کارشناسی ناپیوسته حسابداری

مرکز آموزش علمی - کاربردی علوم و فنون قزوین

University Of Applied Science & Technology Of Qazvin

# پژوهش عملیاتی ۱

استاد:

جناب آقای نظرپور

دانشجو:

ابراهیم عبدالحسینی

ترم دوم سال تحصیلی ۹۱-۹۰

بسمه تعالی

# پژوهش عملیاتی ۱

## معرفی کتاب:

**۱- کتاب تحقیق در عملیات در حسابداری** " دکتر عادل آذر – پیام نور "

**۲- کتاب تحقیق در عملیات        حمدی  - طه**

**۳- کتاب برنامه ریزی خطی        مختار بازارا  ترجمه خرم**

**۴- کتاب پژهش عملیاتی        دکتر زاهدی سرشت**

**سرفصلها :**

**۱- مقدمه بر تحقیق در عملیات**

**۲- مدلسازی و فرموله کردن**

**۳- آشنایی بامسائل برنامه ریزی خطی**

**۴- روشهای حل مسائل برنامه ریزی خطی**

**الف) روش ترسیمی**

**ب ) روش سیمپلکس**  simplex

**۵- روش ۲ فازی و روش M بزرگ**

**۶- حالات خاص در جدول سیمپلکس**

**۷- روش سیمپلکس  دوگانه** ( dual simplex )

**۱۴ نمره پایان ترم**

**۴  نمره  میان ترم**

**۲  نمره تمرین  + حضور و غیاب**

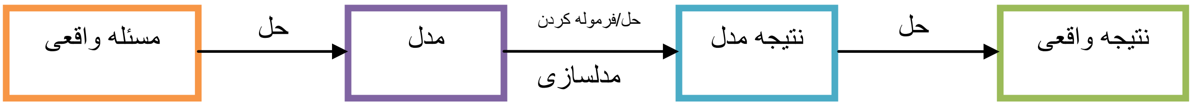
## مقدمه :

پژهش عملیاتی یا تحقیق در عملیات مجموعه ای از تکنیک های ریاضی و علوم مختلف است که در بهبود تصمیم گیری در حوزه های تخصصی از حمله برنامه ریزی تولید تخصیص منابع ، حمل و نقل و ترافیک استفاده می شود سرچشمه پژوهش عملیاتی از جنگ جهانی دوم در سال ۱۹۴۱ شروع شد بطوریکه وقتی دانشمندان انگلیسی با بهره گیری از دانش متخصصان علوم مختلف در جنگ به موفقیت هایی دست یافتند شخصی به نام آقای جرج دانتزیک به همراه علم کامپیوتر یک روش کارا و مؤثری را به نام سیمپلکس در تخصیص منابع و عدوات جنگی به کارگرفت

**کاهش هزینه Min**

**افزایش سود Max**

مدلسازی : برای تعیین جواب یک مسئله ی واقعی تسلط بر تمام جوانب کار امری نامکن است بنابراین نمایش خاصی از واقعیت را در نظر گرفته و بر روی آن مطالعه می کنیم که به آن مدل می گوییم که منظور از یک مدل نمایش ساده شده ای یک واقعیت است.




## انواع مدل:

۱- مدل قیاسی - مدل نمودار سازمانی

۲- مدلهای شمایلی یا نمایشی - ماکت هواپیما

۳- مدل ریاضی

الف) خطی توان درجه یک

ب ) غیر خطی توان درجه دو

مثال : یک شرکت تولیدی در نظر دارد ۳ محصول را به گونه ای تولید کند که ضمن رعایت محدودیت منابع به حداکثر (max) سود نائل شود میزان منابع شامل نیروی انسانی ، مواد اولیه و همچنین سود هر واحد از ۳ محصول بر طبق جدول زیر نمایش داده شده است کل نیروی انسانی در دسترس ۲۰۰ نفر ساعت و مواد اولیه دردسترس نیز ۱۵۰ کیلو گرم می باشد.

| میزان منابع موجود | محصول ۳ (x3) | محصول ۲ (x2) | محصول ۱ (x1) | |
|---|---|---|---|---|
| ۲۰۰ نفرساعت | ۵ | ۲ | ۶ | نیروی انسانی |
| ۱۵۰ کیلوگرم | ۳ | ۵ | ۴ | مواد اولیه |
| | ۳۰ دلار | ۳۰ دلار | ۴۰ دلار | میزان سوددهی |

**مسئله را در قالب یک مسئله برنامه ریزی خطی مدلسازی نمائید؟**

**مراحل حل یک مدل (فرموله کردن ) :**

**۱- تعیین متغییرهای تصمیم - می خواهیم چه کار کنیم ؟ متغییر تصمیم را با $X_j$j=1,2,3,.. نمایش میدهند.**

**محصول ۱ = $X_1$ محصول ۲ = $X_2$ محصول ۳ = $X_3$**

**۲- تعیین تابع هدف مسئله ( max , min)**

**هدف=$Max\ 40X_1 + 30X_2 + 30X_3$**

**۳- تعیین محدودیت های کارکردی و علامت . نیروی انسانی / مواد اولیه**

محدودیتهای کارکردی

$6X1 + 2X2 + 5X3 \leq 200$ نفر ساعت

$4X1 + 5X2 + 3X3 \leq 150$ کیلوگرم

محصول ۱

محصول ۲

محصول ۳

محدودیتهای کارکردی

**$X1 \geq 0$ , $X2 \geq 0$ , $X3 \geq 0$**

**فقط میتواند $X1 \geq 0$**

**مثال : در یک واحد تولیدی ۳ نوع محصول A و B و C تولید میشود برای تولید این ۳ نوع محصول از نیروی انسانی و ماده شیمیائی و ورقه فولادی استفاده خواهد شد . تولید هر واحد از این ۳ نوع محصول به ترتیب ۲ و ۴ و ۳ واحد نیروی انسانی و ۵ و ۱ و صفر واحد شیمیائی و ۳ و ۲و ۱ واحد ورقه فولادی مصرف خواهد شد نیروی انسانی و ورقه فولادی در دست رس در طول دوره برنامه ریزی حداکثر ۱۳۰ و ۲۴۰ واحد میباشد و این درحالی است که هیچ محدودیتی برای تامین ماده شیمیایی وجود ندارد . باتوجه به شرایط بازار و مشخصات محصول سود هر واحد از محصولات به ترتیب ۵۵ و ۴۰ و ۳۰ واحد پولی است به منظور max کردن کل سود حاصل از تولید ۳ نوع محصول مسئله را بصورت یک مدل و برنامه ریزی خطی فرموله یا مدل سازی نمائید.**

فرموله کردن = حداکثر سود MAX

Max Z = 55x1 +40x2+30x3

2x1+4x2+3x3 ≤ 130

3x1+2x2+x3 ≤ 240

چون گفته حداکثر از ≤ استفاده میکنیم

X1 , X2,X3 ≥ 0

چون تولید نمیتواند منفی باشد

| محصول / منابع | A | B | C | حداکثر منابع دردسترس |
|---|---|---|---|---|
| نیروی انسان | ۲ | ۴ | ۳ | ۱۳۰ |
| ماده شیمیایی | ۵ | ۱ | ۰ | ∞ |
| ورقه فولادی | ۳ | ۲ | ۱ | ۲۴۰ |
| سود حاصل | ۵۵ | ۴۰ | ۳۰ | |

ب ) قیمت فروش و بازار یابی اعلام کرده است که مجموع تولید محصول ۱ و ۳ نباید از ۳۰٪ کل تولیدات شرکت بیشتر باشد . $\frac{x1+x3}{x1+x2+x3} \leq \%30 \rightarrow x1+x3 \leq \%30\ (x1+x2+x3) \rightarrow$ محدودیت

مثال : شرکتی دو نوع محصول تولید میکند و برای ساخت این محصولات از دو نوع ماده اولیه استفاده میکند. میزان در دسترس از این مواد و میزان مصرف آنها در محصولات بشرح جدول زیر میباشد. فرض کنید سود حاصل از فروش محصول یک و ۲ به ترتیب ۳ و ۲ واحد پولی باشد میخواهیم مسئله را در قالب یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنیم.

فرموله کردن = حداکثر سود MAX

Max Z = 3x1 +2x2

2x1+x2 ≤ 6 محدودیت

x1+2x2 ≤ 8 محدودیت

X1 , X2 ≥ 0

چون تولید نمیتواند منفی باشد

| منابع / محصول | A | B | سود |
|---|---|---|---|
| محصول ۱ | ۲ | ۱ | ۳ |
| محصول ۲ | ۱ | ۲ | ۲ |
| حداکثر منابع | ۶ | ۸ | |

## برنامه ریزی خطی (LP) :

همانطور که قبلاً گفته شد برنامه ریزی خطی یکی از شاخه های علوم ریاضی است که در آن تمام روابط حاکم بر مسئله بصورت خطی بوده و در کل منابع محدود را به فعالیت های مورد نظر طوری اختصاص میدهد که به هدف از پیش تعیین شده برسد. هدف معمولا بصورت حداکثر کردن و یا حداقل کردن میباشد. صورت کلی برنامه ریزی خطی در فرم گسترده بشکل زیر نوشته میشود. M۰۰۰ و ۱ سطر n۰۰۰۰و۱ ستون

Max or min Z = c1X1+c2X2+ …… cnXn

a.11X1 + a.12X2+……. + a.1nXn ≤ = ≥ b1

$a.21X1 + a.22X2 + \ldots\ldots + a.2nXn \leq = \geq \quad b2$

. . .

. . .

$a.m1X1 + a.m2X2 + \ldots\ldots + a.mnXn \leq = \geq \quad bn$

jxj ≥0 = ۱و ۲ و ........ وn

**در مدل خطی برنامه ریزی فوق محدودیت علامت ممکن است بصورت نامقید یا آزاد در علامت تعریف شوند . منظور این است که این متغییر ها هر مقداری اعم از مثبت یا منفی می تواند بگیرد. بشرط آنکه در محدودیت های کارکردی صدق کند و هدف را بهینه نمایند.**

بعضی از اصطلاحات مهم :

**جواب موجه یا جواب اساسی یا قابل قبول : جوابی است که در تمام محدودیت ها صدق کند**

**جواب ناموجه یا جواب غیر اساسی یا غیر قابل قبول : جوابی است که موجه نباشد بعبارت دیگر حداقل در یک محدودیت صدق نکند.**

**جواب بهینه : جوابی است موجه که به ازای آن مطلوب ترین مقدار تابع هدف بدست می آید.**

**ناحیه موجه یا قابل قبول یا شدنی : ناحیه (فضائی) که از اشتراک ناحیه تک تک محدودیت ها بدست می آید ناحیه موجه می نامند.**

**نقطه گوشه یا نقطه پایه یا نقطه اساسی : حداقل به محل تلاقی n معادله نقطه گوشه ای می نامند که n تعداد متغیرهای تصمیم می باشد.**

## مفهوم پارامترهای مدل LP :

**Xj (متغیر تصمیم) : سطح فعالیت j ام که باید انجام شود.**

**Z ( تابع هدف ) : میزان مشارکت کلیه فعالیت ها برای رسیدن به هدف.**

**Cj ( ضریب xj در تابع هدف ) : سهم مشارکت فعالیت j ام در رسیدن به هدف.**

**Bj ( مقدار سمت راست محدودیت j ام) : میزان منبع موجود j ام**

**Aij ( ضریب فنی ) : میزان منبع j ام که باید در هر واحد فعالیت j ام استفاده شود.**

**فرم بسته مدل LP :** $\max \text{ or } \min Z = \sum cjnj$

S.T $\sum aij$ xj $\leq = \geq$ bi

**نامقید یا آزاد در علامت** xj orxj $\geq$ 0

i.=1,2,......,m j.= 1,2,......,n

**فرم استاندارد مدل LP :** $\max \text{ or } \min Z = \sum cjnj$

S.T $\sum aij$ xj $=$ bi

xj $\geq$ 0

i.=1,2,......,m j.= 1,2,......,n

**مدل کانونی (متعارف) LP :** $\max \text{ or } \min Z = \sum cjnj$

S.T $\sum aij$ xj $\geq$ bi

**امقید یا آزاد در علامت** xj orxj $\geq$ 0

i.=1,2,......,m j.= 1,2,......,n

**مدل کانونی (متعارف) LP :** $\max \text{ or } \min Z = \sum cjnj$

S.T $\sum aij$ xj $\leq$ bi

**امقید یا آزاد در علامت** xj orxj $\geq$ 0

i.=1,2,......,m j.= 1,2,......,n

**نکته: برای حل مدل برنامه ریزی خطی ابتدا باید مدل را به فرم مدل استاندارد تبدیل نمائیم**

**حالتهای خاص در تبدیل مدل به فرم استاندارد:**

**۱- حالت محدودیت کوچکترها باشد : مثال** x1 + ۲x2 +S=۲   x1 + ۲≤x2 ۲

**کسر** S : slack   **مازاد** S: surplus   **متغیر کمکی** ۲ +$S$ < ۵

**۲- حالت محدودیت بزرگتر ها باشد : مثال** x1 + ۲x2–S=۲   x1 + ۲≥x2 ۲

**کسر** S : slack   **مازاد** S: surplus   **متغیر کمکی**

۳- **محدودیت مساوی باشد:** در این حالت تبدیل به دو محدودیت کوچکتر و بزرگتری میشود

x1 + ۲x2=2

x1 + ۲≤x2 ۲    x1 + ۲x2 +S=۲

x1 + ۲≥x2 ۲    x1 + ۲x2−S=۲

A = B

A ≤ B →    A+S=B

A ≤ B →    A+S=B

۴- **محدودیت متغیر نامقید یا آزاد در علامت:**    $X1=X1' - X1''$    $Xj = Xj' - Xj''$

**مثبت باشد :**   ۵ =۱۲−۷        **منفی باشد :**   ۱۲−۷= −۵    X1'۰≥X1''≥۰

**مثال :** **مدل برنامه ریزی خطی زیر را استاندارد کنید:**

$\text{Max } Z = 2x1 + 4x2$
$X1+2x2 \le 6$
$2x1 + 5x2 \le 4$
$X1 , x2 \ge 0$

**استانداردشده**

$\text{Max } Z = 2x1 + 4x2$
$X1+2x2+S1 = 6$
$2x1 + 5x2 + S2 = 4$
$X1 , x2 \ge 0$

**مثال :** **مدل برنامه ریزی خطی زیر را استاندارد کنید:**

$\max Z = 2x1 + 4x2$
$X1 + 2x2 \ge 6$
$2x1 + 5x_2 \le 4$
$X1 \ge 0$   x2 **نامقید**

$\max Z = 2x1 + 4x2$
$X1 + 2x2 - S1 = 6$
$2x1 + 5x_2 + S2 = 4$
$X1 \ge 0 \quad x2 = x2' - x2''$
**هرجا** x2 **باشد تبدیل به** x2'-x2'' **میشود**

$\max Z = 2x1 + 4(x2' - x2'')$
$X1 + (x1' - x2'') - S1 = 6$
$2x1 + 5(x_2' - x_2'') + S2 = 4$
$X1 \ge 0 \quad X2' \ge 0 \quad x2'' \ge 0$

**مثال :** **مدل برنامه ریزی خطی زیر را استاندارد کنید:**

$\text{Min } Z = 2x1 + 4x2 + 3x3$
$X1 + 2x2 \ge 6$
$2x1 + 5x3 \le 4$
$2x1 + 3x2 + x3 = 6$
$X1 \ge 0 \quad x2 \ge 0$   x3 **نامقید**

$\text{Min } Z = 2x1 + 4x2 + 3x3$
$X1 + 2x2 - S1 = 6$
$2x1 + 5x3 + S2 = 4$
$2x1 + 3x2 + x3 \ge 6$
$2x1 + 3x2 + x3 \le 6$
$X1 \ge 0 \quad x2 \ge 0 \quad x3 = x3' - x3''$

$\text{Min } Z = 2x1 + 4x2 + 3(x3' - x3'')$
$X1 + x2 - S1 = 6$
$2x1 + 5(x3' - x3'') + S2 = 4$
$2x1 + 3x2 + (x3' - x3'') - S3 = 6$
$2x1 + 3x2 + (x3' - x3'') + S3 = 6$
$X1 \ge 0 \quad x2 \ge 0 \quad X3' \ge 0 \quad x3'' \ge 0$

## تمرین کلاسیک ۱ :

Min Z = 5x1 + 4x2 +x3
X1 + 2x2+3x3 $\leq$ 6
2x1 + 4x2+5x3 =10
3x1+4x2+8x3 $\geq$ 10
X1 $\geq$ 0  x2 $\geq$ 0  x3 نامقید

Min Z = 5x1 + 4x2 +x3

2x1 + 4x2+5x3-S2=10
2x1 + 4x2+5x3+S2=10

Min Z = 5x1 + 4x2 +(x3'-x3'')

## تمرین کلاسیک ۲

Max Z = 2x1 + 4x2
2X1 + 4x2 $\leq$6
3x1 + 5x2 $\leq$ 4
X1  x2  نامقید

*روش ترسیمی:*

**روش ترسیمی یکی از روشهای شماتیک و ساده برای حل مسائل برنامه ریزی خطی در حالت فقط دو بعدی استفاده میشود. مراحل حل مسائل LP به روش ترسیمی :**

**۱- تعیین مبادلات معرف (یعنی رسم هر یک از محدودیت ها در حالت مساوی)**

**۲- تعیین منطقه موجه یا فضای موجه هر یک از معادلات (فضای موجه هر یک از محدودیت ها تعیین شود)**

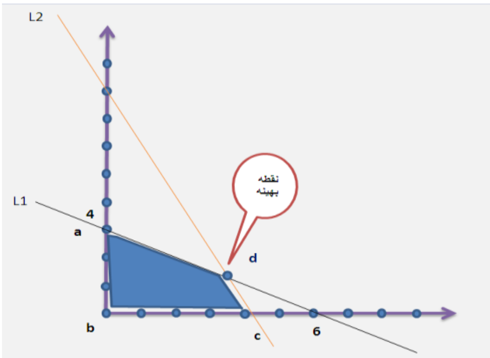
**۳- تعیین ناحیه اشتراک بین محدودیت ها ( تعیین نقاط گوشه در فضای موجه)**

**۴- تعیین نقطه بهینه**

**مثال : مسئله برنامه ریزی خطی را به روش ترسیمی حل نمائید. ( فقط برای دو بعدی یعنی دو متغیر قابل حل است.)**

**در روش ترسیمی بدون استاندارد حل میکنیم**

Max Z = 4x1 + 3x2
L1: X1 + 2x2 $\leq$6  $A_3^0 B_0^6$
L2: 2x1 + x2 $\leq$8  $A_8^0 B_0^4$
X1 , x2 $\gg$ 0



**محدوده LP نقطه در ناحیه اول جدول مختصات میباشد**

**مرحله سوم ناحیه مشترک نقاط کوشه که از تلاقی دو خط به وجود می آید نقاط D,C,B,A**

$D_0^4 C_?^? B_0^0 A_3^0$

$$\begin{array}{lcl} X1 + 2x2 = 6 & \xrightarrow{-2} & -2x1 - 4x2 = -12 \\ 2x1 + x2 = 8 & & 2x1 + x2 = 8 \\ \hline & & -3x2 = -4 \quad x2 = \frac{4}{3} \quad x1 = \frac{10}{3} \end{array}$$

**مرحله آخر نقطه بهینه نقاط کوشه را در معادله قرار میدهیم.**

Max $Z = 4x_1 + 3x_2$

**نقطه** A $Z=4(0)+3(3) = 9$

**نقطه** B $Z = 4(0) + 3(0) = 0$

**نقطه** C $Z = 4\left(\frac{10}{3}\right) + 3\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{52}{3} = 17$

**نقطه** D $Z = 4(4) + 3(0) = 16$

$Z^* = 17$

$X_1^* = 10/3$

$X_2^* = 4/3$

**مربوط به** C است

**مثال :** **مسئله برنامه ریزی خطی را به روش ترسیمی حل کنید؟**

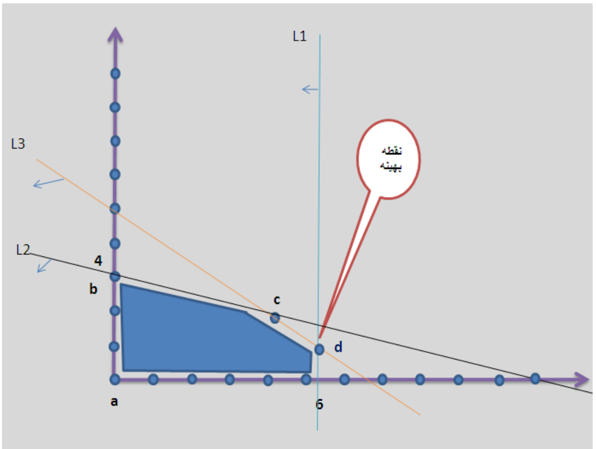
Max $Z = 5x_1 + x_2$

L1: $X_1 \leq 6$

L2: $x_1 + 3x_2 \leq 12$ $\qquad A_4^0 B_3^{12}$

L3: $3x_1 + 4x_2 \leq 24$ $\qquad A_6^0 B_0^8$

$X1, \quad x2 \gg 0$




$E_0^6 \quad D_?^? C_?^? B_4^0 A_0^0$

$$\begin{array}{ll} X_1 + 3x_2 = 12\, C_?^? & -3x1 - 9x2 = -36 \\ 3x_1 + 4x_2 = 24 & 3x_1 + 4x_2 = 24 \\ \hline & -5x_2 = -12 \quad x2 = \frac{-12}{5} \quad x1 = \frac{24}{5} \end{array}$$

$X_1 = 6 \qquad D_?^?$

$3x_1 + 4x_2 = 24$

$3(6) + 4x2 = 24 \quad x2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Max $Z = 5x_1 + x_2$

**نقطه** A $Z = 5(0) + (0) = 0$

**نقطه** B $Z = 5(0) + 4 = 4$

**نقطه** C $Z = 5\left(\frac{24}{5}\right) + 3\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{132}{5} =$

**نقطه** D $Z = 5(6) + \frac{3}{2} = \frac{63}{2} = 31$

**نقطه** E $Z = 5(6) + 0 = 30$

$Z^* = 31$

$X_1^* = 6$

$X_2^* = 3/2$

**مربوط به** D است

**مثال** : یک شرکت تولیدی در صددتولید دو محصول به شماره های ۱ و ۲ میباشد بطوریکه سود حاصل از محصول یک ۵ واحد و سود حاصل از محصول دوم ۷ واحد می باشد  این شرکت جهت تولید نیاز به دو منبع نیروی انسانی و مواد اولیه دارد بطوریکه حداکثر نیروی انسانی در دسترس ۱۲ و حداکثر مواد اولیه ۱۰ واحد می باشد . و میزان ضرایب مصرف بر طبق جدول زیر بیان شده است. مطلوبست ؟

**الف )** مسئله برنامه ریزی خطی فوق را مدل سازی نمائید.

**ب )** مسئله مدل سازی شده را به روش ترسیمی حل نمائید.

| محصول / منابع | محصول ۱ | محصول ۲ | |
|---|---|---|---|
| مواد اولیه | ۱ | ۲ | ۱۰ |
| نیروی انسانی | ۳ | ۲ | ۱۲ |
| سود | ۵ | ۷ | |

فرموله کردن = حداکثر سود MAX

Max $Z = 5x_1 + 7x_2$

$x_1+2x_2 \leq 10$ محدودیت

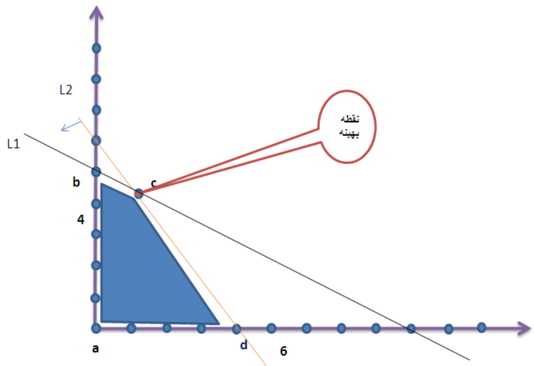
$3x_1+2x_2 \leq 12$ محدودیت

$X_1 , X_2 \geq 0$

قسمت ب چون دو بعدی است قابل حل است

L1: $X_1 + 2x_2 \leq 10$ $\quad A^0_{10} B^5_0$

L2: $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ $\quad A^0_6 B^4_0$




$D^4_0 C^?_? B^0_5 A^0_0$

$X_1 + 2x_2 = 10$ $\quad C^?_?$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$x_1 - 2x_2 = -10$ $\quad -$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$2x_1 = 2 \quad x1 = 1 \quad x2 = \frac{9}{2}$

Max $Z = 5x_1 + 7x_2$

نقطه A $\quad Z=5(0)+7(0)=0$

نقطه B $\quad Z=5(0)+7(5)=35$

نقطه C $\quad Z = 5(1) + 7\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{73}{2} = 36$

نقطه D $\quad Z= 5(4)+(0)=20$

$Z^* = 73/2$

$X_1^* = 1$

$X_2^* = 9/2$

مربوط به C است

## روش دوم: تعیین نقطه بهینه

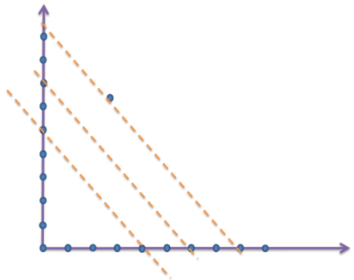
به Z چند عدد می دهیم به آخرین نقطه ای که تلاقی می کند نقطه بهینه است.

$Z = 10 \rightarrow 5X1 - 7X2 = 10$

$Z = 20 \rightarrow 5X1 + 7X2 = 20$

..

$Z = 35 \rightarrow 5X1 + 7X2 = 35$



**مثال** : کارخانه ای در صدد تولید دو نوع محصول است که میزان مصرف هر واحد از آنها از منابع بصورت زیر است

مطلوبست الف) مدل سازی  ب ) حل مدل به روش ترسیمی

| محصول | منابع انسانی | مواد اولیه | سود |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۴ | ۴۰ |
| ۲ | ۲ | ۳ | ۵۰ |

فرموله کردن = حداکثر سود MAX

$Max\ Z = 5x_1 + 7x_2$

محدودیت $x_1+2x_2 \leq 10$

محدودیت $3x_1+2x_2 \leq 12$

$X1 , X2 \geq 0$

| | |
|---|---|
| L1: $X_1 + 2x_2 \leq 10$ $\quad A_{10}^{0} B_{0}^{5}$<br>L2: $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ $\quad A_{6}^{0} B_{0}^{4}$ | نمودار |

$X_1 + 2x_2 = 10 \quad C_?^?$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$x_1 - 2x_2 = -10$ –

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$2x_1 = 2 \quad x1 = 1 \quad x2 = \frac{9}{2}$

$D_0^4 C_?^? B_5^0 A_0^0$

| | |
|---|---|
| $Max\ Z = 5x_1 + 7x_2$<br>نقطه A $Z=5(0)+7(0)=0$<br>نقطه B $Z=5(0)+7(5)=35$<br>نقطه C $Z = 5(1) + 7\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{73}{2} = 36$<br>نقطه D $Z= 5(4)+(0)=20$ | $Z^* = 73/2$<br>$X_1^*=1$<br>$X_2^* = 9/2$<br>مربوط به C است |

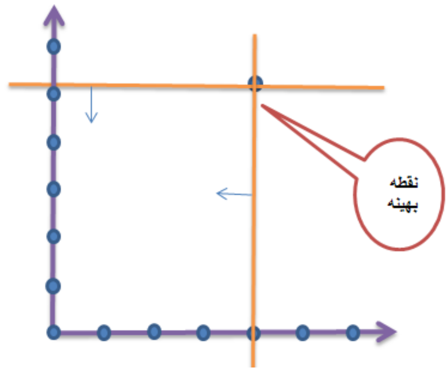
**مثال** : حل مدل به روش ترسیمی

Max $Z = 1.5x_1 + x_2$

L1: $X_1 \leq 4 \quad \rightarrow X_1=4$

L2: $X_2 \leq 5 \rightarrow X_2=5$

$X1 , \quad x2 \gg 0$




$Z_A=0 \rightarrow A_0^0$

$Z_B=5 \rightarrow B_5^0$

$Z_C=6+5=11 \rightarrow C_5^4$

$Z_D=6 \rightarrow D_0^4$

**مثال** : حل مدل به روش ترسیمی

Max $Z = 3x_1 + 6x_2$

L1: $3X_1 + 2X_2 \leq 18 \quad A_9^0 B_0^6$

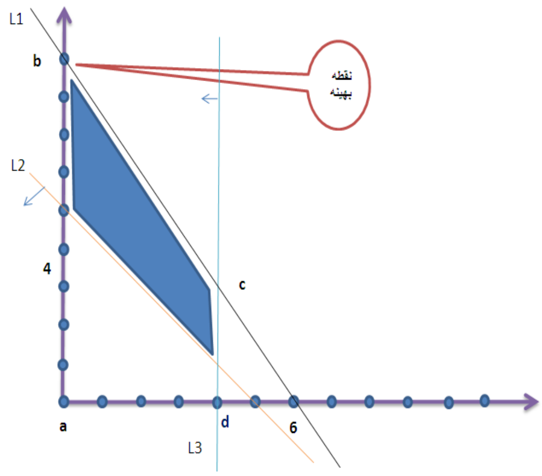
L2: $X_1 + X_2 \geq 5 \qquad A_5^0 B_0^5$

L3 : $X_1 \leq 4$

$X_1 , \quad x_2 \gg 0$

$$C\begin{cases} 3X1 + 2X2 = 18 \\ X1 = 4 \quad \rightarrow \quad X2 = 3 \end{cases}$$

$$D\begin{cases} X1 + X2 = 5 \\ X1 = 4 \quad \rightarrow \quad X2 = 1 \end{cases}$$




$Z_A=3X_1+6X_2=0+6(5)=30 \rightarrow A_5^0$

$Z_B=0+6(9)=54 \rightarrow B_9^0$

$Z_C=3(4)+6(3)=30 \rightarrow C_3^4$

$Z_D=3(4)+6(0)=18 \rightarrow D_1^4$

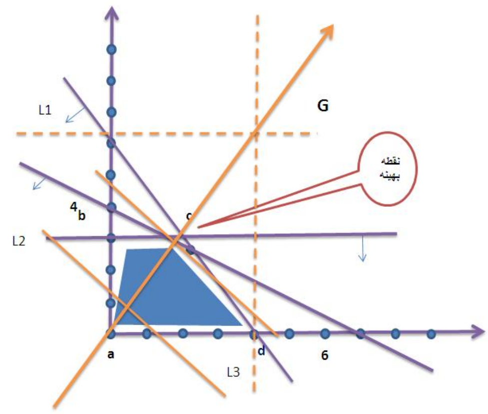
## روش گرادیان:

دراین روش به مانند روش ترسیمی پس از اینکه محدودیت های مسئله را رسم و فضای موجه و قابل قبول مسئله را رسم نمودیم بردار گرادیان خط تابع هدف را به منظور تعیین جهت افزایش و یا کاهش رسم می نمائیم سپس خطی را بصورت عمود بر خط گرادیان نسبت به نوع تابع هدف رسم می نمائیم اگر تابع هدف max باشد خطوط عمود را در جهت افزایش بردار گرادیان آنقدر رسم می نمائیم تا آخرین نقطه بدست آمده از محل برخورد خط عمود با ناحیه موجه بدست آید و اگر تابع هدف min باشد همین کار را در جهت عکس بردار گرادیان رسم می نمائیم.

**مثال** : از روش گرادیان نقطه بهینه را مشخص کنید (ص ۸۶ کتاب)

Max $Z = 4x_1 + 6x_2$
L1: $6X_1 + 4x2 \leq 24$
L2: $X_2 \leq 3 \rightarrow X_2=5$
L3: $5X_1+10X_2 \leq 40$
X1 , x2 $\gg$ 0

$Z^*=8+18=26 \rightarrow C_3^2$
X1*=2
X2*=3

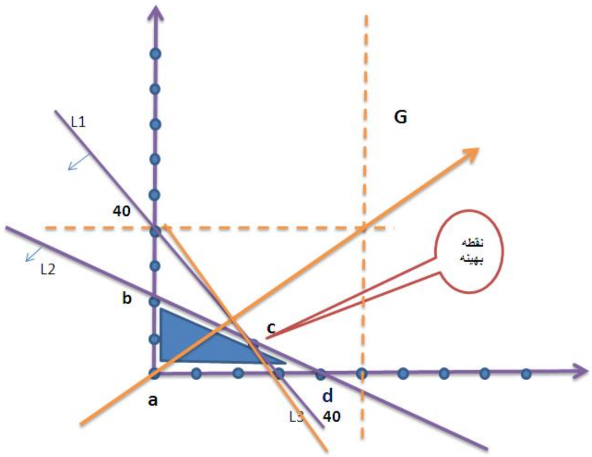



**مثال** : از روش گرادیان نقطه بهینه را مشخص کنید (ص ۹۶ کتاب)

Max $Z = 40x_1 + 50x_2$
L1: $X_1 + 2x_2 \leq 40$
L2: $4X_1+3X_2 \leq 120$
X1 , x2 $\gg$ 0

$G_{50}^{40}$
L1,L2: $-4(X1+2X2=40) \rightarrow C_?^?$
X1*=24 $\underline{X1+3X2=120}$
X2*=3 $-5X2=-40 \rightarrow$
$X2=8 \rightarrow X1=24$

$Z^*=40(24)+50(8)=1360 \rightarrow C_8^{24}$
X1*=24
X2*=8

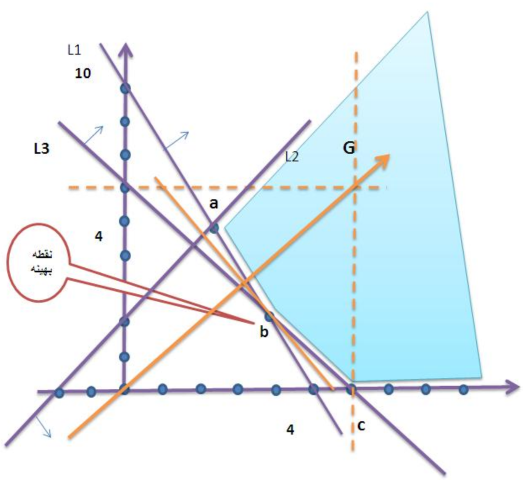



**مثال** : از روش گرادیان نقطه بهینه را مشخص کنید (ص ۹۳ کتاب تمرین ۵)

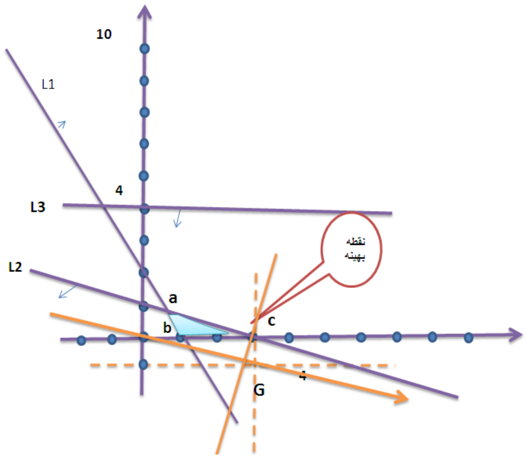
MIN $Z = 8x_1 + 6x_2$
L1: $4X_1 + 2x_2 \geq 20$
L2: $-6X_1 + 4X2 \leq 12$
L3: $X_1+X_2 \geq 6$
$X_1$ , $x_2 \gg$ 0

$G_6^8$
L1,L3: $-4(X_1+X_2=6) \rightarrow C_?^?$
$X_1^*=2$ $\underline{4X_1+2X_2=20}$
$X_2^*=3$ $-2X2=-4 \rightarrow$
$X_2=2 \rightarrow X_1=4$

$Z^*=8(4)+6(2)=44 \rightarrow B_2^4$
$X_1^*=4$
$X_2^*=12$



**مثال** : از روش گرادیان نقطه بهینه را مشخص کنید (ص ۱۴۱)




MAX $Z = 3X_1 - X_2$

L1: $2X_1 + X_2 \geq 2$

L2: $X_1 + 3X2 \leq 3$

L3: $X_2 \leq 4$

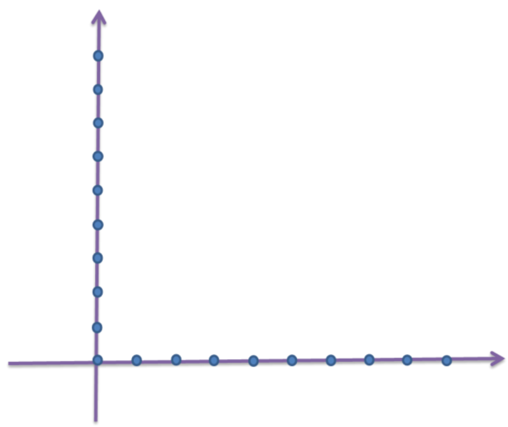
$X_1 , \quad x_2 \gg 0$

$$G^3_{-1} \to C^3_0$$

$X1^* = 3 \qquad X2^* = 0$

$Z^* = 3(3) - 0 = 9$

**مثال** : از روش گرادیان نقطه بهینه را مشخص کنید (ص۹۳)



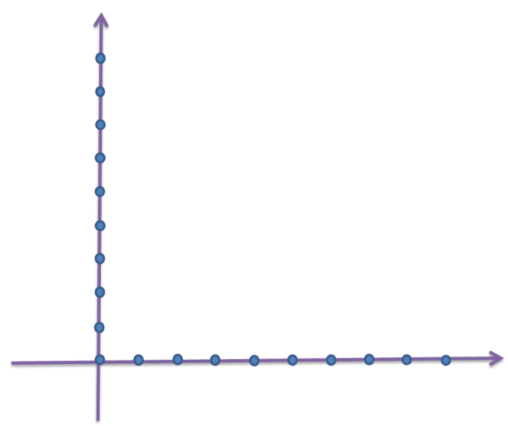
MAX $Z = 4X_1 + 14X_2$

L1: $2X_1 + 7X2 \leq 21$

L2: $7X_1 + 2X2 \leq 21$

$X_1 , \quad x_2 \gg 0$

**مثال** : از روش گرادیان نقطه بهینه را مشخص کنید



MAX $Z = 3X_1 + 3X_2$

L1: $2X_1 + X2 \leq 2$

L2: $3X_1 + 4X2 \leq 12$

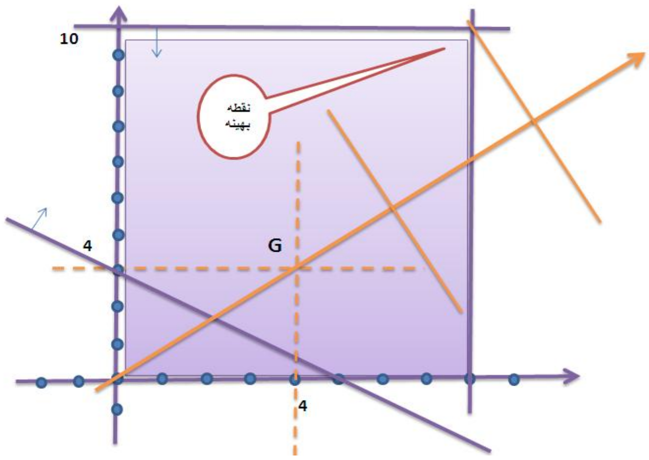
$X_1 , \quad x_2 \gg 0$

## حالات خاص در مسائل برنامه ریزی خطی :

**۱- جواب بهینه منحصر به فرد : در این حالت نقطه بهینه تنها یک نقطه در فضای موجه**

$\text{MAX } Z = 4X_1 + 3X_2$
$L1: \; 2X_1 \leq 8$
$L2: \; X_2 \leq 10$
$L3: \; 3X_1 + 5X_2 \geq 15$
$X1 , \quad x2 \gg \; 0$

**بهینهنقطه** $\binom{8}{10}$
$Z^* = 4(8) + 3(10) = 62$
$X1^* = 8$
$X2^* = 10$



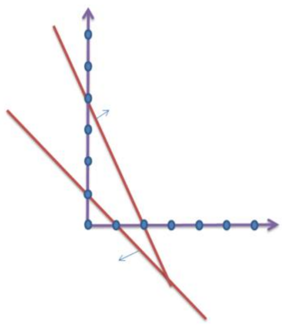

**۲- عدم وجود جواب موجه قابل قبول ( مسئله نشدنی است):**

**در این حالت مسئله جواب موجه یا قابل قبول ندارد یعنی مسئله دارای فضای حل قابل قبول یا فضای اشتراک حاصل از همه محدودیت ها نمی باشد که ممکن است مسئله در همان ابتدء مدل سازی درست فرموله نشده باشد و محدودیت ها حالت ناسازگاری و یا تضاد داشته باشند یعنی به عبارتی یک یا چند محدودیت محدودیت های دیگر را نقض کند.**

**مثال :**

$\text{MAX } Z = 3X_1 + 2X_2$
$L1: \; X_1 + X_2 \leq 1$
$L2: \; 2X_1 + X_2 \geq 4$
$X_1 , \quad x_2 \gg \; 0$

**مسئله نشدنی است یا دارای فضای حل موجه یا قابل قبول نیست(ناسازگار)**



**نکته: در بررسی فضای حل قابل قبول مسائل برنامه ریزی خطی شرط داشتن فضای موجه این است که بین تمامی محدودیت ها فضای مشترک وجود داشته باشد اگر حداقل یک محدودیت وجود داشته باشد که با محدودیت های دیگر نتواند فضای اشتراک به وجود آورد در این حالت عدم وجود جواب مسئله نشدنی است.**

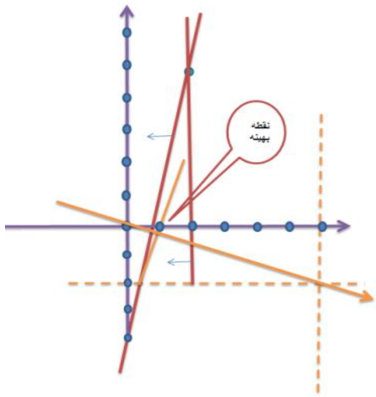
### ۳- فضای موجه نامحدود باشد :

**در این حالت ممکن است فضای موجه نامحدود باشد و مقدار Z تابع هدف محدود باشد و یا ممکن است فضای موجه نامحدود باشد و مقدار Z تابع هدف هم نامحدود باشد.**

## الف ) مثال برای Z که محدود باشد :

MAX $Z = 6X_1 - 2X_2$
L1: $4X_1 - X_2 \leq 4$
L2: $X_1 \leq 2$
$X_1 , \quad x_2 \gg 0$

$X1^*=1$
$X2^*=0$
$Z^*=6(1)-2(0)=6$




**۳- جواب بهینه چند گانه (دگرین) : این حالت وقتی رخ میدهد که مقدار Z در بیش از یک نقطه بدست آید و شرط لازم این است که تابع هدف موازی یکی از محدودیتها باشد . توجه شود که این شرط یک شرط لازم است و کافی نیست.**

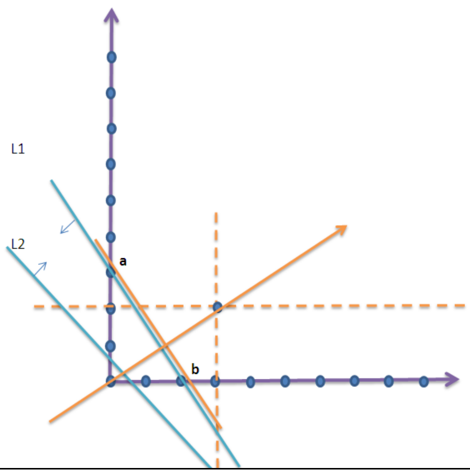
**مثال : برنامه ریزی مسئله را به روش ترسیمی حل کنید.**

MAX $Z = 3X_1 + 2X_2$
L1: $6X_1 + 4X_2 \leq 12$
L2: $X_1 + X_2 \geq \frac{1}{2}$
$X_1 , \quad x_2 \gg 0$

$G_2^3$

$B_0^2 Z^* = 3(2) + 2(0) = 6$ **جواب چندگانه**

$A_3^0 \quad Z^* = 3(0) + 2(3) = 6$



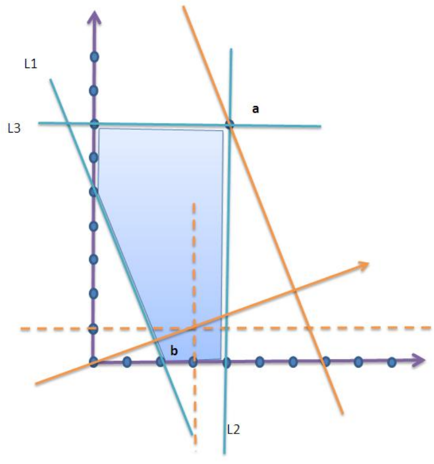

**مثال : برنامه ریزی مسئله را به روش ترسیمی حل کنید.**

MAX $Z = 3X_1 + X_2$
L1: $6X_1 + 2X_2 \geq 12$
L2: $X_1 \leq 4$
L3: $X_2 \leq 8$
$X_1, \quad x_2 \gg 0$

$G_1^3$

$A_3^0 \quad Z^* = 3(4) + 8 = 20$

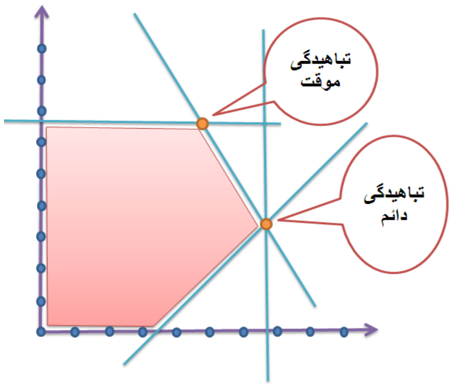
$X_1^*=4$
$X_2^*=8$



۵- جواب بهینه تبهکن (تباهیده) : هرگاه در فضای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی یک نقطه گوشه بدست آوریم که حاصل تلاقی بیش از دو خط باشد به این نقطه ، نقطه تباهیده می گوئیم که تباهیده بر دو نوع می باشد.

۱- تباهیده دائم: منظور از تباهیده دائم این است که هرگاه نقطه بهینه دقیقاً نقطه تباهیده باشد تباهیده گی دائم است.

۲- تباهیده موقت : هر گاه در فضای حل مسئله دچار تباهیده گی شده باشیم ولی نقطه بهینه در نقطه ای غیر از نقطه تباهیده اتفاق افتاده باشد بطور موقت دچار تباهیدگی شده ایم که به این حالت تباهیدگی موقت می گوئیم.



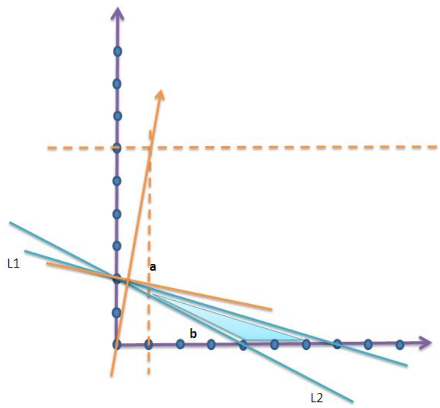

مثال : نوع تباهیدگی مسئله زیر را بیابید

MAX Z = $X_1 + 6X_2$
L1: $X_1 + 4X_2 \leq 8$
L2: $X_1 + 2X_2 \geq 4$
$X_1$ , $x_2 \gg 0$

$$G_6^1$$

$$A_2^0 \quad Z^* = 0 + 12 = 12$$

X1*=0
X2*=2



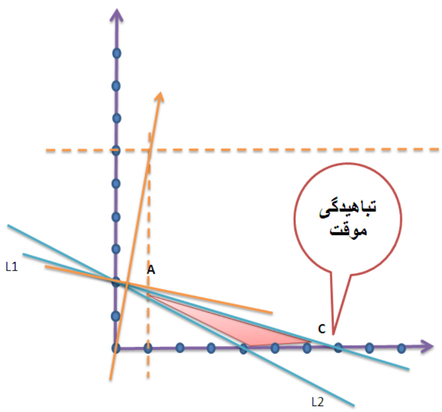

مثال : نوع تباهیدگی مسئله زیر را بیابید

MAX Z = $X_1 + X_2$
L1: $X_1 + 4X_2 \leq 8$
L2: $X_1 + 2X_2 \geq 4$
X1 , x2 $\gg$ 0

$$G_6^1$$

$$C_0^8 \quad Z^* = 8 + 0 = 8$$

X1*=8
X2*=0

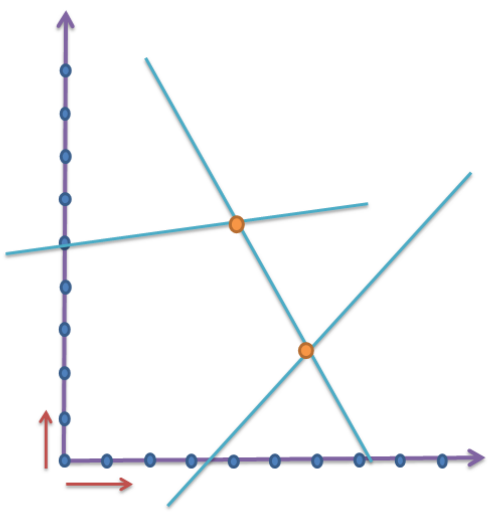


## روش سیمپلکس : simplex (پیچیده)

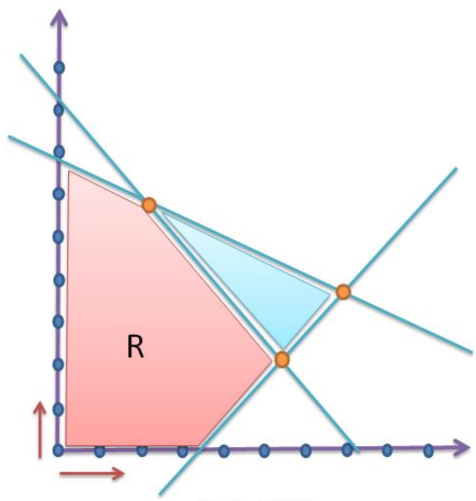
روش ترسیمی ارائه شده در فصل قبل نشان داد که اگر جواب بهینه وجود داشته باشد این جواب در گوشه موجه اتفاق می افتد و همانطور که دیدید تعداد این نقاط متناهی است ولی ضعف روش ترسیمی در دو متغیر بودن آن است . برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با بیشتر از دو متغیر تصمیم یک روش کاراتری وجود دارد بنام روش سیمپلکس که در سال ۱۹۴۷ توسط شخصی بنام دانتزیک برای حل مسائل برنامه ریزی خطی ایجاد شده که این روش یک روش الگوریتمی و نظام مند و تکراری است که در طی آن به دنبال جواب مطلوب می باشد.

**الگوریتم سیپلکس** : روش سیمپلکس از یک جواب موجه اساسی که معمولاً مبداء مختصات است فرایند بهینه سازی خود را شروع میکند که این نقطه یک جواب اساسی موجه است ولی غیر بهینه. روش سیمپلکس در هر مرحله با تبدیل یک متغیر غیر اساسی به اساسی و اساسی به غیر اساسی و با حفظ شرط موجه بودن در جهت بحبود جواب حرکت میکند تا جائیکه جابجائیها یا تبدیلات دیگر باعث بحبود جواب نباشد ، در این صورت یک نقطه ای گوشه پیدا شده که از دو نقطه گوشه مجاور خود بهتر است پس همان جواب را بعنوان جواب نهایی معرفی خواهد کرد. بعبارت دیگر روش سیمپلکس با حفظ شرط موجه بودن بدنبال برقراری شرط جواب بهینه گی است هر موقع که شرط بهینه گی برقرار شود جواب بدست آمده است که هم بهینه است و هم موجه ، پس جواب ایده آل است.

اگر مبداء مختصات یک گوشه موجه معادل یک جواب اساسی موجه باشد سیمپلکس بدون نیاز به متغیر های مصنوعی (R) فرایند بهینه سازی را از مبداء مختصات شروع خواهد کرد. شکل شماره ۱ اما اگر مبداء مختصات یک گوشه غیر موجه باشد معادل یک جواب اساسی غیر موجه در این صورت برای شروع الگوریتم سیمپلکس باید با اضافه کردن متغیرهای مصنوعی (R) فضا را طوری افزایش دهیم که مبداء مختصات بطور موقت به یک گوشه موجه اساسی تبدیل شود تا سیمپلکس بتواند فرایند بهینه سازی خود را از آن نقطه شروع کند شکل شماره ۲



شکل شماره ۱




شکل شماره ۲

## الگوریتم سیمپلکس دو نوع از مسائل را قادر است حل کند:

۱- مسائلی که تمامی محدودیت ها به فرم کوچکتر مساوی هستند ( در این حالت نیاز به متغیر مصنوعی R نیست ).

۲- مسائلی که حداقل دارای یک محدودیت بزرگتر مساوی یا مساوی دارند ( در این حالت نیاز به متغیر مصنوعی R است ).

**قدم ۱ : استاندارد سازی : در این مرحله مسئله را برای حل به روش سیمپلکس آماده کنید ( یک جواب موجه اساسی ابتدائی که همان مبداء مختصات است را بدست آورده و اولین جدول سیمپلکس را تشکیل می دهیم).**

B: پایه اساسی

N.B : غیر اساسی

C : ضریب متغیرهای غیر اساسی در سطح تابع هدف

A: ماتریس ضرایب متغیرهای غیر پایه در محدودیت های موقت مسئله

b: میزان منابع موجود(سمت راست)

I: ماتریس پایه یا یکه $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

| | $X_{N.B}$ | $X_B$ | R.H.S |
|---|---|---|---|
| Z | −C | ۰ | ۰ |
| $X_B$ | A | I | b |

**مثال : برنامه ریزی مسئله را استاندارد سازی نمائید**

$$\begin{aligned} &MAX\ \ Z = 2X_1 + 4X_2 \\ &X_1 + 2X_2 \le 6 \\ &2X_1 + 2X_2 \le 8 \\ &X1,\ \ x2 \gg 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &MAX\ \ Z = 2X_1 + 4X_2 + S_1 + S_2 = 0 \\ &X_1 + 2X_2 + S_1 = 6 \\ &2X_1 + 2X_2 + S_2 = 8 \\ &X1,\ \ x2 \gg 0 \\ &S_1,\ \ S_2 \gg 0 \end{aligned}$$

**متغیرهای مسئله برنامه ریزی خطی به دو دسته اساسی و غیر اساسی تقسیم بندی می گردد منظور از متغیرهای اساسی متغیرهایی هستند که مقادیر فقط مثبت اختیار کنند . منظور از متغیر غیر اساسی مغیرهائی هستند که فقط صفر اختیار کنند.**

$MAX\ \ Z = 2X_1 + 4X_2 + S_1 + S_2 = 0$

۴ عنصر

$X_1=0$ , $X_2=0$ اساسی

$S_1=6$ $S_2=8$ غیر اساسی

ورودی

ستون ورودی

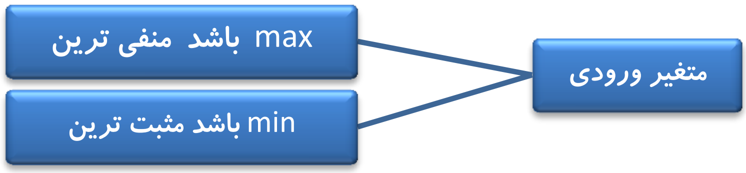
| Max | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۲ | -۴ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | ۲ | ۱ | ۰ | ۶ |
| S2 | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۸ |

**قدم دوم : تعیین متغیر ورودی ( تعیین ستون لولا – تعیین ستون ورودی)**

**در این قدم از بین متغیرهای غیر اساسی یکی را جهت تبدیل به متغیر اساسی باید انتخاب کنیم ( یعنی از بین دو متغیر X1 و X2 که غیر اساسی هستند یکی را باید بعنوان متغیر ورودی جهت تبدیل از حالت غیر اساسی به اساسی**

باید انتخاب کنیم. منطق سیمپلکس برای انتخاب متغیر ورودی به شکلی است که اگر تابع هدف max باشد منفی ترین ضریب از بین ضرایب متغیرهای غیر اساسی در سطر Z تابع هدف انتخاب می شود و اگر تابع هدف min باشد مثبت ترین ضریب از بین ضرایب متغیرهای غیر اساسی در سطر Z تابع هدف انتخاب می گردد.

متغیر مربوط به آن ضریب را متغیر ورودی و ستون مربوط به آن متغیر را ستون ورودی یا ستون لولا یا چرخشی مینامند (اگر منفی ترین ضریب منحصر به فرد نباشد و یا مثبت ترین ضریب منحصر به فرد نباشد یکی را به دلخواه انتخاب می کنیم).




اگر در سطر Z تابع هدف متغیر ورودی یافت نشد در این مرحله طی شرایطی به بهینه رسیده ایم و پایان الگوریتم است.

**قدم سوم** : تعیین متغیر خروجی ( تعیین سطر خروجی – سطر چرخشی یا سطر لولا)

در این قدم از بین متغیرهای اساسی ( S2 , S1) باید یکی را جهت تبدیل شدن به یک متغیر غیر اساسی انتخاب کنیم و به عبارت دیگر به ازاء متغیر ورودی که در قدم دوم انتخاب کردیم متغیری را برای جابجائی با آن متغیر از بین متغیرهای اساسی بعنوان متغیر خروجی باید انتخاب کنیم ( منظور این است که در مثال فوق از بین متغیرهای اساسی S2 , S1 یکی را جهت جابجائی با متغیر X2 باید انتخاب کنیم) . جهت انتخاب متغیر خروجی عناصر ستون سمت راست را بر عناصر بزرگتر از صفر ستون ورودی نظیر به نظیر تقسیم می کنیم از بین نسبت های بدست آمده min نسبت بدست آمده متغیر خروجی می باشد. $min = \left\{\frac{X_B}{a_{ij}}, a_{ij} > 0\right\}$

**قدم چهارم** : به روز رسانی ( Update) کردن مسئله :

در این مرحله متغیر ورودی را باید به پایه وارد کرده و متغیر خروجی را از پایه خارج کنیم ( یعنی در مثال فوق جای متغیر X2 با S1 را در جدول بعدی تصمیم می نمائیم) . به روز رسانی جدول در واقع یعنی ایجاد یک ستون یکه یا اساسی برای متغیر ورودی است. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ :

برای به روز رسانی جدول از عملیات سطری مقدماتی استفاده می نمائیم و بشرح زیر عمل خواهیم کرد:

ابتداء سطر خروجی را بر عدد لولا تقسیم می نمائیم و برای به هنگام کردن سایر سطرهای جدول ضریب مناسبی را از سطر خروجی به هنگام شده داخل ( سطر کاربردی) با سطرهای مربوطه دیگر جمع می کنیم در جهت ایجاد یک ستون یکه برای ستون ورودی.

بعد از به هنگام سازی به قدم دوم بر می گردیم و عملیات تازمانی ادامه دارد که شرط بهینه گی (منظور از شرط بهینه گی این است که متغیر ورودی یافت نشود) در این صورت عملیات را متوقف کرده و جواب نهایی مسئله حاصل می شود.

$MAX\ \ Z = 2X_1 + 4X_2 + S_1 + S_2 = 0$

لولا

| Max | X1 | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۲ | -۴ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | ۲ | ۱ | ۰ | ۶ |
| S2 | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۸ |
| Z | ۰ | ۰ | ۲ | ۰ | ۱۲ |
| X2 | ۱/۲ | ۱ | ۱/۲ | ۰ | ۳ |
| S2 | ۳/۲ | ۰ | -۱/۲ | ۱ | ۵ |
| | چون منفی نداریم پایان الگوریتم است | | | | |

در این سطر ۶تقسیم بر ۲ و ۸ تقسیم بر یک میشود min جواب حاصل سطر خروجی است

ضریب

۴(۱/۲) + (-۲) = ۰

۴(۱) + (-۴) = ۰

۴(۱/۲) + ۰ = ۲

۴(۰) + ۰ = ۰

۴(۳) + ۰ = ۱۲

بهینه است Z*=12 , X2=3 , S2=5

مثال: مسئله زیر را از روش ترسیمی و سیمپلکس حل کنید:

۱- استاندارد سازی جدول

۲- تعیین متغیر عددی } max و + min (-

۳- تعیین خروجی ( عناصر ستون ورودی/مقادیر سمت راست)

۴- Update بروز رسانی

$MAX\ \ Z = 40X_1 + 50X_2 + S_1 + S_2 = 0$

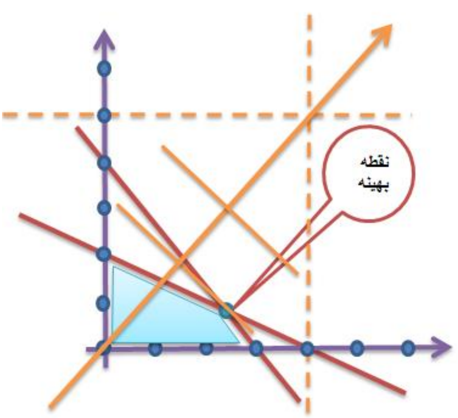
$X_1 + 2X_2 \leq 40$

$4X_1 + 3X_2 \leq 120$

$X1 ,\ \ x2 \gg\ \ 0$

| Max | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۴۰ | -۵۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | ۲ | ۱ | ۰ | ۴۰ |
| S2 | ۴ | ۳ | ۰ | ۱ | ۱۲۰ |
| Z | -۱۵ | ۰ | ۲۵ | ۰ | ۱۰۰۰ |
| X2 | ۱/۲ | ۱ | ۱/۲ | ۰ | ۲۰ |
| S2 | ۵/۲ | ۰ | -۳/۲ | ۱ | ۶۰ |
| Z | ۰ | ۰ | ۱۶ | ۶ | ۱۳۶۰ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۴/۵ | -۱/۵ | ۸ |
| X1 | ۱ | ۰ | -۳/۵ | ۳/۵ | ۲۴ |

براي تعيين خروجي min ميگيريم يعني ۴۰/۲ و ۱۲۰/۳ کمترين سطر خروجي خواهد بود




بهینه است Z*=1360 , X2*=8 , X1*=24

**مثال**: مسئله زیر را از روش  سیمپلکس حل کنید:

$$\text{Min } Z = -6X_1 - 3X_2$$
$$2X_1 + 4X_2 \leq 16$$
$$4X_1 + 3X_2 \leq 24$$
$$X1 , \ x2 \gg 0$$

| MIN | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | ۶ | ۳ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۲ | ۴ | ۱ | ۰ | ۱۶ |
| S2 | ۴ | ۳ | ۰ | ۱ | ۲۴ |
| Z | ۰ | -۳/۲ | ۰ | -۶ | -۳۶ |
| S1 | ۰ | ۵/۲ | ۱ | -۱/۲ | ۴ |
| X1 | ۱ | ۳/۴ | ۰ | ۱/۴ | ۶ |

بهینه است  $Z^*=-34$ , $X_2^*=0$ , $X_1^*=6$

**مثال**: مسئله زیر را از روش  سیمپلکس حل کنید:

$$\text{MAX } Z = 3X_1 + 5X_2$$
$$X_1 \leq 4$$
$$2X_2 \leq 12$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$
$$X1 , \ x2 \gg 0$$

| Max | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۳ | -۵ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۴ |
| S2 | ۰ | ۲ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱۲ |
| S3 | ۳ | ۲ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱۸ |
| Z | -۳ | ۰ | ۰ | ۵/۲ | ۰ | ۳۰ |
| S1 | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۴ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۰ | ۱/۲ | ۱ | ۶ |
| S3 | ۳ | ۰ | ۰ | -۱ | ۱ | ۶ |
| Z | ۰ | ۰ | ۰ | ۳/۲ | ۱ | ۳۶ |
| S1 | ۰ | ۰ | ۱ | ۱/۳ | -۱/۳ | ۲ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۰ | ۱/۲ | ۰ | ۶ |
| X1 | ۱ | ۰ | ۰ | -۱/۳ | ۱/۳ | ۲ |

بهینه است  $Z^*=36$ , $X_2^*=6$ , $X_1^*=2$

**مثال**: مسئله زیر را از روش سیمپلکس حل کنید:

$$\text{Min } Z = 4X_1 - 3X_2$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 \leq 8$$
$$X1,\ x2 \gg 0$$

| MIN | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۴ | ۳ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | ۲ | ۱ | ۰ | ۶ |
| S2 | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۸ |
| Z | ۰ | ۵ | ۰ | ۲ | ۱۶ |
| S1 | ۰ | ۳/۲ | ۱ | -۱/۲ | ۲ |
| X1 | ۱ | ۱/۲ | ۰ | ۱/۴ | ۴ |

بهینه است $Z^*=16\ ,\ X_2^*=0\ ,\ X_1^*=4$

**مثال**: مسئله زیر را از روش سیمپلکس حل کنید:

$$\text{MAX } Z = 2X_1 + 3X_2 - 3X_3$$
$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 3$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 4$$
$$X1 + X2 \leq 3$$
$$X1,\ x2, x3 \gg 0$$

| Max | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۲ | -۳ | ۳ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | ۲ | ۳ | ۱ | ۰ | ۰ | ۳ |
| S2 | ۲ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۴ |
| S3 | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۳ |
| Z | -۱/۲ | ۰ | ۱۲/۲ | ۳/۲ | ۰ | ۰ | ۹/۲ |
| X2 | ۱/۲ | ۱ | ۳/۲ | ۱/۲ | ۰ | ۰ | ۳/۲ |
| S2 | ۳/۲ | ۰ | -۱/۲ | -۱/۲ | ۱ | ۰ | ۵/۲ |
| S3 | ۱/۲ | ۰ | -۳/۲ | -۱/۲ | ۰ | ۱ | ۳/۲ |
| Z | ۰ | ۰ | ۲۲/۳ | ۴/۳ | ۱/۳ | ۰ | ۱۶/۳ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۵/۳ | ۲/۳ | -۱/۳ | ۰ | ۲/۳ |
| X1 | ۱ | ۰ | -۱/۳ | -۱/۳ | ۲/۳ | ۰ | ۵/۳ |
| S2 | ۰ | ۰ | -۴/۳ | -۱/۳ | -۱/۳ | ۱ | ۲/۳ |

ستون R.H.S همیشه مثبت است و اگر منفی مشاهده شود غلط است والسلام

بهینه است $Z^*=16/3\ ,\ X_2^*=2/3\ ,\ X_1^*=5/3,\ X_3^*=0$

**مثال**: تمرین ۳ ص ۱۶۷ کتاب را از روش سیمپلکس حل کنید:

$MAX \; Z = 4X_1 + 6X_2$

$X_1 + 2X_2 \leq 10$

$6X_1 + 6X_2 \leq 36$

$4 \leq \quad X1$

$X1 , \; x2 \gg 0$

**مثال**: تمرین ۳ ص ۱۶۵ کتاب را از روش سیمپلکس حل کنید:

$MAX \; Z = 10X_1 - X_2 + 5X_3 - 3X_4 + X_5$

$3X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + 1/3X_5 \leq 90$

$X1,2,3,4,5 \gg 0$

| Max | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $S_1$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۱۰ | ۱ | -۵ | -۳ | -۱ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۳ | ۲ | ۱ | ۱ | ۱/۳ | ۱ | ۹۰ |
| Z | ۰ | ۲۳/۳ | -۵/۳ | ۱۹/۳ | ۱/۹ | ۱۰/۳ | ۳۰۰ |
| X1 | ۱ | ۲/۳ | ۱/۳ | ۱/۳ | ۱/۹ | ۱/۳ | ۳۰ |
| Z | ۵ | ۱۱ | ۰ | ۸ | ۲/۳ | ۵ | ۴۵۰ |
| X3 | ۳ | ۲ | ۱ | ۱ | ۱/۳ | ۱ | ۹۰ |

بهینه است

**مثال**: تمرین ۱۰ ص ۱۷۰ کتاب را از روش سیمپلکس حل کنید:

$MAX \; Z = 2X_1 + X_2 + S_1 + S_2 = 0$

$X_1 - X_2 \leq 10$

$2X_1 - X_2 \leq 40$

$X1 , \; x2 \gg 0$

| Max | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۲ | -۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | -۱ | ۱ | ۰ | ۱۰ |
| S2 | ۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۴۰ |
| Z | ۰ | -۳ | ۲ | ۰ | ۲۰ |
| X1 | ۱ | -۱ | ۱ | ۰ | ۱۰ |
| S2 | ۰ | ۱ | -۲ | ۱ | ۲۰ |
| Z | ۳ | ۰ | -۴ | ۳ | ۸۰ |
| X1 | ۱ | ۰ | -۱ | ۱ | ۳۰ |
| X2 | ۰ | ۱ | -۲ | ۱ | ۲۰ |

هرگاه متغیر ورودی باشد ولی متغیر خروجی وجود نداشته باشد فضای مسئله بی نهایت است.

فضای حل مسئله بی نهایت و مقدار $Z=\infty$ است

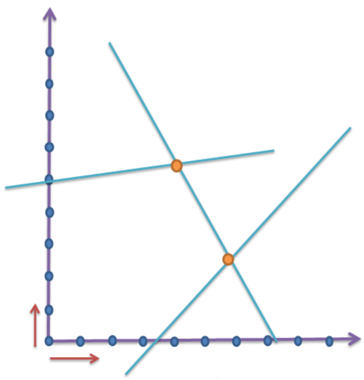
**نکته ۲**: هرگاه در جدول سیمپلکس ستونی از جدول بدست آید که تمامی متغیرهای آن دارای ضرایب منفی و صفر باشند در این صورت فضا در جهت آن متغیر بی نهایت است و اگر متغیر متناظر با آن ستون در سطر Z تابع هدف

مورد استقبال تابع هدف قرار گیرد  Z مساوی با بی نهایت است ولی اگر مورد استقبال تابع هدف قرار نگیرد Z محدود است.

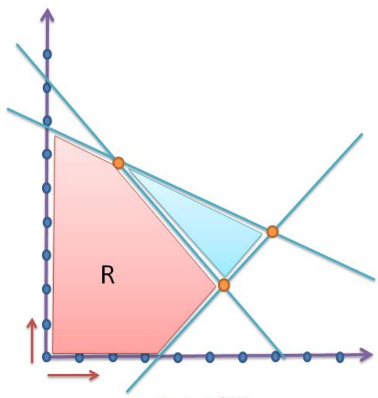
## ۲- حل مسائلی که در آنها حداقل یک محدودیت بزرگتر مساوی یا مساوی وجود دارد:

**مسائلی که به این شکل هستند جهت آماده سازی محدودیتها نیاز به متغیر مصنوعی (R) دارند به عبارت دیگر مسائلی که محدودیتها به فرم بزرگتر مساوی یا مساوی هستند بدون اضافه کردن متغیر مصنوعی R مبداء مختصات در حکم یک جواب اساسی غیر موجه است از آنجائیکه اساس حل سیمپلکس از مبداء مختصات (یک جواب موجه اساسی) است بااضافه کردن متغیر مصنوعی به محدودیتها این مشکل رفع می گردد در واقع فضا طوری افزایش می یابد که مبداء مختصات به یک گوشه موجه اساسی تبدیل شود اما باید بدانیم که این فضای اضافه شده یک فضای موقتی است و مبداء مختصات به طور موقت به یک گوشه موجه تبدیل شده و تنها برای اینکه مشکل شروع حل سیمپلکس بر طرف شود این فضای کاذب نقش یک پل ارتباطی را بین مبداء مختصات و فضای اصلی مسئله ایفا میکند. اما باید مکانیزمی باشد که سیمپلکس را مجبور کند از این فضای کاذب خارج شده و بهینه سازی را روی فضای اصلی مسئله انجام دهد . بعبارت دیگر در شروع حل مسئله با دادن مقدار به متغیرهای مصنوعی باعث جابجائی محدودیت ها خواهیم شد که این جابجائی ها باعث افزایش فضا میشود و خارج شدن از فضای کاذب برای سیمپلکس یعنی به صفر تبدیل کردن متغیرهای مصنوعی که برای رفع این مشکل دو روش پیشنهاد می گردد.**

۱- روش M بزرگ
۲- روش  دو فازی



شکل شماره ۱




شکل شماره ۲

## روش اول (M بزرگ ):

**روش حل: در این روش باتوجه به نوع تابع هدف جریمه مناسبی را بصورت ضریبی از متغیرهای مصنوعی به تابع هدف مسئله اضافه می شود که بصورت زیر است :**

If max $z \rightarrow -1\sum . MRi$

If min $z \rightarrow +1\sum . MRi$

**این جریمه ها طوری طراحی می شود که اگر مسئله max باشد مقدار گرفتن متغیرهای مصنوعی باعث کاهش شدید تابع هدف و اگر مسئله min باشد باعث افزایش شدید تابع هدف میگردد . بنابراین سیمپلکس مجبور خواهد بود برای خنثی کردن جریمه ای که به تابع هدف بسته شده است متغیر های مصنوعی را مجبور کند از پایه خارج شود(مقدارشان به صفر تبدیل شود) با این کار سیمپلکس از فضای کاذب خارج شده و بهینه سازی روی فضای اصلی مسئله انجام خواهد شد.**

**حل : ۱- استاندارد سازی ( تغییرات در تابع هدف و محدودیتها)**

**اولین جدول روش M بزرگ همیشه نا بهنگام است**

**۲ – تعیین ورودی**

**۳-تعیین خروجی**

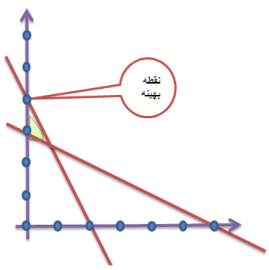
**۴-بروز کردن update**

**مثال:** تمرین را از روش Mبزرگ حل کنید:

MAX $Z = 3X_1 + 2X_2$
$2X_1 + X_2 \leq 4$
$X_1 + 2X_2 \geq 6$
$X1 , x2 \gg 0$

بهنگام شده

MAX $Z = 3X_1 + 2X_2 - MR_1$
$2X_1 + X_2 + S1 \leq 4$
$X_1 + 2X_2 - S + R \geq 6$
$X1 , x2 \gg$




| Max | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_1$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۳ | -۲ | ۰ | ۰ | M | ۰ |
| S1 | ۲ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۴ |
| R1 | ۱ | ۲ | ۰ | -۱ | ۱ | ۶ |
| Z | -m-3 | -2m+2 | ۰ | M | ۰ | -6m |
| S1 | ۲ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۴ |
| R1 | ۱ | ۲ | ۰ | -۱ | ۱ | ۶ |
| Z | -۲ | ۰ | ۰ | -۱ | M+1 | ۶ |
| S1 | ۳/۲ | ۰ | ۱ | ۱/۲ | -۱/۲ | ۱ |
| X2 | ۱/۲ | ۰ | ۰ | -۱/۲ | ۱/۲ | ۳ |
| Z | ۰ | ۰ | ۴/۳ | -۱/۳ | M+1/3 | ۲۲/۳ |
| X1 | ۱ | ۰ | ۲/۳ | ۱/۳ | -۱/۳ | ۲/۳ |
| X2 | ۰ | ۱ | -۱/۳ | -۲/۳ | ۲/۳ | ۸/۳ |
| Z | ۱ | ۰ | ۲ | ۰ | M | ۸ |
| S2 | ۳ | ۰ | ۲ | ۱ | -۱ | ۲ |
| X2 | ۲ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۴ |

بهینه است $Z^*=8 , X_2^*=4 , X_1^*=0$

**نکته:** در جدول نهایی روش M بزرگ همیشه ممکن است یکی از حالت زیر رخ دهد:

۱- در جدول نهایی همه متغیرهای مصنوعی دارای مقدار صفر هستند این وضعیت به این مفهوم است که مسئله دارای جواب است.

۲- در جدول نهایی حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی با مقدار مخالف صفر ممکن است در پایه باشد این وضعیت به این مفهوم است که مسئله بدون فضای جواب است و در نتیجه بدون جواب خواهد بود.

۳- مثال: تمرین را از روش M بزرگ حل کنید:

$$MAX\ \ Z = 5X_1 - 6X_2 - MR1 - MR2$$
$$X_1 + 5X_2 - S + R \geq 15$$
$$X_1 + X_2 + R = 5$$
$$5X_1 + 2X_2 + S \leq 10$$
$$X_1,\ \ x_2 \gg\ \ 0$$

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $R_1$ | $R_2$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | -5-m | 6-5m | M | ۰ | M | ۰ | -15m |
| Z | -5 | 6 | 0 | M | M | ۰ | ۰ |
| | -6m-5 | -6m+6 | M | ۰ | ۰ | ۰ | -20m |
| R1 | ۱ | ۵ | -۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱۵ |
| R2 | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۵ |
| S2 | ۵ | ۲ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱۰ |
| Z | -4/5M-31/5 | ۰ | -1/5M +6/5 | 16/5 M-6/5 | ۰ | ۰ | -2M-18 |
| X2 | ۱/۵ | ۱ | -۱/۵ | ۱/۵ | ۰ | ۰ | ۳ |
| R2 | ۴/۵ | ۰ | ۱/۵ | -۱/۵ | ۱ | ۰ | ۲ |
| S2 | ۲۳/۵ | ۰ | ۲/۵ | -۲/۵ | ۰ | ۱ | ۴ |
| Z | -11 | 0 | 0 | M | M-6 | ۰ | -۳۰ |
| X2 | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۵ |
| S1 | ۴ | ۰ | ۱ | -۱ | ۵ | ۰ | ۱۰ |
| S2 | ۳ | ۰ | ۰ | ۰ | -۲ | ۱ | ۲ |
| Z | ۰ | ۰ | ۰ | M | M+4 0/3 | ۱۱/۳ | -۶۸/۳ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۵/۲ | -۱/۳ | ۱۳/۳ |
| S1 | ۰ | ۰ | ۱ | -۱ | ۲۳/۳ | -۴/۳ | ۲۲/۳ |
| X1 | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | -۲/۳ | ۱/۳ | ۲/۳ |
| | | | | بهینه است | | | |

## روش دوفازی :

روش M بزرگ در کامپیوتر هنگامی با مشکل مواجه می گردد که ضرایب متغیرها در محدودیتهای مسئله خود مقادیری بسیار بزرگ باشند از آنجایی که کامپیوتر M را بزرگترین عدد موجود در حافظه خود تلقی می کند بنابراین ممکن است خطای صورت گیرد . روش دو فاز برای جلوگیری از این خطا مطرح میشود عمل اضافه کردن متغیرهای مصنوعی (R) به محدودیتها همانند روش M بزرگ اجرا میشود فقط در این روش از M خبری نیست. این روش مسئله را در طی دو مرحله یا دوفاز حل میکند.

**فاز اول**: پس از استاندارد کردن مسئله و اضافه کردن متغیرهای مصنوعی به محدودیتهایی که بردار واحد را ایجاد نمیکنند تابع هدف اصلی مسئله را کنار گذاشته و تابع هدف جدیدی به صورت مجموع متغیرهای مصنوع MIN W= Ri

باید توجه داشت تابع هدف جدید همیشه به صورت MIN باید نوشته شود سپس با این تابع هدف جدید و محدودیتهای مسئله جدول اولیه سیمپلکس را تشکیل می دهیم سپس با بهنگام سازی متغیرهای پایه ( صفر کردن ضریب متغیرهای مصنوعی در تابع هدف در جدول سیمپلکس) مسئله را تا رسیدن به جواب نهایی ادامه میدهیم . پایان فاز یک منوط به صفر شدن مقدار W به عبارتی دیگر صفر شدن مقادیر متغیرهای مصنوعی می باشد . چنانچه در انتهای فاز یک W مخالف صفر شود ($W\neq 0$) مسئله اولیه دارای فضای قابل قبول نمی باشد بنابر این شرط شروع فاز دوم صفر شدن W در انتهای فاز یک م باشد.

**فاز دوم** : در فاز دوم اعمال زیر باید انجام شود:

۱- تابع هدف Z جانشین تابع W می شود.
۲- ستونهای مربوط به متغیرهای مصنوعی حذف می شود.
۳- پایه فعلی به روز آوری (بهنگام) شود.
۴- درصورت نیاز مسئله با تکرارهای سیمپلکس حل شود.

**مثال** : به روش دو فاز حل گردد.

$$MAX\ \ Z = 2X_1 + 3X_2 + minW=Ri$$
$$S_1=4X_1+2X_2 \leq 4$$
$$R_1=3\ \ =3X_1+X_2$$
$$X1\ ,\ \ x2 \gg 0$$

| Max | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $R_1$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| W | ۰ | ۰ | ۰ | -۱ | ۰ |
| | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۳ |
| S1 | ۱ | ۲ | ۱ | ۰ | ۴ |
| R1 | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۳ |
| W | ۰ | ۰ | ۰ | -۱ | ۰ |
| S1 | ۰ | ۱ | ۱ | -۱ | ۱ |
| X1 | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۳ |

پایان یک چون W=0 , R=0

**شروع فاز دوم که w تبدیل به z میشود و همیشه اولین جدول نابهنگام است.**

**ستون $R_1$ حذف میشود.**

نابهنگام است

| Max | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|
| Z | -۲ | -۳ | ۰ | ۰ |
| | ۰ | -۱ | ۰ | ۶ |
| S1 | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| X1 | ۱ | ۱ | ۰ | ۳ |
| Z | ۰ | ۰ | ۱ | ۷ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| X1 | ۱ | ۰ | -۱ | ۲ |

$Z^*=7\ ,\ X_2^*=1\ ,\ X_1^*=2$ **بهینه است**

**مثال:** تمرین زیر را به روش M حل کنید:

$$\text{MAX } Z = 2X_1 + 3X_2 - MR1$$
$$X_1+2X_2 \leq 4$$
$$X_1+X_2 = 3$$
$$X_1\ ,\ x_2 \gg 0$$

| Max | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $R_1$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۲ | -۳ | ۰ | M | ۰ |
| | -2-M | -3-M | ۰ | ۰ | -3M |
| S1 | ۱ | ۲ | ۱ | ۰ | ۴ |
| R1 | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۳ |
| Z | ۰ | -۱ | ۰ | 2+M | ۶ |
| S1 | ۰ | ۱ | ۱ | -۱ | ۱ |
| X1 | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۳ |
| Z | ۰ | ۰ | ۱ | M+1 | ۷ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۱ | -۱ | ۱ |
| X2 | ۱ | ۰ | -۱ | 2 | 2 |

$Z^*=7\ ,\ X_2^*=1\ ,\ X_1^*=2$ **بهینه است**

**مثال** : به روش دو فاز حل گردد.

**ستون پایه** : $R1_0^1 S2_1^0$ (غیر قابل قبول $S1_0^{-1} X1_1^1$ )

MIN Z = $X_1 + 5X_2$ +minW=Ri
$-S_1+R_1=6X_1+2X_2 \geq 6$
$S_2=5 \leq 5X_1+X_2$
X1 , x2 ≫ 0

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $R_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | ۰ | ۰ | ۰ | −۱ | ۰ | ۰ |
| | ۱ | ۲ | −۱ | ۰ | ۰ | ۶ |
| R1 | ۱ | ۲ | −۱ | ۱ | ۰ | ۶ |
| S1 | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۵ |
| W | ۰ | ۰ | ۰ | −۱ | ۰ | ۰ |
| X1 | ۱/۲ | ۱ | −۱/۲ | ۱/۲ | ۰ | ۳ |
| S2 | ۱/۲ | ۰ | ۱/۲ | −۱/۲ | ۱ | ۲ |

باید تا جایی ادامه بدهیم که W=0 , R=0 باشد

پایان یک چون W=0 , R=0

شرط لازم برای ورود به فاز ۲ :

۱- R=0 , W=0
۲- W با Z جایگزین
۳- ستون R حذف
۴- اولین جدول نابهنگام است
۵- سیمپلکس ادامه دارد

**شروع فاز دوم که w تبدیل به z میشود و همیشه اولین جدول نابهنگام است.**

**ستون R1 حذف میشود.**

نابهنگام است

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | −۱ | −۵ | ۰ | ۰ | ۰ |
| | ۳/۲ | ۰ | −۵/۲ | ۰ | ۱۵ |
| X2 | ۱/۲ | ۱ | −۱/۲ | ۰ | ۳ |
| S2 | ۱/۲ | ۰ | ۱/۲ | ۱ | ۲ |
| Z | ۰ | ۰ | −۴ | −۳ | ۹ |
| X2 | ۰ | ۱ | −۱ | −۱ | ۱ |
| X1 | ۱ | ۰ | ۱ | ۲ | ۴ |

**بهینه است** $Z^*=9$ , $X_2^*=1$ , $X_1^*=4$

**تمرین منزل** : به روش فازی حل شود

MIN Z = $X_1-2X_2$
$X_1+2X_2 \geq 2$
$\geq 1-X_1+X_2$
$X_2 \leq 2$
X1 , x2 ≥ 0

**مثال**: تمرین زیر را به روش M حل کنید:

$$\text{MIN } Z = X_1 + 5X_2 + MR1$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 6$$
$$X_1 + X_2 \leq 5$$
$$X1 , \quad x2 \gg 0$$

| MIN | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $R_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۱ | -۵ | ۰ | -m | ۰ | ۰ |
| | m-1 | 2m-5 | -m | ۰ | ۰ | 6m |
| R1 | ۱ | ۲ | -۱ | ۱ | ۰ | ۶ |
| S2 | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۵ |
| Z | 3/2 | ۰ | -5/2 | 5/2-M | ۰ | ۱۵ |
| X2 | ۱/۲ | ۱ | -۱/۲ | ۱/۲ | ۰ | ۳ |
| S2 | ۱/۲ | ۰ | ۱/۲ | -۱/۲ | ۱ | ۲ |
| Z | ۰ | ۰ | -۴ | 4-M | -۳ | ۹ |
| X2 | ۰ | ۱ | -۱ | ۱ | -۱ | ۱ |
| X1 | ۱ | ۰ | ۱ | -۱ | ۲ | ۴ |

بهینه است $Z^*=9$ , $X_2^*=1$ , $X_1^*=4$

**مثال** : تمرین زیر را از دو روش M بزرگ و دو فاز حل کنید

$$\text{MAX } Z = 3X_1 + 3X_2 - MR1$$
$$2X_1 + X_2 \leq 2$$
$$3X_1 + 4X_2 \geq 12$$
$$X1 , \quad x2 \gg 0$$

2X1+X2+S1=2

3X1+4X-S2+R1=12

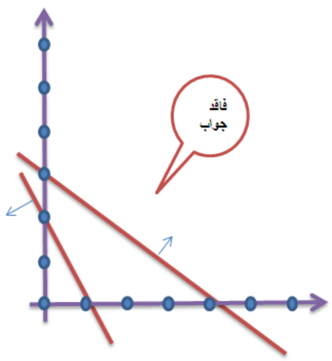
| | $X_1$ | $X_2$ | $S_2$ | $S_1$ | $R_1$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۳ | -۳ | ۰ | ۰ | M | ۰ |
| | -3M-3 | -4M-3 | M | ۰ | ۰ | -12M |
| S1 | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۲ |
| R1 | ۳ | ۴ | -۱ | ۰ | ۱ | ۱۲ |
| Z | 5M+3 | ۰ | M | 4M+2 | ۰ | -4M+6 |
| X2 | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۲ |
| R1 | -۵ | ۰ | -۱ | -۴ | ۱ | ۴ |

بهینه است ولی چون R1 مخالف صفر است جواب ندارد (نشدنی است)

از طریق دو فاز

minW=R

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_2$ | $S_1$ | $R_1$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | -۱ | ۰ |
| | ۳ | ۴ | -۱ | ۰ | ۰ | ۱۲ |
| S1 | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۲ |
| R1 | ۳ | ۴ | -۱ | ۰ | ۱ | ۱۲ |
| W | -۵ | ۰ | -۱ | -۴ | ۰ | ۴ |
| X2 | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۲ |
| R1 | -۵ | ۰ | -۱ | -۴ | ۱ | ۴ |




بهینه است ولی چون R1,W مخالف صفر است جواب ندارد (نشدنی است)

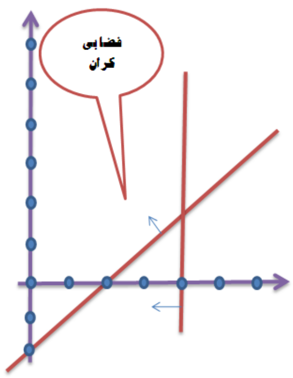
**حالت خاص در جدول سیمپلکس:** مسائلی که تاکنون توسط روش سیمپلکس حل شد دارای جواب بهینه منحصر به فرد بود اما حالت دیگری هم ممکن است در جدول سیمپلکس رخ دهد که عبارتند از :

۱- فضا بی کران – مقدار تابع هدف بی کران
۲- فضا بی کران – مقدار تابع هدف کران دار
۳- تباهیده دائم
۴- تباهیده موقت
۵- جواب چندگانه
۶- مسئله دارای جواب نمی باشد.

## ۱-فضا بی کران – مقدار تابع هدف بی کران

**مثال :**

$$\text{MAX } Z = 2X_1 + X_2$$
$$X_1 - X_2 \leq 10$$
$$X_1 \leq 20$$
$$X1 ,\ x2 \gg 0$$




| MAX | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۲ | -۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | -۱ | ۱ | ۰ | ۱۰ |
| S2 | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۲۰ |
| Z | ۰ | -۳ | ۲ | ۰ | ۲۰ |
| X1 | ۱ | -۱ | ۱ | ۰ | ۱۰ |
| S2 | ۰ | ۱ | -۱ | ۱ | ۱۰ |
| Z | ۰ | ۰ | -۱ | ۳ | ۵۰ |
| X1 | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۲۰ |
| X2 | ۰ | ۱ | -۱ | ۱ | ۱۰ |

چون ورودی دارد و مورد استقبال هم هست پس Z بی کران است

همانطور که در جدول فوق مشاهده می گردد در جدول نهایی در ستون S1 ستون ورودی (ستون لولا) کلیه عناصر شامل اعداد صفر و منفی گردیده اند که در این حالت واضح است متغیر خروجی نخواهیم داشت بنابراین هرگاه کلیه اعداد ستون لولا در تکراری از جدول سیمپلکس شامل اعداد صفر یا منفی باشند در این حالت ، حالت خاص است از فضا در جهت آن متغیر بی کران است و چنانچه بی کران بودن مسئله باتوجه به نتیجه گیری اخیر در راستای متغیری بی کران باشد و ضریب آن متغیر در تابع هدف مورد استقبال قرار گیرد ( یعنی اگر تابع هدف MAX باشد

در سطر Z تابع هدف متغیر منفی باشد و اگر تابع هدف MIN باشد در سطر Z تابع هدف متغیر مثبت باشد) در این صورت مقدار تابع هدف مسئله هم بی کران خواهد شد.

**مثال :**

$$\text{MAX } Z = 5X_1 + 3X_2 + 2X_3$$
$$X_1 - X_2 + X_3 \leq 15$$
$$X1, X2, X3 \gg 0$$

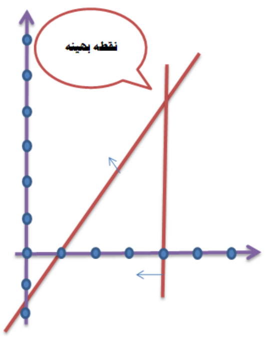
| MAX | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $S_1$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | −۵ | −۳ | −۲ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | −۱ | ۱ | ۱ | ۱۵ |
| Z | ۰ | −۸ | ۳ | ۵ | ۷۵ |
| X1 | ۱ | −۱ | ۱ | ۱ | ۱۵ |

چون ورودی دارد و مورد استقبال هم هست پس Z بی کران است

## ۲–فضا بی کران – مقدار تابع(Z) هدف کران دار باشد

**مثال :**

$$\text{MAX } Z = 6X_1 - 2X_2$$
$$2X_1 - X_2 \leq 2$$
$$X_1 \leq 4$$
$$X1,\ x2 \gg 0$$




| MAX | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | −۶ | ۲ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۲ | −۱ | ۱ | ۰ | ۲ |
| S2 | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۴ |
| Z | ۰ | −۱ | ۳ | ۰ | ۶ |
| X1 | ۱ | −۱/۲ | ۱/۲ | ۰ | ۱ |
| S2 | ۰ | ۱/۲ | −۱/۲ | ۱ | ۳ |
| Z | ۰ | ۰ | ۲ | ۲ | ۱۲ |
| X1 | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۴ |
| X2 | ۰ | ۱ | −۱ | ۲ | ۶ |

بهینه است ولی ۱– دارد بی کران است و Zهم ورودی ندارد کران دار است

## ۳–تباهیده گی دائم :

در مسائل برنامه ریزی خطی همیشه از برخورد دو محدودیت یک نقطه گوشه بدست می آید اما در بعضی از مواقع ممکن است یک نقطه گوشه ای از برخورد بیشتر از دو محدودیت به وجود آمده باشد که به چنین نقطه ای نقطه تباهیده گفته میشود که به اصطلاح یک نقطه تباه شده است.

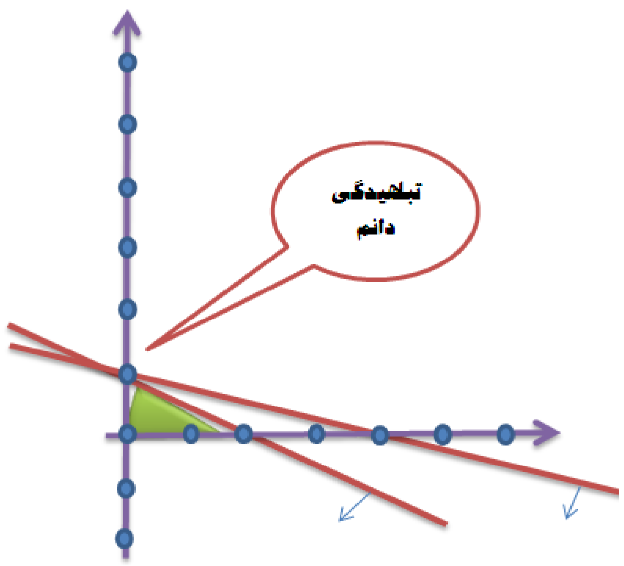
**مثال :**

$$MAX\ \ Z = 3X_1 + 9X_2$$
$$X_1+4X_2 \leq 8$$
$$X_1+2X_2 \leq 4$$
$$X1\ ,\ \ x2 \gg\ \ 0$$

| MAX | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۳ | -۹ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | ۴ | ۱ | ۰ | ۸ |
| S2 | ۱ | ۲ | ۰ | ۱ | ۴ |
| Z | -۴/۳ | ۰ | ۹/۴ | ۰ | ۱۸ |
| X2 | ۱/۴ | ۱ | ۱/۴ | ۰ | ۲ |
| S2 | ۱/۲ | ۰ | -۱/۲ | ۱ | ۰ |
| Z | ۰ | ۰ | ۳/۲ | ۶/۴ | ۱۸ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۱/۲ | -۱/۲ | ۲ |
| X1 | ۱ | ۰ | -۱ | ۲ | ۰ |

جدول بهینه است و سمت راست صفر است تباهیده دائم است

**نکته:** هرگاه در جدول سیمپلکس در تعیین شرط خروجی (MIN ها) مقدار بدست آمده منحصر به فرد نباشد یعنی مساوی باشد در این صورت در جدول بعدی جواب تباهیده خواهد شد بطوریکه متغیری که در سطر خروجی انتخاب نشده است در جدول بعدی در سمت راست مقدارش صفر می شود و این یعنی تباهیده ، بنابرین همیشه در جدول سیمپلکس وجود صفر در سمت راست به معنی تباهیدگی می باشد که اگر صفر در جدول نهایی همچنان ظاهر شود به این نوع تباهیدگی ، تباهیدگی دائم گفته میشود . ولی هرگاه مقدار صفر سمت راست جدول در یکی از تکرارهای سیمپلکس بطور موقت ایجاد شود و در جدول نهایی از بین برود به این حالت تباهیدگی موقت گفته میشود.



## ۴-تباهیده گی موقت :

**مثال :**

$$\text{MAX } Z = 3X_1 + 2X_2$$
$$4X_1 + 3X_2 \le 12$$
$$4X_1 + X_2 \le 8$$
$$4X1 - X2 \le 8$$
$$X1 ,\ x2 \gg 0$$

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۳ | -۲ | 0 | 0 | ۰ | ۰ |
| S1 | ۴ | ۳ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱۲ |
| S2 | ۴ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۸ |
| S3 | ۴ | -۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۸ |
| Z | ۰ | -۵/۴ | ۰ | ۳/۴ | ۰ | ۶ |
| S1 | ۰ | ۲ | ۱ | -۱ | ۰ | ۴ |
| X1 | ۱ | ۱/۴ | ۰ | ۱/۴ | ۰ | ۲ |
| S3 | ۰ | -۲ | ۰ | -۱ | ۱ | ۰ |
| Z | ۰ | ۰ | ۵/۸ | ۱/۸ | ۰ | ۱۷/۲ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۱/۲ | -۱/۲ | -۱/۲ | ۲ |
| X1 | ۱ | ۰ | -۱/۸ | ۳/۸ | ۰ | ۳/۲ |
| S3 | ۰ | ۰ | ۱ | -۲ | ۱ | ۴ |

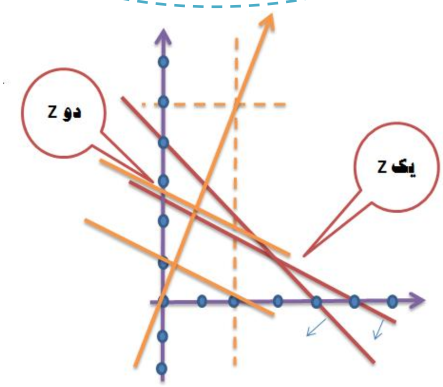
بهینه شد ولی چون صفر از سمت راست در نهایت از بین رفت تباهیدگی موقت میباشد

## ۵-چندگانه (دگرین) : در این حالت مسئله برنامه ریزی خطی دارای بی نهایت جواب بهینه و دو نقطه گوشه بهینه ای است.

$$\text{MAX } Z = 2X_1 + 4X_2$$
$$X_1 + 2X_2 \le 5$$
$$X_1 + X_2 \le 4$$
$$X1 ,\ x2 \gg 0$$

| MAX | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۲ | -۴ | ۰ | ۰ | ۰ |
| S1 | ۱ | ۲ | ۱ | ۰ | ۵ |
| S2 | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۴ |
| Z | ۰ | ۰ | ۲ | ۰ | ۱۰ |
| X2 | ۱/۲ | ۱ | ۱/۲ | ۰ | ۵/۲ |
| S2 | ۱/۲ | ۰ | -۱/۲ | ۱ | ۳/۲ |
| | | جدول بهینه شد | | | نقطه دیگر چندگانه |
| Z | ۰ | ۰ | ۲ | ۰ | ۱۰ |
| X2 | ۰ | ۱ | ۱ | -۱ | ۳ |
| X1 | ۱ | ۰ | -۱ | ۲ | ۰ |

چندگانه : باید عدد باشد ولی صفر شده



**نکته ۱ : هرگاه در جدول سیمپلکس (حتماً در جدول نهایی جدول بهینه) ضریب تابع هدف برای یک متغیر غیر پایه ای صفر شود این به معنای بهینه چندگانه است.**

**نکته ۲ : هرگاه یکی از محدودیتها موازی خط تابع هدف شود مسئله ممکن است دارای جواب بهینه چندگانه باشد.**

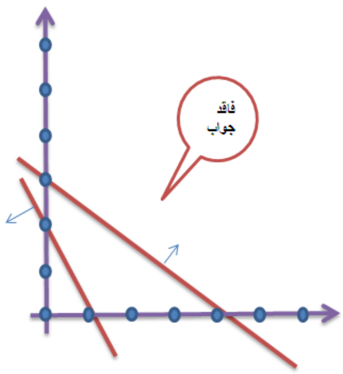
**نکته ۳ : همیشه در سطر Z تابع هدف به تعداد محدودیتها صفر وجود دارد هرگاه در جدول نهایی تعداد صفرها بیشتر از تعداد محدودیتها گردد این به معنای جواب چندگانه است توجه شود که چندگانه بودن همیشه در جدول نهایی خواهد بود.**

## ۶-جواب ندارد :

**مثال :**

$$MAX\ \ Z = 3X_1 + 2X_2$$
$$2X_1 + X_2 \leq 2$$
$$3X_1 + 4X_2 \geq 12$$
$$X1\ ,\ \ x2 \gg\ \ 0$$

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_2$ | $S_1$ | $R_1$ | R.H.S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -۳ | -۲ | 0 | 0 | M | ۰ |
| | -3M-3 | -4M-2 | M | ۰ | ۰ | -12M |
| S1 | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۲ |
| R1 | ۳ | ۴ | -۱ | ۰ | ۱ | ۱۲ |
| Z | 5M+1 | 0 | M | 4M+4 | ۰ | -4M-4 |
| X2 | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۲ |
| R1 | -۵ | ۰ | -۱ | -۴ | ۱ | ۴ |




چون $R1 \neq 0$ پس مسئله جواب ندارد

۹۱/۳/۱۱