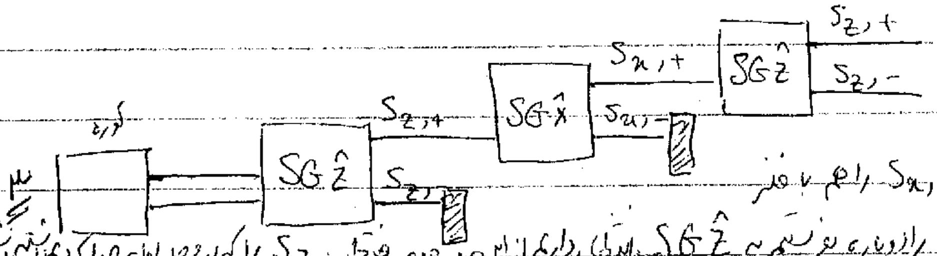
* اگر آزمایش z انجام دهیم، $z,+$ بدست می‌آوریم.

* اگر آزمایش x انجام دهیم، هم $x,+$ و هم $x,-$ خواهیم داشت.

شکل واقعی بردارها

ولی برای مکانیک کوانتومی درست است.

که البته ما میگوییم این شکل برای کلاسیک درست است



این دفعه $S_{x,-}$ را هم با فیلتر می‌گیریم و $S_{x,+}$ را دوباره بفرستیم به $SG\hat{z}$. انتظار داریم از این دو جزء فقط $S_{z,+}$ را که در مرحله اول جدا کردیم داشته باشیم.

می‌بینیم برخلاف تصور باز هم $S_{z,\pm}$ داریم. این معلوم می‌شود که نمی‌شود از بردارها ارتباط دهیم. با یک چیز عجیب سروکار داریم یعنی با پدیده‌هایی سروکار داریم که اگر یک مقدار درست و کارشان کنیم ماهیت شان را از دست می‌دهند. (قسمت مهم کوانتوم مکانیک)

$SG\hat{x}$ که اضافه شده، ظاهراً حافظه این سیستم را از بین برده یعنی تا قبل این سیستم فقط $S_{z,+}$ داشته، اما با اندازه‌گیری در یک جهت دیگر حافظه از بین می‌رود و دیگر ماهیت قبل را ندارند.

ما با فرمول بندی مکانیک کوانتومی راه‌حلی نداریم که این اتفاق توجیه‌پذیر باشد. پس اولین مشکلی که می‌بینیم این است که ساختار برداری برای این وضع ندارد.

حال می‌خواهیم این موضوع را توضیح دهیم یا بهتر است یک فرمول‌بندی جدید برایش بنویسیم.

در کوانتوم مکانیک نمی‌توانیم چراها را جواب دهیم، می‌بینیم که برای بعضی چیزها دلیل پیدا نمی‌کنیم.

حداکثر کارهایی که می‌توانیم در فیزیک انجام دهیم این است که بگوییم این اتفاق با این فرمول بندی دلالت می‌کند و امکان‌پذیر است، نه اینکه چرای این را جواب دهیم.

نمی‌توانیم بگوییم چرا این طور می‌شود $q_1 \times \qquad \times q_2 \xrightarrow{\text{نیرو}} F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ ش

فقط می‌گوییم با این فرمول جواب درست می‌دهد.

برای اینکه این پدیده را توضیح دهیم، یا شبیه همین پدیده را در نور داریم، که جلسه بعد توضیح داده می‌شود.

حال می‌خواهیم ابتدا یک سری پایه‌های ریاضی را بیان کنیم.

در این مبحث احتیاج به فضای برداری داریم و بدانیم دقیقاً چیست! در مبحث‌های بعد هم احتیاج به گروه و نظریه گروه داریم.

۷

تعریف گروه : (ایراندی) مقایسه اسم است

گروه مجموعه ای مانند G و یک عمل ضرب بصورت {G , ∘} است که دارای خواص زیر می باشد:

شرط تشکیل این مجموعه با این عمل ضرب یک سری خواص است :

هر مجموعه ای با آن عمل که دارای این ۴ تا خصوصیت باشد ، می گوییم گروه داریم .

۱- بسته بودن: اگر $a,b \in G$ باشند ، آنگاه $a \circ b \in G$ باشند.

مثال :

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_2	a_3	a_4	a_1
a_2	a_3	a_4	a_2	a_4
a_3	a_4	a_2	a_4	a_3
a_4	a_1	a_1	a_3	a_2

۲- شرکت پذیری : اگر $a,b \in G$ باشند ، آنگاه $a.(b.c)=(a.b).c$

۳- عضو واحد : عضو $e \in G$ وجود داشته باشد ، بگونه ای که $e.a=a.e=a$

یعنی حتماً باید یکی از عضوهایش ، عضو واحد باشد. یعنی شکل در مثال بالا حتماً باید یکی از ۴ عضو ، عضو واحد باشد

۴- عضو معکوس : به ازای هر $a \in G$ ، عضو $a^{-1} \in G$ باشد ، به گونه ای که $a.a^{-1}=a^{-1}.a=e$ واحد

* اگر $a.b=b.a$ باشند ، گروه را "آبلی" می گویند. Abelian

مثال : اعداد حقیقی با عمل جمع (عضو واحد صفر) و یا اعداد حقیقی بدون صفر : عمل ضرب معمولی (عضو واحد یک) (چون صفر معکوس ندارد)

مثال پیچیده : ماتریس های ۲×۲ یونیتاری با عمل ضرب ماتریس ، با دترمینان ماتریس ۱ ! گروه $SU(2)$

special (دترمینان ماتریس ۱) چون ضرب ماتریس ها در هم دترمینان ۱ باشد پس نتیجه دترمینان آن ها هم ۱ است

$U^{+}=U^{-1}$ یا unitary : $UU^{+}=1$

Transpos

orthogonal : $UU^{T}=1$

هر $SU(n)$ یا $SO(n)$

حتماً باید هر $SU(n)$ این خواص را داشته باشد.

تعریف میدان: (field)

مجموعه F با دو عمل "." و "+" ، {F, +, .} یک میدان است اگر:

فقط علامت

فقط به صورت

۱. {F, +} یک گروه آبلی باشد. نام عضو واحد را "0" می‌گذاریم

۲. اگر F′ همه اعضای F بدون عضو "0" باشد، آنگاه {F′, .} یک گروه آبلی باشد، نام عضو واحد آن را "1" نشان می‌دهیم.

مثال: مجموعه اعداد حقیقی با عمل جمع و با عمل ضرب یک میدان را تشکیل می‌دهند (میدان اعداد حقیقی)
عضو واحد عمل جمع 0 است و عضو واحد عمل ضرب بدون (0)، 1 می‌باشد.

۳. خاصیت پخش‌پذیری: به ازای هر $a, b, c \in F$ ← $a.(b+c) = a.b + a.c$

مثال: میدان اعداد حقیقی و میدان اعداد مختلط

این خاصیت برای یه سون
باید صادق باشه

$a+(b.c)$ → غلط است

بردارها یک گروه را تشکیل می‌دهند تحت عمل جمع برداری. عضو واحد بردار صفر، عضو معکوس (قرینه) هر بردار منفی آن بردار است.

گروه یک مجموعه است از شئ‌های گوناگون، اما میدان یک مجموعه اعداد است (معمولاً)

فضای برداری:

فضای برداری V روی میدان F $(V(F))$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

۱- یک عمل "+" (ربطی به جمع ندارد) وجود داشته باشد، بطوری که $\{+$ و $V(F)\}$ یک گروه آبلی بسازند، نام عضو واحد را $\vec{0}$ می‌نامیم.

فضا

مثال: بردارهای سه بعدی عمل + عمل جمع بردارهاست ولی عمل + جمع اعداد است

عضو فضای میدان $2\vec{a}$ عضو فضای برداری   بردار $(\vec{a})$ اعداد حقیقی (۲)

۲- به ازای هر $\alpha \in F$ و $x \in V$ ، $\alpha(x) \in V$ باشد و خصوصیات زیر را داشته باشند:

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$2\vec{a} = (2a_x, 2a_y, 2a_z)$

یک عضو دیگر فضای برداری مثل y (طبق تعریف)   دو عضو میدان

a) $\alpha(\underbrace{\beta x}_{w}) = (\alpha\beta)x$ عضو میدان   ضرب در F میدانها

یعنی اگر فضای برداری ما تکثیر شده باشد از اعضایش و هر ضربی از اعضایش.

b) $1(x) = x$

سه عضو فضای برداری   ۲ عضو فضای برداری

c) $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

عضو فضای برداری   ۲ عضو میدان

d) $(\alpha+\beta)x = \alpha(x) + \beta(x)$

جمع در میدان

مثال: بردارهای سه بعدی با میدان اعداد حقیقی

بردارهای سه بعدی با میدان اعداد مختلط

جلسه آینده در مورد شباهت آزمایش اشترن گرلاخ با قطبش نور و تعریف فضای برداری حالت‌ها صحبت می‌کنیم

جلسه دوم : ۸۴/۷/۳

خلاصه ای از بحث جلسه گذشته:

برای اثبات ناسازگاری مکانیک کلاسیک در مباحث اتمی روش‌های متفاوتی وجود دارد که در کتاب آزمایش اشترن گرلاخ را بیان کرده است یعنی قرار دادن ذرات باردار در معرض میدان مغناطیسی خارجی.

برای الکترون ممان مغناطیسی برابر است با:

ممان مغناطیسی یک ذره اسپین ۱/۲ $\boxed{\vec{\mu} = \frac{e\vec{S}}{mc}}$

این ممان مغناطیسی باعث می‌شود که سیستم مقدار U انرژی از خودش نشان دهد در معرض میدان مغناطیسی خارجی.

$U = -\mu \cdot B$

گرادیان این انرژی پتانسیل، نیرو را به ما می‌دهد، که اگر B در راستای محور z ها باشد، داریم:

$F = -\nabla U \quad , \quad \vec{B} = \hat{k}B$

$\Rightarrow F = \mu_z \vec{\nabla} B_z$

* اگر B تابع مکان باشد، نیرو داریم،

در غیر اینصورت نیرو نداریم.

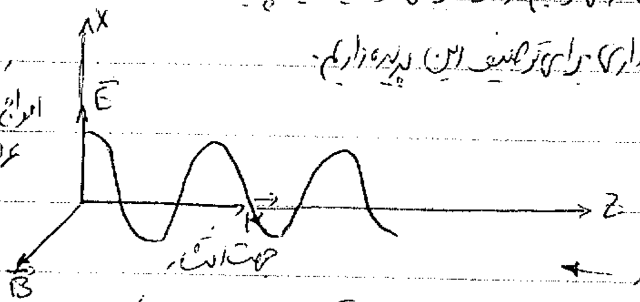
در مورد آزمایش اشترن گرلاخ صحبت کردیم و نشان دادیم که ذراتی که μ_z های مختلف (و یا S_z های مختلف) دارند، بسته به مقدارشان نیروهای متفاوتی وارد می‌شود و منحرف می‌شوند که چون ذرات اولیه غیرقطبی هستند (یعنی هیچ پیش‌زمینه خاصی در جهت محور z ها نداریم)، همان قدر که مولفه‌های مثبت داریم، منفی هم داریم، اگر سیستم کلاسیک فرض شود یک توزیع گوسی حول نقطه صفر انتظار می‌رود داشته باشیم یعنی آنهایی که S_z مثبت دارند بالا می‌آیند و هر چه بیشتر باشد بالاتر می‌آیند، همین طور برای S_z منفی.

ولی مشاهده تجربی نشان داد این طور نیست و این است که ذرات دو مقدار S_z بیشتر ندارد که مقدارشان $\pm\hbar/2$ است. این نقطه‌ای است که S_z ها کوانتیده است. (ادامه آزمایش‌های جلسه قبل)

بحث جدید:

با توجه به تعریف کردن میدان و فضای برداری، می‌خواهیم ببینیم چرا به فضای برداری در مکانیک کوانتومی نیاز داریم؟
اولاً ما برای توصیف پدیده‌های کوانتوم مکانیک با فیزیک استاندارد سر و کار نداریم و باید به نوع دیگری به این مسئله را بررسی کنیم.

یک مثال قشنگ وجود دارد که در اپتیک است که می‌توانیم از آن برای توصیف این پدیده استفاده کنیم و از روی آن نشان می‌دهیم که نیاز به فضای برداری برای توصیف این پدیده داریم.



امواج الکترومغناطیسی عرضی

در جهت Z منتشر شود و در جهت X نوسان کند

پلاریزاسیون خطی این طور است که در یک راستا (یعنی این امواج قرار دارند) و در آن راستا نوسان می‌کنند.

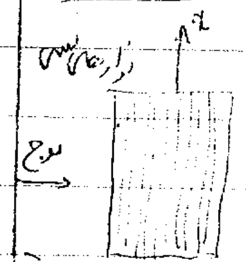
$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \cos(KZ - \omega t)$$
نور پلاریزه خطی در جهت $\hat{x}$ چنین بیانی دارد؛

چون در جهت Z حرکت می‌کند و در ... نوسان دارد.

میدان مغناطیسی آن عمود بر آن است.

$$\vec{E} = E_0 \hat{y} \cos(KZ - \omega t)$$
نور پلاریزه خطی در جهت $\hat{y}$

امواجی که داریم در اصل پلاریزه نیستند اما پلاریزه کردن آنها خیلی ساده است، مخصوصاً پلاریزه خطی کردن.
نحوه کار این است که یک نور غیرپلاریزه را از یک فیلتر عبور دهیم؛ می‌دانیم که میدان الکتریکی از داخل رسانا عبور نمی‌کند. پس اگر یک موج الکترومغناطیسی و یا یک میدان الکتریکی به این فیلتر برخورد کند، اگر تبدیل کنیم به یک مؤلفه موازی و یک مؤلفه عمود بر سیم‌ها، فقط مؤلفه‌ای که به موازات سیم‌ها هست عبور می‌کند و مؤلفه عمودی عبور نمی‌کند. *



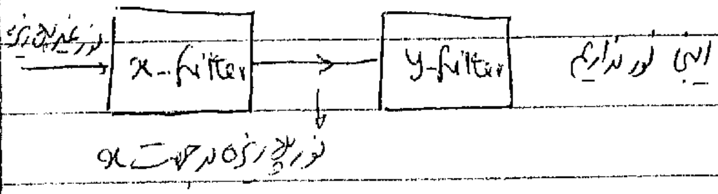
پس اگر یک موج غیرپلاریزه به این فیلتر برخورد کند، موج خروجی فقط دارای مؤلفه موازی این سیم‌ها می‌باشد.

فاصله سیم‌ها خیلی کم است

$\hat{x}$- filter

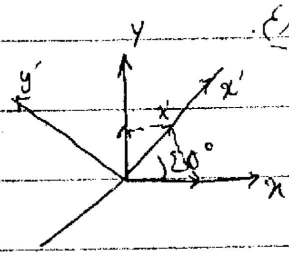
یعنی یک فیلتری است که نور خروجی آن فقط در راستای $\hat{x}$ است

حال با این فیلترها یک آزمایش انجام می‌دهیم:



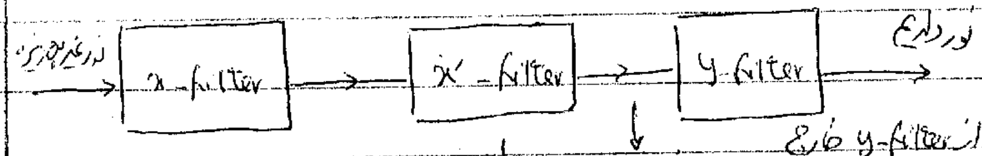
حال یک کار دیگر می‌کنیم:

خوب فیلتری مولفه میدان در جهت فیلتر را اجازه عبور می‌دهد و چون میدانی که در جهت x باشد مولفه y ندارد عبور نداریم.



x' راستایی است که با $45°$ اختلاف زاویه نسبت به x قرار گرفته است. در این صورت مولفه x دارای تصویری روی x' هست و همین طور تصویری که روی x' هست دارای مولفه روی y است.

پس y-filter نور از خود عبور می‌کند. ← توضیح ۲



یعنی قبلاً نور از y-filter خارج نمی‌شد، اما با قرار دادن x'-filter * با انجام این آزمایش به عنوان واسطه نور ایجاد می‌شود اما شدت کم
به عنوان واسطه، نور از y-filter خارج می‌شود. حالت چون یک سری از مولفه‌ها از بین می‌رود

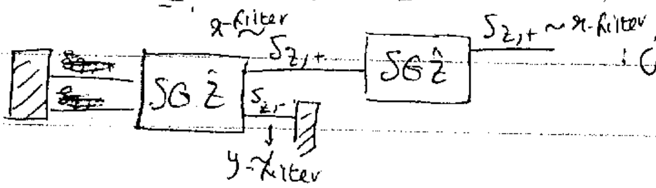
این موضوع که ریشه در بردار بودن نور دارد را اگر با آزمایش ۳ مقایسه کنیم می‌بینیم که شباهت بین آنها وجود دارد.

اگر این تناظر را در نظر بگیریم، این دو آزمایش خروجی‌شان یکی است.

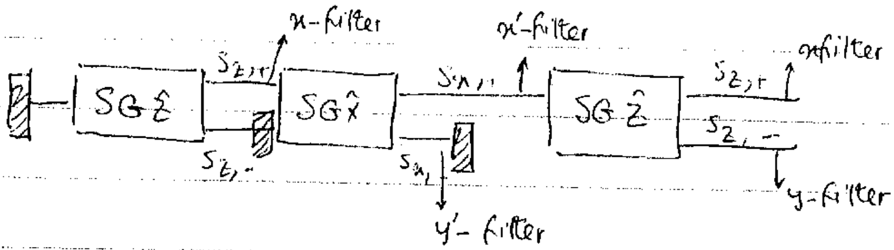
$S_{z,\pm}$ $\sim$ (مشابه) نقش $\hat{x}, \hat{y}$

$S_{x,\pm}$ $\sim$ نقش $\hat{x}', \hat{y}'$

آزمایش اول اشترن، دقیقاً آزمایشی بود که قبلاً داشتیم، می‌گوید که اگر $S_{z,+}$ را در نظر بگیریم و آن را به $SG\hat{z}$ بزنیم، $S_{z,-}$ دیگر نداریم مانند شکل اشترن:



آزمایش دوم اشترن، همان آزمایش ۳ است.



این آزمایش می‌گوید که x-filter را بگذاریم و ببینیم روی x'-filter را اعمال کنیم، در نهایت می‌بینیم که هم مولفه x داریم و هم y.

بنابراین اندازه‌گیری در جهت x باعث می‌شود که مولفه‌ای که قبلاً دیده شده، متناظر با آن اندازه‌گیری $SG\hat{x}$ (واپسین) باعث می‌شود که $S_{z,-}$ که وجود نداشت، ظاهر شود. پس این یک شبهه است.

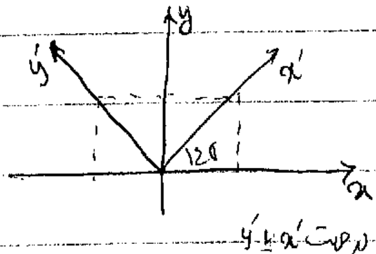
ریشه این پدیده برمی‌گردد به ماهیت برداری موجوداتی که با آنها سروکار داریم؛ یعنی این موجودات بردار هستند (در اسپین)، پس در کوانتوم هم این حالت‌ها ($S_{z,+}$ ها) بردار هستند و موجودات معمولی کلاسیک نیستند. منظور بردار در فضای معمولی نیست بلکه در یک فضای برداری انتزاعی.

پس حالت‌های کوانتومی در آن فضای برداری، به صورت بردار هستند.

نتیجه‌ای که گرفتیم این است ما در کوانتوم متناسب با فضای برداری سروکار داریم، حال می‌خواهیم ماهیت این فضای برداری را بشناسیم.

حال اگر در آزمایش ۲ و ۳ که قبلاً داشتیم اگر به جای $\hat{x}$ SG ها، $\hat{y}$ SG ها را قرار دهیم در خروجی هیچ تأثیری ندارد یعنی اینکه در مرحله وسط اگر به جای اینکه میدان مغناطیسی را در جهت x بگیریم در جهت y بگیریم نتیجه فرقی نمی‌کند.

اما این که به جای x و y را بگیریم ماهیت فضای برداری مان را یک مقدار عوض می‌کند.



در این شکل معلوم می‌شود که رشته اندازه‌گیری در جهت y' یعنی اندازه‌گیری در جهت x' و همچنین مولفه برعکس این است که

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y} \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y} \end{cases}$$

x در جهت x' و همین طور y' در جهت y مولفه دارد، در حقیقت میدان تا یک مولفه x دارد و یک مولفه y!

$$\begin{cases} E_0 \hat{x}' \cos(KZ-\omega t) = \frac{E_0 \hat{x}}{\sqrt{2}} \cos(KZ-\omega t) + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(KZ-\omega t) \\ E_0 \hat{y}' \cos(KZ-\omega t) = \frac{-E_0}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(KZ-\omega t) + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(KZ-\omega t) \end{cases}$$

این نکته به که در اینجا لست با گرفتن معرف این است که ما در فضای اسپین هم با بردار سروکار داریم.

فرض کنیم ما چهارتا بردار داریم:

$$\overbrace{|S_z;\pm\rangle}^{\text{Ket}} \quad \text{و} \quad |S_x;\pm\rangle \longrightarrow$$
۲تا بردار، ۲تا بردار — بردار در فضای اسپین‌ها

ما در حقیقت یک سری بردار می‌سازیم در فضایی که فضای اسپینی است نه فضای برداری xyz.

در میدان الکتریکی، فضا، فضای مکان است چون جهت گیری‌های ما مولفه‌های مکانی میدان الکتریکی را اندازه می‌گیرد، اما اینجا این طور نیست و در اینجا داریم مولفه اسپین را اندازه‌گیری می‌کنیم. خروجی‌های ما در آزمایش اشترن گرلاخ یک سری بردار هستند در فضای اسپین‌ها و چون مولفه بر حسب هم دیگر دارند یعنی این خصوصیت شبیه به بردارها که همان طور که x' بر حسب x و y مولفه دارد، اینجا هم S_x هم بر حسب $S_{z\pm}$ مولفه دارد.

$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}$

$\hat{y}' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}$

این رابطه وقتی به را باید جدی بگیریم، یعنی همانطور که x' و y' برحسب x و y نوشته (می‌شوند)، $S_{x,+}$ ربط دارد برحسب $S_{z,\pm}$ و همین طور $S_{x,-}$ ربط دارد برحسب $S_{z,\pm}$.

$\hat{x}, \hat{y}$ قطبش $\sim S_{z,\pm}$

$\hat{x}', \hat{y}'$ قطبش $\sim S_{x,\pm}$

اگر این تشابه را درست در نظر بگیریم در آن صورت داریم:

$$\begin{cases} |S_x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z,+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z,-\rangle & x' = \underset{|S_z,+\rangle}{\frac{1}{\sqrt{2}}x} + \underset{|S_z,-\rangle}{\frac{1}{\sqrt{2}}y} \\ |S_x,-\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}|S_z,+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z,-\rangle & y' = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

این رابطه احتمالاً وجود دارد وقتی که این تشابه را موجود بگیریم؛ یعنی اگر این طور باشد، اتفاقی که در مورد نور قابل پیش‌بینی است (آزمایش ۳). یعنی اگر در آزمایش ۲، $SG\hat{z}$ را قرار دهیم فقط $S_{z,+}$ وجود دارد اما اگر باعث شویم که به حالت $S_{x,+}$ برویم در آن صورت در آن هم $S_{z,+}$ و هم $S_{z,-}$ وجود دارد.

* اگر $SG\hat{y}$ را در نظر بگیریم، باز هم انتظار داریم $S_{y,\pm}$ نیز مثل $S_{x,\pm}$ برحسب $S_{z,\pm}$ ربط داشته باشد که می‌توانیم به صورت زیر ربط را فرض کنیم:

$$|S_y,\pm\rangle = C_1|S_z,+\rangle \pm C_2|S_z,-\rangle$$

ولی این یک مشکل ایجاد شده است.

مشکل این است که دو تا پایه ربط داریم $|S_z,-\rangle$ و $|S_z,+\rangle$. از دو تا بردار، ۲ تا ترکیب مستقل بیشتر نمی‌توان ساخت که ما $S_{x,\pm}$ ساخته بودیم. پس چطور $S_{y,\pm}$ را برحسب $S_{z,\pm}$ بنویسیم؟

این در صورتی است که ما این ضرایب ربط را طوری بنویسیم که شامل اعداد مختلط هم بشود.

در رابطه $e^{\pm ikz}$ لازم است بدانیم تفاوتی بین اعداد حقیقی نیست حال اگر بتوانیم باعث چرخش نور اعداد مختلط را هم وارد کنیم، در آن صورت تنها پایه‌ها هم درست می‌شود.

در نور ما دو نوع پلاریزاسیون داریم، یکی پلاریزاسیون خطی که جهت E همواره ثابت است و یک نوع دیگر که پلاریزاسیون دایروی داریم که در آن امتداد تغییر می‌کند یعنی میدان الکتریکی می‌چرخد.

پس یعنی می‌توان نور را طوری ایجاد کرد که پلاریزاسیون خطی داشته باشد و یا پلاریزاسیون دایروی (چرخشی) داشته باشد.

در پلاریزاسیون دایروی را این طور می‌توان ساخت که اگر یک میدان الکتریکی داشته باشیم که ترکیب دو تا میدان خطی باشد به طوری که ضرایب آنها یکی نباشد که نتوان فاکتور گرفت.

ترکیب دو تا پلاریزاسیون معمولی (خطی) باز خطی می‌شود، چون اگر ضرایب یکی باشند و x و y را جمع کنیم می‌توانیم از ضریب فاکتور بگیریم و در $x+y$ ضرب کنیم که خود $x+y$ یک خط می‌شود. پس اگر ضرایب یکی نباشند، دیگر نمی‌شود فاکتور گرفت و همینطور ترکیب بردار ساده نمی‌شود.

پس این طور در نظر می‌گیریم که نور دوم که در جهت $\hat{y}$ می‌گیریم، به اندازه $\pi/2$ با نور اول که در جهت $\hat{x}$ است اختلاف فاز داشته باشد.

$$\vec{E}_{\pm} = E_0\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}\cos(kz-\omega t) \overset{\text{راستگرد}}{\underset{\text{چپگرد}}{\pm}} \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}\underbrace{\cos(kz-\omega t+\pi/2)}_{-\sin(kz-\omega t)}\right] \quad (1)$$

ترکیب دو پلاریزاسیون با اختلاف فاز منجر به پلاریزاسیون دایروی می‌شود.

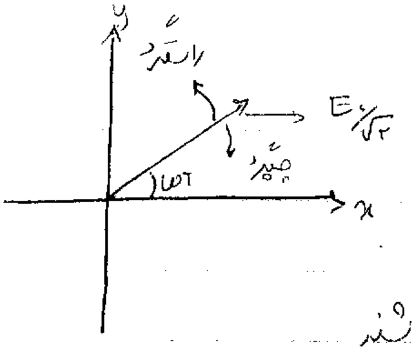
(نکته)

امواج الکترومغناطیسی از دو جهت موج است، هم به عنوان تابعی از زمان ($z=0$) و هم تابعی از مکان ($t=0$)، یعنی اگر در یک مکان ثابت $z=0$ نگاه کنیم، موج برحسب زمان حالت نوسانی دارد، همین طور اگر در یک زمان ثابت نگاه کنیم ($t=0$)، موج برحسب مکان z حالت نوسانی دارد.

اگر در نقطه $z=0$ نگاه کنیم

$$E_{\pm} = \underbrace{\frac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{x}\cos\omega t}_{x \text{ مقدار مولفه}} \overset{\text{راستگرد}}{\underset{\text{چپگرد}}{\pm}} \underbrace{\frac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{y}\sin\omega t}_{y \text{ مقدار مولفه}} \quad (2)$$

۷



پس شکل رابطه آخر بصورت مقابل می‌شود که با تغییر t بردار میدان ما حرکت می‌کند و می‌چرخد با طول $\frac{E}{\sqrt{2}}$.
اگر + باشد می‌گوییم نور با پلاریزاسیون دایروی راستگرد داریم و اگر − باشد، می‌گوییم نور با پلاریزاسیون دایروی چپگرد داریم. پس پلاریزاسیون‌ها می‌توانند خطی یا دایروی باشند.
پلاریزاسیون دایروی بدست آمده را می‌توانیم برحسب میدان‌های خطی بنویسیم.

$$\vec{E} = Re(\vec{\varepsilon}_{\pm}) \qquad \Rightarrow \varepsilon_x = \hat{x} E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{\varepsilon}_{\pm} = E\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}\, e^{i(kz-\omega t)} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\hat{y}\, e^{i(kz-\omega t)}\right]$$

پلاریزاسیون دایروی

پس اگر بخواهیم رابطه (1) را بصورت exp بنویسیم و از قسمت حقیقی آن استفاده کنیم، باید بصورت بالا بنویسیم که قسمت حقیقی رابطه اول، cos را بدهد و قسمت حقیقی رابطه دوم با توجه به قرار دادن i در بند، sin را به ما بدهد.
نتیجه‌ای که می‌شود این است که پلاریزاسیون‌های خطی ترکیبی از $e^{i(\;)}$ها هستند با ضرایب حقیقی و پلاریزاسیون‌های دایروی ترکیبی از $e^{i(\;)}$ها هستند ولی با ضرایب موهومی (مختلط).
پس اگر اجازه بدهیم که ضرایب بسط میدان ما مختلط شود یک دسته دیگر از پلاریزاسیون یعنی پلاریزاسیون دایروی خواهیم داشت که مستقل از پلاریزاسیون خطی اند.

پس از پلاریزاسیون دایروی و شباهت آن با حالات اسپینی می‌توانیم این حدس را بزنیم که برای $|S_y;\pm\rangle$ و بسط آنها برحسب $|S_z;\pm\rangle$ می‌توانیم از ضرایب مختلط استفاده کنیم.

$$|S_y;\pm\rangle = C_1|S_z;+\rangle \pm C_2|S_z;-\rangle$$

بنابراین اگر بخواهیم $|S_y;\pm\rangle$ را برحسب $|S_z;\pm\rangle$ بسط بدهیم می‌دانیم که می‌توانیم بسط بدهیم همانند [illegible]

حدس می‌زنیم: $|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|S_z;-\rangle$

[illegible] که برای x [illegible]

۳- آیا امکان دارد که S_x و S_y ضرایب یکسان داشته باشند؟

در اسپین ۱/۲ سه تا ابزار مستقل داریم، S_x و S_y و S_z. پس جابجایی به معنای این است که S_y یک ضریبی از S_x باشد. بنابراین این دسته بردارهای $S_{x,+}$ هم آنقدر بنیادی و مهم هستند که دسته بردارهای $S_{y,+}$ اهمیت دارند. پس چرا S_x و دسته‌ی S_z (صورت قراردادی)

ما می‌خواهیم هر یک تا بردار $S_{x,+}$ و $S_{y,+}$ را بر حسب ۲ بردار $S_{z,+}$ بسط بدهیم. با اعداد حقیقی فقط می‌توان ۲ تا از آنها را بطور مستقل بدست آورد. اما با اعداد موهومی هر سه تا بردار را می‌توان بدست آورد.

- اگر با فضا را هم در نظر بگیریم، پس چرا بسط مولفه‌های x و y با هم فرق می‌کند؟

این‌ها فقط اسم‌گذاری است. یعنی می‌توان جای x و y را با هم عوض کرد ولی حتماً نمی‌توانند یک صورت بسط داشته باشند.

- اگر دوران فضا نیز این معنا است که آن اطلاعاتی از فیزیک در جهت x داریم با آن اطلاعاتی که از فیزیک در جهت y داریم، تفاوتی نکند.

در اینجا هم تفاوتی نمی‌کند. یعنی اگر از آزمایش $SG\hat{z}$ به $SG\hat{x}$ یا $SG\hat{y}$ برویم، فیزیک آن نباید عوض شود. پس باید پدیده‌های مشاهده شده هم یکسان باشند و به این معنا نیست که بردارها یک چیز شوند.

پس اینجا یک مقدار قدم برداریم که مانند مکانیک کوانتمی با یک سری بردار سروکار داریم و حالتها بیان بردار هستند در فضای مربوط به خصوصیات (فضای اسپین)

این مشاهدات و اندازه‌گیری‌هایی که انجام دادیم، به معنی این است که باید فضا بسط کلی باشد، چون $S_{x,+}$ همان قدر که احتمالش هست که $S_{z,+}$ را داشته باشد، همان قدر هم احتمال آن که $S_{z,-}$ را داشته باشد.

جلسه گذشته، فضای برداری را تعریف کردیم و دیدیم که اگر یک سری موجودات با یک سری خاصیتها داشته باشیم، فضای برداری داریم.

حال می‌خواهیم اینجا هم اصول موضوعه کوانتوم مکانیک را تعریف کنیم.

در کلاسیک نشان دادند که با یک سری موجودات متعارف سر و کار داریم.

در کوانتوم مکانیک با یک سری موجودات خاص سر و کار داریم.

مثل بقیه جاهای فیزیک عمل می‌کنیم. ما ورودمان به فیزیک بر اساس اصول موضوعه است، یعنی اینکه جاهایی فیزیک نیست که ورودمان به قضیه قابل اثبات باشد.

ما ورودمان به قضیه بر اساس یک سری اصول موضوعه است.

در الکترومغناطیس مثلاً ما ورود به قضیه‌مان این طور است که چهار تا معادله ماکسول و لورنتس را فرض می‌کنیم. بقیه کارمان دیگر یک سری محاسبات ریاضی است. البته با این فرضیات با آزمایش می‌خواند.

در کوانتوم مکانیک هم باید یک سری فرض کنیم، نحوه این فرضها تفاوت دارد. در کوانتوم مکانیک ابتدا با معادله شرودینگر شروع کرد و ادامه داد. البته روش صحیحی نیست چون که یک سری کم دقتی دارد؛ مثلاً در مورد اسپین آن به طور ریشه‌ای تعریف نشده.

حال می‌پردازیم به اصول موضوعه:

ابتدا می‌خواهیم Ket-space را تعریف کنیم:

Ket-space:

در مکانیک کوانتومی، هر حالت را با یک "بردار حالت" (state-vector) به صورت یک کت $|\alpha\rangle$ نشان می‌دهیم.

بردار در یک فضای انتزاعی است. (می‌تواند فضای اسپین باشد، یا تکانه زاویه‌ای، انرژی و یا هر چیزی باشد)

یک فضای کوانتومی است که بستگی به نوع مسئله دارد.

بُعد این فضا بستگی به ماهیت مسئله متفاوت است. در آزمایش SG ذرات $S=\frac{1}{2}$ فضای برداری دو بعدی است.

ولی می‌تواند بینهایت بعدی هم باشد. البته فضا را با پایه‌های آن نمایش می‌دهیم که این پایه‌ها می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند. این فضای برداری یک فضای برداری مختلط است (جنسه پیش) بطور خلاصه می‌توان گفت در این فضای برداری، بردارها را می‌توان جمع برداری کرد با ضرایب مختلط. به این فضای مختلط، فضای هیلبرت می‌گویند.

Hilbert-space

چون یک فضای برداری است، می‌توانیم بنویسیم:

- اگر $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V$ باشند آنگاه:

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$$

یعنی عمل جمع (که بستگی به آن فضا دارد)، یک عضوی از آن فضا تولید می‌کند.

- اگر $|\alpha\rangle \in V$ و $c \in \mathbb{C}$ (اعداد مختلط) باشد آنگاه $c|\alpha\rangle \in V$ باشد.

($c|\alpha\rangle$ و $|\alpha\rangle c$ تفاوتی با هم ندارند ولی معمولاً $c|\alpha\rangle$ می‌نویسیم)

یعنی ۲ برابر یک بردار با آن بردار ضربدر ۲ مساوی است.

- یک عملگر (operator) بصورت زیر تعریف می‌شود:

عملگر یعنی موجوداتی که روی یک عضو فضای برداری $|\alpha\rangle$ روی A اثر کند یک عضو دیگری (به نام) را $|\beta\rangle$ اثر کند و عضو دیگری از فضای برداری را به ما بدهد.

$$A : |\alpha\rangle \longrightarrow |\beta\rangle$$

- به هر کمیت اندازه‌پذیر یک عملگر نسبت می‌دهیم، که بستگی به ماهیت آن عملگر، وقتی روی برداری اثر کند، یک بردار دیگر به ما می‌دهد.

- به ازای هر کمیت اندازه‌پذیر که با عملگر A نمایش می‌دهیم، تعدادی کت خاص به نام eigenKet (کت ویژه) وجود دارد، و به ازای هر کت ویژه، یک عدد به نام ویژه‌مقدار (eigenvalue) وجود دارد که در روابط صفحه بعد تعریف می‌شوند.

$A: \quad \{|a'\rangle, |a''\rangle, \dots\}$ eigenket (eigen state)

$\{a', a'', \dots\}$ eigenvalue

بطور کلی:

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$
$$A|a''\rangle = a''|a''\rangle$$
$$\vdots$$

مثال:

$$S_z|S_z,\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|S_z,\pm\rangle$$

مولفه z اسپین یک کمیت فیزیکی است. متناظر با آن یک عملگر وجود دارد به نام S_z. در این حالت S_z یک سری eigenket و eigenvalue دارد.

پس به ازای هر کمیت فیزیکی، اپراتور داریم، برای هر اپراتور هم تعدادی eigenstate و eigenvalue داریم:

حال می‌خواهیم ببینیم این ویژه کت‌ها و ویژه مقادیر چه نقشی در مسئله ما دارند:

این ویژه‌کت‌ها، پایه‌های فضای برداری مسئله مورد نظر هستند یعنی اولاً مستقل از هم هستند یعنی برحسب همدیگر بسط ندارند. ثانیاً هر برداری برحسب اینها قابل بسط است

هر برداری مثل α

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'}|a'\rangle \qquad c \in \mathbb{C}$$

تعداد این بردارهای پایه، بُعد فضا را نشان می‌دهد یعنی اگر فضا دو بعدی باشد، ۲ تا بردار پایه لازم داریم.

در آزمایش اشترن گرلاخ دیدیم که بردارهای پایه را $S_{z,\pm}$ گرفتیم و توانستیم هر $S_{x,\pm}$ و $S_{y,\pm}$ را برحسب آنها بسط دهیم. پس $S_{z,\pm}$ پایه هستند.

این دو تا بردار پایه ویژه کت‌های یک عملگر هستند. می‌توانیم این عملگر را S_z انتخاب کنیم یا S_x و یا ...

بعداً نشان می‌دهیم که این پایه‌ها متعامد هستند.

ضرایب بسط c_n ها می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند، بنابراین متعلق به اعداد مختلط هستند.

ما ذکر کردیم در مکانیک و فیزیک چیزی که با آن سر و کار داریم/می‌بینیم عددها هستند. مثلاً یک دسته ذره به این دستگاه زنجیره‌ای گرانش تابانیدیم، ۷۰٪ در بالا قرار می‌گیرند، ۳۰٪ در پایین.

این state ها متعلق به فضای انتزاعی هستند ولی ما اعداد مربوط به آنها را بدست می‌آوریم، حال می‌خواهیم ارتباط بین این حالت‌ها و این اعداد را بدست آوریم.

برای این که این سری اعداد را داشته باشیم، ما باید ضرب داخلی را تعریف کنیم.

ضرب داخلی:

ضرب داخلی موضوعی است که از بردارها، اسکالر می‌سازد.

$\vec{A} \cdot \vec{B} =$ عدد

حال ما می‌خواهیم ببینیم در فضای برداری با ضرب داخلی را چطور می‌توان ساخت به طوری که از این بردارهای حالت یک سری عدد بسازیم

از بردارهای مکان سه بعدی داشتیم:

در فضای مکان سه بعدی $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$

$\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = \text{عدد}$$

ضرب داخلی

حقیقی است اگر این مولفه‌ها حقیقی باشند و مختلط است اگر یکی از آنها مختلط باشد

در فضای برداری سه بعدی با دو عضو همان فضا می‌توان با حاصلضرب ضرب داخلی عدد ساخت

ان عدد نیست از بردارها می‌توان تعیین طول را کرد.

کتاب Byron + Fuller فضاها و ضرب داخلی

در مکانیک کوانتومی هم چیزی به نام (شبیه) ضرب داخلی داشتیم و ساختن عدد از تابع موج بود
در مکانیک کوانتومی ما برای ضرب داخلی دو تا تابع موج یک ψ در φ^* ضرب می‌کردیم، بلکه یک چیزی
سر هم از آنها می‌آوردیم.
پس یعنی برای ضرب داخلی کردن اعضا در یک فضای
برداری خاص اعضا این طور نیست که این دو عضو $\int \varphi^*(x)\, \psi(x)\, dx$: ضرب φ و ψ
را عین هم بنویسیم

$$\underbrace{\varphi^*(x)}_{V^*} \quad \underbrace{\psi(x)}_{V}$$

(dual - space) فضای دوگان

در مسئله ما ψ و φ جزو اعضای فضای برداری ما (V) هستند
اما φ^* متعلق به یک فضای دیگری است که آن را V^* می‌نامیم، این فضا را اصطلاحاً فضای
دوگان (dual-space) فضای V می‌نامیم
فضای دوگان یعنی فضایی که اعضای آن را باید در فضای برداری (اعضای آن) ضرب داخلی کنیم.
یعنی برای ساختن ضرب داخلی در اینجا نمی‌توان دو عضو فضای V را در هم ضرب کنیم.

خصوصیت فضای دوگان این است که می‌توان اعضای این فضا را با اعضای فضای برداری ضرب داخلی
کرد.

تناظر دوگان: Dual Correspondence

به ازای هر کت α و $|\alpha\rangle \in V$، یک بردار دیگر به نام برا (bra) ی α به صورت $\langle\alpha|$
تعریف می‌کنیم که $\langle\alpha| \in V^*$ (فضای دوگان). این عمل را تحت عمل "تناظر دوگان" (dual correspondence)
انجام می‌دهیم:

$$|\alpha\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle\alpha| \qquad \text{تعریف عمل تناظر دوگان}$$

پس بسته به نوع مسئله ما، این عمل معنی خاص خودش را دارد
متناظر این عمل در ماتریس ها ساختن بردارهای سطری از ستونی است.
در اینجا این عمل طوری است که ما را از فضای V به فضای V^* می برد

تعریف کامل عمل DC:
اگر هر ترکیبی را به این عمل بدهیم، این تغییر را ایجاد کند:

$$\underbrace{C_\alpha|\alpha\rangle + C_\beta|\beta\rangle}_{|\gamma\rangle} \xleftrightarrow{DC} \underbrace{C_\alpha^*\langle\alpha| + C_\beta^*\langle\beta|}_{\langle\gamma|}$$

یعنی ضرایب را مختلط کند و کت‌ها را تبدیل به براها کند و برعکس.
پس یعنی به ازای هر کت یک برا داریم، یا به ازای هر برداری مثل $|\gamma\rangle$ (که ترکیب خطی باشد) یک بردار مثل $\langle\gamma|$ داریم.
این عمل دوگان در ضرب داخلی وارد می‌شود و ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:
به ازای $|\alpha\rangle \in V$ و $\langle\beta| \in V^*$، ضرب داخلی به صورت زیر نوشته می‌شود: bra ket

$\langle\beta|\alpha\rangle \in \mathbb{C}$ متعلق فضای complex

یعنی یک عضو V را برحسب داریم کنارش از عضوهای V^* می‌نویسیم. به این می‌گویند ضرب داخلی α و β که یک عدد است.

حالا این عمل را تعریف می‌کنیم بسته به فضای برداری دارد.
مثلاً اگر فضای برداری ما $A=(A_1, A_2, A_3)$ و $B=(B_1, B_2, B_3)$ باشند، این ضرب یعنی اینکه مؤلفه‌های x در هم ضرب، y را در هم ضرب، z را در هم ضرب و با هم جمع کنیم.

این ضرب داخلی ما باید چه خصوصیتی داشته باشد؟

عرض می کنیم این دو ضرب داخلی نسبت و باید یک سری خصوصیات داشته باشد. پس تعریف کرده که دارای خصوصیات خاص خودش بوده تا گروه تشکیل شود.

خصوصیات ضرب داخلی:

1) $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$

قسمت اول رابطه می گوید α را از V بگیریم، β dual را از V^* بگیریم و کنار هم بگذاریم. قسمت راست عبارت می گوید این دفعه β را از V بگیریم، α dual را از V^* بگیریم.

2) $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$, $\langle\alpha|\alpha\rangle = 0 \xrightarrow{\text{تنها موقعی که}} |\alpha\rangle = 0$

ضرب داخلی هر بردار در خودش همواره مثبت و یا صفر است. در حالتی صفر است که فقط و فقط state α صفر باشد.

کت پوچ (null ket):

به این کت هایی که صفر هستند اصطلاحاً null ket می گویند (کت پوچ).

نتیجه ساده این است که

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \overset{(1)}{=} \langle\alpha|\alpha\rangle^* \longrightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle \in \mathbb{R}$$

قرارداد ۱:

یک قرارداد می کنیم که به $\langle\alpha|\alpha\rangle$ اندازه (norm) $|\alpha\rangle$ می گوییم.

قرارداد ۲:

یک قرارداد دیگر این است که در مکانیک کوانتمی اندازه حالتها مهم نیست.

$|\alpha\rangle , c|\alpha\rangle , c'|\alpha\rangle , \dots$ همه این حالتها را معادل می گیریم

نرم حالتها یک انتخاب می شود $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

بنابراین تمام حالتها با یک ضریب نرمالیزه می شوند

پس قرارداد می‌کنیم که نرم حالت ما یک است، و آن حالتی را که نرم آن را یک در نظر گرفتیم را از بین تمام حالت مثل آن که فقط در یک ضریب تفاوت دارند را انتخاب می‌کنیم. یعنی آنهایی که اختلافشان در عدد است را از بین شان، حالتی که نرم آن یک است را انتخاب می‌کنیم.

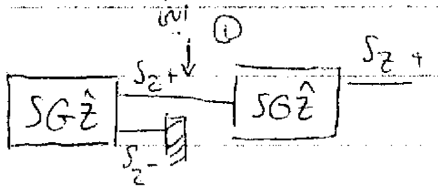
جلسه سوم: ۸۴/۷/۵

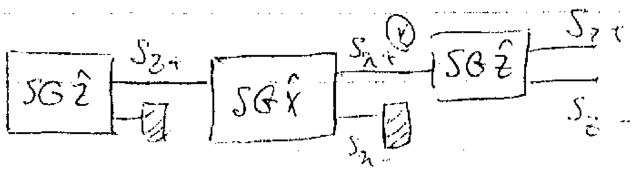
ادامه بحث جلسه گذشته را در مورد فضای برداری مکانیک کوانتومی یا همان فضای هیلبرت پی می‌گیریم.
جلسه گذشته گفتیم که براساس اصل موضوعه می‌پذیریم که هر حالت کوانتومی را با $|\alpha\rangle \in V$ نشان می‌دهیم

متناظر با هر کمیت فیزیکی یک عملگر A در نظر می‌گیریم که تعریف عملگر A به این صورت است که روی یک کت اثر می‌کند و یک کت دیگر می‌دهد: $A|\alpha\rangle = |\beta\rangle$

چه نیازی است که ما در مکانیک کوانتومی برای هر کمیت فیزیکی یک عملگر تعریف کنیم؟ (مسئله‌ای مهم است)

این نکته در همین آزمایش اشترن گرلاخ که بحث کردیم، واضح و مشخص است.
در آزمایش اشترن گرلاخ این مسئله مشخص است:





در آزمایش اشترن گرلاخ اگر بعد از SG$\hat{z}$ در طرف $-S_z$، SG$\hat{z}$ را دوباره قرار دهیم، فقط $+S_z$ داریم، اما اگر SG$\hat{x}$ را اول انجام دهیم و بعد دوباره SG$\hat{z}$ را انجام دهیم، هم $+S_z$ داریم و هم $-S_z$.

پس این آزمایش نشان می‌دهد که اگر در آن وسط یک کمیت فیزیکی را اندازه بگیریم که حالت قبلی ویژه حالتش نباشد، حتماً حالت عوض می‌شود. در یک حالت خاص می‌توانند به حالت دیگر بروند و آن حالتی است که ویژه حالت های عمل اندازه‌گیری جدید (اپراتور) باشد، مانند آزمایش بالا.

بنابراین عمل اندازه‌گیری باید متناظر با یک اپراتور باشد که ما را از یک حالت ببرد به حالت دیگر، اگر این فرض را نکنیم برای عمل اندازه‌گیری، دیگر این اتفاق نمی‌افتد.

اگر عمل اندازه‌گیری روی حالتی اثر کند که آن حالت ویژه حالت آن عملگر نباشد، حتماً به یک حالت دیگر می‌رود.

پس هر عمل اندازه‌گیری را می‌توانیم به یک اپراتور نسبت دهیم.

در مکانیک کلاسیک عمل اندازه‌گیری و اندازه‌گیری های متناوب اثری روی سیستم نمی‌گذارد.

در مکانیک کلاسیک هم این قضیه مهم است، اما این اتفاق نمی‌افتد یعنی اینکه اگر با انجام یک اندازه‌گیری حالت سیستم عوض شود در مکانیک کلاسیک وجود ندارد. این به این دلیل است که کمیت در مکانیک کلاسیک جا پذیرند در مکانیک کوانتومی، همگر اندازه‌گیری حافظه را از بین می‌برد و این موضوع برمی‌گردد به ماهیت عجیب آن.

مفهوم اندازه‌گیری چیست؟

اندازه‌گیری در حقیقت یک جور تبدیل حالت است، به یک حالت جدید ویژه حالت اپراتور اندازه‌گیری کننده است. یعنی تبدیل حالت از یک حالت اولیه به یک حالت نهایی، بطوریکه آن حالت نهایی ویژه حالت اپراتور اندازه‌گیری کننده ما است.

ما با انجام عمل اندازه‌گیری، یک سری اطلاعات بدست می‌آوریم و این اطلاعات در حالت ها نهفته است.

ما با انجام اندازه‌گیری از یک حالت به یک حالت دیگری می‌رویم که آن حالت جدید یک ویژه مقدار دارد که ما در اصل این ویژه مقدارها را اندازه می‌گیریم.

جلسه دیگر حسب پیش، گفتیم هر عملگر یک سری ویژه حالت و یک سری ویژه مقدار دارد و بالاخره بگونه ای که در رابطه زیر صدق می‌کند.

ویژه حالت $\{|a'\rangle\}$, $\{a'\}$ ویژه مقادیر

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

ویژه حالت‌های یک عملگر فیزیکی (یک کمیت اندازه‌پذیر) یک مجموعه کامل هستند و کل فضای برداری ما را می‌پوشانند یعنی هر حالت را می‌توانیم برحسب آنها بسط دهیم و این طور نشان می‌دهیم

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} C_{a}|a'\rangle$$

هر حالت

ویژه حالت‌های یک عملگر که اندازه‌پذیر است

عملگر دوگان را تعریف کردیم، این طور تعریف کردیم که یک عمل متناظر دوگان به ازای هر حالتی که وجود دارد، تبدیل به یک حالت دیگر است که از فضای کت به فضای برا برده می‌شود.

$$\overset{\text{کت}}{C_\alpha|\alpha\rangle} \xleftrightarrow{DC} \overset{\text{برا}}{C_\alpha^*\langle\alpha|}$$

خاصیتی که وجود دارد این است که ضرب فضای برا در کت یک عدد می‌دهد که عضو فضای مختلط است، که به آن ضرب داخلی می‌گوییم

$$\langle\alpha|\beta\rangle = C \in \mathbb{C}$$

که دارای دو خصوصیت زیر است:

- تغییر جای برا و کت مولفه‌ها یک ستاره می‌گیرد. $\quad (1)\ \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$
- همواره مثبت است. $\quad (2)\ \langle\alpha|\alpha\rangle > 0$

خصوصیت عملگرها:

- در حالت کلی عملگرها نسبت به هم جابجا نمی‌شوند.

این خصوصیتی است که در مکانیک کلاسیک وجود ندارد

$$XY \neq YX$$

- عملگرها تحت عمل جمع، شرکت‌پذیرند:

$$(X+Y)+Z = X+(Y+Z) = X+Y+Z$$

- عملگرهای مورد استفاده در مکانیک کوانتومی، معمولاً خطی هستند. (البته بعضی عملگرها خطی نیستند که یک مورد آن در کوانتوم کار داریم به نام "بازگشت زمان" (time inversal)

$$X(c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle) = c_\alpha X|\alpha\rangle + c_\beta X|\beta\rangle$$

یعنی اگر عملگری روی ترکیب کت‌ها اثر کند، به شرطی خطی است که به ضرایب کت‌ها دست نزند و روی هر کدام از کت‌ها اثر کند.

- عمل متناظر دوگان در مورد عملگرها به صورت زیر تعریف می‌شوند: (در مورد حالتها بحث کردیم)

$$X|\alpha\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle\alpha|X^\dagger$$

یعنی می‌خواهیم ببینیم اگر یک عملگر روی یک کت اثر کرد و کت عمل متناظر دوگان این کت به برا تبدیل شد، حال این عملگرهای عملگر قبلی است یا نه؟

یعنی حرفمان این است که عملگر موجودی است که روی حالت اثر می‌کند و یک حالت جدید به‌ش $|\beta\rangle$ می‌دهد.

$X|\alpha\rangle \longleftrightarrow \langle\alpha|X^\dagger$ → dagger

dual این حالت $\langle\beta|$ است بطوریکه اگر در
می‌خواهیم ببینیم این به چه صورت از $\langle\alpha|$ ساخته می‌شود
کت حاصلضرب نقطه‌ای تعداد را بدهد.

$\downarrow$

$|\beta\rangle \longleftrightarrow \langle\beta| = \langle\alpha|X^\dagger$

$X^\dagger$ چنان موجودی است که اگر X روی $|\alpha\rangle$، $|\beta\rangle$ را بدهد، با $X^\dagger$ روی $\langle\alpha|$، $\langle\beta|$ را بدهد.

اگر $X=X^\dagger$ باشد آن عملگر را "هرمیتی" می‌گوییم.

ضرب عملگر:

- عملگرها تحت عمل ضرب هم شرکت‌پذیرند ولی تحت عمل ضرب جابجاپذیر نیستند.

$$X(YZ) = (XY)Z = XYZ$$

dual X، عملگری است به نام $X^\dagger$.

حال می‌خواهیم ببینیم dual XY چیست؟

$(XY)^\dagger = ?$

اگر Z را به صورت XY تعریف کنیم، بطوریکه اگر روی $|\alpha\rangle$ اثر کند $|\beta\rangle$ بدهد حال می‌دانیم که $\langle\beta|$ را با اثر دادن $Z^\dagger$ روی $\langle\alpha|$ بدست می‌آوریم، پس یعنی از اثر $(XY)^\dagger$ روی $\langle\alpha|$:

$$XY \equiv Z \quad , \quad |\beta\rangle = Z|\alpha\rangle$$

$$\langle\beta| = \langle\alpha|Z^\dagger = \langle\alpha|(XY)^\dagger$$

می‌خواهیم ببینیم ارتباط $(XY)^\dagger$ با XY چیست؟

$$Z|\alpha\rangle \; (1)$$

$$= \underbrace{XY|\alpha\rangle}_{\text{شده } |\gamma\rangle} \xleftrightarrow{DC} \langle\gamma|X^\dagger = \langle\alpha|Y^\dagger X^\dagger \overset{(1)^*}{=} \langle\alpha|Z^\dagger = \langle\alpha|(XY)^\dagger$$

$$|\gamma\rangle = Y|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\gamma| = \langle\alpha|Y^\dagger$$

$$\Rightarrow \boxed{(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger}$$

قرارداد:

قرارداد می‌کنیم که عملگرها از چپ روی ket ها و از راست روی bra ها اثر کنند.

$X|\alpha\rangle \;,\; \langle\alpha|X$ ✓ ← تعریف شده است

$|\alpha\rangle X \;,\; X\langle\alpha|$ ✗ ← بی مفهوم است

ضرب‌های بی‌جا

ضرب‌های مجاز که تا حال شناختیم عبارت بودند از:

$\langle\beta|\alpha\rangle \;,\; X|\alpha\rangle \;,\; \langle\alpha|X \;,\; XY \;,\; \underset{\text{ماهیت از نوع اپراتورها}}{|\alpha\rangle\langle\beta|}$ [illegible] معنی دارد

$|\alpha\rangle|\beta\rangle \;,\; \langle\beta|\langle\alpha|$ ← در حالت کلی بی معنی است

البته این دو تا را می‌توانیم معنی دار کنیم، اگر $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ (یا $\langle\alpha|$ و $\langle\beta|$) متعلق به دو فضای متفاوت باشند.

مثلاً فرض کنیم که $|\alpha\rangle$ معرف $|S_{z,+}\rangle$ یک الکترون باشد، اگر $|\beta\rangle$ هم معرف $|S_{z,+}\rangle$ یا $|S_{x,+}\rangle$ همان الکترون باشد این ضرب معنی ندارد، اما اگر مربوط به یک الکترون دیگر باشد ضرب معنی دار است.

$|\alpha\rangle = |S_z,+\rangle_1 \leftarrow$ اسپین ۱

دو فضای هیلبرت مختلف $\longrightarrow |\alpha\rangle|\beta\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ (ضرب تانسوری)

$|\beta\rangle = |S_z,-\rangle_2 \leftarrow$ اسپین ۲

این علامت برای این است که این دو با هم کاری ندارند.

در واقع تا موقعی که دو کت یا دو برا متعلق به یک فضای هیلبرت باشند، دو کت پشت هم نوشتن و یا دو تا برا پشت هم نوشتن بی معنا است. ولی اگر مربوط به دو فضای هیلبرت مختلف باشند، این حالت معنی دار می‌شود چون یکی در مورد اولی صحبت می‌کند و دیگری در مورد دومی.

حال که ضرب‌های با معنی و بی معنی را شناختیم، برای عمل شرکت پذیری قاعده‌ای وجود دارد؟

هر نوع ضرب شرکت پذیر است، اگر به ضرب غیرمجاز منجر نشود.

ابتدا ماهیت $|\alpha\rangle\langle\beta|$ را بررسی می‌کنیم، ماهیت آن از نوع اپراتور است.

ماهیت $|\alpha\rangle\langle\beta| \longrightarrow |\alpha\rangle\underbrace{\langle\beta|\gamma\rangle}_{c} = c|\alpha\rangle$

$c \leftarrow$ ضرب داخلی (عدد)

پس این موجود ($A = |\alpha\rangle\langle\beta|$) باعث شده است که $\overbrace{\text{state } |\gamma\rangle}^{A}$ تبدیل به state $|\alpha\rangle$ شود، پس یک اپراتور است.

برمی‌گردیم به شرکت پذیری ضرب‌ها:

مثال ۱:

KBK ← شرکت پذیر است

$$\underbrace{(|\beta\rangle\langle\alpha|)}_{\text{تعریف شده (اپراتور)}}\,|\gamma\rangle = |\beta\rangle\underbrace{\langle\alpha|\gamma\rangle}_{\text{تعریف شده (عدد)}}$$

(ket bra ket) ← فرض کنیم شرکت پذیر است

اگر پرانتز را برداریم، اگر به ضرب غیرمجازی تبدیل نشود، یعنی این کار امکان پذیر است و ضرب آنها شرکت پذیر است.

مثال ۲:

BKK ← شرکت پذیر نیست

$$(\langle\alpha|\gamma\rangle)|\beta\rangle = \langle\alpha|\overbrace{(|\gamma\rangle|\beta\rangle)}^{\text{بی معنی است}}$$

(bra ket ket) ← اگر فرض کنیم شرکت پذیر است

این شرکت پذیر نیست، چون دو تا کت کنار هم آمده‌اند.

همانطور که گفتیم به صورت مقابل یک اپراتور است، $X = |\alpha\rangle\langle\beta|$

سؤال این است که $X^\dagger$ چیست؟

$X^\dagger = ?$

X را روی یک state اثر می‌دهیم:

از نوع شرکت‌پذیری است:

$$\overbrace{(|\alpha\rangle\langle\beta|)}^{X}|\gamma\rangle = |\alpha\rangle\underbrace{\langle\beta|\gamma\rangle}_{c\ \text{یک عدد}} = c|\alpha\rangle$$

حال dual رابطه‌ی فوق را بدست می‌آوریم: ضرایب ستاره‌دار می‌شوند که قبلاً هم گفتیم

$$c|\alpha\rangle \xleftrightarrow{DC} c^*\langle\alpha| = \langle\beta|\gamma\rangle^*\langle\alpha| = \langle\gamma|\beta\rangle\langle\alpha|$$

داشتیم $\langle\beta|\gamma\rangle^* = \langle\gamma|\beta\rangle$

$$= \langle\gamma|X^\dagger$$

$$\Rightarrow X^\dagger = |\beta\rangle\langle\alpha|$$

اگر $|\alpha\rangle\langle\beta| \leftarrow X$ باشد پس حتماً $|\beta\rangle\langle\alpha|$، $X^\dagger$ است.

$$\Rightarrow \boxed{(|\alpha\rangle\langle\beta|)^\dagger = |\beta\rangle\langle\alpha|}$$

مثال:

از نوع شرکت‌پذیری است:

$$\langle\beta|\underbrace{(X|\alpha\rangle)}_{|\gamma\rangle} = (\langle\beta|X)|\alpha\rangle = \langle\beta|X|\alpha\rangle \quad (1)$$

طبق قاعده‌ای که داشتیم

$$|\gamma\rangle = X|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\gamma| = \langle\alpha|X^\dagger$$

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\gamma|\beta\rangle^* = \langle\alpha|X^\dagger|\beta\rangle^* \quad (2) \qquad (1) = (2)$$

که از (2) ستاره بگیریم یعنی ستاره آن را برداریم با یه حالت ستاره (1) را بدست آوریم.

$$\Rightarrow \boxed{\langle\alpha|X^\dagger|\beta\rangle = \langle\beta|X|\alpha\rangle^*}$$

تعریف عملگر این است که اگر روی هر کت اثر کند، یک کت دهد و اگر روی هر برا اثر کند، یک برا دهد.

$X|\alpha\rangle \to |\beta\rangle$

$\langle\alpha|X \to \langle\beta|$

عملگر این خصوصیت را دارد که اگر روی هر فضایی اثر کند، عضوی از همان فضا را دهد. فضای Bra ها و فضای Ket ها با هم فرق می‌کنند، یکی از آنها متعلق V است و دیگری متعلق به V^*.

می‌خواهیم ببینیم اگر یک عملگر هرمیتی باشد، ویژه مقادیر و ویژه حالتهای آن چه خصوصیتی دارند.

قضیه:

اگر A عملگر هرمیتی باشد، ویژه کتهای آن متعامد و ویژه مقادیر آن حقیقی هستند.

① $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$, $\underbrace{A=A^\dagger}_{\text{تعریف هرمیتی بودن}}$

فرض حالتهای غیرتبهگن را بررسی می‌کنیم (non-degenerate)

تعریف تبهگنی این است که اگر دو ویژه حالت مختلف داشتیم، اگر عمل A روی هر دو اینها اثر کند و یک ویژه مقدار دهد، می‌گوییم این حالتها تبهگن هستند.

تبهگنی: ما $|a'\rangle \neq |a''\rangle$: $\begin{cases} A|a'\rangle = a'|a'\rangle \\ A|a''\rangle = a'|a''\rangle \end{cases}$

ابتدا دوگان رابطه ① را بدست می‌آوریم:

$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle a'|A^\dagger = a'^*\langle a'|$

ما: به طور برای a'' هم داریم $\langle a''|A^\dagger = a''^*\langle a''|$

چون هرمیتی است پس $A=A^\dagger$

$\langle a''|\{A|a'\rangle = a'|a'\rangle\}$ $\qquad$ $\{\langle a''|A = a''^*\langle a''|\}|a'\rangle$

با فرض این دو رابطه داریم:

دو حالت داریم:
$$(a' - a''^*)\langle a'|a''\rangle = 0$$

حالت اول:

"را اینطور می‌نویسیم"

همیشه می‌توان بهنجار کرد

$$\text{if } |a'\rangle = |a''\rangle \longrightarrow \langle a'|a'\rangle \neq 0 \quad (1) \longrightarrow \text{بهنجار است} : \langle a'|a'\rangle = 1$$

$$a' - a'^* = 0 \Longrightarrow a' = a'^*$$

پس ویژه مقادیر حقیقی اند.

حالت دوم:

$$\text{if } |a'\rangle \neq |a''\rangle \longrightarrow a' \neq a'' \; (\text{non-degenerate})$$ چون غیر تبهگن فرض کردیم

$$\text{متعامد} \Longleftarrow \langle a'|a''\rangle = 0 \quad (2)$$

خصوصیت ویژه‌کت‌های یک عملگر هرمیتی:

رابطه $$(1),(2) \xrightarrow{\text{می‌توان نوشت}} \boxed{\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''}}$$: orthonormality relation

تعبیر دانستیم:

تنظیر یک کمیت فیزیکی

هر حالتی قابل بسط برحسب ویژه‌کت‌های یک عملگر هرمیتی (در همان سیستم) است.

مثلاً یک ذره با اسپین یک دوم ذره با طول دلخواه و یک ذره در فضای مکان در نظر بگیریم، آیا می‌توان اینها را برحسب $S_{z,t}$ بسط داد؟ نه نمی‌شود چون $S_{z,t}$ در یک فضای دو بعدی است بنابراین می‌توان کت‌های دو بعدی را برحسب آن بسط داد نه بینهایت بعدی مثل فضای مکان.

بنابراین اینکه هر حالتی قابل بسط است برحسب ویژه‌کت‌های یک عملگر هرمیتی به شرطی است که آن عملگر و آن حالت مربوط به یک سیستم باشند. مثلاً یک سیستم اسپین را داریم و آن سیستم یک عملگر هرمیتی مربوط به خود دارد یعنی حالت و عملگر هرمیتی مربوط به یک سیستم هستند.

- از آنجا که کمیات فیزیکی همگی حقیقی اند، بنابراین عملگرهای متناظر با آنها هرمیتی هستند.

و در فیزیک و در جهان خارج چیزی به نام موهومی یا مختلط نداریم چون $\sqrt{-1}$ را نمی توان حساب کرد. بنابراین تمام کمیتهای فیزیکی مثل مکان، ممنتوم و انرژی و ... همگی حقیقی هستند و تمام کمیتهای فیزیکی را متناظرشان را با یک عملگر بگیریم، ولی تنها عملگرهایی را می توانیم بگیریم که ویژه مقادیرشان حقیقی هستند، یعنی فقط عملگرهای هرمیتی را می توانیم در نظر بگیریم.

- خصوصیت orthonormality به ما اجازه می دهد ویژه کتهای عملگر هرمیتی را به عنوان کتهای پایه (base-ket) در نظر بگیریم (و همینطور ویژه bra ها را به عنوان base-bra)

$\langle a' | a'' \rangle = \delta_{a', a''}$ این عمل ضرب داخلی است و متناظر با ضرب داخلی است که در بردارهای سه بعدی می شناسیم. در ضربهای داخلی می دانیم که دو بردار عمود ضرب داخلی شان صفر است اگر بر هم عمود باشند. پس خصوصیت صفر شدن در رابطه بالا را به عنوان عمود بودن معنی می کنیم. بنابراین یک تعدادی ویژه کت داریم که بر هم عمودند. البته چند عدد داریم مربوط به آن سیستم مورد نظر ما می شود. مثلاً برای سیستم اسپین $\frac{1}{2}$:

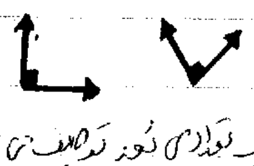
سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ ، $A = S_z$

$$\left.\begin{aligned} S_z |S_z, +\rangle &= \frac{\hbar}{2} |S_z, +\rangle \\ S_z |S_z, -\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |S_z, -\rangle \end{aligned}\right\} \quad \text{دو ویژه کت داریم}$$

$$\Longrightarrow \langle S_z, + | S_z, - \rangle = 0$$

چون دقیقاً تعداد ویژه کت های S_z دوتا است و فضای سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ دو بعدی است، بنابراین ۲ تا بردار هستند که بر هم عمودند، بنابراین می توان فضای دو بعدی را با آنها پوشاند.

یعنی اینکه مثلاً یک فضای دو بعدی مثل صفحه (کاغذ) را با ۲ بردار عمود بر هم می توانیم بپوشانیم و مهم نیست که کدام یک از دو بردار مقابل را در نظر بگیریم و فقط کافی است



که اینها بر هم عمود باشند.

چون این عملگرهایی که داریم صحبت می کنیم و مربوط به یک سیستم هستند به یک تعدادی تعریف می شود و بر هم عمودند، هر حالتی که مربوط به این سیستم می شود قابل بسط بر حسب آنها است،

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} \underset{\text{این ضرایب بسط را دارد}}{C_{a'}} |a'\rangle$$

یعنی حالا می فهمیم که این رابطه چرا درست است. به خاطر خصوصیت orthonormality.

سؤال:

چرا با اینکه کمیتهای فیزیکی هرمیتی هستند گاهی اوقات ما مجبوریم نوعی از کمیتهای غیر هرمیتی مثل S_+ را استفاده کنیم؟

این عملگرها متناظر با کمیتهای فیزیکی نیستند. ما می‌گوییم کمیتهای فیزیکی را با عملگرهای هرمیتی توصیف می‌کنیم ولی نمی‌گوییم با عملگرهای هرمیتی نمی‌توان هیچ ترکیب غیرهرمیتی ساخت. فقط کافی است که ضرایب آن مختلط باشند اما موجود غیرهرمیتی که می‌سازیم متناظر با یک کمیت فیزیکی نیست که S_+ هم همین طور است و متناظر با یک کمیت فیزیکی نیستند.

رابطه آخر صفحه قبل را می‌نویسیم:

$$|a\rangle = \sum C_{a'}|a'\rangle \quad (\mathrm{I})$$

در $\langle a''|$ ضرب می‌کنیم:

ویژه حالتهای یک عملگر هرمیتی

بنابراین ضرایب بسط بدست آمد

$$\langle a''|a\rangle = \sum_{a'} C_{a'} \underbrace{\langle a''|a'\rangle}_{\delta_{a''a'}} = C_{a''} \quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}),(\mathrm{II}) \Rightarrow \boxed{C_{a'} = \langle a'|a\rangle}$$

رابطه (I) را با توجه به $C_{a'}$ بدست آمده می‌نویسیم

کمیتهای پایه — این عملگر همانی است

$$|a\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|a\rangle = \Big(\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|\Big)|a\rangle \quad (\mathrm{III})$$

$(\hat e_i \cdot V)$

تصویر روی هر پایه $V_i = \hat e_i \cdot V$

$$\underset{\text{کل بردار}}{V} = \sum \underset{\text{بردار پایه}}{\hat e_i}\ \underset{\text{مولفه‌ها}}{V_i}$$

همانند بسط دادن یک بردار در فضای برداری برحسب مولفه‌ها و پایه‌ها است.

همین طور در مورد bra هم می‌توان نوشت یعنی هر bra را بر حسب ویژه براهای یک عملگر هرمیتی بسط داد.

جلسه پیش در مورد کت پوچ صحبت کردیم:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 0 \rightarrow |\alpha\rangle = 0 \quad \leftarrow \text{null-ket}$$

این اپراتور واحد و اپراتور پیچ هم داریم:

identity operator (عملگر واحد)

$X|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$: به ازای هر کت

$\Longrightarrow X = 1$

یعنی identity operator اپراتوری است که به ازای هر کتی رابطه بالا صادق باشد یعنی اگر روی هر کتی اثر کند، خود کت را نتیجه بدهد. (در مورد bra هم صادق است)

بعضی اوقات یک عملگر روی برخی حالتها، خود حالتها را می‌دهد. این در صورتی است که ویژه مقدارش یک باشد.

null operator (عملگر پوچ)

$X|\alpha\rangle = 0$: به ازای هر کت

$\Longrightarrow X = 0$

یعنی null operator اپراتوری است که به ازای هر کتی رابطه بالا صادق باشد، یعنی اگر روی هر کتی اثر کند، مقدار صفر را بدهد.

البته ممکن یک اپراتوری یک تعداد ویژه مقدار صفر داشته باشد و برای همه کتها مقدار صفر را نمی‌دهد در آن صورت عملگر پوچ نیست

رابطه (III) را در نظر می‌گیریم:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = \Big(\underbrace{\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|}_{\text{این یک اپراتور است}}\Big)|\alpha\rangle$$

$$\Longrightarrow \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = 1 \qquad \text{closure رابطه}$$

رابطه تکمیل، رابطه بستاری

چون رابطه (III) به ازای هر کتی برقرار است، پس نقش $\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|$ یک اپراتور واحد است. منظور از هر کتی این است که هر کتی مربوط به فضای خود اپراتور است.

نتیجه ساده‌ای از رابطه بدست آمده می‌توانیم بگیریم:

فرض کنیم: $c_{a'}^*$ و $c_{a'}$

فرض کنیم $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \Longrightarrow \langle\alpha|\underset{\uparrow}{1}|\alpha\rangle \Longrightarrow \sum_{a'} \langle\alpha|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = 1$

$\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|$

یک را اضافه می‌کنیم چون $|\alpha\rangle$، $1|\alpha\rangle$ است

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{a'} |c_{a'}|^2 = 1}$$

این رابطه نشان می‌دهد که باید بتوانیم تعابیر احتمالاتی را داشته باشیم

نکته دیگری که وجود دارد این است که اگر $\Lambda_{a'}$ را به صورت زیر تعریف کنیم، داریم: (زاویه)

$$\Lambda_{a} \equiv |a'\rangle\langle a'| \xrightarrow{\text{closure خاصیت}} \sum_{a'} \Lambda_{a'} = 1$$

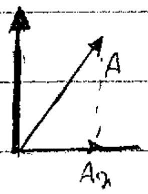
حال خاصیت این $\Lambda_{a'}$ را بررسی می‌کنیم:

$$\Lambda_{a'}|\alpha\rangle = |a'\rangle\overbrace{\langle a'|\alpha\rangle}^{C_{a'}} = C_{a'}|a'\rangle$$

یعنی با تأثیر این اپراتور روی $|\alpha\rangle$ ، مولفه $|a'\rangle$ این بسط را می‌دهد.

$$|\alpha\rangle = \sum_{a''} C_{a''}|a''\rangle$$

یعنی اپراتور $\Lambda_{a'}$ می‌تواند تصویر کند، یعنی روی یک بردار اثر می‌کند و تصویر آن بردار را روی مولفه مربوطه می‌دهد.



مثل تصویر یک بردار روی مولفه x

$\boxed{\Lambda_{a'} = \text{Projection operator}}$ عملگر تصویر :

$$\Lambda_{a'} = |a'\rangle\langle a'|$$

جلسه چهارم : ۸۴/۷/۱۰

جلسه گذشته گفتیم که برای هر عملگر هرمیتی خاصیات زیر برای ویژه کت‌ها و ویژه مقادیر وجود دارد:

$$A = A^{\dagger}$$

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

$$a'^{*} = a'$$

هر حالتی را می‌توان برحسب ویژه تابع یک عملگر هرمیتی بسط داد:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} C_{a'}|a'\rangle$$

ضرایب بسط بدین صورت بدست می‌آیند:

$$C_{a'} = \langle a'|\alpha\rangle$$

نمایش ماتریسی عملگرها و حالتها:

تا حالا با ویژه توابع و عملگرها را بصورت مجرد بررسی کرده‌ایم، یعنی گفتیم عملگر یک موجودی است که اگر روی یک حالت اثر کند، یک حالت دیگر می‌دهد:

$$A|\alpha\rangle = |\beta\rangle$$

برای تعریف عملگر یک راه آن است که اثر آن را روی همه حالتها بررسی کنیم، ولی این کار چون می‌دانیم هر حالت قابل بسط برحسب ویژه کت‌های یک عملگر هرمیتی است پس کافی است تأثیر عملگر را روی ویژه کتها بررسی کنیم.

یک عملگر دلخواه با تعریف اثر آن روی ویژه کتهای یک عملگر هرمیتی تعریف می‌شود:

$$X|a'\rangle = |\gamma'\rangle$$

شرح اگر بخواهیم بدانیم یک عملگر مثل X چه نوع عملگری است، باید اثر آن را روی دسته حالتهای $|a'\rangle$ بدانیم. اثر X روی $|a'\rangle$ها منجر به یک حالت $|\gamma'\rangle$ می‌شود که باید آن را هم بشناسیم، یعنی $|\gamma'\rangle$ شناخته شده است که ضرایب بسط آن را برحسب $|a'\rangle$ (یا $|a''\rangle$) بدانیم.

پس $|\gamma'\rangle$ را برحسب $|a''\rangle$ها می‌نویسیم.

$$X|a'\rangle = |\gamma'\rangle = \sum_{a''} \underbrace{\langle a''|\gamma'\rangle}_{\langle a''|X|a'\rangle} |a''\rangle$$

اگر این ضرایب معلوم باشند

پس برای شناختن یک عملگر کافی است این موضوع شناخته شده باشد، یعنی کافی X را وسط حالتهای ویژه یک عملگر هرمیتی بشناسیم

پس ما باید این ضرایب را بدانیم.

برای بدست آوردن این ضرایب می‌توانیم از نمایش ماتریسی استفاده کنیم

فرض کنید n تا از این stateها را داشته باشیم: $\{|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$

در این صورت رابطه مقابل $n\times n$ تا عدد هستند:

$$X_{ij} \equiv \langle a_i|X|a_j\rangle \qquad i = 1,\dots,n \quad j = 1,\dots,n$$

پس مانند یک ماتریس است، به این کار می‌گوییم نمایش ماتریسی یک عملگر.

داشتن این ماتریس معادل است با داشتن آن عملگر ولی باید تمام عناصر ماتریس را بدانیم، برای این که اثر عملگر را باید روی هر حالت دلخواه بدانیم

برای نمایش عملگر X می‌توانیم به این صورت عمل کنیم:

داشتیم ← ویژه‌کت‌های X هستند $\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = 1$: عملگر واحد

$$X = \sum_{i,j} \underbrace{|a_i\rangle}_{\text{عملگر واحد}} \underbrace{\langle a_i|X|a_j\rangle}_{X_{ij}} \underbrace{\langle a_j|}_{\text{عملگر واحد}} = \sum_{i,j} X_{ij}\, \underbrace{|a_i\rangle\langle a_j|}_{\text{operator (ket-bra)}}$$

می‌شود درایه ماتریس

$C_{a'}$ ها ویژه‌مقدارهای حالت $|\alpha\rangle$ هستند $|\alpha\rangle = \sum_{a'} C_{a'}|a'\rangle$، اما چون $|\alpha\rangle$ حالت است، آن را برحسب یک بردار ویژه حالت نوشتیم. بنابراین هم X_{ij} ویژه‌مقدارهای اپراتور ما هستند، اما چون بر روی خود اپراتور است برحسب پایه‌های پایه داده شده که ضرایب اپراتور هستند.

برای تعریف یک عملگر می‌توان این طور نوشت:

نمایش ماتریسی یک عملگر

$$X \doteq \begin{pmatrix} \langle a_1|X|a_1\rangle & \langle a_1|X|a_2\rangle & \cdots \\ \langle a_2|X|a_1\rangle & \langle a_2|X|a_2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

پس یک عملگر ماتریس نیست بلکه یک عملگر یک دستورالعمل است که روی حالتها اثر می‌کند ولی برای تعریف آن عملگر می‌توان اثر آن عملگر را روی ویژه‌کتها را داشت و برای داشتن آن عملگر روی ویژه‌کتها باید ویژه‌مقدارهای ماتریس را پیدا کنیم.

پس با این حساب می‌شود هر عملگر را به صورت یک ماتریس نمایش داد. البته با تغییر پایه نحوه‌ی آن را ببینیم برحسب چه چیزی داریم آن را بسط می‌دهیم، نمایش ماتریسی تغییر می‌کند و بستگی دارد که چه دسته حالتی را برای نمایش ماتریسی انتخاب کنیم.

ضمن وقتها ساده‌تر است که دسته حالتی را انتخاب کنیم که آن ماتریس در آن ساده‌تر باشد.

حالا که عملگرها را نمایش ماتریسی داریم، حالتها را هم می‌توانیم نمایش ماتریسی بدهیم.

نکته‌ای که وجود دارد این است که آیا این نمایش ماتریسی با خصوصیت عملگری تناقض ندارد، یعنی مثلاً می‌دانیم که ضرب دو عملگر خودش یک عملگر است، آیا این حالت برای نمایش ماتریسی هم وجود دارد آیا همان خصوصیت مورد نظر را دارند یا اینکه ندارند؟

فرض کنیم:

$$\overset{\text{عملگر}}{Z} = \overset{\text{عملگر}}{X}\,\overset{\text{عملگر}}{Y}$$

هر کدام از این عملگرها یک نمایش ماتریسی دارند. سؤال این است که آیا نمایش ماتریسی Z از حاصلضرب ماتریس‌های دو عملگر X و Y بدست می‌آید؟

عنصر ij ام ماتریس Z

$$\langle a_i | Z | a_j \rangle = \sum_k \langle a_i | X \overbrace{| a_k \rangle \langle a_k |}^{\text{عملگر واحد}} Y | a_j \rangle = \sum_k \underbrace{X_{ik} Y_{kj}} = Z_{ij}$$

این موضوع دقیقاً ضرب ماتریسی شد یعنی ستون یکی در سطر دیگری و دیدیم ضرب ماتریسی دو تا ماتریس عنصر ij ام یک ماتریس را می‌دهد.

پس دیدیم که با قاعده ضرب ماتریس‌ها هماهنگ است.

حالا می‌خواهیم ببینیم که آیا bra ها و ket ها را هم می‌توان با نمایش ماتریسی نشان داد؟

فرض کنیم $|\beta\rangle = X|\alpha\rangle$

طرفین را در $\langle a_i|$ ضرب می‌کنیم : $\langle a_i|\beta\rangle = \sum_j \underbrace{\langle a_i|X|a_j\rangle}_{X_{ij}} \underbrace{\langle a_j|\alpha\rangle}$

یک موضوع تک اندیسی شد، ماتریس ستونی

پس اگر بخواهیم با ماتریس‌ها نشان دهیم ماتریس‌ها سطری و یا ستونی خواهند بود، اما چون j ستون است پس این ماتریس ضرب سطر است. این مجموعه‌ای از سطرهاست پس تک ستونی است، یعنی ماتریس ستونی است.

$$\langle a_i|\beta\rangle = \sum_j \langle a_i|X|a_j\rangle \langle a_j|\alpha\rangle$$

اگر بخواهیم به صورت ماتریس نشان دهیم

$$\begin{pmatrix} \langle a_1|\beta\rangle \\ \langle a_2|\beta\rangle \\ \vdots \\ \langle a_n|\beta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & X & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1|\alpha\rangle \\ \langle a_2|\alpha\rangle \\ \vdots \\ \langle a_n|\alpha\rangle \end{pmatrix}$$

بنابراین کت‌ها را برحسب یک پایه کت دلخواه می‌توان نمایش داد که یک ماتریس ستونی است:

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a_1|\alpha\rangle \\ \vdots \\ \langle a_n|\alpha\rangle \end{pmatrix}$$

همچنین براها را می‌توان این طور نمایش داد:

$$\langle\beta| = \langle\alpha|X$$

$$\langle\beta|a_i\rangle = \sum_j \underbrace{\langle\alpha|a_j\rangle}_{\text{یک ماتریس سطری}}\underbrace{\langle a_j|X|a_i\rangle}_{X_{ji}}$$ ← طرفین را در $|a_i\rangle$ ضرب کنیم

X_{ji}: j سطر، i ستون

$$\left(\langle\beta|a_1\rangle \ \dots\dots \ \langle\beta|a_n\rangle\right) = \left(\langle\alpha|a_1\rangle \ \dots \ \langle\alpha|a_n\rangle\right)\left(\ X\ \right)$$

$$\langle\beta| \doteq \left(\langle\beta|a_1\rangle \ \dots \ \langle\beta|a_n\rangle\right) = \left(\langle a_1|\beta\rangle^* \ \dots \ \langle a_n|\beta\rangle^*\right)$$

ضرایب براها هم در ماتریس سطری و هم ستونی چیزی نیستند جز مولفه‌های برای $|\alpha\rangle$ برحسب $|a\rangle$

اگر $|\alpha\rangle$ را بسط دهیم: $|\alpha\rangle = \underline{\sum\langle a_i|\alpha\rangle}\langle a_i|$

این ضرایب بسط عناصر ماتریس می‌شوند یعنی در حقیقت مولفه‌ها را در ماتریس گذاشتیم

بنابراین حاصلضرب یک برا در یک کت را که باید یک عدد شود را باید بتوانیم با ماتریس‌ها نشان دهیم:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \sum_i \underbrace{\langle\beta|a_i\rangle}_{\langle a_i|\beta\rangle^*}\langle a_i|\alpha\rangle = \left(\langle a_1|\beta\rangle^* \ \dots \ \langle a_n|\beta\rangle^*\right)\begin{pmatrix}\langle a_1|\alpha\rangle \\ \vdots \\ \langle a_n|\alpha\rangle\end{pmatrix}$$

یعنی ضرب داخلی را می‌توان بصورت حاصلضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی نوشت.

دیدیم می‌خواهیم $|\beta\rangle\langle\alpha|$ که یک عملگر است نقش هر عملگر دیگری را می‌توان نشان داد:

$$X = |\beta\rangle\langle\alpha| \qquad X_{ij} = \langle a_i|X|a_j\rangle = \langle a_i|\beta\rangle\langle\alpha|a_j\rangle$$

نمایش ماتریسی کاملاً به base-ket بستگی دارد و با base-ket های مختلف نمایش‌های متفاوت داریم.

نمایش یک عملگر برحسب ویژه‌کت‌های خودش:

یعنی این بار یک عملگر را بسط دهیم و برای نمایش ماتریسی بنویسیم ولی برحسب ویژه‌کت‌های خودش

$$A = \sum_{i,j} |a_i\rangle\langle a_i|\underbrace{\underbrace{A|a_j\rangle}_{a_j|a_j\rangle}}_{a_j\delta_{ij}}\langle a_j| = \sum_i a_i \underbrace{|a_i\rangle\langle a_i|}_{1} \Rightarrow$$ نمایش قطری می‌شود

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

همانطور که از قبل می‌دانستیم دیدیم که نمایش یک اپراتور برحسب ویژه‌کت‌های خودش بصورت یک ماتریس قطری در می‌آید.

پس چیزی که می‌فهمیم این است که پیدا کردن ویژه‌کت‌های یک عملگر معادل قطری کردن آن است، چون اگر قطری شود، معلوم است که برحسب ویژه‌کت‌های خودش بسط داده شده است.

مثال: الف) $A = S_z \Rightarrow$ فضای دو بعدی داریم

ویژه‌کت‌ها: $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\} \xrightarrow{\text{معادل}} \{|S_z,+\rangle, |S_z,-\rangle\} \xrightarrow[\text{نمایش میدهیم}]{\text{این طور}} \{|\pm\rangle\}$

$$S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$$

S_z را برحسب ویژه‌کت‌های خودش بسط دهیم:

$$S_z : \overset{\hbar/2}{a_+}|+\rangle\langle+| + \overset{-\hbar/2}{a_-}|-\rangle\langle-| = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ \ 0) - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ \ 1)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$S_z \doteq \begin{pmatrix}\hbar/2 & 0\\0 & -\hbar/2\end{pmatrix}$$

کت‌ها را این طور نمایش می‌دهیم: $|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix}\langle a_1|\alpha\rangle\\ \vdots \\ \langle a_n|\alpha\rangle\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{باشد}]{\text{اگر خودش ویژه‌کت}} |a_1\rangle \doteq \begin{pmatrix}\langle a_1|a_1\rangle \to 1\\ \langle a_2|a_1\rangle \to 0\\ \vdots \\ \langle a_n|a_1\rangle \to 0\end{pmatrix}$ برهم عمودند

بنابراین نمایش ماتریسی ویژه‌کتها بصورت یک ماتریس ستونی است که یک عنصر آن یک است و بقیه صفر.

$$\Rightarrow |a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس در مثال S_z : $|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix} \Rightarrow |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \; |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

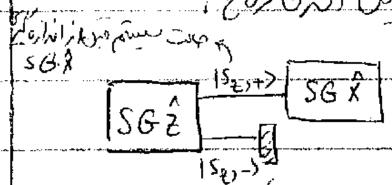
اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی:

- فرض کنیم عملگر اندازه‌پذیر A داریم یعنی باید یک عملگر هرمیتی باشد چون باید ویژه مقادیر عملگر اندازه‌پذیر حقیقی باشد

$$\Rightarrow A = A^{\dagger}$$

این عملگر می‌تواند مکان، تکانه و انرژی و هر چیزی مثل اینها باشد.

- حالت سیستم را قبل از اندازه‌گیری با $|\alpha\rangle$ نشان می‌دهیم، مثل آزمایش اشترن گرلاخ:



پس یک عملگر A داریم که می‌خواهد روی state ای که قبلاً درست شده ($|\alpha\rangle$) اندازه‌گیری انجام دهد.

تا قبل از اندازه‌گیری، حالت $|\alpha\rangle$ بر حسب جمعی از تمام ویژه‌کتهای عملگر A تشکیل شده است، یعنی:

اگر $A|a'\rangle = a'|a'\rangle \xrightarrow{\text{حالت}} |\alpha\rangle = \sum_{a'} C_{a'} |a'\rangle$

به عبارت دیگر این حالت ($|\alpha\rangle$) بالقوه می‌تواند به هر ویژه مقداری منجر گردد. یعنی قبل از اندازه‌گیری می‌تواند هر حالتی را با یک احتمالی بدهد، چون تمام ویژه‌کتهای آن را دارد. این یک واقعیت تجربی در QM است.

- اگر اندازه‌گیری روی سیستم به مقدار خاص a' منجر شود (اندازه‌گیری یک مقدار بدهد)، بنا بر خصوصیت تکرارپذیر بودن اندازه‌گیری، باید اندازه‌گیری‌های بعدی هم مجدداً a' را بدهد. این یک الزام مفهوم اندازه‌گیری در فیزیک است.

قبل از اندازه‌گیری $|\alpha\rangle \longrightarrow |a'\rangle$ بعد از اندازه‌گیری

عمل اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی تغییر حالت ایجاد می‌کند، از یک حالت دلخواه به یکی از ویژه کت‌های آن عملگری که داریم اندازه‌گیری می‌کنیم، تغییر حالت می‌دهد و باید بدانیم که عمل اندازه‌گیری به معنی تاثیر عملگر روی state نیست

تاثیر عملگر روی state به این صورت است،

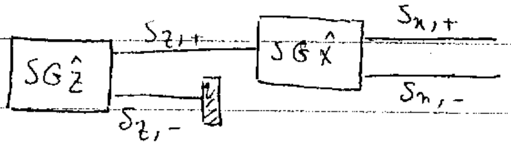
$$A|\alpha\rangle = \sum_{a'} C_{a'} \underbrace{A|a'\rangle}_{a'|a'\rangle} = \sum_{a'} a' C_{a'} |a'\rangle \; ① \longrightarrow$$ نه $|a'\rangle$ است و نه $|\alpha\rangle$

پس این کار اندازه‌گیری نیست

اندازه‌گیری یک جور تصویر کردن (projection) است، از یک حالت $|\alpha\rangle$ به یکی از ویژه کت‌ها.

پس عمل اندازه‌گیری را نمی‌توان با یک رابطه ریاضی نشان داد.

در رابطه ① $|a'\rangle$ها با یک ضرایب دیگری با هم جمع می‌شوند و تبدیل به یک state دیگری شود. اثر A روی ویژه کت خودش، خودش را می‌دهد. اگر روی ویژه کت‌های دیگر اثر کند، یک ویژه کت دیگری می‌دهد. بنابراین تاثیر دادن A روی $|\alpha\rangle$، $|\alpha\rangle$ را به یکی از مولفه‌های $|a'\rangle$ نمی‌برد؛ بلکه به یک حالت دیگری می‌برد؛ ولی اندازه‌گیری این نیست. اندازه‌گیری در حقیقت کروه کردن مولفه‌ها به یک مولفه است.



اگر آزمایش اشترن گرلاخ را بررسی کنیم،

از خروجی دومی انتظار داریم یا $S_{x,+}$ را بدهد و یا $S_{x,-}$.

در این شکلی که ما کشیدیم، ما یک ذره نداریم، بلکه

دسته ذرات را داریم (یک $|\alpha\rangle$ نیست و تعدادی $|\alpha\rangle$ است)

به همین خاطر یک تعداد بالا می‌روند و یک تعداد پایین می‌روند

اما در مورد یک ذره یا بالا می‌رود و یا پایین.

با این تعریفی که از اندازه‌گیری کردیم، سوالی مطرح می‌شود:

$|a'\rangle$

$|a''\rangle$

$|\alpha\rangle \longrightarrow$

می‌دانیم $|\alpha\rangle$ می‌تواند یکی از $|a'\rangle$ها شود، حال آیا هر کدام

از این $|a'\rangle$ها هم‌وزن هستند یا وزن‌های مختلفی دارند؟

به عبارت دیگر اگر نه تا یک $|\alpha\rangle$، تعداد زیادی داشتیم،

در آن صورت تعداد هر کدام از $|a'\rangle$ها چقدر می‌شد؟ آیا یکی هستند؟

به عنوان جواب می‌گوییم احتمال وقوع نتیجه $|a'\rangle$، برابر $|c_{a'}|^2$ است، این را به عنوان یک فرض می‌پذیریم و می‌بینیم که با نتایج تجربی هماهنگ هست.

$$|c_{a'}|^2 = |\langle a'|\alpha\rangle|^2$$

احتمال در مورد یک سیستم معنی دارد که به تعداد زیادی به چه تعدادی از هر حالت تبدیل می‌شود

$$\underset{\text{تعداد زیاد}}{N|\alpha\rangle} \xrightarrow{\text{اندازه‌گیری } A} \begin{cases} |a'\rangle & n_1 \rightarrow \text{تعداد برای این حالت} \\ |a''\rangle & n_2 \\ \vdots & \end{cases}$$

یعنی اگر تعداد زیادی $|\alpha\rangle$ داشته باشیم $|c_{a'}|^2$ برابر می‌شود با نسبتی که این $|\alpha\rangle$ها به حالت $|a'\rangle$ تبدیل می‌شوند

این فرض چند خصوصیت را برآورده می‌کند:

۱) اصل بقای احتمال (یعنی جمع احتمالها یک می‌شود)

$$\sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = \sum_{a'} \overbrace{\langle\alpha|a'\rangle}^{\langle a'|\alpha\rangle^*} \underbrace{\langle a'|\alpha\rangle}_{1} = \langle\alpha|\alpha\rangle = 1$$

۲) تضمین تکرارپذیری آزمایش را می‌کند:

حالت بعد از اندازه‌گیری: $|a'\rangle$

یعنی اگر بعد از اندازه‌گیری سیستم به حالت $|a'\rangle$ تبدیل شود، با اندازه‌گیری مجدد همان ویژه‌مقدار a' را بدهد. یعنی ۱۰۰٪ همین اتفاق می‌افتد

احتمال وقوع a' برای بار بعد با این فرض $\rightarrow |\langle a'|\underbrace{a'}\rangle|^2 = 1$

حالت سیستم که الان خود $|a'\rangle$ است

و به هیچ حالت دیگری مثل $|a''\rangle$ نمی‌رود:

احتمال رفتن a'' ، $a'' \neq a'$ $\rightarrow |\underbrace{\langle a''|a'\rangle}_{a'' \neq a'}|^2 = 0$

اگر $|c_{a'}|$ را به عنوان احتمال در نظر بگیریم دو شرط بالا را می‌دهد و مثبت هم هست، اما اگر فقط ضریب $c_{a'}$ را در نظر بگیریم، نه مثبت بود و نه خواص احتمال را دارد.

مقدار چشم‌داشتی : expectation value

می‌خواهیم مفهوم این را بدانیم، اولاً در مورد یک سیستم معنی ندارد؛ چون اگر در مورد یک سیستم اندازه‌گیری کنیم یکی از ویژه‌کت‌ها را با یک احتمال می‌دهد.

مقدار چشم‌داشتی برای سیستم‌های زیاد ($|\alpha\rangle$ های زیاد) معنی دارد، روی این $|\alpha\rangle$ ها اندازه‌گیری می‌کنیم هر کدام از آنها یک مقداری را می‌دهد.

می‌خواهیم حساب کنیم که مقدار متوسط این مقادیر در این مجموعه چقدر است.

$$N|\alpha\rangle \xrightarrow{A} \begin{array}{ll} |a_1\rangle & n_1 = |C_1|^2 \times N \\ |a_2\rangle & n_2 = |C_2|^2 \times N \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

ضریب بسط α بر حسب $|a_1\rangle$

یعنی : n_1 تا مقدار ویژه a_1 را دارند

n_2 تا مقدار ویژه a_2 را دارند $\longrightarrow$ مقدار متوسط $= \dfrac{a_1 \times \overset{\text{تعداد}}{n_1} + a_2 \times n_2 + \cdots}{N}$

$\vdots$

پس معلوم است که این مقدار متوسط برای یک سیستم بی‌معنی است و برای مجموعه سیستم‌ها معنی دارد.

$$\frac{a_1 \times n_1 + a_2 \times n_2 + \cdots}{N} = a_1 \times \underbrace{\frac{n_1}{N}}_{|C_1|^2} + a_2 \times \frac{n_2}{N} + \cdots = a_1 \times |C_1|^2 + a_2 \times |C_2|^2 + \cdots$$

$$\Longrightarrow A \text{ مقدار متوسط} = \langle A \rangle = \sum_{a'} \overset{\text{ویژه مقادیر}}{a'} \, \overset{\text{احتمال این ویژه مقادیر}}{|C_{a'}|^2}$$

تعریف استاندارد متوسط‌گیری
یعنی احتمال‌ها × مقادیر ویژه
جمع زدن روی همه اینها.

$$\langle \alpha | A | \alpha \rangle = \sum\sum \underbrace{\langle \alpha | a \rangle}_{C_a} \underbrace{\langle a | A | a' \rangle}_{a' \delta_{aa'}} \underbrace{\langle a' | \alpha \rangle}_{C_{a'}}$$

این طور داریم : $\langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle = \sum_{a', a''} C^*_{a''} C_{a'} \underbrace{\langle a'' | \overset{a'|a'\rangle}{A | a'} \rangle}_{a' \delta_{a'' a'}} = \sum_{a'} a' |C_{a'}|^2$

$\sum_{a''} C^*_{a''} \langle a'' | \quad \sum C_{a'} |a'\rangle$

$a \to a''$ گرفتیم تا قاطی نشود

یعنی وقتی یک مجموعه از یک نوع سیستم داریم و روی آن‌ها اندازه‌گیری کنیم این اندازه‌گیری‌ها به یک مقدار متوسط منجر می‌شود.

$$\boxed{A \text{ مقدار چشم‌داشتی} : \langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle}$$

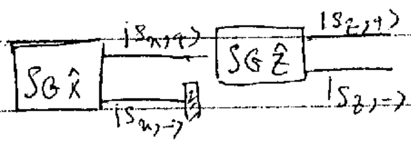
حال می‌خواهیم این نکاتی را که یاد گرفتیم در مورد اسپین به کار ببریم.

قبلاً بدست آورده بودیم : $S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)$

$|+\rangle \equiv |S_{z,+}\rangle$

حال می‌خواهیم ببینیم که S_x و S_y برحسب $|\pm\rangle$ چه می‌شوند؟ یعنی S_x و S_y را اگر برحسب ویژه حالتهای S_z بسط دهیم، چه چیزی بدست می‌آید؟

برای این کار آزمایش اشترن گرلاخ را داشتیم:



به عبارت دیگر یعنی اگر روی $S_{x,+}$ دستگاه S_z را بگذاریم، باید صورتی عمل کند که با احتمال $\frac12$، $+\frac{\hbar}{2}$ را بدهد و با احتمال $\frac12$، $-\frac{\hbar}{2}$ را می‌دهد، بنابراین صورتی دارد:

$$|S_{x,+}\rangle = C_1|+\rangle + C_2|-\rangle \quad \text{(I)}$$

C_1 : ضریب بسط $\langle+|S_{x,+}\rangle$

ما باید این ضرایب بسط را بدست آوریم

از طرفی به دلیل این نتیجه آزمایش داریم ؛

$$|\langle+|S_{x,+}\rangle|^2 = \frac12 \to \langle+|S_{x,+}\rangle = \frac{1}{\sqrt2}e^{i\alpha}$$
$$|\langle-|S_{x,+}\rangle|^2 = \frac12 \to \langle-|S_{x,-}\rangle = \frac{1}{\sqrt2}e^{i\beta} \quad \text{(II)}$$

فاز هم باید باشد چون به توان ۲ آنها ربطی ندارد

یعنی $\langle+|S_{x,+}\rangle$ و $\langle-|S_{x,-}\rangle$ یک عدد مختلط است با اندازه $\frac{1}{\sqrt2}$ و فاز دلخواه α و β.

ـــ برای S_x و S_y هم همین طور است.

ما فقط از این نتیجه آزمایش استفاده کردیم که اگر روی $|S_{x,+}\rangle$ اندازه‌گیری کنیم، ۵۰٪ $|+\rangle$ می‌شود و ۵۰٪ $|-\rangle$.

$$\text{(II)} \to \text{(I)} : |S_{x,+}\rangle = \frac{1}{\sqrt2}e^{i\alpha}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt2}e^{i\beta}|-\rangle$$

اختلاف فاز مهم است یعنی اختلاف بین مولفه‌ها اهمیت دارد : $\equiv \delta_1$

$$\Rightarrow |S_{x,+}\rangle = e^{i\alpha}\left\{\frac{1}{\sqrt2}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt2}e^{i(\beta-\alpha)}|-\rangle\right\}$$

این ضریب مشترک بی اهمیت است

چون وقتی احتمال را بخواهیم ضرب در مزدوج مختلطش می‌شود و حذف می‌شود

گفته بودیم که ما حالتها را با نرم شان نمی‌شناسیم، چون همیشه آنها را به یک نرمالیزه می‌کنیم.

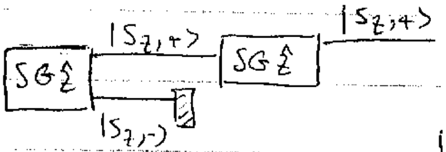
پس می‌توانیم به راحتی $\alpha = 0$ قرار دهیم.

$$\Rightarrow |S_x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle$$

عین همین کار را می‌توان برای $|S_x,-\rangle$ هم کرد، پس داریم:

$$|S_x,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\beta}_{\text{یک فاز دیگر}}|-\rangle$$

از آزمایش اشترن گرلاخ می‌دانیم که اگر $|S_z,+\rangle$ داشته باشیم و روی آن دوباره اندازه‌گیری S_z کنیم دوباره فقط خودش را می‌دهد یعنی:



فقط

به عبارت دیگر حالتهای ویژه مختلف بر هم عمودند و اینکه $|S_z,-\rangle$ در بار دوم خارج نشد به این معنا است که $\langle -|+\rangle$ صفر است، یعنی از حالت $|+\rangle$ نمی‌توان مولفه برای حالت $|-\rangle$ داشت.

پس از این عمود بودن ویژه حالتها استفاده می‌کنیم برای $|S_x,\pm\rangle$ ها!

$$\Rightarrow \langle S_x,-|S_x,+\rangle = 0 \longrightarrow 1 + \beta^* e^{i\delta_1} = 0 \Rightarrow \beta^* = -e^{-i\delta_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = -e^{i\delta_1}}$$

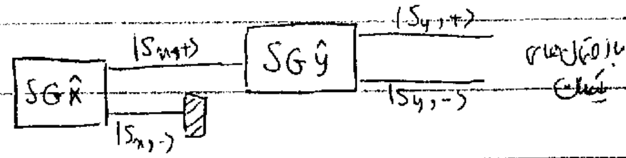
$$\begin{cases} |S_x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle \\ |S_x,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle \end{cases}$$

پس $|S_x,\pm\rangle$ را می‌توان با دانستن فاز را بدست آورد
تا حالا از احتمال یک بودن و عمود بودن ویژه حالتها
استفاده کردیم.

همین کار را می‌توانیم برای $|S_y,\pm\rangle$ انجام دهیم:

$$\begin{cases} |S_y,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{e^{i\delta_2}}{\sqrt{2}}|-\rangle \\ |S_y,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{e^{i\delta_2}}{\sqrt{2}}|-\rangle \end{cases}$$

نکته دیگر این است که اگر $|S_x;+\rangle$ را به $SG\hat{y}$ هم بفرستیم با احتمال‌های یکسان $|S_y;+\rangle$ و $|S_y;-\rangle$ می‌دهد



یعنی برای این حالت هم انتظار داریم:

$$③\begin{cases} |\langle S_y;\pm|S_x;+\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ |\langle S_y;\pm|S_x;-\rangle|^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$①,② \rightarrow ③ \Longrightarrow \frac{1}{2}\Big|1 \pm e^{i\overbrace{(\delta_1-\delta_2)}^{\alpha}}\Big|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \pm e^{i\alpha} \pm e^{-i\alpha} = 2$$

$$\pm 2\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0 \longrightarrow \boxed{\alpha = (n+\tfrac{1}{2})\pi}$$

نکته ۱: صرف δ_1 و δ_2 دیگر مهم نشدند بلکه اختلافشان (α) اهمیت پیدا کرد و دیگر هیچ قیدی نداریم که اعمال کنیم و با بدست آوردن α همه روابط بدست می‌آید و نکته این است که این معادله α را می‌دهد یعنی اختلاف δ_1 و δ_2 و نه صرف δ_1 و δ_2 را بطور مجزا.

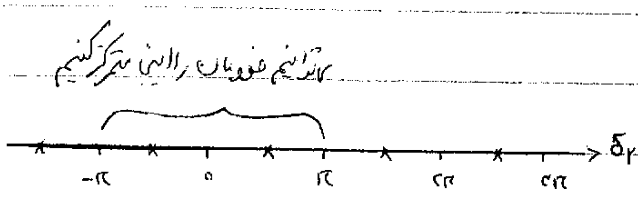
چون می‌توان $\delta_1 = 0$ انتخاب کرد، درنتیجه داریم:

$$|S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle \longrightarrow |S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

نکته ۲: ما با خود δ_2 کار نداریم بلکه با exp آن کار داریم پس:

$$\text{if } \delta_2 \longrightarrow \delta_2 + 2k\pi \Longrightarrow e^{i\delta_2} \longrightarrow e^{i\delta_2}$$

پس برای تعیین δ_2 تا حد 2π می‌توان همه را دور ریخت، افزایش 2π فرقی در تغییر فاز ندارد.



برای بقیه نواحی اشتباه تعیین

حالت‌ها تفاوت نمی‌کند.

$$-\pi < \delta_2 < \pi \longrightarrow \delta_2 = \pm \pi/2$$

$$\alpha = (n+1/2)\pi \longrightarrow \alpha = \ldots, \ldots, -3/2\pi, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \ldots$$

اگر در این مقادیری که α بدست می‌آید، اگر فقط ۲ مقدار $\pi/2$ ، $-\pi/2$ را در نظر بگیریم یعنی خودمان را در این ناحیه محدود کنیم

بقیه مقادیر از این دو بدست می‌آیند با افزودن 2π.

$$\text{if } \delta_2 = \pi/2 \longrightarrow |S_y, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$\text{if } \delta_2 = -\pi/2 \longrightarrow |S_y, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \mp \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

این دو با هم فرق می‌کنند.

بعداً در فصل ۳ استدلال می‌کنیم که حالت $\delta_2 = -\pi/2$ قابل قبول نیست

توضیح کوتاه:

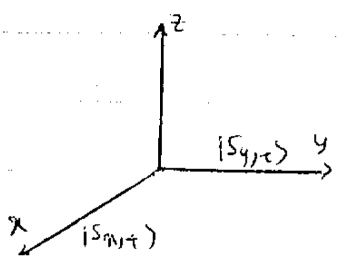
در اینجا ← فازهای این حالتها باید یک نکته دیگر هم در نظر گرفت و آن هم بحث اصل اینها تحت دوران (فصل ۳) است.

اگر حالت $|S_x, +\rangle$ را که معرف چرخش بودن در جهت $+x$ و $|S_y, +\rangle$ را که معرف چرخش بودن در جهت $+y$ است

را در نظر بگیریم، می‌توانیم با دوران حول محور z به اندازه $\pi/2$ از حالت $|S_x, +\rangle$ به حالت $|S_y, +\rangle$ برسیم. در حقیقت

روابط ما باید این خصوصیت را داشته باشند:

اپراتور دوران
$$D(\hat{z}, \pi/2)|S_x, +\rangle = |S_y, +\rangle$$
حول محور z
به اندازه $\pi/2$



نکته این است که با قرار دادن $\delta_1 = 0$ ، S_x را فیکس کردیم

و این فیکس کردن منجر می‌شود به فیکس شدن S_y. پس اگر

اپراتور D را اثر دهیم، می‌بینیم که حالت $\delta_2 = +\pi/2$ بدست می‌آید

نه $\delta_1 = -\pi/2$

$$\boxed{\begin{aligned} |S_x,\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm |-\rangle\right) \\ |S_y,\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm i|-\rangle\right) \end{aligned}} \quad \text{I}$$

S_x را با S_z برحسب ویژه کت‌هایش می‌نویسیم:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|S_x,+\rangle\langle S_x,+| - |S_x,-\rangle\langle S_x,-|\right) \overset{\text{I}}{=} \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)} \;*$$

S_x مولفه $|+\rangle\langle-|$ دارد با اندازه $\hbar/2$

S_x مولفه $|-\rangle\langle+|$ دارد با اندازه $\hbar/2$

همین طور برای S_y می‌نویسیم:

$$\boxed{S_y = \frac{i\hbar}{2}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)} \;*$$

S_y مولفه $|+\rangle\langle-|$ دارد با اندازه $-i\hbar/2$

S_y مولفه $|-\rangle\langle+|$ دارد با اندازه $+i\hbar/2$

اینها را می‌توان به صورت ماتریس هم نوشت.

نمایش ماتریسی عملگرهای اسپین:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i}_{\text{ماتریس پاولی}} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

خاصیت‌های عملگرهای اسپین:

$$\boxed{[S_m, S_n] = i\hbar\,\varepsilon_{mnk} S_k}$$

بین S ها یا هم جابجا نمی‌شوند σ ها

دوتا از آنها، دیگری را می‌دهد

تعریف رابطهٔ پادجابجایی : $\{A, B\} = AB + BA$

رابطهٔ پادجابجایی برای عملگرهای اسپین : $\boxed{\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2 \delta_{ij}}$ $\rightarrow$ $S_1^2 = \frac{1}{4}\hbar^2$

اگر داشته باشیم $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$

$\boxed{[S^2, S_i] = 0}$ S^2 با تمام مولفه‌های عملگر اسپین جابجا می‌شود

جلسه پنجم: ۸۴/۷/۱۲

مشاهده‌پذیرهای سازگار : Compatible observables

فرض کنیم دو عملگر داریم که مشاهده‌پذیرند یعنی هر دو هرمیتی هستند یعنی:

$$\begin{cases} A = A^+ \\ B = B^+ \end{cases}$$

دو عملگر A و B سازگارند اگر $[A, B] = 0$ ، یعنی جابجا شوند. حال می‌خواهیم علت این اسم‌گذاری را بدانیم

فرض کنید A غیرتبهگن باشد: (روی B هیچ قیدی نمی‌گذاریم)

می‌خواهیم ثابت کنیم ویژه‌کت‌های A و B مشترک هستند.

فرض می‌کنیم یک دسته حالت داریم ($|a'\rangle$) که دسته حالت عملگر A هستند. می‌خواهیم نشان دهیم همین دسته حالت، دسته حالت عملگر B هم هست.

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

$$\begin{cases} A|a'\rangle = a'|a'\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle a'|A^{+} = \langle a'|a'^{*} \\ \langle a'|A = a'\langle a'| \quad \text{چون A هرمیتی است} \\ \langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''} \\ a'^{*} = a' \quad \text{ویژه مقادیر حقیقی هستند} \\ (|a'\rangle)^{+} = \langle a'| \end{cases}$$

اگر مقدار چشمداشتی جابجاگر A و B را بین دو state حساب کنیم و با فرض اینکه جابجاگر آن صفر است داریم:

$$0 = \langle a''|\underbrace{[A,B]}_{AB-BA}|a'\rangle \Longrightarrow (a''-a')\langle a''|B|a'\rangle = 0$$

دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: اگر $|a'\rangle \neq |a''\rangle \xrightarrow[\text{چون A غیرتبهگن است}]{\text{اگر حالت‌ها فرق کنند ویژه مقدارها هم فرق می‌کنند}} a' \neq a'' \xrightarrow{\text{پس}} \langle a''|B|a'\rangle = 0$

حالت ۲: اگر $|a'\rangle = |a''\rangle \longrightarrow a' = a'' \Longrightarrow (a'-a'') = 0 \Longrightarrow \langle a'|B|a'\rangle$ مقدارش هر چیزی است

پس آنچه که در مورد این عنصر ماتریسی ($\langle a''|B|a'\rangle$) می‌توان گفت این است که اگر دو state برابر باشند غیر صفر است و اگر متمایز باشند صفر است پس:

$$\langle a''|B|a'\rangle = \delta_{a',a''}\langle a'|B|a'\rangle$$

همین نشان می‌دهد که ویژه کت‌های A، اگر A غیرتبهگن باشد، ویژه کت‌های B هم هستند.

اگر B را در پایه $|a'\rangle$ ها نمایش دهیم ماتریس آن قطری در می‌آید و این از خصوصیتی است که اگر عملگری را در پایه خودش نمایش دهیم ماتریس آن قطری می‌شود. پس ویژه حالت عملگر A، ویژه حالت عملگر B هست چون B برحسب آن ویژه حالتها قطری شده است.

به طور صریح‌تر می‌توان نوشت:

$$B|a'\rangle = \sum_{a''} |a''\rangle\underbrace{\langle a''|B|a'\rangle}_{\delta_{a'a''}\langle a'|B|a'\rangle} = \langle a'|B|a'\rangle|a'\rangle$$

$\delta_{a'a''}$ جمع روی a'' را برداشته باقی نمی‌ماند بجز a' ؛ $\langle a'|B|a'\rangle \equiv b$ ؛ $\sum |a''\rangle\langle a''|$ یک است چون ویژه حالت عملگر A کامل است

بنابراین $|a'\rangle$ ویژه کت عملگر B است با ویژه مقدار b'، چون وقتی B روی آن اثر داده شود همان ویژه کت را می‌دهد.

نکته ۱:

یک دسته حالت $|a'\rangle$ اگر چه ویژه‌کت عملگر A است، اگر A و B سازگار باشند، ویژه‌کت عملگر B هم هست با یک ویژه مقدار b'.

پس بهتر است state مورد نظر را بصورت $|a',b'\rangle$ نمایش دهیم که معنای آن این است که اگر A روی آن اثر کند ویژه مقدار a' را می‌دهد و اگر B روی آن اثر کند، ویژه مقدار b' را می‌دهد. پس در مورد عملگرهای سازگار بهتر است که ویژه‌کت‌های آن را با دو عدد نشان دهیم.

$$A|a',b'\rangle = a'|a',b'\rangle$$

$$B|a',b'\rangle = b'|a',b'\rangle$$

نکته ۲:

تعیین a'، b' را تعیین می‌کند، ولی معکوس آن درست نیست. یعنی اگر یکی از ۲ اندیس $|a',b'\rangle$ یا یک حالت $|a'\rangle$ را نشان دهیم، می‌توانیم B را روی آن اثر دهیم و معلوم است که چه چیزی را می‌دهد و b' آن چه چیزی می‌شود چونکه b' را از روی حالت $\langle a'|B|a'\rangle = b'$ بدست می‌آوریم و وقتی $|a'\rangle$ معلوم باشد و این عملگر را اثر دهیم، b' را بدست می‌آوریم. اما عکس این قضیه برای $|b'\rangle$ درست نیست، یعنی با دانستن b'، a' لزوماً بدست نمی‌آید، چون ما هیچ فرضی در مورد تبهگنی B نکرده‌ایم. مثلاً اگر B تبهگن باشد، در آن صورت یک حالت متناظر با یک ویژه مقدار نیست و ممکن است بصورت زیر باشد.

$$B|a'\rangle = b'|a'\rangle$$

$$B|a''\rangle = b'|a''\rangle$$

بنابراین اگر ویژه مقدار b' را بدهیم، state را مشخص نکرده‌ایم یعنی می‌تواند $|a'\rangle$ باشد یا $|a''\rangle$، یعنی اگر ویژه مقدار b' مربوط به حالتی را بدهیم، آن حالت مشخص نشده است چون آن ویژه مقدار می‌تواند تبهگن باشد.

اصولاً عملگرهای جابجاپذیر (سازگار) در مواردی که تقارن وجود داشته باشد، ظاهر می‌شوند. باید ببینیم چه اتفاقی می‌افتد که در یک مسئله، دو یا بیشتر از دو عملگر با هم جابجا می‌شوند. این اتفاق وقتی می‌افتد که مسئله‌مان یک تقارنی داشته باشد و عملگرهایی که مولد آن تقارن هستند، با هامیلتونی سیستم جابجا می‌شوند.

مثلاً تحت دوران تقارن داشته باشد یعنی وقتی سیستم را می‌چرخانیم چیزی عوض نشود
یا تحت انتقال تقارن داشته باشد یعنی وقتی یک سیستم از جایی به جای دیگر انتقال دهیم چیزی عوض نشود
یا تحت پاریته تقارن داشته باشد یا تحت جابجایی ذرات.

هر تقارنی که وجود داشته باشد بعداً می‌بینیم به ازای هر تقارنی یک عملگری مولد آن تقارن است که حتماً با هامیلتونی جابجا می‌شود.

هر تقارنی که وجود داشته باشد یعنی تبهگنی وجود دارد. اگر سیستم مورد مطالعه تحت عملی متقارن باشد یعنی انرژی متقارن است یعنی به صورت خلاصه این است که پتانسیل عوض نمی‌شود و به زبان کوانتومی به این معنا است که ویژه مقدارهای یکسان دارند یعنی حالتی که سیستم در یک جا باشد یا جای دیگر این تبهگنی داریم

* هر وقت تقارن داریم حتماً تبهگنی داریم و برعکس آن هر وقت تبهگنی داریم حتماً تقارن داریم. البته بعضی اوقات پیدا کردن این تقارن‌ها سخت است.

رابطه این نکات در مورد مسئله ما این است که ما از یک طرف می‌گوییم برای مسئله‌ای که تقارن وجود دارد تبهگنی داریم و از طرف دیگر می‌گوییم جاهایی که تقارن وجود دارد دو عملگر با هم جابجا می‌شوند.

با وجود تبهگنی و بدون (با فرض محال) وجود عملگر سازگار با عملگر اولیه، تعریف حالت‌های مختلف دچار اشکال می‌شود. فرض کنیم در یک مسئله تبهگنی داریم و یک عملگر سازگار برای آن عملگر در مسئله‌مان وجود نداشته باشد، در این صورت توضیح مسئله دچار اشکال می‌شود:

فرض کنیم
$$\left.\begin{aligned} A|a'\rangle &= a'|a'\rangle \\ A|a''\rangle &= a'|a''\rangle \end{aligned}\right\}\ \text{تبهگنی داریم}$$

اگر مسئله‌ای که ما بررسی می‌کنیم را فقط با یک حالت بتوان نشان داد و یا ویژه حالت‌هایی که داریم فقط ویژه حالت یک عملگر باشند، با نمی‌توانیم این دو حالت را به دو صورت مجزا $|a'\rangle$ و $|a''\rangle$ بنویسیم ولی ممکن نیست. یعنی اگر بخواهیم ویژه حالت را با ویژه مقدارشان نشان دهیم، اما این که این دو یک ویژه مقدار دارند ممکن است، اما از طرفی می‌دانیم که تبهگنی وجود دارد. پس حتماً این حالت‌ها باید از یک جهت دیگری با هم فرق کنند. درست است که از نظر ویژه مقدار عملگر A یکی هستند اما حتماً باید یک عملگر مثل B وجود داشته باشد که:

$$B|a'\rangle = b'|a'\rangle$$
$$B|a''\rangle = b''|a''\rangle$$

در این صورت این دو تا state واقعاً تبهگن هستند و از یک جهتی با هم تفاوت دارند و این اتفاق وقتی می‌افتد که این دو عملگر A و B دارای eigen state مشترک باشند یعنی با هم جابجا شوند. پس زمانی که تبهگنی داریم تعریف حالتهای مختلف با وجود نداشتن عملگرهای سازگار بی معنی است، پس باید یک عملگری وجود داشته باشد که این دو حالت تبهگن را از هم جدا کند، می‌توانیم بگوییم پس دو حالت داریم

$|a', b''\rangle \quad , \quad |a', b'\rangle$

ویژه مقادیر

* وجود عملگرهای سازگار برای تبهگنی لازم است.

امکان دارد که دو تا state برای عملگر A هم eigen value باشد و همین stateها برای عملگر B هم این طور باشد، حتماً یک عملگرش C وجود دارد که این دو را تمایز دهد و این نکته مهمی است که باید بگردیم تفاوت را پیدا کنیم.

تا الان نشان دادیم که اگر A غیرتبهگن باشد، ویژه حالتهای آن حتماً ویژه حالتهای B هم است به شرط آنکه سازگار باشند. اما اگر A تبهگن بود، ضرورتاً ویژه حالتهای آن، ویژه حالتهای B نیست.

فرض کنیم A تبهگن باشد:

$$\begin{cases} A|a'\rangle = a'|a'\rangle \\ A|a''\rangle = a'|a''\rangle \end{cases}$$

سازگار باشند B, A : $[B, A] = 0 \longrightarrow B|a'\rangle \overset{?}{=} b'|a'\rangle$

حتماً درست نیست ولی همواره می‌توان با استفاده از دو حالت $|a'\rangle$ و $|a''\rangle$ دو ویژه کت دیگر بدست آورد که ویژه کتهای همزمان A و B باشند. البته $|a'\rangle$ و $|a''\rangle$ ضرورتاً ویژه کتهای B نیستند، اما در حالت غیرتبهگن، این ویژه حالتها، ویژه حالتهای B هم بودند؛ یعنی می‌توان این طور ساخت:

$|a_1\rangle = c_1|a'\rangle + c_2|a''\rangle$

ویژه کت $|a_1\rangle$ حتماً ویژه کت A است (خصوصیت ویژه کتهای تبهگن)، چون ترکیب خطی ویژه کتهای تبهگن باز یک ویژه کت است، یعنی:

$A|a_1\rangle = c_1 a'|a'\rangle + c_2 a'|a''\rangle = a'(c_1|a'\rangle + c_2|a''\rangle) = a'|a_1\rangle$

این مورد فقط برای ویژه‌کتهای تبهگن درست است، یعنی اگر تبهگن نبود، ترکیب خطی دیگر ویژه‌کت نیست:

اگر $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$

$A|a''\rangle = a''|a''\rangle$ $\longrightarrow |a_1\rangle = c_1|a'\rangle + c_2|a''\rangle$ ویژه‌کت نیست

یعنی اگر A را روی $|a_1\rangle$ بزنیم قسمت اول a' می‌دهد و قسمت دوم a'' و نمی‌توان از آن‌ها فاکتور گرفت.

پس بحث ما این است که دو ویژه‌کت داریم که ویژه‌کتهای تبهگن عملگر A هستند و ضرورتاً ویژه‌کت عملگر B نیستند
اما می‌توان یک ترکیب از آن‌ها به صورت $|a_1\rangle$ و $|a_2\rangle$ ساخت بطوریکه

$$\begin{cases} |a_1\rangle = c_1|a'\rangle + c_2|a''\rangle \\ |a_2\rangle = c_1'|a'\rangle + c_2'|a''\rangle \end{cases}$$

$A|a_1\rangle = a'|a_1\rangle$ $\xrightarrow{\text{ضرایب را طوری تعیین می‌کنیم که}}$ $B|a_1\rangle = b_1|a_1\rangle$

$A|a_2\rangle = a'|a_2\rangle$ $\qquad\qquad$ $B|a_2\rangle = b_2|a_2\rangle$

در این صورت ویژه‌کتها مشترک هستند.

پس نتیجه می‌گیریم که اگر یک دسته حالت، ویژه‌کت عملگر A باشند، در صورت عدم وجود تبهگنی برای عملگر A،
حتماً این ویژه‌کت‌ها، ویژه‌کت عملگر B هم هستند به شرط آنکه A و B جابجا باشند.
اما اگر تبهگنی برای A وجود داشته باشد، دیگر این ویژه‌کت‌ها لزوماً به طور یک به یک ویژه‌کت عملگر B نیستند بلکه
ترکیبی از آن‌ها ویژه‌کت عملگر B است.

مثال: (ذره آزاد)

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} \begin{cases} \nearrow e^{\pm ikx} \\ \searrow \sin kx, \cos kx \end{cases}$$ ویژه‌توابع به دو صورت می‌توانند باشند

در ضمن می‌دانیم که هامیلتونی ذره آزاد با تکانه جابجا می‌شود: $[H_0, P] = 0$

پس H_0 و P ویژه‌کت مشترک دارند، ولی اگر $\cos kx$ و $\sin kx$ را ویژه‌کت‌های ذره آزاد می‌گرفتیم و
P را روی $\sin$ اثر دهیم، $\sin$ را نمی‌دهد بلکه $\cos$ را می‌دهد، پس $\sin kx$ و $\cos kx$ ویژه‌کت P نیستند.

$P\,\sin kx = \hbar k \cos kx$

بنابراین با اینکه $S_{n}K_{n}$ و $C_{n}K_{n}$ ها ویژه کت عملگر H هستند ولی ویژه کت عملگر P نیستند بلکه این است که می‌توان اینها را یک بار با + و یک بار با - ترکیب کرد تا ویژه کت هر دو عملگر H و P باشند.

به بحث سازگاری بیشتر می‌پردازیم. به خاطر خصوصیت اندازه‌گیری‌شان به آنها سازگار می‌گوییم

فرض کنیم عملگر A دارای واگنی باشد یعنی دسته حالت $a^{(i)}$ وجود دارد که $\longrightarrow$ $A|a^{(i)}\rangle = a'|a^{(i)}\rangle \qquad i=1,\dots,n$

این دسته حالتها از نظر B واگن نیستند $\longrightarrow$ $B|a^{(i)}\rangle = b^{(i)}|a^{(i)}\rangle$

state ها را $|a', b^{(i)}\rangle$ می‌گیریم، چون که اینها هم از نظر A به a' منجر می‌شوند و از نظر B به $b^{(i)}$ یعنی b ها (ویژه مقادیر) تفاوت دارند.

اندازه‌گیری‌های متناوب مشاهده‌پذیرهای سازگار A و B، با یکدیگر سازگارند.

فرض کنیم $|\alpha\rangle$ را داریم

$$|\alpha\rangle \xrightarrow[\text{فرض کنیم ویژه مقدار } a' \text{ را بدهد.}]{\text{اندازه‌گیری } A} \sum_{i=1}^{n} c^{(i)}|a', b^{(i)}\rangle \xrightarrow[\text{ویژه مقدار } b^{(j)} \text{ خاص بدست آید}]{\text{اندازه‌گیری } B} |a', b^{(j)}\rangle \xrightarrow[A]{\text{اندازه‌گیری}} |a', b^{(j)}\rangle$$

که این وجود دارد به خاطر قانون علیت اندازه‌پذیری باید کمی باشد که اگر اندازه‌گیری را تکرار کنیم همان ویژه مقدار را دهد بنابراین از این $b^{(i)}$ ها باشد، البته چون اینها واگن هستند یکی از $b^{(i)}$ ها نیست بلکه ترکیب اینها هم می‌توانند باشد این ویژه کتی که اینجا ظاهر می‌شود باید ویژه کت A باشد با ویژه مقدار a' و هر ترکیب خطی از $b^{(i)}$ ها.

یعنی state های حالت قبل تبدیل به یک state شده که با اندازه‌گیری فقط همین state تولید می‌شود، این state هنوز ویژه کت A است و البته $|a', b^{(i)}\rangle$ ها تبدیل به $|a', b^{(j)}\rangle$ شده است

این اندازه‌گیری‌ها شبیه آزمایش اشترن گرلاخ است با این تفاوت که با دو عملگر جابجا شونده انجام شده است اما در آنجا به صورت $SG\hat{z} \to SG\hat{x} \to SG\hat{z}$ بود و بر عکس آزمایش اشترن گرلاخ از حالت ماقبل آخر ویژه مقدار جدید تولید نمی‌شود

پس دو عملگر A و B سازگارند و اندازه‌گیری‌های متناوب آنها هم با یکدیگر سازگارند. این مفهوم سازگار بودن است یعنی اندازه‌گیری توسط دو کمیت فیزیکی که متناظر آن عملگرهای سازگارند، ویژه‌مقدار اولیه را عوض نمی‌کند و این همان چیزی است که در آزمایش اشترن گرلاخ داشتیم. در آزمایش اشترن گرلاخ اندازه‌گیری $SG\hat{x}$ روی $|S_z,+\rangle$ حافظه سیستم را پاک می‌کرد و باعث می‌شد اندازه‌گیری مجدد $SG\hat{z}$ روی $|S_x,+\rangle$ هم $|S_z,+\rangle$ و هم $|S_z,-\rangle$ را بدهد، اما در اینجا اندازه‌گیری B منجر به یک ویژه‌مقدار می‌شود و اندازه‌گیری A طوری است که انگار روی حالت اول اندازه‌گیری شده و فقط روی حالت دوم اندازه‌گیری شده است و این خاصیت مهم عملگرهای جابجایی است.

می‌خواهیم ببینیم اگر همین آزمایش با دو عملگر غیر جابجاشونده انجام شود، چه می‌شود؟

اگر A، B سازگار نبودند

ناسازگار باشند

Incompatible operators

ابتدا نشان می‌دهیم که عملگرهای ناسازگار ویژه‌کت‌های مشترک ندارند یعنی دسته ویژه‌کت آنها مشترک نیست.

برهان خلف: فرض کنیم دارند:

$$\begin{cases} A|a',b'\rangle = a'|a',b'\rangle \\ B|a',b'\rangle = b'|a',b'\rangle \end{cases}$$

یعنی روی ویژه‌کت $|a',b'\rangle$ اگر A اثر کند ویژه‌مقدار a' و اگر B اثر کند ویژه‌مقدار b' را می‌دهد. اگر این را برای کلیه ویژه‌کتهای یک عملگر برقرار باشد این دو عملگر سازگارند.

روی $|a',b'\rangle$ عملگر AB را اثر می‌دهیم:

$$AB|a',b'\rangle = b'a'|a',b'\rangle \quad ①$$

این خاصیت عملگرهای خطی است که یک عدد از جلوی عملگر خارج می‌شود و این طور است:

خاصیت عملگرهای خطی

$$AC|\alpha\rangle = CA|\alpha\rangle$$

$$BA|a',b'\rangle = a'b'|a',b'\rangle = b'a'|a',b'\rangle \quad ②$$

$$① - ② \Rightarrow AB|a',b'\rangle - BA|a',b'\rangle = 0 \Rightarrow [A,B]|a',b'\rangle = 0 \quad ③$$

که خلاف فرض مان است، چون فرض کردیم ناسازگارند، حالا سازگارند. البته باید توجه داشته باشیم دو عملگر

روی state ای عمل کند و صفر شد به این معنی نیست که آن عملگر صفر است. این در حالتی درست است که این اپراتور روی هر state ای اثر کند و صفر شود، اما چون در اینجا عملگرها با هم جابجاپذیر هستند، پس هر state ای قابل بسط بر حسب ویژه‌کت‌های آن است پس:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a',b'} C_{a',b'}\,|a',b'\rangle \longrightarrow [A,B]|\alpha\rangle = \sum_{a',b'} C_{a',b'}\,\underbrace{[A,B]|a',b'\rangle}_{③\,=\,0} = 0$$

$$\Longrightarrow [A,B]=0$$

پس ثابت شد. این دو با سازگارند. حال به اندازه‌گیری نگاه می‌کنیم:

$|\alpha\rangle$ یک بسط دارد بر حسب $|a'\rangle$ ها

$$|\alpha\rangle \xrightarrow[\text{فرض کنیم ویژه مقدار } a' \text{ بدست آید}]{\text{اندازه گیری } A} |a'\rangle \xrightarrow[\text{ویژه مقدار } b' \text{ بدست آید}]{\text{اندازه گیری } B} |b'\rangle = \sum_{a''} d_{a''}\,|a''\rangle$$

بسط دارد بر حسب $|a'\rangle$ ها

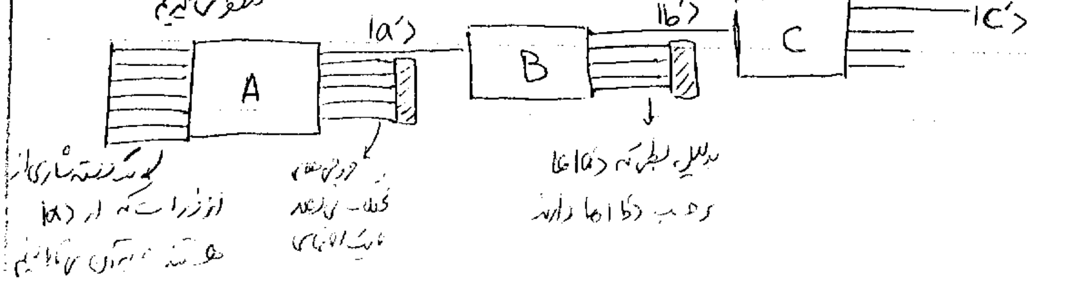
چون عملگر B (همچنین A) هرمیتی است پس هر حالتی را می‌توان بر حسب ویژه‌کت‌های آن بسط داد، همچنین $|a'\rangle$: $\sum_{b''} C_{b''}\,|b''\rangle$

اندازه گیری A:

$$\begin{cases} |a'\rangle \rightarrow \text{با احتمال } |d_{a'}|^2 \\ |a''\rangle \rightarrow \text{با احتمال } |d_{a''}|^2 \\ \vdots \end{cases}$$

یعنی با یک حالت شروع کردیم، در مرحله اول فقط $|a'\rangle$ ظاهر شد ولی با دوبار آزمایش کردن به جایی رسیدیم که تمامی $|a'\rangle$ ها ظاهر شدند یعنی عین همان آزمایش اشترن گرلاخ، یعنی اندازه‌گیری‌های متناوب توسط دو عملگری که جابجاپذیر نیستند، نتایج آزمایش را عوض می‌کند و منجر به بهم خوردن حافظه سیستم می‌شود؛ یعنی با دوباره آزمایش تمام state ها ظاهر شدند. در صورتیکه در عملگرهای سازگار این طور نیست و حافظه پابرجا می‌ماند.

این دفعه سه عملگر مختلف ناسازگار را پشت سرهم اندازه‌گیری می‌کنیم، در حالت قبل $A \to B \to A$ بود اما اینجا $A \to B \to C$: سه عملگر A و B و C را ناسازگار در نظر می‌گیریم



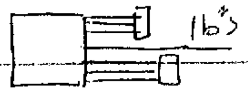
احتمال یافتن ذره‌ی نقطه‌ی c' را می‌خواهیم بدست آوریم، از $|a'\rangle$ به بعد مورد نظر است.

$$|a'\rangle = \sum_{b'} |b'\rangle \underbrace{\langle b'|a'\rangle}_{\text{ضریب بسط}}$$

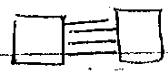
$|b'\rangle$ احتمال وقوع $= |\underbrace{\langle b'|a'\rangle}_{\text{ضریب بسط به توان ۲}}|^2$

$|c'\rangle$ احتمال وقوع از $|b'\rangle$ $= |\langle c'|b'\rangle|^2$

احتمال بدست آوردن $|c'\rangle$ از $|a'\rangle$ در طی دو آزمایش $= |\langle b'|a'\rangle|^2 |\langle c'|b'\rangle|^2$



با



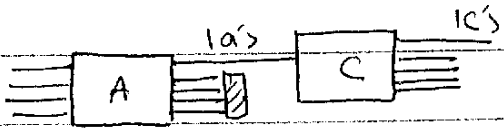
تمام خروجی ها

اگر خروجی های آزمایش B باز شود، احتمال وقوع $|c'\rangle$ برابر می‌شود با همان عددی که قبلاً بدست آوردیم با این تفاوت که روی همه b' ها جمع صورت می‌گیرد.

اگر خروجی های آزمایش B باز شود احتمال وقوع $|c'\rangle$ $= \sum_{b'} |\langle b'|a'\rangle|^2 |\langle c'|b'\rangle|^2$

$$= \sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|c'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b'\rangle \quad (1)$$

فرض کنیم همین آزمایش را بدون صفحه واسطه B انجام دهیم:



$|c'\rangle$ احتمال وقوع: $|\langle c'|a'\rangle|^2 = |\sum_{b'}\langle c'|\overbrace{b'\rangle\langle b'|a'\rangle}^{|a'\rangle}|^2$

درست است که اندازه‌گیری B را وارد نکردیم اما state قبلی $|a'\rangle$ قابل بسط است برحسب $|b'\rangle$ ها که بسط آن به این صورت است
$|a'\rangle = \sum_{b'} |b'\rangle\langle b'|a'\rangle$

$$= \left(\sum_{b'}\langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\right)\left(\sum_{b''}\langle a'|b''\rangle\langle b''|c'\rangle\right)$$

اندیس

چون جمع دوم نباید با اولی یکی شود

$$= \sum_{b', b''} \langle c'|b'\rangle \langle b''|c'\rangle \langle b'|a'\rangle \langle a'|b''\rangle \quad (II)$$

نتایج (II) با (I) فرق دارد، (I) یک جمله از جملات (II) است.
نفس اندازه‌گیری میانی بدون جداگیری از حالتها روی خروجی تأثیر می‌گذارد.
با آن که اندازه‌گیری B وجود ندارد، ما $|a'\rangle$ را ترکیب خطی $|b'\rangle$ها گرفتیم. اما با آنکه در قسمت قبل که اندازه‌گیری B وجود داشت و ما اجازه داریم که تمام $|b'\rangle$ها عبور کنند در این اندازه‌گیری B وجود نداشت، با ویژه حالتها را برحسب $|b'\rangle$ها بسط داریم و لطفه ریاضی قرار داریم، ولی نتایج نهائی این دو با هم متفاوت است و رابطه (I) یکی از جملات (II) است و آن جمله‌ای است که $b' = b''$ باشد.
یعنی اگر اندازه‌گیری وسطی انجام شود یا نشود هر چند که اجازه عبور تمام خروجی ها را بدهیم، اما خروجی ها تغییر می‌کنند.
این نکته می‌گوید که اگر شما یک ویژه‌ی حالت $|a'\rangle$ را به یک ویژه‌حالت C تبدیل کنیم، اگر به زاویه‌ی بیان ماهیت کوانتومی بدهیم اگر این وسط رفتار ما توسط کسی شنود شود (B)، کوانتوم مکانیک می‌گوید نتیجه نهائی فرق می‌کند که شنود شود و یا نشود یعنی اطلاعات کوانتومی صرف نگاه کردن و اندازه‌گیری کردن، لو می‌روند و نتیجه نهایی آن فرق می‌کند.
از این قضیه می‌توان در ارتباطات استفاده کرد و یکی از بحث هایی که هنوز وارد تکنولوژی نشده، ارتباطات کوانتومی یا quantum communication است.
پس نکته‌ای وجود دارد این است که اندازه‌گیری عملگری که آن عملگر جابجاگر نباشد، روی خروجی تأثیر می‌گذارد حتی اگر آن عملگری که اندازه‌گیری می‌کند، تمام نتایج را اجازه عبور دهد.

نکته جالب این است که اگر عملگر وسطی (B) با یکی از این دو عملگر A و یا C جابجا شود، می‌بینیم که تغییر نمی‌کند.
برای اینکه بحث ساده‌تر شود حالتها را غیرتبهگن در نظر می‌گیریم، اگر $[B, C] = 0$:
طبق آزمایش اول، تعیین $|b'\rangle$، ویژه مقدار C را هم تعیین می‌کند (اول جمله) یعنی $|b', c'\rangle = |b'\rangle$

$$|a'\rangle \text{ از } |c'\rangle \text{ احتمال بدست آوردن } = |\langle \overset{|b',c'\rangle}{b'} | a'\rangle|^2 |\langle \overset{|b',c'\rangle}{c'} | \overset{|b',c'\rangle}{b'}\rangle|^2 = |\langle b', c'|a'\rangle|^2 |\overbrace{\langle b', c'|b', c'\rangle}^{1}|^2$$
(که قبلاً از آزمایش I داشتیم)

$$\text{نتیجه آزمایش II} = |\langle c'|a'\rangle|^2 = |\langle b', c'|a\rangle|^2 =$$

بنابراین اگر سازگار باشد با یکی از آن دو عملگر، در آن صورت فرقی نمی‌کند یعنی اندازه‌گیری میانی تأثیری در اندازه‌گیری نهائی ندارد.

می‌خواهیم قضیه رابطه عدم قطعیت را اثبات کنیم. ابتدا یک سری تعاریف و توضیحات را بیان می‌کنیم:

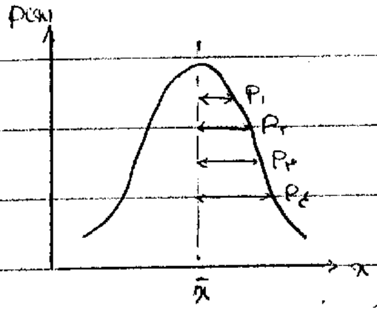
اگر مقدار چشم‌داشتی یک عملگر را نسبت به هر حالت دلخواه حساب کنیم یک عدد می‌شود و اگر از آن عملگر کم کنیم آن را Δ آن عملگر می‌نامیم.

$$\Delta A = A - \underbrace{\langle A \rangle}_{\text{مقدار چشم‌داشتی}}$$

اگر آن را به توان ۲ برسانیم و مقدار چشم‌داشتی آن را حساب کنیم به آن پاشندگی یا dispersion می‌گوییم.

$\langle (\Delta A)^2 \rangle =$ پاشندگی ← معرف میزان پخش‌شدگی مقادیر به دست آمده نسبت به مقدار متوسط است

مثلاً اگر فرض کنیم عملگر نمونه برای هر متغیری یک توزیع آماری داریم که به این شکل است:



احتمال $\times$ مقدار $=$ متوسط‌گیری

اگر مقادیر مختلف را تنها با مقدار متوسط کم کنیم و ضرب در احتمال جمع کنیم در حقیقت متوسط‌گیری کرده‌ایم. مقدار به دست آمده برای خیلی از توزیع‌ها برابر صفر می‌شود چون همدیگر را حذف می‌کنند بنابراین معرف پخش‌شدگی تابع نیست.

اما اگر به توان ۲ برسانیم تنها مثبت‌ها با هم جمع می‌شوند. در این صورت برای هر توزیع آماری، جذر این موضوع میزان پخش‌شدگی توزیع آماری حول مقدار متوسط است.

در مکانیک کوانتومی هم همین معنی را دارد، چون مکانیک کوانتومی هم راجع به احتمالات صحبت می‌کند این موضوع معرف پاشندگی و یا پخش‌شدگی مقادیر آن عملگر است وقتی که در آن حالت خاص هستیم. اگر حساب کنیم:

$$(\Delta A)^2 = A^2 - \langle A \rangle^2 - 2A\langle A \rangle$$

متوسط می‌گیریم: $\underbrace{\langle (\Delta A)^2 \rangle}_{\langle \alpha | (\Delta A)^2 | \alpha \rangle} = \langle A^2 \rangle + \langle \underbrace{\langle A \rangle^2}_{\text{عدد است}} \rangle - 2\langle \overset{\text{عدد}}{\langle A \rangle} \rangle \langle A \rangle = \langle A^2 \rangle + \langle A \rangle^2 - 2\langle A \rangle^2$

$\langle \alpha | \langle A \rangle^2 | \alpha \rangle = \underbrace{\langle A \rangle^2}_{\text{عدد است بیرون می‌آید}} \underbrace{\langle \alpha | \alpha \rangle}_{1}$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

تعمیم رابطه عدم قطعیت:

دو عملگر A و B را در نظر می‌گیریم که هرمیتی هستند، ثابت می‌کنیم:

تعریف دقیق و کامل رابطه عدم قطعیت: $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$

حالت الف) به ازای هر $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ $\xrightarrow{\text{نشان می‌دهیم که}}$ $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$

$\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ می‌دانیم

که یک عدد است

تعریف می‌کنیم $|\gamma\rangle \equiv |\alpha\rangle - \frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}|\beta\rangle$

$$\langle\gamma|\gamma\rangle = \left(\langle\alpha| - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\beta|\right)\left(|\alpha\rangle - \frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}|\beta\rangle\right) \geq 0$$

$$\langle\gamma|\gamma\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle - \frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\alpha|\beta\rangle - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\beta|\alpha\rangle + \frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle^{2}}\langle\beta|\beta\rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle \geq \frac{|\langle\alpha|\beta\rangle|^2}{\langle\beta|\beta\rangle} \longrightarrow \boxed{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2}$$

حالت ب)

اگر یک عملگر هرمیتی باشد، مقدار چشمداشتی آن نسبت به هر حالت حقیقی است

اگر $C = C^{\dagger} \longrightarrow \langle C\rangle = \langle C\rangle^{*}$

$$\langle C\rangle = \langle\alpha|\underbrace{C|\alpha\rangle}_{|\beta\rangle} = \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^{*} \overset{\langle\beta| = \langle\alpha|C^{\dagger}}{=} \langle\alpha|C^{\dagger}|\alpha\rangle^{*}$$

را $|\beta\rangle$ می‌نامیم

هرمیتی است

$$\langle C\rangle = \langle\alpha|C|\alpha\rangle^{*} = \langle C\rangle^{*}$$

حالت پ)

اگر یک عملگر پادهرمیتی باشد، مقدار چشمداشتی آن نسبت به هر حالت موهومی محض است

اگر $C = -C^{\dagger} \longrightarrow \langle C\rangle = -\langle C\rangle^{*}$

$$\langle C\rangle = \langle\alpha|\underbrace{C|\alpha\rangle}_{|\beta\rangle} = \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^{*} = \langle\alpha|C^{\dagger}|\alpha\rangle^{*}$$

$$\langle C\rangle = \langle\alpha|-C|\alpha\rangle^{*} = -\langle C\rangle^{*}$$

حالت ج) فرض کنیم

$$\begin{cases} |\alpha\rangle = (\Delta A)|\gamma\rangle \xrightarrow{\text{(الف}} \langle\alpha| = \langle\gamma|(\Delta A)^\dagger = \langle\gamma|(A^\dagger - \langle A\rangle^*) \\ \text{عملگرهای هرمیتی مقادیر انتظاری حقیقی دارند} \quad \langle\alpha| = \langle\gamma|\underset{\text{هرمیتی است } A}{A} - \langle A\rangle) = \langle\gamma|(\Delta A) \\ |\beta\rangle = (\Delta B)|\gamma\rangle \xrightarrow{\text{مشابه } A} \langle\beta| = \langle\gamma|(\Delta B)^\dagger = \langle\gamma|(\Delta B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\gamma|\Delta A\Delta A|\gamma\rangle = \langle(\Delta A)^2\rangle \\ \langle\beta|\beta\rangle = \langle(\Delta B)^2\rangle \\ \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\Delta A\Delta B\rangle \end{cases}$$

قضیه الف: $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq |\langle\Delta A\Delta B\rangle|^2 \quad (1)$

چون $\frac{1}{2}(\Delta A\Delta B - \Delta B\Delta A) + \frac{1}{2}(\Delta A\Delta B + \Delta B\Delta A)$

حالت د) $\Delta A\Delta B = \frac{1}{2}[\underbrace{\Delta A}_{A-\langle A\rangle}, \underbrace{\Delta B}_{B-\langle B\rangle}] + \frac{1}{2}\{\Delta A, \Delta B\}$

هر عملگری با عدد جابجا می شود و دو عدد هم با هم جابجا می شوند

$$= \frac{1}{2}\{[A,B] - [A,\langle B\rangle] - [\langle A\rangle, B] + [\langle A\rangle,\langle B\rangle]\} = \frac{1}{2}[A,B]$$

$$\Rightarrow \Delta A\Delta B = \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{2}\{\Delta A, \Delta B\}$$

$$\Rightarrow |\langle\Delta A\Delta B\rangle|^2 = |\tfrac{1}{2}\langle[A,B]\rangle + \tfrac{1}{2}\langle\{\Delta A,\Delta B\}\rangle|^2 \underset{\text{چون}}{=} |a+ib|^2 = a^2+b^2 \quad (2)$$

رابطه جابجایی دو عملگر هرمیتی، یک عملگر ضد هرمیتی است، یعنی:

$$[A,B]^\dagger = (AB-BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger \underset{\text{چون هرمیتی هستند}}{=} BA - AB = -[A,B]$$

رابطه پادجابجایی دو عملگر هرمیتی، هرمیتی است، یعنی:

$$\{A,B\}^\dagger = \{A,B\}$$

$$(2) \Rightarrow |\langle\Delta A\Delta B\rangle|^2 = \tfrac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \tfrac{1}{4}|\langle\{\Delta A,\Delta B\}\rangle|^2$$

$$(3) \Rightarrow \langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq |\langle\Delta A\Delta B\rangle|^2 = \tfrac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \tfrac{1}{4}|\langle\{\Delta A,\Delta B\}\rangle|^2$$

$$\boxed{\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \tfrac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2}$$

می گوییم اگر دو عملگر با هم سازگار باشند یا بستگی کمیات متناظر با آنها زمانی ندگی تابع، مستقل از هم نیستند و حتما به صورت با هم باشد.

اگر صفر شود یعنی اینکه هر کدام را با هر دقتی می‌توانیم اندازه‌گیری کنیم.

وابستگی زاتی دو عملگر غیر جابجا شونده است. مفهوم آن این است که چون A و B با هم جابجا نمی‌شوند، اندازه‌گیری یکی روی دیگری اثر می‌گذارد، یعنی اگر دقت ΔA را افزایش دهیم، روی دقت ΔB اثر می‌گذارد.

آزمایش اول : $\xrightarrow{|\alpha\rangle} \boxed{A} \xrightarrow{|a'\rangle} \boxed{B}$ ...

فرق می‌کند با این

اما این : $\xrightarrow{|\alpha\rangle} \boxed{A , B}$ —— اندازه‌گیری همزمان صورت می‌گیرد

جلسه ششم : ۸۴/۷/۱۷

تغییر پایه در نمایش‌ها :

جلسه‌های پیش گفتیم حالت‌ها و عملگرها را می‌توان برحسب ویژه‌کت‌های یک عملگر هرمیتی بصورت یک ماتریس نمایش داد.

$$\text{عملگرها} \quad X \doteq \begin{pmatrix} \langle a_1|X|a_1\rangle & \langle a_1|X|a_2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

نمایش ماتریسی عملگر X و حالت $|\alpha\rangle$

برحسب ویژه‌کت‌های عملگر A

$$\text{حالت} \quad |\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a_1|\alpha\rangle \\ \langle a_2|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

حال سؤال این است که اگر نمایش ماتریسی یک عملگر را در پایه $|a\rangle$ داشته باشیم چطور می‌توانیم به یک پایه دیگر $|b\rangle$ برویم؟ یعنی اگر عملگری مانند B داشته باشیم که با A جابجا نشود یعنی ویژه‌کت‌های مشترک نداشته باشند و بدین صورت باشد

$$B|b'\rangle = b'|b'\rangle$$

- خیلی وقت‌ها تغییرات پایه‌ها مهم است چون اگر عملگر یا حالتی را در پایه‌ای داشته باشیم که در آن پایه خیلی پیچیده باشد راحت به یک پایه دیگر برویم که در آن پایه نمایش عملگر ساده می‌شود.

- الان پایه‌ها را می‌توان پایه‌های خاصی انتخاب کرد که حضور همه‌ی خاصی داشته باشد، اشکال‌ها طوری باشد که نمایش ماتریسی عملگر را قطری کند.

می‌خواهیم نمایش X و $|a\rangle$ را در پایه ویژه‌کت‌های B بدست آوریم.

۲ دسته پایه داریم:

$$\{|a^1\rangle, |a^2\rangle, \dots\} \xrightarrow{\text{نمایش می‌دهیم}} \{|a^k\rangle\}$$

$$\{|b^1\rangle, |b^2\rangle, \dots\} \xrightarrow{\text{نمایش می‌دهیم}} \{|b^k\rangle\}$$

فرض کنیم $\{|a^k\rangle\}$ دسته پایه قدیم، $\{|b^k\rangle\}$ دسته پایه جدید هستند، می‌خواهیم تبدیل رفتن از یک پایه به پایه دیگر را بدست آوریم.

یک عملگر به نام U تعریف می‌کنیم با استفاده از دسته حالت‌های $\{|a^k\rangle\}$ و $\{|b^k\rangle\}$:

دسته حالت‌های $|b^k\rangle$ و $|a^k\rangle$ متعامد هستند.

$$\left.\begin{aligned} &U = \sum_k |b^k\rangle\langle a^k| \quad \text{: عملگر تبدیل} \\ &\Rightarrow U^\dagger = \sum_k |a^k\rangle\langle b^k| \end{aligned}\right\} \text{I}$$

ببینیم این عملگر چه خصوصیاتی دارد:

* نکته‌ای که در این عملگر تعریف شده وجود دارد این است که اثر آن روی حالت‌های $|a^l\rangle$ باعث تبدیل شدن به $|b^l\rangle$ می‌شود.

$$U|a^l\rangle = \sum_k |b^k\rangle \underbrace{\langle a^k|a^l\rangle}_{\delta_{kl}} = |b^l\rangle \qquad \text{II}$$

یعنی U یک عملگری است که state های $|a^l\rangle$ را تبدیل به state های $|b^l\rangle$ می‌کند.

* U یونیتاری است چون:

$$U^\dagger U \overset{\text{I}}{=} \sum_{k,l} |a^k\rangle \underbrace{\langle b^k|b^l\rangle}_{\delta_{kl}} \langle a^l| = \sum_k |a^k\rangle\langle a^k| = 1 \Longrightarrow U^\dagger U = 1$$

همچنین $UU^\dagger = 1$

* عناصر ماتریسی U در پایه $\{|a^k\rangle\}$ به صورت زیر است:

در پایه‌ای که نمایش می‌دهیم

$$U^{(a)}_{kl} = \langle a^k|U|a^l\rangle$$

در پایه $\{|b^k\rangle\}$ ها نمایش می‌دهیم:

$$U^{(b)}_{kl} = \langle b^k|U|b^l\rangle$$

داشتیم: (II) $\Rightarrow \; U|a^l\rangle = |b^l\rangle \Longrightarrow \langle a^l|U^\dagger = \langle b^l| \xrightarrow{\times U} \langle a^l|\overbrace{U^\dagger U}^{1} = \langle b^l|U$

$$\Longrightarrow \langle a^l| = \langle b^l|U$$

$$U^{(b)}_{kl} = \langle \overbrace{b^k|U}^{\langle a^k|U}|\overbrace{U|b^l}^{U|a^l\rangle}\rangle = \langle a^k|U|a^l\rangle = U^{(a)}_{kl}$$

نمایش ماتریسی U در پایه $\{|a^k\rangle\}$ و $\{|b^k\rangle\}$ مساوی هستند، یعنی فرق نمی‌کند که در چه پایه‌ای نمایش دهیم البته این خصوصیت مخصوص عملگر U است.

به این عملگر، عملگر تبدیل می‌گوییم، یعنی عملگری است که تبدیل نمایش از یک پایه به یک پایه دیگر را می‌توان با آن نشان داد و خصوصیات آن به این صورت است که ویژه حالتها را تبدیل می‌کند و همچنین یونیتاری هم است و همچنین عناصر آن مستقل از پایه $|a\rangle$ و $|b\rangle$ نوشته می‌شود، بنابراین دیگر اندیس (a) و یا (b) را نمی‌گذاریم چون فرقی نمی‌کند:

$$\boxed{U_{kl} = \langle a^k|U|a^l\rangle = \langle b^k|U|b^l\rangle}$$

حال ببینیم تبدیل پایه را چطور می‌توان انجام داد؟

نمایش حالت‌ها (۹) چیست

ویژه حالتهای $|a\rangle$ به این صورت است: $\quad |\alpha\rangle = \sum_k |a^k\rangle\langle a^k|\alpha\rangle$

حال می‌خواهیم ببینیم که اگر نمایش $|\alpha\rangle$ را در پایه $|a\rangle$ ها داشته باشیم، نمایش $|\alpha\rangle$ در پایه $|b\rangle$ ها را چطور می‌توانیم داشته باشیم:

$$|\alpha\rangle^{(a)} = \begin{pmatrix} \langle a_1|\alpha\rangle \\ \langle a_2|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \text{داریم} \qquad \text{چه می‌خواهیم به دست آوریم} \quad |\alpha\rangle^{(b)} = \begin{pmatrix} \langle b_1|\alpha\rangle \\ \langle b_2|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

دسته حالت کامل

$$\underbrace{\langle \overbrace{b^k}^{\langle a^k|U^\dagger}|\alpha\rangle}_{\text{نمایش } \alpha \text{ در پایه } |b\rangle} \overset{(III)}{=} \sum_l \underbrace{\langle a^k|U^\dagger|a^l\rangle}_{\text{عنصر } kl \text{ ماتریس } U^\dagger} \underbrace{\langle a^l|\alpha\rangle}_{\text{نمایش } \alpha \text{ در پایه } |a\rangle}$$

اگر بصورت ماتریسی بنویسیم:

$$\begin{pmatrix} \langle b^1|\alpha\rangle \\ \langle b^2|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a^1|\alpha\rangle \\ \langle a^2|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\underset{\text{حالتها در نمایش جدید}}{(New)} = U^\dagger \underset{\text{حالتها در نمایش قدیم}}{(old)}}$$

اگر با تعریفی که از U داشتیم، ماتریس آن را بسازیم، این ماتریس این خاصیت را دارد که اگر دگر آن را حساب کنیم و روی نمایش قدیمی حالتها بزنیم، حالتها را در نمایش جدید نشان می دهد.

در مورد عملگرها هم همین طور است و می توانیم نشان دهیم که با همین U می توان از نمایش قدیم به نمایش جدید رفت

$$(\mathrm{III}): \langle b^k| = \langle a^k|U^\dagger \quad \text{پس بسته حالت} \qquad \text{پس بسته حالت} \; (\mathrm{II}): |b^l\rangle = U|a^l\rangle$$

$$\underbrace{\langle b^k|X|b^l\rangle}_{X'} \overset{\uparrow}{=} \sum_{m,n} \underbrace{\langle a^k|U^\dagger|a^m\rangle}_{(U^\dagger)_{km}} \underbrace{\langle a^m|X|a^n\rangle}_{X^{(a)}_{mn}} \underbrace{\langle a^n|U|a^l\rangle}_{U_{nl}}$$

X' نمایش عملگر X در پایه $\{|b^l\rangle\}$ که

$(U^\dagger)_{km}$ عنصر km ماتریس $U^\dagger$ در پایه $|a\rangle$ ها

$X^{(a)}_{mn}$ عنصر mn ماتریس X در پایه $|a\rangle$ ها

U_{nl}: عنصر nl ماتریس U در پایه $|a\rangle$ ها

$$\Longrightarrow \boxed{X' = U^\dagger X U} \qquad (5)$$

X': نمایش عملگر X در پایه $\{|b^l\rangle\}$ که

X: نمایش عملگر X در پایه $\{|a^k\rangle\}$ ها

ماتریس U، ماتریسی یکانی است و اگر ساخته شود به ما اجازه می دهد که هر حالتی را که در پایه قدیم داشته باشیم تبدیل به پایه جدید کنیم و هر عملگری را که در پایه قدیم داشته باشیم تبدیل به پایه جدید کنیم

یک حالت خاص:

اگر عملگر B را در پایه قدیم $\{|a^k\rangle\}$ داشته باشیم، در پایه ویژه کتهای خودش چگونه بدست می آید؟

یعنی اگر حالتها و ویژه کتها را در پایه $|a^l\rangle$ ها داشته باشیم، A و B هم معلوم باشند، چگونه نمایش B را روی ویژه کتهای خودش بدست می آوریم:

$$A|a^l\rangle = a^l|a^l\rangle$$

$$B|b^l\rangle = b^l|b^l\rangle$$

خود B را داریم، اما ویژه کتهای آن را نداریم

قبل از اینکه به این موضوع بپردازیم می‌دانیم وقتی می‌گوییم که یک عملگر را داریم یعنی اثر آن عملگر را روی ویژه کت‌های یک عملگر هرمیتی بدانیم. عملگر B فرضمان معلوم است در پایه یک عملگر دیگر که عملگر A باشد حال می‌خواهیم ماتریس را بسازیم. اولین کاری که باید بکنیم این است که ویژه کت‌های B را بدست آوریم و بعد روی آن U را بسازیم. بنابراین این سؤال را مطرح می‌کنیم که اگر عملگر B را داشته باشیم در پایه ویژه کت‌های خودش به چه صورت در می‌آید؟

می‌دانیم در پایه ویژه کت‌های خودش قطری می‌شود ولی به شرطی که ویژه کت‌ها را بدانیم و ما هنوز نداریم.

$$\begin{cases} \langle a^k|B|a^l\rangle = \text{معلوم} \\ |b^k\rangle = ? \end{cases}$$

پس ابتدا می‌خواهیم ببینیم چطور ویژه کت‌های یک عملگر را می‌توانیم بدست آوریم که بدست آوردن ویژه کت‌های یک عملگر همان eigen value problem است، پس باید ماتریس را قطری کنیم:

قطری کردن ماتریس B:

دنبال این هستیم: $B|b_l\rangle = b_l|b_l\rangle$

طرفین را در $a_{m'}$ ضرب می‌کنیم ; $\underbrace{\sum_m \langle a_{m'}|B|\underbrace{a_m\rangle\langle a_m}_{\text{رابطه بستگی}}}_{B \text{ در پایه } |a\rangle}|b_l\rangle = b_l \langle a_{m'}|b_l\rangle$

$$\left(\underset{\sim}{B}\right)\begin{pmatrix} \langle a_1|b_l\rangle \\ \langle a_2|b_l\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \underset{\lambda}{b_l}\begin{pmatrix} \langle a_1|b_l\rangle \\ \langle a_2|b_l\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1)$$

$c^{(l)}$ اسم می‌گذاریم

$$c^{(l)} = \begin{pmatrix} \langle a_1|b_l\rangle \\ \langle a_2|b_l\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

حل این مسئله را بارها دیده‌ایم، این طور حل می‌شود

$$(\underset{\sim}{B} - \lambda\underset{\sim}{1})\, c^{(l)} = 0$$

این را می‌دانیم که اگر همه $c^{(l)}$ ها را صفر بگذاریم جواب بدیهی است، اما اگر بخواهیم صفر نباشد به این معناست که باید دترمینان ضرایب آن صفر باشد.

$$|\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{1}\lambda| = 0$$

یعنی این معادله را حل می‌کنیم و از آن مقادیر ویژه یعنی λ ها بدست می‌آید

به‌ازای هر مقدار b که در معادله ① بگذاریم $c^{(l)}$ ها بدست می‌آید.

$\lambda = b_1, b_2, b_l, \ldots$

$c^{(l)} = c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots \Longrightarrow$ ویژه‌کتهای عملگر B هستند در همان پایه‌ای که ما B را داریم یعنی $|a\rangle$ ها.

اگر هر ماتریسی را در یک پایه‌ای به ما بدهند ما می‌توانیم ویژه‌مقدارهای ماتریس را بدست آوریم و همچنین ویژه‌کتهای آن را در همان پایه‌ای که به ما دادند بدست آوریم.

*نکته جالب این است که این عناصر c ها همان ستونهای U هستند.

$U|a_l\rangle = |b_l\rangle$ طبق تعریف U

$$U_{kl} = \langle a_k|\underbrace{U|a_l\rangle}_{b_l} = \langle a_k|b_l\rangle$$

پس یک عملگر حالت را در پایه $\{|a_k\rangle\}$ ها داشتیم و خواستیم از روی آن به پایه $\{|b_k\rangle\}$ ها برویم، اگر $\{|b_k\rangle\}$ ها را هم داشته باشیم، در آن صورت U معلوم است و از روی قواعدی که برای تبدیل اپراتور و حالتها گفتیم به راحتی می‌توان بدست آورد.

$$X, |a\rangle \longrightarrow \underbrace{\{|a_k\rangle\}}_{\text{ویژه‌کتهای } A} \xrightarrow{\text{می‌خواستیم برویم}} \underbrace{\{|b_k\rangle\}}_{\text{ویژه‌کتهای } B}$$

$X' = U^\dagger X U$

اما اگر نداشته باشیم، باید ابتدا برای B ویژه‌کتها و ویژه‌مقادیر را بدست آوریم و بعد ماتریس U را بسازیم. عناصر ماتریس U، $c^{(l)}$ ها هستند که خودشان همان ویژه‌کتهای ماتریس B هستند، بنابراین داشتن ویژه‌کتهای B، U را هم می‌دهد.

$$U = \begin{pmatrix} \langle a_1|b_1\rangle & \langle a_1|b_2\rangle & \cdots & \langle a_1|b_l\rangle \\ \langle a_2|b_1\rangle & \langle a_2|b_2\rangle & \cdots & \langle a_2|b_l\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{\vdots}_{c^{(1)}} & \underbrace{\vdots}_{c^{(2)}} & & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow U = \left(\left(c^{(1)}\right) \left(c^{(2)}\right) \left(c^{(3)}\right) \cdots \right)$$

یعنی قطری کردن ماتریس B دو فایده هم‌زمان دارد:

۱) ویژه‌مقادیر بدست می‌آید

۲) ویژه‌کتهایی که برای آن بدست می‌آید همان عناصر و ستون‌های ماتریس U هستند.

حال که U را بدست آوردیم با استفاده از رابطه ای که قبلاً بدست آوردیم اگر در رابطه (۵) ، به جای عملگر X ، عملگر B را بگذاریم ، می توانیم B را در پایه خودش $\{|b^l\rangle\}$ هم بدست آوریم.

پس قطری کردن هم خودش یک نوع تبدیل پایه است ولی تبدیل پایه ای است که ابتدا برای بدست آوردن ماتریس U باید ویژه کت های ماتریس B را بدست آوریم ، آن وقت این تبدیل پایه برای هر عملگری درست است از جمله عملگر B . که البته عملگر B با این تبدیل پایه خیلی ساده می شود و بصورت ماتریس قطری بدست می آید.

در پایه $\{|b^l\rangle\}$ هم که ویژه کتهای عملگر B هستند

$$\tilde{B}' = U^{\dagger} \underbrace{B}_{\text{در پایه } \{|a^l\rangle\}} U \Longrightarrow \tilde{B}' = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & b_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

بحث تبدیل پایه ، بحث مهمی در مکانیک کوانتومی است.

نکته دیگری که وجود دارد این است که ،

$A , B \quad , U$ را در نظر بگیرید

برای A این رابطه برقرار است : $A|a_l\rangle = a_l|a_l\rangle$

حال می خواهیم این عملگر را بررسی کنیم : $U A \underbrace{U^{-1}}_{U^{\dagger}}$: چون U یونیتاری است

می خواهیم ببینیم این عملگر چه خصوصیتی دارد :

$$A|a_l\rangle = a_l|a_l\rangle \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{طرفین را در } U} UA|a_l\rangle = a_l U|a_l\rangle$$

$$UA\underbrace{U^{-1}U}_{1 \text{ را اضافه می کنیم}}\underbrace{|a_l\rangle}_{|b_l\rangle} = a_l \underbrace{U|a_l\rangle}_{|b_l\rangle}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(UAU^{-1})|b_l\rangle = \underbrace{a_l}_{\text{ویژه مقدار } A}\underbrace{|b_l\rangle}_{\text{ویژه کتهای عملگر } B}} \qquad \text{(I)}$$

رابطه ای که عملگر B دارد

$$B|b_l\rangle = b_l|b_l\rangle \qquad \text{(II)}$$

با مقایسه روابط (I) و (II) می‌بینیم که عملگر UAU^{-1} دارای ویژه مقدارهای عملگر A و ویژه‌کت‌های عملگر B است، پس یک عملگر ویژه‌ای است.

نکته (۶): چون ویژه مقدارهای عملگر UAU^{-1}، ویژه مقادیر عملگر A هستند، از لحاظ مقادیر قابل مشاهده مانند A می‌مانند و به A و UAU^{-1} unitary equivalent observables می‌گویند یعنی از لحاظ مشاهده‌ای معادل یونیتاری هم هستند. البته یک عملگر نیستند چون ویژه‌کت‌های آنها یکی نیست.

نکته (۷): اگر ویژه مقادیر A و B مثل هم باشند (مثل عملگر S_x و S_y که ویژه مقادیر هر دو آنها $\pm\frac{\hbar}{2}$ است) ولی خود آنها با هم تفاوت دارند، در این صورت روابط (I) و (II) با هم فرق نمی‌کنند، چون ویژه‌کت‌هایشان از قبل یکی بوده و حالا ویژه مقادیرشان هم یکی شده، پس UAU^{-1} همان B می‌شود.

مثال:

$A = S_x$

$B = S_y$

اگر U را عملگر دوران حول z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در نظر بگیریم از آن صورت داریم: (از فصل ۳)

$S_y = U S_x U^{-1}$

در ریاضی فیزیک تبدیلی داریم به نام تبدیل شباهت similarity transformation که به این صورت است:

$X' = UXU^{-1}$

اگر U یونیتاری هم باشد یعنی $U^{-1} = U^{\dagger}$ ← $X' = UXU^{\dagger}$ را تبدیل شباهت یونیتاری unitary similarity transformation می‌گویند.

در تبدیل شباهت لزوماً U نباید یونیتاری باشد اما در تبدیل پایه‌ها باید یونیتاری باشد و ضرورتی ندارد که هرمیتی باشد.

برای بدست آوردن ماتریس U اگر ویژه‌کت‌های ماتریس B را نداشته باشیم باید ابتدا ماتریس B را به روشی که گفتیم قطری کنیم، یعنی عموماً این طور است که ماتریس A را می‌دهند و ماتریس B را در پایه‌های A به ما می‌دهند و سؤال می‌کنند که عملگر U در پایه‌های B چیست؟ ما باید ابتدا U را به همین روشی که گفتیم (قطری کردن B) بسازیم و بعد آن را انجام دهیم. مثلاً S_z را می‌دهند، S_x را هم می‌دهند در پایه S_z. معمولاً می‌گویند در پایه ($\pm$) ها (ویژه‌کت‌های S_z)

یک عملگر A به یک صورتی داریم و بعد می‌گوییم آن را در پایه S_x ها بدست آورید:

$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ← این شکل S_x در پایه $|\pm\rangle$ هاست
نه پایه‌های خودش

باید ابتدا ماتریس U را پیدا کنیم و برای پیدا کردن آن باید ابتدا ویژه‌کت‌های ماتریس S_x را پیدا کنیم.

بین دو بحث مختلف داریم، یکی تبدیل پایه دیگر تبدیل تشابهی.

ماتریسی که در $X' = UXU^{-1}$ بدست می‌آید، ضرورتاً یونیتاری نیست.

یک وقت به ما یک عملگر می‌دهند و ما U را به همان طریقی که گفتیم یعنی ستون‌های ماتریس آن ویژه‌کت‌های عملگر ما هستند درست می‌کنیم، در این حالت U ماتریس تبدیل است. در این صورت U و $U^\dagger$ را اگر به هر اپراتوری بزنیم آن اپراتور را در پایه‌های جدید می‌دهد. این کار را برای هر اپراتوری می‌توان از جمله خود S_x، که با این کار S_x قطری بدست می‌آید.

$$S_x = U^\dagger S_x U$$

اما بحث دیگر این است که اگر U^{-1} را بجای دیگر آن قرار دهیم، این عملگری که بدست می‌آید یعنی Q ویژه‌کت‌های یکسان دارد با B و ویژه مقادیر یکسان دارد با A.

$$Q = UAU^{-1}$$

$$U|b_\ell\rangle = a_\ell|b_\ell\rangle$$

نکته این است که U حالت اول همان U حالت دوم است اما عملیاتشان با توجه به تعریف و ترتیب قرار گرفتن‌شان متفاوت است.

بحث بعدی عملگر انتقال است اما ابتدا در مورد عملگرهایی با طیف پیوسته صحبت می‌کنیم و بعد عملگر انتقال را توضیح می‌دهیم. تا این فرض کردیم که طیف گسسته است.

گسسته

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

$\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''}$ دلتای کرونکر (1)

$\sum_a \delta_{aa'} f(a) = f(a')$ (2)

چون گسسته است، در جمع زدن از $\sum$ استفاده می‌شود.

خیلی وقت‌ها با عملگرهایی سروکار داریم که طیف شکل مقادیر گسسته نمی‌گیرد و مقادیر پیوسته می‌گیرد.
می‌دانیم گسسته بودن ناشی از اعمال شرایط مرزی است، شرایط مرزی را روی هر مسئله‌ای بگذاریم باعث می‌شود که طیف گسسته شود. مثلاً در مثال ذره در جعبه که در نظر می‌گیریم وقتی شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم که در لبه‌ها تابع موج باید وجود داشته باشد، باعث می‌شود که هر طول موجی قابل قبول نباشد، آن وقت انرژی گسسته می‌شود.
خیلی جاها مثل ذره آزاد ما شرایط مرزی نداریم و در این طیف پیوسته می‌شود.

فرض کنیم ویژه حالت‌ها را در حالت گسسته با a نشان دهیم و ویژه حالت‌ها را در حالت پیوسته با ξ نمایش دهیم، در این صورت:

$$X|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle$$ پیوسته

وقتی طیف پیوسته است باید همه جا به جای جمع، انتگرال بگذاریم و همچنین به جای دلتای کرونکر، دلتای دیراک بگذاریم

$$\sum \longrightarrow \int d\xi$$

کرونکر $\delta_{a'a''} \longrightarrow \delta(\xi'-\xi'')$ دیراک

(1) $\xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود}} \langle\xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi'-\xi'')$

(2) $\xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود}} \int f(\xi)\,\delta(\xi-\xi')\,d\xi = f(\xi')$

قاعده closure: $\underbrace{\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = 1}_{\text{طیف گسسته}} \xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود}} \underbrace{\int d\xi' |\xi'\rangle\langle\xi'| = 1}_{\text{طیف پیوسته}}$

قاعده بسط: $|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود}} |\alpha\rangle = \int d\xi' |\xi'\rangle\langle\xi'|\alpha\rangle$

ترجمه ضرایب بسط:

$|\langle a'|\alpha\rangle|^2 =$ احتمال یافتن سیستم $|\alpha\rangle$ در ویژه مقدار a'

$|\langle\xi'|\alpha\rangle|^2 d\xi' =$ احتمال یافتن سیستم $|\alpha\rangle$ با ویژه مقداری در بازه $(\xi', \xi'+d\xi')$

ما در فیزیک یک چیزی به نام مکان ذرات داریم، در کوانتوم مکانیک باید آنرا با یک عملگر هرمیتی نشان دهیم و به آن عملگر هرمیتی مکان می‌گوییم. این عملگر مولفه‌های متفاوت دارد.

عملگرهای مکان: (X, Y, Z)

سه عملگر داریم، عملگر X، عملگر Y، عملگر Z که هرکدام ویژگیهای خودشان را دارند، اگر این عملگرها را با x_1، x_2، x_3 نشان دهیم، داریم:

$$(X, Y, Z) = (x_1, x_2, x_3)$$

این فضاها را فضای جابجایی گویند ⟵ $[x_i, x_j] = 0$: بنابه فرض این مولفه‌ها باهم جابجا می‌شوند

معنی این رابطه این است که اندازه‌گیری X یک ذره و Y یک ذره با هم دقیقاً امکان پذیر است، و مکان یک ذره $\vec{r} = (x, y, z)$ را می‌توان با دقت بی‌نهایت تعیین کرد. چیزی را که می‌توان تعیین کرد این بردار است با بردار مکان.

حال که با هم جابجا می‌شوند یعنی ویژه کت مشترک دارند و این ویژه کت دارای خصوصیت زیر است:

$$|\vec{X}'\rangle = |x', y', z'\rangle$$

$$x|\vec{X}'\rangle = x'|\vec{X}'\rangle \quad , \quad y|\vec{X}'\rangle = y'|\vec{X}'\rangle \quad , \quad z|\vec{X}'\rangle = z'|\vec{X}'\rangle$$

بنابراین عملگر مکان یک عملگری است که طیف پیوسته دارد.

پیدا کردن عملگرهای متناظر با کمیتهای فیزیکی در مکانیک کوانتومی راه مشخصی ندارد، چون تناظر یک به یک وجود ندارد و باهم تفاوت دارند، با یک سری فرض‌های تجربی یک سری حدس می‌زنیم، آن حدس‌ها نتایجی می‌دهند، اگر نتایج با آزمایش تطابق داشته باشد، فرض درست است. بنابراین استدلالی برای آنها وجود ندارد.

در حال حاضر در فیزیک درمورد فضایی صحبت می‌کنند که فضای ناجابجایی (هندسه ناجابجایی) نام دارد.

حال بعد از این مقدمات گفته شده، عملگر انتقال را تعریف می‌کنیم.

عملگر انتقال:

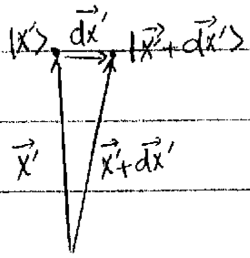
با توجه به ویژگی‌های عملگر مکان، عملگری به نام عملگر انتقال تعریف می‌کنیم.

$$T(d\vec{x}')|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}'+d\vec{x}'\rangle$$

طبق تعریف می‌خواهیم خطی باشد $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ $O\sum_i c_i|\alpha_i\rangle = \sum_i c_i O|\alpha_i\rangle$

این رابطه نشان می‌دهد که $|x'\rangle$ها ویژه‌کت عملگر انتقال نیستند چون وقتی T روی آنها اثر می‌کند یک state دیگری را تولید می‌کند.

در حقیقت به این شکل بوده:



می‌خواهیم شکل صریح عملگر انتقال را بدست آوریم:

حالا که تاثیر عملگر انتقال را روی $|x'\rangle$ها می‌دانیم، می‌خواهیم تاثیرش را روی پایه‌ها بدانیم. قبلاً گفته بودیم که اگر تاثیر عملگر را روی پایه‌ها بدانیم تاثیر آن را روی هر حالت می‌دانیم چون هر حالت قابل بسط است برحسب پایه‌ها

$$T(d\vec{x}')|\alpha\rangle = T(d\vec{x}')\int d^3x''\,|\vec{x}''\rangle\underbrace{\langle\vec{x}''|\alpha\rangle}_{\text{عدد}} = \int d^3x''\,\langle x''|\alpha\rangle\, T(d\vec{x}')|x''\rangle$$

بسط α برحسب $|x''\rangle$ها — فقط روی state اثر می‌کند — $|\vec{x}''+d\vec{x}'\rangle \equiv |x'\rangle$

تغییر متغیر می‌دهیم

$$\vec{x}' = \vec{x}'' + d\vec{x}' \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} d\vec{x}' = d\vec{x}''$$

$d\vec{x}'$ مقدار ثابتی است یعنی بردار مشخصی است

$$\vec{x}'' = \vec{x}' - d\vec{x}'$$

$$\Longrightarrow T(d\vec{x}')|\alpha\rangle = \int d^3x'\,\langle x'-dx'|\alpha\rangle|x'\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \int d^3x''\,|\vec{x}''\rangle\langle\vec{x}''|\alpha\rangle$$

مقایسه می‌کنیم

اگر ضرایب بسط $|\alpha\rangle$ در نقطه x' حساب شود ضرایب بسط $T(d\vec{x}')|\alpha\rangle$ در نقطه $x'-dx'$ حساب می‌شود یعنی در یک نقطه عقب‌تر حساب می‌شود.

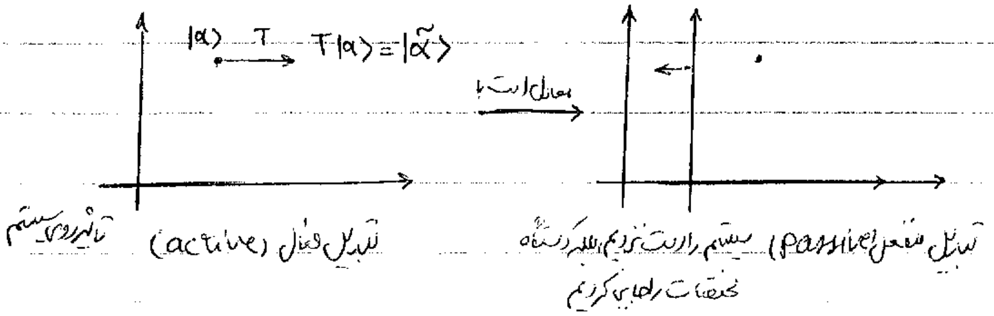
T عملگر مهمی است در مکانیک کوانتومی، چون جابجا می‌کند یعنی مثلاً سیستم یا ذره را جابجا می‌کند.

شرایطی روی T اعمال می‌کنیم (یعنی خواسته‌هایی که می‌خواهیم T داشته باشد):

۱) حفظ بقای احتمال:

یعنی می‌خواهیم عملگر T احتمال پیدا کردن سیستم را عوض نکند

عملگر T معادل انتقال است:



شرط داریم که با این عملگر تعداد ذرات تغییر نکند یعنی احتمال تغییر نکند.

$$\text{یعنی} \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = c \xrightarrow{\text{انتقال}} \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = c$$

یعنی این تبدیل نباید نُرم‌ها یا احتمال‌ها را عوض کند.

این خواسته یک شرط روی T می‌گذارد که T هر چیزی نمی‌تواند باشد:

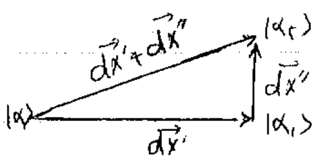
$$|\tilde{\alpha}\rangle = T|\alpha\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle\tilde{\alpha}| = \langle\alpha|T^{\dagger}$$

$$\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|T^{\dagger}T|\alpha\rangle \underset{\text{می‌خواهیم این باشد}}{\equiv} \langle\alpha|\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{T^{\dagger}(dx')\,T(dx') = 1} \Longrightarrow \text{T یونیتاری است}$$

پس به عنوان یک قاعده کلی باید در نظر بگیریم که تبدیل‌هایی بقای احتمال را ارضا می‌کنند که یونیتاری باشند.

۲) انتقال در جهت‌های مختلف جابجاپذیر است (جابجاپذیر است) و می‌خواهیم این خصوصیت را داشته باشد که جمع دو انتقال یک انتقال جدید شود:



یعنی مثلاً سیستمی داریم، یک بار به اندازه dx' منتقل می‌کنیم می‌رسیم به $|\alpha_1\rangle$ بعد به اندازه dx'' منتقل می‌کنیم و می‌رسیم به $|\alpha_2\rangle$ حالا از آنجایی که انتقال را هر طوری بزنیم فرق نمی‌کند، انتظار داریم که این حالت $|\alpha_2\rangle$ را بتوان از یک انتقال جدید یعنی $(dx'+dx'')$ بدست

آورد / یعنی می‌خواهیم عملگر انتقال دارای این خصوصیت باشد که ترتیب انتقال‌ها در آن اهمیت نداشته باشد و ... انتقال‌های متوالی

که با این نقطه ($|x\rangle$) منجر می‌شوند، هر یک نتیجه بدهند.

یعنی می‌خواهیم $\boxed{T(d\vec{x}'')\,T(d\vec{x}') = T(d\vec{x}'+d\vec{x}'')}$

۳) معکوس عملگر انتقال را تعریف کنیم:

یعنی با عملگر انتقال از یک نقطه به نقطه دیگری می‌رویم حال می‌خواهیم عملگری را پیدا کنیم که اگر روی نقطه جدید اثر کند به نقطه قدیم برود.

$$|x'\rangle \xrightarrow{d\vec{x}'} |x'+d\vec{x}'\rangle \qquad \xleftarrow{-d\vec{x}'}$$

$$\boxed{T^{-1}(d\vec{x}') = T(-d\vec{x}')}$$

معکوس یک انتقال است به اندازه $-d\vec{x}'$ یعنی برابر با معکوس انتقال $d\vec{x}'$ است.

۴) عملگر انتقال وقتی که مقدار انتقال به سمت صفر میل کند، معادل عملگر واحد باشد یعنی شرایط حالتها را اصلاً دست نزده باشیم.

$$\boxed{\lim_{d\vec{x}'\to 0} T(d\vec{x}') = 1}$$

حال ببینیم با این چند شرط در مورد T چه چیزی می‌توانیم بگوییم:

انتقال بینهایت کوچک:

عملگر T را حول $d\vec{x}'=0$ بسط می‌دهیم

$$T(d\vec{x}') = T(0) + \vec{A}\cdot d\vec{x}' + O(d\vec{x}'^2)$$

مقدار ثابت — جمله‌ای متناسب با $d\vec{x}'$ که چون $d\vec{x}'$ برداری است پس $\vec{A}$ هم برداری است — برای عملگر انتقال بینهایت کوچک صرفنظر می‌کنیم

برای ارضای شرط (۴): $\lim_{d\vec{x}'\to 0} T(d\vec{x}') = 1 = T(0) + 0 \Longrightarrow \boxed{T(0)=1}$

یادمان باشد که از $d\vec{x}'^2$ها صرفنظر کردیم یعنی تمام کارهایی که می‌کنیم تا مرتبه $d\vec{x}'$ است.

برای ارضای شرط (۱) (یکانی بودن): $T^{\dagger}(d\vec{x}') = 1 + \vec{A}^{\dagger}\cdot d\vec{x}'$ — در حقیقت $d\vec{x}'$ عدد است و مقدارش در مزدوج تغییری نمی‌کند

$$T^{\dagger}T = (1+\vec{A}^{\dagger}\cdot d\vec{x}')(1+\vec{A}\cdot d\vec{x}') = 1 + (\vec{A}^{\dagger}+\vec{A})\cdot d\vec{x}' + O(d\vec{x}'^2)$$

برای ارضای شرط (۱)

$$\Rightarrow T^\dagger T = 1 + (A^\dagger + A)\, d\vec{x}' \overset{?}{=} 1 \quad \Rightarrow (A^\dagger + A) = 0 \Rightarrow \boxed{A^\dagger = -A}$$

یعنی A ضد هرمیتی است و معادل کمیت فیزیکی نیست.

می‌خواهیم با کمیتهای فیزیکی کار کنیم، یعنی هرمیتی باشند، پس A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = -iK \longrightarrow A^\dagger = +iK^\dagger$$

$$A^\dagger = -A \Rightarrow iK^\dagger = iK \Rightarrow K^\dagger = K$$ پس K هرمیتی است

پس با این تعریف، اگر K را هرمیتی بگیریم، شرط اول هم صادق است

$$\Rightarrow \boxed{T(d\vec{x}') = 1 - i\vec{K}\cdot d\vec{x}'}$$ برای انتقالهای بینهایت کوچک

با این رابطه می‌بینیم دو شرط باقیمانده هم به خودی خود درست هستند:

برای ارضای شرط (۲): $$T(d\vec{x}')T(d\vec{x}'') = 1 - iK\cdot(d\vec{x}' + d\vec{x}'') + O(d^2)$$

$$= T(d\vec{x}' + d\vec{x}'')$$ پس برقرار است

برای ارضای شرط (۳) $$T(-d\vec{x}')\cdot T(d\vec{x}') = 1 + O(d^2) = 1$$

پس $T(-d\vec{x}')$ معکوس $T(d\vec{x}')$ است.

یک خصوصیت دیگر عملگر انتقال:

می‌خواهیم ببینیم چه می‌شود $$[x, T(d\vec{x}')] = ?$$

$$x\,T(d\vec{x}')|\vec{x}'\rangle = \underset{\uparrow\ \text{عملگر}}{x}|\vec{x}' + d\vec{x}'\rangle = x' + dx'|\vec{x}' + d\vec{x}'\rangle$$

$$T(d\vec{x}')\,x\,|\vec{x}'\rangle = T(d\vec{x}')\,x'|\vec{x}'\rangle = x'\,T(d\vec{x}')|\vec{x}'\rangle = x'|\vec{x}' + d\vec{x}'\rangle$$

از هم کم می‌کنیم:

$$\Rightarrow [x, T(d\vec{x}')]|\vec{x}'\rangle = dx'|\vec{x}' + d\vec{x}'\rangle$$

ما داریم همه حالت ها را در سطر ... $= |x'\rangle + |B\rangle dx' + \dots$ در عمل x

$$\Rightarrow [\vec{x}, T(d\vec{x}')] = dx'|\vec{x}'\rangle + O(d^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{[\vec{x}, T(d\vec{x}')] = dx'}$$

جلسه هشتم : ۸۲/۷/۱۹

جلسه پیش دیدیم که وقتی عملگر انتقال روی ویژه‌کت‌های مکان اثر کند، آنرا بصورت زیر تغییر می‌دهد

$$T(d\vec{x}')|\vec{X}'\rangle = |\vec{X}' + d\vec{x}'\rangle$$

بعد روی عملگر T یک سری قید اعمال کردیم

۱) T یونیتاری است

۲) حاصلضرب دوتا T ، یک T جدید است که بردار مکان را به اندازه جمع دوتا T اولیه تغییر می‌دهد

۳) $T^{-1}(d\vec{x}') = T(-d\vec{x}')$

۴) $\lim_{dx' \to 0} T(d\vec{x}') = 1$

با این قیدهایی که گذاشتیم ، $T(d\vec{x}')$ را در حد انتقال بینهایت کوچک بصورت زیر بدست آوردیم :

$$T(d\vec{x}') = 1 - i\vec{K} \cdot d\vec{x}' \qquad \text{در صورتیکه بینهایت کوچک}$$

هرمیتی است : $K = K^{+}$

آخرین بحث جلسه گذشته رابطه جابجایی T با مولفه‌های عملگر مکان بود :

$$[x, T(d\vec{x}')] = dx'$$

که البته از d^2 به بالا را صرفنظر کردیم

بطور کلی : $[x_k, T(d\vec{x}')] = (d\vec{x}')_k$

اگر به جای $d\vec{x}'$ در $T(d\vec{x}')$ در رابطه آخر مقدار $1-i\vec{K}\cdot d\vec{x}'$ را بگذاریم، x ها که با اعداد جابجا می‌شوند به صورت زیر در می‌آیند:

$$x_K \vec{K}\cdot d\vec{x}' - \vec{K}\cdot d\vec{x}' x_K = i(d\vec{x}')_K$$

$\underset{K=1}{x}$ برای: $x\vec{K}\cdot d\vec{x}' - \vec{K}\cdot d\vec{x}' x = i(d\vec{x}')_x$

اگر dx' را در جهت x بگیریم: $d\vec{x}' = \hat{i}dx' \Rightarrow x K_x \cancel{dx'} - K_x \cancel{dx'} x = i\cancel{dx'}$

$$\Rightarrow x K_x - K_x x = i \Rightarrow [x, K_x] = i$$

اگر dx' را در جهت y بگیریم: $d\vec{x}' = \hat{j}dx' \Rightarrow x K_y dy' - K_y x dy' = 0 \Rightarrow [x, K_y] = 0$

به طور کلی: $[x_i, K_j] = i\delta_{ij}$

تا حالا می‌دانستیم که عملگر انتقال را در حد بینهایت کوچک می‌توانیم به شکل مقابل بنویسیم $T(d\vec{x}') = 1 - i\vec{K}\cdot d\vec{x}'$ است، که K یک عملگر هرمیتی است و جابجایی آن با x به صورت بالا می‌باشد.

سؤال:

از نظر فیزیکی K_i ها چه هستند؟

برای درک بهتر این بحث، مطلبی خارج از کتاب بیان می‌کنیم. این مطلب به بحثی در مکانیک تحلیلی به نام تبدیلات کانونیک برمی‌گردد و در آن اشاره‌ای به گروه‌های لی هم خواهیم کرد.

تبدیلات کانونیک:

در مکانیک کلاسیک تابعی به نام لاگرانژی وجود دارد که با استفاده از آن معادلات حرکت را می‌نوشتیم:

$$L = T - V$$

بگونه‌ای که: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow$ معادلات حرکت به دست می‌آید

q ها را مختصات تعمیم یافته می‌گوییم

در تابع لاگرانژی، تکانه تعمیم یافته به این صورت به دست می‌آید:

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

با استفاده از تابع لاگرانژ، هامیلتونی را می‌نویسیم:

$$H(p,q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q})$$

معادلاتی که از هامیلتونی ناشی می‌شوند عبارتند از:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (\mathrm{I})$$

نکته این است که در انتخاب مختصات و تکانه‌ها آزادی عمل داریم.

می‌توان ترکیباتی از qها و pها انتخاب کرد و اسم آنرا مختصات و تکانه‌های جدید (P, Q) گذاشت البته به شرطی که یک ویژگی داشته باشند که آن ویژگی این است که تبدیلات کانونیک باشد.

$$p_i, q_i \quad \begin{cases} Q_i = Q_i(q_i, p_i, t) & \text{مختصات جدید} \\ P_i = P_i(q_i, p_i, t) & \text{تکانه‌های جدید} \end{cases}$$

مرجع: Goldstein

نکته این است که انتخاب qها و تکانه‌های متناظر آن pها یکتا نیست و ممکن است در مسئله‌ای ترکیبات دیگری را به عنوان مختصات و تکانه گرفت تا مسئله ساده‌تر شود.

این ترکیبات که به عنوان مختصات جدید قبول می‌کنیم به شرطی قابل قبول است که بتوان یک هامیلتونی جدید (به نام $K(P_i, Q_i, t)$) انتخاب کرد به طوری که ارتباط آن با این مختصات جدید مثل رابطه (I) باشد یعنی به شرطی می‌توان Q_i و P_i جدید را مختصات و تکانه جدید تعبیر کرد که:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

پس باید این طور باشند، در غیر اینصورت مختصات کانونیک (قانونی) نیستند.

همچنین چون ما داریم فقط یک مسئله را حل می‌کنیم، پس جوابی که از هر کدام از اینها (مختصات جدید و قدیم) بدست می‌آید باید یکی باشند. یعنی اگر حرکت پرتابی باشد باید هم اینجا هم آنجا حرکت پرتابی باشد. به طور کلی ماهیت جواب‌ها نباید عوض شود.

برای این منظور می‌توان نشان داد که باید رابطه زیر بین K و H برقرار باشد:

$$K = H + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{\text{مشتق تابع}}$$

(یک دسته متغیر جدید، یک دسته متغیر قدیم) ⟹

نوع		
(q_i, Q_i)	F_1	اسم گذاری
(q_i, P_i)	F_2	
(p_i, Q_i)	F_3	
(p_i, P_i)	F_4	

اگر غیر از این باشد، جوابها تغییری نیست. در لاگرانژی هم همین گونه بود که اگر اختلاف ۲ لاگرانژی یک مشتق کامل زمانی باشد، این دو معادل هستند.

با انتخاب F، Q و P ها مشخص می‌شوند. یعنی تبدیلات کانونیک مشخص می‌شوند. با تعیین این F، هر F ای با یک Q، P، و K ای مشخص می‌شود.

اگر بتوان تمام F های ممکن را بررسی کرد، تمام تبدیلات کانونیک را هم می‌توان مشخص کرد. F یک تابع کلیدی در یک تبدیلات کانونیک است و می‌توان با آن نوع تبدیلات را مشخص کرد.

اگر F از نوع F_2 باشد : $F_2 = q_i P_i \xrightarrow{\text{نتیجه می‌شود}} \begin{cases} Q_i = q_i \\ P_i = p_i \end{cases}$ یعنی چیزی را عوض نمی‌کند

به این تبدیل، تبدیل واحد (identity transformation) می‌گویند.

تبدیلات کانونیک بینهایت کوچک :

یعنی تبدیل کانونیکی در نظر بگیریم که از نوع بینهایت کوچک باشد.

$$\begin{cases} Q_i = q_i + \delta q_i \\ P_i = p_i + \delta p_i \end{cases} \xrightarrow{\text{اگر از نوع } F_2 \text{ بگیریم}} F_2 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G$$

(اندیس تکراری (جمع داریم))

مولد تبدیلات کانونیک (generator)

تبدیل کانونیک بینهایت کوچک یک تابع مولد دارد. اگر G را کنار بگذاریم، تبدیل خاصی صورت نمی‌گیرد و در اصل G است که تبدیل را ایجاد می‌کند. باید اختلاف این تبدیل با تبدیل واحد خیلی کم باشد.

مثال:

اگر G را یکی از تکانه‌ها بگیریم   اگر $G = P_\ell$

$$F_2 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G \qquad \begin{cases} q_1, \dots, q_n \\ p_1, \dots, p_{\ell-1}, p_{\ell+1}, \dots, p_n \end{cases}$$

این انتخاب باعث می‌شود که روی مولفه l ام (P یا Q) اثر بگذارد. یعنی معلوم است که این تبدیل مختصات ($l=1$ تا $l-1$ و $l+1$ تا n) را اصلاً عوض نمی‌کند.

انتظار داریم فقط مولفه l ام P یا Q را عوض کند

بطور ریاضی می‌توان نشان داد

$$\begin{cases} Q_i = q_i & i \neq l \\ Q_l = q_l + \varepsilon \\ P_i = p_i \end{cases}$$

هیچ چیز عوض نشده به غیر از مختصه l ام که انتقال پیدا کرده است

* مستقیم مولد تبدیلاتی است که این تبدیل از نوع انتقال است.

* هر مولفه تکانه، مولد انتقال های مولفه از مختصات است. یعنی به عنوان قسمتی از F که F مولد تبدیل کانونیک است، این اثر را می‌گذارد.

مثال:

G را یک ترکیبی از q_i و p_i بگیریم مثلاً مولفه z ام تکانه زاویه‌ای ($G = L_z$) برای سیستم تک ذره.
حال با این G که تابعی از x و p است، تبدیل مختصات را انجام می‌دهیم

$$G = L_z = xP_y - yP_x$$

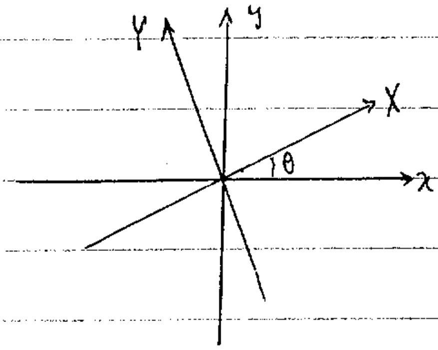
تبدیلاتی به این صورت ایجاد می‌کند: تغییرات مکان

$$\begin{cases} Q_1 = x - \varepsilon y = X^{\text{جدید}} \\ Q_2 = y + \varepsilon x = Y^{\text{جدید}} \\ Q_3 = z = Z^{\text{جدید}} \end{cases} \quad (1)$$

Z جدید و z قدیم یکی است، به دلیل اینکه در G نه z وجود دارد و نه P_z.

البته این نتیجه را می‌توان از نتیجه مثال قبل استنتاج کرد، با نگاه کردن به مثال قبل می‌توان پی برد که چون G، P_x و P_y دارد پس باید Q_1 و Q_2 را عوض کند. G به دنبال P_x دارد پس x را عوض می‌کند یعنی انتقال به اندازه ضریب P_x یعنی ($-y\varepsilon$). همچنین P_y دارد پس y را به اندازه ($+x\varepsilon$) عوض می‌کند. در حقیقت این G ترکیب دو انتقال در دو جهت متفاوت است.

به این دو انتقال در دو جهت مختلف اگر نگاه کنیم، نتیجه جالبی دارد. اگر دوران حول Z به اندازه θ در نظر بگیریم:



مختصات جدید مختصات قدیم

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

بنابراین تحت دوران حول محور Z به اندازه θ داریم:

$$\begin{cases} X = x\cos\theta - y\sin\theta \\ Y = x\sin\theta + y\cos\theta \\ Z = z \end{cases} \xrightarrow[\theta\to\varepsilon \begin{cases}\cos\theta\to 1 \\ \sin\theta\to\varepsilon\end{cases}]{\text{تحت دوران بینهایت کوچک}} \begin{cases} X = x - \varepsilon y \\ Y = x\varepsilon + y \\ Z = z \end{cases} \quad (2)$$

با مقایسه رابطه (1) و (2) می‌فهمیم تبدیلی که در رابطه (1) ایجاد می‌شود، یک دوران است حول محور Z.

* نتیجه مهم: L_z مولد دوران حول محور Z است.

اگر از تبدیلات کانونیک به عنوان ابزاری برای تبدیل مختصات نام ببریم، p_i مولد انتقال مختصات است و L_i مولد دوران مختصات است.

برگردیم سر بحث خودمان:

$$\begin{cases} T(d\vec{x}') = 1 - i\vec{K}\cdot d\vec{x}' \\ [x_i , K_j] = i\delta_{ij} \end{cases} \xrightarrow[\text{بینهایت کوچک ایجاد می‌کند}]{\text{عملگری است که انتقال}} T(d\vec{x}')|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}' + d\vec{x}'\rangle$$

در مکانیک کوانتومی با حالت سروکار داریم و روی حالتها، عملگرها اثر می‌کنند. بنابراین تبدیلات ما روی انواع عملگرها نوشته
T عملگری است که انتقال را ایجاد می‌کند. حال می‌خواهیم متناظر فیزیکی K_iها را بدانیم؟

اگر بخواهیم متناظری پیدا کنیم، T نظیر Fها در تبدیلات کانونیک هستند و نقش تابع‌های مولد را دارد، چون T، حالت‌ها را منتقل می‌کند، Fها هم تبدیل روی مختصات و تکانه‌ها انجام می‌دهند.

$F_2 = q_i P_i \longrightarrow$ مولد تبدیلات identity یعنی

متناظر تبدیلات identity در کوانتوم، یک تبدیلی است که با یک identity یعنی واحد باشد، یعنی عملگر واحد است. پس

$F_2 = \sum q_i P_i + \varepsilon G$ 1 در رابطه‌ی زیر متناظر $\sum q_i P_i$ است، یعنی تغییر نمی‌دهد.

$$T(dx') = \underset{\sum q_i P_i}{\underset{\equiv}{1}} - i\vec{K}\cdot\underset{\varepsilon}{\underset{\equiv}{d\vec{x}'}}$$

جمله دوم رابطه بالا: dx' دارد که بی‌نهایت کوچک است، پس dx' متناظر با ε است، پس K متناظر با G می‌باشد که چون K تبدیل بی‌نهایت کوچک فضایی ایجاد می‌کند، پس متناظر می‌گیریم با تکانه. چون تکانه هم باعث تبدیلی از نوع انتقال مکانی می‌شود.

$$\begin{cases} 1 \longrightarrow \sum q_i P_i \\ dx' \longrightarrow \varepsilon \\ K_i \longrightarrow G = P_i \end{cases}$$

ما در حقیقت می‌خواهیم کوانتوم مکانیک را بسازیم، یا می‌خواهیم چیزی به نام تکانه یا تکانه را در مکانیک کوانتومی تعریف کنیم. برای اینکه این کار را بکنیم، از تجربیات کلاسیک استفاده می‌کنیم، در مکانیک کلاسیک مفهوم مولد تبدیلاتی است که مختصات را منتقل می‌کند، بعد در مکانیک کوانتومی تبدیلاتی را ایجاد کنیم که مختصات را انتقال می‌دهد.

بنابراین، K_i ای که اینجا ظاهر شده متناظر با کوانتومی مفهوم تکانه است. بنابراین تکانه به این شکل ظاهر می‌شود. پس می‌گوییم چون T همان نقش F را بازی می‌کند و جمله اول عدد 1 است، پس جمله دومشان هم برابر است. پس باید آن را درست کنیم و فعلاً کامل نیست، دیمانسیون K از نوع $\frac{1}{\text{طول}}$ است چون در رابطه‌ی $T(dx')$، 1 بدون بعد است، پس جمله دوم هم باید بدون بعد باشد و چون dx' از نوع طول است پس دیمانسیون K از نوع $\frac{1}{\text{طول}}$ است. بنابراین اگر بخواهیم K را خود P بگیریم، دیمانسیون آن درست نیست، پس باید در مخرج یک چیزی از نوع تکانه ضربدر طول بگذاریم:

دیمانسیون

$$[K] = \frac{1}{L} \qquad T(dx') = \underset{\text{بدون دیمانسیون}}{1} - \underbrace{i\overset{\frac{1}{\text{طول}}}{\vec{K}}\cdot\overset{\text{طول}}{dx'}}_{\text{بدون دیمانسیون}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{P}{[P]\times[L] \to \text{ang.mom}}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای

تنها کمیتی که از جنس ang.mom است و در مکانیک کوانتومی هم معنا دارد، ثابت پلانک است

$$\boxed{K_i = \frac{P_i}{\hbar}} \Longleftarrow$$

بنابراین عملگر انتقال به این صورت شد:

$$T(d\vec{x}') = 1 - i\frac{\vec{P}}{\hbar}\cdot d\vec{x}'$$

بنابراین شبیه تعریف عملگری است که آن عملگر را در دوران در حالتها کرد، در این صورت ضرایب ما از نوع اندازه حرکت زاویه‌ای هستند.

اگر K را به صورت $K_i = \frac{P_i}{\hbar}$ بگیریم به این نتیجه‌ای که می‌گیریم:

$$\boxed{[x_i , P_j] = i\hbar\delta_{ij}}$$

$$[x , P_x] = i\hbar \xrightarrow{\text{با استفاده از اصل عدم قطعیت کلی}} \langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta P_x)^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

جذر می‌گیریم $\Longrightarrow$ $\boxed{\Delta x \Delta P \geq \hbar/2}$

انتقال محدود:

تا حالا یک انتقال بینهایت کوچک را معرفی کردیم، حال یک انتقال محدود را مطالعه می‌کنیم.

ما نمی‌توانیم انتقال محدود را بدست آوریم مگر با استفاده از انتقال بینهایت کوچک، بنابراین انتقال محدود را تبدیل می‌کنیم به انتقال بی‌نهایت کوچک.

می‌خواهیم حالت را به اندازه مقدار محدود $\Delta x'$ (a) در جهت $\hat{x}$ انتقال دهیم: انتقال محدود

$$|x'\rangle = |x' + a\hat{x}\rangle$$

چیزی که به سمت صفر برود بینهایت کوچک است $N \to \infty$ ، $d\vec{x}' = \frac{a}{N}\hat{x}$: برای اینکه این کار را کنیم

سؤال این است که $T(a\hat{x})$ چیست؟

در خواص ویژگیهای T داشتیم: $T(dx')T(dx'') = T(dx'+dx'')$

بنابراین $\Rightarrow$ $\underbrace{T(\frac{a}{N}\hat{x})\, T(\frac{a}{N}\hat{x})\, T(\frac{a}{N}\hat{x}) \cdots T(\frac{a}{N}\hat{x})}_{N \text{ جمله}} = T(a\hat{x})$

$$\Rightarrow T(a\hat{x}) = \lim_{N\to\infty}\left[T\left(\frac{a}{N}\hat{x}\right)\right]^N$$

چون p بایستی $a\hat{x}$ منهای نقطه‌ای شود

$$\Rightarrow T(a\hat{x}) = \lim_{N\to\infty}\left[T\left(\frac{a}{N}\hat{x}\right)\right]^N = \lim_{N\to\infty}\Big(1\underbrace{-\frac{i}{\hbar}P_x\frac{a}{N}}_{\alpha/N}\Big)^N$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{N}\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{\cancel{N}\cdot\alpha}{\cancel{N}}+\frac{N(N-1)}{2!}\frac{\alpha^2}{\cancel{N^2}}+\cdots\right) = 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots = e^{\alpha}$$

چون $N\to\infty$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{N}\right)^N = e^{\alpha}$$

$$\Rightarrow T(a\hat{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}P_x a}$$

بطور کلی $\boxed{\underbrace{T(\Delta\vec{x})}_{\text{جابجایی محدود}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\Delta\vec{x}}}$ (I) عملگر انتقال محدود

یعنی بی‌نهایت کوچک بصورت $T(d\vec{x}) = 1 - \frac{i\vec{P}\cdot d\vec{x}}{\hbar}$ است و انتقال محدود بصورت رابطه بالا است.

دوباره برمی‌گردیم به مفهوم مولدها. اگر یک مجموعه یک رشته خاصیت خاص داشته باشد به آن گروه می‌گوییم، مثل بسته بودن، شرکت‌پذیر بودن، هر عضو معکوس داشتن و عضو واحد داشتن. از انواع گروه‌ها یک گروه به نام گروه لی داریم:

گروه‌های لی (Lee):

گروه‌های پیوسته‌ای هستند که به عضو واحد، بطور پیوسته مربوط می‌شوند.

در بحث گروه‌ها گفتیم گروه مجموعه‌ای از اعضا است که یک خاصیت دارند. اگر پیوسته باشد، یعنی مقدار آن به بی‌نهایت میل کند و بتوان با یک پارامتر پیوسته آن را توصیف کرد، می‌گوییم گروه پیوسته داریم. یعنی می‌توان نشان داد که هر گروه لی پیوسته را به این صورت نمایش می‌دهند:

$$\underbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_N\}}_{\infty\ \text{عضو دارد}} \longrightarrow a(\underbrace{\theta}_{\text{یک پارامتر پیوسته است}})$$

$a(0) = 1 = e \leftarrow$ ریست : این پارامتر معمولاً طوری انتخاب می‌شود که

گروه‌ها را (عضو واحد) به این صورت تعریف کردیم

۹۱

یعنی گروه‌های پیوسته که همان گروه لی هم می‌گویند، طوری هستند که می‌توان آنها را با عضو واحد به طور پیوسته ساخت.

J : مولد گروه

$$a(\theta) = e^{i\theta J}$$

این گروه‌های پیوسته را همیشه می‌توان به صورت exp نشان داد، چون هم به خاطر خاصیت پیوستگی نشان است و هم اینکه اگر θ را صفر بگذاریم، یک می‌شود.

دوران:

دوران یک گروه است، چون هم معکوس دارد و هم بسته است و ... . ولی دوران یک گروه سه پارامتره است. یعنی ما هر دوران دلخواه را با سه زاویه اویلر نمایش می‌دهیم. چون هر دورانی را می‌توان با یک گروه نشان داد، گروه متناظر با دوران سه زاویه (پارامتر) است:

$$a(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J}}$$

مولدهای گروه دوران $\{J_1, J_2, J_3\}$

سه تا از این J ها می‌خواهد

انتقال:

انتقال هم از نوع گروه است، هر انتقالی معکوس دارد، جمع دو انتقال با یک انتقال است، عضو واحد دارد و شرکت‌پذیر است. ولی یک انتقال دلخواه در فضا احتیاج به سه پارامتر دارد:

$$a_{\text{انتقال}}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = e^{-i\vec{\Delta}\cdot\vec{K}} \longrightarrow \text{اسم می‌گذاریم} \quad (II)$$

(K_1, K_2, K_3) : مولدهای انتقال

مولدهایی که می‌گوییم در چهارچوب نظریه گروه است، یعنی اگر آنها را exp کنیم، اعضای گروه انتقال را ایجاد می‌کنند.

ضرب گروه:

یک گروه با ضربش تعریف می‌شود، یعنی وقتی دو عضو ضرب شوند به چه چیزی منجر می‌شوند. می‌توان نشان داد که اگر $a(\theta)$ در یک $a(\theta')$ ضرب شود به چه چیزی منجر می‌شود.

$$a(\theta)\,a(\theta') = \underline{a(\theta'')}$$

باید به a منجر شود به علت خاصیت بسته بودن

نکته: θ'' چه رابطه‌ای با θ و θ' دارد، نوع ضرب را نشان می‌دهد. تعیین جدول ضرب گروه معادل است با وقتی که بصورت exp بنویسیم و تعیین رابطه جابجایی مولدها.

یعنی بدانیم که رابطه جابجایی J_i و J_j چه ترکیبی از بقیه J ها می‌شود. در این صورت ضرب گروه مشخص می‌شود

$$[J_i , J_j] = \underbrace{f_{ijk}}_{\text{ضرایب ساختار گروه}} J_k$$

structure constant

بطور کلی هر گروه پیوسته‌ای با تعداد مولدها و ضرایب ساختار گروه مشخص می‌شود. یعنی وقتی می‌گوییم یک گروه داریم سه بعدی است و J های آن معین است، آن گروه معلوم است، چون رابطه جابجایی آن معلوم است و ضرب عناصر گروه هم معلوم است.

* ضرایب ساختار نقطه اصلی نظریه گروه است.

تعداد اعضای گروه یعنی θ ها بینهایت چون مجموعه θ ها پیوسته است اما تعداد مولدها بینهایت نیست و برمی‌گردد به تعداد پارامترها، مثلاً اگر یک پارامتر داریم یک مولد داریم و اگر سه پارامتر داریم، سه مولد داریم.

مثال: $SU(2)$: گروه ماتریس‌های ۲×۲ یونیتاری با دترمینان یک

برای گروه $SU(2)$ می‌توان نشان داد که:

$$f_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \qquad i,j,k = \{1,2,3\}$$

$SU(3)$: گروه ماتریس‌های ۳×۳ یونیتاری با دترمینان یک

$$\{i,j,k\} = \{1,2,\dots,8\}$$

بعد (rank) گروه ۸ است.

یعنی ۸ تا مولد دارد.

$SU(N)$: rank $= N^2-1$ تعداد مولدها

$$\text{(I)}: \quad T(\Delta\vec{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\Delta\vec{x}}$$

$$\text{(II)}: \quad a(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3) = e^{-i\vec{\Delta}\cdot\vec{K}}$$

انتقال

این دو رابطه را مقایسه می‌کنیم.

اولاً عنصرهای مولد انتقال تشکیل یک گروه می‌دهند که سه پارامتره است.

ثانیاً چیزی که جای K در رابطه (I) نشسته (یعنی تکانه)، مولد انتقال است

بنابراین تکانه مولد انتقال است به دو اعتبار: ۱. به عنوان قسمتی از F در تبدیلات کانونیک

۲. در چارچوب نظریه گروه

حال سؤال این است که ضرایب ساختار این گروه انتقال چقدر است؟ در حقیقت روابط P با هم چه ارتباطی دارند

در قسمت اول ما از d^2 ها صرف نظر کردیم، اما اینجا d^2 را در نظر می‌گیریم و d^3 به بالا را صرف نظر می‌کنیم و این صرف نظر را می‌کنیم.

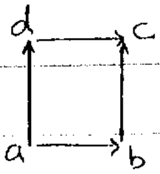
در قسمت اول $T(d\vec{x}) = 1 - i\vec{K}\cdot d\vec{x}$ $\longrightarrow$ لذا d^2 ها صرف نظر کردیم

یعنی در اینجا انتقال کوچک را بررسی می‌کنیم نه بینهایت کوچک را.

انتظار فیزیکی که از عنصر انتقال داریم این است که عنصر انتقال در جهت‌های مختلف با هم جابجا می‌شوند یعنی نباید فرق کند

که از a به b و بعد به c برویم و یا از a به d و بعد به c برویم. این یعنی که اگر اول T_1 را بگذاریم و بعد T_2 را بگذاریم

نسبت به اینکه اول T_2 را بگذاریم و بعد T_1 فرق کند.



$$\xrightarrow{\text{اعمال رابطه}} \quad \left[T(\Delta y\,\hat{y}),\, T(\Delta x\,\hat{x})\right] =$$

تا مرتبه Δ^2 را نگه می‌داریم، یعنی Δx^2 ، Δy^2 ، $\Delta x\Delta y$ را نگه داشته و بعد از آن را دور می‌ریزیم. اگر این کار را بکنیم می‌شود:

$$\left[T(\Delta y\,\hat{y}),\, T(\Delta x\,\hat{x})\right] = \frac{1}{\hbar^2}\left[P_x, P_y\right]\Delta x\Delta y \overset{\text{نباید فرق کند}}{=} 0 \qquad \text{(III)}$$

لذا که اهمیت رابطه (III) به ازای هر Δx و Δy صفر شود باید

$$[P_x , P_y] = 0$$

بنویسیم $\longrightarrow$ $\boxed{[P_i , P_j] = 0}$ $\quad i \neq j$

بنابراین مولدهای عملگر انتقال جابجاپذیر هستند و یا ضرایب ساختار گروه انتقال (ضرائب) صفر هستند.

گروه آبلی که قبلاً در جلسه اول از آن صحبت کردیم، گروهی است که هر دو عضو آن با هم جابجا می‌شوند بنابراین منجر به روابط بالا می‌شود.

گروه آبلی گروهی است که اعضایش با هم جابجا می‌شوند اگر بخواهیم اعضا جابجا شوند باید مولدها هم جابجا شوند پس ضرایب ساختار آن صفر است

تا اینجا این روابط را داشتیم:

1. $[P_i , P_j] = 0$ $\longrightarrow$ یعنی مولفه‌های مختلف یک عملگر با هم جابجا می‌شوند یا می‌توان گفت که
2. $[x_i , x_j] = 0$ می‌توانیم برای آن eigen state مشترک بسازیم.
3. $[x_i , P_j] = i\hbar \delta_{ij}$ پس یک eigen state به صورت زیر می‌سازیم:

$$|P'_x , P'_y , P'_z\rangle = |\vec{P}'\rangle$$

$$\begin{cases} P_x |\vec{P}'\rangle = P'_x |\vec{P}'\rangle \\ P_y |\vec{P}'\rangle = P'_y |\vec{P}'\rangle \\ P_z |\vec{P}'\rangle = P'_z |\vec{P}'\rangle \end{cases}$$ $\longleftarrow$ بنویسیم

این کار را در مورد x و P با هم نمی‌توان کرد، یعنی نمی‌توان یک state ساخت که هم eigen state P باشد و هم x.

eigen state x به تنهایی وجود دارد، eigen state P هم به تنهایی وجود دارد، اما eigen state مشترک بین این دو وجود ندارد به خاطر رابطه (3).

اگر عملگر بینهایت کوچک را داشته باشیم و روی eigen state های تکانه اثر دهیم، داریم:

$T = 1 - \frac{i\vec{P}}{\hbar}\cdot d\vec{x}'$ بینهایت کوچک

$$T(d\vec{x}')|\vec{p}'\rangle = \underbrace{\left(1-\frac{i\vec{P}\cdot d\vec{x}'}{\hbar}\right)}_{\text{عملگر}}|\vec{p}'\rangle = \left(\underbrace{1-\frac{i\overset{\text{ویژه مقدار}}{\vec{p}'}}{\hbar}\, d\vec{x}'}_{\text{عدد}}\right)|p'\rangle$$

نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که عملگر T روی $|p'\rangle$ اثر کرده و یک ضریبی از خود $|p'\rangle$ را داده است، بنابراین $|p'\rangle$ها ویژه‌کت‌های عملگر T هم هستند. البته این معلوم است چون T تابعی از عملگر P است، بنابراین eigenstate های P، eigen state های T هم هست.

$|x'\rangle$ ها ویژه‌کت T نمی‌شوند چون:

$$T(d\vec{x}')|x'\rangle = |x'+dx'\rangle$$

چون P_1، P_2، P_3 هم با هم جابجا می‌شوند پس T با P_iها جابجا می‌شوند، چون T یک رابطه برحسب P دارد که با P_iها جابجا می‌شوند:

$$[T(\Delta\vec{x}), P_i] = 0$$

T عملگر هرمیتی نیست ($T \neq T^\dagger$) ولی P هرمیتی است. چون T هرمیتی نیست پس ویژه‌مقدارش حقیقی نیستند و دیدیم که ویژه‌مقدارش $\left(1-\frac{i\vec{p}'\cdot d\vec{x}'}{\hbar}\right)$ شد.

ما برای هر مشاهده‌پذیر می‌توانیم یک عملگر هرمیتی تعریف کنیم و برعکس آن هم درست است، یعنی برای هر عملگر هرمیتی می‌توانیم مشاهده‌پذیر تعریف کنیم. در اینجا چون T هرمیتی نیست پس مشاهده‌پذیری به نام انتقال وجود ندارد و نمی‌توانیم بگوییم مقدار انتقال چقدر است.

جلسه هفتم: ۸۴/۷/۲۴

ما جلسه گذشته روابط جابجایی را در مکانیک کوانتومی بدست آوردیم.

$$\begin{cases} [x_i , x_j] = 0 \\ [p_i , p_j] = 0 \\ [x_i , p_j] = i\hbar \delta_{ij} \end{cases}$$

x ها با هم جابجا می‌شوند

با فرض جابجا شدن انتقال در جهت‌های مختلف، p ها هم با هم جابجا می‌شوند

با یک سری فرض در مورد انتقال و عملگر، یک فرم اپراتوری برای آن بدست آمد و ثابت داریم که مولد آن همان تکانه است و از روی آن رابطه بین x ها و p ها بدست آمد.

این روابط بنیادی در مکانیک کوانتومی هستند و مکانیک کوانتومی از روی اینها ساخته می‌شود.

در چارچوب مکانیک کلاسیک هم یک تعریفی وجود دارد (شبیه رابطه جابجایی) به نام کروشه پواسون:

$$[A(q,p) , B(q,p)]_{P.B.} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k} \right)$$

چنین ترکیبی از مشتقات را کروشه پواسون می‌گویند و دلیل اهمیت این کروشه این است که می‌توان فرمول‌بندی مکانیک کلاسیک را بر اساس کروشه پواسون انجام داد. یعنی می‌توان به جای معادلات اویلر و لاگرانژ که در مورد دینامیک q و p صحبت می‌کند، معادلاتی بر حسب کروشه پواسون نوشت، بنابراین کمیت مهمی در چارچوب مکانیک کلاسیک است.

چون کروشه پواسون خاصیت پادتقارنی دارد بنابراین کروشه پواسون هر کمیتی با خودش صفر است:

$$[A , A]_{P.B.} = 0$$

کروشه پواسون یک مولفه مکان و مولفه تکانه طبق تعریف می‌شود:

$$[x_i , p_j]_{P.B.} = \sum_k \left(\overbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}}^{\delta_{ik}} \overbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}^{\delta_{jk}} - \cancel{\frac{\partial x_i}{\partial p_k}}\,\cancel{\frac{\partial p_j}{\partial x_k}} \right) = \delta_{ij}$$

جمله دوم به وضوح صفر است چون x ها نسبت به تکانه‌ها مشتق ندارد و بر عکس. در جمله اول هم x ها نسبت به هم مشتق دارند، اگر اندیس‌شان یکی باشد و همچنین p ها. یعنی کروشه پواسون x و p برابر δ_{ij} می‌شود. با مقایسه این روابط می‌بینیم که جای $i\hbar\delta_{ij}$ در کوانتوم (p ها و x های ما نیستند)، δ_{ij} در کلاسیک، جای x و p دیگر اپراتور نیستند و کروشه پواسون آنها هم صفر می‌شود. (در کوانتوم صفر نمی‌شود ...)

پواسون دیراک می‌شود.

بنابراین یک رابطه یک‌به‌یک بین کروشه پواسون و جابجایی‌گر کوانتومی وجود دارد و این رابطه به این صورت است:

اگر $[\ ,\ ]_{P.B.} \longrightarrow \dfrac{[\ ,\ ]}{i\hbar}$ نسخه دیراک (روش دیراک)

اگر به جای کروشه پواسون، رابطه جابجایی بگذاریم تقسیم بر $i\hbar$

$\Rightarrow C.M. \longrightarrow Q.M.$ ظاهراً به این صورت می‌توان از فیزیک کلاسیک به کوانتوم رفت

مثلاً:

$$[x_i , P_j]_{P.B.} = \delta_{ij} \longrightarrow \frac{[x_i , P_j]}{i\hbar} = \delta_{ij}$$

$$\Longrightarrow [x_i , P_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

بنابراین به طور خیلی عجیبی این اتفاق می‌افتد که اگر به جای کروشه پواسون، رابطه جابجایی در کوانتوم تقسیم بر $i\hbar$ بگذاریم روابط صحیح کوانتومی به دست می‌آید.

دلیل این موضوع اصلاً معلوم نیست و هیچ رابطه‌ای بین کروشه پواسون و جابجایی‌گر کوانتومی وجود ندارد، کروشه پواسون با مشتق کار می‌کند، اما رابطه جابجایی اصلاً مشتق‌گیری ندارد.

معلوم نیست چرا درست است، اما درست است. به همان دلیلی که در مکانیک کوانتومی نمی‌دانیم چرا معادله شرودینگر درست است، ولی درست است و اثباتی برای آن نداریم.

سؤال:

آیا متناظر رابطه جابجایی در عدم قطعیت در کلاسیک وجود دارد؟ یعنی آیا عدم قطعیت در کلاسیک هم وجود دارد؟

$$\frac{\langle (\Delta A)^2\rangle \langle (\Delta B)^2\rangle}{i\hbar} \geqslant \frac{1}{4} \frac{|\langle [A,B]\rangle|^2}{i\hbar}$$

سمت راست کروشه پواسون می‌شود ولی سمت چپ به علت اینکه $\hbar$ خیلی کوچک است، باعث می‌شود که این قسمت خیلی بزرگ شود که بی‌معنی است و چیز خاصی و جالبی به ما نمی‌دهد.

گفتیم هر حالتی را می‌توانیم برحسب پایه‌های یک عملگر هرمیتی بسط دهیم:

$|\alpha\rangle = \sum_a |a\rangle \overbrace{\langle a|\alpha\rangle}^{c_a}$ بسط برحسب یک دسته پایه غیرپیوسته

$|\alpha\rangle = \int d\xi\, |\xi\rangle \overbrace{\langle \xi|\alpha\rangle}^{\text{ضریب بسط}}$ بسط برحسب یک دسته پایه پیوسته:

یکی از مثالهای دسته پایه پیوسته عملگر مکان می‌باشد.

اگر $\xi = x$ ضرایب بسط حالتها در فضای مکان را با $\psi_\alpha(x)$ نشان می‌دهیم به شرطی که تابع موج باشند

$\langle x|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x) =$ تابع موج حالت α wave function

بنابراین می‌توانیم هر چیزی که تا به حال در مورد حالتها گفتیم، برای توابع موج بگوییم:

$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \overbrace{\langle a'|\alpha\rangle}^{c_a}$ هر حالتی را می‌توانیم برحسب ویژه حالتهای یک عملگر هرمیتی بسط دهیم.

مثال بارز این است که آیا این بسط را می‌توان برای تابع موج ذره هم نوشت؟

$\underbrace{\langle x|\alpha\rangle}_{\psi_\alpha(x)} = \sum_{a'} c_{a'} \langle x|a'\rangle$ طرفین را در $\langle x|$ ضرب می‌کنیم

$\langle x|a'\rangle$ هم در حقیقت تابع موج است، اما تابع موج حالتی است که متناظر با eigen ket یک عملگر هرمیتی است.

$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$

$\langle x|a'\rangle = u_{a'}(x) =$ تابع ویژه eigen function

بنابراین در صحبت‌هایی که قبلاً کردیم به جای ket، function می‌گذاریم.

$\Rightarrow \psi_\alpha(x) = \sum_{a'} c_{a'} u_{a'}(x) \leftarrow$ بسط یک تابع موج برحسب توابع ویژه یک عملگر هرمیتی

همین طور این شرط صحت‌ها و عناصر ماتریسی عملگرها را می‌توان گرد:

$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \int dx'\, dx''\, \underbrace{\langle\beta|x'\rangle}_{\psi^*_\beta(x')} \langle x'|A|x''\rangle \underbrace{\langle x''|\alpha\rangle}_{\psi_\alpha(x'')}$

بنابراین با استفاده از توابع موج حتی هم می‌توان عناصر ماتریسی را نوشت

99

یکی از مثالهای این است که عملگر A تابعی از عملگر x باشد:

$$A = f(x) \quad , \quad \langle \beta | f(x) | \alpha \rangle = \int dx' dx'' \Psi^*_\beta(x') \langle x' | \overset{q\text{-number}}{f(x)} | x'' \rangle \Psi_\alpha(x'')$$

$$\langle x'| \underbrace{f(x)|x''\rangle}_{f(x'')|x''\rangle} \rightarrow \text{c-number}$$

$$x|x'\rangle = x'|x'\rangle \qquad f(x'')\,\delta(x'-x'')$$

عملگر (q-number) — ویژه مقدار (c-number)

$$= \int dx' \Psi^*_\beta(x') f(x') \Psi_\alpha(x') \qquad (1)$$

اگر برای یک عملگر A، عناصر ماتریسی و یا ⟨β|A|α⟩ را حساب کنیم، فرم عملگری A را باید کنار گذاشت، اما اگر عملگر A تابع عملگر مکان باشد و فضایی که در نظر داریم فضای مکان باشد، یعنی ویژه حالتهای همین عملگر باشد، در این صورت با آن ویژه مقدارهای عملگر را گذاشت و بر حسب عملگرها کاری نخواهیم داشت

و این یک خصوصیت ظاهری است که اگر در فضای متناسب با عملگر کار کنیم، با ویژه مقادیر کار داریم چون c-number می‌شود و q-number دیگر نیست

در کجای عملگر x، عملگر تکانه هم به چه صورتی می‌افتد؟

ابتدا می‌کنیم به تعریف عملگر انتقال بی‌نهایت کوچک که به این صورت بود

$$T(\Delta x'')|\alpha\rangle = \left(1 - \frac{ip}{\hbar}\Delta x''\right)|\alpha\rangle$$

در سمت چپ رابطه، به جای |α⟩ بسط آن را در فضای مکان قرار می‌دهیم

$$\text{طرف چپ} = T(\Delta x'') \int dx' |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

T عملگری خطی است

$$= \int dx' \underbrace{\left(T(\Delta x'')|x'\rangle\right)}_{\text{طبق تعریف عملگر انتقال } |x'+\Delta x''\rangle} \langle x'|\alpha\rangle$$

$$\text{تغییر متغیر} : \quad x'+\Delta x'' = y \longrightarrow dx' = dy$$

$$x' = y - \Delta x''$$

$$= \int dy\, |y\rangle \langle \underbrace{y - \Delta x''|\alpha}_{\langle y|\alpha\rangle - \frac{d}{dy}\langle y|\alpha\rangle \Delta x'' + \cdots} \rangle$$

$\approx \Delta x''^2$ بسط تیلور حول — به جای y دوباره x' قرار می‌دهیم:

$$= |\alpha\rangle - \underset{\text{کوچک}}{\Delta x''} \int dx' |x'\rangle \left(\frac{d}{dx'}\langle x'|\alpha\rangle\right) = \text{طرف راست}$$

$$\text{طرف راست} = |\alpha\rangle - \frac{i\Delta x''}{\hbar} p|\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow P|\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle$$

ضرب در $\langle\beta|$

$$\langle\beta|P|\alpha\rangle = \int dx' \, \psi^*_\beta(x') \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'} \psi_\alpha(x') \quad ②$$

نمایش تکانه در فضای مکان $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ است.

رابطه ② را با رابطه ① مقایسه می‌کنیم. رابطه ① می‌گوید که اگر عملگر مکان را داشته باشیم و بخواهیم مقدار متوسط آن را در هر حالت حساب کنیم اگر آن حالتها را در فضای مکان بسط دهیم در این صورت برای این عملگر می‌توانیم از number ... استفاده کنیم به عبارت دیگر نمایش $f(x)$ در فضای مکان $f(x')$ (ویژه مقدار) است.
در رابطه ② باز هم می‌خواهیم عملگر P را بین دو state حساب کنیم ولی این بار stateها را هم در فضای مکان بسط می‌دهیم. نتیجه‌ای که به دست آمد این است که به جای عملگر P در فضای مکان باید $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ قرار دهیم:

حال می‌خواهیم ببینیم eigen function های تکانه در فضای مکان چیست؟

$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$

A ← مکان مشترک باشد

دنبال $\langle x|p'\rangle = ?$

بنابراین باید عملگر P را با یک سری ویژه مقدار و ویژه کت:

$P|p'\rangle = p'|p'\rangle$

$\langle p'|p''\rangle = \delta(p'-p'')$ چون ویژه کت‌های یک عملگر هرمیتی هستند پس:

هر حالتی را می‌توان بر حسب آنها بسط داد:

$|\alpha\rangle = \int dp' |p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle$

در فضای مکان اسم ضریب بسط را تابع موج ... تابع موج در فضای تکانه: $\Phi_\alpha(p')$

گذاشتیم و در فضای مکان، اینجا می‌توانیم اسم ضریب بسط را تابع موج در فضای تکانه بگذاریم

داشتیم:

$|\psi_\alpha(x')|^2 dx' =$ احتمال یافتن سیستم α در بازه $(x', x'+dx')$

به همین صورت برای $|\Phi_\alpha(p')|^2$

$|\Phi_\alpha(p')|^2 dp' = (p', p'+dp')$ احتمال یافتن سیستم باشد

هر تابعی از p را اگر بخواهیم در فضای مکان عنصر ماتریسی‌اش را پیدا کنیم، به جای p ها باید $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ بگذاریم ولی اگر بخواهیم در فضای p حساب کنیم، در این صورت باید به جای $f(p)$، ویژه مقدارش را بگذاریم.

$$\underbrace{\langle \beta | f(p) | \alpha \rangle}_{\text{q-number}} = \int dp' \, \phi^*_\beta(p') \underbrace{f(p')}_{\text{c-number}} \phi_\alpha(p')$$

بنابراین نمایش بستگی به پایه دارد. نمایش یک عملگر است، برای داشتن نمایش آن باید پایه را بدانیم. اگر پایه‌اش مکان است، نمایش آن $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ است، اگر پایه‌اش تکانه باشد، نمایش آن یک عدد است.
اگر پایه آن هر چیز دیگری باشد، باید حساب کنیم.

برمی‌گردیم به بحث‌مان در مورد شکل eigen function های تکانه در فضای مکان،
حال می‌خواهیم ببینیم $\langle x'|p'\rangle$ چیست؟
سه تعبیر وجود دارد:

- تابع موج ذره‌ای است با تکانه p' در فضای مکان $\langle x' | \underbrace{p'}_{|\alpha\rangle} \rangle$
یعنی از نوع $\psi_\alpha(x)$ ها است که حالت α دارای تکانه p' است.

- مزدوج این طور است: $\langle x'|p'\rangle = \langle p'|x'\rangle^*$
$\langle p'|x'\rangle$ تابع موج ذره‌ای است در نقطه x' در فضای تکانه
در اینجا حالت α، یعنی ذره‌ای است که در نقطه x' نشسته است و با مکان آن مشخص می‌شود، چون در فضای تکانه کار داریم، از نوع ϕ_α ها است.

- در تغییر پایه گفته بودیم:
گفتیم یک عملگر تبدیل داریم که به این صورت بود: $U|a'\rangle = |b'\rangle$
عناصر ماتریس تبدیل به این صورت بودند: $\langle a''|U|a'\rangle = \langle a''|b'\rangle$

اگر $|a'\rangle = |x'\rangle$, $|b'\rangle = |p'\rangle$ $\longrightarrow$ عناصر ماتریس تبدیل: $\langle x'|p'\rangle$

عناصر ماتریس تبدیل از فضای x به فضای p هستند.

قبل از رابطه ② بدست آورده بودیم

داشتیم : $p|\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'} \langle x'|\alpha\rangle$

ضرب در $\langle x''|$ $\Rightarrow \langle x''|p|\alpha\rangle = \int dx' \, \delta(x''-x') \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'} \langle x'|\alpha\rangle$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x''} \langle x''|\alpha\rangle$$

در نظر می‌گیریم

$|\alpha\rangle \equiv |p'\rangle$

$x'' \to x'$

$$\underbrace{\langle x'|\overbrace{p|p'\rangle}^{p'|p'\rangle}}_{p'\langle x'|p'\rangle} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'} \overbrace{\langle x'|p'\rangle}^{U_{p'}(x')}$$

$$\int \frac{dU_{p'}(x')}{U_{p'}(x')} = \int \frac{ip'}{\hbar} dx' \Rightarrow \boxed{U_{p'}(x') = N e^{ip'x'/\hbar}} = \langle x'|p'\rangle$$

این رابطه تابع موج تکانه است در فضای مکان، یعنی تابع موج ذره‌ای است که تکانه آن مشخص است به اندازه (p') در فضای مکان.

حال این ذره که تکانه‌اش مشخص است، مکان آن کجاست؟ شکل تابع سینوسی است، مکانش از $-\infty$ تا $+\infty$ پخش شده است (اصل عدم قطعیت). چونکه از ذره با تکانه مشخص داریم صحبت می‌کنیم، تمام اطلاعات در مورد مکان از دست رفته است. هرچقدر که تکانه را دقیق‌تر کنیم، در این صورت مکانش را می‌توانیم محدودتر کنیم.

ضریب نرمالیزاسیون را با استفاده از تابع دلتا بدست می‌آوریم:

یکی از نمایش‌های تابع دلتا:

ویژه کت‌های عملگر مکان بر هم عمودند

$$\langle x'|x''\rangle = \delta(x'-x'') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x'-x'')} dk \quad (k \to p/\hbar)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{p}{\hbar}(x'-x'')} dp \quad ①$$

بطور کلی هم در فضای تکانه

$$\langle x'|x''\rangle = \int dp' \underbrace{\langle x'|p'\rangle}_{v_{p'}(x') = N e^{ip'x'/\hbar}} \underbrace{\langle p'|x''\rangle}_{v^*_{p'}(x'') = N e^{-ip'x''/\hbar}} = N^2 \int dp' \, e^{\frac{ip'}{\hbar}(x'-x'')} \quad ②$$

$$① = ② \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

بیان کردیم که سه تعبیر برای $\langle p'|x'\rangle$ وجود داشت: ۱- تابع موج ذره‌ای با تکانه p در فضای مکان ۲- تابع موج ذره‌ای در نقطه x در فضای تکانه ۳- عناصر ماتریس تبدیل این دو.

در مورد ماتریس تبدیل بودن آن بر اساس این توضیح را داریم:

در فضای مکان حالت $|\alpha\rangle$ را بسط می‌دهیم:

$$|\alpha\rangle = \int dx' \, |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

$$\text{ضرب در } \langle p'| \Rightarrow \underbrace{\langle p'|\alpha\rangle}_{\Phi_\alpha(p')} = \int dx' \, \langle p'|x'\rangle \underbrace{\langle x'|\alpha\rangle}_{\psi_\alpha(x')} \quad \mathrm{I}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که رابطه I همان رابطه II را نقش بازی می‌کند

جای i در رابطه پایین نشسته

متناظرند

$$(\mathrm{New})_i = (U^{\dagger})_{ij} \, (\mathrm{old})_j \quad \mathrm{II}$$

$i \to p'$ ، $j \to x'$

رابطه II می‌گوید که کت‌ها در فضای جدید،

برابر با اثر عملگر U (ماتریس تبدیل) در فضای قدیم.

$a(x)$ یا $a(p)$ یا هر حلقه پیوسته‌ای را می‌توان به عنوان اندیس xام یا pام یاد کرد.

در رابطه I پایه‌های قدیم x هستند و پایه‌های جدید p هستند

$\langle p'|\alpha\rangle$ یعنی $\Phi_\alpha(p')$، در فضای تکانه است، مولفه p'ام آن همان تابع در نقطه p' است، یعنی p' در $\Phi_\alpha(p')$ جای i در $(\mathrm{New})_i$ نشسته است

ماتریس U در اصل همان $\langle x'|p'\rangle$ است، بجای اندیس i و j در $(U^\dagger)_{ij}$ قرار شد پیوسته حساب کنیم، به جای اندیس i می‌گذاریم p' و بجای اندیس j، x' می‌گذاریم. ماتریس U عناصرش x' و p' است ولی ما باید دگرش را حساب کنیم بنابراین شده p' و x'. پس $\langle p'|x'\rangle$ متناظر است با $(U^\dagger)_{ij}$.

$U^\dagger$ بر روی ماتریس قدیم اثر می‌کند که در فضای x با همان تابع موج بیان می‌شود، یعنی نقطه j در حالت قدیم، x' می‌گذاریم همچنین چون ضرب ماتریسی است باید جمع روی j بخورد و در رابطه I چون فضا پیوسته است انتگرال روی x' گرفته شده است. بنابراین $\langle p'|x'\rangle$ دقیقاً نشان‌دهنده ماتریس تبدیل در فضای پیوسته.

نمایش تابع دلتای دیراک:

اگر طیف پیوسته باشد، برای eigen state های هرمیتی

$$\langle x'|x''\rangle = \delta(x'-x'')$$

همیشه این رابطه برقرار است، بنابراین نمایش‌های مختلف را می‌توان از این رابطه بدست آورد.

بطور کلی برای بیان نمایش‌های مختلف تابع دلتای دیراک باید بدانیم چون رابطه بالا را قبول داریم، می‌گوییم چون $\langle x'|x''\rangle$ را می‌توان در پایه‌های مختلف بسط داد، نمایش‌های متفاوتی هم بدست می‌آید.

بسط برحسب پایه‌های پیوسته:

$$\delta(x'-x'') = \langle x'|x''\rangle = \int \langle x'|p'\rangle\langle p'|x''\rangle\, dp'$$

بسط برحسب پایه‌های گسسته:

$$= \sum_{a'}^{\text{گسسته}} \langle x'|a'\rangle\langle a'|x''\rangle$$

بستگی دارد به اینکه عملگر a را چه چیزی بگیریم، در نتیجه نمایش‌های مختلفی بدست می‌آید.

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(x-x')}$$

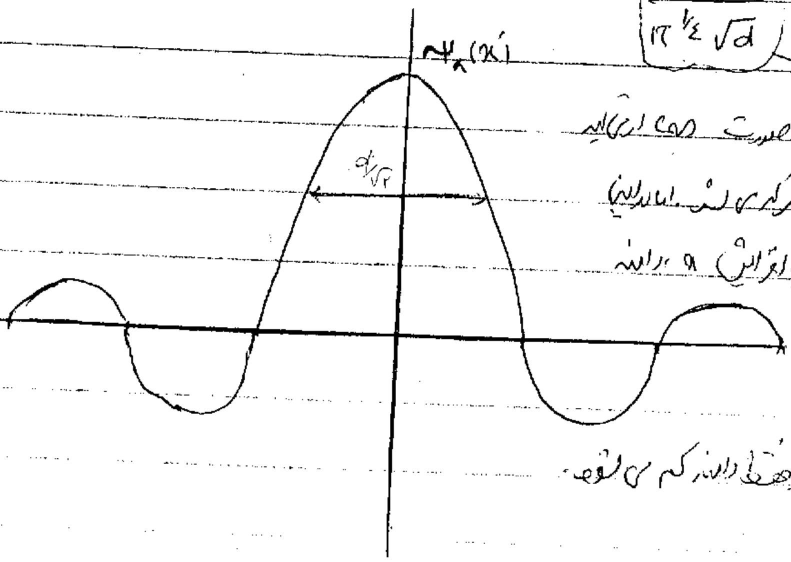
برحسب توابع بسل، لژاندر ... هم می‌توان تابع دلتا را نوشت. دیدیم که در رابطه با مختصه p در فضای مکان چطور شد

مثال:

تابع موج در فضای مکان را این طور فرض می‌کنیم:

$$\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{d}}\, e^{ikx' - x'^2/2d^2}$$

$$\mathrm{Re}\,\psi = \underbrace{\boxed{\frac{e^{-x'^2/2d^2}}{\pi^{1/4}\sqrt{d}}}}_{\text{دامنه}} \cos kx'$$



اگر دامنه ثابت بود یعنی به صورت موج ارسالی

و با یک طول موج ثابت تکرار می‌شد. اما الان

دامنه تابع مکانی است و با افزایش x دامنه

کاهش پیدا

می‌کند

ولی طول موج تغییر نمی‌کند و فقط دامنه کم می‌شود.

یادآوری:

$$\begin{cases} \int e^{-\alpha x^2} x^n dx = \dfrac{1}{\alpha^{(\frac{n+1}{2})}} \Gamma(\frac{n+1}{2}) \\ \Gamma(m+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{2^m}\sqrt{\pi} \end{cases}$$

پس در فضای مکان ذره به صورت معادله گفته شده است. حال چند کمیت را محاسبه می‌کنیم. ابتدا مقدار چشمداشتی x است:

$$\langle x\rangle = \langle\alpha|x|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha^*(x')\, x'\, \psi_\alpha(x')\, dx'$$

$$= \frac{1}{\pi^{1/2} d}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x'^2/d^2}\, dx' = 0$$ چون تابع فرد است صفر است

متوسط x^2 را حساب می‌کنیم:

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\alpha(x')|^2\, x'^2\, dx' = \frac{d^2}{2}$$

چون انتگرال تابع به این صورت در می‌آید:

$$\Rightarrow \langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle} = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

حال مقدار چشمداشتی تکانه این حالت را به دست می‌آوریم:

$$\langle p\rangle = \int \psi_\alpha^*(x')\, \frac{\hbar}{i}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x'}\psi_\alpha(x')}_{\text{اثر می‌کنیم}}\, dx' = \hbar k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\alpha(x')|^2 dx'}_{1}$$

$ik\,\psi_\alpha(x')$

$(ik - \frac{x'}{d^2})$ این جمله در انتگرال صفر می‌شود چون فرد است

$$\Rightarrow \langle p\rangle = \hbar k$$

$\langle p^2\rangle$ را به دست می‌آوریم:

$$\langle p^2\rangle = \int \psi_\alpha^*(x')\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 \psi_\alpha(x')\, dx' = \frac{\hbar^2}{2d^2} + \hbar^2 k^2$$

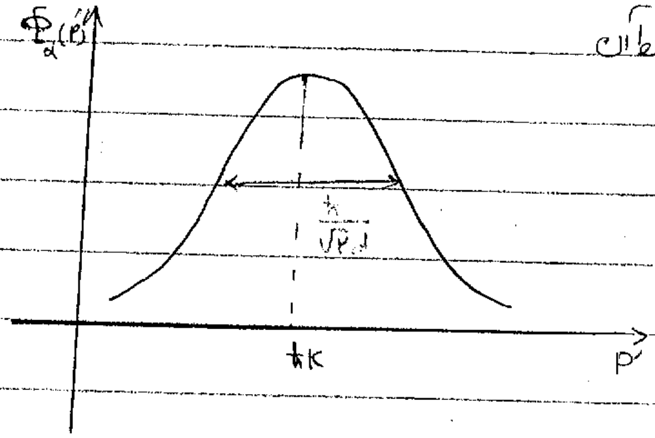
سؤال: اگر تابعی که نوشتیم، موج تخت تکانه یعنی فقط جمله اول $e^{-ikx'}$ را داشت، در این صورت $\langle p^2\rangle$ باید چه مقداری می‌شد؟

اگر موج تخت تکانه بود، تکانه آن یک چیز مشخص شده می‌شد. تکانه مشخص یعنی اینکه پهنای آن در فضای تکانه صفر است پس طبق تعریف $\langle(\Delta p)^2\rangle$ باید صفر شود یعنی باید $\langle p^2\rangle = \langle p\rangle^2$ باشد. پس جمله اول رابطه $\langle p^2\rangle$ نباید باشد، یعنی این جمله مربوط به پهنا می‌شود.

$$\Delta P: \langle(\Delta P)^2\rangle = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \hbar^2/2d^2 \longrightarrow \Delta P = \frac{\hbar}{\sqrt{2}d}$$

به عبارت دیگر اگر تابع موج در فضای p بنویسیم:

$$\Phi_\alpha(p') = \int dx'\, \psi_\alpha(x') \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i/\hbar\, p'x'} = \sqrt{\frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{(p'-\hbar k)^2 d^2}{2\hbar^2}}$$



تابع گوسی شد که مرکز آن در نقطه $\hbar k$ است

$d\uparrow \rightarrow \Delta x\uparrow \rightarrow \Delta p\downarrow$

نکته جالبی که وجود دارد این است که با افزایش d، Δx افزایش پیدا می‌کند ($\Delta x = \frac{d}{\sqrt{2}}$)، ΔP کاهش پیدا می‌کند ($\Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}d}$)
و هر چه ذرات را در فضای مکان محدودتر کنیم، در فضای تکانه پهن‌تر می‌شوند

نکته جالب در مورد این مثال (تابع موج با کمترین اصل عدم قطعیت):

$$\Delta P \Delta x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}d} \times \frac{d}{\sqrt{2}} = \hbar/2$$

می‌بینیم رابطه اصل عدم قطعیت است

$$\Delta P \Delta x \geq \hbar/2$$

این تابع موج، تابع موج خاصی است و طوری است که در آن کمترین عدم قطعیت را ما می‌بینیم برقرار است و حد پایین را می‌دهد.

$$e^{i/\hbar\, p'x'} \longrightarrow e^{i/\hbar\, \vec{p}'\cdot\vec{x}'}$$

تمام این فضاها در حالت سه بعدی هم برقرار است و به جای کمیات برداری نوشته می‌شود و به جای px، $\vec{p}\cdot\vec{x}$ نوشته می‌شود

۱۰۷

شکل عملگر x در فضای مختص p:

در فضای مکان گفتیم:

عملگر x و p به این صورت درآمدند:

$$\text{در فضای مکان}\begin{cases} X_{op} = x' \\ P_{op} = \frac{\hbar}{i}\partial/\partial x' \end{cases}$$

حال می‌خواهیم آن را به دست آوریم یعنی عملگر x و p در فضای تکانه:

عملگر p که معلوم است، سؤال این است که عملگر x در فضای تکانه چه چیزی می‌شود؟

$$\text{در فضای تکانه}\begin{cases} X_{op} = ? \\ P_{op} = p' \end{cases}$$

اثبات:

راه ساده:

$$[x,p] = i\hbar$$

در فضای مکان: $\left[x, \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right]\underbrace{f(x)}_{\text{تابع دلخواه}} = \frac{\hbar}{i}\Big(\cancel{x\frac{df}{dx}} - \overbrace{\frac{d}{dx}(xf)}^{\cancel{x\frac{df}{dx}}+f(x)}\Big)$

$$= \frac{\hbar}{i}(-)f(x) = i\hbar f(x)$$

در فضای تکانه هم این طور عمل می‌کنیم، جای x می‌گذاریم یک ثابت × $\frac{d}{dp}$ (در بحث تبدیل فوریه x و p مثل هم هستند)

در فضای تکانه: $\left[a\frac{d}{dp}, p\right]\underbrace{f(p)}_{\text{تابع دلخواه}} = a\Big(\underbrace{\frac{d}{dp}(pf)}_{\cancel{p\frac{df}{dp}}+f} - \cancel{p\frac{df}{dp}}\Big)$

$$= af \underset{\text{انتظار داریم}}{=} i\hbar f \Rightarrow a = i\hbar$$

$$\Rightarrow \boxed{X_{op} = i\hbar\,\partial/\partial p} \quad \text{x در فضای تکانه}$$

راه دقیق‌تر:

عملگر x را در فضای تکانه بسط دهیم

$$x|\alpha\rangle = \int dp' \underbrace{|p'\rangle\langle p'|}_{\text{رابطه بستاری}} x|\alpha\rangle$$

دوباره رابطه بستاری بکار گیریم

$$= \int dp' |p'\rangle \langle p'|x\overbrace{|x'\rangle\langle x'|}^{\text{رابطه بستاری}}\alpha\rangle\, dx'$$

$$\underbrace{x'\langle p'|x'\rangle}_{} \qquad \underbrace{\langle x'|\alpha\rangle}_{\psi_\alpha(x')}$$

$$x'\langle p'|x'\rangle = \frac{x'}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ip'x'/\hbar}$$

در حقیقت همان تابع موج در فضای تکانه است

$$x|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp' |p'\rangle \int dx'\, x' e^{-ip'x'/\hbar} \psi_\alpha(x') \quad \text{(I)}$$

از طرف دیگر تابع موج را در فضای تکانه می‌نویسیم:

$$\Phi_\alpha(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx' \psi_\alpha(x') e^{-ip'x'/\hbar}$$

$\frac{\partial}{\partial p'}$ از طرفین می‌گیریم

$$\frac{1}{-i/\hbar} \frac{\partial}{\partial p'} \Phi_\alpha(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx' \psi_\alpha(x') x' e^{-ip'x'/\hbar} \quad \text{(II)}$$

از مشتق‌گیری آمده است

از تشابه (I) و (II) و قرار دادن رابطه (II) در (I):

$$x|\alpha\rangle = \int dp' |p'\rangle\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \Phi_\alpha(p')$$

طرفین را در $\langle\beta|$ ضرب می‌کنیم:

$$\boxed{\langle\beta|x|\alpha\rangle = \int dp'\, \Phi^*_\beta(p')\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \Phi_\alpha(p')}$$

اگر بخواهیم عناصر ماتریس x را حساب کنیم، اگر stateها را در فضای تکانه بنویسیم، جای x باید $i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$ باید قرار دهیم.

جلسه نهم، ۸۴/۷/۲۶

Chapter 2: دینامیک کوانتومی

ما در فصل یک در حقیقت ساختار ریاضی را برای مکانیک کوانتومی که نیاز داریم، بدست آوردیم. یعنی نحوه نمایش یک حالت را دیدیم و بسط آن برحسب ویژه کت ها را نوشتیم.

حال سوال این است که تحول حالت ها با زمان چگونه است؟ به تحول زمانی سیستم فیزیکی، دینامیک می گویند.

$$|\alpha, t_0\rangle \longrightarrow |\alpha, t_0, t\rangle$$

این سوال اصلی ما است یعنی اگر یک حالتی را در زمان t_0 داشته باشیم $(|\alpha, t_0\rangle)$، در زمانهای بعد $(|\alpha, t_0, t\rangle)$ به چه صورت است؟ استاتیک بررسی سیستم در زمان معین است ولی دینامیک بررسی سیستم در زمانهای مختلف است.

(عملگر تحول زمانی یا عملگر انتقال در زمان)

$$|\alpha, t_0, t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle \quad \text{(I)}$$

انتظار داریم عملگر U روی حالت در زمان t_0 اثر کرده و حالت در زمان t را پدید آورده باشد. به این عملگر تحول زمانی می گوییم.

می خواهیم با یکی دو شرط روی U، فرم آن را برای بینهایت کوچک بدست می آوریم (مانند عملگر انتقال مکان بینهایت کوچک):

عملگر بینهایت کوچک (تحول زمانی):

۱) اصل بقای احتمال: یعنی اگر در زمان t_0 یک سری ذره داشتیم بعد از تحول در زمان t تعداد ذرات نباید تغییر کند، یعنی:

$$\langle \alpha, t_0|\alpha, t_0\rangle = \langle \alpha, t_0, t|\alpha, t_0, t\rangle \quad \text{(II)}$$

در هر زمانی state ها قابل بسط هستند برحسب ویژه کت یک عملگر هرمیتی:

بسط در زمان t_0

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} C_{a'}(t_0)|a'\rangle \xRightarrow{\text{اصل بقای احتمال}} \sum_{a'} |C_{a'}(t_0)|^2 = 1$$

اصل بقای احتمال می گوید باید برابر باشند

در زمان t

$$|\alpha, t_0, t\rangle = \sum_{a'} C_{a'}(t)|a'\rangle \Longrightarrow \sum_{a'} |C_{a'}(t)|^2 = 1$$

$$\text{(II)}: \langle \alpha, t_0|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a' a''} \overbrace{C^*_{a''}(t_0)\langle a''|}^{\langle \alpha, t_0|} \overbrace{C_{a'}(t_0)|a'\rangle}^{|\alpha, t_0\rangle}$$

$$= \sum_{a', a''} C_{a'}(t_0)\, C^*_{a''}(t_0) \underbrace{\langle a''|a'\rangle}_{\delta_{a'a''}} = \sum_{a'} |C_{a'}(t_0)|^2$$

حال این تداوم و بقای احتمال شرط یکانی بودن را روی U می‌گذارد:

$$\langle \alpha, t_0, t | \alpha, t_0, t \rangle = \langle \alpha, t_0 | \alpha, t_0 \rangle$$

$$\overset{①}{\Rightarrow} \overbrace{\langle \alpha, t_0 | U^\dagger U | \alpha, t_0 \rangle = \langle \alpha, t_0 | \alpha, t_0 \rangle}^{\text{می‌خواهیم مساوی باشد}}$$

همانطور که قبلاً هم گفتیم، هر عملگر تحول و انتقالی برای حفظ بقای احتمال باید یکانی باشد

$$\Longrightarrow U^\dagger U = 1$$

۲) اگر عملگر زمان سیستم را از t_0 به t_1 ببرد ($U(t_1,t_0)$) و بعد از t_1 به t_2 ($U(t_2,t_1)$)، انتظار داریم این کار را با یک عملگر انتقال انجام دهیم یعنی

$$U(t_2,t_0) = U(t_2,t_1)\,U(t_1,t_0) \qquad t_2 > t_1 > t_0$$

در نهایت سیستم از t_0 به t_2 رفته است

۳) انتظار داریم که عملگر انتقال بی‌نهایت کوچک اگر dt صفر باشد، انتقال ندهد یعنی عملگر واحد باشد.

$$\lim_{dt \to 0} U(t_0 + dt, t_0) = 1$$

مثل همان کاری که برای عملگر انتقال مکان بی‌نهایت کوچک انجام دادیم، در اینجا انجام می‌دهیم

U را بسط می‌دهیم،

همانند عملگر انتقال مکان بی‌نهایت کوچک بسط می‌دهیم

عملگر بی‌نهایت کوچک

$$U(t_0 + dt, t_0) = 1 + \underset{-i\Omega}{\underbrace{A}}\,dt + \cdots$$

A را $-i\Omega$ می‌گذاریم. به خاطر شرط سوم

اگر شرط $U^\dagger U = 1$ را اعمال کنیم به این نتیجه می‌رسیم:

شرط $U^\dagger U = 1$ را اعمال می‌کند

$$\longrightarrow \Omega = \Omega^\dagger$$

Ω باید هرمیتی باشد

بطور اتوماتیک شرط دوم را هم اعمال خواهد کرد.

عملگر تحول زمان در حد بی‌نهایت کوچک

$$\boxed{U(t_0 + dt, t_0) = 1 - i\Omega\, dt}$$

اسم Ω را چه چیزی بگذاریم؟ نه عین این مورد را در عملگر انتقال مکان داشتیم. در آنجا عدد موج K بود

در عملگر انتقال در فضا، عملگر T را با مولد انتقال در مکانیک کلاسیک مقایسه کردیم با تابع F_2

$$T(d\vec{x}') = 1 - i\vec{K}\cdot d\vec{x}'$$

$$F_2 = \underbrace{\sum q_i P_i}_{identity} + \varepsilon G \rightarrow \begin{cases} Q_i = q_i + \delta q_i \\ P_i = p_i + \delta p_i \end{cases}$$ مولد تبدیلات بینهایت کوچک

در اینجا دیدیم که اگر G را p_ℓ بگیریم:

$$G \to p_\ell \rightarrow \begin{cases} \delta q_\ell = \varepsilon \\ \delta q_{i\neq \ell} = 0 \\ \delta p_i = 0 \end{cases}$$

در نتیجه دیدیم که تبدیلات به طوری است که انتقال ایجاد می‌کند و بعد F_2 را با T مقایسه کردیم و دیدیم که متناظر تبدیل identity در فضا اپراتوری عملگر واحد است و ε مقدار تغییر است که متناظر با dx' است بنابراین نتیجه گرفتیم که K باید تکانه باشد و برای برقراری دیمانسیون آن یک $\hbar$ در مخرج آن گذاشتیم

حال می‌خواهیم همین کارها را برای عملگر انتقال در زمان نشان دهیم.

در اینجا می‌توان نشان داد که اگر G را هامیلتونی بگیریم، می‌توان مشاهده کرد که Q_i جدید به این صورت بدست می‌آید

$$F_2 = \sum q_i P_i + \varepsilon \underset{\downarrow \atop H}{G} \longrightarrow \begin{cases} Q_i = q_i(t) + \overset{dt}{\varepsilon}\, \overset{\frac{dq_i}{dt}}{\dot q_i}(t) \end{cases}$$

حال اگر ε را بگذاریم dt و $\dot q_i$ را بگذاریم $\frac{dq_i}{dt}$ چیزی که ظاهر می‌شود بسط $q_i(t+dt)$ حول $dt=0$ است:

$$Q_i = q_i(t) + \varepsilon\, \dot q_i(t) = q_i(t) + \left(\frac{dq_i}{dt}\right)dt = q_i(t+dt)$$

پس یعنی هامیلتونی مولد تبدیلاتی است که این تبدیلات سیستم را در زمان منتقل می‌کند، یعنی اگر حالت اول سیستم $q_i(t)$ بوده حالا شده $q_i(t+dt)$ است.

در اینجا هم همین موضوع را مطرح می‌کنیم، Ω یک قسمت از U است که این U انتقال در زمان را اعمال می‌کند.

اگر U را با F_2 مقایسه کنیم، 1 قابل مقایسه است با $\sum q_i P_i$ و dt قابل مقایسه با ε است پس همانطوری که می‌بینید Ω باید متناظر باشد با هامیلتونی!

$$U(t_0+dt, t_0) = 1 - i\Omega\, dt$$

$$F_2 = \sum q_i P_i + \varepsilon G$$

چون Ω ضرب در dt شده و با 1 جمع شده، پس دیمانسیونش $\frac{1}{\text{زمان}}$ است، و دیمانسیون هامیلتونی انرژی است، پس H باید تقسیم بر یک چیزی از جنس $J\text{-}sec$ شود تا دیمانسیون آن $\frac{1}{\text{زمان}}$ شود، تنها چیزی که می‌شناسیم در مکانیک کوانتومی که دیمانسیون آن $J\text{-}sec$ است، $\hbar$ است.

$$[\Omega] = \frac{1}{T} \quad , \quad [H] = J$$

$$\Omega \sim H\Big[\underbrace{\frac{H}{J\text{-}sec}}_{\hbar}\Big]$$

پس Ω را به این صورت می‌گیریم:

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{H}{\hbar}}$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \boxed{U(t_0+dt, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} H\, dt} \quad \text{(I)}$$

اپراتور U ضمیمه‌ای است، چون هم انتقال در زمان را به ما می‌دهد و هم اینکه به نوعی هامیلتونی را تعریف می‌کند.

می‌خواهیم از معادله I استفاده کنیم و معادله حاکم بر $U(t,t_0)$ را به دست آوریم:

با استفاده از شرط دوم

$$U(t+dt, t_0) = U(t+dt, t)\, U(t, t_0)$$

(بازه را تقسیم کردیم به یک قسمت با اندازه زمانی بی‌نهایت کوچک و دیگری نیز)

$U(t+dt,t) \to 1 - \frac{i}{\hbar} H dt$ — با استفاده از I چون بی‌نهایت کوچک است پس می‌توان از آن استفاده کرد

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{U(t+dt, t_0) - U(t, t_0)}{dt}}_{\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t}\ \text{شد}} = -\frac{i}{\hbar} H\, U(t, t_0)$$

معادله شرودینگر برای عملگر تحول زمانی

$$\Rightarrow \boxed{\frac{i\hbar\, \partial U(t, t_0)}{\partial t} = H\, U(t, t_0)} \quad \text{(II)}$$

اگر طرفین معادله را در $|\alpha,t_0\rangle$ (که یک تابع ثابت در یک زمان معین) ضرب کنیم:

چون: $\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)\right)|\alpha,t_0\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left(U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t_0;t\rangle$

این t_0 را برای این گذاشتیم تا نشان دهیم این حالت از زمان t_0 تحول پیدا کرده و رشد t که می‌توانیم آن را نگذاریم:

$$\boxed{\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t\rangle = H|\alpha,t\rangle}\quad \text{(III)}$$

معادله شرودینگر برای حالتها

معادله (II) به ما کمک می‌کند تا $U(t,t_0)$ را بدست آوریم، در این صورت با تأثیر دادن آن بر روی $|\alpha,t_0\rangle$، حالت $|\alpha,t\rangle$ را می‌توانیم بدست آوریم:

$$|\alpha,t\rangle = U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle$$

پس دو سؤال مطرح می‌شود، سؤال اول: اولاً $U(t,t_0)$ چیست؟ یا به عبارتی حل معادله دیفرانسیل (II) چیست؟

سؤال دوم: تأثیر U بر روی $|\alpha,t_0\rangle$ چگونه است؟

بعداً اثبات می‌کنیم که U یک تابعی است از هامیلتونی که پیچیده می‌باشد، پس اگر بخواهیم تأثیر U را روی $|\alpha,t\rangle$ بشناسیم باید تأثیر هامیلتونی را روی آن بشناسیم (مربوط به سؤال دوم).

پس می‌خواهیم U را با حل معادله (II) بدست آوریم.

برای بدست آوردن U مسئله یک مقدار مشکل می‌شود نسبت به قبل که برای عملگر انتقال مکان بینهایت کوچک بدست آوردیم. در عملگر انتقال مکان ابتدا برای حالت بینهایت کوچک نوشتیم و بعد با چند بار تأثیر دادن روی هم برای حالت عملگر انتقال محدود بدست آوردیم:

$T(d\vec{x}') = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot d\vec{x}'$ عملگر انتقال بینهایت کوچک

$T(a) = e^{-i/\hbar\,\vec{a}\cdot\vec{P}}$ عملگر انتقال محدود

تمرین:

T عملگر انتقال در فضا است. نشان دهیم که رابطه زیر برقرار است و توضیح دهید که چرا علامت منها در $\psi(\vec{x}-\vec{a})$ ظاهر شده است (انتظار داشتیم + باشد)

$T(d\vec{x}')|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}'+d\vec{x}'\rangle$

نشان دهیم: $T(\vec{a})\,\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}-\vec{a})$

در عملگر انتقال در فضا دیدیم به دست آوردن عملگر انتقال محدود آسان بود، اما در اینجا مشکل است و منجر به حل معادله دیفرانسیل می‌شود
برای به دست آوردن رابطه مورد نظر، ما می‌توانیم چند نوع هامیلتونی داشته باشیم:

حالت اول) H مستقل از زمان باشد ← ساده‌ترین حالت) شبیه T می‌شود

پس می‌توان شبیه حالت T عمل کرد چون در زمان‌های مختلف H تغییر نمی‌کند

$U(t,t_0)=?$

ابتدا $t-t_0$ را به N زمان تقسیم می‌کنیم و اسم آن را ε می‌گذاریم:

$$\varepsilon \equiv \frac{t-t_0}{N}$$

به علت خاصیت ضربی U ها که زمان‌ها را با هم جمع می‌کند، می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$U(t,t_0)=\underbrace{U(\overset{\text{یک زمان قبل از } t}{t,t-\varepsilon})}_{1-\frac{i}{\hbar}H(t)\varepsilon}\;\underbrace{U(t-\varepsilon,t-2\varepsilon)}_{1-\frac{i}{\hbar}H(t-\varepsilon)\varepsilon}\cdots\underbrace{U(\overset{\text{یک زمان بعد از } t_0}{t_0+\varepsilon,t_0})}_{1-\frac{i}{\hbar}H(t_0)\varepsilon}$$

همه دارای اختلاف زمانی ε هستند

هامیلتونی در زمان t — هامیلتونی در زمان $t-\varepsilon$

همه اینها دارای اختلاف زمانی بی‌نهایت کوچک هستند پس می‌توان از فرمول قبل استفاده کرد.

* اگر حالت اول باشیم و H ها مستقل از زمان باشند، همه یک H هستند و بنابراین تمام جملات مثل هم می‌شوند.

در نتیجه داریم:
$$\left(1-\frac{i}{\hbar}H\times\varepsilon\right)^N=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{i}{\hbar}H\frac{t-t_0}{N}\right)^N=e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}$$

$$\Longrightarrow \boxed{U(t,t_0)=e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}} \quad (1)$$

U برای حالتی که هامیلتونی مستقل از زمان است.

حالت دوم) H تابع زمان باشد ولی در زمان‌های مختلف، با هم جابجا شوند

$[H(t_1),H(t_2)]=0$ این زمانی اتفاق می‌افتد که یک ضریب t کنار اپراتور نشسته باشد و زمان که عوض شود ضریب t عوض می‌شود ولی اپراتورها تغییر نمی‌کنند بنابراین با هم جابجا می‌شوند.

همه اینها را داریم

$$U(t,t_0)=\underbrace{U(t,t-\varepsilon)}_{1-\frac{i}{\hbar}H(t)\varepsilon}\;\underbrace{U(t-\varepsilon,t-2\varepsilon)}_{1-\frac{i}{\hbar}H(t-\varepsilon)\varepsilon}\cdots\cdots U(t_0+\varepsilon,t_0)$$

دیگر نمی‌توان جای همه اینها H بگذاریم.

به دو صورت می‌توانیم عمل کنیم:
۱) هر کدام را به شکل نمایی بنویسیم و ادامه دهیم می‌بینیم که جابجا می‌شوند

(1) داریم ← $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t)\underbrace{\Delta t}_{\varepsilon}}$

اما اگر بازه زمانی تغییرات زمانی ما بینهایت کوچک باشند، در طی زمان بینهایت کوچک می‌توان از تغییر H صرف نظر کرد. بنابراین فرمول ① را می‌توانیم برای هامیلتونی تابع زمان استفاده کنیم، به شرطی که طول زمانی را کم نگه داشته باشند.

در حقیقت معنی آن می‌شود اینکه می‌گوییم H کدام زمان را بگذاریم

اگر ε بگیریم

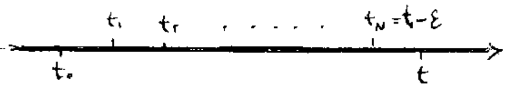
$$U(t,t_0) = e^{-i/\hbar (t-t_0) H}$$

ولی چون ضریب Δt (ε) می‌شود، فرقی نمی‌کنند با هم.

چون داریم: $f(x)\varepsilon \simeq \underbrace{f(x+\varepsilon)}_{f(x)+\varepsilon f'(x)}\varepsilon = f(x)\varepsilon + \underbrace{\varepsilon^2 f'(x)}_{\simeq 0}$

پس به دو صورت می‌توانیم عمل کنیم: ۱. اینکه حالات را بنویسیم و ببینیم که برابرند ۲. بگوییم چون زمان بینهایت کوچک است طول زمانی H خیلی کم و بینهایت کوچک است.

کل زمان را به این صورت در نظر می‌گیریم



$$U(t,t_0) = \underbrace{U(t,t-\varepsilon)}_{e^{-i/\hbar H(t)\Delta t}}\ \underbrace{U(t-\varepsilon,t-2\varepsilon)}_{e^{-i/\hbar H(t_N)\Delta t}} \cdots \underbrace{U(t_0+\varepsilon,t_0)}_{e^{-i/\hbar H(t_0)\Delta t}}$$

$$U(t,t_0) = e^{-i/\hbar H(t)\Delta t} \times e^{-i/\hbar H(t_N)\Delta t} \times \cdots e^{-i/\hbar H(t_0)\Delta t} \quad ②$$

تا اینجا از شرط جابجاپذیری H ها استفاده نکردیم و فقط بازه t_0 تا t را به N قسمت تقسیم کردیم به بازه‌های Δt. پس تا اینجا برای همه نوع هامیلتونی تابع زمانی درست است (حتی اگر تابع زمان هم نباشند)، حال از فرض جابجاپذیری استفاده می‌کنیم: می‌دانیم رابطه زیر برای هر دو عملگر برقرار است به شرط اینکه جابجاپذیر باشند:

یعنی مثل دو عدد معمولی باشند: $e^A e^B = e^{A+B}$ $\underline{\underline{if}}$ $[A,B]=0$

پس رابطه ② می‌شود:

$$②:\ U(t,t_0) = e^{-i/\hbar \sum_{i=1}^{N} H(t_i)\Delta t}$$

در حد N به سمت بینهایت، چون در Δt ، N وجود دارد پس آن کوچک می‌شود پس بجای Σ باید انتگرال گذاشت:

$$\Rightarrow \boxed{U(t,t_0) = e^{-i/\hbar \int_{t_0}^{t} H(t')dt'}} \quad ③$$

U برای هامیلتونی‌های تابع زمان اما جابجاپذیر در زمانهای مختلف

H → Hamiltonian

K → Kamiltonian

H تابع زمان است و در زمان‌های مختلف جابجا نمی‌شود (حالت سوم)
(کلی‌ترین حالت)

پس با این فرض در حالت قبلی تغییر نداریم یعنی: $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$

از حالت ② به حالت ③ برویم. علتش این است که اکثر جاها نمی‌شوند به صورت زیر می‌شود:

$$\text{if } [A,B] \neq 0 \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B+\cdots}$$

پس مشکل می‌شود.

بنابراین بهتر است از این راه نگذریم و راه دیگری را می‌رویم. این راه مفصل است و عین همین بوضوح را در فصل ۵ هم داریم، پس بین استدلال برای آنجا می‌گذاریم و در اینجا فقط جواب آن را در نظر می‌گیریم:

در این شرایط می‌توان نشان داد که جواب معادله (II) یعنی $\frac{i\hbar \partial U(t,t_0)}{\partial t} = HU(t,t_0)$ می‌شود:

سری Dyson:

$$U(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \, H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n) \qquad ④$$

جای H ها را نمی‌توان عوض کرد چون جابجا نمی‌شوند.

حد هر انتگرال متغیر انتگرال قبلی‌اش است بنابراین انتگرال‌گیری آن پیچیده و مشکل است.

حال باید به این برسیم که وقتی H ها جابجا می‌شوند جواب ④ باید به جواب ③ برسد.

می‌خواهیم نشان دهیم که در حالتی که H ها جابجا می‌شوند، سری Dyson تبدیل به exp می‌شود:

$$U(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \, H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n)$$

سری را باز می‌کنیم:

$$= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt_1 \, H(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \, H(t_1) H(t_2) + \cdots \qquad ⊛$$

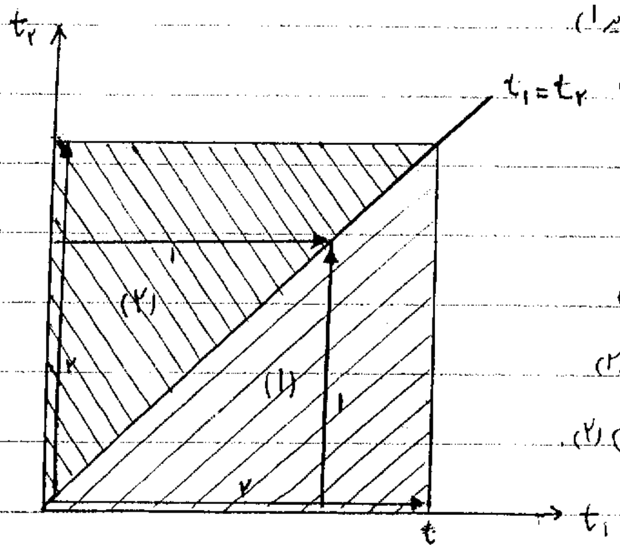
این را با رابطه زیر مقایسه می‌کنیم:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')dt'} \underset{\text{بسط می‌دهیم}}{=} 1-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')dt' + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\left[\int_{t_0}^{t} H(t')dt'\right]^2 + \cdots \quad (**)$$

رابطه (*) و (**) را مقایسه می‌کنیم، جمله اول که یکی است، جمله دوم هم یکی است، اختلاف از جمله سوم بوجود می‌آید یعنی از آن‌جایی که بیش از یک H داریم. حال می‌خواهیم نشان دهیم که در مواقعی H ها جابجا می‌شوند رابطه (*) همان (**) می‌شود.

نیستی از جمله سوم رابطه (*) را با I تعریف می‌کنیم:

$$1)\ I = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\ H(t_1)\,H(t_2)$$



۱) اول روی t_2 اندازه گیری می‌شود از صفر تا t_1 (یعنی مسیر ۱)

بعد حول t_1 از صفر می‌رود تا t (یعنی مسیر ۲)، بنابراین ناحیه‌ای که توسط این انتگرال‌گیری پوشیده می‌شود مثلث پایینی (۱) می‌باشد.

۲) اول t_1 تغییر می‌کند از صفر تا t_2 (یعنی مسیر ۱)

بعد حول t_2 دوباره تغییر می‌کند از صفر تا t (یعنی مسیر ۲)

بنابراین ناحیه انتگرال‌گیری آن برابر می‌شود با مثلث بالایی (۲).

این t_1 و t_2 متغیرهای آزاد هستند و ما می‌توانیم برای آنها هر اسمی بگذاریم.

I را به یک صورت دیگر هم می‌توانیم بنویسیم یعنی اسم t_1 و t_2 را عوض کنیم:

$$2)\ I = \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1\ H(t_2)\,H(t_1)$$

رابطه ۱) و ۲) دارای مقادیر مساوی هستند پس می‌توانیم بنویسیم:

$$I = \frac{1}{2!}\left[\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, H(t_1)\,H(t_2) + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} H(t_2)\,H(t_1)\right] \quad (5)$$

چون اگر ... ۲ تا ... به ۲! نوع ...

حد انتگرال‌گیری مربعی به طول t است

مجموع این دو انتگرال برابر می‌شود با کل صفحه مربع بالا.

بنابراین می‌توانیم این کار را بکنیم، حدود انتگرال‌گیری را مثل مربع بگذاریم ولی با یک دقتی:

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2!}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \; T\left(H(t_1)H(t_2)\right) \qquad (6)$$

time-ordered operator (عملگر منظم‌ساز زمانی)

$$\Rightarrow T\left(H(t_1)H(t_2)\right) \equiv \begin{cases} H(t_1)H(t_2) & \leftarrow t_1>t_2 \\ H(t_2)H(t_1) & \leftarrow t_1<t_2 \end{cases}$$

در اینجا حدهای انتگرال‌ها عوض شده از ۰ تا t شده‌اند ولی با یک قیمتی یعنی به‌جای حاصلضرب H ها در رابطه (5) $T(H(t_1)H(t_2))$ نشسته است. عملگر $T(H(t_1)H(t_2))$ عملگری است که اگر روی دو اپراتور اثر کند آنها را برحسب زمانهای آن اپراتورها مرتب می‌کند، یعنی اول زمان بعد و بعد زمان قبل. یعنی از چپ به راست از زمانهای بعد به زمانهای قبل‌تر می‌رود.

رابطه (6) با (5) یکی است چون در رابطه (6) اول می‌خواهد روی t_2 انتگرال بگیرد از ۰ تا t یعنی t_2 از ۰ می‌رود تا t_1 و بعد از t_1 به t می‌رود پس t_2 در یک جاهایی کوچکتر از t_1 است و یک جاهایی بزرگتر از t_1 است. جاهایی که $t_2<t_1$ است یعنی مثلث پایینی (1) شکل صفحه قبل. یعنی می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_0^t dt_2 = \underbrace{\int_0^{t_1} dt_2}_{\text{در این ناحیه چون } t_2<t_1 \text{ است پس } H(t_1)H(t_2) \text{ می‌شود}} + \underbrace{\int_{t_1}^t dt_2}_{\text{در این ناحیه چون } t_2>t_1 \text{ است پس } H(t_2)H(t_1) \text{ می‌شود}}$$

بنابراین حدهای هر انتگرال را می‌توان بست کرد به شرطی که یک ضریب $\frac{1}{2!}$ یا $\frac{1}{3!}$ ... گذاشت و به‌جای حاصلضرب اپراتورها time ordered operator بنشانیم.

حال اگر H ها جابجا شوند دیگر نیازی به time order op. نیست چون فرقی نمی‌کنند.

$$\text{if } [H(t_1), H(t_2)] = 0 \xrightarrow{(6)} I = \frac{1}{2!}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \, H(t_1)H(t_2)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2!}\int_0^t dt_1 \, H(t_1) \int_0^t dt_2 \, H(t_2)$$ چون جابجا می‌شوند جدا جدا می‌نویسیم

$$= \frac{1}{2!}\left[\int_0^t dt' \, H(t')\right]^2$$ که همان جمله سوم در رابطه (**) است

بنابراین در مواردی که H ها در زمانهای مختلف جابجا می‌شوند، سری Dyson ترکیب پیدا می‌کند به exp:

جلسه دهم : ۱۰ / ۸ / ۷۴

جلسه گذشته در مورد تحول زمانی حالتها در مکانیک کوانتومی صحبت کردیم. یک اپراتور به نام عملگر تحول زمانی تعریف کردیم که وقتی روی حالت در زمان t_0 اثر می‌کرد آن را به حالت در زمان t تبدیل می‌کرد و دیدیم که در این معادله صدق می‌کرد:

$$|\alpha, t_0; t\rangle = U(t,t_0)|\alpha, t_0\rangle$$

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = HU$$

عملگر U در زمانهای کوچک به این شکل است:

$$U(t+dt, t) = 1 - i\Omega dt$$

و در زمانهای محدود بستگی به نوع تابعیت هامیلتونی داشت:

- هامیلتونی مستقل از زمان باشد: $e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}$
- اگر هامیلتونی تابع زمان بود ولی در زمانهای مختلف جابجا شود: $e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')dt'}$
- اگر هامیلتونی تابع زمان بود و در زمانهای مختلف جابجا نشد:

$$U(t,t_0) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H(t_1)\cdots H(t_n)$$

(اثبات در فصلهای بعد)

اگر عملگر U را داشته باشیم و روی حالتها بزنیم، حالتهای سیستم را در زمانهای بعدی می‌دهد، به شرط اینکه هامیلتونی سیستم را داشته باشیم.

معمولاً state را بصورت یک بسط برحسب ویژه حالتهای عملگر هرمیتی می‌شناسیم، بنابراین اگر بخواهیم اثر U را بر $|\alpha, t_0\rangle$ بدانیم باید اثر U را بر $|a'\rangle$ها بدانیم.

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} C_{a'}|a'\rangle$$

معمولاً $|a'\rangle$ها را طوری می‌گیرند که مربوط به اپراتوری باشد که با هامیلتونی جابجا شود:

عملگر A با ویژه کتهای $|a'\rangle$

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

$$[A, H] = 0$$

در این صورت تاثیر U بر $|\alpha\rangle$ بدست می‌آید، چون در این حالت ویژه کتهای $|a'\rangle$، ویژه کتهای هامیلتونی هم هستند یعنی:

$$H|a'\rangle = E_{a'}|a'\rangle$$

در کتابهایی که پیش می‌رویم، همیشه H را مستقل از زمان (نوع اول) انتخاب می‌کنیم:

در نظر می‌گیریم: $t_0 = 0$, $H =$ مستقل از زمان

در این صورت داریم:

$$|\alpha, t\rangle = e^{-i/\hbar\, tH} |\alpha, 0\rangle$$

چون $|a'\rangle$ها ویژه تابع هامیلتونی هم هستند پس اثر هامیلتونی روی آنها را می‌دانیم:

$$|\alpha, t\rangle = \sum_{a'} C_{a'} e^{-i/\hbar\, tH} |a'\rangle = \sum_{a'} C_{a'} e^{-iE_{a'} t/\hbar} |a'\rangle$$

بنابراین ویژه حالت در زمان t بدست آمد.

در حقیقت در زمان صفر ضرایب بسط $C_{a'}$ها بودند در زمان t، ضرایب بسط $C_{a'} e^{-i/\hbar E_{a'} t}$ هستند.

بنابراین در مورد احتمالها هم در زمان $t_0 = 0$ t

به این صورت عمل کرد. $C_{a'} \longrightarrow C_{a'} e^{-i/\hbar E_{a'} t}$

نکته‌ای که جالب است این

است که در مواردی که هامیلتونی $|C_{a'}|^2 \xrightarrow{=} |C_{a'} e^{-i/\hbar E_{a'} t}|^2 = |C_{a'}|^2$

تابع زمان نیست، احتمال پیدا کردن حالتها $|\alpha\rangle$ برحسب هر کدام از حالتهای $|a'\rangle$ در زمانهای بعد عوض نمی‌شود، خود حالت عوض می‌شود و تبدیل به $|\alpha, t\rangle$ شده است، چون ضرایب بسط تفاوت کرده است، اما طوری تغییر می‌کند که احتمال پیدا کردن سیستم در هر ویژه حالت خاص تغییر نکند.

* احتمال پیدا کردن حالت در هر یک از ویژه حالتهای هامیلتونی با گذشت زمان عوض نمی‌شود اما خود حالت تغییر کرده است.

به عنوان یک حالت خاص، $|\alpha, 0\rangle$ را یکی از ویژه حالتهای عملگر هرمیتی مان باشد (یعنی همه ضرایب بسط به جز یکی صفر باشند): $|\alpha, 0\rangle = |a'\rangle$: حالت خاص

$$|\alpha, t\rangle = e^{-i/\hbar\, Ht} |a'\rangle = e^{-i/\hbar\, E_{a'} t} |a'\rangle$$

بنابراین خود حالت هم عوض نمی‌شود و فقط یک فاز تفاوت دارد. با حالت قبل که حالتمان ترکیب حالتها بود، تفاوت است چون در آنجا بعد از گذشت زمان ترکیب حالتها تغییر می‌کرد و ضرایب عوض می‌شد، ولی اگر یکی از حالتها باشد، ترکیب عوض نمی‌شود و همان حالت می‌ماند. بنابراین حالتهای ویژه عملگر A و هامیلتونی این

خصوصیت را دارند که اگر state ما یکی از ویژه‌کتهای عملگر A باشد، آن state با زمان تحول پیدا می‌کند، یک فاز می‌گیرد ولی ترکیب جدیدی از ویژه‌کتها را نمی‌دهد، پس می‌توانیم بگوییم:

- اگر عملگری با H جابجا شود، با این تعبیر ثابت حرکت است.

پس این موضوع یک نوع ثابت حرکت بودن را می‌رساند یعنی می‌گوید تغییر نمی‌کند و چیزی که در اینجا تغییر می‌کند state است.

این موضوع نشان می‌دهد که ویژه‌حالتهای هامیلتونی یک ویژگی اضافی نسبت به حالتهای دیگر دارند، حالتهای دیگر با زمان تحول می‌شوند و ضرایب بسط آنها عوض می‌شود، ولی ویژه‌حالتهای هامیلتونی این طور نیستند.

حال می‌خواهیم ببینیم متوسط عملگرهای دیگر یا مقدار چشمداشتی عملگرهای دیگر با زمان چطور تغییر می‌کنند. فرض کنیم یک عملگر B داریم که با A جابجا نمی‌شود (اگر جابجا شود مسئله آسان می‌شود) $[B,A]\neq 0$

متوسط B را در زمان t می‌خواهیم: $|\alpha,t\rangle = U|\alpha,0\rangle$ $\qquad e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$ هرمیتی است H $\qquad e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$

$$\langle B\rangle(t) = \langle\alpha,t|B|\alpha,t\rangle = \langle\alpha,0|U^{\dagger}BU|\alpha,0\rangle$$

دو حالت را نگاه می‌کنیم:

الف) حالت $|\alpha,0\rangle = |a'\rangle$ (انرژی دارم) $\quad$ عدد هستند

$$\langle B\rangle(t) = \langle\alpha,0|e^{\frac{i}{\hbar}E_{a'}t}\,B\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}t}|\alpha,0\rangle = \langle\alpha,0|B|\alpha,0\rangle$$

$$\langle B\rangle(t) = \langle B\rangle(0)$$

به خاطر این خصوصیات به ویژه‌کتهای هامیلتونی، حالتهای پایا (Stationary state) می‌گویند.

اگر حالتمان یکی از ویژه‌کتهای هامیلتونی باشد، متوسط هم کمیات فیزیکی تغییر نمی‌کند، با اینکه تحول زمانی داریم، یعنی مثلاً مقدار چشمداشتی مختصه، اسپین و... عوض نمی‌شود.

ب) حالت $|\alpha,0\rangle = \sum_{a'} c_{a'}|a'\rangle$ $\qquad$ حالا یک حالت دلخواه باشد:

$$\langle B\rangle(t) = \sum_{a',a''} c^{*}_{a''}\langle a''|e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\,B\,e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,c_{a'}|a'\rangle$$

$$= \sum_{a',a''} c^{*}_{a''}\,c_{a'}\,e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{a'}-E_{a''})t}\,\langle a''|B|a'\rangle$$

به این حالت‌ها، حالتهای غیرپایا (nonstationary state) می‌گویند.

می‌بینیم که اگر سیستم در حالت stationary نباشد، مقدار چشم‌داشتی هم عملگرها یا هم مقادیر مشاهده‌پذیر با زمان تغییر می‌کند و تبدیل به چیزی می‌شود که با مقدار خود در زمان اولیه ارتباطی ندارد و در کنار آن تابعیت زمانی قرار گرفته است.

اما در حالت الف تابعیت زمانی وجود نداشت.

حال این موضوع را در چارچوب یک مثال بازمی‌کنیم:

مثال:

مسئله اسپین در میدان مغناطیسی

همانطور که قبلاً هم گفته بودیم، ممان مغناطیسی حاصل از حرکت مداری یک الکترون به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$\vec{\mu}_L = \frac{e\vec{L}}{2mc} \qquad (e<0)$$

گشتاور مغناطیسی حاصل از اسپین هم شبیه رابطه بالاست با این تفاوت که یک ضریب g بطور اضافه دارد، این ضریب g را ما در اینجا استفاده می‌کنیم ولی در آخر مکانیک کوانتومی ۲ آن را بدست می‌آوریم.

$$\vec{\mu}_S = \frac{eg\vec{S}}{2mc} \quad (g=2) \longrightarrow \vec{\mu}_S = \frac{e\vec{S}}{mc}$$

خود اسپین تناظر کلاسیک ندارد، یعنی در فیزیک کلاسیک عملگری نداریم که مثل اسپین رفتار کند، یعنی چیزی که به حرکت سیستم ربط نداشته باشد. مستقل از اینکه سیستم حرکت داشته باشد و یا نداشته باشد، برای سیستم ممان مغناطیسی ایجاد کند. صرف نظر از اینکه در فیزیک کلاسیک وجود دارد یا ندارد، از الکترومغناطیس می‌دانیم که انرژی پتانسیل یک ممان مغناطیسی در یک میدان مغناطیسی خارجی به صورت مقابل است:

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

در کوانتوم مکانیک هم فرض می‌کنیم همین رابطه برای یک ذره‌ای که حرکت ندارد (انرژی جنبشی ندارد و فقط انرژی پتانسیل دارد)، درست است، یعنی همین رابطه برای هامیلتونی آن درست است:

فرض می‌کنیم: $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

در مکانیک کوانتومی، ما راهی برای نوشتن هامیلتونی نداریم، جز اینکه فرض کنیم هامیلتونی که در مکانیک کلاسیک داریم را اینجا هم برقرار است، مگر اینکه خلافش ثابت شود، یعنی با این فرض به اشتباه برخورد کنیم.

البته در حالتی که حالت کلاسیک ، حالت مبهم باشد ، نمی‌توانیم بطور مستقیم هامیلتونی کلاسیک بنویسیم ، مثلاً :

اگر هامیلتونی کلاسیک به این صورت باشد : $H_{cl} = \alpha x p = \alpha p x$

در حالت کوانتومی نمی‌دانیم کدامیک را بنویسیم چون با هم فرق دارند :

$$H_q = \begin{cases} \alpha\, xp \\ \quad ? \\ \alpha\, px \end{cases}$$

صرف‌نظر از مواقعی که نوشتن از حالت کلاسیک به حالت کوانتومی سر راست نیست ، در بقیه موارد ما عین حالتهای کلاسیک (یعنی موقعی که کمیات مورد نظر عملگر نیستند) می‌گیریم و با آنها کار می‌کنیم و فرض می‌کنیم برای مکانیک کوانتومی برقرار است و با این‌ها جلو می‌رویم ، اگر با آزمایش مطابقت داشت ، می‌گوییم درست است ، در غیر اینصورت آنرا نادرست می‌گیریم. البته این کارها برای مواردی است که شبه کلاسیک داشته باشیم ولی وقتی شبه کلاسیک نداشته باشیم این روش هم جواب نمی‌دهد مثلاً برای برهمکنش های ذرات بنیادی شبه کلاسیک نداریم و برهمکنشی که برای آن شبه کلاسیک داریم برهمکنش الکترومغناطیسی است ولی برای برهمکنش ضعیف و قوی شبه کلاسیکی وجود ندارد.

در این موارد که برای M های از نوع l ابهام وجود ندارد می‌توانیم همان رابطه کلاسیک را بکار ببریم (البته ما در این قسمت چشمان را می‌بندیم و همین رابطه را برای M های از نوع S در نظر می‌گیریم.

$$H = -\vec{M}\cdot\vec{B}$$

اگر B را ثابت می‌گیریم (B یک میدان خارجی ثابت است) در نظر می‌گیریم : $\vec{B} = \hat{k} B$

$$\Longrightarrow H = -M_z B = \left(\frac{-eB}{mc}\right) S_z = \omega S_z \qquad \omega > 0$$

H یک ضریبی از S_z شد بنابراین برای عملگر U هم می‌توانیم بنویسیم :

$$U(t,0) = e^{-i/\hbar\, Ht} = e^{-i/\hbar\, \omega t S_z}$$

کافی است حالتها را برحسب ویژه حالتهای H یا A که با H جابجا می‌شود بگیریم ، در این صورت تاثیر H روی آن ظاهر می‌شود. در اینجا چون عملگر H ، همان S_z است با یک ضریبی ، پس کافی است A را S_z انتخاب کنیم ، در این صورت داریم :

اگر $A \equiv S_z \longrightarrow [A, H] = 0$

پس در یک ذره در میدان مغناطیسی خارجی ، حالتها را باید برحسب ویژه حالتهای S_z یعنی $|\pm\rangle$ ها بسط دهیم ، که در رابطه ویژه مقداری زیر صدق می‌کنند ، پس باید همه چیز را برحسب اینها بسط دهیم تا تحول زمانی حالتها را بتوانیم حساب کنیم.

$$|\pm\rangle \; : \; S_z|\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$$

بنابراین اگر state را در زمان صفر ترکیبی از $|\pm\rangle$ ها بگیریم:

$$|\alpha,0\rangle = \sum C_{a'} |a'\rangle = C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle$$

در زمان t می‌شود:

$$|\alpha,t\rangle = e^{-\frac{i\omega t S_z}{\hbar}} \left(C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle \right)$$

حالت‌ها در زمان t بدست آمد

$$|\alpha,t\rangle = C_+ e^{-\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle + C_- e^{+\frac{i\omega t}{2}} |-\rangle \qquad \text{I}$$

از همین جا معلوم است که اگر حالتمان جمله $|-\rangle$ را نداشته باشد یعنی $C_- = 0$ باشد، در این صورت حالتمان از ابتدا ویژه کت هامیلتونی باشد، در زمان بعد هم جمله $|-\rangle$ را ندارد و به صورت زیر می‌شود:

$$\text{if } C_+ = 1 , C_- = 0 \longrightarrow |\alpha,t\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle$$

یعنی در حالت $|+\rangle$ می‌ماند، که همان چیزی است که قبلاً داشتیم که اگر ذره‌ای از ویژه حالتهای A باشد، با گذشت زمان در همان حالت می‌ماند و فقط یک فاز می‌گیرد. ولی اگر این طور نباشد و هر دو ضرایب غیر صفر باشند، در این صورت غیر صفر هم می‌مانند. مثلاً:

فرض کنیم در زمان صفر سیستم در $|S_x,+\rangle$ باشد یعنی در حقیقت در آزمایش اشترن گرلاخ ما ذره را در $SG\hat{x}$ (میدان مغناطیسی در جهت x) فرستادیم این حالت به $|S_x,+\rangle$ و $|S_x,-\rangle$ تفکیک می‌شود، حال فقط $|S_x,+\rangle$ را گرفتیم و با $|S_x,+\rangle$ کار می‌کنیم، حال یک میدان مغناطیسی در جهت z به آن اعمال می‌کنیم، می‌خواهیم ببینیم این حالت که ذره وارد میدان مغناطیسی شد، تحول زمانی آن را بدست آوریم و باید معادله I را حل کنیم.

$$\text{if } |\alpha,0\rangle = |S_x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle + |-\rangle \right)$$

شکل $|S_x,+\rangle$ در این صورت بود

$$C_+ = C_- = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

در زمان t می‌شود:

$$|\alpha,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}} |-\rangle \right) \qquad \text{II}$$

در زمان صفر حالت سیستم $|S_x,+\rangle$ بود ولی الان در دستگاه $SG\hat{z}$ فرستادیم، حال می‌خواهیم ببینیم احتمال این است که آن در حالت $|S_x,+\rangle$ و $|S_x,-\rangle$ پیدا کنیم.

ابتدا حالت $|S_x,-\rangle$ را حساب می‌کنیم:

$$\langle S_x,-|\alpha,t\rangle = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle +| - \langle -| \right)}^{\text{شکل } |S_x,-\rangle} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}} |-\rangle \right)$$

$$\langle +|+\rangle = 1 \qquad \langle +|-\rangle = 0$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{i\omega t}{2}} - e^{\frac{i\omega t}{2}} \right) = -i \sin\frac{\omega t}{2}$$

بنابراین احتمال پیدا کردن ذره در حالت $|S_x, -\rangle$ وجود دارد و برابر است با:

$$|\langle S_x, - | \alpha, t\rangle|^2 = \sin^2\frac{\omega t}{2}$$

اگر این کار را برای $|S_x, +\rangle$ انجام دهیم، می‌بینیم که می‌شود:

$$|\langle S_x, + | \alpha, t\rangle|^2 = \cos^2\frac{\omega t}{2}$$

این همان نکته‌ای است که قبلاً داشتیم با اندازه‌گیری یک عملگر روی یک حالت، اطلاعات قبلی سیستم از بین می‌رود و ممکن است در حالتی پیدا شود که در اول آن حالت نبود. یعنی احتمال پیدا کردن در زمان‌های بعد در حالت $|S_x, -\rangle$ و $|S_x, +\rangle$ موجود است و بصورت تناوبی است.

متوسط S_x را می‌گیریم:

$$\langle S_x\rangle_t = \langle \alpha, t | S_x | \alpha, t\rangle$$

II

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i\omega t}{2}}\langle + | + e^{-\frac{i\omega t}{2}}\langle - |\right)\overbrace{\frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)}^{\text{عملگر } S_x \text{ در پایه } |\pm\rangle}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|-\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos\omega t$$

این را می‌توان طور دیگری هم بدست آورد، بصورت زیر نوشت و برحسب ویژه‌کت‌های عملگر بسط دهیم، $|a'\rangle$ و $|a''\rangle$ ویژه‌کت‌های A هستند.

$$\langle A\rangle = \langle \alpha | A | \alpha\rangle = \sum_{a', a''}\langle \alpha | a'\rangle\underbrace{\langle a' | A | a''\rangle}_{a'\delta_{a'a''}}\langle a'' | \alpha\rangle$$

$$= \sum_{a'} a'\langle \alpha | a'\rangle\langle a' | \alpha\rangle = \sum_{a'} a' |\langle a' | \alpha\rangle|^2$$

یعنی همان تعریف مقدار متوسط بدست آمد، مقدار متوسط هر عملگری برابر است ویژه‌مقادیر آن عملگر ضرب در احتمال پیدا کردن آن حالت.

بنابراین بدین ترتیب $\langle S_x\rangle$ برابر می‌شود با ویژه‌مقادیر S_x ضرب در ضرایب بسط آن با $|\alpha, t\rangle$ به توان ۲:

$$\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\underbrace{|\langle S_x, + | \alpha, t\rangle|^2}_{\cos^2\frac{\omega t}{2}} - \frac{\hbar}{2}\underbrace{|\langle S_x, - | \alpha, t\rangle|^2}_{\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\frac{\omega t}{2} - \sin^2\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\omega t \qquad \text{همان نتیجه بالا شد}$$

پس با استفاده از ضرایب بسط که قبلاً حساب کرده بودیم، توانستیم که $\langle S_x\rangle$ را حساب کنیم.

پس چون که به این صورت شد:

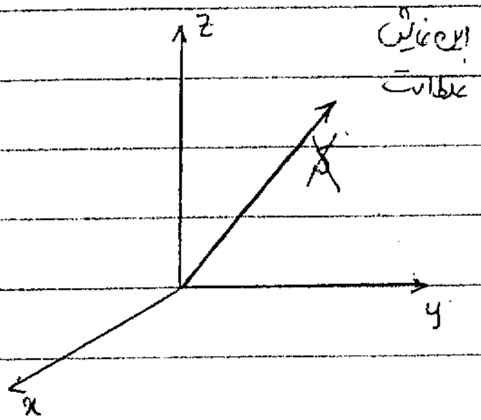
$\langle S_x \rangle_t = \langle \alpha, t | S_x | \alpha, t \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \omega t$

به همین صورت می‌توانیم برای $\langle S_y \rangle_t$ حساب کنیم:

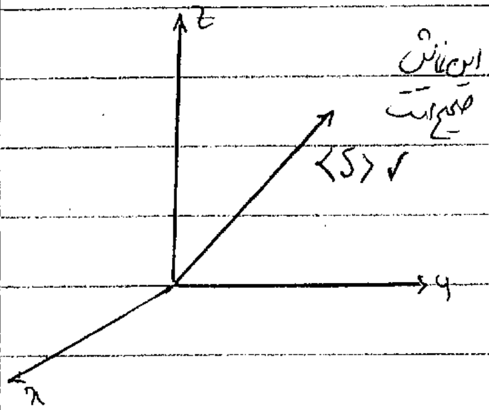
$\langle S_y \rangle_t = \frac{\hbar}{2} \sin \omega t$

و به همین صورت اگر برای $\langle S_z \rangle_t$ حساب کنیم:

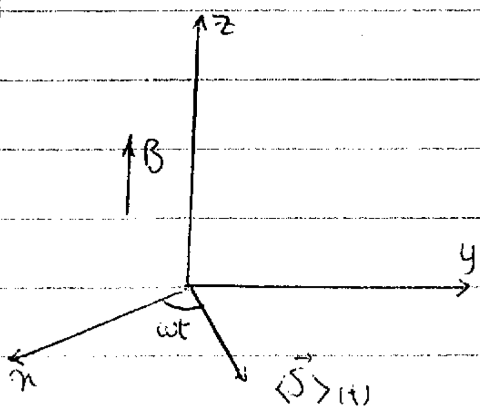
$\langle S_z \rangle = 0$



بردار S را چطور می‌توانیم در فضا نشان دهیم:
بردار S را نمی‌توانیم بصورت یک بردار در فضای فیزیک نشان دهیم، چون این موضوع فیزیکی نیست و چون مولفه‌های مختلف اسپین با هم جابجا نمی‌شوند بنابراین هم‌زمان تعیین کردن آنها ممکن نیست.

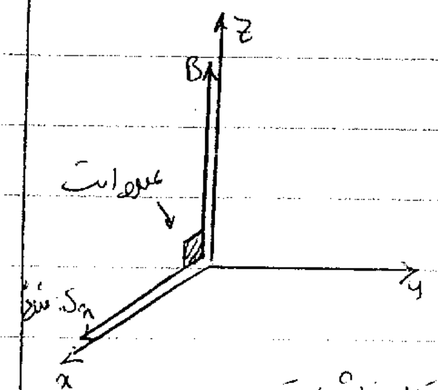


ولی مقدار چشمداشتی S را چون یک عدد است را می‌توان به این صورت نمایش داد و این شکل غلط نیست چون $\langle S \rangle$ برای یک حالت خاص است و مقدار چشمداشتی S_x و S_y و S_z در هر لحظه یک عدد است و بنابراین می‌توان بصورت یک بردار نمایش داد.



پس روابط بالا نشان داد که اگر یک میدان مغناطیسی B در جهت z به ذره اعمال کنیم، بردار مقدار چشمداشتی اسپین به این صورت است که مولفه z ندارد و مولفه x و y آن هم با زاویه ωt در هر لحظه نشان داده می‌شود، یعنی با سرعت ω در هر زمان در حال چرخش است. پس اگر یک اسپین را در حضور میدان مغناطیسی قرار دهیم، مقدار چشمداشتی آن اسپین در جهت عمود بر آن میدان حرکت می‌کند، به این عمل حرکت تقدیمی اسپین می‌گویند (البته در حقیقت حرکت مقدار چشمداشتی اسپین است و اسپین تغییر نمی‌کند)

پس این مثال لب از تحول زمانی یک حالت وقتی که هامیلتونی متناسب با S_z باشد.
با حالت اولیه $|\alpha,0\rangle = |S_x,+\rangle$، بنابراین $\langle S_z\rangle \neq 0$ را داشته باشیم، اما بنابراین حالت اولیه این است که مولفه S_z صفر باشد



یعنی در حالتی که B در جهت Z باشد و $|\alpha,0\rangle = |S_x,+\rangle$ باشد
و عمود بر میدان باشد این بردار همواره عمود بودن خود را حفظ می‌کند.
اما اگر طور دیگری بگیریم که در زمان صفر عمود نباشد در این صورت مولفه Z هم خواهد داشت.
بردار کت بصورت هندسی قابل نمایش نیست اما مقدار چشمداشتی آن قابل نمایش است.
بردار کلاسیک یعنی موجودی که سه مولفه مشخص دارد، کت چنین خصوصیتی ندارد، پس بنابراین به این صورت نشان
داد ولی مقدار چشمداشتی آن این خصوصیت را دارد

$$|\alpha,0\rangle = \sum_{a'} C_{a'}|a'\rangle$$

اگر شکل حالت به این صورت باشد، پیدا کردن این جمع خیلی سخت است

$$|\alpha,t\rangle = \sum_{a'} C_{a'} e^{-iE_{a'}t/\hbar}|a'\rangle$$

و اگر این stateها را بخواهیم به عنوان یک تابع مشخص (مثلاً cos و sin) داشته باشیم
پیدا کردن این جمع کار ساده‌ای نیست. مثلاً اگر ذره در جعبه بگیریم تعداد حالتها ∞ می‌شود با انرژیهای عجیب و غریب!
بنابراین خیلی وقتها در مسائل مکانیک کوانتومی خود این موضوع جزء ابتکارات مسئله است که بسط را طوری دهیم که این
جمع ساده شود و بتوانیم انجام دهیم، یکی از راهها این است که بر حسب ویژه حالتهای انرژی بسط دهیم که البته همیشه عملی
نیست.

سیستم در زمان t_0 — سیستم در زمان t

$$|\alpha,t_0\rangle = |\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha,t\rangle$$

فرض کنید است که کردیم که در آغاز سیستم در حالت اولیه $|S_x,+\rangle$ بود و در زمان t چیز دیگری شد. حال احتمال
پیدا کردن سیستم در حالت اولیه خودش را می‌خواهیم پیدا کنیم.

دامنه احتمال یافتن سیستم در حالت اولیه خود = دامنه همبستگی Correlation amplitude
(قبل از به توان ۲ رساندن) این معرف این است که سیستم چه مقدار در حالت اولیه خودش مانده است و چقدر رد پای
تاریخ خودش را حفظ کرده است و با C نشان می‌دهیم:

$$C(t) = \langle\alpha|\alpha,t\rangle$$

- حالت اول وقتی است که حتماً $|\alpha\rangle$ ویژه حالت انرژی باشد:

الف) $|\alpha\rangle = |a'\rangle$

$$|\alpha, t\rangle = e^{-i/\hbar E_{a'} t}|a'\rangle$$

$$C(t) = \langle a'| e^{-i/\hbar E_{a'} t}|a'\rangle = e^{i/\hbar E_{a'} t}\langle a'|a'\rangle$$

$C(t) = e^{-i/\hbar E_{a'} t} \xrightarrow{\text{احتمال}} |C(t)|^2 = 1$ (I) یعنی یک ثابتی است یعنی اگر سیستم خودش ویژه حالت انرژی باشد احتمال ماندنش در حالت اولیه ۱۰۰٪ است؛ چون حالت آن عوض نمی‌شود بنابراین دامنه همبستگی آن یک پایا است.

- حالت دیگر این است که ویژه حالت‌ها ساکن نباشد:

ب) $|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'}|a'\rangle$

$$|\alpha, t\rangle = \sum_{a'} c_{a'} e^{-i/\hbar E_{a'} t}|a'\rangle$$

$$C(t) = \sum_{a', a''} c^*_{a'} \underbrace{\langle a'|a''\rangle}_{\delta_{a'a''}} e^{-i/\hbar E_{a''} t} c_{a''}$$

یکی از جمع‌ها را برمی‌دارد

$= \sum_{a'} |c_{a'}|^2 e^{-i/\hbar E_{a'} t}$ (II) می‌بینیم که احتمال پیدا کردن سیستم در حالت اولیه خودش در حالت‌های non stationary همیشه ثابت نیست و با زمان تغییر می‌کند یعنی بطور نوسانی احتمال پیدا کردن در حالت اولیه خودش را زیاد و کم می‌کند، مثل مثال قبلی است که در آنجا برابر شده بود با $\cos^2$.

می‌خواهیم از این رابطه یک برداشت کنیم و از این برداشت استفاده کنیم و می‌خواهیم بگوییم:

در زمان‌های کوچک $C(t) \sim 1$ و در زمان‌های بزرگتر این تابع صفر می‌شود یعنی احتمال پیدا کردن سیستم در حالت اولیه خودش بعد از زمان طولانی صفر می‌شود یعنی احتمال پیدا کردن در حالت اولیه وجود ندارد، یعنی اگر بعد از گذشت یک زمانی احتمال پیدا کردن سیستم در حالت اولیه‌اش صفر می‌شود و خصوصیت نوسانی بودن باعث می‌شود که این دامنه همبستگی صفر شود.

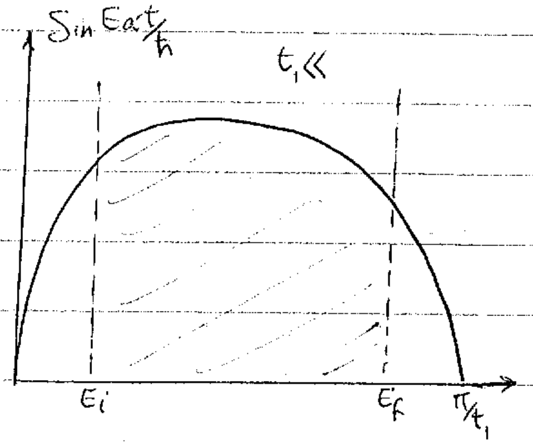
$C(t) = \sum |c_{a'}|^2 e^{-i/\hbar E_{a'} t}$

این رابطه یادآور است با $\cos$:

قسمت حقیقی را در نظر بگیریم $\Rightarrow \sum |c_{a'}|^2 \sin \frac{E_{a'} t}{\hbar}$ یک عدد مثبت است

یک عدد مثبت داریم که ضرب یک عدد [illegible] که گاهی [illegible] مثبت و گاهی منفی باشد و در کل جمع هم [illegible]

می‌خواهیم ببینیم این جمع به چه چیزی می‌تواند باشد و ادعا می‌کنیم که اگر در زمان‌ها کوچک باشد، این جمع از مرتبه ۱ است و اگر زمان بزرگ باشد این جمع صفر است.



این منحنی بستگی به طیف منحنی با یک حداقل انرژی دارد

یعنی مقادیر انرژی از یک جایی شروع می‌شود و یک جا تمام می‌شود (E_i, E_f)

در زمان صفر که صفر است و در جایی که $Ea't/\hbar$ برابر π شود هم صفر می‌شود

$t=0 \longrightarrow \sin Ea't/\hbar = 0$

$$\sin Ea't/\hbar = 0 \longrightarrow Ea't/\hbar = \pi \Rightarrow \frac{Ea'}{\hbar} = \pi/t$$

یعنی در مقادیر انرژی صفر می‌شود که نسبت بالا برقرار باشد.

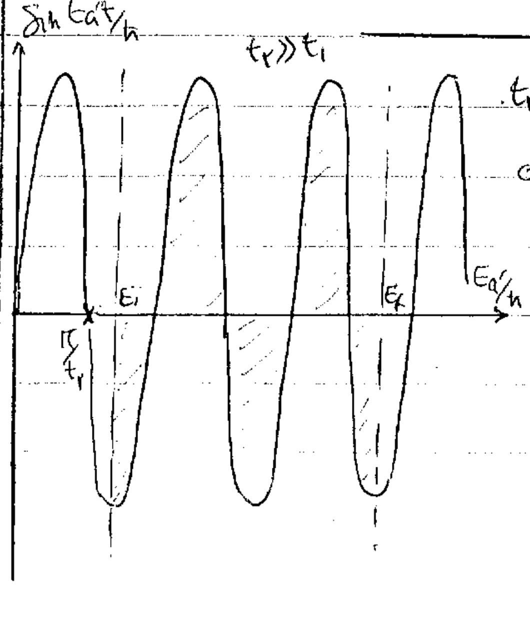
حال این زمانی که داریم محاسبه را انجام می‌دهیم را یک بار بزرگ می‌گیریم و یک بار کوچک:

زمان کوچک t_1 $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ $\pi/t \gg 1$

یعنی با تنظیم t می‌توان کاری کرد که π/t_1 بیفتد خارج طیف ما، در این صورت شکل تابع به صورت بالا است. در آن صورت مقادیری که ما داریم در محدوده E_i, E_f است، که همه $\sin$ ها مثبت است و مقدار زیادی از آن هم در حدود یک هستند بنابراین:

$$\sum_{a'} |C_{a'}|^2 \underbrace{\sin \frac{Ea't}{\hbar}}_{\text{مثبت}} \simeq \sum_{a'} |C_{a'}|^2 \sim 1$$

بنابراین در زمان‌های اولیه کل سیستم، دامنه همبستگی در حدود یک است.



حال می‌خواهیم ببینیم با گذشت زمان چه اتفاقی می‌افتد مثلاً در t_2. نقطه‌ای که صفر می‌شود برابر π/t_2 باشد و چون t_2 بزرگ است پس این نقطه خیلی کوچک است، بنابراین شکل به صورت مقابل می‌شود. البته E_i و E_f درست کشیده است چون است زمان ما مثبت و محدوده جمع کردن طیف انرژی‌ها است. این بار طوری شده است که π/t_2 قبل از بازه افتاده است. چون t_2 بزرگ شده و π/t_2 کوچک می‌شود. بنابراین همان موج سینوسی را داریم ولی با طول موج خیلی کمتر. دوباره ناحیه بین E_i و E_f را نگاه می‌کنیم.

$t_2 \gg t_1$: زمان بزرگ $\longrightarrow \frac{\hbar}{t_2} \ll 1$

با این تنظیم $\frac{\hbar}{t_2}$ جزئی از طیف را فرا می‌گیرد.

در ناحیه $E_1 < E < E_2$، تقریباً به همان اندازه که sin های مثبت داریم، sin های منفی هم داریم چون نوسان می‌کند یعنی اگر یکی بالا برود، یکی هم پایین می‌رود. وتقریباً با هم برابرند.

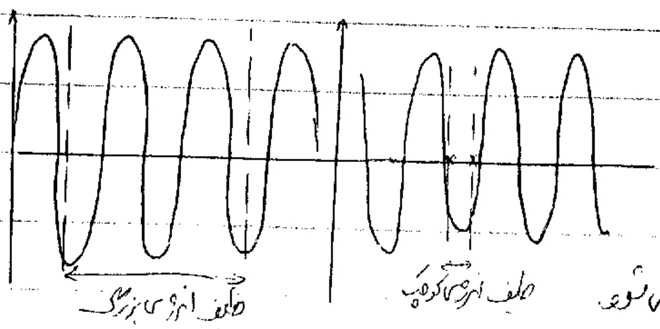
$$\sum |C_{a'}|^2 \sin \frac{E_{a'}t}{\hbar} \sim 0$$

$\pm \Leftarrow$ دارای مثبت و منفی باشد

نحوه مثبت و منفی شدن $\sin \frac{E_{a'}t}{\hbar}$ به این صورت است که به ازای یک a' مثبت است ولی یک مقدار که a' را عوض کنیم، منفی می‌شود. در این مدت تغییر a'، $C_{a'}$ تغییر زیادی نمی‌کند چون طیف یک مقدار جلو رفته ولی چون نوسان شدید است، همان مقدار را طی کرده است. بنابراین تقریباً به ازای هر $C_{a'}$ مثبتی در اطراف آن یک $C_{a'}$ با ضریب منفی هم وجود دارد که چون $C_{a'}$ها با هم خیلی فرق ندارند، پس این کمیت مثبت با کمیت منفی قبلی تقریباً حذف می‌شود و تقریباً جمع با برابر صفر می‌شود. بنابراین در سیستمهای non stationary (بجز در حالتهای خیلی خاص) بطور معمول نوسانات شدید باعث می‌شود که ضریب دامنه همبستگی به سمت صفر میل کند.

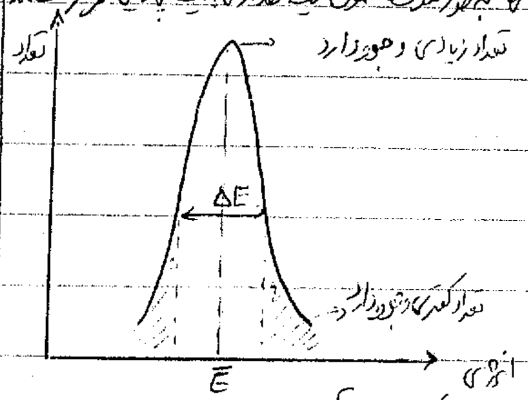
۲) سؤال که مطرح شد:

ما از اول حالت خاصی را انتخاب کردیم و بعد آن حالت خاص در زمانهای بعد به حالتهای دیگری تبدیل می‌شوند یعنی یک دسته C_a خاص گرفتیم که می‌توانند هم وزن باشند یا نباشند. فرض می‌کنیم حالتها کاملاً هم وزن باشند، در زمانهای بعد هم وزن بودن به هم می‌خورد، چون هر کدام از آنها ضریبی می‌گیرند که بستگی به انرژی آنها دارد، بنابراین چون انرژی‌های متفاوتی دارند، هم وزن بودن به سرعت به هم می‌خورد. اگر از ابتدا حالت اولیه و بقیه حالتها تفاوتی نداشته باشند، ما انتظار داریم تفاوتی نباشد ولی ما خودمان را از اول به یک حالت مشخص مقید کردیم و ضرورتی ندارد که این حالت با گذشت زمان مثل بقیه حالتها باشد.



البته باید توجه کنیم که این حرفها برای طیف انرژی بزرگ درست است (یعنی به اندازه کافی پهن باشد) اگر طیف انرژی کوچک باشد، هر چقدر که نوسان هم داشته باشیم، در این ناحیه علامت آن عوض نمی‌شود.

به جای این بحث طیف انرژی، می‌توانیم با یک زبان دیگر به این نتایج برسیم
وقتی صحبت از طیف انرژی می‌کنیم یعنی صحبت از یک مجموعه آماری می‌کنیم، وقتی یک آنسامبل (مجموعه آماری) داشته باشیم، ذرات در این مجموعه طیف دارند یعنی انرژی‌های مختلفی در حقیقت برای خودشان می‌گیرند، ولی حول یک انرژی متوسطی دارای پیک هستند. مثلاً در مورد ذرات داخل اتاق این طور است که همه ذرات هم انرژی نیستند و یک طیفی از انرژی‌ها وجود دارد و توزیع آنها به صورت ماکسول است ولی همه آنها به طور متوسط حول یک مقدار با یک پهنایی متمرکز هستند



به عبارت دیگر وقتی توزیع انرژی داریم به این معنا است که حول یک $\bar{E}$ در پهنای ΔE نگاه کنیم، اگر تعداد ذرات را رسم کنیم تعداد زیادی از ذرات در $\bar{E}$ هستند و همین طور کم می‌شود تا جایی که از یک جایی به بعد (بعد از ΔE) تعداد کمی از ذرات وجود دارند. پس توزیع ذرات در یک سیستم آماری به این صورت است که یک مقدار متوسط داریم و یک واریانس حول این مقدار متوسط داریم که ذرات آنجا وجود دارند.

بنابراین طیف را به این صورت توصیف می‌کنیم:

حد طیف پیوسته را در نظر می‌گیریم:

یعنی به جای $\sum$ از انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\sum_a \longrightarrow \int \underbrace{dE\,\rho(E)}$$

تعداد حالتهایی که دارای انرژی بین E و $E+dE$ هستند

به جای ضرایب بسط C_a ای که داشتیم در حد طیف پیوسته به صورت یک تابع از انرژی در نظر می‌گیریم:

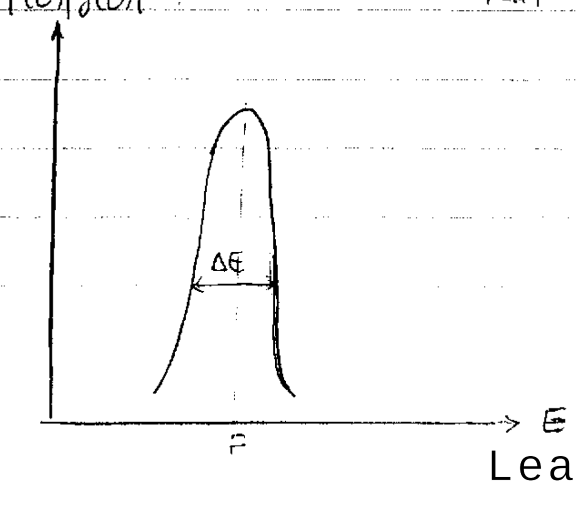
$$C_a \longrightarrow g(E)$$

در این صورت $C(t)$ تبدیل می‌شود به:

$$\text{(II)}: \quad C(t)=\sum_a |C_a|^2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t}$$

$$C(t) \longrightarrow \int dE\,\rho(E)\,\underbrace{|g(E)|^2}_{|C_a|^2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

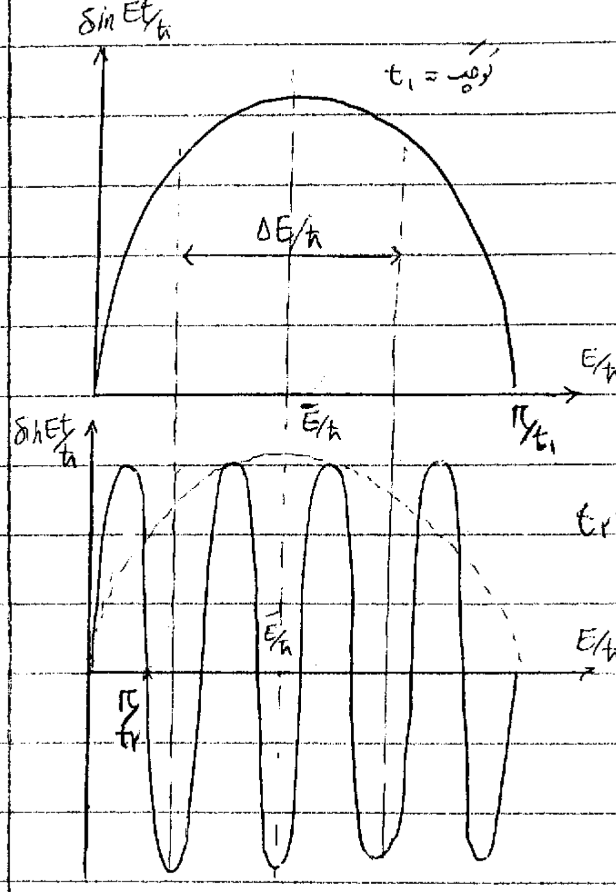
در مورد طیف پیوسته اینها نقش تابع را بازی می‌کنند، که در حقیقت کمیت $\rho(E)|g(E)|^2$ برابر است با احتمال تعداد حالتهایی که دارای انرژی E هستند، که بر حسب انرژی به این شکل می‌باشد.



حال همان بحثی که داشتیم را دوباره با این شرایط بررسی می‌کنیم یعنی می‌خواهیم زمان‌های مختلف را بررسی کنیم.

حال دوباره انتگرال مورد نظر که بر حسب E آمده است را در زمان‌های مختلف به آن نگاه می‌کنیم.

تفاوتی که با حالت قبل دارد این است که با تکیف طیف را مشخص کرده‌ایم، در حالت قبل گفتیم که در انرژی‌های مختلف چند حالت داریم.



ولی در اینجا فرض می‌کنیم که در انرژی‌های مختلف یک تعداد حالت به این صورت داریم، یعنی در اطراف $\bar{E}$ تعداد زیادی حالت داریم و تا پهنای ΔE هم تقریباً همین طور است. حال همان انتگرال قبل را دوباره تکرار می‌کنیم باز قسمت حقیقی جمله مورد نظر یعنی $\sin Et/\hbar$ را در نظر می‌گیریم و به صورت شکل پایین در می‌آید.

فرق این دفعه با حالت قبل این است که $\bar{E}$ $t_2 \gg t_1$ و ΔE داریم. این دفعه طیف انرژی به صورت ΔE است یعنی E_1 و E_2 در اطراف $\bar{E}$ هستند و فاصله‌شان برابر ΔE است.

در زمان‌های بزرگ طیف عوض نمی‌شود ولی نمودار به این صورت است.

دوباره حذف حالت‌ها را مانند قبل داریم، یعنی دوباره یک سری جملات مثبت و جملات منفی برابر به وجود می‌آیند که با هم حذف می‌شوند.

سؤال این است که تا چه زمانی، $C(t)$ از مرتبه 1 باقی می‌ماند؟ یعنی باید تا چه زمانی صبر کنیم که $C(t)$ در حدود یک باشد و دیگر این حذف نکند و این اتفاق نمی‌افتد و به سمت صفر میل می‌کند. وقتی که $\frac{\Delta E}{\hbar}$ کوچکتر از پهنای π/t باشد، حذف رخ نمی‌دهد ولی اگر بزرگتر شد، حذف رخ می‌دهد.

$\frac{\Delta E}{\hbar} \lesssim \frac{1}{t}$ (π/t که مرتبه بزرگی)   یا $\frac{\Delta E}{\hbar} \sim \frac{1}{t}$ هم مرتبه باشند $\Rightarrow \boxed{t \cdot \Delta E \sim \hbar}$

مدت این حدود $C(t)$ در حدود یک باقی می‌ماند

در حقیقت رابطه عدم قطعیت بدست می آید، تعبیر عدم قطعیت این است که اگر بخواهیم برای یک سیستم ذرات که پهنای انرژی ΔE دارد یعنی به اندازه ΔE انرژی آن تغییر می کند، زمان هایی را نگاه کنیم که در آن زمانها سیستم در حالت اولیه تقریبا می ماند، آن زمان و آن ΔE دارای چنین رابطه ای هستند، در حقیقت وقتی زمان و انرژی در رابطه عدم قطعیت صدق کند، دامنه حالت تقریباً یک می ماند (از مرتبه یک). به طور دیگری هم می توانیم بگوییم که برای یک سیستم که با یک پهنایی در یک انرژی است، تا یک زمانی فرصت داریم سیستم را در همان حالت گیر بیاوریم و بعد از آن به حالت دیگری می رود. مثلاً سیستم در یک تراز اتمی (غیر پایه) است، سؤال این است که تا کی می توانیم در آن حالت آن را گیر بیاوریم

جواب این است که تا زمان $\hbar/\Delta E$ وقت داریم ([illegible])

$$t \cdot \Delta E \sim \hbar$$

این رابطه را به این صورت هم می توان بدست آورد:

$$\Delta P \, \Delta x \sim \hbar$$

$$E = P^2/2m \quad \to \quad \Delta E = \frac{P \Delta P}{m} \qquad , \qquad x = \frac{P}{m} t \quad \to \quad \Delta x = \frac{P}{m} \Delta t$$

$$\times \frac{P}{m} \times \frac{m}{P}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{P \Delta P}{m}}_{\Delta E} \, \underbrace{\frac{m}{P} \Delta x}_{\Delta t} \sim \hbar$$

یعنی می توان از روی عدم قطعیت مکان و تکانه هم می توان این رابطه را بدست آورد ولی مشکل این است که ماهیتاً عدم قطعیت P و x با E و t فرق دارد. تعبیر $\Delta p \Delta x \sim \hbar$ این است که این دو (P و x) را همزمان نمی توان مشخص کرد، هر چه دقت را در یکی افزایش دهیم، دقت اندازه گیری دیگری کاهش می یابد، چون این دو، دو کمیت ناجابجاپذیر هستند. ولی E و t اصلاً این طور نیستند و اصلاً t عملگر نیست که بتوان در مورد جابجایی آن صحبت کرد و این دو کاملاً مستقل از هم هستند. اصولاً رابطه عدم قطعیت زمان و انرژی پیچیده است چون زمان در کوانتوم مکانیک عملگر ندارد، بنابراین Δt تعبیر عدم قطعیت ندارد و در ضمن تعبیری واحدی هم ندارد.

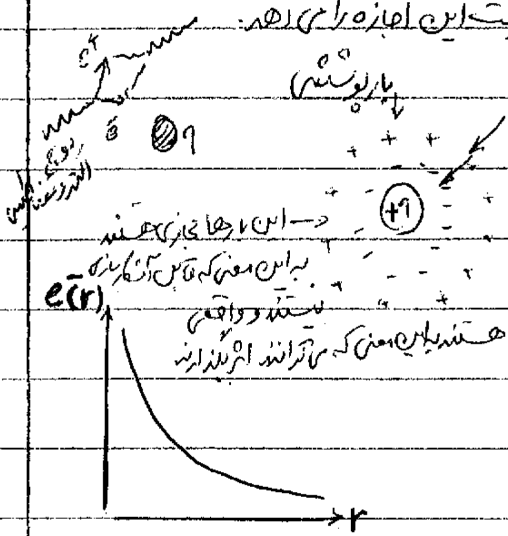
یک تعبیر این است که احتمال ماندن در حالت اولیه (در اطراف پهنای انرژی اولیه) تا زمانی است که رابطه عدم قطعیت صدق کند.

تعبیر دیگر این است که رابطه عدم قطعیت به نوعی میزان تخلف از اصل بقای انرژی را می دهد، یعنی در فیزیک کلاسیک انرژی ثابت است، اما در کوانتوم ثابت نیست و می تواند اصل بقای انرژی نقض شود ولی در مدت کمی می تواند این اتفاق بیفتد که برابر است با Δt.

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$$

در زمان Δt ما اجازه داریم اصل بقای انرژی را نقض کنیم.

اگر این تعبیر درست باشد، می‌تواند نتایج مهمی به ما بدهد و در فیزیک تأثیر داشته باشد.
مثلاً ممکن است از کنار یک بار یک موج الکترومغناطیسی رد شود، وقتی به بار نزدیک می‌شود تبدیل به یک الکترون و پوزیترون شود با انرژی‌ای که خیلی بزرگتر از انرژی اولیه است البته در یک زمان کوتاهی، ولی در همین زمان کوتاه یک الکترون و پوزیترون با انرژی بالا تولید می‌کند و عدم قطعیت این اجازه را می‌دهد:



اگر این بار مثبت باشد این اتفاق یعنی تولید زوج الکترون پوزیترون می‌تواند طوری باشد که الکترون بیشتر سمت بار مثبت بیایند. بنابراین یک ذرهٔ بار مثبت در خلاء در حقیقت مقدار زیادی از این الکترون و پوزیترون‌ها مجازی (نه واقعی) در اطراف خود دارد و این باعث می‌شود که در خلاء یک نوع پلاریزاسیون ایجاد شود و می‌دانیم که پلاریزاسیون باعث می‌شود که بار کم دیده شود یعنی بار قطبی، بار را می‌پوشاند و البته هر چه بیشتر نزدیک شویم، این بار ذره خاصیتش را از دست می‌دهد و بنابراین مثلاً بار الکترون تابعی از فاصله می‌شود (یعنی باید ببینیم بار الکترون در چه فاصله‌ای $1.6\times10^{-19}C$ است) و وقتی فاصله کمتر شود ممکن است بار آن بیشتر شود، که وقتی با آزمایش بررسی کنیم می‌بینیم این حرف‌ها درست است!
(پاک کند)

جلسه یازدهم: ۸۴/۸/۸

تصویر هایزنبرگ:
جلسه گذشته در مورد تحول زمانی صحبت کردیم و گفتیم که عملگر U قادر است که حالتها را در زمان منتقل کند و خود U از معادله‌ای به نام معادله شرودینگر تبعیت می‌کند.

$$\left.\begin{aligned} & U(t,t_0) \\ & |\alpha,t_0,t\rangle = U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle \\ & i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U = HU \\ & i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t\rangle = H|\alpha,t\rangle \end{aligned}\right\} \text{تصویر شرودینگر}$$

در این چارچوبی که صحبت کردیم، حالتها با زمان متحول می‌شوند ولی عملگرها با زمان تغییر نمی‌کنند. یعنی مثلاً یک عملگری مثل x همیشه در فضای مکان x می‌ماند و عملگری مثل p در فضای مکان همیشه به صورت $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

باقی می‌ماند، با اینکه مستقیم ذره عوض می‌شود ولی نمایش عملگر آن
عوض نمی‌شود، یعنی ممکن است ذره سرعت داشته باشد بنابراین

$$\begin{cases} x \\ \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \end{cases}$$

مقدار چشمداشتی مستقیم تغییر می‌کند یا بطور مثال مکان ذره تغییر می‌کند ولی عملگر x همواره x می‌ماند، اما حالتها با زمان متحول می‌شوند.

حالتها با زمان متحول می‌شوند

این یک نوع برخورد با تحول زمانی است، به این برخورد یا مسائل گونه‌ای را اصطلاحاً تصویر شرودینگر می‌گوییم.

تصویر شرودینگر
$$\begin{cases} |\alpha\rangle \longrightarrow U|\alpha\rangle \\ X \longrightarrow X \end{cases}$$

عملگرها تغییر نمی‌کنند

نوع دیگری برخورد با تحول زمانی و یا تغییر زمانی وجود دارد که می‌خواهیم آن را بررسی کنیم، برای اینکه این نوع برخورد را بررسی کنیم، مقدار چشمداشتی یا عنصر ماتریسی عملگر X را بین α و β را در نظر بگیریم، می‌خواهیم ببینیم تحول آن به چه صورت است در چارچوب تصویر شرودینگر:

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{در چارچوب تصویر شرودینگر}} \underbrace{\langle\beta|U^{\dagger}}_{\text{قبلی } \langle\beta|}X\underbrace{U|\alpha\rangle}_{\text{قبلی } |\alpha\rangle}$$

می‌توان فرض کرد، حالتهای $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ تغییر نکرده‌اند، ولی عملگر X به عملگر $X' = U^{\dagger}XU$ تبدیل شده است اگر این تغییر را از معادله پیاده کنیم، باز شکیم آن فرقی ندارد.

تصویر هایزنبرگ
$$\begin{cases} |\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle & \text{حالتها عوض نمی‌شوند} \\ X \longrightarrow X' = U^{\dagger}XU & \text{عملگرها تغییر می‌کنند} \end{cases}$$

بنابراین در تصویر الحمل داریم:

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{در چارچوب تصویر هایزنبرگ}} \langle\beta|X'|\alpha\rangle = \langle\beta|U^{\dagger}XU|\alpha\rangle \quad : \text{شرودینگر}$$

بنابراین از نظر عناصر ماتریسی و مقادیر چشمداشتی یا هر کمیت دیگری که به موضوع اندازه‌پذیری مربوط می‌شود اصلاً تغییری ایجاد نمی‌کند ولی نگاه ما به مسائل فیزیک عوض می‌کند، به این تصویر، تصویر هایزنبرگ می‌گوییم.

در تصویر هایزنبرگ، حالتها تغییر نمی‌کنند ولی عملگرها متحول می‌شوند.

اهمیت تصویر هایزنبرگ این است که انتظار داریم تصویر هایزنبرگ به فیزیک کلاسیک نزدیکی بیشتری داشته باشد، چون در فیزیک کلاسیک ما حالت نداریم و چیزی که داریم کمیتهای فیزیکی است که با زمان عوض می‌شوند مثل مکان ذره است، مستقیم ذره است و... در حالت کلاسیک ما $r(t)$ و $P(t)$ داریم:

در تصویر شرودینگر این اتفاق نمی‌افتد، چون ما باید کمیتهای آن را عملگر کنیم — در حالت کلاسیک: $\vec{r}(t)$ ، $\vec{p}(t)$

که در این تصویر عملگرها با زمان تغییر نمی‌کنند، بنابراین این چنین چیزهایی نداریم!

در چارچوب تصویر هایزنبرگ حالتها با زمان تغییر ندارند ولی عملگرها متحول می شوند و چون هر عملگری متناظر با یک کمیت فیزیکی است، بنابراین ارتباط این فرمول بندی با فیزیک کلاسیک احتمالاً خیلی نزدیک تر است تا تصویر شرودینگر

مثال:

U را عملگر انتقال بینهایت کوچک می گیریم و X را عملگر مکان می گیریم (فضایی)

$$\begin{cases} U = T(d\vec{x}') = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot d\vec{x}' \\ X = x \end{cases}$$

با هر دو روش (تصویر) تغییر $\langle x \rangle = \langle \alpha | X | \alpha \rangle$ بر اثر انتقال بدست آوریم، می خواهیم هر دو را بدست آوریم

البته با توجه به اینکه گفتیم می دانیم که تغییر نمی کند. یعنی برای تصویر هایزنبرگ $U^{+}xU$ را حساب کنیم بین حالت $|\alpha\rangle$ قرار دهیم و از طرفی برای تصویر شرودینگر $U|\alpha\rangle$ را حساب کنیم و دو طرف x بگذاریم.

<u>تصویر شرودینگر</u>: $|\alpha\rangle \longrightarrow U|\alpha\rangle = (1 - \frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot d\vec{x}')|\alpha\rangle$

$x \longrightarrow x$ عملگر x تغییر نمی کند

$\langle x \rangle = \langle \alpha | x | \alpha \rangle \longrightarrow \langle \alpha | T^{+} x T | \alpha \rangle$ این دو تا را باید حساب کنیم

عملگر T به این صورت روی state تغییر ایجاد می کند: $T(d\vec{x}')|x''\rangle = |x'' + dx'\rangle$ (I)

اگر بخواهیم تاثیر T را روی α بدانیم، باید α را بر حسب حالتهایی که تاثیر T را روی آن می دانیم نمایش دهیم، پس باید α را بر حسب حالتهای مکان بسط دهیم:

$$|\alpha\rangle = \int d^3x'' \, |x''\rangle\langle x''|\alpha\rangle$$

$$T(d\vec{x}')|\alpha\rangle = \int d^3x'' \, |x'' + dx'\rangle\langle x''|\alpha\rangle \quad \text{(II)}$$

چون عملگر خطی است روی ضرایب اثر نمی کند و فقط روی کت ها اثر می کند و به صورت رابطه (I) اثر می کند.

حال عملگر x باید روی نتیجه قبل اثر کند:

$$x T(d\vec{x}')|\alpha\rangle = \int d^3x'' \, \underbrace{(x|x'' + dx'\rangle)}_{(x'' + dx')|x'' + dx'\rangle} \langle x''|\alpha\rangle \quad \text{(III)}$$

از طرف دیگر باید $\langle \alpha | T^{+}$ را هم حساب کنیم که dual رابطه بالا می شود (II):

$$\langle \alpha | T^{+} = \int d^3y \, \langle \alpha | y \rangle \langle y + dx' | \quad \text{(IV)}$$

برای اینکه متغیرهای انتگرال تداخل نکنند به جای x''، y می گذاریم؛ رابطه (IV) را در (III) ضرب می کنیم:

$$\langle \alpha | T^{+} x T | \alpha \rangle = \int d^3x'' \, d^3y \, (x'' + dx') \langle \alpha | y \rangle \langle x'' | \alpha \rangle \underbrace{\langle y + dx' | x'' + dx' \rangle}_{\delta(y + dx' - x'' - dx')}$$

چون حاصلضرب حالتهای ویژه یک عملگر هرمیتی است تابع δ می دهد. ←

* در جمع ها و انتگرالها وقتی در هم ضرب می شوند باید تابع های آنها یک اسم باشند.

بخاطر تابع دلتا می توان انتگرال دومی را انجام داد $\langle \alpha | x' \rangle$

$$\langle \alpha | T^{+} x T | \alpha \rangle = \int d^3x' \, (x' + dx') \, \langle \alpha | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle$$

چون تابع مکان نیست می توانیم بیرون انتگرال بنویسیم

$$= \langle \alpha | \left\{ \int d^3x' \, x' | x' \rangle \langle x' | \right\} | \alpha \rangle + \langle \alpha | dx' \underbrace{\left\{ \int d^3x' | x' \rangle \langle x' | \right\}}_{1} | \alpha \rangle$$

$x' | x' \rangle \leftarrow \hat{x} | x' \rangle$ به جای آن می توانیم بنویسیم: عملگر — این چون تابع نیست می توان از انتگرال بیرون آورد

$$x \underbrace{\int d^3x' | x' \rangle \langle x' |}_{1}$$

$$= \underbrace{\langle \alpha | x | \alpha \rangle}_{\langle x \rangle} + \underbrace{\langle \alpha | dx' | \alpha \rangle}_{\langle dx' \rangle}$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle \longrightarrow \langle x \rangle + \langle dx' \rangle$$ در تصویر شرودینگر $\leftarrow$

حالا همین محاسبه را در تصویر هایزنبرگ انجام می دهیم:

تصویر هایزنبرگ: $|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle$ حالتها عوض نمی شوند، عملگر x تبدیل به $T^{+}xT$ می شود.

$$x \longrightarrow T^{+} x T = (1 + \tfrac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot d\vec{x}') \, x \, (1 - \tfrac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot d\vec{x}')$$ چون انتقال بینهایت کوچک است

$$= x + \tfrac{i}{\hbar} \left\{ \vec{p} \cdot d\vec{x}' \, x - x \, \vec{p} \cdot d\vec{x}' \right\} + O(d^2)$$

$$T^{+} x T = x + \tfrac{i}{\hbar} \left[\vec{p} \cdot d\vec{x}' , x \right] \quad \text{(I)}$$

در فصل یک رابطه ای ثابت کردیم که بصورت زیر است:

داشتیم $\left[x , \underbrace{T(dx')}_{1 - \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot d\vec{x}'} \right] = dx'$ رابطه (1.6.25)

$$\tfrac{i}{\hbar} \left[p \cdot dx' , x \right] = dx' \quad \text{(II)}$$

$$\text{(II)}, \text{(I)} \Rightarrow T^{+} x T = x + dx'$$

پس مقدار چشمداشتی بصورت زیر می شود (زیرا $|\alpha\rangle$ که عوض نمی شود و x هم تبدیل به $T^{+}xT$ می شود که برابر با $x + dx'$ است)

$$\langle \alpha | x | \alpha \rangle \longrightarrow \langle \alpha | (x + dx') | \alpha \rangle = \langle x \rangle + \langle dx' \rangle$$

$$\langle x \rangle \longrightarrow \langle x \rangle + \langle dx' \rangle$$ در تصویر هایزنبرگ $\leftarrow$

در تصویر هایزنبرگ گفتیم:

$$X' = U^\dagger X U$$

اگر تحول زمانی را برای هایزنبرگ مستقل از زمان بگیریم:

$$\text{if } U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

برای X از A استفاده می‌کنیم: A را $A^{(s)}$ می‌گیریم چون در تصویر شرودینگر عملگر تغییر نمی‌کند.

چون U ها تابع زمان هستند پس $A^{H}(t)$ هم تابع زمان است.

(I)
$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{A^{(H)}(t)}_{\text{در تصویر هایزنبرگ}} = U^\dagger(t)\, \underbrace{A^{(s)}}_{\text{در تصویر شرودینگر}}\, U(t) \\[2ex] A^{H}(0) = A^{(s)} \end{array}\right.$$

به وضوح اپراتورها در تصویر هایزنبرگ در زمان صفر با اپراتورها در تصویر شرودینگر فرقی ندارند.

حالت در زمان صفر را $|\alpha\rangle$ می‌گیریم: $|\alpha, t_0\rangle \equiv |\alpha\rangle$

(II)
$$\left\{\begin{array}{l} |\alpha, t\rangle_s = U|\alpha\rangle \\[2ex] |\alpha, t\rangle_H = |\alpha\rangle \end{array}\right.$$

در تصویر شرودینگر حالت در زمان t به این صورت است.

در تصویر هایزنبرگ حالتها تحول پیدا نمی‌کنند.

مقدار متوسط ها هم در هر دو تصویر به یک صورت هستند:

(II در تصویر شرودینگر) $\langle\alpha|U^\dagger A^{(s)} U|\alpha\rangle$

$\langle\alpha|A|\alpha\rangle$ $\overset{?}{=}$

(I در تصویر هایزنبرگ) ${}_H\langle\alpha|A^{(H)}|\alpha\rangle_H = \langle\alpha|U^\dagger A^{(s)} U|\alpha\rangle$

حال می‌خواهیم معادله تحول را بدست آوریم:

در تصویر شرودینگر گفتیم حالتها عوض می‌شوند و با معادله زیر متحول می‌شوند:

یعنی در طول زمان با زمان عوض می‌شود $\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t\rangle_s = H|\alpha, t\rangle_s \quad$ معادله تحول تصویر شرودینگر

طبق این معادله عوض می‌شود. حال سؤال این است که چه موجودی که در تصویر هایزنبرگ با زمان عوض می‌شود (عملگرها)

(III) $i\hbar\, \partial U/\partial t = HU$ طبق چه معادله‌ای عوض می‌شود

$A^{(H)}(t) = U^\dagger(t)\, A^{(s)}\, U(t)$ اگر بخواهیم ببینیم وقتی معادله بالا را در نظر بگیریم رابطه تحول چه می‌شود

فرض می‌کنیم که صورت عملگر A تابع زمان نباشد، مثل x و p و ... ، $\frac{d}{dt}$ عملگر $A^{(H)}$ را می‌نویسیم:

فرض کنیم $A^{(S)}$ تابع صریح t نباشد: $\frac{dA^{(H)}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial U^\dagger}{\partial t}} A^{(S)} U + U^\dagger A^{(S)} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial t}}$

(H هرمیتی است) $-\frac{1}{i\hbar}U^\dagger H \xleftarrow{\text{مزدوج گیریم}} \text{III} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}HU$

$$\Rightarrow \frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\{U^\dagger A^{(S)} HU - U^\dagger H A^{(S)} U\right\} \qquad (1)$$

در مورد هامیلتونی دو نکته وجود دارد:

۱) H و U با هم جابجا می‌شوند چون U تابعی از H است. $[H, U] = 0$

۲) هامیلتونی در تصویر هایزنبرگ برابر با هامیلتونی در تصویر شرودینگر است.

این حرف برای هامیلتونی‌هایی درست است که $H^{(H)} = U^\dagger \underbrace{H^{(S)} U}_{\text{چون با هم جابجا می‌شوند}} = \underbrace{U^\dagger U}_{1} H^{(S)} = H^{(S)}$

تابع آن درست می‌باشد، یعنی هامیلتونی مستقل از زمان.

بنابراین در رابطه (1) از نتایج بالا استفاده می‌کنیم:

$$(1): \frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\{\underbrace{U^\dagger A^{(S)} \underbrace{HU}_{UH}}_{A^{(H)}} - \underbrace{\underbrace{U^\dagger H}_{HU^\dagger} A^{(S)} U}_{A^{(H)}}\right\}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left\{A^{(H)}H - HA^{(H)}\right\} = \frac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right]$$

$$\boxed{\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right] \qquad \text{معادله هایزنبرگ}}$$

این معادله جای معادله شرودینگر در تصویر هایزنبرگ می‌نشیند و تحول زمانی عملگرها را می‌دهد.

از نظر تاریخی وقتی شرودینگر معادله خود را داد روی تصویر شرودینگر کار کرده بود، مستقل از شرودینگر، هایزنبرگ کار کرد و نشان داد که برای اینکه مکانیک کوانتومی بسازیم باید معادله بالا برقرار باشد و گفت کار آقای شرودینگر غلط است و بعد خود شرودینگر نشان داد که این دو معادله یکی هستند و منظر با نشانه‌ها هم خوانی می‌کند.

یک بار دیگر نسخه دیراک را مرور می‌کنیم، دیراک گفته بود که هرجا کروشه پواسون داریم به جای آن $\frac{1}{i\hbar}$ × جابجاگر بگذاریم، از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی می‌آییم

نسخه دیراک: $[\ ,\ ]_{PB} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$

$$\text{C.M.} \longrightarrow \text{Q.M.}$$

در مکانیک کلاسیک تغییرات زمانی (تحول زمانی) هر کمیتی (A) برابر است با کروشه پواسون آن کمیت با H (معادل معادله نیوتن)

کلاسیک: $\frac{dA}{dt} = [A, H]_{P.B.} \xrightarrow[\text{تغییر دهیم}]{\text{با نسخه دیراک}} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, H]$: معادله هایزنبرگ

می‌بینیم که در اینجا هم نسخه دیراک کار می‌کند، البته هنوز قبلاً معلوم نیست به چه دلیل درست است.

معادله هایزنبرگ باید این کمک را به ما بکند که تحول زمانی عملگرها را بدست آوریم.
دو مثال در این مورد حل می‌کنیم، برای انجام این دو مثال باید دو قضیه را اثبات کنیم، که در اینجا آنها را اثبات می‌کنیم.

قضیه:

می‌خواهیم نشان دهیم:

$$[x_i, F(\vec{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (1)$$

$$[p_i, G(\vec{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i} \qquad (2)$$

برای اثبات رابطه اول، $F(p)$ را بسط می‌دهیم حول نقطه صفر

اثبات (1):

$$F(p) = F(0) + \sum_i p_i \overbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)_0}^{\text{تابع عملگر نیست}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} p_i p_j \overbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}\right)_0}^{\text{تابع عملگر نیست}} + \cdots$$

جمله اول $F(0)$ تابع عملگر نیست، ضرایب $\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)_0$ و $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}\right)_0$ هم تابع عملگر نیستند چون ما در آنها p را صفر گذاشته‌ایم، وگرنه $\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)$ به صورت خود تابع عملگر هست. ما این بسط را به این خاطر داریم که با تعبیه نشانه را مشخص کنیم.

$$[x_k , F(\vec{p})] = \sum_i \underbrace{[x_k , p_i]}_{i\hbar\delta_{ki}} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)_0 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \underbrace{[x_k , p_i p_j]}_{\underbrace{[x_k , p_i]}_{i\hbar\delta_{ki}} p_j + p_i \underbrace{[x_k , p_j]}_{i\hbar\delta_{kj}}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}\right)_0 + \cdots$$

$$[x_k , F(\vec{p})] = i\hbar\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)_0 + \frac{i\hbar}{2}\left\{\sum_j p_j \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial p_j}\right) + \sum_i p_i \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k}\right)\right\} + \cdots$$

$$+ 2\times\frac{i\hbar}{2}\left\{\sum_j p_j \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial p_j}\right)\right\}$$

این دو جمله مثل هم هستند و فرق آنها این است که اسم i و j عوض شده

$$[x_k , F(\vec{p})] = i\hbar\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)_0 + \sum_j p_j \left(\frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)_0 + \cdots\right\}$$

این رابطه چیزی نیست جز بسط $\frac{\partial F}{\partial p_k}$

$$[x_k , F(\vec{p})] = i\hbar\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)$$

بنابراین اثبات شد.

قبل از مثال ها نکته ای در مورد هامیلتونی می گوییم. سؤال این است که هامیلتونی را چطور در مکانیک کوانتمی می توانیم بنویسیم؟

راه از قبل مشخصی برای نوشتن هامیلتونی در مکانیک کوانتمی نداریم، چون صورت مکانیک کوانتم یک فرمول بندی جدید است و باید برای هامیلتونی یک انتخاب کنیم، اگر آن انتخاب نتایج درست داد که صحیح است وگرنه، که غلط است. انتخاب این است که در مواردی که هامیلتونی مشابه کلاسیک دارد، این شکل را در حالت کوانتمی هم می نویسیم اگر ابهامی نداشته باشیم و در مواردی که مشابه کلاسیک ندارد، حدس باید بزنیم و آن حدس را باید بپذیری کنیم اگر درست بود صحیح است. بنابراین نوشتن هامیلتونی (اپراتوری) در کوانتوم در مواقعی که مشابه کلاسیک ندارد کار مشکلی است.

منظور از ابهام این است که یک موقع هامیلتونی C.M است، با همین آن را در کوانتم بکار می بریم Q.M

$\vec{p}^2 = \sum_i p_i p_i \rightarrow \vec{p}^2$ چونکه p^2 همان $\sum p_i p_i$ است و عملگرها با هم جابجا می شوند. ولی یک موقع هامیلتونی

$xp \rightarrow \begin{cases} px \\ xp \end{cases}$ ؟ xp است، در این صورت سؤال این است که xp بگذاریم یا px؟ این ابهام وجود دارد.

$\rightarrow H = \frac{1}{2}(xp + px)$ به عنوان قاعده می گوییم H را طوری می نویسیم که هرمیتی باشد

معادله هایزنبرگ $\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A^{(H)}, H]$

مثال ۱:

ذره آزاد:

پس در ذره آزاد که هامیلتونی $\frac{P^2}{2m}$ است، همان را برای کوانتوم استفاده می‌کنیم:

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m}$$

معادله هایزنبرگ را برای تکانه و مکان می‌نویسیم یعنی A را یک بار تکانه می‌گیریم و یک بار مکان.

$$\begin{cases} A = P_i \longrightarrow \underbrace{\frac{dP_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[P_i, H]}_{\text{وقتی این‌ها را می‌نویسیم یعنی اپراتورها در نمایش هایزنبرگ هستند}} = 0 \Longrightarrow \boxed{P_i(t) = P_i(0)} \quad \text{(I)} \\ A = x_i \end{cases}$$

چون H فقط P دارد.

بنابراین P_i تابع زمان نیست. یعنی در مورد ذره آزاد همیشه تکانه $\vec{P} = \hbar\vec{k}$ ثابت می‌ماند.

*سؤال:

$$[x_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$$
$$[x_i, x_j] = 0$$
$$[P_i, P_j] = 0$$

تا به حال بارها از روابط بالا استفاده کردیم، اما این روابط مربوط به تصویر شرودینگر هستند، سؤال این است که ما به چه مجوزی از این روابط استفاده کردیم؟

حال تغییرات زمانی عملگر مکان را بررسی کنیم:

$$A = x_i \longrightarrow \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{1}{i\hbar}\left[x_i, \frac{1}{2m}\sum_j P_j P_j\right]$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \times \frac{1}{2m}\sum_j 2 \times \underbrace{[x_i, P_j]}_{i\hbar\delta_{ij}} P_j$$

$$\Longrightarrow \frac{dx_i}{dt} = \frac{P_i(t)}{m} \overset{\text{(I)}}{=} \frac{P_i(0)}{m}$$

بنابراین $\frac{dx}{dt}$ مثل $\frac{dP}{dt}$ صفر نشد چون P مقدار ثابتی است پس $\frac{dx}{dt}$ برابر یک مقدار ثابت شد.

$$\Longrightarrow \boxed{x_i(t) = x_i(0) + \frac{P_i(0)}{m}t}$$

از این جهت که نگاه کنیم، می‌بینیم که معادلات خیلی نزدیک به فیزیک کلاسیک است. در فیزیک کلاسیک وقتی ذره آزاد باشد، سرعت آن عوض نمی‌شود و معادله حرکت تبدیل به $x = vt + x_0$ می‌شود. پس عین همین روابط در اینجا تکرار شد ولی برای عملگرها، در اینجا تکانه تغییر نمی‌کند یعنی سرعت عوض نمی‌شود و معادله تغییرات اپراتور مکان شبیه معادله تغییرات مکان در کلاسیک شد.

۴۳

$[x_i, x_j] = 0 \longleftarrow$ در تصویر شرودینگر

در تصویر هایزنبرگ

$t=0 \longrightarrow x_i(t) = x_i(0) \quad , \quad [x_i(t), x_j(t)]_{t=0} = [x_i(0), x_j(0)] = 0$

عملگرها در زمان صفر در تصویرهای هایزنبرگ همان عملگرها در تصویر شرودینگر هستند.

در تصویر شرودینگر چون مکان تابع زمان نیست، همیشه با هم جابجا می‌شوند، اما در تصویرهای هایزنبرگ ممکن است جابجا نشوند:

$$t\neq 0 \longrightarrow [x_i(t), x_j(0)] = \left[x_i(0) + \frac{p_i(0)}{m}t, x_j(0)\right] = \frac{t}{m}\underbrace{[p_i(0), x_j(0)]}_{-i\hbar\delta_{ij}}$$

صفر جابجا می‌شود چون از نوع شرودینگری است

$$\boxed{[x_i(t), x_i(0)] = -i\hbar t/m}$$

بنابراین در مورد $i\neq j$ اگر $t\neq 0$ باشد با هم جابجا می‌شوند

و هم اگر $i=j$ باشد دیگر با هم جابجا نمی‌شوند در زمانهای

مختلف. پس نه تنها صفر نشد بلکه مقدار جابجایی آنها با گذشت زمان افزایش پیدا می‌کند.

نتیجه‌ای که می‌توان از این موضوع گرفت با بررسی رابطه زیر بدست می‌آید:

داشتیم: $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$

این رابطه منجر به اصل عدم قطعیت شد، این رابطه برای هر عملگری صادق است.

حال A و B را اینطور در نظر بگیریم:

$A = x_i(t)$

$B = x_i(0)$

$$\langle(\Delta x_i)^2\rangle_t \langle(\Delta x_i)^2\rangle_0 \geq \frac{1}{4}|\langle\underbrace{[x_i(t), x_i(0)]}_{-i\hbar t/m}\rangle|^2$$

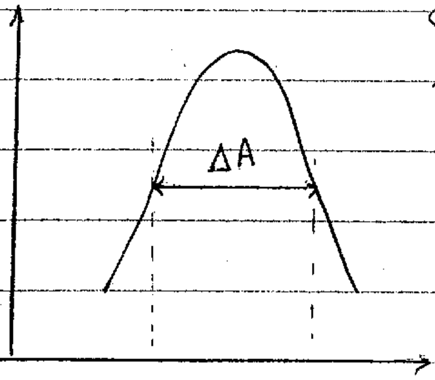
$-i\hbar t/m \longrightarrow$ چون عدد است مقدار متوسط آن هم خودش می‌شود $\hbar^2 t^2/m^2$

$$\boxed{\Longrightarrow \langle(\Delta x_i)^2\rangle_t \langle(\Delta x_i)^2\rangle_0 \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}}$$

Δ هر عملگری معرف پهنای تابعی است که این عملگر متناظر آن است.

این رابطه نتیجه جالبی بدست می‌دهد و می‌گوید اگر ذره که در زمان صفر در فضای مکان پهنایی داشته باشد (Δx_i)، این ذره در زمان t هم پهنایی دارد و این پهنا طوری است که حاصلضرب آنها را می‌دهد و همچنین این پهنا با گذشت زمان افزایش

می‌یابد، یعنی اینکه ذره‌ای که در زمان صفر پهنای خیلی کمی دارد، با گذشت زمان پهن و پهن‌تر می‌شود. این رابطه پهن‌شدگی تابع موج در فضای مکان را می‌گویند که از مشکلات مسائل مکانیک کوانتمی است. این رابطه می‌گوید که اگر در زمان صفر هر چقدر پهن‌شدگی را کم کنیم، در زمان‌های بعد این پهن‌شدگی وجود خواهد داشت.



دلیل استفاده از هایزنبرگ این است که ما گفتیم مقدارهای چشم‌داشتی مستقل از تصویر است، بنابراین از هر روشی که آسان‌تر است استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر این نتیجه به‌دست آمده (اگر بتوانیم از تصویر شرودینگر به آن برسیم (که می‌توانیم)، همین نتیجه را می‌دهد و فرقی نمی‌کند) و نتیجه نمی‌تواند مربوط به این باشد که از این تصویر استفاده کردیم. در تصویر شرودینگر مقدار متوسط‌ها در زمان t و زمان صفر یکی است، اما در تصویر هایزنبرگ $x_1(t)$ را به صورت مقابل

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{p_1(0)}{m} t$$

می‌گیریم و در زمان صفر خود $x_1(0)$ می‌گیریم یعنی عملگرها با زمان متحول می‌شوند ولی حالتی که داریم بررسی می‌کنیم متحول نمی‌شود. در تصویر شرودینگر برعکس است، یعنی اگر حالت را بخواهیم در زمان صفر در نظر بگیریم باید از رابطه مقابل

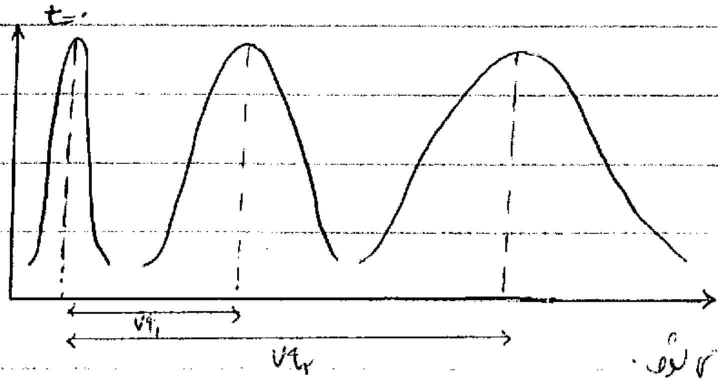
$$\langle x \rangle_{t=0} = \langle \alpha, 0 | x | \alpha, 0 \rangle$$

استفاده کنیم ولی اگر بخواهیم در زمان t محاسبه کنیم باید از رابطه پایین استفاده کنیم، ولی نتیجه آن فرقی

$$\langle x \rangle_t = \langle \alpha, t | x | \alpha, t \rangle$$

ندارد، اما این نوع مسائل در تصویر هایزنبرگ ساده‌تر است پس از آن استفاده می‌کنیم.

سئوال: چه توضیحی در مورد پهن‌شدگی تابع موج داریم و ریشه این قضیه کجاست؟ و چرا تابع موج در فضای مکان با گذشت زمان پهن می‌شود؟



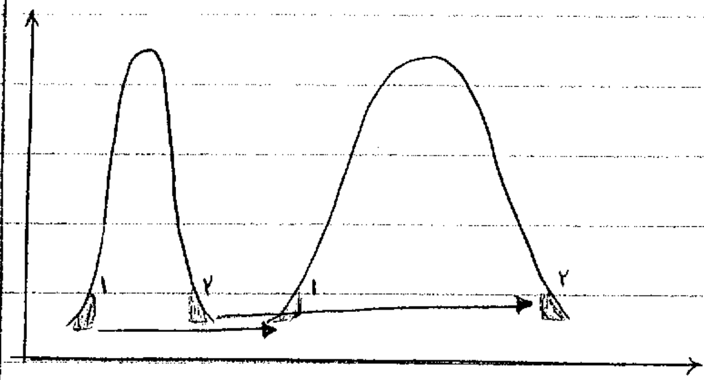
در فضای مکان تابع موج در $t=0$ به صورت مقابل است، در بقیه tها انتظار داریم مرکز جرم به اندازه vt جابجا شده باشد ولی انتظار نداریم پهن شده باشد. اما می‌بینیم که پهن شده و [illegible] نشان داده می‌شود.

وقتی می‌گوییم در زمان صفر یک پهن شدگی داریم چون اصل عدم قطعیت در هر زمانی صادق است، بنابراین یک Δx در زمان صفر معرف یک Δp در زمان صفر است،

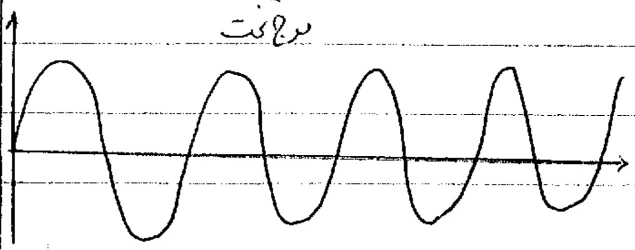
یعنی نمی‌شود که یکی از آنها یک عدد محدود باشد و دیگری صفر باشد. اگر بطور کلی یک نگاه کنیم این ذراتی که معرف آنها

$(\Delta x)_0 \longrightarrow (\Delta p)_0$

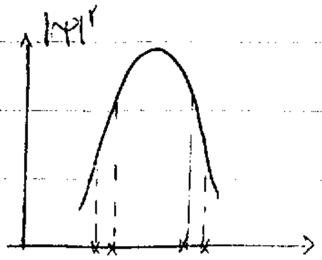
تابع موج است، چون پهن شدگی سرعت یا پهن شدگی مومنتوم دارند، پس یک مومنتوم مشخص ندارند و از یک حدی تا یک حدی است بنابراین مومنتوم این ذرات مختلف از p_1 است تا $p_1+(\Delta p)$. بنابراین کلیه نقاط این تابع موج یا توزیع تابع موج (تابع موج)، احتمال پیدا کردن یک ذره است و وقتی ضرب در تعداد کل ذرات می‌کنیم، توزیع ذرات در فضا در نقاط مختلف را می‌دهد، یعنی می‌گوید در هر نقطه چند ذره داریم) پس توزیع ذرات در فضا یا



توزیع یک ذره دارای سرعتهای متفاوت هستند و تمام ذرات با یک سرعت جلو نمی‌روند. مثلاً ذراتی که در نقطه ۲ هستند ممکن است با سرعت زیادی به جلو بروند و ذرات نقطه ۱ ممکن است با حد پایین سرعت جلو بروند. بنابراین به شرط آنکه از ابتدا در مورد سرعت یا مومنتوم پهن شدگی داریم، این پهن شدگی باعث می‌شود که پهن شدگی مکانی تشدید شود و در زمانهای بعد اختلاف سرعت باعث اختلاف فضا می‌شود و نمی‌توان جلوی آن را هم گرفت، مگر اینکه این پهن شدگی سرعت صفر شود، یعنی پهن شدگی مکانی بینهایت شود، یعنی تابع موج یا تابع موج گسترده در فضا باشد، یعنی مثل یک موج تخت باشد.



این موج تخت دیگر پهن شدگی ندارد و همین شکل حفظ می‌شود. این پهن شدن تابع موج به این معناست که احتمال پیدا کردن ذره در هر نقطه کم می‌شود.



تک ذره را می‌توانیم در یک نقطه با یک احتمالی پیدا کنیم؛ وقتی در مورد تابع موج صحبت می‌کنیم یعنی قبل از اندازه‌گیری است و قبل از اندازه‌گیری ذرات را با یک احتمالی در نقاط مختلف پیدا می‌کنیم اما بعد از اندازه‌گیری دیگر مکان ذره و تابع موج آن مشخص شده است.

وقتی اندازه‌گیری می‌کنیم مکان ذره مشخص می‌شود داریم:

$|\psi\rangle = \sum c_a |a\rangle \xrightarrow{\text{بعد از اندازه‌گیری}} |a\rangle$

مثال ۲:

یک هامیلتونی با پتانسیل دلخواه در نظر می‌گیریم $H = \vec{P}^2/2m + V(\vec{x})$

اگر $V(x)$ فقط تابع x باشد، در آن ابهامی وجود ندارد.

برای این هامیلتونی باز دوباره دو معادله را حل می‌کنیم، برای P می‌نویسیم:

طبق معادله هایزنبرگ

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[P_i, H] = \frac{1}{i\hbar}\underbrace{[P_i, V(\vec{x})]}_{-i\hbar\,\partial V/\partial x_i} = -(\vec{\nabla} V)_i \quad \text{(I)}$$

با P^2 جابجا می‌شود
ولی با V جابجا نمی‌شود

برای x معادله هایزنبرگ می‌شود:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{1}{i\hbar}[x_i, P^2/2m] \overset{\text{مثال قبل}}{=} P_i/m$$

با V جابجا می‌شود

در اینجا با مورد قبلی فرق دارد
در اینجا P تابع زمان است طبق معادله (I).

برای اینکه معادله را به تنهایی بدست آوریم یک بار دیگر مشتق می‌گیریم، بنابراین:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dP_i}{dt} \overset{(I)}{=} \frac{1}{m}(-\vec{\nabla} V)_i$$

$$\Longrightarrow m\frac{d^2x_i}{dt^2} = -(\vec{\nabla} V)_i$$

معادله حرکت عملگر x در زمانی که پتانسیل داریم)

دقت داشته باشیم، که درست معادله نیوتن شد. یعنی با اینکه از معادله شرودینگر شروع کردیم که هیچ ربطی به فیزیک کلاسیک ندارد، بعد از یک سری محاسبات رسیدیم به اینکه معادله عملگرها به صورت بالا است.

فایده این نتیجه این است که اگر از طرفین معادله بدست آمده، مقدار چشمداشتی بگیریم داریم:

$$\langle\alpha|\, m\frac{d^2x_i}{dt^2}\,|\alpha\rangle = \langle\alpha|\, -(\vec{\nabla} V)_i\,|\alpha\rangle$$

چون در تصویر هایزنبرگ، حالتها تابع زمان نیستند بنابراین α را می‌توان داخل d/dt برد.

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\alpha|x_i|\alpha\rangle = -\underbrace{\langle\alpha|(\vec{\nabla} V)_i|\alpha\rangle}_{\langle(\vec{\nabla} V)_i\rangle}$$

این رابطه برای هر مولفه‌ای صادق است

پس برای بردار $\vec{r}$ هم صادق است:

این قضیه می‌گوید در هر شرایطی مقدار چشمداشتی کمیت r و ∇V از رابطه زیر (نیوتن) پیروی می‌کند

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\langle\vec{r}\rangle = -\langle\vec{\nabla} V\rangle \qquad \text{قضیه ارنفست Ehrenfest}}$$

→ درست مثل معادله نیوتن شد

جلسه دوازدهم: ۸۴/۸/۱۰

$$A^{(H)} = U^{\dagger}(t) A^{(S)} U(t)$$

	تصویر شرودینگر	تصویر هایزنبرگ
State-Ket	تحول دارند ($i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\lvert\alpha,t\rangle = H\lvert\alpha,t\rangle$)	ثابتند
observables	ثابتند	تحول دارند ($\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A^{(H)},H]$)
Base kets	ثابتند	تحول دارند ($i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\lvert a',t\rangle_H = -H\lvert a',t\rangle_H$)

$H = \vec{p}^{\,2}/2m + V(x)$ معادله هایزنبرگ را برای هامیلتونی مقابل حل کردیم (x و p)
و به این نتایج رسیدیم:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

از این دو معادله داریم $\Rightarrow \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -(\vec{\nabla} V)_i$

معادله تحول عملگرها شبیه معادله کلاسیک شد $\hbar$ در آن حذف شد. این رابطه در نهایت به قضیه ارنفست منجر شد.

نکته آخری که در این بحث می‌ماند بحث کت‌های پایه (base ket) است.

می‌خواهیم در مورد کتهای پایه‌ای که همه چیز را برحسب آنها بسط می‌دهیم صحبت کنیم. معمولاً حالتها را برحسب ویژه حالتهای یک عملگر هرمیتی بسط می‌دهیم، یعنی برای عملگر هرمیتی A رابطه مقابل را داشتیم. حال حالتها را برحسب ویژه حالتهای آن ($|a'\rangle$) می‌توانیم بسط دهیم.

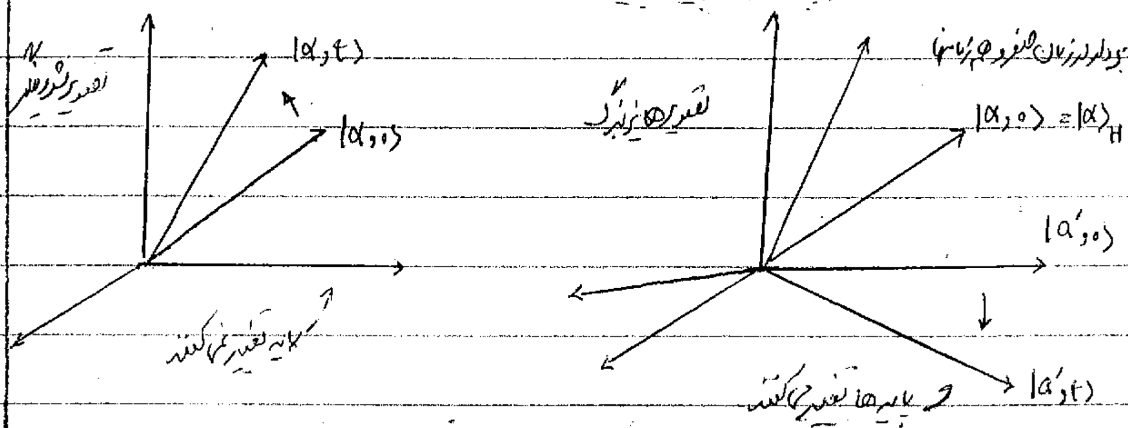
$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

می‌خواهیم ببینیم تفاوت تصویر شرودینگر و هایزنبرگ در مورد base-ket ها چیست. یک اصطلاح عام دارند. در تصویر شرودینگر چون عملگرها ثابت هستند بنابراین ویژه کتهای آنها هم ثابت هستند بنابراین در تصویر شرودینگر base-ket ها

ثابت هستند و در تصویر شرودینگر کتها که متحول هستند کتهای حالت هستند نه کتهای پایه. کتهای پایه یعنی چیزهایی که بر حسب آنها بسط می‌دهیم ثابت هستند. در تصویر هایزنبرگ برعکس است، کتهای حالت ثابت هستند ولی کتهای پایه حتماً تحول دارند. دلیل اینکه تحول دارند این است که عملگرها تحول دارند. برای بدست آوردن تحول آنها، طرفین معادله $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ را در $U^{\dagger}$ ضرب کنیم و در سمت چپ $UU^{\dagger}$ هم اضافه قرار دهیم.

$$\underbrace{U^{\dagger}A^{(S)}U}_{A^{(H)}}\;\underbrace{U^{\dagger}|a'\rangle}_{|a',t\rangle_H} = a'\,\underbrace{U^{\dagger}|a'\rangle}_{|a',t\rangle_H}$$

بنابراین این رابطه نشان می‌دهد که چون عملگرها در تصویر هایزنبرگ A نیستند بلکه $U^{\dagger}AU$ هستند در این صورت ویژه‌کتهای آنها هم $|a'\rangle$ نیست بلکه $U^{\dagger}|a'\rangle$ است. پس $U^{\dagger}|a'\rangle$ کتهای پایه تابع زمان هستند که اسم آنها را $|a',t\rangle_H$ می‌گذاریم. در تصویر شرودینگر پایه‌ها ثابت هستند و حالتها تابع زمان هستند ولی در تصویر هایزنبرگ برعکس است و حالتها ثابت هستند اما کتهای پایه (پایه‌ها) فقط تابع زمان هستند. در پایه‌ی نمی حالتها (بردارها) ثابت هستند و دستگاه مختصات حرکت می‌کند (چون کتهای پایه، پایه‌های ما هستند مثل دستگاه مختصات)



حال می‌خواهیم معادله تحول ویژه‌کتها را بدست آوریم یعنی $|a'\rangle$ها چطور با زمان عوض می‌شوند:

$$|a',t\rangle = U^{\dagger}|a'\rangle$$

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ را به طرفین معادله اثر می‌دهیم:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|a',t\rangle = i\hbar\underbrace{\frac{\partial U^{\dagger}}{\partial t}}_{-HU^{\dagger}}|a'\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial U}{\partial t} = HU$$

$$-i\hbar\frac{\partial U^{\dagger}}{\partial t} = U^{\dagger}H = HU^{\dagger}$$

چون هامیلتونی را مستقل از زمان گرفتیم یعنی شکل U اینطور شود: $U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a', t\rangle = -H \underbrace{U^{\dagger} |a'\rangle}_{|a',t\rangle_H}$$

این معادله تحول ویژه کتها است:

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a', t\rangle_H = -H |a', t\rangle_H$$

در تصویر شرودینگر
$$\begin{cases} |\alpha, 0\rangle \longrightarrow |\alpha, t\rangle = U|\alpha, 0\rangle & \text{حالت در زمان } t \text{ را به این صورت ثبت می‌کنیم:} \\ |a'\rangle \longrightarrow |a'\rangle & |a'\rangle \text{ ویژه حالتها عوض نمی‌شوند.} \end{cases}$$

در تصویر هایزنبرگ
$$\begin{cases} |\alpha, 0\rangle \longrightarrow |\alpha, 0\rangle & \text{حالتها عوض نمی‌شوند.} \\ |a'\rangle \longrightarrow |a', t\rangle = U^{\dagger}|a'\rangle & |a'\rangle \text{ ها عوض می‌شوند} \end{cases}$$

این نکته همان چیزی است که در صفحه‌ی ... پیش گفتیم که در تصویر شرودینگر حالتها عوض می‌شوند ولی پایه‌ها تغییر نمی‌کنند و در تصویر هایزنبرگ حالتها تغییر نمی‌کنند ولی پایه‌ها عوض می‌شوند.

ما انتظار داریم که فیزیک قضیه عوض نشود، یعنی اینکه فیزیک کوانتومی با انتخاب تصویرهای مختلف تغییر نکند. خود این حالتها معرف تغییراتی نیستند که بتوان در آزمایشگاه اندازه‌گیری کرد، بلکه حاصلضرب اینهاست که احتمالها را می‌دهد. ما انتظار داریم که حاصلضرب بین موجودات در طول زمان عوض نشود. مثلاً می‌توان این طور بررسی کرد:

اگر سیستم در زمان $t=0$ در حالت $|\alpha\rangle$ باشد، احتمال یافتن در زمان t در حالت $|a'\rangle$ چقدر است؟

این یک سؤال فیزیکی است، یعنی احتمال یافتن سیستم یک عدد قابل محاسبه است، ما انتظار داریم که این عدد در انواع محاسبه‌ها تغییر نکند، در بحث دو تصویر، دو نوع برخورد با یک مسئله است و دو تا مسئله نداریم بنابراین انتظار داریم عوض نشود.

می‌توانیم برای دو تصویر به این صورت بنویسیم:

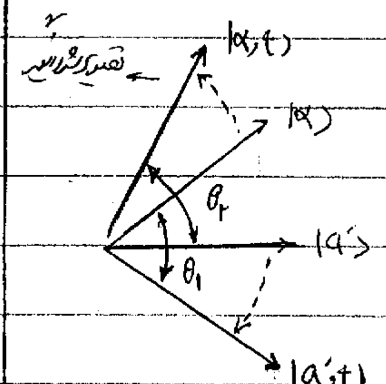
	$t=0$	t	احتمال
تصویر شرودینگر	$\|\alpha\rangle$	$\|\alpha, t\rangle = U\|\alpha\rangle$	$\langle a'\|U\|\alpha\rangle$ (البته باید توان ۲ برسانیم)
	$\|a'\rangle$	$\|a'\rangle$	
تصویر هایزنبرگ	$\|\alpha\rangle$	$\|\alpha\rangle$	$\langle a', t\|\alpha\rangle = \langle a'\|U\|\alpha\rangle$
	$\|a'\rangle$	$\|a', t\rangle = U^{\dagger}\|a'\rangle$	
		$\Rightarrow \langle a', t\| = \langle a'\|U$	

این نتیجه مهم است، با اینکه در هر کدام از تصویرها جداجدا یک کمیت تغییر می‌کند ولی ماهیت فیزیکی عوض نمی‌شود یعنی $|\alpha,t\rangle$ با U تغییر می‌کند و متحول می‌شود (در تصویر شرودینگر)، اما $|a',t\rangle$ با $U^\dagger$ متحول می‌شوند (در تصویر هایزنبرگ)، از آنجایی که U ماتریس یونیتاری است (یعنی $U^\dagger U = 1$)، پس $U^\dagger$ در حقیقت U^{-1} است پس:

در تصویر هایزنبرگ: $|a'\rangle \longrightarrow |a',t\rangle = U^\dagger |a'\rangle = U^{-1}|a'\rangle$

بنابراین تبدیل و تحول $|\alpha,t\rangle$ و $|a',t\rangle$ معکوس هستند، یعنی هر بلایی که سر هر کدام از آنها می‌آید، معکوس آن برای دیگری اتفاق می‌افتد، یعنی مثلاً اگر یکی از آنها با زمان جلو می‌رود، دیگری با زمان عقب می‌آید یا اگر به دوران آن نگاه کنیم، اگر یکی در جهت خلاف ساعت می‌چرخد، دیگری در جهت ساعتگرد می‌چرخد.

$\langle a'|\alpha,t\rangle$ و یا $\langle a',t|\alpha\rangle$ حاصلضرب دو بردار است،



که حاصلضرب دو بردار برابر می‌شود با cos زاویه بین آنها در مقدارشان. بنابراین در زمان صفر ما یک بردار $|a'\rangle$ و یک بردار $|\alpha\rangle$ در زمان صفر داریم در تصویر شرودینگر $|\alpha\rangle$ تبدیل به $|\alpha,t\rangle$ می‌شود با عملگر U، که اگر دوران را در نظر بگیریم مثل دوران است در جهت خلاف پادساعتگرد پس $|\alpha\rangle$ تبدیل به $|\alpha,t\rangle$ شد و زاویه بین $|a'\rangle$ و $|\alpha,t\rangle$ که معرف احتمال است برابر θ_1 شد، در تصویر هایزنبرگ $|\alpha\rangle$ عوض نشده بلکه $|a'\rangle$ عوض شد و این دفعه با عملگر U^{-1} (یا $U^\dagger$) عوض شده است.

پس اگر عملگر U (در تصویر شرودینگر) عملگر دوران در جهت پادساعتگرد باشد، U^{-1} عملگر دوران در جهت ساعتگرد می‌باشد و شکل $|a',t\rangle$ به صورت بالا می‌شود. حالا دوباره زاویه بین $|\alpha\rangle$ و پایه‌ها $(|a',t\rangle)$ که هم محاسبه دهیم کیف شود θ_2 است که با θ_1 برابر است و زاویه‌ها ثابت می‌مانند ولی نحوه ایجاد زاویه‌ها فرق می‌کند، در یک تصویر بردارهای حالت دوران می‌کنند و در تصویر دیگر پایه‌ها دوران می‌کنند.

این بحث نوعی برخورد با مکانیک کوانتومی بود، تا اینجا دو تصویر داشتیم، یکی شرودینگر و دیگری هایزنبرگ. برخورد دیگری هم وجود دارد که برخورد دینامیکی است، یعنی نه کاملاً شرودینگر و نه کاملاً هایزنبرگ.

می‌خواهیم یک مثال خاص و مهم را از مکانیک کوانتمی بگوییم

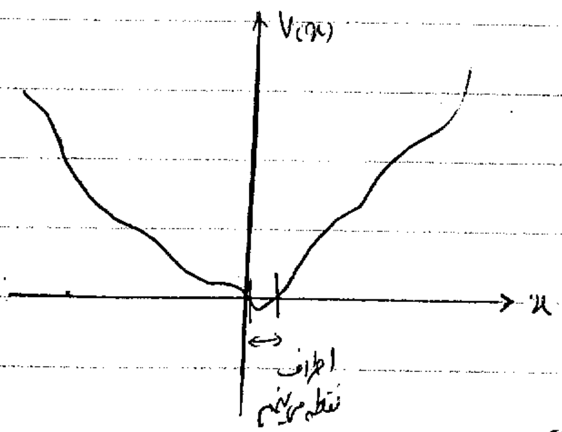
نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی:

می‌خواهیم مسئله‌ای را بررسی کنیم که هامیلتونی آن به این صورت باشد:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

هامیلتونی نوسانگر هماهنگ در اصل از این جهت اهمیت دارد که از معدود مسائلی است که می‌توان حل کرد، یکی دیگر از این مسائل قابل حل، پتانسیل‌های $\frac{1}{r}$ است.

اولین دلیل دیگر اهمیت این پتانسیل این است که این نوع پتانسیل، پتانسیل بسیاری از مسائل پیچیده در حالت تقریبی است، یعنی اگر هر پتانسیلی را که هر چقدر هم پیچیده باشد (مانند شکل) در نظر بگیریم، اگر در اطراف نقاط مینیمم باشیم، یعنی انرژی و یا شرایط مسئله طوری باشد که نتوانیم خیلی از نقاط تعادل دور شویم، در اینصورت همه پتانسیل‌ها تقریبا سهمی می‌شوند.



این دلیل کاربردی این مسائل است.

بصورت خیلی مهم و روزمره اگر به تمام شبکه‌های بلوری نگاه کنیم (از فلزات تا غیرفلزات)، اتمها در یک شبکه‌ای گیر افتاده‌اند و نمی‌توانند خیلی جابجا شوند، بنابراین چون کم می‌توانند جابجا شوند، بنابراین پتانسیل آنها تقریبا می‌تواند پتانسیل درجه ۲ باشد.

بصورت ریاضی هم می‌توان هر پتانسیلی را حول مینیممش بسط داد.

$$V(x) = \underbrace{V(x_0)}_{} + \frac{dV}{dx}(x-x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}}_{\equiv m\omega^2}\underbrace{(x-x_0)}_{X}^2 + \cdots \to 0$$

مقدار ثابت است که می‌توانیم صفر انتخاب کنیم

با فرض اینکه نقطه‌ای که پتانسیل را بسط می‌دهیم نقطه تعادل سیستم باشد یعنی $\frac{dV}{dx}=0$ است.

تغییر متغیر

با فرض اینکه دامنه نوسانات کوچک باشد.

$$\Longrightarrow V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

بنابراین همه پتانسیلها حول

همانطور که می‌دانیم مسئله نوسانگر هماهنگ آسان می‌شود اگر دو عملگر a و $a^{\dagger}$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right)$$

$$a^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right)$$

با استفاده از جابجاگر x و p می‌توانیم به این نتیجه برسیم:

$$[x,p] = i\hbar \quad , \quad [a, a^{\dagger}] = 1$$

N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N = a^{\dagger}a = \frac{1}{\hbar\omega}\underbrace{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)}_{H} + \frac{i}{2\hbar}\overbrace{[x,p]}^{i\hbar}$$

بنابراین:

$$N = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \implies \boxed{H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)}$$

اهمیت عملگرهای a و $a^{\dagger}$ این است که هامیلتونی را می‌توان برحسب حاصلضرب آنها نوشت.

N یک عملگر هرمیتی است:

$$N^{\dagger} = N$$

بنابراین ویژه‌حالتهای آن متعامد هستند و ویژه مقادیرش حقیقی هستند. که اگر ویژه حالتهای آن را با $|n\rangle$ و ویژه مقادیرش را با n نشان دهیم داریم:

$$N|n\rangle = n|n\rangle$$

number operator — اعداد حقیقی

به عملگر N، عملگر تعداد (number operator) می‌گوییم.

$$[H, N] = 0$$

چون هامیلتونی با N جابجا می‌شود، پس ویژه‌کتهای مشترک دارند، یعنی کتهای N، کتهای H هم هستند، پس:

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad ; \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

بنابراین سطوح انرژی مسئله نوسانگر هماهنگ بدست آمد. البته هنوز طیف n را مشخص نکرده‌ایم.

ارتباط N با دو عملگر a و a^+ به این صورت است که با بستن آنها از آن عملگران اثر a و a^+ را روی $|n\rangle$ بدست آوریم

$$[N,a] = -a \rightarrow N[a|n\rangle] = (aN-a)|n\rangle = (n-1)[a|n\rangle]$$

$$\Rightarrow \boxed{a|n\rangle = C_n|n-1\rangle}$$

$$[N,a^+] = a^+ \rightarrow N[a^+|n\rangle] = (n+1)[a^+|n\rangle]$$

$$\Rightarrow \boxed{a^+|n\rangle = C'_n|n+1\rangle}$$

حال C_n و C'_n را حساب می‌کنیم:

dual $a|n\rangle = C_n|n-1\rangle$

$\langle n|a^+ = C_n^*\langle n-1|$: دو نسخه‌ی عملگر هرمیتی مزدوج

$$\Rightarrow \langle n|a^+a|n\rangle = |C_n|^2\langle n-1|n-1\rangle = |C_n|^2 \quad \text{I}$$

از طرف دیگر می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$\langle n|\underbrace{a^+a}_{N}|n\rangle = n \quad \text{II}$$

$$\underbrace{N|n\rangle}_{n|n\rangle}$$

$$n\langle n|n\rangle = n$$

$$\text{I},\text{II} \Rightarrow |C_n|^2 = n \rightarrow \boxed{C_n = \sqrt{n}}$$

به همین صورت C'_n را می‌توان حساب کرد:

$$\boxed{C'_n = \sqrt{n+1}}$$

بنابراین دو نتیجه بدست آمد:

$\boxed{a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle}$ ← اپراتور پایین‌آورنده (عملگر فنا)

$\boxed{a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle}$ ← اپراتور بالابرنده (عملگر خلق)

به لحاظ این مفهوم صورت به عملگر a، اپراتور پایین‌آورنده (عملگر فنا) و به عملگر a^+، اپراتور بالابرنده (عملگر خلق) می‌گوییم، به این دلیل که وقتی state ما $|n\rangle$ است آن کم شود ($|n\rangle \rightarrow |n-1\rangle$) یعنی انرژی آن کم می‌شود، یک کوانتای انرژی از بین رفته است. برای a^+ یک کوانتای انرژی ایجاد شده است، پس عملگر خلق است.

نکته دیگر این است که چون n برابر با $|a|^2$ شد، پس n ها همه مثبت هستند پس n منفی نداریم.

داشتیم: $n = |C_n|^2 \geq 0$

حال که n منفی نداریم، پس $|n\rangle$ جوری خواهد شد، چون وقتی a اثر کند، $|n\rangle$ را کم می‌کند:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

وقتی دوباره اثر کند:

$$a^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle$$

$$\vdots$$

هر بار تاثیر دادن a، دائماً $|n\rangle$ را کم می‌کند، حال سوال این است که تا کجا $|n\rangle$ می‌تواند کم شود.

می‌خواهیم از نکته‌ها استفاده کنیم و بگوییم که:

n = عدد صحیح و مثبت یا صفر باشد

مثبت بودن که قبلاً نشان داده شد، حال می‌خواهیم صحیح بودن را نشان دهیم:

اگر فرض n عدد صحیح نباشد، مثلاً: $n = 5{,}5$

روی آن دائماً a را اثر می‌دهیم:

$$|5{,}5\rangle \xrightarrow{a} |4{,}5\rangle \xrightarrow{a} |3{,}5\rangle \xrightarrow{a} |2{,}5\rangle \xrightarrow{a} |1{,}5\rangle \xrightarrow{a} |0{,}5\rangle \xrightarrow{a} |-0{,}5\rangle \xrightarrow{a} |-1{,}5\rangle, \dots$$

پس دائماً n کم می‌شود تا منفی شود. از طرفی دیدیم که n نباید منفی شود و منفی‌ها قابل قبول نیست. تنها حالتی که این اتفاق برایش نمی‌افتد این است که n صحیح باشد.

اگر n را صحیح بگیریم:

n = عدد صحیح

تعداد اثر a بر روی $|n\rangle$ را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

برای تاثیر n-1 بار a:

$$a^{n-1}|n\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)\dots\times 2}\,|1\rangle$$

اگر یک بار دیگر اثر دهیم:

$$a^{n}|n\rangle = \sqrt{n(n-1)\dots\times 1}\,|0\rangle$$

حال اگر یک بار دیگر اثر دهیم:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$a^{n+1}|n\rangle = \sqrt{n!}\;a|0\rangle = 0$$

یعنی منفی تولید نمی‌شود، بنابراین برای جلوگیری از تولید
n منفی، n صحیح بود.

حال طیف مسئله کاملاً بدست آمد:

$$\boxed{E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega \quad n = 0,1,2,\dots}$$

حالت $|0\rangle$ را اصطلاحاً حالت خلاء یا حالت پایه می‌گوییم و حالتی است که:

$|0\rangle =$ حالت پایه $\longrightarrow \boxed{a|0\rangle = 0}$

اینکه a ، اپراتور فنا است باید چیزی باشد که a آن را از بین ببرد ، در حالت خلاء (پایه) هیچ چیز نیست که a آن را از بین ببرد.

می‌خواهیم بگوییم در این مسئله اگر یک state را داشته باشیم بقیه بدست می‌آید که همان $|0\rangle$ است. $a|0\rangle = 0$

حال روی حالت خلاء a^+ را اثر می‌دهیم ، $|1\rangle$ را بدست می‌آوریم: $a^+|0\rangle = |1\rangle$

دوباره a^+ را اثر می‌دهیم ، $|2\rangle$ را بدست می‌آوریم: $(a^+)^2|1\rangle = a^+|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$

$\vdots$

حال اگر a^+ را n بار روی $|0\rangle$ اثر دهیم ، $|n\rangle$ بدست می‌آید: $(a^+)^n|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle$

به عبارت دیگر:

$$\boxed{\Rightarrow |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle}$$

به این روابط اصطلاحاً می‌گوییم فضای هیلبرت (Hilbert space) این مسئله.

دلیل اینکه به حالت $|0\rangle$ حالت خلاء می‌گوییم این است که به معنی نبودن هیچ کوانتای انرژی در مسئله است ، چون n ها معرف تعداد انرژی‌ها هستند ، $|0\rangle$ می‌نویسیم انرژی است یعنی هیچ انرژی نداریم.

به عبارت دیگر در مسئله نوسانگر هماهنگ ، انرژی حالت پایه دارای انرژی صفر نیست ، بلکه دارای انرژی‌ای است که از آن پایین‌تر نمی‌توان رفت.

تا اینجا بحث ما در مورد فضای انتزاعی بود یعنی فضای Ket ها، Bra ها ؛ اگر بخواهیم در فضای توابع کار کنیم یعنی x , p نداشتیم ، باید روی مختصات فضایی برویم.

البته با این اطلاعات می‌توان هر مسئله‌ای را حل کرد.

اما اگر بخواهیم درباره موقعیت مکانی سیستم صحبت کنیم باید روی فضای مکان برویم.

در فضای مکان : در فصل یک رابطه‌ای برای استفاده از مشتق بدست آورده بودیم و گفته بودیم که اگر state $|\alpha\rangle$ را داشته باشیم تصاویرشان هر تابعی از x و p بصورت زیر است:

$$\textcircled{1}\begin{cases} \langle x'|f(x)|\alpha\rangle = f(x')\langle x'|\alpha\rangle \\ \langle x'|f(p)|\alpha\rangle = f\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\langle x'|\alpha\rangle \end{cases}$$

در فضای مکان اپراتورهایی که تابع x هستند تبدیل به تابع شده و بیرون می‌آیند ولی اپراتورهایی که تابع مشتق هستند خودشان بیرون می‌آیند و بجای مشتق $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ می‌گذاریم

$a|0\rangle = 0$

مثلاً از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم بنابراین در فضای مکان هم برابر صفر است.

$\langle x'|a|0\rangle = 0 \quad \textcircled{I}$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right)$$

عبارت a را در رابطه $\textcircled{I}$ قرار می‌دهیم بنابراین:

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x'|\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right)|0\rangle = 0$$

از قاعده بالا ($\textcircled{1}$) استفاده می‌کنیم و چون در فضای مکان هستیم، x را می‌توانیم بیرون بیاوریم و بجای آن x' بگذاریم و p را هم می‌توانیم بیرون بیاوریم و بجایش $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ بگذاریم، بنابراین:

$$\left(x' + x_0^2\frac{d}{dx'}\right)\underbrace{\langle x'|0\rangle}_{\psi_0(x')} = 0$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

این رابطه یک معادله دیفرانسیل شد که از روی آن می‌توان $\langle x'|0\rangle$ را پیدا کرد، $\langle x'|0\rangle$ در حقیقت تابع موج در حالت پایه است.

بنابراین معادله دیفرانسیل بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d\psi_0}{dx'} = -\frac{x'}{x_0^2}\psi_0 \Longrightarrow \int\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{1}{x_0^2}\int x'dx'$$

$$\Longrightarrow \ln\psi_0 = -\frac{1}{x_0^2}\cdot\frac{x^2}{2} + c$$

$$\psi_0 = c'\,e^{-\frac{1}{2}(x'/x_0)^2} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega x'^2}{\hbar}}$$

c' با شرط بهنجارش بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_0|^2dx' = 1 \Longrightarrow c' = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}}$$

بقیه توابع موج هم می‌توان با استفاده رابطه (۱) صفحه قبل در رابطه (۹) نوشت:

$$\psi_n(x') = \langle x'|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle x'|(a^+)^n|0\rangle \overset{(9)}{=} \frac{1}{x_0^n\sqrt{2^n n!}}\left(x' - x_0^2\frac{d}{dx'}\right)^n \psi_0(x)$$

حال یک مقدار در مورد خصوصیت حالت پایه می‌گوییم، با توجه به دو معادله زیر می‌توان عملگرهای x و p را برحسب a, a^+ نوشت:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right)$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right)$$

بنابراین x و p بدین صورت می‌شوند: (۱)

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-a + a^+)$$

حال با استفاده از این روابط می‌توان توسط x و p با توابعی از آنها را در حالتهای مختلف پیدا کرد، چون اثرات a, a^+ را روی حالتهای مختلف بدست آورده بودیم. مثلاً در حالت پایه می‌توان نوشت:

$$\langle 0|x|0\rangle = \langle x\rangle_0 = 0$$

چون داریم:

$$a|0\rangle = 0 \longrightarrow \langle 0|a^+ = 0$$

همین طور برای تکانه هم می‌شود:

$$\langle p\rangle_0 = 0$$

برای x^2 هم چهار جمله داریم، a^2 و a^{+2} که روی حالت پایه (یک بار بصورت Bra و یک بار بصورت Ket) صفر می‌شوند، جمله a^+a هم صفر می‌شود فقط جمله aa^+ باقی می‌ماند، پس داریم:

$$\langle x^2\rangle_0 = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\underbrace{a}_{\langle 1|}\underbrace{a^+|0\rangle}_{|1\rangle} = \frac{\hbar}{2m\omega} \quad (II)$$

در مورد p^2 هم به این ترتیب بدست می‌آید:

$$\langle p^2\rangle_0 = \frac{\hbar m\omega}{2} \quad (III)$$

از روابط بدست آمده میزان سهم انرژی جنبشی در حالت پایه را از بدست:

$$\langle T\rangle = \langle \frac{P^2}{2m}\rangle \overset{\text{II}}{=} \frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{1}{2}\langle H\rangle$$

سهم انرژی جنبشی نصف هامیلتونی است.

چون $H=(N+\frac{1}{2})\hbar\omega$

$$\langle 0|(N+\tfrac{1}{2})\hbar\omega|0\rangle = \underbrace{\langle 0|N(\hbar\omega)|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1}\tfrac{1}{2}\hbar\omega = \tfrac{1}{2}\hbar\omega$$

بطور طبیعی انرژی پتانسیل باید برابر نصف دیگر شود

$$\langle V\rangle = \langle \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2\rangle \overset{\text{I}}{=} \tfrac{1}{4}\hbar\omega = \tfrac{1}{2}\langle H\rangle$$

$$\Rightarrow \langle T\rangle = \langle V\rangle \quad (2)$$

این نتایج با نتایجی که از فیزیک کلاسیک بدست می‌آید تطابق دارد. در فیزیک کلاسیک قضیه‌ای بنام قضیه ویریال وجود دارد که این طور تعریف می‌شود:

قضیه ویریال (Virial):

برای هر سیستم کلاسیکی که تعداد زیادی ذره دارد، اگر عمل تدریج‌گیری را انجام دهیم روی ذرات، این روابط حاصل می‌شود:

متوسط انرژی جنبشی ذرات — نیروی که به هر ذره وارد می‌شود — مکان هر ذره

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{r}_i}$$

جمع روی همه ذرات.

این رابطه را قضیه ویریال می‌گویند.

در حالت تک ذره:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\vec{F}\cdot\vec{r}} = +\frac{1}{2}\overline{\vec{\nabla}V\cdot\vec{r}}$$

پتانسیل

اگر پتانسیل به شکل پتانسیل مرکزی باشد:

انرژی پتانسیل مرکزی

اگر $V = ar^{n+1} \longrightarrow \vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$

قضیه ویریال که برای پتانسیل‌های مرکزی رابطه زیر برای $\overline{T}$ و $\overline{V}$ برقرار است. برای پتانسیل‌ها r^2

$$\Rightarrow \overline{T} = \frac{1}{2}r\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{n+1}{2}\overline{V} \xrightarrow{n=1} \overline{T} = \overline{V} \quad (3)$$

این نتیجه کلاسیک (3) با نتیجه کوانتومی (2)

بدست آورده بودیم:

$$\text{(II)}\ \langle p^2\rangle_0 = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

$$\text{(I)}:\ \langle x^2\rangle_0 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

نکته دیگری هم می‌توان بدست آورد، برای $\langle(\Delta A)^2\rangle$ داشتیم:

$$\langle(\overset{A-\bar{A}}{\Delta A})^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$$

در مورد p و x در حالت پایه می‌توانیم رابطه بالا را محاسبه کنیم:

داشتیم

$$\langle x\rangle_0 = 0$$

$$\langle p\rangle_0 = 0$$

$$\Rightarrow \langle(\Delta p)^2\rangle_0 = \langle p^2\rangle_0 \overset{\text{(II)}}{=} \frac{\hbar m\omega}{2}$$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_0 = \langle x^2\rangle_0 \overset{\text{(I)}}{=} \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}$$

پس داریم:

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_0 \langle(\Delta p)^2\rangle_0 = \frac{1}{4}\hbar^2$$

که این مقدار، مینیمم اصل عدم قطعیت است، چون برای اصل عدم قطعیت داشتیم $\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$.
دلیل اینکه برابر با $\hbar/2$ شده است این است که تابع موج ما بصورت گوسی بود (در حالت پایه) و برای توابع گوسی در دو جلسه پیش نشان دادیم که اصل عدم قطعیت در مینیمم برقرار است.

برای حالت غیر پایه دیگر این موضوع برقرار نیست، و می‌توان نشان داد که رابطه به این صورت است: (تمرین برای علاقمندان)

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_n \langle(\Delta p)^2\rangle_n = (n+\tfrac{1}{2})^2\hbar^2$$

نکته آخری که در مورد نوسانگر می‌خواهیم بگوییم بحث تحول زمانی است. هم می‌توانیم تصویر هایزنبرگ را نگاه کنیم و هم تصویر شرودینگر. اما در این مورد تصویر هایزنبرگ ساده‌تر است، چون اپراتورهای پایه (یعنی a و $a^\dagger$) ساده هستند، پس تصویر هایزنبرگ را بررسی می‌کنیم.

تحول زمانی نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی:

برای هر هامیلتونی با صورت کلی بدست آوردیم:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{P_i}{m}$$

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Rightarrow m\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -(\nabla V)_i$$

بنابراین در حالت یک بعدی در تصویر هایزنبرگ می‌توانیم برای نوسانگر هماهنگ ساده بنویسیم:

در تصویر هایزنبرگ

$$\text{I}\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -m\omega^2 x \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{P}{m} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -i\omega a \\[2ex] \dfrac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger \end{cases} \text{II}$$

یک راه این است که به جای x و P برحسب $a, a^\dagger$ بگذاریم و قسمت‌های موهومی و حقیقی را در دو طرف با هم برابر قرار دهیم

یک راه ساده‌تر هم این است که برویم سراغ معادله حرکت هایزنبرگ، یعنی:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, H] \qquad 1)\ A = a:\ \frac{da}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a, \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)]$$

$$\Rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\cdot\hbar\omega[a, a^\dagger a] = \frac{\omega}{i} a \underbrace{[a, a^\dagger]}_{1} = -i\omega a$$

$$2)\ A = a^\dagger:\ \frac{da^\dagger}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a^\dagger, \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)] \rightarrow \frac{da^\dagger}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\hbar\omega[a^\dagger, a^\dagger a]$$

$$\Rightarrow \frac{da^\dagger}{dt} = \frac{\omega}{i} a^\dagger \underbrace{[a^\dagger, a]}_{-1} = i\omega a^\dagger$$

دلیل اینکه از فضای P به فضای x رفتیم این است که کارها آن ساده‌تر است، چون a برحسب خود a بدست می‌آید، اما در دیگری مشتق اول P برحسب x بدست می‌آید.

$$\text{II}\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -i\omega a \\[2ex] \dfrac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a(t) = a(0)\, e^{-i\omega t} \\[2ex] a^\dagger(t) = a(0)\, e^{i\omega t} \end{matrix}$$

اگر معادلات مربوط به (I) را حل بکنیم، همین جواب را می دهد.

(I). $\frac{dx}{dt}=\frac{p}{m} \xrightarrow[\text{به t}]{\text{مشتق نسبت}} \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{m}\frac{dP}{dt}=\frac{1}{m}(-m\omega^2)x$

اگر t را صفر بگیریم

α, β از این معادله بدست می آید

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \longrightarrow \begin{cases} x(t)=\underset{\uparrow\,\frac{p(0)}{m\omega}}{\alpha}\sin\omega t+\underset{\uparrow\, x(0)}{\beta}\cos\omega t \\ p(t)=m\frac{dx}{dt}=m\omega(\underset{\uparrow\,\frac{p(0)}{m\omega}}{\alpha}\cos\omega t-\underset{\uparrow\, x(0)}{\beta}\sin\omega t) \end{cases}$$

این رابطه اخیر را به یک طریق دیگری هم می توان بدست آورد.

می توان از این قضیه استفاده کرد:

$$e^{iG\lambda}Ae^{-iG\lambda}=A+i\lambda[G,A]+\frac{(i\lambda)^2}{2!}[G,[G,A]]+\cdots$$

بنابراین ارتباط $x(t)$ با x در تصویر شرودینگر به این صورت است:

$$x^{(H)}(t)=U^{\dagger}x(0)U=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}x^{(S)}e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

$$=x(0)+\frac{i}{\hbar}t\underbrace{[H,x(0)]}_{-\frac{i\hbar}{m}p(0)}+\frac{1}{2!}\left(\frac{i}{\hbar}t\right)^2\overbrace{[H,\underbrace{[H,x(0)]}_{-\frac{i\hbar}{m}p(0)}]}^{\hbar^2\omega^2 x(0)}+\cdots \quad \text{(III)}$$

$H=p^2/2m+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ در تصویر شرودینگر

$\Rightarrow [H,x(0)]=-\frac{i\hbar}{m}p(0)$ بنابراین جملات یکی در میان x و p می شوند

$\Rightarrow [H,p(0)]=i\hbar m\omega^2 x(0)$

بنابراین می‌شود:

$$\text{(III)}\quad x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t - \frac{1}{2}t^2\omega^2 x(0) - \frac{1}{3!}\frac{t^3\omega^2}{m}p(0) + \cdots$$

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t$$

اگر جملات ضریب $x(0)$ را جدا کنیم $\cos\omega t$ می‌شوند

و جملات ضریب $\frac{p(0)}{m\omega}$ ، $\sin\omega t$ می‌شود، پس به همان روش می‌توان به این نتیجه رسید.

با نگاه کردن به این جوابها می‌بینیم که مختصه و تکانه کوانتومی، مثل مختصه و تکانه کلاسیکی نوسانی بدست آمد یعنی جواب فیزیک کلاسیک بدست آمد. به ذهن این طور می‌رسد که در نوسانگرهای کوانتومی ظاهراً کمیات نوسان می‌کنند با همان فرکانس کلاسیک و این حرف غلط است و این اتفاق نمی‌افتد.

چیزی که باید بدست آوریم این است که عملگر x و عملگر p نوسان می‌کنند، چیزی که در آزمایشگاه می‌بینیم این است که مقدار انتظاری را می‌بینیم نه عملگرها. مثل اگر سیستم در حالت $|n\rangle$ باشد، این موضوع قابل مشاهده است:

$\langle n|x(t)|n\rangle$

$x(t)$ و $p(t)$ نوسانی شدند با فرکانس ω؛ مثلاً اگر $p(0)=0$ بگیریم (یعنی اینکه فنر را تا نقطه $x(0)$ کشیده و رها کنیم) در این صورت $x(t)$ کسینوسی می‌شود و $p(t)$ سینوسی می‌شود. یا برعکس $x(0)=0$ باشد (یعنی اینکه فنر در نقطه تعادل است و به آن یک ضربه می‌زنیم) و این بحث در فیزیک کلاسیک است.

در فیزیک کوانتومی عملگرها در تصویر هایزنبرگ نوسان می‌کنند ولی اگر بخواهیم کمیتهای فیزیکی را حساب کنیم نباید به تصویر بستگی داشته باشد چون در تصویر شرودینگر عملگرها با زمان عوض نمی‌شوند. اما چیزی که در هر دو تصویر یکسان است مقدار چشمداشتی است و آن را باید بدست آوریم یعنی باید $\langle n|x(t)|n\rangle$ را بدست آوریم، پس در تصویر هایزنبرگ می‌توانیم این طور حساب کنیم:

$$\langle n|x(t)|n\rangle = \frac{\sin\omega t}{m\omega}\langle n|p(0)|n\rangle + \cos\omega t\,\langle n|x(0)|n\rangle = 0$$

$$i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-a+a^\dagger) \qquad \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^\dagger)$$

چون

بنابراین مقدار چشمداشتی با زمان نوسان نمی‌کنند

$$\langle n|a|n\rangle = \sqrt{n}\,\langle n|n-1\rangle = 0$$

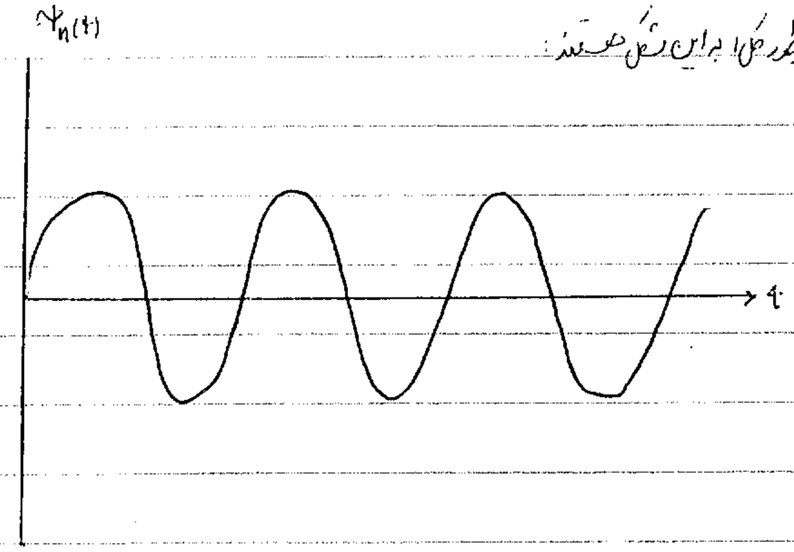
$$\langle n|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle n|n+1\rangle = 0$$

بنابراین مقادیر چشم‌داشتی با زمان نوسان نمی‌کنند و هر لحظه که اندازه‌گیری شوند، ثابت هستند ولی حالت و تابع موج در مسئله نوسانگر هماهنگ با زمان نوسان می‌کند، یعنی احتمال پیدا کردن ذرات نوسان نمی‌کند.

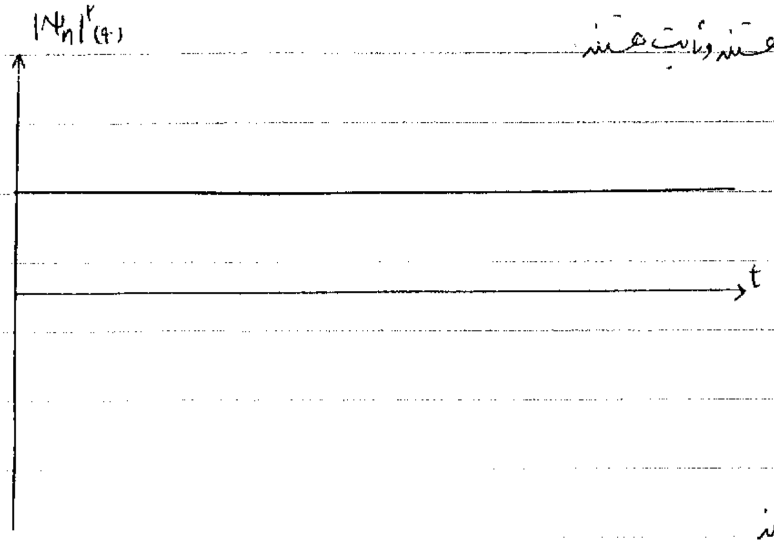
اصولاً کل زمانی ویژه‌حالتهای انرژی بصورت یک فاز $\exp(-\frac{i}{\hbar}E_n t)$ ظاهر می‌شود، بنابراین حالتها هم برای مسئله نوسانگر هماهنگ و هر مسئله‌ای با فرکانس $\exp(-\frac{i}{\hbar}E_n t)$ نوسان می‌کنند ولی احتمالهایشان نوسان نمی‌کنند یعنی توان ۲ آنها یک مقدار ثابت می‌شود، این خصوصیت هر ویژه‌کت انرژی است.

چیزی که در اینجا اهمیت پیدا می‌کند، بحث نوسان مقادیر چشم‌داشتی است که مقادیر چشم‌داشتی نوسان نمی‌کنند.

یعنی همه ویژه‌حالتهای انرژی بطور کلی به این شکل هستند:

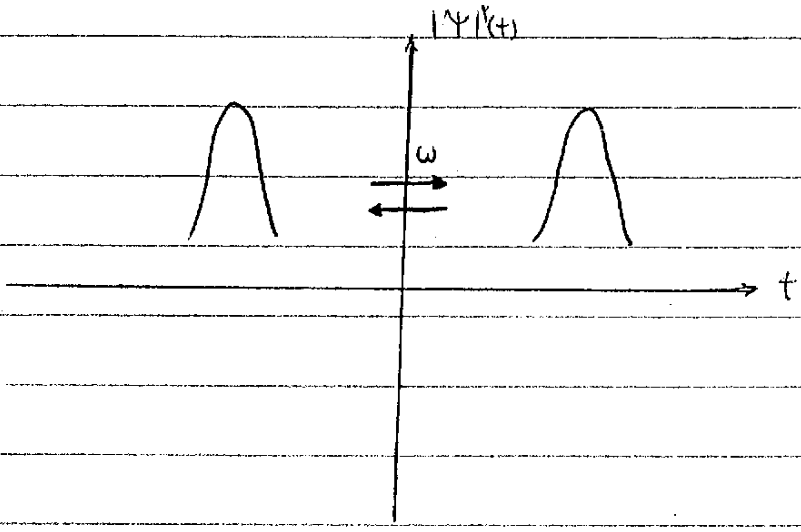


اما $|\psi_n|^2$ ها به این صورت هستند و ثابت هستند



پس توان ۲ توابع موج نوسان نمی‌کند

گفتیم که ترکیب ویژه حالتها دارای تغییرات زمانی پیچیده می‌شود، چون هر کدام از آنها یک فازی می‌گیرند با هم جمع می‌شوند
جالب است که اگر بشود ترکیبی بدست آورد که آن معرف آن ترکیب یک تابع موج باشد که این تابع موج حتماً ویژه حالت
انرژی نیست اما مقدار $|\psi|^2$ بصورت زیر باشد:



یعنی یک بسته موج باشد که با زمان نوسان کند. این جواب چیز جالبی می‌شود و با ذره کلاسیک می‌توان آن را بررسی
کرد.

مسئله (برای ما تا روز سه‌شنبه هفته آینده ۸۴/۸/۱۷)

تمرین ۱:

ترکیب بالا را بدست آورید یعنی یک ترکیبی از ویژه حالتهای نوسانگر هماهنگ بدست آورید که تابع موج در وسط نوسان کند،
یعنی الکترون چیزی را (بسته موج) با زمانش نوسان کند.

جلسه سیزدهم : ۸۴/۸/۱۵

معادله موج شرودینگر :

معادله شرودینگر را بصورت معادله‌ای برای کت‌ها بدین صورت نوشتیم :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle = H |\alpha, t_0, t\rangle$$

اگر طرفین معادله را در پایه‌های مکان ضرب کنیم ($\langle \vec{x}'|$) :

$$\langle \vec{x}'| \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle = H |\alpha, t_0, t\rangle \right\}$$

با تصویر شرودینگر را در نظر می‌گیریم ، در تصویر شرودینگر پایه‌ها مستقل از زمان هستند و کاری ندارند پس وارد مشتق زمانی می‌شوند.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\langle \vec{x}'|\alpha, t_0, t\rangle}_{\psi(x',t)\text{ : تابع موج در زمان } t} = \langle x'| \left[\frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{x}) \right] |\alpha, t_0, t\rangle$$

طرف راست معادله را با توجه به روابطی که در جلسه پیش بدست آوردیم ، می‌توانیم به صورت پایین در نهایت بنویسیم :

$$\begin{cases} \langle \vec{x}'| f(x) |\alpha\rangle = f(\vec{x}') \langle \vec{x}'|\alpha\rangle \\ \langle x'| f(\vec{P}) |\alpha\rangle = f(\tfrac{\hbar}{i}\nabla) \langle \vec{x}'|\alpha\rangle \end{cases}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x',t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}'^2 + \underset{\text{حقیقی است}}{\underset{\downarrow}{V(\vec{x}')}} \right] \psi(x',t)$$

معمولاً با این فرم معادله شرودینگر را می‌شناسیم.

چیزی که در این معادله باید توجه کنیم این است که از آنجا هامیلتونی هرمیتی است و جزء اول آن از دو تا P درست شده و همچنین چون P هرمیتی است این جزء دوم هم هرمیتی است :

$$V = V^+$$

و چون V هرمیتی شد پس ویژه مقادیر آن حقیقی است :

$$\underset{\text{عملگر}}{V(x)} |\vec{x}'\rangle = \underset{\text{حقیقی : ویژه مقدار}}{V(x')} |\vec{x}'\rangle$$

بنابراین یادمان باشد که $V(x')$ حقیقی است.

حالتهای stationary حالتهایی بودند که igen state انرژی بودند. بنابراین تحول آنها با زمان فقط یک فاز است و ترکیبی از igen state ها نشوند.

پس اگر ویژه حالتهای انرژی را بصورت زیر نشان دهیم که $|E\rangle$ ویژه کتهای عملگر انرژی هستند و E ویژه مقدارهای عملگر هستند که با حالتهای سیستم پایدار می شوند.

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

این ویژه کتها دارای این خصوصیت هستند که اگر بخواهیم در زمان t آنها را بنویسیم به صورت مقابل هستند:

$$|E,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|E\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|E\rangle$$

و اگر بخواهیم تابع موج را نگاه کنیم، طرفین را در $\langle \vec{x}'|$ ضرب می کنیم:

$$\langle \vec{x}'|E,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\langle \vec{x}'|E\rangle$$

$$\psi_E(\vec{x}',t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,\psi_E(\vec{x}')$$

ویژه توابع انرژی و با U نشان می دهیم $\psi \to U$

توابع موج مربوط به انرژی: U

به عبارت دیگر اگر ویژه حالتهای انرژی را در نظر بگیریم، ویژه حالتهای انرژی به صورت exp تحول زمانی دارند. اگر ترکیبی از این ویژه حالتها را در نظر بگیریم، ترکیبی از exp ها می شود و دیگر exp کامل نیست.

برای U ها می توانیم مشتق زمانی را بگیریم و معادله زیر

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2 + V(\vec{x}')\right]\psi(\vec{x}',t) = i\hbar\frac{\partial \psi(\vec{x}',t)}{\partial t}$$

تبدیل به معادله شرودینگر مستقل از زمان می شود.

با تبدیل ها

$$\Longrightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}'^2 + V(\vec{x}')\right]U_E(\vec{x}') = E\,U_E(\vec{x}')$$

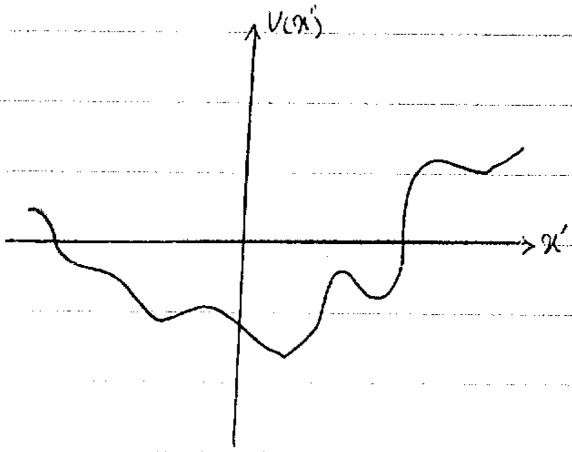
معادله شرودینگر مستقل از زمان

در حقیقت اگر تابع موج ذره، ویژه تابع انرژی باشد، معادله شرودینگر به صورت بالا در می آید و همیشه تحول زمانی آن معلوم است. بنابراین به تحول زمانی آن دیگر کاری نداریم و باید فقط معادله بالا حل شود، وقتی این معادله حل شد در یک فاز exp ضرب شود، تحول زمانی آن هم بدست می آید.

این معادله را برای انواع مختلف پتانسیل ها، مثل چاه پتانسیل و ذره در جعبه و ... حل کردیم و خواص آن را بدست آوردیم.

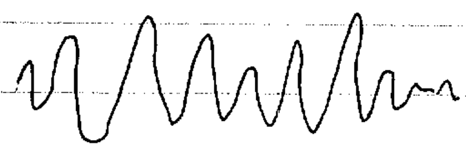
پتانسیل می تواند هر چیزی باشد ولی چیزی که تعیین کننده رفتار ذره مسئله است، اندازه پتانسیل در بینهایت است. اگر پتانسیل

پتانسیل بصورت زیر باشد، چند نکته عمومی وجود دارد (البته در مورد پتانسیل):



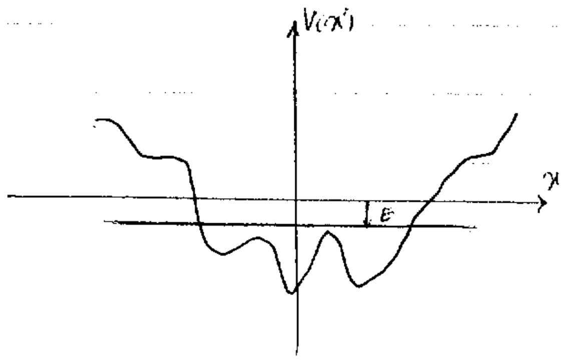
چند نکته عمومی:

* در نواحی ای که $E > V(\vec{x}')$ باشد، توابع موج sin، cos هستند.
* در نواحی ای که $E < V(\vec{x}')$ باشد، توابع موج نمایی هستند.

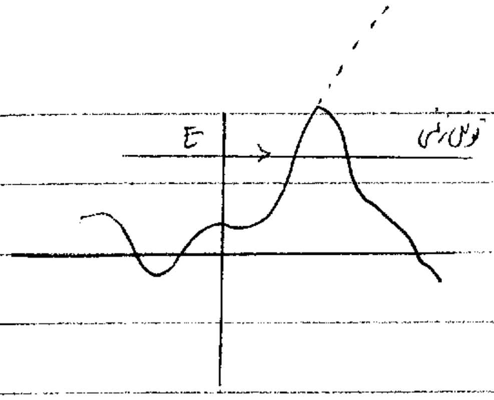


البته این که این توابع sin و cos هستند، به این معنا است که sin، cos ها با طول موج های تابع مکان هستند چون پتانسیل هم تابع مکان است، بنابراین تابع sin معمولی نیست، یعنی sin ای نیست که همه جا به یک صورت نوسان کند، بلکه طول موج نوسان می‌تواند تابع مکان باشد ولی به هر حالت نوسانی است. وقتی می‌گوییم exp ای است به این معنا است که این exp بستگی به شکل پتانسیل دارد اما شکل کلی آن نمایی است.

* اگر $E < \lim_{|x|\to\infty} V(\vec{x}')$ باشد، ویژه مقادیر انرژی کوانتیده می‌شود، در غیر اینصورت انرژی پیوسته خواهد بود.



یعنی همیشه کوانتش انرژی از اعمال شرایط مرزی بدست می‌آید، یعنی شرط اعمال کنیم که بی‌نهایت تابع موج شکل باید صفر باشد، در این صورت به کوانتش انرژی منجر می‌شود. مقدار کوانتش به نوع پتانسیل و شرایط مرزی بستگی دارد.



سؤال: در پتانسیلی که احتمال تونل زنی هست چطور؟
تونل زنی وقتی اتفاق می‌افتد که تابع دوباره پایین بیاید. اما اگر بدانیم اگر پتانسیل در فواصل دور بزرگتر از E باشد، یعنی همین طور افزایش پیدا کند و پایین نیاید کاهش انرژی رخ می‌دهد. پس در حالت تونل زنی کاهش رخ نمی‌دهد.

یعنی کاهش زمانی رخ می‌دهد که تابع پس پایین نیاید و همین طور بالا برود. البته در ناحیه‌ای می‌تواند کوچکتر باشد. اما چیزی که تعیین کننده است، رفتار آن در فواصل دور است.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x},t) \quad \text{(I)}$$

حال می‌خواهیم ببینیم از این معادله چه چیزهایی می‌توانیم بدست آوریم:

اولاً تابع موج به توان ۲ معرف چگالی احتمال است:

$$\rho(\vec{x},t)\,dx = |\Psi(x,t)|^2\,dx \quad :$$

احتمال یافتن ذره در بازه x و $x+dx$ در زمان t

چگالی احتمال (مقدار احتمال در واحد طول) ← وقتی ضرب در dx می‌شود خود احتمال می‌شود.

حال همانطور که آشنا هستیم اگر بخواهیم تغییرات زمانی چگالی را وقتی به صورت بالا می‌نویسیم حساب کنیم و با استفاده از معادله شرودینگر مشتق‌های زمانی Ψ و Ψ^* را تبدیل به مشتقات مکانی کنیم به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}\Psi^* + \Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \quad \text{(II)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0} \quad \text{(III)}$$

قانون پیوستگی

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2im}\left[\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right] \quad \text{(IV)}$$

برای بدست آوردن $\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$، از مزدوج معادله شرودینگر را می‌گیریم و به صورت زیر از آن استفاده می‌کنیم:

$$-i\hbar\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]\Psi^* \quad \text{(V)}$$

از دو معادله (V) و (I) در معادله (II) استفاده می‌کنیم و به نتایج بورن‌گر معادله (III) می‌رسیم.

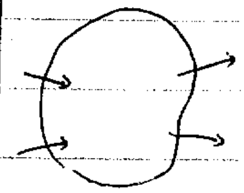
$\vec{J}$ را می‌توانیم این طور در نظر بگیریم:

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2im}\Big[\overbrace{\underbrace{\psi^*\vec{\nabla}\psi}_{\equiv a+ib} - \underbrace{\psi\vec{\nabla}\psi^*}_{\to\ a-ib}}^{2i\,\mathrm{Im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi)}\Big] = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi)$$

حال می‌خواهیم تعبیر این رابطه را نگاه کنیم. به دو صورت می‌توان این رابطه را تعبیر کرد. یک صورت که قبلاً هم با آن آشنا هستیم این است که اگر طرفین معادله (III) را روی حجم انتگرال‌گیری کنیم

(III): $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)\,d^3x + \int \nabla\cdot\vec{J}\,d^3x = 0$$



در انتگرال اول چون مشتق جزئی نسبت به t می‌گیرد و به x کاری ندارد می‌توان $\frac{\partial}{\partial t}$ را از انتگرال بیرون آورد.

انتگرال دوم را هم طبق قضیه دیورژانس می‌توان تبدیل به انتگرال سطحی کرد و به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int \rho(\vec{x},t)\,d^3x}_{\text{تعداد کل ذرات داخل حجم } V} + \underbrace{\int \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS}_{\text{عبور ذرات در واحد سطح و زمان}} = 0$$

این رابطه می‌گوید چون ρ چگالی ذرات است پس انتگرال آن در حجم می‌شود تعداد کل ذرات در داخل حجم V. پس جمله اول می‌گوید تعداد کل ذرات با زمان هم تغییر عوض می‌شود. طبق اصل بقای ذرات، تغییر در تعداد ذرات از این ناشی می‌شود که یک تعداد ذره داخل یا خارج می‌شوند. این جمله دوم معرف شار عبوری و خروجی ذرات سیستم است. پس از این رابطه $\vec{J}$ به این معنا است که مقدار عبور ذرات در واحد سطح و زمان را بیان می‌کند.

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ پس رابطه مقابل رابطه اصل بقای ذرات یا قانون پیوستگی است.

به یک صورت دیگر هم می‌توان گزاره که بیانگر شار ذرات است، برای این کار انتگرال $\vec{J}$ را روی فضا بدست می‌آوریم:

$$\int \vec{J}\,d^3x = \frac{1}{2m}\Big[\underbrace{\frac{\hbar}{i}\int \psi^*\vec{\nabla}\psi\,d^3x}_{\langle\vec{p}\rangle_t} - \underbrace{\frac{\hbar}{i}\int \psi\vec{\nabla}\psi^*\,d^3x}_{\langle\vec{p}\rangle_t^*}\Big]$$

مقدار چشمداشتی تکانه در زمان t

می‌خواهیم ببینیم کمیت داخل کروشه چیست. اگر حالت

$$\langle\alpha,t|\vec{p}|\alpha,t\rangle = \int \psi_\alpha^*(x,t)\,\frac{\hbar}{i}\nabla\,\psi_\alpha(\vec{x},t)\,d^3x$$

$|\alpha,t\rangle$ باشد، مقدار انتظاری تکانه را می‌خواهیم در حالت کلی بنویسیم که به صورت مقابل می‌شود. در معادله $\int \vec{J}\,d^3x$ رابطه اول سمت راست همان عبارت و جمله دوم dual آن است. ولی نشان داده است $\langle\vec{p}\rangle_t$ با $\langle\vec{p}\rangle_t^*$ برابر است

چون اگر $|\beta\rangle$ را به این صورت در نظر بگیریم

$$\vec{p}\,|\alpha\rangle = |\beta\rangle \longrightarrow \langle\beta| = \langle\alpha|p^{\dagger}$$

داریم:

$$\langle\alpha,t|\vec{p}\,|\alpha,t\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^{*} = \langle\alpha|p^{\dagger}|\alpha\rangle^{*} = \langle\alpha|p|\alpha\rangle^{*}$$

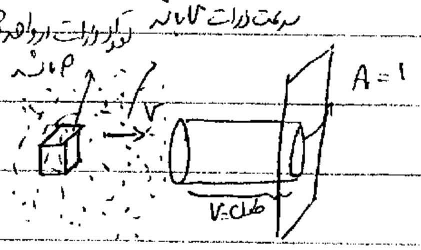
یعنی حقیقی است:

$$\Rightarrow \langle p\rangle = \langle p\rangle^{*}$$

پس $\int \vec{J}\, d^3x$ می‌شود:

$$\int \vec{J}\, d^3x = \frac{1}{2m}\left(\langle\vec{p}\rangle_t + \langle\vec{p}\rangle_t^{*}\right) = \frac{\langle\vec{p}\rangle_t}{m} = \text{از جنس سرعت} \quad ①$$

حالا به شرطی انتگرال حجمی یک بردار سرعت آن ذرات را می‌دهد که این بردار چگالی ذرات باشد



اگر تعدادی ذرات با چگالی ρ داشته باشیم و سرعت همهٔ آنها v باشد، در این صورت تعداد ذراتی که از سطح $A=1$ عبور می‌کنند در واحد زمان برابر است با اینکه ببینیم در یک استوانه به طول v چند تا ذره نشسته است، چون همهٔ ذراتی که در این استوانه هستند یک در واحد زمان به اندازهٔ vt جلو می‌روند. اگر طولشان را v بگیریم در عرض یک ثانیه ذره‌ای که در انتها سمت چپ استوانه قرار دارد از وجه مقابل خارج می‌شود پس ذرات جلوتر از آن هم خارج می‌شوند. پس تمام ذراتی که در داخل استوانه به ارتفاع v نشسته‌اند حتماً از سطح مورد نظر عبور می‌کنند پس:

$$\text{تعداد ذرات عبور کننده در واحد زمان و واحد سطح} = \text{تعداد ذرات داخل استوانه} = \underbrace{\overset{\text{طول استوانه}}{v} \times \overset{\text{سطح }A}{1}}_{\text{حجم استوانه}} \times \underset{\text{چگالی ذرات}}{\rho}$$

پس همیشه ρv برابر flux یا شار است.

حال اگر $\vec{J}$ را به صورت مقابل در نظر بگیریم، انتگرال آن در حجم را اگر داشته باشیم $\vec{v}$ می‌شود که همین هم می‌شد

$|\psi|^2$ اگر نرمالیزه باشد $=1$

$$\text{اگر}\ \vec{J} = \rho\vec{v} \longrightarrow \int \vec{J}\, d^3x = \vec{v}\int \rho\, d^3x = \vec{v} \quad ②$$

بنابراین انتگرال حجمی شار ذرات است که به سرعت منجر می‌شود و چون در بالا انتگرال مورد نظر $\frac{\langle p\rangle_t}{m}$ شد بنابراین $\vec{J}$ شار ذرات است. بنابراین این اثبات بیانگر این است که $\vec{J}$ این که در رابطه وارد شده معرف تعداد ذراتی است که این تابع موج در واحد سطح در زمان نشان می‌دهد که عبور می‌کند:

$\vec{J} = \text{flux}$ شار ذرات

حال می‌خواهیم این تعبیر $\vec{J}$ جلوتر برویم.

داشتیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \rho = |\psi|^2 \end{cases}$$

از رابطه $\rho = |\psi|^2$ می‌توانیم بفهمیم که اندازه ψ را به توان دو برسانیم، ρ می‌شود و یعنی ψ را اگر به صورت یک عدد مختلط بنویسیم باید دارای اندازه $\sqrt{\rho}$ باشد که دارای یک فاز است که در $|\psi|^2$ حذف می‌شود که این فاز را به صورت $\frac{S}{\hbar}$ می‌نویسیم: دارای دیمانسیون گشتاور زاویه‌ای

$$\psi = \underbrace{\sqrt{\rho}}_{\text{چگالی احتمال}} \; \underbrace{e^{iS/\hbar}}_{\text{فاز}}$$

$\rho = \rho(x,t)$

$S = S(x,t)$

اگر فاز را به این صورت بنویسیم که دارای دیمانسیون گشتاور زاویه‌ای می‌شود.

برای این ψ این که به این صورت تعریف کردیم ابتدا چگالی جریان را برای آن بدست می‌آوریم، برای این کار باید $\psi^*\nabla\psi$ را حساب کنیم

$$\psi^*\nabla\psi = \overbrace{\sqrt{\rho}\, \cancel{e^{-iS/\hbar}}}^{\psi^*} \overbrace{\left\{ (\nabla\sqrt{\rho})\, \cancel{e^{iS/\hbar}} + \sqrt{\rho}\,\frac{i}{\hbar}(\vec{\nabla} S)\, \cancel{e^{iS/\hbar}} \right\}}^{\nabla\psi}$$

$$= \sqrt{\rho}\,\vec{\nabla}\sqrt{\rho} + \frac{i}{\hbar}\rho\,\vec{\nabla} S$$

پس حال می‌توان $\vec{J}$ را برای آن نوشت:

$$\mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi) = \frac{\rho\,\vec{\nabla} S}{\hbar}$$

داشتیم: $\vec{J} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi) = \frac{\rho\vec{\nabla} S}{m} = \rho \times \frac{\vec{\nabla} S}{m}$

این شبیه را مقایسه کنیم با جریان یک شار ذرات معمولی کلاسیک، می‌بینیم که به صورت حاصل‌ضرب چگالی (ρ) ضربدر چیزی که از جنس سرعت است، درآمده یعنی $\frac{\vec{\nabla} S}{m}$ کار سرعت را برای این شار انجام می‌دهد و می‌توانیم آن را سرعت مؤثر در نظر بگیریم (چون در ذرات کوانتومی نمی‌توان به علت وجود عدم قطعیت به طور دقیق از سرعت صحبت کرد).

سرعت مؤثر

$$\text{"}\vec{v}\text{"} = \frac{\vec{\nabla} S}{m}$$

$$\vec{J} = \frac{\text{تعداد ذرات}}{\text{حجم}} \Big/ (\text{واحد سطح} \times \text{واحد زمان}) = \rho \times \frac{\rho\, S \times x}{t \times S} = \rho\frac{x}{t} = \rho\vec{v}$$

برای اینکه این موضوع را در یک مثال خاص ببینیم، مثال ذره آزاد را در نظر می‌گیریم.

مثال ذره آزاد:

هامیلتونی برابر این صورت است:

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m}$$

چون هامیلتونی با تکانه جابجا می‌شود $[H, P] = 0$

ویژه حالتهای H، همان ویژه حالتهای $\vec{P}$ است.

$$U_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p.x} \leftarrow \text{یک بعدی}$$

ویژه توابع تکانه در فضای مکان در حالت سه بعدی این صورت است:

$$\text{سه بعدی} \quad U_{\vec{p}}(\vec{x}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} e^{i\frac{\vec{p}.\vec{x}}{\hbar}}$$

بنابراین در این مورد خاص $\psi(\vec{x}, t)$ به صورت زیر می‌شود:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{\overset{\downarrow}{-iEt/\hbar}} U_{\vec{p}}(\vec{x}) = \underbrace{C}_{\text{ضریب زمان ناپذیر}} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}Et + i\frac{\vec{p}.\vec{x}}{\hbar}}}_{\text{فاز}}$$

$$\frac{\vec{p}^2}{2m}$$

پس در مورد ذره آزاد تابع موج به صورت بالا است.

بنابراین اگر این را با آن حالت کلی مقایسه کنیم که در صفحه پیش برای ψ نوشتیم

مقایسه کنیم، ضریب C جای $\sqrt{\rho}$ را می‌دهد و فاز برابر $\frac{S}{\hbar}$ است:

$$\text{از قبل}: \psi = \sqrt{\rho}\, e^{iS/\hbar}$$

پس نتیجه می‌گیریم:

$$\underset{\text{ذره آزاد}}{S} = \vec{p}.\vec{x} - Et$$

بنابراین ارتباط ψ با مقادیر را حسب فاز آن به صورت $\psi = \sqrt{\rho}\, e^{iS/\hbar}$ نوشت که فاز آن $\frac{S}{\hbar}$ است ولی نمی‌دانیم چیست. ولی در پایین ثابت کردیم که برای S وجود دارد. برای ذره آزاد می‌توان مسئله را به سادگی حل کرد و S را بدست آورد که در پایین آن در بالا نشان داده شده است. حال باید $\frac{\vec{\nabla} S}{m}$ را حساب کنیم و ببینیم برای ذره آزاد این موضوع حل سرعت را بازی می‌کند یا نه؟

$$\frac{\vec{\nabla} S}{m} = \frac{\vec{P}}{m} \Rightarrow \quad \frac{\vec{\nabla} S}{m} \text{ تعبیر سرعت برای}$$

صحیح است.

اگر بتوانیم معادله شرودینگر را بطور کامل حل کنیم، نیازی نیست که از این مکانیک استفاده کنیم. حال یک حالت است که ...

معادله شرودینگر را با پتانسیل‌ها تا کنون حل کنیم، می‌خواهیم ببینیم که راهی هست که این فاز را بدست آوریم چون این فاز تمام مسئله است و تمام اطلاعات مسئله را دارد.

بنابراین اگر بتوانیم این فاز را به یک روشی بدست آوریم و یا بصورت تقریبی بدست آوریم، اهمیت دارد. این فاز ظاهراً موجود مبهم است یعنی مقدار زیادی از جوابهای معادله شرودینگر در این فاز که قرار دارد و باید بتوانیم به کمک معادله زیر را حل کنیم و از آن فاز را بدست آوریم. ببینیم این Ψ را در معادله شرودینگر بگذاریم و ببینیم روی کمیت چه شرطی می‌گذارد:

$$\Psi = \sqrt{\rho}\, e^{iS/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V\right)\Psi$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} + \sqrt{\rho} \times \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t}\right) e^{iS/\hbar} \quad \text{(I)}$$

$$\vec{\nabla} \Psi = \left(\vec{\nabla} \sqrt{\rho}\, e^{iS/\hbar} + \sqrt{\rho} \times \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S\, e^{iS/\hbar}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \Psi = \left[\nabla^2 \sqrt{\rho} + \frac{2i}{\hbar} \vec{\nabla}\sqrt{\rho} \cdot \vec{\nabla} S - \frac{1}{\hbar^2} \sqrt{\rho}\, (\vec{\nabla} S)^2 + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho}\, \vec{\nabla}^2 S\right] e^{iS/\hbar} \quad \text{(II)}$$

ببینیم وقتی Ψ به این صورت هست معادله شرودینگر چه می‌شود. حد کلاسیک هم یعنی حد $\hbar \to 0$ است.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

در سمت چپ وقتی $i\hbar$ را در رابطه (I) ضرب کنیم جمله اول ضریب $\hbar$ پیدا می‌کند که در حد $\hbar \to 0$ صفر می‌شود و فقط جمله دوم باقی می‌ماند.

در سمت راست وقتی $-\frac{\hbar^2}{2m}$ را ضرب کنیم در رابطه (II) فقط جمله سوم باقی می‌ماند و وقتی V را ضرب کنیم در Ψ، بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$-\cancel{\sqrt{\rho}} \frac{\partial S}{\partial t} \cancel{e^{iS/\hbar}} = \frac{1}{2m} \cancel{\sqrt{\rho}} (\vec{\nabla} S)^2 \cancel{e^{iS/\hbar}} + V \cancel{\sqrt{\rho}}\, \cancel{e^{iS/\hbar}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V(\vec{r}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

یعنی معادله شرودینگر که اصلاً یک پایه کوانتومی داشت در حد $\hbar \to 0$ به این معادله تبدیل شود.

حال ببینیم که این معادله چیست!

معادله بدست آمده را بعلت شباهت دو جمله اول با هامیلتونی می‌توان آن را به این صورت هم نوشت:

$$\frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V(\vec{r}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$H(\vec{p} = \vec{\nabla} S, \vec{r}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

معادله هامیلتون ژاکوبی

توجه کنیم که ما از معادله شرودینگر شروع کردیم و یک فرم خیلی کلی برای تابع موج گرفتیم و حد کلاسیک آن تبدیل به معادله هامیلتون ژاکوبی شد، یعنی می‌گوید فاز تابع موج باید در این معادله در حد کلاسیک صدق کند.

برای اینکه ببینیم برای این معادله مثالی در کلاسیک هست یا نه، بحثی که در مورد تبدیلات کانونیک داشتیم را یک بار دیگر مرور می‌کنیم. در تبدیلات کانونیک گفتیم برای یک دستگاه مختصات دلخواه تابع لاگرانژی از این معادله تبعیت می‌کند.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L = T - V$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$H(p_i, q_i) = \sum p_i \dot{q}_i - L$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

همچنین گفتیم که می‌توان تغییر مختصه داد و از p, q و H به مختصات P, Q و هامیلتونی جدید به نام K رفت و به این تبدیل مختصه، تبدیل کانونیک می‌گوییم (تبدیل جایی)

$$(p, q) \,,\, H \xrightarrow{\text{تبدیل کانونیک}} (P, Q) \,,\, K$$

به شرطی که در مختصات جدید بتوان تابعی پیدا کرد که در آن ارتباط بین Q و P از نوع ارتباط بین q و p باشد یعنی:

$$P_i = P_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

$$Q_i = Q_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad , \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

۵

ارتباط K با H به این صورت است:

$$K = H_{(q,p)} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

اگر بخواهیم جوابهای دسته جدید با دسته قدیم یکی باشد، این ارتباط باید بین K و H باشد.

F یک تابع از مختصات جدید و قدیم است که به آن مولد تبدیل هم می‌گویند، که می‌تواند به این صورتها باشد:

$F_1(q, Q)$

$F_2(q, P)$

$F_3(p, Q)$

$F_4(p, P)$

که در هر کدام از این موارد داشتن F معادل با داشتن تبدیل کانونیک است. یعنی با داشتن F می‌توان ارتباط بین مختصات را بدست آورد.

مثلاً برای F_2 ارتباط بین مختصات جدید و قدیم با استفاده از این دو معادله بدست می‌آید:

$$F_2(q, P) \longrightarrow \begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{cases}$$

این دو معادله به ما اجازه می‌دهد که تبدیل کانونیک مسئله را بدست آوریم.

بطور کلی می‌توان گفت به ازای هر مولد تبدیل کانونیکی وجود دارد، یعنی هر تابعی از مختصات قدیم و مختصات جدید (مثلاً F_2) بدهند حتماً می‌توان برای آن یک تبدیل کانونیک پیدا کرد که برحسب این تبدیل کانونیک هامیلتونی K خواهد شد.

اصولاً دلیل استفاده از تبدیل کانونیک این است که ممکن هامیلتونی خیلی پیچیده باشد ولی ممکن است بتوان تبدیل کانونیکی پیدا کرد که هامیلتونی بتوان خیلی ساده شود و مسئله خیلی راحت حل شود.

پس با هر یک از F_1 و F_2 و F_3 و F_4 ای می‌توان تبدیل کانونیک را پیدا کرد که مثلاً برای F_2 به دو معادله تبدیل شد.

پس برای F_2 می‌توان نوشت:

(چون F_2 تابع $\vec{P}$ و $\vec{q}$ است)

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \rightarrow p_i = p_i(\vec{q}, \vec{P}, t) \xrightarrow{\text{می‌توان نوشت}} p_i = p_i(\vec{P}, Q, t)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \rightarrow Q_i = Q_i(\vec{q}, \vec{P}, t) \xrightarrow{\text{می‌توان نوشت}} q_i = q_i(\vec{Q}, \vec{P}, t)$$

و الان یعنی حل مسئله و ارتباط بین مختصات قدیم و جدید بدست آمد با داشتن F_2. به ازای هر F_2 ای می‌توان ارتباط بین

مختصات جدید و قدیم را بدست آورد و بعد هامیلتونی K را بدست آورد. K همان H است به اضافه یک مشتق ولی H برحسب q و p است، F_2 هم تابعی از q و P است، پس در رابطه زیر با q و p با استفاده از دو معادله صفحه گذشته همه چیز برحسب مختصات جدید یعنی P و Q بدست می‌آید:

$$K = H_{(p,q)} + \frac{\partial F(q,P)}{\partial t}$$

$K(P, Q, t)$

بنابراین با داشتن هر تابع مولدی (هر F ای) آن تبدیل در نهایت کامل می‌شود خواهد بود.

یکی از فواید مهم این کار این است که می‌توان هامیلتونی‌هایی بدست آورد که حل ساده‌تری داشته باشند. یعنی پیچیدگی مسئله برای حل مسئله اولیه به پیدا کردن یک F_2 مناسب منتقل می‌شود، یعنی با پیدا کردن یک تابع مولد مناسب می‌توان مسئله را از نظر حل ساده کرد. البته پیدا کردن تابع مولد یا تبدیل کانونیک خودش پیچیده است.

یک مورد خیلی ویژه پیدا کردن هامیلتونی جدیدی وجود دارد که آیا می‌توان با تبدیل مختصاتی پیدا کرد، که اصلاً هامیلتونی جدید که تابع P و Q است تابع بسیار ساده‌ای بشود یعنی صفر شود؟

$(q, p, H) \longrightarrow (Q, P, K=0)$

اگر این تبدیل کانونیک را بتوان پیدا کرد، مسئله ما حل است

$\underset{\text{ثابت می‌شوند}}{\overset{\shortparallel}{}}$ $\underset{\text{ثابت می‌شوند}}{\overset{\shortparallel}{}}$ چون

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

اگر $K=0$ باشد، $\dot{Q}_i$ و $\dot{P}_i$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه P_i و Q_i ثابت می‌شوند که این ثابت‌ها جواب مسئله هستند.

چون می‌توانیم این طور بنویسیم:

$$q_i = q_i(Q_i = \alpha_i, P_i = \beta_i, t)$$

$$p_i = p_i(Q_i = \alpha_i, P_i, \beta_i, t)$$

که مسئله حل شد و q و p ها برحسب یک سری ثابت بدست آمد.

یعنی اگر بتوان یک هامیلتونی پیدا کرد که مقدار آن صفر باشد در آن صورت مسئله حل شده است چون مختصات

مختصات جدید با این هامیلتونی ثابت خواهند بود و مقدار ثابت با هیئت مکانی و تکانه در مختصات قدیم را از طریق معادله مورد نظر خواهد داد. پس این روش، یک گروه خاص از تبدیلات کانونیک است یعنی تبدیلات کانونیکی که ما را به هامیلتونی صفر می‌برد. حال ببینیم چطور می‌توانیم به این تبدیلات برسیم.

می‌خواهیم F_2 را چنان بدست آوریم که $K=0$ باشد. پس باید معادله‌ای که تعریف K است را حل کرد و جواب آن برابر صفر گذاشت:

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F_2(q_i, P_i, t)}{\partial t} = K = 0$$

باید توجه کنیم که $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ است.

در این مورد خاص، F_2 را S می‌نامند: Hamilton's principal function

$$H\left(q_i, p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1)$$ معادله هامیلتون-ژاکوبی

باید این معادله حل شود و از روی این معادله S محاسبه شود. این را اصطلاحاً یک معادله دیفرانسیل برای S است چون برحسب q و مشتقات مکانی و زمانی S است و S را باید به عنوان تابعی به صورت زیر بدهد

$$S(\vec{q}, \vec{\alpha}, t)$$

ثابت

$\vec{\alpha}$ را می‌توان $\vec{P}$ گرفت

هر معادله دیفرانسیلی یک سری اعداد ثابت دارد و چون S را به صورت تابعی از q و P می‌خواهیم می‌توانیم این اعداد ثابت را $\vec{P}$ بگیریم چون به ازای $K=0$ ها P ثابت می‌شود

معادله (1) به ما این اجازه را می‌دهد که S را بدست آوریم و بعد از آن معادله S را بدست آوریم، چون هامیلتونی جدید در آن صفر است و P و Qهای جدید ثابت هستند در آن صورت مسئله اصلی ما حل می‌شود.

مسئله اصلی ما در اصل بدست آوردن این روابط است:

$$\begin{cases} q = q(t) \\ p = p(t) \end{cases}$$ مسئله اصلی ما !!

به معادله (1) که معادله‌ای برای تعیین S است، معادله هامیلتون-ژاکوبی می‌گوییم.

با مقایسه این دو رابطه می‌بینیم که
به کمک تعمیم معادله شرودینگر در حد کلاسیک دقیقاً
همان معادله هامیلتون-ژاکوبی است.

$$H\left(q_i, p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$H(\vec{p} = \vec{\nabla} S, \vec{x}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

بنابراین به صورت خیلی عمیقی مکانیک کوانتوم و فیزیک کلاسیک با هم ارتباط دارند.

یک ارتباط برای مقادیر چشم‌داشتی به دست آوردیم که همان قضیه ارنفست بود که مقادیر چشم‌داشتی از معادله نیوتن تبعیت می‌کنند. چون معادله نیوتن، معادله غیرخطی است و مکانیک کوانتومی یا هم غیرخطی است. یا مکانیک کوانتومی را غیرخطی می‌خواهیم پس باید به فیزیک کلاسیک غیرخطی منجر شود نه فیزیک کلاسیک خطی. بنابراین معادله شرودینگر طوری تنظیم شده و وجود دارد که مقادیر چشم‌داشتی عملگرها از معادله نیوتن تبعیت می‌کنند که موضوع مهمی است. اما وقتی در مورد مقادیر چشم‌داشتی و ماهیت آن صحبت می‌کنیم امکان دارد ماهیت موجی آنها از بین برود که طبیعی است. اما در یک حد به در مورد تابع موج و فاز آن صحبت می‌کنیم و می‌بینیم که این که در حد کلاسیک معادله شرودینگر یک معادله معمول فیزیک کلاسیک است.

حال چرا اسم آن را S می‌گذاریم یا در کلاسیک که را ابزار کنش (action) لقب می‌دهیم:

$$S = \int L\, dt \quad \text{کنش}$$

حال ببینیم این که اینجا اسم گذاشتیم واقعاً همان کنش است یا نه، برای این کار $\frac{dS}{dt}$ را از نو می‌نویسیم:

$$\frac{dS(q_i, \alpha_i, t)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_i}}_{p_i} \dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{-H} = L \Longrightarrow \frac{dS}{dt} = L$$

$-H \rightarrow$ طبق معادله هامیلتون ژاکوبی

$$\Longrightarrow S = \int L\, dt = \text{action}$$

این چیز جالبی به وجود آمد، به همراه معادله هامیلتون ژاکوبی که معادله‌ای است برای تعیین تابع مولد تبدیل کانونیک که هامیلتونی را صفر می‌کند، چیزی نیست جز کنش.
یعنی تابع مولدی که ما را به هامیلتونی صفر می‌برد، کنش آن سیستم است.

نکته دیگری که وجود دارد این است که در مکانیک کوانتومی هر تابع موجی را می‌توان به صورت یک اندازه ضرب در یک فاز نوشت، آن فاز، کنش کلاسیک سیستم است، یعنی تابع موج به صورت:

$$\psi = \sqrt{\rho}\, e^{i \frac{S_{cl}}{\hbar}}$$

این نکته اخیر و این ترتیب اساس روش تقریب WKB است که یکی از چیزهایی است که در جلسات بعد بحث می‌کنیم

که ترتیب WKB روشی است برای حل معادله شرودینگر. همچنین $e^{iS/\hbar}$ ایده و انگیزه‌ای شده که فاینمن بتواند انتگرال مسیر را برای مکانیک کوانتومی مطرح کند. خود این نکات یعنی WKB و انتگرال مسیر فاینمن نکات بسیار مهمی هستند که به نوعی اهمیت آنها بیشتر از خود مکانیک کوانتومی است چون حالت تعمیم است.

این معادله یعنی معادله همیلتون ژاکوبی دارای خصوصیتی است که:

اگر H تابع صریح زمان نباشد

$$① \; H\left(q_i, P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

در این صورت همواره که راه‌حل آن به این صورت نوشت که قسمت زمانی آن جدا شود (روش جداسازی متغیرها):

Hamiltan's characteristic function

$$S(\vec{q}, \alpha, t) = \hat{W}(q, \alpha) - \alpha_1 t$$

Hamiltan's principal function

حال اگر که را در معادله ① قرار دهیم داریم:

$$\rightarrow H\left(\vec{q}, P_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1 = E$$

این α همان انرژی سیستم است.

در ضمن اگر بخواهیم ارتباط آن را با مکانیک کوانتومی ببینیم این طور است که در مکانیک کوانتومی که نقش فاز را بازی می‌کرد پس با نتیجه‌ای که در بالا بدست آوردیم، $e^{iS/\hbar}$ تبدیل می‌شود به:

$$e^{iS/\hbar} = e^{\frac{i}{\hbar}(W - Et)} = e^{-iEt/\hbar} \, e^{iW/\hbar}$$

این شکلک به این معناست که تابعیت زمانی تابع موج ψ به صورت $e^{-iEt/\hbar}$ است که از قبل هم می‌دانستیم که اگر هامیلتونی تابع صریح زمان نباشد عملگر تحول تبدیل به $e^{-iHt/\hbar}$ می‌شود که روی مقدارها $e^{-iEt/\hbar}$ می‌شود. پس همین نتیجه ما همان حرف است در فیزیک کلاسیک.

$$\psi = \sqrt{\rho}\, e^{iS/\hbar} = \underbrace{e^{-iEt/\hbar}}_{\text{تابعیت زمانی تابع موج}} \sqrt{\rho}\, e^{iW/\hbar}$$

مثال:

نوسانگر هماهنگ یک بعدی:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

برای معادله هامیلتون ژاکوبی باید H را برداریم و q ها را ثابت نگه داریم و به جای P عبارت $\frac{\partial S}{\partial q}$ قرار دهیم:

H.J. equation: $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ (I)

چون هامیلتونی مستقل از زمان است، مطابق با صفحه پیش برای آن داریم:

$$S(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - \alpha_1 t \qquad ; \alpha_1 = E$$

بنابراین S را به این صورت می‌گیریم و در رابطه H.J.eq. می‌گذاریم:

$$S = W - Et \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = E$$

$$W = \sqrt{2mE}\int dq\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}} \qquad \text{(III)}$$

ما در واقع خود W را نیاز نداریم بلکه به علت کانونیک مشتق W را نیاز داریم:

α ها برابر بودند با تکانه های جدید (ثابت‌ها):

$$\begin{cases} P = E \\ Q = \beta : \text{ثابت} \end{cases}$$

Q جدید را هنوز بدست نیاورده‌ایم ولی می‌دانیم مقدار ثابتی است.

پس یعنی اگر بخواهیم تبدیلی بدست آوریم که در آن هامیلتونی جدید صفر باشد باید تکانه جدید را انرژی بگیریم یعنی این تعریف که تکانه جرم × سرعت است اینجا دیگر به هم می‌خورد و ما می‌توانیم هر ترکیبی را تکانه بگیریم همچنین برای مکان

داریم: $\underset{\beta}{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \underset{E}{P}} \xrightarrow{\text{تبدیل نوع ۲}} \beta = \frac{\partial S}{\partial E} \overset{\text{(II)}}{=} \frac{\partial W}{\partial E} - t \qquad \text{(IV)}$

$$\text{(III)},\text{(IV)} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{2m}{E}}\underbrace{\int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}}}_{\frac{1}{\omega}\sin^{-1} q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}} - t$$

$$\sin^{-1} q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} = \omega(t+\beta) \longrightarrow q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin\omega(t+\beta)$$

پس مسئله حل شد!

ما در مسئله نوسانگر هماهنگ هدفمان این است q و p را بدست آوریم که در اینجا بدست آوردیم و بصورت زمانی شد.

روش هامیلتون ـ ژاکوبی ، معادله‌ای که باید حل کنیم تبدیل به معادله (II) می‌شود و حل آن تبدیل به تعیین W می‌شود و با مشتق‌گیری از W ارتباط بین مختصات قدیم و جدید بدست می‌آید که آن ارتباط جواب مسئله است.

$$q(0)=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin\omega\beta$$

β برابر شد با فاز حرکت در زمان صفر.

یک تبدیل کانونیک یا چیز عجیب و غریبی بدست آید اگر بخواهیم های مسئله را انرژی سیستم بگیریم و مختصات مسئله را فاز اولیه سیستم بگیریم با این مختصات و تکانه ، هامیلتونی برابر صفر می‌شود یعنی بسیار ترکیبات پیچیده‌ای برای آنها باید در نظر بگیریم.

جلسه چهاردهم : ۸۴/۸/۱۷

جلسه گذشته دیدیم که اگر معادله موج شرودینگر را به این صورت بنویسیم:

$$\Psi(\vec{x},t)=\sqrt{\rho(\vec{x},t)}\,e^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{x},t)} \qquad (I)$$

که $\sqrt{\rho(\vec{x},t)}$ چگالی است و فاز آن را با S نشان می‌دهیم.

اگر این Ψ را در معادله شرودینگر قرار دهیم و بعد از اینکه $\hbar \to 0$ میل دهیم یک سری جملات ایجاد می‌شود که دوتای آنها به این صورت بودند (البته با یک ضریب):

$\hbar \to 0$

$$i\hbar\vec{\nabla}^2 S+(\vec{\nabla}S)^2+\dots$$

حد $\hbar \to 0$ ، برای نشان این دو جمله که هر دوشان معرف مشتقات درجه ۲ ، S هستند ، به این معنی است که جمله‌ای که دارای ضریب $\hbar$ است را خیلی کوچکتر از دیگری بگیریم، یعنی:

$\hbar \to 0$

$$\hbar|\vec{\nabla}^2 S| \ll (\vec{\nabla}S)^2$$

وقتی حد $\hbar \to 0$ معادله شرودینگر را نگاه کردیم ، دیدیم که معادله شرودینگر تبدیل به معادله زیر شد:

$$\underbrace{\frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m}+V(\vec{x})}_{H(\vec{x},\,\vec{P}=\vec{\nabla}S)}+\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=0 \qquad \text{معادله هامیلتون ـ ژاکوبی} \quad (II)$$

دیدیم که این معادله ، همان معادله‌ای است که از فیزیک کلاسیک می‌دانستیم که آن را به نام معادله هامیلتون ـ ژاکوبی می‌شناسیم.

بعد در مورد معادله هامیلتون ـ ژاکوبی صحبت کردیم و گفتیم معادله‌ای است که اگر بخواهیم تبدیل کانونیک پیدا کنیم که آن تبدیل کانونیک دارای هامیلتونی صفر باشد، مولد آن تبدیل کانونیک یعنی F ها (که در این مورد خاص اسمش را S می‌گذاریم) از حل این معادله بدست می‌آید (معادله صفحه پیش).

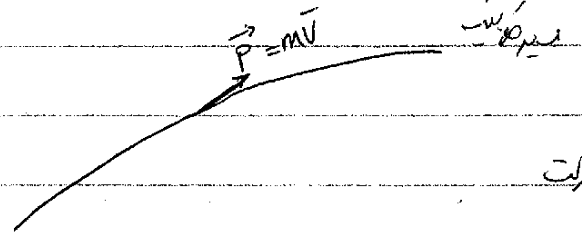
ارتباط هامیلتونی جدید با قدیم از مشتق یک موضوعی به نام S بدست می‌آید. $K = H + \frac{\partial S}{\partial t}$

داشتیم که به معنی داشتن تبدیل کانونیک و یعنی حل مسئله است. اگر بخواهیم K برابر صفر باشد به همان معادله قبل می‌رسیم. بعد گفتیم که اگر هامیلتونی تابع صریح زمان نباشد، برای S می‌توان همواره یک ترکیبی در نظر گرفت که یک تابعی از زمان و یک تابعی از زمان نباشد (جدا سازی متغیرها) $S(\vec{x},t) = W(\vec{x}) - Et$

که ضریب تابع زمان دیدیم که انرژی شد.

این اتفاق معادل با این است که تابع موج یک $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ $\Psi(x,t) = \sqrt{\rho(x,t)}\, e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)}$ $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

بگیرد که از نوع جوابهای stationary است یعنی از نوع ویژه حالتهای انرژی.

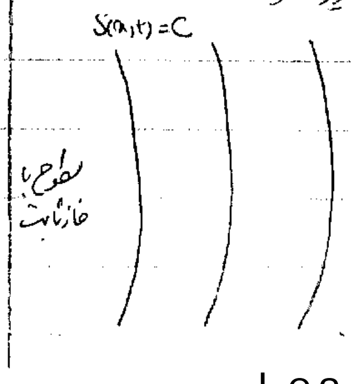


فیزیک این قضیه جالب است و قابل بررسی:

در چارچوب کلاسیک ذره یک مسیر دارد که بر روی آن حرکت می‌کند، در هر لحظه مماس بر مسیر، سرعت ذره را می‌دهد که اگر در جرم ضرب کنیم، مشتق S را می‌دهد پس به عنوان یک موضوع کلاسیک، ذره دارای چنین مشتقی است.

در چارچوب مکانیک کوانتومی، مسیری وجود ندارد، بنابراین نمی‌توان مشتقی به آن نسبت داد، چون وقتی مسیر و مشتق می‌گوییم به این معنی است که در هر لحظه مکان آن معلوم است و مشتق S آن هم (مماس بر مسیر) معلوم است، اما در فیزیک کوانتومی نمی‌توان مشتق و مکان را هم زمان تعیین کرد، بنابراین مسیر را نمی‌توان تعیین کرد، چون اگر مسیر را تعیین کنیم تعیین هم مشتق و هم مکان.

تصویر کوانتومی

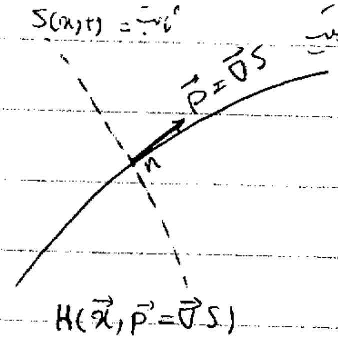


بنابراین اگر خطی به عنوان مسیر نداشته باشیم یعنی فیزیک کلاسیک، در چارچوب فیزیک کوانتومی تابع موج وجود دارد که تابع موج طبق معادله (I) یک اندازه است و یک فاز. ما حرکت یک موج را به صورت سطوح با فاز ثابت نشان می‌دهیم.

این در فیزیک کوانتومی سطوح با فاز ثابت معرف یک موج کوانتومی است که نشان دهنده یک تابع موج است.

بحث خاصی که در ابتدا کردیم (در جلسه گذشته) ارتباط بین این دو بحث را فراهم می‌کند.

در چارچوب بحث فعلی:



در این چارچوب بدست آوردیم که همین مسیر کلاسیک را در نظر بگیریم که مماس بر آن ضرب در جرم یا تکانه آن باشد، در این بحث این تکانه برابر $\vec{\nabla}S$ است که S فاز تابع موج ما است، گرادیان برای هر سطح برداری است عمود بر سطوح ثابت، بنابراین می‌توان در شکل برای نقطه n نشان داد که S باید طوری باشد که $\vec{p}=\vec{\nabla}S$ عمود بر آن باشد.

بنابراین سطوح با فاز ثابت همین شکل است که کشیدیم چون تکانه همان $\vec{\nabla}S$ است. پس بطور خلاصه یک ارتباط ویژه‌ای بین مکانیک کوانتومی و مکانیک کلاسیک وجود دارد (در همین شکل ما)، در حقیقت در فیزیک کوانتومی همه چیز با موج نشان داده می‌شود، در فیزیک کلاسیک با مسیر نشان داده می‌شود که مماس بر آن مسیر سرعت می‌شود، حال این موج کوانتومی با مسیر کلاسیکی چنان ارتباطی دارد که در نقطه مسیر کلاسیک، این موج کوانتومی عمود بر مسیر کلاسیک است، چون بردار مماس بر آن مسیر، گرادیان این موج است.

در حقیقت این طور می‌توان تصور کرد که وقتی یک موجود کوانتومی در حال حرکت است، شرایط کلاسیکی آن این است که عمود بر آن موج، یک ذره کلاسیکی حرکت کند.

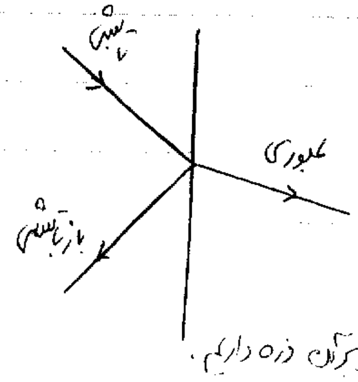
این بحث در اپتیک هم انجام می‌شود، در اپتیک ما اپتیک موجی و اپتیک هندسی داریم.

اپتیک موجی می‌گوید که نور چیزی نیست جز امواج الکترومغناطیسی

بنابراین اگر یک چشمه نورانی داریم، یعنی یک موج الکترومغناطیسی (دارم)

که در حال پخش شدن است، بنابراین سطوح با فاز ثابت

یک سری کره هستند که در حال بزرگ شدن هستند.

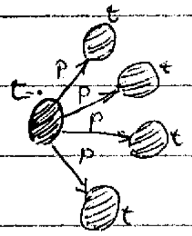


اپتیک هندسی می‌گوید مثلاً وقتی یک آینه داریم یک نور تابشی و یک نور بازتابشی و یک نور عبوری داریم، یعنی امواج نور را با یک سری خط نشان می‌دهد.

ارتباط این خطوط با موج‌های شکل بالا بصورت یک خط است که جهت شعاع نورانی را در یک جهت خاص می‌دهد.

این بحث در اپتیک مانند بحث بالا است، یعنی در اپتیک هم ما واقعاً این کار را انجام می‌دهیم (البته معنی کوانتومی کلاسیک نیست)، یعنی در اپتیک ما یک سری موج داریم که عمود بر آن ذره داریم.

در فیزیک کلاسیک، موج‌ها، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی هستند و خودشان معرف موجودات فیزیکی هستند اما در مکانیک کوانتم این طور نیست و در کوانتم توان ۲ آنها احتمال را می‌دهد، یعنی فرق ماهیتی بین این دو وجود دارد، در کوانتم Ψ را نمی‌توانیم اندازه‌گیری کنیم بلکه توان ۲ آن را اندازه‌گیری می‌کنیم. در فیزیک کلاسیک هر دو کلاسیک هستند یکی موج الکترومغناطیس کلاسیک و دیگری نور ذره‌ای کلاسیک است. اما در مکانیک کوانتم یکی کلاسیک است و دیگری کوانتمی!



در مورد عدم قطعیت کوانتمی هم می‌توان گفت: در زمان صفر ذره در یک جای معینی قرار دارد و طبق اصل عدم قطعیت یک تکانه مشخص ندارد و بلکه می‌توان چندین تکانه برای آن در نظر گرفت، پس در زمان بعد ذره می‌تواند نسبت به هر تکانه در نظر گرفته شده جای دیگر قرار گیرد، پس نمی‌توان یک جا برای آن در نظر گرفت.

تقریب WKB: مخفف اسم سه نفر: Wentzel Kramers Brillouin

تقریب WKB، حل تقریبی معادله شرودینگر است و بدست می‌آوریم که (نیم کلاسیکی)
این حل تقریبی چه زمانی درست است. روش کار بر این اساس است که S را از حل معادله (I) بدست می‌آوریم که یک معادله کلاسیک است و در رابطه (II) قرار می‌دهیم که یک رابطه کوانتمی است، چیزی که این بین بدست می‌آید را تقریب WKB می‌گویند که یک حل نیمه کلاسیک است و بدست می‌آوریم

$$\frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m}+V(x)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=0 \quad \text{(I)}$$
معادله هامیلتون ژاکوبی

$$\Psi(x,t)=\sqrt{\rho(x,t)}\, e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)} \quad \text{(II)}$$
تابع موج کوانتمی

که این حل کجاها درست است یعنی با چه تقریب‌هایی؟

یافتن یک جواب تقریبی stationary:

جواب stationary یعنی جوابی که ویژه حالت انرژی هستند یعنی تابعیت زمانی $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ دارند در حقیقت می‌خواهیم حل معادله شرودینگر مستقل از زمان را انجام دهیم

$$S(x,t)=W(x)-Et \quad \text{(III)}$$

که به صورت معادله بالا است که باید در معادله (I) صدق کند، پس ∇S به صورت ∇W ظاهر می‌شود، همچنین $\frac{\partial S}{\partial t}$ به صورت $-E$ در می‌آید.

یک بعدی:

اگر حالت یک بعدی را در نظر بگیریم رابطه (I) و (III) می دهند:

پس W اینکه در معادله هامیلتون-ژاکوبی صدق می کند از این معادله روبرو بدست می آید.

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + V(\vec{x}) = E$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dx} = \pm\sqrt{2m(E-V(x))}$$

$$W = \pm\int^{x} \sqrt{2m(E-V(x'))}\,dx' \qquad \text{(IV)}$$

پس بجای S در معادله (II) این W را منهای Et قرار می دهیم.

حال باید ρ را در معادله (II) حساب کنیم، ما دنبال جوابهای stationary هستیم یعنی با زمان چیزی عوض نشود،

ρ را با استفاده معادله پیوستگی بدست می آوریم.

معادله پیوستگی در یک بعد به این صورت است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \vec{J}}{\partial x} = 0$$ ، معادله پیوستگی

J را هم در جلسه پیش گفتیم که اگر ψ را بصورت معادله (II) در نظر بگیریم، بصورت مقابل در می آید:

$$\vec{J} = \frac{\rho}{m}\frac{\partial S}{\partial x}$$

در جوابهای پایا (stationary) چیزی با زمان عوض نمی شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ ، در جوابهای پایا stationary

چون تابعیت زمانی ψ بصورت زیر است:

$$\psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar}$$

$$\Rightarrow |\psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$$

بنابراین $|\psi|^2$ تابع زمان نیست.

بنابراین اگر $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ باشد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \vec{J}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{J} = cte$$

$$S = W - Et \rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\vec{J} = \frac{\rho}{m}\frac{\partial S}{\partial x} = cte \Rightarrow \rho\frac{\partial S}{\partial x} = \rho\frac{dW}{dx} = cte$$

$$\rho = \frac{\text{ثابت}}{dW/dx} \Rightarrow \sqrt{\rho} = \frac{\text{ثابت}}{[illegible]} = \frac{\text{ثابت}}{[illegible]} \qquad \text{(V)}$$

$IV, III, V \to II$

$E > V$

$$\psi(x,t) = \frac{\text{ثابت}}{[E - V(x)]^{1/4}} \exp\left\{ \pm \frac{i}{\hbar} \int^{x} dx' \sqrt{2m(E - V(x'))} - \frac{iEt}{\hbar} \right\}$$

این نتیجه می‌شود تقریب WKB . با این تقریب برای هر مسئله‌ای که تقریب برای آن خوب باشد جواب معادله شرودینگر را بدست می‌آوریم.

حال می‌خواهیم ببینیم این جواب کی درست است؟ همانطور که در ابتدا جلسه گفتیم حد کلاسیک یا که در حد $\hbar \to 0$ نوعی در این مورد خاص وقتی صادق است که رابطه تقابل بین مشتقات که برقرار باشد.

$$\hbar |\vec{\nabla}^2 S| \ll (\vec{\nabla} S)^2$$

که اگر برحسب W بنویسیم (چون مشتق مکانی که فقط جهت مشتق مکانی W را دارد):

$$\hbar \left| \frac{d^2W}{dx^2} \right| \ll \left| \frac{dW}{dx} \right|^2$$

مقدار $\frac{d^2W}{dx^2}$ را بدست می‌آوریم:

$$\frac{dW}{dx} = \sqrt{2m(E-V)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2W}{dx^2} = \frac{-m}{\sqrt{2m(E-V)}} \frac{dV}{dx}$$

در رابطه بالا قرار می‌دهیم:

$$\hbar \left| \frac{d^2W}{dx^2} \right| \ll \left| \frac{dW}{dx} \right|^2 \Rightarrow \frac{m\hbar}{\sqrt{2m(E-V)}} \frac{dV}{dx} \ll 2m(E-V)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V)}} \ll \frac{2(E - V(x))}{\left| \frac{dV}{dx} \right|} \quad (1)$$

این شرط برقراری WKB است یعنی

اگر این شرط برقرار باشد، WKB تقریب خوبی است.

حال ببینیم مفهوم این شرط چیست.

ابتدا سمت چپ را بررسی می‌کنیم:

$$E = \frac{P^2}{2m} + V \Rightarrow 2m(E-V) = P^2$$

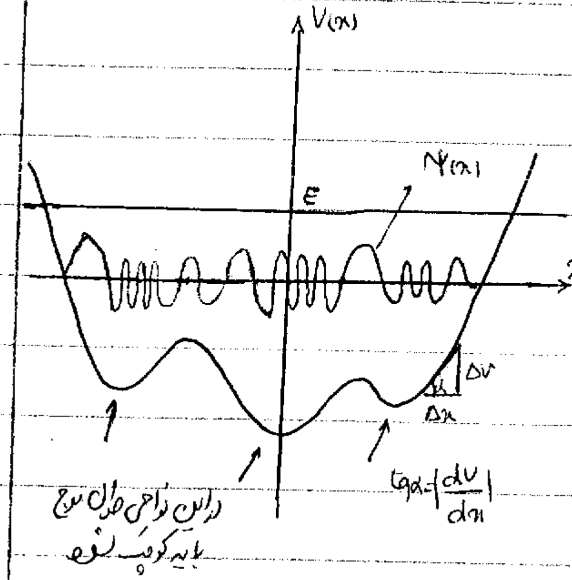
$$\sqrt{2m(E-V)} = P$$

چون تابع مکان است $(V(x))$

$$(2) \quad \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{\hbar}{P} = \lambda$$

طول موج کاهشی دوبروی

چون λ بدست آمده تابع مکان است به آن طول موج موضعی (دوبروی) می‌گوییم. برای ذره آزاد یک طول موج بیشتر نداریم ولی برای زمانی که پتانسیل تابع مکان باشد می‌دانیم برای انرژی های بزرگتر از پتانسیل جواب نوسانی (سینوسی کسینوسی) است ولی با چه طول موجی؟ سینوسی ساده نیست چون



طول موج دوبروی برای ذره آزاد است اما معادله شرودینگر خیلی پیچیده است. اما برای همه اگر انرژی بزرگتر از پتانسیل باشد نوسانی است اما با طول موج های متغیر.

یعنی در اطراف هر نقطه می‌توانیم طول موج تعریف کنیم ولی در نقاط دیگر این طول موج عوض می‌شود و هر چه $E-V$ بزرگتر شود طول موج کوتاه‌تر می‌شود.

دامنه هم تغییر می‌کند چون برابر $\sqrt{p(x)}$ است که صورت تابع پتانسیل است.

پس با استفاده از رابطه ② ، رابطه ① را می‌توانیم به این شکل بنویسیم:

ناحیه اعتبار تقریب WKB : $\lambda \ll \frac{|E-V(x)|}{|dV/dx|}$ ③

حال ببینیم مفهوم همین رابطه چیست؟ فاکتور $|E-V(x)|$ را فعلاً کنار می‌گذاریم و فقط مخرج را در نظر می‌گیریم:
اگر فقط مخرج را در نظر بگیریم:

$\frac{dV}{dx}$ شیب پتانسیل است، یعنی می‌گوید پتانسیل در هر نقطه چگونه عوض می‌شود $\lambda \ll \frac{1}{|dV/dx|}$

پس شیب تابع پتانسیل است.

λ طول موج ذره است، رابطه مقابل می‌گوید λ باید از سمت راست کوچکتر باشد. هر چه کوچکتر باشد این تقریب بهتر برقرار است. اگر هر چه کوچکتر یعنی مخرج را هر چه بزرگتر کنیم بهتر است، یعنی انرژی های هر چه بیشتر، بهتر است اگر صورت را در نظر بگیریم. (بحث صورت)

تقریب WKB در انرژی های بزرگتر بهتر صادق است.

انرژی های بزرگتر به طور دقیق یعنی $(E-V)$ بزرگتر، یعنی اختلاف بین انرژی و پتانسیل بزرگتر باشد.

$(E-V)$ بزرگتر

پس اگر صورت را در نظر بگیریم می‌گوید هر چه $E-V$ بزرگتر باشد، تقریب بهتر است.

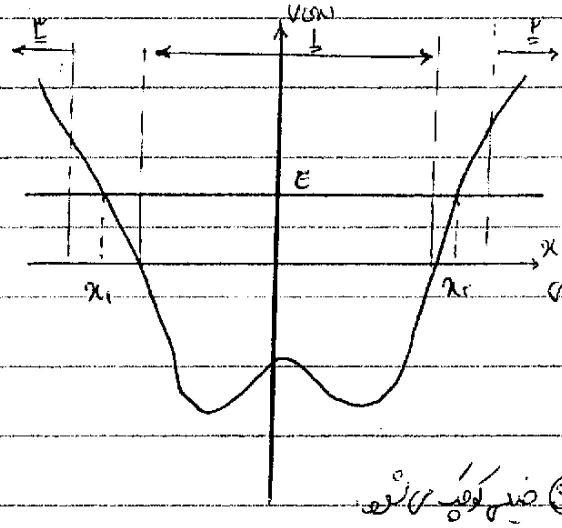
اما اگر بخواهیم مخرج را در نظر بگیریم، می‌گوید λ باید از یک مقداری کوچکتر باشد:

$$\lambda \ll \frac{1}{|dV/dx|}$$

به ازای یک $E-V$ مشخص، هر چه $\frac{1}{|dV/dx|}$ بزرگتر باشد تقریب WKB بهتر است یعنی هر چه $\frac{dV}{dx}$ کوچکتر باشد تقریب بهتر است.

یعنی پتانسیل تغییرات شدیدی نداشته باشد در فواصلی در حدود طول موج ذره.

پس هر چه انرژی بیشتر باشد و هر چه تغییرات پتانسیل کندتر باشد در فواصلی در حدود طول موج ذره، تقریب WKB بهتر است.



در یک جاهایی این تقریب قطعاً درست نیست.

به نقاط x_1 و x_2 نقاط بازگشت کلاسیک می‌گویند، چون اگر برای سیستم کلاسیک حل می‌کردیم، حتماً ذره در این نقاط برمی‌گشت.

در اطراف نقاط بازگشت چون $E-V \to 0$ میل می‌کند

تقریب WKB صادق نیست، چون صورت رابطه ③ خیلی کوچک می‌شود.

تقریب WKB برای نواحی دور از نقاط بازگشت صادق است یعنی در ناحیه 1 و ناحیه 2 و 3

جوابی که در اول دو صفحه قبل برای ψ نوشتیم چون از روی جواب‌های کلاسیک نوشتیم و در جواب‌های کلاسیک همیشه انرژی از پتانسیل بزرگتر است، بنابراین آن جواب برای ناحیه‌ای است که $E > V$ باشد.

اما نواحی 2 و 3 در فیزیک کلاسیک وجود ندارد اما در کوانتوم وجود دارد (پدیده تونل زنی ...)

در نواحی $E<V$ می‌توان نشان داد که ψ به صورت زیر است و دیگر نوسانی نیست.

$E<V$

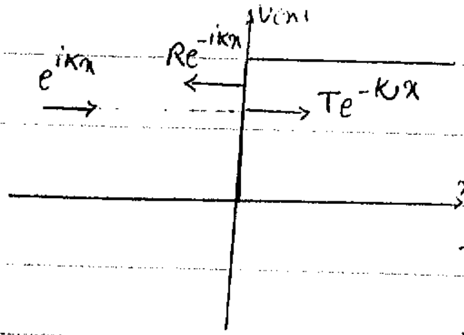
$$\psi(x,t) = \frac{\text{ثابت}}{[V(x)-E]^{1/4}} \exp\left\{ \pm \frac{1}{\hbar} \int^{x} dx' \sqrt{2m(V(x')-E)} - iEt/\hbar \right\}$$

$E>V$

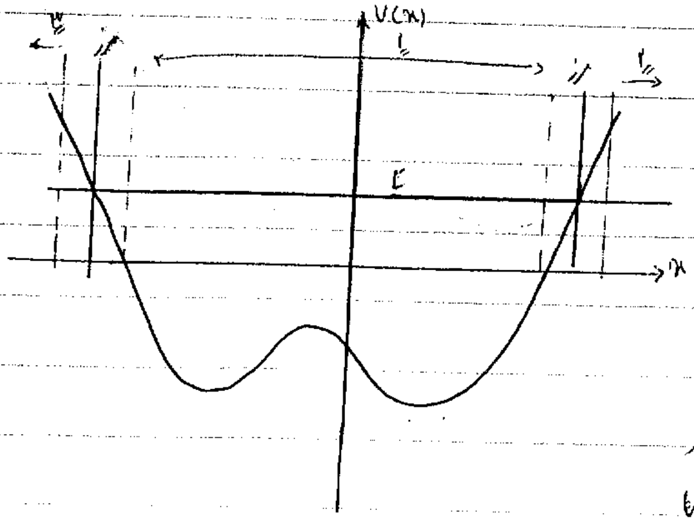
$$\psi(x,t) = \frac{\text{ثابت}}{[E-V(x)]^{1/4}} \exp\left\{ \pm \frac{i}{\hbar} \int^{x} dx' \sqrt{2m(E-V(x))} - iEt/\hbar \right\}$$

④

سؤال مهمی که وجود دارد این است که ما در جوابها در قسمت exp، "±" گذاشتیم، "±" دو جواب است که ترکیب آنها می‌تواند sin باشد و cos باشد، پس یک جواب نیست بلکه ترکیبی از sin و cos است، حال چه ترکیبی را باید بگیریم؟



معمولاً مانند کوانتوم مکانیک این کار را می‌کنیم، فرض کنیم اینجا یک پله پتانسیل وجود داشته باشد، فرض می‌کنیم ذرات از سمت چپ وارد می‌شوند و تابع موج به صورت e^{ikx} است. وقتی به پله پتانسیل برخورد می‌کند یک جواب برگشتی و یک جواب عبوری داریم که به صورت Re^{-ikx} و Te^{-Kx} وجود دارد. R و T را از مساوی قرار دادن تابع موج و مشتق‌های آن در مرز بدست می‌آوریم. پس همیشه با اعمال شرایط مرزی جواب دو ناحیه به هم وصل می‌شوند. چون در هر نقطه ما نباید بیشتر از یک جواب داشته باشیم چون یک معادله شرودینگر بیشتر نداریم و هر جواب یعنی احتمال پیدا کردن ذره؛ احتمال باید یک عدد باشد بیشتر نمی‌شود، پس جواب سمت چپ در آن نقطه باید با جواب سمت راست در آن نقطه برابر شود، همچنین مشتق‌ها آنها هم باید مساوی شوند، چون جریان پیوسته است، پس ضرایب تعیین می‌شوند.



اینجا هم باید همین کار را کنیم، ترکیب sin و cos جواب است و ترکیب exp(±) هم جواب است.

ترکیبی را باید بگیریم روی مرزها match شوند.

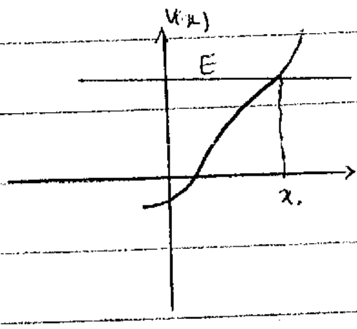
اما در اینجا مشکلی که داریم این است که در مرز جوابهای ما اصولاً درست نیستند، چون جوابها برای ناحیه ۱ و ۲ و ۳ هستند و در جایی که مرز وجود دارد نمی‌توانیم از آن جوابها استفاده کنیم.

راه حل (بدون اثبات) این است که در ناحیه مرز معادله شرودینگر را دقیق حل کنیم و از آن جواب استفاده کنیم نه جواب WKB.

می‌خواهیم در مورد اطراف نقاط بازگشت صحبت کنیم. در اطراف نقاط بازگشت پتانسیل شبیه خطی است پس از تقریب خطی معادله شرودینگر استفاده می‌کنیم

$V(x)$ را حول نقطه بازگشت x_0 بسط می‌دهیم: که اگر به اندازه کافی نزدیک نقطه بازگشت باشیم می‌توانیم از جملات بزرگتر صرف‌نظر کنیم

$$V(x) = \underbrace{V(x_0)}_{E} + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0}(x-x_0) + \cdots$$



پتانسیل در نقطه بازگشت برابر با سطح انرژی ما است.

$$V(x) - E \simeq \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0}(x-x_0)$$

معادله شرودینگر مستقل از زمان به این صورت است:

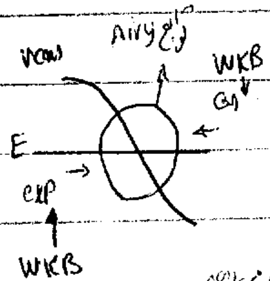
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + Vu = Eu$$

که تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0}}_{cte}(x-x_0)u = 0$$

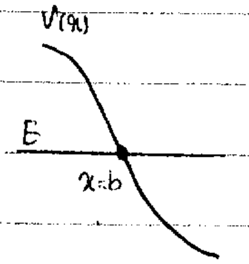
معادله Airy

جواب این معادله را توابع Airy می‌گویند که با $Ai(x)$ نشان می‌دهند. معادله ایری (Airy) در حقیقت معادله شرودینگر پتانسیل‌های خطی است.



یک جواب sin یا cos در ناحیه پتانسیل‌های کوچکتر از E می‌گیریم. فرض می‌کنیم ترکیبی از cos ها باشد. در ناحیه $E = V(x)$ جوابها به صورت توابع Airy هستند. بعد نگاه می‌کنیم کدام یک از این توابع با کسینوس که انتخاب کردیم، هم خوانی دارد انتخاب می‌کنیم. حال این تابع هم در جزء راست صادق است و هم در سمت چپ. باید جواب در ناحیه E را پیدا کنیم در سمت چپ، اصولاً به شکل exp است اما باید ببینیم ضریب cos یک با چه چیزی برابر است. ضریب exp را چه چیز باید انتخاب کنیم. بین این انتخاب ضریب را با واسطه توابع Airy انجام می‌دهیم. این روش کار این است که یک جمله cos یا sin می‌گیریم. نگاه می‌کنیم که چه ترکیبی از توابع Airy باید انتخاب کنیم تا در نواحی دور از نقطه بازگشت جوابها برسند و همان ترکیب را نگه می‌داریم تا ببینیم در طرف چپ به چه exp منجر می‌شود.

در حالت WKB درست است. در نقاط WKB درست نیست. چیزی مربوط به دو تابع (توابع Airy)



این فرمول یک مقدار پیچیده و مفصل است، به شیوه این راه می‌نویسیم یعنی اگر یک سمت یک جمله را بنویسیم، آن طرف چه چیزی باید بگذاریم تا جواب‌ها match شوند.

حالت اول:

دو تابع به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)}$$

حدود انتگرال برای سمت چپ از x تا b است و برای سمت راست از b تا x است.

$$\kappa(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)}$$

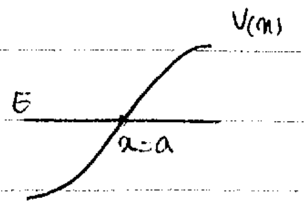
اگر سمت چپ جواب را exp با یک ضریب $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ بگیریم یعنی در رابطه (4) برای حالت $V>E$ جواب "−" را در نظر بگیریم در آن طرف جواب به صورت سینوس و کسینوس است اما کسینوس می‌ماند که نوشتیم:

$$(1)\quad \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\exp\left(-\int_x^b \kappa\, dx\right) \longleftrightarrow \frac{2}{\sqrt{k}}\cos\left(\int_b^x k\, dx - \pi/4\right)$$

اگر سمت چپ جواب "+" را در رابطه (4) برای حالت $V>E$ بگیریم، در طرف دیگر جواب به صورت Sin ظاهر می‌شود:

$$(2)\quad \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\exp\left(+\int_x^b \kappa\, dx\right) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\int_b^x k\, dx - \pi/4\right)$$

حالت دوم:



حدود انتگرال برای سمت چپ از x تا a است ولی برای سمت راست از a تا x است. (زیرا توابع عوض شده‌اند)

سمت چپ باز جواب به صورت سینوس و کسینوس است

اگر کسینوس بگیریم در طرف دیگر به صورت زیر می‌شود:

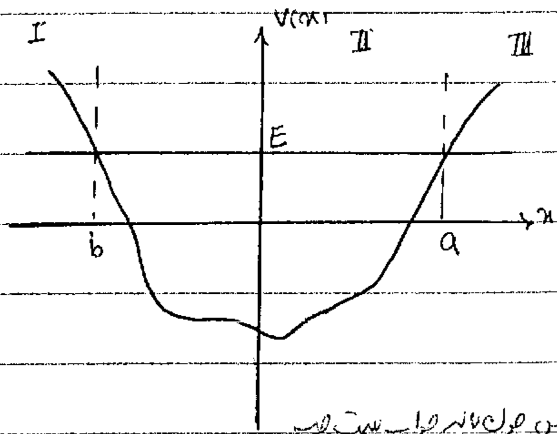
$$(3)\quad \frac{2}{\sqrt{k}}\cos\left(\int_x^a k\, dx - \pi/4\right) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\exp\left(-\int_a^x \kappa\, dx\right)$$

اگر سینوس بگیریم به این شکل می‌شود:

$$(4)\quad \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\int_x^a k\, dx - \pi/4\right) \longleftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\exp\left(+\int_a^x \kappa\, dx\right)$$

این روابط در حقیقت اتصال جواب‌های WKB هستند.

این روابط را برای یک حالت خاص توضیح می‌دهیم



باید تکلیف را روشن کنیم که از سمت چپ چه چیزی
وارد می‌شود (ناحیه I) . می‌دانیم طرف چپ در
حالت اول منفی بی‌نهایت هستیم . پس جواب‌ها
می‌توانند به صورت exp± باشند ولی می‌دانیم چون
تابع نمایی همین طور زیاد می‌شود پس K بزرگ می‌شود پس چون باید جواب سمت چپ
میرا شود بنابراین exp(−) قابل قبول است.

چون بازه ما بزرگ می‌شود K افزایش می‌یابد و به
سمت ∞ می‌رود باید علامت (−) بگذاریم (ربطی به x ندارد)

$$x<b \qquad \psi_{I}=\frac{1}{\sqrt{K}}\exp\left(-\int_x^b K\,dx\right)$$

در ناحیه II باید با استفاده جواب ناحیه I ، یک جواب مشخص کنیم ، برمی‌گردیم به جدول اول جلسه پیش باید
رابطه (۱) را در نظر بگیریم یعنی:

$$b<x<a \qquad \psi_{II}=\frac{2}{\sqrt{K}}\cos\left(\int_b^x K\,dx-\frac{\pi}{4}\right)$$

تا اینجا ساده است ولی حالا می‌خواهیم جواب ناحیه
III را بنویسیم . اگر بخواهیم از روی جواب ناحیه II ، جواب ناحیه III را بنویسیم باید یک تغییراتی بدهیم . چون برای
ناحیه III باید رابطه ۳ را نگاه کنیم اما بازه‌ی انتگرال از x تا a است اما اینجا از b تا x است . پس باید اینها را
به این صورت تبدیل کنیم تا بتوانیم از رابطه ۳ استفاده کنیم. به این شکل می‌نویسیم:

$$\int_b^x=\int_b^a+\int_a^x=\int_b^a-\int_x^a$$

$$\psi_{II}=\frac{2}{\sqrt{K}}\cos\Big(\underbrace{\int_b^x K\,dx}_{\int_b^a-\int_x^a}-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{2}{\sqrt{K}}\cos\left(\int_b^a K\,dx-\left(\int_x^a K\,dx+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \psi_{II}=\frac{2}{\sqrt{K}}\left\{\cos\left(\int_b^a K\,dx\right)\cos\Big(\overbrace{\int_x^a K\,dx+\frac{\pi}{4}}^{\alpha}\Big)+\sin\left(\int_b^a K\,dx\right)\sin\Big(\overbrace{\int_x^a K\,dx+\frac{\pi}{4}}^{\alpha}\Big)\right\}$$

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\psi_{II} = \frac{-2}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_b^a k\,dx\right) \underbrace{\sin\left(\int_x^a k\,dx - \pi/4\right)}_{(4)\ \exp(+\int_a^x k\,dx)} + \frac{2}{\sqrt{k}} \sin\left(\int_b^a k\,dx\right) \underbrace{\cos\left(\int_x^a k\,dx - \pi/4\right)}_{(3)\ \exp(-\int_a^x k\,dx)}$$

حال اگر پتانسیل دارای یک زمان است که پتانسیل بالا می‌رود و دوباره پایین می‌آید این در این صورت هر دو قابل قبول است؛

پس برای مواردی که پتانسیل برمی‌گردد هم exp+ داریم هم exp- !

یک زمان است که پتانسیل برنمی‌گردد و همین طور بالا می‌رود. در این موارد می‌دانیم تابع موج در ناحیه III به سمت صفر میل می‌کند

پس اگر شکل به صورت صفحه قبل باشد، در این صورت exp+ قابل قبول نیست.

اگر در ناحیه III، x خیلی بزرگ شود جواب exp با علامت "+" قابل قبول نیست، پس باید ضریب آن صفر شود

پس یک کوانتش ایجاد می‌شود:

$$\Rightarrow \cos\left(\int_b^a k\,dx\right) = 0 \Longrightarrow \int_b^a k\,dx = (n + 1/2)\pi$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

پس برای هر نوع مسئله مکانیک کوانتومی تا زمانی که تقریب WKB درست باشد یعنی تغییرات پتانسیل زیاد نباشد، رابطه بالا بدست می‌آید.

این قاعده کوانتش بدست آمده قانون بسیار مهمی هست و به هیچ مسئله خاصی برنمی‌گردد و برای هر مسئله‌ای تا وقتی که تقریب WKB صادق باشد برقرار است.

برای درک بهتر بحث این جلسه می‌توانیم به کتاب Merzbacher رجوع کنیم.

حال یک مثال خاص را بررسی می‌کنیم:

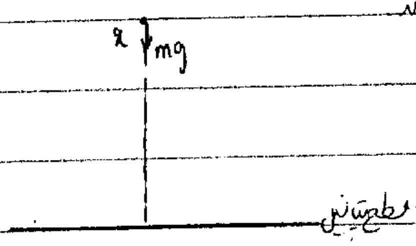
مثال:

پتانسیل یک طرفه در حضور میدان جاذبه با شتاب ثابت

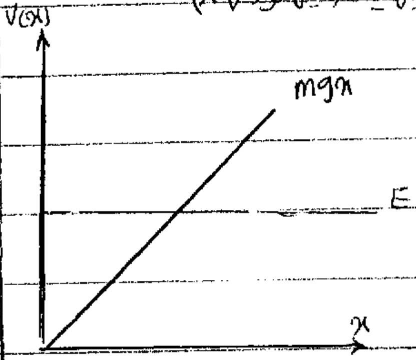
فرض کنیم یک ذره کوانتمی را پرت کنیم. این پرتگاه می‌تواند در حضور پتانسیل گرانش و زمین به عنوان پتانسیل بی‌نهایت باشد. حال در اینجا یک سقوط را در میدان جاذبه گذاشتیم یعنی:

$V = mgx$

توجه داشته باشیم که این پتانسیل تا نقطه $x=0$ جلو رود و ذره نمی‌تواند نفوذ کند



بنابراین شکل پتانسیل در x های مثبت خطی است و در x های منفی بی‌نهایت (یعنی نفوذ نمی‌کند)



حال می‌خواهیم در مورد این مسئله تقریب WKB را بکار ببریم و ببینیم که جوابها به چه شکل می‌شوند و چه کوانتشی بدست آمده و چه چیزی می‌دهد.

این مسئله را اگر نخواهیم دقیق حل کنیم می‌توانیم تقریب WKB برای آن بکار برد یعنی تقریب WKB در مورد این مسئله کار می‌کند.

سمت راست مشکلی نداریم ($x>0$)، به این معنی که پتانسیل در آنجا خطی است و پتانسیل خطی تغییرات سریع ندارد.

ولی طرف چپ مشکل داریم چون در آنجا پتانسیل یک دفعه بی‌نهایت می‌شود

سؤال: اگر قرار شد که در اطراف نقاط بازگشت از جوابهای WKB استفاده نکنیم (دلیل نوشتن جدول اتصال)، حال در سمت چپ ($x<0$) پتانسیل خیلی بلند است تغییر می‌کند و چرا اینجا سمت چپ هستیم؟

درست است که در نواحی نقاط بازگشت تقریب WKB را بکار نبردیم ولی تابع موج Airy را بکار بردیم (تقریب خطی) و گفتیم که چون در این نواحی پتانسیل تقریب خطی زد، اما در اینجا در $x<0$ این کار را هم نمی‌توانیم بکنیم. پس برای توابع Airy در اینجا نمی‌توانند بین WKB ها هم پل بزنند. به این ترتیب باید ببینیم چه کار کنیم. نکته این است که WKB همیشه در نقاط بازگشت اشکال دارد ولی برای رفع اشکال تقریب خطی بکار بردیم، اما در اینجا نمی‌توان از آن استفاده کنیم

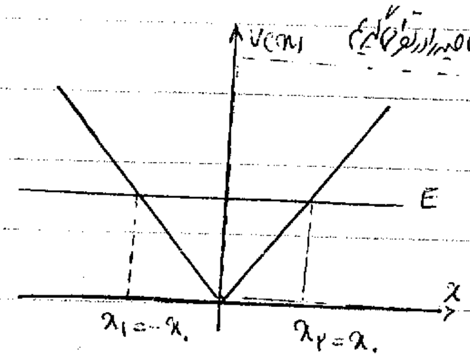
شرط تابع موج
$U(0) = 0$

حال به این طور عمل کنیم، چون در ناحیه $x<0$ ذره نفوذ نمی‌کند پس:

حال یک کلک می‌زنیم، به جای اینکه پتانسیل را در ناحیه $x>0$ در نظر بگیریم (فقط)، پتانسیل را تبدیل به این شکل می‌کنیم برای همه x ها و نه فقط x های مثبت.

$V \longrightarrow V' = mg|x|$

پس پتانسیل را به این صورت می‌گیریم:



چون پتانسیل متقارن است، بنابراین جوابهای آن بصورت زوج و فرد است.

پس کافی است که در جوابهای زوج و فرد جوابمان را مقید به جوابهای فرد کنیم چون در صفر صفر می‌شوند و همچنین جوابمان را مقید به ناحیه $x>0$ کنیم و به ناحیه $x<0$ کاری نداشته باشیم

زوج

فرد $\xrightarrow{\checkmark} U(0)=0 \,,\; x \geq 0$

در این صورت به همان مسئله جوابمان می‌رسیم و همان مسئله می‌شود.

چون در شرط مرزی صدق می‌کند، یا جواب معادله شرودینگر را این طور حساب می‌کنیم که در هر ناحیه‌ای در معادله باید صدق کند که در شرط در ناحیه $x>0$ پتانسیل جدید با پتانسیل اصلی مسئله فرق نکند و البته در شرط مرزی هم صدق کند.

پس ما شکل پتانسیل را دوبرابر می‌کنیم. ولی جوابمان را مقید می‌کنیم به جوابهای فرد و x های مثبت.

نقطه x_0 این طور بدست می‌آید:

$$V(x_0)=E \Rightarrow mgx_0 = E \Rightarrow \underbrace{\boxed{x_0 = E/mg}}_{\text{نقطه بازگشت}}$$

ما می‌خواهیم این فرد بودن را اعمال کنیم، ψ_{II} در حالت کلی به این صورت در می‌آید:

$$\psi_{II} = \frac{-2}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_b^a k\,dx\right) \sin\left(\int_x^a k\,dx - \pi/4\right) + \frac{2}{\sqrt{k}} \sin\left(\int_b^a k\,dx\right) \cos\left(\int_x^a k\,dx - \pi/4\right)$$

چون این پتانسیل از نوع پتانسیل است که همین طور ادامه می‌رود، پس:

$$\int_b^a k\,dx = (n+\tfrac{1}{2})\pi$$

(۳) از ادامه:

$$\psi_{II} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_b^x k\,dx - \pi/4\right) \xrightarrow[b=x_1]{\text{در اینجا}} \psi_{II} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_{x_1}^x k\,dx - \pi/4\right) \quad \text{I}$$

پس با استفاده از رابطه بالا و شرط کوانتش می‌نویسیم:

$$\psi_{II} = \frac{2}{\sqrt{k}} \underbrace{\sin\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\right]}_{(-1)^n} \cos\left(\int_x^{x_2} k\,dx - \pi/4\right) \quad \text{II}$$

($a = x_2$)

حال ما بدنبال جوابهای فرد هستیم یعنی هدف پیدا کردن ψ_{II} با این شرط است:

$$\psi_{II}(-x) = -\psi_{II}(x)$$

حال با این فرض روی ψ_{II} و $\psi_{II}(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{②,③} \Rightarrow \psi_{II}(-x) = \frac{2}{\sqrt{K}} \cos\left(\int_{x_1}^{-x} K\,dx - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{K}} (-1)^n \cos\left(\underbrace{\int_{-x}^{x_2=-x_1} K\,dx}_{\text{می‌خواهیم این را بدست آوریم.}} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{Ⅲ}$$

K یک تابع زوج است، چون:

$$K = \sqrt{2m(E - V(x))}$$

برای مثال: $K = \sqrt{2m(E - mg|x|)} \longrightarrow$ که زوج است

حال اگر به این صورت تغییر متغیر دهیم، انتگرال این می‌شود:

تغییر متغیر: $y = -x$

$$\Rightarrow \int_{x'}^{-x_1} K\,dx \longrightarrow \int_{x'}^{x_1} \underbrace{K(-y)}_{\substack{\text{زوج} \\ K(y)}}\, \underbrace{d(-y)}_{-dy} = -\int_{x'}^{x_1} K(y)\,dy$$

چون K تابع زوج است

به این طور می‌نویسیم تا اشتباه نشود

حال می‌توانیم اسم متغیر y را هر چیزی بگذاریم و دوباره x می‌گذاریم:

$$\Rightarrow \int_{-x'}^{-x_1} K\,dx = -\int_{x'}^{x_1} K\,dx \quad \text{Ⅳ}$$

نتیجه بدست آمده را در رابطه Ⅲ می‌گذاریم:

$$\text{Ⅳ},\text{Ⅲ}: \psi_{II}(-x) = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{K}} \cos\left(\underbrace{-\int_{x}^{x_1} K\,dx}_{+\int_{x_1}^{x} K\,dx} - \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{K}} \cos\left(\int_{x_1}^{x} K\,dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{Ⅴ}$$

رابطه بدست آمده را با رابطه Ⅰ مقایسه می‌کنیم:

$$\text{Ⅴ}: \psi_{II}(-x) = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{K}} \cos\left(\int_{x_1}^{x} K\,dx - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow \psi_{II}(-x) = (-1)^n \psi_{II}(x)$$

$$\text{Ⅰ}: \psi_{II}(x) = \frac{2}{\sqrt{K}} \cos\left(\int_{x_1}^{x} K\,dx - \frac{\pi}{4}\right)$$

می‌خواهیم تابع فرد باشد، پس باید n فرد باشد

۵

پس این شرط کوانتش برای n های فرد است.

θ

شرط کوانتش: $\int_b^a K\,dx = (n + \tfrac{1}{2})\pi$

شرط کوانتش $\longrightarrow$ $$\int_{b=-x_0}^{a=x_0} K\,dx = \left((2n+1)+\tfrac{1}{2}\right)\pi \qquad n=0,1,2,\dots$$

ولی چون دیدیم تابع K زوج است پس انتگرال از $-x_0$ تا x_0 را می‌توانیم بصورت دو برابر انتگرال از 0 تا x_0 بنویسیم:

$$\Rightarrow \int_{-x_0}^{x_0} K\,dx = 2\int_0^{x_0} K\,dx = \left(2n+\tfrac{3}{2}\right)\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{x_0} K\,dx = \left(n+\tfrac{3}{4}\right)\pi \qquad n=0,1,2,\dots$$

$\sqrt{2m(E-mgx)}$

داریم که مقادیر $\tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi,\dots$ را می‌گیرد

برای اینکه نتایج شبیه نتیجه کتاب شود این طور می‌نویسیم:

$$\int_0^{x_0=E/mg} dx\,\sqrt{2m(E-mgx)} = \left(n-\tfrac{1}{4}\right)\pi \qquad n=1,2,\dots$$

$$\tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi,\dots$$

این قاعده کوانتش شد. این انتگرال می‌توان حل کرد و برحسب E بدست آورد:

$$E_n = \frac{\left[3\left(n-\tfrac{1}{4}\right)\pi\right]^{2/3}}{2}\left(mg^2\hbar^2\right)^{1/3}$$

این نتیجه، سطوح انرژی ذره است در پتانسیل مورد نظر با استفاده از تقریب WKB

این یک مثال خیلی خاص را به خاطر نوع پتانسیلی که دارد ویتانسیل هم خطی است، توابع موج جواب معادله توابع Airy می‌شود. این مسئله را می‌توان حل نسبتاً دقیق کرد (البته حل دقیق وجود ندارد چون توابع Airy توابع ساده‌ای نیستند بنابراین عددی می‌توان بدست آورد). E_n ها را این روش نسبتاً دقیق می‌توان بدست آورد و مقایسه کرد که در جدول ۲-۲ کتاب آمده است.

توجه کنیم می‌بینیم WKB هرچه انرژی بیشتر شود جواب دقیق‌تری می‌دهد. با اینکه حدهای خیلی عجیب و غریب بدست آمد یعنی با حل معادله ها نشد... ولی... (در حد...) و قرار دادن در معادله موج کوانتومی به یک نتایجی رسیدیم که این نتایج را ... این... ... می‌دهد

جلسه پانزدهم: ۸۴/۸/۲۲

انتگرال مسیر فاینمن:

برای اینکه بتوانیم در این بحث که یک نگاه جدید به فیزیک کوانتومی است وارد شویم ابتدا باید با مفهوم انتشارگر آشنا شویم. با استفاده از انتشارگر انتگرال مسیر فاینمن تعریف می‌شود.

انتشارگر (propagator)

عملگر تحول را در بخش گذشته این طور تعریف کردیم:

$$|\alpha, t_0, t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle \qquad \text{(I)}$$

عملگر U را عملگر تحول گفتیم زیرا سیستم را از زمان t_0 به t تحول می‌کند. $= \overbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}$ با این فرم برای مواردی که هامیلتونی تابع زمان نیست

حال اگر عملگر U را به صورتی بنویسیم که با مولفه‌هایش کار کنیم یعنی نمایش U را در نظر گرفت که به این نمایش خاص در فضاهای خاص انتشارگر می‌گوییم. یعنی انتشارگر چیزی نیست جز نمایش U در فضای مکان.

فرض کنیم ویژه حالت‌های عملگر H حالت $|a'\rangle$ باشد که $|a'\rangle$ ها stateهایی است که ویژه حالت عملگر H است یا ویژه حالت انرژی است که با a' جایابی می‌شود:

$$H|a'\rangle = E_{a'}|a'\rangle$$

(2) $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ کمیت کامل قرار دهیم

$$\Rightarrow |\alpha, t_0, t\rangle = U(t,t_0)\overbrace{\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|}|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|\alpha, t_0\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}$$

حال طرفین رابطه بالا را در ویژه حالت مکان ($\langle x''|$) ضرب می‌کنیم و در ضمن در داخل رابطه یک دسته حالت کامل از فضای مکان قرار دهیم:

به تعبیری

$$\langle x''|\alpha, t_0, t\rangle = \langle x''|\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|\overbrace{\int d^3x'\,|x'\rangle\langle x'|}^{\text{یک دسته حالت کامل}}\alpha, t_0\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}$$

تابع موج در زمان t_0: $\psi(\vec{x}', t_0)$

$$\underbrace{\langle x''|\alpha, t_0, t\rangle}_{\psi(\vec{x}'', t)} = \int d^3x' \boxed{\sum_{a'}\langle x''|a'\rangle\langle a'|x'\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}}\ \boxed{\langle x'|\alpha, t_0\rangle}$$

تابع موج (مولفه‌های حالت در فضای مکان) در زمان t

این قسمت به حالت $|\alpha, t_0\rangle$ ربطی ندارد و وابسته به ویژه حالت‌ها و زمان است

$K(x'', t, x', t_0)$

اسم این قسمت که به حالت $|\alpha, t_0\rangle$ بستگی ندارد را $K(x'', t, x', t_0)$ می‌گذاریم.

پس K را به این صورت تعریف کردیم:

$$K(x'',t;x',t_0) = \sum_{a'} \langle x''|a'\rangle\langle a'|x'\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}$$

و با این تعریف رابطه $\psi(x'',t)$ چنین می‌شود:

$$\Rightarrow \psi(x'',t) = \int d^3x'\, K(x'',t;x',t_0)\, \psi(x',t_0) \qquad (II)$$

انتشارگر

اگر به رابطه (I) نگاه کنیم می‌بینیم که خیلی شبیه رابطه (II) است و در رابطه (II) همه چیز در فضای مکان نوشته شده است. در رابطه (I) عملگر U، عملگری بود که روی حالت در زمان t_0 اثر می‌کرد و حالت در زمان t را می‌داد. در رابطه (II) هم تابع K روی تابع موج در زمان t_0 اثر می‌کند و تابع موج در زمان t را می‌دهد. بنابراین K همان نقش U را دارد ولی همه چیز در فضای مکان نوشته شده است. به خاطر این نقش و کاری که K می‌کند که سیستم را از زمان t_0 به زمان t می‌برد یا منتشر می‌کند، به K انتشارگر می‌گویند، چون کار آن منتشر کردن (propagate) سیستم در زمان است.

می‌توانیم نشان دهیم که K چیزی نیست جز مولفه‌های U در فضای مکان. اگر مولفه‌های U را در فضای مکان پیدا کنیم، به این صورت می‌نویسیم:

مولفه $x''x'$ عملگر U در فضای مکان

$$U_{x''x'}(t,t_0) = \langle x''|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|x'\rangle = \sum_{a'} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}\langle x''|a'\rangle\langle a'|x'\rangle$$

که همان K است:

یک رشته حالت کامل می‌گذاریم $\longleftarrow \sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|$

$$= K(x'',t;x',t_0)$$

پس K ای که معرفی شد چیزی نیست جز مولفه‌های عملگر U در فضای مکان، بنابراین همان نقش U را دارد ولی در فضای مکان، یعنی در آن همه چیز با فضای مکان کار دارد، بنابراین به جای state، تابع موج را داریم و به جای جمع‌ها انتگرال داریم.

اگر ویژه تابع‌های انرژی را با u نمایش دهیم، K به این صورت می‌شود:
(ویژه توابع)

$$K(x'',t;x',t_0) = \sum_{a'} \overbrace{\langle x''|a'\rangle}^{u_{a'}(x'')}\overbrace{\langle a'|x'\rangle}^{u^*_{a'}(x')} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}$$

داشتن K، لازمه‌اش این است که ویژه توابع انرژی و ویژه مقادیر انرژی را داشته باشیم (یعنی u و E)، و اگر اینها را داشته باشیم بنابراین اصل مسئله به زبان انتشارگر می‌شود این که «برای حل یک مسئله کوانتوم مکانیک کافی است که انتشارگر K، (propagator) آن را داشته باشیم.

اگر K را داشته باشیم که داشتن K یعنی ویژه توابع انرژی و ویژه مقادیر را داشته باشیم دیگر می‌توانیم هم با ... اینها را بدهیم که

معلوم کاملاً مشخص است، به این صورت هر مسئله‌ای را می‌توانیم حل کنیم به این معنی که اگر تابع موج در زمان t_0 $\langle x'|\alpha, t_0\rangle$ را با هر شکلی به ما بدهند، در انتگرال مورد نظر می‌گذاریم و تابع موج در زمان t را به دست می‌آوریم.

پس کل مسئله ما کاملاً به K می‌رسد. اگر K را حساب کنیم همه چیز را می‌توانیم محاسبه کنیم. پس K تابع مهمی است یا به نوعی تابع اصلی مکانیک کوانتومی است که داشتن آن همه چیز را خواهد داد.

به زبان الکترودینامیک هم می‌توانیم این طور بیان کنیم که K در حقیقت تابع گرین معادله شرودینگر است. تابع گرین تابعی بود که تمام ظرافت‌های مسئله در آن نشسته بود یعنی نوع شرایط مرزی مسئله و توزیع بار واحد. تابع گرین در حقیقت پتانسیل بار واحد است یعنی اگر یک بار واحد را در نقطه x' با یک شرایط مرزی مشخص بگذاریم پتانسیل را در نقطه x می‌توانیم حساب کنیم. به این پتانسیل Green Function می‌گوییم.

تابع گرین این فایده را دارد که اگر برای یک مسئله واحد تابع گرین را پیدا کنیم، حال بجای توزیع بار واحد هر توزیع باری را بدهند می‌توانیم پتانسیل را حساب کنیم. به این خاطر در الکترودینامیک در کتاب جکسون نقش اصلی را تابع گرین است.

K هم به نوعی نقش تابع گرین را در معادله شرودینگر دارد.

اولاً K در معادله شرودینگر صدق می‌کند. یادمان باشد U در معادله شرودینگر صدق می‌کرد یعنی:

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = HU$$

K هم در معادله شرودینگر صدق می‌کند. برای نشان دادن این موضوع حالت $|\alpha, t_0\rangle$ را ویژه حالت هامیلتونی $(|a'\rangle)$ می‌گیریم. بنابراین:

$$|\alpha, t_0\rangle = |a'\rangle$$

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|a'\rangle = |a'\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}$$

اگر $\langle x''|$ را اثر دهیم می‌شود:

$$\langle x''|\alpha, t\rangle = \langle x''|a'\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)} \qquad (\mathrm{I})$$

K به این صورت به دست آمده بود:

$$K(x'', t; x', t_0) = \sum_{a'} \langle x''|a'\rangle\langle a'|x'\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)} \qquad (\mathrm{II})$$

قسمتی که در راه به دست آوردیم همین قسمت است.

$$K(x'', t, x', t_0) = \sum_{a'} \langle a'|x'\rangle\langle x''|\alpha, t\rangle \qquad (\mathrm{III})$$

(III): تابع زمان نیست — پس می توانیم بنویسیم:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K = \sum_{a'} \langle a'|x'\rangle \; i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\langle x''|\alpha,t\rangle$$

می دانیم $\langle x''|\alpha,t\rangle$ تابع موج است و تابع موج در معادله شرودینگر صدق می کند

$$\longrightarrow \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}''^2 + V(x'')\right\}\langle \vec{x}''|\alpha,t\rangle$$

H (در فضای مکان) ← چون متغیرها از نوع x'' است

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K = H\sum_{a'}\langle a'|x'\rangle\langle \vec{x}''|\alpha,t\rangle$$

$\langle x''|\alpha,t\rangle$ را از رابطه (I) می گذاریم:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}K = H\underbrace{\sum_{a'}\langle a'|x'\rangle\langle x''|a'\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}}_{K} = HK$$

بنابراین K در معادله شرودینگر در فضای مکان صدق می کند که طبیعی هم هست چونکه خود U هم صدق می کرد پس مؤلفه های آن هم در فضای مکان (K) باید صدق کند.

U یک خصوصیتی دارد که در K هم تأثیر می گذارد و آن رابطه مقابل است:

$$\lim_{t\to t_0} U(t,t_0)=1$$

از رابطه $U(t,t_0)=e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ هم این رابطه بدست می آید.

حال ببینیم که این خصوصیت در فضای مکان به چه چیزی منجر می شود. از رابطه اصلی K (II) و یا (III) می توان نوشت:

$$\lim_{t\to t_0} K(x'',t,x',t_0) = \sum_{a'}\langle x''|a'\rangle\langle a'|x'\rangle = \langle x''|\Big(\overbrace{\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|}^{1}\Big)|x'\rangle$$

$$\lim_{t\to t_0}K(x'',t,x',t_0) = \langle x''|x'\rangle = \delta(x'-x'')$$

چون طیف پیوسته است δ دیراک می شود.

که eigen state های عملگر مکان هستند و بر هم عمودند.

بنابراین تابع K هم در حد $t \to t_0$ یک می شود ولی یک در فضای مکان یعنی دلتای دیراک.

پس لزوماً رابطه ای که در ابتدا نوشتیم این نتیجه را می گیریم که K در معادله شرودینگر صدق می کند و برحسب x'' (نقطه x'') مثل اینکه تابع موج یک ذره است. این تابع موج در شرط دوم هم صدق می کند یعنی در زمان $t \to t_0$ (یعنی در ابتدا) این تابع موج از نوع تابع دلتا است.

پس نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که:

K تابع موج ذره‌ای است که در زمان t_0 در نقطه x' متمرکز بوده است (قرار داشته است)، یعنی K تابع موج است یعنی معرف حالت ذره است در فضای مکان ولی تابع موج خاصی است به شرط اولیه خاص که این شرط این است که در زمان t_0 در x' بوده است.

پس در واقع K همان نقش تابع گرین را بازی می‌کند، همانطور که گفتیم تابع گرین تمام اطلاعات انتشار شکست برای هر پتانسیل دلخواه را در خود دارد فقط با این قید که بجای چشمه آن در پتانسیل تابع دلتا را می‌گذارند، تابع دلتا هم یعنی یک ذره در یک نقطه متمرکز شده است. بنابراین برای اینکه تابع گرین یک معادله را حل کنند برای یک پتانسیل به جای چشمه، تابع دلتا را می‌گذارند و آن را حل می‌کنند، تابع گرین که پیدا شد در اینصورت هر توزیعی را بجای تابع دلتا به صورت جمع بگذاریم آن مسئله برای آن توزیع حل می‌شود.

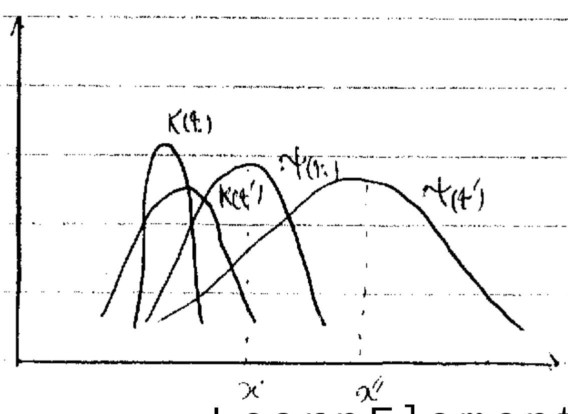
اینجا هم همین طور است، وقتی می‌گوییم اگر ذره در زمان صفر (مثلا) در نقطه x' متمرکز بود (یعنی از نوع تابع دلتا بود) در اینصورت در زمانهای بعد تابع موج آن K است چون در معادله شرودینگر صدق می‌کند و هم اطلاعات مسئله در آن است یعنی پتانسیل هم در آن است چون H در آن است و شرایط مرزی هم در آن است، چون باید معادله شرودینگر را برای آن حل کنیم.

وقتی مسئله برای K حل شد در اینصورت می‌گوییم بجای اینکه در نقطه صفر متمرکز بود یک توزیع در نقطه صفر داشت در زمان صفر، در اینصورت می‌توانیم با جمع برای زمانهای دیگر هم توزیع آن را بدست آوریم.

یعنی شد:

$$\psi(x'',t) = \int d^3x' \, K(x'',t,x',t_0) \, \psi(x',t_0)$$

اگر K در زمان t_0 به شکل زیر بود در زمانهای بعد حل مسئله به ما K را در آن زمان می‌دهد ($K(t')$) ولی حالا اگر سیستم در زمان t_0 بصورت تابع دلتا نباشد و شکل دیگری باشد ($\psi(t_0)$) در این صورت در زمانهای بعد می‌تواند هر شکل دیگری داشته باشد ($\psi(t')$). ارتباط $\psi(t')$ از روی $\psi(t_0)$ با داشتن ارتباط $K(t')$ از $K(t_0)$ بدست می‌آید.



ناچاری اگر گرین را بدانیم، در الکترواستاتیک با آن آشنا هستیم، به این صورت که:

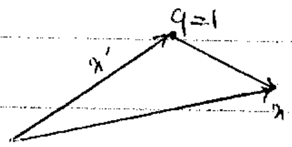
پتانسیل الکتریکی : $\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{d^3x'\, \rho(x')}{|x-x'|}$

توزیع بار (مستقل از زمان)

می‌خواهیم بگوییم این رابطه مانند رابطه ۲ است.

رابطه زیر پتانسیل یک بار واحد است که در نقطه x' قرار دارد و می‌خواهیم پتانسیل را در نقطه x پیدا کنیم

$$\Phi_{q=1,\vec{x}'}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{|x-x'|}$$



پس می‌توانیم رابطه اول را با این $\Phi_{q=1,x'}$ به این صورت بنویسیم:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{d^3x'\, \rho(x')}{|x-x'|} = \int d^3x'\, \Phi_{q=1,x'}(x)\, \rho(x')$$

این رابطه می‌گوید اگر پتانسیل یک بار واحد را داشته باشیم، برای بدست آوردن پتانسیل هر توزیع بار دلخواهی کافی است آن توزیع بار را در این پتانسیل ضرب کنیم و روی مکان‌های مختلف جمع کنیم.

این رابطه هم می‌گوید تابع موج ذره‌ای با واحد، متمرکز در نقطه x' را داریم، حال اگر بجای اینکه بگوییم در نقطه x متمرکز باشد یک توزیع داشته باشد ($\psi(x',t_0)$) باز هم می‌توان این تابع موج (توزیع) را در زمان‌های بعدی محاسبه کنیم.

$$\psi(x'',t) = \int d^3x'\, K(x'',t,x',t_0)\, \psi(x',t_0)$$

بنابراین پیدا کردن K (همان انتشارگر) اصل مسئله در مکانیک کوانتومی است.

مثال: انتشارگر ذره آزاد

یعنی وقتی هامیلتونی $\frac{p^2}{2m}$ است و چون H و P با هم جابجا می‌شوند، ویژه حالت H همان ویژه حالت P است:

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad \vec{p}|p'\rangle = \vec{p}'|p'\rangle$$

$$H|\vec{p}'\rangle = \overbrace{\frac{\vec{p}'^2}{2m}}^{E}|p'\rangle$$

$$|a'\rangle \longrightarrow |p'\rangle$$

$$\sum_{a'} \longrightarrow \int d^3p'$$

این دفعه $|p'\rangle$ نقش $|a'\rangle$ را بازی می‌کند زیرا آنها هستند که ویژه حالت هامیلتونی هستند و اپراتورهای آنها با هامیلتونی جابجا می‌شوند.

به جای جمع روی a' چون طیف مومنتوم پیوسته است باید انتگرال روی p' بگذاریم.

حالت یک بعدی را در نظر می‌گیریم: (همان $E_{a'}$ است)

$$K = \int dp' \underbrace{\langle x''|p'\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}p'x''}} \underbrace{\langle p'|x'\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}p'x'}} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p'^2}{2m}(t-t_0)}$$

تابع موج مومنتوم است (ذره آزاد) $\qquad \xrightarrow{dual}$

این انتگرال چون از نوع $\int e^{-(\alpha y^2+\beta y)}dy$ است، از قبل حل کردیم است: $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\beta^2/4\alpha}$

جواب این انتگرال می‌شود:

$$K = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t_0)}}\exp\left[\frac{im(x''-x')^2}{2\hbar(t-t_0)}\right]$$

بنابراین propagator را برای ذره آزاد بدست آوردیم. البته برای ذره آزاد راحت بدست می‌آید ولی برای پتانسیل‌ها پیچیده‌تر می‌شود.

نکته دیگر این هم که در مورد K جالب است trace آن است، در واقع می‌گوئیم که trace یعنی اثر آن است و هرطور نگاه کنیم فرق نمی‌کند، یک راه این است که عناصر قطری U را در پایه x نگاه کنیم، راه دیگر این است که عناصر قطری U را در پایه‌ای نگاه کنیم که قطری می‌شوند.

$$G(t) = \mathrm{tr}\, U(t,t_0) = \sum_{a'} U_{a'a'} = \int d^3x\, U_{x'x'} \quad (\text{واقعی } K_{x'x'} \text{ است})$$

$$U_{a'a'} = \underbrace{\langle a'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|a'\rangle}_{e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}}$$

$$\int d^3x'\, U_{x'x'} = \int d^3x' \sum_{a'}\langle x'|a'\rangle\langle a'|x'\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}$$

$$= \underbrace{\sum\langle a'|\overbrace{\int d^3x'\,|x'\rangle\langle x'|}^{1}\,|a'\rangle}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_{a'}(t-t_0)}$$

۲۰۵

حال که G را حساب کردیم برای سادگی $t_0=0$ می‌گیریم پس می‌شود:

$t_0 = 0$

$$G(t) = \sum_{a'} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{a'} t}$$

حال تبدیل فوریه G را حساب می‌کنیم:

تبدیل فوریه اینطور بود که تابع $f(x)$ را تبدیل به $f(k)$ می‌کرد یا برعکس، تبدیل فوریه‌ای که تابع زمان را تبدیل به تابع انرژی می‌کند

$$\tilde{G}(E) = -i \int dt\, G(t)\, e^{\frac{i}{\hbar} E t}$$

به این صورت است.

تبدیل فوریه G

پس برای این می‌شود:

$$\tilde{G}(E) = -i \int dt\, G(t)\, e^{\frac{i}{\hbar} E t} = -i \sum_{a'} \int_0^\infty dt\, e^{\frac{i}{\hbar}(E - E_{a'})t}$$

برای اینکه این انتگرال را حساب کنیم یک اشکال وجود دارد چون exp تبدیل می‌شود به sin و cos که انتگرالشان بین sin و cos می‌شود که حد بینهایت آن معنی ندارد، محدود است اما ابهام دارد، پس باید رفع ابهام کنیم.

رفع ابهام این نوع توابع یک روش وجود دارد که به این صورت است:

ابزار رفع ابهام

$$E \to E + i\epsilon$$

یک روش استاندارد این است که E را اینطور بنویسیم و بعد از حساب ϵ را صفر بگذاریم.

در پایان $\epsilon \to 0$ میل داده شود

$$\tilde{G}(E) = -i \sum_{a'} \int_0^\infty dt\, \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}(E - E_{a'})t}}_{\cos + i\sin}\, e^{-\frac{\epsilon}{\hbar} t}$$

علت این کار این است که جمله اضافه شده باعث می‌شود که در حد بینهایت صفر شود.

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ -i \sum_{a'} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (E - E_{a'})^2} + \sum_{a'} \frac{E - E_{a'}}{\epsilon^2 + (E - E_{a'})^2} \right\}$$

حال ϵ را صفر می‌گذاریم.

پس $\tilde{G}(E)$ می‌شود

$$\Rightarrow \tilde{G}(E) = \sum_{a'} \frac{1}{E - E_{a'}}$$

اونا کسانی که تعریف میدانهای کوانتمی می‌خوانند معمولاً به این موجود propagator می‌گویند نه به K.

خصوصیت این propagator جدید این است در انرژی‌های مساوی با eigen value ها منتها این $\tilde{G}(E)$ به بینهایت میل می‌کند یعنی $\tilde{G}(E)$ در مقادیر انرژی ویژه‌ی سیستم قطب دارد (تکینه است).

خصوصیت مهم دیگر این است propagator کوانتمی را دارد بنابراین اگر به نحوی بتوان از propagator کوانتمی اطلاعاتی بدست آورد (مثل انتگرال گیری) در اینصورت محل قطب‌های propagator معرف ویژه مقادیر انرژی‌ها است.

مثلاً برای ذرات بوزونی، propagator را به این شکل می‌نویسند

برای ذرات بوزونی: $\dfrac{1}{p^2 - m^2}$

تکانه ← p^2 ، m^2 → جرم ذره

بنابراین اگر تکانه برابر با جرم ذره شود تکینه می‌شود.

حال دوباره برویم سراغ بحث K و سعی کنیم آنرا به موضوع انتگرال مسیر بنویسیم.

که به این صورت بود:

$$K(x'',t;x',t_0) = \langle x''|U(t,t_0)|x'\rangle$$

در تصویر هایزنبرگ:

$|x',t\rangle = U|x'\rangle$ = حالت ذره‌ای است که در زمان t_0 در حالت $|x'\rangle$ بوده است.

چون $|a,t\rangle = U|a,0\rangle$ می‌شد حالت اگر در $|a,0\rangle$ برابر $|a'\rangle$ باشد یعنی ذره در زمان صفر در ویژه حالت x باشد در آن صورت در زمان t، $|a',t\rangle$ است یعنی در حقیقت $|x',t\rangle$ به نوعی بیانگر تابع موج در زمان t هم است اگر در $\langle x''|$ اثر دهیم.

$\langle x''|U|x'\rangle$ = علاوه بر تابع موج در زمان t، دامنه احتمال یافتن ذره در نقطه x'' در زمان t، اگر در زمان t_0 در

نقطه x' باشد، به آن دامنه انتقال (transition amplitude) می‌گویند (یعنی از نقطه x' به نقطه x'' منتقل شده است.

در تصویر هایزنبرگ:

در تصویر شرودینگر حالتها با زمان متحول می‌شوند، پایه‌ها ثابت هستند، در تصویر هایزنبرگ عکس است یعنی جای تحول زمانی عوض می‌شود:

حالتها در زمان ثابتند $|\vec{x}',t_0\rangle$ = حالت همیشه ذره است و با زمان تغییر نمی‌کند.

پایه‌ها متحول می‌شوند:

$$|a',t\rangle_{(H)} = U^{\dagger}|a'\rangle \xRightarrow{dual} \langle a'|U = {}_{(H)}\langle a',t|$$

$\langle \vec{x}'',t| = \langle x''|U$: پایه مکان در زمان t

در تصویر هایزنبرگ $|x',t_0\rangle$ حالت در زمان صفر و هم حالتهاست و $\langle x'',t|$ پایه مکان در زمان t است. بنابراین

K را این طور می‌توان نوشت: $K = \langle x''|U|x'\rangle$

$$\Rightarrow K = \langle x'',t|x',t_0\rangle$$

حالا ببینیم فایده این نوع نوشتن چیست که نکته خیلی مهمی است یعنی تصویرها نقش خالی بازی می‌کنند و شاید جزئیات کشفهای مهم مکانیک کوانتمی مربوط به همین‌هاست.

پایه در تصویر هایزنبرگ در هر زمانی (طبق تعریف پایه) مجموعه کامل هستند، یعنی:

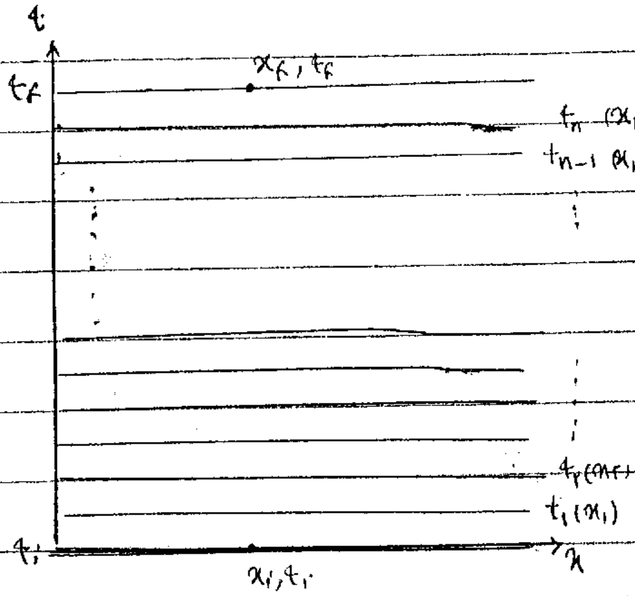
$$\int d^3x\, |x,t\rangle\langle x,t| = 1$$

اگر ذره در زمان t_i در نقطه x_i و در زمان t_f در نقطه x_f باشد،

دامنه انتقال می‌گوید که چقدر این کار احتمال دارد و به صورت زیر است:

دامنه انتقال: $\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle$

حال این زمان را به بازه‌های کوچک تقسیم می‌کنیم یعنی برش‌ها را می‌زنیم:



در زمان t_f هم اینجا بوده.

بازه t_f تا t_i را به تعداد زیادی بازه‌های زمانی تقسیم می‌کنیم به طوری که اختلاف آنها برابر با τ باشد.

که در زمان t_i در اینجا بوده.

$$\frac{t_f-t_i}{n+1}=\tau$$

دامنه گذار این طور بوده که سیستم در زمان t_i در x_i بوده و در زمان t_f که بعد از t_i است در x_f بوده است.

$$\text{دامنه انتقال (دامنه گذار)} = \langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle$$

حالا در این دامنه گذار یک سری از یک‌ها به صورت مقابل می‌گذاریم:

$$\int d^n x\,|x,t\rangle\langle x,t|=1$$

در این یک‌ها در زمان‌های t_1 تا t_n در نظر می‌گیریم پس این طور می‌نویسیم:

(I)

$$\text{دامنه انتقال} = \int dx_1\cdots dx_n\,\langle x_f t_f|x_n,t_n\rangle\langle x_n t_n|x_{n-1}t_{n-1}\rangle\langle x_{n-1}t_{n-1}|\cdots|x_1,t_1\rangle\langle x_1,t_1|x_i,t_i\rangle$$

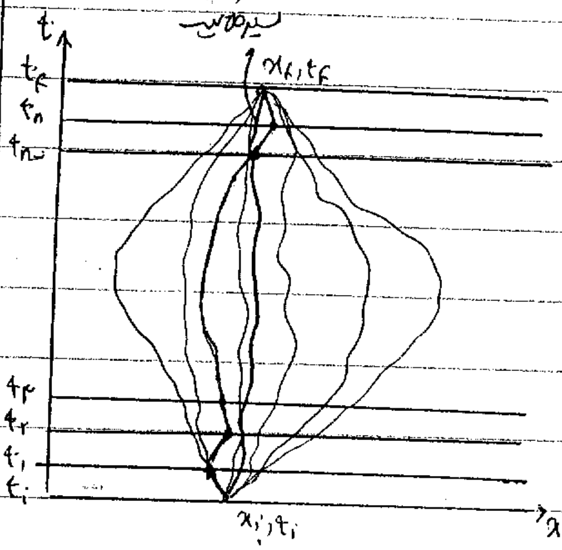
در این رابطه زمان‌ها معمولی هستند برای اینکه تعبیر احتمالی درست در بیاید باید این نکته را رعایت کنیم:

$$t_f>t_n>t_{n-1}>\cdots t_1>t_i$$

برای اینکه در رابطه بالا حالت یعنی احتمال گذار یعنی وقتی سیستم در زمان t_{n-1} در x_{n-1} بوده می‌خواهیم که در زمان بعد ببینیم چه اتفاقی افتاده است چون این فرضی که گذاشتیم از نوع احتمال گذار است پس باید این ترتیب زمانی حفظ شود تا این تعبیر احتمالی ممکن باشد.

تکلیف دو نقطه x_i و x_f معلوم است و روی آنها هم انتگرال‌گیری نمی‌شود اما روی نقاط میانی انتگرال گرفته می‌شود.

جمله $\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle$ که گویای دامنه احتمالی از نقطه x_i به نقطه x_f می رود، جمله بعد می گوید که از نقطه x_i در زمان t_1 با یک احتمالی به نقطه x_1 می رود الی آخر...



اگر در رابطه (۳) انتگرال را نداشتیم، یعنی مسیر ذره را داشتیم ولی نکته جالبی که در مکانیک کوانتومی وجود دارد این است که باید روی تمام اینها انتگرال بگیریم و به این معنی است که وقتی می گوییم x_1 و x_2 و ... هر مقداری می توانند با یک احتمالی بگیرند پس یک مسیر نداریم و چندین مسیر داریم.

بنابراین یک نتیجه جالبی مهم و یک تعبیر جالبی مهم از مکانیک کوانتومی بدست می آید. مکانیک کوانتومی ظاهراً می گوید برای اینکه ذره از نقطه x_i در زمان t_i به نقطه x_f در زمان t_f برود، از همه مسیرهای ممکن عالم می گذرد و باید همه مسیرها را در نظر بگیریم و همه این دامنه ها را با هم جمع کنیم تا احتمال کوانتومی این اتفاق بدست بیاید.

در حقیقت باید جمع روی دامنه تمام مسیرها از (x_i,t_i) به (x_f,t_f) بکنیم تا دامنه انتگرال را بدست آوریم.

دامنه انتگرال = جمع روی دامنه تمام مسیرها از (x_i,t_i) به (x_f,t_f) = $\sum_{\text{ها مسیر}}$ (دامنه)

این مفهوم عجیبی است که اولین بار فاینمن به آن توجه کرد که ظاهراً یک مکانیک کوانتومی چنین تعبیری داشته است، یعنی برای اینکه ذره ای از یک نقطه ای به نقطه دیگر برود باید همه مسیرهای عالم را در نظر بگیریم تا حاصل آن یک جواب صحیح کوانتومی بدهد.

در صورتیکه در فیزیک کلاسیک هر ذره یک مسیر بیشتر ندارد و در فیزیک کلاسیک این کار انجام می شود که در روش وردش ها روش هامیلتون می گوید اگر تمام مسیرهای ممکن را از t_i تا t_f در نظر بگیریم و انتگرال روی آنها را حساب کنیم، آن مسیر فیزیکی است که وردش آن رابطه صفر باشد یعنی از تمام مسیرها یک مسیر ممکن است

$$\delta\int_{t_i}^{t_f} L(x,t)\,dt=0$$

و آن مسیری است که کنش $\int L\,dt$ روی آن اکسترمم بشود.

بنابراین در فیزیک کلاسیک هم علی الاصول ... به عنوان یک اصل ... می دانیم که اگر یک ذره را

بنابراین این مسیری که ذره همه مسیرها را می‌تواند طی کند. ولی کوانتوم مکانیک می‌گوید همه مسیرها ممکن است یعنی می‌تواند به فواصل خیلی دور برود و برگردد (مریخ). والبته اگر به این فواصل دور برود و برگردد در این صورت در زمان محدود برای انجام این اتفاق باید با سرعت بالاتر از نور برود که یعنی علیت به معنای استاندارد نقض می‌شود.

این روش دامنه گذار را انتگرال مسیر فاینمن می‌گویند

Path Integral Method

البته فاینمن یک قدم بیشتر هم برداشت و این دامنه را به صورت تابعی از لاگرانژی (L) نوشت، یعنی در یک انتگرال مسیر فاینمن خیلی یک تابع موج‌ها و ویژه مقادیر در سطح بسیت و یک تئوری را حساب می‌کند.

این موضوع در زمان دانشجویی به ذهن فاینمن رسید و وقتی با آدمهای مهم آن موقع صحبت کرد، هم این موضوع را نپذیرفتند. وقتی که درست این موضوع را اثبات کرد آن وقت معلوم شد که درست است. البته یک حدس برای دامنه انتقال زد که ما در جلسه بعد آن را اثبات می‌کنیم.

این حدس را از یک مقاله آقای دیراک پیدا کرد و بدون اثبات آن را قبول کرد که احتمال گذار درست است که به این شکل است:

اما فاینمن گفت که با شروع کوانتوم مکانیک را

احتمال گذار $= \langle x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}\rangle$

از اول شروع کرد و از همین جا شروع کنیم و بگوییم کوانتوم مکانیک علیه است که می‌گوید که ذره از جایی به جای دیگر می‌خواهد برود، همه مسیرهای ممکن را می‌تواند برود و در هر مسیر باید دامنه گذار را حساب کنیم و با هم جمع کنیم و دامنه را به عنوان فرض به این شکل بگیریم:

کنش کلاسیک

دامنه : $\langle x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}\rangle \simeq e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl.}}$

که این موضوع را فاینمن از یک مقاله دیراک گرفته بود که دیراک ذکر کرده بود که واضح است که رابطه بالا برقرار است. (که ما جلسه بعد آن را اثبات می‌کنیم)

پس از اینجا کوانتوم مکانیک را ... کنیم و بگوییم دامنه انتقال از یک نقطه به نقطه دیگر را به صورت بالا بگیریم که S_{cl} کنش کلاسیک دستگاه است (یعنی انتگرال لاگرانژین) و نوعی کاملاً کلاسیک است و

$S_{cl} = \int L\,dt$ ، $L = \frac{1}{2}mv^2 - V(x)$

همین موضوع است که قضیه را جالب می‌کند و تنها نشانه‌ای که از کوانتوم مکانیک در رابطه بالا قرار گرفته است $\hbar$ فرض است.

جلسه یازدهم: ۸۴/۸/۲۴

جلسه گذشته در مورد انتگرال مسیر فاینمن صحبت کردیم.

اگر سیستم در زمان t_i در نقطه x_i باشد، احتمال پیدا کردن سیستم در زمان t_f در نقطه x_f برابر است با:

$$\langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H (t_f - t_i)} | x_i \rangle = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$$ دامنه احتمال

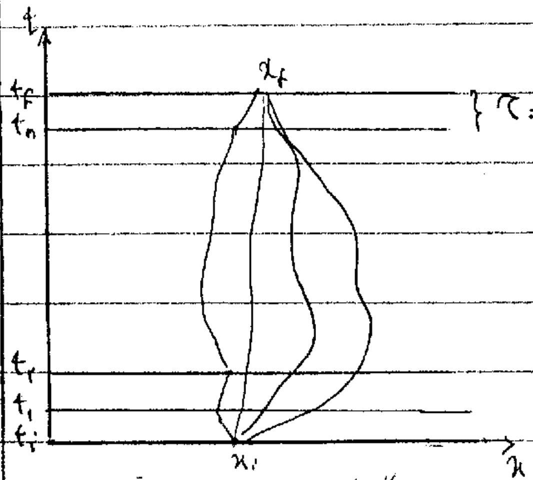
اگر تصویر هایزنبرگ را در نظر بگیریم، چون در آن تصویر حالتها با زمان عوض نمی‌شوند، حالت $|x_i, t_i\rangle$ را همین طور می‌نویسند ولی Bra را الطبع باید معرف پایه‌ای باشد در زمان t_f زیرا پایه‌ها در این تصویر تحول می‌یابند.

با استفاده از این نکته که پایه‌های هایزنبرگی مجموعه کامل هستند می‌توان دامنه احتمال را بر حسب تعداد زیادی پایه بسط داد:

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int dx_1 \ldots dx_n \langle x_f t_f | x_n t_n \rangle \langle x_n t_n | \ldots \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle$$

$$t_f > t_n > t_{n-1} \ldots t_1 > t_i$$ چون رابطه‌ای می‌خواهیم که تغییر اتفاقاتی را نشان دهد باید.

نیز در رسم این فضای مختصات به این شکل می‌رسیم:



$$\tau = \frac{t_f - t_i}{n+1}$$

ذره در زمان t_i در نقطه x_i بوده و می‌خواهیم احتمال آن را در زمان t_f در نقطه x_f باشد را بدست آوریم.

گفتیم در زمان‌های بینابینی: در زمان t_1 در x_1 ... در زمان t_n در x_n و ... قرار گرفته باشد و چون روی تمام x ها جمع زده می‌شود، پس به این معنی است که باید روی تمام مسیرها جمع صورت گیرد، بنابراین فرمالیزم کوانتومی معادل این است که سیستم اگر بخواهد از یک نقطه‌ای به نقطه دیگر برود باید همه مسیرهای ممکن را طی کند و هر کدام را با یک احتمالی، این احتمالها در هم ضرب می‌شود و مسیرهای مختلف با هم جمع می‌شوند. این بحث جلسه گذشته بود.

حال می‌خواهیم ببینیم در مورد هامیلتونی‌هایی که ما می‌شناسیم آنها را می‌توانیم بنویسیم، فرض ما شناختن آنها از این نوع است که H ای که نوشته

شده، اپراتور است. ما می‌خواهیم این را به نحو دیگری بنویسیم که در نهایت از اپراتورها هم استفاده نکنیم. به این خاطر برای هر کدام از این بازه‌ها که بازه‌های خیلی کوچک زمانی هستند (τ خیلی کوچک)، در هر یکی از این بازه‌ها، عبارت موجود را حساب کنیم که ببینیم به چه صورت تبدیل خواهد گشت. بنابراین مثلاً، الم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = ? \\ \tau = t_2 - t_1 \ll 1 \end{cases}$$

شرح را بسط می‌دهیم، بقیه جملات قابل صرف‌نظر کردن هستند

طبق تعریف: $\langle x_2 | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau}}_{1 - \frac{i}{\hbar} H\tau + \cdots} | x_1 \rangle = \langle x_2 | x_1 \rangle - \frac{i}{\hbar} \tau \langle x_2 | H | x_1 \rangle$

چون τ را کوچک گرفتیم

در جمله اول رابطه بالا رست راست، دسته کامل‌های حالت P را وارد می‌کنیم:

$$\langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} | x_1 \rangle = \int dp \underbrace{\langle x_2 | p \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p x}} \langle p | x_1 \rangle - \frac{i}{\hbar} \tau \langle x_2 | H | x_1 \rangle \quad (\mathrm{I})$$

از کاش کشتن رفضای ما

بنابراین جمله اول می‌شود:

$$\Rightarrow \langle x_2 | x_1 \rangle = \frac{1}{h} \int dp\, e^{\frac{ip}{\hbar}(x_2 - x_1)} \quad (\mathrm{II})$$

برای محاسبه جمله دوم، H را به این صورت می‌گیریم، بنابراین جمله دوم، دو قسمت دارد:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$$

جمله اول H می‌شود:

$$\frac{1}{2m} \langle x_2 | P^2 | x_1 \rangle = \frac{1}{2m} \int dp' dp'' \langle x_2 | p' \rangle \underbrace{\langle p' | \overbrace{P^2 | p'' \rangle}^{p''^2 | p'' \rangle}}_{p'^2 \delta(p' - p'')} \langle p'' | x_1 \rangle$$

به خاطر تابع δ یکی از انتگرال‌ها برداشته می‌شود.

$$= \frac{1}{2m} \int dp' \langle x_2 | p' \rangle \langle p' | x_1 \rangle p'^2 = \frac{1}{h} \int dp\, e^{\frac{ip}{\hbar}(x_2 - x_1)} \cdot \frac{p^2}{2m} \quad (\mathrm{III})$$

از نوع تابع موج هستند پس به صورت exp می‌توان نوشت

این جمله اول H شد که همه چیز عدد است و اپراتور نیست

جمله دوم H می‌شود:

$$\langle x_2 | V(x) | x_1 \rangle = V(x_1) \underbrace{\langle x_2 | x_1 \rangle}_{\overset{(\mathrm{II})}{=} \delta(x_2 - x_1)} = V\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \frac{1}{h} \int dp\, e^{\frac{ip}{\hbar}(x_2 - x_1)}$$

چون تابع دلتا داریم، بی‌معنی غیر صفر است که $x_1 = x_2$

پس عملگر H می‌شود:

$$\langle x_2|V(x)|x_1\rangle = \frac{1}{h}\int dp\, e^{ip/\hbar (x_2-x_1)}\, V(\bar{x}) \quad (\mathrm{III})$$

می‌توانیم را انتگرال بگیریم چون انتگرال مربوط به p است

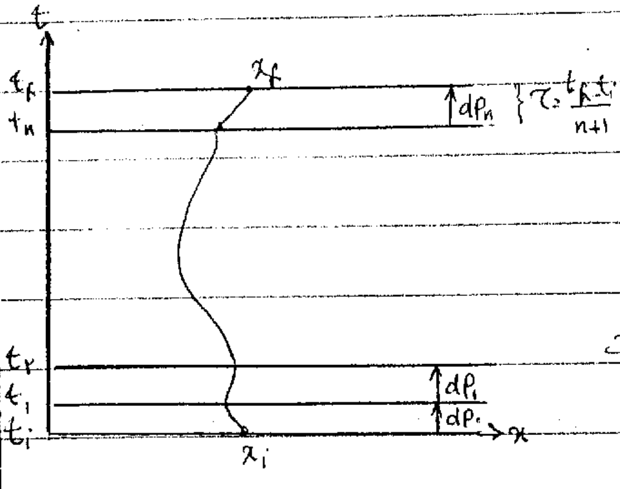
نتایج (II)، (III)، (IV) را در رابطه (I) می‌گذاریم و در رابطه شکل فاکتور می‌گیریم:

$$\langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle = \frac{1}{h}\int dp\, e^{\frac{i}{\hbar}p(x_2-x_1)} \underbrace{\Big\{ 1-\frac{i}{\hbar}\tau\big(\overbrace{\frac{p^2}{2m}+V(\bar{x})}^{H(p,\bar{x})\ \text{کمیت عددی است}}\big)+\cdots \Big\}}_{e^{-\frac{i}{\hbar}H(p,\bar{x})\tau}}$$

$\leftarrow$ classic number است و کوانتومی نیست

چون τ کوچک است پس می‌توان کل رابطه را به شکل exp بگیریم.

پس برای هر کدام از این ضرب‌ها می‌توانیم چنین رابطه و انتگرالی بنویسیم!



برای هر کدام از این انتگرال‌ها یک عنصر انتگرالی داریم

در حقیقت n+1 عنصر بینهایت کوچک داریم که هر کدام x خودش را دارد

حاصلضرب dx ها که مربوط به هر بازه است.

عنصر (تغییر) را برای هر بازه اسم‌گذاری می‌کنیم بصورت

$dp_n \ldots dp_1, dp_0$

$$\langle x_f t_f|x_i t_i\rangle = \int \prod_{j=1}^{n} dx_j \prod_{j=0}^{n}\frac{dp_j}{h}\, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\overbrace{\big[p_j(x_{j+1}-x_j)-\tau H(p_j,\bar{x}_j)\big]}^{\text{c-number هستند و اپراتور نیستند}}}$$

$x_0 \equiv x_i$

$x_{n+1} \equiv x_f$

توجه کنیم که dp ها از p_0 تا p_n می‌روند

x ها از x_1 تا x_n می‌روند اما در exp جمع از j=0 شروع می‌شود

x_0 هم داریم که x_0 و x_{n+1} همان x_i و x_f هستند.

نکته: این رابطه را فرمولبندی دیگری بنامیم بصورت بازه بنویسیم به خاطر اینکه τ بینهایت کوچک در نظر گرفته شده است

چون می‌خواهیم رابطه‌مان ضمنی دقیق باشد، بنابراین حد τ ضمنی کوچک را می‌گیریم یعنی حد $n \to \infty$ و رابطه را دوباره می‌نویسیم و البته H را باز می‌کنیم:

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dx_j \prod_{j=0}^{n} \frac{dP_j}{h}\, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\left[P_j (x_{j+1}-x_j) - \frac{P_j^2}{2m}\tau - V(\bar{x}_j)\tau\right]}$$

حالا این رابطه تبدیل به رابطه‌ای می‌شود که قابل انتگرال‌گیری روی P_j هاست، چون این عبارت بر حسب هر کدام از P_j ها جداست و جمله‌هایی از نوع شکل پایین وجود دارد که به سادگی قابل محاسبه است:

$$\int dP_j\, e^{\frac{i}{\hbar}[P_j^2 \cdots]} \xrightarrow{\text{که از نوع}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha x^2+\beta x)}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\beta^2/4\alpha}$$

که قابل محاسبه است

بنابراین انتگرال روی P_j را می‌توان محاسبه کرد و رابطه به این شکل می‌شود:

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{i\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_{j=1}^{n} dx_j\, e^{\frac{i\tau}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\tau}\right)^2 - V(x_j)\right]} \quad (1)$$

در حد $n\to\infty$ باید به جای $\sum$ از انتگرال استفاده کنیم چون τ به سمت صفر می‌رود و به جای τ باید از dt استفاده کنیم و به صورت مقابل باید تغییر دهیم:

$$\begin{cases} \tau \sum \to \int dt \\ \dfrac{x_{j+1}-x_j}{\tau} \to \dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{i\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}} \prod_{j=1}^{n} dx_j \equiv D[x(t)] \to$$ یک نوع المان انتگرال‌گیری است

پس رابطه (1) را می‌توانیم بنویسیم:

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int D[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int dt \overbrace{\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x)\right\}}^{L_{\text{classic}}\ \text{لاگرانژی کلاسیک}}}$$

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int D[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} L_{\text{clas.}}(x,\dot{x})\, dt} \quad (2)$$

رابطه انتگرال مسیر فاینمن

Path integral

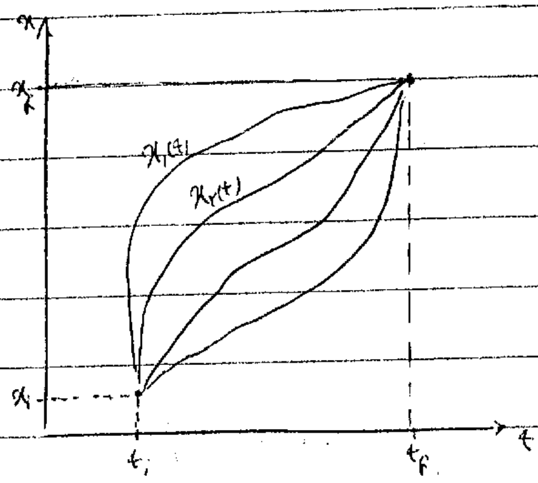
(functional integral / انتگرال تابعی)

رابطه انتگرال مسیر فاینمن احتمال گذار را بر حسب مسیرهای مختلف بر حسب [illegible] حساب می‌کند و روی آن جمع می‌بندد و باید

بعد توضیح کنیم که مسیر چیست؟ اینکه مسیر مهم است به این دلیل است که در exp با $x(t)$ و $x(t_i)$ سروکار داریم و برای اینکه بگوییم $x(t)$ معلوم شود باید بگوییم چه مسیری را در نظر می‌گیریم. پس در انتگرال گیری با مسیر سروکار داریم. چون $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و $x(t)$ هر دو تابع هستند و در تابع مشخص با x یعنی x بر حسب t مشخص است یعنی مسیر مشخص است.

پس تا قبل از جمع زدن، همانند هر یک است، اما انتگرال گیری یعنی روی تمام مسیرها جمع زده شود.

پس اگر بخواهیم این شکل بکشیم، همه مسیرهای ممکن از نقطه x_i,t_i به نقطه x_f,t_f را در نظر بگیریم. همه به صورت یک سری توابع مختلف نسبت به t هستند که باید روی تمام آنها جمع بزنیم.



که به انتگرال مسیر فاینمن یعنی محاسبه رابطه (1).

در انتگرال مسیر، تقریباً یک نوع مسیر است که ترجمه این موضوع یعنی رابطه (1):

$$(1):\ \langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{i\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}}\int\prod_{j=1}^{n}dx_j\,e^{\frac{i\tau}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\tau}\right)^2-V(\bar{x}_j)\right]}$$

در انتگرال گیری با شکل dx داریم یعنی دیفرانسیل یک متغیر داریم، با هیچ وقت با دیفرانسیل یک تابع کار نداریم یعنی شکل $\int d(f(x))$ این معنی ندارد. اما در انتگرال مسیر اتفاقاً این طور است و دیفرانسیل از یک تابع گرفته می‌شود و به همین دلیل به رابطه می‌گویند انتگرال تابعی (Functional Integral). حال تعریف انتگرال تابعی رابطه (1) است که یک انتگرال معمولی است که مقدار زیادی dx قرار دارد که تابع t نیستند. ولی بر عکس در انتگرال مسیر فاینمن که انتگرال تابعی مطرح شد که متغیر یک تابع است.

وقتی می‌گوییم انتگرال مسیر فاینمن را حساب کنید یعنی تبدیل به رابطه (1) کنید و آن را حساب کنید که به زبان ساده‌تر به شکل رابطه (2) نوشته می‌شود.

بنابراین طبق نظریه فاینمن انتگرال گیری روی تمام مسیرهای ممکن (یعنی تمام توابع $x(t)$) با این شرط که این مسیرها در زمان t_i در نقطه x_i باشند و در زمان t_f در نقطه x_f باشند را از نوع کلاسیکی انجام دهیم، احتمال گذار کوانتومی را بما می‌دهد.

LearnElement.ir

همانطور که جلسه پیش هم گفتیم محاسبه این انتگرال کار ساده‌ای نیست.

تمرین ۲:

انتگرال مسیر را برای نوسانگر هماهنگ حل کنید و propagator را برای آن بدست آورید.

$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = ?$

پتانسیل $= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

البته propagator در تصویر شرودینگر هم شکل بدست می‌آید برای نوسانگر هماهنگ و توابع هرمیت در آن ظاهر می‌شوند.
اینجا هم بدست آوردن آن به این روش سخت است.

بنابراین از خود انتگرال مسیر فاینمن خیلی به صورت کوانتومی استفاده نمی‌شود چون کار پیچیده‌ای است ولی می‌توان استفاده مهم از آن برد:

۱) استفاده مفهومی؛ که می‌گوید کوانتوم مکانیک چنین برخوردی است

۲) استفاده در توسعه مکانیک کوانتومی که اسم آن نظریه میدانهای کوانتومی است و در آنجا یکی از ابزارهای مهم انتگرال مسیر فاینمن است و آنجا واقعاً کار ساده‌ای می‌شود.

دو سؤال:

۱) این انتگرال مسیر که جمع مسیرهای مختلف است، آیا به حد کلاسیک منجر می‌شود؟ برای اینکه مسیرهای مختلف بی‌اهمیت شوند و فقط یک مسیر اهمیت داشته باشد و آن هم مسیر کلاسیک است. اگر نشود این فرمولبندی اشکال دارد.

۲) آیا $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ در معادله شرودینگر صدق می‌کند؟ جلسه پیش نشان دادیم که propagator در معادله شرودینگر صدق می‌کند؛ این عبارت چطور؟

حال می‌خواهیم این دو سؤال را جواب بدهیم.

سؤال اول:

حد کلاسیک انتگرال مسیر فاینمن:

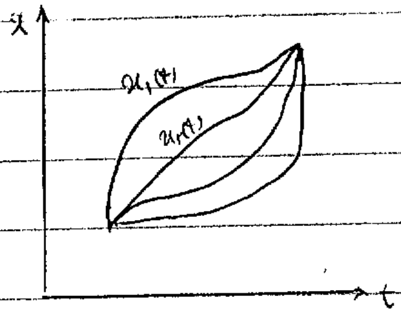
در اینجا بطور خیلی عمومی بحث می‌کنیم و بعد با یک مثال خاص هم نشان می‌دهیم که درست است.

در این رابطه جمع تعداد زیادی exp داریم برای مسیرهای مختلف:

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int D[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} L_{class}(x,\dot{x})\,dt} = \int D[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

که می‌توانیم قسمت موهومی را جمع تعدادی cos بگیریم و یا

برای قسمت حقیقی جمع تعداد زیادی sin بگیریم.



حال با قسمت sin کار می‌کنیم، البته می‌توان برای cos هم همین را نشان داد.

برای هر مسیری باید exp را حساب کنیم و بعد با هم جمع کنیم، پس مثلاً برای حالتی که sin را در نظر بگیریم می‌شود:

$$\sin\frac{S_1}{\hbar} + \sin\frac{S_2}{\hbar} + \dots$$

حالا نکته این است که اگر اختلاف این جملات با هم برابر π باشد یعنی:

چون این جمع‌ها بصورت پیوسته است اگر یک مقدار

if $\frac{S_2}{\hbar} = \frac{S_1}{\hbar} + \pi \longrightarrow \sin\frac{S_2}{\hbar} = -\sin\frac{S_1}{\hbar}$ از مسیر اول برویم به جایی می‌رسیم که در آنجا فاز

صدق کند، چون بی‌نهایت مسیر وجود دارد پس این فرض حتماً پیش می‌آید.

$\Longrightarrow \sin\frac{S_1}{\hbar} + \sin\frac{S_2}{\hbar} = 0$ بنابراین این دو مسیر (مسیر ۱ و ۲) اثر همدیگر را

حذف می‌کنند و در عبارت نهایی تأثیری ندارند، این نکته خیلی مهم است.

یعنی درست است که انتگرال‌گیری روی مسیرهای مختلف است اما نوع فرمول‌بندی طوری است که امکان دارد تعداد زیادی مسیر همدیگر را

حذف کنند. پس اگر چنین اتفاقی پیش آید عملاً تعداد زیادی از مسیرها را نباید در نظر بگیریم.

بطور خیلی ساده: if $S \gg \hbar \longrightarrow$ این اتفاق به سرعت رخ می‌دهد.

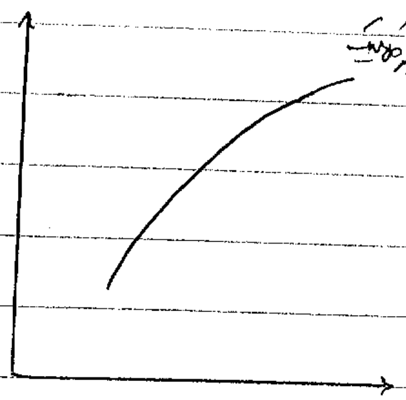
یعنی این حرف این است که اگر S یک عددی باشد هزاران برابر $\hbar$، بنابراین $\frac{S}{\hbar}$ مثلاً می‌شود 1000π حال اگر

S را یک مقدار عوض کنیم می‌شود 1001π، این یک اختلاف فاز π را می‌دهد.

ولی اگر $\frac{S}{\hbar}$ بشود $\pi \times 0/01$ ، این اتفاق ممکن است در مسیرهای اطراف نیفتد چون این مقدار کوچک است و اگر عوض شود بشود $\pi \frac{1}{5}$ و ... وضعیت مانده تا به π برسد.

پس شرط اصلی این است که $\hbar \ll S$ باشد، در این صورت با تغییر مسیر به سرعت اختلاف فاز پیدا می‌کند و باعث می‌شود که این اثرات همدیگر را حذف کنند. بنابراین مسیرهایی که $\frac{S}{\hbar} \gg$ باشند را از اینجا به بعد لازم نیست در نظر بگیریم:

در حالت کلاسیک، چون $\hbar \ll S$ است، چون با جرم‌های ماکروسکوپیک کار داریم (اگر جرم نشسته $\frac{1}{2} mv^2$)

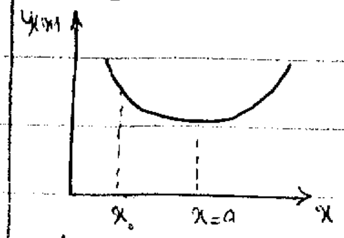


بیشتر این حذف رخ می‌دهد. ولی یک مسیر وجود دارد در کلاسیک به نام مسیر کلاسیک که می‌دانیم حذف نمی‌شود.

این مسیر کلاسیک این خاصیت را دارد که از اصل کمترین کنش پیروی می‌کند یعنی:

$$\delta S = 0 \quad ; \quad S = S_{min}$$

یعنی اگر ذره روی این مسیر حرکت کند کنش مینیمم می‌شود.
حال می‌خواهیم بدانیم که چون فقط یک مسیر وجود دارد که مینیمم است، آن وقت در اطراف آن مسیر این اتفاق (اختلاف فاز π) نخواهد افتاد، بنابراین آن مسیر زنده می‌ماند و بقیه از بین می‌روند. بنابراین انتگرال مسیر در حالت کلاسیک به یک مسیر تقلیل پیدا می‌کند. ولی در حالت کوانتومی چون $\hbar \ll S$ نیست، تعداد زیادی مسیر را باید در نظر بگیریم. دلیل اینکه این اتفاق برای نقطه مینیمم نمی‌افتد این است که در اطراف نقطه مینیمم تغییرات تابع آرام است یعنی در اطراف آن مسیر خیلی تغییر زیاد نیست و به عدد π نمی‌رسد، بنابراین نمی‌توانند همدیگر را حذف کنند. نقاط مینیمم واقعاً چنین نقطه‌ای است.



$y(x)$

$$dy/dx = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = a \\ y_{min} \end{cases}$$

حال اگر $y(x)$ را حول x_0 بسط دهیم می‌شود:

$$y(x) = y(x_0) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_0}(x-x_0)^2 + \cdots$$

اگر x آنقدر به x_0 نزدیک باشد که از ترم‌های بالاتر بتوان صرف نظر کرد داریم:

$$y(x) \simeq y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0)$$

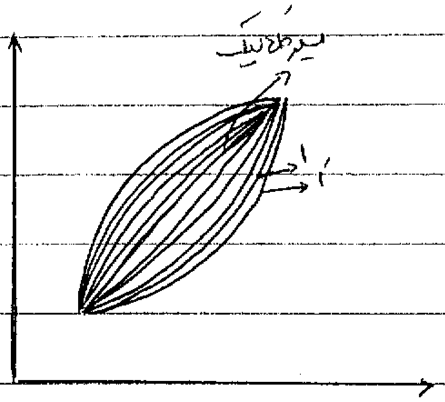
بنابراین اگر دو نقطه خیلی هم نزدیک باشند این تابع در این نقاط به اندازه $y'(x_0)(x-x_0)$ اختلاف دارد.

و نهایتاً اگر x_0 نقطه min تابع باشد ($x_0=a$) چون مشتق در آن صفر است داریم:

$$y(x) \simeq y(a)$$

یعنی در نقطه مینیمم اگر یک مقدار تغییر دهیم تابع تغییر زیادی نمی‌کند. بنابراین نقطه مینیمم یک خصوصیت یکتا دارد که با تغییر در اطرافش اختلاف زیادی حاصل نمی‌شود.

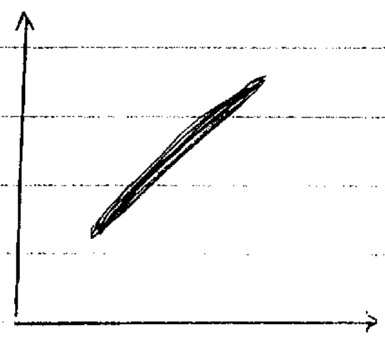
پس چون ذرات کلاسیک از مسیری می‌روند که روی آن مسیر کنش مینیمم است، بنابراین مسیرهای اطراف آن به صورت اختلاف زیادی ندارند و نمی‌توانند آن را حذف کنند. بنابراین اینجا حذف رخ نمی‌دهد و بنابراین یک مسیر یکتا داریم.



البته حذف برای مسیرهایی که از مسیر کلاسیک مقدار بیشتری دور شوند رخ می‌دهد.

بنابراین انتگرال مسیر فاینمن تناقضی ندارد با تصور ما از مسیر یکتا و آن را برقرار می‌دارد.

مسیری که از مسیر کلاسیک دورتر است نمی‌تواند آن را حذف کند، استدلال ما این است که فاز برای مسیر ۱ آنقدر در $\frac{S}{\hbar}$ است که با تغییر کوچک به مسیر ۲ این اتفاق برای آن می‌افتد و حذف می‌شود. یعنی هر مسیری که دورتر از مسیر کلاسیک است حتماً با همسایه به صورت حذف می‌شود. بنابراین هیچ مسیری نمی‌ماند که آن را حذف کند.



بنابراین فقط مسیرهای نزدیک به مسیر کلاسیک اهمیت دارند که آنها هم تقریباً مانند مسیر کلاسیک رفتار کنند.

این مسیرهای نزدیک به مسیر کلاسیک هم حذف نمی‌شوند یعنی مسیر یک پهنا دارد که به این دلیل است که با اندازه‌ی نقطه‌ای صحبت نمی‌کنیم که حتماً مسیر آن یک خط شود. بنابراین یک دسته مسیر وجود دارد نه یک مسیر.

مثال:

دو مسیر مختلف برای رفتن از نقطه (۰،۰) به (۱،۱) در نظر می‌گیریم

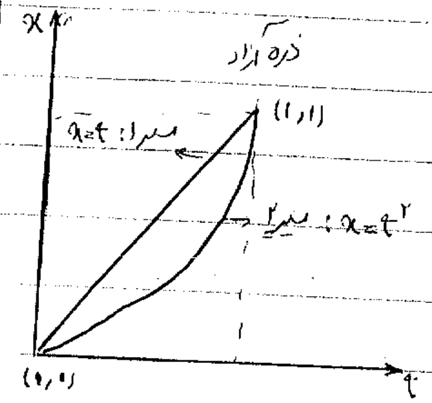
مسیر اول $x=t$ باشد و مسیر دوم $x=t^2$

می‌خواهیم ببینیم برای این دو مسیر مختلف اگر ذره در مسیر ۱ باشد

مسیر ۲، کنش چه مقدار فرق دارد (برای حالت مکانیک و کوانتومی)

می‌دانیم اگر کلاسیک باشد برای ذره آزاد، مسیر ۱ است. پس باید

اختلاف دو مسیر خیلی زیاد باشد.



حالت کلاسیک ، $m = 1\,gr$ جرم را این مقدار در نظر می‌گیریم

مسیر ۱ : $x=t \longrightarrow v=\frac{dx}{dt}=1$

پتانسیل $V(x)=0$

$$\Rightarrow L=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\times1^2=\tfrac{m}{2}$$

کنش

$$\Rightarrow S_1=\int_0^1 \tfrac{1}{2}m\,dt=\tfrac{1}{2}m\times1=\tfrac{m}{2}=5\times10^{-4}\ \text{J-sec}$$

$1\,gr$

مسیر ۲ : $v=\frac{dx}{dt}=2t$

$$\Rightarrow L=\tfrac{1}{2}m\times4t^2$$

$$\rightarrow S_2=2m\int_0^1 t^2\,dt=\tfrac{2}{3}m=6.6\times10^{-4}\ \text{J-sec}$$

$\Delta S = 1.6 \times 10^{-6}\ J\text{-}sec = \frac{1.6\times10^{-6}}{\hbar}\times\hbar$ ، بنابراین

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{S}{\hbar}\right) = \frac{1.6\times10^{-6}}{6.6\times10^{-34}} = 2.5\times10^{29}$$

اگر با π مقایسه کنیم:

$\frac{2.5\times10^{29}}{\pi} \cong 10^{29}$ رادیان

بنابراین اگر ذره از مسیر ۱ برود یا مسیر ۲ ، به اندازه $10^{29}\times\pi$ تفاوت در $\frac{S}{\hbar}$ دارند.

بنابراین مسیر ۲ خیلی خیلی دور از اتفاق می‌افتد ، مسیر ۱ یک مقدار کم عوض شود π تا اختلاف فاز ایجاد می‌شود بین از مسیر ۱ تا مسیر ۲ به اندازه 10^{29} بار عدد π گذشته است . می‌دانیم که ذره آزاد از مسیر ۱ در حالت کلاسیک می‌رود اما فرض می‌کنیم از مسیر ۲ برود . اگر از مسیر ۲ برود 10^{29} برابر π کنش آنها تفاوت است .

اگر حالت کوانتمی را در نظر بگیریم:

۲ حالت کوانتمی

$m \simeq 10^{-27}\ gr$ (جرم کوانتمی)

همان محاسبات را که انجام دادیم می‌رسیم به:

$$\rightarrow \Delta\left(S/\hbar\right) = 1.6 < \pi$$

بنابراین برای ذره آزاد کوانتمی این مسیر ممکن است چون هنوز اختلاف فاز مسیر ۲ با مسیر ۱ به π نرسیده است.

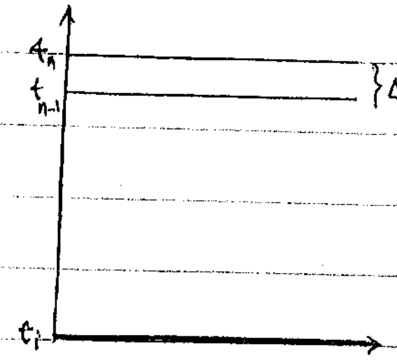
بنابراین مسیر ۲ آنقدر باید دور برود تا یک جابجایی π برسد و در آن صورت دیگر بی اهمیت می‌شود . بنابراین برای ذره آزاد کوانتمی $a = 2^{2}$ هم یکی از مسیرهای ممکن است .

سؤال دوم:

حال می‌خواهیم ببینیم آیا این عبارت در معادله شرودینگر صدق می‌کند یا نه؟

در اینجا یک نقطه یک حالت میانی در نظر می‌گیریم (x_{n-1}, t_{n-1})

$$\langle x_n t_n | x_i t_i \rangle = \int dx_{n-1} \underbrace{\langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle}_{\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp\left[\left(\frac{im}{2\hbar}\right)\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\Delta t} - iV\frac{\Delta t}{\hbar}\right]} \langle x_{n-1} t_{n-1} | x_i t_i \rangle$$



این تعاریف را انجام می‌دهیم:

$t_n = t + \Delta t$

$t_{n-1} = t$

$x_n = x \xrightarrow{\text{ثابت}}$

$\underset{\text{متغیر}}{x_{n-1}} = x + \overset{\text{متغیر جدید}}{\xi} \longrightarrow dx_{n-1} = d\xi$

پس رابطه بالا می‌شود:

$$\langle x_n, t_n | x_i, t_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int d\xi \, e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t} - \frac{iV\Delta t}{\hbar}} \langle x + \xi, t | x_i, t_i \rangle$$

چون ξ را بسط می‌دهیم:

چون از مرتبه Δt است : $e^{im\xi^2/2\hbar\Delta t} \left\{1 - \frac{iV}{\hbar}\Delta t + \cdots\right\}$ $\langle x,t | x_i,t_i \rangle + \xi \frac{\partial}{\partial x} \langle x,t | x_i,t_i \rangle + \frac{\xi^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x,t | x_i,t_i \rangle + \cdots$

بقیه جملات مهم نیستند، در صفحه بعد نشان می‌دهیم که حد $\Delta t \to 0$ ، حد $\xi \to 0$ را داریم.

ما می‌خواهیم در نهایت حد $\Delta t \to 0$ را بررسی کنیم

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle$$

این رابطه را در حد $\Delta t \to 0$ تبدیل می‌کنیم:

در حد $\Delta t \to 0$: $\underbrace{\langle x,t | x+\xi, t \rangle}_{\delta(x+\xi-x)\,=\,\delta(\xi)}$

پس چون در $\Delta t \to 0$ عبارت بالا برابر $\delta(\xi)$ است، فقط ξهای اطراف صفر زنده می‌مانند. بنابراین در حد $\Delta t \to 0$، ξ هم به سمت صفر میل می‌کند. پس در بسط صفحه قبل هم Δtها خیلی کوچک هستند هم ξ.

$$\langle x_n, t_n | x_i, t_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, e^{im\xi^2/2\hbar\Delta t} \left\{ 1 - \frac{iV}{\hbar}\Delta t + \cdots \right\}$$
$$\times \left\{ \langle x,t | x_i,t_i \rangle + \xi \frac{\partial}{\partial x} \langle x,t | x_i,t_i \rangle + \frac{\xi^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x,t | x_i,t_i \rangle + \cdots \right\}$$

$$\Rightarrow \langle x_n, t_n | x_i, t_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, e^{-\frac{m}{2i\hbar\Delta t}\xi^2} \left\{ \langle x,t | x_i,t_i \rangle + \cancel{\xi \frac{\partial}{\partial x} \langle x,t | x_i,t_i \rangle}_{\,0} \right. \right.$$
$$+ \frac{\xi^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x,t | x_i,t_i \rangle - \frac{iV}{\hbar} \Delta t \langle x,t | x_i,t_i \rangle$$
$$\left. \left. - \frac{iV}{\hbar} \Delta t \, \cancel{\xi \frac{\partial}{\partial x} \langle x,t | x_i,t_i \rangle} \right\} \right\}$$

تابع فرد است

تابع فرد است

چون جملات ξ فرد صفر می‌شوند چون فرد هستند.

$$\Rightarrow \langle x_n, t_n | x_i, t_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \left\{ \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, e^{-\frac{m}{2i\hbar\Delta t}\xi^2}}^{\sqrt{\frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m}}} \left(\langle x,t | x_i,t_i \rangle - \frac{iV}{\hbar} \Delta t \langle x,t | x_i,t_i \rangle \right) \right.$$
$$\left. + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi^2 \, \xi^2 e^{-\frac{m}{2i\hbar\Delta t}\xi^2}}_{\sqrt{2\pi}\left(\frac{i\hbar\Delta t}{m}\right)^{3/2}} \times \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x,t | x_i,t_i \rangle \right\}$$

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2} y^n \, dy = \dfrac{1}{2\alpha^{\frac{n+1}{2}}} \times \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\times 1}{2^n} \times \sqrt{2\pi} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} \, dy = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle x_n,t_n|x_i,t_i\rangle = \langle x,t|x_i,t_i\rangle - \frac{iV}{\hbar}\Delta t\langle x,t|x_i,t_i\rangle - \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\Delta t}{i\hbar}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle x,t|x_i,t_i\rangle \quad \text{(I)}$$

$x_n = x$

$t_n = t+\Delta t$

حال اگر طرف چپ را هم بسط دهیم داریم:

$$\text{طرف چپ}: \langle x_n,t_n|x_i,t_i\rangle = \langle x,t+\Delta t|x_i,t_i\rangle \overset{\text{بسط}}{=} \langle x,t|x_i,t_i\rangle + \Delta t\frac{\partial}{\partial t}\langle x,t|x_i,t_i\rangle + \cdots \quad \text{(II)}$$

$$\text{(I)},\text{(II)} \Rightarrow \cancel{\langle x,t|x_i,t_i\rangle} + \Delta t\frac{\partial}{\partial t}\langle x,t|x_i,t_i\rangle = \cancel{\langle x,t|x_i,t_i\rangle} - \frac{iV}{\hbar}\Delta t\langle x,t|x_i,t_i\rangle - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta t}{i\hbar}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle x,t|x_i,t_i\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\langle x,t|x_i,t_i\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\left(\langle x,t|x_i,t_i\rangle\right)$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle x,t|x_i,t_i\rangle = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right\}\langle x,t|x_i,t_i\rangle$$ این معادله شرودینگر شد

این عبارتی که برای انتگرال مسیر فاینمن بدست آوردیم، معادل با صدق کردن Propagator در معادله شرودینگر هم هست بنابراین همان اطلاعات را در بر دارد. یعنی می‌توانیم بجای معادله شرودینگر با این رابطه کار کنیم.

پس دو نوع برخورد موازی و مستقل برای مکانیک کوانتمی داریم ۱) روش انتگرال مسیر ۲) روش معادله شرودینگر

یکی از مزایای این انتگرال مسیر این است که اگر سرعت ذره بالا باشد یعنی سیستم نسبیتی باشد، معادله شرودینگر دیگر کارایی نخواهد داشت ولی انتگرال مسیر کارایی خواهد داشت. پس یکی از نکات مهم انتگرال مسیر این است که نسبیتی هم هست و فقط کافی است در رابطه‌ی آن، لاگرانژی را نسبیتی بگذاریم.

سؤال: آیا مسیرهای مختلف را می‌توان آزمایش نشان داد؟

حتماً نمی‌توان نشان داد. شرایط ما از اول این طور بود که می‌دانیم ذره در زمان t_1، در نقطه x_1 است و آمدیم ذره را در زمان t_2 در x_2 تشخیص (detect) می‌کنیم، حال اگر بخواهیم مسیر را پیدا کنیم تا دقیقتر را بدانیم اطلاعات بعد را از دست داده‌ایم و به‌محض اینکه در بین این دو نقطه ذره را detect کنیم روی حرکت ذره تأثیر گذاشتیم و این مسئله قابل نیست.

جلسه هفتم: ۲۹ / ۸ / ۸۴

تبدیلات پیمانه‌ای:

همانطور که از دروس قبلی می‌دانیم، تبدیلات پیمانه‌ای آزادی در انتخاب پتانسیل است و تبدیل پتانسیل‌ها همان تبدیل پیمانه می‌شود.

آزادی در انتخاب پتانسیل = آزادی پیمانه‌ای

تبدیل پیمانه‌ای فقط برای پتانسیل الکترومغناطیسی به صورت کلاسیک بحث شده، فقط برای آن‌ها مطرح نیست و برای هر پتانسیلی می‌توان این بحث را کرد که آزادی در انتخاب پتانسیل به چه چیزی منجر می‌شود.

در فیزیک کلاسیک این آزادی در انتخاب پتانسیل به هیچ چیزی منجر نمی‌شود یعنی تغییر پتانسیل تا یک حدودی (که این حدود را هم نوع تئوری معلوم می‌کند) هیچ معنای فیزیکی ندارد.

بنابراین هر نوع پتانسیلی می‌توان انتخاب کرد در همان حیطه‌ای که آزادی پیمانه‌ای وجود دارد.

ولی کشف مهمی که انجام شد مربوط به مکانیک کوانتومی است و این آزادی پیمانه‌ای باعث نتایج متفاوتی در مکانیک کوانتومی می‌شود.

در فیزیک کلاسیک، آزادی در انتخاب پتانسیل منجر به فیزیک‌های یکسان کلاسیک می‌شود:

پتانسیل‌های مختلف (از طریق تبدیلات مجاز) $\longrightarrow$ فیزیک کلاسیک یکسان

چون این شکیه هنوز هم وجود دارد، ما می‌توانیم پتانسیل‌های مختلف را انتخاب کنیم.

مثلاً $\vec{A}$ (پتانسیل برداری) مختلف به میدان‌های نوری یکسانی منجر می‌شود، پس ما می‌توانیم $\vec{A}$‌های مختلف را انتخاب کنیم چون چیزی که با نیروها با آن سروکار داریم، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است نه پتانسیل برداری.

اما در کوانتوم مکانیک به این صورت نیست، بلکه:

پتانسیل‌های مختلف (از طریق تبدیلات مجاز) $\xrightarrow{?}$ فیزیک‌های کوانتومی متفاوت } آزمایش بررسی می‌شود

اگر هم چنین اتفاقی نیفتد، مسئله مهمی است.

یعنی اینکه پتانسیل‌های معادل که فیزیک کلاسیک یکسانی می‌دهند، می‌توانند منجر به فیزیک‌های کوانتومی متفاوت شوند.

۵

این بحث منجر به کارهای مهمی در فیزیک شده و تا حال چندین جایزه نوبل گرفته است. برای پرداختن به این بحث با مثال‌ساده‌ای شروع می‌کنیم:

در فیزیک کلاسیک تغییر پتانسیل از V به V' اگر به این صورت باشد: (در فیزیک مدرن)

$$V(\vec{x}) \longrightarrow V'(\vec{x},t) = V(\vec{x}) + V_0(t)$$

فقط تابع زمان است و تابع مکان نیست

با این کار نیرو به این صورت می‌شود:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \longrightarrow \vec{F}' = -\vec{\nabla} V' = -\vec{\nabla} V = \vec{F}$$ آزادی پیمانه‌ای داریم

اصطلاحاً به این حالت آزادی پیمانه‌ای می‌گوییم یعنی آزادی انتخاب یک پیمانه یا یک ظرف اندازه‌گیری که در اینجا ظرف ما، پتانسیل است. بنابراین در فیزیک کلاسیک، این تبدیل کاملاً مجاز است.

پتانسیل V_0 را هم تابع زمان بگیریم و چه نگیریم فرقی نمی‌کند (ما در اینجا تابع زمان می‌گیریم) چون در اینجا تابعیت زمان مهم نیست و تعیین‌کننده در آزادی پیمانه‌ای نیست، بلکه تابعیت مکان نداشتن، مهم است.

۵ حال ببینیم این موضوع در مکانیک کوانتومی به چه چیزی منجر می‌شود یعنی این تبدیل که در فیزیک کلاسیک مشکلی ندارد یعنی حال نیرو همان معادله حرکت را می‌دهد، در مکانیک کوانتومی چه تغییری ایجاد می‌کند.

فرض کنیم:

حالت سیستم با پتانسیل V : $$|\alpha,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|\alpha\rangle \quad \text{(I)}$$

چون پتانسیل به اندازه V_0 اضافه شده پس هامیلتونی هم به اندازه V_0 اضافه می‌شود:

حالت سیستم با پتانسیل V' : $$|\tilde{\alpha},t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(H+V_0)(t-t_0)}|\alpha\rangle \quad \text{(II)}$$

که با فرض مستقل بودن V_0 از زمان این طور نوشتیم؛ چون $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ برای هامیلتونی مستقل از زمان بود.

اگر V_0 تابع زمان باشد باید $e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_0(t')dt'}$ قرار داد.

حال ارتباط بین رابطه (I) و (II) را نگاه می‌کنیم:

$$|\tilde{\alpha},t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}V_0(t-t_0)}|\alpha,t\rangle$$

۶ با ضرب طرفین در $\langle\vec{x}|$:

$$\tilde{\psi}(\vec{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}V_0(t-t_0)}\psi(\vec{x},t)$$

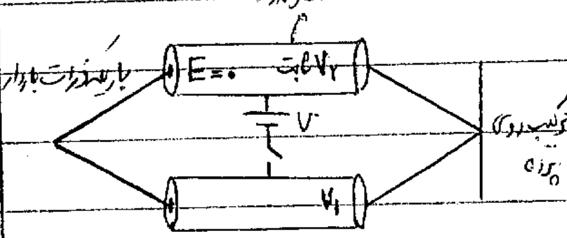
بنابراین در مکانیک کوانتومی تغییر پتانسیل به اندازه یک ثابت فاز منجر می‌شود.

تا هنگامی که با یک ذره سروکار داریم، فاز اضافی تاثیری ندارد، چون که با احتمالها را می‌خواهیم. احتمالها هم مربوط به حالتها که فاز در آن تاثیری ندارد:

$$\langle \tilde{\alpha}, t | \tilde{\alpha}, t \rangle = \langle \alpha, t | \alpha, t \rangle$$

بنابراین یک فاز اضافی برای یک ذره تاثیر فیزیکی ندارد و تا اینجا نقش فیزیک کلاسیک می‌باشد.

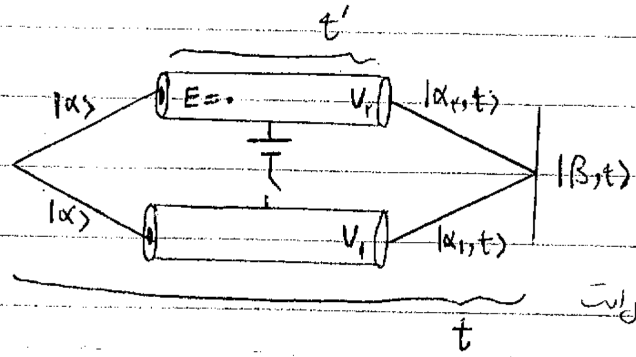
ولی اگر این طور نباشد و با ترکیبی از حالتها سروکار داشته باشیم، در آن صورت این فاز اثر دارد.
برای حالتهای ترکیبی، این فاز موثر است. یک آزمایش فرضی در نظر می‌گیریم. فرض کنیم باریکه ذرات باردار را ترکیب و دو قسمت می‌کنیم، هر کدام از قسمتها را داخل استوانه رسانایی می‌فرستیم.



دوباره از استوانه‌ها خارج می‌کنیم و با هم ترکیب می‌کنیم، پدیده تداخل ایجاد می‌شود. استوانه‌های رسانا را وصل به یک اختلاف پتانسیل می‌کنیم و یک کلید قرار می‌دهیم.

دیدگاه کلاسیک:

طوری تنظیم می‌کنیم که باتری هنگامی که ذرات وارد استوانه‌های رسانا می‌شوند، متصل می‌شود و هنگام خروج، مجدداً قطع می‌شود. با این کار به ذرات هیچ گاه نیروی الکتریکی وارد نمی‌شود، چون تا زمانی که ذرات بیرون هستند پتانسیل قطع است. بنابراین توزیع بار نداریم و نیرو هم نیست. وقتی ذرات وارد رسانا می‌شوند چون داخل رسانا میدان الکتریکی صفر است، بنابراین در آنجا هم میدان نمی‌بینیم. با اینکه روی سطح آن پتانسیل دارد، بنابراین در کل مسیر هیچ گاه ذرات میدان الکتریکی نمی‌بینند. بنابراین از دیدگاه کلاسیک، بودن یا نبودن باتری بی‌تاثیر است.
این نشان تقریباً شبیه حالت تبدیل پیمانه‌ای یعنی در فیزیک کلاسیک این پتانسیل تاثیری در فیزیک مسئله ندارد. دلیل این شباهت این است که میدان در داخل رساناها صفر است ولی وقتی باتری وصل می‌شود پتانسیل هر کدام از رساناها V_1 و دیگری را V_2 به طوری که $V = V_1 - V_2$ است، ولی این پتانسیلها ثابت است (چون رسانا داریم). بنابراین گذاشتن یا نگذاشتن باتری منجر می‌شود به اینکه پتانسیل را به اضافه یک ثابت بکنیم یا نکنیم و چون این کار تاثیری در میدان و نیرو ندارد، پس اثر نیرویی دیده نمی‌شود.



دیدگاه کوانتومی:

حالتی که روی پرده تشکیل می‌شود را $|\beta,t\rangle$ می‌گیریم که جمع دو حالت $|\alpha_1,t\rangle$ و $|\alpha_2,t\rangle$ است

t' زمانی است که ذره داخل استوانه و تحت تأثیر پتانسیل است

کل مسیر را زمان t می‌گیریم و H_0 در کل مسیر تأثیر دارد.

$$|\beta,t\rangle = |\alpha_1,t\rangle + |\alpha_2,t\rangle$$

ذرات در ابتدا هر دو یک حالت و یک جمله هستند

چون پتانسیل استوانه بالا V_2 است و پایینی V_1، باعث می‌شود که ذرات خروجی با هم تفاوت داشته باشند

H_0 برای هر دو یکی است.

$$|\alpha_1,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_0 t + V_1 t')}|\alpha\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}V_1 t'}}_{e^{-i\varphi_1}}|\alpha,t\rangle$$

$$|\alpha_2,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_0 t + V_2 t')}|\alpha\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}V_2 t'}}_{e^{-i\varphi_2}}|\alpha,t\rangle$$

پس این خروجی فقط یک ضریب با هم تفاوت دارند.

بنابراین $|\beta,t\rangle$ می‌شود:

$$\Rightarrow |\beta,t\rangle = e^{-i\varphi_1}|\alpha,t\rangle + e^{-i\varphi_2}|\alpha,t\rangle$$

$$|\beta,t\rangle = e^{-i\varphi_1}\left\{1 + e^{-i\overbrace{(\varphi_2-\varphi_1)}^{\varphi}}\right\}|\alpha,t\rangle$$

حال می‌خواهیم فرانژهای اختلاف عبور ذرات را بررسی کنیم پس نرم ۲ حالت‌ها را محاسبه می‌کنیم، فاز مشترک $e^{-i\varphi_1}$ در ابتدا ضرب شده و حذف می‌شود پس:

$$\langle\beta,t|\beta,t\rangle = (1+e^{-i\varphi})(1+e^{i\varphi})\langle\alpha,t|\alpha,t\rangle = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}\langle\alpha,t|\alpha,t\rangle$$

صحت این مسئله را فقط وقتی که با تجربه کار بشناسیم

نکته‌ای که می‌خواستیم در همین جا مشاهده می‌شود: فرانژهای عبوری مجدداً به صورت مسئله بدون حضور نیرو مربوط است به فاز φ هم مربوط می‌باشد که این φ اختلاف فاز خروجی‌ها است که این اختلاف فاز ناشی از اختلاف پتانسیل دو استوانه

است. بنابراین با تغییر پتانسیل باز هم φ تغییر می‌کند بنابراین پتانسیل صفر باعث تغییر فرانژ می‌شود
یعنی بدون اینکه نیرویی بصورت کلاسیک و ظاهری وارد شود در فرانژها تاثیر می‌گذارد. یعنی وقتی بار داریم با تغییر
آن در یک جاهایی حداکثر تداخل را داریم یک جاهایی می‌تواند صفر باشد (یعنی $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

بنابراین یک اثر قابل مشاهده فیزیکی داریم از انتخاب (گزاره) پتانسیل بدون هیچ تاثیر کلاسیکی. به عبارت دیگر این اثر کاملاً
کوانتمی است و در φ ما $\hbar$ وجود دارد:

$$\varphi = \frac{1}{\hbar}(V_2 - V_1)t' = \frac{Vt'}{\hbar}$$

اگر در حد $\hbar \to 0$ (حد کلاسیک) در اینصورت فرانژها خیلی نزدیک به هم می‌شوند
و فرکانس حرکت زیادی شود و همانطور که گفتیم در نوسانات زیاد، مقدار میانگین صفر می‌شود بنابراین بی تاثیر می‌شود.
ولی در حد $\hbar$ معقول (حد کوانتمی) این موضوع تاثیر دارد. بنابراین یک پدیده کاملاً کوانتمی است و نشان می‌دهد
که یک کمیت را داشتیم که آزادی در انتخاب پتانسیل در فیزیک کلاسیک نشان می‌دهد، می‌تواند در فیزیک کوانتمی تفاوت بدهد.

این آزمایش فرضی بود. حال یک آزمایش واقعی ببینیم پتانسیل‌های ثابت چه تاثیری می‌توانند داشته باشند.

آزمایش Callela (سال ۱۹۷۵)

کتاب این آزمایش، بحث اثرات کوانتمی گرانشی است. ارتباط دقیق کوانتمی با گرانش از قدیم مطرح بوده و هنوز
هم هست، یعنی ما نتوانسته‌ایم هنوز همانطور که می‌توانیم برهم‌کنش‌های الکتریکی و مغناطیسی را کوانتیزه کنیم (در سطوح مختلف). در سطح ساده
آن معادله شرودینگر است. در معادله شرودینگر پتانسیل کولنی می‌گذاریم برای اتم هیدروژن حل می‌کنیم و سطوح انرژی را بدست
می‌آوریم یعنی اتم هیدروژن کوانتمی وجود دارد. بنابراین الکترومغناطیس تاثیرات کوانتمی قابل مشاهده دارد.
در سطح بالاتر می‌توانیم بگوییم در تئوری میدان‌های کوانتمی، خود الکترومغناطیس را کوانتیزه می‌کنیم یعنی حامل نیروهای الکترومغناطیسی را
فوتون می‌گیریم و وقتی دو ذره باردار که از کنار هم رد می‌شوند با مبادله فوتون به هم نیرو وارد می‌کنند.
یعنی سوالی که می‌توان کرد این است که وقتی دو ذره باردار q_1 و q_2 داریم به هم نیرو وارد می‌کنند حال سوال این است که اینها
چطور خبردار می‌شوند که به هم نیرو وارد می‌کنند؟ اصل دیگر اینکه تاثیر از راه دور (action distance) را قبول نمی‌کنند و دو
ذره باید با هم ارتباط نقطه‌ای داشته باشند تا به هم نیرو وارد کنند و در اصل این دو با هم مبادله ذره می‌کنند، یعنی ذره ۱ و ۲ با هم
فوتون مبادله می‌کنند، این فوتون‌ها را که می‌گیرند، تکانه‌هایشان تغییر می‌کند و به هم نیرو وارد می‌کنند.
پس کوانتیزه کردن میدان در تئوری میدان‌ها کوانتمی یعنی اینکه میدان‌های الکترومغناطیسی بطور بسته‌های کوانتیزه شوند. حامل کوانتش یا
کوانتای انرژی را فوتون می‌نامیم که با مبادله اینها نیرو بوجود می‌آید.
Quantum ElectroDynamic (QED)

حال به ذهن انسان می‌رسد که همین کار را با نیروهای گرانشی کند یعنی به جای بار q_1 و q_2، جرم m_1 و m_2 وجود داشته باشند ذرات حداقل به دو دلیل که ما می‌دانیم به هم نیرو وارد می‌کنند یکی به دلیل باردار بودنشان و دیگری به خاطر جرم دار بودنشان.

به وقتی دو ذره جرم داشته باشند به هم نیرو وارد می‌کنند. حال سؤال قبلی مطرح می‌شود که بنا به action distance وجود داشته باشد و وقتی خورشید اینجاست و زمین یک جای دیگر، چطور هم دیگر را می‌بینند که به هم نیرو وارد کنند. پس این به ذهن می‌رسد که آنها یک چیزی با هم مبادله می‌کنند و آن کوانتای میدان گرانشی است که "گراویتون" نام دارد که شبیه فوتون است و بدون جرم، اما به جای اسپین ۱ (در فوتون) اسپین آن ۲ است.

ولی متأسفانه این ایده کار نمی‌کند یعنی ایده‌ای که گراویتون مبادله می‌شود بین دو جرم و بنابراین ذرات به هم نیرو وارد می‌کنند. حل مسئله به سرعت به مشکل برمی‌خورد و شکل آن قابل حل نیست و شکل آن بحث بازبهنجارش است و بحث loop ها حلقه است.

حلقه در QED قابل حل است ولی در گرانش قابل حل نیست.

بنابراین بطور خلاصه گرانش به صورت ساده کوانتیده نمی‌شود یعنی نمی‌توان همان کاری که با الکترومغناطیس می‌شود انجام داد را با گرانش انجام داد.

این سؤال که چطور گرانش را کوانتیده کنیم در ۶۰ - ۷۰ سال اخیر مطرح بوده است و احتمالاً پدیده گرانش اثرات کوانتیده نداشته باشد.

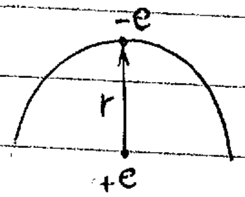
ولی اگر این سؤال را جواب دهیم، آزمایشات و محاسباتی که در آنها گرانش کوانتیده می‌شود اهمیت پیدا می‌کند. به این خاطر این آزمایش انجام شد که ببینند اصولاً گرانش تأثیر دارد یا ندارد و نشان دادند که تأثیر هم دارد.

بنابراین این بحث از دو جهت مهم است:

۱. پیمانه

۲. اصولاً کوانتوم مکانیک با گرانش کاری دارد یا ندارد.

برای اینکه بفهمیم چه مقدار تأثیرات گرانشی کوچک است، بنابراین آزمایش خیلی مشکل است، ابتدا یک سری محاسبات ساده می‌کنیم. اتم هیدروژن که یک سیستم پایدار است، با نیروی الکتریکی پایدار است و می‌خواهیم نشان دهیم که با نیروی گرانشی پایدار نیست.

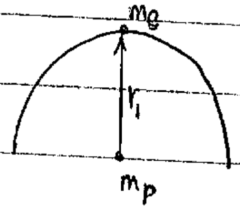


اگر یک بار e+ و یک بار e− در نظر بگیریم که عامل نیرو الکترومغناطیس باشد، آن وقت روابط زیر را داریم:

* فرض می‌کنیم که مقدار تکانه زاویه‌ای مضرب $\hbar$ باشد و از روابط بوهر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \\ mvr = n\hbar, \quad n=1: v = \frac{\hbar}{mr} \end{cases} \longrightarrow r = a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \simeq 0.5\,A^\circ$$ شعاع بوهر

حالا فرض کنیم که عامل اتم هیدروژن فقط نیروی جاذبه یا نیروی گرانشی باشد، یعنی حالا یک ذره با جرم m_p و یک ذره با جرم m_e داریم. اینها می‌خواهند کوانتیده بشوند و state ها را بسازند ولی با نیروی گرانشی:



$$\begin{cases} \frac{m_e v^2}{r} = \frac{G m_e m_p}{r^2} \\ m_e v r = n\hbar, \quad n=1: v = \frac{\hbar}{m_e r} \end{cases} \longrightarrow r_1 = \frac{\hbar^2}{G m_e^2 m_p} = 10^{31} a_0 = 10^{14}\ \text{L.Y.}$$

قبل از ادامه این بحث نکته‌ای را می‌گوییم: در مکانیک نیوتنی (کلاسیک) در صورت جرم‌ها اینرسی می‌روند، علت آن هم خیلی ساده است، چون معادله به صورت زیر است:

$$m\vec{a} = \vec{F} = m\vec{g}, \qquad \vec{g} \to \frac{Gm_p}{r^2}$$

جرم اینرسی (inertial mass) — جرم گرانشی (gravitational mass)

این دو m به یک فرض با هم حذف می‌شوند!

یکی را جرم اینرسی می‌گویند و دیگری را جرم گرانشی. علی‌الاصول این سؤال را می‌توان مطرح کرد که آیا جرم که خصوصیتی از ذره است، آن خصوصیت از ذره که در مقابل شتاب گرفتن مقاومت می‌کند (جرم اینرسی) با آن خصوصیت از ذره که تولید نیرو می‌کند (جرم گرانشی) یکی هستند؟ اصلاً دلیلی نیست یکی باشند.

آزمایش‌های خیلی زیادی انجام شده که این اختلاف را ثابت نمایند، تا ورش این موضوع را با دقت بسیار اندازه‌گیری کرد و بعداً هم با این آزمایش‌ها گزارش شد تا به حال اختلافی بین این دو جرم مشاهده نشده است، یعنی اگر بین اینها اختلافی

هم اگر وجود دارد، کمتر از خطاهای آزمایش‌ها است.

در اینجا این سؤال هنوز سؤال جالبی است که اصلاً معلوم نیست این دوتا جرم یکی باشند، و لزوماً هم با هم ندارند یکی دارد تولید نیرو می‌کند (جرم گرانشی) و دیگری دارد واکنش نشان می‌دهد به هر نیرویی (جرم اینرسی) یعنی هر نیرویی (مثل الکتریکی، مغناطیسی، گرانشی، ...) وارد کنیم، این جرم اینرسی در برابر آن مقاومت می‌کند.

بنابراین فرض می‌شود که این دو جرم یکی هستند بنابراین در روابط با هم حذف می‌شوند

$$m_{\text{اینرسی}}\vec{a} = \vec{F} = m_{\text{گرانشی}}\vec{g}$$

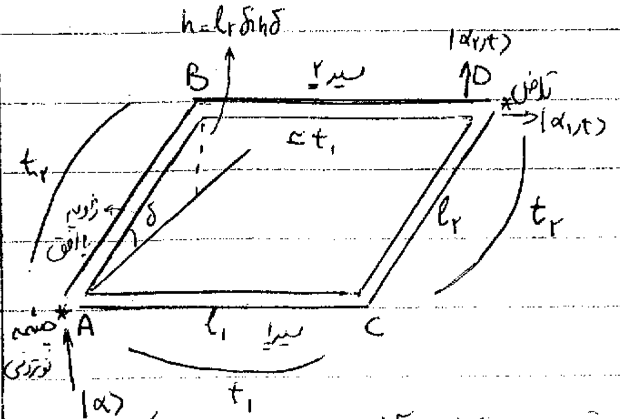
بنابراین در روابط جایی برای جرم‌ها نماند (فیزیک کلاسیک) ولی در فیزیک کوانتومی این طور نیست و وقتی این m ها با هم حذف شوند دوباره در یک جایی اثر آن پیدا می‌شود بنابراین در روابط باقی می‌ماند پس در فیزیک کلاسیک جرم در روابط نهایی معمولاً نمی‌ماند ولی در فیزیک کوانتومی باقی می‌ماند.

اگر مقدار $r_1 = \frac{\hbar^2}{G m_e^2 m_p}$ را حساب کنیم برابر با 10^{13} سال نوری می‌شود، شعاع عالم حدود 10^{9} سال نوری است این r_1، ده هزار برابر شعاع عالم می‌شود یعنی اگر یک اتم بخواهد با نیروی گرانشی پایدار بماند، یک اتم کل دنیا را پر می‌کند یعنی آنقدر نیروهای گرانشی ضعیف هستند که اصلاً در محاسبات معمولی ما وارد نمی‌شوند، بنابراین ممکن است به ذهن برسد که اصلاً نیروهای گرانشی با اثرات کوانتومی ندارند.

نیروی الکتریکی دو بار آنقدر به هم نیرو وارد می‌کنند که نمی‌گذارند بیشتر از ۵٪ آنگستروم از هم فاصله بگیرند.

پس اصولاً نیروهای گرانشی نباید تأثیری داشته باشند، به همین خاطر این آزمایش اهمیت دارد که این تأثیر کم را هم نشان می‌دهد و قابل مشاهده می‌کند.

۳ آزمایش:



یک چشمه نوترونی داریم، نوترون‌های این چشمه را از دو مسیر مختلف می‌فرستیم، که مسیرها به صورت یک قاب است که با زمین زاویه دارد (δ)

حال می‌خواهیم ببینیم که این دو مسیر چه تفاوتی می‌کنند؟

حالتی که در انتهای مسیرها هستند $|\alpha_1,t\rangle$ و $|\alpha_2,t\rangle$ هستند. حال ارتباط بین آنها و حالت اولیه ($|\alpha\rangle$) را باید پیدا کنیم.

ذره وقتی وارد این مسیرها می‌شود، در فاصله AC و BD تغییر سرعت ندارد؛ در فاصله CD و AB تغییر سرعت و ناشی از جرم می‌باشد و بنابراین زمانی که در مسیر CD بالا می‌رود سرعت با زمانی که در مسیر AB بالا می‌رود.

نکته این است که تغییر سرعتی که ذره از C به D پیدا می‌کند خیلی زیاد نیست و نسبت به سرعتهایی که ما ذرات را می‌تابانیم) چون نیروی گرانش خیلی ضعیف است به علت اینکه جرم ذرات پروتون و نوترون آنقدر کم است که نیروی گرانشی نمی‌تواند آنچنان باعث تغییر سرعت شود، بنابراین سرعت نقطه C با نقطه D خیلی تفاوت نمی‌کند:

اگر بخواهیم تغییر سرعتی را در نظر بگیریم بخاطر اختلاف پتانسیل‌ها است

$$V_C \simeq V$$

$$V_D \simeq V$$

برای ذره‌ای که از مسیر ۱ می‌آید:

$$|\alpha_1,t\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t_1}}_{\text{از A تا C}} \; \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t_2}}_{\text{از C تا D}} |\alpha\rangle$$

چون در مسیر C به D چون شیب ندارد هامیلتونی را H_0 گرفتیم

برای ذره‌ای که از مسیر ۲ می‌آید:

$$|\alpha_2,t\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t_2}}_{\text{از A تا B}} \; \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}(H_0+m_n g h)t_1}}_{\text{از B تا D}} |\alpha\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}m_n g h t_1}|\alpha_1,t\rangle$$

هامیلتونی از A تا C با هامیلتونی از B تا D فرق دارد، چون در مسیر B تا D به اندازه $m_n g h$ اختلاف پتانسیل وجود دارد که چون مقدار ثابتی است پتانسیل تغییری ایجاد نمی‌کند، این تغییر سرعتی ندارد بنابراین در مسیر B تا D و مسیر A تا C از نظر کلاسیک هیچ اثر قابل مشاهده‌ای ایجاد نمی‌شود چون پتانسیل آنها در حد یک ثابت فرق دارد.

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$|\beta,t\rangle = |\alpha_1,t\rangle + |\alpha_2,t\rangle = \left(1 + e^{\overbrace{-\frac{i}{\hbar}m_n g h t_1}^{\varphi}}\right)|\alpha_1,t\rangle$$

$l_2 \sin\delta$

l_1/v

بنابراین شدت حالت قبل یک فاز دارد

داریم که این فاز (φ) روی فرایند تداخل تأثیر می‌گذارد و مقدار نوری را که مشاهده می‌شود بستگی به h دارد. برای سرعت می‌توانیم

از فرمول دوبروی کمک می‌گیریم:

$$\lambda = \frac{\hbar}{p = m_n v} \Longrightarrow v = \frac{\hbar}{m_n \lambda}$$

اگر احتمال را حساب کنیم می‌شود:

$$\Rightarrow \langle \beta,t|\beta,t\rangle = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\langle \alpha_1,t|\alpha_1,t\rangle$$

این فرانژها به φ بستگی دارد که φ به صورت زیر است:

φ تابع زاویه δ شد:

$$\Phi = -\frac{m_n^2\, g\, l_1 l_2\, \lambda \sin\delta}{\hbar^2}$$

این پدیده حالت کوانتمی است، هم از این بحث معلوم است و هم اینکه در آخر جواب ما $\hbar$ دارد که اگر $\hbar$ به سمت صفر میل دهیم به صورت نوسانات شدید در می‌آید که مقدار متوسط آنها صفر است، اگر حالت به طوری بود که یک سری $\hbar$ داشتند و یک سری نداشتند در آن صورت یک مقدار نوسانی حول یک ثابت داشت و یک مقدار کوانتمی.

بنابراین با تغییر δ باید تغییرات φ را ببینیم. این اثر از دو جهت مهم است: ۱- نشان به اصل هم‌ارزی ندارد و پدیده کاملاً کوانتمی است چون به خاطر انتخاب پتانسیل ثابت در حالت کلاسیک تغییری ایجاد نمی‌شود. ۲- تاثیر گرانش را در کوانتم نشان می‌دهد و اصولاً نشان می‌دهد که این تاثیر هم پیچیده و هم مهم است و به آسانی نمی‌توان آن را کنار زد.

این آزمایش را آقای Colella انجام داد (شکل و شمای آزمایش در صفحه ۱۲۶ کتاب)، در منحنی مورد نظر یک سری فرانژهای مشاهده شده شدت نوترون است و محور تغییر زاویه با افق می‌باشد.

با داشتن حلقه $l_1 l_2 = 10\ cm^2$, $\delta = 90^\circ \longrightarrow \varphi = 55.6$

یعنی ۹ بار اختلاف فاز $\frac{\Phi}{2\pi} = \frac{55.6}{2\pi} \sim 9$

به 2π بار دور و بر می‌گردد، که این آزمایش همین نتیجه را نشان داد.

چیزی که در فیزیک به عنوان تبدیلات پیمانه‌ای مطرح است، در میدان‌های الکترومغناطیسی است، که ما در اینجا بحث می‌کنیم.

تبدیل پیمانه‌ای در الکترومغناطیس:

برای اینکه بحث ساده شود، میدان‌های $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را از پتانسیل‌ها می‌گیریم بنابراین:

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{cases}$$

نیروی لورنتس:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \overbrace{q\left[\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right]}^{\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \neq -\vec{\nabla}V}$$

به خاطر دستگاه گاوسی است

حال بحث سر این است که برای این سیستم لاگرانژی یا هامیلتونی را چطور بسازیم. مشکل هم سر این است که نیروی ما در این مسئله علاوه بر اینکه تابع مکان است، تابع سرعت هم هست. پس به همین دلیل نیروی پایستار نیست یعنی نمی‌توان این نیرو را از یک پتانسیل بدست آورد و این طور باید بنویسیم:

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \neq -\vec{\nabla} V$$

نیروهایی که تابع سرعت هستند گرادیان هیچ تابعی نیستند

$$L \stackrel{?}{=} T-V$$

و چون پتانسیل به معنای متعارف برای آنها وجود ندارد، لاگرانژی نمی‌توان برای آنها نوشت!

$$H \stackrel{?}{=} \sum p_i \dot{q}_i - L$$

و چون لاگرانژی نمی‌توان برای آنها نوشت، هامیلتونی هم برای آنها نمی‌توان ساخت!

بنابراین در فیزیک کوانتومی نمی‌توان آنها را مطالعه کرد چون ما در معادله شرودینگر با H باید کار کنیم.

اما این موضوع راه حل دارد. لاگرانژی (L) از این جهت دارای اعتبار در فیزیک است که معادله اویلر-لاگرانژ برای L منجر به معادله نیوتن می‌شود یعنی:

$$L = T-V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \xrightarrow{\text{منجر}} \vec{F}=m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

حال سؤال این است که در مواردی که V را به معنای متعارف آن نداریم (چون $F\neq -\nabla V$) آیا می‌توان L ای پیدا کرد که معادله مربوط آن معادله نیوتن را بدهد. در حالت کلی نمی‌توان این کار را کرد، اما در حالتهای خاص می‌توان این کار را کرد.

حالت خاص به این صورت است که درست است که F برابر $-\vec{\nabla}V$ نیست اما به این فرم که در پایین نوشتیم باشد:

پتانسیل تعمیم یافته

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_i} \quad \text{(I)}$$

اگر نیرو را بتوان به این صورت برحسب U ای که پتانسیل تعمیم یافته است نوشت، در آن صورت می‌توان لاگرانژی را این طور ساخت:

$$\longrightarrow L = T-U$$

و در آن حالت معادله اویلر-لاگرانژ به معادله درست حرکت منجر می‌شود.

تمرین:

به عنوان تمرین برای جلسه بعد نشان دهید که اگر U را به صورت زیر بگیریم، نیرویی که با استفاده از رابطه (I) بالا بدست می‌آید همان نیروی لورنتس است:

$$U = q\Phi - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$$

F_i این که نوشتیم فورس شبیه معادله اویلر-لاگرانژ است یعنی با اینکه V به این صورت وجود ندارد اما U شبیه معادله اویلر-لاگرانژ شد و T هم که همیشه در معادله اویلر-لاگرانژ به صورت زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = F \quad \text{نیرو} \qquad (\mathrm{II})$$

این رابطه همیشه برقرار است، چه نیرو پایستار باشد یا نباشد.

حال وقت اگر بتوانیم F را به صورت (I) هم بتوانیم بنویسیم، از آن صورت می‌توانیم با استفاده از معادله (I) و (II) معادله برای L تشکیل بدهیم.

بنابراین لاگرانژی الکترومغناطیسی به این صورت می‌شود:

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{V}$$

L برحسب ϕ و A می‌شود، برحسب E و B نیست.

می‌توانیم نشان دهیم که معادله اویلر-لاگرانژ برای این L به صورت نیروی لورنتس می‌شود:

اویلر-لاگرانژ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = q\left[\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right]$$

از لاگرانژی که هامیلتونی را می‌سازیم یعنی تکانه را به صورت زیر می‌نویسیم و در معادله $H = \sum p_i \dot q_i - L$ می‌گذاریم:

یعنی تکانه کانونیک دیگر mV نیست و به این صورت است:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \longrightarrow \vec{P} = \underbrace{m\vec{V}}_{\text{تکانه حرکتی (سینتیک)}} + \frac{q}{c}\vec{A} \qquad (\mathrm{III})$$

تکانه کانونیک

اگر $\vec{V}$ را از معادله (III) به دست آوریم و در هامیلتونی یک تک ذره قرار دهیم:

$$\vec{V} = \frac{(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})}{m}$$

تک ذره

$$H = \vec{P}\cdot\vec{V} - L$$

در آخر هامیلتونی به این صورت به دست می‌آید:

$$H = \frac{(P - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + q\phi$$

اگر دقت کنیم می‌بینیم که برای وارد کردن برهمکنش الکترومغناطیسی این تبدیل صورت گرفته است:

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$$ minimal جایگذاری

یعنی با این تبدیل ما از سیستم بدون برهم کنش به سیستم با برهم کنش الکترومغناطیسی می رویم.

از آنجایی که برای مکانیک کوانتومی راهی برای حل این مسئله نداریم، پس از فیزیک کلاسیک استفاده می کنیم، یعنی اینکه فرض کنیم در مکانیک کوانتومی هم، همین نسخه کار می کند:

$$H_{Q.M.} = \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}_{\text{تابع تکانه}} + \underbrace{q\Phi}_{x \text{ تابع}}$$

که در اینجا P عملگر است.

حال به عنوان یک چک خیلی سریع قبل از اینکه وارد کیت شویم، چند تا از خصوصیات H را در تصویر هایزنبرگ نگاه می کنیم:

در تصویر هایزنبرگ:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{1}{i\hbar \times 2m}\left[x_i, \left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\right]$$

رابطه ای که داشتیم

$$[x_i, F(\vec{P})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial P_i} \xrightarrow{\text{پس خواهیم داشت}} i\hbar \frac{\partial}{\partial P_i}\underbrace{\sum_{j=1}^{3}\left(P_j - \frac{q}{c}A_j\right)^2}$$

که تابعی از P است

فقط با مؤلفه i ام کار دارد

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial P_i}\left(P_i - \frac{q}{c}A_i\right)^2}_{2\left(P_i - \frac{q}{c}A_i\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx_i}{dt} = \frac{P_i - \frac{q}{c}A_i}{m}$$

اگر این رابطه را با رابطه Ⓘ Ⓘ Ⓘ صفحه قبل مقایسه کنیم

$$\text{III}: \vec{P} = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$$

می بینیم همان رابطه است ولی برای اپراتورها!

تکانه مکانیکی

پس $m\frac{dx_i}{dt}$ در حقیقت همان mv است که با تکانه مکانیکی فرق دارد و با Π_i نشان می دهیم:

$$\Pi_i = m\frac{dx_i}{dt} = P_i - \frac{q}{c}A_i$$

$$[P_i, P_j] = 0$$

برعکس تکانه (P) که با هم جابجا می شوند، تکانه مکانیکی با هم جابجا نمی شوند!

$$[\Pi_i, \Pi_j] = \left[P_i - \frac{q}{c}A_i, P_j - \frac{q}{c}A_j\right] = -\frac{q}{c}\left\{\underbrace{[P_i, A_j]}_{-i\hbar\frac{\partial A_j}{\partial x_i}} + \underbrace{[A_i, P_j]}_{+i\hbar\frac{\partial A_i}{\partial x_j}}\right\}$$

با استفاده از این رابطه

$$[P_i, G(x)] = -i\hbar\frac{\partial G}{\partial x_i} \xrightarrow{\text{خواهیم داشت}}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow [\Pi_i, \Pi_j] = \frac{ie\hbar}{c}\left(\underset{\uparrow\ \partial/\partial x_i}{\partial_i} A_j - \underset{\uparrow\ \partial/\partial x_j}{\partial_j} A_i\right) \qquad \text{(IV)}$$

که می‌توان برای بهتر نوشتن از B استفاده کرد:

$$B = \nabla \times A$$

$$B_k = \epsilon_{klm}\, \partial_l A_m$$

طرفین را در ϵ_{ijk} ضرب کنیم:

$$\epsilon_{ijk} B_k = \underbrace{\overset{=\epsilon_{ijk}}{\epsilon_{kij}}\, \epsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}}\, \partial_l A_m = \partial_i A_j - \partial_j A_i \qquad \text{(V)}$$

$$\text{(V)} \longrightarrow \text{(IV)}$$

$$\Rightarrow [\Pi_i, \Pi_j] = \frac{ie\hbar}{c}\, \epsilon_{ijk} B_k$$

بنابراین عملگرهای Π برعکس عملگرهای p که همیشه جابجا می‌شوند، جابجا نمی‌شوند، عملگرهای Π وقتی جابجا می‌شوند که میدان مغناطیسی نداشته باشیم.

اگر از رابطه قبل یک بار دیگر مشتق بگیریم:

$$m\frac{dx_i}{dt} = \Pi_i \qquad \frac{(p - \frac{q}{c}A)^2}{2m} + q\phi = \frac{\Pi^2}{2m} + q\phi$$

طبق معادله هایزنبرگ

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d\Pi_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\Pi_i, H]$$

$$[\Pi_i, \phi] = [p_i - \tfrac{q}{c}A_i, \phi] = [p_i, \phi] = -i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

$$[\Pi_i, \vec{\Pi}^2] = [\Pi_i, \Pi_j\Pi_j] = \underbrace{[\Pi_i, \Pi_j]}_{\text{شبیه } B}\underbrace{\Pi_j}_{dx/dt} + \Pi_j\underbrace{[\Pi_i, \Pi_j]}_{\text{شبیه } B}$$

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar}[\Pi_i, H] = q\left[\overset{-\partial\phi/\partial x_i}{E_i} + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\times\vec{B} - \vec{B}\times\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_i\right] \qquad (1)$$

طرفین رابطه را در $|\alpha\rangle$ و $\langle\alpha|$ ضرب می‌کنیم و چون در تصویر هایزنبرگ حالتها تابع زمان نیستند پس عملگر
از مشتق‌گیری آنها را خارج کرده و رابطه زیر برای آن تصویر برقرار است:

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\alpha|r|\alpha\rangle = \langle\alpha|\frac{d^2}{dt}r|\alpha\rangle$$

بنابراین ① تبدیل می‌شود:

$$①:\ m\frac{d^2\vec{x}}{dt} = q\left[E + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\times B - B\times\frac{d\vec{x}}{dt}\right)\right]$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2}{dt}\langle x\rangle = e\left[\langle E\rangle + \frac{1}{2c}\left\langle\frac{d\vec{x}}{dt}\times\vec{B} - \vec{B}\times\frac{d\vec{x}}{dt}\right\rangle\right]$$

که اگر با معادله نیروی لورنتس مقایسه کنیم تقریباً همان معادله است در حالت کلاسیکی:

نیروی لورنتس $\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = q\left[E + \frac{v}{c}\times B\right]$

فقط جمله $\frac{v}{c}\times B$ تبدیل به دو جمله شده: $\quad V\times B = \frac{1}{2}(V\times B - B\times V)$

بنابراین به درستی هامیلتونی $H = \frac{(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + q\phi$ در تصویر هایزنبرگ، قضیه اهرنفست به معادله
کلاسیک منجر می‌شود.

جلسه هجدهم: ۸۴/۹/۲ (چهارشنبه)

در این جلسه ادامه بحث تبدیلات پیمانه‌ای را ارائه می‌دهیم

اگر میدان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ مستقل از زمان داشته باشیم:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$
$$B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

معادلات حرکت کلاسیک سیستم یک ذره با جرم m و با بار q در میدان E و B بصورت زیر است:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$$

بعد گفتیم که این معادله حرکت از یک هامیلتونی بدست می‌آید که برای این حالت هامیلتونی شبیه هامیلتونی ذره آزاد است اما با یک تغییر:

$$H_{class} = \frac{(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + q\Phi \qquad \vec{P} \longrightarrow \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

فرض کنیم هامیلتونی کوانتومی هم همین است با این فرق که $\vec{P}$ عملگر است:

$$H_{quant} = \frac{(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + q\Phi \qquad \underbrace{\vec{\Pi}}_{\text{تکانه سینتیک}} \longrightarrow \underbrace{\vec{P}}_{\text{تکانه کانونیک}} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

معادله حرکت هایزنبرگ را در سیستم کوانتومی با این هامیلتونی بحث کردیم و به این صورت شد:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{\Pi}}{dt} = q\left[E + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B} - \vec{B} \times \frac{d\vec{x}}{dt}\right)\right]$$

مقدار چشمداشتی این معادله هایزنبرگ، همان معادله کلاسیک می‌شود:

$$m\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} = \frac{d\langle\vec{\Pi}\rangle}{dt} = q\left[\langle E\rangle + \frac{1}{2c}\left\langle\left(\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B} - \vec{B} \times \frac{d\vec{x}}{dt}\right)\right\rangle\right]$$

در واقع این هامیلتونی می‌توان قضیه ارنفست را مشاهده کرد.

اگر برای این هامیلتونی معادله شرودینگر را انجام دهیم.

$$H|\alpha, t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t\rangle$$

اگر طرفین را ضرب و یژه حالتهای مکان کنیم و چون در معادله شرودینگر ویژه حالتها مستقل از زمان هستند به این صورت می‌شود:

$$\langle \vec{x}' | H | \alpha, t \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{x}' | \alpha, t \rangle$$

اگر به جای $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ و نسبت جدید را قرار دهیم می‌شود: (جای q است e)

$$\frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}' - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}') \right]^2 \psi(\vec{x}', t) + q\phi(\vec{x}) \psi(\vec{x}', t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}', t)$$

این رابطه می‌شود معادله شرودینگر در فضای مکان با حضور میدانهای الکتریکی و مغناطیسی.

حال بیاییم به این تبدیل پیمانه‌ای بپردازیم، اولاً در معادلات شرودینگر با معادلات حرکت نیز فقط E و B ظاهر نمی‌شوند بلکه پتانسیل‌ها ظاهر می‌شوند. پتانسیل‌ها را به دو صورت می‌توان تغییر داد:

1) تبدیل ثابت پتانسیل‌ها : به φ یک ثابت اضافه کنیم

$$\begin{cases} \varphi \rightarrow \varphi + \lambda \\ A \rightarrow A \end{cases}$$

با این کار E ، B عوض نمی‌شوند چون E و B با مشتقات سروکار دارند. معادلات حرکت هم عوض نمی‌شوند ولی همیلتونی عوض می‌شود چون در همیلتونی A و φ نشسته است. ولی می‌دانیم که این تبدیلی که نوشتیم معادل این است که به همیلتونی یک جمله ثابت اضافه شود که این کار معادل تغییر $V \rightarrow V + V_0$ (ثابت) است که در گذشته است گفتیم که اگر به پتانسیل یک مقدار ثابت اضافه کنیم در تابع موج تنها در فاز تأثیری می‌گذارد ولی در سیستم ذرات می‌توانند تأثیر بگذارند که حالت مختلف آن را گفتیم. بنابراین تا این جا عین معادله قبلی است و حالت کیفی قبلی را می‌توان برای آن تکرار کرد بنابراین به آن نمی‌پردازیم.

تبدیل جالب‌تری که وجود دارد به این صورت است:

2) تبدیل پتانسیل‌ها به صورت تغییر :

$$\begin{cases} \Phi \rightarrow \Phi \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}) \end{cases}$$

می‌دانیم این تبدیل میدانها را عوض نمی‌کند زیرا این تبدیل پیمانه‌ای است که در الکترومغناطیس خوانده‌ایم. (چون کرل گرادیان صفر است.) البته این برای مواردی است که مستقل از زمان باشد. اگر تابع زمان باشد یک جمله $\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ به Φ اضافه می‌شود. ولی ما مستقل از زمان را بررسی می‌کنیم. در این تبدیل به سادگی معلوم است که:

$$\Rightarrow \begin{cases} E \rightarrow E \\ B \rightarrow B \end{cases}$$

بنابراین این تبدیل کاملاً فیزیکی است، چون میدانها را عوض نمی‌کند بنابراین نیرو را عوض نمی‌کند، پس معادله حرکت را عوض نمی‌کند.

حال می‌خواهیم تا اثر این تبدیل را در کوانتوم مکانیک دنبال کنیم که نتیجه خیلی مهم است.

انتظار ما این است:

می‌خواهیم تحت تبدیل پیمانه‌ای، فیزیک متناظر با حالت کلاسیک تغییر نکند. فیزیک کوانتومی تغییر می‌کند همان طور که در مورد قبل تغییر کرد ولی فیزیک کلاسیک تغییر نمی‌کند بنابراین آن چیزهایی که از فیزیک کوانتومی متناظر با کلاسیک است نباید تغییر کند. در حقیقت چیزی که متناظر کلاسیک است معادله ارنفست است:

$$m\frac{d^2\langle\vec{x}\rangle}{dt^2}=\frac{d\langle\vec{\Pi}\rangle}{dt}=q\left[\langle E\rangle+\frac{1}{2c}\left\langle\left(\frac{dx}{dt}\times B-B\times\frac{dx}{dt}\right)\right\rangle\right]$$

معادله ارنفست دقیقاً متناظر حالت کلاسیک است.

این معادله چون معرف C.M. (مرکز جرم) یا مقدار چشمداشتی کمیتها است و با معادله کلاسیک طبق قضیه ارنفست نباید تغییر کند بنابراین این معادله نباید تحت تبدیلات پیمانه‌ای عوض شود. یعنی می‌خواهیم تبدیلات پیمانه‌ای ما طوری باشد که این معادله تغییر نکند.

در این معادله اولاً مقادیر چشمداشتی مطرح شده است و اثر عملگرها مهم نیست. مقادیر چشمداشتی E و B که با پیمانه‌ای عوض نمی‌شوند چون E و B اصولاً عوض نمی‌شوند. مقدار چشمداشتی x و Π هم داریم. پس انتظار داریم که مقدار چشمداشتی این کمیتها هم تحت تبدیل پیمانه‌ای عوض نشوند.

بنابراین اعمال می‌کنیم:

اگر حالت سیستم با A، $|\alpha\rangle$ باشد (یعنی در پتانسیل اولیه، رشته حالات سیستم $|\alpha\rangle$ است)

و حالت سیستم با A'، $|\tilde{\alpha}\rangle$ باشد (وقتی پتانسیل را تغییر دهیم، حالت سیستم می‌تواند عوض شود $|\tilde{\alpha}\rangle$)

روی این حالت تغییر کرده یک سری شرط وجود دارد.

باید $|\tilde{\alpha}\rangle$ در روابط زیر صدق کند:

می‌خواهیم تغییر پتانسیل و حالت‌ها طوری باشد که فیزیک کوانتومی متناظر با کلاسیک تغییر نکند یعنی مقدار چشمداشتی x و Π عوض نشود.

$$\left.\begin{aligned}\langle x\rangle&=\langle\alpha|x|\alpha\rangle\\ \langle\Pi\rangle&=\langle\alpha|\Pi|\alpha\rangle\end{aligned}\right\}\ \text{ناوردا باشد}$$

یعنی تحت تبدیلات پیمانه‌ای اینها نباید تغییر کنند چون اینها هستند که حالت سیستم را متناظر با حالت کلاسیک می‌کنند.

اگر حالت جدید را بر حسب حالت قدیم به این صورت نشان دهیم:

$$|\tilde{\alpha}\rangle=G|\alpha\rangle$$

اگر تبدیلات پیمانه‌ای را روی پتانسیل‌ها اعمال می‌کنیم، اما می‌دانیم این تبدیلات روی حالتها چه چیزی را اعمال می‌کند، ولی می‌دانیم که

طوری باشد که $\langle x \rangle$ و $\langle \Pi \rangle$ ناوردا باشند یعنی:

$\underline{1}$ $\langle \alpha | \vec{x} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \vec{x} | \tilde{\alpha} \rangle$

x تحت این تبدیلات تغییر نمی‌کند.

$\underline{2}$ $\langle \alpha | \vec{\Pi} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \vec{\Pi}' | \tilde{\alpha} \rangle$

Π تحت این تبدیلات تبدیل به Π' می‌شود.

$\Pi = \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$

$A \longrightarrow A' = A + \nabla\Lambda(x) \quad \Rightarrow \vec{\Pi} \rightarrow \vec{\Pi}' = P - \frac{q}{c}\vec{A}'$

تحت تبدیلات پیمانه‌ای P تغییر نمی‌کند فقط A در Π تغییر می‌کند.

این Π' جدید با $|\tilde{\alpha}\rangle$ جدید باید طوری باشند که $\langle \Pi \rangle$ تغییر نکند.

$\underline{3}$ $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle$

$\langle \alpha | \alpha \rangle$ تعداد را به ما می‌دهد حال اگر تابع موج جدید داریم
نگاه کنیم وقتی تبدیل پیمانه‌ای باعث می‌شود که پتانسیل عوض شود، تابع موج عوض شود، این فیزیک را عوض نمی‌کند
بنابراین تعداد ذرات نباید کم و زیاد شود.
بنابراین اعمال نکردیم که $\Pi \rightarrow \Pi'$ و یا شرایط مسئله عوض شود، ممکن است عوض شود، ولی باید این سه شرط
برقرار باشد و باید تبدیلات پیمانه‌ای این سه شرط را ارضا کنند، یعنی G را طوری پیدا کنیم که این شرط‌ها
صادق باشند.

$|\tilde{\alpha}\rangle = G|\alpha\rangle$ داریم

$\underline{3}$ شرط $\rightarrow \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | G^{\dagger} G | \alpha \rangle \overset{\text{می‌خواهیم بشود}}{=} \langle \alpha | \alpha \rangle \Rightarrow G^{\dagger}G = 1$ G باید یکانی باشد

(1)

$\underline{1}$ شرط $\Rightarrow \langle \tilde{\alpha} | \vec{x} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | G^{\dagger} \vec{x} G | \alpha \rangle \overset{\text{باید بشود}}{=} \langle \alpha | \vec{x} | \alpha \rangle$ بنابراین برای هر α باید صادق باشد

$$\Rightarrow G^{\dagger}\vec{x}G = \vec{x} \quad (2)$$

$\underline{2}$ شرط $\rightarrow \langle \tilde{\alpha} | \vec{\Pi}' | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | G^{\dagger} (\overbrace{\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A} - \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda}^{\frac{q}{c}A'}) G | \alpha \rangle \overset{\text{باید بشود}}{=} \langle \alpha | (\overbrace{\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}}^{\Pi}) | \alpha \rangle$

$$\Rightarrow G^{\dagger}(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A} - \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda) G = \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A} \quad (3)$$

G باید در این سه رابطه صدق کند.

رابطه اول می‌گوید G باید یونیتاری باشد:

یعنی مثلاً از صورت exp بگیریم، می‌خوانند.

رابطه اول $G^\dagger G = 1 \xrightarrow{\text{هرمیتی فرض کنیم}} G = e^{if}$ (I)

مثل همه عملگرهای کلی که داریم اش عملگر کل زمان، انتقال، دوران و...)

رابطه دوم می‌گوید که این f باید طوری $\quad$ (II)

رابطه دوم $G^\dagger \vec{x} G = \vec{x} \longrightarrow G = e^{if(\vec{x})} = e^{if(\Lambda(\vec{x}))}$

باشد که با x جابجا شود یعنی باید تابعی از x باشد (پس عملگر نباشد)، و چون تبدیل پیمانه‌ای ما فقط با $\Lambda(\vec{x})$ سروکار دارد، پس این تابعی از $\Lambda(\vec{x})$ است، چون تنها چیزی که تبدیل پیمانه‌ای ایجاد می‌کند همین $\Lambda(\vec{x})$ است.

حال f باید طوری باشد که رابطه سوم هم صدق کند.

اگر G را آن طوری که در بالا تعریف کردیم بگیریم

رابطه سوم $\underbrace{G^\dagger(\vec{P}-\frac{q}{c}\vec{A}-\frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda)G}_{G^\dagger P G - \cancel{\frac{q}{c}\vec{A}} - \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda} = P - \cancel{\frac{q}{c}\vec{A}}$

چون $\vec{A}$ و $\vec{\Lambda}$ تابع x هستند پس با G و $G^\dagger$ جابجا می‌شوند:

(چون G هم تابع x است)

بنابراین f باید چنان باشد که

$$\Rightarrow G^\dagger \vec{p} G = \vec{P} + \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda \quad \text{(III)}$$

اگر f در رابطه (II) صدق کند، رابطه (III) هم برقرار می‌شود.

حال می‌توان روی این رابطه به دست آمده دقت کرد و آن را حل کرد، اما می‌توانیم حدس بزنیم و نشان دهیم که با آن حدس این روابط برقرار هستند.

حدس:

$$G = e^{\frac{iq}{\hbar c}\Lambda(\vec{x})}$$

$$\text{(III)}: G^\dagger \vec{P} G = \underbrace{G^\dagger P G \; \overset{\text{اضافه کردیم}}{-} \underbrace{G^\dagger G}_{1}\vec{P}}_{G^\dagger[P,G]} \; \overset{\text{اضافه کردیم}}{+} \vec{P}$$

$$\text{(III)} \Rightarrow G^\dagger[P,G] + \vec{P} = \vec{P} + \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda$$

باید نشان داد: $\quad G^\dagger[P,G] = \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda \quad$ (III)

ببینیم با G حدس زده شده رابطه (III) چه درست است یا نه؟

$$\underbrace{G^{\dagger}[P_i, G]}_{-i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}} = G^{\dagger}(-i\hbar)\frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}\, G = \underbrace{G^{\dagger}G}_{1}\,(-i\hbar)\frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}$$

چون هم تابع x هستند

$$\Rightarrow G^{\dagger}[P_i, G] = \frac{e}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}$$

که همان رابطه (III) است. این حدس ما درست است.

بنابراین عملگری که می‌تواند حالتهای جدید ما را بدهد (G) بدست آمد.

$$\boxed{G = e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x})}}$$

$$G|\alpha\rangle = |\tilde{\alpha}\rangle$$

اگر بخواهیم با پتانسیل های A و Φ کار کنیم با این موجودات سروکار داریم:

$$(\vec{A}, \Phi) : \{|\alpha\rangle, \langle \vec{X}\rangle, \langle \vec{\Pi}\rangle\}$$

اگر بخواهیم با پتانسیل های A' و Φ کار کنیم با این موجودات سروکار داریم:

$$(\vec{A}', \Phi) : \{|\tilde{\alpha}\rangle = G|\alpha\rangle, \langle \tilde{\vec{X}}\rangle = \langle \vec{x}\rangle, \langle \tilde{\vec{\Pi}}\rangle = \langle \vec{\Pi}\rangle\}$$

البته می‌توان G را بدون حدس هم حل کرد و بدست آورد و کافی است در معادله (III) بجای جابجاگر $-i\hbar\frac{\partial G}{\partial x_i}$ بگذاریم و بصورت یک معادله حل کنیم.

به زبان تابع موج هم به این صورت می‌توانیم بگوییم:

معادله شرودینگر با $\vec{A}$ و $|\alpha\rangle$:
$$\left[\frac{(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} + e\Phi\right]|\alpha, t\rangle = i\hbar\frac{\partial |\alpha, t\rangle}{\partial t}$$

حال با این کمک باید بتوانیم معادله شرودینگر با $\vec{A}'$ و $|\tilde{\alpha}\rangle$ ساخت یعنی آیا رابطه زیر برقرار است؟

معادله شرودینگر با $\vec{A}'$ و $|\tilde{\alpha}\rangle$:
$$\left[\frac{(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} - \frac{e}{c}\vec{\nabla}\Lambda)^2}{2m} + e\Phi\right]|\tilde{\alpha}, t\rangle \overset{?}{=} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\alpha}, t\rangle$$

یعنی با این G اگر $|\alpha\rangle$ جواب معادله اولی باشد، $|\tilde{\alpha}\rangle$ باید جواب معادله ثانی باشد.

می‌دانیم:

$$G^\dagger\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}-\frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda\right)G=\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}$$

در رابطه بالا چنانچه به توان ۲ برسانیم حال سؤال این است که رابطه زیر صحیح می‌شود:

$$G^\dagger\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}-\frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda\right)^2G=\underbrace{G^\dagger\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}-\frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda\right)GG^\dagger\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}-\frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda\right)G}_{=\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}$$

$GG^\dagger = 1$: اضافه می‌کنیم

طرفین رابطه آخر را در G ضرب می‌کنیم:

$$G\left\{G^\dagger\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}-\frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda\right)^2G=\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\right\}$$

$$\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}-\frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda\right)^2G=G\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

* اگر طرفین رابطه معادله شرودینگر با $\vec{A}$ را در G ضرب کنیم با استفاده از رابطه بالا و جابجایی G و Φ خواهیم داشت:

$$\frac{\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}-\frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda\right)^2G}{2m} \qquad e\Phi G \qquad |\tilde{\alpha},t\rangle$$

از سمت راست رد می‌شود

از معادله شرودینگر با $\tilde{\vec{A}}$

طرف چپ معادله شرودینگر با $\vec{A}$: $G\left[\frac{(p-\frac{q}{c}A)^2}{2m}+e\Phi(x)\right]|\alpha,t\rangle=G\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t\rangle$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}G|\alpha,t\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\alpha},t\rangle$$

یعنی اگر G دارای خاصیت مورد نظر باشد، اگر G را در معادله شرودینگر با A اثر دهیم، معادله شرودینگر با $\tilde{\vec{A}}$ برای $|\tilde{\alpha}\rangle$ بدست می‌آید. البته دیگر معادله شرودینگر عوض شده است و باید ببینیم تاثیرش چیست.

پس تا اینجا داریم: تبدیل پیمانه‌ای که میدانهای E و B را عوض نمی‌کند، معادله شرودینگر را بصورت پیچیده‌تر از تبدیل پیمانه‌ای ثابت عوض می‌کند چون در آنجا خیلی ساده‌تر تغییر می‌کرد و فقط $V \to V+V_0$ می‌شد و باعث می‌شد که تابع موج جدید یک فاز با تابع موج قدیم فرق داشته باشد که آن فاز هم ثابت بود. البته همان فاز ثابت باعث می‌شد که اگر تداخل انجام شود تاثیر فیزیکی داشته باشد. ولی اینجا تغییرات خیلی زیاد شده است و تبدیل به یک تابع مکانی با توان ۲ شده است بنابراین بصورت ضرب در نمی‌آید و باید از $|\tilde{\alpha}\rangle$ استفاده کنیم که برابر $G|\alpha\rangle$ است که خود G هم تابع مکان است و نه ثابت، بنابراین ممکن است که خیلی تاثیر داشته باشد.

* اگر طرفین را در $\langle x'|$ ضرب کنیم، $\langle x'|$ از هم رد می‌شود و می‌توانیم بصورت آنچه نوشتیم، معادله شرودینگر برای تابع موج مکانی می‌شود

حال تاثیرات فیزیکی نتیجه بدست آمده را در چند آزمایش مشاهده کنیم:

اثر بوهم آهارونوف Aharonov - Bohm

A صورتش در پتانسیل برای معادله شرودینگر وارد می‌شود و B و E وارد نمی‌شوند. در معادلات کلاسیک E و B مستقیماً وارد می‌شوند و به این صورت است:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt}=q(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B})$$

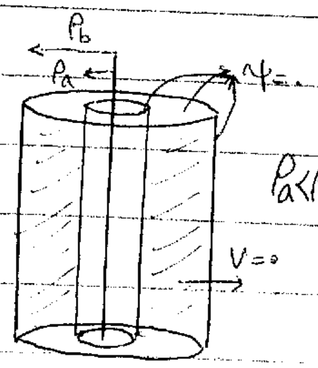
در اینجا تبدیلات پیمانه‌ای خاصی اثر است، چون A و Φ را تغییر بدهیم، E و B تغییر نمی‌کنند

$$\begin{cases}\vec{A}\rightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda\\ \Phi\rightarrow\Phi'=\Phi\end{cases}$$

به یک صورت دیگر هم می‌توان گفت، از آنجا که تبدیل پیمانه‌ای روی A است و در روابط کلاسیک A نداریم و این تبدیل A، B را هم عوض نمی‌کند، پس تاثیری ندارد.

ولی در معادله شرودینگر خود A و Φ می‌نشینند و تحت تبدیلات پیمانه‌ای تغییر می‌کنند.

اگر $\vec{B}=0$ و $\vec{E}=0$ باشند، در معادلات کلاسیک هیچ تاثیری از پتانسیل‌ها نمی‌بینند چون اصلاً پتانسیلی وجود ندارد. میدان $\vec{B}=0$ را هم می‌توان با $\vec{A}$ توضیح داد و هم می‌توان با $\vec{A}=\vec{\nabla}\Lambda$ توضیح داد، چون اصطلاحاً pure gage است یعنی اگر مثلاً $\vec{A}=0$ باشد می‌توان به $\vec{A}'=0+\vec{\nabla}\Lambda$ رفت که هنوز کرل آن صفر است بنابراین B نمی‌دهد ولی باز هم $\vec{A}$ همراه میدان $\vec{B}=0$ وجود دارد. حال نکته جالبی می‌تواند پیش آید، اینها از دیدگاه میدان B هیچ فرقی ندارند (A و A')، اما از دیدگاه میدان A فرق دارند. بنابراین ممکن است حتی اگر میدان هم نباشد باز این آثاری عمل کنند که در اینجا فقط میدان A داریم، ممکن یک سری نتایج عجیب بدست آوریم، یعنی با اینکه میدان نداریم، اما استدلال می‌کنیم A را همینطور نگیریم. بنابراین می‌توان شرایطی ایجاد کرد که با اینکه B نداریم، E نداریم (یعنی نیرویی به ذره وارد نمی‌آید)، $\vec{A}'$ را به صورت $\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda$ بگیریم و در این حالت با اینکه به ذره نیرویی وارد نمی‌آید اما می‌توان تاثیر آن را دید.

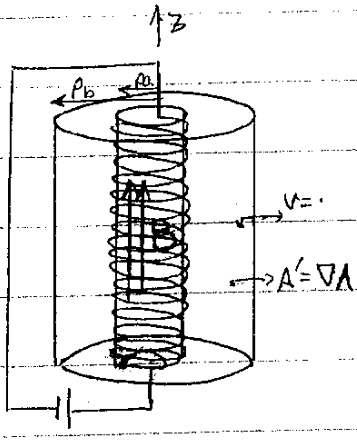


$\rho_a<\rho<\rho_b$

به عنوان اولین قدم فرض کنیم یک استوانه توخالی به شعاع ρ داریم که یک استوانه عایق در نظر بگیریم که الکترون در ناحیه بین دو استوانه می‌تواند باشد و پتانسیل استوانه بسته است و تابع موج روی دیواره‌ها صفر است و در داخل ناحیه بین دو استوانه نیرویی نداریم یعنی پتانسیل صفر است. وقتی برای این الکترون در این ناحیه معادله شرودینگر را حل کنیم می‌شود ذره در جعبه (جعبه استوانه‌ای) و سطوح انرژی بدون حضور میدان بدست می‌آید.

حال می‌توان یک صورت دیگر این شرایط را ایجاد کرد، که همین ذره، اگر آزاد آزاد نیست و به صورت کوانتمی تغییر از ما است و بیابیم

در کنار و نزدیک سیم پیچ خیلی فشرده نگذاریم.



با این کار در داخل ناحیه استوانه کوچک میدان B تولید می‌شود ولی در بیرون میدان B نداریم، چون سیم پیچ کاملاً فشرده است و هیچ میدانی از آن نفوذ نمی‌کند.

می‌دانیم اگر در داخل ناحیه بین استوانه‌ها نیز A ای وجود داشته باشد اما از نوع گرادیان یک چیز است، چون B نداریم.

از دیدگاه کلاسیک به الکترون‌های در ناحیه $\rho_a < \rho < \rho_b$ نیرویی وارد نمی‌آید، چون در آن ناحیه اصلاً B وجود ندارد، بنابراین هیچ چیز نباید عوض شود، به عبارت دیگر اگر آن جریان را وصل کنیم یا نکنیم نباید طیف انرژی کوانتمی از دیدگاه کلاسیک عوض شود. ما الان می‌خواهیم که عوض می‌شود یعنی با اینکه در آن ناحیه نیرو نیست ولی طیف عوض می‌شود و فرق می‌کند که کلید را وصل کنیم یا نکنیم.

پس این طور می‌نویسیم:

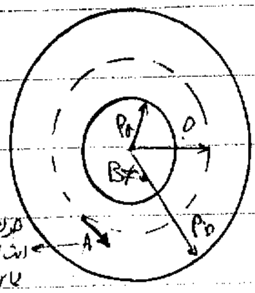
$$A \longrightarrow A' = A + \nabla\Lambda$$

$$\tilde{\psi}(x,t) = e^{iq/\hbar c\,\Lambda(\vec{x})}\,\psi(x,t)$$

یعنی تابع موج همین فازی را در ازای تغییرات در میدان A می‌گیرد.

چون $A'=\nabla\Lambda$ است، تاثیر فیزیکی ندارد ولی می‌تواند تاثیر کوانتمی داشته باشد.

مقطع استوانه مورد نظر را رسم می‌کنیم



چون $B=\nabla\times A$ است A باید مماس باشد

به علت تقارن مسئله و چون $B=\nabla\times A$ است پس باید A مماسی باشد، چون کرل آن باید B را در جهت z بدهد.

از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم:

$\int B\cdot ds$: شار مغناطیسی را که از آن سطح است که فقط در شعاع ρ_a، میدان B وجود دارد.

از طرف دیگر

1) $\rho > \rho_a$

$$\oint \vec{A}\cdot dl = A\times 2\pi\rho = \int \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}_{\vec{B}}\cdot ds = B\times\pi\rho_a^2$$

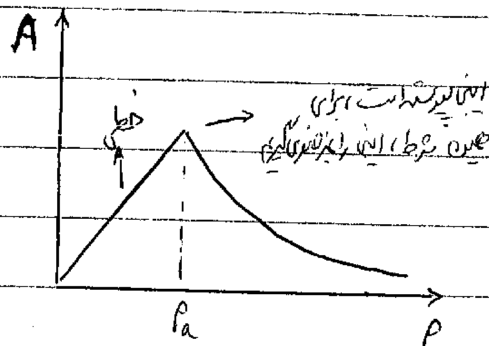
برای ناحیه بیرونی

$$\Rightarrow \vec{A}(\rho>\rho_a) = \frac{B\rho_a^2}{2\rho}\,\hat{e}_\rho$$

۲) $\rho < \rho_a$

$$A \times 2\pi\rho = \int_{\rho} B \cdot ds = B \times \pi\rho^2 \Longrightarrow \vec{A}(\rho<\rho_a) = \frac{\vec{B}}{2}\rho\,\hat{\varphi}$$

بنابراین شکل A برحسب ρ به این صورت است:



می‌توانیم A را در ρ_a توسط تبدیل پیمانه‌ای صفر کنیم و بعد از آن صورت A گسسته می‌شود.

$\nabla(\frac{B}{2}\rho_a^2\varphi)$

$$\rho > \rho_a \rightarrow \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\frac{B}{2}\rho\hat{\varphi}\right)$$

یعنی در ناحیه بیرونی A واقعاً گرادیان یک چیزی است و B برای آن واقعاً صفر می‌کند. این موضوع در فیزیک کلاسیک اثری ندارد یعنی علاوه بر اینکه A داریم و چون گرادیان یک چیزی است بنابراین B نمی‌دهد و بنابراین در معادلات حرکت تاثیری ندارد

ولی در معادله‌های کوانتمی می‌تواند تاثیر داشته باشد و باعث می‌شود که معادله شرودینگر تبدیل شود به:

$$\left[\frac{1}{2m}\Big(P - \frac{e}{c}\underbrace{\vec{\nabla}\big(\tfrac{B}{2}\rho\hat{\varphi}\big)}_{A}\Big)^2\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

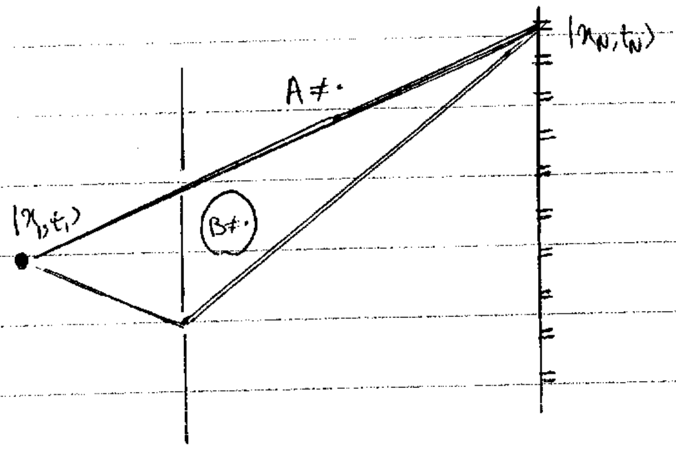
$q\Phi$ ندارد.

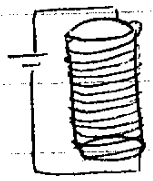
می‌بینیم معادله شرودینگر عوض شد و یک جمله تابع موج به آن اضافه شد. بنابراین طیف ذره عوض می‌شود و این نتیجه خیلی مهمی است که بدون وجود میدان B و یا وارد شدن نیرو به ذرات (که از نظر کلاسیک) طیف انرژی عوض می‌شود. این مشخصه تبدیل پیمانه‌ای است.

به طور تجربی این کار را با یک آزمایش نشان داده شد که آزمایش آهارونوف-بوهم می‌باشد.

در حقیقت یک طرح تداخل معمولی ایجاد کردند. برای این کار یک منبع را قرار دادند و در مقابل آن دو شکاف قرار دارند و روی هر نقطه روی پرده تداخل صورت می‌گیرد و فرانژها صورت می‌گیرند (آزمایش تداخل)

ناحیه خیلی کوچکی در نظر گرفتند و در این ناحیه یک سیم پیچ خیلی کوچک قرار دارند. در آن ناحیه میدان $B \neq 0$ ایجاد کرده‌اند و چون ناحیه بسیار کوچک است و ذرات آن نمی‌توانند بروند بنابراین الکترون‌ها از اطراف آن عبور می‌کنند و بنابراین نیرویی لمس نمی‌کنند.





بنابراین انتظار داریم وقتی این فنر را با سیم هیچ رسانا قرار دهیم، جریان را اول صفر می‌گذاریم، بعد جریان را تغییر می‌دهیم انتظار داریم در حالت کلاسیک در الکترون‌ها تغییری ایجاد نشود چونکه الکترون‌هایی که فرانج را تولید می‌کنند، اصلاً میدان نمی‌بینند.
ولی مشاهده شد که آن‌ها اثر میدان را می‌بینند و فرانج‌ها تغییر می‌کنند به این اثر بوهم-آهارانوف می‌گویند.
از روش انتگرال مسیر استفاده می‌کنیم. در روش انتگرال مسیر داشتیم:
احتمال حضور ذره وقتی از نقطه x_1 در زمان t_1 راه می‌افتد در زمان t_N به نقطه x_N برسد از رابطه مقابل بدست می‌آید:

$$\langle \vec{x}_N, t_N | \vec{x}_1, t_1 \rangle = \sum_{\text{روی مسیرهای مختلف}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{class.}}$$

کنش برابر بود با:

$$S = \int L\,dt$$

که را می‌توانیم تفکیک کنیم به: انتگرال از ۱ تا ۲ ... انتگرال از $N-1$ تا N

$$S = S(x_N, x_{N-1}) + S(x_{N-1}, x_{N-2}) + \dots S(x_2, x_1)$$

این که‌ها با هم جمع می‌شوند، وقتی exp آن‌ها را بنویسیم، به صورت ضرب exp ها در می‌آید:

$$e^{iS} = \prod_{n=2}^{N} e^{iS(n,n-1)}$$

حال باید روی حالت میانی انتگرال بگیریم که جمع روی مسیرها می‌شود.

بین دو حالت میانی، کنش را می‌توانیم به این صورت بگیریم:

$$S(n,n-1) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} L\,dt$$

اگر الکترومغناطیس را داشته باشیم p مانند آن به این صورت است:

$$\vec{P} \longrightarrow \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

← نحوه وارد کردن الکترومغناطیس در هامیلتونی

این p آن است که برای لاگرانژی بهتر است پتانسیل تعمیم یافته

$$U = q\Phi - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$$

به صورت U در نظر بگیریم:

اگر به پتانسیل معمولی $q\Phi$، U را بیفزاییم یعنی الکترومغناطیس را وارد کنیم لاگرانژی می‌شود:

$$L \longrightarrow L + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$$

← نحوه وارد کردن الکترومغناطیس در لاگرانژی

بنابراین کنش از n-1 تا n در حضور میدانهای $\vec{A}\neq 0$ (البته به صورت گرادیان نیست) به صورت زیر در می‌آید:

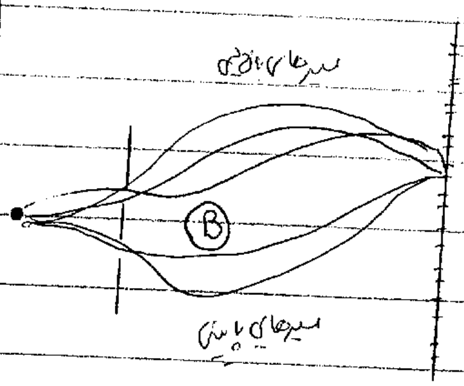
$$S^{\circ}_{(n,n-1)} \longrightarrow \underset{\text{اولیه}}{S^{\circ}} + \frac{q}{c}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{A}\,dt = \underbrace{S^{\circ}}_{\text{اولیه}} + \underbrace{\frac{q}{c}\int_{x_{n-1}}^{\vec{x}_n}\vec{A}\cdot d\vec{x}}_{\text{جدید}}$$

بنابراین احتمال گذار (یعنی حاصلضرب‌ها) تبدیل می‌شوند:

$$\prod e^{\frac{i}{\hbar}S^{(0)}_{(n,n-1)}} \longrightarrow \prod e^{\frac{i}{\hbar}S^{(0)}_{(n,n-1)}}\, e^{\frac{q}{c}\frac{i}{\hbar}\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{x}}$$

انتگرالها جمع می‌شوند ←

این الگو به ازای یک مسیر معین است. ما باید جمع روی مسیرها هم بگیریم.

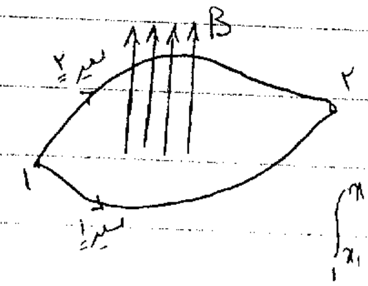


به طور خلاصه برای هر مسیر خاص، هر کدام به ... که قبلاً داشتیم را باید به جمله جدید در نظر بگیریم. حال اگر مسیرها را به دو قسمت تقسیم کنیم: مسیرهای بالایی و پایینی.

می‌خواهیم بگوییم برای تمام مسیرهای بالایی این فاز اضافه یک کار است و برای همه مسیرهای پایینی هم همین طور است.

بنابراین در هم گذارها یک فاز ثابت اضافه می‌شود.

اختلاف این فازها برای دو مسیر مختلف را بدست می‌آوریم:



$$\int_{x_1}^{x_2}\vec{A}\cdot ds - \int_{x_1}^{x_2}\vec{A}\cdot ds = \underset{\text{مسیر۱}}{\int_{x_1}^{x_2}}\vec{A}\cdot ds + \underset{\text{مسیر۲}}{\int_{x_2}^{x_1}} A\cdot ds$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\vec{A}\cdot ds - \int_{x_1}^{x_2}\vec{A}\cdot ds = \oint A\cdot ds \overset{\text{استوکس}}{=} \int_B \nabla\times A\cdot d\vec{a} = \Phi_B$$

magnetic flux ↑

بنابراین اختلاف در انتگرال A.ds در دو مسیر غیر صفر است اگر از بین آنها flux بگذرد و صفر است اگر flux ای نگذرد، حالا برای مسیرهای بالا چون هیچ میدانی بین آنها نیست، بین هم انتگرالها یکی است و همین طور برای مسیرهای پایین هم، همه انتگرالها یکی است.

$$\langle \vec{x}_N, t_N | \vec{x}_1, t_1 \rangle = \sum_{\text{روی مسیرهای مختلف}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{class}}$$

پس رابطه فوق تبدیل می‌شود به:

$$\underbrace{\langle \vec{x}_N, t_N | \vec{x}_1, t_1 \rangle}_{B \text{ قبل از اعمال}} = \sum_{\text{مسیرهای بالا}} e^{\frac{i}{\hbar}S} + \sum_{\text{مسیرهای پایین}} e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

قبل از اعمال B

پس از اعمال B،

به هر کدام از جملات بالا یک فاز اضافه می‌شود، که برای تمام مسیرهای بالا مثل هم است

$$K = \langle \vec{x}_N, t_N | \vec{x}_1, t_1 \rangle = e^{\frac{iq}{\hbar c}\int_1^2 A\cdot ds \,(\text{مسیر بالا})} \underbrace{\sum_{\text{بالا}} e^{\frac{i}{\hbar}S}}_{f_1} + e^{\frac{iq}{\hbar c}\int_1^2 A\cdot ds\,(\text{مسیر پایین})} \underbrace{\sum_{\text{پایین}} e^{\frac{i}{\hbar}S}}_{f_2}$$

و همین طور برای تمام مسیرهای پایین مثل هم است، پس می‌توان از آن برای هر کدام فاکتور گرفت و رابطه بالا را نوشت.

$$K = e^{\frac{ie}{c\hbar}\int_1^2 A\cdot ds \,(\text{بالا})} \left\{ f_1 + e^{\frac{ie}{c\hbar}\underbrace{\left[\int_1^2 A\cdot ds\,(\text{مسیر پایین}) - \int_1^2 A\cdot ds\,(\text{مسیر بالا})\right]}_{\neq 0 \; \Phi_B}} f_2 \right\}$$

بنابراین احتمال یافتن ذرات می‌شود:

$$\text{احتمال} = |K|^2 = \left| f_1 + e^{\frac{ie}{\hbar c}\Phi_B} f_2 \right|^2$$

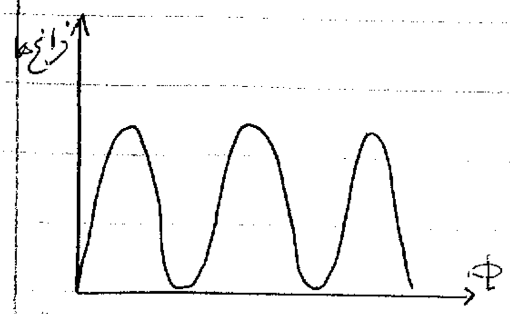
بنابراین اتفاقی که می‌افتد این است که اگر flux تغییر کند در ناحیه‌ای که ما نمی‌بینیم، فرانژها باید پرلودی جابجا شوند.

اگر flux به این صورت تغییر کند

$$\Phi_B \longrightarrow \Phi_B + \frac{2\pi\hbar c}{e}$$

$$\text{بنابراین} \Longrightarrow e^{\frac{ie}{\hbar c}\Phi_B} \longrightarrow e^{\frac{ie}{\hbar c}\Phi_B}$$

فرانژها با پریود $\frac{2\pi\hbar c}{e}$ تغییر می‌کند



یعنی اگر ما این دستگاه را بسازیم و شار را تغییر دهیم با تغییر flux فرانژها عوض می‌شوند و اگر یک صورت محل یک فرانژ را در نظر بگیریم به این صورت تغییر می‌کند (با پریود $\frac{2\pi\hbar c}{e}$)

یعنی flux ها یک کوانتوم دارند، یعنی اگر به صورت کوانتومی تغییر کند، فرانژها تغییر نمی‌کنند. $\frac{2\pi\hbar c}{e}$ جالب است که فقط از یک سری واحدهای اساسی است، ثابت پلانک، سرعت نور و بار الکترون. این می‌گوید که

به این اندازه عملاً تغییر کند، چیزی عوض نمی‌شود طبیعت، اما از بین این فواصل تغییر دارد.

یک بحث دیگر از فصل دوم در مورد تک قطبی‌های مغناطیسی و ریسمان دیراک (Dirac String) مانده است. در این قسمت این بحث را دنبال کرده و جمع‌بندی را در جلسه آینده انجام می‌دهیم.

تا به حال مشاهده کرده‌ایم که بار الکتریکی در طبیعت به طور خیلی عجیبی فقط مضربی است از e و بار کوارک‌ها، یا می‌تواند مضرب‌هایی از e باشد (کوارک‌ها هم مضرب غیر صحیح از e هستند). به عبارت دیگر بار الکتریکی در طبیعت کوانتیده است.

این سؤال خیلی مهمی در فیزیک است که این موضوع از کجا آمده و چرا بار کوانتیده است؟

یک نظر مطرح برای این سؤال وجود دارد و آن هم نظریه دیراک است و بحث تک قطبی‌های مغناطیسی. در جلسه آینده نشان خواهیم داد که اگر تک قطبی مغناطیسی وجود داشته باشد (که تا الان وجود ندارد و در معادلات ماکسول $\nabla \cdot B = 0$ می‌گذاریم) و فقط یک تک قطبی مغناطیسی وجود داشته باشد، در آن صورت می‌توان نشان داد که باید بار الکتریکی کوانتیده باشد، یعنی اثبات می‌شود وجود کوانتش بار الکتریکی با فرض وجود حتی یک بار مغناطیسی.

سه‌شنبه ۱۵ آذر امتحان میان‌ترم از فصول ۱ و ۲

جلسه نوزدهم: ۸۴/۹/۶

تک قطبی مغناطیسی:

معادلات ماکسول نسبت به میدان‌های E و B متقارن هستند یعنی معادلاتی که E در آن صدق می‌کند خیلی شبیه معادلاتی است که B در آن صدق می‌کند. تنها یک اختلاف که آن هم این است که بار الکتریکی داریم ولی بار مغناطیسی نداریم.

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = 4\pi \rho_{el} \\ \nabla \cdot B = 0 \end{cases}$$

این اختلاف اساسی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در معادلات ماکسول ممکن است برساند که شاید این معادلات دقیق نباشند. معادلات ماکسول روابط تجربی هستند و ممکن این فرض را بتوان کرد که بار مغناطیسی وجود دارد ولی چون تا الان به وجود آن پی نبرده‌ایم. الان در چهارچوب معادلات ماکسول میدان مغناطیسی حاصل از جریان الکتریکی است و نه چیز دیگری، یعنی بار الکتریکی هم عامل ایجاد میدان الکتریکی و هم عامل ایجاد میدان مغناطیسی. ولی اگر بار مغناطیسی وجود داشته باشد، قضیه فرق می‌کند: میدان مغناطیسی می‌تواند هم حاصل از جریان الکتریکی باشد و هم بار مغناطیسی.

فرض کنیم بار مغناطیسی وجود دارد:

در اینصورت معادلات ماکسول باید تصحیح شود و باید به این صورت بنویسیم:

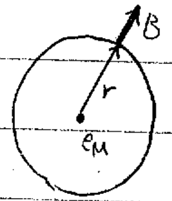
$$\nabla\cdot B = 4\pi\rho_{mag}$$

چگالی بار مغناطیسی

یعنی چگالی بار مغناطیسی وجود دارد و باعث شده که میدان مغناطیسی شعاعی تولید شود.

$$\nabla\cdot E = 4\pi\rho_{el} \xrightarrow{\text{منجر می‌شود}} \vec{E} = \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

در این $\nabla\cdot B = 4\pi\rho_{mag} \longrightarrow \vec{B} = \frac{e_M}{r^2}\hat{r}$



از طرف دیگر می‌دانیم:

$$B=\nabla\times A$$

یعنی از طریق این رابطه پتانسیل برداری منجر به میدان مغناطیسی می‌شود. حال اگر بار مغناطیسی وجود داشته باشد حال باید چه A ای در نظر بگیریم که کرل آن B شود؟ اگر A را به این صورت بگیریم:

$$\vec{A} = \frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$$

$$\downarrow$$

$$\nabla\times A = \frac{e_M}{r^2}\hat{r}$$

یعنی یک میدان مغناطیسی در جهت $\hat{r}$ می‌تواند ناشی از یک پتانسیل برداری در جهت $\hat{\phi}$ باشد.

این A یک اشکال دارد و آن این است که در $\theta=0,\pi$ ← $\sin\theta=0$، بنابراین مخرج A ← ۰ و در نتیجه $A\to\infty$!

بنابراین می‌بینیم که در $\theta=0 \longrightarrow A\sim\frac{0}{0} \xrightarrow[\text{هوپیتال}]{\text{باید رفع ابهام شود}} \frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}} = \frac{e_M}{r}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Big|_{\theta=0} = 0$

در $\theta=\pi \longrightarrow A\sim\frac{2}{0}\to\infty$

بنابراین اگر بار مغناطیسی داشته باشیم، A ای که تولید می‌کند در $\theta=\pi$ تکینه می‌شود. این تکینگی را نمی‌توان کاری کرد و رفع کرد، به این علت:

می‌خواهیم بگوییم همواره A دارای تکینگی است، اگر بار مغناطیسی داشته باشیم:

اگر برای سطح شکل بالا بنویسیم:

$$\oint B\cdot d\vec{a} = \int \nabla\cdot \overbrace{B}^{\nabla\times A}\, dv = \underbrace{\int \nabla\cdot(\nabla\times A)\,dv = 0}_{\text{اتحاد دیورژانس هر کرلی صفر است}}$$

از طرفی

$$= \oint B\cdot da = \int \frac{e_M}{r^2}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{1}\,\underbrace{da}_{r^2 d\Omega} = 4\pi e_M$$

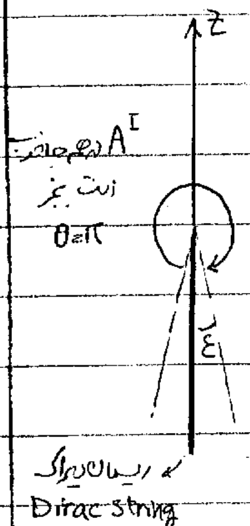
یعنی همانطور که در مورد بار الکتریکی قانون گوس درست است، در مورد میدان مغناطیسی هم باید قانون گوس درست در بیاید و جمع flux میدان مغناطیسی صفر نشود، بلکه برابر بار شود. از طرف دیگر اگر $B=\nabla\times A$ باشد، دیورژانس آن نتیجه صفر است. این دو را با هم می‌خوانند و یک راه حل بیشتر ندارد و آن این است که اتحاد دیورژانس کرل صفر است برای توابع معمولی ولی اگر تابع تکینه باشد می‌تواند

صفر نباشد. پس برای A های معمولی این حرف درست نیست پس حتماً اگر بار مغناطیسی داشته باشیم A باید یک جاهایی تکینه باشد!

در جلسات گذشته که ρ_M نبود و $B=\nabla\times A$ بود و آمدیم تبدیل پیمانه‌ای را معرفی کردیم و گفتیم تبدیل پیمانه‌ای که فیزیک را عوض نمی‌کند تابع موج را در کوانتوم عوض می‌کند. حالا می‌خواهیم همان را هنوز استفاده کنیم که

تبدیل پیمانه‌ای : $A \to A' = A + \nabla\Lambda$

البته شرط برای این است که $B=\nabla\times A$ باشد. مدلی که اگر بار مغناطیسی را در نظر بگیریم به یک سری اشکال بر می‌خوریم که باید آنرا رفع کنیم.



A ای که نوشتیم در همه جا خوب است بجز $\theta=\pi$ ،

یعنی فقط روی یک خط بد می‌باشد.

$$A^I = \frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \quad \text{(I)}$$

این A^I در همه نقاط فضا، اگر آن خطوط را در پایین از آن جدا کنیم، خوب است و کرل آن، B لازم را می‌دهد و فقط در $\theta=\pi$ اشکال دارد. به ناحیه‌ای که در $\theta=\pi$ است یک ریسمان نسبت می‌دهند که باید از فضا آنرا جدا کنیم تا بقیه فضا خوش تعریف شود، به این ریسمان، "ریسمان دیراک" (Dirac String) می‌گویند.

بیائیم از بحث آزادی پیمانه‌ای استفاده کنیم و می‌گوییم لازم نیست حتماً این را به A^I تعریف کنیم بجز A دیگری هم A^{II} بگیریم که بصورت مقابل با A^I ارتباط داشته باشد و باز هم خوب است.

$$\vec{A}^{II} = \vec{A}^{I} + \vec{\nabla}\Lambda \quad \text{(II)}$$

آنرا این طور تعریف کنیم ،
$$A^{II} = -\frac{e_M(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \quad \text{(III)} \xrightarrow{\text{باز هم}} \nabla\times A^{II} = \frac{e_M}{r^2}\hat{r}$$

از رابطه (II) می‌توان Λ ای پیدا کرد که برای A^I و A^{II} تعریف شده صحیح باشد.

$$\Lambda = -2e_M\varphi$$

بنابراین A^I و A^{II} هم ارز هستند و می‌توانیم به جای A^I، از A^{II} استفاده کنیم ولی این پتانسیل دوم به این صورت رفتار می‌کند:

$$\begin{cases} A^{II}(\theta=\pi) = 0 \\ A^{II}(\theta=0) \to \infty \end{cases}$$

پس A^{II} هم در یک جای دیگری تکینه هست، پس حتماً باید یک جایی تکینه باشد. به خاطر چیزی که در بالا بی‌معنی گفتیم که این نوع

پس این خصوصیت چرخشی بودن نسبت به φ باید برای ψ^{I} و ψ^{II} هم برقرار باشد:

$$\psi^{I}(\varphi+2n\pi)=\psi^{I}(\varphi)$$

$$\psi^{II}(\varphi+2n\pi)=\psi^{II}(\varphi)$$

با استفاده می‌کنیم

$$\psi^{II}(\varphi+2\pi)=\exp\left(\frac{-2ie\,e_M}{\hbar c}(\varphi+2\pi)\right)\cdot\underbrace{\psi^{I}(\varphi+2\pi)}_{\psi^{I}(\varphi)}\overset{\text{خواهیم بود}}{=}\psi^{II}(\varphi)$$

پس باید $\exp\left[i\cdot\underbrace{\frac{-2e\,e_M}{\hbar c}}_{\text{حتماً باید عدد صحیح باشد}}\times 2\pi\right]=1$

$$\Longrightarrow\ \boxed{\frac{2e\,e_M}{\hbar c}=n\ \text{عدد صحیح}}$$

این نتایج خیلی مهمی است و بسیار جالب هم به دست آمد.

یعنی در به دست آوردن این رابطه هیچ چیز عجیب و غریبی فرض نشد. گفتیم اگر یک بار مغناطیسی داشته باشیم، آزادی پیمانه‌ای یا کوانتوم مکانیکی که تحت این آزادی پیمانه‌ای باید ناوردا باشد، ما را ملزم به برقراری رابطه بالا می‌کند.

پیش‌بینی بسیار مهم (دیراک):

اگر بار مغناطیسی در طبیعت باشد، باید به صورت مقابل کوانتیده باشد:

$$\boxed{e_M=n\frac{\hbar c}{2e}}$$

واحد کوانتش بار مغناطیسی

از طرف دیگر، اگر فقط یک بار e_M در جهان موجود باشد آنگاه باید بار الکتریکی به صورت مقابل کوانتیده باشد:

$$\boxed{e=n\frac{\hbar c}{2e_M}}$$

واحد کوانتش بار الکتریکی

همان طور که قبلاً پیش گفتیم این یک توضیح خیلی مهم است برای این واقعیت که ما می‌دانیم بار الکتریکی کوانتیده است و هر ذره باردار یک ضریبی از الکترون است مثل پروتون، پایون و ... . این واقعیت مهم فیزیک را این رابطه توضیح می‌دهد و می‌گوید کافی است یک جایی در دنیا یک بار مغناطیسی بوده و در نتیجه بار الکتریکی کوانتیده می‌شود.

بار الکتریکی و مغناطیسی توسط رابطه به دست آمده با هم ارتباط دارند ولی یک چیز نیستند. در چارچوب معادلات ماکسول میدان الکتریکی و مغناطیسی ارتباط ساده‌ای دارند و آن این است که یک نوع بار هر دوی آنها را تولید می‌کند یعنی:

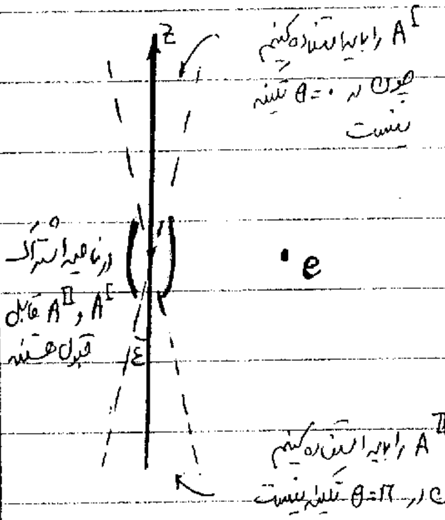
$$\oint B\cdot dl=\mu_0 I$$

$$I=\frac{dq_{el}}{dt}$$

بنابراین فقط بار الکتریکی است که اگر حرکت کند، B تولید می‌کند و اگر حرکت نکند E تولید می‌کند. در یک اینجا ما این فرض را می‌کنیم که یک چیز نیستند و کوانتوم مکانیک می‌گوید تعداد عددی این دو را اگر بار مغناطیسی وجود داشته باشد، مستقل از هم نیستند، یعنی روی مقدار B قیدی می‌گذارد و اگر ثابت خود ... مقدار B هم محدود می‌شود.

سازی باید با A تکینه برابر باشد.

این دفعه A^{II} در همه جا خوب است جز نقطه $\theta = 0$.



* پس این بیشتر راه حل دارد و راه حل آن این است که از یک A استفاده نکنیم و از دو تا A استفاده کنیم. آن وقت در تمام نواحی یک A ای وجود دارد که کمک آن کار می شود و شکل پذیرم هست بنابراین مشکل رفع می شود.

در ناحیه اشتراک A^{I} و A^{II} می توان از هر کدام استفاده کنیم.

نکته ای که وجود دارد این است که در مواردی که با تک قطبی مغناطیسی سروکار داریم، باید از دو پتانسیل استفاده کنیم و دیگر دلخواه نیست. در موارد دیگر تبدیل پیمانه ای دلخواه است و می توان از آن استفاده کرد، اما اینجا باید از آن استفاده کنیم.

کوانتوم مکانیکی که می خواهیم استفاده کنیم یا با پتانسیل A^{I} کار می کنیم و یا A^{II}. بنابراین برای الکترون (ذره ای) با بار الکتریکی e در حضور بار مغناطیسی e_M، می توان از پتانسیل $\vec{A}^{I}$ با تابع موج ψ^{I} و یا از پتانسیل $\vec{A}^{II}$ با تابع موج ψ^{II} استفاده کرد (در ناحیه مشترک)، ولی چون اختلاف پتانسیل A^{II} با A^{I} در یک تبدیل پیمانه ای (Λ) است پس ψ^{II} از ψ^{I} طبق بحث قبلی بدست می آید.

$$A^{I} \to \psi^{I} \qquad A^{II} \to \psi^{II}$$

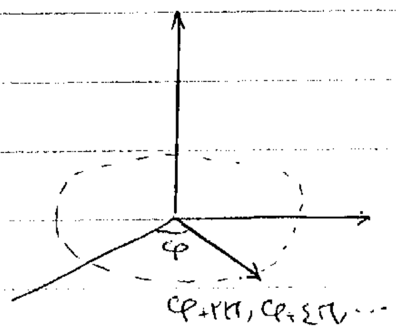
$$\vec{A}^{II} = \vec{A}^{I} + \vec{\nabla}\Lambda \longrightarrow \underline{\underline{\Lambda = -2e_M\varphi}}$$

$$\psi^{II} = e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\,\psi^{I}$$

$$\boxed{\Rightarrow \psi^{II} = e^{-\frac{ie}{\hbar c}\cdot 2e_M\varphi}\,\psi^{I}}$$

به خاطر فرضی که ψ^{I} و ψ^{II} دارند یک شرطی که در تمام فیزیک وجود دارد، اینجا برقرار نشود.

اگر در مختصات کارتزین اگر از تابع θ کروی استفاده کنیم، هر نقطه را می توانیم با یک زاویه φ نشان دهیم و یا می توانیم یک دور بچرخیم و با $\varphi + 2\pi$ یا دو دور بچرخیم و با $\varphi + 4\pi$ و ... نشان دهیم. یعنی کلیه توابع فیزیکی باید این خصوصیت را داشته باشند که نسبت به φ پریودیک باشند و به این صورت باشند:



$$f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$$

(به ازای هر n صحیح)

$$\text{یا}\quad f(\varphi + 2n\pi) = f(\varphi)$$

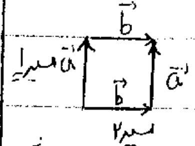
Chapter 3 : دوران و تکانه زاویه‌ای

بحث دوران و اندازه حرکت زاویه‌ای یک بسیار مهمی از مکانیک کوانتومی است که به همه قسمتها هم مربوط می‌شود و فقط به تکانه زاویه‌ای مربوط نیست.

این بحث را به سبک کتاب بیان می‌کنیم و آن ارتباط‌اش با بحث دوران است. همان طور در جلسه گذشته گفتیم، یک بحث انتقال را داشتیم و یک عملگر انتقال تعریف کردیم که:

$$T(\vec{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{a}} \quad \text{(عملگر انتقال؛ } \vec{P} \text{ مولد انتقال)} \xrightarrow[\text{را داشت}]{\text{که این خصوصیت}} T(\vec{a})\,|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}' + \vec{a}\rangle$$

یک خصوصیتی این $T(\vec{a})$ها داشتند که انتقال در جهت‌های مختلف، با هم جابجا می‌شد، به عبارت دیگر اگر از مسیر ۱ به نقطه مورد نظر برسیم و یا از مسیر ۲، با هم فرقی نمی‌کنند.



$$T(\vec{a})\,T(\vec{b}) = T(\vec{b})\,T(\vec{a}) \xrightarrow{\text{نتیجه}} [P_i, P_j] = 0$$

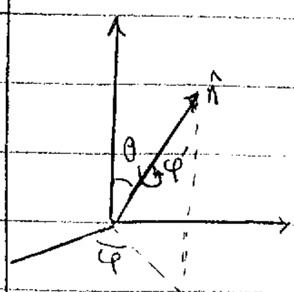
$\underbrace{T(\vec{a}+\vec{b})}\;=\;\underbrace{T(\vec{b}+\vec{a})}$ ← طبق قاعده‌ای که داشتیم که دو انتقال را می‌توان بصورت یک انتقال نوشت

چون $a+b$ با $b+a$ برابر است، این رابطه برقرار است که رابطه جابجایی را می‌رساند.

انتقال در جهت‌های مختلف منجر شد به جابجایی عملگرهای مختلف و تشکیل یک گروه می‌دهند که مولدهایش با هم جابجا می‌شوند که به گروه‌هایی که مولدهایشان با هم جابجا می‌شوند، گروه‌های آبلی می‌گوییم.

ریشه این جابجایی این بود که به ازای هر انتقالی یک بردار متناظر داشتیم و چون بردارهای متناظر با هم جابجا می‌شوند، انتقال‌ها هم جابجا می‌شوند.

دوران:



در مورد دوران تناظر این طور نیست و به هر دورانی نمی‌توان یک بردار نسبت داد.

هر دوران با امتداد محور دوران و زاویه دوران مشخص می‌شود. یعنی اگر بخواهیم در مورد یک دوران دلخواه صحبت کنیم باید در امتداد $\hat{n}$ به اندازه زاویه φ (با φ) آنرا دوران دهیم، پس دوران یک امتداد و جهت دارد و یک زاویه!

$$(\hat{n}, \varphi) \rightarrow$$ این موضوع چون $\hat{n}$ برداریکه است ۲ پارامتر مستقل (θ, φ) دارد و φ هم یک پارامتر دارد. بنابراین دوران موضوعی سه پارامتره است.

انتقال هم موضوعی سه پارامتره است و سه عدد نیاز دارد تا یک انتقال بیان شود، به همین خاطر انتقال سه مولد P_x و P_y و P_z دارد. همین‌طور دوران هم سه تا مولد دارد.

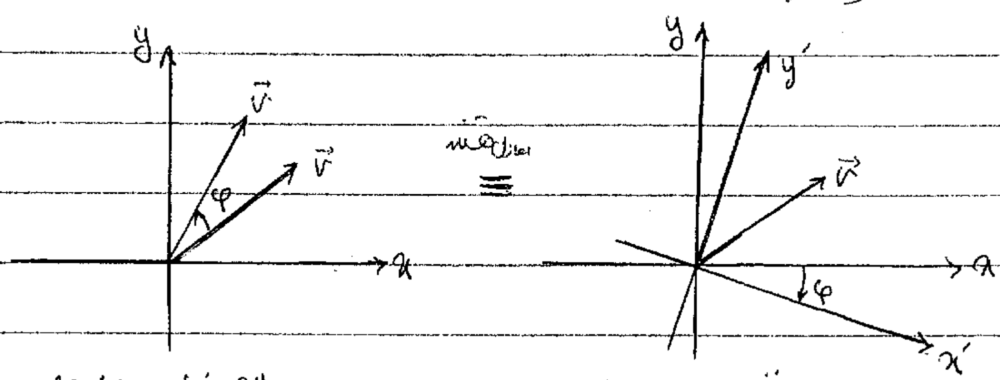
نکته‌ای که داریم این است که به دوران یک بردار نمی‌توان نسبت داد، چون دوران در راستاهای متفاوت جابجا نمی‌شوند یعنی اگر جسم را در راستای محور z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم و بعد در راستای محور x به اندازه $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم، شکل نهایی جسم با اینکه ابتدا در راستای محور x به اندازه $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم و بعد در راستای محور z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم، شکل این دو حالت متفاوت است.

$$\overset{\text{دوم}}{R_z(\pi/2)}\ \overset{\text{اول}}{R_x(\pi/2)} \neq R_x(\pi/2)\, R_z(\pi/2)$$

دوران حول z به اندازه $\frac{\pi}{2}$

پس چون این دو متفاوت هستند نمی‌توان به آنها بردار نسبت داد.

تنها دوران‌های بینهایت کوچک را می‌توان با بردار نشان داد.



دوران فعال (active) — دوران منفعل (passive)

دوران فعال حول z به اندازه φ (در خلاف جهت عقربه ساعت) — دوران منفعل حول z به اندازه φ (در جهت عقربه ساعت)

بنابراین دوران، مولفه‌های بردار را عوض می‌کند. برای دوران خاصی که در بالا کشیدیم می‌توانیم به راحتی ارتباط بین مولفه‌های جدید و قدیم را بنویسیم:

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = \overset{\text{ماتریس}}{R} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \underset{\text{دوران حول z به اندازه φ}}{R_z(\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس یک ماتریس خاص است، چون اگر ترانهاده‌اش را ضرب کنیم رابطه مقابل برقرار است: $R^T R = 1$

البته این خصوصیت کلی است و ربطی به این دوران خاص ندارد و به طور کلی این رابطه برقرار است؛ که اثبات آن به صورت زیر است:

ارتباط مولفه‌ای: $V'_i = R_{ij} V_j$

* در هر دورانی باید طول بردارها ثابت باشند، بنابراین:

طول قدیم $= \sum_i V_i V_i$

طول جدید $= \sum_i V'_i V'_i$

$\xrightarrow{\text{بنابراین}} V'^2 = V^2$

$$\Rightarrow V'_i V'_i = R_{ij} V_j \, R_{ik} V_k = \underbrace{R_{ij} R_{ik}}_{\delta_{jk}} V_j V_k \overset{\text{فرض هم}}{=} V_k V_k$$

← پس این باید

پس: $\underbrace{R_{ij}}_{(R^T)_{ji}} R_{ik} = \delta_{jk} \longrightarrow (R^T)_{ji} R_{ik} = (R^T R)_{jk} = \delta_{jk} \xrightarrow{\text{به صورت ماتریسی}} \boxed{R^T R = 1}$

بنابراین ماتریس دوران متعامد (orthogonal) است یا اصطلاحاً ترانهاده وارونش است.

حال می‌خواهیم دوران حول z یا R_z را به ازای دورانها ضیم کوچک بررسی کنیم:

دوران ضیم کوچک:

اگر در دوران حول z، R_z، $\varphi = \varepsilon$ بگیریم و بسط را تا مرتبه ε^2 بدهیم:

$$R_z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1}} \end{pmatrix}$$

همین ماتریس را می‌توان برای دوران حول x و y هم نوشت:

$$R_x(\varepsilon) = {}^{*}\begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon^2/2 & \varepsilon \\ 0 & -\varepsilon & 1-\varepsilon^2/2 \end{pmatrix} \qquad R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & \underline{\underline{1}} & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1-\varepsilon^2/2 \end{pmatrix}$$

* حول هر محوری که دوران دهیم، مولفه‌های آن محور عوض نمی‌شود.

حال نکته‌ای را که گفتیم یعنی دوران حول دو محور مختلف با هم جابجا نمی‌شوند را اثبات کنیم.

توجه کنیم که این R ها ماتریس دوران برای بردارهای سه بعدی است، یعنی تا موقعی که بردارهای سه بعدی داریم اینها دوران تولید می‌کنند!

$$\underbrace{R_x(\varepsilon) R_y(\varepsilon)}_{\substack{\text{اول دوران حول y و بعد} \\ \text{دوران حول x}}} - \underbrace{R_y(\varepsilon) R_x(\varepsilon)}_{\substack{\text{اول دوران حول x بعد} \\ \text{دوران حول y}}} = \overset{\text{تا } \varepsilon^2 \text{ را نگه می‌داریم}}{\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = R_z(\varepsilon^2) - \underline{1}$$

اگر جابجا می‌شدند باید نتیجه صفر می‌شد.

* اولین نکته‌ای که در مورد دوران مطرح است این است که ضرورتاً باید سراغ ماتریس برویم.

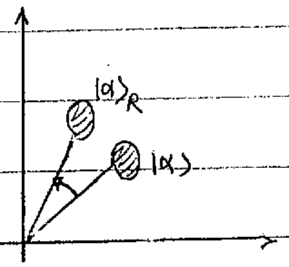
* نتیجه‌ای که از معادله بالا می‌توان گرفت این است که اگر از جملات ε^2 هم صرف‌نظر شود، $R_x(\varepsilon)$ و $R_y(\varepsilon)$ هم جابجا می‌شوند.

این همان نکته‌ای است که گفتیم یعنی دوران‌های بینهایت کوچک را می‌توان با بردار نشان داد، یعنی اگر دوران به اندازه‌ای باشد که بتوان ε^2 را صرف‌نظر کرد، در آن صورت فرق نمی‌کند که اول حول x دوران بدهیم و بعد حول y یا برعکس.

* از نتیجه‌ای که نوشتیم یعنی $R_z(\varepsilon^2) - 1$ (یعنی اگر $R_z(\varepsilon^2)$ را بگیریم و از ε^2 به بالا صرف‌نظر کنیم و بعد از آن ماتریس واحد را کم کنیم همان نتیجه بالا بدست می‌آید) می‌توانیم این نتیجه را بگیریم که بین مولفه‌های مختلف ارتباطی وجود دارد. یعنی درست است که دوران‌های مختلف با هم جابجا نمی‌شوند ولی دو دوران یک ارتباطی با یک دوران حول محور سوم (سه‌تای آنها) دارند.

سؤال:

این دوران‌ها، دوران‌های فضایی هستند. حال می‌خواهیم در کوانتم مکانیک صحبت کنیم. در مکانیک کوانتمی سیستم یک حالت $|\alpha\rangle$ دارد. بعد سیستم را دوران می‌دهیم (فعال یا منفعل). حال سؤال این است که حالت دوران یافته با حالت اول چه ارتباطی دارد؟ (در بحث انتقال: $T(\vec{a})|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}'+\vec{a}\rangle$)



یعنی فرض کنید یک state داریم که با $|\alpha\rangle$ نشان می‌دهیم. حال این state را و یا دستگاه مختصات را دوران می‌دهیم و این کار را با ماتریس R انجام می‌دهیم. این R دوران را به عبارتی نشان می‌دهد. حال state تبدیل شده به $|\alpha\rangle_R$. حال سؤال این است که ارتباط $|\alpha\rangle$ با $|\alpha\rangle_R$ چیست؟ این ارتباط با یک عملگر نشان می‌دهیم که اسم آن را D می‌گذاریم که متناظر با دوران R است.

$$|\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle$$

$D(R)$ شبیه $T(\vec{a})$ است. در آنجا به ازای هر بردار $\vec{a}$ یک اپراتور $T(\vec{a})$ داشتیم، در اینجا هم به ازای هر دوران R یک اپراتور $D(R)$ داریم ولی با این تفاوت که در آنجا $\vec{a}$ بردار بود ولی اینجا R یک ماتریس ۳×۳ است (در فضای کلاسیک).

حال می‌خواهیم در مورد D صحبت کنیم. بحث اینجا شبیه بحث انتقال و ترجمه زمانی است. دو چیز را اعمال می‌کنیم:

۱) ضرب داخلی حالتها با اعمال حالتها عوض نشود یعنی نرم شده ۱ تا ذره داریم، بعد دوران تعداد آنها تغییر نکند.

1) $_R\langle\alpha|\alpha\rangle_R = \langle\alpha|\alpha\rangle \longrightarrow D^\dagger(R)D(R)=1$

۲) می‌خواهیم عملگر دوران برای دوران‌های صفر، عملگر واحد باشد. حال دوران صفر قابل نمایش با ماتریس واحد است.

2) $|\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle$ $\qquad \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

می‌خواهیم D : $D(1) = 1$

برای ماتریس واحد برابر با عملگر واحد شود — ماتریس ۳×۳ واحد — عملگر واحد (identity operator)

البته می‌توانیم حالتها را به صورت ماتریسی نمایش دهیم که بُعد آن نمایش بستگی به بعد فضای پایه دارد. بنابراین در اینجا هم عملگر دوران نمایش ماتریسی دارد متناسب با بُعد state ها. مثلاً اگر در مورد ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ صحبت می‌کنیم نمایش ماتریسی $|\alpha\rangle$ یک ماتریس ستونی (دوتایی) است، $D(R)$ ها ماتریس‌های ۲×۲ هستند در صورتی که R ها ماتریس‌های ۳×۳ هستند. یعنی $D(R)$ هم نمایش ماتریسی متناسب با state ها دارد ولی R همیشه ماتریس ۳×۳ است.

این دو خصیصه یعنی $D^\dagger D=1$ و $D(1)=1$ باعث می‌شوند شبیه انتقال و یک ترجمه زمانی است و در مورد عملگر انتقال به این صورت گفتیم: در مورد انتقال کوچک در نظر گرفتیم و بعد از آن به این صورت باشد:

$$\begin{cases} T(d\vec{x}') = 1 - i\vec{K}\cdot d\vec{x}' \\ T^\dagger T = 1 \rightarrow K^\dagger = K \end{cases} \xrightarrow[\text{در مکانیک کلاسیک}]{\text{با مقایسه با مولد انتقال در}} \vec{K} = \frac{\vec{P}}{\hbar}$$

پس مرحله اینجا هم درست است، یعنی D را دوران حول امتداد $\hat{n}$ در نظر گرفته به اندازه زاویه $d\varphi$ در نظر می‌گیریم.

بنابراین به جای R که ماتریس 3×3 بود که این دوران را توصیف می‌کرد، می‌توانیم بنویسیم: $D(R) \to D(\hat{n},\varphi)$

مانند حالت قبل رابطه را می‌نویسیم، جمله اول بخاطر عملگر همانی است یک می‌شود و جمله دوم بخاطر تناسب با $d\varphi$ می‌شود (چون بینهایت کوچک را در نظر می‌گیریم):

ماتریس دوران بینهایت کوچک — اسکالر

$$\boxed{D(\hat{n},\varphi) = 1 - iG\,d\varphi}$$

در بحث انتقال با اثر اپراتور بردار $d\vec{x}$ نشان می‌دادیم، بنابراین در آنجا که در آن ضرب می‌شد بردار بود، ولی در اینجا می‌توانیم دوران را با یک بردار نشان دهیم و چیزی که در $d\varphi$ ضرب می‌شود اسکالر است.

شرط $D^\dagger D = 1 \xrightarrow{\text{یکانی بودن}} G^\dagger = G$ هرمیتی است

حال می‌رویم سراغ بحث فیزیکی؛ در ورژن کلاسیک گفتیم در بحث تبدیلات کانونیک اگر مولد را اندازه حرکت زاویه‌ای بگیریم (از اینها) دوران ایجاد می‌شود. بنابراین در اینجا به یاد حالت کلاسیک، اسم G را اندازه حرکت زاویه‌ای می‌گذاریم.

$\hat{n}=\hat{k}$ در حالت $\xrightarrow[\text{ایجاد کنیم}]{\text{بخواهیم دوران حول } z}$ مولد دوران $= L_z \longrightarrow G = \dfrac{J_z}{\hbar}$

برای احتیاط اسم آن را J می‌گذاریم و برای حفظ دیمانسیون چون $d\varphi$ دیمانسیون ندارد پس G

هم نباید دیمانسیون داشته باشد، پس اگر G را J_z که دیمانسیون اندازه حرکت زاویه‌ای دارد بگیریم باید در مخرج چیزی از جنس آن بگذاریم ($\hbar$)

$$\boxed{G = \frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}}\quad \text{در مورد دوران حول } \hat{n}$$

بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای به این صورت وارد می‌شود و مولدی است که می‌تواند تولید دوران کند یعنی اگر به عنوان مولد دوران آن را

روی حالت‌ها اثر دهیم حالت‌ها را به حالت‌های دوران یافته می‌برد. بنابراین بطور کلی برای دوران‌های بینهایت کوچک داریم:

$$\boxed{D(\hat{n},d\varphi) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}\,d\varphi}\quad \text{دوران بینهایت کوچک}$$

دوران محدود:

نکته‌ای که باید توجه کنیم این است که درست است که گفتیم دوران‌ها جابجایی نیست یعنی دوران حول x و دوران حول y یک دوران حول $x+y$ نیست ولی دوران حول یک محور همواره جابجایی است، بنابراین:

$$D(\hat{n},\varphi_1)\,D(\hat{n},\varphi_2) = D(\hat{n},\varphi_1+\varphi_2) = D(\hat{n},\varphi_2)\,D(\hat{n},\varphi_1)$$

و چون این موضوع در مورد دوران حول یک محور وجود دارد، پس می‌توانیم دوران محدود حول یک محور را تفکیک کنیم به بینهایت دوران بینهایت کوچک حول همان محور؛ یعنی:

$$d\varphi = \frac{\varphi}{N}$$

$$D_z(\varphi) = \underbrace{D_z(d\varphi)\,D_z(d\varphi)\cdots D_z(d\varphi)}_{N\text{ بار}} = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{\hbar}J_z\frac{\varphi}{N}\right)^N$$

یعنی: $D_z(\varphi) = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{i}{\hbar}J_z\frac{\varphi}{N}\right)^N = e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\varphi}$

بنابراین فرم دوران‌ها که بدست آمد:

$$\boxed{D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}J\cdot\hat{n}\varphi}}$$

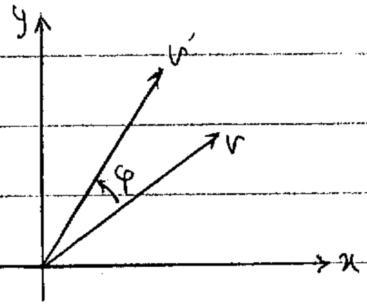
عملگر دوران حول یک محور به اندازه φ

این اپراتور روی هر حالتی که برود، حالت را دوران می‌دهد.

یک نقطه را ما در اینجا داریم از دست می‌دهیم که باید به آن بپردازیم، در اینجا از آن ماتریس R هیچ باقی نماند. $\hat{n}$ و φ که آمد و اندازه دوران را نشان می‌دهد، حال از کجا بفهمیم که دوران است یعنی ماتریس R چه شد؟ پس باید دوباره برگردیم به این ماتریس R که معرف دوران‌های سه بعدی بود و ببینیم چه خصوصیاتی دارد و همان خصوصیات را در رابطه بالا اعمال کنیم تا رابطه بالا به دوران مرتبط باشد. وقتی این کار را کنیم، می‌بینیم که این J باید یک چیز خاصی باشد. مثلاً یکی از خصوصیات این بود:

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = R_z(\varepsilon^2) - 1$$

جلسه بیستم: ۸۴/۹/۸



جلسه گذشته دیدیم که اگر در دستگاه مختصات سه بعدی یک بردار V را دوران دهیم به اندازه φ، در آن صورت مولفه‌های بردار جدید برحسب یک ماتریس بدست می‌آید که به این ماتریس دوران می‌گوییم که گفتیم باید بردار را در هر جهتی و به هر اندازه‌ای دوران دهیم. مثلاً برای حول محور z به اندازه φ داریم:

$$\underbrace{V'_i = R_{ij}V_j}_{\text{ماتریس دوران}} \; ; \quad \text{حول محور z به اندازه } \varphi: \; R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

دیدیم در مورد دوران حول محورهای مختلف دیدیم جابجا نمی‌شوند و در حالت خاص دوران کوچک (درجه ε^2) داشتیم:

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = R_z(\varepsilon^2) - 1$$

در جلسه ی ابتدای این درس گفتیم که ماتریس دوران یک گروه را تشکیل می دهد، که چون این ماتریس R یک ماتریس متعامد است،
جزء گروه ماتریس های متعامد ۳×۳ می باشد یعنی $O(3)$ ← ماتریس ۳×۳ orthogonal

گروه را تعریف کرده بودیم که چند خصوصیت داشت:

۱) بسته است یعنی حاصلضرب دو عضو گروه، یک عضو گروه را می دهد: $R_1R_2=R_3$

یا به زبان دوران می توانیم بگوییم دو دوران مختلف، حاصل آنها یک دوران است.

۲) عضو واحد دارند: $R\cdot 1=R$

۳) معکوس دارند: $RR^{-1}=R^{-1}R=1$

که به زبان دوران می توانیم بگوییم، به ازای هر دورانی یک دوران معکوس وجود دارد که برمی گردد سر جای اولش.

۴) شرکت پذیری: $(R_1R_2)R_3=R_1(R_2R_3)=R_1R_2R_3$

* هر مجموعه ای که این ۴ خصوصیت را داشته باشد یک گروه را تشکیل می دهد که ماتریس های ۳×۳ متعامد این خصوصیات را دارند.

نکته مهم دیگری که قبلاً گفتیم این است که تعریف یک گروه، از تعریف ضربش است یعنی اگر ضرب یک گروه را تعریف کردیم یعنی آن گروه را تعریف کردیم، که به زبان ماتریس دوران معنای آن رابطه زیر است، یعنی ماتریس دوران چنان گروهی است که اگر سمت چپ رابطه را این کنیم، سمت راست را به ما می دهد:

$$R_x(\epsilon)R_y(\epsilon)-R_y(\epsilon)R_x(\epsilon)=R_z(\epsilon^2)-1$$

جلسه گذشته درمورد نمایش دوران در فضای هیلبرت صحبت کردیم و گفتیم که اگر یک حالت $|\alpha\rangle$ داشته باشیم، تحت دوران این حالت از طریق یک اپراتور به حالت $|\alpha\rangle_R$ می رود:

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle_R = D(R)\,|\alpha\rangle$$

عملگری است متناسب با دوران R

شکل این اپراتور را با استفاده از خاصیت پیوستگی دوران و اینکه باید $D(1)=1$ عملگر باشد، درنهایت به این رابطه منجر شد.

$$D(\hat n,\varphi)=e^{-\frac{i}{\hbar}\vec J\cdot\hat n\varphi}$$

تکانه زاویه ای

D عملگری است که حالت سیستم را حول محور $\hat n$ به اندازه زاویه φ دوران می دهد.

در آخر جلسه گذشته گفتیم که این D هنوز معرف دوران نیست و هنوز خصوصیت دوران روی آن اعمال نشده است چون هر عملگری که دو خصوصیت بالا را برای آن در نظر بگیریم به صورت شکل بالا در می آید.

در ابتدا یک توضیح کوتاه درمورد نمایش های گروه می دهیم.

نمایش‌های گروه:

هر گروه با تعدادی عضو انتزاعی (abstract) و یک جدول ضرب تعریف می‌شود. اینکه می‌گوییم انتزاعی یعنی اینکه لازم نیست فرم صریح برای آن بیان کنیم. مثلاً:

اعضا: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ضرب‌ها (مثلاً: $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = a_8 \\ a_5 \cdot a_{15} = a_{94} \end{cases}$

اگر این اعضا را همراه با این جدول ضرب معرفی کنیم گروه را معین کرده‌ایم، که حتماً باید در این اعضا باید معکوس اعضا قرار گرفته باشد و حتماً یکی از این اعضا باید عضو واحد باشد.

نمایش گروه یعنی اینکه وقتی این اعضا را با این خصوصیت نوشتیم، مثلاً اگر بخواهیم با ماتریس نشان دهیم، به هر کدام از این اعضا باید یک ماتریس را نسبت دهیم. بنابراین نمایش ماتریسی انتساب یک ماتریس $N \times N$ به هر عضو است به گونه‌ای که جدول ضرب گروه را ارضا کند. (به این می‌گوییم نمایش N-بعدی)

هر یک گروه n عضوی را می‌توان علی‌الاصول با n تا ماتریس $N \times N$ نمایش داد، که این نمایش‌ها دارای این خصوصیت هستند که باید هم خصوصیات آن گروه را داشته باشند یعنی مثلاً ماتریسی که معرف a_1 است را ضرب در ماتریسی که معرف a_2 است کنیم باید نمایش ماتریسی که معرف a_8 است را بدهد.

یک گروه می‌تواند نمایش‌های مختلف داشته باشد، می‌تواند نمایش دوبعدی، سه‌بعدی و ... داشته باشد و می‌تواند نداشته باشد. می‌تواند نمایش آن از یک حدی بالاتر باشد، مثلاً می‌توانیم گروهی پیدا کنیم که نمایش آن از ۸ بعد به بالا باشد. بنابراین بستگی به ماهیت آن گروه، ممکن است که بشود برای آن نمایش با یک سری ابعاد پیدا کرد.

خود طبقه‌بندی گروه‌ها یعنی اینکه انواع و اقسام گروه‌ها چیست، کار خیلی مهمی است که در اوایل این قرن انجام شد. حداقل برای گروه‌های لی (که گروه‌های پیوسته‌ای هستند که تعداد اعضای آن بی‌نهایت است با یک پارامتر پیوسته) این کار انجام شد و جدول گروه‌های لی کشف شد.

حال اینکه مثلاً خود گروه $O(3)$ چه نمایش‌هایی دارد، کار پیچیده‌ای است، یعنی پیدا کردن نمایش گروه‌ها یک مسئله‌ای است در ریاضیات به نام "نظریه نمایش" (representation theory) که مورد اکثر گروه‌ها انجام شده و هنوز در مورد برخی انجام شده است.

ما یک موازی از این بحث در کوانتوم مکانیک بیان می‌کنیم.

بنابراین این طور بیان می‌کنیم که گروه $O(3)$ یک گروه انتزاعی است با یک جدول ضرب. این جدول ضرب را ما صراحتاً معرفی نکردیم ولی به صورت تقابل بیان کردیم: (I)

$$R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) = R_z(\epsilon^2) - 1$$

ولی باید دقت کنیم که این ماتریس‌هایی که بیان شد، نمایش خاصی از آن گروه است و نمایش 3×3 آن است.

گروه O(3) ابتدا برای ماتریس‌های ۳×۳ نوشته می‌شود و یک تعدادی عنصر در یک جدول ضرب می‌شود. حال می‌توان سؤال کرد این گروه فقط می‌توان با ماتریس‌های ۳×۳ نمایش داد؟ بنابراین نمایش گروه O(3) ظاهراً فقط با ماتریس‌های ۳×۳ نیست و می‌توانند انواع و اقسام نمایش‌ها را داشته باشند. بنابراین این اسمی که برای آنها گذاشته شده است برای شروع بحث است که ماتریس‌های ۳×۳ است ولی خودمان را به ماتریس‌های ۳×۳ مقید نمی‌کنیم. بنابراین رابطه‌ای که در صفحه پیش نوشتیم که معرف ضرب گروه بود در یک نمایش خاص (ماتریس‌های ۳×۳) نوشته شده است ولی چون معرف ضرب گروه است هر نمایش دیگری پیدا کنیم باید در این رابطه صدق کند.

گفتیم D(R) (که اپراتوری است که حالتها را تغییر می‌دهد) اپراتور دوران در فضای کتها است. بستگی دارد که این کت چه چیزی باشد. بنابراین نمایش‌های متفاوت دارد. مثلاً اگر اسپینور باشند آنها را می‌توان با ماتریس ۲×۲ نمایش داد. بنابراین نمایش ماتریسی D(R) می‌تواند هر بعدی داشته باشد بستگی به state ها.

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle$$

$$V_i' = R_{ij}V_j$$

پس در رابطه مقابل چون D(R) جای R معادله پیش نشسته، اولاً باید تمام خصوصیات دوران را داشته باشد. ثانیاً بعد آن لازم نیست ۳ باشد و حتماً هم ۳ نیست. چون بعد $|\alpha\rangle$ ممکن است ۳ نباشد.

- D(R) باید در axiom های (اصول موضوعه) گروه صدق کند. چون باید D(R) دوران تولید کند در فضای حالتها.
- D(R) باید در رابطه ضرب مشخص کننده دوران صدق کند. چون نمایشی از گروه دوران است و باید در رابطه (I) صفحه قبل صدق کند.

$$(\mathrm{I}):\quad R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = R_z(\varepsilon^2) - 1$$

باید توجه داشته باشیم که رابطه مقابل برای دوران‌های کوچک است در حد ε^2. بنابراین در رابطه D هم تا حد ε^2 نگه می‌داریم:

$$D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}\varphi}$$

برای $R_x(\varepsilon)$، $D(\hat{i},\varepsilon)$ می‌گذاریم:

$$\begin{cases} R_x(\varepsilon) \longrightarrow D(\hat{i},\varepsilon) = e^{-\frac{i}{\hbar}J_x\varepsilon} = 1 - \frac{i}{\hbar}J_x\varepsilon + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\right)^2 J_x^2 + \cdots \\ R_y(\varepsilon) \longrightarrow D(\hat{j},\varepsilon) = 1 - \frac{i}{\hbar}J_y\varepsilon + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\right)^2 J_y^2 + \cdots \\ R_z(\varepsilon^2) \longrightarrow D(\hat{k},\varepsilon^2) = 1 - \frac{i}{\hbar}J_z\varepsilon^2 + \cdots \end{cases}$$

حال این D ها را در رابطه (I) می‌گذاریم: $1-\frac{i}{\hbar}J_z\varepsilon^2 - 1$

$$D(\hat{i},\varepsilon)D(\hat{j},\varepsilon) - D(\hat{j},\varepsilon)D(\hat{i},\varepsilon) = D(\hat{k},\varepsilon^2) - 1$$

تا حد ε^2 می‌بریم و طرفین رابطه را با هم برابر قرار می‌دهیم، پس برای J ها این رابطه بدست می‌آید:

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

بنابراین نتیجه جالبی بدست می‌آید اگر رابطه $D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}J\cdot\hat{n}\varphi}$ را بخواهیم به عنوان دوران باشد باید J ها این رابطه را صدق کنند.

پس رابطه هم به این صورت بدست می‌آید:

$$\boxed{[\underbrace{J_i, J_j}_{\text{مولدهای گروه}}] = i\hbar \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{ضرایب ساختار}} J_k}$$ جبر گروه دوران

J ها را مولد گروه می‌گوییم و چون سه مولد دارد پس گروه سه بعدی است و سه پارامتر دارد (یک پارامتر φ و ۲ تا برای $\hat{n}$)
چون نوشتن اعضای گروه برحسب جبر این است که اعضای گروه دوران بینهایت تا است ولی وقتی به صورت exp بنویسیم $\hat{n}$ و φ که دلخواه هستند ولی چیزی که دوران‌ها را تعیین می‌کند J است که در رابطه بالا صدق می‌کند. اگر J یک ماتریس $N\times N$ باشد D هم $N\times N$ است، بنابراین نمایش‌های مختلف D یعنی نمایش‌های مختلف J.

N بعدی بودن نمایش یعنی تعداد سطر و ستون‌هایی که ماتریس را نمایش می‌دهیم، حال سؤال می‌کنیم آیا گروه دوران نمایش یک بعدی دارد یا نه؟ (یعنی عدد)

یعنی آیا می‌توان به ازای J_x و J_y و J_z سه تا عدد داد؟ $N = 1, 2, 3, \ldots$

چون اعداد با هم جابجا می‌شوند، پس نمایش یک بعدی ندارند.

حال آیا نمایش دو بعدی ممکن است؟ یعنی امکان دارد که سه تا ماتریس 2×2 در رابطه بالا صدق کند؟ بله ممکن است.

بنابراین اصلاً واضح نیست که در نمایش گروه، می‌بینیم بعد چقدر است. در گروه دوران مینیمم بعد ۲ است.

حالا می‌خواهیم در مورد نمایش دو بعدی گروه دوران صحبت کنیم، یعنی فضایی که دوران در آن حالتها اثر می‌کنند فضای دو بعدی باشد. فضای دو بعدی هم اسپین ½ می‌باشد.

نمایش دو بعدی گروه دوران:

فضای حالتها: $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

به خاطر راحتی در این مورد به جای $\vec{J}$، $\vec{S}$ می‌گذاریم:

$$\vec{J} \rightarrow \vec{S}$$

بنابراین گروه دوران در مورد حالتهای ذره اسپین $\frac{1}{2}$، اپراتور D به این صورت می‌شود:

$$D(\hat{n},\varphi)=e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{S}\cdot\hat{n}\varphi}$$

این اپراتور روی هر اسپینوری اثر کند آن state را دوران می‌دهد حول $\hat{n}$ به اندازه زاویه φ.

که هم باید در این رابطه صدق کند

$$[S_i,S_j]=i\hbar\,\varepsilon_{ijk}S_k$$

این کاری که ما داریم می‌کنیم با اینکه یک مقدار طبیعی به نظر می‌رسد، اما اصلاً طبیعی نیست یعنی اینکه یک ادعای بزرگ فرضی است داریم ادعا می‌کنیم که اسپین عنصر دوران است، اگر این حرف درست باشد یک عواقبی دارد، اگر بتوان این عواقب را چک کرد آن وقت می‌توانیم بگوییم این حرف درست است.

برای J دلخواه مقدار چشمداشتی J_x را در مورد حالت $|\alpha\rangle$ در نظر می‌گیریم و آن را دوران می‌دهیم:

$$\langle J_x\rangle=\langle\alpha|J_x|\alpha\rangle\ \xrightarrow[\text{در تصویر شرودینگر}]{R_z(\varphi)\ \text{دوران}}\ {}_R\langle\alpha|J_x|\underbrace{\alpha\rangle_R}_{D_z(\varphi)|\alpha\rangle}=\langle\alpha|\underbrace{D_z^{\dagger}(\varphi)J_x D_z(\varphi)}_{\equiv\ O\ \text{عنصر}}|\alpha\rangle$$

اپراتور تغییر نمی‌کند Ket می‌چرخد

$$O=\overbrace{e^{\frac{i}{\hbar}J_z\varphi}}^{D_z^{\dagger}(\varphi)}J_x\overbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\varphi}}^{D_z(\varphi)}\qquad (II)$$

هرمیتی‌اند Jها، $D^{\dagger}D=1\Rightarrow J^{\dagger}=J$

$$\text{قضیه: } e^{\lambda}Ae^{-\lambda}=A+[\lambda,A]+\frac{1}{2!}[\lambda,[\lambda,A]]+\cdots\qquad (III)$$

$(II),(III)$

$$\Downarrow$$

$$O=\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}J_z\varphi}}_{e^{\lambda}}\underbrace{J_x}_{A}e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\varphi}=J_x+\frac{i}{\hbar}\varphi\overbrace{[J_z,J_x]}^{i\hbar J_y}+\frac{1}{2!}\left(\frac{i}{\hbar}\varphi\right)^2\overbrace{[J_z,\underbrace{[J_z,J_x]}_{i\hbar J_y}]}^{\hbar^2J_x}$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{\hbar}\varphi\right)^3\underbrace{[J_z,\underbrace{[J_z,[J_z,J_x]]}_{\hbar^2J_x}]}_{i\hbar J_y}+\cdots$$

$$\Rightarrow O=J_x\overbrace{\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\cdots\right)}^{\cos\varphi}-J_y\overbrace{\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\cdots\right)}^{\sin\varphi}=J_x\cos\varphi-J_y\sin\varphi$$

همین کار را می‌توان برای $\langle J_y\rangle$، $\langle J_z\rangle$ هم انجام داد، در نتیجه داریم:

نتایج برای دوران حول z

$$\begin{cases}\langle J_x\rangle\longrightarrow\langle J_x\rangle\cos\varphi-\langle J_y\rangle\sin\varphi\\ \langle J_y\rangle\longrightarrow\langle J_x\rangle\sin\varphi+\langle J_y\rangle\cos\varphi\\ \langle J_z\rangle\longrightarrow\langle J_z\rangle\end{cases}$$

بنابراین نتیجه بسیار مهمی بدست آمد:

$$\begin{pmatrix}\langle J_x\rangle' \\ \langle J_y\rangle' \\ \langle J_z\rangle'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle J_x\rangle \\ \langle J_y\rangle \\ \langle J_z\rangle\end{pmatrix} \Rightarrow \langle J_k\rangle \xrightarrow[\text{تحت دوران}]{} \sum \underbrace{R_{kl}}_{\text{ماتریس دوران سه بعدی } (3\times3)} \langle J_l\rangle$$

که دقیقاً همان ماتریس دورانی است که گفته بودیم.

نتیجه مهم:

مقدار چشمداشتی عملگرهای برداری تحت دوران مانند بردارهای کلاسیک رفتار می‌کنند. عملگرهای برداری یعنی عملگرهایی که بیش از یک مولفه (سه مولفه) دارند و بردار هم هستند که دارای خصوصیتی هستند که بعداً می‌گوییم.

ما انتظار داریم که خود عملگرها مثل بردار کلاسیک رفتار کنند ولی مقدار چشمداشتی آنها که در آزمایشگاه می‌بینیم خیلی جالب است که مثل یک بردار کلاسیک رفتار کنند که این رابطه برای اسپین‌ها هم برقرار است: مثلاً برای S_x داریم:

$$\langle S_x\rangle \longrightarrow \langle S_x\rangle\cos\varphi - \langle S_y\rangle\sin\varphi$$

حال برگردیم به سؤال خودمان که اثر این عملگر را بدانیم یعنی که مولد دوران است روی اسپینورها را که تبدیل پیدا می‌کنند.

$$D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}S\cdot\hat{n}\varphi} \qquad \text{فضای حالت}: \{|+\rangle, |-\rangle\}$$

$$[S_i, S_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}S_k$$

حال ببینیم حالت دلخواه $|\alpha\rangle$ را برحسب اسپینورها بیان دهیم:

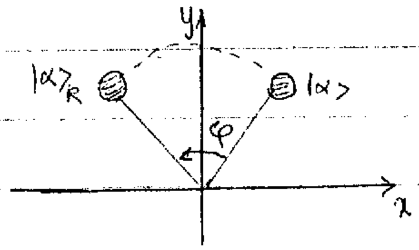
$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = |+\rangle\langle+|\alpha\rangle + |-\rangle\langle-|\alpha\rangle$$

نمایش ماتریسی: $|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix}\langle+|\alpha\rangle \\ \langle-|\alpha\rangle\end{pmatrix}$

حالت $|\alpha\rangle$ را حول z به اندازه φ دوران می‌دهیم: $|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle_R = e^{-\frac{i}{\hbar}S_z\varphi}\left(|+\rangle\langle+|\alpha\rangle + |-\rangle\langle-|\alpha\rangle\right)$

از طرفی می‌دانیم: $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$

$$\Rightarrow |\alpha\rangle_R = e^{-i\varphi/2}|+\rangle\langle+|\alpha\rangle + e^{i\varphi/2}|-\rangle\langle-|\alpha\rangle$$



حال ببینیم تحت دوران 2π چه اتفاقی می‌افتد:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\varphi=2\pi} \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1}|+\rangle\langle+|\alpha\rangle + \underbrace{e^{i\pi}}_{-1}|-\rangle\langle-|\alpha\rangle = -|\alpha\rangle \quad !!!$$

یک چیز بسیار عجیبی نتیجه شد، یعنی سیستم را به اندازه 2π چرخاندیم ولی برنگشت سر جای اولش. این نکته بسیار عجیب و مهم است.

این به خاطر این است که ما اسپین را عملگر دوران گرفتیم و چون اسپین عملگر دوران است، ویژه حالتهای آن به صورت $\frac{\hbar}{2}$ است و این $\frac{1}{2}$ باعث می‌شود که تحت دوران 4π این فاز برابر با ۱ شود، یعنی:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\varphi=4\pi} |\alpha\rangle$$

بنابراین نتیجه‌ای که بدست آمد این است که سیستم‌های اسپین $\frac{1}{2}$ تحت دوران 2π سر جای اولشان برنمی‌گردند بلکه باید دو دور بزنند تا سر جای اولشان برگردند.

اگر در آزمایش این موضوع دیده شود یعنی این حرف درست است و از عجایب دیگر کوانتم مکانیک است. مثلاً جایی که اسپین را می‌توانیم ببینیم، در حضور میدان مغناطیسی است. پس می‌رویم سراغ حرکت تقدیمی اسپین!

آزمایش:

حرکت تقدیمی اسپین:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} \xrightarrow{\text{برای اسپین}} -\frac{e}{mc}\vec{S}\cdot\vec{B} \xrightarrow{\vec{B}=B\hat{k}} \underbrace{-\frac{eB}{mc}}_{\equiv\omega} S_z$$

بنابراین هامیلتونی متناسب با S_z می‌شود. بنابراین عملگر تحول می‌شود:

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \xrightarrow{t_0=0} U(t,t_0=0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{-i\omega t/\hbar\, S_z}$$

اگر عملگر تحول را با عملگر دوران مقایسه کنیم می‌بینیم که عین هم هستند یعنی برابر

$$U(t)|\alpha,0\rangle = |\alpha,t\rangle = D_z(\varphi=\omega t)|\alpha\rangle$$

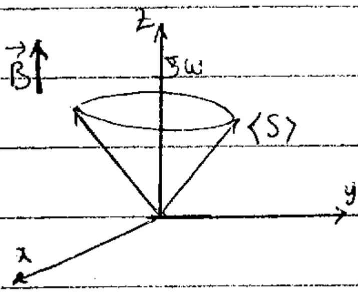
است با عملگر دوران حول محور z به اندازه زاویه ωt. این نکته جالب است یعنی اینکه سیستم که در حضور میدان مغناطیسی تحول می‌شود در حقیقت دارد دوران پیدا می‌کند ولی با زاویه‌ای که با زمان رابطه گسترش پیدا می‌کند. بنابراین به جای اینکه از مفهوم تحول استفاده کنیم، می‌توانیم از نتایج دوران استفاده کنیم ولی همه جا باید $\varphi=\omega t$ بگذاریم، از جمله:

$$\langle S_x\rangle \longrightarrow \underbrace{\langle S_x\rangle\cos\varphi - \langle S_y\rangle\sin\varphi}_{\langle S_x\rangle_\varphi}$$

در زمان صفر — در زمان صفر

بنابراین می‌توانیم از این نتیجه استفاده کنیم و به جای $\langle S_x\rangle_\varphi$ بگذاریم $\langle S_x\rangle_t$ ($\langle S_x\rangle$ در زمان t):

$$\langle S_x\rangle_t = \langle S_x\rangle_0\cos\omega t - \langle S_y\rangle_0\sin\omega t$$



یعنی نشان دادن اثر میدان مغناطیسی، سیستم را دوران می‌دهیم با زاویه ωt

یعنی داریم $\langle S\rangle$ (امید ریاضی‌های $\langle S_x\rangle$، $\langle S_y\rangle$ و $\langle S_z\rangle$) را حول محور z با فرکانس

ω دوران می‌دهیم، که در این $\langle S_z\rangle$ عوض نمی‌شود ولی $\langle S_x\rangle$ و $\langle S_y\rangle$ ها

مقدار معمولی عوض می‌شوند. $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$: دوره تناوب

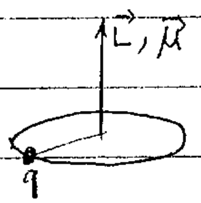
دوره تناوب این حرکت می‌گوید که اگر یک دور بزنیم 2π می‌گردد سر جای اولش.

حال سؤال این است که مگر قرار نشد که بعد از 2π سر جای اولش برنگردد و قرار بود بعد از 4π برگردد، این چطور شد که بعد از 2π برگشت. نکته ظریفی اینجا وجود دارد، یعنی اینکه می‌گوییم بعد از 2π به صورت منفی در می‌آید منظور مقدار چشمداشتی نیست بلکه خود state است. در مقدار چشمداشتی، state دو بار در خودش ضرب می‌شود.

$$\langle S_x\rangle = \langle\alpha| S_x |\alpha\rangle$$

بنابراین بعد از 2π هم $|\alpha\rangle$ به صورت $-|\alpha\rangle$ در می‌آید و هم $\langle\alpha|$ به صورت $-\langle\alpha|$ در می‌آید که در این صورت ضرب آنها به صورت مثبت در می‌آید. بنابراین در آزمایش‌هایی که مقدار چشمداشتی خودش را نشان می‌دهد نمی‌توانیم علامت فاز آنها را چک کنیم. پس باید در آزمایش‌هایی بود که تبدیل خود فاز را ببینیم نه مقدار چشمداشتی را.

برای اینکه بتوانیم این فاز منفی را ببینیم باید به صورتی از تداخل استفاده کنیم یعنی از تداخل با خود حالت، چون حالت در خودش ضرب نشود. منفی‌ها می‌روند اما اینکه در چیز دیگری ضرب شود ممکن است منفی باقی بماند.



این آزمایش را با نوترون انجام می‌دهند، ولی در مورد نوترون یک چیز عجیب وجود دارد.

در مورد ممان مغناطیسی در اول ترم گفتیم که هر ذره باردار که دارد دوران می‌کند یک L دارد و یک μ ممان مغناطیسی هم دارد که:

$$\vec\mu_L = \frac{q}{2mc}\vec L$$

بعد در موردی که ضرورتاً حرکت مداری نباشد، یعنی ذرات اسپین هم داشته باشند، در این صورت اسپین هم از خودش ممان مغناطیسی نشان می‌دهد:

$$\vec\mu_S = \frac{q g_e}{2mc}\vec S$$

نکته‌ای که در هر دو حالت وجود دارد این است که ممان مغناطیسی معرف جریان است:

$\mu = IA$: در مدار مسطح

بنابراین باید جریان باشد تا ممان مغناطیسی وجود داشته باشد. جریان هم یعنی حرکت بار، پس بار باید وجود داشته باشد.

اما چیز عجیبی که وجود دارد این است که ذراتی هستند که بار ندارند ولی ممان مغناطیسی دارند. به این معنی ممان مغناطیسی،

«گشتاور مغناطیسی غیرعادی» می‌گوییم، یعنی بطور کلاسیک نباید وجود داشته باشد، ولی وجود دارد. مثلاً برای نوترون:

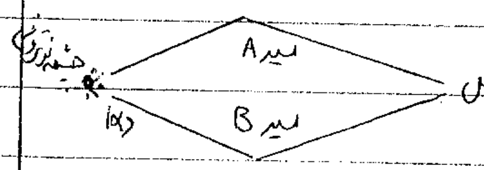
$\vec{\mu}_n = \frac{e g_n}{m_n c}\vec{S}$; $g_n \simeq -1.9$

یعنی ظاهراً این طور است که این ذره اسپین را به خاطر اسپینش بازهم ممان مغناطیسی دارد با اینکه بار ندارد.
یک وجه دیگر تفسیر این است که چون ممان مغناطیسی دارد ولی بار ندارد، شاید نوترون توزیع بار داشته باشد، یعنی ممکن است یک سری بارهای مثبت و منفی درآن باشد که بخاطر آنها ممان مغناطیسی داشته باشد، و ممکن است که نوترون از کوارکها تشکیل شده باشد، یعنی ممان مغناطیسی به نوعی مربوط به وجود کوارکها در نوترون می‌شود.

حال اگر به این ممان مغناطیسی توجه کنیم، هامیلتونی در حضور میدان مغناطیسی می‌شود:

$H = -\vec{\mu}_n \cdot \vec{B} = \omega S_z$; $\omega = \frac{e g_n B}{m_n c}$

البته چون جرم نوترون خیلی بزرگ است (۲۰۰۰ برابر جرم الکترون است) بنابراین ممان مغناطیسی آن خیلی کوچک است ولی به هر حال قابل تشخیص است.
چون اسپین آن ½ است، پس همان حرف قبلی برای آن صادق است یعنی بعد از دوران ۴π، state نوترون سرجای اولش برمی‌گردد.
خوشبختانه با ستدلهایی که شد، دوران یعنی گذاشتن در میدان مغناطیسی پس یک دستگاه دوران داریم.



حال این طور آزمایش را انجام می‌دهیم، چشمه نوترونی را قرار دهیم و از دو مسیر مختلف ذرات را هدایت کنیم و باهم تداخل دهیم

از مسیر A : $|\alpha, t\rangle_A = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\alpha\rangle$

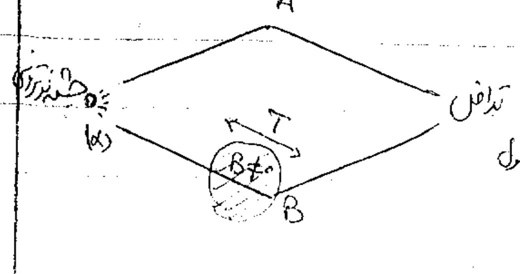
راه مسیر B چون ممکن است مسیر یکی نباشد، ممکن است که اختلاف فازی با مسیر A پیدا کند، یعنی:

از مسیر B : $|\alpha, t\rangle_B = \underbrace{e^{i\delta}}|\alpha, t\rangle_A$

اختلاف فازی است که این دو مسیر می‌توانند باهم داشته باشند

به زبان تابع موج : $\psi_B(x,t) = e^{i\delta}\psi_A(x,t)$

حال بیاییم این کار را بکنیم و در طول مسیر B، میدان مغناطیسی قرار دهیم. بنابراین عملگر دوران به این صورت خواهد شد:



عملگر دوران: $e^{-i\omega t S_z/\hbar}$ $\longrightarrow$ عملگر دوران: $e^{-i\omega S_z T/\hbar}$

در حین عبور نوترون از میدان B

حال این عملگر تحول باید روی حالتها اثر کند:
$$|\alpha, T\rangle = U(T)\,|\alpha, 0\rangle$$

حال بستگی به این دارد که نوترون اولیه up باشد یا down:

اگر $|\alpha, 0\rangle = |+\rangle \Longrightarrow |\alpha, T\rangle = e^{-i/2\,\omega T}\,|\alpha, 0\rangle$

بنابراین این دو حالتی که از مسیر A و B می آیند علاوه بر اینکه یک فاز δ با هم فرق داشتند به اندازه مقدار بالا هم باز با هم فرق دارند چون یکی از میدان $\vec{B}$ گذرد، پس در حقیقت:

$$\Psi_B(x,t) = e^{i\delta - i/2\,\omega T}\,\Psi_A(x,t)$$

حال دوباره ضریب پا در فاز قرار گرفته است (که معروف هستند)

در نقطه تداخل: $\Psi = \Psi_A + \Psi_B = \left[1 + e^{i\delta - i/2\,\omega T}\right]\Psi_A$

احتمال یافتن ذرات: $|\Psi|^2 = 2\left(1 + \cos(\delta - \omega T/2)\right)|\Psi_A|^2$

که $|\Psi_A|^2$ بی اهمیت است و کنار می گذاریم و در فاز

مورد نظر نشسته است. در حقیقت این رابطه می گوید فراخ های تداخلی تابع ω است که ω هم تابعی از $\vec{B}$ است یعنی با تغییر میدان مغناطیسی فراخ ها عوض می شوند. حال باید ببینیم با چه پریودی تغییر می کند یعنی میدان را چقدر عوض کنیم تا دوباره شکل سرچشمه اول خودش برگردد.

اگر میدان را عوض کنیم

اگر $B_1 \longrightarrow B_2$: به گونه ای که $\longrightarrow \omega_2 T = \omega_1 T + 4\pi \Longrightarrow |\Psi|^2 = |\Psi|^2$

اگر در رابطه بالا به جای ω ها برحسب B بگذاریم و به جای T هم $T = l/v$ بگذاریم

$$T = l/v = \frac{l}{p/m} = \frac{m l \lambda}{h} \Longrightarrow \Delta B = \frac{4\pi\hbar c}{e g_n \lambda l}$$

پس به دست آمد که میدان مغناطیسی چقدر باید عوض کنیم تا سیستم برگردد به سر جای اولش. نتیجه به دست آمده با دقت بسیار خوبی با آزمایش هم خوانی دارد. بنابراین این حرف درست است که اسپین مولد دوران است و چون نیم صحیح است با دوران 2π سر جای اولش برنمی گردد و باید 4π هم دوران یابد.

نکته آخری که می خواهیم بگوییم این است چطور می توان مقدار میانگین اسپین را وقتی دوران می یابد اندازه گیری کرد و اندازه گیری جهت اسپین کار ساده ای نیست. یک راه به این شکل است:

π^- (پایون) (ناپایدار است) $\xrightarrow{\text{از طریق برهم کنش ضعیف}}$ μ^- $\bar{\nu}_\mu$ (پاد نوترینو)

نوترینو ذره ای است که اسپین آن ½ است، بار و جرم هم ندارد

(دو ماهیت است (ذره و پادذره)) یعنی نوترینو و پادنوترینو

۶ تا ذره داریم که به آنها لپتون می‌گوییم و تعداد زیادی ذره هم داریم که به آنها هادرون‌ها می‌گوییم.

$\sim 50\,\text{KeV}$

lepton (برهم‌کنش قوی ندارند)	$e^- \to \nu_e$ ($\sim 21\,\text{eV}$)	$\xrightarrow{\text{پادذره}}$	$e^+ \to \bar{\nu}_e$
	$\mu^- \to \nu_\mu$		$\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu$
	$\tau^- \to \nu_\tau$		$\tau^+ \to \bar{\nu}_\tau$

همزادهای این سه ذره هستند

متناسب با این سه ذره، برای هرکدام یک نوترینو وجود دارد که جرم ندارند و یا جرم خیلی کمی دارند و اگر جرم هم داشته باشند کوچکتر از $1\,\text{eV}$ است.

hadrons: برهم‌کنش قوی هم دارند

نوترینو ذره بسیار مهمی است که جرم ندارد و بنابراین سرعت آن، سرعت نور است و تفاوت آن با فوتون این است که اسپین آن $\frac{1}{2}$ است ولی فوتون اسپینش یک است. فوتون عامل اندرکنش الکترومغناطیسی است اما نوترینو این طور نیست.

$m=0$

در مورد ذرات جرم صفر یک خصوصیت را می‌توان برای همه‌شان ثابت کرد:

$S \leftarrow \quad \rightarrow S \qquad \xrightarrow{z} \quad \xrightarrow{\qquad\qquad} p$ حرکت در این جهت

اسپین این ذرات دو حالت بیشتر نمی‌تواند بگیرد یا در راستای حرکت است یا در خلاف حرکت است. یعنی S_z آن یا $+$ یا $-$ است. در حالی که اگر اسپین یک باشد $S_z = \pm 1, 0$ می‌تواند باشد، ولی در مورد ذرات جرم صفر $S_z = 0$ رخ نمی‌دهد.

$S \leftarrow \quad \nu$ (نوترینو) $\quad \xrightarrow{\qquad\qquad} p$

ولی نوترینوها یک چیز اضافی هم دارند و به این صورت هستند که این دو حالت را ندارند و فقط یکی را دارند و فقط $-\frac{1}{2}$ را دارند.

* به مولفه اسپین در جهت حرکت، helicity می‌گویند.

helicity نوترینو منفی است و با اصطلاحاً چپ‌گرد است. با این موضوع به نتایج خیلی مهمی می‌توان رسید و اصطلاحاً طبیعت چپ و راست را تمیز می‌دهد. تا قبل از این کشف دانشمندان چپ و راست هیچ فرقی نداشتند و در حقیقت نمی‌توانستیم بین این دو هیچ فرقی بگذاریم ولی با توجه به این نکته اصطلاحاً تقارن راست و چپ شکسته شد.

$\xrightarrow{S} \quad \bar{\nu} \quad \xrightarrow{\qquad\qquad} p$

پس این خصوصیت راهی برای تعریف چپ و راست است. البته پادذره آن، به صورت برعکس رفتار می‌کند.

حال برویم سراغ آزمایش، وقتی پایون واپاشی می‌کند در دستگاه مرکز جرم CoM

$S_z \leftarrow$ می‌دانیم، $\rightarrow S_z$ بین عضو (؟) در این جهت

$\bar{\nu}_\mu \longleftarrow \pi^- \longrightarrow \mu^-$

اسپین صفر، دستگاه مرکز جرم CoM

طبق اصل بقای مومنتم μ^- از یک جهت می‌رود و $\bar{\nu}_\mu$ از جهت دیگر.

اسپین π^- صفر است، پس $S_i = 0 \to S_f = 0$ (اولیه) (نهایی)

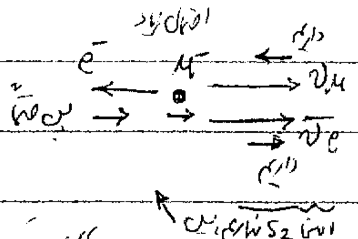
حال یک μ^- داریم که ذره‌ای ناپایدار است و سریعاً واپاشی می‌کند به e^- و $\bar{\nu}_e$ و ν_μ.

LearnElement.ir

$\pi^- \to \mu^- \ \bar{\nu}_\mu$

$\hookrightarrow e^- \ \bar{\nu}_e \ \nu_\mu$

این حالت می‌تواند در جهت‌های مختلف واپاشی کند ولی تجربه نشان داد که با گرایش واپاشی طوری است که دو نوترینو در یک جهت هستند و الکترون در جهت مخالف آنها:



باید دوباره اصل بقا S_z وجود داشته باشد و باید $S_{z\mu}$ در جهت راست باشد (اینجا S_z ، μ^- در جهت راست است)

بنابراین نکته آزمایش این است که الکترون‌هایی که می‌بینیم جهت حرکتشان در جهت حرکت اسپین μ است و ضمناً تکانه الکترون موازی است با اسپین μ. حال اگر بخواهیم اسپین μ را اندازه‌گیری کنیم کافی است جهت حرکت الکترون را بدانیم

$-\vec{P}_e \parallel \vec{S}_\mu$

تکانه الکترون

بنابراین اگر این آزمایش را در حضور میدان مغناطیسی انجام دهیم انتظار داریم S_μ شروع به چرخیدن کند و این اتفاق برای آن بیفتد ولی ما این را نداریم که ببینیم ولی به ازای آن یک مقداری الکترون داریم که اگر این حرف درست باشد انتظار داریم که این الکترون‌ها جهت تابش آن با میدان بچرخد که این اتفاق می‌افتد و می‌توان آن را مشاهده کرد.

پس این یک روشی است برای آشکارسازی حرکت تقدیمی اسپین با استفاده از تعیین جهت اسپین

جلسه بیست یکم: ۸۴/۹/۱۲

جلسه گذشته در مورد دوران گفتیم و عملگری که این کار را برای ما انجام می‌دهد به این صورت است:

$|\alpha\rangle \to |\alpha\rangle_R = D(\hat{n},\varphi)|\alpha\rangle \longrightarrow D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}\varphi}$

$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ (*) از این عملگر انتظار داریم دوران‌هایی که به درستی در این روابط جابجایی صدق کنند:

بعد گفتیم که یک نمایش‌های ماتریسی J ها برمی‌گردد به نمایش حالتی که D می‌خواهد روی آن اثر کند و آن هم برمی‌گردد به فضای حالت‌مان.

در حالت اسپین ½ که حالت ما دو حالت هستند: $|\pm\rangle$

$\vec{J} \to \vec{S}$, $D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{S}\cdot\hat{n}\varphi}$

$D(\hat{n}, 2\pi) = -1$ دو خصوصیت وجود داشت که خصوصیت مهم آن این است که در دوران

$D(\hat{n}, 4\pi) = 1$ به اندازه 2π سیستم به حالت اولش برنمی‌گردد و در دوران 4π برمی‌گردد:

نمایش های ماتریسی عملگرها و حالتها در حالت اسپین ۱/۲:

هر حالت $|\alpha\rangle$ را می‌توانیم به این صورت نمایش دهیم

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \overbrace{\langle + | \alpha \rangle}^{c_+} \\ \underbrace{\langle - | \alpha \rangle}_{c_-} \end{pmatrix} = \chi$$

$$|+\rangle \doteq \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |-\rangle \doteq \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

هر χ ای قابل بسط است برحسب χ_+ و χ_-:

$$\chi = c_+ \chi_+ + c_- \chi_-$$

c_+ و c_- در بالا تعریف شده اند.

عملگر اسپین هم هر کدام از مولفه هایش برحسب حالتهای $|\pm\rangle$ تبدیل می‌شوند به ماتریس های پائولی:

$$\langle \pm | S_i | \pm \rangle = \frac{\hbar}{2} \sigma_i \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

که ماتریس های پائولی روابط جابجایی خاصی دارند که از آنها به دست می‌آید:

پادجابجایی

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \qquad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

خصوصیات ماتریس های پائولی:

$tr(\sigma_i) = 0$ هر ۳ تای آنها صفر است trace

$\det \sigma_i = 1$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

ضرب ماتریس $\vec{\sigma}$ در $\vec{a}$ هم به این صورت می‌شود

با استفاده از روابطی که نوشتیم به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\sigma \cdot (a \times b)$$

در حالت خاص که $a = b$ $\rightarrow$ $\boxed{(\sigma \cdot a)^2 = |\vec{a}|^2}$

برای حالت $\vec{a} = \hat{n}$ که بردار یکه $\rightarrow$ $\boxed{(\sigma \cdot \hat{n})^2 = 1}$

بنابراین در بردار حالتهای دو بعدی به جای اسپین از $\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ استفاده می‌کنیم و به جای حالتها از χ استفاده می‌کنیم مثلاً:

$$\langle S_k \rangle = \langle \alpha | S_k | \alpha \rangle = \sum_{a'a''} \underbrace{\langle \alpha | a' \rangle}_{\chi^\dagger_{a'}} \underbrace{\langle a' | S_k | a'' \rangle}_{\frac{\hbar}{2}(\sigma_k)_{a'a''}} \underbrace{\langle a'' | \alpha \rangle}_{\chi_{a''}} = \frac{\hbar}{2} \chi^\dagger \sigma_k \chi$$

برای انجام این محاسبه‌ها می‌توان از نمایش ماتریسی استفاده کرد.

به عنوان کاربردی از این روابط، اگر بخواهیم نمایش ماتریسی عملگر D را در حالت اسپین ۱/۲ بنویسیم به این صورت می‌شود:

$$D(\hat n,\varphi)=e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{\hbar}{2}\vec\sigma\cdot\hat n\phi}$$

$$\Rightarrow D(\hat n,\phi)=e^{-\frac{i}{2}\sigma\cdot\hat n\phi}$$ این نمایش ماتریسی عملگر D است

$e^{-\frac{i}{2}\sigma\cdot\hat n\phi}$ ، exp یک اپراتور است. در حالتهای قبلی ما exp یک اپراتور باز کردیم چون که یک حالت پیچیده‌ای می‌شود ولی

در مورد اسپین ۱/۲ ساده می‌شود و علت آن هم این است که $(\sigma\cdot\hat n)^2=1$ است

چون $(\sigma\cdot n)^2=1$ $\longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}(\sigma\cdot\hat n)^{2K}=1\\ (\sigma\cdot\hat n)^{2K+1}=\sigma\cdot\hat n\end{array}\right.$ $\ast$

برای حالت زوج، اپراتور واحد را می‌گذاریم و

برای حالت فرد، $\sigma\cdot\hat n$ می‌گذاریم بنابراین در جمله بسط تیلور که به صورت زیر می‌شود:

$$\Rightarrow D(\hat n,\varphi)=\boxed{1\cos\frac{\varphi}{2}-i\sigma\cdot\hat n\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow D(\hat n,\varphi)=\begin{pmatrix}\overbrace{\cos\frac{\varphi}{2}-in_z\sin\frac{\varphi}{2}}^{a} & \overbrace{(-in_x-n_y)\sin\frac{\varphi}{2}}^{b}\\ \underbrace{(-in_x+n_y)\sin\frac{\varphi}{2}}_{-b^*} & \underbrace{\cos\frac{\varphi}{2}+in_z\sin\frac{\varphi}{2}}_{a^*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{pmatrix}$$

بنابراین عملگر دوران در حالت اسپین ۱/۲ را یک ماتریس مشخص می‌شود که در بالا نوشتیم، کافی است امتداد دوران و زاویه دوران را بدهند در این صورت عملگر دوران یک ماتریس ۲×۲ بدست می‌آید

$$\boxed{\det D=aa^*+bb^*\overset{\text{اگر حساب کنیم}}{=}1}$$

خصوصیت دیگری که این ماتریس دارد این است که اگر دوران به اندازه 2π را نگاه کنیم:

$$D(\hat n,2\pi)=1\cos\pi-i\sigma\cdot n\sin\pi=-1$$ یعنی همان ۱- ای که ما از عملگر بدست آوردیم

از فرم صریح این ماتریس هم بدست می‌آید.

$$\vec S\cdot\hat n|S\cdot\hat n,+\rangle=\frac{\hbar}{2}|S\cdot\hat n,+\rangle \quad (1)$$ ★ فرض کنیم سؤال می‌شود که اگر رابطه مقابل را داشته باشیم:

این موضوع چیست؟

$$|S\cdot\hat n,+\rangle=?=\overset{?}{C_+}|+\rangle+\overset{?}{C_-}|-\rangle$$

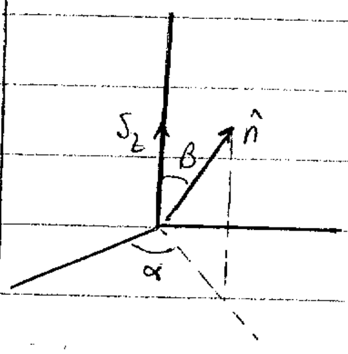
اگر بخواهیم بطور معمولی حل کنیم کار سختی نیست اگر رابطه (1) را به صورت ماتریسی بنویسیم می‌شود:

$$(1)\Rightarrow\vec\sigma\cdot\hat n\,\chi=\chi \qquad \chi=|S\cdot\hat n,+\rangle$$

بنابراین یک راه آن این است که ماتریس پائولی را تشکیل دهیم و $\hat n$ هم به صورت شکل ... بعد دست و از آن χ را ...

آوریم.

یک راه جالب‌تر این است که از مفهوم دوران استفاده کنیم



این کار را می‌کنیم و می‌گوییم ویژه حالت S_z را بلد هستیم که همان $|+\rangle$ است

هدف ما هم این است که $|S.\hat{n},+\rangle$ را به صورت ترکیبی از $|+\rangle$ و $|-\rangle$ بنویسیم

و یا χ را به صورت ترکیبی از χ_+ و χ_- بنویسیم:

$$\chi = C_+\chi_+ + C_-\chi_-$$

$$S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle$$

حالت $|+\rangle$ ویژه حالت S_z با ویژه مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ است

ولی ما ویژه حالت $\hat{n}.S$ را می‌خواهیم

می‌گوییم که اپراتور $\hat{n}.S$ را چطور می‌توانیم به S_z ربط کنیم و یا χ_+ چطور می‌توانیم به $|S.\hat{n},+\rangle$ ربط کنیم.

پس در حقیقت اگر بتوانیم امتداد z را به نحوی تبدیل به امتداد $\hat{n}$ کنیم، با این کار:

$$\hat{z} \to \hat{n} \Longrightarrow S_z \to S_n \quad , \quad |+\rangle \to |S.n,+\rangle$$

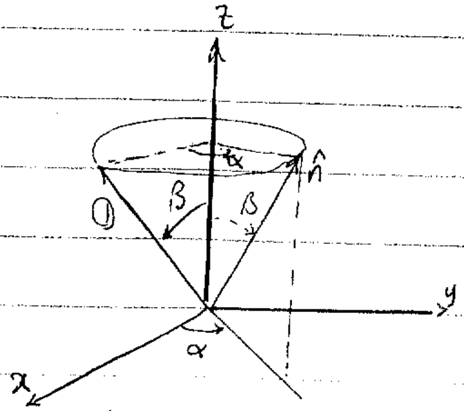
می‌خواهیم با یک دوران این کار را انجام دهیم

اپراتور دوران این کار را برای ما می‌کند وقتی روی هر حالتی اثر کند، حالت را برحسب سیستم دوران داده شده می‌دهد، حال باید ببینیم

چه دورانی روی حالت $|+\rangle$ بزنیم تا تبدیل شود به $|S.\hat{n}\rangle$

$$\begin{cases} |\alpha\rangle_R = D(\hat{n},\varphi)|\alpha\rangle \\ D = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{n}\varphi} \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط این است}} |S.\hat{n},+\rangle = \overset{\text{عملگر}?}{O}|+\rangle$$

اگر این عملگر را بدست آوریم، مسئله حل است.



می‌گوییم اگر حالت χ_+ را حول y ها به اندازه β دوران دهیم

و بعد از آن حول محور z به اندازه α دوران دهیم، با این

کار امتداد $\hat{z}$ تبدیل به امتداد $\hat{n}$ می‌شود و بنابراین از روی χ_+،

χ بدست می‌آید.

$$\chi = e^{-i\sigma_z\alpha/2}\, e^{-i\sigma_y\beta/2}\, \chi_+$$

علت آن هم واضح است، اگر امتداد $\hat{z}$ را ابتدا حول محور y به اندازه β دوران دهیم به امتداد (1) می‌رسیم، بعد اگر آن را حول محور z به اندازه α دوران دهیم یعنی روی مخروط حرکت کنیم به $\hat{n}$ می‌رسیم. یعنی با دو دوران، یکی حول y به اندازه β و سپس حول z به اندازه α، امتداد $\hat{z}$ تبدیل به امتداد $\hat{n}$ می‌شود.

با استفاده از رابطه مقابل به نتیجه مورد نظر می‌رسیم:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} - in_z\sin\frac{\varphi}{2} & (-in_x - n_y)\sin\frac{\varphi}{2} \\ (-in_x + n_y)\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} + in_z\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

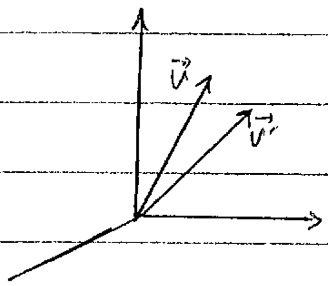
یک بار باید φ_+ بگذاریم و n_x و n_z را صفر بگذاریم و n_y را یک بگذاریم و یک بار هم φ بگذاریم، تبدیل به رابطه زیر می‌شود

$$\chi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & -e^{-i\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}\chi_+ = e^{-i\frac{\alpha}{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\alpha}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}\chi_+$$

$$\Rightarrow \chi = e^{-i\frac{\alpha}{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

پس این مثال کاربردی از دوران در یک جهت دلخواه و ترکیب آنهاست.

برای دوران گفتیم دو راهکار داشتیم که در اینجا دوباره آنها را مرور کنیم.



$\boxed{1}$ برای انجام دورانهای سه بعدی از ماتریس متعامد R استفاده می‌کنیم و برای تبدیل بردار v به بردار دوران یافته v' به وسیله ماتریس 3×3 R انجام می‌دهیم و برای اینکه طول بردار ثابت بماند این ماتریس باید متعامد است

$$V_i' = R_{ij}V_j$$

$\underbrace{R^TR}_{A} = 1$ ← ماتریس متعامد ۳×۳ با عناصر حقیقی

A ← یک ماتریس متقارن است یعنی $A^T = A$

اگر ماتریس A را با ۹ عضو در نظر بگیریم چون متقارن است ۳ تا اعضای آن حذف و ۶ عضو به دست می‌آید

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_6 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ این ۶ معادله با ۶ مجهول می‌دهد

بنابراین ماتریس ۳×۳ حقیقی دلخواه، ۹ عضو یا پارامتر دارد، عناصر R باید در ۶ معادله صدق کنند بنابراین از ۹ پارامتر تنها سه پارامتر مستقل باقی می‌ماند، بنابراین ماتریس‌های ۳×۳ متعامد ۳ پارامتری است یعنی با ۳ پارامتر می‌توان یک ماتریس ۳×۳ متعامد را مشخص کرد ولی از آن ۹ پارامتر، ۶ تای آنها وابسته می‌شوند

گفتیم ماتریس‌های ۳×۳ متعامد تشکیل یک گروه می‌دهند که چند خاصیت برای گروه وجود دارد یعنی:

حاصلضرب دو ماتریس متعامد یک ماتریس متعامد می‌شود:

1) $R_1R_2 = R_3$

شرط $R_1^TR = R_2^TR = 1 \Rightarrow R_3^TR_3 = 1$

عضو واحد وجود دارد:

2) $1R_1 = R_1 \xrightarrow{\text{چون}} 1^T1 = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

دلیل اینکه ماتریس واحد عضو این گروه است این است که ماتریس واحد متعامد است.

خصوصیت شرکت‌پذیری:
$3)\ (R_1R_2)R_3 = R_1(R_2R_3)$

این خصوصیت برای همهٔ ماتریس‌ها وجود دارد از جمله ماتریس‌های 3×3!

عضو معکوس وجود دارد.
$4)\ R^{-1}R = 1$

به دو شرط معکوس وجود دارد: ۱ ← اگر $R^TR = 1 \xrightarrow{\text{ترانهاده می‌گیریم}} (R^{-1})^T(R^{-1}) = 1$

پس معکوس یک ماتریس متعامد، خودش متعامد است

۲ ← معکوس هر ماتریس به شرطی وجود دارد که $\det R \neq 0$ باشد، پس حال سؤال این است که آیا دترمینان ماتریس‌های متعامد حتماً مخالف صفر است؟ جواب مثبت است:

$$R^TR = 1 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین دترمینان}} \det(R^TR) = \overset{\text{طرف چپ}}{\underbrace{\det R^T}_{\det R}\det R} = \underset{\text{طرف راست}}{\det 1} = 1$$

$$\Rightarrow (\det R)^2 = 1$$

بنابراین دترمینان ماتریس‌های متعامد یا ۱ است و یا ۱- این صفر نیست. بنابراین ماتریس‌های متعامد 3×3 یک گروه تشکیل می‌دهند که به گروه آنها $O(3)$ گفتیم.

$\boxed{2}$ در حالت دو بعدی عملگر دوران همچنین ماتریسی بود:

این ماتریس دارای عناصر حقیقی نیست
$$D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\sigma\cdot n\,\varphi} \longrightarrow D(\hat{n},\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

بنابراین ماهیت آن با ماتریس‌های 3×3 متعامد متفاوت است
$$\det D: |a|^2 + |b|^2 = 1$$

دوم اینکه اگر $D(\hat{n},\varphi) = U$ بنامیم، U یکانی است:
$$U^\dagger U = 1$$

در exp، با نشستن به هم نوشتیم است، به بعد نیّه
$$(e^A)^\dagger \xrightarrow{\text{تعریف}} e^{A^\dagger}$$

بنابراین دیگر U (یا D) هم‌شونده دیگر کران آن.

بنابراین D ماتریس 2×2 یکانی است با دترمینان ۱ است.

حال سؤال می‌کنیم که آیا ماتریس‌های 2×2 یکانی با دترمینان یک، تشکیل یک گروه می‌دهند؟

در بحث گروه $O(3)$ دیدیم که $O(3)$ یک گروه سه پارامتره است و در بحث دوران هم دیدیم که هر دوران را می‌توان با سه زاویه نشان داد (یا با ۳ پارامتر که دوتا امتداد دوران بود و یکی هم مقدار زاویه دوران بود)

قبل از اینکه نشان دهیم ماتریس‌های 2×2 یکانی گروه هستند ببینیم چند پارامتره هستند؟ این ماتریس مختلط دلخواه را در نظر بگیرید:

U دلخواه را می‌توانیم با ۸ پارامترشان دهیم چون هر کدام از عناصر ماتریس مزبور یک قسمت حقیقی و موهومی دارند.
$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

اول معکوس U را حساب می‌کنیم می‌شود:

$$\boxed{U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\det U}}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

* این رابطه چهار معادله می‌دهد — شرط گذاشتیم که یونیتاری است : $U^{\dagger} = U^{-1}$

* این رابطه هم یک معادله می‌دهد — شرط گذاشتیم که دترمینان ۱ باشد : $\det U = 1$

کلاً پنج معادله داریم و ۸ پارامتر، بنابراین U سه پارامتر مستقل دارد.

$$U^{\dagger} = U^{-1} \xrightarrow{\text{نتیجه می‌شود}} U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad , \quad \det U = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

حالا می‌توانیم هر ماتریس ۲×۲ یونیتاری را با این صورت نمایش دهیم:

$$U(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad , \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

در فرم قبلی هم که برای D بدست آورده بودیم که دارای همین دسته‌ها ثابت دقیقاً به همین شکل بود.

بنابراین U را می‌توان به صورت بالا با دو عدد مختلط نشان داد.

حال سؤال این است که آیا این ماتریس‌های ۲×۲ یونیتاری با دترمینان یک به شکل بالا تشکیل گروه می‌دهند؟

بنابراین شرطهای گروه بودن را چک می‌کنیم:

۱) حاصلضرب دو تا از اعضای گروه باید یک عضو گروه را بدهد: به این صورت می‌شود

$$1)\ U(a_1,b_1)\,U(a_2,b_2) = U(\underbrace{a_1a_2 - b_1b_2^*}_{a}, \underbrace{a_1b_2 + a_2^*b_1}_{b})$$

پس خاصیت اول را دارد — می‌توانیم ببینیم $\det U = \underbrace{\det U_1}_{1} \times \underbrace{\det U_2}_{1} = 1$

۲) عضو واحد ماتریس ۲×۲ واحد می‌باشد که خودش یونیتاری هم هست. پس در گروه ماتریس‌های ۲×۲ یونیتاری با دترمینان یک ماتریس واحد هم هست

$$1 \cdot U = U \quad \xrightarrow{\text{که}} \quad 1^{\dagger}1 = 1 \qquad 1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۳) شرکت‌پذیری: که این رابطه برای هر ماتریس دلخواه ۲×۲ برقرار است!

$$(U_1U_2)U_3 = U_1(U_2U_3)$$

۴) عضو معکوس: چون U یونیتاری است معکوس آن با [illegible] است

$$U^{-1}(a,b) = U^{\dagger}(a,b) \quad , \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \longrightarrow U^{\dagger} = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} = U(a^*, -b)$$

بنابراین معکوس آن هم از همان نوع است با مولفه‌های a^* و $-b$. بنابراین معکوس آن هم وجود دارد و از نوع ۲×۲ یونیتاری است.

** پس ماتریس های ۲×۲ یونیتاری با دترمینان یک تشکیل یک گروه می‌دهند که به این گروه SU(2) می‌گوییم.

ماتریس ها خاص هستند — یونیتاری — 2×2

special یعنی $\det U=1$

بنابراین دوران را می‌توان با گروه O(3) و SU(2) نشان داد.

حال ببینیم اختلاف و تشابه این دو چیست. اینها دو گروه متفاوت هستند و علامت اصلی تفاوت آنها اینجاست که در گروه SU(2) دوران 2π به این صورت نمایش داده می‌شود و دوران 4π هم به این صورت:

دوران 2π : $U_1=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ دوران 4π : $U_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

ولی در گروه O(3) دوران 2π و 4π در فضای سه بعدی معمولی هیچ فرقی ندارند و به این صورت هستند:

$$R_1=R_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

بنابراین گروه SU(2) مثل گروه O(3) نیست و به ازای یک عضو O(3)، دو عضو از SU(2) وجود دارد.

* به عنوان تمرین برای خودتان:

$U(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\-b^*&a^*\end{pmatrix}$, $|a|^2+|b|^2=1$ نظیر به نظیر قرار دادن $\begin{pmatrix}a&b\\-b^*&a^*\end{pmatrix}$ با $D(\hat n,\varphi)$، $\hat n$ و φ را بدست آورید.

پس به ازای هر عضو گروه SU(2) می‌توان یک دوران بدست آورد و می‌توان نشان داد (نشان دهیم):

* دو عضو $U(a,b)$ و $U(-a,-b)$ معرف یک عضو O(3) (یا یک دوران فضای سه بعدی) است.

بنابراین رابطه آنها ۲ به ۱ است.

حال ببینیم تشابه آنها چیست؟

اولین تشابه آنها به طور شهودی این است که با هر دو آنها می‌توان دوران را توضیح داد یعنی به ازای هر عضو SU(2) یا O(3) می‌توان یک $\hat n$ و φ می‌توان بدست آورد.

اگر بخواهیم یک مقدار دقیق‌تر و ریاضی‌تر بگوییم: یادمان هست که جبر هر گروه روابط جابجایی مولدهای آن گروه است.

گروه g : $g(\vec a)=e^{-iT\cdot\vec a}$ که $\vec a=(a_1,\dots,a_n)$ یک مجموعه n پارامتره

عضو الف

$T=(T_1,\dots,T_n)$ یک عملگر n تایی است

جبر گروه : $[T_i,T_j]=i f_{ijk}T_k$

ضرایب ساختار

هر دو گروه SU(2) و O(3) دارای جبر یکسانی هستند یعنی:

یعنی اگر J ها را برای O(3) بگیریم ضرایب ثابت‌ها ε_{ijk} است و بسته با هم هستند.

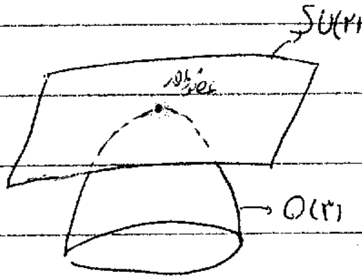
$$O(3): [J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$$

$$SU(2): [\sigma_i/2, \sigma_j/2] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \sigma_k/2$$

اگر $\sigma/2$ را برای SU(2) بگیریم آنها هم بسته هستند با ضرایب ساختار ε_{ijk}.

* بنابراین جبر SU(2) و O(3) یکی است ولی گروه‌ها متفاوت است

بطور شهودی اگر بخواهیم بگوییم، جبر گروه معرف خصوصیات گروه در اطراف نقطه واحد است. شبیه اگر بتوان به هر گروه یک فضا نسبت داد و گروه O(3) و SU(2) را این طور نشان دهیم

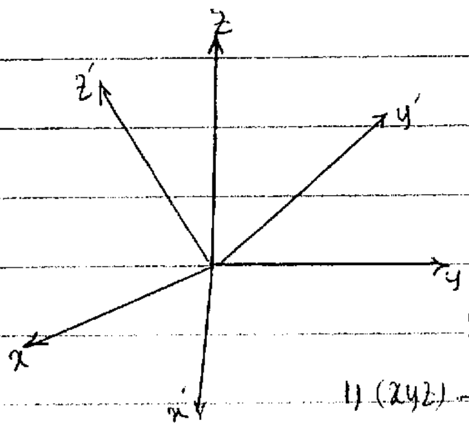


در اطراف عنصر واحد می‌توان جبر گروه را شبیه کرد و دور که بشویم از جبر گروه دور می‌شویم. وقتی می‌گوییم O(3) و SU(2) جبر گروه یکسان دارند طوری است که در ناحیه عنصر واحد هر دو مشترک هستند یعنی گروه SU(2) و O(3) در اطراف نقطه واحد خیلی شبیه هم هستند ولی دور که بشویم با هم اختلاف پیدا می‌کنند

* SU(2) و O(3) بطور موضعی (local) شبیه یکدیگر هستند ولی بطور عمومی (کلی) (global) مختلف هستند.

این خاطر هم است که توانستیم از دوران به SU(2) برسیم چون از دوران به رابطه مولدها رسیدیم، مولدها هم نمایش را تعیین می‌کنند وقتی نمایش دوبعدی را بررسی کردیم خصوصیت عجیبی ایجاد شد و دوران 2π شد -1 - اگر با ماتریس‌های اصلی دوران (زوایای اویلر) کار می‌کردیم حتی این اتفاق نمی‌افتاد.

نمایش دوران برحسب زوایای اویلر



دوران را می‌توان به دو صورت نشان داد و توصیف کرد.

یک دستگاه مختصات داریم و یک جسم که دوران یافته است در حالت اول دستگاه دوران می‌یابد بنابراین یک دستگاه xyz داریم و یک دستگاه جدید دوران یافته x'y'z' و ارتباط این دو دستگاه را می‌توان به دو صورت بیان:

1) $(xyz) \longrightarrow (x'y'z')$

$D(\hat{n},\varphi)$: می‌توان از این دستگاه به دستگاه دیگر رفت با تعیین امتداد دوران ($\hat{n}$) و زاویه دوران

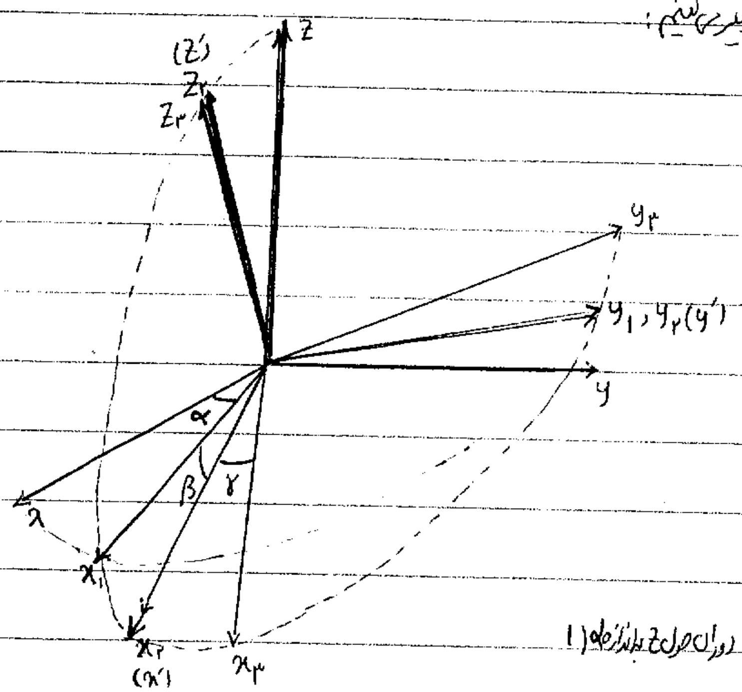
سه زاویه اویلر

۲) $D(\alpha,\beta,\gamma)$ ← با سه دوران حول محورهای خاص و مشخص

در قسمت (۱) امتداد مجهول است و علاوه بر آن زاویه مجهول وجود دارد. در قسمت (۲) محورهای مشخص هستند اما باز هم سه مجهول که سه زاویه می‌باشند وجود دارد.

$D(\hat n,\varphi)$ بیان نوع اول دوران است و $D(\alpha,\beta,\gamma)$ بیان نوع دوم دوران است

یک مروری بر این موضوع زاویه‌های اویلر می‌کنیم:



(سبز) $(x,y,z)\to(x_1,y_1,z_1)$: دوران حول z به اندازه α (۱

(آبی) $(x_1,y_1,z_1)\to(x_2,y_2,z_2)$: دوران حول y_1 به اندازه β (۲

(سیاه) $(x_2,y_2,z_2)\to(x_3,y_3,z_3)$: دوران حول z_2 به اندازه γ (۳

می‌توان نشان داد که با این سه دوران از دستگاه xyz به هر دستگاه دیگری می‌توان رفت. بنابراین هر دوران و هر وضعیت را به جای اینکه با یک امتداد و یک زاویه نشان دهیم می‌توانیم با سه زاویه نشان دهیم و این صورت می‌نویسیم:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{z'}(\gamma)\, R_{y'}(\beta)\, R_z(\alpha) \qquad (I)$$

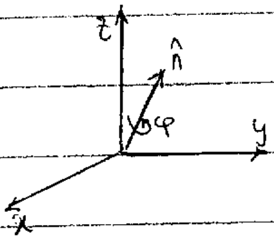
می‌خواهیم در مورد ماتریس‌های دوبعدی شکل ماتریسی $R(\alpha,\beta,\gamma)$ را بدست آوریم.

می‌دانیم که: $R(\hat n,\varphi) \doteq e^{-i\vec J\cdot\hat n\varphi/\hbar}$

در مورد نمایش دوبعدی: $R(\hat n,\varphi) \doteq e^{-i\vec\sigma\cdot\hat n\varphi/2} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$

اگر بتوانیم طرف راست معادله (I) را بصورت ماتریسی نمایش دهیم در آن صورت شکل ماتریسی $R(\alpha,\beta,\gamma)$ را بدست آورده‌ایم ولی روابط بالا یک عیب کوچک دارد و آن این است که این روابط مقدار دوران حول یک امتداد مشخص در فضا با یک زاویه را می‌دهد که این امتداد

نسبت به محورهای x، y و z تعریف شده است.



پس برای اینکه لزوم ماتریس R که در اول این جلسه داشتیم بتوانیم استفاده کنیم باید دوران‌ها را به صورت دوران حول یک امتداد مشخص در فضا نسبت به دستگاه ثابت و یک زاویه معرفی کنیم.

اولین دوران در رابطه (I) این طور هست یعنی می‌گوییم حول z به اندازه α ولی دو دوران دیگر به این صورت نیستند، زاویه را داریم ولی امتداد آن نسبت به امتداد xyz فضا نیست و باید $R_{y'}(\beta)$ و $R_{z'}(\alpha)$ را به شکلی به صورت مورد نظر تبدیل کنیم.

برای بدست آوردن رابطه مورد نظر این ادعا را می‌کنیم:

$$R_{y'}(\beta)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha) \qquad (II)$$

طرف راست دوران‌ها حول محورهای مشخص x و y و z هستند ولی سه دوران است.

به دو صورت می‌توان دید که رابطه (II) درست است:

می‌گوییم برای اینکه دوران دهیم اول یک $R_z^{-1}(\alpha)$ می‌زنیم یعنی حالت y' این طور می‌شود که دستگاه را حول z به اندازه α دوران داده‌ایم و رسیده‌ایم به دستگاه مورد نظر. پس دستگاه y' حاصل از دوران حول z به اندازه α است. می‌گوییم اول آن را می‌گردانیم سر جای اولش با $R_z^{-1}(\alpha)$ یعنی با این کار محور y' تبدیل به محور y می‌شود بعد می‌آییم به اندازه β دوران دهیم و در آخر دوباره سیستم را برگردانیم سر جای اولش.

برای اینکه ادعای ما (II) درست باشد این طور می‌نویسیم:

$$R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)=R_z(\alpha)R_y(\beta)$$

سمت راست می‌گوید که حول y به اندازه β دوران دهیم و بعد حول z به اندازه α دوران دهیم به همان دوران‌های سمت چپ می‌رسیم.

یک راه دقیق‌تر استفاده از خاصیت ماتریس‌ها است، دورانی که می‌دهیم یعنی در حقیقت پایه‌ها را عوض می‌کنیم و از پایه xyz به پایه جدید می‌رویم. حال سؤال این است که با تغییر پایه ماتریس‌ها چگونه تغییر می‌کنند، در فصل ۱ داشتیم که با تغییر پایه ماتریس‌ها به این صورت تغییر می‌کنند:

U و X و $U^\dagger$ و X' را این طور می‌گیریم:

$$X' = U^{\dagger} X U$$

$$R_{y'}(\beta) \qquad (R_z^{-1}(\alpha))^{-1} \qquad R_y(\beta) \qquad R_z^{-1}(\alpha)$$

$U^\dagger=U^{-1}$ چون یکانی

می‌خواهیم ارتباط بین $R_y(\beta)$ و $R_{y'}(\beta)$ را بدست آوریم، ارتباط بین y و y' از یک دوران حول z بدست می‌آید، پس این رابطه می‌گوید که اگر بخواهیم این دو را مرتبط کنیم باید ماتریسی که ما را از این پایه به آن پایه می‌برد را در دو طرف X قرار دهیم، پس فقط باید توضیح دهیم که چرا U را $R_z^{-1}(\alpha)$

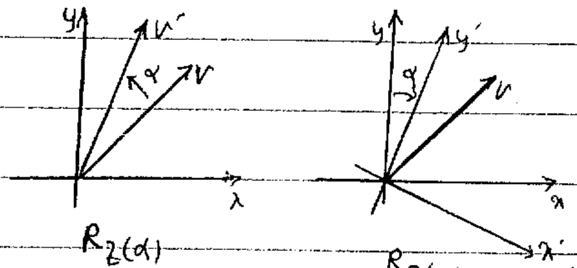
می‌گیریم:

U حالت‌ها را تغییر می‌دهد مثلاً برای $U=D$ حالت $|\alpha\rangle$ را به $|\alpha\rangle_R$ تبدیل می‌کند $|\alpha\rangle_R = D|\alpha\rangle$

U اپراتور تبدیل است که حالت‌ها را عوض می‌کند ولی در این جا ما حالت‌ها را عوض نکرده‌ایم بلکه دستگاه مختصات عوض کرده‌ایم و

به جای دوران بردار (تبدیل فعال)، دستگاه مختصات را دوران داده‌ایم (تبدیل منفعل)

ارتباط فعال و منفعل در یک منفی است.



$R_z(\alpha)$

$R_z(-\alpha) = R_z^{-1}(\alpha)$ } چون عکس دوران $R_z(\alpha)$ است

پس در مورد دوران‌های منفعل باید معکوس را استفاده کنیم

پس به دو صورت می‌توان نوشت که رابطه (II) درست است.

برای جمله سوم رابطه (I) هم همین کار را می‌کنیم

(I): $R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{z'}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha)$

(II): $R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha)$

(III): $R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) R_{y'}^{-1}(\beta)$

چون دوران حول z' به اندازه γ را باید ببینیم چطور z به z' تبدیل شده است که توسط دوران حول y' به اندازه β این تبدیل صورت گرفته است

$$\text{(III)},\text{(II)} \to \text{(I)} \Rightarrow R(\alpha,\beta,\gamma) = \underbrace{\left[R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) \underbrace{R_{y'}^{-1}(\beta)\right] R_{y'}(\beta)}_{1}}_{\text{همان } R_{z'}(\gamma) \text{ است}} R_z(\alpha)$$

$$\longrightarrow R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) R_z(\alpha) \overset{\text{II}}{=} \left[R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha)\right] R_z(\gamma) R_z(\alpha)$$

دوران‌های حول یک محور با هم جابجا می‌شوند پس:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) \underbrace{R_z^{-1}(\alpha) R_z(\alpha)}_{1} R_z(\gamma)$$

$$\longrightarrow \boxed{R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)} \quad (*)$$

به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$\boxed{D(\alpha,\beta,\gamma) = D_z(\alpha) D_y(\beta) D_z(\gamma)}$$

که بر حسب ماتریس‌های ۲×۲ پائولی:

$$D(\alpha,\beta,\gamma) \doteq e^{-i\sigma_3 \alpha/2} e^{-i\sigma_2 \beta/2} e^{-i\sigma_3 \gamma/2} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \text{ که } \begin{cases} a = e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos\beta/2 \\ b = -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin\beta/2 \end{cases}$$

جلسه بیست و دوم: ۸۴/۹/۲۰

عملگر چگالی:

تا به حال در مورد مکانیک کوانتمی تک ذره‌ای صحبت کردیم و عملاً صحبت از یک مجموعه که از حالتهای مختلف تشکیل شده نکردیم. اگر مجموعه‌ای از ذرات (آنسامبل) داشته باشیم به چه صورت مکانیک کوانتمی مربوطه خواهد بود؟

تا به حال در حالت یک سیستم مثل $|\alpha\rangle$ صحبت کردیم و در مورد تحول زمانی و مقدارهای چشمداشتی آن صحبت کردیم. ولی در مورد مجموعه‌ای از ذرات، معلوم نیست که همه ذرات در یک حالت باشند و انواع و اقسام حالتها ممکن است پیش آید و به صورت آماری می‌باشد. حال باید این مفاهیم را یک مقدار دقیق کنیم تا برای سیستم ذرات هم بکار آید.

به مجموعه‌ای از ذرات چون موجوداتی شبیه هم هستند اصطلاحاً آنسامبل می‌گوییم چون طبق تعریف آنسامبل مجموعه‌ای شامل n سیستم واحد است. حال می‌خواهیم آنسامبل های موجود را طبقه‌بندی کنیم.

فرض کنیم جعبه‌ای داریم که در آن تعداد زیادی ذره است، فرض کنیم ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ باشند، حالت هرکدام از این ذرات می‌تواند فرم های مختلفی داشته باشد مثل:

- تمام ذرات در یک حالت اسپینی باشند (ساده‌ترین فرض)، مثلاً همه در حالت $|+\rangle$ یا $|S_x,+\rangle$ و یا به طور کلی در حالت $|\alpha\rangle$ باشند (حالت پلاریزه)
- ذرات توزیع کاملاً کاتره‌ای (random) داشته باشند (حالت کاملاً غیرپلاریزه) مثلاً $\begin{cases} 50\% & |+\rangle \\ 50\% & |-\rangle \end{cases}$
- حالت های بینابینی هم وجود دارد که نه بی‌نظم بی‌نظم باشند و نه کاملاً منظم و آن این است که ترکیب مشخصی از حالت $|+\rangle$ و $|-\rangle$ باشند مثلاً $\begin{cases} 20\% & |+\rangle \\ 80\% & |-\rangle \end{cases}$ به این حالت اصطلاحاً partialy polarized می‌گوییم

در حالت کلی به همه این حالت ها mixed ensemble (آنسامبل مخلوط) می‌گوییم. آنسامبل مخلوط یک طیفی دارد که به این صورت است:

نوع اول ← کاملاً پلاریزه pure ensemble polarized

mixed ensemble ⋮ unpolarized

نوع دوم ← کاملاً نامنظم completely random ensemble

اگر بخواهیم به زبان ریاضی جمعیت نسبی (fractional population) تعریف کنیم که درصد حضور حالت $|\alpha_i\rangle$ در آنسامبل باشد اینکه چند درصد حالت $|\alpha_i\rangle$ در آنسامبل وجود دارد.

که به این صورت است:

$$\begin{array}{ll} w_1 & |\alpha_1\rangle \\ w_2 & |\alpha_2\rangle \\ \vdots & \vdots \end{array} \xrightarrow{\text{به طوری که}} \sum w_i = 1$$

بنابراین مشخص کردن هر آنسامبل با تعیین مجموعه $\{w_i, |\alpha_i\rangle\}$ ها انجام می‌شود.

تعداد این $|\alpha_i\rangle$ ها را باید بدانیم؟ مثلاً در مورد اسپین $\frac{1}{2}$ می‌تواند به این صورت باشد:

اسپین $\frac{1}{2}$ ، $|\alpha_i\rangle = |\vec{S}\cdot\hat{n}, +\rangle \Rightarrow$ یعنی به طور ویژه در جهت $\hat{n}$ ، که بی‌نهایت مقدار برای $\hat{n}$ وجود دارد.

بنابراین تعداد $|\alpha_i\rangle$ های ترکیب بسیار زیاد می‌باشد (در حد ∞ باشد) و ارتباطی با بعد فضای حالت سیستم ندارد، یعنی وقتی در مورد ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ صحبت می‌کنیم، بعد فضای حالت ۲ می‌باشد ($|\pm\rangle$)، ولی نکته این است که سیستم از ترکیب این ویژه حالتها ساخته می‌شود و چون می‌توانیم بی‌نهایت ترکیب بسازیم، بی‌نهایت حالت وجود دارد، پس تعداد $|\alpha_i\rangle$ ها ربطی به تعداد مثلاً $|\pm\rangle$ ها ندارد.

حال ببینیم کمیتهای مربوط به mixed ensemble را چطور در نظر می‌گیریم، مثلاً برای یک آنسامبل مخلوط $|S\cdot\hat{n}, +\rangle$ ها ببینیم میانگین آن و مقدار چشمداشتی ... را چطور حساب می‌کنیم.

میانگین آنسامبلی:

به ازای هر عملگر A ، میانگین آنسامبلی را این طور تعریف می‌کنیم که به ازای هر آنسامبل که با مجموعه $\{w_i, |\alpha_i\rangle\}$ توصیف می‌شود اگر سیستم در حالت $|\alpha_i\rangle$ باشد، مقدار چشمداشتی A میانگین آنسامبلی آن برابر است با:

$$[A] = \sum_i w_i \langle\alpha_i|A|\alpha_i\rangle$$

یعنی یک نوع میانگین گیری معمولی است که در ضمن آنسامبل بودن سیستم نیز لحاظ شده است، چون مقدار چشمداشتی آن هم به درصد مربوط شده است. $[A]$ را می‌توانیم برحسب ویژه حالتهای عملگر A :

$$[A] = \sum_i w_i \langle\alpha_i|A|\alpha_i\rangle = \sum_i w_i \sum_{a', a''} \langle\alpha_i|a'\rangle \underbrace{\langle a'|A|a''\rangle}_{a'\delta_{a'a''}} \langle a''|\alpha_i\rangle = \sum_{a'}\sum_i w_i a' |\langle\alpha_i|a'\rangle|^2$$

که همان تعبیر مقدار چشمداشتی است یعنی احتمال پیدا کردن حالت $|\alpha_i\rangle$ را در $|a'\rangle$ ضربدر مقدار a' می‌کنیم ست اما در اینجا احتمال اینکه اصولاً حالت $|\alpha_i\rangle$ هم باشد در نظر گرفته شده است، قبلاً این قسمت را وارد نمی‌کردیم چون سیستم یک حالت مشخص داشت اما در آنسامبل سیستم می‌تواند انواع و اقسام حالتها را داشته باشد.

اگر میانگین آنسامبلی را به جای اینکه برحسب ویژه حالتهای خود عملگر بنویسیم، برحسب ویژه حالتهای یک عملگر دیگر مثل B بنویسیم داریم:

$$[A] = \sum_i \sum_{b', b''} w_i \langle\alpha_i|b'\rangle\langle b'|A|b''\rangle\langle b''|\alpha_i\rangle$$

$$[A] = \sum_i \sum_{b'b''} w_i \langle \alpha_i | b' \rangle \langle b' | A | b'' \rangle \langle b'' | \alpha_i \rangle = \sum_{b'b''} \Big(\underbrace{\sum_i w_i \langle b'' | \alpha_i \rangle \langle \alpha_i | b' \rangle}_{} \Big) \langle b' | A | b'' \rangle$$

مستقل از عملگر A است و تنها تابعی از مشخصات آنسامبل است. بنابراین بهتر بگوییم مشخصه آنسامبل است و به این خاطر می‌توان آن را برای هر آنسامبل حساب کرد و هر عملگری که داشته باشیم عنصر ماتریسی آن را $\langle b'|A|b''\rangle$ را اضافه کنیم و $[A]$ را حساب کرد.

چیزی که در بالا زیر آن خط کشیده‌ایم عنصر $b''b'$ عملگری است که اسم آن را ρ می‌گذاریم و به آن عملگر چگالی می‌گوییم:

عملگر چگالی $\boxed{\rho = \sum w_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|}$

علت اینکه به آن عملگر چگالی می‌گوییم در ربط با تابع چگالی در مکانیک آماری می‌شود که بعداً توضیح می‌دهیم.

این عملگر را می‌توان به ازای هر آنسامبل پیدا کرد یعنی برای هر آنسامبل یک مجموعه $\{w_i\}$ آن را به ما بدهند می‌توان این عملگر را پیدا کرد.
با توجه به این عملگر میانگین آنسامبلی A می‌شود:

$$[A] = \sum_{b'b''} \langle b''|\rho|b'\rangle \underbrace{\langle b'|A|b''\rangle}_{1} = \sum_{b''} \langle b''|\rho A|b''\rangle = tr(\rho A)$$

یعنی عنصر $b''b''$ ماتریس عملگر ρA است که جمع روی b'' شده است یعنی می‌شود $tr(\rho A)$. بنابراین نتیجه خیلی مهمی به دست می‌آید که میانگین آنسامبلی هر عملگری به این صورت محاسبه می‌شود که عملگر چگالی آن آنسامبل را ضرب در عملگر در هم کنیم و trace آن را حساب کنیم و می‌دانیم که trace مستقل از نمایش است و در هر پایه‌ای می‌توانیم آن را حساب کنیم.

$$\boxed{[A] = tr(\rho A)}$$

خصوصیات عملگر چگالی (ρ):

$$(|\alpha\rangle\langle\beta|)^\dagger = |\beta\rangle\langle\alpha|$$

$$\rho^\dagger = \sum_i \underset{\text{در صورت حقیقی}}{w_i^*} |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = \sum w_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = \rho \implies \boxed{\rho = \rho^\dagger}$$ هرمیتی است

نسبت به عملگرهای کامل نمایش b'

داریم

$$tr\rho = \sum_{b'} \langle b'|\rho|b'\rangle = \sum_i w_i \sum_{b'} \underbrace{\langle b'|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|b'\rangle}_{\sum_{b'} \langle\alpha_i|b'\rangle\langle b'|\alpha_i\rangle = \langle\alpha_i|\alpha_i\rangle = 1} = \sum_i w_i = 1$$

$$\implies \boxed{tr\rho = 1}$$

مثال: در مورد ذرات اسپین ½: عملگر ρ در پایه $|\pm\rangle$ یک ماتریس 2×2 می‌شود چون b'ها در اینجا $|\pm\rangle$ هستند. این نمایش ماتریسی عملگر ρ هر آنسامبلی که از آن آنسامبل ذرات اسپین ½ با هر توزیعی که باشند، فقط با یک ماتریس 2×2 نشان داده می‌شود.

در حالت کلی

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

عناصر این ماتریس در حالت کلی ۸ پارامتر دارد (چون هر عنصر می‌تواند مختلط باشد) این ظاهراً با ۸ عدد هر آنسامبل

اسپین ½ را می‌توان نشان داد ولی ρ باید در دو شرطی که گفتیم صدق کند

باید حقیقی باشد

$$\begin{matrix} \rho^{\dagger}=\rho \\ tr(\rho)=1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{اعمال کنیم}} \rho=\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12}^{*} & 1-\rho_{11} \end{pmatrix}$$

این ρ یک مجموعه سه پارامتری است چون ρ_{11} حقیقی است (یک پارامتر) و ρ_{12} مختلط است (دو پارامتر)

پس با سه پارامتر (عدد) می‌توان هر آنسامبل اسپین ½ را نشان داد و این اعداد را می‌توان به مقدار انتظاری آنسامبلی مربوط کرد یعنی

اگر بیاییم مقدار انتظاری آنسامبلی S_x را برای یک آنسامبل دلخواه حساب کنیم طبق تعریف می‌شود: (در رابطه ۱۴)

$$[S_x]=tr(\rho S_x)=tr\left[\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12}^{*} & 1-\rho_{11} \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]=\hbar\,\underbrace{Re(\rho_{12})}_{\frac{1}{2}(\rho_{12}+\rho_{12}^{*})}$$

اگر همین کار را برای S_y انجام دهیم می‌شود:

$$[S_y]=tr(\rho S_y)=-\hbar\,Im(\rho_{12})$$

برای S_z هم می‌شود:

$$[S_z]=\hbar(\rho_{11}-\tfrac{1}{2})$$

بنابراین می‌توان ρ را برحسب میانگین‌ها برحسب $[S_x]$ و $[S_y]$ و $[S_z]$ نوشت:

$$\rho=\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12}^{*} & 1-\rho_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\hbar}[S_z]+\frac{1}{2} & \frac{1}{\hbar}\{[S_x]-i[S_y]\} \\ \frac{1}{\hbar}\{[S_x]+i[S_y]\} & -\frac{1}{\hbar}[S_z]+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

پس با این زبان نگاه کنیم هر آنسامبل اسپین ½ را می‌توانیم با دانستن میانگین S_x و S_y و S_z بیان کنیم.

نکته جالب این است ماتریس چگالی ρ با سه عدد (سه میانگین‌ها) معین می‌شود ولی یک آنسامبل با مجموعه $\{w_i\}$ ها

هم تعیین می‌شود که می‌گوید چند درصد از چه حالتهایی تشکیل شده است که تعداد حالتها بی‌نهایت هم باشد

پس یک نتیجه می‌توان گرفت که تعداد زیادی از آنسامبل‌ها هستند که با یک ρ نشان داده می‌شوند چون مجموعه ρ خیلی کوچک و

سه پارامتره است، یعنی:

$\{w_i\}$ $\{w_i'\}$ ...

$\square$ $\square$ $\square$ $\square$ .. $\longrightarrow$ همه با یک ρ نشان داده می‌شوند

چون با اینکه $\{w_i\}$ ها متفاوتند ولی میانگین S_x و S_y و S_z آنها یکی است و همین کافی

است و از جهت کوانتومی تفاوتی بین آنها نیست.

قبل از اینکه مثالها را ذکر کنیم، همین شکلی که برای ρ نوشتیم را در مورد آنسامبل خالص (Pure ensemble) ، به این صورت می‌شود

$$w_i=\delta_{in} \longrightarrow \rho=|\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$$ عنصر ρ برای آنسامبل‌های خالص

در مورد آنسامبل خالص، علاوه بر دو خاصیت هرمیتی بودن ρ ($\rho^\dagger=\rho$) و $tr(\rho)=1$ یک خاصیت دیگر هم وجود دارد:

$$\rho^2 = |\alpha_n\rangle\underbrace{\langle\alpha_n|\alpha_n\rangle}_{1}\langle\alpha_n| = \rho$$

بنابراین برای آنسامبل خالص ρ^2 برابر با ρ می‌شود.

بنابراین اگر ویژه‌کت‌های ρ را با $|\rho'\rangle$ نشان دهیم:

$$\rho|\rho'\rangle=\rho'|\rho'\rangle$$

در آن صورت چون برای آنسامبل خالص: $\rho^2-\rho=0 \rightarrow (\rho^2-\rho)|\rho'\rangle=0 \xRightarrow{\text{تأثیر دهیم}} (\rho'^2-\rho')\underbrace{|\rho'\rangle}_{\text{حتماً که صفر نیستند}}=0$

پس: $\rho'^2-\rho'=0 \rightarrow \rho'(\rho'-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\rho'=0\\ \rho'=1\end{cases}$ در مورد آنسامبل خالص

بنابراین اگر ماتریس ρ را در پایه ویژه‌کت‌های خودش بنویسیم، چون در پایه ویژه‌کت‌های خودش نوشته شده پس قطری است، عناصر روی قطر هم ویژه‌مقادیر ρ هستند که برای آنسامبل خالص صفر و یک هستند، در ضمن این خاصیت را هم داریم که $tr(\rho)=1$ است، پس همه عناصر قطری صفر هستند جز یکی که آن هم یک است.

پس ماتریس ρ برای آنسامبل خالص به این صورت می‌شود:

شکل ماتریسی

$$\underset{\text{در پایه } |\rho'\rangle}{\rho \doteq} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

محل 1 جایی است که ρ در آن جهت وجود دارد.

شکل عملگری ρ: $\rho=|\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$

عنصر $n\times n$ برای $\rho=|\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$ است.

می‌خواهیم ببینیم آیا می‌شود از روی عملگر شکل ماتریسی ρ را به دست آورد؟

هر صورت $|\alpha\rangle$ و $\langle\alpha|$ به این صورت نمایش می‌دهیم:

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix}\langle b_1|\alpha\rangle\\ \langle b_2|\alpha\rangle\\ \vdots\end{pmatrix} \quad , \quad \langle\alpha| \doteq \left(\langle b_1|\alpha\rangle^* \ \ \langle b_2|\alpha\rangle^* \ \cdots\right)$$

بنابراین صورت $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ را به این صورت نمایش ماتریسی می‌دهیم:

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| \doteq \begin{pmatrix}\langle b_1|\alpha\rangle\\ \langle b_2|\alpha\rangle\\ \vdots\end{pmatrix} \underset{\text{هر عنصر را در کل رابطه ضرب می‌کنیم}}{\overset{\text{ضرب تانسوری (خارجی)}}{\otimes}} \left(\langle b_1|\alpha\rangle^* \ \ \langle b_2|\alpha\rangle^* \ \cdots\right)$$

در مورد آنسامبل‌های خالص فقط یک جمله وجود دارد، ولی برای آنسامبل‌های ناخالص ترکیبی از حالت‌ها بیش از یک جمله وجود دارد.

مثال ۱:

یک آنسامبل خالص در حالت $|+\rangle$ در نظر بگیریم، ρ چگونه است؟

$$\rho=|\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$$

$$\rho = |+\rangle\langle+| \doteq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes(1\ \ 0) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

مثال ۲:

آنسامبل خالص در حالت $|S_x,+\rangle$، ρ؟

$$\rho = |S_x,+\rangle\langle S_x,+| \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{I}$$

اگر برحسب حالت‌های $|S_x,\pm\rangle$ بنویسیم ρ قطری می‌شود اما ما در اینجا برحسب $|\pm\rangle$ بسط داریم

اگر حالت $|S_x,-\rangle$ باشد می‌شود:

$$\rho = |S_x,-\rangle\langle S_x,-| \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{II}$$

مثال ۳:

یک آنسامبل کاملاً کاتوره‌ای در نظر بگیرید (یعنی تصادفاً اسپین در هر جهتی ممکن باشد) پس خواهیم:

$[S_x] = [S_y] = [S_z] = 0 \longrightarrow$ چون کاملاً رندوم است

بنابراین داشتیم: $\rho \doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{\hbar}\cancel{[S_z]} + \frac{1}{2} & \frac{1}{\hbar}\{\cancel{[S_x]} - i\cancel{[S_y]}\} \\ \frac{1}{\hbar}\{\cancel{[S_x]} + i\cancel{[S_y]}\} & -\frac{1}{\hbar}[S_z] + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \text{III}$

حال سؤال می‌کنیم که این آنسامبل کاملاً رندوم که با ρ بالا نمایش داده می‌شود، از چه توزیعی از انسامبل‌های خالص به دست می‌آید؟ ثابت داشتیم که ρ منحصر به فرد است ولی برای آن انواع و اقسام از انسامبل‌ها می‌توانند مربوط باشند.

توزیع‌های متفاوتی که به همین ρ منجر می‌گردند:

۱) $|\alpha_1\rangle = |S_x,+\rangle$ بگیریم با نسبت $\frac{1}{2}$، $w_1 = \frac{1}{2}$ و $|\alpha_2\rangle = |S_x,-\rangle$ با نسبت $\frac{1}{2}$، $w_2 = \frac{1}{2}$

$$\rho = \frac{1}{2}|S_x,+\rangle\langle S_x,+| + \frac{1}{2}|S_x,-\rangle\langle S_x,-| \underset{\text{I},\,\text{II}}{\doteq} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \text{III}$$

۲) $|\alpha_1\rangle = |+\rangle$، $w_1 = \frac{1}{2}$ و $|\alpha_2\rangle = |-\rangle$ و $w_2 = \frac{1}{2}$

$$\rho = \frac{1}{2}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle -| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \text{III}$$

بنابراین به روش‌های مختلف می‌توان توزیع را داشت که به یک ρ منجر شود.

دو سؤال باید جواب داده شود: ۱) تحول زمانی ρ چیست؟ برای سیستم‌هایی که با زمان متحول می‌شوند؟ ۲) چه ارتباطی با مکانیک آماری دارد؟

بحث تحول زمانی:

ρ را به صورت مقابل می‌گیریم و $\rho = \sum w_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$

می‌خواهیم ببینیم که $\rho(t)$ چقدر می‌شود $\rho(t) = \sum w_i |\alpha_i, t\rangle\langle\alpha_i, t|$

یعنی سیستم در زمان صفر با یک توزیع (w_i) شروع شده است، توزیع عوض نمی‌شود ولی حالت‌ها تحول پیدا می‌کنند. بنابراین تمام اعضای سیستم متحول می‌شوند. $\frac{d}{dt}$ که می‌گیریم یک بار روی $|\alpha, t\rangle$ می‌افتد یک بار روی $\langle\alpha, t|$، پس می‌شود:

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = \sum w_i \Big[\underbrace{\left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha_i, t\rangle \right\}}_{H|\alpha_i, t\rangle} \langle\alpha_i, t| + |\alpha_i, t\rangle \underbrace{\left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha_i, t| \right\}}_{-\langle\alpha_i, t|H} \Big]$$

$$\left.\begin{array}{l} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = H|\alpha\rangle \\ \downarrow \text{الحاق} \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha| = \langle\alpha|H^{\dagger} = \langle\alpha|H \end{array}\right\}$$

پس می‌شود $\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = H\underbrace{\sum w_i |\alpha_i, t\rangle\langle\alpha_i, t|}_{\rho} - \underbrace{\sum w_i |\alpha_i, t\rangle\langle\alpha_i, t|}_{\rho}H = H\rho - \rho H$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H, \rho]} \quad \text{I}$$

شبیه معادله هایزنبرگ به دست آمد ولی نسبتاً هم طبیعی بود یعنی هر عملگر سیستمی که تحول زمانی داشته باشد باید از فرمول هایزنبرگ تبعیت کند، که ρ را هم همین طور است. شبیه این رابطه را در مکانیک آماری داریم، که آن را از این می‌گیریم:

رابطه با مکانیک آماری:

قضیه لیوویل در مکانیک آماری کلاسیک:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H, \rho]_{P.B.}} \quad \text{II}$$

جلوتر می‌گوییم ρ چیست!

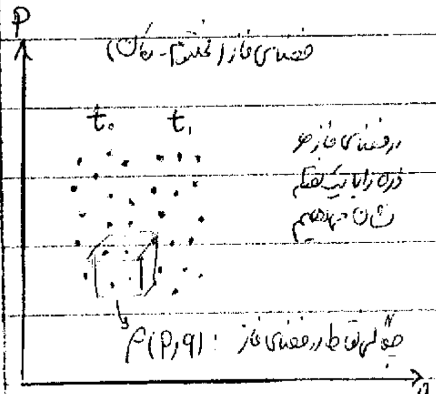
رابطه I و II را با هم مقایسه کنیم و در حقیقت رابطه I شکل کوانتمی قضیه لیوویل است.

سمت راست: $cl. \rightarrow q.$

$$[\ ,\ ]_{P.B.} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$$

حال ببینیم قضیه لیوویل در مورد چه چیزی صحبت می‌کند:

مکانیک آماری یعنی سیستم هایی که در آن تعداد ذرات آنقدر زیاد هستند که نمی‌توانیم پیش‌بینی دقیق کنیم و باید به صورت آماری بررسی کنیم. مکانیک آماری کلاسیک یعنی سیستم کلاسیک است و می‌توان از منظر در حرکت آن در زمان صحبت کرد.



اگر سیستم N ذره‌ای داشته باشیم

$$\left\{\begin{array}{ll} q_1, \ldots, q_{3N} & \text{۳N تا مکان} \\ p_1, \ldots, p_{3N} & \text{۳N تا تکانه} \end{array}\right.$$

پس برای سیستم N ذره‌ای، 3N تا مکان و 3N تا تکانه داریم، بنابراین یک فضای فاز 6N بعدی داریم و تعیین نقطه در این فضای فاز یعنی تعیین تکلیف همه N تا ذره (مکان و سرعت آنها)

در چارچوب مکانیک آماری از مفهوم آنسامبل استفاده می‌شود یعنی تعداد زیادی سیستم مشابه در نظر می‌گیرند و برای بررسی یک حالت بدترینهای مختلف، N حالت را در یک زمان مطالعه می‌کنند (معادل هستند) که به این کار نظریه آنسامبل می‌گویند.

پس به ازای هر عضوی از آنسامبل یک نقطه در فضای فاز مربوط به آن داریم. این اعضا در زمان شروع به تحول می‌کنند یعنی مانند شکل مثلاً کل سیستم در زمان t_0 به یک شکل است و در زمان t به یک شکل دیگر.

در اطراف هر نقطه‌ای تعداد نقاط در واحد حجم را با ρ نشان می‌دهیم که تابعی از p و q است که ρ چگالی نقاط در فضای فاز است که می‌گوید که در اطراف هر نقطه چند عضو وجود دارد که البته سیستم تحول می‌شود و این تعداد هم تحول می‌شود.

* یک قضیه به نام قضیه لیوویل وجود دارد که تکلیف تغییرات زمانی چگالی نقاط در فضای فاز را تعیین می‌کند.

چون رابطه (II) با شکل دیراک به رابطه (I) مربوط شده است، بنابراین به ρ در معادله (I) (کوانتمی) می‌گوییم عملگر چگالی.

در مکانیک آماری کوانتمی از $i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]$ استفاده می‌کنند.

حال که این ارتباط روشن شد، می‌خواهیم بحث را دقیق‌تر کنیم و ببینیم که از این ρ می‌توانیم به اطلاعات مشاهده‌شده دیگری از مکانیک آماری برسیم.

ρ را برای آنسامبل خالص به این صورت نمایش ماتریسی داریم:

$$\rho_{\text{خالص}} \doteq \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

در طرف دیگر ρ همیشه به این شکل است: (I) $\rho = \sum w_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$

در نمایش ماتریسی ρ اگر برحسب ویژه‌کت‌های عملگر نوشته شود قطری می‌شود. اگر ویژه‌کت‌های ρ را با $|\rho'\rangle$ نشان دهیم در این صورت:

$$\rho|\rho'\rangle = \rho'|\rho'\rangle \longrightarrow \rho = \sum_{K=1}^{N} \underbrace{\rho_{KK}}_{\text{جمعیت نسبی}} |\rho_K\rangle\langle\rho_K| \quad \text{(II)}$$

که ρ_{KK} ها eigen value های عملگر ρ هستند

$$\rho \doteq \begin{pmatrix} \rho_{11} & & 0 \\ & \rho_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \rho_{NN} \end{pmatrix}$$

که اگر بصورت ماتریسی نمایش دهیم بصورت ماتریس قطری خواهد شد.

آنسامبل خالص الزاماً قطری است، چونکه یکی از ρ_{KK} ها را بیشتر ندارد،

آنسامبل mixed قطری نیست چون ترکیبی از $|\alpha_i\rangle$ ها است ولی اگر برحسب ویژه‌کت‌های عملگر ρ نوشته شود قطری می‌شود.

اگر روابط (I) و (II) را با هم مقایسه کنیم، می‌بینیم که یکی از راه‌های نمایش حالت‌های یک آنسامبل به جای استفاده از دسته حالت‌های $|\alpha_i\rangle$ استفاده از دسته حالت‌های $|\rho_K\rangle$ است، یعنی می‌توان گفت که آنسامبل مورد نظر چند درصد در حالت $|\rho_1\rangle$ هستند و چند درصد در $|\rho_2\rangle$ و ... بنابراین رابطه (II) یک جور بیان حالت‌های یک آنسامبل برحسب ویژه‌حالت‌های عملگر ρ، بنابراین ρ_{KK} ها جمعیت نسبی را نشان می‌دهند!

و بنابراین ρ_{KK} ها مثبت هستند چون معرف احتمالات هستند، بنابراین ρ را برحسب ویژه‌کت‌های خودش بنویسیم یک نمایش ماتریسی برای هر حالت mixed ensemble مثبت داریم که عناصر آن مثبت است. همچنین با شرط زیر هم را داشتیم:

$$tr(\rho)=1 \xrightarrow[\text{بنابراین}]{} \boxed{\sum_K \rho_{KK}=1}$$

چون ρ_{KK} ها یک سری اعداد مثبت هستند که جمعشان یک است پس باید هر کدام از آنها کوچکتر از یک باشند پس: $\boxed{0 \leqslant \rho_{KK} \leqslant 1}$

برای آنسامبل خالص ρ_{KK} ها صفر و یک هستند

برای آنسامبل کاملاً کاتره‌ای سیستم (آنسامبل) باید در تمام حالتهای ممکن با احتمال یکسان یافت شود، چنین حالتی رندوم است.

$$\rho_{\text{completely random}} \doteq \begin{pmatrix} \alpha & & & 0 \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{و چون} \; \sum_1^N \alpha_i = 1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{N}$$

اگر برحسب ویژه‌کت‌های عملگر ρ باشد قطری می‌شود

همه α ها برابرند

پس در حالت کاملاً کاتره‌ای ρ_{KK} ها $\frac{1}{N}$ هستند اگر N تا state داشته باشیم و در حالت خالص همه صفر هستند و فقط یکی برابر یک است

پس می‌توانیم یک کمیت به صورت مقابل تعریف کنیم:

$$\sigma = -tr(\rho \ln \rho)$$

می‌خواهیم ببینیم این کمیت چیست؟

اولاً چون trace است پس مستقل از نمایش است و می‌توانیم آن را در پایه $|\rho_K\rangle$ ها بنویسیم:

$$\sigma = -tr(\rho \ln\rho) = -\sum_K \langle \rho_K | \underbrace{\rho}_{\rho_{KK}} \underbrace{\ln\rho | \rho_K\rangle}_{\ln\rho_{KK}} = -\sum \rho_{KK}\ln\rho_{KK}$$

چون برای هر آنسامبل دلخواهی $0 \leqslant \rho_{KK} \leqslant 1$ است پس $\ln\rho_{KK} \leqslant 0$ است پس $\sigma \geqslant 0$ است.

σ برای آنسامبل‌های خالص یک خصوصیت جالب دارد:

$$\sigma_{\text{Pure-ensemble}} = -\sum \rho_{KK}\ln\rho_{KK} = -\sum 0 \times \ln 0 - 1\times \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \qquad x=e^{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{\text{Pure-ensemble}} = 0}$$

برای آنسامبل‌های کاملاً کاتره‌ای می‌شود:

$\rho_{KK}=\frac{1}{N}$

N تا از این عبارت را جمع کنیم

تعداد حالتهاست

$$\sigma_{\text{Comp. random}} = -\sum_{K=1}^{N} \frac{1}{N}\ln\frac{1}{N} = -\ln\frac{1}{N} = \ln N \qquad \boxed{\sigma_{\text{Comp. random}} = \ln N}$$

اگر یک مقدار با مکانیک آماری آشنا باشیم، می‌بینیم که اگر یک K ثابت بولتزمن را به σ اضافه کنیم (ضرب)، $K\sigma$ ما را یاد $K\ln\Omega$ می‌اندازد.

$$\sigma_{c.r.} = \ln N$$

$$K\ln N \longrightarrow K\ln\Omega$$

بنابراین $S = K\sigma$ در حقیقت آنتروپی سیستم است و در حقیقت σ به نوعی معرف بی‌نظمی است

$$\underset{\text{آنتروپی}}{S} = \underset{\text{ثابت بولتزمن}}{K}\,\sigma$$

بنابراین ρ کمیت مهمی است و مستقیماً با مکانیک آماری ارتباط دارد و $tr(\rho\ln\rho)$ هم آنتروپی است.

در فیزیک می‌دانیم که سیستم در حالت تعادل به سمتی می‌رود که آنتروپی ماکزیمم شود. می‌بینیم ماکزیمم شدن آنتروپی به چه چیزی منجر می‌شود:

سیستم را آن سیستمی در نظر می‌گیریم که دارای انرژی میانگین U باشد، به عبارت دیگر:

$$[H] = tr(\rho H) = \overset{\text{ثابت}}{U} \quad \text{(I)}$$

این انرژی آن سیستم مشخص است که به آن آنسامبل کانونیک می‌گویند

فرض سیستم در حال تعادل است، بنابراین:

چون ρ با زمان عوض نمی‌شود.

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H,\rho] = 0$$

پس H و ρ جابجا می‌شوند پس H و ρ را می‌توان همزمان قطری کرد، بنابراین ویژه حالتهای مشترکی دارند و ویژه حالتهای ρ می‌شوند

یعنی:

$$\begin{cases} \rho|\alpha_K\rangle = \rho_{KK}|\alpha_K\rangle \\ H|\alpha_K\rangle = E_K|\alpha_K\rangle \end{cases}$$

و فرض می‌دانیم: $tr(\rho) = \sum \rho_{KK} = 1$

حال سؤال این است که می‌خواهیم ρ_{KK} را چنان بدست آوریم که σ ماکزیمم شود و سیستم در حالت تعادل باشد؟

$$\delta\sigma = 0 \longrightarrow \underset{\rho_{KK}\xrightarrow{\text{می‌نامیم}}\rho_K}{\delta\sigma} = -\sum(\delta\rho_K)\ln\rho_K - \sum\rho_K\cdot\frac{1}{\rho_K}\,\delta\rho_K \underset{\text{می‌خواهیم}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \delta\sigma = -\sum\delta\rho_K(1+\ln\rho_K) = 0 \quad \text{(II)} \xrightarrow[\text{یکدیگر باشند}]{\text{اگر } \rho_K \text{ ها مستقل از}} 1+\ln\rho_K = 0$$

ولی اینجا این طور نیست و قید وجود دارد و باید ρ_K ها در دو شرط صدق کنند و مستقل از هم نیستند:

$$\begin{cases} \sum\rho_K = 1 \xrightarrow{\text{وردش می‌گیریم}} (\gamma)\sum\delta\rho_K = 0 \quad \text{(III)} \\ \text{(I)} \Rightarrow \sum_K\rho_K E_K = U \xrightarrow{\text{ضریب نامعین}} (\beta)\sum(\delta\rho_K)E_K \overset{\delta U = 0}{=} 0 \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

پس دو قید در اینجا وجود دارد. روشی که در اینجا وجود دارد ضرایب نامعین لاگرانژ است بدین معنی که این قیدها را با دو ضریب نامعین وارد معادله اصلی می‌کنیم. در این صورت می‌توان متغیرها را مستقل فرض کنیم.

$$\text{(II)},\text{(III)},\text{(IV)} \Rightarrow \sum_K(\delta\rho_K)\left[1+\ln\rho_K+\gamma+\beta E_K\right] = 0$$

اصل ضرایب نامعین لاگرانژ این است که می‌دانیم ρ ها مستقل نیستند و وقتی آنها تابع بقیه هستند و سپس آنهم به عبارت دیگر بنویسیم تا تابع بقیه هستند دو ضریب β و γ وارد می‌کنیم و فرض می‌کنیم که دو وابسته را به قیمت وارد کردن دو ضریب حذف می‌کنیم و حالا فرض می‌کنیم که ρ ها مستقل هستند و β و γ را باید چنان تعیین کرد که این روابط صفر شود.

$$1 + \ln \rho_K + \gamma + \beta E_K = 0$$

$$\longrightarrow \rho_K = e^{-\beta E_K} \cdot e^{-(1+\gamma)}$$

قیدها

$$\begin{cases} \sum \rho_K = 1 \longrightarrow e^{-(1+\gamma)} \sum_K e^{-\beta E_K} = 1 \Rightarrow e^{-(1+\gamma)} = \dfrac{1}{\sum_K e^{-\beta E_K}} \Rightarrow \boxed{\rho_K = \dfrac{e^{-\beta E_K}}{\sum_K e^{-\beta E_K}}} \quad (1) \\ \boxed{\sum_K \rho_K E_K = U \longrightarrow \dfrac{\sum E_K e^{-\beta E_K}}{\sum e^{-\beta E_K}} = U} \quad (2) \end{cases}$$

اگر روابط ① و ② را با هم نگاه کنیم چیزی نیست جز تابع توزیع کانونیک.

بنابراین ارتباط عملگر ρ با کانونیک آماری مشخص شد. عناصر قطری عملگر ρ چیزی نیستند جز احتمال پیدا کردن سیستم در انرژی E و تابع توزیع کانونیک برای سیستمی که انرژی متوسط آن مشخص است باشد و β در حقیقت با استفاده از رابطه ② برابر می‌شود با $\beta = \frac{1}{KT}$.

جلسه بیست و دوم: ۸۴/۹/۲۲

امتحان پایان ترم ۸۴/۱۰/۲۵

مشابه حالت در مورد حالت دو بعدی اندازه حرکت زاویه‌ای یعنی در حقیقت اسپین را صحبت کردیم که S_x، S_y، S_z ماتریس‌هایی می‌شوند. حالا می‌خواهیم به طور کلی صحبت کنیم و نمایش هر اندازه حرکت زاویه‌ای را بررسی کنیم (منظورمان هم از اندازه حرکت زاویه‌ای اندازه حرکت زاویه‌ای دلخواه است یعنی صرف‌نظر از اینکه مداری یا اسپین باشد.)

نمایش‌های اندازه حرکت زاویه‌ای:

برای معین کردن تکلیف نمایش‌های ماتریسی، برای نمایش ماتریسی یک عملگر state را می‌گذاریم و وقتی اثر یک عملگر را روی یک state می‌شناسیم که ویژه‌حالت‌های آن state دستگاه پایه باشند. برای عملگر A باید ویژه‌کت‌ها و ویژه‌مقادیر عملگر A را بدانیم و به این صورت بنویسیم:

$$A_{\alpha\alpha'} = \langle \alpha | A | \alpha' \rangle = \sum_{a', a''} \langle \alpha | a' \rangle \langle a' | A | a'' \rangle \langle a'' | \alpha \rangle$$

بنابراین برای بدست آوردن نمایش‌های یک عملگر ابتدا باید ویژه‌کت‌های آن را بدست آوریم و بعد ویژه‌مقادیر آن را بدست آوریم. سپس با استفاده از ویژه‌کت‌ها و ویژه‌مقادیرش، نمایش ماتریسی را بدست آوریم.

پس باید برویم سراغ ویژه‌کت‌ها و ویژه‌مقادیر اندازه حرکت زاویه‌ای (عملگر J). داشتیم:

$$\vec{J} = \underbrace{\{J_1, J_2, J_3\}}_{\text{مولدهای دوران}} \xrightarrow{\text{لذا}} D(\hat{n}, \varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}\varphi}$$

برای گروه، گروه SU(2) و SO(3) گفتیم که این $\longleftarrow$ $[J_i, J_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk} J_k$: که J_iها ماتریس‌های این صورت هستند

دوران‌ها یک جبر هستند.

حال سؤالی که می‌خواهیم بکنیم این است که نمایش‌های گروه SU(2) چیست؟

با بیان دیگر می‌خواهیم ویژه‌کت‌ها و ویژه‌مقادیر عملگر J را بدست آوریم. برای این‌کار احتیاج داریم خصوصیت J را بررسی کنیم.

این طور می‌دانیم که:
عملگر کازیمیر

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_j J_j \qquad (1)$$

می‌دانیم: $[J^2, J_i] = 0$

اثبات: $[J_j J_j, J_i] = J_j \underbrace{[J_j, J_i]}_{\epsilon_{jik} J_k} + \underbrace{[J_j, J_i]}_{\epsilon_{jik} J_k} J_j = \epsilon_{jik} J_j J_k + \underbrace{\epsilon_{jik} J_k J_j}_{\substack{j \to k \\ \epsilon_{kij} J_j J_k \\ -\epsilon_{jik} J_j J_k}} = 0$

رابطه (1) یک ترکیب خاص از مولدهای گروه دوران است که این ترکیب خاص (J^2) با همه مولدها جابجا می‌شود و در جابجایی صفر می‌گردد. به آن عملگر کازیمیر می‌گویند. عملگر کازیمیر عملگری است که یک ترکیب خاص از مولدهای گروه است به گونه‌ای که با همه مولدها جابجا می‌شود. بدست آوردن عملگر کازیمیر برای هر گروه کار مهمی است؛ در مورد SU(2) آسان است اما در مورد گروه‌های دیگر ممکن است این طور نباشد و تعداد آن بیشتر از یکی باشد. در اینجا چون J^2 با J_iها جابجا می‌شود بنابراین هر تابعی از J^2 هم با J_iها جابجا می‌شود.

$$[f(J^2), J_i] = 0$$

بنابراین J^2 با همه مولفه‌ها جابجا می‌شود ولی خود مولفه‌ها با هم جابجا نمی‌شوند. بنابراین می‌توان ویژه‌کت‌های مشترک J^2 را با یکی از مولفه‌ها ساخت. دیگر نمی‌توان با دوتا از مولفه‌ها ساخت چون آنها با هم جابجا نمی‌شوند. مرسوم است که ویژه‌کت‌های مشترک J^2 و J_z را با هم بسازند و حداکثر عملگرهایی که در اندازه حرکت زاویه‌ای می‌توان ساخت که با هم جابجا می‌شوند، همین دو عملگر هستند.

پس می‌خواهیم ویژه‌کت مشترک در نظر بگیریم، پس $|a,b\rangle$ را در نظر می‌گیریم که دارای دو ویژه‌مقدار است که این طور رفتار می‌کند:

$$\begin{cases} J^2 |a,b\rangle = a|a,b\rangle \\ J_z |a,b\rangle = b|a,b\rangle \end{cases}$$

حال باید طیف a و b را بدست آوریم و ببینیم که چه مقادیری می‌گیرند. اگر بتوانیم این کار را کنیم، eigen state ها و eigen value های اندازه حرکت زاویه‌ای بدست می‌آید.

برای بدست آوردن a و b روش استانداردی است که دو عملگر به صورت مقابل تعریف می‌کنیم: $J_{\pm} = J_x \pm i J_y$ (2)

از طرفی می‌دانیم که J_i ها هرمیتی هستند یعنی: $J_i^{+} = J_i$ (3)

$$\text{پس} \overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} \boxed{J_+^{+} = J_-}$$

روابط جابجایی $J_{\pm}$:

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \qquad [J^2, J_{\pm}] = 0 \quad \text{چون } J^2 \text{ با همه } J_i \text{ ها}$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm} \qquad \text{جابجا می‌شود.}$$

فایده تعریف این دو عملگر $J_{\pm}$ در روابط بالا این است که اگر $J_{\pm}$ را روی $|a,b\rangle$ اثر دهیم یک state $|\alpha\rangle$ را می‌دهد که باید ببینیم چیست: برای این کار باید J^2 و J_z را روی آن اثر دهیم و ببینیم ویژه مقادیر آن چیست.

$$J_{\pm}|a,b\rangle = |\alpha_{\pm}\rangle$$

$$J^2|\alpha_{\pm}\rangle = J^2 J_{\pm}|a,b\rangle \overset{[J^2,J_{\pm}]=0}{=\!=\!=} J_{\pm}\underbrace{J^2|a,b\rangle}_{a|a,b\rangle} = aJ_{\pm}|a,b\rangle = a|\alpha_{\pm}\rangle$$

$$\Longrightarrow J^2|\alpha_{\pm}\rangle = a|\alpha_{\pm}\rangle$$

بنابراین ویژه مقدار $|\alpha_{\pm}\rangle$ برای عملگر J^2 با $|a,b\rangle$ فرقی نمی‌کند.

پس می‌توان فهمید که $|\alpha\rangle$ یک ترکیبی از $|a,b\rangle$ هاست که a آنها نباید عوض شود:

$$|\alpha_{\pm}\rangle = \sum_b C_b^{\pm}|a,b\rangle$$

برای معین کردن این ترکیب، J_z را روی $|\alpha_{\pm}\rangle$ اثر می‌دهیم:

$$J_z|\alpha_{\pm}\rangle = \underbrace{J_z J_{\pm}}_{\pm\hbar J_{\pm} + J_{\pm}J_z}|a,b\rangle = \pm\hbar J_{\pm}|a,b\rangle + bJ_{\pm}|a,b\rangle = (\pm\hbar + b)\underbrace{J_{\pm}|a,b\rangle}_{|\alpha_{\pm}\rangle}$$

بنابراین $|\alpha_+\rangle$ ویژه مقدار J_z، $b+\hbar$ است و برای $|\alpha_-\rangle$، $b-\hbar$ است، پس ترکیبی از state های مختلف نیست و یک state می‌باشد در حقیقت:

$$|\alpha_+\rangle = C_+|a, b+\hbar\rangle$$

$$|\alpha_-\rangle = C_-|a, b-\hbar\rangle$$

چون $J_{\pm}$ ها ویژه مقدار a را دست نمی‌زنند و ویژه مقدار b را به اندازه $\hbar$ تغییر می‌دهند، برای ما اهمیت دارند و اصطلاحاً به آنها عملگرهای بالابرنده و پایین برنده می‌گویند.

با استفاده از همین خصوصیات می‌خواهیم طیف a و b را بدست آوریم.

از روی شکل $J_\pm$ می‌توانیم J_x و J_y را بدست آوریم:

$$J_+ = J_x + iJ_y \qquad J_- = J_x - iJ_y \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

بنابراین: $(J^2 - J_z^2) = J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{2}(\underbrace{J_+}_{J_-^\dagger} J_- + \underbrace{J_-}_{J_+^\dagger} J_+)$

بنابراین اگر عملگر $J^2 - J_z^2$ را بین $|a,b\rangle$ بگذاریم:

$$\langle a,b|(J^2 - J_z^2)|a,b\rangle = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\underbrace{\langle a,b|J_-^\dagger}_{\equiv\langle\beta|}\ \underbrace{J_-|a,b\rangle}_{|\beta\rangle}}_{\langle\beta|\beta\rangle\geq 0} + \underbrace{\underbrace{\langle a,b|J_+^\dagger}_{\equiv\langle\gamma|}\ \underbrace{J_+|a,b\rangle}_{|\gamma\rangle}}_{\langle\gamma|\gamma\rangle\geq 0}\Big)$$

بنابراین: $\langle a,b|\underbrace{(J^2 - J_z^2)|a,b\rangle}_{(a-b^2)\langle a,b|a,b\rangle} \geq 0$, $\quad \langle a,b|a,b\rangle = 1 \longrightarrow \boxed{b^2 \leq a}$ (I)

a, b: مقادیر ویژه
$$\begin{cases} J^2|a,b\rangle = a|a,b\rangle \\ J_z|a,b\rangle = b|a,b\rangle \end{cases}$$

از طرف دیگر: $J_\pm|a,b\rangle = |\alpha_\pm\rangle = C_\pm|a,b\pm\hbar\rangle$

پس:

۱) به ازای یک a معین، همواره باید $b^2 \leq a$ باشد.

۲) از طرف دیگر با تأثیر متوالی J_+ روی $|a,b\rangle$ به ازای یک a معین، b افزایش می‌یابد و ممکن است به سرعت از ناحیه (I) خارج شود بنابراین لازم است که یک b_{max} وجود داشته باشد به گونه‌ای که:

$$\boxed{J_+|a,b_{max}\rangle = 0} \quad \text{(II)}$$

پس یک حد بالایی برای b وجود دارد که state مربوط به آن به صورت بالا رابطه دارد.

۳) از طرف دیگر با تأثیر متوالی J_-، b کاهش می‌یابد. چون این عدد منفی دائماً کوچک می‌شود پس از آن b^2 آن افزایش می‌یابد پس باید یک b_{min} وجود داشته باشد به گونه‌ای که:

$$\boxed{J_-|a,b_{min}\rangle = 0} \quad \text{(III)}$$

پس به ازای یک a معین، b یک محدوده‌ای دارد:

$$b_{min} \leq b \leq b_{max}$$

که b_{max} و b_{min} در رابطه (II) و (III) صدق می‌کنند.

حال می‌خواهیم ارتباط بین b_{max} و b_{min} را بدست آوریم:

$$J_-J_+ = (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) = \underbrace{J_x^2 + J_y^2}_{J^2 - J_z^2} - \hbar J_z$$

پس $\Rightarrow J_\mp J_\pm = J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z$

حال از این دو رابطه استفاده می‌کنیم: $J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$

چون $J_+|a, b_{max}\rangle = 0 \longrightarrow J_-J_+|a, b_{max}\rangle = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{(a - b_{max}^2 - \hbar b_{max})}_{=0}|a, b_{max}\rangle = 0$$

$|a, b_{max}\rangle$ که صفر نیست، پس باید:

$$\Rightarrow a = b_{max}^2 + \hbar b_{max} \qquad (1)$$

از طرف دیگر می‌توانیم بنویسیم: $J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$

چون $J_-|a, b_{min}\rangle = 0 \longrightarrow J_+J_-|a, b_{min}\rangle = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{(a - b_{min}^2 + \hbar b_{min})}_{=0}|a, b_{min}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow a = b_{min}^2 - \hbar b_{min} \qquad (2)$$

پس یک معادله درجه ۲ برای b_{min} بدست آمد: $(1),(2) \Rightarrow b_{max}^2 + \hbar b_{max} = b_{min}^2 - \hbar b_{min}$

$$\Rightarrow b_{min} = \begin{cases} b_{max} + \hbar \to \text{غیرقابل قبول} \Rightarrow \\ -b_{max} \end{cases}$$

چون باید b_{max} بزرگتر از b_{min} باشد

بنابراین: $\boxed{-b_{max} \le b \le b_{max}}$

اگر J_+ روی state ها مدام اثر دهیم و از پایین‌ترین state شروع کنیم: $|a, b_{min} = -b_{max}\rangle$

$J_+|b_{min}\rangle \longrightarrow |a, b_{min} + \hbar\rangle$

$J_+^2|b_{min}\rangle \longrightarrow |a, b_{min} + 2\hbar\rangle$

$\vdots$

$J_+^n|b_{min}\rangle \longrightarrow |a, b_{max}\rangle$

این موضوع نشان می‌دهد که اختلاف بین b_{max} و b_{min} یک مضرب صحیح از $\hbar$ است.

بنابراین:

$$b_{max} = \underbrace{b_{min}}_{-b_{max}} + \overset{\text{عدد صحیح و مثبت}}{n}\hbar \Longrightarrow b_{max} = \frac{n}{2}\hbar \longrightarrow j \equiv \frac{b_{max}}{\hbar} = \frac{n}{2}$$

عدد صحیح یا نیم صحیح مثبت است

ما این نتیجه را بطور ضمنی نشان دادیم ثابت کردیم و این نتیجه از خصوصیت جبر SU(2) بدست آمد. در نتیجه مقدار a چنین می‌شود:

$$a = b_{max}^2 + \hbar b_{max} = j^2\hbar^2 + j\hbar^2 = j(j+1)\hbar^2$$ پس

و j اعداد صحیح یا نیم صحیح مثبت

b از b_{max} شروع می‌شود و به اندازه $\hbar$ ها کم می‌شود، بنابراین مقادیر b برابر هستند با:

$$b = \{\underbrace{-j\hbar}_{-b_{max}=b_{min}}, \dots\dots, (j-1)\hbar, \underbrace{j\hbar}_{b_{max}}\}$$

برای راحتی به جای b با $\frac{b}{\hbar}$ کار کنیم که آن را m می‌نامیم:

$$m \equiv \frac{b}{\hbar} = \{-j, \dots, j\}$$

پس به جای $|a,b\rangle$، به جای a چون ویژه مقدار را تعیین می‌شود، j را می‌گذاریم و به جای b، m می‌گذاریم:

$$|a,b\rangle \longrightarrow |j,m\rangle$$

$$J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle$$ اعداد صحیح یا نیم صحیح مثبت

$$J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle$$ که $m = \{-j, \dots, j\}$

چون $|j,m\rangle$ ها ویژه کت‌های یک عملگر هرمیتی هستند پس متعامد هستند یعنی:

$$\langle j',m'|j,m\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

حال با استفاده از اینها نمایش ماتریسی عملگرها را می‌سازیم.

مثلاً:

$$j = \tfrac{1}{2} \xrightarrow{\text{state}} |\tfrac{1}{2}, \overset{\pm\frac{1}{2}}{m}\rangle \to \{|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle, |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\} = \{|-\rangle, |+\rangle\} \to$$ نمایش J_x و J_y و J_z ماتریس‌های 2×2 می‌شوند

$$j = 1 \longrightarrow |1, \overset{0,\pm1}{m}\rangle \to \{|1,-1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\} \to$$ نمایش J_x و J_y و J_z ماتریس‌های 3×3 می‌شوند

$$j \longrightarrow |j,m\rangle \to \{|j,-j\rangle, |j,-j+1\rangle, \dots, |j,j\rangle\}$$ در کل فضای $(2j+1)$ بعدی است

ماتریس‌های $(2j+1)\times(2j+1)$ می‌شوند.

به ازای یک j معین، state های موجود بر هم عمودند یعنی:

$$\langle j,m|j,m'\rangle = \delta_{mm'}$$

بنابراین به ازای یک j معین، این مجموعه‌ها یک دسته کامل هستند ولی در فضای $(2j+1)$ بُعدی. بنابراین:

عملگر واحد در فضای $(2j+1)$ بُعدی:

$$\sum |j,m\rangle\langle j,m| = 1$$

شبیه: $\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = 1$

بنابراین نمایش ماتریسی به ازای یک j معین بدست می‌آید (همیشه).

اگر بخواهیم j و j' دیگری را در نظر بگیریم، این قسمت صفر می‌شود چون قطعاً عمود بر هم هستند و باید j ها برابر باشند.

این رابطه نشان می‌دهد که نمایش ماتریسی J^2 برای یک j معین یک ماتریس قطری است با عناصر قطری $j(j+1)\hbar^2$.

نمایش J^2 در j معین (مولفه $m'm$):

$$J^{2\,(j)}_{m'm} = \langle j,m'|J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2\delta_{mm'}$$

$$J^2 \doteq j(j+1)\hbar^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{2j+1} \longrightarrow J^2 \doteq j(j+1)\hbar^2\, \underline{\underline{I}}$$

لم شور (Schur):

اگر عملگری باشد که با همه مولدها جابجا شود، متناسب با عملگر واحد است، و یا همه اپراتورهای کازیمیر دارای نمایش عملگر واحد هستند.

حال نمایش J_z را می‌نویسیم:

اگر j و j' باشد، صفر می‌شود. بین m ها شرط هست، باید هم یکی باشند.

$$J^{(j)}_{z\,m'm} = \langle j,m'|J_z|j,m\rangle = m\hbar\,\delta_{mm'}$$

$$J_z \doteq \hbar \begin{array}{c|cccc} & m=j & j-1 & \cdots & -j \\ \hline j & j & & & \\ j-1 & & j-1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -j & 0 & & & -j \end{array}$$

بنابراین در این مورد هم نمایش J_z به ازای یک j معین قطری است ولی اعضای قطر یکی نیستند و تابعی از m هستند. پس قطری است اما متناسب با ماتریس واحد نیست.

در مورد نمایش‌های J_x و J_y باید از نمایش J_+ و J_- بدست آوریم.

برای بدست آوردن نمایش $J_\pm$ باید ابتدا تکلیف ضریب $C^\pm$ را معلوم کنیم

$$J_+|j,m\rangle = C^+_{j,m}|j,m+1\rangle$$

برای بدست آوردن این ضریب این طور عمل می‌کنیم که در J_- ضرب، رابطه (a) را ضرب کنیم:

$$\langle j,m|J_+^\dagger J_+|j,m\rangle = |C^+_{j,m}|^2\underbrace{\langle j,m+1|j,m+1\rangle}_{1}$$

$$\langle j,m|\underbrace{J_+^{\dagger}}_{J_-}J_+|j,m\rangle = |C^+_{j,m}|^2$$

$$J_+^{\dagger}J_+ \rightarrow J_-J_+ = J^2-J_z^2-\hbar J_z \Longrightarrow (j(j+1)\hbar^2-m^2\hbar^2-m\hbar^2)\underbrace{\langle j,m|j,m\rangle}_{1} = |C^+_{j,m}|^2$$

بنابراین ،
$$J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\hbar\,|j,m\pm1\rangle$$

حال که اثر $J_\pm$ روی $|j,m\rangle$ معلوم شد، نمایش ماتریسی آن هم معلوم می‌شود:

$\langle j',m'|J_\pm|j,m\rangle \Longrightarrow$ اگر j و j' یکی نباشند صفر می‌شود، چون $J_\pm$، j را تغییر نمی‌دهد.

ولی m می‌تواند m' باشد.

$$J^{(j)}_{\pm\,m'm} = \langle j,m'|J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\hbar\,\delta_{m',m\pm1}$$
یعنی m' باید $m\pm1$ باشد.

مثلاً برای حالت $j=1$:

$$j=1 \Longrightarrow \langle 1,m'|J_\pm|1,m\rangle = \hbar\sqrt{(1\mp m)(2\pm m)}\,\delta_{m',m\pm1}$$

$$J_+ \doteq \hbar \begin{array}{c|c} m' \backslash m & \begin{matrix}1 & 0 & -1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad J_- \doteq \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

از روی این دو می‌توان J_x و J_y را بدست آورد:

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) = \frac{\sqrt{2}}{2}i\hbar\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

پس برای این نمایش ماتریسی مولدها را می‌توان بدست آورد.

سؤال آخری که در این مطلب می‌توانیم بکنیم این است که اینها نمایش مولدها بود، نمایش اعضای گروه چیست؟ یعنی نمایش عملگر D که $\exp(J)$ است چیست؟

این نمایش دیگر به سادگی نمایش مولدها نیست.

$$D(\hat{n},\varphi) \xrightarrow{R} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}\varphi} \qquad D(R)|\alpha\rangle = |\alpha\rangle_R$$

state ها با عملگر دوران کار دارند نه با پایه‌های دوران. پس سؤال این است که نمایش عملگر D چیست؟

اینجا قضیه پیچیده می‌شود و پیچیدگی آن به این مربوط می‌شود که با داشتن نمایش J برای هر اسپین، چطور می‌توانیم D که exp آن است را حساب کنیم، چون exp ماتریس دارای بینهایت جمله است.

در بعضی موارد این کار آسان است، مثلاً در حالت اسپین ½ این کار را انجام دادیم و این طور نوشتیم:

$$j=\tfrac{1}{2} \rightarrow D(R)=e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{S}\cdot\hat{n}\varphi} \xrightarrow{S=\frac{\hbar}{2}\sigma} D=e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\varphi} \rightarrow (\text{ماتریس } 2\times2)$$

چون این صفر نیست و وجود داشت σ_1 ، $\sigma_1^2=1$ ، $\sigma_1^3=\sigma_1$ ، $\sigma_1^4=1$ ، ...

cos و sin ← تبدیل شده

در مورد $j=1$ هم این کار عملی است و می‌توان آن را بصورت یک ماتریس 3×3 درآورد؛ $j=1 \rightarrow (\text{ماتریس } 3\times3)$

ولی در مورد بقیه j‌ها این کار عملی نیست و نمی‌توان به طور دقیق جمله‌ها را حساب کرد و باید از روش دیگری استفاده کرد.

پس سؤال به این صورت است،

$$D^{(j)}_{m'm}(R) = \underset{=}{\overset{\text{چیست}}{?}} = \langle jm'|D(R)|jm\rangle = \Big(\qquad\Big)_{(2j+1)\times(2j+1)}$$

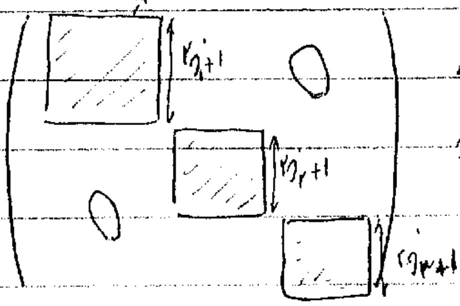
نمایش
$j=\frac{1}{2} \rightarrow$ ۲ بعدی
$j=1 \rightarrow$ ۳ بعدی
$j=\frac{3}{2} \rightarrow$ ۴ بعدی
$j \rightarrow 2j+1$

اگر D(R) را در پایه‌های دلخواه $\{|n\rangle\}$ (با P بعد) نمایش دهیم یعنی بجای استفاده از دسته حالتی که نمایش آن $2j+1$ بعدی است از این دسته حالت استفاده کنیم، نمایش D(R) یک ماتریس $P\times P$ می‌شود. حال می‌پرسیم:

نمایش در پایه‌های دلخواه $\{|n\rangle\}$ و نمایش در پایه‌های اسپین j وجود دارد. یعنی استفاده از دسته حالتهای $|n\rangle$ یا $|j,m\rangle$ هم ممکن است و ارتباط این دو نمایش با هم چیست؟

* حتماً می‌توان با تغییر پایه (از فصل ۱ ($U^{\dagger}XU$)) ماتریس D(R) را بصورت «بلوک قطری» (block-diagonal) درآورد.

ماتریسی است که جای قطر نشسته



یعنی عناصر غیر صفر آن بصورت بلوکهایی به شکل مقابل قرار گرفته باشند.

به این ماتریس‌ها بلوک قطری می‌گویند و قضیه این است که با تغییر پایه می‌توانیم نمایش را بصورت بلوک قطری درآوریم بگونه‌ای که این بلوکها همان نمایش اسپین j‌ها باشند.

مثلاً برای حالت $D=5$، ممکن است ۵ تا state به ما بدهند که با آن $D(R)$ را نمایش دهیم که می‌شود یک ماتریس ۵×۵ که بصورت یک شکلی می‌شود که در حالت کلی متفاوت است با حالتی که از $|j,m\rangle$ بدست آمده، این قضیه می‌گوید می‌توانیم بتوانیم پایه این نمایش را ببریم به نمایشی که بصورت بلوک‌های قطری باشند که مثلاً بصورت یک ماتریس ۳×۳ و یک ماتریس ۲×۲ باشد که ماتریس ۳×۳، همان نمایش $j=1$ باشد و ماتریس ۲×۲ همان نمایش $j=\frac{1}{2}$ باشد.

$$D(R) = \overset{\text{۵ بعدی}}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \longrightarrow \begin{pmatrix} \overset{\text{نمایش } j=1}{\boxed{3\times3}} & \\ & \underset{\text{نمایش } j=\frac{1}{2}}{\boxed{2\times2}} \end{pmatrix}$$

پس یعنی همه نمایشها قابل تبدیل هستند بر حسب این نمایش بصورت بلوک قطری. بنابراین نمایش‌های $|j,m\rangle$، نمایشهای خاصی هستند بنابراین به این نمایشهای پایه، نمایشهای تقلیل ناپذیر (irreducible representation) می‌گوییم.

مثلاً برای حالت $j=2$ در پایه $|j,m\rangle$ها با هیچ تغییر پایه‌ای نمی‌توان ماتریس مورد نظر را تقلیل داد.

$$j=2 \Rightarrow D(R) = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

* بنابراین در چارچوب نظریه نمایشها چیزی که اهمیت دارد، پیدا کردن نمایشهای تقلیل ناپذیر است. تقلیل ناپذیرها آنهایی هستند که stateها را $|j,m\rangle$ بگیریم، هر چیز دیگری بگیریم تقلیل پذیر است.

نکته آخر که می‌خواهیم بگوییم این است که این نمایشهای تقلیل ناپذیر را چطور بدست آوریم. اگر در پایه‌های $D(\hat{n})$ کار کنیم سخت است یعنی اینکه در پایه‌ای باشیم که دو پارامتر انتقال دوران را بدهد و یک پارامتر زاویه دوران را، حتی در مورد $j=1$.
به این خاطر برای اینکه این نمایشها را بدست آوریم از زوایای اویلر استفاده می‌کنند.

استفاده از زوایای اویلر:

نشان داده بودیم که هر دوران دلخواهی را می‌توان با سه زاویه نشان داد و دیدیم که:

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = \underbrace{D_z(\alpha)}_{\text{دوران حول } z \text{ به اندازه } \alpha} D_y(\beta)\, D_z(\gamma)$$

بنابراین برای نمایش دادن گروه دوران از این پارامتربندی استفاده می‌کنند

1. $D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}\varphi}$

2. $D(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}J_z} \cdot e^{-i\frac{\beta}{\hbar}J_y} \cdot e^{-i\frac{\gamma}{\hbar}J_z}$

در همین مرحله معلوم می‌شود که چرا این نوع پارامتربندی ساده است، علت این است که در پارامتربندی نوع 1 چیزی که در exp ظاهر می‌شود J_x و J_y و J_z است که بصورت حاصلجمع می‌باشد و چون اینها با هم جابجا نمی‌شوند، نمی‌توان exp تبدیل به حاصلضرب کرد. اما در پارامتربندی نوع 2، اولاً سه تا exp وجود دارد که در هر کدام از exp ها یک مولد نشسته است نه چند تا،

نکته دوم این است که در بین exp های J_z ، J_y وجود دارد که state هایی که می‌خواهیم بر حسب آنها بدهیم ویژه‌حالت‌های J_z هستند بنابراین عملش که فقط یک فاز تعیین می‌شود و فقط exp وسط باقی می‌ماند یعنی:

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle j,m'|D(\alpha,\beta,\gamma)|j,m\rangle = \underbrace{\langle j,m'|e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}J_z}}_{e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}m'\hbar}\langle j,m'|}\, e^{-i\frac{\beta}{\hbar}J_y}\, \underbrace{e^{-i\frac{\gamma}{\hbar}J_z}|j,m\rangle}_{e^{-i\frac{\gamma}{\hbar}m\hbar}|j,m\rangle}$$

$$\Longrightarrow D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\,\underbrace{\langle j,m'|e^{-i\frac{\beta}{\hbar}J_y}|j,m\rangle}_{\equiv\, d^{(j)}_{m'm}(\beta)}$$

تکلیف دو قسمت از این سه تا معلوم شد پس اگر بتوانیم $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ را پیدا کنیم، عملاً D هم پیدا می‌شود.

برای اسپین ۱/۲ ماتریس‌های پائولی می‌شود که راحت است

برای اسپین ۱ هم می‌توان این کار را کرد که این طور است:

$$j=1 \longrightarrow J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

می‌توانیم ببینیم که در حالت ۱ = j این رابطه وجود دارد که: $\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^3 = \frac{J_y}{\hbar}$

بنابراین:

$$e^{-i\beta J_y/\hbar} = 1 - i\beta\frac{J_y}{\hbar} + \frac{1}{2!}(-i\beta)^2\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{3!}(-i\beta)^3\underbrace{\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^3}_{J_y/\hbar} + \frac{1}{4!}(-i\beta)^4\underbrace{\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^4}_{(J_y/\hbar)^2} + \cdots$$

[illegible]

$$\Longrightarrow e^{-i\beta J_y/\hbar} = 1 - i\frac{J_y}{\hbar}(\sin\beta) - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)$$

$$d^{(1)}_{m'm}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\beta}{2} & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\beta}{2} \\ \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \cos\beta & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\beta}{2} & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$d^{(1/2)}_{m'm}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & -\sin\beta/2 \\ \sin\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix}$$

جلسه بیست و چهارم : (چهارشنبه) ۸۴/۹/۲۳

تکانه زاویه‌ای مداری :

تا به حال در مورد نمایش ماتریسی دوران صحبت کردیم و گفتیم مجموعه مولدهایی که در این رابطه صدق کنند می‌توانند تولید دوران کنند.

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

حال می‌خواهیم در مورد حالتی که اندازه حرکت زاویه‌ای با حرکت سروکار دارد صحبت کنیم به عبارت دیگر می‌خواهیم نشان دهیم که اگر اندازه حرکت زاویه‌ای را با این عملگر نمایش دهیم :

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$$

می‌توانیم نشان دهیم که تکانه زاویه‌ای به این صورت می‌تواند از نوع مولدها باشد. با استفاده از رابطه تقابل، می‌توانیم رابطه زیر را نشان دهیم:

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$ یا $$[L_1, L_2] = i\hbar L_3$$ را می‌توانیم نشان دهیم

بنابراین عملگر $\vec{x} \times \vec{p}$ هم از نوع اندازه حرکت زاویه‌ای است.

حال که این عملگر می‌تواند مولد دوران باشد، می‌توانیم معنی فیزیکی دوران آن را دقیق‌تر بررسی کنیم و چون برحسب عملگرهای مکان و تکانه است می‌توان تأثیرش را روی ویژه‌حالت مکان دید.

دوران حول z به اندازه $\delta\phi$ کوچک:

$$D(z, \delta\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar} L_z \delta\phi} = 1 - \frac{i}{\hbar} L_z \delta\phi = 1 - \frac{i}{\hbar} \delta\phi \underbrace{(x P_y - y P_x)}_{L_z}$$

می‌خواهیم اثر D را روی حالت $|x'\rangle$ ببینیم :

$$D|\vec{x}'\rangle = \left\{1 - \frac{i}{\hbar}\left[P_x \underbrace{(-y\delta\phi)}_{dx'} + P_y \underbrace{(x\delta\phi)}_{dy'}\right]\right\} |x'\rangle$$

با مقایسه با عملگر انتقال : $\underbrace{T(dx')}_{1 - \frac{i}{\hbar} P \cdot dx'} |x'\rangle = |x' + dx'\rangle$

با مقایسه با عملگر دوران می‌توانیم ببینیم در D، ضریب مولفه x به آن اندازه x را منتقل می‌کند و ضریب مولفه y هم به آن اندازه y را منتقل می‌کند.

بنابراین : $D|x'\rangle = |x' - y'\delta\phi, y' + x'\delta\phi, z'\rangle$ (I)

بنابراین چون عملگر دوران بینهایت کوچک با عملگر انتقال بینهایت کوچک یکی شد، می‌توانیم همان تأثیر را برای عملگر دوران بینهایت کوچک ببینیم.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; R_z \doteq \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\delta\phi]{\text{برای دوران‌های کوچک}} \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi & 0 \\ \delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

یعنی اگر بردارمان را به اندازه $\delta\phi$ دوران دهیم، مولفه‌ها طبق رابطه بالا رفتار می‌کنند

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi & 0 \\ \delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - y\,\delta\phi \\ y' = y + x\,\delta\phi \quad \text{(II)} \\ z' = z \end{cases}$$

اگر (I) و (II) را مقایسه کنیم، می‌بینیم که دقیقاً هم‌جهت نیستند یعنی بردار مکان تبدیل داده شده واقعاً دوران است.

حال می‌خواهیم نمایش Lها را در فضای مکان را در دستگاه مختصات کروی بدست آوریم.

نمایش Lها در دستگاه مختصات کارتزین به صورت است چون:

$$\langle \vec{x}' | L_x | \alpha \rangle = \langle x' | y P_z - z P_y | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{i}\left(y' \frac{\partial}{\partial z} - z' \frac{\partial}{\partial y} \right) \langle \vec{x}' | \alpha \rangle$$

این رابطه را قبلاً در فصل ۱ دیدیم که یک تابع $\langle x' | f(P) | \alpha \rangle$: $\begin{cases} P \to \frac{\hbar}{i}\nabla & \text{چون:} \\ x \to x' & \text{ویژه مقدار} \end{cases}$

از عملگر که روی هر state اثر کند اگر بخواهیم در فضای مکان آن را در فضای مکان بدست آوریم، به جای P باید $\frac{\hbar}{i}\nabla$ و به جای xها ویژه مقدارش را بگذاریم.

بنابراین نمایش Lها در فضای مکان در دستگاه مختصات کارتزین به صورت است اما در دستگاه مختصات که برای ما بیشتر ضروری دستگاه مختصات کروی است، برای بدست آوردن نمایش آن در دستگاه مختصات کروی این کار را می‌کنیم.

داریم: $D|x'\rangle = (1 - \frac{i}{\hbar}\delta\phi\, L_z)|x'\rangle = |x' - y'\delta\phi,\, y' + x'\delta\phi,\, z'\rangle$

اگر dual رابطه بالا را بدست آوریم، می‌شود:

$$\underbrace{\langle x' | (1 + \tfrac{i}{\hbar}\delta\phi\, L_z)}_{\text{دوران حول } z \text{ به اندازه } \delta\phi} = \langle x' - y'\delta\phi,\, y' + x'\delta\phi,\, z' | \quad (1)$$

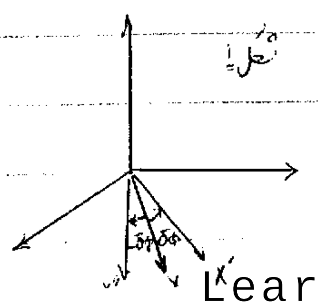
بنابراین برای بدست آوردن نمایش Lها در دستگاه مختصات کروی، می‌دانیم عملگر دوران را روی هر حالتی بزنیم، حالت دوران یافته را می‌دهد.

$$|\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle$$

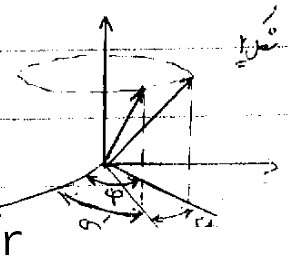
تابع موج دوران یافته می‌شود: $\psi_R(x') = \langle x' | \alpha \rangle_R = \langle x' | \underset{D(z,\delta\varphi)}{D(R)} | \alpha \rangle = \underbrace{\langle x' | (1 - \tfrac{i}{\hbar}\delta\phi\, L_z)}_{\Leftarrow \text{دوران حول } z \text{ به اندازه } -\delta\varphi} | \alpha \rangle \quad (2)$

با مقایسه رابطه (1) و (2) می‌بینیم که در رابطه (1) دوران حول z به اندازه $\delta\varphi$ بود. در رابطه (2) شبیه رابطه (1) است اما $\delta\varphi$ تبدیل شده به $-\delta\phi$، بنابراین در رابطه (2) دوران حول z به اندازه $-\delta\phi$ را داریم.

شکل ۱



شکل ۲



۲

② از رابطه ② داریم: $\psi_R(x') = \langle x'|(1-\frac{i}{\hbar}\delta\phi L_z)|\alpha\rangle = \underbrace{\langle x'+y'\delta\phi , y'-x'\delta\phi , z'|\alpha\rangle}$ ③

بردار دوران یافته به اندازه $-\delta\phi$ حول محور z

یعنی: $(r,\theta,\varphi) \xrightarrow[\text{به اندازه } -\delta\phi]{\text{دوران حول } z} (r,\theta,\varphi-\delta\phi)$

شکل ۱ نمایش این دوران در دستگاه مختصات کارتزین است.

در دستگاه قطبی بصورت شکل ۲ می‌باشد که مختصه بردار جدید این طور است که r آن عوض نمی‌شود، θ هم عوض نمی‌شود فقط φ تغییر می‌کند.

پس ③ $\rightarrow \psi_R(x') = \langle x'+y'\delta\phi , y'-x'\delta\phi , z'|\alpha\rangle \longrightarrow = \langle r,\theta,\varphi-\delta\phi|\alpha\rangle$

رابطه ③ را حول $\delta\varphi=0$ بسط می‌دهیم:

$$\psi_R(x') = \langle \vec{x}'|\alpha\rangle - \delta\phi \frac{\partial}{\partial\varphi}\langle \vec{x}'|\alpha\rangle + \dots \quad ④$$

②: $\psi_R(x') = \langle x'|\alpha\rangle - \frac{i}{\hbar}\delta\phi\langle x'|L_z|\alpha\rangle$ اگر رابطه ② را با ④ مقایسه کنیم:

بنابراین $\Leftarrow$ $\boxed{\langle x'|L_z|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\langle x'|\alpha\rangle}$ بنابراین نمایش L_z بر حسب مختصات کروی بدست آمد. ①

نمایش L_z در مختصات کروی

می‌توان یک طور دیگر هم عمل کرد و از نمایش در دستگاه مختصات دکارتی استفاده کرد و بر حسب مولفه‌های کروی:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \longrightarrow dx = dr\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \longrightarrow dy = dr\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi \\ z = r\cos\theta \longrightarrow dz = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

بنابراین
$$\begin{cases} dr = \sin\theta\cos\varphi\, dx + \sin\theta\sin\varphi\, dy + \cos\theta\, dz \\ d\theta = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\, dx + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\, dy - \frac{1}{r}\sin\theta\, dz \\ d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}dx + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}dy \end{cases}$$

این روابط به ما کمک می‌کنند تا مشتقات را هم بدست آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \overset{\sin\theta\cos\varphi}{\frac{\partial r}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial r} + \overset{\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi}{\frac{\partial\theta}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \overset{-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

در نتیجه داریم $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{cases}$$ ①

بنابراین L_x و L_y هم برحسب r و θ بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \langle x'|L_x|\alpha\rangle = i\hbar\left(\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle x'|\alpha\rangle \\ \langle x'|L_y|\alpha\rangle = -i\hbar\left(\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle x'|\alpha\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_\pm = L_x \pm iL_y \longrightarrow \langle x'|L_\pm|\alpha\rangle = -i\hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm i\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\langle x'|\alpha\rangle$$

بنابراین برای L_x و L_y و L_z و L_+ و L_- چنانچه دیدیم بدست آوردیم، اولاً اگر بصورت $\vec{x}\times\vec{p}$ نگاه کنیم، یعنی اپراتور هستند، دوماً نمایش آنها برحسب فضای مکان در مختصات xyz (دکارتی) یا کروی به صورت بالا بدست آمد.

حال از این نتایج این نکات را می‌توان فهمید:

در جلسه پیش این رابطه را بدست آوردیم:

$$L^2 = L_z^2 + \tfrac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+)$$

حال L_+ و L_- را از روابطی که بدست آوردیم جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} \langle x'|L^2|\alpha\rangle = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\langle x'|\alpha\rangle \quad (1) \\ \text{اگر این عبارت را با } \nabla^2 \text{ در دستگاه مختصات کروی مقایسه کنیم:} \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right] \quad (2) \end{cases}$$

می‌بینیم که L^2 همان قسمت زاویه‌ای ∇^2 در دستگاه کروی است (البته با یک ضریب)

حالا می‌خواهیم علت ظاهر شدن این موضوع را بررسی کنیم

قضیه ۲ است

$$L^2 = (\vec{x}\times\vec{p})\cdot(\vec{x}\times\vec{p}) = x^2p^2 - (\vec{x}\cdot\vec{p})^2 + i\hbar\,\vec{x}\cdot\vec{p}$$

$$\Rightarrow \langle x'|L^2|\alpha\rangle = \underbrace{\langle x'|x^2p^2|\alpha\rangle}_{} - \underbrace{\langle x'|(\vec{x}\cdot\vec{p})^2|\alpha\rangle}_{-\hbar^2\left[r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\right]\langle x'|\alpha\rangle} + i\hbar\underbrace{\langle x'|\vec{x}\cdot\vec{p}|\alpha\rangle}_{\frac{\hbar}{i}r\frac{\partial}{\partial r}\langle x'|\alpha\rangle} \quad (3)$$

چون x^2 طول x است $\rightarrow r^2\left(\frac{\hbar}{i}\nabla'\right)^2\langle x'|\alpha\rangle$

$-\hbar^2 r^2\nabla'^2\langle x'|\alpha\rangle$

حالا دو جمله سمت راست معادله بالا را این طور نوشتیم:

$$\langle x'|(x\cdot p)|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{i}\,\vec{x}'\cdot\vec{\nabla}'\langle x'|\alpha\rangle$$

در دستگاه کروی $r\frac{\partial}{\partial r}$

با استفاده از رابطه بالا؟

$$\Rightarrow \langle x'|(x\cdot p)^2|\alpha\rangle = \langle x'|(x\cdot p)\overbrace{(x\cdot p)|\alpha\rangle}^{|\beta\rangle} = \frac{\hbar}{i}r\frac{\partial}{\partial r}\langle x'|\beta\rangle = \frac{\hbar}{i}r\frac{\partial}{\partial r}\overbrace{\langle x'|x\cdot p|\alpha\rangle}^{|\beta\rangle}$$

$$= \frac{\hbar}{i}r\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{\hbar}{i}r\frac{\partial}{\partial r}\right)\langle x'|\alpha\rangle\right] = -\hbar^2\left[r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\right]\langle x'|\alpha\rangle$$

پس رابطه ③ می‌شود:

$$\langle x'|L^2|\alpha\rangle = -\hbar^2 r^2 \nabla'^2 \langle x'|\alpha\rangle + \hbar^2\left[r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\right]\langle x'|\alpha\rangle + \hbar^2 r\frac{\partial}{\partial r}\langle x'|\alpha\rangle$$

$$= -\hbar^2 r^2 \nabla'^2 \langle x'|\alpha\rangle + \hbar^2\left[r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\right]\langle x'|\alpha\rangle$$

$$\Longrightarrow \nabla'^2\langle x'|\alpha\rangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\langle x'|\alpha\rangle + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\langle x'|\alpha\rangle - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\langle x'|L^2|\alpha\rangle \quad (4)$$

با مقایسه روابط ② و ④

$$-\frac{1}{\hbar^2 r^2}\langle x'|L^2|\alpha\rangle = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \langle x'|L^2|\alpha\rangle = -\hbar^2\{(\nabla^2 \text{ قسمت زاویه‌ای})\}$$

پس چیزی که در اینجا ظاهر شد در حقیقت از این آمد که P برابر $\frac{\hbar}{i}\nabla$ است.

حال می‌خواهیم چون عملگرها را در فضای مکان بدست آوردیم ویژه حالتها را هم در فضای مکان بدست آوریم و این طور در نظر می‌گیریم که

$J_i \longrightarrow L_i$

$|a,m\rangle \longrightarrow |l,m\rangle$

بجای J، L و بجای $|a,m\rangle$، $|l,m\rangle$ را در نظر می‌گیریم

می‌خواهیم $|l,m\rangle$ها را در فضای مکان بدست آوریم که دارای این خصوصیت هستند:

$$L^2|l,m\rangle = l(l+1)\hbar^2|l,m\rangle$$

$$L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle$$

همچنین نشان دادیم: $\langle x'|L_i|\alpha\rangle = \underbrace{f(\theta,\varphi)}\langle x'|\alpha\rangle$ (I)

تابعی از θ و φ که برای مولفه x و y و z متفاوت هستند

نکته این است که تا وقتی که با نمایش تکانه زاویه‌ای در فضای مکان سروکار داریم از بردار مکان فقط θ و φ آن را لازم داریم و فقط با زاویه‌ها سروکار داریم. بنابراین اگر بجای $|\alpha\rangle$، $|l,m\rangle$ بگذاریم اینجا هم با θ و φ فضای مکان کار دارند:

$$\langle x'|L_i|l,m\rangle = f(\theta,\varphi)\langle x'|l,m\rangle \quad (II)$$

$\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle$ این فرض وجود دارد که ما یک حالت در فضای مکان را به این صورت نمایش می‌دهیم.

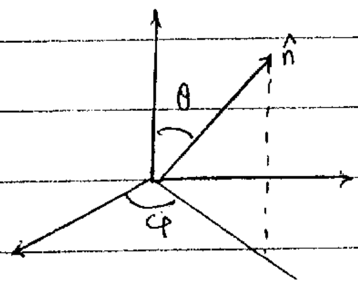
در مورد $|l,m\rangle$ها چون آنها ویژه حالت‌های تکانه زاویه‌ای هستند و فقط با θ و φ سروکار دارد دیگر همه بردار x را نمی‌گذاریم و فقط قسمت θ و φ را می‌گذاریم و این طور در نظر می‌گیریم: $\langle \hat{n}|l,m\rangle$ $\hat{n}$ در حقیقت θ و φ را مشخص می‌کند

که در واقع $\hat{n}$ ... است

پس به جای اینکه تمام بردار مکان ($\vec{r}$) را بگذاریم فقط قسمت θ و φ را قرار می‌دهیم چون که زاویه‌ای فقط با θ و φ سر و کار دارد

و نسبت $\langle \hat{n}|l,m\rangle$ که می‌نویسیم که به این صورت نام‌گذاری می‌کنیم:

$$\langle \hat{n}|l,m\rangle = Y_l^m(\theta,\varphi) \quad \text{(III)} \dashrightarrow$$ فقط تابعی از زاویه است



بنابراین ویژه‌کت‌های L^2 و L_z که $|l,m\rangle$ ها باشند در فضای مکان،
ویژه‌تابع می‌شوند که فقط تابع زاویه هستند و تابع r نیستند.
حال سؤال این است که با توجه به نمایشی که برای L ها در فضای مکان
بدست آوردیم $Y_l^m(\theta,\varphi)$ ها چه چیزی هستند؟

رابطه (II) را برای L_z می‌نویسیم:

$$\text{(II)},\text{(III)}:\ \underbrace{\langle \hat{n}|L_z|l,m\rangle}_{m\hbar|l,m\rangle} \overset{\text{رابطه}}{=} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\underbrace{\langle \hat{n}|lm\rangle}_{Y_l^m}$$

این معادله وابستگی φ، Y_l^m را می‌دهد.

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m = im Y_l^m \longrightarrow \int\frac{dY_l^m}{Y_l^m} = \int im\, d\varphi \Longrightarrow \boxed{Y_l^m(\theta,\varphi) = f(\theta)e^{im\varphi}}$$

حال می‌خواهیم وابستگی θ، Y_l^m را بدست آوریم پس رابطه (II) را برای L^2 می‌نویسیم:

$$\text{(II)},\text{(III)}:\ \underbrace{\underbrace{\langle \hat{n}|L^2|l,m\rangle}_{l(l+1)\hbar^2|l,m\rangle}}_{\underbrace{l(l+1)\hbar^2\langle \hat{n}|l,m\rangle}_{Y_l^m}} \overset{\text{رابطه}}{=} -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\underbrace{\langle \hat{n}|l,m\rangle}_{Y_l^m}$$

هماهنگ‌های کروی (spherical harmonics)

$$\Longrightarrow \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\right]Y_l^m(\theta,\varphi) = 0$$

این معادله یک معادله شناخته شده است و جواب آن معلوم است.

از اینجا یک سری خصوصیات را برای Y_{lm} ها می‌گوییم:

تعامد ویژه‌کت‌های $|lm\rangle$: $\langle l'm'|lm\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$ (IV)

کامل بودن پایه $|lm\rangle$ ها $\longrightarrow \int d^3r'\,|r'\rangle\langle r'| = 1$

کامل بودن ویژه‌کت‌های $|\hat{n}\rangle$ $\longrightarrow \int d\Omega\,|\hat{n}\rangle\langle \hat{n}| = 1$ (V)

$$\text{(V)} \to \text{(IV)} \Longrightarrow \langle l'm'|\int d\Omega\,|\hat{n}\rangle\langle \hat{n}|l,m\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

قاعده تعامد Y_l^m ها:

$$\Rightarrow \boxed{\int d\Omega\, Y_{l'}^{*m'}(\theta,\varphi)\, Y_l^m(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}}$$

نکته دیگر این است که اگر L_+ روی حالت $|l,l\rangle$ اثر دهد صفر می‌شود:

$$L_+|l,l\rangle = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بنابراین}} \langle \hat n | L_+ | l,l\rangle = 0$$

از طرفی عملگر L_+ را در فضای مکان داریم: $Y_l^m = f_l^l(\theta)\, e^{il\varphi}$

$$\Rightarrow -\hbar e^{i\varphi}\left[i\partial_\theta - \cot\theta\, \partial_\varphi\right]\langle \hat n | l,l\rangle = 0 \Rightarrow \int \frac{df_l^l}{f_l^l} = l\int \cot\theta\, d\theta$$

$$\underbrace{\ln f_l^l}_{} = \overbrace{\ln\sin^l\theta}^{}$$

$$\ln f_l^l = \ln \sin^l\theta \qquad ; \quad Y_{lm} = f(\theta)\, e^{im\varphi}$$

بنابراین شکل کلی Y_l^m ها بدست می‌آید:

$$\boxed{Y_l^l = c_l \sin^l\theta\, e^{il\varphi}}$$

با استفاده از: $\int_0^\pi \sin^{2l+1}\theta\, d\theta = 2\,\frac{2\times4\times6\times\cdots 2l}{1\times3\times5\times\cdots(2l+1)}$

c_l را این طور بدست می‌آوریم:

$$\int |Y_l^l|^2 d\Omega = 1 \Rightarrow c_l = \frac{(-1)^l}{2^l\, l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$$

$(-1)^l$ از روی تعریف بدست نمی‌آید علتش هم این است که ما همیشه Y_l^m ها را بدست می‌آوریم. این را انتخاب می‌کنیم تا در حقیقت با فرم استاندارد این توابع بخواند.

حال که بالاترین حالت بدست آمد بقیه حالتها را نیز با L_- روی آن بدست می‌آید. جواب کلی به این صورت می‌شود:

برای $m \geq 0$

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l\, l!}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\; e^{im\varphi}\,\frac{1}{\sin^m\theta}\cdot\frac{d^{l-m}}{d(\cos\theta)^{l-m}}(\sin\theta)^{2l} \qquad (1)$$

$$m<0 \rightarrow Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^* \qquad (2)$$

Y_l^m ها، $|lm\rangle$ ها در فضای مکان هستند.

یادآوری می‌کنیم که به این دلیل $|lm\rangle$ ها را در فضای مکان می‌نویسیم چون $\vec L$ را با استفاده از ابزارهای استاندارد می‌توان نوشت.

در جلسه گذشته دیدیم که j ها صحیح و نیم صحیح بدست آمدند و هر دو امکان دارند و برای هر دو فرض ماتریسی را بدست آوردیم. حال سؤال این است که l ها چطور هستند؟ آیا l هم می‌تواند صحیح و نیم صحیح باشد.

$$\begin{cases} j = \text{صحیح و نیم صحیح} \\ l = \,? \longrightarrow \text{باید صحیح باشند} \end{cases}$$

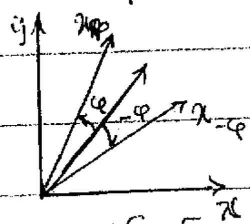
همانطور که می‌دانیم l ها حتما باید صحیح باشند، l های نیم صحیح مشکل دارند. ریشه اصلی مشکل هم این است که L ها برحسب عملگرهای متعارف نوشته شده اند ($\vec L = \vec X \times \vec P$) و در فضای مکان نوشته شده اند ولی j های نیم صحیح هیچ شباهتی با فضای توابع را ندارند.

حال ببینیم که l ها اشکال پیدا می‌شوند. نکته این است که L ها که مولد دوران هستند، مولد دوران بردارهای معمولی هستند و دیدیم که

این رابطه وجود داشت:

داشتیم: $e^{-\frac{i}{\hbar}L_z\varphi}|x'\rangle = |x'\rangle_R$ ⟵

$$\underbrace{\langle x'|e^{-\frac{i}{\hbar}L_z\varphi}|\alpha\rangle}_{\langle x'_{-\varphi}|\alpha\rangle}$$



بنابراین شد:

$$\langle x'|e^{-\frac{i}{\hbar}L_z 2\pi}|\alpha\rangle = \langle x'_{-2\pi}|\alpha\rangle \overset{\text{باید}}{=} \langle x'|\alpha\rangle \quad (1)$$

بنابراین با دوران به اندازه 2π به جای اول خود برمی‌گردیم. این یک خصوصیت طبیعی است و از آنجایی که L در فضای مکان می‌تواند تأثیر بگذارد

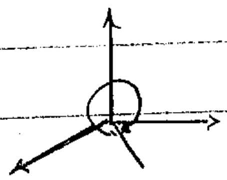
ولی اگر یادمان باشد در مورد اسپین‌ها این طور نبود که بعد از دوران 2π به جای اول خودشان برگشت. این یعنی اگر (؟) باید هیچ وقت خصوصیت با نیست که می‌دانیم از فرمی که برای Y_l^m بدست آوردیم، این موضوع را ببینیم:

$$\text{اگر}\ \varphi \to \varphi+2\pi \Rightarrow Y_l^m \to Y_l^m e^{i2\pi m} \quad (2)$$

با توجه به رابطه (1)

می‌دانیم مطابق رابطه (1) بعد از 2π باید روی خودشان برگردند. اما در مورد Y_l^mها می‌بینیم که اگر l نیم صحیح باشد m هم نیم صحیح است ($m=-l,\ldots,l$) بنابراین فاز $e^{i2\pi m}$ برابر (-1) می‌شود و با رابطه (1) تناقض دارد.

بنابراین اگر بخواهیم بعد از دوران 2π سیستم به حالت اول خودش برگردد (که باید هم برگردد) l نمی‌تواند نیم صحیح باشد چون یک فاز -1 می‌دهد و مثل اسپین رفتار می‌کند. این شکل در مورد



تک نقطه بودن است یعنی اگر از یک جا شروع کنیم و دوباره به آن نقطه برگردیم، تابع نباید یک جا تک مقدار نیست.

در مورد اسپین‌ها این صحبت را نمی‌کنیم چون اصلاً تابعی نداریم و تک اسپینور (دو مؤلفه‌ای) داریم ولی اینجا تابع داریم.

یک مشکل دیگری که برای l های نیم صحیح وجود دارد در شکل Y_l^m در رابطه (1) صفحه قبل است.

فرض کنیم $l=\frac{1}{2}$ مجاز است

$$(1):\ Y_{1/2}^{1/2} = \underbrace{C_{1/2}}_{\text{ثابت عددی}} e^{\frac{i}{2}\varphi}\sqrt{\sin\theta}$$

حال بیاییم از روی این نتیجه $Y_{1/2}^{-1/2}$ را بسازیم.

$$Y_{1/2}^{-1/2} \simeq L_- Y_{1/2}^{1/2} \sim e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)Y_{1/2}^{1/2} = e^{-\frac{i\varphi}{2}}\underbrace{\cot\theta\sqrt{\sin\theta}}_{\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}} \quad (3)$$

این تابع بی‌معنی می‌باشد به دو دلیل. چون اولاً این تابع در π و $\theta=0$ به سمت ∞ میل می‌کند و در روی محور Z تک مقدار نیست (؟)

ثانیاً اگر از رابطه ② استفاده کنیم:

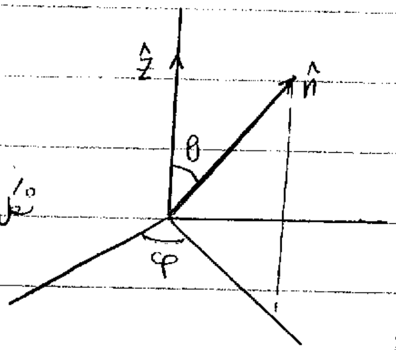
$$Y_{1/2}^{-1/2} = (-1)^{1/2}\left(Y_{1/2}^{1/2}\right)^* = iC_{1/2}\, e^{-i\varphi/2}\sqrt{\sin\theta} \qquad ⑤$$

که رابطه ③ و ⑤ اصلاً یکی نیستند

پس برای مقادیر نیمه صحیح l این فرمول بندی غلط است.

پس تکانه زاویه‌ای مداری صحیح است ولی اسپین هم صحیح است هم نیمه صحیح

نکته آخری که می‌خواهیم به آن اشاره کنیم، بحث ارتباط Y_l^mها با نمایش گروه دوران (اپراتور دوران) یعنی D ها است.



شکل ۱

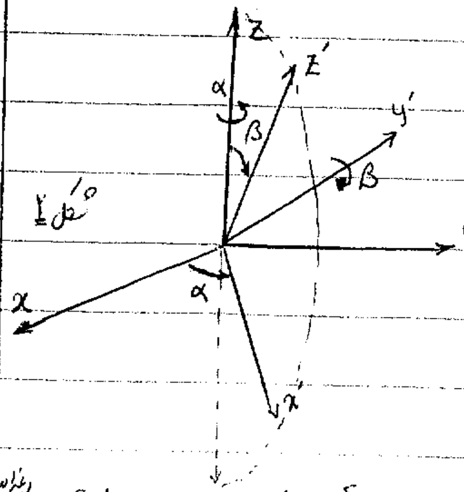
یک استیت در جهت $\hat{n}$ (که θ و φ صفر ندارد) در نظر می‌گیریم. این استیت را چطور می‌توانیم از استیت $\hat{z}$ بدست آوریم

ماتریس دوران D را داشتیم برحسب زوایای اویلر $D(\alpha,\beta,\gamma)$،
ادعا می‌کنیم که تحت دوران $D(\alpha=\varphi,\beta=\theta,\gamma=0)$، $\hat{z}$ تبدیل می‌شود به $\hat{n}$.

$D(\alpha=\varphi,\beta=\theta,\gamma=0)$

$D(\alpha,\beta,\gamma)$ این طوری بود که ابتدا دستگاه را حول z به اندازه α می‌چرخانیم بعد حول y' (جدید) به اندازه β می‌چرخانیم و در آخر حول z' (جدید) به اندازه γ می‌چرخانیم. حال این سه دوران را روی بردارها اعمال کنیم.

حال ببینیم با شرطی که در بالا ادعا کردیم چطور می‌توان کرد بردار Z ای که این می‌شود ببینیم چه زاویه‌ای با بقیه بردارها می‌سازد. حول محور z ابتدا به اندازه α می‌چرخانیم بعد حول محور y' به اندازه β می‌چرخانیم.



شکل ۲

دوران دوم در صفحه عمود بر y' انجام می‌شود (صفحه متشکل از z و z' و x') و چون در این صفحه است زاویه α تغییر نمی‌کند و همان زاویه α بین تصویر z' روی صفحه xy با محور x وجود دارد و حول محوری که بچرخد یعنی z' به اندازه β دوران دارد پس حتماً با محور z زاویه β را می‌سازد.

$\sum_m |l,m\rangle\langle l,m|$ اتحاد کامل به ازای l معین و ثابت (برای هر مقدار)

با مقایسه شکل ۱ و ۲ می‌بینیم که z' همان $\hat{n}$ می‌باشد پس:

$$|\hat{n}\rangle = D(\alpha=\varphi,\beta=\theta,\gamma=0)\,|\hat{z}\rangle$$

طرفین را در ... ضرب کنیم

$$\underbrace{\langle l,m'|\hat{n}\rangle}_{Y_l^{m'*}(\theta,\varphi)} = \sum_m \underbrace{\langle lm'|D|lm\rangle}_{D^{(l)}_{m'm}(\alpha=\varphi,\beta=\theta,\gamma=0)}\langle lm|\hat{z}\rangle \qquad ①$$

$\langle lm|\hat{z}\rangle \rightarrow Y_l^{m*}(\theta=0,\varphi)$ چون برای استیت $\hat{z}$ است و استیت $\hat{z}$ دارای $\theta=0$ است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که توابع Y_ℓ^m به ازای $\theta=0$ فقط در $m=0$ وجود دارند یعنی نشان دهیم: $Y_\ell^m(\theta=0,\varphi)\sim\delta_{m0}$

Y_ℓ^m را به این صورت نوشته بودیم:

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi)=\frac{(-1)^\ell}{2^\ell\,\ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\,\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\;e^{im\varphi}\,\frac{1}{\sin^m\theta}\,\frac{d^{\ell-m}}{d(\cos\theta)^{\ell-m}}(\sin\theta)^{2\ell}\qquad \text{if } \theta=0 \longrightarrow Y_\ell^m\to\infty$$

مگر اینکه $m=0$ باشد $\sin^m\theta=$ ضریب صفر نمی‌کند

پس این یک فرم دیدن این موضوع است، فرم دیگر آن نوشتن برحسب توابع لژاندر است که به این صورت است:

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\cdot\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\;P_\ell^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$

$P_\ell^m(\cos\theta)$: لژاندر وابسته (associated)

که $P_\ell^m(\overset{\cos\theta}{x})=(1-x^2)^{m/2}\dfrac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$

این تابع معلوم است که در $\theta=0$ که معادل با $x=1$ است $P_\ell^m(1)=0$ است برای ($m\neq0$)

* if $\theta=0\longrightarrow x=1\Rightarrow P_\ell^m(1)=0$ for $m\neq0$

مگر اینکه $m=0$ باشد که در این صورت:

* if $m=0\longrightarrow P_\ell^0(\cos\theta)=P_\ell(\cos\theta)\xrightarrow[\cos\theta=1]{\theta=0}P_\ell(1)=1$

پس معلوم شد که Y_ℓ^mها در $\theta=0$ صفر می‌شوند مگر اینکه $m=0$ باشد.

پس $Y_\ell^m(\theta=0,\varphi)=\sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}}\,\delta_{m0}$ (2)

پس در رابطه (1) می‌توان جمع روی m را برداشت و فقط $m=0$ را گذاشت.

$$(1),(2)\Rightarrow Y_\ell^{*m'}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,D^{(\ell)}_{m'0}(R)$$

$$\Longrightarrow \boxed{D^{(\ell)}_{m0}(\alpha,\beta,\gamma=0)=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\;Y_\ell^{*m}(\theta,\varphi)\Big|_{\substack{\theta=\beta\\ \varphi=\alpha}}}$$

این نتیجه از این جهت مهم است که این $D_m^\ell(R)$ به ازای $\ell=0,1$ دارای نمایش کارتزین معلوم است اما در غیر اینصورت معلوم نیست

حال با داشتن تابع کروی‌ها به ازای هر ℓ می‌توانیم D را حداقل به ازای بلوکهای ($m=0$) ، اگر در رابطه بالا m را هم صفر قرار دهیم:

$$\longrightarrow D^{(\ell)}_{00}(\alpha,\beta,\gamma=0)=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\cdot\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\;P_\ell(\overset{\theta=\beta}{\cos\beta})\Longrightarrow D^{(\ell)}_{00}(\alpha,\beta,\gamma=0)=P_\ell(\cos\beta)\quad (3)$$

بنابراین چندجمله‌ای‌های لژاندر عناصر صفر صفر ماتریس D هستند.

جلسه گذشته فرمی برای d هم نوشته بودیم:

$$D^{(\ell)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-i(m\alpha+m'\gamma)}\,d^{(\ell)}_{m'm}(\beta)$$

$$\text{if } m=m'=0\Longrightarrow D^{(\ell)}_{00}(\alpha,\beta,\gamma=0)=d^{(\ell)}_{00}(\beta)\overset{(3)}{=}P_\ell(\cos\beta)$$

جلسه بیست و پنجم: ۸۴/۸/۲۷

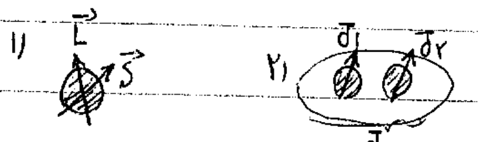
جمع تکانه زاویه‌ای:

تا به حال ما بحث تکانه زاویه‌ای را در مورد یک نوع تکانه زاویه‌ای کردیم و گفتیم اگر تکانه سیستم J باشد در آن صورت دوران این سیستم حول راستای $\hat{n}$ به اندازه φ با عملگر D نشان داده می‌شود:

$$J \to D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}\varphi}$$

و اگر بخواهیم معرف تکانه زاویه‌ای باشد باید در رابطه جابجایی مقابل صدق کند: خاصیت $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$

حال بحث در مورد تکانه زاویه‌ای بیش از یک مورد است یعنی به دو صورت: یکی در مورد یک ذره خاص که هم می‌تواند تکانه زاویه‌ای مداری داشته باشد و هم اسپین (S). یک مورد دیگر این است که سیستم شامل چند ذره داریم که یک ذره دارای تکانه زاویه‌ای J_1 و دیگری J_2 است، حال این سیستم دارای تکانه زاویه‌ای J می‌باشد. در اینجا با جمع اندازه حرکت زاویه‌ای سروکار داریم. بنابراین این اجزایی که با هم جمع شده مستقلند در رابطه با دو ذره یا یک ذره باشند ولی در هر حال نکته‌ای که برای هر دو وجود دارد این است که این تکانه زاویه‌ای‌ها با هم کاری ندارند و با هم جابجا می‌شوند.



$\vec{L}, \vec{S}$ مستقل هستند یعنی $[L,S]=0$

J_1, J_2 مستقل هستند یعنی $[J_1,J_2]=0$

یک نحوه بهتری هم می‌توان این جابجایی را بیان کرد، اولاً در هر دو این موارد ما می‌توانیم از تکانه زاویه‌ای کل صحبت کنیم

1) $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

2) $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

برای (1)، وقتی $\vec{J}$ بخواهد روی حالتها اثر کند، حالتها دو قسمت دارند، یک قسمت حالت معرف وضعیت ذره از جهت $\vec{L}$ است و یک قسمت از حالت معرف وضعیت ذره از جهت $\vec{S}$ است، بنابراین حالتها، حالتهایی هستند که به صورت ضرب مستقیم را دارند

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ، $\overset{\text{حالتها}}{|\alpha\rangle} = |\underbrace{\vec{x}'}_{\text{موقعیت مکانی}}, \underbrace{\pm}_{\text{موقعیت اسپینی}}\rangle = |x'\rangle \underbrace{\otimes}_{\text{ضرب تانسوری}} |\pm\rangle$

از هم مستقل هستند

ضرب تانسوری یعنی کنار هم قرار دادن دو فضای مختلف بدون ارتباط با یکدیگر

حال که با این طور باشد این عملگرهایی که در این فضا وجود دارند باید یک قسمت روی یکی و قسمت دیگر روی دیگری اثر کند، بنابراین عملگرهای فضای ضرب تانسوری هم باید به صورت ضرب تانسوری دو عملگر باشند.

روی فضای اول اثر می‌کند — روی فضای دوم اثر می‌کند

$$A = \hat{B} \otimes \hat{C} \xrightarrow{\text{پس}} A|\alpha\rangle = (B\otimes C)(|x'\rangle \otimes |\pm\rangle) = B|x'\rangle \otimes C|\pm\rangle$$

بین هم کنش‌های هامیلتونی هستند و هم عملگرهای آن اگر راجع به دو ذره و بیشتر صحبت کنیم (نشان بدهیم که دیگر J فقط J_1 و J_2 نیست)

بنابراین تعریف J را به این صورت می‌نویسیم:

شکل درست:

$$\vec{J} = \vec{L} \otimes 1 + 1 \otimes \vec{S}$$

بنابراین $\vec{J}|\alpha\rangle = (\vec{L} \otimes 1 + 1 \otimes \vec{S})(|x'\rangle \otimes |\pm\rangle) = \vec{L}|x'\rangle \otimes |\pm\rangle + |x'\rangle \otimes \vec{S}|\pm\rangle$

خیلی وقتها برای سادگی این طور می‌نویسیم (اما منظور را فهم باید است):

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

شکل ساده‌نویسی:

$$\underbrace{\vec{J}}_{\vec{L}+\vec{S}}|x'\rangle|\pm\rangle = \vec{L}|x'\rangle|\pm\rangle + |x'\rangle\vec{S}|\pm\rangle$$

برای نوع (۲) همین طور است یعنی وقتی از دو ذره هم صحبت می‌کنیم:

$$|\alpha\rangle = \underbrace{|\alpha\rangle_1}_{\text{حالت ذره ۱}} \otimes \underbrace{|\alpha\rangle_2}_{\text{حالت ذره ۲}}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \vec{J}_2$$

چند نکته را در این شکل نوشتن باید در نظر بگیریم:

۱) اینکه دو جمله J کل با هم جابجا می‌شوند طبیعی است:

$$[L\otimes 1, 1\otimes S] = (L\otimes 1)(1\otimes S) - (1\otimes S)(L\otimes 1) = L\otimes S - L\otimes S = 0$$

بی‌معنا نیست که فرض کنیم

۲)

$$[J_i, J_j] = [L_i\otimes 1 + 1\otimes S_i, L_j\otimes 1 + 1\otimes S_j]$$

$$= [L_i\otimes 1, L_j\otimes 1] + \underbrace{[L_i\otimes 1, 1\otimes S_j]}_{\text{طبق بالا}\ 0} + \underbrace{[1\otimes S_i, L_j\otimes 1]}_{\text{طبق بالا}\ 0} + [1\otimes S_i, 1\otimes S_j]$$

با استفاده از: $(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD$:

$$[J_i, J_j] = L_iL_j\otimes 1 - L_jL_i\otimes 1 + 1\otimes S_iS_j - 1\otimes S_jS_i = \underbrace{[L_i, L_j]}_{i\hbar\epsilon_{ijk}L_k}\otimes 1 + 1\otimes\underbrace{[S_i, S_j]}_{i\hbar\epsilon_{ijk}S_k}$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\overbrace{[L_k\otimes 1 + 1\otimes S_k]}^{J_k} = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$$

یعنی این رابطه این است که جمع دو تکانه زاویه‌ای حتماً یک تکانه زاویه‌ای است.

۳)

$$e^{J} = e^{L\otimes 1 + 1\otimes S} \overset{\text{چون با هم جابجا می‌شوند}}{=} e^{L\otimes 1}\, e^{1\otimes S} \qquad \text{I}$$

$$e^{L\otimes 1} = 1\otimes 1 + L\otimes 1 + \frac{1}{2!}\underbrace{(L\otimes 1)(L\otimes 1)}_{L^2\otimes 1} + \frac{1}{3!}L^3\otimes 1 + \dots = (1 + L + \frac{L^2}{2!} + \frac{L^3}{3!} + \dots)\otimes 1$$

پس
$$\begin{cases} e^{L\otimes 1} = e^{L}\otimes 1 & \text{II} \\ e^{1\otimes S} = 1\otimes e^{S} & \text{III} \end{cases}$$

$$\text{I}:\ e^{J} = e^{L\otimes 1}\, e^{1\otimes S}$$

$$\text{I},\text{II},\text{III} \Rightarrow e^{J} = e^{L\otimes 1}\, e^{S\otimes 1} = (e^{L}\otimes 1)(1\otimes e^{S}) \Rightarrow \boxed{e^{J} = e^{L}\otimes e^{S}}$$

عملگر دوران به این صورت نوشته می‌شود:

$$D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}\varphi} = e^{-\frac{i}{\hbar}(L\otimes 1 + 1\otimes S)\cdot\hat{n}\varphi}$$

$$D(\hat{n},\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{L}\cdot\hat{n}\varphi\otimes 1}\, e^{-\frac{i}{\hbar}1\otimes\vec{S}\cdot\hat{n}\varphi} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{L}\cdot\hat{n}\varphi}\otimes e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{S}\cdot\hat{n}\varphi}$$

$$\overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} D(\hat{n},\varphi) = D^{orb}(\hat{n},\varphi)\otimes D^{spin}(\hat{n},\varphi)$$

پس عملگر دوران هم بصورت حاصلضرب دو عملگر در آمد؛

یکی روی قسمت اسپینی اثر می‌کند و دیگری روی قسمت فضایی بنابراین:

$$D(\hat{n},\varphi)|\vec{x},t\rangle = D^{orb}|x\rangle \otimes D^{spin}|t\rangle$$

همین طور اگر یک حالت داشته باشیم، حالتی حاصلضرب دو حالت می‌شود:

$$|\alpha\rangle = |\alpha\rangle_{orb}\otimes|\alpha\rangle_{spin}$$

قاعده‌ای که داریم این است: $(\langle\beta_1|\otimes\langle\beta_2|)(|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle) = \langle\beta_1|\alpha_1\rangle\otimes\langle\beta_2|\alpha_2\rangle$

مولفه حالت مورد نظر برحسب پایه‌ها می‌شود: مولفه + یا − اسپین را می‌دهد که دو مقدار است $\quad \underbrace{\psi_\alpha(\vec{x})}_{\text{تابع موج}}$ با استفاده از قاعده بالا

$$\langle x',\pm|\alpha\rangle = \langle x'|\alpha\rangle_{orb}\otimes\langle\pm|\alpha\rangle_{spin}$$

بنابراین کلاً این طور می‌نویسیم:

$$\langle x',+|\alpha\rangle \equiv \psi_+(x)$$

$|\psi_+(x)|^2$: احتمال یافتن سیستم در نقطه x با اسپین بالا است

$$\langle x',-|\alpha\rangle \equiv \psi_-(x)$$

$|\psi_-(x)|^2$: احتمال یافتن سیستم در نقطه x با اسپین پایین است

مرسوم است که این دو تابع موج را به این صورت بنویسند:

$$\begin{pmatrix}\psi_+(x)\\ \psi_-(x)\end{pmatrix}$$

شبیه این کار است $\rightarrow \chi = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow$

$|\alpha|^2$ ؛ احتمال یافتن سیستم در نقطه x با اسپین بالا (+)

$|\beta|^2$ ؛ احتمال یافتن سیستم در نقطه x با اسپین پایین (−)

در اینجا هم به خاطر اینکه $|\psi_+(x)|^2$ احتمال یافتن سیستم در اسپین بالا است می‌توان همین تعبیر را برای آن داشت ولی در ضمن تابع مکان هم هست

پس تک اسپینور تابع مکان در یک نقطه x می‌باشد

نکته این است که به جای حالت $|x'\rangle$ می‌توان از حالتهای $|nlm\rangle$ استفاده کرد.

ویژه‌حالت فضایی

$|x'\rangle \rightarrow |nlm\rangle$ ، که در اینجا اینها معرف حالت هستند

$L^2|nlm\rangle = l(l+1)\hbar^2|nlm\rangle$

$L_z|nlm\rangle = m\hbar|nlm\rangle$

n هم می‌تواند در رابطه ویژه حالت یک چیز دیگر مثل انرژی باشد.

$\hat{n} \rightarrow x' \rightarrow$ نشد این کار

بنابراین ویژه حالتهای مکانی $|x'\rangle$ را می‌توان با ویژه حالتهای $|nlm\rangle$ جایگزین کرد و از آنها استفاده کرد، در این صورت:

$|\vec{x},\pm\rangle \rightarrow |lm,\pm\rangle \rightarrow$ این حالت، ویژه حالت مشترک L^2 و L_z ، S^2 و S_z است

یا $|nlm,\pm\rangle$

بنابراین اگر از ضرب کردن حالتهای $|nlm\rangle$ در $|\pm\rangle$ حالتهای جدید را بسازیم این حالتها، ویژه حالت مشترک این ۴ اپراتور هستند ولی این تنها انتخاب نیست و می‌توان طور دیگری آنها را ساخت.

می‌توان حالتها را ویژه حالت مشترک L^2 ، S^2 ، J^2 و J_z هم ساخت. سؤال این است که چطور ویژه حالت این چهار اپراتور (L^2 ، S^2 ، J^2 و J_z) را بسازیم؟

برای ساده‌تر شدن بحث، $S_1=J_1$ ، $J=S_1+S_2$ می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که دو ذره داریم که ذره اول یک اسپین دارد و ذره دوم یک اسپین دیگر و حال صحبت از اسپین کل می‌کنیم که می‌شود:

$$\vec{J} = \vec{S}_1\otimes 1 + 1\otimes\vec{S}_2$$

که $[S_1,S_2]=0$

حال می‌خواهیم برای ترکیب اپراتورهای دو اسپین، پایه را بسازیم و ویژه حالتهای مشترک آنها را بدست آوریم.

حالتها عبارت‌اند: $|\alpha\rangle = \underbrace{|\alpha\rangle_1}_{\text{مربوط به ذره ۱}}\otimes\underbrace{|\alpha\rangle_2}_{\text{مربوط به ذره ۲}} = \underbrace{|\pm\rangle_1\otimes|\pm\rangle_2}_{\text{هر دو از نوع } |\pm\rangle \text{ هستند}} = \underbrace{|\pm,\pm\rangle}_{\text{می‌توان این طور نمایش داد}}$

مثلاً نمایش اسپینی آنها می‌شود:

$$|+,+\rangle = |+\rangle\otimes|+\rangle \doteq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ضرب تانسوری ماتریسها یعنی هر عنصر ماتریس اولی را در کل ماتریس دومی ضرب کنیم.

$$|+,-\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

در ضرب دو تا اسپین، اسپین‌ها ماتریس‌های ۴تایی می‌شوند.

$$|-,+\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

این ویژه حالتهایی که ساختیم از نوع ویژه حالتهای مشترک نوع اول هستند.

$$|-,-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ویژه حالتهای مشترک $\vec{S}_1^2 , S_{1z} , \vec{S}_2^2 , S_{2z}$ است.

اینها را که این طور نشان می‌دهیم: $|m_1, m_2\rangle = \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ (I)

با نشان کامل‌تر
$|S_1, S_2, m_1, m_2\rangle \to |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, +, +\rangle$

یعنی دو ویژه اسپینی داریم m_1 مربوط به ذره ۱ و m_2 مربوط به ذره ۲

این دسته حالتها یعنی ویژه حالتهای $|m_1, m_2\rangle$، ویژه حالتهای مشترک $\vec{S}_1^2$ و S_{1z} و $\vec{S}_2^2$ و S_{2z} است، چون $|m_1, m_2\rangle$ را این طور می‌نویسیم: $|m_1, m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$

$|m_1\rangle$ ویژه حالت S_1^2 و S_{1z} است و $|m_2\rangle$ ویژه حالت S_2^2 و S_{2z} است.

* می‌خواهیم ویژه حالتهای مشترک S_1^2 و S_2^2 و $\vec{S}^2 = \vec{J}^2$ و $S_z = J_z$ را بسازیم، فضای S_1, S_2 چهار بعدی هستند و چهار پایه دارند

حال می‌خواهیم یک سری چهار بردار (I) چهار بردار دیگر یعنی ترکیبی از این پایه‌ها بگیریم به گونه‌ای که پایه‌های جدید ویژه کتهای مشترک S_1^2، S_2^2، S^2 و S_z باشند. اول باید ببینیم اصلاً می‌توان این کار را کرد!

شرط لازم برای این کار را اگر این است که این چهار عملگر با هم جابجا شوند.

$[S_i \otimes 1, 1 \otimes S_j] = 0$ $\quad S_1$ و S_2 که هر مولفه‌هایشان با هم جابجا می‌شوند.

$$\left.\begin{aligned} \vec{S}_1^2 &= (S_{1x}^2 + S_{1y}^2 + S_{1z}^2) \otimes 1 \\ \vec{S}_2^2 &= 1 \otimes (S_{2x}^2 + S_{2y}^2 + S_{2z}^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow [\vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2] = 0$$

بنابراین، چون هم مولفه‌هایشان با هم جابجا می‌شوند.

خودمان نشان دهیم
$$\begin{cases} [J_z, S_1^2] = 0 \\ [J^2, S_1^2] = 0 \end{cases}$$

بنابراین این چهار عملگر با هم جابجا می‌شوند پس می‌توان ویژه حالت مشترک برای آنها ساخت

S^2 را هم می‌توان این طور نوشت:

$$\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\underbrace{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}_{S_{1z}S_{2z} + \frac{1}{2}(S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+})}$$

درس یادمان باشد

$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, |j, m \pm 1\rangle$$

می‌خواهیم از چهار حالت رابطه (I) قدیم به چهار حالت جدید برویم که پایه‌های جدید ما باشند یعنی:

$\{|a_k\rangle\} \to \{|b_k\rangle\}$

ویژه حالتهای جدید را با $|S, m\rangle$ نشان می‌دهیم که ویژه حالت این چهار اپراتور باید باشد:

این دو را باید چک کنیم
$$\begin{cases} S^2 |S, m\rangle = S(S+1)\hbar^2 |S, m\rangle & (1) \\ S_z |S, m\rangle = m\hbar |S, m\rangle & (2) \end{cases}$$

چک کردن نمی‌خواهد چون نیم اسپین‌ها را می‌دانیم
$$\begin{cases} S_1^2 |S, m\rangle = S_1(S_1 + 1)\hbar^2 |S, m\rangle = \tfrac{3}{4}\hbar^2 |S, m\rangle & (3) \\ S_2^2 |S, m\rangle = S_2(S_2 + 1)\hbar^2 |S, m\rangle = \tfrac{3}{4}\hbar^2 |S, m\rangle & (4) \end{cases}$$

(با $S_1 = \tfrac{1}{2}$ و $S_2 = \tfrac{1}{2}$)

این حالتهای جدید حتماً ترکیبی از حالتهای قبلی هستند و باید این ترکیبات را پیدا کنیم.

ادعا می‌کنیم که اولین $|S,m\rangle$ به صورت $|++\rangle$ است:

این حالت ($|++\rangle$) حتماً ویژه‌حالت S_1^2 و S_2^2 است چون از دسته حالت قدیم هستند که این خاصیت را داشتند پس چک کردن نمی‌خواهد اصلاً:

$$S_1^2|m_1,m_2\rangle = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)\hbar^2|m_1,m_2\rangle = \tfrac{3}{4}\hbar^2|m_1,m_2\rangle$$

بنابراین ترکیب آنها هم همین می‌شود

چون آنها تبهگن هستند پس:

$$S_1^2\sum_{m_1 m_2} c_{m_1,m_2}|m_1,m_2\rangle = \tfrac{3}{4}\hbar^2\sum_{m_1 m_2} c_{m_1,m_2}|m_1,m_2\rangle$$

این خاصیت حالتهای تبهگن است که ترکیب حالتهای تبهگن باز هم ویژه‌کت می‌باشد و اینها تبهگن هستند چون همه آنها از جهت S_1^2 و S_2^2 یک ویژه‌مقدار دارند که هم $\tfrac{3}{4}\hbar^2$ است. پس ③ و ④ چک کردن نمی‌خواهد.

② هم چک کردن نمی‌خواهد چون S_z هم روی هر ترکیبی اثر کند می‌شود:

$$S_z|\alpha\rangle = S_{1z}|\alpha\rangle + S_{2z}|\alpha\rangle = \sum \underbrace{S_{1z}|m_1\rangle}_{m_1\hbar}\otimes|m_2\rangle + \sum|m_1\rangle\otimes\underbrace{S_{2z}|m_2\rangle}_{m_2\hbar} = (m_1+m_2)\hbar|\alpha\rangle$$

مثلاً:

$$|\alpha\rangle = |+-\rangle + |-+\rangle$$

$$S_z|\alpha\rangle = S_z|+-\rangle + S_z|-+\rangle = (S_{1z}+S_{2z})|+-\rangle + (S_{1z}+S_{2z})|-+\rangle$$

$$= (\cancel{\tfrac{1}{2}\hbar} - \cancel{\tfrac{1}{2}\hbar})|+-\rangle + (-\cancel{\tfrac{1}{2}\hbar} + \cancel{\tfrac{1}{2}\hbar})|-+\rangle = 0|\alpha\rangle = 0$$

$(S_{1z}+S_{2z})$

می‌خواهیم ببینیم هر ترکیبی از $|m_1,m_2\rangle$ بگیریم یک ویژه‌حالت S_z باشد:

$$S_z|m_1,m_2\rangle = (m_1+m_2)\hbar|m_1,m_2\rangle$$

بنابراین: $S_z|\alpha\rangle = \sum c_{m_1,m_2}\underbrace{(m_1+m_2)}_{M}\hbar|m_1,m_2\rangle = M\hbar\sum c_{m_1,m_2}|m_1,m_2\rangle = M\hbar|\alpha\rangle$

حالا اگر ترکیبی که انتخاب شده ترکیبهایی باشد که جمع به ازای هم مقادیر m_1 و m_2 بگیرد، m_1 و m_2 هایی را بگیرد که جمعشان ثابت باشد. بنابراین اگر $|+-\rangle$ بدهیم جمع آنها صفر است و باید ترکیب آن را با $|-+\rangle$ بگیریم که آن هم صفر است. پس ترکیب باید ترکیبهایی باشند که جمع m_1 و m_2 ثابت باشد.

بنابراین هر ترکیبی از $|m_1,m_2\rangle$ بگیریم ویژه‌کت S_1^2 و S_2^2 حتماً هست ولی ترکیباتی که ضرایب آنها طوری باشند که جمع m_1 و m_2 ثابت باشند ویژه‌کت S_z هم هست. پس فقط باید معادله ① را چک کنیم.

برگردیم سر کت‌مان در مورد $|++\rangle$. این حالت از نوع ویژه‌کتهای $|S,M\rangle$ است (ادعا می‌کنیم)

برای S_1^2 و S_2^2 چک کردن نمی‌خواهد برای S_z هم درست است چون فقط یک جمله است و ترکیب حالات نیست.

$$S_z|++\rangle = \hbar|++\rangle$$

پس فقط باید ثابت کنیم که ویژه کت S^2 هم هست.

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 \cdot S_2$$

$$\underbrace{}_{S_{1z}S_{2z} + \frac{1}{2}(S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+})}$$

در مورد S^2، $|++\rangle$ طبق معادله روبرو ویژه کت S_1^2 و S_2^2 حتما هست، ویژه کت $S_{1z}S_{2z}$ هم حتما هست.

پس فقط باید دو جمله آخر را چک کنیم

$$\to S^2|++\rangle = \dots\dots + \cancel{S_{1+}|+\rangle} \otimes S_{2-}|+\rangle + S_{1-}|+\rangle \otimes \cancel{S_{2+}|+\rangle}$$

پس این دو جمله هم خودشان تأثیر ندارند

$$S^2|++\rangle = 1(1+1)\hbar^2|++\rangle = 2\hbar^2|++\rangle$$

اگر دقیقا نگاه کنیم می‌شود:

$$\boxed{|++\rangle = |S=1, m=1\rangle}$$

بنابراین حالت $|++\rangle$ بدین صورت است

پس یک حالت $S=1$ در سیستم داریم یعنی از جمع $s_1=\frac{1}{2}$ و $s_2=\frac{1}{2}$، اسپین ۱ درست شد. حال اسپین ۱ درست شد m آن می‌تواند ۱، ۰، ۱- باشد. $m=1$ را یافتیم، بقیه را چطور بسازیم؟ برای یافتن آنها S_- را روی آن اثر می‌دهیم

$$S_-|++\rangle = (S_{1-} + S_{2-})|++\rangle \quad \text{(I)}$$

با در نظر گرفتن

$$S_-|1,1\rangle = \hbar\underbrace{\sqrt{(1+1)(1-1+1)}}_{\sqrt{2}}|1,0\rangle \quad \text{(II)}$$

s (j)، m (m)

$$\text{(I)}: \begin{cases} S_{1-}|++\rangle = \underbrace{S_{1-}|+\rangle}_{\hbar\sqrt{(\frac12+\frac12)(\frac12-\frac12+1)}|-\rangle} \otimes |+\rangle = \hbar|-\rangle \otimes |+\rangle = \hbar|-+\rangle \\ S_{2-}|++\rangle = \hbar|+-\rangle \end{cases}$$

به همین صورت

$$\text{(I)} \Rightarrow S_-|++\rangle = \hbar(|+-\rangle + |-+\rangle) \quad \text{(III)}$$

$$\text{(III)} = \text{(II)} \Rightarrow \boxed{|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)}$$

این $|1,0\rangle$ حتما ویژه حالت S_z هم هست چون ترکیبی از حالاتی شده است که جمع m هایشان برابر (صفر شده) است.

اگر روی $|1,0\rangle$ دوباره S_- را بزنیم بدست می‌آید

$$S_-|1,0\rangle \Rightarrow \boxed{|1,-1\rangle = |--\rangle}$$

پس تا به حال سه state را یافتیم $|1,1\rangle$، $|1,0\rangle$، $|1,-1\rangle$. این سه state ای که بدست آوردیم یکی $|++\rangle$ است یکی $|--\rangle$ است دیگری ترکیبی از $|+-\rangle$ و $|-+\rangle$ است. ما باید چهار ترکیب مستقل از هم بسازیم. تنها حالتی که می‌ماند یک ترکیب دیگر از $|+-\rangle$ و $|-+\rangle$ است. بنابراین این حدس را می‌زنیم:

$$|S,m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

چک می‌کنیم: $S_z|S,m\rangle = 0|S,m\rangle$ ← چون جمع m ها در $|+-\rangle$ و $|-+\rangle$ هر کدام صفر هستند

$S^2|S,m\rangle = 0|S,m\rangle$ ← می‌توان بدست آورد

پس این هم m این ترکیب و هم s آن صفر شد. پس در حقیقت:

$$\boxed{|S,m\rangle = |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)}$$

بنابراین به این چهار حالت رسیدیم:

اگر بخواهیم ویژه حالت این ۴ اپراتور باشد $S_1^2, S_{1z}, S_2^2, S_{2z}$:
$$\begin{cases}|++\rangle\\ |+-\rangle\\ |-+\rangle\\ |--\rangle\end{cases}$$

اگر بخواهیم ویژه حالت این ۴ اپراتور باشد S^2, S_z, S_1^2, S_2^2 :
$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}|1,1\rangle = |++\rangle\\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)\\ |1,-1\rangle = |--\rangle\end{array}\right\} S=1\\ \left.|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)\right\} S=0\end{cases}$$

اصطلاحاً می‌گوییم اگر دو اسپین ½ را داشته باشیم و یک فضای ۴ بعدی داریم که از لحاظ ... تبدیل به یک اسپین ۱ و یک اسپین ۰ می‌شود

$$\frac12 \otimes \frac12 = \underset{\text{triplet}}{1} \oplus \underset{\text{singlet}}{0}$$

* به ضرایب بسط $|S,m\rangle$ برحسب $|m_1 m_2\rangle$، ضرایب کلبش گوردون (Clebsch-Gordan) می‌گوییم.

یعنی مثلاً $|1,1\rangle$ $(1,-1)$ برحسب $|m_1 m_2\rangle$ ها دارای یک ضریب ۱ است و بقیه صفر شد، برای $|1,0\rangle$ و $|0,0\rangle$ ضرایب $\frac{1}{\sqrt2}$ شد.

ضرایب کلبش گوردون خیلی اهمیت دارند. این ضرایب در این حالت $\langle m_1,m_2|S,m\rangle$ هستند یعنی وقتی برحسب ویژه حالت‌های $|m_1 m_2\rangle$ بسط می‌دهیم:

$$|S,m\rangle = \sum \underbrace{\langle m_1,m_2|S,m\rangle}_{C.G = \text{ضرایب بسط}} |m_1,m_2\rangle$$

در فصل ۱ داشتیم که اگر از یک مجموعه $\{|a_k\rangle\}$ به یک مجموعه $\{|b_k\rangle\}$ برویم، این کار توسط عملگر تبدیل صورت می‌گیرد:

$\{|a_k\rangle\} \longrightarrow \{|b_k\rangle\}$ عملگر تبدیل: $U = \sum_k |b_k\rangle\langle a_k|$

عناصر عملگر تبدیل: $U_{k\ell} = \langle a_k|b_\ell\rangle$

$X'_{\text{فضای } b} = U^\dagger X_{\text{فضای } a} U$

پایه‌های قدیم پایه‌های جدید

$$U_{k\ell} = \langle a_k|b_\ell\rangle \xrightarrow{\text{اینجا}} \langle m_1,m_2|S,m\rangle$$

* بنابراین تعبیر دیگر این است که ضرایب C.G عناصر ماتریس تبدیل پایه $|m_1 m_2\rangle$ به $|S,m\rangle$ هستند.

این بحثی که راجع به S_1 و S_2 کردیم راجع به هر دو عملگر مثل J_1 و J_2 هم درست است، پس خیلی سریع این موضوع را بیان می‌کنیم:

$$\vec J = \vec J_1 \otimes 1 + 1 \otimes \vec J_2$$

$$J_1^2, J_{1z} \xrightarrow{\text{ویژه حالتها}} |j_1,m_1\rangle$$
$$J_2^2, J_{2z} \xrightarrow{\text{ویژه حالتها}} |j_2,m_2\rangle$$
$$\longrightarrow \{|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle = |j_1,m_1\rangle \otimes |j_2,m_2\rangle\}$$

این‌ها ویژه حالت‌های مشترک $\vec J_1^2, \vec J_2^2, \vec J_{1z}, \vec J_{2z}$ هستند.

در حالت قبل (یک شبیه) تعداد پایه‌ها ۴ تا بود، اما اینجا بیشتر است و برابر: $(2j_1+1)(2j_2+1)$: تعداد پایه‌ها

حال دوباره می‌خواهیم ویژه‌کت مشترک $\vec{J}^2$ و J_z و $\vec{J}_1^2$ و $\vec{J}_2^2$ را بسازیم.

می‌توان نشان داد که این ۴ عملگر با هم جابجا می‌شوند: J_z چون $J_{1z}+J_{2z}$ است واضح است که جابجا می‌شود. برای J^2 هم به صورت زیر می‌نویسیم:

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2\underbrace{J_1 \cdot J_2}_{J_{1z}J_{2z} + \frac{1}{2}(J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+})}$$

همانند قبل می‌توان این موضوع را اثبات کرد.

$$[J^2, J_1^2] = 0$$

بنابراین همانند قبل می‌توان برای آنها ویژه‌کت مشترک ساخت که به صورت $|j_1 j_2 ; jm\rangle$ نشان می‌دهیم که در روابط

$$\text{شرط}\begin{cases} J^2 |j_1 j_2 ; jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j_1 j_2 ; jm\rangle \\ J_z |j_1 j_2 ; jm\rangle = m\hbar |j_1 j_2 ; jm\rangle \end{cases}$$

این است که ویژه‌کت J_1 و J_2 هستند را آنها ساخته شده‌اند و چون ویژه‌حالت مشترک J^2 و J_z است jm هم می‌گذاریم. به کمک آنهایی که در شرط بالا را داشته باشند. حال می‌خواهیم $|j_1 j_2 ; jm\rangle$ را بسازیم:

چند چیز را از قبل می‌توانیم حدس بزنیم. اولاً از ترکیبی از $|m_1, m_2\rangle$ها باشد، ثانیاً ویژه‌کت J_1^2 و J_2^2 هست، اگر ترکیبی از stateهایی باشد که جمع m_1 و m_2 آنها ثابت باشد، ویژه‌کت J_z هم هست، پس فقط باید J^2 را چک کنیم.

$$|j_1 j_2 ; jm\rangle \xrightarrow[\text{این طور می‌نویسیم}]{\text{برای سادگی}} |jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} \underbrace{\langle m_1 m_2 | jm\rangle}_{\text{ضرایب C.G}} |m_1 m_2\rangle$$

اگر ضرایب C.G را به دست آوریم، stateها هم معلوم می‌شوند.

اگر روی حالت $|jm\rangle$ اپراتور $J_z - J_{1z} - J_{2z}$ را اثر دهیم:

$$(\underbrace{J_z}_{J_{1z}+J_{2z}} - J_{1z} - J_{2z})|jm\rangle = 0 \quad (1)$$

صفر می‌شود چون $J_z = J_{1z} + J_{2z}$

از طرف دیگر رابطه (1) را از سمت چپ در $\langle m_1 m_2|$ ضرب کنیم:

$$\langle m_1 m_2 | (J_z \overset{\text{هرمیتی هستند}}{-} J_{1z} - J_{2z}) | jm\rangle = 0$$

$|m_1 m_2\rangle$ ویژه‌حالت J_{1z} و J_{2z} هستند و $|jm\rangle$ ویژه‌حالت J_z است پس ⟵

$$\hbar(m - m_1 - m_2) \underbrace{\langle m_1 m_2 | jm\rangle}_{\text{ضریب C.G}} = 0$$

اگر بخواهیم ضریب C.G مخالف صفر باشد باید ضریب آن صفر باشد پس:

قاعده ۱:

ضریب C.G ($\langle m_1 m_2 | jm\rangle$) به شرطی مخالف صفر است که $m = m_1 + m_2$ باشد. یعنی وقتی می‌خواهیم بسط دهیم فقط برحسب حالت‌هایی می‌توان بسط داد که جمع $m_1 + m_2$ آنها ثابت باشد و برابر m باشد. (همانند قبل)

قاعده ۲:

ضریب C.G ($\langle m_1 m_2 | jm\rangle$) به شرطی غیر صفر است که $j_1 + j_2 \geq j \geq |j_1 - j_2|$ باشد.

برای اثبات قاعده، بطور شهودی واضح است که درست است. به طور خیلی غیردقیق و شهودی اگر $\vec{J}$ها را بردار کلاسیک فرض کنیم

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ اگر Jها را کلاسیک فرض کنیم

J_{max}: وقتی است که $\Rightarrow \vec{J}_1 \parallel \vec{J}_2$ $\quad \xrightarrow{J_2}\xrightarrow{J_1}$ ، $\xrightarrow{\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2}$

J_{min}: وقتی است که $\Rightarrow \vec{J}_1 \parallel \vec{J}_2$ $\quad \xleftarrow[J_2]{}\xrightarrow{J_1}$ ، $\xrightarrow{\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2}$

بنابراین کم و بیش واضح است که اگر ویژه مقدارها را نگاه کنیم، حداکثر آن J_1+J_2 است و حداقل آن اختلاف آنها است.

جمع‌بندی این موضوع را نشان می‌دهیم. می‌خواهیم بگوییم اگر محدوده j به صورت قاعده ۲ باشد، بُعد فضا درست است.

بُعد فضای $|m_1 m_2\rangle$ برابر $(2j_1+1)(2j_2+1)$ است. حال فضای جدید $|jm\rangle$ چون می‌خواهد بردارها را در فضا بگیریم بپوشاند پس باید همان بُعد را داشته باشد.

به ازای هر j، تعداد $|jm\rangle$ها برابر $2j+1$ است (چون این ویژه حالت‌ها ویژه حالت تکانه زاویه‌ای است) بنابراین تعداد کل $|jm\rangle$ها برابر می‌شود با جمع $(2j+1)$ها به ازای jهای مختلف یعنی:

$$\sum_j (2j+1) \xrightarrow[\text{بیان شده باشد}]{\text{فرض کنیم } j \text{ در محدوده}} \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = 2\sum j + \underbrace{(2j_2+1)}_{j_1+j_2-(j_1-j_2)}$$

$j_1 \geqslant j_2$ که $|j_1-j_2| = j_1-j_2$ و مقدار بزرگتر را برابر j_1 بنامیم

$$\Rightarrow \sum_j (2j+1) = 2\overbrace{\left[(j_1-j_2)+(j_1-j_2+1)+\cdots(j_1+j_2)\right]}^{\sum_{j_1-j_2}^{j_1+j_2} j} + 2j_2+1$$

$$= 2(j_1-j_2)(2j_2+1) + 2\underbrace{\left[0+1+2+\cdots+2j_2\right]}_{2j_2(2j_2+1)/2} + 2j_2+1 = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

یک روش دیگر (در ضمیمه کتاب) هم وجود دارد که اصولش به این قرار است:

به ازای یک m معین، ابتدا حالت مقابل را در نظر می‌گیریم: $|m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle$

می‌توانیم ببینیم که این حالت، ویژه کت J^2 و J_z هست:

$$J^2 |m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle = (j_1+j_2)(j_1+j_2+1)\hbar^2 |m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle$$

پس این حالت ویژه کت J^2 با ویژه مقدار j_1+j_2 هست.

J_z را هم حساب کنیم، دارای ویژه مقدار مقابل می‌شود: $m = m_1 + m_2 = j_1 + j_2$

بنابراین ویژه حالت مورد نظر در حقیقت به این شکل است:

$$|m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle = |j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle \quad \text{II}$$

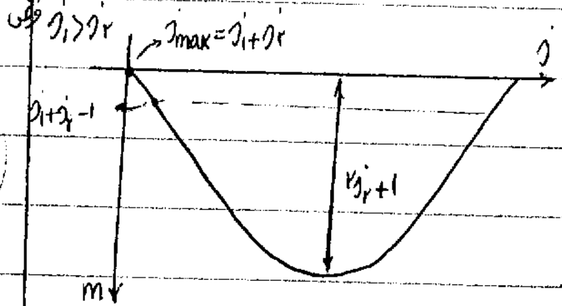
یعنی در مجموعه Jها این کت مربوط به j بالایی است و بالاترین m. این حالت شبیه $\leftarrow$ $|1,1\rangle = |++\rangle$

حال روی کت (II) ، J_- را می‌زنیم و با تأثیر J_- می‌توان تمام حالتهای $|j=j_1+j_2, m\rangle$ را حساب کرد.

$|m_1=j_1, m_2=j_2-1\rangle \pm |m_1=j_1-1, m_2=j_2\rangle$

j \ m				
	$\lvert j_1+j_2, \overset{m}{j_1+j_2}\rangle$	$\lvert j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$ *	. . . .	$\lvert j_1+j_2, -(j_1+j_2)\rangle$
	——	$\lvert j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle$ **	$\lvert j_1+j_2-1, -(j_1+j_2-1)\rangle$ ***	——

* حالت دوم ترکیبی است از دوتا $|m_1 m_2\rangle$ ها بطوریکه می‌خواهیم m آن برابر j_1+j_2-1 باشد پس فقط می‌تواند ترکیب نوشته شده باشد (با علامت +) و از ترکیب دیگر یک ترکیب دیگر هم می‌توان نوشت (علامت −) که آن ترکیب را اگر J^2 را روی آن بزنیم j آن می‌شود j_1+j_2-1 (**). حال روی حالت جدید (**) J_- را می‌زنیم و تمام حالتهای مربوط به آن j ولی با m های مختلف را بدست می‌آید تا حالت (***) و برای قسمت بعد دوباره همین کار را انجام می‌دهیم تا آخر.



اگر همین طور جلو برویم، همچین شکلی بدست می‌آید

با کمی ارتفاع که می‌شود تعداد حالتها به ازای یک m معین برابر

$2j_2+1$ می‌شود (با فرض $j_1>j_2$)

شاید این که می‌گوییم این است که محدوده j های مجاز باید چنان باشد

تا همه آنها در این m، حالت داشته باشند پس باید تعداد $2j_2+1$ تا j داشته باشیم

$$j_{max}=\underbrace{j_1+j_2 \,,\; j_1+j_2-1 \,,\; \ldots\ldots \,,\; j_1+j_2-(2j_2)}_{2j_2+1}$$

چون باید همین طور کم کنیم بطوریکه ← تعداد کل برابر $2j_2+1$ شود

پس آخرین j می‌شود $2j_2-0$

بنابراین این قضیه نه تنها ضرایب جمع کردن غیر صفر را داد، محدوده j های این رشته‌ها را هم داد.

پس بطور کلی می‌توانیم این طور بنویسیم:

داشتیم: $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=1\oplus 0$

بطور کلی: $j_1\otimes j_2=(j_1+j_2)\oplus(j_1+j_2-1)\oplus\cdots\cdots|j_1-j_2|$

جلسه بیست و ششم: ۸۴/۹/۲۹

جلسه گذشته در مورد جمع تکانه زاویه‌ای بحث کردیم و گفتیم که اگر دو سیستم با فضای مستقل از هم داشته باشیم (و یا دو ذره و یا یک ذره با فضای مکان و اسپین) که هر کدام یک تکانه زاویه‌ای برای خود داشته باشند

$$\begin{cases} \vec{J}_1 \,,\ |j_1, m_1\rangle \\ \vec{J}_2 \,,\ |j_2, m_2\rangle \end{cases}$$

در آن صورت سیستم کل دارای تکانه زاویه‌ای است که از جمع این تکانه زاویه‌ای ها به دست آمده است:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \vec{J}_2$$

و حالت‌ها هم از حاصل‌ضرب حالت‌های آن دو ساخته می‌شوند:

$$|\alpha\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

$\vec{J}$ کل چون از جبر اندازه حرکت زاویه‌ای تبعیت می‌کند ویژه حالت‌های آن با یک j و m بیان می‌شوند:

$$\vec{J} : |j, m\rangle \longrightarrow \begin{cases} J^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \\ J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \end{cases}$$

$|\alpha\rangle$ را می‌توان طوری ساخت که ویژه کت مشترک این چهار عملگر باشد (البته از نمایش حاصل‌ضربی بگیریم این طور هست):

$$|\alpha\rangle : \{\vec{J}_1^{\,2}, \vec{J}_2^{\,2}, J_{1z}, J_{2z}\} \quad ; \quad |j_1 j_2, m_1 m_2\rangle$$ این طور نشان می‌دهیم

همچنین $|\alpha\rangle$ را می‌توان طوری ساخت که ویژه کت مشترک این چهار عملگر باشد:

$$|\alpha\rangle : \{\vec{J}^{\,2}, \vec{J}_1^{\,2}, \vec{J}_2^{\,2}, J_z\} \quad : \quad |j_1 j_2, jm\rangle$$ این طور نشان می‌دهیم

ثابت کردیم که j در این رابطه می‌تواند این مقادیر را بگیرد:

$$j = j_1 + j_2 \,,\ j_1 + j_2 - 1 \,,\ \ldots\ldots \,,\ |j_1 - j_2| \qquad \text{(I)}$$

$|jm\rangle$ برای ما مجهول است و برای اینکه آن را بدانیم باید بسط آن را داشته باشیم که یعنی باید ضرایب کلبش گوردن را بدانیم:

این طور خلاصه می‌نویسیم: $$|j_1 j_2, jm\rangle : |jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} \underbrace{\langle m_1 m_2 | jm\rangle}_{\text{ضرایب کلبش گوردن (C.G)}} |m_1 m_2\rangle$$

به دست آوردن ضرایب کلبش گوردن کار بسیار مفصلی است. برای ضرایب C.G دو قضیه ثابت کردیم:

1)
$$\langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; jm\rangle \overset{\text{به شرطی}}{\neq} 0 \quad \begin{cases} j = j_1 + j_2 \,,\ j_1 + j_2 - 1 \,,\ \ldots\ldots \,,\ |j_1 - j_2| \\ m = m_1 + m_2 \end{cases}$$
2)

خصوصیت تعامد ضرایب C.G:

چون ← $\langle m_1 m_2 | m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$

دسته کامل

$$\boxed{\sum_{jm} \langle m_1 m_2 | jm\rangle \langle jm | m_1' m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}} \qquad \text{(II)}$$

در مورد ضرایب C.G قرارداد می‌شود که آنها حقیقی هستند.

$\langle m_1' m_2' | jm\rangle$ بخاطر حقیقی بودن ضرایب C.G

۳۳۱

یک رابطه دیگر که بدرد می‌خورد این است که دستگاه‌ها هم بهنجار هستند چون ویژه کت‌های عملگرهای هرمیتی هستند

$\langle jm | j'm' \rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$

بستار تکمیلی

$$\boxed{\sum_{m_1 m_2} \underbrace{\langle jm | m_1 m_2 \rangle}_{\langle m_1 m_2 | jm \rangle} \langle m_1 m_2 | j'm' \rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}} \quad \text{III}$$

به عنوان یک حالت خاص اگر $j=j'$ و $m=m'$ بگیریم:

$$\text{if} \begin{cases} j=j' \\ m=m' \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\sum_{m_1 m_2} (\langle m_1 m_2 | jm \rangle)^2 = 1} \quad \text{IV}$$

نحوه محاسبه ضرایب کلبش گوردون:

برای محاسبه این ضرایب با استفاده تکرار دو قاعده ساده، این ضرایب قابل محاسبه هستند

داشتیم: $|jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle m_1 m_2 | jm \rangle |m_1 m_2\rangle$

روی رابطه بالا $J_\pm$ را اعمال می‌کنیم:

$$J_\pm |jm\rangle = \sum_{m_1' m_2'} \langle m_1' m_2' | jm \rangle (J_{1\pm} + J_{2\pm}) |m_1' m_2'\rangle$$

$\hbar$ ها را از دو طرف ساده می‌کنیم

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m+1)}\, |j, m\pm 1\rangle = \sum_{m_1' m_2'} \Big\{ \sqrt{(j_1 \mp m_1')(j_1 \pm m_1'+1)}\, |m_1' \pm 1, m_2'\rangle + \sqrt{(j_2 \mp m_2')(j_2 \pm m_2'+1)}\, |m_1', m_2' \pm 1\rangle \Big\} \langle m_1' m_2' | jm \rangle$$

طرفین رابطه بالا را در $\langle m_1 m_2|$ ضرب می‌کنیم:

در جمله سمت چپ که ضرب شود ضریب کلبش گوردون را می‌دهد و در جملات سمت راست نتایج زیر را می‌دهد:

جمله اول سمت راست: $\delta_{m_1, m_1' \pm 1}\, \delta_{m_2 m_2'}$

جمله دوم سمت راست: $\delta_{m_1 m_1'},\, \delta_{m_2, m_2' \pm 1}$

به خاطر این دو نتایج دلتا، جمع (Σ) را برمی‌داریم و به جای m_1' و m_2' برحسب m_1 و m_2 می‌گذاریم

$$\boxed{\begin{aligned} \overset{J_+}{\sqrt{(j \mp m)(j \pm m+1)}}\, \langle m_1 m_2 | j, m \pm 1 \rangle &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}\, \langle m_1 \mp 1, m_2 | jm \rangle \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}\, \langle m_1, m_2 \mp 1 | jm \rangle \end{aligned}} \quad \text{V}$$

J_-

رابطه اصلی برای محاسبه ضرایب C.G

این رابطه سه ضریب کلبش گوردون را به هم مربوط کرده است. همه ضرایب کلبش گوردون به شرطی غیر صفر هستند که j دارای رابطه (I) با j_1 و j_2 باشد و m ها هم جمع m_1, m_2 باشند. بنابراین شرط برای جمله اول وقتی غیر صفر است که $m_1 + m_2 = m+1$ (برای J_+) باشد، همین قاعده برای بقیه جملات هم رعایت شده است شرط برای جمله اول سمت راست این شرط وجود دارد که $m_1 - 1 + m_2 = m$

LearnElement.ir

باشد برای جمع کردن $m = m_1 + m_2 - 1$ باشد.

نکته اول:

برای همه این ضرایب یک قیدی وجود دارد که بصورت مقابل است:

$$J_\pm : \boxed{m_1 + m_2 = m \pm 1}$$

نکته دوم:

به ازای یک j_1 و j_2 و j معین می‌خواهیم کار کنیم. مثلاً یک ذره اسپین $\frac{3}{2}$ و یک ذره اسپین ۲ داریم و می‌خواهیم j را حساب کنیم که مقادیر زیر را می‌گیرد:

$$\underline{\tfrac{3}{2}} \otimes \underline{2} = \tfrac{7}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}$$

fix

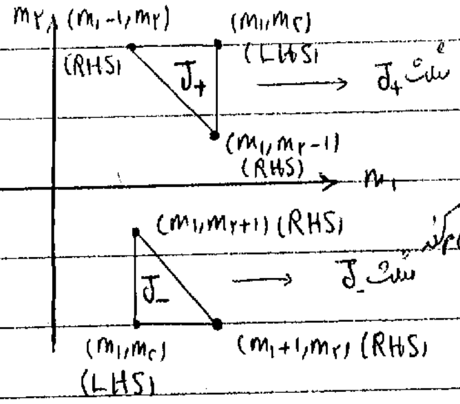
ما می‌آییم ۲ و $\frac{3}{2}$ (j_1 و j_2) را فیکس می‌کنیم و یک j دلخواه را از بین این مقادیر در نظر می‌گیریم. در نظر می‌گیریم

پس به ازای یک j_1 و j_2 و j معین می‌خواهیم ضرایب کلبش گوردن را در بیاوریم.

بنابراین m_1 و m_2 و m (و از آنجا m هم که وابسته به m_1, m_2 است) متغیر هستند و j_1 و j_2 و j معین هستند.

رابطه (IV) که ارتباط بین ضرایب کلبش گوردن است یک نوع رابطه بازگشتی است. این روابط بازگشتی m_1, m_2 های مختلف را بهم مربوط می‌کنند.

حال ببینیم اینها را چطور بهم مربوط می‌کنند. فضای m_1, m_2 را در نظر می‌گیریم. نحوه مربوط کردن آنها به این صورت است:



* رابطه‌ای که مربوط به J_+ بود، m_1, m_2 معین را در بر دارد (ضریب m را در نظر نمی‌گیریم چون جمع m_1, m_2 است) و بر حسب m_1-1, m_2 و m_1, m_2-1 بهم مربوط می‌کند. (مثلث J_+ در شکل)

مثلث J_+: رابطه بین سه تا J_+ را در یک مثلث نشان داد و بر حسب m_1, m_2 ها را بیان می‌کند.

* رابطه‌ای که مربوط به J_- بود، m_1, m_2 معین را در بر می‌دارد و بر حسب m_1+1, m_2 و m_1, m_2+1 بهم مربوط می‌کند.

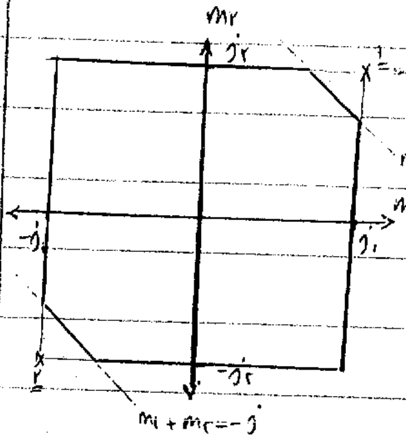
سمت راست

J_+ ← اولین ضریب کلبش گوردن ۲ تا را به هم وصل می‌کند، J_- اولین ضریب کلبش گوردن سمت چپ را پایین را به هم وصل می‌کند.

همین دو عبارت کافی است برای تعیین همه ضرایب کلبش گوردن یک سیستم j_1, j_2 و j معین بر حسب یکی از ضرایب کلبش گوردن. یعنی این روابط برای بیان همه ضرایب C.G در یک j_1, j_2 و j معین) بر حسب یکی از آنها، کافی است.

حال نحوه بیان کردن ضرایب C.G توسط این رابطه (V) را بررسی می‌کنیم:

در فضای m_1-m_2 به ازای هر ضریب C.G یک نقطه می‌توانیم بگذاریم چون هر ضریب C.G یک سری عدد صحیح دارد که j_1 و j_2 و j و ...



شکلی هستند m_1 و m_2 را که در فضای دوبعدی نشان می‌دهیم و m که جمع m_1 و m_2 است. پس هر ضریب C.G یک مربع و یک نقطه‌ای است و می‌توان با یک نقطه آن را نشان داد. حال ببینیم که محدوده m_1 و m_2 چه مقدار هستند؟
محدوده m_1 حداکثر j_1 است و حداقل $-j_1$، محدوده m_2 هم حداکثر j_2 و حداقل $-j_2$ است. نقاط درون مستطیل تقریباً ضرایب C.G هستند که باید تعیین شوند. البته یک شرط هم وجود دارد و آن این است که m آزاد نیست! یعنی m آزاد نیست:

$$-j \leq m \leq j$$

$\langle m_1 m_2 | j m \rangle$: ضریب C.G

$m_1+m_2=m$

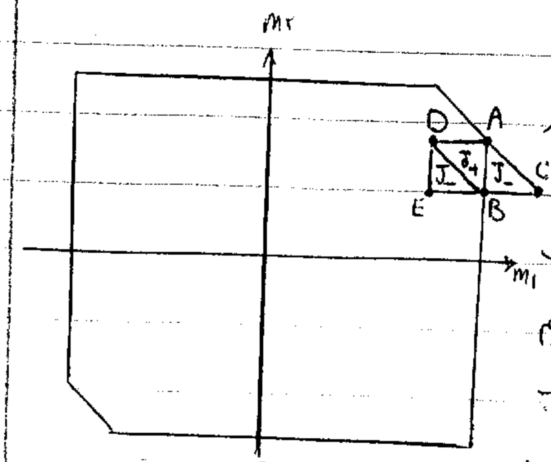
بنابراین در ضریب کلبش گوردن روی m یک شرط وجود دارد بین m_1 و m_2 ها هم که آزاد نیستند چون $m_1+m_2=m$ هستند که m در محدوده بالا هست.

بنابراین:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)_{max}=j\\(m_1+m_2)_{min}=-j\end{cases}$$

پس در فضای m_1 و m_2 ممکن است نقطه ۱ (در شکل) قابل قبول نباشد چون $m_1=j_1$ و $m_2=j_2$ است پس $m_1+m_2=j_1+j_2$ می‌شود ولی ما این فضا را به ازای j_1 و j_2 و j معین می‌کنیم، اما j معین که همیشه j_1+j_2 نیست و ممکن است بین j_1+j_2 تا $|j_1-j_2|$ باشد. پس آن نقطه این طور است که فقط داریم در مورد حالت $j=j_1+j_2$ صحبت می‌کنیم. بنابراین نقطه ۱ همیشه قابل قبول نیست و با یک خط $m_1+m_2=j$ می‌کشیم و نقاطی که خارج آن هستند در j معین وارد نمی‌شوند. به همین ترتیب برای راس مقابل (نقطه ۲) هم یک خط $m_1+m_2=-j$ می‌کشیم. پس فضای ما داخل مستطیلی بوده است که دو گوشه آن زده شده است.

ما باید همه این نقاط را پیدا کنیم، ادعا این است که همه این نقاط با استفاده از دو رابطه (V) قابل محاسبه بر حسب یکی از آنها هست. با این شکل عمل می‌کنیم:



فرض کنیم می‌خواهیم همه نقاط را بر حسب نقطه A بدست آوریم. این کار را می‌کنیم که یک شفت J_- با نقطه A تشکیل می‌دهیم و m_1 و m_2 ها را طوری می‌گیریم که نقطه بالایی شفت روی A بیفتد. حال رابطه شفت J_- سه نقطه A، B و C را به هم مربوط می‌کند ولی ما طوری گرفتیم که یکی از این نقاط (نقطه C) خارج این ناحیه قرار گرفته پس ضریب C.G مربوط به آن نقطه صفر است. بنابراین با این شفت B بر حسب A بدست می‌آید و C دیگر در کار نیست. بعد یک شفت J_+ تشکیل می‌دهیم. A که معلوم فرض شده، B هم که بر حسب A

A بدست آمده پس D هم طبق رابطه‌ای که برای شیفت J_+ داریم برحسب A بدست می‌آید. دوباره یک شیفت J_- می‌دهیم که به‌ازای آن B و D معلوم است و از آن E برحسب A بدست می‌آید.

A ضریب کلبش گوردن متناسب با آن که معلوم است شرح $\langle m_1 m_2 | j, m\pm1\rangle$.

مثال:

$$\begin{cases} j_1 = l \\ j_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow j = l+\frac{1}{2},\ l-\frac{1}{2}$$

به‌ازای j_1 و j_2، j و m معین می‌خواهیم. j را $l+\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم

در این شکل خاص چون j را ماکزیمم گرفتیم پس نقطه A در سمت راست وجود ندارد.

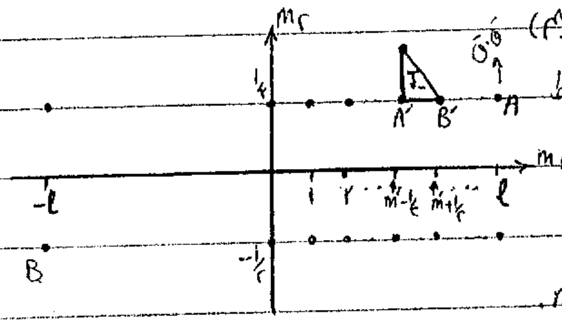
به‌ازای $j = l+\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} m_2 = \pm\frac{1}{2} \\ m_1 = l, \dots, -l \end{cases}$$

ارتباط بین دو نقطه را با یک شیفت J_- به صورت نشان داده شده برقرار کردن

چون یکی از نقطه‌ها بیرون محدوده هست پس ضریب C.G مورد نظر آن صفر است پس

یکی را برحسب دیگری می‌نویسیم و این کار را با J_+ هم می‌توانیم انجام دهیم



* مهم این است که شروع کار را طوری شروع کنیم که یکی از نقاط صفر شود یکی برحسب دیگری بدست آید.

نقاط A' و B' را در نظر می‌گیریم: برای نقطه A'، m_1 را $m'-\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم پس برای نقطه B': می‌شود $m'+\frac{1}{2}$.

با این فرض که برای m_1 در نظر گرفتیم، m' حتماً اعداد نیمه صحیح است چون m_1 اعداد صحیح است چون j_1 صحیح هست ولی j نیمه صحیح است پس m در رابطه آن هم نیمه صحیح است.

$$\begin{cases} m_2 = \frac{1}{2} \\ m_1 = m'-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$j_1 = l \quad , \quad j_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad j = l+\frac{1}{2}$

رابطه اصلی $\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\langle m_1 m_2 | j, m\pm1\rangle = \sqrt{(j_1\mp m_1+1)(j_1\pm m_1)}\,\langle m_1\mp1, m_2 | j m\rangle$ ✱

$+\sqrt{(j_2\mp m_2+1)(j_2\pm m_2)}\,\langle m_1, m_2\mp1 | j m\rangle$

$m-1 = m_1+m_2 \to m = m'+1$

می‌نویسیم

$$\Rightarrow \sqrt{(\underbrace{l+\tfrac{1}{2}}_{j}+\underbrace{(m'+1)}_{m})(\underbrace{l+\tfrac{1}{2}}_{j}-\underbrace{(m'+1)}_{m}+1)}\ \langle \overbrace{m'-\tfrac{1}{2}}^{m_1}, \overbrace{\tfrac{1}{2}}^{m_2} | l+\tfrac{1}{2}, \overbrace{m'}^{\substack{(m-1)\\ m_1+m_2}}\rangle$$

وجود ندارد چون $m_2=\pm\frac{1}{2}$ است

$$= \sqrt{(\underbrace{l}_{j_1}+\underbrace{m'-\tfrac{1}{2}}_{m_1}+1)(\underbrace{l}_{j_1}-\underbrace{(m'-\tfrac{1}{2})}_{m_1})}\ \langle \underbrace{m'+\tfrac{1}{2}}_{m_1+1}, \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{m_2} | \underbrace{l+\tfrac{1}{2}}_{j}, \underbrace{m'+1}_{m}\rangle + \cdots \langle \underbrace{\cancel{m'-\tfrac{1}{2}}}_{m_1}, \underbrace{\tfrac{3}{2}}_{m_2+1} | \dots \rangle$$

۳۳۵

بنابراین تبدیل این طور می‌شود:

$m' \to m$ تبدیل می‌کنیم ← $(l+\frac{1}{2})+m$ جمع

$$\langle \underline{m-\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{2} | l+\tfrac{1}{2}, m \rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{l+m+\frac{3}{2}}} \langle \underline{m+\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{2} | \underbrace{l+\tfrac{1}{2}, m+1}_{(l+\frac{1}{2})+(m+1) \text{ جمع}} \rangle$$

اولاً در رابطهٔ بالا چی کار می‌کنیم:

رابطه بدست آمده $m_1=m-\frac{1}{2}$ را مربوط به $m_1=m+\frac{1}{2}$ کرد یعنی یک واحد افزایش داده است، صورت ضریب جمع m و j سمت چپ و مخرج آن جمع j و m سمت راست است.

می‌توان این کار را ادامه داد و دوباره نوشت (بعدی را به این صورت بنویسیم):

$$\langle m-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} | l+\tfrac{1}{2}, m \rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{\cancel{l+m+\frac{3}{2}}}} \sqrt{\frac{\cancel{l+m+\frac{3}{2}}}{l+m+\frac{5}{2}}} \langle m+\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2} | l+\tfrac{1}{2}, m+2 \rangle$$

همین طور که ادامه دهیم مخرج قبلی با صورت

جمله حذف می‌شود: این کار را ادامه می‌دهیم تا به j'_{max} برسیم و m_{max}.

$$\langle \underset{\text{دلخواه}}{m-\tfrac{1}{2}}, \underset{\text{دلخواه}}{\tfrac{1}{2}} | l+\tfrac{1}{2}, m \rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \langle l+\tfrac{1}{2} | \underbrace{l+\tfrac{1}{2}, l+\tfrac{1}{2}}_{(l+\frac{1}{2})+(l+\frac{1}{2}) \text{ جمع}} \rangle \quad \text{I}$$

هر ضریب کلبش گوردونی را بالا برحسب آخری بدست آمد. حال باید تکلیف آخری یعنی نقطه A را مشخص کنیم.

اگر j، ماکزیمم باشد و m در رابطه هم ماکزیمم باشد بالاترین J_z و J^2 را داریم.

$$|j_1 j_2; j=j_1+j_2, m_j=j_1+j_2\rangle = \underbrace{|j_1, m_1=j_1\rangle \otimes |j_2, m_2=j_2\rangle}_{\text{همیشه برقرار است}} \quad \text{مربوط به نقطه } A$$

مشابه حالت:

$$\tfrac{1}{2} \otimes \tfrac{1}{2} = 1 \oplus 0$$

$$|S=1, m_s=1\rangle : |{+}{+}\rangle$$

یعنی بالاترین state در دستهٔ جدید متناظر است با بالاترین state های قدیم به صورت حاصلضرب است. (اثبات برای حالت کلی)

می‌توان نشان داد که حالت بالا، ویژه کت J^2 با ویژه مقدار $j(j+1)\hbar^2$ با $j=j_1+j_2$ است و ویژه حالت J_z با ویژه مقدار $\hbar(j_1+j_2)$ است، چون همه حاصلضرب ها $|m_1 m_2\rangle$ ویژه مقدار J_z بود و همچنین ترکیب تمام حالت‌هایی که جمع m_1+m_2 آنها ثابت باشد ویژه حالت J_z هست. تنها جمله‌ای که جمع m_1, m_2 آن برابر j_1+j_2 است همین جمله بالا است چون m_1 و m_2 آن ماکزیمم است و هر حالت دیگری در نظر بگیریم جمع m_1 و m_2 آن کمتر است، پس تنها یک حالت بیشتر وجود ندارد.

همین طور state های پایین هم به مانند نقطه A ساده می‌باشد. اگر m را منفی کنیم یعنی $-(j_1+j_2)$ برای آن صورت این state

که صفحه قبل $m_1=j_1$ و $m_2=j_2$ می‌باشند.

پس دو حالت j با بزرگترین مقدار (j_1+j_2) یا $(j_1+j_2, -(j_1+j_2))$ ... قطعی است و این دو حالت دارای ضریب ۱ می‌باشند به خاطر حالت‌های زیر:

نقطه B
$$|j_1 j_2, j=j_1+j_2, m_j=-j_1-j_2\rangle = 1\,|j_1, m_1=-j_1\rangle \otimes |j_2, m_2=-j_2\rangle \quad \text{(II)}$$

نقطه A
$$|j_1 j_2, j=j_1+j_2, m_j=j_1+j_2\rangle = 1\,|j_1, m_1=j_1\rangle \otimes |j_2, m_2=j_2\rangle \quad \text{(III)}$$

تعریف ضریب C.G این بود:

$$|jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} \underbrace{\langle m_1 m_2 | jm\rangle}_{\text{ضریب } C.G} |m_1 m_2\rangle \quad \text{(IV)}$$

با مقایسه رابطه (II) و (III) با (IV) معلوم می‌شود که برای این شرط و جمع ندارد و فقط یک ضریب C.G وجود دارد که آن هم برابر ۱ است:

$$\langle j_1 j_2, m_1=j_1, m_2=j_2 | j_1 j_2, j=j_1+j_2, m=j_1+j_2\rangle = 1$$

و به ازای این m و j دیگر هیچ ضریب C.G وجود ندارد و فقط این m_1 و m_2 بالا وجود دارند.

حالت خاص این رابطه، اگر $j_1=l$ و $j_2=\frac{1}{2}$ ، m_1 و m_2 را ماکزیمم بگیریم، j را جمع j_1 و j_2 بگیریم و m را جمع m_1 و m_2 به این صورت:

$j_1=l \ , \ m_1=l$

$j_2=\frac{1}{2} \ , \ m_2=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \langle l, \tfrac{1}{2}; m_1=l, m_2=\tfrac{1}{2} | l, \tfrac{1}{2}; j=l+\tfrac{1}{2}, m=l+\tfrac{1}{2}\rangle = 1 \quad \text{(V)}$

$j=l+\frac{1}{2} \ , \ m=l+\frac{1}{2}$

اگر نگاه کنیم می‌بینیم رابطه (V) همان رابطه (I) در صفحه قبل است!

بنابراین نقطه A تعیین شد و ضریب C.G آن یک شد. این هم ضرایب C.G بالا بدست آمد.

حالا می‌خواهیم ضرایب C.G پایینی‌ها را حساب کنیم.

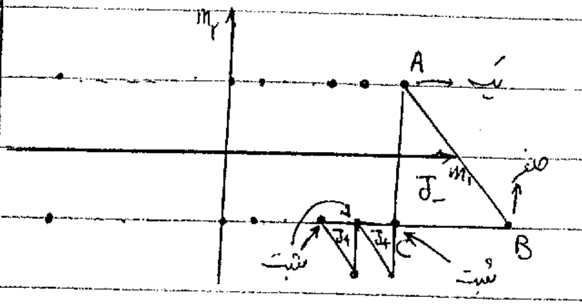
تا اینجا مسئله دو نوع ضریب کلبش گوردن داریم، به ازای $j=l+\frac{1}{2}$ دو گروه بالا و پایین وجود دارند که گروه بالا را بدست آوردیم به ازای $j=l-\frac{1}{2}$ هم باز دو گروه بالا و پایین وجود دارند. این کلاً چهار نوع ضریب C.G داریم.

$$j=l+\tfrac{1}{2} \begin{cases} \nearrow \text{بالا} \\ \searrow \text{پایین} \end{cases} \qquad j=l-\tfrac{1}{2} \begin{cases} \nearrow \text{بالا} \\ \searrow \text{پایین} \end{cases}$$

برای محاسبه این سه گروه باید همین کار را انجام دهیم، ولی اینجا یک راه ساده‌تر وجود دارد و می‌خواهیم از ضرایبی که بدست آوردیم، بقیه را هم بدست آوریم.

نکته مهمی وجود دارد و آن این است که تمام این ضرایب C.G یک سری رادیکال هستند که مثبت هستند و منفی احتمالاً وجود ندارد.

(در $j=l+\frac{1}{2}$ این طور است)



پس دیگر از منفی J_- نقطه کرا ضرایب بر حسب A بدست آورد
چون که D صفر است و A هم که یک بدست آمده بود پس C بدست
می‌آید بعد از روی C هم نقاط پایین بدست می‌آیند
ولی نکته‌ای که می‌خواهیم بگوییم این است که ضریبی که از C بدست
می‌آید حتماً مثبت است و وقتی این ضریب مثبت شد هم نقاط پایین
که با منفی شدن J_+ از نقطه C بدست می‌آیند، آنها هم مثبت خواهند شد، بنابراین تمام ضرایب C.G مربوط به $j_1+l=j$ مثبت هستند
این مثبت بودن ضرایب برای $j_1-l=j$ درست نیست.

حال می‌خواهیم با یک روشی بقیه ضرایب C.G یعنی گروه پایین برای $j_1+l=j$ و دو گروه $j_1-l=j$ را بدست آوریم.

* نکته‌ای که می‌خواهیم استفاده کنیم، نکته‌ای است که جلسه پیش هم گفتیم و آن این است که ضرایب کلبش گوردون به تعبیر دیگر عناصر ماتریس تبدیل هستند

اگر بخواهیم: $\{|a_k\rangle\} \xrightarrow{\text{تبدیل}} \{|b_k\rangle\}$

ماتریس تبدیل $U=\sum_k |b_k\rangle\langle a_k| \xrightarrow{\text{یونیتاری هم هست}} U^\dagger U=\sum_{kl}|a_k\rangle \underbrace{\langle b_k|b_l\rangle}_{\delta_{kl}} \langle a_l| = \sum_k |a_k\rangle\langle a_k| = 1$

عنصر ماتریس تبدیل $U_{kl}=\langle a_k|b_l\rangle$

بنابراین U ها یونیتاری هستند.

اگر عناصر U حقیقی هم باشند: $U^\dagger = U^T \Leftarrow U^T U = 1$ یعنی U ها متعامد هستند.

ضرایب C.G دقیقاً اینها هستند چون: $\langle m_1 m_2|jm\rangle =$ ضرایب C.G

$|a_k\rangle = |m_1 m_2\rangle$

$|b_k\rangle = |jm\rangle$

بنابراین ضرایب کلبش گوردون عناصر ماتریس U هم هستند، بنابراین اگر با ضرایب C.G
ماتریس بسازیم، اولاً یونیتاری است و ثانیاً چون ضرایب CG حقیقی هستند این ماتریس که با این ضرایب ساخته می‌شود حتماً
متعامد است. ما از این موضوع استفاده می‌کنیم. حال باید ببینیم عناصر این ماتریس را چه چیزی بگیریم!
به ازای یک j_1 و j_2 در واقع معین، متغیر ضرایب C.G، m_1 و m_2 است (همانند قبل) و m جمع اینها است. پس ضرایب C.G
یک موجود دو متغیره است، این جهت‌ها به آنها یک نظر دیگر نسبت داد و این‌ها شود ماتریس!

$m_1+m_2=m$

$A_{m_2 j} = \langle m_1 = m-m_2 , m_2 | j m\rangle$

* به ازای j_1 و j_2 و m معین متغیرهای A،
تنها m_2 و j هستند. (یعنی از ۵ متغیر، ۳ تا را ثابت کردیم و ۲ تا را متغیر گرفتیم)
در مورد ماتریس های تبدیل گفتیم که دسته حالتهایی که استفاده می‌کنیم باید کامل باشند ($\{|a_k\rangle\}$). حال در اینجا هم می‌توان
$|jm\rangle$ را بسط داد بر حسب یکسری حالتهای دیگر توسط ضرایب C.G، که این حالتهای دیگر یک سری حضور جفت داشته و آن
زمین بود که جمع m_1 و m_2 آنها باید برابر m شود. بنابراین به ازای یک m معین، m_1 و m_2 ها کامل نخواهند بود، البته ...

هردوشان آزاد باشند و بنابراین شکل m_2های مختلف را خواهد داد. پس در هر دو حالت m_2های مختلف یک پایه می‌شوند.
بنابراین وقتی m_2ها را تغییر بدهیم می‌توانیم المان‌های ماتریس را با m_2 هم بیان کنیم.
به عبارت دیگر می‌توانیم یک سری المان می‌توانیم این طور بگوییم:

$$\begin{array}{c|cc} & j=l-\frac{1}{2} & j=l+\frac{1}{2} \\ \hline m_2=-\frac{1}{2} & \langle m+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\,|\,l-\frac{1}{2},m\rangle & \langle m+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\,|\,l+\frac{1}{2},m\rangle \\ m_2=\frac{1}{2} & \langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,|\,l-\frac{1}{2},m\rangle & \langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,|\,l+\frac{1}{2},m\rangle \end{array} \quad (1)$$

اگر سطر و ستون این ماتریس را نگاه کنیم m_2 و j هستند یعنی سطر اول $m_2=-\frac{1}{2}$ و سطر دوم $m_2=\frac{1}{2}$ است، در هر m ثابت است. ستون اول $j=l-\frac{1}{2}$ است و ستون دوم $j=l+\frac{1}{2}$ است.

بنابراین یک ماتریس است که mها و jها مشخص هستند و متغیرها j و m_2 هستند. این ماتریس چون عناصرش تشکیل یک پایه می‌دهند باید متعامد باشد. به عبارت دیگر، هر حالت $|j,m\rangle$ (با m مشخص و j دلخواه) قابل بسط برحسب $|m\mp\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ (چهار حالت) است.

$m\pm\frac{1}{2}$ ، $\pm\frac{1}{2}$ است

$$|l+\tfrac{1}{2},m\rangle = \sum CG\,|m_1,m_2\rangle$$
$$|l-\tfrac{1}{2},m\rangle = \sum CG\,|m_1,m_2\rangle$$

این ضرایب C.G همان چهار عنصر ماتریس بالا هستند.

بنابراین همه حالت‌هایی که از نوع $|j,m\rangle$ هستند قابل بسط برحسب چهار حالت پایه هستند ($|m_1,m_2\rangle$) پس این چهار حالت بسته کامل هستند. پس ماتریسی که از ضرب stateهای جدید و قدیم ساخته می‌شود، ماتریس 2×2ای است که حتماً باید متعامد باشد.

برای یک ماتریس 2×2 متعامد داریم:

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow U^T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$U^TU = UU^T = 1 \longrightarrow \text{سه معادله می‌دهد} \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$$

بنابراین این چهار متغیر توسط این سه معادله تبدیل به یک متغیر می‌شوند.

سه تای آنها وابسته به یکی می‌شوند. پس یک متغیر آزاد بیشتر از آن وجود ندارد. پس یک ماتریس 2×2 متعامد تنها یک پارامتر دارد که به خاطر قیدهایی که وجود دارد باید به صورت sin و cos باشند.

بنابراین هر ماتریس 2×2 با عناصر حقیقی متعامد را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (2)$$

حال ماتریس متعامدی که در بالا داشتیم (1) باید از این نوع باشد.

$$\begin{pmatrix} \langle m+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\,|\,l-\frac{1}{2},m\rangle & \langle m+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\,|\,l+\frac{1}{2},m\rangle \\ \langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,|\,l-\frac{1}{2},m\rangle & \langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,|\,l+\frac{1}{2},m\rangle \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\cos\alpha \Rightarrow \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$ بدست آورده بودیم

با مقایسه با ماتریس ① و ② و داشتن یک ضریب از قبل (صفحه ۳۲۵) داریم:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \xrightarrow{\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha} \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{l-m-\frac{1}{2}}{2l+1}}$$

پس عنصر (۱،۱) و (۲،۲) بدست آمدند ($\cos\alpha$)

یعنی $j=l-\frac{1}{2}$ و دقیقاً با چیزی که بدست آوردیم یکی است.

عنصر (۱،۲) و (۲،۱) هم یکی هستند با یک علامت منفی. حال سؤال این است که این $\sin\alpha$ را مثبت انتخاب کنیم یا منفی.

برای پاسخ به این سؤال، برمی‌گردیم به چیزی که گفتیم، یعنی تمام ضرایب C.G با $j=l+\frac{1}{2}$ مثبت هستند پس عنصر

(۱،۲) یعنی $j=l+\frac{1}{2}$ و $m_2=-\frac{1}{2}$ باید مثبت باشد و عنصر (۲،۱) یعنی $j=l-\frac{1}{2}$ و $m_2=\frac{1}{2}$ باید منفی باشد.

$$\Rightarrow \langle m-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\,|\,l+\tfrac{1}{2},m\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$$

پس خلاصه همه این روابط را می‌توانیم این طور بنویسیم:

$$* \boxed{|j=l\pm\tfrac{1}{2},m\rangle = \pm\sqrt{\frac{l\pm m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|m-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{l\mp m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|m+\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle}$$

ضرایب کلبش گوردن

$j_1=l$ و $j_2=\frac{1}{2}$

این را می‌توان به یک شکل دیگر هم می‌توان نوشت، اگر طرفین رابطه بالا را در $\langle \hat{n},\pm|$ ضرب کنیم:

حالتهای سمت راست از این نوع هستند:

$$|l,\tfrac{1}{2};m',\pm\tfrac{1}{2}\rangle = |l,m\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},\overbrace{\pm\tfrac{1}{2}}^{m_1}\rangle$$

و اگر این حالت‌ها را در $\langle \hat{n},\pm|$ ضرب کنیم:

$$\langle \hat{n},\pm|l,\tfrac{1}{2};m',\pm\tfrac{1}{2}\rangle \overset{\langle n|l,m\rangle\otimes\langle\pm|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle}{=} Y_l^m \chi_\pm$$

پس چون نتیجه ترکیبی از Y و χ و اسپینور است (درست است) پس سمت چپ هم ترکیبی از Y و اسپینور است و این طور نشان می‌دهیم

$$\langle \hat{n},\pm|j,m\rangle = \mathcal{Y}_l^{j=l+\frac{1}{2},m} = \pm\sqrt{\frac{l\pm m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,Y_l^{m-\frac{1}{2}}\chi_+ + \sqrt{\frac{l\mp m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,Y_l^{m+\frac{1}{2}}\chi_-$$

پس نتیجه هم

به صورت ماتریسی نوشته می‌شود چون χ_+ و χ_- ستونی هستند:

$$\mathcal{Y}_l^{j=l+\frac{1}{2},m} \doteq \begin{pmatrix} \pm\sqrt{l\pm m+\frac{1}{2}}\;Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{l\mp m+\frac{1}{2}}\;Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \longrightarrow$$

نمایش ماتریسی ذره حالتهای ذره‌ای اسپین $\frac{1}{2}$ با تکانه زاویه‌ای مداری l است.

به ضرایب C.G، Wigner 3-j Symbols هم می‌گویند

*حتماً مراجعه کنید به کتاب Landau فصل ۱۴ (روابط ۱۴-۱۰۶)

جلسه بیست و هفتم : ۴ / ۱۰ / ۸۴

بحث جلسه گذشته ما در مورد جمع اندازه حرکت زاویه‌ای بود. با ضرایب کلبش گوردون را این طور تعریف کردیم که ویژه حالتهای مشترک $\vec{J}_1^2, \vec{J}_2^2, \vec{J}^2, J_z$ را به صورت زیر تعریف کردیم و گفتیم یک بسط دارد برحسب ویژه حالتهای $\vec{J}_1^2, \vec{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}$ دارد که به صورت زیر هستند:

ویژه حالتهای مشترک $\vec{J}_1^2, \vec{J}_2^2, \vec{J}^2, J_z$ — ضرایب C.G (حقیقی هستند)

$$|j_1 j_2 ; j m\rangle = \sum \underbrace{|j_1 j_2 ; m_1 m_2\rangle}_{\text{ویژه حالتهای مشترک } \vec{J}_1^2, \vec{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}} \underbrace{\langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; j m\rangle}_{\text{همان ضرایب بسط هستند}}$$

در مورد خصوصیات آنها هم صحبت کردیم و یکی از نکاتی که مطرح بود:

$$|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2$$

حال نکته این است که ضرایب C.G را می‌توان به یک‌ نوع دیگری هم تعبیر کرد و یک معنی دیگر هم از آن استخراج کرد و آن هم این است ضرایب کلبش گوردون به عنوان ضرایب بسط $|jm\rangle$ برحسب $|m_1 m_2\rangle$ ها را در نظر گرفته بودیم. معکوس آن را هم می‌توان در نظر گرفت یعنی حالت $|m_1 m_2\rangle$ را برحسب $|jm\rangle$ بسط داد.

$|j_1 j_2 ; m_1 m_2\rangle$ حالت ۱ — $|j_1 j_2 ; j m\rangle$ حالت ۲

$$\underbrace{|m_1 m_2\rangle}_{\text{ضرب تانسوری نمایش‌های گروه دوران است}} = \sum |jm\rangle \underbrace{\langle jm | m_1 m_2\rangle}_{}$$

همان ضرایب C.G: $\langle m_1 m_2 | jm\rangle =$ چون حقیقی هستند

این بحث جالبی است. حالتهای $|m_1 m_2\rangle$ در حقیقت به این صورت بودند:

$$|j_1 , j_2 ; m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

یعنی اینها ضرب تانسوری دو نمایش $SU(2)$ یا گروه دوران هستند.

یعنی سمت چپ ضرب تانسوری نمایشهای گروه دوران است و سمت راست بسط آنها است برحسب نمایشهای گروه دوران ولی به مجموعه $|jm\rangle$ است.

این رابطه در حقیقت به ما می‌گوید که اگر یک j_1 و j_2 را در هم ضرب تانسوری کنیم، حاصل این ضرب یک بسطی برحسب نمایشهای $SU(2)$ دارد که در آن مقادیر j به صورت مقابل باشند

$$j_1 \otimes j_2 = j_1 + j_2 \oplus j_1 + j_2 - 1 \oplus \cdots \oplus |j_1 - j_2|$$

بنابراین یک دلیل اینکه ما نمایشها را به صورت ضرب نوشتیم این رابطه است. این رابطه ضرب تانسوری دو نمایش است که به گونه‌ای ضرب تانسوری به صورت جمع مستقیم نمایشهایی ظاهر می‌شود.

این صحبت‌ها در مورد ترکیب حالتها بود. همین موضوع در مورد ماتریسها هم همچنین قید را خواهد گذاشت چون ماتریسها هم در حقیقت از ضرب حالتها ایجاد شده‌اند.

برای نشان دادن این موضوع در بحث اندازه حرکت زاویه‌ای گفتیم که عناصر گروه دوران یعنی $D(R)$ ها مربوط به j ها هستند

① گروه دوران $D(R) = D^{j_1}(R) \otimes D^{j_2}(R)$

در $D(R)$ مربوط به j_1 و j_2 حساب شد، یعنی:

بخاطر این است که : $J = J_1 \otimes 1 + 1 \otimes J_2$ $\qquad$ در پایه ضربی $|j_1 m_1'\rangle \otimes |j_2 m_2'\rangle$

نمایش ماتریسی : $\langle m_1 m_2 | D(R) | m_1' m_2' \rangle = \underbrace{\langle m_1 m_2 |}_{\langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 |} D^{j_1}(R) \otimes D^{j_2}(R) | m_1' m_2' \rangle$

$$\Rightarrow \langle m_1 m_2 | D(R) | m_1' m_2' \rangle = \underbrace{\langle j_1 m_1 | D^{j_1}(R) | j_1 m_1' \rangle}_{D^{j_1}_{m_1 m_1'}(R)} \underbrace{\langle j_2 m_2 | D^{j_2}(R) | j_2 m_2' \rangle}_{D^{j_2}_{m_2 m_2'}(R)} \quad \text{I}$$

$\sum_{jm} |jm\rangle\langle jm|$ $\qquad$ $\sum_{j'm'} |j'm'\rangle\langle j'm'|$

سمت چپ را هم این طور بنویسیم

D را دو بار بین رابطه کامل بودن می‌گذاریم ← $D^{(j)}_{mm'}(R)\,\delta_{jj'}$

$$\text{سمت چپ} : \sum_{jm} \sum_{j'm'} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle jm | D(R) | j'm' \rangle \langle j'm' | m_1' m_2' \rangle$$

$$\Rightarrow \text{سمت چپ} : \sum_{j,m,m'} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle m_1' m_2' | jm' \rangle D^{(j)}_{mm'}(R) \quad \text{II}$$

$$\text{I} = \text{II} \Rightarrow \sum_{j,m,m'} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle m_1' m_2' | jm' \rangle D^{(j)}_{mm'}(R) = D^{(j_1)}_{m_1 m_1'}(R)\, D^{(j_2)}_{m_2 m_2'}(R) \quad \text{III}$$

اگر دو ماتریس را حاصلضرب تانسوری کنیم، عناصر ماتریس آن به صورت بالا می‌شوند. اگر بخواهیم رابطه بالا را به صورت ماتریسی بنویسیم، این طور نشان داده می‌شود:

سمت راست معادله بالا : $D^{j_1} \otimes D^{j_2} = D^{j_1+j_2}(R) \oplus \dots \oplus D^{|j_1-j_2|}(R)$: سمت چپ معادله بالا

که یک ترکیب می‌شود که سهم هر ترکیب را ضریب C.G مربوطه تعیین خواهد کرد.

$$\begin{pmatrix} \boxed{D^{j_1+j_2}} & & 0 \\ & \boxed{D^{j_1+j_2-1}} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که حاصلضرب دو نمایش مختلف گروه دوران (j_1 و j_2) قابل تفکیک به صورت جمع ماتریس‌های بالا است. که اگر بخواهیم به صورت ماتریس بنویسیم وقتی دو تا را ضرب کنیم به صورت یک سری ماتریس‌های بزرگ به صورت مقابل در می‌آیند.

$$\begin{cases} j_1 = l_1 ,\ j_2 = l_2 ,\ m_1' = m_2' = 0 \\ j = l' ,\ m = m_3 \end{cases}$$

به عنوان یک حالت خاص از رابطه آخر این حالت را در نظر می‌گیریم:

از این نتیجه داریم استفاده می‌کنیم : $D^{(l)}_{m0}(R) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y^*_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\text{III} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \underset{0}{D^{(j_1)}_{m_1 m_1'}(R)}\ \underset{0}{D^{(j_2)}_{m_2 m_2'}(R)} = \sum_{j,m,m'} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle m_1' m_2' | jm' \rangle D^{(j)}_{mm'}(R)$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}} Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi) = \sum_{l', m_3} \langle m_1 m_2 | l' m_3\rangle \langle 0,0 | l', 0\rangle \sqrt{\frac{4\pi}{2l'+1}}\, Y_{l'}^{m_3}(\theta,\varphi)$$

m فقط صفر می‌تواند باشد

کافی است رابطه بالا را در Y_l^{*m} ضرب کنیم و انتگرال بگیریم و از رابطه تعامد هم استفاده کنیم:

$\int Y_{l'}^{m_3} Y_l^{m} d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm_3}$ را می‌دانیم

سمت چپ ضرب ۳ تا Y_l^m می‌شود ولی سمت راست با استفاده از رابطه تعامد، ضرایب C.G می‌شود.

$$\boxed{\Rightarrow \int d\Omega\, Y_l^{*m}(\theta,\varphi) Y_{l_1}^{m_1} Y_{l_2}^{m_2} = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}} \langle l_1 l_2 ; 0,0 | l_1 l_2 ; l, 0\rangle \langle l_1 l_2 ; m_1 m_2 | l_1 l_2 ; l, m\rangle}$$

یعنی در حقیقت انتگرال حاصلضرب ۳ تا Y_l^m را می‌توان به صورت حاصلضرب دو ضریب C.G نوشت.

این رابطه حالت خاصی از قضیه ویگنر اکارت (Wigner-Eckart) است.

مدل نوسانگر شوینگر برای تکانه زاویه‌ای:

با تابع‌های مولفه‌های تکانه زاویه‌ای (J_x, J_y, J_z) روابط بین آنها را داریم و ویژه حالتهای آنها را هم بدست آوردیم که در نمایش فضای مکان به صورت Y_l^m ها هستند. حال می‌خواهیم یک صورت دیگر از آنها ارائه دهیم و از یک ابزار استفاده کنیم و از یک سری اپراتورهای کمکی استفاده کنیم که حالت صریح تکانه زاویه‌ای را به ما بدهند.

دو دسته نوسانگر هماهنگ با یک نوع مستقل در نظر می‌گیریم، یکی را با "+" نشان می‌دهیم و دیگری را با "−".

$$\text{"+"} \downarrow a_+, a_+^\dagger \qquad \text{"−"} \downarrow a_-, a_-^\dagger \quad \text{عملگرهای خلق و فنا} \longrightarrow \begin{cases} [a_+, a_+^\dagger] = 1 \\ [a_-, a_-^\dagger] = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ولی}} \begin{cases} [a_+, a_-^\dagger] = 0 \\ \text{بقیه}\ [+,-] = 0 \end{cases}$$

چون نوسانگرها مستقل فرض شده‌اند، می‌توان ویژه حالتهای مشترک از آنها ساخت.

در مورد یک نوسانگر ویژه حالتها $|n\rangle$ که $N = a^\dagger a$ عملگر تعداد

که این خصوصیات را هم داشت:

$$\begin{cases} N|n\rangle = n|n\rangle \\ a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{cases} \quad , \quad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

حالت عدد   حالت خلاء

این نتایج در مورد یک نوسانگر بود.

همه این حرفها را می‌توان در مورد نوسانگر "+" و هم در مورد نوسانگر "−" زد و چون این دو نوسانگرها جابجا می‌شوند می‌توان ویژه حالت مشترک برای آنها ساخت، یعنی حالتها را به این صورت می‌گیریم $|n_+, n_-\rangle$ که هم ویژه حالت عملگر N_+ و هم ویژه حالت عملگر N_- است.

$$N_+ = a_+^\dagger a_+ \qquad N_+|n_+, n_-\rangle = n_+|n_+, n_-\rangle$$

$$N_- = a_-^\dagger a_- \qquad N_-|n_+, n_-\rangle = n_-|n_+, n_-\rangle \xrightarrow{\text{که}} |n_+, n_-\rangle = |n_+\rangle \otimes |n_-\rangle$$

هر حالت مشترک در دو فضای مختلف را با ضرب تانسوری نشان می‌دهیم

همچنین:

$$a_+|n_+,n_-\rangle = \sqrt{n_+}\,|n_+-1,n_-\rangle \quad , \quad a_+^\dagger|n_+,n_-\rangle = \sqrt{n_++1}\,|n_++1,n_-\rangle$$

(a₊ ≠ 1)

$$a_-|n_+,n_-\rangle = \sqrt{n_-}\,|n_+,n_--1\rangle \quad , \quad a_-^\dagger|n_+,n_-\rangle = \sqrt{n_-+1}\,|n_+,n_-+1\rangle$$

حالت مشترک هم بصورت تاثیر $(a^\dagger)^n$ هم برای "+" و هم "-" روی حالت خلاء است:

$$|n_+,n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+!\,n_-!}}|0,0\rangle$$

برای حالت خلاء: $\begin{cases} a_-|0,0\rangle = 0 \\ a_+|0,0\rangle = 0 \end{cases}$

پس تا اینجا ترکیب دو نوسانگر هماهنگ مستقل داریم.

حال ببینیم این موضوع چه ارتباطی با اندازه حرکت زاویه‌ای دارد.

اگر ترکیب خاصی از عملگرها "+" و "-" را بگیریم، می‌توانیم با آنها اندازه حرکت زاویه‌ای بسازیم. این ترکیب را باید بگیریم:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} J_+ = \hbar a_+^\dagger a_- \\ J_- = \hbar a_-^\dagger a_+ \\ J_z = \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-) \end{cases} \xrightarrow[\text{روابط جابجایی}]{\text{به راحتی بدست می‌آید}} \begin{cases} [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \\ [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \end{cases}$$

این روابط چیزی نیستند جز روابط جابجایی اندازه حرکت زاویه‌ای!

پس یعنی اندازه حرکت زاویه‌ای را می‌توان به این صورت هم نمایش داد، چون همان روابط جابجایی که تعیین کننده جبر دوران است را اینها ارضا می‌کنند.

$a_+^\dagger, a_-^\dagger, a_-, a_+$ ترجمه خلق و فنا دارند، حال ببینیم این نمایش برای اندازه حرکت زاویه‌ای با خلق و فنا چه ارتباطی دارد.

به هر حالت (ذره) اسپین بالا نوسانگر "+" و به هر حالت (ذره) اسپین پایین نوسانگر "-" را نسبت می‌دهیم، یعنی "+"ها عملگرهای خلق و فنا اسپین بالا و "-"ها عملگرهای خلق و فنا اسپین پایین هستند. حال ببینیم با این ترجمه، نمایشی که برای J_+, J_-, J_z داریم قابل فهم خواهد شد یا نه؟

$$J_+ \sim \underbrace{a_+^\dagger}_{}\underbrace{a_-}_{\text{عملگر فنا اسپین پایین است یعنی حالت } -\frac{\hbar}{2}\text{ را از بین می‌برد}}$$

عملگر خلق اسپین بالا است یعنی یک حالت با مولفه z، $+\frac{\hbar}{2}$ را خلق می‌کند

حال ببینیم تاثیر این دو کار چیست؟

فرض کنیم $J_z : m\hbar$ تویجه را و حالت مربوط به آن $|j,m\rangle$ باشد:

a به اندازه $-\frac{\hbar}{2}$ از آن کم می‌کند یعنی $+\frac{\hbar}{2}$ اضافه می‌کند، $a_+^\dagger$ به اندازه $+\frac{\hbar}{2}$ اضافه می‌کند چون خلق می‌کند پس:

$$J_+ : +\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} = \hbar \xrightarrow[\text{که } J_+ \text{ باید بکند}]{\text{همان کاری است}} J_+|j,m\rangle \approx |j,m+1\rangle$$

برای J_- هم همین طور است:

$$J_- \sim \underbrace{a_-^\dagger}_{-\frac{\hbar}{2}\text{ را خلق می‌کند}}\ \underbrace{a_+}_{\frac{\hbar}{2}\text{ را از بین می‌برد}} \rightarrow J_- : -\frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} = -\hbar \quad : J_-|j,m\rangle \approx |j,m-1\rangle$$

پس حالتهای بالا برنده و پایین برنده (J_+ و J_-) در بحث تکانه زاویه‌ای را می‌توان به عملگرهای خلق و فنای نوسانگرهای هماهنگ مربوط کرد. یعنی شکل می‌خواهیم بگوییم که J_+ یک نوع خلق و فنا صورت می‌گیرد بالا و پایین بُرا.

در مورد J_z : $J_z \sim (N_+ - N_-)$

بالاها و پایین‌ها مولفه z را تعیین می‌کنند که ارتباط — N_+ : تعداد ذرات اسپین بالا را می‌دهد — N_- : تعداد ذرات اسپین پایین را می‌دهد

بنابراین تمام انتظاراتی که از عملگرهای J_+ ، J_- و J_z داریم با این عملگرها خلق و فنا برآورده می‌شود.

این موضوع شبیه این است که تکانه را به صورت $\vec{P}$ بنویسیم یا $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ و یا هر چیز دیگری، هر کدام در هر فضا یک شکل دارد. در مورد J هم همین طور است یا به صورت L در فضای مکان نشان می‌دهیم

$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P}$

$\searrow \vec{S}$

یا در مورد اسپین‌ها با ماتریس نشان می‌دهیم

بنابراین state های $|n_+,n_-\rangle$ که eigen state N_+ ، N_- هستند، بنابراین حسب eigen state J_z هم هستند. البته eigen state J^2 هم هستند چون J^2 را هم می‌توان به این شکل دست‌کاری نوشت:

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) \xrightarrow[\text{I}]{\text{جایگذاری کنیم}} \boxed{\frac{\hbar^2}{2}N\left(\frac{N}{2}+1\right)} \quad ; N = N_+ + N_-$$

از طرفی

$$J_z|n_+,n_-\rangle = \frac{\hbar}{2}(n_+ - n_-)|n_+,n_-\rangle \qquad \text{II}$$

$|n_+,n_-\rangle$ که بنویسیم هستند با $\rightarrow |j,m\rangle$

و نیز

$$J^2|n_+,n_-\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(n_+ + n_-)\left(\frac{n_+ + n_-}{2}+1\right)|n_+,n_-\rangle$$

پس $|n_+,n_-\rangle$ ها مشابه هستند با $|j,m\rangle$ ها.

اگر بخواهیم ارتباط دقیق آنها را بیان کنیم، این طور داریم:

می‌دانیم:
$$\begin{cases} J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle \\ J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle \end{cases} \qquad \text{III}$$

می‌توان با استفاده از روابط II و III ارتباط خاصی بین n_+ ، n_- و j ، m برقرار کرد، که این ارتباط به این صورت است که اگر:

$$\text{if} \quad n_\pm = j \pm m \quad \xrightarrow{\text{II}} \frac{1}{2}(n_+ - n_-) = \frac{1}{2}\left(j+m-(j-m)\right) = m$$

برای J^2 هم اگر جایگذاری کنیم درست جواب می‌دهد

$$\xrightarrow{\text{به عبارتی}} \begin{cases} j = \dfrac{n_+ + n_-}{2} \\ m = \dfrac{n_+ - n_-}{2} \end{cases}$$

بنابراین n_+ و n_- را اگر بدهند یعنی j و m را داده‌اند. پس به جای اینکه حالتها را با $|n_+,n_-\rangle$ نشان دهیم، می‌توانیم با $|j,m\rangle$ نشان دهیم.

$$|n_+,n_-\rangle \longrightarrow |j,m\rangle \quad ; n_\pm = j \pm m$$

بنابراین در نمایش شوینگر هم به جای n_+، $j+m$ و به جای n_-، $j-m$ می‌گذاریم.

$$|n_+,n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+!\,n_-!}}|0,0\rangle \longrightarrow |j,m\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}|0\rangle \quad (1)$$

$$|0,0\rangle \equiv |0\rangle$$

پس این بیان ویژه‌کت‌های J^2 و J_z است برحسب ویژه‌کت‌های نوسانگر هماهنگ.

استفاده‌ای که از این موضوع می‌توان کرد در نوشتن عناصر ماتریس D است. عناصر ماتریس D برحسب زوایای اویلر (جلسه پیش) به این صورت بدست آمدند:

$$D^{(j)}_{m'm}(\underbrace{\alpha,\beta,\gamma}_{\text{زوایای اویلر}}) = e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\, \underbrace{d^{(j)}_{m'm}(\beta)}_{\langle j,m'|e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}|j,m\rangle}$$

دو قسمت آن ساده می‌شود و فقط چیزی که می‌ماند مربوط به β است. که اگر آن را ($d^{(j)}_{m'm}$) را بدانیم همه نمایش‌های آن معلوم می‌شود.

بدست آوردن ماتریس $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ کار مشکلی است و در مورد $\frac{1}{2}$ و 1 آن را نوشتیم.

حال می‌خواهیم با استفاده از این موضوع می‌خواهیم این محاسبه را انجام می‌دهیم. یعنی می‌خواهیم $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ را بدست آوریم.

برای سادگی $\alpha=\gamma=0$ قرار می‌دهیم:

برای سادگی $\alpha=\gamma=0$

$$\text{عملگر}\quad D(R) = D^{(j)}(\alpha=0,\beta,\gamma=0) = e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}$$

راه این است که نمایش ماتریسی آن را پیدا کنیم. باید تاثیر این عملگر را روی $|j,m\rangle$ پیدا کنیم و بعد ضرب $\langle j,m'|$ کنیم. پس ابتدا عملگر $D(R)$ را روی $|j,m\rangle$ تاثیر می‌دهیم:

$$D(R)|j,m\rangle = \frac{D a_+^\dagger D^{-1} D a_+^\dagger D^{-1} D a_+^\dagger D^{-1} \cdots a_+^\dagger D^{-1} D a_-^\dagger D^{-1} D a_-^\dagger D^{-1} \cdots a_-^\dagger D^{-1} D}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}|0\rangle$$

یک بار $|j,m\rangle$ را از رابطه (1) قرار دهیم و $|0\rangle$ بین هر a ها $D^{-1}D$ می‌گذاریم:

$$\Longrightarrow D(R)|j,m\rangle = \frac{(D a_+^\dagger D^{-1})^{j+m}(D a_-^\dagger D^{-1})^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}} D|0\rangle \quad (2)$$

جمله آخر ($D|0\rangle$) را حساب می‌کنیم:

$$D = e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta} = 1-\frac{i}{\hbar}\beta J_y + \frac{1}{2!}\left(\frac{-i\beta}{\hbar}\right)^2 J_y^2 + \cdots \quad (3)$$

J_y را برحسب $a^\dagger, a$ می‌نویسیم: $\quad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) = \frac{\hbar}{2i}(a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+)$

حال J_y باید روی حالت خلا اثر کند:

$$J_y|0\rangle = \frac{\hbar}{2i}\left\{a_+^\dagger a_-|0\rangle - a_-^\dagger a_+|0\rangle\right\} = 0 \quad (4)$$

پس همه جملات (3) به غیر از 1 صفر می‌شوند

$$(3)(4) \Longrightarrow D|0\rangle = 1|0\rangle = |0\rangle$$

برای محاسبه بقیه عبارت رابطه ② از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$e^{A}Be^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$$

② در رابطه: $A = -\frac{i}{\hbar}\beta J_y$

$B = a_+^{\dagger} \xrightarrow{\text{استفاده می‌کنیم}} Da_\pm^{\dagger}D^{-1} = a_\pm^{\dagger}\cos\beta/2 \pm a_\mp^{\dagger}\sin\beta/2$ ⑤

با استفاده از بسط دوجمله‌ای $(x+y)^N = \sum \frac{N!}{(N-K)!\,K!} x^{N-K} y^K$

نتایج را در رابطه ② می‌گذاریم و با استفاده از بسط دوجمله‌ای می‌شود

$$⑤ \to ② \Rightarrow D|j,m\rangle = \sum_{K,l} \frac{(j+m)!\,(j-m)!}{(j+m-K)!\,K!\,(j-m-l)!\,l!} \frac{(a_+^{\dagger}\cos\beta/2)^{j+m-K}(a_-^{\dagger}\sin\beta/2)^{K}(-a_+^{\dagger}\sin\beta/2)^{j-m-l}(a_-^{\dagger}\cos\beta/2)^{l}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}} \quad (I)$$

درضمن اثر D را می‌خواستیم بلکه عضو تبدیل یافته آن را می‌خواستیم. از طرف دیگر:

$$D|j,m\rangle = \sum |j,m'\rangle \underbrace{\langle j,m'|D|j,m\rangle}_{d^{(j)}_{m'm}(\beta)}$$ که ما به دنبال آن هستیم

داشتیم: $|j,m\rangle = \frac{(a_+^{\dagger})^{j+m}(a_-^{\dagger})^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}|0\rangle \Rightarrow D|j,m\rangle = \sum_{m'} d^{(j)}_{m'm}(\beta) \frac{(a_+^{\dagger})^{j+m'}(a_-^{\dagger})^{j-m'}}{\sqrt{(j-m')!\,(j-m')!}}|0\rangle$ (II)

(I) و (II) باید مساوی باشند. پس باید توان‌های $a_+^{\dagger}$ و $a_-^{\dagger}$ را مساوی قرار دهیم (یعنی عملگرها) و a_+ و a_- مستقل هستند و چیزی که می‌ماند برابر با $d^{(j)}_{m'm}$ می‌شود

در عبارت (I): $a_+^{\dagger}$ توان $= 2j-K-l$

در عبارت (II): $a_+^{\dagger}$ توان $= j+m'$ $\Longrightarrow l = j-K-m'$ جمع روی l تبدیل به جمع روی K یعنی جمع روی m'.

$\sum_{m'} \to \sum_{K}$

در عبارت (I): $a_-^{\dagger}$ توان $= K+l$

در عبارت (II): $a_-^{\dagger}$ توان $= j-m'$ $\Longrightarrow l = j-K-m'$

با استفاده از قاعده بدست آمده در بالا $\cancel{K} + j - \cancel{K} - m' = j - m'$ که درست است.

پس یعنی اگر عبارت اول را تنظیم کنیم، عبارت دوم تنظیم می‌شود. پس باید در دو رابطه (I) و (II) به جای $l = j-K-m'$ را بگذاریم

پس عبارت نهایی برای $d^{(j)}_{m'm}$ این طور بدست می‌آید:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^{K-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!\,(j+m')!\,(j-m')!}}{(j+m-K)!\,K!\,(j-K-m')!\,(K-m+m')!} \times (\cos\beta/2)^{2j-2K+m-m'}(\sin\beta/2)^{2K-m+m'}$$

هر عنصر آن برابر با یک فرمول بدست آمده

فقط باید یک نکته‌ای را توجه کنیم، ما جمع روی K را و تا ∞ گذاشتیم ولی عملاً این طور نخواهد بود. علت آن هم این است که سری
این متوقف می‌شود چون در مخرج عباراتی از نوع $(l+m-K)!$ داریم، و همواره مثبت است، m مثبت و l نیز مثبت است، اگر K
از یک مقدار بزرگتر شود مقدار داخل پرانتز منفی می‌شود و به دلیل تقابل برای یک $(-\text{integer})! \longrightarrow \infty$
K به بعد مخرج ∞ می‌شود و عبارت صفر می‌شود. بنابراین عملاً جمع تا جایی
ادامه دارد که هیچ‌کدام از جملات مخرج (منفی) نشود.

سایتی است مربوط به انجمن فیزیک آمریکا به نام aip، که بطور مرتب بهترین خبرهای علمی رشته‌ها را به صورت e-mail می‌فرستد.

Spin correlation $\longrightarrow$ Bell inequality

این بحث که ما می‌کنیم بیشتر برمی‌گردد به مفاهیم اولیه کوانتوم مکانیک و یک بحث تقریباً فلسفی است که ریشه اولیه آن به اینشتین برمی‌گردد.

دو ذره اسپین $\frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم که می‌توانند در دو حالت مقابل باشند:

$S=1$ (triplet)
$S=0$ (singlet)

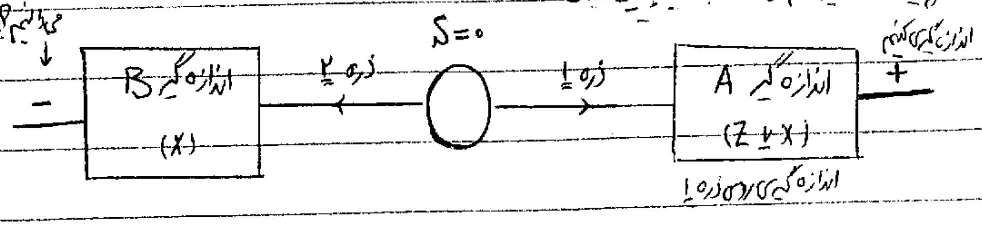
$$|\text{Singlet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{z}_+,\hat{z}_-\rangle - |\hat{z}_-,\hat{z}_+\rangle\right) \qquad \text{(I)}$$

این رابطه مانند همه روابط کوانتومی یک توصیف احتمالاتی دارد.
در کوانتوم مکانیک یک حالت ترکیبی از یک دسته ویژه کت است و اندازه‌گیری روی این حالت با احتمال $|c_n|^2$ منجر به حالت $|n\rangle$ می‌شود:

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n|n\rangle \begin{cases} \nearrow |1\rangle & \text{با احتمال}: |c_1|^2 \\ \rightarrow |2\rangle & \text{با احتمال}: |c_2|^2 \end{cases}$$

وقتی اندازه‌گیری کردیم و مثلاً حالت $|2\rangle$ شد دیگر از این به بعد ترکیب حالتها نیست و یک حالت مشخص است.
در حقیقت جانم کلام کوانتوم مکانیک همین حالت و کوانتوم مکانیک حالت را قبل از اندازه‌گیری مشخص نمی‌کند و نمی‌تواند بگوید چه چیزی بدست می‌آوریم و فقط احتمال را می‌گوید.
رابطه (I) هم همین چیزی است و یک ترکیبی از ۲ حالت است، حالت اول، حالتی است ذره اول "+" باشد و ذره دوم "−"، حالت دوم برعکس است با ضریب $\frac{1}{\sqrt{2}}$، پس با احتمال $\frac{1}{2}$ حالت اول می‌شود و با احتمال $\frac{1}{2}$ حالت دوم. یعنی قبل از اندازه‌گیری ذره $\underline{1}$ می‌تواند "+" باشد و ذره $\underline{2}$، "−" یا برعکس. بعد از اندازه‌گیری ذره $\underline{1}$ یا "+" است و یا "−".
بنابراین اگر آزمایشی طراحی کنیم که دو ذره اسپین $\frac{1}{2}$ در حالت $S=0$ تولید شوند (کافی است این دو ذره از واپاشی یک ذره با اسپین صفر تولید شده باشند)، ذره $\underline{1}$ را به یک سمت و ذره $\underline{2}$ را به سمت دیگری می‌فرستیم. اسپین ذره $\underline{1}$ می‌تواند بالا یا

یا پایین باشد، اسپین ذره ۲ هم می‌تواند بالا یا پایین باشد.



ولی وقتی روی ذره ۱ اندازه‌گیری کنیم و ببینیم خروجی آن "+" شد، قبل از اندازه‌گیری روی ذره ۲، می‌دانیم ذره ۲ در حالت "−" است، این یک رفتار عجیب است. ارکوانتم مکانیک با بعد از اندازه‌گیری تکلیف حالت را می‌دانیم اما اینجا قبل از اندازه‌گیری حالت ذره ۲ را می‌دانیم.

علت کوانتوم مکانیکی این موضوع واضح است، چون وقتی که ذره ۱ را اندازه‌گیری کردیم و "+" بدست آوردیم معنای این است که حالت سیستم (یعنی ذره ۱ + ذره ۲) از اول به صورت $|\hat{z}_+,\hat{z}_-\rangle$ است.

یا به یک صورت دیگر می‌توانیم این موضوع را به طور صحیح‌تر بیان کنیم. ما می‌توانیم حالت Singlet را برحسب $\hat{x}_+$ و $\hat{x}_-$ هم می‌توانیم بنویسیم، چون z و x هیچ فرقی با هم ندارند (برای هر راستای $\hat{a}$ هم این رابطه وجود دارد).

$$|\text{Singlet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{x}_+,\hat{x}_-\rangle - |\hat{x}_-,\hat{x}_+\rangle\right)$$

اثبات:

$$|\hat{x},\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{z},+\rangle \pm |\hat{z},-\rangle\right) \Longrightarrow |\hat{z},\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{x},+\rangle \pm |\hat{x},-\rangle\right)$$

پس: $|\hat{z}_+,\hat{z}_-\rangle = |\hat{z},+\rangle \otimes |\hat{z},-\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(|\hat{x},+\rangle + |\hat{x},-\rangle\right) \otimes \left(|\hat{x},+\rangle - |\hat{x},-\rangle\right)\right]$

همین طور $|\hat{z}_-,\hat{z}_+\rangle$ را هم حساب کنیم و از هم کم کنیم اثبات می‌شود.

فرض می‌کنیم اندازه‌گیر A بتواند اسپین x یا اسپین z را اندازه‌گیری کند و اندازه‌گیر B فقط بتواند اسپین x را اندازه‌گیری کند.
فرض کنیم اندازه‌گیر A، S_x را اندازه‌گیری کند و "+" بدست بیاورد، پس از آن می‌فهمیم که حالت سیستم $|\hat{x}_+,\hat{x}_-\rangle$ است، پس ذره ۲ در حالت $|\hat{x}_-\rangle$ است که هم $\hat{z}_+$ دارد هم $\hat{z}_-$ و هر کدام احتمال ۵۰٪ دارند. مثلاً اگر A، z را اندازه‌گیری کند و نتیجه "+" بدست آورد، بنابراین حالت سیستم $|\hat{z}_+,\hat{z}_-\rangle$ است.

A		B	
$S_z \rightarrow +$	$\xrightarrow{\text{حالت سیستم}} |\hat{x}_+,\hat{x}_-\rangle$	$\begin{cases} 50\% \rightarrow z_+ \\ 50\% \rightarrow z_- \end{cases}$	پس اگر B اندازه‌گیری کند با احتمال ۱۰۰٪ z_- را بدست می‌آورد.
$S_z \rightarrow +$	$\xrightarrow{\text{حالت سیستم}} |\hat{z}_+,\hat{z}_-\rangle$	$100\% \rightarrow z_-$	یا مثلاً A می‌تواند اصلاً اندازه‌گیری نکند، پس در آن صورت B
(هیچکدام) اندازه‌گیری نکند		$\begin{cases} 50\% \rightarrow z_+ \\ 50\% \rightarrow z_- \end{cases}$	چون اندازه‌گیری نشده با احتمال ۵۰٪ می‌تواند z_+ یا z_- را بدست آورد.

نکته مهم این است که خروجی B بستگی به تصمیم A دارد یعنی اگر A، S_x را اندازه گیری کند B یک نوع خروجی می‌دهد و اگر S_z را اندازه گیری کند یک نوع دیگر و اگر اندازه گیری نکند باز هم یک نوع دیگر به عنوان خروجی B ظاهر می‌شود.

این حرفها تا وقتی اینها کنار هم هستند قابل درک است، ولی فرض کنیم اینها خیلی خیلی از هم دور شوند (مثلاً 10^5 سال نوری)

بنابراین وقتی این ذرات برسند و اندازه گیری صورت گیرد، وقتی A هر تصمیمی بگیرد نمی‌تواند تصمیمش را به اطلاع B برساند

بنابراین تصمیمات A و B ارتباط علّی با هم ندارند، چون طبق اصل موضعیت انیشتین که می‌گوید دو ارتباط اگر بخواهند با هم ارتباط علّی داشته باشند باید فاصله آنها طوری باشد که نور بتواند با زمان بین آنها برود.

این دو حادثه که ارتباط علّی با هم ندارند، نتایجشان به هم وابسته می‌شود!!! یعنی نتایج B بستگی به نتایج A دارد بدون اینکه A به آن بگوید که چه کار کرده است.

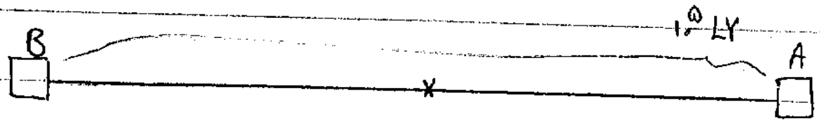
در چارچوب کوانتوم مکانیک این یک پیش‌بینی دارد که به این صورت است که می‌گوید اندازه گیری روی یک سیستم حالت را تعیین می‌کند اگر سیستم از چند جزء تشکیل شده باشد، اندازه گیری روی آن، مؤخرات را هم تعیین می‌کند حتی اگر آن اجزا فاصله بینهایت از هم داشته باشند (و در آن فاصله مطرح نیست)

بنابراین اندازه گیری اجزاء حالتها را تعیین می‌کند، اگر حتی آن حالتها ارتباط علّی با هم نداشته باشند (این ریشه اش فلسفی است)

این طرح پیشنهادی را سه نفر اعلام کردند و به نام آزمایش EPR معروف است (یا پارادوکس EPR)

Einstein Podolsky Rosen $\longrightarrow$ آزمایش EPR

این سه نفر با طرح این آزمایش دارای این هدف بودند که بگویند کوانتوم مکانیک غلط است!



انیشتین نیمی از عمر علمی اش را روی این گذاشت که ثابت کند کوانتوم مکانیک غلط است.

ریشه این بحث برمی‌گردد به توصیف احتمالاتی کوانتوم مکانیک و خیلی تلاش شد که این توصیف برداشته شود و توصیف دیگری برای آن ارائه شود، یکی از آنها این است که می‌گویند این احتمالاتی است به خاطر نادانی ما!! و اگر بتوانیم درست فرمول بندی کنیم دیگر احتمالاتی نیست یعنی یک سری متغیرهای دیگر هم ذرات دارند که به آنها توجهی نشده است و به آن متغیرهای نهانی می‌گوییم (hiden variables). یعنی می‌گویند مثلاً تابع موج که تابعی از مکان دارد

$\Psi_E(\vec{x}, y_1, \dots y_n)$

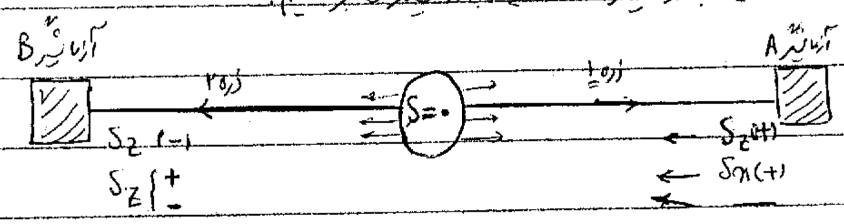
است تابع یک سری متغیرهای دیگر هم هست که اگر معلوم شوند در آن صورت همه چیز

می‌تواند دقیق باشد. بنابراین مکانیک کوانتومی متغیرهای نهانی پیشرفت کرد ولی عدم توفیق آن این بود که هیچ پیش‌بینی جدیدی نمی‌داد که کوانتوم مکانیک ندهد. Bell در سال ۱۹۶۴ آزمایشی را طرح کرد که در چارچوب مکانیک کوانتومی یک نتیجه‌ای می‌دهد و در چارچوب

آنها یک نتیجه یکسان می‌دهند، و آزمایش کردند و دیدند که نتایج مکانیک کوانتومی درست است.

جلسه بیست و هشتم: ۸۴/۱۰/۶

جلسه گذشته در مورد آزمایش EPR صحبت را شروع کردیم و گفتیم اگر یک سیستم دو ذره‌ای با اسپین صفر داشته باشیم که دو ذره از آن خارج شوند، ذره ۱ را به آزمایشگر A و ذره ۲ را به آزمایشگر B فرستادیم.



سیستم در حالت Singlet در نظر گرفته شده است، در هر راستای چنین ترکیبی را دارد:

$$|Singlet\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\hat{n}_+,\hat{n}_-\rangle - |\hat{n}_-,\hat{n}_+\rangle\}$$ هر راستای $\hat{n}$

می‌دانیم که S_z (یعنی در راستای $\hat{z}$) می‌تواند هم "+" باشد و هم "−" و انتظار داریم تا موقعی که روی ذره ۲ آزمایش نشده، احتمال یافتن هر دو حالت وجود داشته باشد.

همان طور که گفتیم اگر S_z ذره ۱ اندازه‌گیری شود و نتیجه "+" شود در آن صورت S_z ذره ۲ بدون اینکه اندازه‌گیری شود باید حالت "−" باشد، که از لحاظ کوانتومی توصیف ریاضی آن روشن است.

سؤالی که مطرح است این است که چطور ذره ۲ که در فاصله خیلی زیاد از ذره ۱ قرار دارد بطوریکه رابطه علّی با آن ندارد متوجه می‌شود که روی سیستم اندازه‌گیری صورت گرفته است که اسپین آن قبل از اندازه‌گیری مشخص می‌شود.

در چارچوب مکانیک کوانتومی این طور است که یک سیستم که می‌تواند چند جزء هم داشته باشد اگر روی یک جزء آن اندازه‌گیری شود انگار روی سیستم اندازه‌گیری صورت گرفته است و روی تمام اجزا سیستم تاثیر می‌گذارد اگر حتی فاصله آن اجزا خارج از فاصله علّی با هم باشد، این مشکلی است که در مکانیک کوانتومی هنوز هم وجود دارد.

راه حل قضیه به دو صورت است، یکی اینکه تئوری‌هایی بپذیریم که مبنای آن بر علّیت باشد و احتمالاتی بودن در آن نباشد و یک سری متغیرها اضافه کنیم که در مکانیک سیستم، دینامیک جبری باشد نه احتمالاتی و همان طور که جلسه پیش گفتیم این تئوری به نتایجی منجر شده است که با کوانتوم مکانیک در تناقض باشد.

اگر بتوان آزمایشی طراحی کرد که نتایج آن با مکانیک کوانتومی در تناقض باشد، در آن صورت قابل پذیرش است. این کار توسط Bell

الله

انجام شد.

چیزی که پایه آزمایش بل یا آزمایشها منسوب به آن است این است که در مورد ذره ۱ هم S_z و هم S_x یک مشخص هستند.

یعنی اینکه در مورد یک ذره مولفه های اسپین مشخص باشند.

در مکانیک کوانتومی ما می‌گوییم حالت $|S_x,\pm\rangle$ یک بسط برحسب $|S_z,\pm\rangle$ دارد،

معنی این رابطه این است که اگر بدانیم سیستم در حالت $|S_x,+\rangle$ $\quad |S_x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S_z,+\rangle + |S_z,-\rangle)$

است دیگر در مورد S_z آن چیزی نمی‌دانیم و S_z آن هم می‌تواند "+" باشد و هم "−". این حرف از اینجا می‌آید که عملگرهای

S_x و S_z با هم جابجا نمی‌شوند بنابراین هم‌زمان نمی‌توان آن ها را تعیین کرد و اگر ویژه مقدار S_x را بدانیم دیگر ویژه مقدار S_z را نمی‌دانیم

$$[S_x,S_z]\neq 0$$

راه حلی که بیشنها دکردند این بود که این حرفها را کنار بگذاریم و فرض کنیم هم S_z و هم S_x و هم S_y ذرات را می‌توان مشخص

دارد، بنابراین در مورد ذره ۱ می‌توانیم این طور بنویسیم، $\quad$ ذره ۱ : $|\hat{x}_+,\hat{y}_-,\hat{z}_+\rangle$

این رابطه‌ای که نوشتیم با مکانیک کوانتومی تناقض دارد و مکانیک کوانتومی می‌گوید چنین stateای که هم S_x و هم S_y و هم S_z کاملا

معلوم باشد وجود ندارد. اما در این دیدگاه می‌توان همچنین stateای را فرض کنیم.

برای آزمایش ما، می‌توانیم حالتها را این طور در نظر بگیریم،

	ذره ۱	ذره ۲	احتمال
(۱)	$|\hat{z}_+,\hat{x}_+\rangle$	$|\hat{z}_-,\hat{x}_-\rangle$	$1/4$
(۲)	$|\hat{z}_+,\hat{x}_-\rangle$	$|\hat{z}_-,\hat{x}_+\rangle$	$1/4$
(۳)	$|\hat{z}_-,\hat{x}_+\rangle$	$|\hat{z}_+,\hat{x}_-\rangle$	$1/4$
(۴)	$|\hat{z}_-,\hat{x}_-\rangle$	$|\hat{z}_+,\hat{x}_+\rangle$	$1/4$

ذره ۱ می‌تواند چهار حالت داشته باشد، ذره ۲ با توجه به ذره ۱ دارای حالتهای عکس حالتهای ذره ۱ است.

بنابراین در این آزمایش، حالتها یکی از این ۴ حالت است (با احتمالهای یکسان)، پس وقتی اندازه گیری کنیم و S_z ذره ۱، "+" باشد پس یا از نوع (۱) است و یا نوع (۲)، پس ذره ۲ هم مربوط به نوع (۱) و (۲) می‌باشد. ما در مکانیک کوانتومی می‌گوییم اگر اندازه گیری کنیم می‌رویم به یکی از این stateها ولی این‌ها می‌گویند که ذره‌ای که طرف ما می‌آید به چه صورت است (چه اندازه گیری کنیم و چه نکنیم). مثلاً اگر از نوع (۱) بود، S_x آن "−" بدست می‌آید چه اندازه گیری بکنیم یا نکنیم و اگر (۲) باشد، S_x آن "+" بدست می‌آید. بنابراین اینکه x آن "−" یا "+" بدست می‌آید بستگی ندارد که چون اندازه گیری کردیم این طور شد.

در حقیقت می‌گویند اینها رابطه علّی با هم ندارند، بلکه نتیجه‌های مختلف ذرات هستند، ذره اگر متعلق به گروه (۱) باشد، این یک شخص است که چه سیستم بیرون می‌آید و دیگر نتیجه آن وابسته به اندازه گیری نیست و بنابراین این حرف درست نیست که بگوییم بعد از آنکه اندازه گیری کردیم، تکلیف ذره ۲ معلوم می‌شود. البته هیچ تناقضی با اصل موضعیت اینشتین ندارد.

تا این مرحله این نوع برخورد با فیزیک کوانتومی تناقضی با علیت ندارد و از دیدگاه مورد نظر هیچ چیز جدیدی نمی‌دهد. هدف این است که یک

طرفداران این دیدگاه نزدیک به کوانتوم نیز در این صورت معلوم می‌شود که کدام درست هستند.

حال یک مقدار آزمایش را پیچیده‌تر می‌کنیم و سه راستای مختلف را در نظر می‌گیریم: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$

اسپین ذره ۱ و ۲ در هر کدام از این راستاها مقدارشان مشخص است و چون که کل حالت بنابراین حالت‌های ما به ۸ دسته تقسیم می‌شوند

population	ذره ۱	ذره ۲
N_1	$\lvert\hat{a}_+,\hat{b}_+,\hat{c}_+\rangle$	$\lvert\hat{a}_-,\hat{b}_-,\hat{c}_-\rangle$
N_2	$\lvert\hat{a}_+,\hat{b}_+,\hat{c}_-\rangle$	$\lvert\hat{a}_-,\hat{b}_-,\hat{c}_+\rangle$
N_3	$\lvert\hat{a}_+,\hat{b}_-,\hat{c}_+\rangle$	$\lvert\hat{a}_-,\hat{b}_+,\hat{c}_-\rangle$
N_4	$\lvert\hat{a}_+,\hat{b}_-,\hat{c}_-\rangle$	$\lvert\hat{a}_-,\hat{b}_+,\hat{c}_+\rangle$
N_5	$\lvert\hat{a}_-,\hat{b}_+,\hat{c}_+\rangle$	$\lvert\hat{a}_+,\hat{b}_-,\hat{c}_-\rangle$
N_6	$\lvert\hat{a}_-,\hat{b}_+,\hat{c}_-\rangle$	$\lvert\hat{a}_+,\hat{b}_-,\hat{c}_+\rangle$
N_7	$\lvert\hat{a}_-,\hat{b}_-,\hat{c}_+\rangle$	$\lvert a_+,\hat{b}_+,\hat{c}_-\rangle$
N_8	$\lvert\hat{a}_-,\hat{b}_-,\hat{c}_-\rangle$	$\lvert\hat{a}_+,\hat{b}_+,\hat{c}_+\rangle$

دنبال این کمیت هستیم:

احتمال اینکه A مولفه $\hat{a}$ از ذره ۱ را "+" و B مولفه $\hat{b}$ از ذره ۲ را "+" بدست آورد.

در این ۸ گروه حالت ذره ۱ و ذره ۲ کاملاً مشخص است و خروجی ذره ۲ ربطی ندارد به اینکه ذره ۱ اندازه‌گیری بشود یا نشود

$$1)\ P(\underbrace{\hat{a}_+}_{\text{ذره ۱}},\underbrace{\hat{b}_+}_{\text{ذره ۲}}) = \frac{N_3+N_4}{\sum_{i=1} N_i} \qquad \cancel{N_1},\ \cancel{N_2},\ N_3,\ N_4$$

حال این احتمال را بدست می‌آوریم:

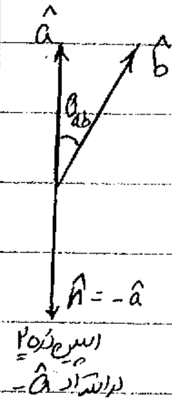
$$2)\ P(\hat{c}_+,\hat{b}_+) = \frac{N_3+N_7}{\sum_{i=1} N_i} \qquad \cancel{N_1},\ N_3,\ \cancel{N_5},\ N_7$$

$$3)\ P(\hat{a}_+,\hat{c}_+) = \frac{N_2+N_4}{\sum_{i=1} N_i} \qquad \cancel{N_1},\ N_2,\ \cancel{N_3},\ N_4$$

مقایسه ۱) و ۲)+۳) $\longrightarrow \dfrac{N_3+N_4}{\sum N_i} \leq \dfrac{N_3+\overbrace{N_7+N_2}^{\text{مثبت هستند}}+N_4}{\sum N_i}$

به عبارت دیگر $\boxed{P(\hat{a}_+,\hat{b}_+) \leq P(\hat{a}_+,\hat{c}_+) + P(\hat{c}_+,\hat{b}_+)}$ نامساوی Bell

بنابراین با توجه به ایده هیدن این رابطه برای این احتمال‌ها باید برقرار باشد. حال ببینیم همین احتمال‌ها در چارچوب مکانیک کوانتومی که لمس ندارد چه چیزی می‌شوند.



برای برهان نامساوی کوانتومی این طور احتمال را بدست می‌آوریم

روی ذره ۱ اندازه‌گیری کردیم و دیدیم اسپین آن در جهت $\hat a_+$ است پس ذره ۲ در $\hat a_-$ است

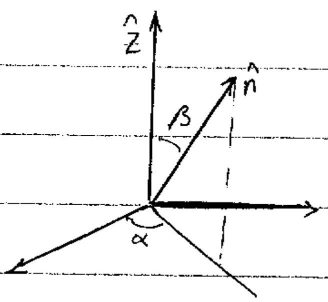
اگر حالت Singlet را در امتداد $\hat a$ بنویسیم داریم:

$$|Singlet\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{|\hat a_+,\hat a_-\rangle} - |\hat a_-,\hat a_+\rangle\right)$$

وقتی اسپین ذره ۱ در جهت $\hat a_+$ است پس حالت $|\hat a_+,\hat a_-\rangle$ است. حال روی ذره ۲ اسپین را در امتداد b اندازه‌گیری می‌کنیم بنابراین

$|\hat a,-\rangle = \alpha|\hat b,+\rangle + \beta|\hat b,-\rangle$: حالت ذره ۲

می‌دهیم آن را برحسب امتداد b، پس $|\alpha|^2$ به ما احتمال اینکه ذره ۲ در حالت $|\hat b,+\rangle$ باشد.



این کت را جلسه گذشته داشتیم. با مقایسه می‌خواهیم $|\hat n,+\rangle$ یعنی حالت $|\hat a,-\rangle$ را

برحسب $\hat z$ (همان $\hat a$ است) بنویسیم و ببینیم چه ضریبی از χ_+ و χ_- است که

ضریب χ_+ مورد نظر ما هست

$$|\hat n,+\rangle = c_1\chi_+ + c_2\chi_-$$

بدست آورده بودیم $|\hat n,+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\alpha/2}\chi_+ + \sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\alpha/2}\chi_- \Longrightarrow |c_1|^2 = \cos^2\frac{\beta}{2}$

$\beta =$ زاویه بین b و n است

$\beta = (\theta_{ab}-\pi)$

بنابراین $P(\hat a_+,\hat b_+)$ را بدست داریم که احتمال وقوع $\hat a_+$ برای ذره ۱ برابر است با:

$$P(\hat a_+,\hat b_+) = \frac{1}{2}\times\cos^2\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_{ab}}{2}$$

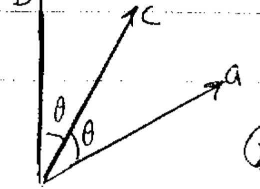
به همین صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$P(\hat a_+,\hat c_+) = \frac{1}{2}\times\cos^2\left(\frac{\pi-\theta_{ac}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_{ac}}{2}$$

$$P(\hat c_+,\hat b_+) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi-\theta_{bc}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_{bc}}{2}$$

مطابق نامساوی بل باید بر اساس محاسبات کوانتومی:

$$\sin^2\frac{\theta_{ab}}{2} \leq \sin^2\frac{\theta_{ac}}{2} + \sin^2\frac{\theta_{bc}}{2} \quad (1)$$



برای راحتی b و a را در یک صفحه می‌گیریم و c را هم نیمساز بین آنها می‌گیریم

بنابراین $\theta_{ab} = 2\theta$, $\theta_{ac} = \theta$, $\theta_{bc} = \theta$

$$(1) \Longrightarrow \sin^2\theta \overset{?}{\leq} 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

سؤال: این رابطه برای هر θ ای برقرار است؟

به سادگی می‌توان دید که این رابطه به ازای برخی θ ها برقرار نیست مثلاً:

$\sin^2\theta \leq 2\sin^2\theta/2 \quad ; \quad \text{if } \theta = \pi/2 \longrightarrow 1/2 \;\cancel{\leq}\; 0.29$

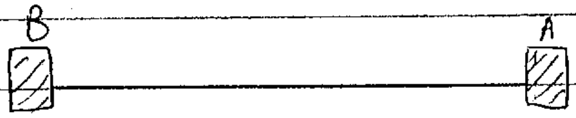
پس این رابطه نقض می‌شود.

پس رابطه‌ای بدست آمد که در مکانیک کوانتومی یک نتیجه‌ای می‌دهد برخلاف نتیجه‌ای که از فیزیک جبری بدست می‌آید. حال می‌توان آزمایش کرد که کدام درست است.

Bell این آزمایش را طراحی کرد و انجام داد و دید که این رابطه غلط است و مکانیک کوانتومی درست است.

$P(\hat{a}_+, \hat{b}_+) \leq P(\hat{a}_+, \hat{c}_+) + P(\hat{c}_+, \hat{b}_+)$ X غلط است

پس مکانیک کوانتومی درست است حتی با این اشکال فلسفی و علّیتی! یعنی سیستم‌ها از راه دور هم متوجه می‌شوند که روی جزئی از آنها اندازه‌گیری شده است.



آیا این نقض علّیت به این معنا، حالا به این مفهوم هست که از راه دور می‌توان اطلاعات را با سرعتی بیشتر از نور منتقل کرد؟ جواب آن منفی است.

$S_z \to -$ $S_z \to +$

$S_z \begin{cases} + \\ - \end{cases}$ $S_x \to +$

$S_z \begin{cases} + \\ - \end{cases}$

گفتیم آزمایش‌های دستگاه A و B به هم مربوط است و تغییر تصمیم A روی نتیجه B تأثیر دارد.

فرض کنیم B، S_z را اندازه‌گیری کند و "−" بدست آورد، اما نمی‌تواند بفهمد که A دقیقاً چه کار کرده است و می‌تواند بگوید یا اندازه‌گیری نکرده یا ممکن است x را اندازه‌گیری کرده باشد و یا ممکن است z را اندازه‌گیری کرده و "+" بدست آورده است. همهٔ این حالت‌ها ممکن است، یعنی اینکه با توجه به اینکه نتایج آنها اندازه‌گیری می‌شود B نمی‌تواند بفهمد که A چه کار کرده است پس اطلاعاتی منتقل و منتشر نمی‌شود با سرعت بیشتر از نور!

عملگرهای تانسوری:

بحث آخری است که می‌خواهیم بکنیم، از فیزیک قابل فهم خارج می‌شویم و یک بحث کاملاً ریاضی انجام می‌دهیم.

الف) عملگرهای برداری:

تا به حال در مورد خصوصیت دورانی خود عملگرها صحبت نکردیم. یعنی وقتی می‌گوییم یک عملگر مؤلفه‌های مختلف دارد، چطور این مؤلفه‌ها با هم ارتباط دارند. (بردار، عملگری یا تانسور عملگری ...)

برای اینکه این موضوع روشن شود، تعریف می‌کنیم که منظورمان از عملگری که برداری است چیست؟

عملگرهای برداری که تا به حال داشتیم، اینها بوده‌اند:

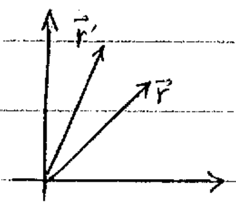
مولفه‌های مختلف جابجا می‌شوند — مولفه‌های مختلف جابجا نمی‌شوند

بردار $\underbrace{\vec{X}, \vec{P}}, \underbrace{\vec{S}, \vec{L}, \vec{J}}$

اسکالر H

حال سوال این است که دقیقاً وقتی می‌گوییم $\vec{J}$ یک بردار است و به صورت $\vec{J}=(J_x, J_y, J_z)$ می‌باشد، این کار چه موقع مجاز است و می‌توان سه اپراتور را به عنوان بردار در نظر گرفت.

برمی‌گردیم به فیزیک کلاسیک، در فیزیک کلاسیک می‌گوییم هر موجودی که تحت دوران مثل بردار مکان رفتار کند، آن را بردار می‌گوییم.



ارتباط بین موقعیت‌های r و r' : $x'_i = \underset{\text{ماتریس دوران}}{R_{ij}}\, x_j$

همچنین می‌گوییم که هر سه تابعی که تحت دوران به صورت بالا رفتار کنند، در آن صورت به آن ($\vec{V}$) یک بردار (Vector) می‌گوییم.

$$\{V_x(x,y,z),\ V_y(x,y,z),\ V_z(x,y,z)\} \longrightarrow V'_i = R_{ij} V_j$$

این تعریف بردار کلاسیک است.

حال می‌خواهیم این ایده را کوانتومی کنیم، مشکلی که داریم در مورد موضوعاتی غیر کوانتومی است یعنی همزمان V_x و V_y را داریم در مکانیک کوانتومی ممکن است اینها با هم جابجا نشوند، بنابراین نمی‌توانیم همزمان آنها را تعیین کنیم.

* بنا می‌خواهیم که عملگر برداری چنان باشد که مقدار چشمداشتی آن تحت دوران، مانند بردار کلاسیک رفتار کند.

در مورد عملگرها چیزی که می‌توانیم ببینیم مقدار چشمداشتی آنهاست نه خودشان، پس اگر رابطه کلاسیک برای مقدار چشمداشتی عملگر برقرار بود، در آن صورت تشکیل بردار می‌دهد.

$$\langle V_i \rangle = \langle \alpha | V_i | \alpha \rangle$$

رابطه بین مقدار چشمداشتی‌ها پس از تحت دوران ؛ $\langle V_i' \rangle = R_{ij} \langle V_j \rangle$ (I)

تحت دوران ؛ $|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle$, $\langle\alpha| \longrightarrow {}_R\langle\alpha| = \langle\alpha|D^\dagger(R)$ (II)

(I),(II) $\Rightarrow \langle\alpha|V_i|\alpha\rangle \longrightarrow {}_R\langle\alpha|V_i|\alpha\rangle_R = \langle\alpha|D^\dagger(R)\, V_i\, D(R)|\alpha\rangle$ ؛ در نمایش شرودینگر

(I) را اعمال می‌کنیم $\Rightarrow \langle\alpha|D^\dagger(R)\,V_i\,D(R)|\alpha\rangle = R_{ij}\,\langle\alpha|V_j|\alpha\rangle$

$\rightarrow \langle\alpha|[D^\dagger(R)V_iD(R) - R_{ij}V_j]|\alpha\rangle = 0$ می‌خواهیم برای هر بردار α باشد ؛ $\boxed{D^\dagger(R)V_iD(R) = R_{ij}V_j}$ (III)

بنابراین هر عملگری که در رابطه (III) صدق کند، می‌گوییم برداری است.

اگر رابطه (I) و (III) را مقایسه کنیم، رابطه (III) تعمیم رابطه (I) برای مقادیر چشم‌داشتی است و $D^\dagger(R) V_i D(R)$ تبدیل یافته یک اپراتور است.

$$(I):\ \langle V_i' \rangle = R_{ij} \langle V_j \rangle$$

$$(III):\ \underbrace{D^\dagger(R) V_i D(R)}_{\langle V_i' \rangle \text{ تبدیل یافته اپراتور}} = R_{ij} V_j$$

این رابطه را می‌توان به زبان بردارها هم نوشت:

$$D(R) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{J}\cdot\hat{n}\varphi} \xrightarrow[\varphi=\varepsilon]{\text{دوران بی‌نهایت کوچک}} D(R) = 1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon \vec{J}\cdot\hat{n} \quad (IV)$$

(IV) را در رابطه (III) می‌گذاریم و تا مرتبه ε می‌نویسیم:

$$D^\dagger(R) V_i D(R) = R_{ij} V_j \xrightarrow{\text{تا مرتبه } \varepsilon} \boxed{V_i + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_i, \vec{J}\cdot\hat{n}] = R_{ij} V_j} \quad (V)$$

حالت خاص دوران را در نظر می‌گیریم:

$$\hat{n} = \hat{z} \Longrightarrow R(\hat{z}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (VI)$$

$$\text{برای } i=1 \xrightarrow{(V),(VI)} V_x + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_x, J_z] = V_x - \varepsilon V_y \Longrightarrow [V_x, J_z] = -i\hbar V_y$$

$$\Longrightarrow \boxed{[V_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k}$$

یعنی هرگاه سه اپراتور V_x و V_y و V_z دارای رابطه جابجایی به این صورت با J باشند، این سه اپراتور یک بردار می‌شوند. توجه کنیم که اگر $\vec{V} = \vec{J}$ بگیریم، رابطه به صورت بالا برقرار است.

به عنوان تمرین $\vec{V} = \vec{x}, \vec{P}$ و $\vec{J} = \vec{L}$ بگیریم و ببینیم که درست است.

تانسور:

تعریف دکارتی یک تانسور:

تانسور موجودی است که هر اندیس آن از سه مولفه تشکیل شده باشد.

$$\underbrace{V_i}_{\text{بردار یا تانسور مرتبه ۱ است.}},\ \overset{\text{۹ مولفه}}{T_{ij}},\ \overset{\text{۲۷ مولفه}}{T_{ijk}},\ \cdots,\ \underset{\text{تانسور مرتبه } n}{\overset{3^n \text{ مولفه}}{T_{i_1 i_2 \cdots i_n}}}$$

به شرطی این یک تانسور است که تحت دوران فرم خاصی رفتار کند.

در حقیقت تعمیم رابطه برای یک $V_i' = R_{ij} V_j$ است که به ازای هر اندیس آن باید این طور باشد.

تانسورهای دکارتی

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 \cdots j_n}$$

حال سؤال این است که آیا می‌شود تانسورها را به یک صورت ساده‌تر نوشت؟ آیا تانسورهای کارتزین تقلیل‌ناپذیرند یا تقلیل‌پذیر هستند؟ (reducable , irreducable)

یعنی آیا امکان دارد که ۹ مولفه تانسور دلخواه را طوری دیگر نوشت که ترکیب شده باشد از تانسورهای رتبه پایین‌تر.

یک رابطه‌ای را می‌نویسیم و می‌خواهیم ببینیم درست است یا غلط؟

هر تانسوری را به این صورت می‌نویسیم: $T_{ij} = \frac{1}{3} T\delta_{ij} + C_k + S_{ij}$

که: $T = \text{trace}\, T_{ij} = \sum_i T_{ii}$

روی این‌ها توضیحات، جمله اول $\frac{1}{3}T\delta_{ij}$ است که $C_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})$ (i,j,k چرخشی هستند)

در S_{ij} هم $-\frac{1}{3}T\delta_{ij}$ وجود دارد که با هم حذف می‌شوند $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji}) - \frac{1}{3}T\delta_{ij}$

بنابراین C_k و قسمت باقیمانده S که با هم جمع شوند T_{ij} باقی می‌ماند $tr(S_{ij}) = 0$

این طور که نوشتیم یک نکته‌ی مفیدی دارد که باعث می‌شود که یک تانسور مرتبه ۲ دلخواه را تجزیه به ۳ موجود کنیم. یک موجود مرتبه صفر (اسکالر)، یک موجود مرتبه ۱ (بردار) و یک موجود مرتبه ۲ (تانسور) است.

تانسور مرتبه ۲ دلخواه = اسکالر + بردار + تانسور مرتبه ۲ متقارن بدون trace

S_{ij} دوم متقارن است پس تانسور است، تانسور متقارن است یعنی اگر جای اندیس‌ها را عوض کنیم تغییری نمی‌کند، در ضمن بدون trace هم است چون:

$$\sum_{ij}\delta_{ij} = 3 \rightarrow tr(S_{ij}) = \frac{1}{2}(2\,\underbrace{tr\,T_{ij}}_{T}) - \frac{1}{3}T\times 3 = 0$$

C که بردار است یعنی تحت دوران با یک R_{ij} سروکار دارد.

نکته‌ای که می‌دانیم این است که در ضرب تانسورها اگر جمع روی اندیس بخورد (ادغام) در رتبه تانسور را یکی پایین می‌آورد.

یک تانسور مرتبه ۲ ضرب در یک تانسور مرتبه ۳ مثلاً یک تانسور مرتبه ۵ می‌دهد چون:

$$\overbrace{U_{ijklm}}^{5} = \overbrace{T_{ij}}^{2}\,\overbrace{S_{klm}}^{3}$$

تحت دوران نگاه می‌کنیم: $U'_{ijklm} = T'_{ij}S'_{klm} = R_{ii'}R_{jj'}R_{kk'}R_{ll'}R_{mm'}\overbrace{T_{i'j'}S_{k'l'm'}}^{U_{i'j'k'l'm'}}$

پس چون ارتباط U' با U شد ۵ تا موجود (R) پس U یک تانسور مرتبه ۵ است.

بنابراین کنار هم نوشتن تانسورها یک راه ساده ساختن تانسور است. حال اگر در این کنار هم نوشتن طوری باشد که اندیس‌ها آن‌هایی باشد جمع بخورد به همان تعداد از مرتبه‌شان کم می‌شود. مثلاً:

$$U_{ilm} = \sum_j T_{ij}S_{jlm} \xleftarrow{\text{ادغام می‌کنیم}} \rightarrow U'_{ilm} \stackrel{?}{=} R_{ii'}\underbrace{R_{jj'}R_{jj''}}_{\delta_{j'j''}}R_{ll'}R_{mm'}T_{i'j'}S_{j''l'm'} \quad (1)$$

R ها ماتریس دوران هستند و متعامدند:

$$R^TR = 1 \rightarrow (R^TR)_{j'j''} = (1)_{j'j''} \rightarrow \overbrace{(R^T)_{j'j}}^{R_{jj'}}R_{jj''} = \delta_{j'j''} \quad (2)$$

$$\text{I} \;,\; \text{II} \Rightarrow V_{i\ell m} \stackrel{?}{=} R_{ii'} R_{\ell\ell'} R_{mm'} \underbrace{T_{i'j'} \delta_{j'\ell'm'}}_{V_{i'\ell'm'}}$$

چون ۳ تا R وجود دارد این یک تانسور مرتبه ۳ است که ادعایمان درست است.

بنابراین در عین اینکه contraction ها به ازای هر ادغام ۲ تا از اندیس‌ها برداشته می‌شوند و مرتبه تانسور ۲ تا کم می‌شود.

مثل اینکه T اسکالر است از همین موضوع بدست می‌آید چون روی یک تانسور مرتبه ۲ ادغام صورت گرفته است،

$$T = \sum_i T_{ii}$$

بنابراین این تفکیک وجود دارد که هر تانسور مرتبه ۲ دلخواه را می‌توان تبدیل به یک اسکالر و یک بردار و یک تانسور مرتبه ۲ متقارن بدون trace کرد:

تانسور مرتبه ۲ دلخواه (۹ پارامتر) = اسکالر (۱ پارامتر) + بردار (۳ پارامتر) + تانسور مرتبه ۲ متقارن بدون trace (۵ ← چون)

تانسورهای کروی

متقارن که باشند می‌شود ۶ تا چون بالایی‌ها با پایینی‌ها یکی است

بدون trace هم که باشند یک معادله بوجود می‌آید که یک پارامتر کم می‌کند پس می‌شود ۵ تا!

بردار بردار

$$T_{ij} = U_i V_j$$

از طرف دیگر هر تانسور مرتبه ۲ می‌توان بصورت حاصلضرب دو بردار نوشت،

$$\rightarrow U_i V_j = \frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{3}\delta_{ij} + \frac{(U_i V_j - U_j V_i)}{2} + \left(\frac{U_i V_j + U_j V_i}{2} - \frac{U\cdot V}{3}\delta_{ij}\right)$$

$$T_{ii} = U_i V_i = U\cdot V$$

این چنین اتفاقی افتاده است که یک تانسور مرتبه یک (سه بعدی) در یک تانسور مرتبه یک (سه بعدی) ضرب شده‌اند تفکیک شده‌اند به یک موجود ۱ بعدی، یک موجود ۳ بعدی و یک موجود ۵ بعدی.

reduce (تقلیل)

$$3 \otimes 3 = \underset{\text{یک بعدی}}{1} \oplus \underset{\text{سه بعدی}}{3} \oplus \underset{\text{پنج بعدی}}{5}$$

تانسور سمت چپ یک تانسور دلخواه است، به تانسورهای سمت راست اصطلاحاً تانسورهای کروی می‌گوییم و این تفکیک، تفکیک یک تانسور مرتبه ۲ دلخواه است به یک تانسور کروی. این کار یک جور تقلیل کردن است و یک تانسور مرتبه ۲ دلخواه را تقلیل می‌توان داد به یک تانسور مرتبه صفر (یک بعدی)، یک تانسور مرتبه یک (سه بعدی) و یک تانسور مرتبه دو (پنج بعدی).

این موضوع ما را به یاد این موضوع می‌اندازد:

$$j_1 \otimes j_2 = j_1 + j_2 \oplus j_1 + j_2 - 1 \oplus \cdots |j_1 - j_2|$$

مثال خاص از این موضوع:

$$1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$$

$$\underset{\ell=1}{\text{۳ بعدی}} \otimes \text{۳ بعدی} = \underset{\ell=0}{\text{۱ بعدی}} \oplus \underset{\ell=1}{\text{۳ بعدی}} \oplus \underset{\ell=2}{\text{۵ بعدی}}$$

پس یک ارتباط خیلی عجیب بین تانسورها و تقلیلشان با اندازه حرکت زاویه‌ای وجود دارد یعنی تانسورها را می‌توان تقلیل داد به مولفه‌هایی؛ درست به همان صورت که ضرب تکانه زاویه‌ای را می‌توان تقلیل داد به تکانه زاویه‌ای‌هایی!

در جلسه بعدازظهر از این واقعیت استفاده می‌کنیم و تعبیر تانسورهای کروی را می‌کنیم.

ما تا اینجا بردار کلاسیک و بردار کوانتومی را داریم: $V_i' = R_{ij} V_j$ classic

$D^\dagger(R) V_i D(R) = R_{ij} V_j$ quantum

حال تانسور کلاسیک را داریم، می‌توانیم برویم سراغ تانسور کوانتومی، ولی چون به صورت دلخواه یک مقدار سخت است، می‌رویم سراغ تانسورهای کروی دلخواه. چون یک ارتباط جالبی بین تانسورهای کروی و اندازه حرکت زاویه‌ای وجود دارد.

جلسه بیست و نهم: ۸۴/۱۰/۶ (سه‌شنبه بعدازظهر)

ماتریس ۳×۳ ، ۳ برداری ۹

در مورد بردارها گفتیم بردار کلاسیک برداری است که در رابطه مقابل صدق می‌کند $V_i' = R_{ij} V_j$ (I)

برای تعمیم این رابطه به بحث کوانتوم مکانیک و عملگرها گفتیم همین رابطه باید برای مقادیر چشم‌داشتی برقرار باشد و منجر به این رابطه شد:

$$D^\dagger V_i D = R_{ij} V_j \ \text{(II)} \xrightarrow{\text{برای دورانهای بینهایت کوچک}} [V_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k$$

بعد گفتیم این موضوع را به تانسورهای مرتبه بالاتر تعمیم می‌دهیم، گفتیم تانسور دلخواه را وقتی تانسور می‌نامیم که در این رابطه صدق کند تحت دوران:

تانسور دلخواه $\leftarrow T'_{i_1 \dots i_n} = R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \leftarrow$ تانسور کارتزین

بنابراین می‌توان این رابطه را به عملگرها هم تعمیم داد.

یک طور دیگری عمل کردیم و گفتیم می‌توان با تانسورهای کروی کار کرد و دیدیم که می‌توان این طور نوشت:

$$T_{ij} = \frac{1}{3} \underset{\text{trace}(T_{ij})}{T} \delta_{ij} + C_k + S_{ij}$$

می‌توان این طور نوشت

$U_i V_j$: حاصلضرب دو تانسور مرتبه ۱

در واقع ⟵ ۳⊗۳ = ۱⊕۳⊕۵

گفتیم این در حقیقت از نوع ضرب تکانه زاویه‌ای است:

$$\overset{j_1}{1} \otimes \overset{j_2}{1} = \overbrace{0 \oplus 1 \oplus 2}^{j}$$

بنابراین برای تانسورها مفیدتر خواهد بود که به جای اینکه تانسورهای کارتزین را تعمیم دهیم، تانسورهای کروی را تعمیم دهیم، که تانسور کروی یک جور پایه تانسورها هستند یعنی یک تانسور مرتبه ۲ ترکیبی از تانسورهای کروی است.

بنابراین ما برای تعمیم تانسورها به اپراتورهای تانسوری، با تانسورهای کارتزین کاری نداریم و با تانسورهای کروی کار داریم، یعنی باید ابتدا یک چیزی شبیه رابطه (I) را برای تانسورهای کروی باید بدست آوریم و سپس آن را تعمیم دهیم و رابطه‌ای شبیه (II) برای عملگرهای تانسوری بدست آوریم.

برای بدست آوردن این تبدیل از این استفاده می‌کنیم که می‌گوییم رابطه‌ی بین تانسورهای کروی و اندازه حرکت زاویه‌ای وجود دارد. بنابراین از Y_ℓ^m ها که state های تکانه زاویه‌ای هستند استفاده می‌کنیم و قاعده تبدیل آنها را پیدا می‌کنیم، تعمیم می‌دهیم به اپراتورها.

یعنی قاعده تبدیل Y_ℓ^m را بدست می‌آوریم و می‌گوییم قاعده تبدیل تانسورهای کروی هم همان است و سپس آن را به عنصرهای تانسوری تعمیم می‌دهیم. پس ابتدا قاعده تبدیل Y_ℓ^m را بدست می‌آوریم:

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = Y_\ell^m(\underbrace{\hat{n}}_{\text{اشاره}})$$

$$Y_\ell^m(\hat{n}) = \langle \hat{n} | \ell m \rangle$$

چرخش: $|\hat{n}\rangle \longrightarrow |\hat{n}\rangle_R = D(R)|\hat{n}\rangle \;\Rightarrow\; {}_R\langle \hat{n}| = \langle \hat{n}| D^\dagger(R)$ $\qquad \ell = \ell'$

بنابراین: $Y_\ell^m \xrightarrow{R} \underbrace{{}_R\langle \hat{n} | \ell m \rangle}_{\equiv \langle \hat{n}' |} = \underbrace{\langle \hat{n}' | \ell m \rangle}_{Y_\ell^m(\hat{n}')} = \langle \hat{n} | D^\dagger(R) | \ell m \rangle = \sum_{m'} \underbrace{\langle \hat{n} | \ell m' \rangle}_{Y_\ell^{m'}(\hat{n})} \underbrace{\langle \ell m' | D^\dagger(R) | \ell m \rangle}_{(D^\dagger)^{(\ell)}_{m'm}(R)}$

پس تحت دوران $Y_\ell^m(\hat{n})$ تبدیل به $Y_\ell^m(\hat{n}')$ می‌شود با این رابطه: (ترانهاده‌ی مزدوج و عوض کردن جای اندیس‌ها) $(D^\dagger)_{m'm} \longrightarrow D^*_{mm'}$

این رابطه، قاعده تبدیل Y_ℓ^m ها است تحت دوران:

$$\Longrightarrow \boxed{Y_\ell^m(\hat{n}') = \sum_{m'} D^{*(\ell)}_{mm'} Y_\ell^{m'}(\hat{n})}$$

دو نکته وجود دارد:

۱) می‌خواهیم قاعده تبدیل تانسور کروی که دقیقاً مانند Y_ℓ^m ها است را تعریف کنیم (مثل شبه‌دایی)، بنابراین:

$$\boxed{Y_{\ell=K}^{m=q} \longrightarrow \underbrace{T}_{\text{تانسور کروی}}{}^{(K)\,\to\,\text{مرتبه (rank)}}_{q=-K,-K+1,\dots,K-1,K}}$$

مثلاً برای تانسور مرتبه ۲ از دو اندیس استفاده می‌کردیم:

کارتزین (اسم معمولی): $T_{11}\, T_{12} \dots T_{33} \longrightarrow T_{i_1 \dots i_K} \xrightarrow{\text{تعداد مولفه}} 3^K$

پس برای تانسور کارتزین دو (مرتبه‌ی ۲) برای تانسور کروی به این صورت می‌نویسیم: $\overset{(\text{مرتبه صفر})}{T_1^{(0)}}$ $\quad \overset{(\text{مرتبه ۱})}{T^{(1)}_{i=1,2,3}}$ یا $-1,0,1$

$$3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5$$

بنابراین تانسورهای کروی را این طور نمایش می‌دهیم: $\overset{(\text{مرتبه ۲})}{T^{(2)}_{i=1,2,\dots,5}}$ یا $\underbrace{-2,-1,0,1,2}_{2\times2+1=2j+1}$

که مرتبه‌ی آن را در داخل یک پرانتز می‌گذاریم و به اندازه تعداد مولفه‌ها اندیس می‌گذاریم و یک اندیس بیشتر نمی‌گذاریم و محدوده‌ی اندیس‌ها را از $-K$ تا $+K$ در نظر می‌گیریم و اگر این طور نشان دهیم کافی است چون تعداد مولفه‌های تانسور کروی برابر $2K+1$ است. برای تانسورهای کارتزین تعداد مولفه‌ها 3^K بود اما برای تانسور کروی این تعداد کمتر است و برابر $2K+1$ است.

پس به جای Y_ℓ^m یک $T_q^{(K)}$ در نظر می‌گیریم.

۳) قاعده تبدیل عملگری مانند حالت برداری رفتار می‌کند.

برای بردارها: $\begin{cases} V_i' = R_{ij} V_j \\ \downarrow \\ D^{+} V_i D = R_{ij} V_j \end{cases}$ (I)

در اینجا هم همین کار را می‌کنیم، بجای Y_l^m، $T_q^{(K)}$ می‌گذاریم و بجای پریم‌دار‌ها مانند بالا می‌نویسیم،
سمت راست رابطه‌ها مانند قبل می‌نویسیم ($Y_l^m(\hat{n}')$)

$$\boxed{D^{+}(R)\, T_q^{(K)}\, D(R) = \sum_{q'=-K}^{K} \underbrace{D^{*(K)}_{qq'}(R)}_{\text{ماتریس } (2K+1)(2K+1)}\, T_{q'}^{(K)}} \quad \text{(II)} \longleftarrow Y_l^m(\hat{n}') = \sum_{m'} D^{*(l)}_{mm'}\, Y_l^{m'}(\hat{n})$$

* به عبارت دیگر هر $2K+1$ عملگر به شرطی تشکیل یک عملگر تانسوری مرتبه K را می‌دهد که مولفه‌های آن از قاعده بالا تبعیت کنند یعنی ما رابطه (I) که برای بردارهایی که ۳ تا مولفه داشتند را تعمیم دادیم به بردارهایی که هر تعداد مولفه دارند (رابطه (II)). بجای اینکه یک بردار ۳ مولفه‌ای است، یک بردار $2K+1$ مولفه‌ای گذاشتیم، بنابراین بجای ماتریس 3×3 باید یک ماتریس $(2K+1)(2K+1)$ بگذاریم. نکته دیگری هم که وجود دارد در این دو رابطه این است که در رابطه (II) ماتریس مورد نظر ستاره دارد اما در رابطه (I) این طور نیست که آن هم به این دلیل است که عناصر ماتریس دوران سه بعدی حقیقی هستند.

همانند بردارها رابطه جابجایی بدست می‌آوریم. D را در دوران‌های بینهایت کوچک می‌گیریم:

دوران‌های بینهایت کوچک $\varphi = \varepsilon$ $\longrightarrow D(R) = 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}$ (III)

$$\underset{\text{تا مرتبه } \varepsilon}{\text{(III)} \to \text{(II)}} : \left[\vec{J}\cdot\hat{n}, T_q^{(K)}\right] = \sum_{q'} T_{q'}^{K} \overbrace{\langle Kq' | \vec{J}\cdot\hat{n} | Kq\rangle}^{\text{عامل } D^{*}_{qq'} \text{ است}}$$

$|Kq\rangle$ ها eigen state های $\vec{J}$ هستند یعنی:

$$J^2|Kq\rangle = K(K+1)\hbar^2|Kq\rangle \quad , J_z|Kq\rangle = q\hbar|Kq\rangle$$

$$\text{if } \hat{n} = \hat{z} \longrightarrow \left[J_z, T_q^{(K)}\right] = \sum_{q'} T_{q'}^{K} \underbrace{\langle Kq' | \overbrace{J_z|Kq\rangle}^{\hbar q|Kq\rangle}}_{\hbar q\, \delta_{qq'}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left[J_z, T_q^{(K)}\right] = \hbar q\, T_q^{(K)}} \quad (1)$$

$$\text{if } \hat{n} = \hat{x} \pm i\hat{y} \longrightarrow \boxed{\left[J_{\pm}, T_q^{(K)}\right] = \hbar\sqrt{(K \mp q)(K \pm q + 1)}\; T_{q\pm1}^{(K)}} \quad (2)$$

این روابط (1) و (2)، تعریف تانسورهای کروی هستند با استفاده از جابجاگرها با نگاه زاویه‌ای. این روابط تعمیم رابطه $[V_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$ معادل است، یعنی اگر $K=1$ باشد، همین رابطه می‌شود:

بنابراین تعریف عملگرهای کروی تانسوری این روابط را بدست آوردیم که اصطلاحاً تقلیل ناپذیرند اما عملگر تانسوری کارتزین تقلیل پذیرند.

یک روش ساخت (نه تنها روش ساخت) این موضوع استفاده از تعریف Y_ℓ^m ها است.

رابطه (II) را به یک صورت دیگر هم می‌نویسیم:

$$\text{(II)}:\ D^\dagger(R)\,T_q^{(k)}\,D(R)=\sum_{q'=-k}^{k} D^{(k)}_{qq'}(R)\,T_{q'}^{(k)}$$

$$\Longrightarrow D(R^{-1})\,T_q^{(k)}\,D^\dagger(R^{-1})=\sum\left[D(R^{-1})\right]_{qq'}T_{q'}^{(k)}$$

$\equiv R' \text{ یا } R$

برای عملگرهای یکانی: $D^\dagger(R)=D^{-1}(R)=D(R^{-1})$

$$\Longrightarrow \boxed{D(R)\,T_q^{(k)}\,D^\dagger(R)=\sum D^{(k)}_{q'q}(R)\,T_{q'}^{(k)}}$$

حال دنبال روشی هستیم برای پیدا کردن $T_q^{(k)}$ ها با استفاده از Y_ℓ^m.

در مورد بردارها گفتیم که بردار مکان به صورت مقابل رفتار می‌کند و هر موجودی که به این صورت رفتار کند را بردار می‌نامیم. بنابراین برای رفتن از حالت مکان به حالت عمومی‌تر به جای مولفه‌های مکان از بردار استفاده کردیم.

$$x'_i=R_{ij}\,x_j$$

$$V'_i=R_{ij}\,V_j$$

همین روش را می‌توان در مورد Y_ℓ^m ها اعمال کرد و بگوییم Y_ℓ^m ها تابعی از θ و ϕ هستند که θ و ϕ مختصه مکان است یعنی شبیه x_j. می‌توان رابطه (1) را یک مقدار تغییر داد و به جای بردار مکان هر برداری را گذاشت. یعنی توابع را تانسورها بگیریم و دانست که تابع مکان نیستند و تابع بردار هستند و به این شکل تانسورها را بسازیم.

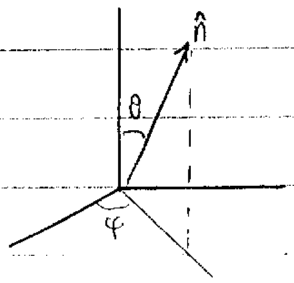
Y_ℓ^m ها ترکیب خاصی از θ و ϕ هستند و ما از رفتار Y_ℓ^m ها برای ساخت تانسورهای کروی استفاده می‌کنیم. با ترکیب Y_ℓ^m را عوض می‌کنیم برای هر بردار، فقط بردار مکان را بعد T را از آن بدست می‌آوریم و چک می‌کنیم که در رابطه مورد نظر صدق می‌کند.

$$Y_\ell^m(\hat n')=\sum_{m'} D^{(\ell)*}_{mm'}(R)\,Y_\ell^{m'}(\hat n)$$

مثال: $Y_{1=\ell}^{0=m}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hat n_z$ ارتباط $\cos\theta$ با $\hat n$ این است که $\cos\theta$ در حقیقت مولفه z، $\hat n$ است.

$$\rightarrow Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hat n_z=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{z}{r}$$

این نتیجه را تعمیم می‌دهیم و می‌گوییم ترکیب خاص از بردار مکان است و آن هم این است که Y_1^0 برابر مولفه z ام بردار مکان است تقسیم بر اندازه آن.



حال می‌گوییم این نتیجه را به بردار $\vec v$ تعمیم می‌دهیم.

$$\xrightarrow{\text{تعمیم به بردار } \vec v} T_0^{(1)}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,V_z$$

این طور می‌گوییم که اگر بخواهیم عملگر تانسوری مرتبه (1) مولفه صفرام آن را بسازیم، ضریب مورد نظر را می‌گذاریم و بعد مولفه z یک بردار (نه بردار مکان)!

و با مؤلفه i را اگر نگاه کنیم، این طور است:

$$Y_{l=1}^{m=1} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{x+iy}{r}\right) \xrightarrow[\text{همین طور برای }-1]{\text{تعمیم می‌دهیم}} T^{(1)}_{q=\pm1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}(\mp)\left(\frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}\right)$$

بنابراین ادعا این است که از روی Y_l^mها اگر به جای بردار مکان، مؤلفه‌های هر برداری را بگذاریم، چیزی که به این صورت می‌توانیم بسازیم یک تانسور ساخت کرده‌ایم.

در حقیقت ادعا ما این است که: ضریب را کنار می‌گذاریم

$$T_0^{(1)} = A_z \qquad T_1^{(1)} = -\frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}} \qquad T_{-1}^{(1)} = \frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

که در آنها A_iها مؤلفه‌های تانسور برداری هستند.

یعنی اینکه با استفاده از مؤلفه‌های تانسور برداری می‌توان در مرتبه اول این ترکیبات را گرفت و گفت این‌ها مؤلفه‌های تانسوری هستند.

حال ببینیم این حرف چقدر درست است.

در حقیقت باید نشان دهیم که اگر Aها در رابطه $D^\dagger V_i D = R_{ij} V_j$ صدق کنند، در آن صورت Tهایی که می‌سازیم باید در $D^\dagger(R)\, T_q^{(k)} D(R) = \sum_{q=-k}^{k} D_{qq'}^{*(k)}(R)\, T_{q'}^{(k)}$ صدق کنند.

برای اینکه بحث‌مان روشن شود یک دوران مشخص را در نظر می‌گیریم، دوران حول $\hat{z}$ به اندازه φ

$$R(\hat{z},\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^\dagger V_i D = R_{ij} V_j$$

با استفاده از این رابطه داریم،

$$\begin{cases} D^\dagger A_x D = A_x \cos\varphi - A_y \sin\varphi \\ D^\dagger A_y D = A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi \qquad (2) \\ D^\dagger A_z D = A_z \end{cases}$$

پیش‌فرض مسئله ما این است که Aها در این رابطه‌ها صدق می‌کنند.

می‌خواهیم ببینیم با فرض درست بودن روابط 1، Tها چه می‌شوند:

$$D^\dagger T_0^{(1)} D \overset{(1)}{=} D^\dagger A_z D \overset{(2)}{=} A_z = T_0^{(1)} \qquad (3)$$

$$D^\dagger T_{\pm1}^{(1)} D \overset{(1)}{=} \mp\frac{1}{\sqrt{2}} D^\dagger (A_x \pm iA_y) D \overset{(2)}{=} \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{A_x\cos\varphi - A_y\sin\varphi \pm i(A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi)\right\}$$

بنابراین: $D^{\dagger} T^{(1)}_{\pm 1} D = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x \cos\varphi - A_y \sin\varphi \pm i (A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi))$

$$\rightarrow D^{\dagger} T^{(1)}_{\pm 1} D = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x e^{\pm i\varphi} \pm i A_y e^{\pm i\varphi}) = \mp \frac{A_x \pm i A_y}{\sqrt{2}} e^{\pm i\varphi}$$

$$\Longrightarrow \boxed{D^{\dagger} T^{(1)}_{\pm 1} D = e^{\pm i\varphi} T^{(1)}_{\pm 1}} \quad (4)$$

پس تا اینجا ثابت کردیم که اگر A_x, A_y, A_z در روابط برداری صدق کنند، در آن صورت $T^{(1)}_0, T^{(1)}_{+1}, T^{(1)}_{-1}$ در روابط (3) و (4) صدق می‌کنند.

اگر این روابط درست باشند باید برابر با همین رابطه مقابل شوند:

$$D^{\dagger}(R)\, T^{(K)}_q\, D(R) = \sum_{q=-K}^{K} D^{*(K)}_{qq'}(R)\, T^{K}_{q'} \quad (I)$$

باید عنصر ماتریسی $D^{*(K)}_{qq'}(R)$ را حساب کنیم به ازای R در نظر گرفته شده $(\hat{z}, \varphi)$:

$$D^{(K)}_{qq'}(R) = \langle Kq | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_z} | Kq' \rangle}_{e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi \cdot q'\hbar} |Kq'\rangle} = e^{-iq'\varphi} \delta_{qq'} \quad (II)$$

پس: $D^{*}_{qq'}(R) = e^{iq'\varphi} \delta_{qq'} \quad (III)$

$$(I),(III) \Longrightarrow D^{\dagger} T^{(K)}_q D = \sum_{q'} e^{iq'\varphi} \delta_{qq'} T^{(K)}_q = e^{iq\varphi} T^{(K)}_q \quad (5)$$

بنابراین همه تانسورهای مرتبه K ای مؤلفه‌هایش تحت دوران حول z باید به صورت بالا شوند.

$$q=0 \xrightarrow{(5)} D^{\dagger} T^{(K)}_0 D = T^{(K)}_0 \;=\; (3)$$

K اهمیت ندارد و می‌توانیم ببینیم که همان روابط قبلی

$$q=\pm 1 \Longrightarrow D^{\dagger} T^{(K)}_{\pm 1} D = e^{\pm i\varphi} T^{(K)}_{\pm 1} \;=\; (4)$$

بنابراین تانسورهای کروی را می‌توان از Y^M_ℓها ساخت. این روش یکی از راههای ساختن تانسورهای کروی است.

حال مثلاً Y^M_2 را در نظر می‌گیریم:

$$Y^{\pm 2}_2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x \pm iy)^2}{r^2} \xrightarrow{\text{تعمیم به بردار } V} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (V_x \pm i V_y)^2$$

$$T^{(2)}_{\pm 2} = U_{\pm 1} V_{\pm 1} \quad (1)$$

$$T^{(2)}_{\pm 1} = \frac{U_{\pm 1} V_0 + U_0 V_{\pm 1}}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$T^{(2)}_0 = \frac{U_{+1} V_{-1} + 2 U_0 V_0 + U_{-1} V_{+1}}{\sqrt{6}} \quad (3)$$

یک قضیه‌ای می‌نویسیم که از ظاهر آن معلوم است درست است:

$$T_q^{(K)} = \sum_{q_1 q_2} \underbrace{\langle K_1 K_2, q_1 q_2 | K_1 K_2, K q\rangle}_{\text{ضرایب } C.G.} \underbrace{X_{q_1}^{(K_1)} Z_{q_2}^{(K_2)}}_{\text{دو تانسور مرتبه } K_1 , K_2} \qquad (4)$$

این قضیه می‌گوید که اگر دو تانسور مرتبه K_1 و K_2 را داشته باشیم (الطرف راست)، در آن صورت این ترکیب خاص همان یک تانسور مرتبه K می‌شود. که ارتباط بین این تانسور مرتبه K و دو تانسور مرتبه K_1 و K_2 یعنی ضرایب آن چیزی نیست جز ضرایب C.G.

ریشه این قضیه وجود رابطه یک به یک بین تانسورهای کروی و اندازه حرکت زاویه‌ای است. که مثلاً در اینجا می‌گوید اگر دو تکانه زاویه‌ای K_1 و K_2 داشته باشیم و بخواهیم از آن‌ها تکانه زاویه‌ای K را بسازیم، در آن صورت ضریب C.G مربوط را در آنها ضرب کنیم. تمام زاویه‌ای K بدست می‌آید که K بصورت مقابل است: $K = K_1+K_2 , K_1+K_2-1 , \dots , |K_1-K_2|$

این قضیه به دو صورت قابل اثبات است. یک راه اثبات آن که سرراست هم هست، این است که در رابطه بالا در دو طرف $D^\dagger D$ قرار دهیم:

$$D^\dagger T_q^{(K)} D = \sum_{q_1 q_2} \langle K_1 K_2, q_1 q_2 | K_1 K_2, K q\rangle\, D^\dagger X_{q_1}^{(K_1)} D D^\dagger Z_{q_2}^{(K_2)} D \qquad (5)$$

آن وقت از این استفاده می‌کنیم که سمت راست یک تانسور مرتبه K_1 و یک تانسور مرتبه K_2 است و بعد از انجام والا می‌بینیم بدست می‌آید که سمت راست برابر سمت چپ می‌شود.

یک راه ساده‌تر وجود دارد و آن هم نوشتن ضرایب C.G. بر حسب آن. تعمیم این ضرایب این بود که با stateهای $|jm\rangle$ را برحسب stateهای $|m_1 m_2\rangle$ بسط می‌دادیم و اسم ضریب مربوطه را ضریب C.G می‌گذاشتیم

$$|j_1 j_2 ; jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} \underbrace{\langle j_1 j_2 , m_1 m_2 | j_1 j_2 , jm\rangle}_{\text{ضریب } C.G} \underbrace{|j_1 j_2 , m_1 m_2\rangle}_{|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle} \qquad (6)$$

$$\underbrace{|j_1 m_1\rangle}_{X_{q_1}^{(K_1)}} \otimes \underbrace{|j_2 m_2\rangle}_{Z_{q_2}^{(K_2)}}$$

رابطه (4) همین رابطه (6) است. یک شباهت بین حاصلضرب دو تا اندازه حرکت زاویه‌ای وجود دارد. گفتیم وقتی دو نمایش اندازه حرکت زاویه‌ای را ضرب تانسوری کنیم، حاصل آن یک نمایش اندازه حرکت زاویه‌ای با محدوده j ها معین است با ضرایب C.G. البته تانسورهای کروی را از روی اندازه حرکت زاویه‌ای ساختیم، باعث می‌شود که ضریب C.G آنها یکی است و رابطه (4) دقیقاً همان رابطه (6) است برای تانسورهای کروی.

حال یکی را از این روش بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که این روش درست است:

مثال: $$T_0^{(2)} = \sum_{q_1 q_2 = 0,\pm1}^{K_1=K_2=1} \langle 1,1; q_1 q_2 | 1,1; 2,0 \rangle X_{q_1}^{(1)} Z_{q_2}^{(1)}$$

q_1+q_2 ← عنصر صفرام را می‌خواهیم

توضیح در پایین

K_1 و K_2 را هر چیزی می‌توانیم بگیریم بطوری که ضرب تانسوری آنها K مورد نظر (۲) را بدهد. مثلاً می‌توانیم ۶ و ۴ بگیریم: $6 \otimes 4 = 10 \oplus 9 \oplus \dots \oplus 2$

پس می‌توانیم هر چیزی که این شرط را داشت بگیریم مثلاً ۱ و ۱: $1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$

با در نظر گرفتن ضرایب C.G می‌دانیم وقتی این ضرایب غیر صفر هستند که جمع q_1 و q_2 برابر q مورد نظر یعنی صفر باشد. پس q_1 و q_2 می‌توانند مقادیر ۰ و ±۱ را بگیرند. این می‌شود:

$$T_0^{(2)} = \underbrace{\langle 1,-1|2,0\rangle}_{1/\sqrt{6}} X_1^{(1)} Z_{-1}^{(1)} + \underbrace{\langle -1,1|2,0\rangle}_{1/\sqrt{6}} X_{-1}^{(1)} Z_1^{(1)} + \underbrace{\langle 0,0|2,0\rangle}_{2/\sqrt{6}} X_0^{(1)} Z_0^{(1)}$$

با در نظر گرفتن ضرایب C.G را تعیین کنیم حاصل می‌شود؟ (به دنبال ترکیب برای صفر نهان - در انتها هم می‌آید)

و می‌بینیم که همان جوابهای ① و ② و ③ صفحه قبل هستند. (X و Z ← U و V)

یک تانسور مرتبه K کروی را هر طوری می‌توانیم بسازیم از جمله با ضرب تانسورهای مرتبه پایین‌تر. اگر با ضرب دو تانسور مرتبه پایین بسازیم قاعده‌اش به این صورت است.

جلسه سی ام ، ۸۴ / ۱۰ / ۷ (چهارشنبه)

جلسه گذشته درمورد تانسورهای کروی صحبت کردیم و گفتیم اگر $2k+1$ عنصر داشته باشیم ، به شرطی تشکیل یک عنصر تانسوری کروی می دهند که در روابط زیر صدق کنند.

$$D(R)\, T_q^{(k)}\, D^\dagger(R) = \sum_{q'} D^{(k)}_{q'q}(R)\, T^{(k)}_{q'} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} [J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q\, T_q^{(k)} & (\mathrm{II}) \\ [J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\; T^{(k)}_{q\pm 1} & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

در جلسه گذشته نحوه ساخت تانسورهای کروی را با استفاده از حاصلضرب تانسورهای مرتبه پایین تر هم بیان کردیم.

قضیه Wigner-Eckart :

قضیه Wigner-Eckart راجع به عناصر ماتریسی تانسورهای کروی صحبت می کند. طبق این قضیه

$$\underbrace{\langle \alpha', j'm' | T_q^{(k)} | \alpha, jm\rangle}_{\text{عناصر ماتریسی } T_q^{(k)}} = \overbrace{\langle jk; mq | jk; j'm'\rangle}^{\text{ضریب C.G}} \underbrace{\frac{\overbrace{\langle \alpha' j' \| T^{(k)} \| \alpha j\rangle}^{\text{عنصر ماتریسی دوخطی - double-bar}}}{\sqrt{2j'+1}}}_{f(\alpha,\alpha';j,j';k)}$$

$$j_1 = j,\quad j_2 = k,\quad j' = j \oplus k = j+k, \dots, |j-k|$$

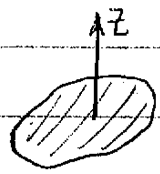
$T_q^{(k)}$ مولفه qام یک عنصر تانسوری مرتبه k است. حالت های $|jm\rangle$ حالتهای ویژه اندازه حرکت زاویه ای است و فرض کردیم که حالتهای علاوه بر اینکه با اندازه حرکت زاویه ای شان مشخص شوند با عدد eigen value یک چیز دیگری (نشان داده شده) مشخص شوند پس α معرف بقیه کمیتهایی است که همزمان می توان با اندازه حرکت زاویه ای آنها را تعیین کرد و بنابراین state ها به صورت $|\alpha, jm\rangle$ تعریف می شوند مثل تابع موج اتم هیدروژن که بصورت Ψ_{nlm} است که lm معرف اندازه حرکت زاویه ای آن است و n معرف انرژی آن است. بنابراین state می تواند در حالت کلی با یک اندیس دیگر هم نشان داده شود.

بنابراین می خواهیم ببینیم طبق قضیه Wigner-Eckart درمورد عناصر ماتریسی $T_q^{(k)}$ چه چیزی می توانیم بگوییم. کاربرد این قضیه در جاهای بعدی است و علتش آن است که مقدار زیادی از عملگرهایی که در فیزیک است همه شان از نوع مولفه های تانسوری کروی هستند.

در ضریب C.G موجود در قضیه j' تکانه زاویه‌ای است که از j و k ساخته شده است و m و q مولفه‌های z از j و k هستند و m' هم مولفه j' است و طبق این قضیه k که مرتبه تانسور است با j ترکیب می‌شود و یک تکانه زاویه‌ای از نوع j' می‌دهد.

جمله دوم در سمت راست قضیه چیزی است که تا به حال ندیده بودیم و صرفاً یک علامت گذاری است. در این جمله $T^{(k)}$ دیگر اندیس q ندارد یعنی جمله دوم مستقل از اندیس q است و همچنین مستقل از m و m' هم است. در حقیقت طبق قضیه ویگنر-اکارت این عنصر ماتریسی سمت چپ رابطه تابعی است حتماً از α و α' و j و j' و m و m' و k و q و این قضیه می‌گوید آن قسمتی از این عنصر ماتریسی که تابع m و m' و q است فقط یک ضریب C.G است و بقیه تابع m و m' و q نیست و یک چیزی است که برای نشان دادن به صورت جمله دوم سمت راست معادله نشان داده‌ایم که شبیه یک عنصر ماتریسی است (ولی در حقیقت عنصر ماتریسی نیست) و تابعی از α و α' و j و j' و k است و اصطلاحاً به آن عنصر ماتریسی دو خطی double-bar می‌گویند.

اصطلاحاً به بیان فیزیکی می‌گویند که اطلاعات مربوط به جهت‌گیری سیستم در جمله اول سمت راست است، جمله دوم مستقل از آن است، چونکه کمیات m و m' و q معرف مولفه z این موجودات است.



مولفه z هم می‌گوید اگر ما یک سیستم داشته باشیم و آن سیستم را نسبت به دستگاه مختصات عوض کنیم (جهت‌گیری را عوض کنیم)، مولفه z آن موجودات عوض می‌شوند. بنابراین می‌توانیم بگوییم که اطلاعات راجع به جهت‌گیری در مولفه z کمیت‌ها نهفته است.

پس کلیه اطلاعات راجع به جهت‌گیری در جمله اول نهفته است چون تابعی از m و m' و q است، جمله دوم مستقل از جهت‌گیری است و اصطلاحاً می‌گوییم مستقل از هندسه سیستم است.

نکته دیگر این که این قضیه دال بر این است که اگر بخواهیم چنین عنصر ماتریسی (سمت چپ) را حساب کنیم کافی است عنصر ماتریسی مورد نظر را به ازای یک m و m' و q مشخص تعیین کنیم، یعنی اگر بخواهیم این کمیت را حساب کنیم یک m و m' و q ای که راحت‌تر است را در نظر می‌گیریم و برای آن حساب می‌کنیم. اگر این کار را بکنیم طرف راست در حقیقت حساب شده است، هر چیزی که بدست آمده را تقسیم بر جمله اول می‌کنیم و جمله دوم را بطور مجزا بدست می‌آوریم. حالا بقیه m و m' و q ها دانسته شده‌اند چون این جمله دوم در همه مشترک است و اختلافشان فقط یک ضریب C.G است. یعنی بقیه m و m' و q ها را فقط با یک ضریب C.G مربوطه محاسبه می‌کنیم. در حقیقت عنصر ماتریسی دو خطی را یک بار حساب کنیم برای همه m و m' و q ها داریم و این فایده قضیه ویگنر-اکارت است چون این ضریب مستقل از m و m' و q است.

نکته بعدی که وجود دارد این است که چون ضریب C.G در اینجا نشسته بنابراین معنایش این است که عنصر ماتریسی طرف چپ تنها برای $m'=m+q$ غیر صفر است چون متناسب با ضریب C.G شده و ضریب C.G مورد نظر مخالف صفر است اگر $m'=m+q$ باشد.

می‌توان به دو صورت این موضوع را اثبات کرد:

اثبات ۱: در صفحه قبل Ⅲ: $[J_z, T_q^{(K)}] = \hbar q T_q^{(K)}$

$$\rightarrow [J_z, T_q^{(K)}] - \hbar q T_q^{(K)} = 0$$

طرفین را در $\langle \alpha' j' m'|$ و $|\alpha, j m\rangle$ ضرب می‌کنیم:

$$\langle \alpha' j' m'| \{ \underbrace{[J_z, T_q^{(K)}]}_{J_z T_q^{(K)} - T_q^{(K)} J_z} - \hbar q T_q^{(K)} \} |\alpha, j m\rangle = 0$$

اثر این جملات را با کمی جبر اعمال می‌کنیم

$$\hbar [m' - m - q] \langle \alpha' j' m' | T_q^{(K)} | \alpha, j m\rangle = 0$$

این رابطه باید صفر باشد. پس اگر بخواهیم عنصر ماتریسی مورد نظر غیر صفر باشد این نتیجه را می‌گیریم:

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(K)} | \alpha, j m\rangle \neq 0 \xrightarrow{\text{if}} \boxed{m' = m+q}$$

به یک صورت دیگر هم می‌توان این نکته را دید که آموزنده هم هست:

اثبات ۲:

یک دوران خاص را در نظر می‌گیریم، دوران حول راستای $\hat{z}$ به اندازه φ، بنابراین:

$$R = (\hat{z}, \varphi) \longrightarrow D(R)|j m\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} J_z \varphi} |j m\rangle = e^{-i m \varphi} |j m\rangle \quad \text{Ⅳ}$$

پس اگر راستا را $\hat{z}$ بگیریم تأثیر D را روی eigen state های J_z می‌دانیم.

حالا اول $T_q^{(K)}$ را روی $|j m\rangle$ اثر می‌دهیم و بعد تأثیر D را روی آن می‌بینیم:

$$D(R)\, T_q^{(K)} |j m\rangle = \underbrace{D T_q^{(K)} D^\dagger}_{\text{Ⅰ در صفحه قبل}: \sum_{q'} D^{(K)}_{q'q}(R) T^{K}_{q'}} \overset{1}{\underbrace{D |j m\rangle}_{\text{Ⅳ} \rightarrow e^{-im\varphi}|jm\rangle}} = e^{-im\varphi} \sum_{q'} \underbrace{D^{(K)}_{q'q}(R)}_{\text{عنصر ماتریسی: عدد}} T_{q'}^{(K)} |j m\rangle \quad (1)$$

$$D^{(K)}_{q'q}(R) = \langle K q' | e^{-\frac{i}{\hbar} J_z \varphi} | K q\rangle = e^{-iq\varphi} \overbrace{\langle K q' | K q\rangle}^{\delta_{q'q}} = e^{-iq\varphi} \delta_{q'q} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow D\{T_q^{(K)} |j m\rangle\} = e^{-im\varphi} \sum_{q'} D^{(K)}_{q'q}(R) T_{q'}^{(K)} |j m\rangle = e^{-i(m+q)\varphi} \{T_q^{(K)} |j m\rangle\} \quad (3)$$

نکته‌ای که هست این است که D روی state داخل { } اثر کرده و یک فاز ضربدر همان state داده است. ولی برای یک دوران خاص D روی یک state خاص اثر کند یک فاز می‌دهد که آن فاز m مربوط به آن است در حوزه stateها. پس از رابطه (3) می‌توان

می‌بینیم که $T_q^K|j,m\rangle$ از نوع stateهایی است که ویژه‌مقدار m آن برابر است با $m+q$.

$$D(R)|j,m\rangle = e^{-im\varphi}|j,m\rangle$$

$$D\{T_q^{(K)}|j,m\rangle\} = e^{-i(m+q)\varphi}\{T_q^{(K)}|j,m\rangle\} \Longrightarrow T_q^{(K)}|j,m\rangle \sim |j',m+q\rangle$$

بنابراین T_q^Kها به ازای این دوران خاص شبیه عملگر بالابر هستند ولی تا q بار J_+ هستند چون m را به اندازه q افزایش داده است. در صورتیکه در جبر باید بگوییم T_q^K هم‌مرتبه است و فقط J_+ نیست، البته J هم می‌تواند باشد.

J تانسوری کروی مرتبه ۱ است چون ۳ مولفه دارد. ولی $T_q^{(K)}$ را با هر مرتبه‌ای نگاه کنیم همین نتیجه را بر state خواهد داشت.

پس داریم:

$$T_q^{(K)}|j,m\rangle \sim |j',m+q\rangle$$

$$\langle j'm'|T_q^{(K)}|j,m\rangle \sim \langle j'm'|j',m+q\rangle \sim \delta_{m',m+q} \Longrightarrow \boxed{m'=m+q}$$

در غیر این صورت صفر می‌شود

نکته ظریف در اینجا وجود دارد که D روی هر stateای اثر کند یک فاز در آن state را می‌دهد مستقل از j آن! بنابراین وقتی عملگر D روی $T_q^{(K)}|j,m\rangle$ اثر می‌کند، ما از اثر آن m را می‌دانیم چه مقدار است ولی لازم نیست j آن همان j باشد. بنابراین بهتر است بجای j، j′ بگذاریم.

این روش مستقل از اثبات (یعنی به کمک تبدیل) برای قضیه ویگنر اکارت وجود دارد.

اثبات قضیه Wigner-Eckart:

از رابطه ③ (۳ صفحه قبل) استفاده می‌کنیم:

③ رابطه: $\left[J_\pm, T_q^{(K)}\right] = \hbar\sqrt{(K\mp q)(K\pm q+1)}\; T_{q\pm1}^{(K)}$

این رابطه بین دو state $|\alpha,j,m\rangle$ و $\langle\alpha',j',m'|$ می‌گذاریم:

همچنین می‌دانیم: $J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j,m\pm1\rangle$ (۱)

$(J_+)^\dagger = J_- \xrightarrow{DC} \langle j m|J_\mp = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\langle j,m\pm1|$ (۲)

پس $\langle j m|J_\pm = \hbar\sqrt{(j\pm m)(j\mp m+1)}\,\langle j,m\mp1|$ (۳)

پس داریم:

$$\underbrace{\langle\alpha',j'm'|J_\pm}\, T_q^{(K)}|\alpha,j,m\rangle = \langle\alpha',j'm'|T_q^K\, \underbrace{J_\pm|\alpha,j,m\rangle} + \hbar\sqrt{(K\mp q)(K\pm q+1)}\,\langle\alpha',j'm'|T_{q\pm1}^{(K)}|\alpha,j,m\rangle$$

(۳): $\hbar\sqrt{(j'\pm m')(j'\mp m'+1)}\,\langle\alpha',j',m'\mp1|$ (۱): $\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\hbar\,|\alpha,j,m\pm1\rangle$

رابطه بدست آمده را یک تعداد رتبه می‌نویسیم با این تعویض در اندیس‌ها:

$(j',m') \to (j,m)$

$(j,m) \to j_1, m_1$

$(kq) \to (j_2, m_2)$

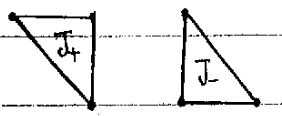
بین روابط مان می‌شود: $\hbar$ ها را از دو طرف حذف می‌کنیم

$$\sqrt{(j\pm m)(j\mp m+1)}\,\langle j, m\mp 1|T^{(j_2)}_{m_2}|j_1 m_1\rangle = \sqrt{(j_1\mp m_1)(j_1\pm m_1+1)}\,\langle j m|T^{(j_2)}_{m_2}|j_1, m_1\pm 1\rangle$$
$$+\sqrt{(j_2\mp m_2)(j_2\pm m_2+1)}\,\langle j m|T^{(j_2)}_{m_2\pm 1}|j_1, m_1\rangle \quad (1)$$

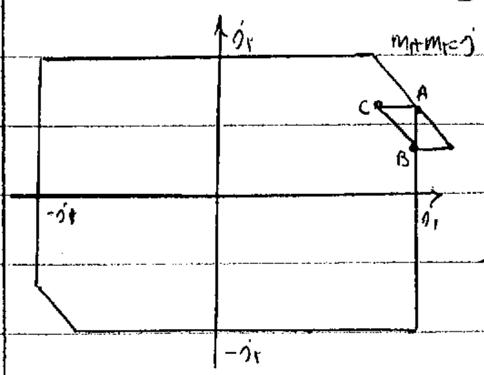
این نتیجه را با رابطه‌ای که چند جلسه قبل برای ضرایب C.G بدست آوردیم مقایسه کنیم:

داشتیم: $$\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j, m\pm 1\rangle = \sqrt{(j_1\mp m_1+1)(j_1\pm m_1)}\,\langle j_1 j_2; m_1\mp 1, m_2|j_1 j_2; j m\rangle$$
$$+\sqrt{(j_2\mp m_2+1)(j_2\pm m_2)}\,\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j m\rangle \quad (2)$$

اگر به این دو رابطه نگاه کنیم می‌بینیم ضرایب دقیقاً یکی هستند



در مورد ضرایب کلبش گوردن فقط این رابطه (که در اصل دو رابطه است) را داشتیم و گفتیم دو شکل داریم، شکل J_- و شکل J_+ و گفتیم این روابط هر کدام دو ضریب را برحسب یکی می‌دهد.



گفتیم در فضایی هستیم که m_1 از $-j_1$ تا j_1 و m_2 از $-j_2$ تا j_2 است که یک قیدهم دو مقدار دارد و این است که $m_1+m_2=j$ شود. کافی است این سه نقطه A، B و C را در نظر بگیریم که نقطه B و C برحسب A بدست می‌آیند

$$\frac{B}{A}=\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }}\ ,\quad \frac{C}{A}=\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }}$$

و همه ضرایب C.G برحسب A بدست می‌آیند و این نسبت‌ها، نسبت ضرایبی هستند که در معادله بالا وجود دارند.

در مورد محاسبه ضرایب با تریس‌ها T^{k}_{q} ها دقیقاً همان ضرایب ظاهر می‌شوند، بنابراین نسبت بین عناصر ماتریس $T^{(k)}_{q}$ ها دقیقاً همان رابطه‌ای می‌شود که برای ضرایب C.G بدست می‌آوردیم. به عبارت دیگر این طور می‌گوییم:

ضرایب C.G : x_i — معادله ① : $\sum a_{ij} y_i = 0 \longrightarrow \frac{y_j}{y_k}$ معادله ① نسبت به K را می‌دهد برحسب q

عناصر ماتریسی $T^{(k)}_{q}$: y_i — معادله ② : $\sum a_{ij} x_i = 0 \longrightarrow \frac{x_j}{x_k}$ معادله ② نسبت دو ضریب C.G را می‌دهد

همان ترکیب معادله ①

چون ضرایب a_{ij} ها دقیقاً یکی هستند پس این نسبت‌ها هم یکی هستند:

$$\frac{x_j}{x_k}=\frac{y_j}{y_k} \longrightarrow \frac{x_j}{y_j}=\frac{x_k}{y_k} \Rightarrow \frac{x_i}{y_i} = \text{مستقل از } i = C \ \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = c^{\text{ثابت}} \rightarrow x_1 = c\, y_1$$ ضریب c مستقل از m_1, m_2, m است.

در معادله ② ، j_1 و j_2 و j معین هستند و چیزی که متغیر است m, m_2, m_1 هستند که تعیین کننده نقاط هستند:

تعیین $\rightarrow j_1, j_2, j$

تعیین کننده نقاط $\rightarrow m_1, m_2, m$: متغیر

یعنی یک ضریب عنصر ماتریسی متناظر است با یک ضریب C.G با یک ضریبی که آن ضریب مستقل از m_1, m_2, m است.

پس حالا باید ببینیم کدام جمله ① را با جمله ② باید برابر قرار دهیم، یعنی جمله های آخر کدام را با هم یکی بگیریم، بنابراین:

$$\langle jm | T^{(j_2)}_{m_2 \pm 1} | j_1 m_1 \rangle = \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; jm \rangle \times$$ ضریب مستقل از $m_1 m_2 m$

تغییر اسم هایی که داده بودیم را برمی گردانیم:

$$\langle \alpha' j' m' | T^{(k)}_{\underbrace{q \pm 1}_{q'}} | \alpha, j m \rangle = (\text{ضریب}) \times (\langle jk ; m, \underbrace{q \pm 1}_{q'} | jk ; j' m' \rangle$$

بنابراین $\langle \alpha', j' m' | T^{(k)}_{q'} | \alpha, j m \rangle = (\text{ضریب}) \times \langle jk ; m q' | jk, j' m' \rangle$

این اثبات قضیه Wigner-Eckart در مورد عناصر ماتریسی تانسورهای کروی بود.

مثال ۱: $k = 0$: می گیریم $\rightarrow$ تانسور را اسکالر می گیریم (از مرتبه صفر) $\xrightarrow{\text{بنابراین}} T^{(0)} = S \rightarrow$ اسکالر

(اصلاً q ندارد)

(چون یک عنصر بیشتر ندارد)

طبق قضیه W.E : $\langle \alpha' j' m' | S | \alpha, j m \rangle = \langle j \overset{k}{0} ; m \overset{q}{0} | j 0 ; j' m' \rangle \times \dfrac{\langle \alpha j' \| S \| \alpha j \rangle}{\sqrt{2j'+1}}$

$j'' = j \otimes 0 = j$ $\qquad \delta_{jj'} \delta_{mm'}$

با جدول

بنابراین: $|j 0 ; m 0\rangle = |jm\rangle \otimes |0, 0\rangle$

ویژه حالت مشترک $\rightarrow |j 0 ; j' m'\rangle = |j' m'\rangle \otimes |0, 0\rangle$

J_1^2, J_2^2, J^2, J_z

با توجه به این مثال

J^2 کل

J_z

پس $\rightarrow \langle j 0 ; m 0 | j 0 ; j' m' \rangle = (\langle jm | \otimes \langle 0, 0|)(|j' m'\rangle \otimes |0, 0\rangle) = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$

یعنی اسکالر یک اسکالر را برای همه ی ماتریسی هر اساس پیمانه اندازه حرکت زاویه ای حساب کنیم فقط موقعی غیر صفر است که $j = j'$ و $m = m'$ باشد.

این نتیجه از قضیه W.E آمده است و مستقل از این است اپراتور چه چیزی باشد، فقط کافی است اسکالر باشد.

مثال ۲: $K=1$ می‌گیریم $\longrightarrow$ بردار $\longrightarrow T_q^{(1)} \equiv \vec{V}_q$ vector

چون $K=1 \rightarrow \begin{cases} q=0,\pm 1 \\ m'=m+q \end{cases}$

مطابق قضیه W.E: $\langle \alpha' j' m' | V_q | \alpha, j m \rangle \neq 0 \xrightarrow{\text{شرط}} \begin{cases} q=0,\pm 1 \\ m'=m+q \end{cases} \Rightarrow \Delta m = m'-m = q = \pm 1, 0$

پس اولین نتیجه‌ای که بدست می‌آید این است که عنصر ماتریسی به شرطی مخالف صفر است که: $\boxed{\Delta m = m'-m = 0, \pm 1}$ شرط (I)

شرط (II)، $j' = j \oplus K = j+1, j, j-1$

بنابراین $\Rightarrow \Delta j = j'-j = 1, 0, -1 \Rightarrow \boxed{\Delta j = j'-j = 0, \pm 1}$ (II)

این رابطه می‌گوید که j ها می‌توانند تغییر نکنند و یا حداکثر یکی تغییر کنند

ما می‌خواهیم بگوییم این نتیجه کلی نیست و باید حواسمان باشد در موردی که یکی از آنها صفر باشد

پس یکی باید ۱ باشد و یکی می‌تواند صفر باشد. if $j=0$; $j'=0 \oplus 1 = 1$

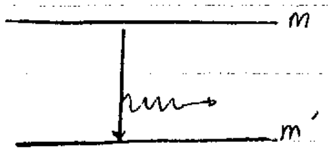
بنابراین $\Delta j = 0$ یک استثنا دارد و آن حالتی است که صفر و برابر صفر باشد. اصطلاحاً این طور می‌گویند که صفر به صفر ممنوع است: $0 \xrightarrow{\text{ممنوع}}\!\!\!\!\!\!/\;\; 0$

روابط (I) و (II) قواعد گزینش مسئله ما هستند، یعنی این عناصر ماتریسی غیر صفر می‌توانند باشند و هم ناشی از قضیه W.E هستند.

این موضوع در تابش الکترومغناطیسی اتم‌ها خیلی مورد استفاده قرار می‌گیرد و چون بحث فصل را بررسی می‌کنیم سر و کار پیدا خواهیم کرد با عنصر ماتریسی یک بردار (مثل بردار مکان، دوقطبی الکتریکی و ...) $\langle \alpha', j' m' | U_q | \alpha, j m \rangle$

در این حالت این قواعد گزینش یک نوع تعلیق گذارهای اتم را نشان می‌دهد و می‌گوید از یک state اتم به یک state تنها به شرطی این گذار می‌تواند تابش کند که (I) و (II) برقرار باشد در غیر این صورت تابشی در کار نیست.

چون که گذار از یک state به یک state دیگر متناسب می‌شود با عنصر ماتریسی می‌شود و به شرطی از state m به state m' صورت تابش می‌کند $m-m'=0,\pm 1$ باشد و در آن هم دارای شرط (II) می‌باشد



* فایده قضیه ویگنر-اکارت این است که مستقل از نوع تانسور ($T_q^{(K)}$) قواعد گزینش را نشان می‌دهد و نه مرتبه و نه مولفه تانسور اهمیت ندارند.

به عنوان بحث آخر این مطلب یک قضیه‌ای به نام قضیه تصویر (projection) را بیان می‌کنیم که از قضیه ویگنر اکارت بدست می‌آید.

قضیه projection:

می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\langle \alpha', jm' | \underset{\text{برداری}}{V_q} | \alpha, jm\rangle = \frac{\langle \alpha', jm | \vec{J}\cdot\vec{V} | \alpha, jm\rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \underbrace{\langle jm' | J_q | jm\rangle}_{\text{مولفه } q \text{ام } J}$$

$q=0,\pm1,\dots$

به عبارت دیگر این رابطه مولفه qام هر برداری را مربوط به مولفه qام تکانه زاویه‌ای و ضرب داخلی $\vec{J}\cdot\vec{V}$ یعنی تصویر بردار V در جهت تکانه زاویه‌ای

برای اثبات این قضیه باید سراغ مولفه‌های ۰ و ۱ و ۱- ... A_{-1} , A_1 ... V_{-1} , V_1 , V_0 را داشتیم، حالا برای J می‌نویسیم

$$\begin{cases} J_{\pm1}^{(1)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{J_x \pm iJ_y}_{J_\pm}) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}J_\pm & \text{مولفه ۱ام و ۱-ام یک تانسور رتبه ۱} \\ J_0^{(1)} = J_z & \end{cases}$$

بین این روابط با مولفه‌های ۰ و ۱± J اینها هستند.

حال می‌توان $\vec{J}\cdot\vec{V}$ را نوشت:

$$\vec{J}\cdot\vec{V} = J_0V_0 + J_1V_1 + J_2V_2 = J_0V_0 - J_1V_{-1} - J_{-1}V_1$$

$|jm\rangle \equiv |\alpha, jm\rangle$

طرفین رابطه بالا را در $\langle jm|$ از دو طرف ضرب می‌کنیم.

$$\langle jm|\vec{J}\cdot\vec{V}|jm\rangle = \langle jm|J_0V_0 - \underset{-\frac{1}{\sqrt{2}}J_+}{J_1}V_{-1} - \underset{\frac{1}{\sqrt{2}}J_-}{J_{-1}}V_1|jm\rangle$$

چون از چپ اثر می‌کند می‌شود J_- است

$$\Rightarrow \langle jm|\vec{J}\cdot\vec{V}|jm\rangle = m\hbar\underbrace{\langle jm|V_0|jm\rangle}_{C\frac{\langle j\|V\|j\rangle}{\sqrt{2j+1}}} - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\underbrace{\langle j, m-1|V_{-1}|jm\rangle}_{C'\frac{\langle j\|V\|j\rangle}{\sqrt{2j+1}}}$$

$$-\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\underbrace{\langle j, m+1|V_1|jm\rangle}_{C''\frac{\langle j\|V\|j\rangle}{\sqrt{2j+1}}}$$

ضریب C.G

W.E استفاده از قضیه

چون سمت چپ را بر می‌داریم

چون تبدیل شده به مولفه‌های یک تانسور مرتبه اول

بنابراین طرف راست رابطه می‌شود،

$$\langle j'm|\vec{J}\cdot\vec{V}|j'm\rangle = \underbrace{\frac{\langle j'\|\vec{V}\|j'\rangle}{\sqrt{2j'+1}}}_{\text{ضریب اول}}$$

یک سری ضرایب که به V بستگی ندارند و تابعی از j و m هستند.

چون ضریب C.G اصلاً به اینکه چه $T_q^{(k)}$ ای هست کاری ندارد و $T_q^{(k)}$ در ضریب اول وجود دارد

K در رابطه W.E در اینجا مثل ۱ است و چون با V_{+1}, V_0, V_{-1} کار داریم پس $q \to 0, \pm 1$ است و m' که تابعی از $m+q$ است بصورت: $m' = m+q^{\frown 0,\pm 1}$

j' هم بصورت ضرب تانسوری j در ۱ است یعنی: $j' \to j \otimes 1 \begin{cases} j+1 \\ j \\ j-1 \end{cases}$

بنابراین در ضریب C.G ما فقط j و m نشسته‌اند و اینکه چه برداری را داریم حساب می‌کنیم در ضریب اول قرار گرفته است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\langle j'm|\vec{J}\cdot\vec{V}|j'm\rangle = C_{j'm}\langle j'\|\vec{V}\|j'\rangle$$

از طرف دیگر $\vec{J}\cdot\vec{V}$ اسکالر است، در مورد اسکالرها هم از قبل (مثال ۱ قضیه W.E) ثابت کردیم،

$\vec{J}\cdot\vec{V} = S$ اسکالر

ثابت کردیم : $\langle j'm|S|j'm\rangle = \underset{\delta_{jj'}\delta_{mm'}}{1} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2j'+1}}\langle j'\|S\|j'\rangle}_{\text{یعنی این ترکیب مستقل از m است}}$ ۲۹

و فقط به j بستگی دارد پس : $C_{j'\cancel{m}} \to C_{j'}$

$$\Rightarrow \langle j'm|\vec{J}\cdot\vec{V}|j'm\rangle = C_{j'}\langle j'\|\vec{V}\|j'\rangle \qquad \text{(I)}$$

این رابطه به ازای هر بردار V ای درست است یکی از V ها این است که برابر J باشد:

به ازای : $\vec{V}=\vec{J} \longrightarrow \underbrace{\langle j'm|J^2|j'm\rangle}_{j'(j'+1)\hbar^2 \underbrace{\langle j'm|j'm\rangle}_{1}} = C_{j'}\langle j'\|\vec{J}\|j'\rangle$

$$\Rightarrow j'(j'+1)\hbar^2 = C_{j'}\langle j'\|\vec{J}\|j'\rangle \qquad \text{(II)}$$

حال که این نتایج بدست آمد، نسبت روابط I و II را طبق قضیه W.E حساب می‌کنیم

چون K=1

$$\frac{\langle \alpha', j m' | V_q | \alpha, j m \rangle}{\langle \alpha', j m' | J_q | \alpha, j m \rangle} = \frac{\langle j 1, m q | j 1, j' m' \rangle \frac{1}{\cancel{\sqrt{2j+1}}} \langle j' \| \vec{V} \| j' \rangle}{\langle j 1, m q | j 1, j' m' \rangle \frac{1}{\cancel{\sqrt{2j+1}}} \langle j' \| \vec{J} \| j' \rangle}$$

$\langle j' \| \vec{V} \| j' \rangle \to \frac{1}{\cancel{c_j}} \langle j m | \vec{J} \cdot \vec{V} | j m \rangle$ ، $\langle j m | \to \langle \alpha', j m |$ ، $| j m \rangle \to | \alpha, j m \rangle$

II: $\langle j' \| \vec{J} \| j' \rangle \to \frac{1}{\cancel{c_j}} (j'(j'+1)) \hbar^2$

ضرایب C.G با دست چون K، q آن

(قسمت‌ها ساده شدند و جملات برابر است)

$$\Rightarrow \langle \alpha', j m' | V_q | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha', j m | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha, j m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle \alpha', j m' | J_q | \alpha, j m \rangle$$

پس قضیه ثابت شد.

این قضیه از این جهت اهمیت دارد که می‌گوید برای q امین مؤلفه‌ی V وقتی بخواهیم عنصر ماتریسی آن را حساب کنیم، چیزی که

در این بردار در این محاسبه سهیم است مؤلفه‌ی آن در راستای جهت $\vec{J}$ است و بقیه‌ی آن با تقارن زاویه‌ای ربط دارد.