دانشگاه علم وصنعت ایران
دانشکده مهندسی عمران

روشهای عددی در مهندسی دریا

Numerical Methods in Coastal Engineering

مدرس: محمد هادي افشار

مقدمه:

ابداع اصول و مفاهيم اوليه و معادلات حاكم (ديفرانسيل) بر فرآيندهاي مهندسي در قرون 17-18

- عدم امكان حل معادلات ديفرانسيل بدليل پيچيدگي آنها – حل معادلات ساده شده
- علوم رايج مهندسي از جمله مهندسي آب محصول مشترك تجربيات آزمايشگاهي بهمراه اصول و مفاهيم اوليه
- عدم قابليت علوم رايج براي جوابگويي به نيازهاي بشري
- عدم امكان تجربه همه پديده ها براي شكل گيري علم در زمينه مربوطه
- ضرورت كم كردن ضرايب اطمينان جهت كاهش هزينه ها
- عدم برخورداري از دقت كافي براي تحليل فرآيندهاي پيچيده

ابداع كامپيوتر در قرن 19 و فراهم آمدن امكان حل معادلات حاكم

تفاضلهاي محدود (Finite Differences)
احجام محدود (Finite Volume)
اجزاء محدود (Finite Elements)
اجزاء مرزي (Boundary Elements)

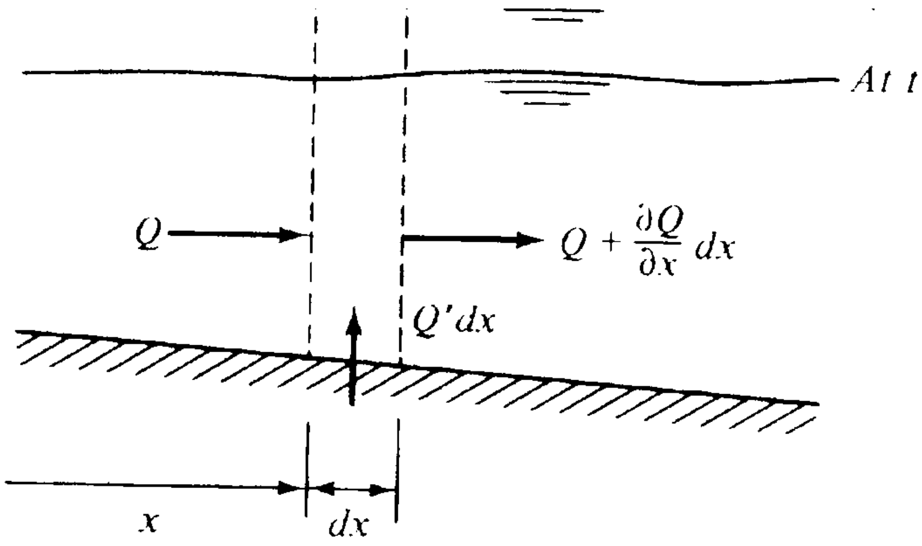
جريانهاي آبهاي كم عمق:

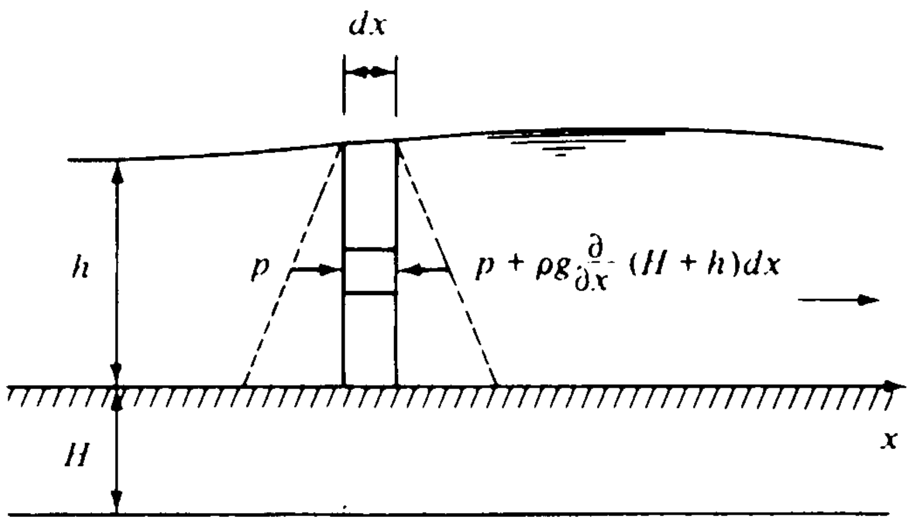
جريان در كانالها، رودخانه ها، سواحل كم عمق و غير آن.

ضرورت تعيين مشخصات سيل همچون سرعت جبهه موج و تغييرات ارتفاع موج سيل در طول رودخانه در اثر افزايش دبي رودخانه.

فرضيات:

شيب ملايم سطح آزاد آب ← صرفنظر كردن از تأثيرات فشارهاي هيدروديناميكي ← ناچيز بودن سرعت قائم ← جريان يك بعدي





پيوستگي:

$$\left[Q-\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)\right]dt+Q'dx\,dt=\frac{\partial A}{\partial t}dx\,dt$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=Q'$$

Q' دبي اضافي از طريق جريان سطحي يا زيرزميني در واحد طول

مقدار حركت:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx + \rho \left[Qu + \frac{\partial Qu}{\partial x} \right] - \rho Qu = \tfrac{1}{2} \rho\, g\, h^2 - \tfrac{1}{2} \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} dx \right)^2 + \rho\, gh\, sin\alpha\, dx - \rho\, gh\, s_f\, dx$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Qu}{\partial x} + gA\left[\frac{\partial h}{\partial x} + s_f - s \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2/A}{\partial x} + gA\left[\frac{\partial h}{\partial x} + s_f - s \right]$$

معادلات سنت و ننت (صورت A-Q)

با جايگزيني $\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}$ در معادلات و رابطه $\frac{\partial A}{\partial h} = T$

$$T\frac{\partial h}{\partial x} + U\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial u}{\partial x} - Q' = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\left[\frac{\partial h}{\partial x} + s_f - s \right] + \frac{uQ'}{A} = 0$$

براي محاسبه sf از روابط جريانهاي دائمي (رابطه مانينگ) استفاده مي شود.

معادلات ناويراستوكس:

پيوستگي

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right] dx\, dy\, dz\, dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz\, dt$$

سيال تراكم پذير

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0$$

سيال تراكم ناپذير

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial y}=\frac{\partial \rho}{\partial z}=0 \quad ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

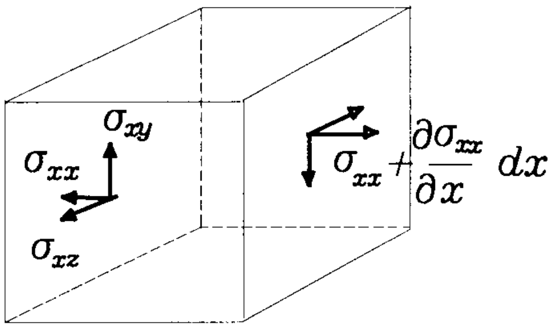
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

معادلات مقدار حركت:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\left(b_x+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\left(b_y+\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\left(b_z+\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)$$



bz : مؤلفه هاي نيروي كالبدي (نيرو در واحد جرم سيال)

σij : مولفه هاي تنش در داخل سيال

با استفاده از قانون استوكس

$$\sigma_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \sigma_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \sigma_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right] \qquad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu\left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \vartheta\nabla^2 u + \frac{1}{\rho} b_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \vartheta\nabla^2 v + \frac{1}{\rho} b_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \vartheta\nabla^2 w + \frac{1}{\rho} b_z$$

مؤلفه هاي نيروي كالبدي تحت اثر نيروي ثقل

$$b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-\rho g z) \\ \frac{\partial}{\partial y}(-\rho g z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-\rho g z) \end{Bmatrix}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(P+\rho g z\right)}{\partial x}+\vartheta\nabla^{2}u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(P+\rho g z\right)}{\partial y}+\vartheta\nabla^{2}v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(P+\rho g z\right)}{\partial z}+\vartheta\nabla^{2}w$$

تقسيم بندي معادلات حاكم

معادله ديفرانسيل: معادله اي كه رابطه بين متغير مجهول و مشتقهاي آن را با متغيرهاي مستقل تعريف مي كند. معادلات ديفرانسيل را مي توان از منظرهاي مختلفي تقسيم بندي كرد.

1- تعداد متغيرهاي مستقل: مختصات زماني و مكاني (x,y,z,t)

معادلات ديفرانسيل معمولي: يك متغير مستقل

معادلات ديفرانسيل نسبي: چند متغير مستقل

تقسيمات ديگر همچون خطي – غير خطي، همگن- ناهمگن و غيره در ذيل تقسيم بندي بالا صورت مي گيرد.

معادلات ديفرانسيل معمولي: يك متغير مستقل

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ...a_1 y + a_0 y = f(t)$$

t متغير مستقل

y(t) متغير وابسته   f (t) جمله و اداري (forcing term)

$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$ مشتق n ام y نسبت به t

مرتبه معادله ديفرانسيل: بالاترين مشتق موجود در معادله ديفرانسيل.

معادله خطي: ضرايب معادله ديفرانسيل مستقل از متغير وابسته y و مشتقات آن.
معادله شبه خطي: ضرايب معادله ديفرانسيل مستقل از بالاترين مشتق
معادله با ضرايب متغير: معادله اي خطي كه ضرايب آن تابعي از متغير مستقل است.
معادله با ضرايب ثابت: معادله اي كه ضرايب آن ثابت است.

معادله خطي مرتبه اول با ضرايب ثابت $$\frac{dy}{dt} + \alpha\, y = f(t)$$

معادله خطي مرتبه اول با ضرايب متغير $$\frac{dy}{dt} + \alpha\, ty = f(t)$$

معادله مرتبه اول غير خطي $$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \alpha\, y = f(t)$$

معادله مرتبه اول شبه خطي $$y\frac{dy}{dt} + \alpha\, y = f(t)$$

معادله همگن: همه جملات معادله ديفرانسيل تابعي از متغير وابسته و يا يكي از مشتقات آن
$(f(t) = 0)$
معادله غير همگن : $f(t) \neq 0$

صورت عمومي معادلات مرتبه اول و دوم:

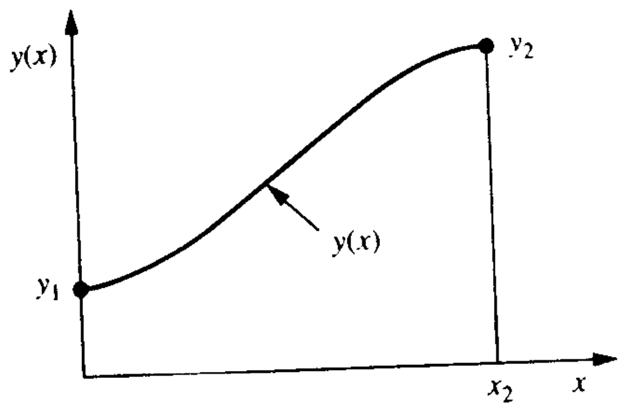
$$\frac{dy}{dt}=f(y,t) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+P(x,y)\frac{dy}{dx}+Q(x,)y=f(x)$$

- معادلات آغاز مقداري و مرز مقداري: تقسيم بندي از منظر نوع شرايط كمكي

تعداد شرايط كمكي: برابر مرتبه معادله ديفرانسيل

معادلات آغاز مقداري: شرايط كمكي در يك نقطه از حوزه مسئله تعريف مي شوند ← شرايط آغازين

معادلات مرز مقداري: شرايط كمكي در حداقل دو نقطه متفاوت تعريف مي شوند ← شرايط مرزي



معادلات آغاز مقداري داراي حوزه اي باز و معادلات مرز مقداري داراي حوزه اي بسته اند.

معادلات ديفرانسيل نسبي:

اكثر معادلات ديفرانسيل حاكم بر پديده ها از نوع نسبي اند.

اين معادلات با استفاده از فرضيات ساده كننده به معادلات معمولي تبديل مي شوند.

ضرورت مدلسازي فرآيندهاي فيزيكي نياز به حل معادلات ديفرانسيل نسبي را تشديد مي كند.

معادلات ديفرانسيل نمونه:

معادله مرتبه دوم

$$Af_{xx} + Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_x + Ef_y + Ff = G$$

معادله مرتبه اول

$$af_t + bf_x = c$$

دستگاه معادلات مرتبه اول

$$af_t + bf_x + cg_t + dg_x = e$$

$$a'f_t + b'f_x + c'g_t + d'g_x = e'$$

تقسيم بندي معادلات يفرانسيل نسبي:

معادله شبه خطي

$$Af_{xx} + Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_x + Ef_y + Ff = G$$

$$B^2 - 4AC$$

1- بيضوي **(Elliptic)** 2- سهموي **(Parabolic)** 3- هذلولوي **(Hyperbolic)**

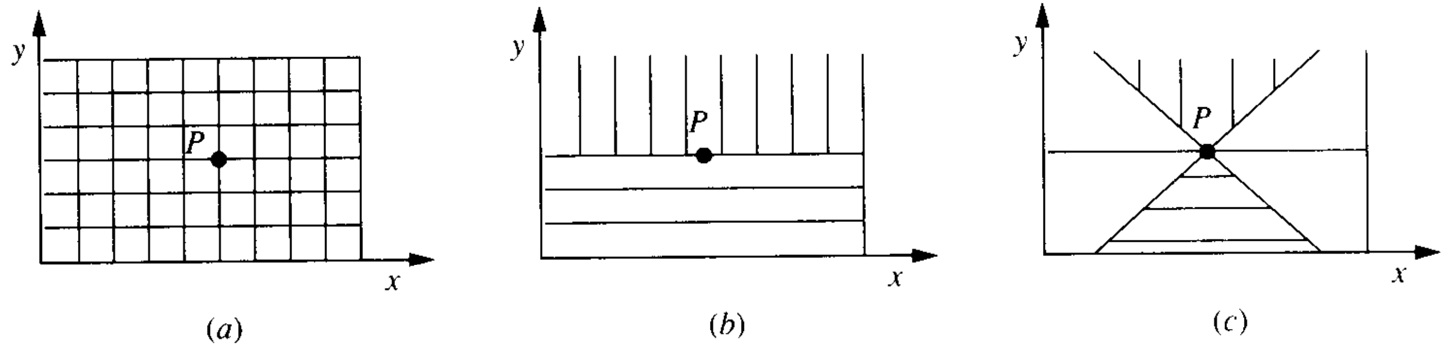
تشابه بين معادله ديفرانسيل و مقاطع مخروطي

ضرورت و اهميت تقسيم بندي:
اين تقسيم بندي بيانگر نحوه انتشار اطلاعات در حوزه فيزيكي مسئله است و معياري براي انتخاب روش حل عددي است.
1- هذ لولوي: خطوطي موسوم به خطوط مشخصه (Characteristic lines) وجود دارند كه اطلاعات مربوط به متغير مجهول f بر روي آن ها منتشر مي شود. به ويژه اگر متغير f در نقطه اي ناپيوسته باشد، اين ناپيوستگي از طريق اين خطوط به ساير نقاط حوزه منتشر مي شود.

معادله خطوط مشخصه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

دو خط مشخصه مجزا
سهموي: خطوط مشخصه مكرر دارند.
بيضوي: خطوط مشخصه ندارند.
حوزه تأثير و حوزه وابستگي (Domain of influence & dependence):
وجود خطوط مشخصه به معني وجود حوزه هايي موسوم به حوزه تأثير و وابستگي است.



معادلات ديفرانسيل مرتبه اول:

معادله ديفرانسيل مرتبه اول اسکالر

$$af_t + bf_x = c$$

بررسي امکان وجود خطوط مشخصه:

$$d(f) = f_t\,dt + f_x\,dx$$
$$c = af_t + bf_x$$

در نتيجه

$$\begin{bmatrix} a & b \\ dt & dx \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_t \\ f_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ df \end{bmatrix}$$

$f_x \,\&\, f_t$ در صورتي مي توانند ناپيوسته باشند (چند مقداره) که ماتريس ضرايب تکين باشد.

$$det\begin{bmatrix} a & b \\ f_t & f_x \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{b}{a}$$

معادلات مرتبه اول همواره داراي خطوط مشخصه و از نوع هذلولوي اند.

دستگاه معادلات ديفرانسيل مرتبه اول:

$$af_t + bf_x + cg_t + dg_x = e$$

$$a'f_t + b'f_x + c'g_t + d'g_x = e'$$

با فرض

$$A = (ac' - a'c) \qquad B = (ad' - a'd + bc' - cb') \qquad C = (bd' - b'd)$$

از همان شرط معادلات مرتبه دوم پيروي مي كند.

معادلات ديفرانسيل نمونه در مسائل مهندسي آب:

1.معادله پواسون: **(Poisson equation)**

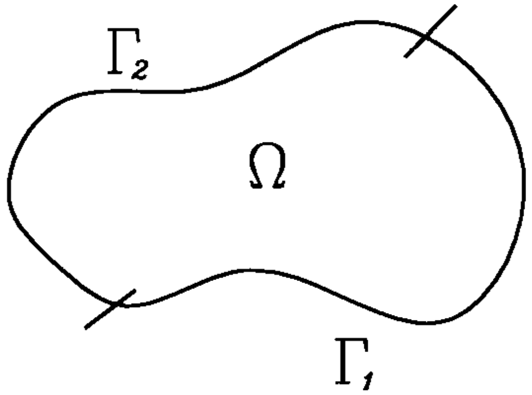
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = f$$

معادله تراوش: φ ارتفاع هيدروليكي، kx & ky ضرايب نفوذپذيري f : منبع جريان آب

معادله هدايت حرارت: φ درجه حرارت، kx & ky ضرايب هدايت حرارتي f : منبع توليد حرارت

شرايط مرزي:



شرط مرزي ديريچله: $\varphi = \bar{\varphi}$ $\quad \Gamma_\varphi$

شرط مرزي نيومن (مشتقي): $-k_n \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \bar{q}$ $\quad \Gamma_q$

شرط مرزي مختلط: $-k_n \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} + \alpha(\varphi - \bar{\varphi}) = \bar{q}$ $\quad \Gamma_M$

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma$ و $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \phi$

حداكثر دو شرط از شرطهاي بالا را مي توان بر روي مرزها تعريف كرد.

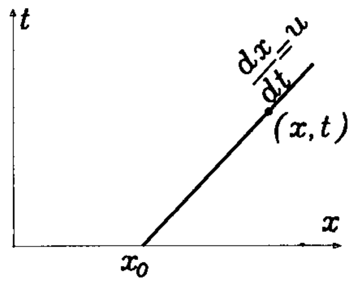
مسئله حتما" بايد داراي شرايط مرزي ديريلچه باشد (شرط مرزي ضروري)

معادله جابه جايي خالص: (Pure Convection)

$$f_t + u f_x = 0$$

u : سرعت جابجايي

معادله اي هذلولوي با خط مشخصه $\dfrac{dx}{dt} = u$



معادله ديفرانسيل معمولي بر روي خطوط مشخصه

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,t) = \text{ثابت}$$

شرايط آغازين و شرايط مرزي:

معادله اي مرتبه اول بر حسب دو مختصات مستقل (مكان و زمان) و نيازمند شرايط مرزي و آغازين است.

تعريف شرايط آغازين بديهي و روشن است

$$f(x,0)=\bar{f}(x)$$

معادله جابجايي خالص

$$f_t + u f_x = 0 \qquad \Gamma_L \le x \le \Gamma_R$$

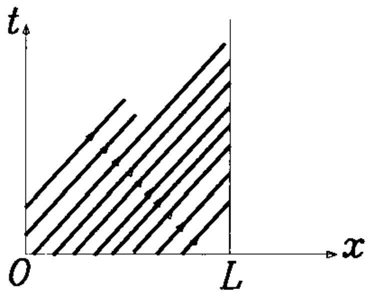
1- نيازمند شرط مرزي ديريچله در يك نقطه از نقاط مرزي

2- با فرض مثبت بودن u، شرط مرزي خوش تعريف در نقطه .

در حالت كلي شرط مرزي در مرز ورودي تعريف مي شود.

حوزه مسئله: باز

روش حل: رژه در زمان

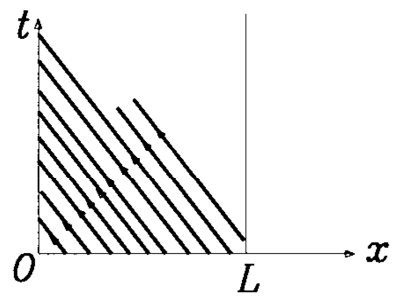


$f=\bar{f}$ $\quad \Gamma_L$

$f=$ آزاد $\quad \Gamma_R$

$f=\bar{f}$ $\quad \Gamma_R$

$f=$ آزاد $\quad \Gamma_L$



معادله ديفرانسيل شبه خطي:

Γ_L: $u_L > 0$ → $f = \bar{f}$ ؛ $u_L < 0$ → $f =$ آزاد

Γ_R: $u_R > 0$ → $f =$ آزاد ؛ $u_R < 0$ → $f = \bar{f}$

معادله پخش **(diffusion)**: معادله اي سهموي

$$f_t = \alpha f_{xx}$$

α : ضريب پخشودگي (diffusion coefficient)

مرتبه اول در زمان: نيازمند شرط آغازين
مرتبه دوم در مكان: نيازمند دو شرط مرزي در مرزهاي حوزه
شرط مرزي از نوع شرايط مرزي مسائل بيضوي
حوزه فيزيكي : باز
روش حل: روش رژه اي در زمان

معادله جابه جايي – پخش:

$$f_t + u f_x = \alpha f_{xx}$$

رفتار معادله تابعي از سرعت جابه جايي و ضريب پخشودگي است.

معادله موج: معادله مرتبه دوم هذلولوي:

$$f_{tt} = a^2 f_{xx}$$

$$f_t + a\,g_x = 0$$

$$g_t + af_x = 0$$

با معرفي تابع برداري $\varphi = \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix}$

$$\varphi_t + A\varphi_x = 0 \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

دو خط مشخصه با شيبهاي مخالف

$$\frac{dx}{dt} = \pm a$$

انتشار اطلاعات در هر دو جهت مثبت و منفي

شرايط آغازين و شرايط مرزي:

شرايط آغازين بديهي و روشن

شرايط مرزي:

معادله نيازمند دو شرط مرزي

در هر يك از مرزها تنها يك شرط مرزي

$$f = \bar{f} \qquad \Gamma_L$$

$$g = \bar{g} \qquad \Gamma_R$$

روش تفاضلهاي محدود: مبتني بر بسط سري تيلور

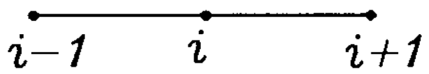
$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta x\, f'(x_0)+\frac{\Delta x^2}{2}f''(x_0)+\dots\dots\dots\frac{\Delta x^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+R_{n+1}$$

جمله باقيمانده

$$R_{n+1}=\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\zeta) \qquad x_0<\zeta<x_0+\Delta x$$

حذف جمله R_{n+1} به بسط سري تيلور بريده شده منجر مي شود كه در اين صورت R_{n+1} خطاي بريدن ناميده مي شود. با كاهش Δx خطاي بريدن متناسب با Δx^{n+1} كاهش مي يابد و لذا مرتبه خطا $O(\Delta x)^{n+1}$ خواهد بود.

تقريب تفاضلهاي محدود مشتق مرتبه اول:



$$f_i = f(x_i)$$

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left.\frac{df}{dx}\right|_i + O(\Delta x^2)$$

تقريب تفاضلهاي پيشرو (forward difference)

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \qquad O(\Delta x)$$

بروشي مشابه

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left.\frac{df}{dx}\right|_i + O(\Delta x^2)$$

تقريب تفاضلهاي پسرو (backward difference)

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \qquad O(\Delta x)$$

تقريب مرتبه دوم مشتق اول:

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left.\frac{df}{dx}\right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i + O(\Delta x^3)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left.\frac{df}{dx}\right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i - O(\Delta x^3)$$

پس از تفريق داريم

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \qquad O(\Delta x^2)$$

تقريب تفاضلهاي مركزي (Central difference).

تقريب مشتق مرتبه دوم:

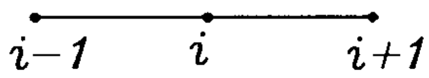
$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left.\frac{df}{dx}\right|_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_i + \frac{\Delta x^3}{3!}\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_i + O\left(\Delta x^4\right)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left.\frac{df}{dx}\right|_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_i - \frac{\Delta x^3}{3!}\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_i + O\left(\Delta x^4\right)$$

با جمع روابط بالا

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \qquad O\left(\Delta x^2\right)$$

تقريب يك طرفه مشتقات اول و دوم: (One sided difference)



مورد نياز براي اعمال شرايط مرزي:

$$\left.\frac{d\ f}{dx}\right|_i = Af_i + Bf_{i+1} + Cf_{i+2}$$

A و B و C چنان تعريف مي شوند تا تقريب بالا از مرتبه $O\left(\Delta x^2\right)$ باشد

بسط f_{i+2} و f_{i+1} تا مرتبه دوم و جايگذاري

$$\left.\frac{d\ f}{dx}\right|_i = f_i(A+B+C) + (B+2C)\Delta x\left.\frac{df}{dx}\right|_i + \left[B/2 + 2c\right]\Delta x^2\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_i + (B+C) \qquad O\left(\Delta x^3\right)$$

بنابراين

$$A + B + C = 0 \qquad \frac{B}{2} + 2C = 0 \qquad B + 2/C = 1/\Delta x$$

تقريب يکطرفه پيشرو

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta x} \qquad O\left(\Delta x^2\right)$$

بروشي مشابه

تقريب يکطرفه پسرو

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{3f_i + 4f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta x} \qquad O\left(\Delta x^2\right)$$

تقريب يکطرفه مشتق دوم:

تقريب يکطرفه پيشرو

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_i = \frac{f_i + 2f_{i+1} - f_{i+2}}{\Delta x^2} \qquad O\left(\Delta x\right)$$

تقريب يکطرفه پسرو

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_i = \frac{f_i + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{\Delta x^2} \qquad O\left(\Delta x\right)$$

روشهاي تفاضلهاي محدود

گام اول: گسسته سازي **(discretization)** حوزه فيزيكي:
انتخاب نقاطي بر روي حوزه موردنظر – مجموعه نقاط موسوم به شبكه تفاضلهاي محدود – هر يك از نقاط بنام نقطه شبكه

فواصل نقاط يكسان ← شبكه يكنواخت (uniform mesh or grid)
فواصل غير يكسان ← شبكه غير يكنواخت (non – uniform mesh or grid)

گام دوم: گسسته سازي معادله ديفرانسيل و شرايط مرزي
اعمال معادله ديفرانسيل در نقاط شبكه، معمولا" نقاط داخلي، و اعمال شرايط مرزي در نقاط مرزي

گام سوم: تشكيل معادلات تفاضلهاي محدود
جايگزيني مشتقات موجود در معادلات و شرايط مرزي با روابط تفاضلهاي محدود مناسب و بدست آوردن معادلاتي جبري بر حسب متغير مجهول

گام چهارم: حل معادله (دستگاه معادلات) تفاضلهاي محدود
حل معادله يا معادلات از طريق روشهاي مناسب (روش مستقيم يا تكراري)

روش حل معادلات ديفرانسيل معمولي

معادله مرتبه اول (آغاز مقداري)

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

معادله مرتبه دوم (مرز مقداري)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + P\frac{d\varphi}{dx} + Q = f$$

مسائل آغاز مقداري مرتبه اول:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad y(t_0) = \bar{y}$$

حوزه مسئله حوزه اي باز است. روش حل گام زنی با شروع از شرط آغازين

$$y(t_0) = \bar{y}$$

رابطه بازگشتي (recursive relation): رابطه اي كه مقدار مجهول y را بر حسب مقدار آن در نقطه يا نقاط قبلي تعريف مي كند.

روش اولر صريح **(explicit Euler)** :

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|^n = f^n \qquad f^n = f(t_n, y^n) \quad y^n = y(t_n)$$

تقريب تفاضلهاي پيشرو

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = f^n \qquad O(\Delta t) \qquad \Delta t = t_{n+1} - t_n$$

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t\, f^n \qquad O(\Delta t^2) \qquad n = 0,1,2......$$

روش صريح: نيازمند حل معادله جبري خطي
روش تك نقطه اي: محاسبه yn+1 مستلزم استفاده از يك نقطه yn
تك مرحله اي: حل معادله جبري در يك مرحله

روش اولر ضمني **(implicit Euler)**:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|^{n+1} = f^{n+1}$$

تقريب تفاضلهاي پسرو

$$\frac{y^{n+1} - y^{n}}{\Delta t} = f^{n+1} \qquad O(\Delta t)$$

$$y^{n+1} = y^{n} + \Delta t \ f^{n+1} \qquad O(\Delta t^2)$$

روش ضمني، تك نقطه اي، تك مرحله اي

خطاي موضعي و خطاي كلي: **(Local & global error)**

خطاي موضعي روش اولر صريح از مرتبه $O(\Delta t^2)$

خطاي حاصل از روش در گام n ام = مجموع خطاهاي موضعي گامهاي قبلي

$$y^{n} = y^{0} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(y^{i+1} - y^{i}\right) \qquad n \times O(\Delta t^2)$$

$$n = \frac{t_n - t_0}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \text{خطاي كلي} = (t_n - t_0)\, O(\Delta t) \approx O(\Delta t)$$

مرتبه خطاي كلي همواره يكي از كمتر از مرتبه خطاي موضعي است (معادلات مرتبه اول)

روشهاي مرتبه بالاتر:

دقت مناسب روش هاي مرتبه اول مستلزم استفاده از Δt هاي بسيار كوچك

براي افزايش دقت مي توان از روشهاي مرتبه بالاتر استفاده كرد

ابداع روشهاي مرتبه بالاتر از طريق تقريب تفاضلهاي محدود مرتبه بالاتر براي مشتق اول

روشهاي مرتبه بالاتر:

روشهاي چند نقطه اي (Multi point methods)

روشهاي چند مرحله اي (multistep methods)

روش اولر اصلاح شده يا حدس و اصلاح – (modified Euler or Predictor – Corrector method) :

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \qquad y(t_0) = \bar{y}$$

گسسته سازي در زمان $n + \frac{1}{2}$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|^{n+1/2} = f^{n+1/2}$$

تقريب تفاضلهاي مركزي

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = f^{n+1/2} \qquad O(\Delta t^2)$$

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t\, f^{n+1/2} \qquad O(\Delta t^2) \qquad f^{n+1/2} = f(t_{n+1/2}, y^{n+1/2})$$

معادله اي شامل دو مجهول

با جايگزيني $f^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(f^{n} + f^{n+1}\right)$

$$y^{n+1} = y^{n} + \frac{1}{2}\Delta t\left(f^{n} + f^{n+1}\right)$$

روشي ضمني در صورت غير خطي بودن تابع f
دقت بالاتر و هزينه حل بيشتر

روش حدس و اصلاح:

روش حدس (اولر صريح) $\bar{y}^{n+1} = y^{n} + \Delta t\, f^{n}$

مرحله اصلاح (اولر ضمني) $y^{n+1} = y^{n} + \frac{1}{2}\Delta t\left(f^{n} + \bar{f}^{n+1}\right)$

روشي صريح و دو مرحله اي

خانواده روشهاي رانگ كوتا **(runge – Cutla family)** :

براي دقتهاي بالاتر مي توان از خانواده روشهاي رانگ كوتا استفاده كرد.
روش رانگ كوتاي مرتبه چهارم يكي از روشهاي متداول

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad y(t_0) = \bar{y}_0$$

معادله تفاضلهاي محدود

$$y^{n+1} = y^n + \Delta y$$

$$\Delta y = C_1\Delta y_1 + C_2\Delta y_2 + C_3\Delta y_3 + C_4\Delta y_4$$

$$\Delta y_1 = \Delta t \; f(t_n, y^n) \qquad \Delta y_2 = f(t_n + \alpha_2 \;,\; y^n + \beta_2)$$

$$\Delta y_3 = \Delta t \; f(t_n + \alpha_3, y^n + \beta_3) \qquad \Delta y_4 = f(t_n + \alpha_4 \;,\; y^n + \beta_4)$$

مقادير پارامترها بگونه اي انتخاب مي شود كه رابطه تفاضلهاي محدود بالا معادل بسط سري تيلور مرتبه چهارم y^{n+1} باشد.

$$y^{n+1} = y^n + \tfrac{1}{6}(\Delta y_1 + 2\Delta y_2 + 2\Delta y_3 + \Delta y_4)$$

$$\Delta y_1 = \Delta t \; f(t_n, y^n) \qquad \Delta y_2 = \Delta t \, f\left(t_n + \Delta t/2,\; y^n + \frac{\Delta y_1}{2}\right)$$

$$\Delta y_3 = \Delta t \; f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y^n + \frac{\Delta y_2}{2}\right) \qquad \Delta y_4 = \Delta t \, f(t_n + \Delta t \;,\; y^n + \Delta y_3)$$

روشي تك نقطه اي، صريح و چهار مرحله اي با خطاي موضعي $O(\Delta t^5)$ و خطاي كلي $O(\Delta t^4)$

سازگاري، پايداري و همگرايي **(Consistency, Stability & Convergence)** :

اعتبار نتايج حاصل از بكارگيري روش تفاضلهاي محدود منوط به تأمين خواص سازگاري، پايداري و همگرايي است.

سازگاري: تفاوت بين معادله ديفرانسيل و معادله تفاضلهاي محدود (خطاي بريدن) با كاهش اندازه شبكه به سمت صفر ميل كند.

پايداري: طرح وقتي پايدار است كه ناپايدار نباشد.

ناپايداري: جواب حاصل از معادله تفاضلهاي محدود عليرغم كراندر بودن جواب دقيق بي كران باشد.

همگرايي: جواب حاصل از معادلات تفاضلهاي محدود با ميل اندازه شبكه به سمت صفر به سمت جواب دقيق ميل كند. روشهاي سازگار و پايدار همواره همگرا هستند.

كنترل سازگاري: سازگاري را مي توان با وارسي خطاي بريدن كنترل كرد.

خطاي بريدن را مي توان با استفاده از بسط تيلور همه جملات معادله تفاضلهاي محدود حول نقطه اي نمونه بدست آورد.

$$\frac{dy}{dt} + \alpha\, y = f(t)$$

روش اولر صريح

$$y^{n+1} = (1 - \alpha\, \Delta t) y^n + \Delta\, t\, f^n$$

بسط y^{n+1}

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \left.\frac{dy}{dt}\right|^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|^n$$

با جايگذاري و حذف زيروند

$$\frac{dy}{dt} + \alpha y = f - \frac{\Delta t}{2} \frac{d^2y}{dt^2}$$

خطاي بريدن $\frac{\Delta t}{2} \frac{d^2y}{dt^2}$ با ميل Δt به سمت صفر ميل خواهد كرد.

تحليل پايداري:

مفهوم ناپايداري: بي كران بودن جواب حاصل از روش تفاضلهاي محدود عليرغم كران دار بودن جواب دقيق

مثال:

$$\frac{dy}{dt} + \alpha y = 0 \qquad y^0 = 1 \qquad \alpha \geq 0$$

جواب دقيق $y = e^{-\alpha t}$

روش اولر صريح

$$y^{n+1} = (1 - \alpha \Delta t) y^n$$

پايداري روشهاي تفاضلهاي محدود را مي توان با استفاده از روش ضريب تقويت (amplification Factor) وارسي كرد.

$$y^n = G y^{n-1}$$

در نتيجه

$$y^n = G^n \bar{y}^0$$

براي پايداري

$$|G| \leq 1$$

مثال:

$$\frac{dy}{dt} + \alpha y = 0$$

روش اولر صريح

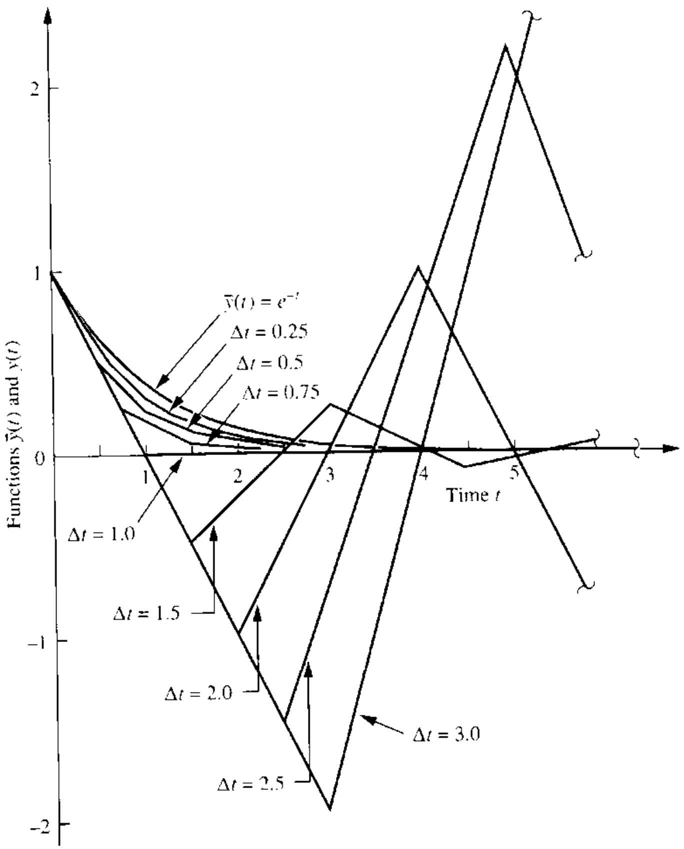
$$y^{n+1} = (1 - \alpha\,\Delta t)\,y^{n}$$

براي پايداري

$$-1 \le 1 - \alpha\,\Delta t \le 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\,\Delta t \le 2$$

$$\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \le \frac{2}{\alpha}$$

اولر صريح پايدار مشروط



روش اولر ضمني:

$$y^{n+1} = y^{n} - \alpha\,\Delta t\, y^{n+1}$$

$$y^{n+1} = \frac{1}{1 + \alpha\,\Delta t}\,y^{n}$$

$$-1 \le \frac{1}{1 + \alpha\,\Delta t} \le 1$$

با فرض $\alpha > 0$ همواره صادق است.

روش اولر ضمني روشي پايدار غير مشروط است.

مسائل مقدار مرزي مرتبه دوم (Second order B.V.P):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+P\frac{d\varphi}{dx}+Q\varphi=f$$

حوزه مسئله حوزه اي بسته است. شرايط كمكي مسئله از نوع ديريچله است كه در دو نقطه مجزا (مرز حوزه) تعريف مي شود.

$\varphi=\overline{\varphi}$ شرط مرزي ديريچله

$\frac{d\varphi}{dx}=\overline{q}$ شرط مرزي مشتقي (نيومن)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+P\frac{d\varphi}{dx}+Q\varphi=f \qquad a\le x\le b$$

$$\varphi=\overline{\varphi}_a \qquad x=a$$

$$\varphi=\overline{\varphi}_b \qquad x=b$$

گسسته سازي در نقاط داخلي

$$\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i+P\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i+Q\varphi|_i=f_i \qquad i=2,3,....,n-1$$

جايگزيني مشتقهاي دوم و اول با روابط تفاضلهاي مركزي

$$\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{\Delta x^2}+P_i\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2\Delta\Delta}+Q_i\varphi_i=f_i \qquad O\left(\Delta x^2\right)$$

مرتب سازي (معادله نمونه)

$$\left(1-\frac{\Delta x}{2}P_i\right)\varphi_{i-1}+\left(-2+\Delta x^2 Q_i\right)\varphi_i+\left(1+\frac{\Delta x}{2}P_i\right)\varphi_{i+1}=\Delta x^2 f_i \quad O\left(\Delta x^4\right)$$

سه مجهول $\varphi_i , \varphi_{i+1}$ و φ_{i-1} و عدم امکان حل معادله.

منظور کردن معادله نمونه در تمامي نقاط داخلي شبکه $i=2,3,\ldots n-1$ به دستگاهي n-2 معادله اي و n مجهولي منجر مي شود.

با منظور کردن شرايط مرزي $\varphi_1=\bar{\varphi}_a$ $\varphi_n=\bar{\varphi}_b$

دستگاه معادلات n معادله و n مجهولي

$$\underline{\underline{K}}\ \underline{\varphi}=\underline{F}$$

$$K=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ L_2 & D_2 & R_2 & & & \\ & & & & & \\ & & L_{n-1} & D_{n-1} & R_{n-1} & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}\quad \varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots \\ \varphi_{n-}\\ \varphi_n\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}\bar{\varphi}_a\\ \\ \Delta x^2\ f_i\\ \\ \bar{\varphi}_b\end{bmatrix}$$

$$R_i=\left(1+\frac{\Delta x}{2}P_i\right)\qquad D_i=\left(-2+\Delta x^2 Q_i\right)\qquad L_i=\left(1-\frac{\Delta x}{2}P_i\right)$$

متقارن و سه قطري

شرايط مرزي نيومن:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + P\frac{d\varphi}{dx} + Q\varphi = f$$

$$\varphi = \overline{\varphi} \qquad x = a$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \overline{q} \qquad x = b$$

رابطه تفاضلهاي محدود نمونه

$$\left(1 - \frac{\Delta x}{2}P_i\right)\varphi_{i-1} + \left(-2 + \Delta x^2 Q_i\right)\varphi_i + \left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right)\varphi_{i+1} = \Delta x^2 f_i \qquad i = 2,\ldots n-1$$

شرط مرزي ديريچله

$$\varphi_1 = \overline{\varphi}$$

معادله و n مجهول. معادله اضافي از طريق گسسته سازي شرط مرزي نيومن

تقريب مرتبه اول:

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_n = \overline{q}$$

تقريب تفاضلهاي پسرو

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = \overline{q}\Delta x \qquad O(\Delta x)$$

n معادله و n مجهول. دستگاه معادله كماكان سه قطري

دقت تقريب شرط مرزي نيومن از مرتبه $O(\Delta x)$ $\leftarrow$ كاهش دقت محاسبات

تقريب مرتبه دوم:

تقريب تفاضلهاي يکطرفه مرتبه دوم

$$\frac{3\varphi_n - 4\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}}{2\Delta x} = \overline{q} \qquad O\left(\Delta x^2\right)$$

$$3\varphi_n - 4\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} = 2\Delta x\,\overline{q} \quad O\left(\Delta x^3\right)$$

از بين رفتن خاصيت سه قطري ← افزايش هزينه محاسباتي

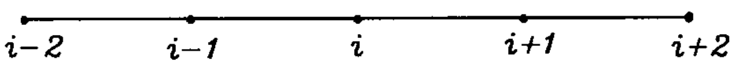
بازيافت خاصيت سه قطري از طريق ترکيب معادله n ام با يکي از معادلات ديگر

روشهاي مرتبه بالاتر:

افزايش مرتبه خطاي تقريب مشتقهاي اول و دوم.

روش پنج نقطه اي:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + P\frac{d\varphi}{dx} + Q\varphi = f$$



بسط تيلور مرتبه پنجم φ_{i+2} ,φ_{i+1} ,φ_{i-1} ,φ_{i-2} حول i

$$\varphi_{i\pm1} = \varphi_i \pm \Delta x \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2}\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i \pm \frac{(\Delta x)^3}{6}\left.\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right|_i + \frac{(\Delta x)^4}{24}\left.\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right|_i \pm \frac{(\Delta x)^5}{120}\left.\frac{d^5\varphi}{dx^5}\right|_i + O\left(\Delta x^6\right)$$

$$\varphi_{i\pm2} = \varphi_i \pm 2\Delta x \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2}\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i \pm \frac{(2\Delta x)^3}{6}\left.\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right|_i + \frac{(2\Delta x)^4}{24}\left.\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right|_i \pm \frac{(2\Delta x)^5}{120}\left.\frac{d^5\varphi}{dx^5}\right|_i + O\left(\Delta x^6\right)$$

بسطها را تا مرتبه چهارم آنها در نظر بگيريد
چهار معادله با چهار مشتق مجهول
حذف سه مشتق دوم و سوم و چهارم

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i = \frac{-\varphi_{i+2} + 8\varphi_{i+1} - 8\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}}{12\ \Delta x} \qquad O\left(\Delta x^4\right)$$

بسطها را بطور كامل در نظر بگيريد.
چهار معادله با چهار مشتق مجهول
حذف سه مشتق سوم، چهارم و پنجم

$$\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i = \frac{-\varphi_{i+2} + 16\varphi_{i+1} - 30\,\varphi_i + 16\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}}{12\ \Delta x^2} \qquad O\left(\Delta x^4\right)$$

جايگزيني مشتقها به روش پنج نقطه اي زير منجر مي شود.

$$-\left(1 + \Delta x\, P_i\right)\varphi_{i+2} + \left(16 + 8\,\Delta x\, P_i\right)\varphi_{i+1} - \left(30 + 8\,\Delta x\, P_i - 12\,\Delta x^2\, Q_i\right)\varphi_i + \left(16 + 8\Delta x\, P_i\right)\varphi_{i-1} - \left(1 + \Delta x\, P_i\right)\varphi_{i-2} = 12\Delta x^2\, f$$

منظور كردن معادله در نقاط $i = 3,4,\ldots n\text{-}2$ به دستگاهي متشكل از n-4 معادله و n مجهول منجر مي شود.

دو معادله مربوط به شرايط مرزي ديريچله در نقاط $i = 1 \quad \& \quad i = n$

دو معادله باقيمانده از طريق گسسته سازي يكطرفه معادله ديفرانسيل در نقاط $i = 2 \quad \& \quad i = n\text{-}1$

روش حل معادلات ديفرانسيل نسبي:

مسائل تعادلي (معادلات ديفرانسيل بيضوي) (equilibrium Problem)

مسائل انتشاري (معادلات ديفرانسيل سهموي و هذلولوي) (Propagation Problem)

مسائل تعادلي- (معادلات ديفرانسيل بيضوي):

بيانگر مسائل مرز مقداري – حوزه بسته – بدون خطوط مشخصه – همه حوزه مسئله نمايشگر حوزه تأثير و وابستگي

پيوستگي جواب در همه حوزه و عدم وجود ناپيوستگي – نيازمند شرايط مرزي در همه مرزهاي حوزه

انواع شرايط مرزي (ديريچله - نيومن- مختلط)

مثال: معادله حاكم بر تراوش دايمي

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + q = 0 \qquad \varphi = h + \frac{P}{\wp}$$

$$1) \quad \varphi = \overline{\varphi} \qquad \Gamma_{\varphi}$$

$$2.1) \quad \mathrm{k_n} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{n}} = \overline{\mathrm{q}} \qquad \Gamma_{\mathrm{q}}$$

$$2.2) \quad -\mathrm{k_n} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{n}} + \alpha(\varphi - \overline{\varphi}) = \overline{\mathrm{q}} \qquad \Gamma_{\mathrm{M}}$$

روش تفاضلهاي محدود:

1- گسسته سازي حوزه فيزيكي: زسم خطوطي به موازات محورها و تشكيل شبكه تفاضلهاي محدود

$$(i,j)\ ;\ i=1,2....I \quad \&\quad j=1,2,...J \qquad \Delta x = x_{i+1}-x_i \qquad \Delta y = y_{j+1}-y_j$$

- گسسته سازي معادله ديفرانسيل (معادله پواسون)

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|_{i,j}+\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{i,j}=f_{i,j}$$

- تشكيل معادلات تفاضلهاي محدود:

جايگزيني مشتقهاي دوم با روابط تفاضلهاي محدود مركزي

$$\left.\varphi_{xx}\right|_{i,j}=\left[\left(\varphi_{xx}\right)_i\right]_j=\left.\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{\Delta x^2}\right|_j=\frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2}\qquad O\left(\Delta x^2\right)$$

$$\left.\varphi_{yy}\right|_{i,j}=\left[\left(\varphi_{yy}\right)_j\right]_i=\left.\frac{\varphi_{j+1}-2\varphi_j+\varphi_{j-1}}{\Delta y^2}\right|_i=\frac{\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2}\qquad O\left(\Delta y^2\right)$$

$$\frac{\varphi_{i+1,j}-2\,\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{\varphi_{i,j+1}-2\,\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2}=f_{i,j}\qquad i=2,3,......I-1$$

$$j=2,3,......J-1$$

دستگاه معادله اي متشكل از (J-2) (I-2) معادله و I×J مجهول

شرايط مرزي: ديريچله

$$\varphi(1,j)=\overline{\varphi}_1 \qquad j=1,2......J$$

$$\varphi(I,j)=\overline{\varphi}_2 \qquad J=1,2....J$$

$$\varphi(i,1)=\overline{\varphi}_3 \qquad i=1,2....I$$

$$\varphi(i,J)=\overline{\varphi}_4 \qquad i=1,2....I$$

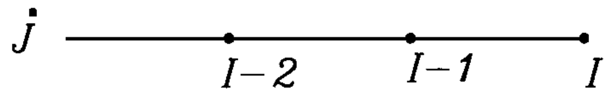
با منظور كردن شرايط مرزي دستگاهي متشكل از (J-2) (I-2) معادله و (J-2) (I-2) مجهول

$$K\varphi = f-\overline{\varphi}$$

$$k=\begin{bmatrix} -4 & 1 & & 1 & \\ 1 & -4 & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ 1 & & 1 & -4 & 1 \\ & 1 & & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad \varphi=\begin{bmatrix} \varphi_{2,2} \\ \varphi_{3,2} \\ \varphi_{I-1,2} \\ \varphi_{2,3} \\ \varphi_{I-1,J-1} \end{bmatrix} \qquad f=\begin{bmatrix} f_{2,2} \\ . \\ . \\ . \\ f_{I-1,J-1} \end{bmatrix}$$

$\overline{\varphi}$ بردار ناشي از اعمال شرايط مرزي و كاهش ابعاد مسئله از I × J به (J-2) (I-2) است.

شرايط مرزي نيومن: $I \times (J-1)$ معادله موجود است.



$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{I,j} = \bar{q} \qquad j = 1,2.......J$$

J معادله اضافي با استفاده از گسسته سازي شرط مرزي نيومن
تفاضلهاي پسرو براي مشتق اول

$$\frac{\varphi_{I,j} - \varphi_{I-1,j}}{\Delta x} = \bar{q} \qquad O(\Delta x) \qquad j = 1,2....J$$

معادله ديفرانسيل از مرتبه $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$

شرايط مرزي از مرتبه $O(\Delta x)$

بنابر اين جوابها از مرتبه $O(\Delta x)$

براي حفظ سازگاري تقريب مي توان از تقريب مرتبه دوم (يكطرفه) استفاده كرد.

$$\frac{-\varphi_{I-2,j} + 4\varphi_{I-1,j} - 3\varphi_{I,j}}{2\,\Delta x} = \bar{q} \qquad O(\Delta x^2)$$

حل معادلات ديفرانسيل مسائل انتشاري
(معادلات سهموي و هذلولوي)
معادلات نمونه:

معادله پخش $f_t = \alpha f_{xx}$

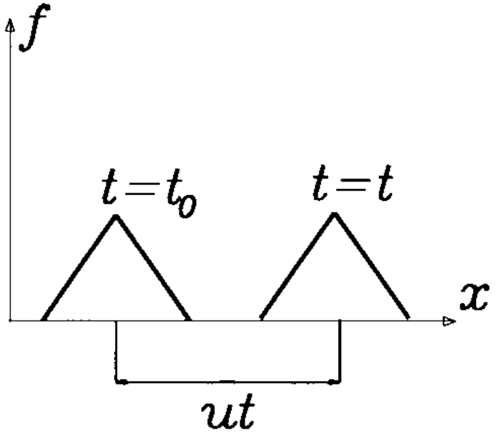
معادله جابه جايي $f_t + u f_x = 0$

معادله جابه جايي – پخش $f_t + u f_x = \alpha f_{xx}$

معادله موج $f_{tt} + a^2 f_{xx} = 0$

جابه جايي **(Convection)** و پخش **(diffusion)** و پراكندگي **(dispersion)**:
اشكال سه گانه انتشار در طبيعت
رفتار خطاي بريدن (Truncation error) مشابه رفتار پخش و پراكندگي است.

جابه جايي:



$$f_t + u\, f_x = 0$$

$$\frac{df}{dt} = 0 \qquad \frac{dx}{dt} = u$$

توزيع اوليه $g(x_0)$ بدون تغيير شكل و با سرعت u در جهت +x منتشر مي شود

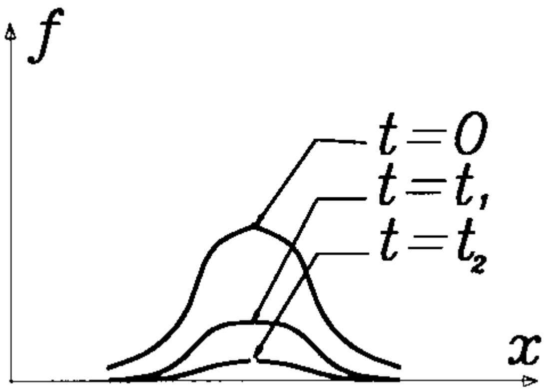
پخش (diffusion):

$$f_t = \alpha\, f_{xx}$$

جواب دقيق معادله ديفرانسيل

$$f(x,t) = c\, e^{-\alpha k^2 t}\, e^{i k x}$$

عدم انتشار مولفه فوريه e^{ikx} و كاهش دامنه آن $ce^{-\alpha k^2 t}$ با زمان به صورت نمايي.



پراكندگي (dispersion):

$$f_t = \beta f_{xxx}$$

جواب دقيق معادله ديفرانسيل

$$f(x,t) = ce^{ik\left(x-\beta k^2 t\right)}$$

انتشار مولفه فوريه e^{ikx} با سرعت βk^2 . مولفه هاي با عدد موج بالاتر سريعتر منتشر مي شوند.

تغيير شكل توزيع اوليه در زمان

روشهاي تفاضلهاي محدود براي حل مسائل انتشاري

حوزه (x,t) مورد نظر بوسيله خطوطي موازي با محورهاي t , x تقسيم بندي شده و سپس با جايگزيني مشتقهاي موجود در معادله ديفرانسيل بوسيله روابط تفاضلهاي محدود مناسبي، معادلات تفاضلهاي محدود چنان بدست مي آيد تا بتوان مقدار تابع مجهول در زمان n+1 را با استفاده از مقادير معلوم در زمان n بدست آورد.

معادله غير دائمي پخش يك بعدي

$$f_t = \alpha f_{xx}$$

$$f_t\big|_{i,n} = \alpha f_{xx}\big|_{i,n}$$

تقريب تفاضلهاي پيشرو براي مشتق اول و تقريب تفاضلهاي مركزي براي مشتق دوم

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{f_{i+1}^n - 2 f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

با مرتب كردن رابطه

$$f_i^{n+1} = f_i^n + d\left(f_{i+1}^n - 2 f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

عدد پخش (Diffusion Number)

$$d = \alpha \Delta t / \Delta x^2$$

روش فوق بنام FTCS (Forward-Time ,Centered- Space) ناميده مي شود و نمودار يك روش صريح مي باشد.

معادله جابه جايي خالص

$$f_t + u\, f_x = 0$$

منظور نمودن معادله فوق در نقطه (i,n+1)

$$f_t \Big|_i^{n+1} + u\, f_x \Big|_i^{n+1} = 0$$

تقريب تفاضلهاي پسرو براي مشتق زماني و تقريب تفاضلهاي مركزي براي مشتق مكاني

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

و لذا معادله تفاضلهاي محدود بصورت زير حاصل مي گردد.

$$f_i^{n+1} + \frac{c}{2}\left(f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}\right) = f_i^n$$

كه در آن $c = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ عدد جا به جايي (Convection Number) خوانده مي شود. روش فوق نمودار يك روش ضمني، روش دو زماني (Two – Level Method) ، روش تك مرحله اي (Single Step Method) است. روشهايي كه در آنها از دو يا چند مرحله براي محاسبه جواب در زمان n+1م استفاده مي شود بنام روشهاي دو يا چند مرحله اي (Two Or Multi - Level Methods) ناميده مي شوند.

مرتبه**(Order)** ، سازگاري **(Consistency)** ، پايداري **(Stability)** و همگرايي **(Convergence)**

روشهاي تفاضلهاي محدود:

در بكارگيري روش تفاضلهاي محدود براي حل مسائل لازم است كه مرتبه روش مورد استفاده را جهت حصول اطمينان از دقت مناسب جوابها مورد نظر قرار داده و از همگرايي روش (سازگاري و پايداري)اطمينان حاصل نمائيم

مرتبه روش تفاضلهاي محدود را مي توان با منظور كردن خطاي بريدن بدست آورد. سازگاري روش مورد استفاده را مي توان با استفاده از معادله ديفرانسيل هم ارز كنترل كرد. خاصيت پايداري از اهميت خاصي براي معادلات ديفرانسيل هذلولي و سهموي برخودار است .

مرتبه روش **FTCS** :

روشFTCS براي معادله پخش

$$f_t = \alpha\, f_{xx}$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) = \alpha\, \frac{f_{i+1}^n - 2 f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

روش FTCS داراي خطاي بريدني از مرتبه اول در زمان و مرتبه دوم در مكان $O(\Delta t, \Delta x^2)$

سازگاري روش **FTCS** :

معادله تفاضلهاي محدود حاصل از روش FTCS براي معادله پخش

$$f_i^{n+1} = f_i^n + d\left(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

بسط تيلور مقادير $f_i^{n+1}, f_{i\pm1}^n$ حول نقطه (i,n) و جايگذاري آن در معادله

$$f + f_t\Delta t + \frac{1}{2}f_{tt}\Delta t^2 + O\left(\Delta t^3\right) = f + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left[2f + f_{xx}\Delta x^2 + \frac{1}{12}f_{xxxx}\Delta x^4 - 2f + O\left(\Delta x^5\right)\right]$$

با ساده كردن معادله فوق داريم

$$f_t = \alpha f_{xx} - \frac{1}{2}f_{tt}\Delta t + \frac{1}{12}\alpha f_{xxxx}\Delta x^2 \qquad O\left(\Delta t^2, \Delta x^3\right)$$

مشتق f_{tt} با استفاده از معادله ديفرانسيل اصلي.

$$f_{tt} = \alpha\left(f_{xx}\right)_t = \alpha\left(f_t\right)_{xx} = \alpha^2 f_{xxxx}$$

معادله ديفرانسيل هم ارز(Equivalent Differential Equation) روش FTCS

$$f_t = \alpha f_{xx} + \frac{1}{12}\alpha\Delta x^2 f_{xxxx} - \frac{1}{2}\alpha^2\Delta t f_{xxxx} = \alpha f_{xx} + \frac{1}{2}\alpha\Delta x^2\left(\frac{1}{6} - d\right)f_{xxxx} \qquad O\left(\Delta t^2, \Delta x^3\right)$$

با ميل $\Delta t\,,\Delta x \to \circ$ ، جمله خطا در معادله فوق بسمت صفر ميل خواهد نمود, و لذا روش FTCS براى معادله ديفرانسيل پخش سازگار خواهد بود. علاوه بر اين مي توان مشاهده نمود كه با انتخاب d=1/6 ، خطاي روش FTCS از مقدار اوليه $O(\Delta t, \Delta x^2)$ به مرتبه بالاتر $O(\Delta t^2, \Delta x^3)$ افزايش خواهد يافت.
بديهي است در صورتيكه $\Delta t, \Delta x$ چنان بسمت صفر ميل كنند بطوريكه نسبت $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ مقدار ثابتي باشد در اين صورت معادله ديفرانسيل هم ارز بصورت زير خواهد بود.

$$f_t = \alpha f_{xx} - \frac{1}{2}\alpha^2 \Delta t f_{xxxx}$$

پايداري روش **FTCS**:

دو روش ون نيومن (Von –Newmann Method) و روش ماتريسي (Matrix Method)

روش ون نيومن (Von –Newmann Method):

نمايش توزيع تابع مجهول در قدم زماني n ام با استفاده از سري فوريه مختلط:

$$f^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m\, e^{Ik_m x}$$

نمايش تابع f در نقطه (i,n) از شبكه با استفاده از مؤلفه نمونه از بسط فوق

$$f_i^n = ce^{Ikx_i} = ce^{Ik(i\Delta x)}$$

تعريف فوق به رابطه زير براي $f_{i\pm1}^{n}$ منجر مي گردد:

$$f_{i\pm 1}^{n} = ce^{Ik(i\pm 1)\Delta x} = f_i^{n} e^{\pm Ik\Delta x}$$

با استفاده از رابطه فوق براي نمايش جملات موجود در معادله تفاضلهاي محدود، معادله تفاضلهاي محدود نهايي را مي توان بشكل كلي زير نمايش داد:

$$f_i^{n+1} = Gf_i^{n}$$

G بنام عامل تقويت (Amplication Factor)

شرط پايداري

$$|G| \le 1$$

روش **FTCS** براي حل معادله پخش

$$f_i^{n+1} = f_i^{n} + d\left(f_{i+1}^{n} - 2f_i^{n} + f_{i-1}^{n}\right)$$

با استفاده از نمايش $f_{i\pm1}^{n} = f_i^{n} e^{\pm Ik\Delta x} = f_i^{n} e^{\pm I\theta}$

$$f_i^{n+1} = f_i^{n} + d\left(f_i^{n} e^{I\theta} - 2f_i^{n} + f_i^{n} e^{-I\theta}\right)$$

بنابراين

$$f_i^{n+1} = f_i^{n}\left[1 + d\left(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2\right)\right]$$

با استفاده از رابطه

$$e^{I\theta} = Cos\theta + ISin\theta \qquad e^{-I\theta} = Cos\theta - ISin\theta$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n\left[1+2d\left(\cos\theta-1\right)\right] = Gf_i^n$$

لذا شرط پايداري روش FTCS

$$-1 \le 1+2d\left(\cos\theta-1\right) \le 1$$

نامعادله سمت راست همواره بازاي مقادير مثبت d برقرار بوده و لذا شرط پايداري به رابطه زير منجر مي گردد.

$$1+2d\left(\cos\theta-1\right) \ge -1$$

بعبارت ديگر

$$d \le \frac{1}{1-\cos\theta}$$

مي نيمم مقدار d بازاي بيشترين مقدار مخرج $\left(1-\cos\theta\right)=2$ حاصل مي شود و لذا شرط پايداري روش FTCS با رابطه زير براي d بيان مي شود

$$\circ \le d \le \frac{1}{2}$$

روش FTCS يك روش پايدار مشروط (Conditionaly Stable) مي باشد.

روش ون نيومن براي تحليل پايداري روش BTCS در حل معادله انتقال

$$-\frac{c}{2}f_{i-1}^{n+1}+f_i^{n+1}+\frac{c}{2}f_{i+1}^{n+1}=f_i^n$$

با جايگذاري رابطه $f_{i\pm1}^{n+1}=f_i^{n+1}e^{\pm I\theta}$

$$-\frac{c}{2}f_i^{n+1}e^{-I\theta}+f_i^{n+1}+\frac{c}{2}f_i^{n+1}e^{I\theta}=f_i^n$$

با مرتب نمودن رابطه فوق داريم

$$f_i^{n+1}=\frac{1}{1+IcSin\theta}f_i^n$$

ضرب صورت و مخرج رابطه فوق در مزدوج مخرج به رابطه زير منجر مي شود.

$$G=\frac{1-IcSin\theta}{1+c^2Sin^2\theta}$$

كسر فوق همواره كوچكتر از يك بوده و لذا روشBTCS براي معادله انتقال خالص يك روش پايدار غير مشروط است.

معادلات ديفرانسيل هذلولي(Hyperbolic Partial Differentiol Equations)

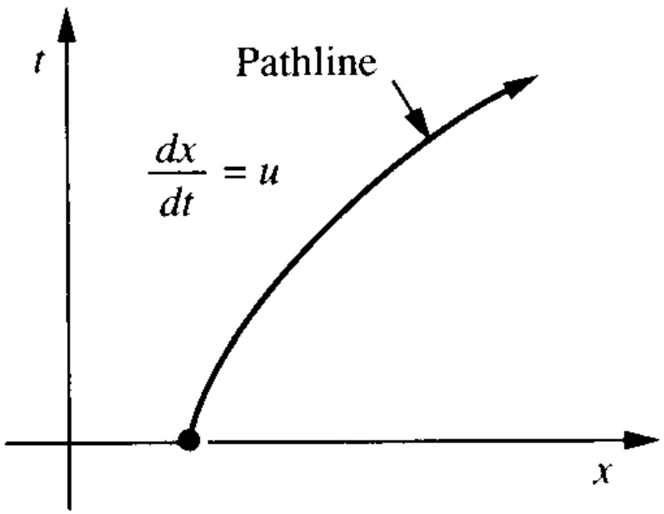
حل عددي معادله ديفرانسيل جا به جايي خالص (Pure –Convection) بعنوان نمونه اي از معادلات ديفرانسيل هذلولي

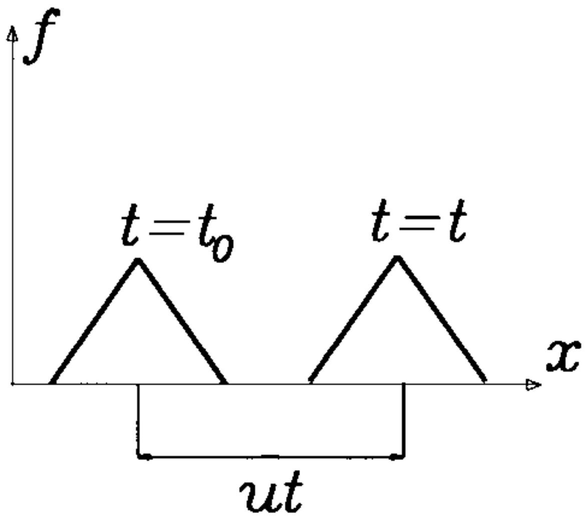
$$f_t + uf_x = o$$

معادلاتي از نوع فوق را مي توان مكرراً در مكانيك سيالات ، انتقال جرم (MassTransfer) و انتقال حرارت (Heat Transfer) مشاهده نمود.

يك خط مشخصه با معادله $\frac{dx}{dt} = u$

جواب دقيق معادله فوق با f(x -ut) داده مي شود . اين بدان معناست كه توزيع آغازين f(x) بدون تغيير شكل و تغيير اندازه با سرعت در جهت مثبت محور x ها منتقل مي گردد.





روش **FTCS** (Forward– Time ,Cetered – Spase) :

روشي صريح براي حل معادله جا به جايي روش FTCS مي باشد

$$(f_t + uf_x)_{i,n} = O$$

تفاضلهاي پيشرو براي مشتق زماني و تفاضلهاي مركزي براي مشتق مكاني.

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = O \qquad O(\Delta t, \Delta x^2)$$

درنتيجه

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{c}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right)$$

معادله ديفرانسيل هم ارز

$$f_t + uf_x = -\frac{1}{2}u^2\,\Delta t\,f_{xx} + \left(-\frac{1}{3}u^3\Delta t^2 - \frac{1}{6}u\Delta x^2\right)f_{xxx}$$

معادله فوق با ميل $\Delta t, \Delta x \to o$ به سمت معادله اوليه ميل نموده و لذا روش مورد نظر سازگار است.

با استفاده از روش ون نيومن

$$G = 1 - IcSin\theta$$

$$|G| = \left(1 + c^2 Sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} > 1$$

روشي ناپايدار

روش **Lax**:

روش FTCS براي معادله جا به جايي

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+u\frac{f_{i+1}^n-f_{i-1}^n}{2\Delta x}=0$$

استفاده از رابطه $\frac{f_{i+1}^n+f_{i-1}^n}{2}$ براي تقريب f_i^n

$$f_i^{n+1}=\frac{1}{2}\left(f_{i+1}^n+f_{i-1}^n\right)-\frac{c}{2}\left(f_{i+1}^n-f_{i-1}^n\right)$$

معادله ديفرانسيل هم ارز

$$f_t+uf_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}-u^2\Delta t\right)f_{xx}+\frac{1}{3}\left(u\Delta x^2-u^3\ \Delta t^2\right)f_{xxx}$$

با ميل $\Delta x,\Delta t$ به سمت صفر، جمله اول از سمت راست نا معين شده و لذا روش Lax يك روش ناسازگار مي باشد. در عين حال اگر $\Delta x,\Delta t$ چنان بسمت صفر ميل كنند كه نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ثابت بماند در اين صورت جمله سمت راست به سمت صفر ميل نموده و روش سازگار خواهد بود .در عين حال روش Lax بازاي مقادير محدود داراي پخش و پراكندگي عددي مي باشد.

استفاده از روش ون نيومن براي تحليل پايداري

$$G=Cos\theta-IcSin\theta$$

و لذا

$$|G|=\left(Cos^2\theta+c^2Sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}=\left[1-Sin^2\theta\left(1-c^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

براي پايداري روش Lax

$$c=\frac{u\Delta t}{\Delta x}\leq 1$$

بايد سرعت انتشار عددي اطلاعات $c_n=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ بزرگتر يا مساوي سرعت انتشار فيزيكي اطلاعات (u)باشد.

پخش عددي (Numerical Diffusion) :

پديده پخش در يك فرآيند فيزيكي (پخش جرم، پخش ممنتم، پخش حرارت) به هموار نمودن غير يكنواختي هاي موجود در توزيع كميت فيزيكي منجر مي گردد.

پديده هاي پخش واقعي از نوع βf_{xx}

جملاتي از خطاي بريدن كه شامل مشتقات مكاني مرتبه زوج هستند داراي تأثيراتي مشابه پخش فيزيكي بوده و لذا بعنوان پخش عددي ضمني (Implicit Numerical Diffusion

تقريبهاي مرتبه اول جمله f_t و f_x به بروز پخش عددي از نوع f_{xx} منجر مي گردد در حاليكه تقريب مرتبه دوم اين مشتقها به بروز پراكندگي عددي منجر مي شود.

وقتي روشي شامل پخش عددي مرتبه دوم باشد در اين صورت جوابهاي عددي حاصل از اين روش بميزان قابل توجهي هموار شده و لذا جواب حاصل داراي خطاي زيادي خواهد بود.

بنابراين در ابداع و بكار گيري يك روش عددي بايستي سعي در كاهش و يا حذف پخش عددي نمود.

معادله ديفرانسيل هم ارز روش Lax

$$f_t + uf_x = \frac{1}{2}u\Delta x\left(\frac{1}{c} - c\right)f_{xx}$$

بعبارت ديگر

$$f_t + uf_x = \alpha_n f_{xx}$$

كه در آن α_n نمودار ضريب پخش عددي مي باشد

$$\alpha_n = \frac{1}{2}u\Delta x\left(\frac{1}{c} - c\right)$$

با كاهش c معادله حاصل به معادله پخش تبديل شده و در نتيجه جواب هاي حاصل نيز نتايج حاصل از حل معادله پخش خواهند بود.
ضريب پخش عددي بازاي مقادير c>1 همواره داراي مقداري منفي خواهند بود كه خود به معني ايجاد ناپايداري مي باشد.
هموار كردن نوسانات از طريق افزودن مستقيم يك جمله پخش به معادله ديفرانسيل

پخش عددي صريح (Explicit Numerical Diffusion)
انواع پخش عددي صريح

$$x_n f_{xx}\ ,\alpha_n\ f_{xxxx}, \alpha_n f_{xx} + \beta_n\ f_{xxxx}, \alpha_n\ f_{xx}\ f_{xx}$$

كه در آن ضرايب پخش مي توانند ثابت بوده و يا تابعي از اندازه شبكه x,t و يا تابعي از مجهول ويا مشتقهاي آن باشند.

روشهاي **Upwind**:

در معادله جا به جايي انتقال اطلاعات همواره در جهت سرعت و از بالادست به پايين دست صورت مي پذيرد.

روشهاي Upwind: روشهاي تفاضلهاي محدودي كه اين خاصيت انتشار اطلاعات را منظور نموده و از آن استفاده مي نمايند (از نظر فيزيكي سازگار با پديده انتقال)

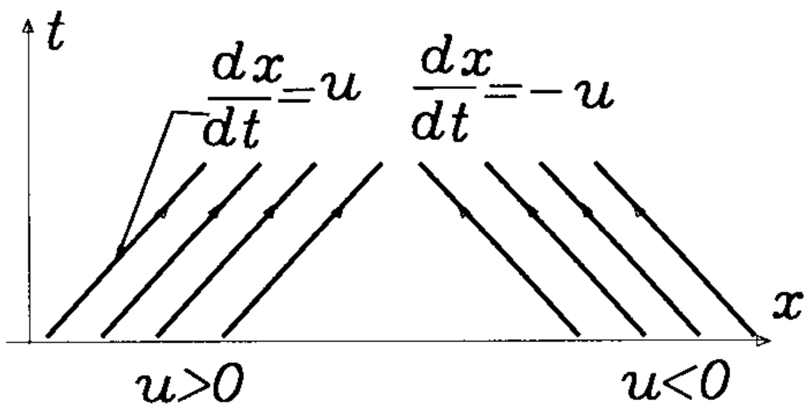
ساده ترين روش Upwind : تقريب تفاضلهاي پيشرو براي f_t و تقريب تفاضلهاي پسرو براي مشتق f_x (با فرض مثبت بودن u)

$$f_t + u f_x \Big|_{i,n} = 0$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \qquad u > 0$$

در صورتيكه u داراي مقداري منفي باشد

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} = 0 \qquad u < 0$$



روش Lax- Wendroff تك گامي (One Step Lax- Wendroff Method)

معادله ديفرانسيل انتقال

$$f_t + uf_x = 0$$

بسط سري تيلور مرتبه دوم

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t \left. f_t \right|_i^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \left. f_{tt} \right|_i^n + o(\Delta t^3)$$

مشتقات اول و دوم f_{tt}, f_t با استفاده از معادله ديفرانسيل اوليه

$$f_t = -uf_x$$

$$f_{tt} = (f_t)_t = -u(f_x)_t = -u(f_t)_x = u^2 f_{xx}$$

با جايگذاري

$$f_i^{n+1} = f_i^n - u\Delta t \left. f_x \right|_i^n + \frac{u^2}{2}\Delta t^2 \left. f_{xx} \right|_i^n + O(\Delta t^3)$$

تقريب تفاضلهاي مركزي براي مشتقات مكاني

$$f_i^{n+1} = f_i^n - u\Delta t \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u^2}{2}\Delta t^2 \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

با استفاده از $c = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{c}{2}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{c^2}{2}\left(f_{i+1}^n - 2f_{i+1}^n + f_{i-1}^n\right) \qquad O(\Delta t^3, \Delta x^3)$$

معادله ديفرانسيل هم ارز

$$f_t + uf_x = \left(-\frac{1}{6}u\Delta x^2 + \frac{1}{6}u^3\Delta t^2\right)f_{xxx} = \frac{1}{6}u\Delta x^2(c^2 - 1)f_{xxx}$$

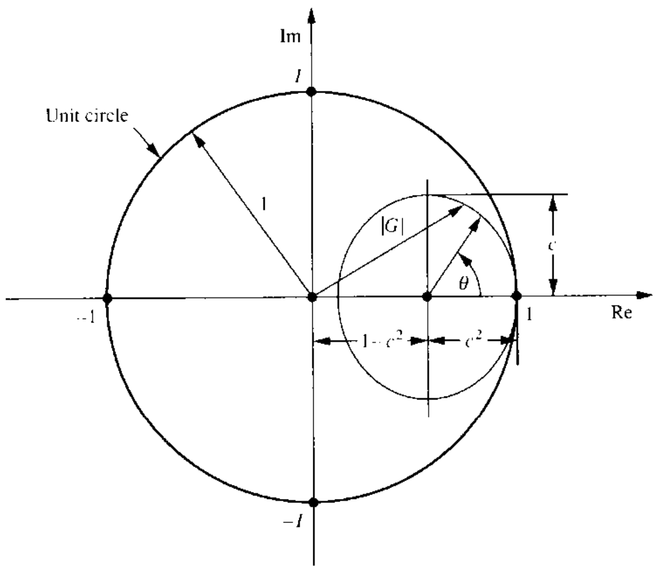
با ميل Δx و Δt بسمت صفر جمله پراكندگي برابر صفر شده و لذا روش سازگار مي باشد.

بازاي c=1 اين روش به جوابهاي دقيقي منجر مي شود.

روش ون نيومن براي تحليل پايداري

$$G = (1 - c^2) + c^2 \cos\theta - Ic \quad \sin\theta$$

نمودار يك بيضي است كه مركز آن در مختصات $(1-c^2, 0)$ واقع شده و محورهاي آن در جهت محورهاي حقيقي و موهومي بترتيب معادل c^2 و c مي باشد. براي پايداري (G<1) لازم است كه بيضي مورد نظر كاملاً داخل دايره بشعاع واحد قرار داشته باشد (c≤1)

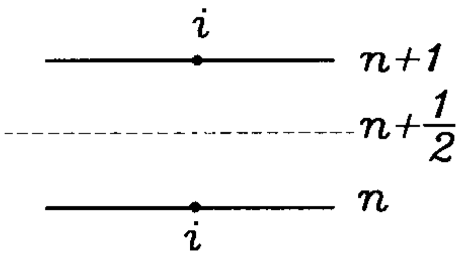


تعميم اين روش براي مسائل غير خطي مشكلاتي را در جايگزيني مشتق دوم زماني بر حسب مشتقات مكاني بهمراه دارد. بدين جهت مي توان از روش Lax- Wendroff دو مرحله اي براي معادلات غير خطي استفاده نمود.

روش Lax- Wendroff دو گامي (Two Step Lax- Wendroff Method):

روش Lax- Wendroff دو قدمي براي حل معادله انتقال خطي

$$f_t + uf_x = 0$$



مرحله اول : تفاضل مركزي براي مشتق زماني و مكاني در نقطه $(i, n+\frac{1}{2})$

$$f_t\Big|_i^{n+\frac{1}{2}} + uf_x\Big|_i^{n+\frac{1}{2}} = 0 \qquad \frac{f_i^{n+\frac{1}{2}} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0$$

مرحله دوم : استفاده از روش Lax در نقطه $\left(i+\frac{1}{2}, n\right)$ براي محاسبه مقادير مجهول در زمان $n+\frac{1}{2}$

$$f_t\Big|_{i+\frac{1}{2}}^n + uf_x\Big|_{i+\frac{1}{2}}^n = 0 \qquad \frac{f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^n + f_i^n\right)}{\frac{\Delta t}{2}} + u\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} = 0$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^n + f_i^n\right) - \frac{c}{2}\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right)$$

و به همين ترتيب براي نقطه $\left(i-\frac{1}{2}, n\right)$ از روش Lax خواهيم داشت:

$$f_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_i^n + f_{i-1}^n\right) - \frac{c}{2}\left(f_i^n - f_{i-1}^n\right)$$

با جايگذاري در معادله مرحله اول خواهيم داشت:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{1}{2}c\left[(1-c)f_{i+1}^n + 2cf_i^n - (1+c)f_{i-1}^n\right]$$

روش مك كورماك(**Mac-Cormack Method**):

با استفاده از تفاضل مركزي براي مشتق زماني در نقطه $(i, n+\frac{1}{2})$:

$$f_t\big|_i^{n+\frac{1}{2}} + uf_x\big|_i^{n+\frac{1}{2}} = 0 \qquad f_i^{n+1} = f_i^n + \frac{\Delta t}{2}\left[uf_x\big|_i^{n+1} + uf_x\big|_i^n\right]\Delta t \qquad O\left(\Delta t^3\right)$$

با جايگزيني مشتقهاي زماني بوسيله تقريب تفاضلهاي مركزي ، روشي ضمني با مرتبه $O\left(\Delta t^2, \Delta x^2\right)$ بدست مي آيد.

روش حدس و اصلاح

مرحله اول: مقدار f_i^{n+1} با استفاده از تقريب تفاضلهاي پيشرو براي f_t و f_x (روش Upwind):

$$f_i^{n+1} = f_i^n - c\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right) \qquad O\left(\Delta t^2, \Delta x\right)$$

تقريب تفاضلهاي پيشرو براي $f_x\big|_i^n$ وتقريب تفاضلهاي پسرو براي $f_x\big|_i^{n+1}$ از معادله اصلي

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{1}{2}\Delta t\left(u\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} + u\frac{f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)$$

يا

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \tfrac{1}{2}\left[c\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right) + c\left(f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}\right)\right]$$

حال با استفاده از مقادير حدس زده شده در مرحله اول در سمت راست معادله فوق داريم

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{1}{2}\left[c\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right) + c\left(\overline{f}_i^{n+1} - \overline{f}_{i-1}^{n+1}\right)\right]$$

يا

$$f_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[f_i^n + \overline{f}_i^{n+1} - c\left(\overline{f}_i^{n+1} - \overline{f}_{i-1}^{n+1}\right)\right]$$

بنظر مي رسد كه روش مورد نظر بدليل استفاده از تقريب تفاضلهاي يك طرفه براي مشتقهاي مكاني داراي مرتبه $O(\Delta x)$ مي باشد ولي بدليل استفاده توأم از تفاضلهاي پيشرو و پسرو براي مشتقهاي مكاني، خطاي بريدن $O(\Delta x)$ از جملات خطا حذف شده و خطاي روش در واقع $O(\Delta x^2)$ مي باشد.
اين امر را مي توان با بدست آوردن معادله ديفرانسيل هم ارز روش Mac-Cormack كنترل نمود.

روش Mac-Cormack براي معادله انتقال خطي با روش Lax –Wendroff يكسان مي باشد. در عين حال دو روش فوق براي مسائل غير خطي متفاوت از يكديگر خواهند بود. بدليل يكساني روش Mac-Cornack و روش Lax –Wendroff براي مسائل خطي مي توان نتيجه گرفت كه روش حاضر نيز همچون روش از مرتبه $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ ، سازگار و پايدار مشروط $(c \le 1)$ مي باشد.

روش خطوط مشخصه (Characteristic Method)

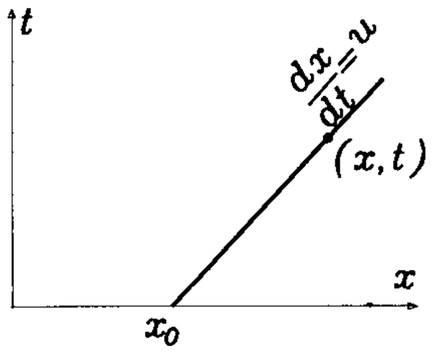
معادله ديفرانسيل انتقال خطي $f_t + uf_x = 0$ بر روي خطوط مشخصه $\frac{dx}{dt} = u$

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \frac{df}{dt} = 0$$

مفهوم خطوط مشخصه با استفاده از تبديل مختصات

دستگاه مختصات (X و t)

$$X = x - ut \qquad t = t$$



مختصات قديم x در دستگاه مختصات جديد بصورت x=X +ut تعريف شده و مستقل از زمان نمي باشد.

تغييرات تابع f(x,t) نسبت به زمان

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

با توجه به رابطه x=X+ut

$$\frac{dx}{dt} = u$$

و لذا

$$\frac{df}{dt} = f_t + uf_x = 0$$

معادله ديفرانسيل معمولي

$$\frac{df(X,t)}{dt} = 0 \Rightarrow f(X,t) = cte$$

دستگاه مختصات X نمودار مختصاتي است كه در زمان t=0 بر دستگاه مختصات x منطبق بوده و با سرعت ثابت u در جهت محور x ها حركت مي نمايد.

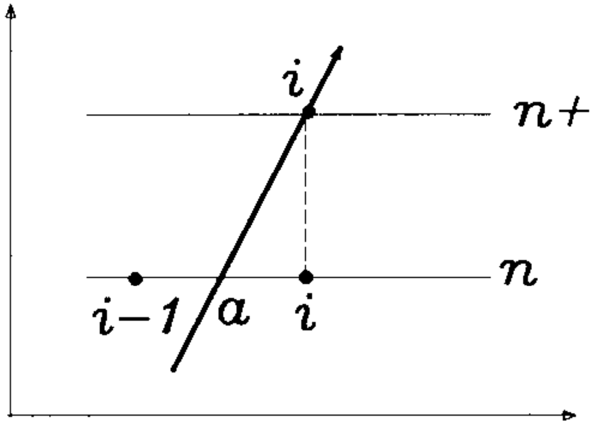
در روش خطوط مشخصه، معادلات ديفرانسيل مورد نظر در دستگاه مختصات (X,t) كه بنام دستگاه مختصات مشخصه معـروف اسـت حـل مي شـود.

روش رژه اي مســتقيم(Direct Marching Method): رسم خطوط مشخصه مربوط به نقاط شبكه موجود بر روي محور x در صفحه (x,t) و محاسبه مقدار تابع مجهول بر روي اين خطوط

محاسن و معايب: محاسبه جوابها بدقت و بدون تقريب- بكارگيري ثابت بر روي هر يك از خطوط مشخصه و يافتن جواب بر روي هر يك از خطوط مشخصه در زمان هاي متفاوت- در صورتيكه خطوط مشخصه بهم نزديك و يا دور شوند در اين صورت شبكه تفاضلهاي محدود مكاني غير يكنواخت شده- امكان استفاده از اين روش براي دستگاه معادلاتي با بيش از دو متغير وابسته وجود ندارد

روش رژه اي معكوس : (Inverse Marching Method) محاسبه خطوط مشخصه نقطه مورد نظر شبكه و يافتن جواب در نقطه مورد نظر با استفاده از فرض ثابت بودن اطلاعات بر روي اين خطوط

محاسن و معايب: مهمترين حسن اين روش امكان استفاده از شبكه تفاضلهاي محدود مكاني يكنواخت- استفاده از اين روش مستلزم بكارگيري رو نيابي (Interpolation) و يا برونيابي(Extrapolation) براي محاسبه جوابها



مختصات نقطه a

$$f_i^{n+1} = f_a^n$$

$$\frac{dx}{dt} = u \Rightarrow \frac{x_i - x_a}{t^{n+1} - t^n} = u \Rightarrow x_i - x_a = u.\Delta t$$

محاسبه مقدار f_a^n از طريق درونيابي (برونيابي) مقادير تابع در نقاط شبكه

- روش اول **MOC** :

درونيابي خطي بين i-1 و i+1

$$\frac{f_{i+1}^n - f_a}{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n} = \frac{x_{i+1} - x_a}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{\Delta x + (x_i - x_a)}{2\Delta x}$$

با استفاده از رابطه $(x_i - x_a) = u\Delta t$

$$\frac{f_{i+1}^n - f_a}{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n} = \frac{\Delta x + u\Delta t}{2\Delta x} = \frac{1}{2}(1 + c)$$

با محاسبه f_a از رابطه فوق دايم

$$f_a = f_i^{n+1} = \frac{1}{2}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) - \frac{c}{2}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

عادل روش Lax براي معادله انتقال خطي

- روش دوم **MOC**:

درونيابي خطي بين نقاط i وi-1

$$\frac{f_i^n - f_a}{f_i^n - f_{i-1}^n} = \frac{x_i - x_a}{x_i - x_{i-1}} = \frac{u\Delta t}{\Delta x} = c$$

و لذا

$$f_a = f_i^{n+1} = f_i^n - c(f_i^n - f_{i-1}^n)$$

اين روش در واقع معادل روشUpwind مرتبه اول مي باشد.

3- روش سوم **MOC**:

درونيابي درجه دوم بين نقاط i-1 وi وi+1

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

كه در آن $x = x_i$ مبدا مختصات بوده و

$$f(x_{i-1}) = f_{i-1}^n \qquad f(x_i) = f_i^n \qquad f(x_{i+1}) = f_{i+1}^n$$

محاسبه ضرايب مجهول

$$f(x) = f_i^n + \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}x + \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{2\Delta x^2}x^2$$

با استفاده از مختصات $x_a = x_i - u\Delta t$

$$f_a = f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{c}{2}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{c^2}{2}(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$

معادل روش Lax-Wendroff تك قدمي

استفاده از روش هاي انتگرال گيري عددي براي معادله غير خطي

روشهاي عددي حل معادله پخش

معادله پخش‌گذراي يك بعدي:

$$f_t = \alpha f_{xx}$$

روش FTCS

$$f_i^{n+1} = f_i^n + d(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$

روشي صريح و پايدار مشروط $d \le 1/2$

معادله ديفرانسيل هم ارز روش FTCS

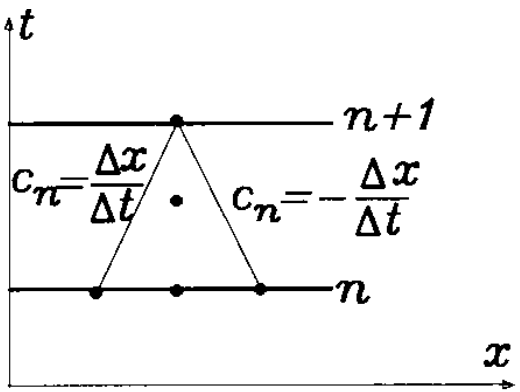
$$f_t = \alpha f_{xx} + (\frac{1}{12}\alpha \Delta x^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 \Delta t)F_{xxxx} \qquad O(\Delta t^2, \Delta t \Delta x^2, \Delta x^4)$$

از مرتبه $O(\Delta t, \Delta x^2)$ بوده ولي بازاي $d = 1/6$ مرتبه روش افزايش خواهد يافت. معادله ديفرانسيل هم ارز در صورتي كه اندازه شبكه با نسبت ثابت $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ به سمت صفر ميل نمايد

$$f_t = \alpha f_{xx} - \frac{1}{2}\alpha^2 \Delta x f_{xxxx}$$

جمله $\alpha^2 \Delta x f_{xxxx}$ بنام پخش عددي (Numerical Diffusion)

دياگرام روش FTCS



سرعت انتشار اطلاعات در روش FTCS معادل $c_n = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ مي‌باشد در حاليكه سرعت انتشار در معادله پخش نامتناهي است و لذا روش FTCS اين خاصيت معادله ديفرانسيل را بطور صحيح مدل نمي‌كند.

روش FTCS يك روش مرتبه اول در زمان $O(\Delta t)$ بوده و اين يكي از نقائص عمده اين روش مي‌باشد.

روش ليپ فراگ **(Leapfrog Method)** :

معادله پخش

$$f_t = \alpha f_{xx}$$

تقريب تفاضلهاي مركزي در زمان و مكان

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2} \qquad f_i^{n+1} = f_i^{n-1} + 2d(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$

روشي صريح (Explicit) ، سه زماني (Three - Level) و تك قدمي (Single Step).

پايداري روش را مي‌توان با جايگذاري $f_{i\pm 1}^n = (e^{\mp I\theta})f_i^n$ در رابطه فوق كنترل نمود

$$f_i^{n+1} = f_i^{n-1} + 2d(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2)f_i^n$$

$$f_i^{n+1} = f_i^{n-1} + 4d(Cos\,\theta - 1)f_i^n$$

با تقسيم طرفين رابطه بر f_i^n

$$\frac{f_i^{n+1}}{f_i^n} = \frac{1}{\frac{f_i^n}{f_i^{n-1}}} + 4d(Cos\,\theta - 1)$$

با توجه به تعريف $G=\frac{f_i^{n+1}}{f_i^n}=\frac{f_i^n}{f_i^{n-1}}$

$$G=\frac{1}{G}+4d(Cos\theta-1)$$

$$G^2+bG-1=0 \quad , \quad b=-4d(Cos\theta-1)=8dSin^2\frac{\theta}{2}$$

$$G=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4}}{2}$$

بازاي b=0 ، رابطه $|G|=1$ برقرار است ولي بازاي بقيه مقادير b رابطه $|G|>1$ همواره برقرار مي‌باشد.
بنابراين روش Leap frog براي معادله پخش يك روش ناپايدار مي‌باشد.

روش دوفورت - فرانكل **(Dufort - Frankel)** :

اصلاح شده روش Leap frog . معادله تفاضلهاي محدود روش Leap frog

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n-1}}{2\Delta t}=\alpha\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

با جايگذاري f_i^n بوسيله ميانگين f_i در زمانهاي $n-1, n+1$ داريم

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n-1}}{2\Delta t}=\alpha\frac{f_{i+1}^n-\left(f_i^{n+1}+f_i^{n-1}\right)+f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

معادله تفاضلهاي محدود حاصل

$$(1+2d)f_i^{n+1} = (1-2d)f_i^{n-1} + 2d(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n)$$

روشي سه زماني، تك مرحله اي و صريح از مرتبه $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

معادله ديفرانسيل هم ارز روش

$$f_t = \alpha f_{xx} + (\frac{1}{12}\alpha \Delta x^2 - \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}) f_{xxxx}$$

با ميل Δx و Δt بسمت صفر جمله $\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$ داراي مقداري نامعين و لذا روشي ناسازگار مي باشد.

معادله ديفرانسيل هم ارز بازای مقادير متناهی Δx و Δt

$$f_t = \alpha f_{xx} - \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} f_{xxxx}$$

و لذا روش داراي پخش عددي منفی مي باشد.

در عين حال تجربه نشان مي دهد كه نتايج خوبي را مي توان با استفاده از اين روش بدست آورد.

استفاده از روش ون نيومن براي تحليل پايداري

$$(1+2d)G^2 - (4d\cos\theta)G - (1-2d) = o$$

$$G = \frac{2d\cos\theta \pm \sqrt{1-4d^2\sin^2\theta}}{1+2d}$$

رابطه $|G| \le 1$ بازاي تمامي مقادير d صادق بوده و لذا روش دو فورت - فرانكل يك روش پايدار مي باشد.

اين بدان معني است كه اساساً مي توان از مقادير نسبتاً بزرگ Δt براي يافتن جوابها استفاده نمود. ولي با توجه به مرتبه پخش عددي اين روش $O(\Delta t^2)$ ، بديهي است كه انتخاب بزرگ Δt به جوابهايي با خطاي زياد منجر مي گردد.

روش كرانك - نيكولسون(**Crank-Nicolson**) :

تقريب مرتبه دوم براي مشتق زماني

معادله ديفرانسيل در نقطه $(i, n+1/2)$:

$$f_t\Big|_{i,n+\frac{1}{2}} = \alpha f_{xx}\Big|_{i,n+\frac{1}{2}}$$

تقريب تفاضلهاي مركزي براي تقريب مشتقهاي موجود

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{f_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2 f_i^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}$$

با استفاده از ميانگين $f^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{f^n + f^{n+1}}{2}$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{f_{i+1}^{n+1} - 2 f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i+1}^n - 2 f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

معادله تفاضلهاي محدود روش كرانك - نيكولسون

$$-df_{i-1}^{n+1}+2(1+d)f_i^{n+1}-df_{i+1}^{n+1}=df_{i-1}^{n}+2(1-d)f_i^{n}+df_{i+1}^{n}$$

دستگاه معادلاتي سه قطري.

معادله ديفرانسيل هم ارز روش

$$f_t=\alpha f_{xx}+\frac{1}{12}\alpha\Delta x^2 f_{xxxx}$$

روشي سازگار

تحليل پايداري

$$G=\frac{1-d(1-\cos\theta)}{1+d(1-\cos\theta)}$$

پايدار نامشروط بازاي تمامي مقادير d

مسائل غير خطي (**Nonlinear**)و مسائل چند بعدي (**Multidimentional**) :

در مسائل غير خطي تنها بايد به اين نكته توجه نمود كه مقدار ضرائب غير خطي را بايستي در همان نقطه اي از شبكه كه معادلات ديفرانسيل در آ ن تقريب مي شوند، منظور گردند.

معادله پخش غير خطي

$$f_t = \alpha f_{xx}$$

كه در آن ضريب پخش تابعي از f مي باشد.

كاربرد روشFTCS

استفاده از روش تكرار ساده (Simple lteration) و يا روش نيوتن رافسون(Newton-Raphson) براي حل معادله غير خطي حاصل .

استفاده از روشهاي صريح براي حل مسائل چند بعدي عيناً مطابق مسائل يك بعدي صورت مي گيرد.
روشهاي ضمني در مسائل چند بعدي مستلزم حل دستگاه معادلاتي با ابعاد نسبتاً بزرگ و در نتيجه صرف وقت و محاسبات زيادي مي باشد. بخصوص ماتريسهاي حاصل در اين مسائل ديگر سه قطري نبوده و نمي توان از روش خاص چنين ماتريسهايي براي حل سريع معادلات استفاده نمود. بمنظور كاهش ميزان محاسبات مي توان استفاده از روشهاي ارائه شده براي مسائل بيضوي استفاده نمود.

روش **ADI** (**Alternating-Direction-Implicit**):

حل معادله ديفرانسيل دردوگام زماني. در گام اول از روش ضمني در يكي از جهات مثلاً x و در مرحله دوم در جهت y استفاده مي گردد.

معادله پخش دو بعدي:

$$f_t = \alpha\left(f_{xx} + f_{yy}\right)$$

كاربرد روش ADI براي حل اين معادله در شكل نيمه گسسته (Semi-Discretized) آن بصورت زير نوشته مي شود:

$$\frac{f_{i.j}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t/2} = \alpha f_{xx}\Big|_{i,j}^{n+1/2} + \alpha f_{yy}\Big|_{i,j}^{n}$$

و در مرحله بعدي داريم

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \alpha f_{xx}\Big|_{i,j}^{n+1/2} + \alpha f_{yy}\Big|_{i,j}^{n+1}$$

با گسسته سازي مشتقات مكاني، هر يك از گامهاي فوق به دستگاه معادلاتي سه قطري تبديل مي شود

روش AFI (Approximate-Factorization-Implicit):

اساس اين روش بر مبناي تبديل مسائل چند بعدي به سلسله اي از مسائل يك بعدي مي باشد.

روش BTCS براي معادله پخش دو بعدي در شكل نيمه گسسته

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f_{i,j}^{n+1}$$

با مرتب كردن رابطه فوق داريم

$$\left[1 - \alpha\Delta t\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^{n}$$

كه در آن جمله داخل كروشه نمودار يك عملگر ديفرانسيلي دو بعدي است.

تقريب عملگر مذكور با حاصلضرب دو عملگر يك بعدي

$$\left(1 - \alpha\Delta t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(1 - \alpha\Delta t\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^{n}$$

حل معادله فوق در دو گام

$$\left(1 - \alpha\Delta t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f_{i,j}^{*} = f_{i,j}^{n} \qquad \left(1 - \alpha\Delta t\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^{*}$$

استفاده از تقريب تفاضلهاي مركزي براي گسسته سازي مشتقهاي مكاني به دستگاه معادلاتي سه قطري در هر يك از گامها منجر مي گردد. خطاي حاصل از جايگزيني عملگر دو بعدي بوسيله اين حاصلضرب از مرتبه $O(\Delta t^2)$ مي باشد. از آنجا كه خطاي موضعي روش BTCS در محاسبه $f_{i,j}^{n+1}$ نيز از مرتبه $O(\Delta t^2)$ مي باشد لذا روش AFI مرتبه روش مورد استفاده را تغيير نمي دهد.

معادلات ديفرانسيلي هذلولي – سهموي
(Convection – Diffusion PDE)

حل معادله جابجايي – پخش(Convection – Diffusion PDE) بعنوان نمونه اي از معادلات ديفرانسيل هذلولي – سهموي

معادله جابه جايي پخش

$$f_t + uf_x = \alpha f_{xx}$$

كه در آن u سرعت جابه جايي و α ضريب پخش مي باشد.

معادله ديفرانسيلي سهموي . وجود جمله مرتبه اول انتقال تأثير زيادي در رفتار اين معادله و انتخاب روش مورد استفاده براي حل اين نوع معادلات داشته و لذا به نام معادله جابه جايي -پخش ناميده مي شود تا وجود پديده جابه جايي در آن بصورت صريح مورد تأكيد قرار گرفته شود.

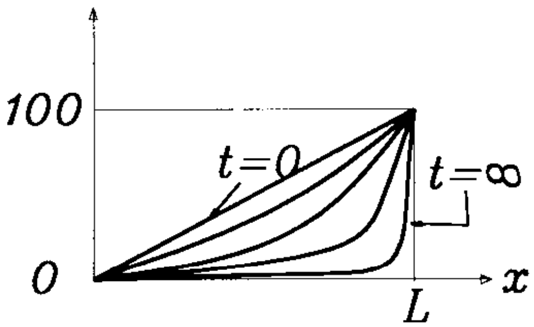
حل معادله نيازمند يك شرط آغازين و دو شرط مرزي مي باشد كه اين شرط مرزي مي تواند از انواع مختلف ديريچله، نيومن و يا مختلط باشد.

معادله جابه جايي – پخش را مي توان نمونه بسياري از معادلات حاكم بر مسائل فيزيكي چون انتقال جرم (Mass Transport) انتقال ممنتم (Momentum Transport)، انتقال انرژي يا حرارت (Energy or Heat Transfer) و نيز انتقال نوترون (Notron Transport)، دانست. معادلات ناويراستوكس كه بيان كننده پديده انتقال ممنتم اند، در واقع از نوع معادله جابه جايي – پخش مي باشد.

مـعادله حاكـم بر جـريان حـرارت يك بعدي:

$$T_t + uT_x = \alpha T_{xx}$$

كه در آن مطابق قبل u سرعت جابه جايي و α نمودار ضريب هدايت حرارتي محيط مي باشد.
معادله حاكم بر تغييرات درجه حرارت در صفحه اي متخلخل كه بوسيله جريان سيالي كه داراي سرعت u و ضريب هدايت حرارتي α است خنك مي شود.
رفتار جواب معادله فوق با زمان



جواب دائمي تابعي از سرعت جابه جايي u و ضريب پخشα يا پارامتر $Pe = \frac{uL}{\alpha}$ موسوم به عدد Peclet (يا عدد رينولدز)
بررسي رفتار جواب دقيق معادله دائمي جابه جايي پخش

$$uT_x = \alpha T_{xx} \qquad o \le x \le L$$

$$T_o = o$$

$$T_L = 1$$

معادله فوق با استفاده از تبديل مختصات

$$\frac{1}{L}uT_y = \alpha\frac{1}{L^2}T_{yy}$$

در نتيجه داريم

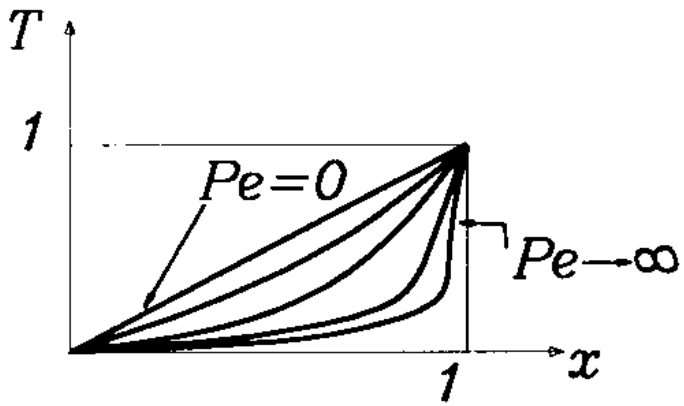
$$T_y = \frac{1}{Pe}T_{yy}$$

كه در آن $Pe = \frac{ul}{\alpha}$ نمودار عدد پكلت (Peclete) يا عدد رينولدز (Reynolds) مي باشد.

جواب دقيق معادله ديفرانسيل نرمالسازي شده

$$T = \frac{e^{yPe} - 1}{e^{Pe} - 1}$$

جواب معادله جابه جايي – پخش دائمي تابعي از عدد پكلت



وقتي عدد پكلت داراي مقادير بزرگ ولي متناهي است در اين صورت توزيع درجه حرارت تنها در همسايگي مرز y = 1 داراي تغييرات شديدي بوده و در بقيه حوزه داراي توزيع يكنواختي مي باشد. اين ناحيه بنام لايه مرزي (Boundary Layer) خوانده مي شود.

ضخامت اين لايه نيز تابعي از عدد پكلت بوده و با افزايش عدد پكلت از ضخامت اين لايه كاسته مي شود.

روشهاي پايه اي جهت حل معادله جابه جايي – پخش

روش **FTCS**: تفاضل پيشرو براي مشتق زماني و تفاضل مركزي براي مشتقهاي مكاني

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{c}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

كه در آن c و d بترتيب اعداد انتقال و پخش مي باشند.

معادله ديفرانسيل هم ارز

$$f_t + uf_n = \alpha f_{xx} + \left(-\frac{1}{2}u^2\Delta t\right)f_{xx} + \left(-\frac{1}{6}x\Delta x^2 + x\alpha\Delta t - \frac{1}{3}u^3\Delta t^2\right)f_{xxx}$$

با ميل Δx و Δt بسمت صفر، معادل ديفرانسيل هم ارز بسمت معادله ديفرانسيل مورد نظر ميل كرده و لذا روش سازگار است.

علاوه بر اين خطاي بريدن اين روش مي باشد و روش داراي پخش و پراكندگي عددي ضمني است.

تحليل پايداري روش با استفاده از تكنيك ون نيومن

$$G = (1 - 2d) + 2d\cos\theta - Ic\sin\theta \qquad (\theta = i\Delta x)$$

نمودار يك بيضي با مركز (1-2d,0) و محورهاي 2d و c بترتيب در جهت محورهاي حقيقي و موهومي مي باشد.

براي پايداري لازم است كه اين بيضي كاملاً در داخل دايره قرار گيرد.

$$c \le 1 \qquad 2d \le 1$$

علاوه بر اين انحناي بيضي در نقطه (. و 1) بايستي بزرگتر از انحناي دايره به شعاع واحد $|G| = 1$ باشد

بدين ترتيب شرط پايداري براي روش FTCS بصورت زير بدست مي آيد

$$c^2 \le 2d \le 1$$

تحليل پايداري روش با استفاده از نقش پخش عددي

معادله ديفرانسيل هم ارز معادله جابه جايي- پخش

$$f_t + nf_x = \left(1 - \frac{1}{2} c \operatorname{Re}\right) \alpha f_{xx}$$

مقدار پخش حاصل از پخش فيزيكي و عددي بايد همواره مثبت باشد.

$$c \operatorname{Re} \leq 2$$

كه در آن $\operatorname{Re} = \frac{c}{d} = \frac{u \Delta x}{\alpha}$ بنام عدد پكلت شبكه يا عدد رينولدز شبكه ناميده مي شود

وقتي مقدار $c = 1$ باشد در اين صورت شرط پايداري با رابطه $Re \leq 2$ بيان مي شود. براي مقادير c<1

رابطه $\operatorname{Re} \leq 2$ نمودار شرط پايداري مي باشد.

مطالعه تأثير عدد رينولدز شبكه بر روي جوابهاي حاصل

رابطه تفاضلهاي محدود روش

$$f_i^{n+1} = \left(\frac{1}{2} c + d\right) f_{i-1}^n + (1 - 2d) f_i^n + \left(-\frac{1}{2} c + d\right) f_{i+1}^n$$

با توجه به رابطه $\operatorname{Re} = \frac{c}{d}$

$$f_i^{n+1} = \frac{d}{2}(2 + Re) f_{i-1}^n + (1 - 2d) f_i^n + \frac{d}{2}(2 - Re) f_{i+1}^n$$

بروشي مشابه داريم

$$f_{i+1}^{n+1} = \frac{d}{2}(2 + \operatorname{Re}) f_i^n + (1 - 2d) f_{i+1}^n + \frac{d}{2}(2 - \operatorname{Re}) f_{i+2}^n$$

با منظور نمودن توزيع f در زمان n ام بطوريكه مقدار آن در همه نقاط بجز نقطه i + 1 ام برابر صفر باشد داريم $\left(f^n = 0\right)$

$$f_i^{n+1} = \frac{d}{2}\left(2+R\right)f_{i+1}^n$$

$$f_{i+1}^{n+1} = \left(1-2d\right)f_{i+1}^n$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\right)^{n+1} = \frac{1-2d}{\frac{d}{2}\left(2-\mathrm{Re}\right)}$$

با فرض پايداري روش $\left(c \le 1, d \le 1/2\right)$ در صورتيكه Re>2 باشد جوابها حول مقدار دقيق نوسان خواهند نمود.

شرط پايداري $d \le 1/2$ محدوديت شديدي را براي روش FTCS ايجاد مي نمايد زيرا در صورت كاهش مقدار Δt بمنظور يافتن جوابهاي دقيقتر مثلاً به نصف، بايستي مقدار Δx را چهار برابر كوچك نمود تا مقدار d ثابت باقي بماند

روش **Upwind**:

تفاضل يكطرفه مناسبي براي مشتقهاي اول و تفاضل مركزي براي مشتق دوم

براي مورد (u>o)

$$u > o \qquad f_i^{n+1} = f_i^n - c\left(f_i^n - f_{i-1}^n\right) + d\left(f_{i+1}^n - 2 f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

معادله ديفرانسيل هم ارز

$$f_t + u f_x = d f_{xx} + \left(\frac{1}{2} u \Delta x - \frac{1}{2} u^2 \Delta t\right) f_{xx}$$

خطاي روش $O(\Delta t, \Delta x)$ بوده و مقدار آن با ميل Δx و Δt بسمت صفر كاهش يافته معادل صفر مي شود و لذا روش سازگار مي باشد.

با استفاده از روش ون نيومن داريم

$$G = [1 - (c + 2d)] + (c + 2d)\cos\theta - I \sin\theta$$

نمودار بيضي با مركز [1-(c+2d),0] و محورهاي c +2d و c مي باشد. با منظور نمودن تشابه بين رابطه فوق و رابطه حاصل براي FTCS، شرط پايداري بصورت زير حاصل مي شود

$$c^2 \le c + 2d \le 1$$

مقدار پخش موجود

$$\left(\frac{1}{2}[u \Delta x (1 - c)] + d\right) f_{xx} = \left[\left(1 - \frac{1}{2} c \operatorname{Re}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\right] \alpha f_{xx}$$

روش Upwind داراي پخش عددي بيشتري (به ميزان $\frac{\alpha}{2}\operatorname{Re}$) نسبت به روش FTCS مي باشد.

جوابهاي غير نوساني حتي بازاي مقادير Re>2 .پخش عددي بيش از حد

روش دوفورت – فرانكل (Dufort – Frankel Method)

روش ريچاردسون براي معادله انتقال – پخش ناپايدار است.

با استفاده از $\left(f_i^n = \frac{1}{2}\left(f_i^{n+1} + f_i^{n-1}\right)\right)$ در روش ريچاردسون

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u.\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{f_{i+1}^n - \left(f_i^{n+1} - f_i^{n-1}\right) + f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

در نتيجه

$$(1+2d)f_i^{n+1} = -c\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + (1-2d)f_i^{n-1} + 2d\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n\right)$$

روشي سه زماني بوده لذا بايد از يك روش دو زماني براي شروع محاسبات آن استفاده نمود.

معادله ديفرانسيل هم ارز:

$$f_t + uf_x = \alpha f_{xx} - \left(u^2 \alpha \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) f_{xx} + O\left(\Delta x^2, \Delta t^2\right)$$

مقدار خطاي بريدن با ميل Δx و Δt بسمت صفر، داراي مقدار نامعيني بوده و لذا روش سازگار نمي باشد.

معادله ديفرانسيل هم ارز وقتي كه Δx و Δt با نسبت ثابت $\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ به سمت صفر ميل كنند

$$f_t = uf_x = \alpha f_{xx} - \alpha c^2 f_{xx} = \alpha\left(1 - c^2\right) f_{xx}$$

پايداري روش مستلزم برقراري رابطه c<1 بوده و هيچگونه محدوديتي براي عدد پخش d ايجاد نمي نمايد.

روشهاي خانواده **Lax – Wendroff** :

براساس بسط سري تيلور تا مرتبه دوم در زمان استوار شده اند.

بسط تيلور f^{n+1} حول f^{n}

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t f_t\Big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 f_{tt}\Big|_i^n + O\left(\Delta t^3\right)$$

انواع روشهاي Lax – Wendroff : نحوه محاسبه مشتق دوم

روش Lax – Wendroff تك قدمي : مشتق اول $f_t\big|_i^n$ را با استفاده از معادله ديفرانسيل اوليه و مشتق دوم $f_{tt}\big|_i^n$ را با مشتق گيري از معادله ديفرانسيل محاسبه مي نمايد.

ولي اين روش براي معادلات غير خطي و نيز معادله جابه جايي – پخش مناسب نبوده و بسيار پيچيده مي شود.

روش **Mac – Cormack** :

مشتق اول $f_t\big|_i^n$ با استفاده از معادله ديفرانسيل اوليه و مشتق دوم $f_{tt}\big|_i^n$ با استفاده از بسط مرتبه دوم $f_t\big|_i^n$ حول (i,n) بدست مي آيد.

$$f_t\Big|_i^{n+1} = f_t\Big|_i^n + \Delta t f_{tt}\Big|_i^n + O\left(\Delta t^2\right)$$

در نتيجه

$$f_{tt}\Big|_i^n = \left(\frac{f_t\Big|_i^{n+1} - f_t\Big|_i^n}{\Delta t}\right) + \mathrm{O}(\Delta t)$$

با جايگذاري رابطه فوق در بسط تيلور f_i^{n+1} داريم

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t f_t\big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 f_{tt}\big|_i^n + O\left(\Delta t^3\right)$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \tfrac{1}{2}\left(f_t\big|_i^n + f_t\big|_i^{n+1}\right) \qquad \mathrm{O}\left(\Delta \mathrm{t}^3\right)$$

جايگزيني مشتقهاي اول در رابطه فوق

روش حدس و اصلاح دو قدمي :

$$f_t = \left(-uf_i + \alpha f_x\right)_x$$

مرحله حدس : تفاضل پيشرو براي تمامي مشتقهاي مرتبه اول

$$f_i^{\overline{n+1}} = f_i^n + \left(-\frac{(uf)_{i+1}^n - (uf)_i^n}{\Delta x} + \frac{(\alpha f_x)_{i+1}^n - (\alpha f_x)_i^{n-1}}{\Delta x}\Delta t\right)$$

استفاده از تفاضلهاي پسرو براي مشتقهاي اول تا مشتق دوم از معادله اوليه جابه جايي پخش بوسيله تفاضلهاي مركزي تقريب شده باشد.

سادگي تعميم براي مسائل غير خطي

مرحله حدس: براي مسائل غير خطي با ضرايب ثابت

$$f_i^{\overline{n+1}} = f_i^n - c\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right) + c\left(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

مرحله اصلاح : جايگذاري مشتقهاي اول زماني توسط معادله ديفرانسيل اوليه

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \tfrac{1}{2}\left[\left(-cf + \alpha f_x\right)_x\Big|_i^n + \left(-uf + \alpha f_x\right)_x\Big|_i^{\bar{n}+1}\right]$$

استفاده از تفاضلهاي پيشرو براي جمله اول و تفاضل پسرو براي جمله دوم

$$\left(\alpha f_x\right)_i^{n+1} = \frac{\alpha_i^{\bar{n}+\bar{1}}\left(f_{i+1}^{\bar{n}+\bar{1}} - f_i^{\bar{n}+\bar{1}}\right)}{\Delta x}, \qquad \left(\alpha f_x\right)_i^n = \frac{\alpha_i^n\left(f_i^n - f_{i-1}^n\right)}{\Delta x}$$

شكل نهايي مرحله اصلاح

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \tfrac{1}{2}\left[-\frac{(uf)_{i+1}^n - (uf)_i^n}{\Delta x} - \frac{(uf)_i^{n+1} - (uf)_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\alpha fn)_{i+1}^n - (\alpha f)_i^n}{\Delta x} + \frac{(\alpha f_x)_i^{\bar{n}+\bar{1}} - (\alpha f_x)_{i-1}^{\bar{n}+\bar{1}}}{\Delta x}\right]\Delta t$$

معادله ديفرانسيل هم ارز معادله ديفرانسيل خطي

$$f_t + uf_x = \alpha f_{xx} + \left(-\frac{1}{6}u\Delta x^2 + \tfrac{1}{6}u^3\Delta t^2\right)f_{xxx} + \dots$$

روش فوق يك روش سازگار مي باشد و ميزان خطاي بريدن روش $O\left(\Delta t^2, \Delta x^2\right)$ مي باشد.

و $c \le 0.9$ $d \le 0.5$ محدوده پايداري روش Mac – Cormack

يكي از روشهاي كارا و معمول براي حل معادله جابه جايي ـ پخش مي باشد.

روشهاي حل دستگاه معادلات هذلولي (System of Hyperbolic PDE)
و معادلات هذلولي مرتبه بالا (Higher Order Hyperbolic PDE)

امكان تعميم روشهاي مطرح شده براي حل معادله هذلولي مرتبه اول (معادله جابه جايي خالص) حل معادلات مرتبه بالا و دستگاه معادلات هذلولي تعميم داد.

تبديل معادلات هذلولي مرتبه بالا به دستگاهي از معادلات مرتبه اول

معادله ديفرانسيل هذلولي مرتبه دوم (معادله موج)

$$f_{tt} = a^2 f_{xx}$$

دستگاهي از معادلات مرتبه اول.

$$f_t + a g_x = o$$
$$g_t + a f_x = o$$

معرفي تابع برداري $F = \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix}$

$$F_t + A F_x = o$$

كه در آن A نمودار ماتريس زير مي باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

روش خطوط مشخصه (Characteristic Method)

تعيين معادله خطوط مشخصه دستگاه معادلات مورد نظر.

$$f_t + a g_x = o$$

$$g_t + a f_x = o$$

ديفرانسيل كامل توابع f و g

$$df = f_t dt + f_x dx$$

$$dg = g_t dt + g_x dx$$

با استفاده از دو معادله فوق بهمراه دستگاه معادلات ديفرانسيل مورد نظر g و f محاسبه مشتقهاي اول توابع

$$\begin{bmatrix} 1 & o & o & a \\ o & a & 1 & o \\ dt & dx & o & o \\ o & o & dx & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_t \\ f_x \\ g_t \\ g_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \\ o \\ df \\ dy \end{bmatrix}$$

براي وجود مشخصه بايستي دترمينان ماتريس فوق معادل صفر باشد.

در نتيجه

$$\frac{dx}{dt} = \pm a$$

دو دسته خطوط مشخصه بوده و لذا انتشار اطلاعات در هر دو جهت مثبت و منفي محور x ها

ديفرانسيلهاي كامل df و dg

$$df = f_t dt + f_x dx = \left(f_t + \frac{dx}{dt} f_x \right) dt$$

$$dg = g_t dt + g_x dx = \left(g_t + \frac{dx}{dt} g_x \right) dt$$

در نتيجه داريم

$$\begin{bmatrix} df = (f_t + af_x)dt \\ dg = (g_t + ag_x)dt \end{bmatrix} \qquad \text{بر روي} \quad \frac{dx}{dt} = a$$

$$\begin{bmatrix} df = (f_t - af_x)dt \\ dg = (g_t - ag_x)dt \end{bmatrix} \qquad \text{بر روي} \quad \frac{dx}{dt} = -a$$

دستگاه معادلات اوليه را مي توان با جمع و تفريق آنها بصورت زير نوشت:

$$\begin{cases} (f_t + af_x) + (g_t + ag_x) = o \\ (f_t - af_x) - (g_t - ag_x) = o \end{cases}$$

بر روي خطوط مشخصه dfوdgبا توجه به تعريف

$$[df + dg = o] \qquad \text{بر روي} \quad \frac{dx}{dt} = a$$

$$[df - dg = o] \qquad \text{بر روي} \quad \frac{dx}{dt} = -a$$

دستگاه معادلات ديفرانسيل اوليه بر روي خطوط مشخصه

براي مسائل خطي با انتگرال گيري از معادله خطوط مشخصه داريم

$$x = x_o \pm a(t - t_o)$$

با انتگرال گيري از معادلات ديفرانسيل معمولي فوق مي توان جواب f و g را در نقطه فرضي (x , t) بصورت زير بدست آورد:

$$f + g = f_o + g_o = R+ \qquad \frac{dx}{dt} = a \qquad \text{روي}$$

$$f - g = f_o - g_o = R- \qquad \frac{dx}{dt} = -a \qquad \text{روي}$$

كه در آن (x_o, t_o) نمودار نقطه اي از خطوط مشخصه است كه مقادير f و g بر روي آن معلوم و بترتيب برابر g_o, f_o مي باشند. كميتهاي ثابت $R-, R+$ بنام متغيرهاي ريمن (Reiman – Variable) خوانده مي شوند. خطوط مشخصه $\frac{dx}{dt} = +a$ بنام خطوط مشخصه c^+ و خطوط مشخصه $\frac{dx}{dt} = -a$ بنام خطوط مشخصه c^- ناميده شده و اطلاعات بر روي آنها بترتيب در جهت مثبت و منفي محور x منتقل شده و لذا بنام خطوط مشخصه راست رو (Right Running) و چپ رو (Left Running) نيز خوانده مي شوند.

معادلات خطوط مشخصه براي يك مسئله غير خطي كه در آن $a=a(x,t,f,g)$ مي باشد را بايستي با استفاده از انتگرال گيري عددي (روشهاي حل معادلات ديفرانسيل معمولي) بدست آورد:

$$x = x_o \pm \int a\,dt$$

روشي سيستماتيك براي تعيين متغيرهاي ريمن

معادلات موج بر روي خطوط مشخصه

$$d(f+g)=o \qquad \frac{dx}{dt}=a$$

$$d(f-g)=o \qquad \frac{dx}{dt}=-a$$

كه در آن $R-=f-g, R+=f+g$ نمايشگر كميتها و اطلاعات منتشر شونده بر روي خطوط مشخصه مي باشند.

معادلات فوق در دستگاه مختصات(x,t)

$$R_t^+ + aR_x^+ = o$$

$$R_t^- - aR_x^- = o$$

$$R_t + A'R_x = \circ$$

كه در آن $R=\begin{Bmatrix} R^+ \\ R^- \end{Bmatrix}$ نمودار بردار متغييرهاي ريمن و $A'=\begin{bmatrix} a & o \\ o & -a \end{bmatrix}$ نمودار يك ماتريس قطري مي باشد.

دستگاه معادلاتي غير درگير مي باشد كه در آن دو كميت ريمن R^-, R^+ مستقل از يكديگر در جهات مثبت و منفي محور x منتشر مي شوند.

روش سيستماتيك : تبديل دستگاه معادلات اوليه به دستگاه معادلاتي غير درگير

دستگاه معادله غير خطي درگير

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\frac{\partial \phi}{\partial x} = o$$

كه در آن ϕ نمودار بردار متغيرها و $\underline{A}=\underline{A}(\phi,x,t)$ نمودار يك ماتريس مي باشد.

$\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ نمودار ويژه مقدارهاي ماتريس A و $x_1, x_2, ..., x_n$ نمودار ويژه بردارها

ماتريس P نمودار ماتريس ويژه بردارهاي ماتريس A $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

با استفاده از متغير برداري جديد $d\varphi = Pd\Psi$

$$P\frac{\partial \Psi}{\partial t} + A \; P\frac{\partial \Psi}{\partial x} = o$$

لذا

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + P^{-1}AP\frac{\partial \Psi}{\partial x} = o$$

با توجه به رابطه $\Lambda = P^{-1}AP$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \underline{\underline{\Lambda}}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = o$$

دستگاه معادله فوق بصورت زير نوشته مي شود

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = o$$

رابطه فوق نشان مي دهد که مولفة i ام (Ψ_i) با سرعت λ_i در جهت مثبت محور x منتشر مي شود. اين بدان معناست که (Ψ_i) نمودار يك متغيير ريمان و Ψ نمودار بردار متغيرهاي ريمن مي باشد. لازم به تذکر است که مطالب فوق در صورتي صادق است که تمامي ويژه مقدارهاي λ_i اعدادي حقيقي باشند. حقيقي بودن ويژه مقدارها در واقع به معني هذلولي بودن دستگاه معادلات است. در صورتيکه اين ويژه مقدارها تماما متمايز از يکديگر باشند در اين صورت دستگاه معادلات اوليه تمام هذلولي (Totally Hyperbolic) ناميده مي شود.

مثال : معادله موج

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\frac{\partial \phi}{\partial x} = o$$

كه در آن $A = \begin{bmatrix} o & a \\ o & a \end{bmatrix}$, $\phi = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ مي باشد. ويژه مقدارها و ويژه بردارهاي ماتريس A را مي توان از رابطه زير بدست آورد.

$$Ax = \lambda x$$

كه در آن λ نمودار ويژه مقدار و x ويژه بردار مربوطه مي‌باشد

با استفاده از تعريف ماتريس واحد (Matrix Identity)

$$[A - \lambda I]x = o$$

معادله فوق در صورتي داراي جوابهاي x غير صفر مي باشد كه

$$det|A - \lambda I| = o$$

بنابراين داريم

$$det\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = o \quad \Rightarrow \lambda^2 = a^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm a$$

ويژه بردارهاي مربوط به λ_1 و λ_2 را مي توان با استفاده از روابط زير بدست آورد

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1$$
$$Ax_2 = \lambda_2 x_2$$

با فرض $x_1 = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} o & a \\ a & o \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \qquad an = am \Rightarrow m = n$$

و لذا ويژه بردار اول بصورت زير بدست مي آيد

$$x_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

بروشي مشابه

$$x_2 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

و لذا داريم

$$P = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$$

متغيرهاي ريمن

$$\Psi = P^{-1}\phi$$

$$\Psi = +\frac{1}{2}\begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} f+g \\ f-g \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات مورد نظر بر حسب متغيرهاي ريمن

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + P^{-1}AP\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \begin{bmatrix} a & \circ \\ \circ & -a \end{bmatrix}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

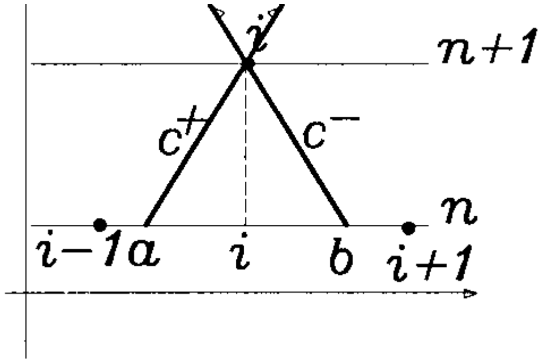
معادلات ديفرانسيل درگير اوليه به يك دستگاه معادلات غير درگير منجر مي گردند. اين دستگاه معادلات را مي توان مستقلاً حل نموده و پس از يافتن متغيرهاي ريمن، مجهولات اوليه را محاسبه نمود.

روش خطوط مشخصه براي حل دستگاه معادلات ديفرانسيل مسئله موج :

دستگاه معادلات ديفرانسيل خطي موج بر روي خطوط مشخصه

$$df + dg = 0 \qquad \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a}$$

$$df - dg = 0 \qquad \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{xt}} = -a$$



حال نقطه $(i, n+1)$ از شبكه تفاضلهاي محدود را در نظر بگيريد.

محل تلاقي خطوط مشخصه با مرحله زماني n

$$x_i = x_a + a\left(t^{n+1} - t^n\right) = x_a + a\Delta t$$

$$x_i = x_b - a\left(t^{n+1} - t^n\right) = x_b - a\Delta t$$

با استفاده از معادلات حاكم بر روي خطوط مشخصه داريم

$$f_i^{n+1} + g_i^{n+1} = f_a + g_a$$

$$f_i^{n+1} - g_i^{n+1} = f_b - g_b$$

در نتيجه داريم

$$f_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[(f_a + f_b) + (g_a - g_b)\right] \qquad \frac{d_x}{d_t} = +a \qquad \text{روي } c^+$$

$$g_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[(g_a + g_b) + (f_a - f_b)\right] \qquad \frac{d_n}{dt} = -a \qquad \text{روي } c^-$$

محاسبه مقادير مورد نظر در نقاط a و b عيناً مشابه آنچه براي معادلات اسكالر تشريح شد.

روش **FTCS** :

دستگاه معادلات مسئله موج

$$\begin{cases} f_t + a g_x = o \\ g_t + a f_x = o \end{cases}$$

صورت ماتريسي

$$F_t + AF_x = o \qquad A = \begin{bmatrix} o & a \\ a & o \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش FTCS براي معادله ديفرانسيل برداري فوق

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} + A\frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x} = o$$

لذا

$$F_i^{n+1} = F_i^n - \frac{A}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n\right)$$

رابطه فوق در واقع معادل اعمال روش FTCS براي هر يك از معادلات ديفرانسيل فوق مي باشد

$$\begin{cases} f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{c}{2}(g_{i+1}^n - g_{i-1}^n) \\ g_i^{n+1} = g_i^n - \frac{c}{2}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) \end{cases}$$

با استفاده از روش ون نيومن براي تحليل پايداري روش فوق داريم

$$F_i^{n+1} = F_i^n - \frac{A}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(e^{I\theta} - e^{-I\theta}\right)F_i^n = \left[\underline{\underline{I}} - \frac{A}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x} ISin\theta\right]F_i^n$$

در نتيجه Factor Amplification كه در اين حالت يك ماتريس است بصورت زير بدست مي آيد

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{Icsin}\theta \\ -\mathrm{Icsin}\theta & 1 \end{bmatrix}$$

شرط لازم براي پايداري روش اين است كه ويژه مقدارهاي λ ماتريس فوق همواره از يك كوچكتر باشند.

ويژه مقدارهاي ماتريس G را مي توان بصورت زير بدست آورد

$$det\left|\underline{\underline{G}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right| = o$$

در نتيجه داريم

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -Icsin\theta \\ -Icsin\theta & 1-\lambda \end{vmatrix} = o$$

و لذا

$$(1-\lambda)^2 + c^2 Sin^2\theta = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm IcSin\theta$$

بنابراين

$$|\lambda| = \left(1 + c^2 Sin^2\theta\right)^{1/2}$$

رابطه فوق بازاي تمامي مقادير مثبت c بزرگتر از يك بوده و لذا روش ناپايدار مي باشد.

روش **Upwind** :

اعمال روشهاي Upwind براي معادلات اسكالر براحتي صورت مي گيرد.

$$f_t + uf_x = o$$

f كميتي است كه بر روي خطوط مشخصه منتقل مي گردد

در دستگاه معادلاتي از نوع معادلات زير

$$f_t + ag_x = o$$

$$g_t + af_x = o$$

كميتهاي f و g نمودار كميتهاي منتقل شونده نمي باشند.

براي استفاده از روشهاي Upwind لازم است كه معادلات بصورتي مناسب نوشته شوند.

معادلات ديفرانسيل برحسب متغيرهاي ريمن

$$R_t^+ + aR_x^+ = o$$

$$R_t^- - aR_x^- = o$$

جايگزيني متغيرهاي ريمن در روابط

$$(f+g)_t + a(f^+ + g^+)_x = \circ$$

$$(f-g)_t - a(f^- - g^-)_x = \circ$$

با حل معادلات فوق براي f_t, g_t داريم

$$f_t + \frac{a}{2}(f_x^+ - f_x^-) + \frac{a}{2}(g_x^+ + g_x^-) = o$$

$$g_t + \frac{a}{2}(f_x^+ + f_x^-) + \frac{a}{2}(g_x^+ - g_x^-) = o$$

شكل مناسب براي اعمال روش Upwind

با استفاده از تفاضل پيشرو براي مشتق زماني و تفاضل پسرو براي مشتقهاي x^+ و پيشرو براي مشتقهاي x^-

$$\begin{cases} f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{c}{2}(g_{i+1}^n - g_{i-1}^n) + \frac{c}{2}(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) \\ g_i^{n+1} = g_i^n - \frac{c}{2}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{c}{2}(g_{i+1}^n - 2g_i^n + g_{i-1}^n) \end{cases}$$

ويژه مقدارهاي Amplification Mtrix

$$\lambda = (1-c) + c\cos\theta - Ic\sin\theta$$

معادله دايره اي به شعاع c و مركز $[(1-c),o]$ و لذا شرط پايداري به رابطه $c \le 1$ منجر مي شود.

شرايط مرزي دستگاه معادلات ديفرانسيل هذلولي (**Boundary Conditions**):

شرايط مرزي معادلات ديفرانسيل هذلولي اسكالر

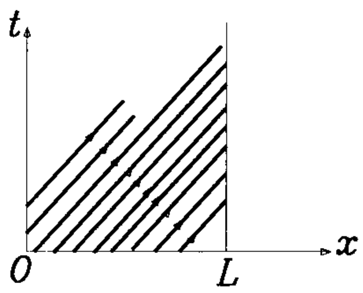
$$f_t + uf_x = o \qquad o \le x \le L$$

يك شرط مرزي بر روي يكي از مرزهاي محدوده

معادله فوق بيانگر انتشار كميت f در جهت مثبت (u>o) يا منفي (u<o) محور xها

مقدار جواب در يكي از مرزها بوسيله توزيع آغازين تابع مجهول در زمان t = t تعيين مي شود

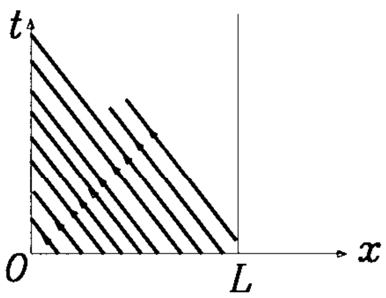
بدين ترتيب با فرض مثبت بودن u



$f = \bar{f}_L$ در Γ_L

$f =$ آزاد در Γ_R

با فرض منفي بودن u



$f =$ آزاد در Γ_L

$f = \bar{f}_R$ در Γ_R

معادله ديفرانسيل غير خطي (u=u(x,t,f.

$$\Gamma_L \quad \begin{cases} f = \bar{f}_L & u_L > 0 \\ f = \text{آزاد} & u_L < 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_R \quad \begin{cases} f = \text{آزاد} & u_R < 0 \\ f = \bar{f}_R & u_R > 0 \end{cases}$$

اعمال شرايط مرزي براي دستگاه معادلات غير خطي:

بايستي ابتدا تعداد شرايط مرزي مجاز در هر مرز را تعيين نمود

جهات انتشار متغيرهاي ريمن (همان ويژه مقدارهاي ماتريس A يعني λ_2, λ_1) تابعي از مقادير توابع f و g بوده و لذا متغيرهاي ريمن مي توانند هم جهت باشند.

مثال: معادلات حاكم بر انتشار امواج در آبهاي كم عمق

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_x = 0$$

معادلات فوق را مي توان بر حسب متغيرهاي ريمن بصورت زير نوشت

$$\begin{bmatrix} 2c+u \\ 2c-u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u+c & 0 \\ 0 & u-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2c+u \\ 2c-u \end{bmatrix}_x = 0$$

كه در آن $c = \sqrt{gh}$ نمودار سرعت انتشار امواج مي باشد. مشاهده مي شود كه جهت انتشار متغيرهاي ريمن (يعني علامت u + c و u – c) تابعي از جوابهاي (c, u) بوده لذا متغيرهاي ريمن ممكن است در يك جهت و يا جهات مخالف منتشر شوند. در حالت اول جرياني به نام فوق بحراني (Super – critical) و در حالت دوم جريان بنام زير بحراني(Sub – Critical) ناميده مي شود. جريانهاي فوق در زمينه مسائل هوا – فضا به جريانهاي مافوق صوت (Supersonic) و مادون صوت (Subsonic) نامگذاري شده اند. تعداد شرايط مرزي لازم در مرزهاي سمت چپ و راست بصورت زير تعيين مي گردد.

نوع جریان	تعداد خطوط مشخصه ورودی	تعداد شرایط مرزی	
			Γ_L از مرز ورودي (Inflow Boundanry)
u>c (فوق رانی)	2	2	
u<c (زیر رانی)	1	1	
			Γ_R از مرز خروجي (Outflow Boundary)
u>c (فوق رانی)	0	0	
u<c (زیر رانی)	1	1	

روش جداسازي بردار شار (**Flux-Vector-Splitting Method**)

روشيupwind براي دستگاه معادلات غير خطي چند بعدي

استفاده از روشهاي معمول upwind براي دستگاه معادلات غير خطي چند بعدي بيش از حد پيچيده است
روش جداسازي بردار شار (Flux-Vector-Splitting Method) روشي سيستماتيك است كه در آن بدون نياز به تحليل مشخصه اي از معادلات ديفرانسيل مي توان جهت انتشار اطلاعات را تشخيص داد

معادلات ديفرانسيل موج

$$f_t + a g_x = 0$$

$$g_t + a f_x = 0$$

$$F_t + \underline{\underline{A}} F_x = 0$$

شكل باصطلاح پايستار (Conser vative Form)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

بردار شار (Flux-Vector)

$$E = \begin{Bmatrix} ag \\ af \end{Bmatrix}$$

اكثر معادلات ديفرانسيل حاكم بر مسائل فيزيكي نتيجه قوانين فيزيكي پايستاري (جرم، ممنتم، انرژي و غيره)

ماتريس ژاكوبي

$$A = \frac{\partial E}{\partial F} = \begin{bmatrix} o & a \\ a & o \end{bmatrix}$$

اگر Λ نمودار ماتريس ويژه مقدارهاي A و S نمودار ماتريس ويژه بردارهاي مربوطه باشد

$$\Lambda = S^{-1} A S \qquad A = S \Lambda S^{-1}$$

در اين مورد خاص

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تجزيه ماتريس ويژه مقدارها

$$\Lambda = \Lambda^{+} + \Lambda^{-} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

تجزيه ماتريس جاكوبي A

$$A = S\Lambda S^{-1} = S(\Lambda^{+} + \Lambda^{-})S^{-1} = S\Lambda^{+}S^{-1} + S\Lambda^{-}S^{-1} = A^{+} + A^{-}$$

كه در آن

$$A^{+} = S\Lambda^{+}S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \qquad A^{-} = S\Lambda^{-}S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -a & a \\ a & -a \end{bmatrix}$$

تجزيه بردار شارE

$$E = \underline{\underline{A}}\,\underline{F} = \left(A^{+} + A^{-}\right)\underline{F} = A^{+}F + A^{-}F = E^{+} + E^{-}$$

و بدين ترتيب

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial E^{+}}{\partial x} + \frac{\partial E^{-}}{\partial x} = o$$

بردار E^{+} تنها شامل كميتهاي منتشر شونده در جهت مثبت و بردار E^{-} شامل كميتهاي منتشر شونده در جهت منفي محور x مي باشند.

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial E^{+}}{\partial x}+\frac{\partial E^{-}}{\partial x}=o$$

تفاضل پيشرو براي مشتق اول زماني تفاضل پسرو براي مشتق مكاني E^{+} و تفاضل پيشرو براي مشتق مكاني E^{-}

$$F_i^{n+1}=F_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(E^{+}\Big|_i^n-E^{+}\Big|_{i-1}^n\right)-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(E^{-}\Big|_{i+1}^n-E^{-}\Big|_i^n\right)$$

معادلات ناويراستوكس

معادلات ناويراستوكس معادلاتي از نوع سهموي – بيضوي بوده و لذا بنظر مي رسد كه بااستفاده از روشهاي مطرح شده در بخشهاي قبل مي توان اين معادلات را حل نمود.

چه نيازي به طرح روشهاي حل اين معادلات بگونه اي مستقل مي باشد.

مشكل اساسي در حل معادلات ناويراستوكس، و در حقيقت معادلات ممنتم، وجود جمله فشار در معادلات ممنتم است بدون وجود معادله اي مربوط به آن - نحوه پيداكردن فشارها چندان واضح و روشن نيست.

محاسبه ميدان فشار بصورتي غير مستقيم با استفاده از معادله پيوستگي

استفاده ا ز اين روش غير مستقيم براي محاسبه فشار به معني لزوم حل تمامي معادلات گسسته سازي شده بطور همزمان در تمامي نقاط شبكه مي باشد كه اين خود مستلزم حل دستگاه معادلاتي با ابعاد بسيار بزرگ مي باشد.

روش تابع جريان- ورتيستي فشار را از معادلات ممنتم حذف كرده تابدين ترتيب امكان حل معادلات ممنتم صرفنظر از معلوم يا مجهول بودن فشار فراهم گردد. ولي اين روش با مشكلاتي در اعمال شرايط مرزي مواجه بوده و مهمتر از همه امكان تعميم آن براي جريانهاي سه بعدي وجود ندارد زيرا كه جريانهاي سه بعدي داراي تابع جريان نمي باشند. در عين حال امكان تعميم روش با استفاده از تابع پتانسيل بجاي تابع جريان موجود بوده ولي پيچيدگي روش افزايش يافته وعلاوه بر اين در چنين حالتي بايستي شش معادله، 3 معادله براي ورتيستي و 3 معادله براي تابع پتانسيل، را بجاي چهار معادله ، 3 معادله ممنتم و يك معادله پيوستگي، حل نمود.

مشكلات استفاده شكل $(u-v-p)$ معادلات :

معادله يك بعدي ممنتم در جهت محور x را در نظر بگيريد.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

تنها تفاوت اين معادله با معادلات بررسي شده قبلي وجود جمله $-\frac{\partial p}{\partial x}$ مي باشد.

شكل گسسته سازي شده جمله $-\frac{\partial p}{\partial x}$ در نقطه نمونه i

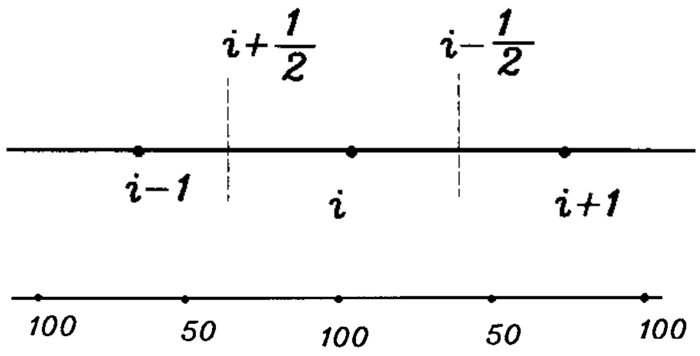
$$\left(p_{i+\frac{1}{2}}-p_{i-\frac{1}{2}}\right)/\Delta x$$

نمايشگر افت فشار و يا بعبارت ديگر فشار خالص وارده بر حجم سيال واقع در محدوده $i-\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}$

افت فشار فوق بر حسب مقادير گرهي فشار

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{p_{i+1}-p_{i-1}}{2\Delta x}$$

افت فشار براي توزيعي زيگزاگي $p_{i+1}=p_{i-1}$ معادل صفر بوده و معادله ممنتم، چنين توزيعي را مانند يك توزيع يكنواخت فشار منظور خواهد نمود.



مشكلي مشابه در گسسته سازي معادله پيوستگي

معادله پيوستگي يك بعدي

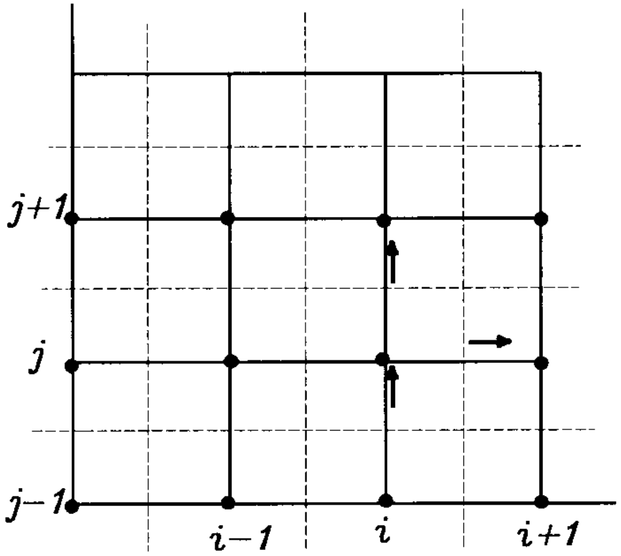
$$\frac{\partial u}{\partial x} = o$$

گسسته سازي آن در يك نمونه از شبكه

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = 0$$

يك ميدان سرعت زيگزاگي نيز معادله پيوستگي را تأمين مي نمايد و از نظر معادله پيوستگي بعنوان يك ميدان سرعت يكنواخت منظور مي شود.

شبكه جا به جا شده **(Staggered Grid)**:
آن استفاده از شبكه هاي متفاوتي براي هر يك از متغيرهاي مستقل شبكه مولفه هاي سرعت به اندازه $\frac{\Delta y}{2}, \frac{\Delta x}{2}$ بترتيب در جهت مولفه هاي سرعت نسبت به شبكه مورد استفاده براي فشار جابجا شده اند.
نقاط شبكه مولفه هاي سرعت برنقاط مياني وجوه حجم كنترل مربوط به هر يك از نقاط شبكه اصلي كه فشار در آنها محاسبه مي شود. قرار گرفته اند.



نقاط فشار، مولفه سرعت u و مولفه سرعت v $\uparrow, \rightarrow, \circ$

محاسن :

شار جرمي (Mass Flux) ورودي از طريق هر يك از وجوه حجم كنترل به داخل آن را مي توان مستقيماً و بدون نياز به درونيابي مولفه هاي سرعت محاسبه كرد.

معادل پيوستگي گسسته سازي شده در چنين شبكه اي بر حسب مولفه هاي سرعت در نقاط مجاور شبكه نوشته خواهد شد ولذا از بوجود آمدن توزيع موجي يا زيگزاگي سرعتها جلوگيري مي نمايد.

تفاوت فشار بين دو نقطه مجاور نقش نيروي رانش براي مولفه هاي سرعت بين اين نقاط فشار را خواهد داشت و لذا در چنين شبكه اي امكان بوجود آمدن توزيع موجي يا زيگزاگي فشار نيز وجود نخواهد داشت.

روش معادله پواسون فشار(***Poisson Equation for Pressure***):

استفاده از معادله پواسون فشار كه با استفاده از معادلات ممنتم وپيوستگي

شكل نهايي معادلات

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u)^2}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=\frac{-\partial P}{\partial x}+\nu\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (v^2)}{\partial y}=\frac{-\partial P}{\partial y}+\nu\nabla^2 v$$

$$\nabla^2 P=-\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 (uv)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 (v^2)}{\partial y^2}-\frac{\partial D}{\partial t}+\nu\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)$$

كه در آن $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ نمودار انبساط جريان مي‌باشد.
معادلات ممنتم از نوع معادله ورتيستي ومعادله فشار از نوع معادله تابع جريان
علت منظور نمودن جمله انبساطي D در رابطه فوق اين است كه چون معادلات فوق غيرخطي بوده ولذا از روشهاي تكراري براي حل معادلات تفاضلهاي محدود آنها استفاده مي‌شود لذا جوابهاي حاصل عموماً رابطة $D_{i,j} = 0$ را تامين نمي‌نمايند. منظور كردن D در رابطه فشار باعث مي‌شود تا تأثيرات ناشي از $D_{i,j} \neq 0$ در مقدار فشار منظور گردد. اعمال D=0 در رابطه فشار ممكن است به انبار شدن خطاها ودر نتيجه ناپايداري غيرخطي معادلات ممنتم منجر گردد.

شرايط مرزي معادلات ناويراستوكس

شرايط مرزي در يك ديوار غيرسر $u_w = v_w = 0$

شرايط مرزي يك ديوار سر بسادگي با صفر بودن سرعت در جهت عمود بر ديوار بيان مي‌شود.
در مرز ورودي توزيع $u=u(y)$ معلوم است وهمچنين در صورتيكه اطمينان كافي از يك بعدي بودن جريان در اين مرز داشته باشد مي‌توان از رابطه $v=0$ براي مؤلفه ديگر سرعت استفاده نمود. در غير اين صورت مي‌توان از رابطه $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ استفاده نمود كه امكان تعيين توزيع مؤلفه v بوسيله خود جريان را فراهم مي‌سازد.
اگر توزيع u در مرز خروجي معلوم باشد در اين صورت مي‌توان از آن به همراه $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ در اين مرز استفاده نمود. در غير اين صورت شرط $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ در مرز خروجي به رابطه مرتبه اول زير منجر مي‌گردد.

از طرف ديگر شرط فوق به رابطه زير منجر مي‌گردد

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_I = 0 \Rightarrow v_{I-1} = v_I$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_I = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{I-1} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{I-1/2}$$

معادله فوق را مي‌توان با استفاده از مقادير جواب در نقاط داخلي شبكه محاسبه نمود. حال با استفاده از معادله پيوستگي داريم

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{I-1/2} = -\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{I-1/2} = -\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{I-1}$$

در نتيجه

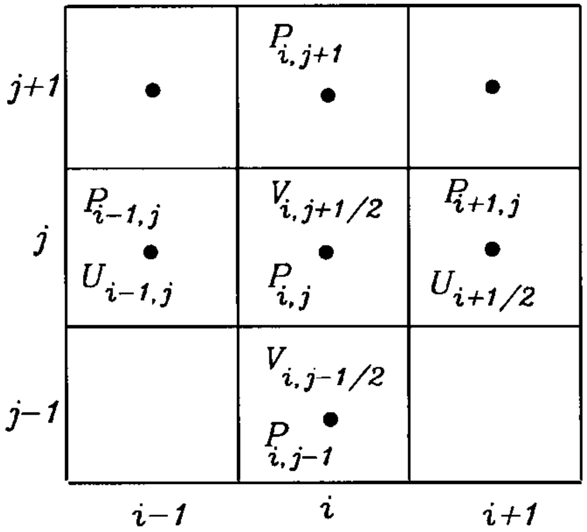
$$u_{I,j} = u_{I-1,j} - \frac{\Delta x}{2\Delta y}(v_{I-1,j+1} - v_{I-1,j-1})$$

به اين ترتيب مشاهده مي‌شود كه شرط مرزي u را مي‌توان با استفاده از مقادير داخلي v,u محاسبه نمود.

شرايط مرزي فشار كماكان مشابه شرايط مرزي فشار تشريح شده براي معادلات ورتيستي - تابع جريان مي‌باشد.

روش ***MAC(Marker and Cell)***:

معادلات مورد استفاده در اين روش معادلات ممنتم ومعادله پواسون فشار مي‌باشد و روش گسسته سازي معادلات مورد نظر اساساً همان روش $FTCS$ مي‌باشد.



شبکه تفاضلهاي محدود : فشار در مرکز سلول بعنوان نقاط شبکه .
سرعتهاي u در وسط وجوه راست وچپ سلول ومؤلفه‌هاي v در وسط وجوه بالا وپايين سلول تعريف مي‌شوند
مشتقهاي معادلات با استفاده از تفاضلهاي پيشرو وتفاضلهاي مرکزي محاسبه مي‌شوند.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} - u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|^{n}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{p^{n}_{i+1,j} - p^{n}_{i,j}}{\Delta x^{2}}$$

$$\left.\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}\right|^{n}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x^{2}}$$

محاسبه مشتقهاي اول چون مشتق زير

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\Big|^{n}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u^2_{i+1,j} - u^2_{i,j}}{\Delta x}$$

مستلزم تعريف سرعت u در نقاط شبكه مربوط به فشار مي‌باشد. اين مقادير با استفاده از ميانگين‌گيري بدست مي‌آيند.

$$U_{i+1,j} = \frac{1}{2}(U_{i+\frac{3}{2},j} + U_{i+\frac{1}{2},j})$$

بدين ترتيب معادلات نهايي گسسته‌سازي شده بصورت زير نوشته مي‌شوند

$$U^{n+1}_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+\frac{1}{2},j} + \Delta t\Bigg\{-\frac{U^2_{i+1,j} - U^2_{i,j}}{\Delta x} - \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

$$-\frac{p_{i+1,j} - p_{ij}}{\Delta x} + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{U_{i+\frac{3}{2},j} - 2U_{i+\frac{1}{2},j} + U_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2U_{i+\frac{1}{2},j} + U_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\Delta y^2}\right)\Bigg\}$$

$$V^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = U_{i,j+\frac{1}{2}} + \Delta t\Bigg\{-\frac{V^2_{i+1,j} - V^2_{i,j}}{\Delta y} - \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

$$-\frac{p_{i,j+1} - p_{ij}}{\Delta y} + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{V_{i,j+\frac{3}{2}} - 2V_{i,j+\frac{1}{2}} + V_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} + \frac{V_{i+1,j+1} - 2V_{i,j+\frac{1}{2}} + V_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2}\right)\Bigg\}$$

گسسته‌سازي معادله فشار بصورت زير صورت مي‌پذيرد

$$\frac{\partial D}{\partial t}\Big|^{n}_{i,j} = \frac{D^{n+1} - D^{n}}{\Delta t}\Big|_{i,j} = -\frac{D_{i,j}}{\Delta t}$$

که در آن مقدار D^{n+1} معادل صفر منظور شده است. جمله واداري (Forcing Term) از معادله پواسون فشار بصورت زيرگسسته‌سازي مي‌شود.

$$\nabla^2 p = \frac{U_{i+1,j}^2 - 2U_{i,j}^2 + U_{i-1,j}^2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta x \Delta y}\Big[(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

$$+ (uv)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\Big] + \frac{V_{i,j+1}^2 - 2V_{ij}^2 + V_{i,j-1}^2}{\Delta y^2} - \frac{D_{ij}}{\Delta t} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{D_{i+1,j} - 2D_{i,j} + D_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{D_{i,j+1} - 2D_{ij} + D_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right]$$

که در آن

$$D_{ij} = \frac{U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{V_{i,j+1/2} - V_{i,j-1/2}}{\Delta y}$$

اعمال شرايط مرزي براي مؤلفه‌هاي u,v كمي متفاوت از شبكه غير جابجاشده (*Non-Staggered* Grid) مي‌باشد. بعنوان مثال در يك ديوار غيرسر داريم

$$u_w = 0 \Rightarrow u_{i-\frac{1}{2},w} = u_{i+\frac{1}{2},w} = 0$$

$$v_w = 0 \Rightarrow v_{i,w} = \frac{1}{2}\left(v_{i,w+\frac{1}{2}} + v_{i,w-1/2}\right) = 0$$

در نتيجه

$$v_{i,w+\frac{1}{2}} = -v_{i,w-1/2}$$

بدين ترتيب با تعريف سرعت v در نقطه موهومي داخل ديوار مي‌توان شرط مرزي $v_{i,\omega} = 0$ را اعمال نمود. بقيه شرايط مرزي مشابه شرايط مرزي تشريح شده در شبكه غيرجابجا شده مي‌باشد.

روشهاي اصلاح فشار (***Pressure Corection Methods***):

نسخة صريح:

استفاده از عملگرهاي ديفرانسيلي براي نمايش معادلات ناويراستوكس

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A(V) = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 V$$

$$\nabla . V = 0$$

كه در آن V نمودار بردار سرعت، .∇ عملگرديور جنس، ∇ عملگرگراديان و A نمودار عملگر جابجايي موجود در معادله ناويراستوكس مي‌باشد.

گسسته سازي معادلات ممنتم بدون منظور نمودن جمله فشار و محاسبه مقادير حدسي سرعت

$$\frac{V^* - V_n}{\Delta t} + A(V^n) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 V^n$$

اصلاح مقادير حدسي سرعت با استفاده از معادلات زير

$$\frac{V^{n+1} - V^*}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = \circ$$

استفاده از رابطه فوق مستلزم محاسبه p^{n+1} مي‌باشد. بدين منظور با اعمال عملگرديورجنس بر روي معادله فوق داريم

$$\frac{1}{\Delta t}(\nabla.V^{n+1}-\nabla.V^{*})=-\nabla^{2}p^{n+1}$$

با توجه به رابطه پيوستگي $\nabla.V^{n+1}=0$ معادله فوق به رابطه زير براي فشار تبديل مي‌گردد

$$\nabla^{2}p^{n+1}=\frac{1}{\Delta t}\nabla.V^{*}$$

با محاسبه فشار p^{n+1} مي‌توان مقادير V^{n+1} را محاسبه نموده ومحاسبات را براي زمانهاي بعدي تكرار نمود

روش **SIMPLE** (***Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equation***):

معادلات ناويراستوكس در شكل فشرده

$$\frac{\partial V}{\partial t}+A(V)=-\nabla p+\frac{1}{Re}\nabla^{2}V$$

$$\nabla.V=0$$

استفاده از روشي ضمني براي گسسته سازي زماني معادلات ممنتم

$$\frac{V^{n+1}-V^{n}}{\Delta t}+A(V^{n+1})=-\nabla p^{n+1}+\frac{1}{Re}\nabla^{2}V^{n+1}$$

بديهي است در صورتيكه توزيع واقعي فشار p^{n+1} معلوم باشد در اين صورت حل معادلات ممنتم براي بدست آوردن V^{n+1} كار بسيار ساده‌اي خواهد بود.

در صورت استفاده از توزيع فشار حدسي p^{n} جوابهاي بدست آمده براي سرعت نيز جوابهايي حدسي خواهند بود

$$\frac{V_\circ^{n+1}-V^n}{\Delta t}+A(V_\circ^{n+1})=-\nabla p_\circ^{n+1}+\frac{1}{Re}\nabla^2 V_\circ^{n+1}$$

براي بهتر كردن جوابهاي حدسي، با تفريق روابط فوق داريم

$$\frac{V^{n+1}-V_\circ^{n+1}}{\Delta t}+A(V^{n+1})-A(V_\circ^{n+1})=-\nabla(p^{n+1}-p_\circ^{n+1})+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(V^{n+1}-V_\circ^{n+1})$$

در صورتيكه از جملات جابجايي وپخش صرفنظر شود در اين صورت

$$V'=-\Delta t\nabla p'$$

$V'=V^{n+1}-V_\circ^{n+1},\ p'=p^{n+1}-p_\circ^{n+1}$ نمودار مقادير اصلاحي فشار وسرعت مي‌باشند.

محاسبه V' مستلزم داشتن مقادير p' مي‌باشد. معادله اصلاح فشار با گرفتن ديور جنس از طرفين رابطه فوق حاصل مي‌شود

$$\nabla.V'=\nabla.(V^{n+1}-V_\circ^{n+1})=-\Delta t\nabla^2 p'$$

با اعمال رابطه پيوستگي $\nabla.V^{n+1}=0$

$$\nabla^2 p'=\frac{1}{\Delta t}\nabla.V_\circ^{n+1}$$

بدين ترتيب با داشتن معادلات اصلاح فشار وسرعت مي‌توان بصورت زير عمل نمود.

1)ابتدا توزيعي حدسي براي فشار $p_{\circ}^{n+1}$ انتخاب شده وسپس با استفاده از معادله ممنتم توزيع حدسي $v_{\circ}^{n+1}$ محاسبه مي‌گردد.

2)مقدار اصلاح فشار با استفاده از معادله مربوطه محاسبه مي‌گردد.

3) مقدار اصلاح سرعت با استفاده از معادله اصلاح سرعت بدست مي‌آيد.

4)مقادير اصلاح شده سرعت $(V_{\circ}^{n+1}+V^{/})$ وفشار $(p_{\circ}^{n+1}+p')$ بعنوان مقادير حدسي منظور شده وعمليات فوق تكرار مي‌گردند تا جوابها همگرا شده ومقادير اصلاحي $(p^{/},V^{/})$ معادل صفر شود. جوابهاي بدست آمده نمودار مقادير مورد نظر p^{n+1},V^{n+1} بوده وعمليات براي مراحل زماني بعد بصورتي مشابه تكرار مي‌گردد.

Compressible NS Equations:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}})$$

$$\overline{\overline{\tau}} = \mu \left[(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^{\,\mathrm{T}}) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} I \right]$$

-The advection term is non-linear
-The mass and momentum equations are coupled (via the velocity)
-The pressure appears only as a source term in the momentum equation
-No evolution equation for the pressure
-There are four equations and five unknowns (ρ, *V*, *p*)
- Pressure can be related to density and velocity in compressible and incompressible flow respectively

Solution of NS equations:

-Pressure-velocity coupling Method(unsteady problems)

- EXPLICIT scheme
- IMPLICIT scheme

-Pressure correction schemes (steady problems)

-SIMPLE

-SIMPLEC

-PISO

Explicit scheme for NS equations

Semi-discrete form of the NS

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\delta(\rho u_i u_j)}{\delta x_j} + \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta x_i} - \frac{\delta p}{\delta x_i} = H_i - \frac{\delta p}{\delta x_i}$$

Explicit time integration

$$(\rho u_i)^{n+1} - (\rho u_i)^n = \Delta t \left(H_i^n - \frac{\delta p}{\delta x_i}^n \right)$$

The n+1 velocity field is NOT divergence free

$$\frac{\delta (\rho u_i)^{n+1}}{\delta x_i} \neq 0$$

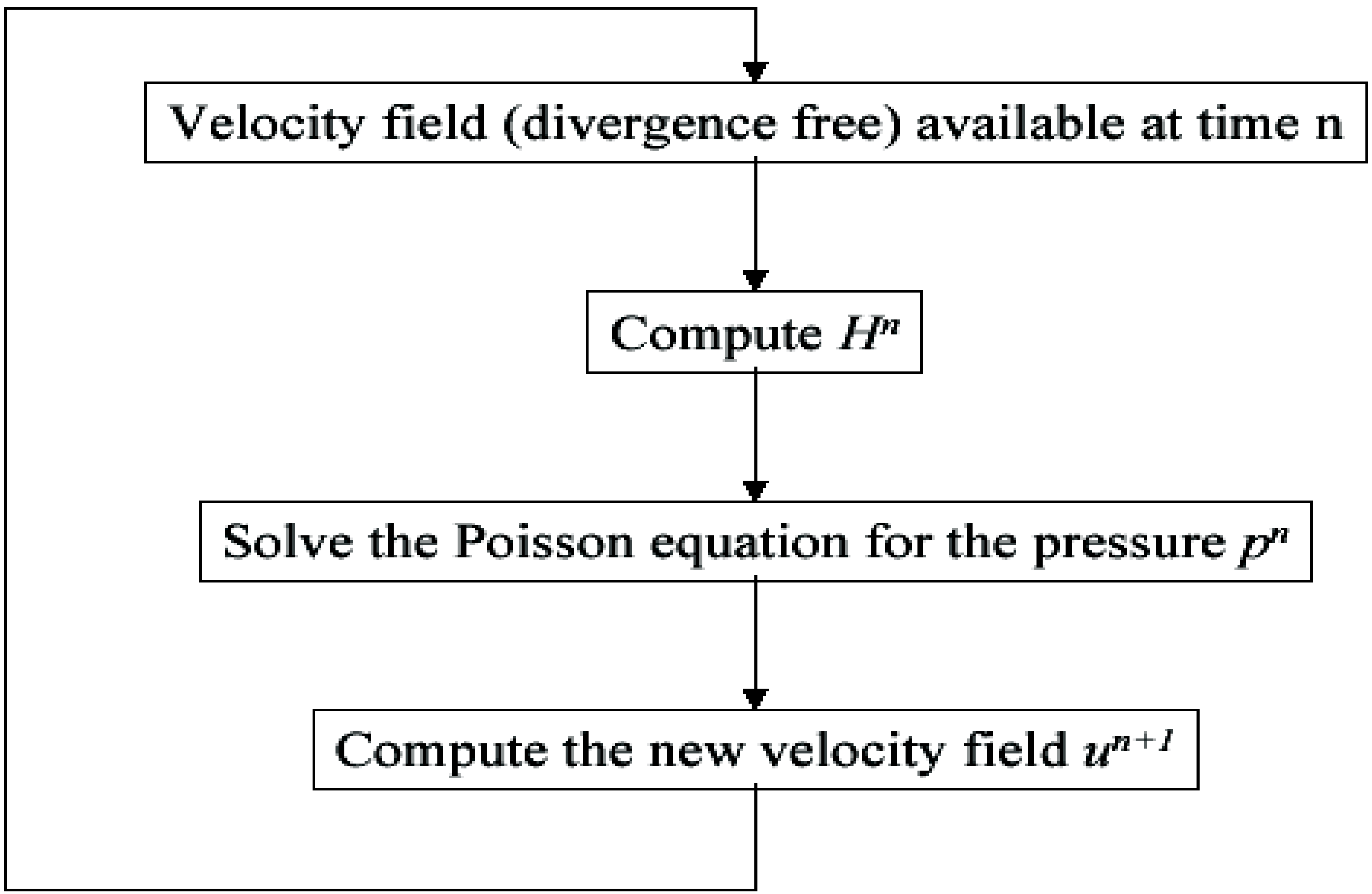
Take the divergence of the momentum

$$\frac{\delta}{\delta x_i}(\rho u_i)^{n+1} - \frac{\delta}{\delta x_i}(\rho u_i)^n = \Delta t \frac{\delta}{\delta x_i}\left(H_i^n - \frac{\delta p}{\delta x_i}^n \right)$$

Elliptic equation for the pressure

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left(\frac{\delta p^n}{\delta x_i}\right) = \frac{\delta}{\delta x_i} H_i^n$$

Explicit pressure-based scheme for NS equations



Implicit scheme for NS equations

-Semi-discrete form of the NS

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\delta(\rho u_i u_j)}{\delta x_j} + \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta x_i} - \frac{\delta p}{\delta x_i} = H_i - \frac{\delta p}{\delta x_i}$$

-Implicit time integration

$$(\rho u_i)^{n+1} - (\rho u_i)^n = \Delta t \left(H_i^{n+1} - \frac{\delta p}{\delta x_i}^{n+1} \right)$$

-Take the divergence of the momentum

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left(\frac{\delta p^{n+1}}{\delta x_i}\right) = \frac{\delta}{\delta x_i} H_i^{n+1}$$

The equations are coupled and non-linear

Steady state solution of N-S equations:

Mom. Equations

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Reference Quantities

$$\tilde{t} = \frac{t}{T} \qquad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L} \qquad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{U} \qquad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}$$

Non dimensional Eqn

$$St\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Implicit scheme for steady NS equations

Compute an intermediate velocity field (eqns are STILL non-linear)

$$a_P(u_i)_P^* = \sum_f a_f(u_i^* \cdot n_i)_f - \frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x_i}^n$$

Define a velocity and a pressure correction

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^* + u' \\ p^{n+1} = p^n + p' \end{cases}$$

Using the definition and combining

$$\begin{cases} a_P(u_i)_P^{n+1} = \sum_f a_f(u_i^{n+1} \cdot n_i)_f - \frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x_i}^{n+1} \\ a_P(u_i)_P^* = \sum_f a_f(u_i^* \cdot n_i)_f - \frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x_i}^n \end{cases}$$

Derive an equation for u’

$$a_P(u_i)'_P = \sum_f a_f[(u_i^{n+1} - u_i^*)\cdot n_i]_f - \frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x_i}'$$

$$(u_i)'_P = (\tilde{u_i})' - \frac{1}{a_P}\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x_i}'$$

Taking the divergence…

$$\frac{\delta}{\delta x_i}(u_i)_P^{n+1} = 0 = \frac{\delta}{\delta x_i}(u_i)_P^* + \frac{\delta}{\delta x_i}(u_i)'_P$$

$$0 = \frac{\delta}{\delta x_i}(u_i)_P^* + \frac{\delta}{\delta x_i}(\tilde{u_i})' - \frac{\delta}{\delta x_i}\left(\frac{1}{a_P}\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x_i}'\right)$$

We obtain a Poisson system for the pressure correction…
Solving it and computing a gradient:

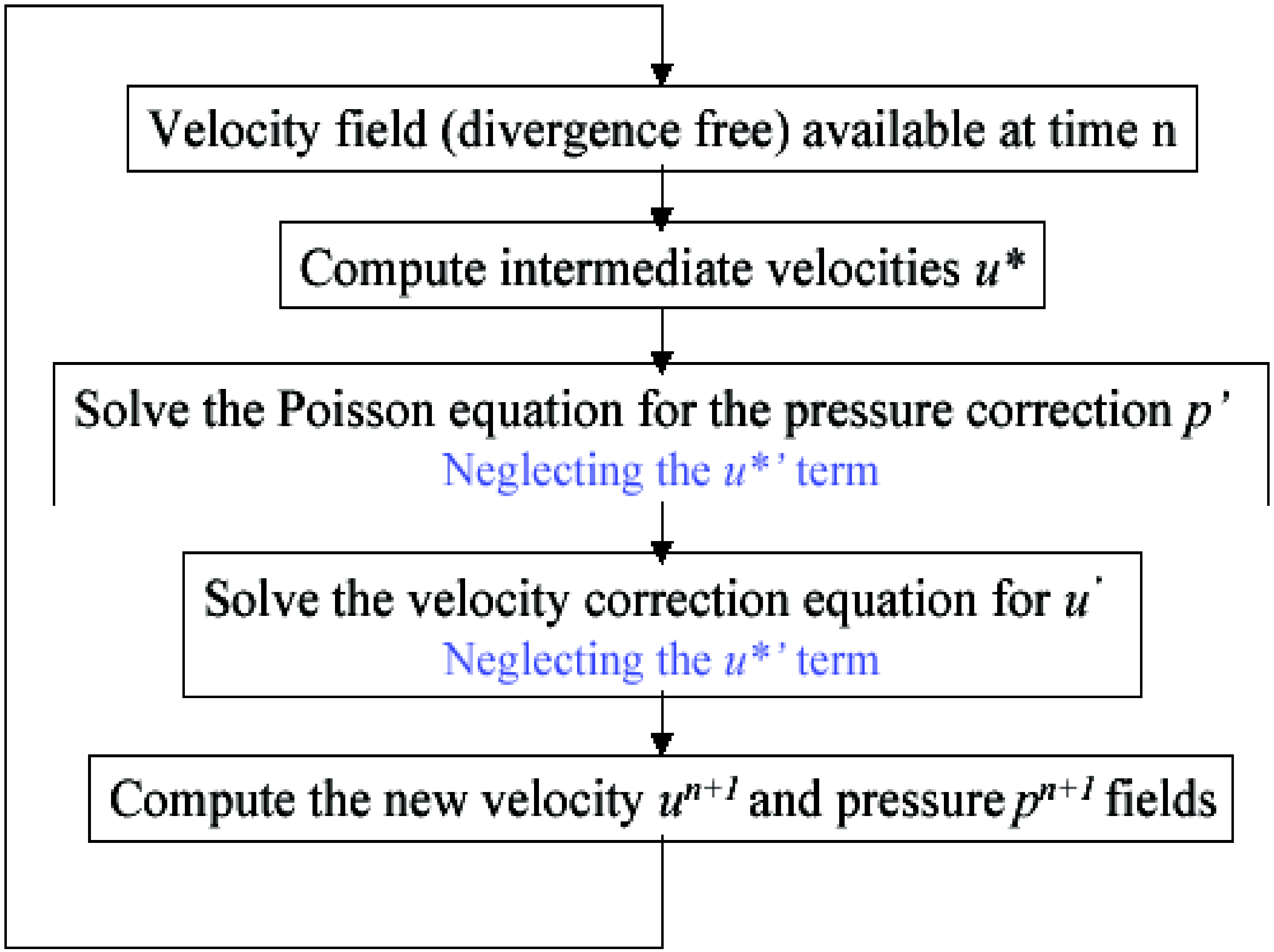
$$(u_i)'_P = (\tilde{u_i})' - \frac{1}{a_P}\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x_i}'$$

So we can update $u^{n+1} = u^* + u'$

And also the pressure at the next level $p^{n+1} = p^n + p'$

Implicit pressure-based scheme for NS equations (SIMPLE)

SIMPLE: Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations



Implicit pressure-based scheme for NS equations (PISO)

PISO: Pressure Implicit with Splitting Operators