مباحث درس:

1. مقدمه‌ای بر فرآیندهای تصادفی
2. معرفی فرآیندهای تصادفی
3. طیف توان و سیستم‌های خطی در فرآیندهای تصادفی
4. فرآیند با باند محدود و فرآیند گسسته زمان
5. تئوری تخمین

مراجع:

1. A. papulis, prob., Random variables and stochastic prosses "MC GrawHill 2002
2. P.Z. Peebles, "Prob., Random varibles and Random signals principles", McGrowHill " 2001

نحوه ارزیابی:

میان‌ترم (۴۰ درصد) از مباحث ۱ و ۲

پایان‌ترم (۵۰ درصد) عمدتاً از مباحث ۳ و ۴ و ۵

نمره کلاسی (۱۰ درصد) عمدتاً تکالیف و حضور فعال در کلاس

اثر مشاهده پرتلاش ← TA

* تئوری بر فرآیندهای تصادفی:

۱ـ مفاهیم اساسی در تئوری احتمال:

۱-۱ تعریف فضای نمونه و پیشامد.

الف) فضای نمونه: مجموعه متشکل از کلیه نتایج مختلف در آزمایش تصادفی

Sample space

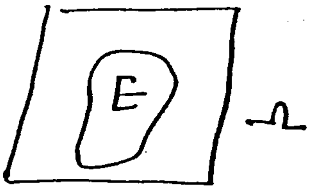
$\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$

* آزمایش تصادفی: آزمایشی که بتواند به نتایج محتمل ξ_1 و ξ_2 و ... منجر شود و نتیجه اش از قبل معلوم نباشد.

ب) پیش آمد (event): مجموعه ای از برخی از نتایج آزمایش تصادفی. زیرمجموعه ای از فضای نمونه.

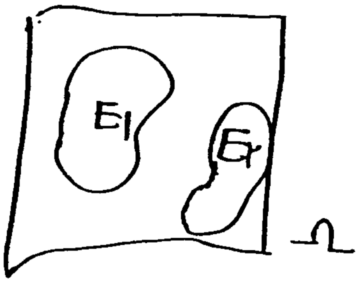
$E = \{$ برخی از ξها $\}$

$E \subset \Omega$



پیش آمدهای جدا از هم: پیش آمدهایی هستند که هیچ نقطه مشترکی ندارند.

$E_1, E_2 = \phi$



$\underline{1}$

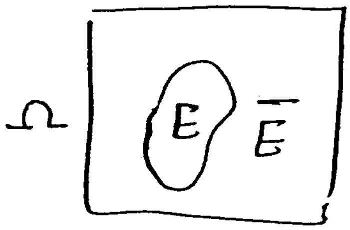
اصطلاح رخ دادن یک پیشامد یعنی هرگاه در
آزمایش تصادفی به یکی از نقاط آن پیش آید با این اصطلاح

$\Omega \rightarrow$ پیشامد حتمی

$\phi \rightarrow$ پیشامد غیرممکن

* دو پیشامد جدا از هم پیشامدهایی هستند که رخ دادن توأم آنها غیرممکن باشد
Disjoint

مکمل یک پیشامد پیشامدی است که جدا از آن بوده و اجتماعش با آن فضای نمونه باشد



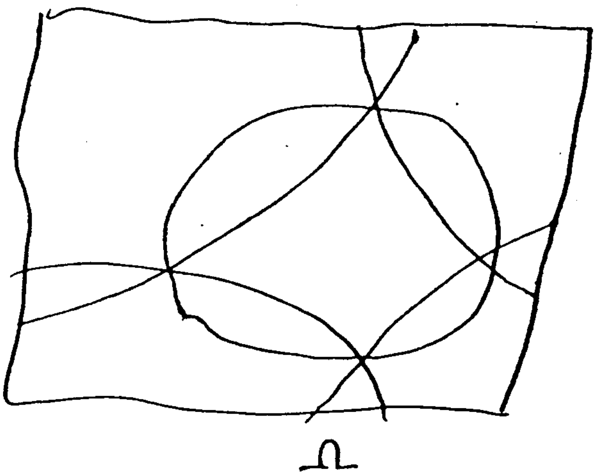
به عبارت ریاضی:

$\underline{1}$ $\bar{E}E = \phi$

$\underline{2}$ $\bar{E} + E = \Omega$

$\bar{E}$ وقتی و فقط وقتی رخ می‌دهد که E رخ ندهد.

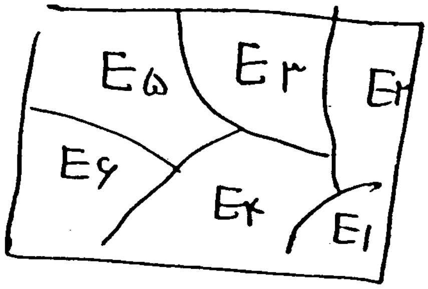
E_1 و E_2 و ... و E_n را ریزی هم فرسا (exhaustive) گوییم هرگاه
اجتماع آنها فضای نمونه را تشکیل دهد.



$$E_1 + E_2 + \dots + E_n = \Omega$$

یعنی مطمئن هستیم حداقل یکی از آنها
رخ خواهد داد.

اگر پیشامدهای اری هم و ساده به دو جدا از هم باشند گوییم n فضای نمونه را به پیش (partition) کرده اند (افراز کرده اند)



* یعنی فرض باشیم که یکی و فقط یکی از آنها خارج خواهد داد.
* یعنی بتوان برای آزمایش تصادفی n حالت متمایز تشخیص داد.

$\underline{\underline{1}}$ $\sum_{i=1}^{n} E_i = \Omega$

$\underline{\underline{2}}$ $E_i E_j = \phi$
$\forall\, i,j \,,\, i \neq j$

۱-۲ تعریف احتمال ، فضای پیش آمدها و فضای احتمال.

الف) احتمال : تابعی p حقیقی که به هر پیش آمد مثل E عددی با سه شرط زیر نسبت دهد.

$\underline{\underline{1}}$ $p(E) \geqslant 0$ غیر منفی بودن

$\underline{\underline{2}}$ $p(\Omega) = 1$ نرمالیزه بودن

$\underline{\underline{3}}$ $E_i E_j = \phi \;\; \forall\, i \neq j \rightarrow p\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)$

* البته این شرط باید برای $n \rightarrow \infty$ (البته ∞ قابل شمارش) نیز صادق باشد. غالباً توزیع احتمال را یکنواخت می گیرند که در این صورت احتمال هر پیش آمد معادل می گردد با تعداد نقاط آن به تعداد نقاط فضای نمونه.

۵

نکات :

۱ از ۳ چندین خواص دیگری نیز برای تابع احتمال تعریف می گردد.

(۱) $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$

(۲) $p(E) \leq 1$

(۳) $p(\phi) = 0$

(۴) $p(E_1 + E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 E_2)$

(۵) $p(E_1 + E_2 + E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3)$
$- p(E_1 E_2) - p(E_1 E_3) - p(E_2 E_3) + p(E_1 E_2 E_3)$

۲ در حالیکه تعداد نقاط فضای نمونه غیر قابل شمارش باشد (اصطلاحاً در فضای نمونه پیوسته) در ریاضیات ثابت می گردد که می توان زیر مجموعه هایی در این فضا تعریف کرد که با احتساب آنها نتوان هیچ تابعی با سه شرط فوق تعریف کرد چنین زیر مجموعه هایی را پیش آمدهای احتمال ناپذیر گویند چنین زیر مجموعه هایی صرفاً نظری خیلی پیچیده قابل تعریف هستند و از نظر عملی یک مبنا در بی اهمیت تلقی می گردد.

فضای پیش آمدها $\mathcal{F}$ ← زیرمجموعه ای از پیش آمدهای احتمال پذیر که دارای دو شرط زیر باشد.

۱ $E \in \mathcal{F} \rightarrow \bar{E} \in \mathcal{F}$

۲ $E_i \in \mathcal{F} \rightarrow \sum_i E_i \in \mathcal{F}$

چنین زیرمجموعه ای را در ریاضیات σ-field گویند.

مثال:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_1 = \{1, 2\} \longrightarrow \bar{E_1} = \{3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega, \phi\}$

فضای احتمال : تعریف متشکل از ۳ جزء

$$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$$

فضای احتمال در واقع مدل ریاضی برای آزمایش تصادفی است که می‌توان محاسبات بررسی‌ها را
در داخل این فضا انجام داد.

1 — 85,2,7 — فرآیندهای تصادفی — میان ترم (40 درصد) از مباحث 1 تا 2 — 2 بعد از ظهر 5 شنبه

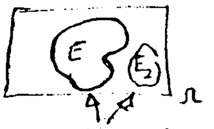
جلسهٔ دوّم: — پایانی ترم (50 درصد) عمدتاً از 3 و 4 و 5 — کلاسی (10٪)

مقدمه‌ای بر فرآیندهای تصادفی.

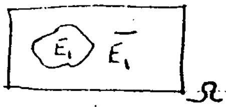
1- مفاهیم اساسی در تئوری احتمال

1-1- تعریف فضای نمونه و پیش آمد

$\Omega = \{\xi_i\}$, $E \subset \Omega$



در پیشامد جدا از هم



پیشامدهای دو به دو از هم جدا که اجتماعشان Ω را تشکیل دهد.

پارتیشن کردن ← دو به دو اشتراک $=0$

1-2- تعریف احتمال و فضای احتمال

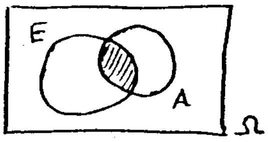
(1) $P(E) \geq 0$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(\sum E_i) = \sum P(E_i)$ برای جدا از هم

فضای احتمال ← $\{\Omega, F, P\}$

1-3) تعریف احتمال شرطی و تعریف پیش آمدهای مستقل از هم



(الف) احتمال شرطی

$$P(E|A) \triangleq \frac{P(EA)}{P(A)}$$

احتمال E به شرط A

* این یک تعریف است، منتهی تعریفی منطقی و ملموس چرا که با فرض قطعی بودن رخداد A منطقاً باید توزیع احتمال را در خارج A صفر در نظر بگیریم و برای جبران آن توزیع احتمال را در داخل A با ضریبی افزایش دهیم ولذا:

$$E = E\Omega = E(A+\bar{A}) = EA + E\bar{A}$$

$$P(E|A) = P(EA + E\bar{A}|A) = P(EA|A) + P(E\bar{A}|A)$$

به دلیل جدا از هم بودن.

$$\left\{\begin{array}{l} P(EA|A) = KP(EA) \\ P(E\bar{A}|A) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow P(E|A) = KP(EA) \quad \Bigg\} \rightarrow P(E|A) = \frac{P(EA)}{P(A)}$$

$P(\Omega|A) = 1 \rightarrow KP(\underbrace{\Omega A}_{A}) = 1 \rightarrow K = \frac{1}{P(A)}$

$$P(E_1|E_2)=\frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)} \longrightarrow \boxed{P(E_1E_2)=P(E_2)P(E_1|E_2)=P(E_1)P(E_2|E_1)}$$

رابطهٔ زنجیره‌ای

$$\boxed{\text{تعمیم رابطهٔ زنجیره‌ای} \rightarrow P(E_1E_2\dots E_n)=P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\dots P(E_n|E_1E_2\dots E_{n-1})}$$

ب / استقلال پیش‌آمدها ← E_1 و E_2 را مستقل از هم گوییم، هرگاه قطعی بودن یکی هیچ تأثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته باشد، یعنی مثلاً:

$$P(E_1|E_2)=P(E_1) \xrightarrow{\text{رابطهٔ زنجیره‌ای}} \boxed{P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2)}$$ شرط استقلال

$$\left.\begin{aligned}P(E_1|E_2)&=P(E_1)\\P(E_2|E_1)&=P(E_2)\end{aligned}\right\}$$ شروط معادل شرط بالا

$$\boxed{\text{نماد استقلال} \quad E_1 \perp\!\!\!\perp E_2}$$

توأماً مستقل بودن چند پیش‌آمد ← E_1، E_2، ...، E_n را توأماً مستقل گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر زیرمجموعه‌ای از آنها، برابر با حاصلضرب احتمال تک‌تک اعضای زیرمجموعه باشد.

$$\boxed{\text{نماد توأماً مستقل بودن} \rightarrow E_1 \perp\!\!\!\perp E_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp E_n}$$

مثلاً برای $n=4$ داریم:

$$E_1 \perp\!\!\!\perp E_2 \perp\!\!\!\perp E_3 \perp\!\!\!\perp E_4 \rightarrow P(E_1E_2E_3E_4)=P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)$$

$$P(E_1E_2E_3)=P(E_1)P(E_2)P(E_3)$$

$\vdots$ ۳ تایی ها

$$P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2)$$

$$P(E_1E_3)=P(E_1)P(E_3)$$

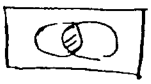
$\vdots$

$$P(E_3E_4)=P(E_3)P(E_4)$$

* مهم ← جدا از هم بودن دو پیش‌آمد را نباید با استقلال دو پیش‌آمد اشتباه کرد.

⊕ شرط جدا از هم بودن: $E_1E_2=\phi$ $\xrightarrow{\text{علت این اشتباه}}$ نتیجه: $P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)$

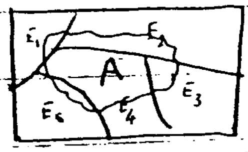
⊕ شرط استقلال: $P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2)$



2

۱-۴- قضیهٔ احتمال کل و فرمول بیز (Bayes)

* این دو فرمول وقتی بکار می روند که چند پیش آمد فضای نمونه را پارتیشن کردن باشند و یا به تعبیری برای آزمایش تصادفی بتوان مثلاً n حالت متمایز در نظر گرفت.



$$\boxed{p(A)=\sum_{i=1}^{5} p(E_i)\,p(A|E_i)}$$ قضیهٔ احتمال کل

$$\boxed{p(E_j|A)=\frac{p(E_j)\,p(A|E_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(E_i)\,p(A|E_i)}}$$ فرمول بیز

اثبات ① :

$$A=A\Omega=A\sum_{i=1}^{n}E_i=\sum_{i=1}^{n}AE_i$$

قضیهٔ احتمال کل

$$p(A)=p\Big(\sum_{i=1}^{n}AE_i\Big)\underset{\text{جدا از هم بودن}}{=}\sum_{i=1}^{n}p(AE_i)\underset{\text{رابطهٔ زنجیره ای}}{=}\sum_{i=1}^{n}p(E_i)\,p(A|E_i)$$

اثبات ② :

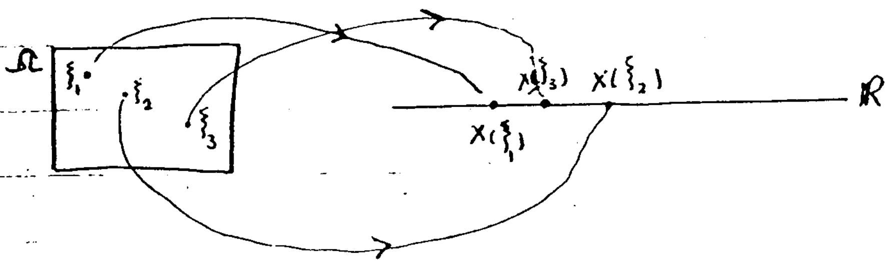
$$p(E_j|A)\underset{\text{تعریف احتمال شرطی}}{=}\frac{p(E_jA)}{p(A)}\overset{\text{رابطهٔ زنجیره ای}}{\underset{\text{قضیهٔ احتمال کل}}{=}}\frac{p(E_j)\,p(A|E_j)}{\sum_{i=1}^{n}p(E_i)\,p(A|E_i)}$$ فرمول بیز

۲) متغیر تصادفی

۱-۲- معرفی متغیر تصادفی

الف) تعریف متغیر تصادفی ـ تابعی مثل X است که به هر نقطه از فضای نمونه $\zeta\in\Omega$ عدد $X(\zeta)$ را نسبت می دهد.

$$\boxed{\Omega \xrightarrow[\;X\;]{\text{تابع}} \mathbb{R}}$$



* متغیر تصادفی یک تابع است، لذا هر نقطه نظیر به یک نقطه تصویر می‌شود، ولی ممکن است که چند نقطه به یک نقطه تصویر شوند.

* با تعریف متغیر تصادفی می‌توان نتایج غیرعددی یک آزمایش تصادفی را به نتایج عددی متناظر بدل کنیم و فضای نمونهٔ Ω را به فضای نمونهٔ $\mathbb{R}$ تبدیل کرد و به جای فضای احتمال اصلی که به شکل $\{\Omega, F, P\}$ می‌باشد، فضای احتمال زیر را در نظر گرفت:

$$\{\mathbb{R}, \mathbb{B}, P_X\}$$

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$

* پیشامدها زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ آن مثلاً به فرم زیر می‌توانند باشند:

* در متغیر تصادفی فضای پیشامدها $\mathbb{B}$ را مجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی، فاصله بین اعداد حقیقی، مکمل‌های آنها و اجتماعات قابل شمارش آنها می‌گیرند.

* P_X تابعی است که به کمک آن بتوان احتمال پیشامدها در فضای $\mathbb{R}$ را محاسبه کرد.

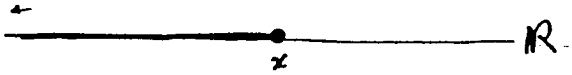
ب) تعریف تابع توزیع احتمال (CDF)

CDF ≡ Cummulative Distribution Function

این تابع را PDF ≡ probability Distribution Function هم می‌نامند.

$$\boxed{F(x) \triangleq P\{\xi \mid X(\xi) \leq x\} = P(X(\xi) \leq x)}$$

به اختصار / اختصارتر $= P(X \leq x)$ ← در واقع تابعی از ξ بودن متغیر تصادفی مستتر فرض می‌گردد

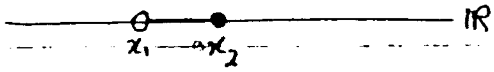


معمولاً برای اسم تابع CDF، اسم متغیر تصادفی را اندیس F می‌گذارند (اختیاری) $F_X(x)$

برخی از خواص CDF:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1.$
2. $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$
3. $x_2 \geq x_1 \Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$ غیرنزولی بودن
4. $F_X(x_0^+) = F_X(x_0)$ پیوستگی از سمت راست دارد.

⑤ $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$



⑥ $P\{X = x_0\} = F_X(x_0^+) - F_X(x_0^-) = \begin{cases} 0, & \text{اگر CDF در محل } x_0 \text{ فاقد جهش باشد} \\ P_0, & \text{اگر CDF در محل } x_0 \text{ دارای جهش } P_0 \text{ باشد} \end{cases}$

ج) تعریف تابع چگالی احتمال (pdf) $f_X(x)$ ـ قرارداد اختیاری

$$f_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x)$$

pdf ≡ probability density function

برخی از خواص pdf:

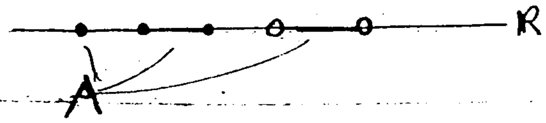
① $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ نرمالیزه بودن

③ $f_X(x) \geq 0$ غیرمنفی است

④ $P\{x_1 < x_0 \leq x_2\} = \int_{x_1^+}^{x_2^+} f_X(x)\,dx$

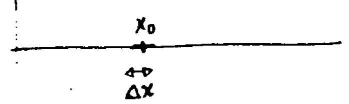
⑤ $P\{X = x_0\} = \int_{x_0^-}^{x_0^+} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{اگر pdf در محل } x_0 \text{ فاقد ضربه باشد} \\ P_0, & \text{اگر pdf در محل } x_0 \text{ دارای ضربه } P_0 \text{ باشد} \end{cases}$

⑥ $P\{X \in A\} = \int_A f_X(x)\,dx$ به طور کلی



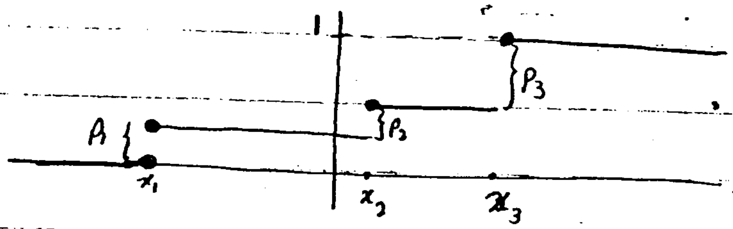
* ⑦ $\boxed{P(X \approx x_0) \triangleq f_X(x) \times |\Delta x|}$ ٣

با فرض پیوسته بودن تابع در محل x_0
اگر هم تابع جهش داشت، مقدار تابع را میانگین دو مقدار جهش می‌گیریم.

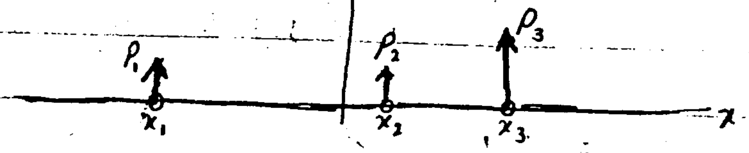


۲) تعریف متغیر تصادفی گسسته و تابع جرم احتمال

اگر تغییرات CDF فقط به صورت پله‌ای باشد، متغیر تصادفی را متغیر تصادفی گسسته می‌نامیم. مثلاً:



: CDF



؛ pdf

* pdf متغیر تصادفی گسسته، تابعی ضربه‌ای است. مثلاً:

$$f_X(x)=p_1\,\delta(x-x_1)+p_2\,\delta(x-x_2)+p_3\,\delta(x-x_3)$$

- روشن است که در مثال فوق داریم: $p_1+p_2+p_3=1$

و این متغیر تصادفی، هیچ مقداری به جز x_1 و x_2 و x_3 اختیار نمی‌کند.

* در متغیرهای تصادفی گسسته، می‌توان به جای استفاده از pdf، از تابع جرم احتمال استفاده کرد.

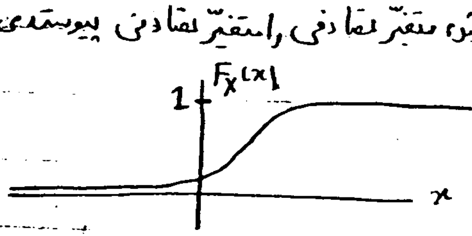
probability mass function ≡ pmf

تعریف pmf: $P_X(x)\triangleq P\{X=x\}$

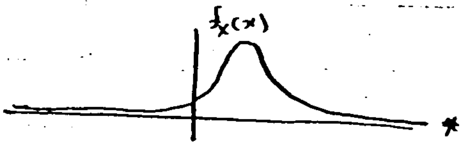
فرضاً در مثال فوق داریم:

$$P_X(x)=\begin{cases}p_1 & x=x_1\\ p_2 & x=x_2\\ p_3 & x=x_3\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

* اگر تغییرات CDF پیوسته باشد، متغیر تصادفی را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامیم. مثلاً:



* pdf متغیر تصادفی پیوسته تابعی غیر ضربه‌ای است.



جلسهٔ سوم: ۸۴/۱۱/۱۰

... 2-1- تعریف متغیّر تصادفی و توابع CDF، pdf و pmf آن: $X(\xi) \equiv X$

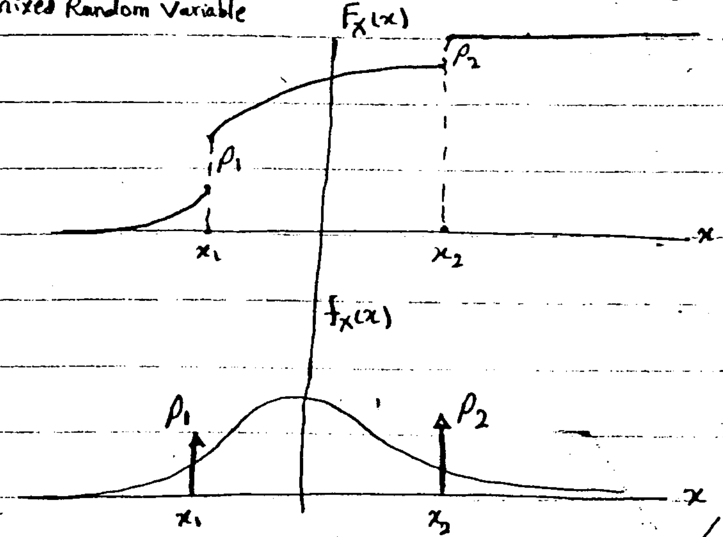
$F_X(x) = P\{X \leq x\}$

$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

$P_X(x) = P(X = x) \longrightarrow$ برای متغیّرهای تصادفی گسسته کاملاً کاری کند.

* در حالت کلی ممکن است CDF هم تغییرات جهشی (پله‌ای) و هم تغییرات پیوسته داشته باشد، یعنی pdf هم دارای ضربه و هم تابع غیرضربه‌ای باشد. چنین متغیّر تصادفی را متغیّر تصادفی مخلوط گوییم.
mixed Random Variable

فرضاً:



پس به طور کلی pdf یک متغیّر تصادفی به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P_X(x_i)\,\delta(x - x_i) + \underbrace{q_X(x)}_{\text{غیرضربه‌ای}}}$$

* اگر متغیّر تصادفی پیوسته باشد، ضربه‌ها را نخواهد داشت.
* اگر متغیّر تصادفی گسسته باشد، تابع غیرضربه‌ای را نخواهد داشت.

و در حالت کلی داریم:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) + \int_{-\infty}^{+\infty} q_X(x)\,dx = 1}$$

تابع مشخص از یک متغیّر تصادفی [$g(\cdot)$] $\qquad Y = g(X)$

تابعی از یک متغیّر تصادفی خود یک متغیّر تصادفی است.

به طور کلی برای محاسبهٔ احتمال پیش‌آمدهای روی متغیّر تصادفی جدید، کافی است چنین آمدها را

در نظر گیریم، مثلاً $\{Y\in B\} \overset{\text{متناظر}}{\equiv} \{X\in A\}$

و بنویسیم:

$$P\{Y\in B\} = P\{X\in A\} = \int_A f_X(x)\,dx$$

* البته راه دیگر استفاده از pdf ~~...~~ متغیر تصادفی جدید است.

$$P\{y\in B\} = \int_B f_Y(y)\,dy$$

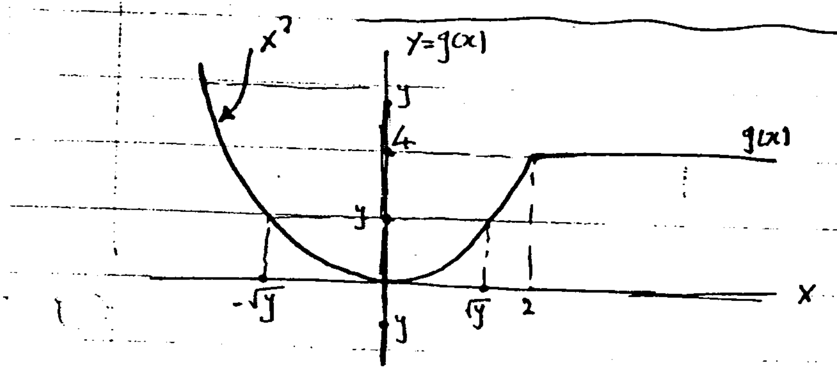
الف) تعیین pdf جدید از روی CDF جدید

(1) $F_Y(y) = P\{Y\leq y\} = P\{X\in A_y\} = \int_{A_y} f_X(x)\,dx$

پیش‌آمد متناظر

(2) $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y)$

مثال:



$$\{Y\leq y\} = \begin{cases} \{X \geq -\sqrt{y}\}, & y\geq 4 \\ \{\sqrt{y} \geq X \geq -\sqrt{y}\}, & 4>y\geq 0 \\ \{X\in\phi\}, & y<0 \end{cases}$$

مرزها مهم است

ب) روش مستقیم تعیین pdf جدید: در این روش، ابتدا جرم احتمال های متغیر تصادفی جدید را پیدا کنیم:

$$p_Y(y) = P\{Y=y\} = \begin{cases} P_1 & y=y_1 \\ P_2 & y=y_2 \\ \vdots & \vdots \\ P_n & y=y_n \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$

یک پیش‌آمد متناظر
[illegible]

سپس در سایر نقاط $y \neq y_i$ چگالی احتمال را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید معادلهٔ زیر به ازای $y \neq y_i$ مشخص، دارای K جواب است. $g(x) = y \to x = x_1, x_2, \dots, x_K$

$$f_Y(y)\,|\Delta y| = P\{Y \approx y\} = P\{X \approx x_1, x_2, \dots, x_K\} = \sum_{i=1}^{K} P(X \approx x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{K} f_X(x_i)\,|\Delta x_i|$$

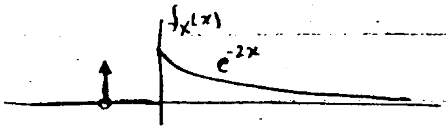
به دلیل جدا بودن

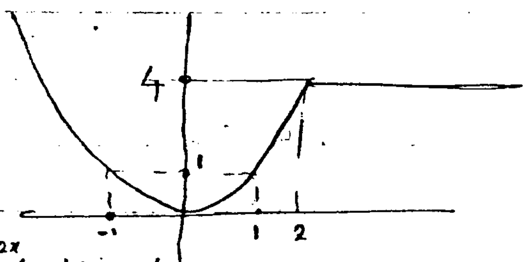
$$\longrightarrow f_Y(y) = \sum_{i=1}^{K} \frac{f_X(x_i)}{\left|\frac{\Delta y}{\Delta x_i}\right|} = \sum_{i=1}^{K} \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\Bigg|_{x=x_i}$$

در این صورت داریم:

$$* \quad \boxed{f_Y(y) = \begin{cases} P_1\,\delta(y-y_1), & y = y_1 \\ P_2\,\delta(y-y_2), & y = y_2 \\ \vdots & \\ P_n\,\delta(y-y_n), & y = y_n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}, & y \neq y_1, y_2, \dots, y_n \end{cases}}$$

مثال: همان مثال قبل ($g(x)$) + $f_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x+1) + e^{-2x}u(x)$





در مثال فوق جرم احتمال برای روبرو داریم:

$$P_Y(y) = P\{Y = y\} = \begin{cases} P\{X \geq 2\} + P\{X = -2\} = \int_2^{\infty} e^{-2x}\,dx \neq 0, & y = 4 \\ P\{X = -1\} + \underbrace{P\{X = 1\}}_{0} = \frac{1}{2}, & y = 1 \\ 0 & y \neq 1, 4 \end{cases}$$

در $y \neq 1, 4$ داریم:

$$g(x) = y \Longrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{y}, & y > 4 \\ x = \sqrt{y}, -\sqrt{y}, & 0 < y < 4 \end{cases}$$

$$g_Y(y)=\begin{cases} 0 & , \ y<0 \\ \cancel{\dfrac{f_X(-\sqrt{y})}{|g'(-\sqrt{y})|}}=0 & , \ y>4 \\ \cancel{\dfrac{f_X(-\sqrt{y})}{|g'(-\sqrt{y})|}}+\dfrac{f_X(\sqrt{y})}{|g'(\sqrt{y})|}=\dfrac{f_X(\sqrt{y})}{|g'(\sqrt{y})|} & , \ 0<y<4 \end{cases}$$

$$g'(x)=2x$$

2-3- دو متغیر تصادفی و توابع CDF، pdf توأم و کناری آنها

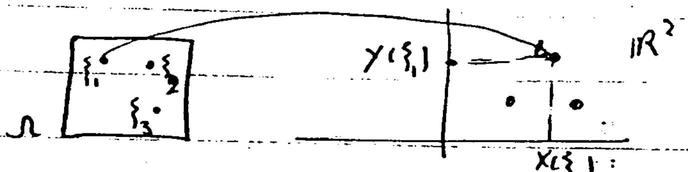
الف) دو متغیر تصادفی و توابع CDF، pdf کناری آن ها

* ممکن است روی فضای نمونه، دو متغیر تصادفی تعریف شده باشد:

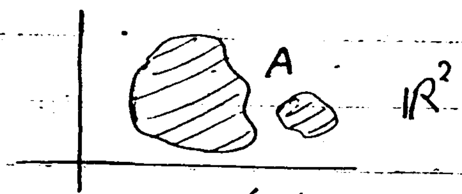
$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$
$$\Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$$

* یعنی در واقع به هر نقطه از فضای نمونه دو عدد نسبت داده باشیم. یعنی نقطه ای در فضای $\mathbb{R}^2$ نسبت داده باشیم.

$$\Omega \xrightarrow{X,Y} \mathbb{R}^2$$

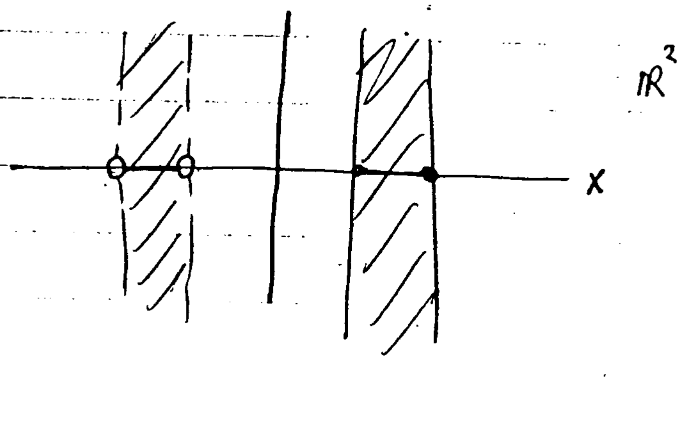


* در حالت کلی وقتی دو متغیر تصادفی داشته باشیم، پیشامدها نیز به صورت زیرمجموعه ای از فضای $\mathbb{R}^2$ خواهند بود. فرضاً:



* وقتی دو متغیر تصادفی داریم، توابع احتمال تک تک آن ها را توابع احتمال کناری گویند.

مثلاً $f_X(x)$، pdf کناری X می باشد. به کمک توابع احتمال کناری تنها می توان احتمال پیشامدهایی که در فضای $\mathbb{R}^2$ به صورت نوارهایی به موازات یکی از دو محور باشند را محاسبه کرد.

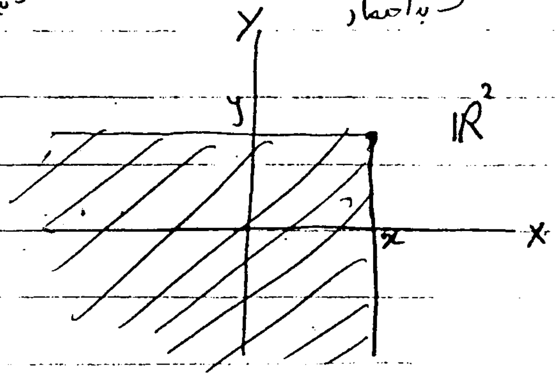


ب) CDF توأم دو متغیّر تصادفی:

$$F_{XY}(x,y) \triangleq P\{\xi : X(\xi) \leqslant x, Y(\xi) \leqslant y\}$$

$$= P\{X(\xi) \leqslant x , Y(\xi) \leqslant y\} = P\{X \leqslant x , Y \leqslant y\}$$

به اختصار — به اختصار



برخی از خواص CDF توأم:

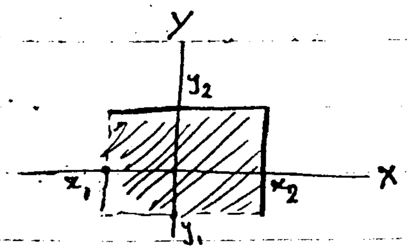
(1) $0 \leqslant F_{XY}(x,y) \leqslant 1$

(2) $\begin{cases} F_{XY}(-\infty,y) = F_{XY}(x,-\infty) = 0 \\ F_{XY}(+\infty,+\infty) = 1 \end{cases}$

(3) $F_{XY}(x,+\infty) = F_X(x)$ و $F_{XY}(+\infty,y) = F_Y(y)$

* (4) $P\{x_1 < X \leqslant x_2 , y_1 < Y \leqslant y_2\} =$

$= F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) + F_{XY}(x_1,y_1)$



ج) pdf توأم دو متغیّر تصادفی:

$$f_{XY}(x,y) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$$

برخی خواص pdf توأم:

(1) $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

(2) $f_{XY}(x,y) \geqslant 0$

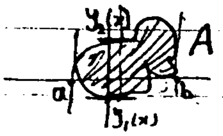
$$(3)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$(4)\quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

* به کمک این تابع، می‌توان احتمال هر پیش آمدی در فضای R^2 را محاسبه کرد:

$$(5)\quad P\{(X,Y)\in A\} \doteq \iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$



2-4- تعریف توابع احتمال شرطی و تعریف استقلال دو متغیر تصادفی

الف) pdf و CDF شرطی ـــ به طور کلی برای هر شرط دلخواهی مثل $(X,Y)\in A$ می‌توان CDF و pdf شرطی تعریف نمود.

$$F_{XY}(x,y|A) \triangleq P\{X\leq x, Y\leq y \,|\, (X,Y)\in A\} = \frac{P\{X\leq x, Y\leq y, (X,Y)\in A\}}{P\{(X,Y)\in A\}} =$$

$$= \frac{1}{P(A)} \underset{(x,y)\in A}{\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \quad ✓$$

$$f_{XY}(x,y|A) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F_{XY}(x,y|A)$$

در حالت کلی pdf شرطی را می‌توان از رابطهٔ ساده‌ای که بدست خواهد آمد محاسبه کرد.

تابع روبرو را تعریف می‌کنیم:

$$g(x,y) \triangleq \begin{cases} 1 & (x,y)\in A \\ 0 & (x,y)\notin A \end{cases}$$

$$F_{XY}(x,y|A) = \frac{1}{P(A)} \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \longrightarrow$$

$$\rightarrow f_{XY}(x,y|A) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y|A) = \frac{1}{P(A)} g(x,y) f_{XY}(x,y)$$

$$* \longrightarrow \boxed{f_{XY}(x,y|A) = \begin{cases} \frac{1}{P(A)} f_{XY}(x,y) &, (x,y) \in A \\ 0 &, (x,y) \notin A \end{cases}}$$

* یعنی وقتی شرط می‌گذاریم، این شرط pdf را در خارج آن ناحیه صفر می‌کند و در داخل آن ناحیه با ضریب معین $\frac{1}{P(A)}$ افزایش می‌دهد. (به طوری که انتگرال pdf شرطی نیز برابر 1 گردد.)

* 2 تابع احتمال شرطی مهم و مفید عبارت اند از:

* (1) $F_X(x|Y\leq y) \triangleq P\{X\leq x | Y\leq y\} = \frac{P\{X\leq x, Y\leq y\}}{P\{Y\leq y\}} = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$

قرارداد: $F_X(x|Y\leq y) \equiv F_X(x|y)$ به اختصار

* با نماد فوق و با طرفین وسطین داریم:

• $\boxed{F_{XY}(x,y) = F_Y(y) \cdot F_X(x|y) = F_X(x) \cdot F_Y(y|x)}$

رابطهٔ زنجیره‌ای

* (2) $F_X(x|Y=y) = \lim_{\Delta y \to 0} F_X(x|Y\approx y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\partial}{\partial x} F_X(x|Y\approx y) =$ کوچک

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx}{P\{Y\approx y\}} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)\,\Delta y\,dx}{f_Y(y)\,\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)\,dx = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

قرارداد : $f_X(x|Y=y) = f_X(x|y)$

اختصار

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_Y(y)\, f_X(x|y) = f_X(x)\, f_Y(y|x)}$$

اشتباه نکنید، گزارهٔ زیر درست است:

$$f(x|y) \neq \frac{d}{dx} F_X(x|y)$$

چون شرط‌ها متفاوت است. (۲۴)

جلسهٔ 4

نکاتی در مورد توابع چگالی احتمال:

① توابع چگالی احتمال، مشابه توابع جرم می‌باشند. چگالی جرم خطی در حالت یک بعدی (مثلاً $f_X(x)$) و چگالی جرم سطحی در حالت دو بعدی (مثل $f_{XY}(x,y)$) وقتی کل جرم به مقدار 1 نرمالیزه شده باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \qquad \iint_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

با این تعبیر، احتمال هر پیش‌آمد، مشابه جرم ناحیهٔ مربوطه خواهد بود.

② تابع چگالی احتمال کناری مثلاً $f_X(x)$ را می‌توان مشابه تابع چگالی جرم محور x دانست، وقتی جرم سایر نقاط صفحهٔ xy را به صورت عمودی به محور فوق منتقل کرده باشیم.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

③ تابع چگالی احتمال شرطی را نیز می‌توان مشابه همان تابع چگالی جرم دانست، وقتی جرم نقاط خارج شرط را صفر کرده باشیم و چگالی جرم نقاط داخل شرط را با ضریبی افزایش دهیم تا کل جرم در آن ناحیه 1 شود.

$$f_{XY}(x,y|A) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin A \\ \frac{1}{P(A)} f_{XY}(x,y), & (x,y) \in A \end{cases}$$

$$f_Y(y|X=x) = \frac{1}{f_X(x)} f_{XY}(x,y)$$

مرور استقلال دو پیش آمد: $A \perp\!\!\!\perp B$ هرگاه $P(A,B)=P(A).P(B)$

الف) استقلال دو متغیر تصادفی: X و Y را مستقل از هم گوییم، هرگاه هر پیش آمدی برای X، مستقل از هر پیشامدی برای Y باشد. یعنی:

$$\begin{cases}\{X\in A\} \perp\!\!\!\perp \{Y\in B\}\\ \forall A\subset \mathbb{R}\\ \forall B\subset \mathbb{R}\end{cases}$$

* قضیه ـ شرط لازم و کافی برای استقلال X و Y، استقلال پیش آمدهای به فرم $\{X\leq x\}$ و $\{Y\leq y\}$ آنها است. یعنی:

$$\begin{cases}\{X\leq x\} \perp\!\!\!\perp \{Y\leq y\}\\ \forall x\in \mathbb{R}\\ \forall y\in \mathbb{R}\end{cases}$$

یعنی:

$$P(X\leq x, Y\leq y) = P(X\leq x)\times P(Y\leq y) \longrightarrow F_{XY}(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$$

با $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ گرفتن، شرط معادل دیگر بدست می آید.

* پس

نماد استقلال: $X \perp\!\!\!\perp Y$

دو شرط معادل برای استقلال:
$$\begin{cases}F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)\\ f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\end{cases}$$

* البته از مقایسه با رابطهٔ زنجیرهای، شرط های معادل دیگری نیز نتیجه می گردد:

$$F_Y(y|x) = F_Y(y) \qquad f_Y(y|x) = f_Y(y)$$

$$F_X(x|y) = F_X(x) \qquad f_X(x|y) = f_X(x)$$

اثبات قضیه: لزوم شرط واضح است.

اثبات کفایت شرط. فرض می کنیم شرط برقرار است، یعنی داریم: $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$$P\{X\in A, Y\in B\} = \iint_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{به کار گرفتن}}{=} \int_{x\in A}\int_{y\in B} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{x\in A} f_X(x)dx \times \int_{y\in B} f_Y(y)dy = P\{X\in A\}.P\{Y\in B\}$$

نکات:

مهم * ① از تفکیک پذیربودن متغیرها در CDF توأم یا در pdf توأم می‌توان استقلال دو پیش‌آمد را نتیجه گرفت. یعنی:

$$(1)\quad F_{XY}(x,y) = g_1(x)\,g_2(y) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$(2)\quad f_{XY}(x,y) = h_1(x)\,h_2(y) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

اثبات (1) (مثال):

$$\left.\begin{aligned} F_X(x) &= F_{XY}(x,\infty) = g_1(x)\,g_2(\infty) \\ F_Y(y) &= F_{XY}(\infty,y) = g_1(\infty)\,g_2(y) \end{aligned}\right\} \longrightarrow F_X(x)\,F_Y(y) = g_1(x)\,\underbrace{g_2(\infty)\,g_1(\infty)}_{1 \,=\, F_{XY}(\infty,\infty)}\,g_2(y) = F_{XY}(x,y)$$

* ② از استقلال 2 متغیر تصادفی X و Y، می‌توان استقلال هر تابعی از X را با هر تابعی از Y نتیجه گرفت. یعنی:

$$\left.\begin{aligned} &X \perp\!\!\!\perp Y \\ &V = g(X) \\ &W = h(Y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow V \perp\!\!\!\perp W$$

چرا که هر پیش‌آمدی برای V متناظر است با پیش‌آمدی برای X و هر پیش‌آمدی برای W متناظر است با پیش‌آمدی برای Y و چون X و Y مستقل اند، این پیش‌آمدها مستقل خواهند بود.

3 - امید ریاضی (Mathematical Expectation)

3-1- کلیات:

$$\left.\begin{aligned} &X(\zeta) = X \;\text{متغیر تصادفی} \\ &g(X) \;\text{تابع مشخصی از } X \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\text{نماد امید ریاضی}}{E}\,g(X) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx$$

* با توجه به اینکه، انتگرال حد جمع می‌باشد، و $f_X(x)dx$ مفهوم فراوانی مقادیری که متغیر تصادفی در حول و حوش x اختیار می‌کند را داراست، روشن است که امید ریاضی $g(x)$ مفهوم متوسط مقادیری که این تابع در بی‌نهایت تکرار مستقل از هم آزمایش تصادفی، اختیار خواهد کرد را دارا می‌باشد.

$$E\,g(X,Y) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

* برای هر شرط دلخواهی نیز می‌توان امید ریاضی شرطی تعریف کرد، مثلاً برای شرط A $(X,Y) \in A$:

$$\underset{\text{نماد}}{E}\,g(X,Y)|A \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f_{XY}(x,y|A)\,dx\,dy$$

* البته با توجه به رابطهٔ pdf شرطی، امید ریاضی را می‌توان به فرم ساده‌تری نیز درآورد.

$$f_{XY}(x,y|A)=\begin{cases}0 & , (x,y)\notin A\\ \frac{1}{P(A)}f_{XY}(x,y) & , (x,y)\in A\end{cases} \Longrightarrow$$

$$* \Longrightarrow \quad E\,g(x,y)|A=\frac{1}{P(A)}\iint_A g(x,y)\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

چند رابطهٔ مفید:

① $E(g_1(X)+g_2(Y))=Eg_1(X)+Eg_2(Y)$

② $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow Eg_1(X)g_2(Y)=Eg_1(X).Eg_2(Y)$

** ③ $Eg(X,Y)=E_Y\left(E_X[g(X,Y)|Y]\right)$

اثبات ③:

$$Eg(X,Y)=\iint g(x,y)\underbrace{f_{XY}(x,y)}_{f_Y(y)\,f_X(x|y)}dx\,dy=\int_{y=-\infty}^{+\infty}f_Y(y)\left(\int_{x=-\infty}^{+\infty}g(x,y)\,f_X(x|y)\,dx\right)dy=$$

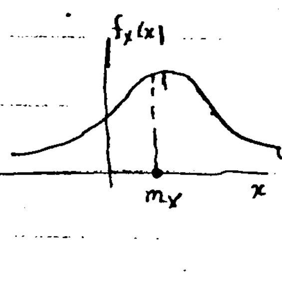
$$=E_Y\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\,f_X(x|y)\,dx\right]=E_Y\left(E_X\,g(X,Y)|Y\right)$$

3-2- ممان‌ها

$EX^n=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n f_X(x)\,dx$ ممان رتبهٔ nام

مهم‌ترین ممان‌ها، ممان رتبهٔ اول و رتبهٔ دوم است.

$$\boxed{m_X=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_X(x)\,dx}$$



* ممان اول را متوسط متغیر تصادفی گوییم.

* اگر چگالی احتمال را مشابه چگالی جرم بگیریم، m_X معادل مرکز ثقل محور X خواهد بود.

* ممان دوم را قدرت متغیر تصادفی گوییم، چون پارامتری است که می‌تواند معرف بزرگی یا کوچکی مقادیری باشد که متغیر تصادفی اختیار کند.

$$\boxed{P_X=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,f_X(x)\,dx}$$

متغیّر تصادفی X مرکزی $\tilde{X}(\xi) \triangleq X(\xi) - m_X$

* در رابطه با متغیّر تصادفی مرکزی نیز ممان های مرکزی تعریف می شود.

ممان مرکزی مرتبهٔ n ام $E\tilde{X}^n = E(X-m_X)^n$

با بسط رابطهٔ فوق و به کمک ممان های ساده، ممان های مرکزی محاسبه می گردند.

* ممان مرکزی مرتبهٔ اوّل همواره صفر است. $E\tilde{X} = E(X-m_X) = EX - m_X = m_X - m_X = 0$

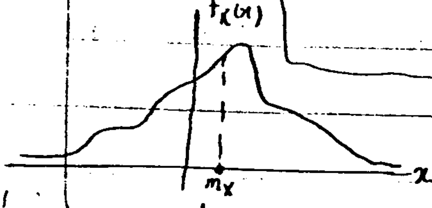
← مهم ترین ممان مرکزی، همان ممان مرکزی مرتبهٔ دوّم است:

$$Var(X) = E\tilde{X}^2 = E(X-m_X)^2 = EX^2 - 2Em_X X + Em_X^2 = \rho_X - 2m_X EX + m_X^2 =$$
$$= \rho_X - m_X^2$$

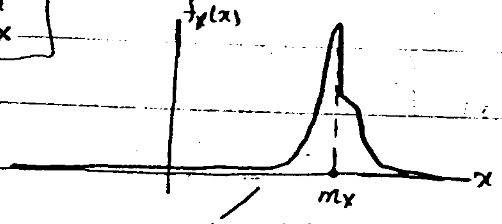
ممان مرکزی مرتبهٔ دوّم را، واریانس متغیّر تصادفی گوییم.

* این پارامتر می تواند معرّف بزرگی یا کوچکی متغیّر تصادفی مرکزی $(X-m_X)$، یعنی در واقع بزرگی و کوچکی انحراف X از متوسط آن. جذر آن را انحراف معیار گویند.

$$Var(X) = \sigma_X^2$$



واریانس زیاد
قدرت کم



واریانس کم
قدرت زیاد

* برای 2 متغیّر تصادفی، ممان های متقابل هم تعریف می گردد:

$$EX^nY^m = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$ ← ممان متقابل ساده

مرکزی: $E\tilde{X}^n\tilde{Y}^m = E(X-m_X)^n(Y-m_Y)^m$ ← ممان متقابل مرکزی

* مهم ترین ممان های متقابل، ممان های متقابل مرتبه اوّل و مرتبه اوّل است.

$$r_{XY} = EXY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$ هم بستگی X و Y

$\sigma_{XY} = C_{XY} = E\tilde{X}\tilde{Y} = E(X-m_X)(Y-m_Y) = \dots = EXY - EX\,EY = r_{XY} - m_X m_Y$

$\| \quad Cov(X,Y) \leftarrow$ کوواریانس X و Y

* ضریب همبستگی X و Y : $\rho_{XY} \triangleq \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X . \sigma_Y}$

خواهیم دید که $|\rho_{XY}| \leq 1$ است لذا آن را کوواریانس نرمالیزه هم گویند.

* خواهیم دید که ρ_{XY} پارامتری است که میزان وابستگی دو متغیر تصادفی را نشان می دهد.

+ برای هر شرطی می توان ممان های شرطی نیز تعریف کرد:

3 ممان شرطی مهم و مفید:

متوسط X به شرط y: $m_{X|y} = EX|y = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|y)\,dx$

قدرت X به شرط y: $P_{X|y} = EX^2|y = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x|y)\,dx$

واریانس X به شرط y: $\sigma^2_{X|y} = Var(X|y) = P_{X|y} - m^2_{X|y}$

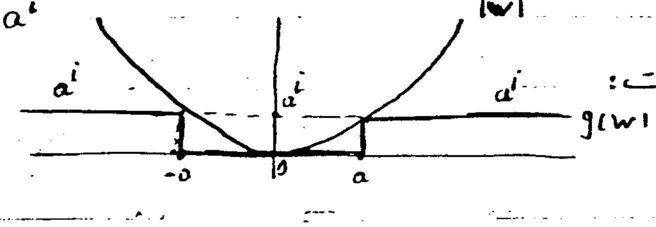
3-3- چند نامساوی مفید

الف) نامساوی تعمیم یافتهٔ چبی‌شف (chebyshev)

* $P\{|W| \geq a\} \leq \frac{E|W|^i}{a^i}$

اثبات:

$g(w) \leq |w|^i$
$\forall w \in \mathbb{R}$



طرفین را در تابع غیرمنفی $f_W(w)$ ضرب می‌کنیم:

$$g(w) f_W(w) \leqslant |w|^i f_W(w) \qquad \forall w \in \mathbb{R}$$

با انتگرال گیری داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(w) f_W(w)\, dw \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |w|^i f_W(w)\, dw = E|w|^i \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{-a} a^i f_W(w)\, dw + 0 + \int_{+a}^{\infty} a^i f_W(w)\, dw \leqslant E|w|^i \longrightarrow$$

$$\longrightarrow a^i P\{W \leqslant -a\} + a^i P\{W \geqslant a\} \leqslant E|w|^i \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{P\{|W| \geqslant a\} \leqslant \frac{E|w|^i}{a^i} \quad \text{for } a \neq 0}$$

~~نامساوی مارکوف برای متغیرهای تصادفی~~

ب) نامساوی مارکوف (Markoff)

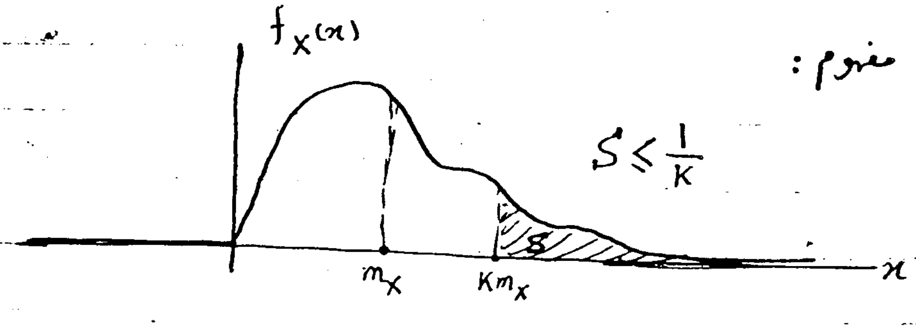
* که نامساوی مارکوف برای متغیرهای تصادفی غیرمنفی است.

$$\boxed{X \in [0, \infty) \quad , \quad P\{X \geqslant Km_X\} \leqslant \frac{1}{K}}$$

اثبات:

نامساوی تعمیم یافته چبی شف $\xrightarrow[\substack{i=1 \\ a = Km_X}]{X = |W|} P\{X \geqslant Km_X\} \leqslant \frac{EX}{Km_X} = \frac{1}{K}$

مفهوم:



$$\sigma_{xy} = C_{xy} = E\tilde{x}\tilde{y} = E(x-m_x)(y-m_y) = \dots = Exy - Ex\,Ey = r_{xy} - m_x m_y$$

$Cov(X,Y)$ ← کوواریانس X و Y

* ضریب همبستگی X و Y : $\rho_{xy} \triangleq \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x.\sigma_y}$

که خواهیم دید که $|\rho_{xy}| \le 1$ است لذا آن را کوواریانس نرمالیزه هم گویند.

* خواهیم دید که ρ_{xy} پارامتری است که میزان وابستگی دو متغیر تصادفی را نشان می دهد.

+ برای هر شرطی می توان ممان های شرطی نیز تعریف کرد:

3 ممان شرطی مهم و مفید:

متوسط X به شرط y: $m_{x|y} = Ex|y = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x|y)\,dx$

قدرت X به شرط y: $P_{x|y} = Ex^2|y = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x|y)\,dx$

واریانس X به شرط y: $\sigma^2_{x|y} = Var(X|y) = P_{x|y} - m^2_{x|y}$

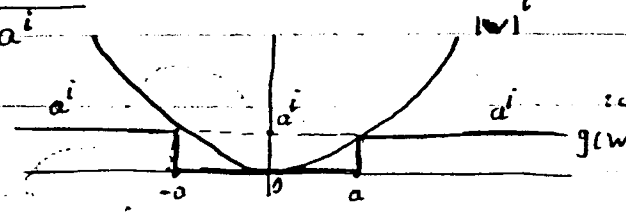
3-3- چند نامساوی مفید

الف) نامساوی تعمیم یافته چبی شف (chebyshev)

* $P\{|w| \ge a\} \le \dfrac{E|w|^i}{a^i}$

اثبات:

$g(w) \le |w|^i \quad \forall w \in \mathbb{R}$



طرفین را در تابع غیرمنفی $f_W(w)$ ضرب می‌کنیم:

$$g(w)\,f_W(w) \leq |w|^i f_W(w) \qquad \forall w \in \mathbb{R}$$

با انتگرال گیری داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\,f_W(w)\,dw \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |w|^i f_W(w)\,dw = E|w|^i \longrightarrow$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{-a} a^i f_W(w)\,dw + 0 + \int_{+a}^{\infty} a^i f_W(w)\,dw \leq E|w|^i \rightarrow$$

$$\rightarrow a^i P\{W \leq -a\} + a^i P\{W \geq a\} \leq E|w|^i \longrightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{P\{|W| \geq a\} \leq \frac{E|W|^i}{a^i} \qquad \text{for } a \neq 0}$$

~~نامساوی مارکوف برای متغیرهای تصادفی~~

الف) نامساوی مارکوف (Markoff)

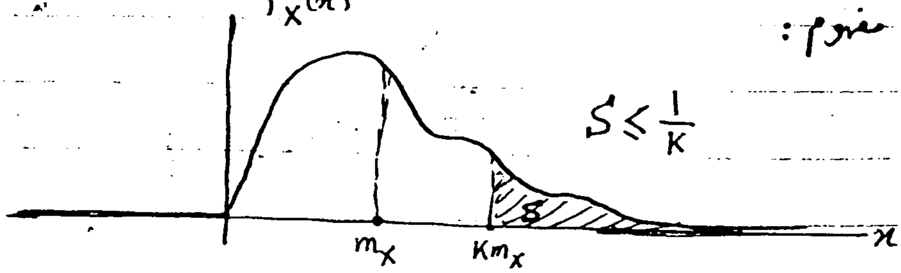
* این نامساوی مارکوف برای متغیرهای تصادفی غیرمنفی است.

$$\boxed{X \in [0,\infty) \quad , \quad P\{X \geq Km_X\} \leq \frac{1}{K}}$$

اثبات:

نامساوی تعمیم یافته چبی شف $\xrightarrow[\substack{i=1\\ a=Km_X}]{X=|W|} P\{X \geq Km_X\} \leq \frac{EX}{Km_X} = \frac{1}{K}$

مفهوم:



$S \leq \frac{1}{K}$

ج) نامساوی معروف چبی شف:

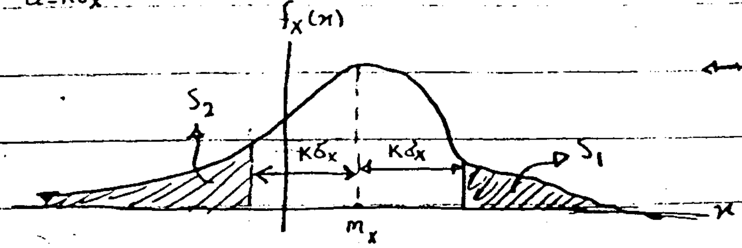
$$P\{|X-m_x| \geq K\sigma_x\} \leq \frac{1}{K^2}$$

اثبات:

نامساوی تعمیم یافته $\xrightarrow[i=2,\ a=K\sigma_x]{W=X-m_x}$ $P\{|X-m_x| \geq K\sigma_x\} \leq \frac{E(X-m_x)^2}{K^2\sigma_x^2} = \frac{1}{K^2}$

مفهوم:

$S_1+S_2 \leq \frac{1}{K^2}$



د) نامساوی شوارتز (Schwartz)

$$(EXY)^2 \leq EX^2\, EY^2$$

اثبات:

نامساوی واضح: $\begin{cases} E(X-\lambda Y)^2 \geq 0 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \to \begin{cases} (EY^2)\lambda^2 - 2EXY\lambda + (EX^2) \geq 0 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow$ Δ آن باید کوچکتر مساوی صفر باشد.

$$\to 4(EXY)^2 - 4EX^2EY^2 \leq 0 \to \boxed{(EXY)^2 \leq EX^2 EY^2}$$

اگر برای $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ بنویسیم، داریم:

$$(E\tilde{X}\tilde{Y})^2 \leq E\tilde{X}^2 E\tilde{Y}^2 \to \sigma_{XY}^2 \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \to$$

$$\to \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} \leq 1 \to \rho_{XY}^2 \leq 1 \to \boxed{|\rho_{XY}| \leq 1}$$

ضریب همبستگی
یا همان کوواریانس نرمالیزه

۳-۴- تساوی ۲ متغیر تصادفی $\quad X \overset{?}{=} Y$

البته X و Y تابعی باشند.

* تساوی بین دو متغیر تصادفی با مفاهیم مختلفی مطرح می‌گردد.

الف) تساوی به مفهوم در همه جا ← در همه جا (Everywhere) یعنی در تمام نقاط فضای نمونه.

نماد: $X \overset{e}{=} Y$

شرط: $X(\xi)=Y(\xi)$ ، $\forall \xi \in \Omega$

این، قوی‌ترین مفهوم در تساوی دو متغیر تصادفی است.

ب) تساوی به مفهوم ms ← مخفف mean square

نماد این نوع تساوی: $X \overset{ms}{=} Y$

شرط: $E(X-Y)^2=0$

از نظر عملی، تساوی به مفهوم ms، مفیدترین مفهوم است، چراکه اولاً برای بررسی آن فقط نیاز به داشتن ممان‌ها داریم $EX^2+EY^2=2EXY$

ثانیاً مفهومی است بسیار قوی، چراکه می‌توان تساوی با احتمال 1 را از آن نتیجه گرفت.

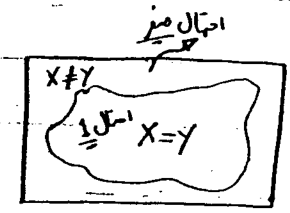
$$E(X-Y)^2=0 \Longrightarrow P\{X=Y\}=1$$

اثبات:

نامساوی تغییر یافته چی‌بی‌شف

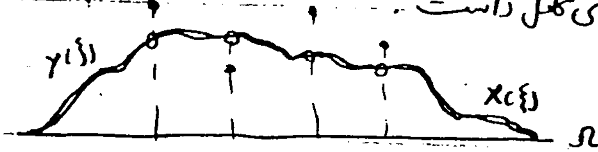
$$\xrightarrow[i=2,\ a=\varepsilon\neq 0]{W=X-Y} P\{|X-Y|\geq\varepsilon\} \leq \frac{E(X-Y)^2}{\varepsilon^2} \overset{X\overset{ms}{=}Y,\ \varepsilon\neq0}{=} 0 \longrightarrow \begin{cases} P\{|X-Y|\geq\varepsilon\}\leq 0 \\ \forall\varepsilon\neq0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow P\{|X-Y|\geq\varepsilon\}=0 \quad \forall\varepsilon\neq0 \longrightarrow P\{X\neq Y\}=0 \longrightarrow \boxed{P\{X=Y\}=1}$$



یعنی تساوی تقریباً در همه‌جای فضای نمونه، در همه جا به جز زیرمجموعه‌های با احتمال صفر از فضای نمونه. چون پیش‌آمد با احتمال صفر در عمل رخ نمی‌دهد پس این نوع تساوی را می‌توان از نظر عملی یک تساوی کامل دانست.

مثال:



در مثال فوق اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، X و Y به مفهوم ms، یعنی با احتمال 1 مساوی خواهند بود.

* مثلاً می‌توان نتایج زیر را گرفت:

* $P_X = EX^2 = 0 \longrightarrow X \overset{ms}{=} 0$

* $\sigma_X^2 = E(X-m_X)^2 = 0 \longrightarrow X \overset{ms}{=} m_X$

در این درس ما فقط همین نوع تساوی را در نظر خواهیم گرفت و نمادش را نیز به صورت $X=Y$ خلاصه خواهیم کرد.

ج) تساوی در توزیع ← تساوی در توزیع یعنی تساوی توزیع احتمال 2 متغیر تصادفی:

نماد: $X \overset{dist}{=} Y$

$$\text{شرط} \left\{ \begin{matrix} F_X(a) = F_Y(a) \\ \forall a \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

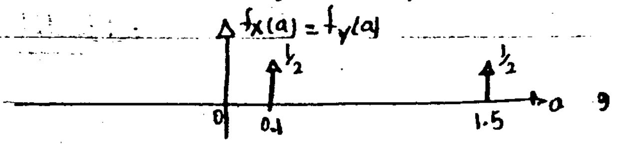
* این مفهوم، مفهوم بسیار ضعیفی از تساوی است، چرا که حتی ممکن است X و Y در هیچ جای فضای نمونه مساوی نباشند ولی تساوی در توزیع داشته باشیم.

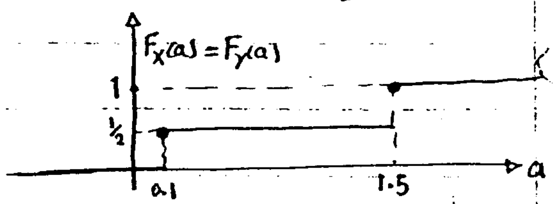
فرضاً: $\Omega = \{\underset{1/2}{\xi_1}, \underset{1/2}{\xi_2}\}$ با توزیع احتمال یکنواخت.

ξ	$X(\xi)$	$Y(\xi)$	$P(\xi)$
ξ_1	0.1	1.5	$\frac{1}{2}$
ξ_2	1.5	0.1	$\frac{1}{2}$

$$P(X=0.1) = P(X=1.5) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=1.5) = P(Y=0.1) = \frac{1}{2}$$





5-3 - تابع مشخصه و تابع مولد احتمال

الف) تابع مشخصه (cf) یک متغیر تصادفی

cf ≡ charactristic function

$$* \quad \phi_X(\omega) \triangleq E\, e^{j\omega X} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j\omega x} f_X(x)\, dx$$

اگر X متغیر تصادفی گسسته باشد، می‌توان رابطه را برحسب جرم احتمال نیز بیان نمود.

$$\Phi_X(\omega) \triangleq E e^{j\omega X} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} \sum_i P(x_i)\,\delta(x-x_i)\,dx \longrightarrow$$

$$f_X(x) = \sum_i P_X(x_i)\,\delta(x-x_i)$$

$$\longrightarrow \Phi_X(\omega) = \sum_i P_X(x_i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x}\,\delta(x-x_i)\,dx = \sum_i P_X(x_i)\,e^{j\omega x_i} \longrightarrow$$

$$* \longrightarrow \boxed{\Phi_X(\omega) \equiv \sum_i P(X=x_i)\,e^{j\omega x_i}}$$

برخی خواص cf :

$* \quad ①\ |\Phi_X(\omega)| \leqslant 1 = \Phi_X(0)$

$* \quad ②\ \dfrac{d^n}{d\omega^n}\Phi_X(\omega)\Big|_{\omega=0} = j^n E X^n$ 　تابع c.f را تابع مولد ممان هم می‌گویند.

$* \quad ③\ f_X(x) \xleftrightarrow{FT} \Phi_X^*(\omega)$

$* \quad ④\ X \perp\!\!\!\perp Y\ ,\ V = X \overset{\text{جمع}}{+} Y \Longrightarrow \Phi_V(\omega) = \Phi_X(\omega) \overset{\text{ضرب}}{\times} \Phi_Y(\omega)$

اثبات ①:

$$|\Phi_X(\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\,dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{j\omega x}|}_{1}\cdot\underbrace{|f_X(x)|}_{f_X(x)}\,dx = 1 \ \checkmark$$

که مثل جمع اگر اندازه را به داخل ببریم، مقدار تابع بزرگ‌تر می‌شود.

$$\Phi_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{0} f_X(x)\,dx = 1 \ \checkmark$$

اثبات ②:

$$\frac{d^n}{d\omega^n}\Phi_X(\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} (jx)^n e^{j\omega x} f_X(x)\,dx\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} j^n x^n f_X(x)\,dx = j^n E X^n$$

اثبات ③ ← با توجه به تعریف تبدیل فوریه واضح است.

طبق این خاصیت می‌توان گفت که c.f تابعی هم‌ارز با pdf یا CDF است،

چراکه با داشتن cf :

$$f_X(x) = F^{-1}\Phi_X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_X^*(\omega)\,e^{j\omega x}\,\frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_X(\omega)\,e^{-j\omega x}\,\frac{d\omega}{2\pi}$$

* بنابراین در حل بسیاری از مسائل از cf و جداول و خواص تبدیل فوریه می توان سود جست.

اثبات ④:

$$\phi_V(\omega) = Ee^{j\omega V} = Ee^{j\omega(X+Y)} = Ee^{j\omega X} \cdot e^{j\omega Y} = Ee^{j\omega X} \, Ee^{j\omega Y} = \Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega)$$

X و Y مستقلند ← تابعی از آنها هم مستقلند

ب) تابع مولد احتمال یک متغیر تصادفی (pgf) ← probability generating function

pgf فقط برای متغیرهای تصادفی صحیح به کار برده می شود یعنی $X \in \mathbb{Z}$

$$* \quad \Gamma_X(z) \triangleq Ez^X = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p(X=i)\, z^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X(i)\, z^i$$

برخی خواص pgf :

* ① $\Gamma_X(1) = 1$

* ② $\dfrac{d^n}{dz^n}\Gamma_X(z)\Big|_{z=1} = E\,X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)$ ممان فاکتوریل مرتبهٔ n ام

* ③ $\{p_X(i)\} \xleftrightarrow{\text{Z-Transform}} \Gamma_X(z^{-1})$

* ④ $X \perp\!\!\!\perp Y,\ V = X+Y \Longrightarrow \Gamma_V(z) = \Gamma_X(z)\Gamma_Y(z)$

اثبات ①:

$$\Gamma_X(1) = E\,1^X = E\,1 = 1$$

اثبات ②:

$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma_X(z) = \frac{d^n}{dz^n} Ez^X = E\frac{d^n}{dz^n} z^X = E\,X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)\,z^{X-n}\Big|_{z=1} =$$

$$= E\,X(X-1)\cdots(X-n+1)$$

* با داشتن ممان فاکتوریل های مرتبه اول تا n ام، می توان ممان های سادهٔ مرتبه اول تا n ام را پیدا کرد.

اثبات ③: با توجه به تعریف تبدیل Z واضح است.

* براساس این خاصیت در متغیرهای تصادفی صحیح، pgf تابعی هم ارز با pmf یا pdf یا CDF است، چراکه با تبدیل Z معکوس (مثلاً با بسط به قوای Z تابع pgf) می توان جرم احتمال ها را تعیین نمود. (به عنوان ضرایب بسط به قوای Z)

اثبات ④ : $\Gamma_V(z) = Ez^V = Ez^{X+Y} = Ez^X z^Y \underset{\text{استقلال}}{=} Ez^X Ez^Y = \Gamma_X(z)\Gamma_Y(z)$

ج) cf و pgf توأم دو متغیر تصادفی

$$\Phi_{XY}(w_1,w_2) \triangleq E e^{j(w_1X+w_2Y)} = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{j(w_1x+w_2y)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\Gamma_{XY}(z_1,z_2) \triangleq E z_1^X z_2^Y = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} P(X=i, Y=j) z_1^i z_2^j =$$

$$\underset{\text{فرم نادرتر احتمال}}{=} \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_{XY}(i,j) z_1^i z_2^j$$

برخی خواص cf و pgf توأم :

* ① $\begin{cases} |\Phi_{XY}(w_1,w_2)| \le 1 = \Phi_{XY}(0,0) \\ \Gamma_{XY}(1,1) = 1 \end{cases}$

* ② $\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^{n+m}}{\partial w_1^n \partial w_2^m}\Phi_{XY}(w_1,w_2)\right|_{w_1=w_2=0} = j^{n+m} E X^n Y^m \\ \left.\dfrac{\partial^{n+m}}{\partial z_1^n \partial z_2^m}\Gamma_{XY}(z_1,z_2)\right|_{z_1=z_2=1} = E X(X-1)\cdots(X-n+1) Y(Y-1)\cdots(Y-m+1) \end{cases}$

③ $f_{XY}(x,y) \xleftrightarrow[\text{دو بعدی}]{FT} \Phi^*_{XY}(w_1,w_2)$

$\{P_{XY}(i,j)\} \xleftrightarrow[\text{دو بعدی}]{Z-T} \Gamma_{XY}(z_1^{-1}, z_2^{-1})$

* ④ $X \perp\!\!\!\perp Y \underset{\substack{\text{دو طرفه} \\ (\text{۳})}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \Phi_{XY}(w_1,w_2) = \Phi_X(w_1)\Phi_Y(w_2) \\ \Gamma_{XY}(z_1,z_2) = \Gamma_X(z_1)\Gamma_Y(z_2) \end{cases}$

* (5) یافتن cf کناری ← pgf

$$\begin{cases} \phi_X(\omega) = \phi_{XY}(\omega, 0) \\ \phi_Y(\omega) = \phi_{XY}(0, \omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_X(z) = \Gamma_{XY}(z, 1) \\ \Gamma_Y(z) = \Gamma_{XY}(1, z) \end{cases}$$

* اثبات ها مشابه بند الف و ب بوده و ساده می باشد.

* طبق خاصیت (3) این توابع را می توان هم ارز توابع pdf توأم یا CDF توأم دانست، چرا که مثلاً:

$$f_{XY}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{\phi^*_{XY}(\omega_1,\omega_2)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi^*_{XY}(\omega_1,\omega_2)\, e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2}$$

* طبق خاصیت (4)، تفکیک پذیر بودن متغیرها در cf توأم یا pgf توأم نیز شرط لازم و کافی دیگری برای استقلال دو متغیر تصادفی است.

جلسه 6

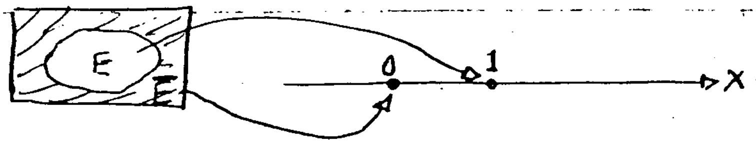
4- آشنایی بیشتر با متغیرهای تصادفی

4-1- معرفی چند متغیر تصادفی گسسته مهم:

* در این مثال ها یک پیشامد E با احتمال p مطرح است.

تعریف متغیر تصادفی برنولی:

$$X \triangleq \begin{cases} 1 & , \zeta \in E \\ 0 & , \zeta \notin E \end{cases}$$



$$X \in \{0,1\}$$

$$X \sim B(p) \iff p_X(x) = \begin{cases} p & , x=1 \\ 1-p=\bar{p} & , x=0 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$

$$\Gamma_X(z) = E z^X = \bar{p} z^0 + p z^1 = \bar{p} + p z \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} m_X = p \\ \sigma_X^2 = p\bar{p} \end{matrix}}$$

* تکرار مستقل از هم این آزمایش تصادفی را درنظر گیریم. تعریف متغیر تصادفی هندسی X = تعداد آزمایش لازم برای اولین رخداد E :

$$X \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$p_X(n) = p(X=n) = \underbrace{\bar{p}\bar{p}\cdots\bar{p}}_{n-1 \text{ بار}} p = \bar{p}^{\,n-1} p \iff X \sim G(p)$$

* تعریف متغیر تصادفی 2 جمله‌ای X = تعداد رخداد E در r آزمایش تصادفی:

$$X \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$$

$$p_X(X=n) = \binom{r}{n} p^n \bar{p}^{\,r-n} \iff X \sim B(r, p)$$

* تعریف متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی X = تعداد آزمایش لازم برای r-امین رخداد E .

$$X \in \{r, r+1, r+2, \dots\}$$

$$p(X=n) = \binom{n-1}{r-1} p^r \bar{p}^{\,n-r} \iff X \sim NB(r, p)$$

* تعریف متغیر تصادفی پواسن X = حد متغیر تصادفی 2 جمله‌ای، وقتی تعداد آزمایش ها $r \to \infty$ و احتمال هر رخداد $p \to 0$، به طوریکه متوسط تعداد رخداد:

$$rp \to \lambda < \infty$$

می‌توان نشان داد

$$p(X=n) = \lim_{\substack{r\to\infty \\ p\to 0 \\ rp=\lambda}} \binom{r}{n} p^n \underbrace{\bar{p}}_{(1-p)}{}^{r-n} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \quad , \quad X \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$X \sim P(\lambda)$$

و

$$m_X = \sigma_X^2 = \lambda$$

نکات:

① متغیر تصادفی دوجمله‌ای را می‌توان مجموع r متغیر تصادفی برنولی مستقل از هم دانست.

$$\left.\begin{array}{l} X_i \sim B(p) \\ x_1 \perp\!\!\!\perp x_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp x_r \\ X = x_1 + x_2 + \dots + x_r \end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim B(r, p)$$

② متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی را نیز می‌توان مجموع r عدد متغیر تصادفی هندسی مستقل از هم دانست.

$$\left.\begin{array}{l} X_i \sim G(p) \\ x_1 \perp\!\!\!\perp x_2 \perp\!\!\!\perp x_3 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp x_r \\ X = x_1 + x_2 + \dots + x_r \end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim NB(r, p)$$

③ جرم احتمال متغیر تصادفی پواسن را می‌توان از روی تابع مولّد آن نیز بدست آورد:

$$\Gamma_X(z) = \lim_{\substack{r\to\infty \\ p\to 0 \\ rp=\lambda}} (\underbrace{1-p+pz}_{1+p(z-1)})^r = \lim_{\substack{r\to\infty \\ p\to 0 \\ rp=\lambda}} (\underbrace{e^{p(z-1)}}_{e^{rp(z-1)}})^r = e^{\lambda(z-1)}$$

استفاده از تابع هم‌ارز

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda z}{1!} + \frac{(\lambda z)^2}{2!} + \dots\right) = \sum_n P_X(n) z^n$$

از مقایسه داریم:

$$P_X(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

④ محاسبهٔ ممان‌ها نیز به کمک تابع مولّد احتمال، خیلی ساده‌تر بدست می‌آید.

⑤ در بین متغیرهای تصادفی گسسته، پواسن از همه مهم‌تر است. چرا که مدل مناسبی است برای بسیاری از متغیرهای تصادفی گسسته‌ای که در عمل مطرح می‌گردند. مثلاً تعداد الکترون جدا شده از سطح سلول فتوالکتریک که تحت تابش نور (فوتون) قرار دارد. یا مثلاً تعداد غلط‌های تایپی در یک متن.

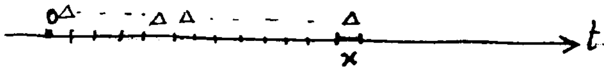
۲-۴- معرفی چند متغیر تصادفی پیوستهٔ مهم ۵ (ایلی کبی)

نکات:

① متغیر تصادفی یکنواخت $X \sim U(a,b)$ مدل مناسبی است، وقتی فقط بدانیم که X در فاصلهٔ a تا b قرار دارد.

② متغیر تصادفی نمایی $X \sim E(\lambda)$، مدل مناسبی است برای زمان انتظار در یک سیستم بدون حافظه، یعنی وقتی احتمال رخداد پیشامد مورد نظر به اینکه قبلاً پیشامد رخ داده و یا رخ نداده بستگی نداشته باشد.
مثلاً زمان انتظار برای اولین رخداد یک پیش آمد در تکرارهای مستقل از هم یک آزمایش تصادفی.

اثبات:



X زمان انتظار

$\Delta \to 0$ $\qquad P(X \approx x) = f_X(x)\cdot|\Delta| = \overbrace{(1-\lambda\Delta)(1-\lambda\Delta)\cdots(1-\lambda\Delta)}^{\text{تعداد} = \frac{x}{\Delta}}\lambda\Delta \Rightarrow$

احتمال رخداد در فاصله Δ $= \lambda\Delta$
احتمال عدم رخداد در فاصله Δ $= 1-\lambda\Delta$

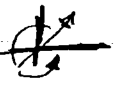
$$\Rightarrow f_X(x) = \lim_{\Delta \to 0} \underbrace{(1-\lambda\Delta)}_{e^{-\lambda\Delta}}{}^{\frac{x}{\Delta}}\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \lim_{\Delta \to 0} e^{-\lambda\Delta\frac{x}{\Delta}}\cdot\lambda = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

③ متغیر تصادفی ارلانگ $X \sim E(r,\lambda)$، مدل مناسبی است برای زمان انتظار برای r-امین رخداد یک پیش آمد در سیستم بدون حافظه.
این متغیر تصادفی را می‌توان مجموع r عدد نمایی مستقل از هم دانست.
در واقع، نمایی حالت پیوستهٔ متغیر تصادفی هندسی است و ارلانگ، حالت پیوستهٔ متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی است.

④ متغیر تصادفی نرمال $X \sim N(m,\sigma^2)$ مدل مناسبی است برای مجموع تعداد خیلی زیادی ($n \to \infty$) متغیر تصادفی مستقل از هم و مهم‌ترین متغیر تصادفی پیوسته است.

⑤ متغیر تصادفی رایلی $X \sim R(\sigma^2)$ مدل مناسبی است برای اندازهٔ برآیند تعداد خیلی زیادی بردار مستقل از هم. (یا فازورهای مستقل از هم)



* کاربرد در مدل‌سازی Fading در اثر multipath شدن کانال

⑥ کاربرد مهم متغیرهای تصادفی مربع-خی و استیودنت-T ، در آماری باشد. $X \sim \chi^2(n)$

$X \sim T(n)$

3-4- مثال دو متغیر تصادفی توأماً نرمال (نرمال دو بعدی)

(الف) تعریف: X و Y را توأماً نرمال گوییم، هرگاه هر ترکیب خطی دلخواه آن دو، تولید یک متغیر تصادفی نرمال کند، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} Z = aX + bY \\ \forall a,b \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2)$$

روشن است که در این صورت، هر ترکیب خطی با مقدار ثابت، $Z = aX + bY + C$ (ترکیب مستوی، affine) نیز نرمال خواهد شد.

(ب) cf و pdf توأم:

$$\Phi_{XY}(\omega_1,\omega_2) = Ee^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)} = Ee^{jZ} = \Phi_Z(\omega)\Big|_{\omega=1} = \triangle$$

$$Z = \omega_1 X + \omega_2 Y \longrightarrow Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2) \rightarrow \Phi_Z = e^{jm_Z\omega} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma_Z^2\omega^2}$$

$$\longrightarrow \Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) = e^{jm_Z} e^{-\frac{1}{2}\sigma_Z^2}$$

$$m_Z = \omega_1 m_X + \omega_2 m_Y$$

$$\tilde{Z} = \omega_1\tilde{X} + \omega_2\tilde{Y} \longrightarrow \sigma_Z^2 = E\tilde{Z}^2 = E(\omega_1\tilde{X} + \omega_2\tilde{Y})^2 = \omega_1^2\sigma_X^2 + \omega_2^2\sigma_Y^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{XY}$$

$$\longrightarrow \boxed{\Phi_{XY}(\omega_1,\omega_2) = e^{j(m_X\omega_1 + m_Y\omega_2)} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_X^2\omega_1^2 + \sigma_Y^2\omega_2^2 + 2\sigma_{XY}\omega_1\omega_2)}}$$

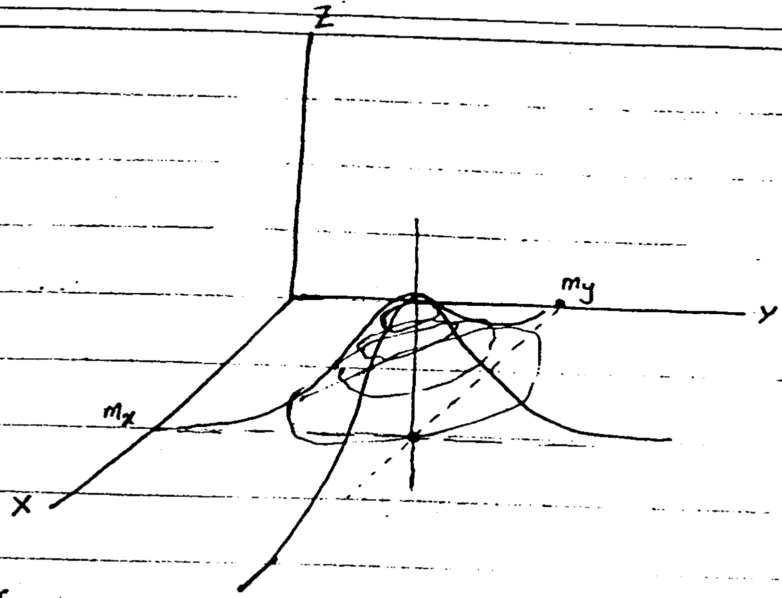
$$f_{XY}(x,y) = F^{-1}\{\Phi_{XY}^*(\omega_1,\omega_2)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{XY}^*(\omega_1,\omega_2) e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \longrightarrow$$

****

می‌توان نشان داد

$$\longrightarrow \boxed{f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2)}} e^{-\frac{\sigma_Y^2(x-m_X)^2 + \sigma_X^2(y-m_Y)^2 - 2\sigma_{XY}(x-m_X)(y-m_Y)}{2(\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2)}}}$$

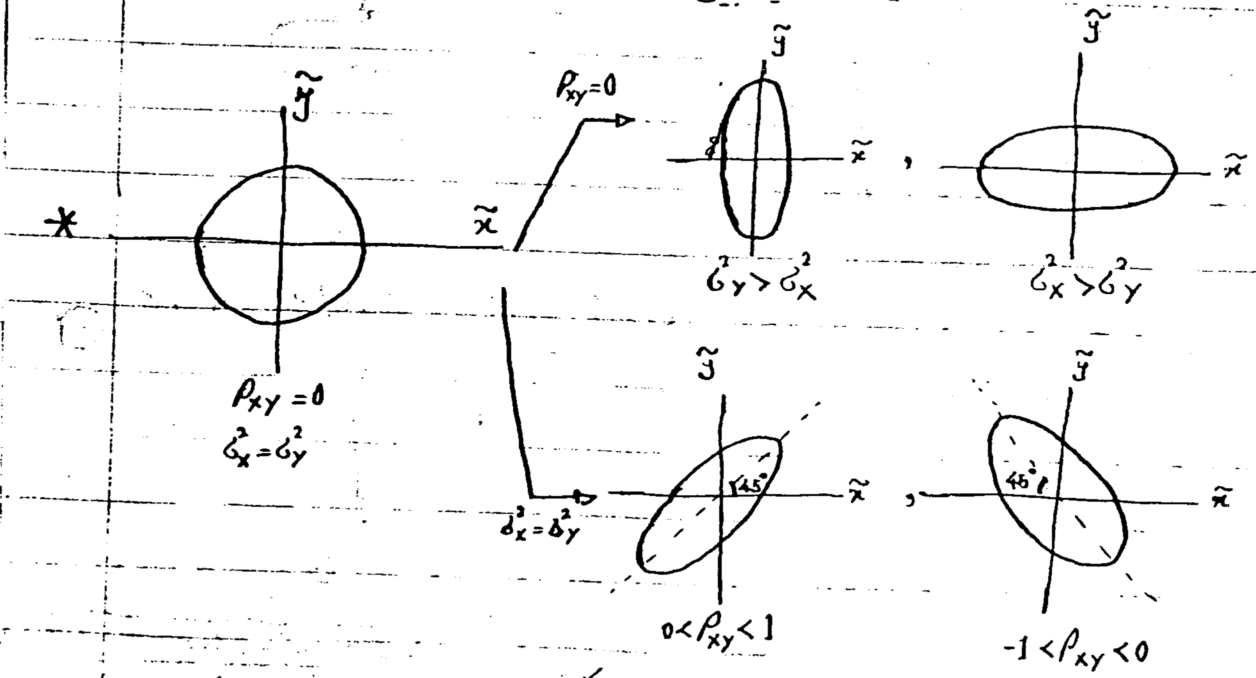
شکل pdf :



* معادله تقاطع افقی: $f_{XY}(x,y)=cte \longrightarrow l_i = cte$

$$\longrightarrow \sigma_Y^2 (x-m_X)^2 + \sigma_X^2 (y-m_Y)^2 - 2\sigma_{XY}(x-m_X)(y-m_Y) = cte$$

که معادلهٔ یک بیضی است.



اگر $\rho_{XY}=\pm1$ باشد، اشکال بالا به یک خط با شیب ±1 و گذرنده از منبع تبدیل می شوند.

نکات:

① توزیع های کناری شکل X نیز نرمال خواهد بود. چرا که X را می توان حالت خاصی از تبدیل خطی X و Y دانست.

$$X=(1)X+(0)Y$$

② توزیع های شرطی شکل $X|Y$ نیز نرمال خواهد بود. چرا که می توان دید:

* $$f_X(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x|y}^2}}\, e^{-\frac{(x-m_{x|y})^2}{2\sigma_{x|y}^2}}$$

نسبت 2 تابع نمائی با نمای درجه دو

*ضمن نشان دادن رابطهٔ فوق ، می توان نتیجه گرفت :

* $$m_{x|y}=\rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)+m_x$$

* $$\sigma_{x|y}^2=\sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2)$$

*ممکن است $x|y$ یا $y|x$ نرمال باشند، ولی x و y توأماً نرمال نباشند. (مثال نقض را بنویسید)

(3) از نرمال بودن توزیع‌های کناری دو متغیر تصادفی مستقل، می‌توان توأماً نرمال بودن آن دو را نتیجه گرفت (*)

(4) از نرمال بودن یکی (مثلاً x) و دیگری به شرط آن (مثلاً $y|x$) نیز می‌توان توأماً نرمال بودن آن دو را نتیجه گرفت (*)

(5) دو متغیر تصادفی حاصل از تبدیل خطی آن دو نیز، توأماً نرمال خواهند بود

$$\left.\begin{aligned} V&=a_1X+b_1Y\\ W&=a_2X+b_2Y\end{aligned}\right\} \longrightarrow$$ V و W نرمال که هستند، توأماً نرمال هم می‌شوند.

چرا که هر ترکیب خطی دلخواه V و W نرمال است؛ زیرا:

$$Z=aV+bW=a(a_1X+b_1Y)+b(a_2X+b_2Y)=(aa_1+ba_2)X+(ab_1+bb_2)Y$$

هر ترکیب خطی دلخواه V و W، ترکیبی خطی است از X و Y و تولید متغیر تصادفی نرمال خواهد کرد.

* (6) از ناهمبسته بودن X و Y توأماً نرمال، می‌توان استقلال X و Y را نتیجه گرفت.

$$\left.\begin{array}{l} X \not\perp Y \text{ : ناهمبستگی} \\ X \text{ و } Y \text{ توأماً نرمال}\end{array}\right\} \longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

(اثبات):

$$X \perp Y \Longrightarrow \sigma_{XY}=0 \longrightarrow \Phi_{XY}(\omega_1,\omega_2)=e^{j(m_x\omega_1+m_y\omega_2)}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\sigma_x^2\omega_1^2+\sigma_y^2\omega_2^2+0)}=$$

$$=\left(e^{jm_x\omega_1}e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2\omega_1^2}\right)\left(e^{jm_y\omega_2}e^{-\frac{1}{2}\sigma_y^2\omega_2^2}\right)=$$

$$=\Phi_X(\omega_1)\,\Phi_Y(\omega_2)$$

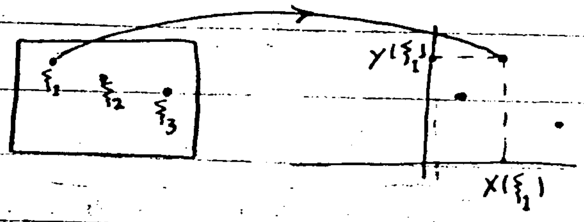
$$\Downarrow$$

$$\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y}$$

۴-۴- متغیّر تصادفی مختلط

متغیّر تصادفی مختلط Z = تابعی که به هر نقطه از فضای نمونه، یک عدد مختلط نسبت می دهد.

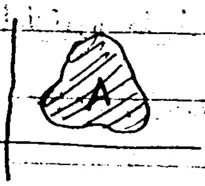
$$\Omega \xrightarrow{Z} \mathbb{C}$$



$$\boxed{Z(\xi) = X(\xi) + jY(\xi)}$$

* روشن است که در حالت کلّی اجزای حقیقی و مجازی نیز خود یک متغیّر تصادفی حقیقی خواهند بود.

- در حالت کلّی برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد، مثل $\{Z\in A\}$ به pdf توأم X و Y نیاز خواهیم داشت:



$$p(Z\in A) = \iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

- بطور کلّی برای محاسبهٔ امید ریاضی تابعی از Z نیز به pdf توأم X و Y نیاز خواهیم داشت.

$$E\,g(Z) = E\,g(X+jY) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x+jy)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

* کاربرد متغیّرهای تصادفی مختلط در مواردی است که فقط با ممان ها سروکار داشته باشیم، چرا که در این صورت استفاده از آن ها می تواند باعث سادگی روابط شود.

$$Z = X + jY \rightarrow m_Z = EZ = E(X+jY) = EX + jEY = m_X + j\,m_Y \rightarrow \boxed{m_Z = m_X + j\,m_Y}$$

تعریف - توان متغیّر تصادفی مختلط

$$P_Z \triangleq E|Z|^2 = E\,ZZ^* = E(X^2+Y^2) = EX^2 + EY^2 = P_X + P_Y \rightarrow \boxed{P_Z = P_X + P_Y}$$

$$\tilde{Z} = Z - m_Z = \tilde{X} + j\tilde{Y}$$

$$\underbrace{Var(Z) = \sigma_Z^2 \triangleq E|\tilde{Z}|^2}_{\text{تعریف}} = E\,\tilde{Z}\tilde{Z}^* = E(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2) = E\tilde{X}^2 + E\tilde{Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

* این تعبیر تعریف ممان دوم، هم باعث حقیقی شدن ρ_Z و σ_Z^2 می شود و هم اینکه ممان ها را مستقل از ممان متقابل یا توزیع توأم X و Y می نماید.

این تعریف می تواند جایگزین تعریف قبلی شود.

کلی *

* برای 2 متغیر تصادفی مختلط Z_1 و Z_2:

$$- \; r_{z_1 z_2} \triangleq E z_1 z_2^*$$

$$- \; Cov(Z_1, Z_2) = \sigma_{z_1 z_2} \triangleq E \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^*$$

$$- \; \rho_{z_1 z_2} = \frac{\sigma_{z_1 z_2}}{\sqrt{\sigma_{z_1}^2 \sigma_{z_2}^2}} = \frac{\sigma_{z_1}}{\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}}$$

* $- \; \sigma_{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2} = r_{z_1 z_2} - m_{z_1} m_{z_2}^*$ $\qquad - \; \sigma_z^2 = \rho_z - |m_z|^2$

برخی تعبد بدنظرها:

* تعریف تعامد $\begin{cases} z_1 \perp z_2 \\ E z_1 z_2^* = 0 \end{cases}$

* تعریف ناهمبستگی $\begin{cases} z_1 \not\perp z_2 \\ E \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^* = 0 \;\; \text{یا} \;\; \sigma_{z_1 z_2} = 0 \;\; \text{یا} \;\; \rho_{z_1 z_2} = 0 \;\; \text{یا} \;\; r_{z_1 z_2} = m_{z_1} m_{z_2}^* \end{cases}$

* نامساوی شوارتز $\begin{cases} |E z_1 z_2^*|^2 \leq E|z_1|^2 \cdot E|z_2|^2 \\ |\rho_{z_1 z_2}|^2 \leq 1 \longrightarrow |\rho_{z_1 z_2}| \leq 1 \end{cases}$

* تساوی به مفهوم ms $\begin{cases} z_1 \overset{ms}{=} z_2 & \text{نماد} \\ E|z_1 - z_2|^2 = 0 & \text{شرط} \end{cases}$

* متغیر تصادفی Z را نرمال گوئیم، هرگاه هر ترکیب خطی اجزای حقیقی و مجازی آن تولید یک متغیر تصادفی نرمال کند، یعنی در واقع اگر اجزای حقیقی و مجازی آن توأماً نرمال باشند.

4-5- مقدمه‌ای بر تخمین

منظور از تخمین، پیدا کردن یک مجهول (مقدار تقریبی) از روی داده یا داده‌های آماری یعنی مقادیر مشاهده شده از یک یا چند متغیر تصادفی مجهولی که به دلیلی مستقیماً قابل سنجش نیست - داده‌هائی که قابل سنجش هستند و به طریقی با مجهول مرتبط هستند.

* در این قسمت تخمین یک متغیر تصادفی S از روی یک متغیر تصادفی دیگر X را در نظر خواهیم گرفت.
- S می تواند مثلاً مقدار سیگنال در یک لحظه باشد و X نتیجهٔ اندازه گیری همراه با نویز آن
- S می تواند مثلاً مقدار سیگنال در 2 ثانیه بعد باشد و X مقدار فعلی سیگنال باشد.

+ هدف به صورت $\hat{S} = g(X)$ به طوری که $S \approx \hat{S}$ باشد.

تخمین S

$S \approx g(X)$

* در واقع هدف از تخمین، پیدا کردن یک رابطهٔ تقریبی بین S و X می باشد.

* یک معیار مفید رایج در تخمین، متوسط مربع خطا می باشد:

$$\rho = E(S-\hat{S})^2 = Min \Longrightarrow \begin{cases} \hat{S} = g(X) \\ \rho_{min} \end{cases}$$

اگر $\rho_{min} = 0$ باشد، نشان می دهیم که به مفهوم ms : $S = \hat{S}$

یعنی $S = g(X)$

یعنی رابطهٔ دقیقی بین S و X وجود داشته و ما آن را بدست آورده‌ایم.

(الف) تخمین با مقدار ثابت (بدون استفاده از X)

$$\begin{cases} \hat{S} = a \quad \text{قید} \\ \rho = E(S-a)^2 = Min \end{cases} \Longrightarrow \rho = E(S-a)^2 = E(\tilde{S} + \underbrace{m_S - a}{})^2 =$$

$$= E\tilde{S}^2 + E(m_S - a)^2 + 2E\tilde{S}(m_S - a) =$$

$$= \sigma_S^2 + (m_S - a)^2 + 2(m_S - a)\underbrace{\cancel{E\tilde{S}}}_{0} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \rho = E(S-\hat{S})^2 = \sigma_S^2 + (m_S - a)^2 = Min \longrightarrow a = m_S \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} \hat{S} = m_S \\ \rho_{min} = \sigma_S^2 \end{matrix}}$$

*

ب) تخمین خطی (به فرم $\hat{S}=a_1X+a_2$)

$$\left.\begin{array}{l} \rho = E(S-\hat{S})^2 = Min \\ \hat{S}=a_1X+a_2 \ \text{قید خطی بودن} \end{array}\right\} \Longrightarrow a_1, a_2 \Longrightarrow \begin{cases} \hat{S} \\ \rho_{min} \end{cases}$$

$$\rho = E(S-a_1X-a_2)^2 = E(\tilde{S}+m_S-a_1\tilde{X}-a_1m_X-a_2)^2 = E(\underbrace{\tilde{S}-a_1\tilde{X}}+\underbrace{m_S-a_1m_X-a_2})^2$$

$$= E(\tilde{S}-a_1\tilde{X})^2 + (m_S-a_1m_X-a_2)^2 + 0 = Min \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a_2 = m_S - a_1 m_X \longrightarrow \hat{S} = a_1X+a_2 = a_1(X-m_X)+m_S \\ E(\tilde{S}-a_1\tilde{X})^2 = min \end{cases}$$

$$E\tilde{S}^2 + a_1^2\underbrace{E\tilde{X}^2}_{\sigma_X^2} - 2a_1\underbrace{E\tilde{S}\tilde{X}}_{\sigma_{SX}} = Min \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial a_1}(\,)=0} 2\sigma_X^2 a_1 - 2\sigma_{SX} = 0 \longrightarrow$$

$$* \longrightarrow a_1 = \frac{\sigma_{SX}}{\sigma_X^2}\times\frac{\sigma_S}{\sigma_S} = \rho_{SX}\frac{\sigma_S}{\sigma_X} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \hat{S} = \rho_{SX}\dfrac{\sigma_S}{\sigma_X}(X-m_X)+m_S \\ \rho_{min} = \sigma_S^2(1-\rho_{SX}^2) \end{array}}$$

*

در مقایسه با بند (الف)، جمله اول $\hat{S}$ را می توان اصلاح کننده تخمین بند (الف)، به کمک X دانست و ضریب کوچکتر از یک، $(1-\rho_{SX}^2)$ را در رابطه ρ_{min}، عامل این اصلاح دانست.

1) اگر S و X ناهمبسته باشند، یعنی $\rho_{SX}=0$، داریم:

$$\longrightarrow \boxed{\hat{S} = 0+m_S \ \text{و}\ \rho_{min} = \sigma_S^2(1-0)}$$

پس X هیچ کمکی به تخمین خطی S نخواهد کرد.

البته ناهمبستگی به معنی استقلال نیست ولذا بدین معنی نیست که X هیچ کمکی به تخمین S نخواهد کرد. حتی ممکن است S و X ای که کاملاً وابسته باشند، ناهمبسته باشند، زیرا فقط تخمین خطی غلط است وممکن است تخمین های دیگر درست باشد.

مثلاً فرض کنید: $f_X(-x)=f_X(x)$: فرض

$S(\xi)=X^2(\xi)$ وابستگی کامل

این S و X ناهمبسته اند، چراکه $ESX = EX^2X = EX^3 = 0$

تقارن زوج pdf

$$EX=0 \ , \ ESX = ES\,EX \longrightarrow \rho_{XY}=0$$

جلسه 84/11/6

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{S}=\rho_{sx}\dfrac{\sigma_s}{\sigma_x}(X-m_x)+m_s \\ P_{min}=\sigma_s^2(1-\rho_{sx}^2) \end{array}\right\}$$

و

مثل تخمین با مقدار ثابت

$$S \not\perp X \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{S}=m_s \\ P_{min}=\sigma_s^2 \end{array}\right.$$

---

* در حالت $|\rho_{sx}|=1$ داریم:

$$P_{min}=E(S-\hat{S})^2=\sigma_s^2(1-1)=0 \longrightarrow \hat{S}=S$$

$$\longrightarrow \boxed{S=\rho_{sx}\frac{\sigma_s}{\sigma_x}(X-m_x)+m_s}$$

* یعنی وقتی اندازهٔ ضریب همبستگی برابر یک باشد، یک رابطهٔ خطّی دقیق بین دو متغیّر تصادفی وجود دارد.
لذا ضریب همبستگی پارامتری است که میزان وابستگی خطّی 2 متغیّر تصادفی را نشان می‌دهد.

$\cancel{P=E(S-\hat{S})^2}$

ج) بهترین تخمین

$$\left\{\begin{array}{l} P=E(S-\hat{S})^2=Min \\ \hat{S}=g(X) \quad \text{هر تابع دلخواهی از } X \end{array}\right.$$

$$P=E(S-g(X))^2=E_X\left\{E_S\left((S-g(X))^2\,|\,X\right)\right\}=\int_{x=-\infty}^{+\infty}\overbrace{f_X(x)}^{\text{غیرمنفی}}\,\underbrace{E\left[(S-g(X))^2\,|\,X=x\right]}_{\text{غیرمنفی}}dx=Min$$

$$E(S-g(X))^2\Big|_{X=x}=Min \longrightarrow E(S^2-2Sg(X)+g^2(X))\Big|_{X=x}=Min \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underbrace{E(S^2|_{X=x})}_{\sigma_{s|x}^2+m_{s|x}^2}-2\underbrace{E\,g(X)S|_{X=x}}_{g(x).m_{s|x}}+\underbrace{E\,g^2(X)|_{X=x}}_{g^2(x)}=Min \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sigma_{s|x}^2+(g(x)-m_{s|x})^2=Min \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x)=m_{s|x} \\ \text{و} \\ P_{min}=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,\sigma_{s|x}^2\,dx=E\,\sigma_{s|x}^2 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \hat{S} = E(s|x) = m_{s|x} & \text{متوسط پیشین (پس از مشاهده داده)} \\ P_{min} = E(var(s|x)) = E\,\sigma^2_{s|x} & \text{امید ریاضی واریانس پیشین} \end{cases}$$

---

* در حالت کلی بهترین تخمین $\hat{S} = m_{s|x}$ تابعی غیرخطی از X می‌گردد.

در حالتی که S و X توأماً نرمال باشند از قسمت 3-4 داریم:

$$\begin{cases} m_{s|x} = \rho_{sx} \dfrac{\sigma_s}{\sigma_x}(X - m_x) + m_s \\ \sigma^2_{s|x} = \sigma^2_s (1 - \rho_{sx})^2 \end{cases}$$

پس بهترین تخمین است.

$$\begin{cases} \hat{S} = m_{s|x} = \underbrace{\rho_{sx} \dfrac{\sigma_s}{\sigma_x}(X - m_x) + m_s}_{\text{همان تخمین خطی}} \\ P_{min} = E\,\sigma^2_{s|x} = E\left(\sigma^2_s(1-\rho^2_{sx})\right) = \sigma^2_s(1-\rho^2_{sx}) \end{cases}$$

* پس می‌توان گفت که اگر دو متغیر تصادفی توأماً نرمال باهم وابستگی داشته باشند، وابستگی آنها از نوع خطی خواهد بود.
قبلاً دیده بودیم که در توأماً نرمال از ناهمبستگی (عدم وابستگی خطی)، استقلال کامل (عدم هرگونه وابستگی) نتیجه می‌گردد.

---

5 - بردار تصادفی

مجموعه‌ای از n متغیر تصادفی $\equiv$ بردار تصادفی

5-1) مروری بر ماتریس و بردار و ذکر چند قرارداد

① ماتریس:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{n \times m}$$

نماد اختصاری

* در ماتریس مربعی، $m = n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

در ماتریس قطری فقط روی قطر اصلی مقادیر غیرصفرند:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{نماد}}{=} Diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

ماتریس همانی:

$$A = \mathrm{Diag}(1,1,\ldots,1) \overset{\text{نماد}}{=} I$$

② ضرب ماتریس:

$$A = [a_{ij}]_{n\times m_1} \quad , \quad B = [b_{ij}]_{m_1\times m}$$

$$C = AB = [a_{ij}]_{n\times m_1} \cdot [b_{ij}]_{m_1\times m} = [c_{ij}]_{n\times m}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m_1} a_{ik} b_{kj}$$

③ برگردان (T)، هرمیتین، وارون ماتریس

* $A = [a_{ij}]_{n\times m} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = A^t = [b_{ij}]_{m\times n} \\ \text{و} \\ b_{ij} = a_{ji} \end{array} \right.$ برگردان A

* در واقع از تعویض جای سطر و ستون A، حاصل می‌گردد.

* هرمیتین A $\left\{ \begin{array}{l} C = A^h = [c_{ij}]_{m\times n} \\ , \\ c_{ij} = a_{ji}^* \end{array} \right.$

در واقع ← $A^h = (A^*)^t = (A^t)^*$

* معکوس $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ (وارون A) $B = A^{-1}$

شرط وارون بودن ← $AB = BA = I$

در حاصلضرب داریم:

$$(ABC)^t = C^t B^t A^t$$

$$(ABC)^h = C^h B^h A^h$$

$$(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$$ ← وقتی تک تک وارون داشته باشند.

حالات ترکیبی : $(A^t)^t = A \quad , \quad (A^h)^h = A \quad , \quad (A^t)^h = (A^h)^t = A^*$

$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-t} \quad , \quad (A^{-1})^h = (A^h)^{-1} = A^{-h}$

(4) ردماتریس و مربع اندازهٔ ماتریس : $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ماتریس مربعی

A ردماتریس $\longrightarrow \text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$A = [a_{ij}]_{n \times m}$ دلخواه

مربع اندازهٔ ماتریس $\longrightarrow \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2$

یک رابطهٔ مفید : $\boxed{\|A\|^2 = \text{trace}(A^h A) = \text{trace}(A A^h)}$ *

(5) بردار، ضرب بردارها و تعامد بردارها : (یک سطری یا یک ستونی) ماتریس یک بعدی $\equiv$ بردار

* نماد بردار ستونی $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ بردار سطری $\underline{a}^t = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$

$$\boxed{\underline{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^t}$$

بین بردارها دو نوع ضرب تعریف می‌کنیم :

* ضرب عددی دو بردار $\longrightarrow$ $\underline{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^t$

$\underline{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^t$

$\boxed{\underline{b} \text{ و } \underline{a} \text{ حاصلضرب عددی } = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i = \underline{a}^h . \underline{b}}$

در این ضرب ، لازم است که ابعاد دو بردار با هم برابر باشند .

* ضرب ماتریسی دو بردار $\longrightarrow$ یعنی ضربی که حاصل آن یک ماتریس می‌گردد .

$$\underline{a} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)^t \quad , \quad \underline{b} = (b_1\ b_2\ \dots\ b_m)^t$$

$$\boxed{\text{حاصلضرب ماتریسی } \underline{a} \text{ و } \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* & \dots & a_1 b_m^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* & \dots & a_2 b_m^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1^* & a_n b_2^* & & a_n b_m^* \end{pmatrix} = [a_i b_j^*]_{n\times m} = \underline{a}\,.\,\underline{b}^h}$$

در ضرب ماتریسی، تساوی ابعاد دو بردار، فروری ندارد.

زی نباید

در ضرب عددی $\underline{a}^h . \underline{b} = (\underline{b}^h . \underline{a})^h = (\underline{b}^h . \underline{a})^*$ *

در ضرب ماتریسی $\underline{a}.\underline{b}^h = (\underline{b}\,\underline{a}^h)^h$ *

* $$\boxed{\|\underline{a}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \underline{a}^h . \underline{a} = trace\,(\underline{a}\,\underline{a}^h)}$$

تعامد دو بردار : $\underline{a} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)^t \quad , \quad \underline{b} = (b_1\ b_2\ \dots\ b_n)^t$

$$\begin{cases} \text{شرط تعامد} \rightarrow \underline{a}^h \underline{b} = 0 \\ \text{نماد تعامد} \rightarrow \underline{a} \perp \underline{b} \end{cases}$$

6 بردارهای ویژه و مقادیر ویژه:

ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]_{n\times n}$

جوابهای غیر صفر معادله روبرو ← $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

را بردارهای ویژهٔ A گویند.

* جواب همیشگی $\underline{v}=0$ بردار ویژه نامیده نمی شود.

اگر $\underline{v}$ در رابطه صدق کند، $K\underline{v}$ نیز صدق خواهد کرد، در واقع می توان گفت امتدادهای ویژه داریم.
می توان K را به قسمی اختیار کرد که مربع اندازهٔ بردار ویژه برابر با $\underline{1}$ شود. (بردار ویژهٔ نرمالیزه یا یکه)
ما نیز بردارهای ویژهٔ نرمالیزه را در نظر خواهیم گرفت.

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v} \Longrightarrow (A - \lambda I)\,\underline{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \underline{v} = 0 \longrightarrow$$

یعنی برای $\underline{v}$ وقتی جواب غیرصفر خواهیم داشت که ماتریس ضرایب سینگولار باشد.

$$\det(A-\lambda I)=0$$

این رابطه برحسب λ یک چندجمله‌ای درجه n می‌باشد (معادلهٔ مشخصه). ریشه‌های آن

$$\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$$

مقادیر ویژه نامیده می‌شوند.

و بردار ویژهٔ متناظر با λ_i را $\underline{v}_i$ می‌نامیم: $$A\underline{v}_i=\lambda_i\underline{v}_i$$

نکات:

① اگر $A^h=A$ باشد، همهٔ مقادیر ویژه اعداد حقیقی خواهند بود و بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متفاوت، متعامد خواهند بود.

$$\lambda_i\neq\lambda_j \Longrightarrow \underline{v}_i\perp\underline{v}_j$$

② اگر A حقیقی و $A^t=A$، علاوه بر خواص ①، بردارهای ویژه نیز حقیقی خواهند بود.

③ در حالت کلی داریم:

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i)=\det(A)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)=\mathrm{Trace}(A)$$

---

⑦ ماتریس متقارن - پادمتقارن هرمیتی و ماتریس یکانی:

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ مربعی

$$\boxed{\begin{cases}A^t=A \\ \text{or} \\ a_{ji}=a_{ij}\end{cases}}$$

شرط تقارن ← $A^t=A$ یعنی $a_{ji}=a_{ij}$

یعنی عناصر قرینه نسبت به قطر اصلی مساوی باشند.

شرط تقارن هرمیتی ← $A^h=A$ یعنی $a_{ji}^*=a_{ij}$

یعنی عناصر روی قطر اصلی حقیقی باشند و عناصر قرینه نسبت به قطر اصلی، مزدوج باشند.

$$A^h = A^{-1} \longrightarrow$$ شرط یکانی بودن

Unitary : یکانی

$A^h A = A A^h = I$: به عبارت معادل

* یک خاصیت ماتریس یکانی این است که اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

* یعنی اگر U یکانی باشد

$$B = UA \longrightarrow \|B\|^2 = \|A\|^2$$

اثبات :

$$\|B^2\| = \operatorname{trace}(B^h B) = \operatorname{trace}((UA)^h UA) = \operatorname{trace}(A^h \underbrace{U^h U}_{I} A) = \operatorname{trace}(A^h A) = \|A\|^2$$

(8) تعریف فرم درجه دوم و فرم هرمیتی

$\underline{Z}$: بردار n بعدی $\quad \underline{Z} = (z_1 \; z_2 \ldots \; z_n)^t$

* فرم درجه دوم بردار $\underline{Z}$:
با ماتریس ضرایب A

$$q_A(\underline{Z}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j$$

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

* فرم هرمیتی بردار $\underline{Z}$:
با ماتریس ضرایب A

$$h_A(\underline{Z}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i^* z_j$$

* فرم هرمیتی وقتی به کار برده می‌شود که A دارای تقارن هرمیتی باشد، که در این صورت $h_A(\underline{Z})$ عددی حقیقی خواهد بود. چرا که :

$$(h_A(\underline{Z}))^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^* z_i z_j^* \underset{a_{ji} = a_{ij}^*}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} z_j^* z_i = h_A(\underline{Z})$$

رابطهٔ مفید :

$$q_A(\underline{Z}) = \underline{Z}^t A \underline{Z}$$

$$h_A(\underline{Z}) = \underline{Z}^h A \underline{Z}$$

جلسه (new)

5- بردار تصادفی ← 5-1 مرور و چند قرارداد

$*\quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv g(\underline{x})$

$*\quad \{a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n\} \equiv \{\underline{a} \leq \underline{b}\}$

$*\quad \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} \equiv \int_{\underline{a}}^{\underline{b}}$

$*\quad dx_1\, dx_2\, dx_3 \dots dx_n \equiv d\underline{x}$

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \equiv \frac{\partial^n}{\partial \underline{x}}$$

5-2- توابع احتمال بردار تصادفی (CDF و pdf و cf)

بردار تصادفی ≡ مجموعه‌ای از مثلاً n متغیر تصادفی

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$$

$$\Omega \xrightarrow{\ X\ } \mathbb{R}^n$$

با تعریف بردار تصادفی به هر نقطه از فضای نمونه n عدد نسبت داده می‌شود.
نقطه‌ای از فضای $\mathbb{R}^n$ نسبت داده می‌شود.
یک بردار n بعدی عددی نسبت داده می‌شود.

$$F_X(\underline{x}) \triangleq P\{\underline{X} \leq \underline{x}\} \quad \text{و} \quad f_X(\underline{x}) \triangleq \frac{\partial^n}{\partial \underline{x}} F_X(\underline{x})$$

$$\phi_X(\underline{\omega}) \triangleq E\, e^{j\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i} = E\, e^{j\underline{\omega}^t \underline{X}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\underline{\omega}^t \underline{x}} f_X(\underline{x})\, d\underline{x}$$

* CDF و pdf و cf، هم ارز یکدیگرند. معلوم بودن هر یک، دوتای دیگر را مشخص می‌کند، چرا که:

$*\quad F_X(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\underline{x}} f_X(\underline{x})\, d\underline{x}$

$*\quad f_X(\underline{x}) = F^{-1}\phi_X^*(\underline{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X^*(\underline{\omega})\, e^{j\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i} \frac{d\underline{\omega}}{(2\pi)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X^*(\underline{\omega})\, e^{j\underline{\omega}^t \underline{x}} \frac{d\underline{\omega}}{(2\pi)^n}$

برای 2 بردار تصادفی :

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$$
$$\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)^t$$

توابع احتمال توأم هم مطرح می شود.

$$* \; F_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) \triangleq P\{\underline{X} \leqslant \underline{x}, \underline{Y} \leqslant \underline{y}\}$$

$$* \; f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) \triangleq \frac{\partial^{n+m}}{\partial \underline{x}\, \partial \underline{y}} F_{XY}(\underline{x}, \underline{y})$$

$$* \; \Phi_{XY}(\underline{u}, \underline{v}) \triangleq E\, e^{j(\underline{u}^t \underline{X} + \underline{v}^t \underline{Y})} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\underline{u}^t \underline{x} + \underline{v}^t \underline{y})} f_{XY}(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{x}\, d\underline{y}$$

به کمک توابع احتمال توأم دو بردار، می توان توابع احتمال کناری هر یک را پیدا کرد. مثلاً:

$$F_X(\underline{x}) = F_{XY}(\underline{x}, \underline{+\infty})$$

$$f_X(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{y}$$

$$\Phi_X(\underline{\omega}) = \Phi_{XY}(\underline{\omega}, \underline{0})$$

* دو تابع احتمال شرطی مهم و مفید :

نماد اختصاری

$$* \; F_X(\underline{x} \mid \underline{Y} \leqslant \underline{y}) \triangleq F_X(\underline{x} \mid \underline{y}) = \frac{F_{XY}(\underline{x}, \underline{y})}{F_Y(\underline{y})}$$

$$* \; f_X(\underline{x} \mid \underline{Y} = \underline{y}) \triangleq f_X(\underline{x} \mid \underline{y}) = \frac{f_{XY}(\underline{x}, \underline{y})}{f_Y(\underline{y})}$$

* رابطه زنجیره ای $\Rightarrow$ $F_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) = F_X(\underline{x}) F_Y(\underline{y} \mid \underline{x}) = F_Y(\underline{y}) F_X(\underline{x} \mid \underline{y})$

$$f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) = f_X(\underline{x}) f_Y(\underline{y} \mid \underline{x}) = f_Y(\underline{y}) f_X(\underline{x} \mid \underline{y})$$

* دو بردار تصادفی را مستقل از هم گوئیم، هرگاه توابع احتمال توأم آنها، برابر حاصلضرب توابع احتمال تک تک آن‌ها باشد.

نماد: $\underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y}$

$$\left.\begin{aligned} F_{XY}(\underline{x},\underline{y}) &= F_X(\underline{x}) \cdot F_Y(\underline{y}) \\ f_{XY}(\underline{x},\underline{y}) &= f_X(\underline{x}) \cdot f_Y(\underline{y}) \\ \Phi_{XY}(\underline{U},\underline{V}) &= \Phi_X(\underline{U}) \cdot \Phi_Y(\underline{V}) \end{aligned}\right\} \text{3 شرط معادل برای استقلال}$$

* البته 2 بردار تصادفی را می‌توان به‌عنوان یک بردار تصادفی $n+m$ بعدی نیز در نظر گرفت. بالعکس نیز می‌توان یک بردار را به 2 (و یا چند) بردار تصادفی تفکیک کرد.

چند مثال: $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^t$

* $F_{X_1X_3}(x,y) = F_X(x, +\infty, y, +\infty)$

* $f_{X_4}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2, x_3, x)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$

* $\Phi_{X_1X_4}(\alpha,\beta) = \Phi_X(\alpha, 0, 0, \beta)$

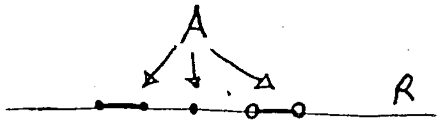
* $F_{X_1X_2}(x_1, x_2 \mid x_3 = a, x_4 = b) = \dfrac{F_X(x_1, x_2, a, b)}{F_{X_3X_4}(a,b)} = \dfrac{F_X(x_1, x_2, a, b)}{F_X(+\infty, +\infty, a, b)}$

* در حالت کلی به کمک pdf می‌توان احتمال پیشامدها را محاسبه کرد.

$$P\{\underline{X} \in A\} = \int_A f_X(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

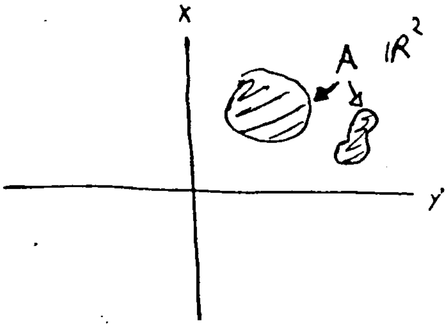
در حالت یک بعدی:



$$p(A) = \int_A f_X(x)\, dx$$

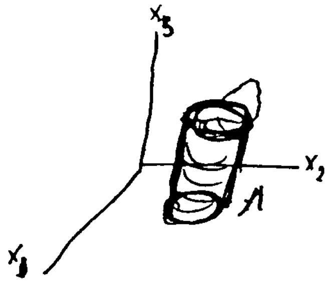
مثلاً در حالت 2 بعدی:

$$p(A) = \iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$



مثلاً در حالت 3 بعدی:

$$p(A) = \iiint_A f_X(x_1,x_2,x_3)\,dx\,dy\,dz$$



رابطهٔ زنجیره‌ای:

$$f_X(\underline{x}) = f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2|x_1)\cdot f_{X_3}(x_3|x_1x_2)\ \dots\ f_{X_n}(x_n|x_1x_2\dots x_{n-1})$$

$$F_X(\underline{x}) = F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2|x_1)\cdot F_{X_3}(x_3|x_1x_2)\ \dots\ F_{X_n}(x_n|x_1x_2\dots x_{n-1})$$

توأماً مستقل بودن ابعاد یک بردار تصادفی: $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp X_3 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n$ ← مثلا

$$\left.\begin{aligned} F_X(\underline{x}) &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \\ f_X(\underline{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \\ \Phi_X(\underline{w}) &= \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(w_i) \end{aligned}\right\}$$ 3 شرط معادل

از توأماً مستقل بودن n متغیر تصادفی، توأماً مستقل بودن هر زیرمجموعه ای از آنها نیز نتیجه می گردد.

3-5- ممان های اول و دوم

$$\underline{m}_X = E\underline{X} = E\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ex_1 \\ Ex_2 \\ \vdots \\ Ex_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

* $\underline{m}_X$ بردار متوسطی باشد که هر بعدش، متوسط یکی از متغیرهای تصادفی است.

$$R_X = E\underline{X}\,\underline{X}^h = E[x_i x_j^*]_{n\times n} = [E x_i x_j^*]_{n\times n} = [r_{ij}]_{n\times n} =$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

* در این رابطه $r_{ii} = E|x_i|^2 = P_i$ قدرت

+ R_X را ماتریس همبستگی بردار تصادفی گوئیم.

$$C_X = E\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{X}}^h = E[\tilde{x}_i \tilde{x}_j^*]_{n\times n} = [E\tilde{x}_i \tilde{x}_j^*]_{n\times n} = [\sigma_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

✓ در این رابطه $\sigma_{ii} = E|\tilde{x}_i|^2 = \sigma_i^2$

* اگر ابعاد برداری، 2 به 2 متعامد باشند:

$$r_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \implies R_X = Diag(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

آنگاه R_X قطری می‌گردد.

* اگر ابعاد برداری، 2 به 2 ناهمبسته باشند:

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \implies C_X = Diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$$

آنگاه C_X قطری می‌گردد.

ـ بین 2 بردار تصادفی، ممان متقابل هم تعریف می‌گردد.

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^t$$

$$\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)^t$$

$$R_{XY} = E\underline{X}\,\underline{Y}^h = E[x_i y_j^*]_{n\times m} = [E x_i y_j^*]_{n\times m}$$

ماتریس هم‌بستگی

$$C_{XY} = E\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{Y}}^h = E[\tilde{x}_i \tilde{y}_j^*]_{n\times m} = [E\tilde{x}_i \tilde{y}_j^*]_{n\times m}$$

ماتریس کوواریانس متقابل

چند رابطه و خاصیت:

* $R_{\underline{XY}} = C_{\underline{XY}} + \underline{m}_X \underline{m}_Y^h$ * $C_{\underline{XY}}^h = C_{\underline{YX}}$

* $R_{\underline{X}} = C_{\underline{X}} + \underline{m}_X \underline{m}_X^h$ * $R_{\underline{XY}}^h = R_{\underline{YX}}$

$$\left.\begin{array}{l} * \; C_{\underline{X}}^h = C_{\underline{X}} \\ * \; R_{\underline{X}}^h = R_{\underline{X}} \end{array}\right\} \longrightarrow$$ یعنی تقارن هرمیتیک دارند.

تعریف تعامد 2 بردار: $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ را متعامد گوییم، هرگاه هر بُعد یکی با هر بُعد دیگری متعامد باشد. یعنی:

$$R_{\underline{XY}} = 0 \longleftarrow \text{شرط تعامد}$$

نماد تعامد: $\underline{X} \perp \underline{Y}$

تعریف ناهمبستگی 2 بردار: $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ را ناهمبسته گوییم، هرگاه هر بُعد یکی با هر بُعد دیگری ناهمبسته باشد.

یعنی: $C_{\underline{XY}} = 0$ شرط ناهمبستگی

نماد ناهمبستگی: $\underline{X} \,\tilde{\perp}\, \underline{Y}$

* $\underline{X} \perp \underline{Y} \Longrightarrow R_{\underline{X}+\underline{Y}} = R_{\underline{X}} + R_{\underline{Y}}$

برای 2 بردار هم بعد

* $\underline{X} \,\tilde{\perp}\, \underline{Y} \Longrightarrow C_{\underline{X}+\underline{Y}} = C_{\underline{X}} + C_{\underline{Y}}$

* $\underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \underline{X} \,\tilde{\perp}\, \underline{Y}$

نه لزوماً

4-5- رابطهٔ خطی بین ابعاد بردار تصادفی و خواص C_X

الف) رابطهٔ خطی بین ابعاد بردار تصادفی

* منظور از رابطهٔ خطی، رابطه‌ای به شکل زیر است:

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = a_0$$

با گرفتن امید ریاضی از طرفین، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m_i = a_0$$

پس رابطهٔ خطی فوق، فقط می‌تواند با $a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$ وجود داشته باشد، یعنی به فرم زیر:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$$

یعنی به فرم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - m_i) = 0$$

یعنی به شکل زیر:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{X}_i = 0$$

یعنی به عبارت معادل:

$$* \quad \boxed{\underline{a}^t \underline{\tilde{X}} = 0}$$

با فرض $\underline{v} = \underline{a}^*$ داریم:

$$\underline{v}^h \underline{\tilde{X}} = 0$$

یعنی:

$$* \quad \underline{\tilde{X}} \perp \underline{v}$$

البته $\underline{\tilde{X}}$ تابعی از ζ است، یعنی در هر نقطه از فضای نمونه، می‌تواند بردار عددی متفاوتی باشد. پس وجود رابطهٔ خطی بین ابعاد یک بردار تصادفی را می‌توان معادل دانست با وجود یک امتداد ثابت $\underline{v}$ به طوری که همهٔ بردارهای عددی $\underline{\tilde{X}}(\zeta)$ که در نقاط مختلف فضای نمونه داریم، بر آن امتداد ثابت عمود باشند.

البته در عمل رابطه به مفهوم ms یک رابطهٔ دقیق تلقی می‌گردد. یعنی:

$$\sum_i a_i \tilde{X}_i \overset{ms}{=} 0$$

یعنی:

$$* \quad E\left|\sum_{i} a_i \tilde{X}_i\right|^2 = 0$$

قضیه : شرط لازم و کافی برای وجود رابطهٔ خطی بین ابعاد یک بردار تصادفی ، سینگولار بودن ماتریس کوواریانس می باشد، یعنی $det(C_x)=0$ ، یعنی $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ *

یعنی صفر بودن یکی از مقادیر ویژهٔ C_x .

و در واقع امتداد ثابت $\underline{\mathcal{V}}$ همان بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ صفر است .

اثبات لزوم شرط :

$$\underline{\mathcal{V}}^h \tilde{\underline{X}} = 0 \rightarrow \tilde{\underline{X}}^h \underline{\mathcal{V}} = 0 \rightarrow \tilde{\underline{X}}\tilde{\underline{X}}^h \underline{\mathcal{V}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow E\,\tilde{\underline{X}}\tilde{\underline{X}}^h \underline{\mathcal{V}} = 0 \rightarrow C_x \underline{\mathcal{V}} = 0 \xrightarrow[C_x \underline{\mathcal{V}}_i = \lambda_i \underline{\mathcal{V}}_i]{\text{مقایسه با رابطهٔ}} \begin{cases} \lambda_i = 0 & \text{یکی از مقادیر ویژه} \\ \underline{\mathcal{V}} = \underline{\mathcal{V}}_i & \text{بردار ویژه متناظر} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow det(C_x) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

اثبات کفایت شرط :

$$det(C_x) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_i = 0 & \text{یکی از آنها} \\ \underline{\mathcal{V}}_i = \underline{\mathcal{V}} & \text{بردار ویژهٔ متناظر} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow C_x \underline{\mathcal{V}} = 0\,\underline{\mathcal{V}} = 0 \rightarrow \underline{\mathcal{V}}^h C_x \underline{\mathcal{V}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\mathcal{V}}^h E\,\tilde{\underline{X}}\tilde{\underline{X}}^h . \underline{\mathcal{V}} = 0 \rightarrow E(\underline{\mathcal{V}}^h \tilde{\underline{X}})\underbrace{(\tilde{\underline{X}}^h \underline{\mathcal{V}})}_{(\underline{\mathcal{V}}^h \tilde{\underline{X}})^*} = 0 \rightarrow E\,|\underline{\mathcal{V}}^h \tilde{\underline{X}}|^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{\mathcal{V}}^h \tilde{\underline{X}} = 0}$$

مثال 2 بعدی :

$$C_x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12}^* & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow det(C_x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_1^2 \sigma_2^2 - |\sigma_{12}|^2 = 0 \rightarrow |\rho_{12}|^2 = \left|\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}\right|^2 = 1 \ .$$

$\boxed{|\rho_{12}| = 1}$ به عنوان شرط رابطهٔ خطی قبلاً داشتیم .

ادامهٔ بردار تصادفی :

ب) خواص ماتریس کوواریانس C_x

① در حالت کلی C_x دارای تقارن هرمیتیک است. ($C_x^h = C_x$) و برای بردارهای حقیقی، C_x حقیقی است.

② با توجه به خاصیت ① در حالت کلی، کلیهٔ مقادیر ویژهٔ C_x اعدادی حقیقی هستند و برای بردار تصادفی حقیقی، بردارهای ویژه نیز حقیقی خواهند بود. ضمناً C_x دارای n بردار ویژهٔ متعامد نرمالیزه $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ می باشد و با این بردارها می توان یک ماتریس یکانی ساخت.

$$V = \left(\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n \right) \quad \text{(ماتریس یکانی)}$$

علت یکانی بودن V ←

$$V^h V = \begin{pmatrix} \underline{v}_1^h \\ \underline{v}_2^h \\ \vdots \\ \underline{v}_n^h \end{pmatrix} \left(\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n \right) = \begin{pmatrix} \underline{v}_1^h \underline{v}_1 & \underline{v}_1^h \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_1^h \underline{v}_n \\ \underline{v}_2^h \underline{v}_1 & \underline{v}_2^h \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_2^h \underline{v}_n \\ \vdots & & & \\ \underline{v}_n^h \underline{v}_1 & \underline{v}_n^h \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_n^h \underline{v}_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{متعامد}}{=} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

③ در حالت کلی C_x یک ماتریس معین غیرمنفی (nnd) است و اگر رابطهٔ خطی بین ابعاد بردار تصادفی نباشد، معین مثبت (pd) است.

$\left.\begin{matrix}\text{non-negative} \\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ definite

nnd بودن یعنی ← $\begin{cases} \forall \underline{z} \in R^n \\ h_{C_x}(\underline{z}) \geq 0 \end{cases}$

pd بودن یعنی ← $\begin{cases} \forall \underline{z} \in R^n \\ h_{C_x}(\underline{z}) > 0 \end{cases}$

اثبات :

$$h_{C_x}(\underline{z}) = \underline{z}^h C_x \underline{z} = \underline{z}^h E \underline{\tilde{x}} \underline{\tilde{x}}^h \underline{z} = E \underbrace{\underline{z}^h \underline{\tilde{x}}}_{\text{اسکالر}} \underbrace{\underline{\tilde{x}}^h \underline{z}}_{(\underline{z}^h \underline{\tilde{x}})^*} = \underbrace{E |\underline{z}^h \underline{\tilde{x}}|^2}_{\text{غیرمنفی}} \geq 0$$

اگر به ازای $\underline{z} = \underline{a}$ صفر شود :

$$h_{C_x}(\underline{a}) = E|\underline{a}^h \underline{\tilde{x}}|^2 = 0 \longrightarrow \underline{a}^h \underline{\tilde{x}} = 0$$

و این یعنی وجود رابطهٔ خطی بین ابعاد بردار تصادفی.

④ با توجه به خاصیت 3 در حالت کلی، کلیه مقادیر ویژه غیرمنفی هستند و اگر رابطهٔ خطی بین ابعاد بردار تصادفی نباشد، مقدار ویژهٔ صفر هم نخواهیم داشت.

اثبات:

خاصیت 3 $\xrightarrow{z=\underline{v}_i} h_{C_x}(\underline{v}_i) \geq 0 \longrightarrow \lambda_i \geq 0$

$$h_{C_x}(\underline{v}_i) = \underline{v}_i^h \underbrace{C_x \underline{v}_i}_{\lambda_i \underline{v}_i} = \lambda_i \underline{v}_i^h \underline{v}_i = \lambda_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{1} = \lambda_i$$

⑤ در حالت کلی C_x به فرم زیر قابل تجزیه است:

$$\boxed{C_x = LL^h}$$

اثبات:

$$C_x(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_n) = (\lambda_1 \underline{v}_1 | \lambda_2 \underline{v}_2 | \dots | \lambda_n \underline{v}_n) =$$

$$= (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3 | \dots | \underline{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$C_x V = V\Lambda \longrightarrow C_x = V\Lambda V^{-1} \overset{\text{یکانی است}}{=} V\Lambda V^h$$

$$\Lambda = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Lambda^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} = \Lambda^{\frac{1}{2}} (\Lambda^{\frac{1}{2}})^t = \Lambda^{\frac{1}{2}} (\Lambda^{\frac{1}{2}})^h$$

چون λ_iها غیرمنفی‌اند.

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

$$\rightarrow C_x = V\Lambda^{\frac{1}{2}} (\Lambda^{\frac{1}{2}})^h V^h = (V\Lambda^{\frac{1}{2}})(V\Lambda^{\frac{1}{2}})^h = LL^h \quad \checkmark$$

پس: $\boxed{L = V\Lambda^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{\lambda_1}\,\underline{v}_1 | \sqrt{\lambda_2}\,\underline{v}_2 | \dots | \sqrt{\lambda_n}\,\underline{v}_n)}$ یک جواب است.

البته این تجزیه جواب منحصر به فرد ندارد. چرا که اگر L یک جواب باشد، یعنی:

$$LL^h = C_x$$

و U یک ماتریس یکانی دلخواه باشد. آنگاه $L' = LU$ نیز یک جواب خواهد بود، زیرا:

$$L'L'^h = LU(LU)^h = L\underbrace{UU^h}_{I}L^h = LL^h = C_x \quad \checkmark$$

3-5 ـ توابعی از بردار تصادفی :

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = g_1(\underline{X}) \\ Y_2 = g_2(\underline{X}) \\ \vdots \\ Y_m = g_m(\underline{X}) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{به اختصار}]{} \underline{Y} = \underline{g}(\underline{X})$$

به طور کلی برای محاسبهٔ احتمال پیشامدهائی که برحسب Y تعریف شده اند، کافی است پیشامد متناظر برحسب X را تعیین کنیم و به کمک pdf $\underline{X}$ محاسبه کنیم. فرضاً:

$$\{\underline{Y} \in B\} \overset{\text{متناظر}}{\equiv} \{\underline{X} \in A\}$$

$$B \subset \mathbb{R}^m \qquad A \subset \mathbb{R}^n$$

$$P\{\underline{Y} \in B\} = P\{\underline{X} \in A\} = \int_A f_X(\underline{x})\, d\underline{x}$$

البته ضمناً می توان pdf بردار جدید را پیدا نمود و مستقیماً به کمک آن محاسبه کرد.

$$P\{\underline{Y} \in B\} = \int_B f_Y(\underline{y})\, d\underline{y}$$

(الف) روش کلی تعیین pdf جوینت:

(1) $F_Y(\underline{y}) = P\{\underline{Y} \leqslant \underline{y}\}$ $\qquad \{\underline{Y} \leqslant \underline{y}\} \overset{\text{متناظر}}{\equiv} \{X \in A_{\underline{y}}\}$

$$\rightarrow F_Y(\underline{y}) = \int_{A_{\underline{y}}} f_X(\underline{x})\, d\underline{x}$$

(2) $f_Y(\underline{y}) = \dfrac{\partial^m}{\partial \underline{y}} F_Y(\underline{y})$

(ب) روش ساده حالت خاص:

اگر $m=n$ بوده و بازای $\underline{y}$ مفروض، دستگاه معادلات $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{y}$ تعداد جواب قابل شمارش داشته باشد، مثلاً:

$$\underline{g}(\underline{x}) = \underline{y} \Longrightarrow \underline{x} = (\underline{a})_1, (\underline{a})_2, \dots, (\underline{a})_K$$

و در محل جواب ها، توابع $\underline{g}$ مشتق پذیر باشد، می توان نوشت:

$$* \qquad f_Y(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{K} \frac{f_X(\underline{x})}{|J|}\bigg|_{\underline{x} = (\underline{a})_i}$$

$$\text{ژاکوبین} \; J = \det\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{n\times n} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

* اگر شرط $m=n$ برقرار نباشد می‌توان با اضافه کردن چند معادلهٔ خطی ساده شکل:

$$y_{m+1} = x_{m+1}$$

شرط $m=n$ را برقرار کرد.

+ یک مثال سادهٔ مهم، تبدیل خطی است:

$$\begin{cases} Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + b_1 \\ Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + b_2 \\ \vdots \\ Y_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n + b_n \end{cases}$$

و به طور خلاصه داریم:

$$\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b} \quad , \quad A = [a_{ij}]_{n\times n}$$

به ازای $\underline{y}$ مفروض داریم:

$$A\underline{x} + \underline{b} = \underline{y} \longrightarrow \underline{x} = A^{-1}(\underline{y} - \underline{b}) \quad \text{(یک جواب دارد)}$$

$$J = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det(A)$$

$$\boxed{f_Y(\underline{y}) = \frac{f_X(A^{-1}(\underline{y} - \underline{b}))}{|\det A|}}$$

5-4- سفید کردن و شبیه‌سازی بردار تصادفی

* بردار سفید یعنی برداری با گشتاورهای به شکل زیر:

$$\begin{cases} (1) \quad \underline{m}_W = \underline{0} \\ (2) \quad R_W = C_W = \mathrm{Diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2) \end{cases}$$

کلیهٔ ابعاد بردار سفید با یکدیگر متعامد و ناهمبسته است.

* در حالتی که $\sigma^2 = 1$ می باشد، بردار را بردار سفید نرمالیزه گوییم.

$$* \quad \text{سفید نرمالیزه} \begin{cases} \underline{m}_w = 0 \\ R_w = C_w = I \end{cases}$$

* با یک تبدیل خطی می توان یک بردار دلخواه را (غیر سفید) سفید و نرمالیزه کرد.

$$\underline{W} = A\underline{X} + \underline{b}$$

$$\underline{m}_w = E\underline{W} = E(A\underline{X} + \underline{b}) = AE\underline{X} + \underline{b} = A\underline{m}_x + \underline{b} = 0 \Longrightarrow \underline{b} = -A\underline{m}_x$$

$$\tilde{\underline{W}} = \underline{w} - \underline{m}_w = A\tilde{\underline{X}} \Longrightarrow C_w = E\tilde{\underline{w}}\tilde{\underline{w}}^h = EA\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^h A^h = I \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A\underbrace{E\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^h}_{C_x}A^h = I \longrightarrow AC_xA^h = I \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_x = A^{-1}I(A^h)^{-1} = (A^{-1})(A^{-1})^h$$

پس کافی است:

$$C_x = LL^h$$

و L را بدست آوریم.

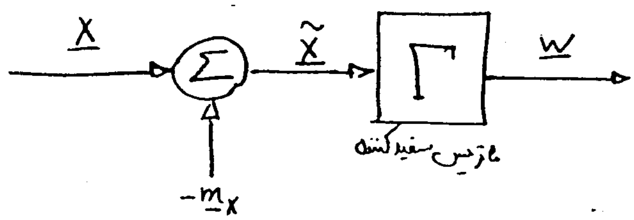
$$A^{-1} = L \longrightarrow A = L^{-1} = \Gamma$$

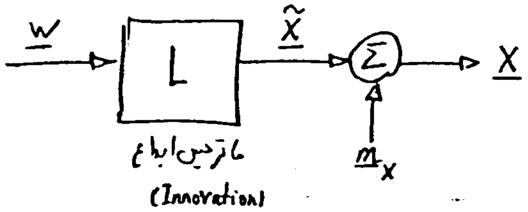
$$* \Rightarrow \underline{W} = A\underline{X} + \underline{b} = A\underline{X} - A\underline{m}_x = A(\underline{X} - \underline{m}_x) \longrightarrow \boxed{\underline{W} = \Gamma(\underline{X} - \underline{m}_x)}$$

* گاهی نیز عکس این عمل لازم می گردد. مثلاً شبیه سازی برداری با $\underline{m}_x$ و C_x مفروض توسط کامپیوتر، یعنی تبدیل بردار سفید نرمالیزه ای که توسط نرم افزار در اختیار قرار گرفته به برداری با $\underline{m}_x$ و C_x مفروض.

$$\underline{W} = \Gamma(\underline{X} - \underline{m}_x) \longrightarrow \Gamma^{-1}\underline{W} = \underline{X} - \underline{m}_x \longrightarrow$$

$$* \longrightarrow \boxed{\underline{X} = L\underline{W} + \underline{m}_x}$$





نکات :

① شرط سفید پذیر بودن بردار تصادفی، سینگولار نبودن L است و چون :

$$C_X = LL^h \longrightarrow \det(C_X) = \det(L)\det(L^h) = |\det(L)|^2$$

یعنی C_X سینگولار نباشد، یعنی رابطهٔ خطی دقیق بین ابعاد بردار تصادفی نباشد.

* اگر رابطهٔ خطی موجود باشد، کافی است یکی از متغیرهای تصادفی موجود در رابطهٔ خطی را (که برحسب بقیه با رابطهٔ دقیق قابل محاسبه است) از جمع ابعاد بردار کنار بگذاریم. (حذف سطر و ستون مربوطه در C_X و $\underline{m}_X$) و به سفید کردن بقیهٔ ابعاد بپردازیم.)

② در بین جواب های مختلفی که برای تجزیهٔ C_X (L) وجود دارد، جواب پایین مثلثی از همه مناسب تر است. (موسوم به جواب علّی) علت علّی نامیده شدن:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = L\underline{W} + \underline{b}$$

$$x_1 = l_{11}w_1 + b_1$$

$$x_2 = l_{21}w_1 + l_{22}w_2 + b_2$$

$$x_3 = l_{31}w_1 + l_{32}w_2 + l_{33}w_3 + b_3$$

$$\vdots$$

X_i فقط به w_1 تا w_i بستگی دارد. (علّی است)

یک دلیل مناسب تر بودن جواب پایین مثلثی این که وقتی ابعاد بردار w یکی یکی در اختیار ما قرار گیرد از همان ابتدا می توانیم محاسبهٔ بردار جدید $\underline{X}$ را شروع کنیم.

* و دلیل دیگر سادگی تعیین این جواب (L) است . یعنی نیازی به تعیین بردارها و مقادیر ویژه نداریم .

$$LL^h = C_x$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11}^* & l_{21}^* & \cdots & l_{n1}^* \\ 0 & l_{22}^* & \cdots & l_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$* \; |l_{11}|^2 = \sigma_1^2 \longrightarrow \boxed{l_{11} = \sigma_1}$$

$$* \; l_{11} l_{21}^* = \sigma_{12} \longrightarrow \boxed{l_{21} = \frac{\sigma_{12}^*}{\sigma_1}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

کلیهٔ درایه ها یکی یکی محاسبه می گردد .

* $\Gamma = L^{-1}$ معکوس کردن L نیز خیلی ساده است .

New

7-5 - بردار نرمال

بردار تصادفی نرمال $\underline{X}$ = برداری که هر ترکیب خطی ابعاد آن تولید یک متغیر تصادفی نرمال کند . به عبارت معادل ابعادش توأماً نرمال باشند .

یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \\ \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Longrightarrow Z \sim N(m_z, \sigma_z^2)$$

روشن است که هر ترکیب مستوی ابعاد بردار نرمال نیز تولید متغیر تصادفی نرمال خواهد کرد .

روشن است که هر بردار دیگری نیز که از تبدیل خطی بردار نرمال حاصل شود $\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b}$ نیز یک بردار نرمال خواهد بود .

الف) cf بردار نرمال :

$$\phi_X(\underline{w}) = E\, e^{j\sum_{i=1}^{n} w_i X_i} = E\, e^{jz} = \phi_z(1) = e^{jm_z} e^{-\frac{1}{2}\sigma_z^2}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i \longrightarrow Z \sim N(m_z, \sigma_z^2) \longrightarrow \phi_z(w) = e^{jm_z w} e^{-\frac{1}{2}\sigma_z^2 w^2}$$

$$m_z = E z = \sum_{i=1}^{n} w_i E X_i \longrightarrow m_z = \sum_{i=1}^{n} m_i w_i$$

$$\tilde{Z} = z - m_z = \sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{X}_i \longrightarrow \sigma_z^2 = E\tilde{z}^2 = E\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{X}_i\Big)^2 = E \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \tilde{X}_i \tilde{X}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \underbrace{E\tilde{X}_i\tilde{X}_j}_{\sigma_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_i w_j = q_{C_X}(\underline{w})$$

$$\boxed{\Phi_X(\underline{w}) = e^{j\sum_{i=1}^{n} m_i w_i}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_i w_j} = e^{j\underline{m}_X^t \underline{w}} \cdot e^{-\frac{1}{2} q_{C_X}(\underline{w})}}$$

ب) pdf بردار نرمال سفید نرمالیزه .

$$\begin{cases} \underline{m}_X = \underline{0} \\ R_X = C_X = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Phi_X(\underline{w}) = e^{0} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2} w_i^2} \longrightarrow X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n \longrightarrow$$

$$\longrightarrow f_X(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_i^2}{2}} \longrightarrow \boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

$$X_i \sim N(0,1) \Rightarrow f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_i^2}{2}}$$

ج) pdf بردار نرمال درحالت کلی:

$$\left.\begin{matrix} \underline{m}_X \\ \underline{C}_X \end{matrix}\right\}$$ مفروض

اگر $\underline{X}$ نرمال باشد، $\underline{W}$ نرمال سفید خواهد بود و

$$\underline{X} = L\underline{W} + \underline{m}_X$$

$$\underline{W} = \Gamma(\underline{X} - \underline{m}_X)$$

$$\left(f_W(\underline{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^t \underline{w}} \right)$$

$$f_X(\underline{x}) = \frac{f_W(\Gamma(\underline{x} - \underline{m}_X))}{|\det L|} = \frac{1}{\sqrt{\det C_X}} f_W(\Gamma(\underline{x} - \underline{m}_X)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_X}} e^{-\frac{1}{2}\left((\Gamma(\underline{x} - \underline{m}_X))^t \Gamma(\underline{x} - \underline{m}_X)\right)}$$

نما $= \frac{-1}{2}(\underline{x} - \underline{m}_X)^t \Gamma^t \Gamma(\underline{x} - \underline{m}_X) = \frac{-1}{2}(\underline{x} - \underline{m}_X)^t C_X^{-1}(\underline{x} - \underline{m}_X) = q_{C_X^{-1}}(\underline{x} - \underline{m}_X)$

$$\Gamma^t \Gamma = \Gamma^{-t}\Gamma^{-1} = (LL^t)^{-1} = C_X^{-1}$$ ← برای بردار X حقیقی، L حقیقی است

۷

$$\boxed{\begin{aligned} f_X(\underline{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_X}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_X}} e^{-\frac{1}{2} q_{C_X^{-1}}(\underline{x} - \underline{m}_X)} \end{aligned}}$$

و $C_X^{-1} = [\alpha_{ij}]_{n \times n}$

* در حالت $n=2$ این رابطه به رابطه‌ای که در توزیع نرمال 2 بعدی داده بودیم منجر می‌شود. (بررسی کنید)

(2) برخی خواص بردار نرمال

① هر ترکیب مستوی ابعاد بردار نرمال نیز تولید متغیر تصادفی نرمال می‌کند.

② هر بردار حاصل از تبدیل خطی بردار نرمال، نرمال است.

③ هر زیرمجموعه از ابعاد بردار نرمال نیز توأماً نرمال است. (توزیع های کناری نیز نرمال است.) چراکه هر ترکیب خطی این زیرمجموعه حالت خاص از ترکیب خطی کل مجموعه است و لذا تولید متغیر تصادفی نرمال خواهد کرد.

④ توزیع های شرطی مثلاً یک زیرمجموعه از ابعاد به شرط معلوم بودن یک زیرمجموعه دیگر از ابعاد نیز نرمال خواهد بود، چراکه نسبت دو تابع نمایی با نمای به فرم درجه 2 نیز تابعی نمایی با نما به فرم درجه 2 می‌گردد.

⑤ از دو به دو ناهمبسته بودن ابعاد بردار نرمال، توأماً مستقل بودن ابعاد نتیجه می‌گردد. یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} X_i \perp X_j \\ \forall i\neq j \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n$$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} X_i \perp X_j \\ \forall i\neq j \end{array}\right\} \Longrightarrow C_X = \mathrm{Diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$$

$$\longrightarrow \Phi_X(\underline{w}) = e^{j\sum_{i=1}^{n} m_i w_i} \; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(0+\sigma_{ii} w_i +0)}$$

$$= e^{j\sum_{i=1}^{n} m_i w_i} \; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 w_i^2} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{j m_i w_i} e^{-\frac{1}{2}\sigma_i^2 w_i^2} \longrightarrow X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n$$

⑥ بهترین تخمین یک بعد بردار نرمال برحسب بقیه ابعاد، همان تخمین خطی است یعنی با بقیهٔ ابعاد رابطه‌ای به فرم خطی خواهد داشت. (اثبات در مبحث پنجم)

⑦ تمام خصوصیات آماری بردار نرمال (ممان های مرتبه بالا و احتمال پیشامدها) از ممان های مرتبه اول و دوم بردار نرمال قابل محاسبه هستند. یعنی ممان های اول و دوم تمام خصوصیات آماری بردار نرمال را در بر دارد.

⑧ یک رابطهٔ مفید: اگر X_1 و X_2 و X_3 و X_4 توأماً نرمال باشند.

* $$\boxed{E X_1X_2X_3X_4 = EX_1X_2\,EX_3X_4 + EX_1X_3\,EX_2X_4 + EX_1X_4\,EX_2X_3 - 2EX_1EX_2EX_3EX_4}$$

(اثبات ساده است ولی مفصل)

6_ رشتهٔ تصادفی

* رشتهٔ تصادفی = حدّ بردار تصادفی، وقتی ~~...~~ تعداد ابعاد به n شود.

$$\{X_1, X_2, X_3, \dots\} \underset{\text{اختصار}}{=} \{X_n\}$$

با تعریف بردار تصادفی به هر نقطه از فضای نمونه، n عدد یعنی یک بردار عددی نسبت داده می‌شود و با تعریف رشتهٔ تصادفی به هر نقطه از فضای نمونه یک رشتهٔ (دنباله) عددی (دنباله‌ای از اعداد) نسبت داده می‌شود. با تعریف فرآیند تصادفی نیز به هر نقطه از فضای نمونه یک تابع نسبت داده می‌شود. اگر این تابع گسسته زمان باشد، فرآیند تصادفی همان رشتهٔ تصادفی خواهد بود.

رشته تصادفی ≡ فرآیند تصادفی گسسته‌زمان

* در این جا فقط تقارب رشته‌های تصادفی را مطرح خواهیم کرد و بحث کامل در مورد رشته‌های تصادفی به عنوان حالت خاص فرآیند تصادفی در مباحث بعد عنوان خواهد شد.

6_1- تقارب رشته‌های تصادفی

(الف) مروری بر تقارب رشته عددی

رشتهٔ عددی $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

این رشته را متقارب به مقدار a گوئیم هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ به اندازهٔ دلخواه کوچک بتوان شماره‌ای پیدا کرد (n_ϵ) که از آن شماره به بعد اختلاف اعداد رشته با مقدار حدّی کوچکتر از ϵ باشد.

$$|a_n - a| < \epsilon \quad , \quad \forall n > n_\epsilon$$

اگر مقدار حدّی نداشته باشیم، می‌توان تقارب را به کمک قضیهٔ کوشی بیان کرد.

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad , \quad \forall n > n_\epsilon \quad , \quad \forall m > n_\epsilon$$

$$\boxed{\text{نماد تقارب} : \quad \{a_n\} \rightarrow a}$$

(ب) تقارب در همه جای رشته تصادفی

تقارب در همه جا یعنی متقارب بودن کلیهٔ رشته‌های عددی که در نقاط مختلف فضای نمونه داریم.

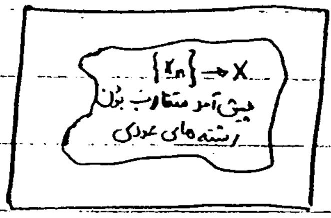
$$\text{مثلاً} : \quad \{X_n\} \xrightarrow{e} X$$

$$\left.\begin{matrix}\{X_n(\xi)\} \longrightarrow X(\xi) \\ \forall \xi \in \Omega\end{matrix}\right\} \text{شرط}$$

ج) تقارب تقریباً در همه جای رشتهٔ تصادفی

تقارب تقریباً در همه جای رشتهٔ تصادفی یعنی تقارب با احتمال یک.

یعنی تقارب در همه‌جای فضای نمونه به جز در زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه که به آن احتمال صفر نسبت داده شده است.



یک نماد: $\{X_n\} \xrightarrow{ae} X$

نماد دیگر: $\{X_n\} \xrightarrow{w.p.1} X$

شرط: $p\left\{ \{X_n\} \to X \right\} = 1$

$ae \equiv$ almost everywhere

$w.p.1 \equiv$ with prob. 1

د) تقارب در احتمال: $A_n \equiv |X_n - X| > \epsilon$ پیش‌آمد عدم تقارب کامل متغیر تصادفی n-ام به متغیر تصادفی حدی

$\forall \epsilon > 0$

شرط تقارب در احتمال: $\{p(A_n)\} \to 0$

نماد تقارب در احتمال: $\{X_n\} \xrightarrow{p} X$

* تقارب در احتمال، لزوماً متقارب بودن هیچ یک از رشته‌های عددی موجود در فضای نمونه را نمی‌رساند. یعنی حتی ممکن است همهٔ رشته‌های عددی موجود در نقاط مختلف فضای نمونه رشته‌های نامتقارب باشند، ولی تقارب در احتمال داشته باشیم. (مثلاً بند (د) مسألهٔ 27 را ببینید.)

ه) تقارب در توزیع

شرط: $\{F_{X_n}(x)\} \xrightarrow{\text{در نقاط پیوستگی}} F_X(x)$

نماد: $\{X_n\} \xrightarrow{dist} X$

می‌توان نشان داد:

$$\left(\{X_n\} \xrightarrow{s} X\right) \Longrightarrow \left(\{X_n\} \xrightarrow{ae} X\right) \Longrightarrow \left(\{X_n\} \xrightarrow{p} X\right) \Longrightarrow \left(\{X_n\} \xrightarrow{dist} X\right)$$

و) تقارب به مفهوم ms:

شرط تقارب: $\{E(X_n - X)^2\} \to 0$

نماد تقارب: $\{X_n\} \xrightarrow{ms} X$

از تقارب در ms درحالت کلی می توان تقارب در احتمال ولذا تقارب در توزیع را نتیجه گرفت .

$$\left(\{X_n\} \xrightarrow{ms} X\right) \Longrightarrow \left(\{X_n\} \xrightarrow{P} X\right) \Longrightarrow \left(\{X_n\} \xrightarrow{dist} X\right)$$

ولی از تقارب در ms نمی توان تقارب تقریباً در همه جا را نتیجه گرفت . بالعکس نیز از تقارب تقریباً در همه جا نمی توان تقارب در ms را نتیجه گرفت .

مسائل تا

New

$f_X(x_1, x_2, x_3, x_4)$

سؤال بچه ها؟

* آنگاه pdf توأم متغیرهای تصادفی شرطی $X_1|X_3$ و $X_2|X_4$ ؟

* pdf متغیر تصادفی شرطی $X_1|X_3$ ؟ $\equiv$ pdf متغیر تصادفی X_1 با شرط معلوم بودن X_3 ؟

متغیر تصادفی شرطی نداریم ولی توزیع شرطی برای یک متغیر تصادفی داریم

مسأله : pdf توأم X_1 و X_2 به شرط X_3 و X_4 :

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2 | x_3, x_4) = \frac{f_X(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f_{X_3X_4}(x_3, x_4)}$$

$f_{X_1}(x_1 | X_2 = x_2)$

$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$

---

6 - 2 - قانون اعداد بزرگ (Law of Large Numbers)

قانون اعداد بزرگ : حد میانگین تجربی یک متغیر تصادفی وقتی تعداد مشاهدات به سمت بی‌نهایت میل کند ، همان امید ریاضی متغیر تصادفی خواهد بود .

(البته این قانون دارای شرایطی است . منجمله اینکه امید ریاضی متغیر تصادفی در جریان مشاهدات مختلف ثابت بماند .)

* این قانون به دو صورت مطرح می گردد :

(1) قانون قوی اعداد بزرگ (Strong LLN $\equiv$ SLLN)

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{ae} m_X$$

(2) قانون ضعیف اعداد بزرگ (Weak LLN $\equiv$ WLLN)

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} m_X$$

در اینجا شرایط WLLN و اثبات آن مطرح می گردد:

$$\text{شرایط WLLN}\begin{cases} X_i \perp X_j, \ \forall i\neq j \\ EX_i = m_X, \ \forall i \\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i/n}^2 \to \sigma^2 < \infty \\ Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n \end{cases} \Longrightarrow \{Z_n\} \xrightarrow{P} m_X$$

اثبات: تقارب در ms را که قوی تر از تقارب در احتمال است را ثابت می کنیم.

$$E(Z_n-m_X)^2 = E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i/n - m_X\Big)^2 = E\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{X}_i + m_X}{n} - m_X\Big)^2 =$$

$$= E\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{X}_i}{n} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_X}{n} - m_X}\Big)^2 = E\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{X}_i}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{X}_j}{n}\Big) =$$

$$= E\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_i\tilde{X}_j \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \Big(0 + \frac{E\tilde{X}_i^2}{n^2} + 0\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{n^2} \to \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{\text{بزرگ } n} 0$$

نکته: این قانون را می توان به تابعی از یک متغیّر تصادفی نیز تعمیم داد:

$$\left.\begin{matrix} Y = g(X) \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i/n \to EY \end{matrix}\right\} \to \sum_{i=1}^{n} g(X_i)/n \longrightarrow Eg(X)$$

* در واقع به کمک این قانون است که در آمارمان ها و به طور کلی تر امید های ریاضی را محاسبه می کنند.

3-6- قضیهٔ حد مرکزی (Central limit Theorem) مستقل‌ازهم

قضیهٔ حد مرکزی: حد مجموع متغیّرهای تصادفی کوچک و مستقل‌ازهم وقتی تعداد آنها $n\to\infty$، یک متغیّر تصادفی نرمال است.

* خیلی کوچک یعنی اینکه هر یک یک تأثیر جزئی در مجموع داشته باشند و نه یک تأثیر تعیین کننده

لزوم این شرط را می توان به صورت زیر توضیح داد:

که اگر به مجموعی که تولید متغیّر تصادفی نرمال کرده اند یک متغیّر تصادفی مستقل دیگر اضافه کنیم که تأثیر آن در مجموع جزئی نباشد، pdf حاصل کانولوشن یک pdf نرمال با یک pdf غیرنرمال و غیرجزئی بوده و لذا دیگر نرمال نخواهد بود.

اثبات قضیهٔ حد مرکزی :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n \\ Z_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} \left(X_i/\sqrt{n} \right) \\ m_{Z_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i/\sqrt{n} \to m < \infty \\ \sigma^2_{Z_n} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2/n \to \sigma^2 < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \{Z_n\} \xrightarrow{dist} N(m, \sigma^2)$$

$$\Phi_{Z_n}(\omega) = E e^{j\omega Z_n} = E e^{j\omega \sum_{i=1}^{n} X_i/\sqrt{n}} = E e^{j\omega \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i + \tilde{X}_i}{\sqrt{n}}} =$$

$$= E e^{j\omega \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{n}}} \cdot e^{j\omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{X}_i}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{j\omega m} E \prod_{i=1}^{n} e^{j\omega \tilde{X}_i/\sqrt{n}} =$$

$$\overset{\text{استقلال}}{=} e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} E e^{j\omega \tilde{X}_i/\sqrt{n}} = e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} E\left(1 + j\omega \frac{\tilde{X}_i}{\sqrt{n}} + j^2 \frac{\omega^2 \tilde{X}_i^2}{2(\sqrt{n})^2} + j^3 \frac{\omega^3 \tilde{X}_i^3}{6(\sqrt{n})^3} + \dots\right)$$

$$= e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + 0 - \frac{\omega^2}{2} \frac{\sigma_i^2}{n} + \underbrace{j^3 \frac{\omega^3}{6(\sqrt{n})^3} E\tilde{X}_i^3 + \dots}_{\text{به صفر میل می کند } n\to\infty}\right) =$$

$$= e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\omega^2}{2} \frac{\sigma_i^2}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{\omega^2}{2} \sigma_i^2/n} =$$

$$= e^{j\omega m} e^{-\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2/n} \longrightarrow e^{jm\omega} e^{-\frac{\omega^2}{2} \sigma^2}$$

که همان cf متغیر تصادفی $N(m, \sigma^2)$ است.

(مبحث دوم : معرفی فرآیندهای تصادفی)

1- تعریف فرآیند تصادفی و روش های توصیف آن

1-1- تعریف فرآیند تصادفی و دو تعبیر مختلف آن

* فرآیند تصادفی = تابعی از 2 متغیر $X(t, \xi)$ که یکی $\xi \in \Omega$ نقطه‌ای از فضای نمونه و دیگری $t \in T$ نقطه‌ای از فضای پارامتر یعنی تابعی که به هر $t \in T$ و $\xi \in \Omega$ عددی حقیقی نسبت می دهد، یعنی :

$$\Omega \times T \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

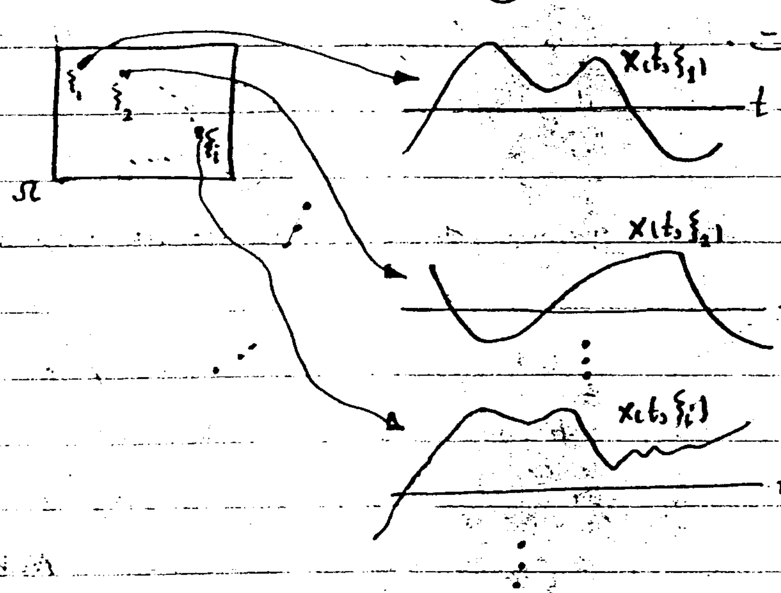
پارامتر فرآیندها در عمل غالباً زمان می باشد به همین دلیل t نامیده شده است و زمان گفته خواهد شد. ولی فرآیند می تواند پارامتر غیرزمانی مثلاً فرکانس یا ارتفاع یا بعد مکان یا درجه حرارت یا ... داشته باشد. تقریباً همهٔ مفاهیمی که مطرح خواهد شد کلی است و برای هر پارامتری صادق است.

* 2 تعبیر مفید برای فرآیند:

ابتدا فضای نمونه را در نظر می گیریم:

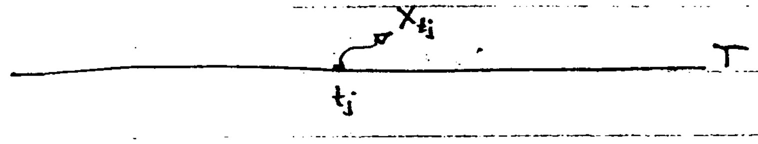
* در هر نقطه از فضای نمونه مثل ξ_i فرآیند $X(t,\xi_i)$ یک تابع مشخص از زمان می باشد.

پس فرآیند را می توان مجموعه ای از توابع مشخص زمانی دانست که به هر نقطه از فضای نمونه یکی از آنها نسبت داده شده است.



حال فضای پارامتر را در نظر می گیریم:

* در هر نقطه از فضای پارامتر مثل t_j فرآیند $X(t_j,\xi)$ تابع مشخصی از ξ است یعنی یک متغیر تصادفی است یعنی به ازای هر مقدار پارامتر فرآیند یک متغیر تصادفی است، یعنی فرضاً در هر لحظه از محور زمان، فرآیند یک متغیر تصادفی است. پس با این تعبیر فرآیند را می توان یک مجموعه ای از متغیرهای تصادفی دانست که به هر نقطه از فضای پارامتر یکی از آنها نسبت داده شده است.



البته این دو تعبیر مختلف معادل یکدیگرند. مقدار فرآیند در هر لحظه مقدار مشخصی نیست بلکه یک متغیر تصادفی است. و فرآیند برای هر نتیجهٔ آزمایش تصادفی یک تابع مشخص زمانی است و اینکه کدام خواهد بود مشخص نیست، بلکه به نتیجهٔ آزمایش تصادفی بستگی دارد.

فضاهای احتمالاتی
$X = X(\xi)$: متغیر تصادفی
$X(t) = X(t,\xi)$: فرآیند تصادفی

اگر تعداد نقاط فضای پارامتر قابل شمارش باشد مثل $T=Z$ یا $T=N$، تعداد متغیرهای تصادفی فرآیند نیز قابل شمارش خواهد بود که در واقع معادل همان رشتهٔ تصادفی می‌گردد. در این حالت فرآیند را گسسته زمان گویند. (گسسته پارامتر)

اگر تعداد نقاط فضای پارامتر غیر قابل شمارش باشد، مثلاً $T=R$ یا $T=[0,\infty)$ یا مثلاً $T=[a,b]$ آنگاه تعداد متغیرهای تصادفی فرآیند نیز غیر قابل شمارش خواهد بود. در این حالت فرآیند را فرآیند پیوسته زمان گویند. (پیوسته پارامتر)

* به عنوان فضای پارامتر default فرآیند گسسته زمان $T=Z$ در نظر گرفته خواهد شد.
" " " " پیوسته زمان $T=R$ " "

* اگر تعداد نقاط فضای پارامتر محدود و مثلاً n تا باشد، $T=\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$، در این صورت تعداد متغیرهای تصادفی فرآیند نیز محدود و مثلاً n تا خواهد بود که در واقع همان بردار تصادفی n بعدی است.

* اگر تعداد نقاط فضای پارامتر تنها یک عدد باشد، فرآیند تصادفی معادل همان متغیر تصادفی خواهد بود.

New

1-2- روش های توصیف فرآیند تصادفی

$X(t,\xi)$
1. فرآیند = مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی
2. فرآیند = مجموعه‌ای از توابع مشخص زمانی

الف، توصیف ریاضی ← اگر مقدار تابع $X(t,\xi)$ به ازای جمیع مقادیر $t\in T$ و $\xi\in\Omega$ معلوم باشد گوییم که یک توصیف ریاضی از فرآیند موجود است و این کامل‌ترین توصیفی است که می‌توان از فرآیند داشت.

البته در عمل ما چنین توصیفی را از فرآیندها در اختیار نداریم، مگر اینکه فرآیند را خودمان تعریف کرده باشیم.

فرضاً: $\Omega=\{\xi_1,\xi_2\}$

$$X(t,\xi)=\begin{cases}\cos(2\pi t), & \xi=\xi_1\\ \sin(2\pi t), & \xi=\xi_2\end{cases}$$

یا مثلاً: $\Omega = \mathbb{R} \ , \ T = \mathbb{R} \ , \ X(t,\xi) = e^{-|t\xi|}$

(ب) توصیف تحلیلی ← اگر بتوان فرآیند را به صورت تابعی مشخص از زمان و چند متغیر تصادفی بیان نمود، گوئیم که یک توصیف تحلیلی از فرآیند موجود است.

مثلاً فرآیندی که یک موج سینوسی با فرکانس معلوم ولی دامنه و فاز تصادفی است.

$$X(t,\xi) = A\sin(2\pi f_0 t + B)$$

A, B متغیرهای تصادفی اند.

در حالت کلی تر:

$$X(t,\xi) = g(t, A_1, A_2, \dots, A_n)$$

وقتی فرآیندی دارای توصیف تحلیلی برحسب n متغیر تصادفی است، در واقع می توان گفت که کلیهٔ متغیرهای تصادفی این فرآیند (که به تعداد نامحدودی باشند) توابع مشخصی از آن n متغیر تصادفی هستند. یعنی در واقع در تولید این متغیر تصادفی، تنها n عامل تصادفی شرکت دارد، در حالی که در حالت کلی تعداد عوامل تصادفی مؤثر در یک فرآیند تصادفی می تواند نامحدود باشد.

فرآیندهای با توصیف تحلیلی قابل پیشگویی هستند، یعنی اگر در یک آزمایش تصادفی، فرآیند را برای مدت زمانی مشاهده کنیم، می توان پیش گویی کرد که در ادامه تغییرات فرآیند چگونه خواهد بود. چرا که از روی این مشاهدات می توان مقادیری را که متغیرهای تصادفی A_1 و A_2 و ... و A_n در آن آزمایش تصادفی اختیار کرده اند را محاسبه کرد و لذا تابع زمانی مربوط به آن آزمایش تصادفی را دقیقاً داشت.

(ج) توصیف آماری: منظور از توصیف آماری فرآیند، توابع احتمال متغیرهای تصادفی فرآیند است و این کامل ترین توصیفی است که در عمل از فرآیندهای تصادفی می توان داشت.

توصیف آماری می تواند با مرتبه های مختلفی مطرح گردد:

* توصیف آماری مرتبهٔ اول یعنی توابع احتمال یک بعدی فرآیند یعنی تابع احتمال کناری هر یک از متغیرهای تصادفی فرآیند. (نوعاً pdf یک بعدی فرآیند) $\left(f_{X(t)}(x) = f_X(x;t) \right)$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی لحظهٔ t فرآیند — پارامتر

مثلاً فرآیند نرمال ← $f_{X(t)}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{(\alpha - m(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$

* توصیف آماری مرتبه دوم ، یعنی توابع احتمال 2 بعدی فرآیند ، یعنی توابع احتمال کناری توأم هر دو متغیر تصادفی از متغیرهای تصادفی فرآیند مثلاً pdf دو بعدی فرآیند :

$$f_{X(t),X(s)}(x,y) = f_X(x,y;t,s)$$ ⟵ pdf توأم متغیرهای تصادفی لحظات t و s از فرآیند

ـ روشن است که از روی توصیف آماری مرتبه دوم می‌توان توصیف آماری مرتبه اول را نیز بدست آورد (به عنوان توابع احتمال کناری)، مثلاً :

$$f_{X(t)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X(t)X(s)}(x,y)\,dy$$

با نمادی دیگر ⟵ $\underbrace{f_X(x;t)}_{\text{به s هم بستگی ندارد}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y;t,s)\,dy$

تعمیم

* توصیف آماری مرتبه n اُم یعنی توابع احتمال n بعدی فرآیند، یعنی تابع احتمال یک بردار n بعدی تصادفی متشکل از n متغیر تصادفی فرآیند، فرضاً pdf ، n بعدی فرآیند :

$$f_{X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_n)}(\underline{x}) = f_X(\underline{x};t_1,t_2,\ldots,t_n) = f_X(\underline{x};\underline{t})$$

pdf توأم متغیرهای تصادفی لحظات t_1 الی t_n از فرآیند.

ـ روشن است که از توصیف آماری مرتبه n اُم می‌توان توصیف‌های آماری مراتب پایین‌تر را نیز بدست آورد (به عنوان توابع احتمال کناری).

* حد توصیف آماری مرتبه n اُم را وقتی $n \to \infty$ ، توصیف کامل آماری فرآیند گویند. با داشتن چنین توصیفی می‌توان احتمال هر پیشامدی را که در آن تعداد قابل شمارشی متغیر تصادفی دخالت داشته باشند را محاسبه کرد.

۱-۳- تعمیم به دو فرآیند تصادفی و فرآیند تصادفی مختلط

روی یک فضای نمونه ممکن است بیش از یک فرآیند تصادفی تعریف شده باشد. با فضاهای پارامتر متفاوت یا یکسان :

$$\begin{cases} \Omega \times T \xrightarrow{X} \mathbb{R} \\ \Omega \times T' \xrightarrow{Y} \mathbb{R} \end{cases}$$

یعنی فرآیندهای :

$$X(t,\xi) \overset{\text{به اختصار}}{=} X(t)$$
$$Y(t',\xi) = Y(t')$$

* وقتی دو فرآیند تصادفی داریم، ممکن است احتمال پیشامدهایی مطرح شود که در آن برخی از متغیرهای تصادفی هر دو فرآیند حضور داشته باشند، که در این صورت به توصیف آماری توأم دو فرآیند نیاز خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \\ \hline Y(t'_1) \\ Y(t'_2) \\ \vdots \\ Y(t'_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \hline \underline{Y} \end{pmatrix}$$

توصیف آماری (pdf) توأم دو فرآیند از مرتبه n ام نسبت به فرآیند X و از مرتبه m ام نسبت به فرآیند Y

$$\boxed{\begin{aligned} f_{X(t_1)\ldots X(t_n)Y(t'_1)\ldots Y(t'_m)}(\underline{x},\underline{y}) &= f_{XY}(\underline{x},\underline{y};t_1,t_2,\ldots,t_n,t'_1,t'_2,\ldots,t'_m) \\ &= f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}') \end{aligned}}$$

از این توصیف توأم آماری می‌توان توصیف آماری مرتبه n ام فرآیند X یا توصیف آماری مرتبه m ام فرآیند Y را بدست آورد. مثلاً:

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}')\,d\underline{y}$$

ضمناً حد توصیف آماری توأم فوق وقتی $n\to\infty$ و $m\to\infty$ را توصیف کامل آماری توأم دو فرآیند گویند.

* دو فرآیند تصادفی را مستقل از هم گوییم، هرگاه هر بردار تصادفی دلخواه یکی، مستقل از هر بردار تصادفی دلخواه دیگری باشد:

$$\text{شرط} \begin{cases} \underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y} \\ \forall \underline{t} \in T^n \\ \forall \underline{t}' \in T'^m \\ \forall m,n \end{cases}$$

یعنی توابع احتمال توأم دو فرآیند، برابر با حاصلضرب توابع احتمال تک تک دو فرآیند باشد، یعنی مثلاً:

$$\left.\begin{aligned} &f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}') = f_X(\underline{x};\underline{t}) \times f_Y(\underline{y};\underline{t}') \\ &\forall \underline{t}\in T^n,\ \forall \underline{t}'\in T'^m,\ \forall n,m \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(\cdot) \perp\!\!\!\perp Y(\cdot)$$

شرط استقلال

نماد استقلال

$$T \times \Omega \xrightarrow{Z} \mathbb{C}$$

* فرآیند تصادفی مختلط Z :

$$\underbrace{Z(t,\xi) = X(t,\xi)}_{\text{جزء حقیقی}} + j\, \underbrace{Y(t,\xi)}_{\text{جزء مجازی}}$$

اجزای حقیقی و مجازی فرآیند مختلط ، خود فرآیندهای تصادفی خواهند بود ، فرآیندهای تصادفی با های فضای پارامتر

$$T \times \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

$$T \times \Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$$

استفاده از فرآیند های تصادفی مختلط وقتی می‌تواند باعث سهولت گردد که فقط با ممان ها سروکار داشته باشیم.

2- ممان های فرآیند تصادفی

* ممان اوّل :

$$m_X(t) = E\,X(t,\xi) \overset{\text{احتمال}}{=} E\,X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X(t)}(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x;t)\, dx$$

$m_X(t)$ تابع متوسط فرآیند نام دارد و تابعی است یقینی که به ازای $t=t_1$ متوسط متغیر تصادفی لحظهٔ t_1 فرآیند را به ما می دهد.

* ممان دوّم :

$$R_X(t,s) = E\,X(t)X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{X(t),X(s)}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{XY}(x,y;t,s)\, dx\, dy$$

$R_X(t,s)$ تابع همبستگی فرآیند نام دارد و تابعی است که به ازای $t=s=t_1$ ، قدرت متغیر تصادفی لحظهٔ t_1 را می دهد و به ازای $t=t_1$ و $s=t_2$ همبستگی متغیرهای تصادفی لحظات t_1 و t_2 فرآیند را می دهد.

$$* \quad C_X(t,s) = E\,\tilde{X}(t)\tilde{X}(s) = E(X(t)-m_X(t))(X(s)-m_X(s)) = \quad *$$

$$= \dots = E\,X(t)X(s) - m_X(t)m_X(s) = R_X(t,s) - m_X(t)m_X(s)$$

$C_X(t,s)$ تابع کوواریانس فرآیند به ازای $t=s=t_1$ واریانس متغیر تصادفی لحظهٔ t_1 را می دهد و به ازای $t=t_1$, $s=t_2$ ، کوواریانس بین متغیرهای تصادفی لحظهٔ t_1 و لحظهٔ t_2 فرآیند را می دهد.

تابع ضریب همبستگی فرآیند : $\rho_X(t,s) = \dfrac{C_X(t,s)}{\sqrt{C_X(t,t)\,C_X(s,s)}}$

* در فرآیندهای مختلط:

$R_X(t,s) = E\,X(t)X^*(s)\ ,\ C_X(t,s) = E\,\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(s) = R_X(t,s) - m_X(t)m_X^*(s)$

برای دو فرآیند تصادفی $X(t,\xi)$ و $Y(t,\xi)$

ممان های متقابل نیز تعریف می گردند:

$R_{XY}(t,t') = E\,X(t)Y^*(t')$

$C_{XY}(t,t') = E\,\tilde{X}(t)\tilde{Y}^*(t') = R_{XY}(t,t') - m_X(t)m_Y^*(t')$

* خواص:

- $R^*_{XY}(t,t') = R_{YX}(t',t)$
- $R^*_X(t,s) = R_X(s,t)$ تقارن هرمیتیک
- $C^*_{XY}(t,t') = C_{YX}(t',t)$
- $C^*_X(t,s) = C_X(s,t)$ تقارن هرمیتیک

* تعامد دو فرآیند: دو فرآیند را متعامد گوییم، هرگاه هر متغیر تصادفی با هر متغیر تصادفی دیگر متعامد باشد.

$X(t) \perp Y(t')\quad \forall t\in T,\ \forall t'\in T'$

یعنی:

شرط تعامد دو فرآیند: $R_{XY}(t,t') = 0\ ,\ \forall t\in T,\ \forall t'\in T'$

نماد تعامد دو فرآیند: $X(\cdot) \perp Y(\cdot)$

* ناهمبستگی دو فرآیند: دو فرآیند را ناهمبسته گوییم، هرگاه هر متغیر تصادفی یکی با هر متغیر تصادفی دیگری ناهمبسته باشد، یعنی:

شرط: $C_{XY}(t,t') = 0\ ,\ \forall t\in T,\ \forall t'\in T'$

نماد: $X(\cdot) \not\perp Y(\cdot)$

* فرآیند a-وابسته (a-dependent) : $\xrightarrow{\quad\quad t \quad\quad}$

اگر وابستگی متغیرهای تصادفی فرآیند، فقط تا فاصله $|t-s|<a$ ادامه داشته باشد، فرآیند را "a-وابسته" گوییم

$$X(t) \perp\!\!\!\perp X(s)$$
$$\forall |t-s|>a$$

* فرآیند a-همبسته (a-correlated)

اگر همبستگی بین متغیرهای تصادفی فرآیند فقط تا فاصله a ادامه یابد، فرآیند را "a-همبسته" گویند یعنی:

$$C_X(t,s)=0$$
$$\forall |t-s|>a$$

3- دسته فرآیندهای با نمو مستقل، مارکف و مارتینگل :

3-1- تعاریف :

* برای سادگی نگارش فرض خواهیم کرد:

$$X_i = X(t_i) \;,\; i=1,2,\dots,n,n+1$$
$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$$
$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$$

* فرآیند با نمو مستقل فرآیندی است که مقدار آن در هر لحظه و کلیه نموهای فرآیند در فاصله زمانی های بدون اشتراک یعنی توأماً مستقل باشند.

یعنی :

$$\begin{cases} X_1 \perp\!\!\!\perp X_2-X_1 \perp\!\!\!\perp X_3-X_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n-X_{n-1} \\ \forall t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n \\ \forall n \end{cases}$$

* فرآیند مارکوف ـ فرآیندی است که مقدار آن در هر لحظه، کلیه سابقه فرآیند را در خود خلاصه نماید (از نظر تأثیری که در توزیع احتمال متغیرهای تصادفی بعدی فرآیند دارند).

یعنی :

$$\begin{cases} f_{X_{n+1}}(x_{n+1} \mid \underline{X}=\underline{x}) = f_{X_{n+1}}(x_{n+1} \mid X_n = x_n) \\ \forall t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} \\ \forall n \end{cases}$$

* فرآیند مارتینگل (Martingale) ـ فرآیندی است که امید ریاضی شرطی مقدار فرآیند در لحظه مشروط به معلوم بودن مقدار فرآیند در چند لحظهٔ قبلی برابر با همان آخرین مقدار معلوم از فرآیند باشد.

یعنی:

$$
\begin{cases}
E(X_{n+1} \mid \underline{X} = \underline{x}) = x_n \\
\forall\, t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} \\
\forall n
\end{cases}
$$

2-3- چند قضیه

* قضیهٔ 1: از بانو مستقل بودن فرآیند می‌توان مارکوف بودن فرآیند را نیز نتیجه گرفت.
* قضیهٔ 2: از بانو مستقل بودن فرآیند و داشتن متوسط ثابت می‌توان مارتینگل بودن فرآیند را نتیجه گرفت.
* قضیهٔ 3: در فرآیندهای مارکوف، توصیف آماری مرتبهٔ دوم فرآیند یک توصیف کامل آماری است.
* قضیهٔ 4: در فرآیندهای بانو مستقل، توصیف آماری مرتبهٔ اول فرآیند به علاوهٔ توصیف آماری مرتبهٔ اول نمو فرآیند یک توصیف کامل آماری است.
* قضیهٔ 5: در فرآیندهای بانو مستقل، کوواریانس بین دو متغیر تصادفی برابر است با واریانس متغیر تصادفی لحظهٔ کوچکتر.

اثبات 1:

$$F_{X_{n+1}}(x_{n+1} \mid \underline{X} = \underline{x}) = P\{X_{n+1} \le x_{n+1} \mid \underline{X} = \underline{x}\} =$$

$$\stackrel{\text{استفاده از شرط}}{=} P\{X_{n+1} - X_n \le x_{n+1} - x_n \mid \underline{X} = \underline{x}\} =$$

$$\{\underline{X} = \underline{x}\} \equiv \{X_1 = x_1,\ X_2 - X_1 = x_2 - x_1,\ \dots,\ X_n - X_{n-1} = x_n - x_{n-1}\} \equiv C$$

$$= P\{X_{n+1} - X_n \le x_{n+1} - x_n \mid C\} = P\{X_{n+1} - X_n \le x_{n+1} - x_n\}$$

به دلیل بانو مستقل بودن شرط را حذف کردیم.

اضافه کردن شرطی از به دلیل با نمو مستقل بودن

پس :

$$F_{X_{n+1}}(x_{n+1}|\underline{X}=\underline{x}) = P\{X_{n+1}-X_n \leqslant x_{n+1}-x_n\} \stackrel{}{=} P\{X_{n+1}-X_n \leqslant x_{n+1}-x_n \mid X_n=x_n\} =$$

استفاده از شرط

$$\stackrel{}{=} P\{X_{n+1} \leqslant x_{n+1} \mid X_n=x_n\} = F_{X_{n+1}}(x_{n+1}|X_n=x_n)$$

حال با $\frac{d}{dx_{n+1}}$ داریم :

$$f_{X_{n+1}}(x_{n+1}|\underline{X}=\underline{x}) = f_{X_{n+1}}(x_{n+1}|X_n=x_n) \quad \checkmark$$

اثبات 2 :

استفاده از شرط

$$E(X_{n+1}|\underline{X}=\underline{x}) \stackrel{}{=} E(X_{n+1}-X_n+x_n \mid \underline{X}=\underline{x}) = E(\underbrace{X_{n+1}-X_n+x_n}_{\text{2 جمله}}|C) =$$

حذف شرط به دلیل با نمو مستقل بودن — یک عدد

$$= E(X_{n+1}-X_n|C) + E(x_n|C) \stackrel{}{=} E(X_{n+1}-X_n) + \underbrace{E(x_n|C)}_{x_n} =$$

$$= EX_{n+1} - EX_n + x_n = EX(t_{n+1}) - EX(t_n) + x_n =$$

$$= m_X(t_{n+1}) - m_X(t_n) + x_n = m_X - m_X + x_n = x_n \quad \checkmark$$

$m_X(t)=m_X$ ، فرض ضمنی

اثبات 3 : معلوم $f_{X(t_1)X(t_2)}(x,y) = f_{XY}(x,y;t,s)$

از توصیف آماری مرتبه دوم، همواره می توان توصیف آماری مرتبه اول را پیدا کرد.

$$f_{X(t)}(x) = f_X(x;t) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_X(x,y;t,s)\,dy$$

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2|x_1) f_{X_3}(x_3|x_1,x_2) \ldots f_{X_n}(x_n|x_1,x_2 \ldots x_{n-1}) =$$

رابطه زنجیره ای

$$= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2|x_1) f_{X_3}(x_3|x_2) \ldots f_{X_n}(x_n|x_{n-1})$$

خاصیت مارکوف بودن

$$\longrightarrow f_{X_i}(x_i|x_{i-1}) = \frac{f_{X_{i-1}X_i}(x_{i-1}, x_i)}{f_{X_{i-1}}(x_{i-1})} = \frac{f_X(x_{i-1}, x_i ; t_{i-1}, t_i)}{f_X(x_{i-1} ; t_{i-1})} \longrightarrow$$

$$* \longrightarrow \boxed{f_X(\underline{x} ; \underline{t}) = f_X(x_1 ; t_1) \prod_{i=2}^{n} \frac{f_X(x_{i-1}, x_i ; t_{i-1}, t_i)}{f_X(x_{i-1} ; t_{i-1})}}$$

اثبات 4:

$f_{X(t)}(x) = f_X(x ; t)$ معلوم

$f_{X(s)-X(t)}(x) = f_{\Delta X}(x ; t, s)$ معلوم

$$f_X(\underline{x} ; \underline{t}) = f_{X_1}(x_1) . f_{X_2}(x_2|x_1) . f_{X_3}(x_3|x_2) \dots f_{X_n}(x_n|x_{n-1})$$

به دلیل اینکه مارکوف نیز می باشد.

$$f_{X_i}(x_i|x_{i-1}) = f_{X_i}(x_i|X_{i-1} = x_{i-1}) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_{X_i}(x_i|X_{i-1} = x_{i-1})$$

استفاده از شرط

$$F_{X_i}(x_i | X_{i-1} = x_{i-1}) = P\{X_i \leq x_i | X_{i-1} = x_{i-1}\} \stackrel{*}{=} P\{X_i - X_{i-1} \leq x_i - x_{i-1} | X_{i-1} = x_{i-1}\} =$$

حذف شرط به دلیل با نمو مستقل بودن

$$\stackrel{*}{=} P\{X_i - X_{i-1} \leq x_i - x_{i-1}\} = F_{X_i - X_{i-1}}(x_i - x_{i-1})$$

با $\frac{\partial}{\partial x_i}$ از طرفین داریم:

$$\longrightarrow f_{X_i}(x_i|X_{i-1} = x_{i-1}) = 1 \times f_{X_i - X_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = f_{X(t_i) - X(t_{i-1})}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= f_{\Delta X}(x_i - x_{i-1} ; t_{i-1}, t_i) \longrightarrow$$

$$* \longrightarrow \boxed{f_X(\underline{x} ; \underline{t}) = f_X(x_1 ; t_1) \prod_{i=2}^{n} f_{\Delta X}(x_i - x_{i-1} ; t_{i-1}, t_i)}$$

New

اثبات 5 :

$$\sigma_{X(t)X(s)} = \begin{cases} \sigma^2_{X(t)}, & t\le s \\ \sigma^2_{X(s)}, & s\le t \end{cases}$$ حکم

برحسب تابع کوواریانس :

$$C_X(t,s) = \begin{cases} C_X(t,t), & t\le s \\ C_X(s,s), & s\le t \end{cases}$$ حکم

$$\sigma_{X(t)X(s)} = E\tilde{X}(t)\tilde{X}(s) \underset{t\le s}{=} E\tilde{X}(t)(\tilde{X}(t)+\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t)) = E\tilde{X}^2(t) + E\tilde{X}(t)(\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t)) =$$

$$= \sigma^2_{X(t)} + \underbrace{E\tilde{X}(t)}_{0}\cdot \underbrace{E(\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t))}_{0} =$$

به دلیل با نمو مستقل بودن و اینکه $t\le s$

$$= \sigma^2_{X(t)} \checkmark$$

به همین ترتیب برای $s\le t$ ثابت خواهد شد.

4 - ساکن و ساکن دوری بودن فرآیندها

4-1 - فرآیند ساکن (ایستا یا ایستان یا stationary)

- فرآیندی را فرآیند ساکن گویند که خصوصیات آماری آن با گذشت زمان عوض نشود. مثل ولتاژ نویز حرارتی مقاومتی که درجه حرارت آن را ثابت نگه داشته باشیم.

* اگر ممان های اول و دوم فرآیند با گذشت زمان عوض نشوند، فرآیند را ساکن به مفهوم وسیع (WSS) می گویند.

* اگر توابع احتمال فرآیند با گذشت زمان عوض نشود، فرآیند را ساکن به مفهوم اکید گویند (SSS)

wide / strict } sense stationary

- شرایط WSS بودن :

(1) $m_X(t) = m_X$ مستقل از t

(2) $R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau)$

SSS چون می تواند با مرتبه های مختلفی مطرح شود.

* SSS مرتبه اول یعنی اینکه توابع احتمالی یک بعدی فرآیند با گذشت زمان تغییر نکنند.

$$f_X(x;t) = f_X(x)$$
مستقل از t

* SSS مرتبه دوم یعنی:

$$f_X(\alpha,\beta;t,t+\tau) = f_X(\alpha,\beta;\tau)$$
مستقل از t — هم فقط یک فرآیند X داریم.

* SSS مرتبه n اُم یعنی:

$$f_X(\underline{x};t,t+\tau_1,t+\tau_2,\ldots,t+\tau_{n-1}) = f_X(\underline{x};\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{n-1}) = f_X(\underline{x};\underline{\tau})$$
مستقل از t

روشن است که از SSS مرتبهٔ بالاتر می توان SSS مرتبهٔ پایین تر را نتیجه گرفت. (توابع احتمال کناری) حتی SSS مرتبهٔ n اُم، وقتی $n \to \infty$ شود را SSS کامل (به اختصار SSS) گویند.

4-2- فرآیند ساکن دوری (cyclo stationary)

اگر خصوصیات آماری فرآیند با گذشت زمان به صورت پریودیک (مثلاً با پریود T_0) تغییر کند، فرآیند را ساکن دوری گویند. مثلاً ولتاژ نویز حرارتی مقاومتی که درجه حرارت آن را به صورت پریودیک با زمان تغییر دهیم.

* بسیاری از سیگنال های مخابراتی، همچنین نویز حاصل از حرکات پریودیک قطعات مکانیکی از نوع ساکن دوری هستند.

* اگر ممان های اول و دوم فرآیند به صورت پریودیک با زمان تغییر کنند، فرآیند را ساکن دوری به مفهوم وسیع گویند. (WSCS)

1) $m_X(t)$ نسبت به t پریودیک با
2) $R_X(t+\tau,t)$ پریود T_0

* اگر توابع احتمال فرآیند به صورت تابعی پریودیک با گذشت زمان تغییر کنند، فرآیند را ساکن دوری به مفهوم اکید گویند. (SSCS)

مثلاً SSCS مرتبه n اُم:

$f_X(\underline{x};t,t+\tau_1,t+\tau_2,\ldots,t+\tau_{n-1})$ نسبت به t پریودیک با پریود T_0.

* حتی SSCS مرتبه n-ام وقتی $n \to \infty$ شود را SSCS کامل گوئیم.

3-4 - توأماً ساکن و ساکن دوری بودن

* این مفاهیم وقتی مطرح می‌گردد که فضای پارامتر دو فرآیند یکسان باشند

$T\times\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$

$T\times\Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$

* توأماً WSS بودن یعنی اینکه تک تک WSS باشند و ضمناً:

$$R_{XY}(t+\tau, t) = R_{XY}(\tau)$$

مستقل از t

* توأماً SSS بودن یعنی اینکه توابع احتمال توأم دو فرآیند نیز با گذشت زمان تغییری نکنند.

$$f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}; t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1}, t+\tau'_1, t+\tau'_2, \dots, t+\tau'_m) =$$

مستقل از t

$$= f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_m) = f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}; \underline{\tau}, \underline{\tau}')$$

مثلاً توأماً SSS بودن مرتبه n-ام نسبت به X و مرتبه m-ام نسبت به Y

- روشن است که از توأماً SSS بودن فوق می‌توان SSS بودن مرتبه n-ام فرآیند X و SSS بودن مرتبه m-ام فرآیند Y را نتیجه گرفت.

- حتی توأماً SSS بودن فوق وقتی $m \to \infty$ و $n \to \infty$ شود را توأماً SSS کامل گوئیم.

- باید توجه داشت که دو فرآیندی که تک تک کاملاً SSS هستند، ممکن است توأماً حتی WSS نباشند.

(چون ممکن است وابستگی متقابل با t داشته باشند) — خوم

مثال: فرآیند X را یک فرآیند کاملاً SSS فرض می‌کنیم، یعنی:

$$F_X(\underline{x}; t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1}) = F_X(\underline{x}; \underline{\tau})$$

فرض می‌کنیم: $Y(t) \triangleq X(2t)$

ابتدا ثابت می‌کنیم فرآیند Y نیز SSS کامل خواهد بود.

$$F_Y(\underline{y}; t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1}) = P\{Y(t) \le y_1, Y(t+\tau_1) \le y_2, \dots, Y(t+\tau_{n-1}) \le y_n\}$$

$$= P\{X(2t) \le y_1, X(2t+2\tau_1) \le y_2, \dots, X(2t+2\tau_{n-1}) \le y_n\} =$$

$$= F_X\{\underline{y}; 2t, 2t+2\tau_1, \dots, 2t+2\tau_{n-1}\} = F_X(\underline{y}; 2\underline{\tau})$$

مثل با $t \to 2t$

$\underline{\tau} \to 2\underline{\tau}$

اما این دو فرآیند توأماً WSS نیستند.

$$R_{XY}(t+\tau,t)=E X(t+\tau)Y(t)=E X(t+\tau)X(2t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\,\underbrace{f_X(x,y;2t,t+\tau)}_{f_X(x,y;\,2t-(t+\tau))}\,dx\,dy \longrightarrow$$ در حالت کلی حاصل تابعی از $(t-\tau)$ بودن و WSS نیست!

$f_X(x,y;t-\tau)$ ← مستقل از t نیست

* توأماً ساکن دوری بودن نیز، نظیر توأماً ساکن بودن تعریف می‌گردد، منتهی به جای مستقل از t بودن باید گفت پریودیک نسبت به t.

4-4 «چند قضیه»

* قضیهٔ 1: از SSS مرتبه دوم بودن می‌توان WSS بودن را نتیجه گرفت.

اثبات ←

$$\text{فرض}: f_X(x,y;t,t+\tau)=f_X(x,y;\tau) \Longrightarrow f_X(x;t)=f_X(x)$$

$$(1)\ m_X(t)=E X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x;t)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=m_X$$: مستقل از t

$$(2)\ R_X(t+\tau,t)=E X(t+\tau)X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\,f_X(x,y;t,t+\tau)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\,f_X(x,y;\tau)\,dx\,dy=R_X(\tau)$$: مستقل از t

* قضیهٔ 2: اگر فرآیند X یک فرآیند SSCS مرتبه n با پریود T_0 باشد و $\Phi\sim U(0,T_0)$ مستقل از فرآیند X باشد ($\Phi \perp\!\!\!\perp X(t)$) در این صورت فرآیند $Y(t)\triangleq X(t+\Phi)$ یک فرآیند SSS مرتبه nام خواهد بود.

اثبات: فرض: $F_X(\underline{x};t,t+\tau_1,\dots,t+\tau_{n-1})$ ← نسبت به t پریودیک با پریود T_0

$$F_Y(\underline{y}; t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1}) = P\{Y(t) \le y_1, Y(t+\tau_1) \le y_2, \dots, Y(t+\tau_{n-1}) \le y_n\} =$$

$$= P\{X(t+\Phi) \le y_1, X(t+\Phi+\tau_1) \le y_2, \dots, X(t+\Phi+\tau_{n-1}) \le y_n\} =$$

قضیهٔ احتمال کل

$$= \int_{\varphi=-\infty}^{+\infty} f_\Phi(\varphi) \cdot P\{X(t+\varphi) \le y_1, X(t+\varphi+\tau_1) \le y_2, \dots, X(t+\varphi+\tau_{n-1}) \le y_n \mid \Phi = \varphi\} d\varphi$$

حذف شرط به دلیل $\Phi \perp\!\!\!\perp X(\cdot)$

$$= \int_{\varphi=-\infty}^{+\infty} f_\Phi(\varphi) \cdot \underbrace{P\{X(t+\varphi) \le y_1, X(t+\varphi+\tau_1) \le y_2, \dots, X(t+\varphi+\tau_{n-1}) \le y_n\}}_{F_X(\underline{y}; t+\varphi, t+\varphi+\tau_1, \dots, t+\varphi+\tau_{n-1})} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{\varphi=0}^{T_0} F_X(\underline{y}; t+\varphi, t+\varphi+\tau_1, \dots, t+\varphi+\tau_{n-1}) \, d\varphi =$$

$$\alpha = t+\varphi: \quad = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha=t}^{t+T_0} \underbrace{F_X(\underline{y}; \alpha, \alpha+\tau_1, \dots, \alpha+\tau_{n-1})}_{\text{پریودیک با پریود } T_0 \text{ نسبت به } \alpha} d\alpha = \langle F_X(\underline{y}; t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1}) \rangle_t$$

انتگرال یک تابع پریودیک در یک پریود بستگی به لحظهٔ شروع پریود (در اینجا t) نخواهد داشت.

قضیهٔ 3: اگر فرآیند X یک فرآیند WSCS با پریود T_0 باشد و $\Phi \sim U(0, T_0)$ مستقل از فرآیند X باشد ($\Phi \perp\!\!\!\perp X(\cdot)$) در این صورت فرآیند $Y(t) \triangleq X(t+\Phi)$ یک فرآیند WSS خواهد بود.

اثبات: فرض:
$$\begin{cases} m_X(t) \\ R_X(t+\tau, t) \end{cases}$$
نسبت به t پریودیک با پریود T_0

$$(1) \quad m_Y(t) = E\,Y(t) = E\,X(t+\Phi) = E_\Phi E_X(X(t+\Phi) \mid \Phi) \underset{\Phi \perp\!\!\!\perp X(\cdot)}{\overset{\text{حذف شرط به دلیل}}{=}} E_\Phi E_X X(t+\Phi) =$$

$$= E_\Phi \, m_X(t+\Phi) =$$

$$= \int_{\varphi=-\infty}^{+\infty} f_\Phi(\varphi) m_X(t+\varphi) d\varphi = \frac{1}{T_0} \int_{\varphi=0}^{T_0} m_X(t+\varphi) d\varphi \underset{t+\varphi=\alpha}{=} \frac{1}{T_0} \int_{\alpha=t}^{t+T_0} m_X(\alpha) d\alpha \underset{\text{نظیر قضیهٔ (2)}}{=} \langle m_X(t) \rangle_t$$

ادامه اثبات ج :

$$(2)\; R_Y(t+\tau,t) = E\,Y(t+\tau)Y(t) = E\,X(t+\Phi+\tau)X(t+\Phi) =$$

$$= E_\Phi\, E_X\big(X(t+\Phi+\tau)X(t+\Phi)\,|\,\Phi\big) =$$

بشرط $\Phi \perp\!\!\!\perp X(\cdot)$

$$\triangleq E_\Phi\, E_X\big(X(t+\Phi+\tau)X(t+\Phi)\big) = E_\Phi\, R_X(t+\Phi+\tau,\, t+\Phi) =$$

$$= \int_{\varphi=-\infty}^{+\infty} f_\Phi(\varphi)\, R_X(t+\varphi+\tau,\, t+\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{\varphi=0}^{T_0} R_X(t+\varphi+\tau,\, t+\varphi)\, d\varphi \underset{t+\varphi=\alpha}{=} \frac{1}{T_0}\int_{\alpha=t}^{t+T_0} R_X(\alpha+\tau,\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \langle R_X(t+\tau,t)\rangle_t \checkmark$$ مستقل از t

5- معرفی چند فرآیند تصادفی مهم

5-1- فرآیند پواسن

مروری بر متغیر تصادفی پواسن :

(متغیر تصادفی پواسن) X = تعداد رخداد پیشامد در تکرار مستقل از هم آزمایش تصادفی

$X \in \{0,1,2,\dots\}$ $\qquad m_X = \sigma_X^2 = \lambda$

$X \sim P(\lambda)$ $\qquad p(X=i) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}$

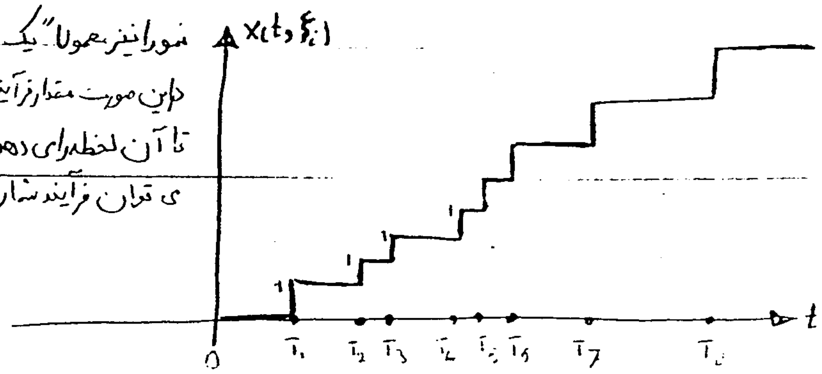
دارای خاصیت پایداری توزیعی باشد :

$$\left.\begin{array}{l} x_i \sim P(\lambda_i) \\ X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n \end{array}\right\} \Longrightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\Big(\sum_i \lambda_i\Big)$$

*** تعریف فرآیند تصادفی پواسن**

$X(t)$ فرآیندی است که در جریان تکرار مستقل از هم یک آزمایش تصادفی که در لحظه $t=0$ آغاز شده، با مقدار اولیه $X(0)=0$ آغاز شده است و با هر رخداد پیشامد مورد نظر، نمو ثابتی می‌کند.

مورد نظر معمولاً "یک واحد" در نظر گرفته می‌شود که در این صورت مقدار فرآیند در هر لحظه تعداد رخدادها تا آن لحظه را به دست می‌دهد یعنی این فرآیند را می‌توان فرآیند شمارش رخدادها دانست.



$$X(t) \in \{0,1,2,3,\dots\}$$

* یک فرآیند با نمو مستقل است:

$X(t_1)$: تعداد رخداد در فاصله 0 تا t_1

$X(t_2)-X(t_1)$: تعداد رخداد در فاصله t_1 تا t_2

$X(t_3)-X(t_2)$: تعداد رخداد در فاصله t_2 تا t_3

⋮

* چون تکرار مستقل از هم آزمایش تصادفی است: با فرض $t_1<t_2<\dots$ داریم:

$$X(t_1) \perp\!\!\!\perp (X(t_2)-X(t_1)) \perp\!\!\!\perp (X(t_3)-X(t_2)) \perp\!\!\!\perp \dots$$

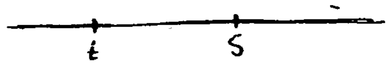
* $X(t+\Delta t)-X(t) \sim P(a_{t,t+\Delta t})$

که $a_{t,t+\Delta t}$ متوسط تعداد رخداد در فاصله t تا $t+\Delta t$ می باشد و داریم:

$$a_{t,t+\Delta t} = \lambda \Delta t$$

(λ = چگالی نقاط پواسن)

با توجه به خاصیت پایداری توزیع پواسن، داریم: (با فرض $s>t$)



$$X(s)-X(t) \sim P(a_{t,s})$$

* متوسط تعداد رخداد در فاصله t تا s: $a_{t,s} = \int_t^s \lambda\, dt \underset{\lambda \text{ ثابت}}{=} \lambda(s-t)$

* توابع احتمال ← چون گسسته اندازه است: برای توابع احتمال می توان از جرم احتمال استفاده کرد و چون با نمو مستقل است، کافی است جرم احتمال خودش و نموش را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} P_X(i;t) = P(X(t)=i) = e^{-a_{0,t}} \dfrac{a_{0,t}^{\,i}}{i!} \\[2ex] P_{\Delta X}(i;t,s) = P(X(s)-X(t)=i) = e^{-a_{t,s}} \dfrac{a_{t,s}^{\,i}}{i!} \end{cases}$$

جرم احتمال n-بعدی: $P_X(\underline{i};\underline{t}) = P(X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \dots, X(t_n)=i_n) =$ ص بعد

$$* \quad = e^{-a_{0,t_1}} \frac{a_{0,t_1}^{\,i_1}}{(i_1)!} \cdot \prod_{k=2}^{n} e^{-a_{t_{k-1},t_k}} \frac{(a_{t_{k-1},t_k})^{i_k-i_{k-1}}}{(i_k-i_{k-1})!}$$

برای چگالی نقاط ثابت λ، داریم:

$$\boxed{P_X(\underline{i}, \underline{t}) = e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{i_1}}{(i_1)!} \prod_{k=2}^{n} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} \frac{(\lambda(t_k-t_{k-1}))^{i_k-i_{k-1}}}{(i_k-i_{k-1})!}}$$

* ممان های اول و دوم:

$$m_X(t) = E X(t) = a_{0,t} = \lambda t$$

λ ثابت

$$C_X(t,s) = \begin{cases} \sigma^2_{X(t)} = a_{0,t} = \lambda t, & t \leq s \\ \sigma^2_{X(s)} = a_{0,s} = \lambda s, & s \leq t \end{cases} = a_{0,\,\mathrm{Min}\{s,t\}} = \lambda . \mathrm{Min}\{t,s\}$$

با نمو مستقل

λ ثابت

* توابع احتمال نقاط پواسن در حالت λ ثابت:

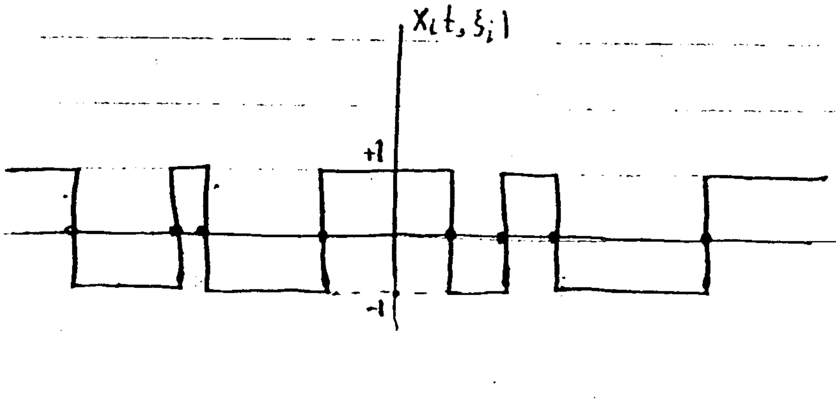
زمان انتظار برای اولین رخداد $\quad T_1 \sim E(\lambda)$

زمان انتظار برای i امین رخداد $\quad T_i \sim E(i, \lambda)$

$$(T_i - T_{i-1}) \sim E(\lambda) \quad \text{و} \quad T_1 \perp\!\!\!\perp (T_2 - T_1) \perp\!\!\!\perp (T_3 - T_2) \perp\!\!\!\perp \cdots$$

5-2- فرآیند سیگنال تلگرافی

* فرآیند سیگنال تلگرافی $X(t)$ فرآیندی است که در جریان تکرار مستقل از هم یک آزمایش تصادفی که در لحظهٔ $t = -\infty$ آغاز شده با مقدار اولیهٔ $X(-\infty) = \pm 1$ آغاز می شود، (با احتمال مساوی $\frac{1}{2}$) و با هر رخداد پیشامد رخداد مورد نظر، تغییر پلاریته می دهد، از $+1$ به -1 و یا بالعکس)



* فرآیندی است باینری : $X(t) \in \{-1,+1\}$

* این فرآیند با نمو مستقل نیست ، چراکه اگر $X(t_1)=+1$ باشد :

$$X(t_2)-X(t_1) \in \{0 \overset{\text{or}}{,} -2\}$$

و اگر $X(t_1)=-1$ باشد :

$$X(t_2)-X(t_1) \in \{0 \overset{\text{or}}{,} 2\}$$

* امّا این فرآیند یک فرآیند مارکوف می باشد . (چون با داشتن زوج و فرد بودن تعداد تغییر پلاریته در فاصله زمانی آتی مقدار $X(t)$ را فهمید)

توابع احتمال : می توان از جرم احتمال استفاده کرد.

$$P(X(t)=+1)=P(X(t)=-1)=\frac{1}{2}$$

از تقارن

$$P(X(s)=+1 \mid X(t)=1)=P(X(s)=-1 \mid X(t)=-1)=P\{\underbrace{\text{تعداد نقاط پواسن در فاصله } (s,t)}_{\text{تعداد}} = \text{زوج}\}=$$

$$=P\{\text{تعداد}=0\}+P\{\text{تعداد}=2\}+P\{\text{تعداد}=4\}+\dots=e^{-a_{t,s}}\frac{(a_{t,s})^0}{0!}+e^{-a_{t,s}}\frac{(a_{t,s})^2}{2!}+e^{-a_{t,s}}\frac{(a_{t,s})^4}{4!}+\dots$$

$$=e^{-a_{t,s}}\left(1+\frac{a_{t,s}^2}{2!}+\frac{a_{t,s}^4}{4!}+\dots\right)=e^{-a_{t,s}}\cosh(a_{t,s})=e^{-a_{t,s}}\cdot\frac{e^{a_{t,s}}+e^{-a_{t,s}}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+e^{-2a_{t,s}}\right]$$

$$P(X(s)=+1 \mid X(t)=-1)=P(X(s)=-1 \mid X(t)=+1)=P\left(\frac{\text{تعداد نقاط پواسن}}{\text{در فاصله } s,t}=\text{فرد}\right)=$$

$$=P\{\text{تعداد}=1\}+P\{\text{تعداد}=3\}+\dots=\dots=\frac{1}{2}\left[1-e^{-2a_{t,s}}\right]$$

با توجه به مارکف بودن داریم :

جرم احتمال n بعدی : $P_X(\underline{i};\underline{t})=P\{X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \dots, X(t_n)=i_n\}=$

$$=P\{X(t_1)=i_1\}\cdot\prod_{k=2}^{n}P\{X(t_k)=i_k \mid X(t_{k-1})=i_{k-1}\} \longrightarrow$$

به دلیل مارکف بودن

$$\longrightarrow \boxed{P_X(\underline{i};\underline{t})=\frac{1}{2}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left[1+i_{k-1}i_k e^{-2a_{t_{k-1},t_k}}\right]}$$

برای چگالی نقاط ثابت λ داریم: $a_{t_{k-1},t_k} = \lambda(t_k - t_{k-1})$

$$\longrightarrow \boxed{P_X(\underline{i};\underline{t}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \prod_{k=2}^{n} \left[1 + i_{k-1} i_k e^{-2\lambda(t_k - t_{k-1})}\right]}$$

ملاحظه می گردد که فرآیند سیگنال تلگرافی با چگالی نقاط ثابت (λ) یک فرآیند SSS کامل است.
(چون فقط به بازهٔ زمانی بستگی دارد.)

---

* ممان های اول و دوم:

$$\underline{m_x(t)} = \overbrace{(+1)\tfrac{1}{2} + (-1)\tfrac{1}{2}}^{Ex(t)=} = \underline{\underline{0}}$$

اولی ۱+   دومی ۱+ به شرط اولی ۱+

$$\underline{C_x(t,s) = R_x(t,s)} = Ex(t)x(s) = (+1)(+1)\cdot\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\left[1+e^{-2a_{t,s}}\right] + (-1)(-1)\cdot\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\left[1+e^{-2a_{t,s}}\right]$$
$$+ (+1)(-1)\cdot\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\left[1-e^{-2a_{t,s}}\right] + (-1)(+1)\cdot\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\left[1-e^{-2a_{t,s}}\right]$$
$$= \underline{e^{-2a_{t,s}}}$$

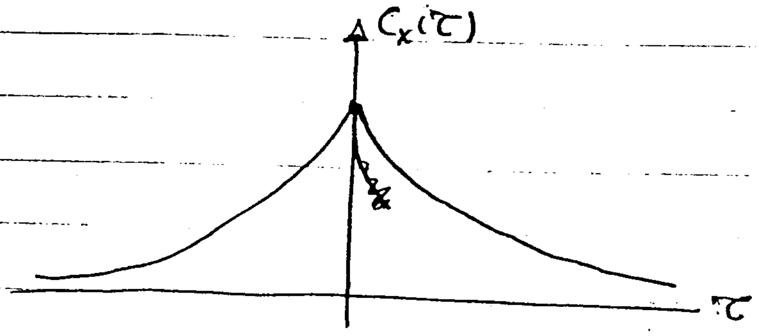
* در حالت λ ثابت:

$$m_x(t) = 0$$
$$C_x(t,s) = R_x(t,s) = e^{-2\lambda|s-t|} = e^{-2\lambda|\tau|}$$

در حالت کلی معلوم نیست $t \geq s$ یا $s \geq t$

پس داریم:

$$\boxed{m_x(t) = 0, \quad C_x(\tau) = R_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}}$$



3-5. فرآیند نرمال

فرآیند تصادفی نرمال $X(t)$ فرآیندی است که هر ترکیب خطی دلخواه متغیرهای تصادفی اش، تولید یک متغیر تصادفی نرمال کند.

(متغیر تصادفی)
$$\left.\begin{array}{l} Z = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} g(\alpha) X(\alpha)\, d\alpha \\ \forall g(\cdot) \end{array}\right\} \Rightarrow Z \sim N(m_z, \sigma_z^2)$$

*برخی خواص فرآیند نرمال:

(1) هر ترکیب خطی متغیرهای زمان فرآیند نرمال، یک فرآیند نرمال می گردد.

$$Y(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} g(t,\alpha) X(\alpha)\, d\alpha$$

اثبات (1): کافی است ثابت کنیم هر ترکیب خطی دلخواه متغیرهای تصادفی فرآیند جدید نیز تولید یک متغیر تصادفی نرمال می کند.

$$Z = \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} h(\beta) Y(\beta)\, d\beta = \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} h(\beta) \left(\int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} g(\beta,\alpha) X(\alpha)\, d\alpha\right) d\beta =$$

$$= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{\beta=-\infty}^{+\infty} h(\beta)\, g(\beta,\alpha)\, d\beta\right)}_{g_0(\alpha)} X(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} g_0(\alpha) X(\alpha)\, d\alpha$$

ملاحظه می گردد که هر ترکیب خطی متغیرهای تصادفی فرآیند جدید، در واقع ترکیبی خطی از متغیرهای تصادفی فرآیند اصلی خواهد بود و لذا تولید متغیر تصادفی نرمال خواهد کرد.

(2) هر مجموعه ای از n متغیر تصادفی فرآیند نرمال، یک بردار نرمال می باشد.

* چراکه هر ترکیب خطی این n متغیر تصادفی، حالت خاصی است از ترکیب خطی همهٔ متغیرهای تصادفی فرآیند نرمال. (وقتی ضریب بقیه را صفر در نظر گرفته باشیم.) ولذا تولید متغیر تصادفی نرمال خواهد کرد.

(3) با توجه به نکتهٔ (2)، توصیف آماری مرتبهٔ nام فرآیند نرمال به صورت زیر می باشد:

$$f_X(\underline{x}; \underline{t}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_X}} \cdot e^{-\frac{1}{2} q_{C_X^{-1}}(\underline{x}-\underline{m}_X)}$$

(4) با توجه به نکتهٔ (3) و اینکه $E\begin{pmatrix}X(t_1)\\X(t_2)\\ \vdots \\ X(t_n)\end{pmatrix} = \underline{m}_X = \begin{pmatrix} m_X(t_1)\\ m_X(t_2)\\ \vdots \\ m_X(t_n)\end{pmatrix}$ و ادامه در بعد

$$C_X = E\,\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{X}}^h = E\begin{pmatrix}\tilde{X}(t_1)\\ \tilde{X}(t_2)\\ \vdots \\ \tilde{X}(t_n)\end{pmatrix}\left(\tilde{X}(t_1)\ \ \tilde{X}(t_2)\ \dots\ \tilde{X}(t_n)\right) =$$

حقیقی چون

$$= \begin{pmatrix} C_X(t_1,t_1) & C_X(t_1,t_2) & \dots & C_X(t_1,t_n) \\ C_X(t_2,t_1) & C_X(t_2,t_2) & \dots & C_X(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_X(t_n,t_1) & C_X(t_n,t_2) & \dots & C_X(t_n,t_n)\end{pmatrix}$$

ملاحظه می گردد که از روی ممان های اول و دوم زآیند نرمال، می توان توابع احتمال n بعدی زآیند را پیدا کرد. یعنی در زآیندهای نرمال، ممان ها یک توصیف کامل آماری از زآیند می باشند.

نماد زآیند نرمال: $X(t) \sim N(m_X(t), C_X(t,s))$

4) با توجه به نکتهٔ 4.4 از WSS بودن زآیند نرمال، می توان SSS بودن کامل آن را نتیجه گرفت.

New

4.5- زآیند نویز سفید

تعریف: زآیند نویز سفید زآیندی است که ممان هایش به صورت زیر باشد:

1) $m_X(t) = 0$

2) $R_X(t,s) = C_X(t,s) = g(s)\,\delta(t-s) \xrightarrow{\text{یعنی}} R_X(t+\tau, t) = g(t)\,\delta(\tau)$

نکات:

1) توزیع قدرت بین نوسان های مختلف موجود در این زآیند یکنواخت است. (علت سفید نامیده شدن) (دلایل در مبحث سوم)

2) کلیهٔ متغیرهای تصادفی این زآیند متعامد و ناهمبسته اند. یعنی: $X(t_1) \perp X(t_2),\ \forall t_1 \neq t_2$ و $X(t_1) \perp X(t_2),\ \forall t_1 \neq t_2$

اثبات تعامد:

$$E X(t_1) X^*(t_2) = R_X(t_1,t_2) = g(t_2)\,\delta(t_1-t_2) \overset{\forall t_1 \neq t_2}{=} 0$$

صفر بودن تابع ضربه در همه جا به جز $t_1=t_2$

چون متوسط صفر هم دارند: تعامد آنها یعنی ناهمبستگی آنها.

* اگر کلیهٔ متغیرهای تصادفی فرآیند مستقل ازهم باشند ، فرآیند را نویز سفید اکید گویند .
مثلاً فرآیند نویز سفید نرمال یک فرآیند نویز سفید اکید است .

$$X(\cdot) \sim N(0, g(s)\delta(t-s))$$

چراکه از ناهمبستگی متغیرهای تصادفی توأماً نرمال استقلال آنها نتیجه می گردد .

در حالی که $g(t) = N_0$ آنگاه : $\quad m_X(t) = 0$

$$R_X(t+\tau, t) = C_X(t+\tau, t) = \underbrace{[\text{illegible}]}_{N_0\delta(\tau)}$$

مستقل از t

فرآیند را نویز سفید ساکن گوییم و در حالت $N_0 = 1$ نویز سفید نرمالیزه نامیده می شود .

5-5. فرآیند وینر (Wiener) :

فرآیند وینر فرآیندی است که برای مقادیر پارامتر $t \in [0, \infty)$ تعریف می گردد و می توان آن را انتگرال نویز سفید نرمال ساکن دانست .

$$W(\cdot) \sim N(0, N_0\delta(\tau))$$

فرآیند وینر $X(t) \triangleq \int_{\alpha=0}^{t} w(\alpha)d\alpha$

نکات :

① فرآیند وینر یک فرآیند نرمال است . چراکه :

$$X(t) = \int_{\alpha=0}^{t} w(\alpha)d\alpha = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(t,\alpha)w(\alpha)d\alpha$$

ترکیب خطی متغیرها از یک فرآیند نرمال

که در آن :

$$h(t,\alpha) = \begin{cases} 1, & 0<\alpha<t \\ 0, & o.w \end{cases}$$

② با توجه به نکتهٔ ① این فرآیند با ممان های مرتبه اول و دوم کاملاً توصیف می گردد .

$$(1)\ m_X(t) = EX(t) = E\int_{\alpha=0}^{t} w(\alpha)d\alpha = \int_{\alpha=0}^{t} \underbrace{Ew(\alpha)}_{\substack{m_w(\alpha) \\ 0}} d\alpha = 0$$

$$(2)\ C_X(t+\tau, t) = R_X(t+\tau, t) = EX(t+\tau)X(t) = E\int_{\alpha_1=0}^{t+\tau} w(\alpha_1)d\alpha_1 \int_{\alpha_2=0}^{t} w(\alpha_2)d\alpha_2 =$$

$$= \int_{\alpha_1=0}^{t+\tau}\int_{\alpha_2=0}^{t} \underbrace{Ew(\alpha_1)w(\alpha_2)}_{R_w(\alpha_1,\alpha_2)} d\alpha_2 d\alpha_1 = N_0 \int_{\alpha_1=0}^{t+\tau}\int_{\alpha_2=0}^{t} \underbrace{\delta(\alpha_1-\alpha_2)}_{\delta(\alpha_2-\alpha_1)} d\alpha_2 d\alpha_1 =$$

$$= N_0 \int_{\alpha_1=0}^{t+\tau} U(\alpha_2-\alpha_1)\Big]_{\alpha_2=0}^{t} d\alpha_1 = N_0 \int_{\alpha_1=0}^{t+\tau} \Big[U(t-\alpha_1) - \underbrace{U(-\alpha_1)}_{\text{صفر چون آرگومان منفی دارد}}\Big] d\alpha_1 =$$

$$= -N_0 r(t-\alpha_1)\Big|_{\alpha_1=0}^{t+\tau} = N_0\left[r(t) - r(-\tau)\right] = \begin{cases} N_0 t & , \tau > 0 \\ N_0(t+\tau) & , \tau < 0 \end{cases}$$

به زبان معادل:

$$C_X(t,s) = R_X(t,s) = \begin{cases} N_0 t & , t \leqslant s \\ N_0 s & , s \leqslant t \end{cases} = N_0 \operatorname{Min}(t,s)$$

پس فرآیند وینر را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد:

$$\begin{cases} X(\cdot) \sim N(0, N_0 \operatorname{Min}(t,s)) \\ t \in (0,\infty) \end{cases}$$

③ فرآیند وینر فرآیندی است با نمو مستقل چرا که:

$X(t_1) = \int_0^{t_1} w(\alpha)\,d\alpha$ مجموع متغیرهای تصادفی فاصلهٔ 0 تا t_1 فرآیند w:

$X(t_2) - X(t_1) = \int_0^{t_2} w(\alpha)\,d\alpha - \int_0^{t_1} w(\alpha)\,d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} w(\alpha)\,d\alpha$ مجموع متغیرهای تصادفی فاصلهٔ t_1 تا t_2 فرآیند w:

$\vdots$

$X(t_n) - X(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} w(\alpha)\,d\alpha$ مجموع متغیرهای تصادفی فاصلهٔ t_{n-1} تا t_n فرآیند w:.

* می‌دانیم کلیهٔ متغیرهای تصادفی فرآیند W (نرمال سفید) مستقل از هم هستند، لذا اگر $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ باشند داریم:

$$X(t_1) \perp\!\!\!\perp X(t_2)-X(t_1) \perp\!\!\!\perp X(t_3)-X(t_2) \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X(t_n)-X(t_{n-1})$$

④ با توجه به نکتهٔ ③ این فرآیند با توصیف آماری مرتبهٔ اول خودش به علاوهٔ توصیف آماری مرتبهٔ اول نموش کاملاً توصیف می‌گردد.

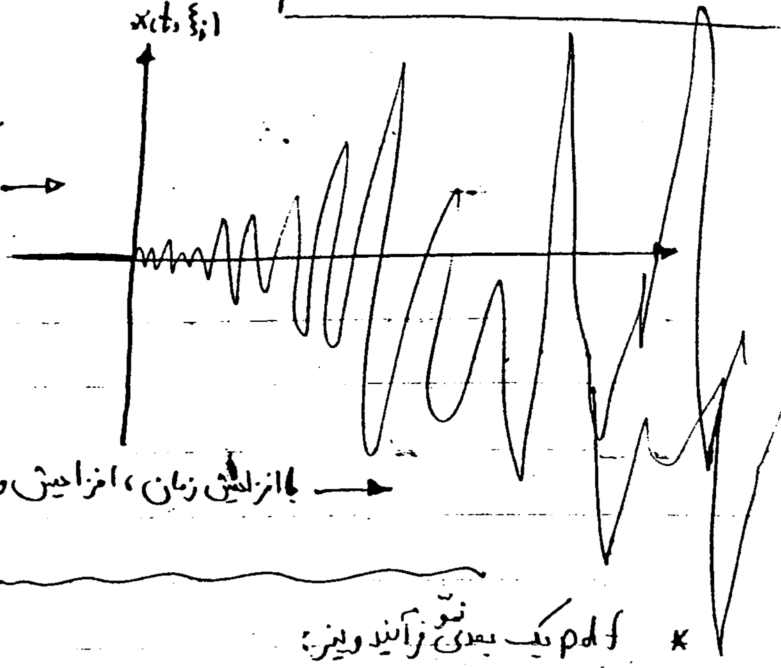
* pdf یک بعدی خود فرآیند ـ فرآیند در هر لحظه یک متغیر تصادفی نرمال است.

$$f_{X(t)}(x) = f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{X(t)}}} \exp\left[\frac{-(x-m_{X(t)})^2}{2\sigma^2_{X(t)}}\right]$$

$$m_{X(t)} = m_X(t) = 0$$

$$\sigma^2_{X(t)} = C_X(t,t) = N_0 \operatorname{Min}(t,t) = N_0 t \longrightarrow \boxed{f_{X(t)}(x) = f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t}}\, e^{\frac{-x^2}{2N_0 t}}}$$

شکل فرضی برای توابع زمانی فرآیند وینر ←



با افزایش زمان، افزایش واریانس ←

* pdf یک بعدی نمو فرآیند وینر:

$X(s) - X(t)$: نمو در فاصلهٔ t تا s

نمو فرآیند (ترکیب خطی از دو متغیر تصادفی فرآیند نرمال) نیز یک متغیر تصادفی نرمال است.

$$f_{X(t)-X(s)}(x) = f_{\Delta X}(x;t,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{X(s)-X(t)}}} \exp\left[\frac{(x-m_{X(s)-X(t)})^2}{2\sigma^2_{X(s)-X(t)}}\right]$$

$$m_{X(s)-X(t)} = E[X(s)-X(t)] = m_X(s) - m_X(t) = 0.$$

$$\sigma^2_{X(s)-X(t)} = P_{X(s)-X(t)} = E(X(s)-X(t))^2 = R_X(s,s) + R_X(t,t) - 2R_X(t,s) =$$

$$= N_0 s + N_0 t - 2N_0 \operatorname{Min}(t,s) = \begin{cases} N_0(s-t) & , t \le s \\ N_0(t-s) & , s \le t \end{cases} = N_0|s-t|$$

$$\longrightarrow \boxed{f_{\Delta X}(x;t,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0|t-s|}}\, e^{\frac{-x^2}{2N_0|t-s|}}}$$

* پس pdf n بعدی فرآیند وینر به صورت زیر است :

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = f_X(x_1;t_1)\cdot\prod_{k=2}^{n} f_{\Delta X}(x_k - x_{k-1}; t_{k-1}, t_k) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t_1}}\, e^{\frac{-x_1^2}{2N_0 t_1}} \prod_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0(t_k-t_{k-1})}}\, e^{\frac{-(x_k-x_{k-1})^2}{2N_0(t_k-t_{k-1})}}$$

$$t_1 < t_2 \leq \dots \leq t_n$$

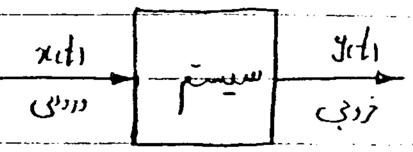
(5) با توجه به نکتهٔ 3 این فرآیند مارکف نیز می‌باشد.

(6) با توجه به نکتهٔ 3 و اینکه $m_X(t)=0$ مستقل از t است، این فرآیند مارتینگل نیز می‌باشد.

6- عبور فرآیند تصادفی از سیستم خطی

6-1- کلیات

(الف) مروری بر عبور سیگنال یقینی از سیستم



در حالت کلی ضابطهٔ سیستم :

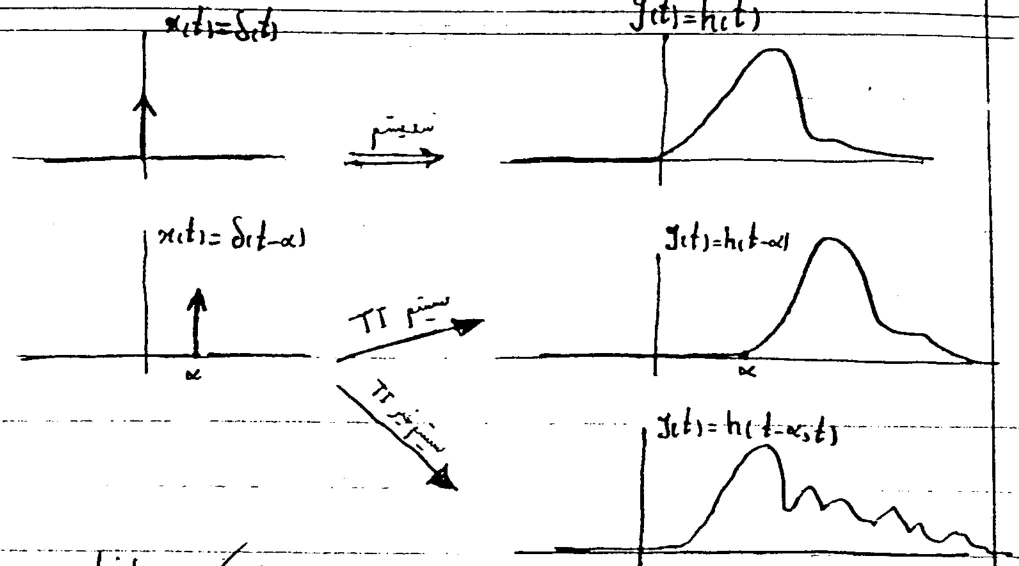
خروجی سیستم در لحظهٔ t: $y(t) = g(t, \{x(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty})$ تابعی از t و ورودی سیستم در لحظات مختلف

سیستم علّی: $= g(t, \{x(\cdot)\}_{-\infty}^{t})$ تابعی از t و ورودی سیستم از لحظهٔ ∞- تا لحظهٔ t

در سیستم بدون حافظه: $= g(t, x(t))$ تابعی از t و ورودی سیستم در همان لحظه

* در سیستم تغییرناپذیر با زمان (TI)، با شیفت زمانی ورودی خروجی تغییر شکل نمی‌دهد و فقط به همان میزان شیفت زمانی پیدا می‌کند.

* در سیستم‌های خطی قانون جمع آثار حاکم است و لذا به کمک پاسخ ضربهٔ سیستم می‌توان پاسخ به هر ورودی دلخواه را پیدا کرد.



یک ورودی دلخواه

$$x(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,\delta(t-\alpha)\,d\alpha \xrightarrow[\text{قانون جمع آثار}]{} \xrightarrow{TI} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,h(t-\alpha)\,d\alpha =$$

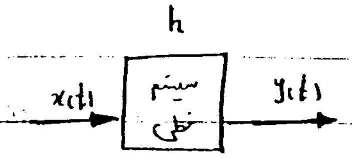
یکی از خواص تابع ضربه

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,x(t-\alpha)\,d\alpha = h(t) * x(t)$$

$$\xrightarrow{\text{غیر } TI} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,h(t-\alpha;t)\,d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)\,x(t-\alpha)\,d\alpha$$

حال در سیستم‌های خطی:



$$y(t) = \underbrace{h}_{\text{به عنوان یک عملگر}}\,x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)\,x(t-\alpha)\,d\alpha \overset{TI}{=} h(t) * x(t)$$

ب) عبور فرآیند تصادفی از سیستم.

در حالت کلی:

متغیر تصادفی لحظه t فرآیند خروجی $Y(t) = g\left(t, \{X(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}\right)$ تابعی از t و کلیه متغیرهای تصادفی فرآیند ورودی

سیستم علی $= g\left(t, \{X(\cdot)\}_{-\infty}^{t}\right)$ تابعی از t و متغیرهای تصادفی تا لحظه t فرآیند ورودی

سیستم بدون حافظه $= g\left(t, X(t)\right)$ تابعی از t و متغیر تصادفی همان لحظه فرآیند ورودی

در سیستم خطی:

$$y(t) \overset{\text{کلی}}{=} \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)\, x(t-\alpha)\, d\alpha \overset{TI}{=} \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha$$

متغیر تصادفی لحظهٔ t فرآیند خروجی، ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی فرآیند ورودی می باشد.

* در حالت کلی پیدا کردن توابع احتمال فرآیند خروجی (حتی یک بعدی آن) کار بسیار دشواری است چرا که هر متغیر تصادفی فرآیند خروجی تابعی است از ∞ متغیر تصادفی فرآیند ورودی.
* خطی بودن سیستم 2 ویژگی را ایجاب می کند:

یکی اینکه پیدا کردن ممان های ~~...~~ فرآیند خروجی را خیلی ساده می کند.

دوم اینکه اگر فرآیند ورودی نرمال باشد پاسخ سیستم خطی به آن نیز (چه TI باشد و چه نباشد) یک فرآیند نرمال می گردد که به کمک ممان هایش کاملاً توصیف می گردد و تعیین ممان ها در سیستم خطی نیز خیلی ساده است.

6-2- ممان های اوّل و دوّم در سیستم خطی:

$$x(t) \rightarrow \boxed{\overset{h}{\text{سیستم خطی}}} \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = h\,x(t) \overset{\text{کلی}}{=} \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)\, x(t-\alpha)\, d\alpha \overset{LTI}{=} \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha = h(t) * x(t)$$

$$m_y(t) = E\,y(t) = E\,h\,x(t) = h\,E\,x(t) \overset{\text{کلی}}{=} \int h(\alpha;t)\, m_x(t-\alpha)\, d\alpha \overset{LTI}{=} h(t) * m_x(t)$$

$$R_{yx}(t,s) = E\,y(t)\,x^*(s) = E\,h_t\, x(t)\, x^*(s) = h_t\, E\, x(t)\, x^*(s) = \cancel{h_t E x(t) x^*(s)}$$
$$= h_t\, R_x(t,s) \overset{\text{کلی}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha;t)\, R_x(t-\alpha,s)\, d\alpha \overset{LTI}{=} h(t) * R_x(t,s)$$

$$R_{xy}(t,s) = E\,x(t)\,y^*(s) = E\,x(t)\,h_s^*\,x^*(s) = h_s^*\, E\,x(t)\,x^*(s) = h_s^*\, R_x(t,s) =$$
$$\overset{\text{کلی}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t,s-\beta)\, h^*(\beta;s)\, d\beta \overset{LTI}{=} R_x(t,s) * h^*(s)$$

به همین ترتیب:

$$R_y(t,s) = E\,y(t)y^*(s) = E\,h_t x(t) h_s^* x^*(s) = h_t h_s^* R_x(t,s) =$$

در کل

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t) R_x(t-\alpha, s-\beta) h^*(\beta;s)\, d\alpha\, d\beta = \overset{\text{LTI}}{h(t) * R_x(t,s) * h^*(s)}$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{WSS}} \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ \text{SYS}\end{matrix}} \xrightarrow{} y(t) \qquad \begin{cases} m_x(t) = m_x \\ R_x(t,s) = R_x(t-s) = R_x(\tau) \end{cases}$$

*

$$m_y(t) = h(t) * m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \underbrace{m_x(t-\alpha)}_{m_x} d\alpha = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, d\alpha = m_x H(0)$$

$$R_{yx}(t,s) = h(t) * R_x(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \underbrace{\underbrace{R_x(t-\alpha, s)}_{R_x(t-\alpha-s)}}_{R_x(\tau-\alpha)} d\alpha = \boxed{h(\tau) * R_x(\tau)}$$

$$R_{xy}(t,s) = R_x(t,s) * h^*(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{R_x(t, s-\beta)}_{R_x(\tau+\beta)} h^*(\beta)\, d\beta \overset{(\beta \to -\alpha)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau-\alpha) h^*(-\alpha)\, d\alpha =$$

$$= R_x(\tau) * h^*(-\tau)$$

به همین ترتیب داریم:

$$R_y(t,s) = h(\tau) * R_x(\tau) * h^*(-\tau)$$

ملاحظه می‌گردد که در سیستم LTI اگر ورودی WSS باشد، ورودی و خروجی توأماً WSS می‌گردند با همان های زیر:

✓ $m_y = m_x H(0)$ ✓ $R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h^*(-\tau)$

✓ $R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau)$ ✓ $R_y(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau) * h^*(-\tau)$

* می‌توان ثابت کرد که در سیستم LTI اگر ورودی SSS کامل باشد، ورودی و خروجی توأماً SSS کامل خواهند بود.

روابط کلی‌تر:

$$R_{hx,gy}(t,s) = h_t g_s^* R_{xy}(t,s)$$

$$R_{h*x,\,g*y}(t,s) = h(t) * g^*(t) * R_{xy}(t,s)$$

6-3 سامانه های مشتق زاینده

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = x'(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{d/dt} \longrightarrow y(t)$$

ضابطه: $y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \longrightarrow h(t) = \delta'(t)$

مدل ریاضی

$$m_y(t) = Ey(t) = E\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}Ex(t) = \frac{d}{dt}m_x(t) = m'_x(t)$$

$$R_{yx}(t,s) = Ey(t)x^*(s) = E\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right)x^*(s) = \frac{\partial}{\partial t}Ex(t)x^*(s) = \frac{\partial}{\partial t}R_x(t,s)$$

$$R_{xy}(t,s) = Ex(t)y^*(s) = E\,x(t)\frac{\partial}{\partial s}x^*(s) = \frac{\partial}{\partial s}Ex(t)x^*(s) = \frac{\partial}{\partial s}R_x(t,s)$$

$$R_y(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_x(t,s)$$

در حالت WSS:

$$\begin{cases} m_x(t) = m_x & \rightarrow\ m_y(t) = m'_x(t) = 0 \\ R_x(t,s) = R_x(t-s) = R_x(\tau) & \rightarrow\ R_{yx}(\tau) = \frac{\partial}{\partial t}R_x(\underbrace{t-s}_{\tau}) = (1)R'_x(\tau) = R'_x(\tau) \\ & \rightarrow\ R_{xy}(\tau) = \frac{\partial}{\partial s}R_x(\underbrace{t-s}_{\tau}) = (-1)R'_x(\tau) = -R'_x(\tau) \end{cases}$$

$$R_y(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_x(t-s) = -R''_x(\tau)$$

به طور کلی:

$$m_{x'}(t) = m'_x(t) \qquad = 0$$

$$R_{x'x}(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}R_x(t,s) \qquad = R'_x(\tau)$$

$$R_{xx'}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}R_x(t,s) \qquad = -R'_x(\tau)$$

$$R_{x'}(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_x(t,s) \qquad = -R''_x(\tau)$$

برای فرآیند WSS

مثال 1: مشتق فرآیند پواسن با λ ثابت

$$\begin{cases} m_X(t)=\lambda t \\ R_X(t,s)=\lambda^2 ts+\lambda \mathrm{Min}(t,s) \end{cases} \qquad Y(t)=X'(t)$$

$$m_Y(t)=\frac{d}{dt}(\lambda t)=\lambda$$

$$R_Y(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}\left(\lambda^2 ts+\lambda \mathrm{Min}(t,s)\right)=\lambda^2+\lambda\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}\mathrm{Min}(t,s)$$

$$+\ \mathrm{Min}(t,s)=tu(s-t)+su(t-s)\xrightarrow{\partial/\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{Min}(t,s)=\cancel{t\delta(s-t)}+u(t-s)+\cancel{s(-1)\delta(t-s)}$$

$\delta(s-t)$ $\quad -t\,\delta(s-t)$

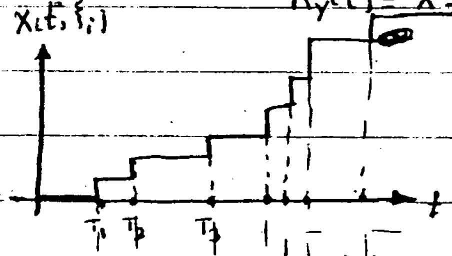
$$\xrightarrow{\partial/\partial t}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}\mathrm{Min}(t,s)=\delta(t-s)$$

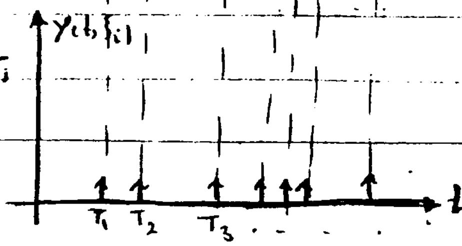
پس:

$$m_Y=\lambda$$

$$R_Y(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$$

توابع زمانی مشتق فرآیند پواسن:





$C_Y(\tau)=\lambda\delta(\tau)$

* با توجه به توابع زمانی آن، مشتق فرآیند پواسن را فرآیند ضربه‌های پواسن می‌نامند. می‌توان و معمولاً فرآیند ضربه‌های پواسن را با مبنای پارامتر $t\in R$ تعریف می‌کنند.

مثال 2: مشتق فرآیند وینر

$$X(\cdot)\sim N(0,N_0\mathrm{Min}(t,s))$$

$Y(t)=\frac{d}{dt}X(t)$ (مشتق‌گیری عملی خطی است، لذا مشتق فرآیند وینر نیز فرآیندی نرمال خواهد بود.)

$$m_X(t)=0\ ,\qquad R_X(t,s)=N_0\mathrm{Min}(t,s)$$

$$\begin{cases} m_Y(t)=0 \\ R_Y(t,s)=N_0\,\delta(t-s)\end{cases} \Longrightarrow Y(t)\sim N(0, N_0\,\delta(\tau))$$

* مشتق فرآیند وینر یک فرآیند نویز ساکن سفید و نرمال است.

نتیجه‌ای که با توجه به تعریفی که کرده بودیم قابل پیش بینی بود.

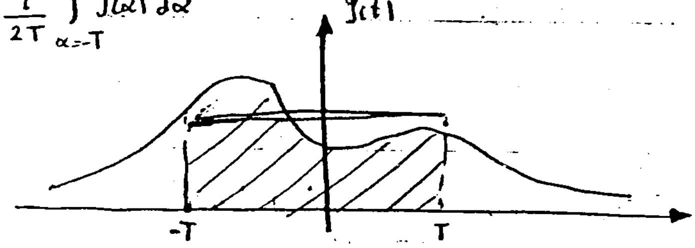
$$\begin{cases} W(t)\sim N(0, N_0\,\delta(\tau)) \\ X(t)=\int_{\alpha=0}^{t} W(\alpha)\,d\alpha\end{cases}$$

۷- ارگادیک بودن فرآیندها (Ergodicity)

۱-۷- تعریف متوسط زمانی، مفهوم و اهمیت ارگادیک بودن

* متوسط زمانی یک تابع مثل $g(t)$:

$$\langle g(t)\rangle_t \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{\alpha=-T}^{T} g(\alpha)\,d\alpha$$



روشن است که $\langle g(t)\rangle_t$ یعنی متوسط مقادیر مختلفی که تابع $g(t)$ در تمام طول محور زمان اختیار کند.

اگر $g(t)$ پریودیک با پریود T_0 باشد، می‌توان این متوسط گیری را در طول یک پریود انجام داد.

$$\langle g(t)\rangle_t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(\alpha)\,d\alpha=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)\,dt$$

* ارگادیک بودن فرآیند، یعنی داشتن این خاصیت که بتوان به کمک هر یک از توابع زمانی فرآیند، خصوصیات آماری فرآیند را بدست آورد، یعنی در واقع استفاده از متوسط گیری زمانی به جای متوسط گیری آماری. (به جای امید ریاضی)

* با توجه به تعریف فوق ۲ شرط زیر را می‌توان برای ارگادیک بودن لازم دانست:

① وجود شباهت هایی بین توابع زمانی فرآیند، چرا که باید فرقی نکند که از کدام یک برای محاسبهٔ خصوصیات آماری فرآیند استفاده می‌شود.

(2) ساکن بودن فرآیند در همان خصوصیت آماری که ارگادیک است. چراکه با متوسط گیری زمانی حاصل مقداری مستقل از زمان خواهد بود.

* ارگادیک بودن در عمل از 2 نظر خیلی مهم است.

(1) در صورت ارگادیک بودن فرآیند، تعیین خصوصیات آماری فرآیند خیلی ساده می گردد، چراکه با یک آزمایش تصادفی، یعنی پیدا کردن یکی از توابع زمانی فرآیند، می توان بکمک متوسط گیری های زمانی روی آن، خصوصیات آماری فرآیند را محاسبه کرد. اما اگر فرآیند ارگادیک نباشد، لازم خواهد بود به تعداد خیلی زیاد ($n \to \infty$ بار) آزمایش و از ~~میانگین~~ متوسط گیری روی توابع آزمایش های مختلف استفاده کرد.

(2) یک نتیجه گیری آماری را در صورت ارگادیک بودن فرآیندها می توان به تک تک موارد تعمیم داد. مثلاً اگر با بررسی های آماری به این نتیجه برسیم که با احتمال 90% ، SNR بالای 30 دسی بل خواهد بود، در صورت ارگادیک بودن فرآیند های توانیم ادعا کنیم در کلیهٔ مواردی که از سیستم استفاده می شود، در 90% از زمان SNR بالای 30 dB خواهیم داشت. در صورتی که اگر فرآیندها ارگادیک نباشند، تنها می توان گفت که در 90% از موارد SNR بالای 30^{dB} خواهد بود.

-2-7 ارگادیک بودن در متوسط (ME بودن) ⟵ Mean Ergodicity ≡ ME

یعنی: $m_X(t) = E\,X(t,\xi) = \langle X(t,\xi) \rangle_t$

در حالت کلی سمت راست مستقل از t است، پس تساوی فوق وقتی می تواند برقرار باشد که سمت چپ نیز مستقل از t باشد.

ساکن بودن در متوسط : $m_X(t) = m_X$

در حالت کلی سمت راست تابعی از ξ می گردد، یعنی نتیجه بستگی به این خواهد داشت که از کدام یک از توابع زمانی استفاده شود و لذا وقتی فرآیند ME است که: $\langle X(t) \rangle_t = m_X$

مستقل از ξ

البته تساوی به مفهوم MS از نظر عملی کافی است:

$$E\left|\langle X(t) \rangle_t - m_X\right|^2 = 0$$

New

ME بودن $\rightarrow \quad m_x(t) = E\,x(t,\xi) = \langle x(t,\xi)\rangle_t$

الف) چند قضیه:

قضیه 1: شرط لازم و کافی برای ME بودن فرآیند عبارت است از:

(1) $m_x(t) = m_x$ ساکن بودن در متوسط

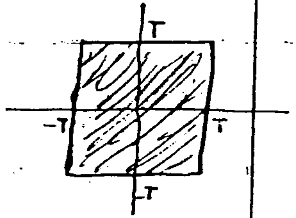
(2) $\langle\langle C_x(t,s)\rangle_t\rangle_s = 0$

اثبات: شرط اول که قبلاً بیان شد.

$$E\left|\langle x(t)\rangle_t - m_x\right|^2 = E\left|\langle x(t)-m_x\rangle_t\right|^2 = E\left|\langle \tilde{x}(t)\rangle_t\right|^2 = E\,\langle \tilde{x}(t)\rangle_t \langle \tilde{x}^*_t\rangle_t =$$

$$= E \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{x}(t)\,dt \cdot \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{x}^*(t)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \underbrace{E\,\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(s)}_{C_x(t,s)}\,dt\,ds =$$



$$= \langle\langle C_x(t,s)\rangle_t\rangle_s = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle x(t)\rangle_t \overset{ms}{\equiv} m_x}$$

پس به کمک شرط‌های اول و دوم فرآیند می‌توان ME بودن فرآیند را بررسی نمود.

قضیه 2: شرط لازم و کافی برای ME بودن فرآیندهای WSS عبارت است از:

$$\langle C_x(\tau)\rangle_\tau = 0$$

اثبات: شرط اول قضیه 1 خود به خود برقرار است چرا که در WSS داریم:

$$\begin{cases} m_x(t) = m_x \\ C_x(t,s) = C_x(t-s) = C_x(\tau) \end{cases}$$

شرط دوم قضیه (1):

$$\langle\langle C_x(t,s)\rangle_t\rangle_s = \left\langle \left[\langle C_x(t+s,s)\rangle_t\right]\right\rangle_s = \left\langle\left[\langle C_x(t+s-s)\rangle_t\right]\right\rangle_s =$$

شیفت زمانی متوسط را تغییر نمی‌دهد.

$$= \langle\langle C_x(t)\rangle_s\rangle_t = \langle C_x(t)\rangle_t =$$

مستقل از s

$$= \langle C_x(\tau)\rangle_\tau = 0 \quad \checkmark$$

قضیهٔ 3 : یک شرط کافی برای ME بودن فرآیندهای WSS عبارت است از:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_x(\tau)\, d\tau < \infty$$

اثبات: طبق قضیهٔ (2):

$$\langle C_x(\tau)\rangle_\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_x(\tau)\, d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} C_x(\tau)\, d\tau}{2T} = 0$$

✓

مقدار صورت محدود است.

قضیهٔ 4: یک شرط کافی دیگر برای ME بودن فرآیندهای WSS عبارت است از:

$$\begin{cases} (1) & C_x(0) \neq \infty \\ (2) & C_x(\infty) = 0 \end{cases}$$

اثبات در پاپولیس

پ) چند مثال:

① فرآیند پواسن با λ ثابت: $m_x(t) = \lambda t$

درمتوسط ثابت نیست، پس ME نیست.

② فرآیند سیگنال تلگرافی با λ ثابت: $m_x(t) = 0$

$C_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$

WSS است و $C_x(0) = 1 \neq \infty$ و $C_x(\infty) = 0$ طبق قضیهٔ (4) این فرآیند ME است.

③ فرآیند ضربه‌های پواسن با λ ثابت: $m_x(t) = \lambda$

$C_x(\tau) = \lambda\delta(\tau)$

WSS است.

$$\int C_x(\tau)\, d\tau = \lambda \neq \infty$$

طبق قضیهٔ (3) ME است.

④ فرآیند با توصیف تحلیلی زیر

$$\begin{cases} X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + B) \\ A \perp\!\!\!\perp B \\ B \sim U(0, 2\pi) \end{cases}$$

برای مستقیم ME بودن ممکن بوده و ساده‌تر است.

$$* \quad m_X(t) = E\,A\cos(2\pi f_0 t + B) \overset{A \perp\!\!\!\perp B}{=} EA \cdot E\cos(2\pi f_0 t + B) =$$

$$= m_A \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t + \alpha) f_B(\alpha)\, d\alpha = m_A \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \alpha) \frac{1}{2\pi}\, d\alpha = 0$$

$$* \quad \langle A\cos(2\pi f_0 t + B)\rangle_t = A\langle \cos(2\pi f_0 t + B)\rangle_t = \begin{cases} 0 & , f_0 \neq 0 \\ A\langle \cos B\rangle = A\cos B & , f_0 = 0 \end{cases}$$

چون در حالت $f_0 \neq 0$ فرآیند ME است. $m_X(t) = \langle X(t)\rangle_t = 0$

امّا در حالت $f_0 = 0$ فرآیند ME نیست.

3-7- ارگادیک بودن در تابع همبستگی (CE بودن) $CE \equiv$ Correlation Ergodicity

CE بودن یعنی اینکه بتوان تابع همبستگی فرآیند را به کمک هر یک از توابع زمانی پیدا کرد.

$$R_X(t+\tau, t) = E\,\underbrace{X(t+\tau)X^*(t)}_{Z_\tau(t)} = \langle \underbrace{X(t+\tau)X^*(t)}_{Z_\tau(t)} \rangle_t$$

با تعریف یک فرآیند کمکی می‌توان هر نوع ارگادیک بودن را به یک ME بودن معادل تبدیل کرد. در اینجا:

$$Z_\tau(t) \triangleq X(t+\tau)X^*(t)$$

ME بودن $Z(t)$ معادل است با CE بودن $X(t)$.

شرط لازم و کافی برای CE بودن فرآیند $X(t)$ عبارت است از:

(1) ساکن بودن در تابع همبستگی $R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau)$

$$(2) \quad \langle\langle E\, X(t+\tau)X^*(t)X^*(s+\tau)X(s)\rangle_t\rangle_s = |R_X(\tau)|^2$$

ملاحظه می گردد که برای بررسی CE بودن به ممان چهارم فرآیند هم نیاز داریم.

اثبات قضیه:

$$m_{Z_\tau}(t) = EZ_\tau(t) = EX(t+\tau)X^*(t) = R_X(t+\tau, t)$$

$$C_{Z_\tau}(t,s) = E\,\tilde{Z}_\tau(t).\tilde{Z}_\tau^*(s) = E\,Z_\tau(t).Z_\tau^*(s) - m_{Z_\tau}(t)m_{Z_\tau}^*(s) =$$

$$= E\,X(t+\tau)X^*(t)X^*(s+\tau)X(s) - R_X(t+\tau,t)R_X^*(s+\tau,s)$$

طبق قضیه ME بودن برای Z_τ داریم:

$$(1)\quad \underbrace{m_{Z_\tau}(t) = m_{Z_\tau}}_{\text{مستقل از } t} \longrightarrow R_X(t+\tau,t) = R_X(\tau)$$

$$(2)\quad \langle\langle C_{Z_\tau}(t,s)\rangle_t\rangle_s = 0 \longrightarrow \langle\langle E\cancel{X}(t+\tau)X^*(t)X^*(s+\tau)X(s)\rangle_t\rangle_s =$$

$$= \langle\langle R_X(t+\tau,t)R_X^*(s+\tau,s)\rangle_t\rangle_s \overset{\text{شرط (۱)}}{=} \langle\langle R_X(\tau)R_X^*(\tau)\rangle_t\rangle_s = |R_X(\tau)|^2$$

تمرین: ثابت کنید فرآیند نرمال با $C_X(t+\tau,t) = e^{-|\tau|}$, $m_X(t) = 0$ یک فرآیند CE است.

(راهنمائی: از یکی از خواص بردار نرمال استفاده کنید.)

۷-۴- ارگادیک بودن در توزیع (DE بودن) $DE \equiv$ Distribution Ergodicity

DE بودن یعنی اینکه بتوان به کمک هر یک از توابع زمانی فرآیند، توابع احتمال فرآیند را پیدا کرد.

DE بودن می تواند با مرتبه های مختلفی مطرح شود. ما فقط DE بودن مرتبه اول را در نظر می گیریم.

یعنی اینکه بتوان توابع احتمال یک بعدی فرآیند را به کمک هر یک از توابع زمانی فرآیند پیدا کرد.

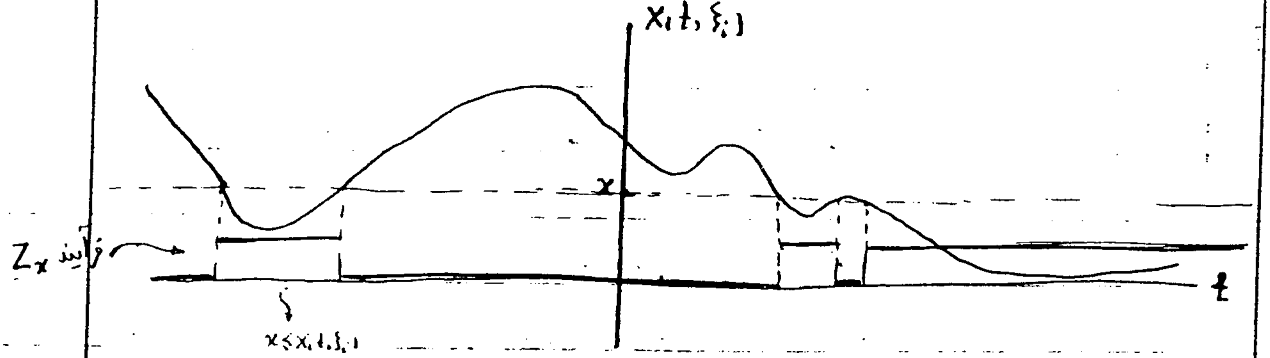
$$F_X(x;t) = P\{X(t) \leqslant x\}$$

با تعریف فرآیند کمکی زیر:

$$Z_x(t) \triangleq \begin{cases} 1 & X(t) \leqslant x \\ 0 & X(t) > x \end{cases}$$

$$EZ_x(t) = (1)P\{Z_x(t)=1\} + (0)P\{Z_x(t)=0\} = P\{x(t)\le x\} + 0 = F_x(x;t)$$

پس DE بودن فرآیند X، معادل است با ME بودن فرآیند Z_x .



درصورت DE بودن فرآیند:

$$F_X(x;t) = EZ_x(t) = \langle Z_x(t)\rangle_t = \left(\text{نسبتی از زمان که } Z_x(t) \text{ برابر } 1 \text{ بوده است}\right) =$$

$$= \left(\text{نسبتی از زمان که در آن } x(t)\le x \text{ بوده است}\right)$$

چند قضیه:

قضیه 1: شرط لازم و کافی برای DE بودن فرآیند عبارت است از:

1) $F_X(x;t) = F_X(x)$ ---- SSS بودن رتبه اول

2) $\langle\langle F_X(x,x;t,s)\rangle_t\rangle_s = F_X^2(x)$

اثبات:

* $m_{Z_x}(t) = EZ_x(t) = F_X(x;t) \xrightarrow[\text{برای } Z_x]{\text{شرط ME بودن}} F_X(x;t) = F_X(x)$

مستقل از t

* $C_{Z_x}(t,s) = R_{Z_x}(t,s) - m_{Z_x}(t)m_{Z_x}(s) = R_{Z_x}(t,s) - F_X(x)F_X(x) \xrightarrow[\text{ME بودن}]{\text{شرط دوم قضیه اول}}$

$\longrightarrow \langle\langle R_{Z_x}(t,s)\rangle_t\rangle_s = \langle\langle F_X^2(x)\rangle\rangle_{t,s} = F_X^2(x)$

$R_{Z_x}(t,s) = EZ_x(t)Z_x(s) = (1)(1)P(Z_x(t)=1, Z_x(s)=1) = P\{X(t)\le x, X(s)\le x\} =$

فقط وقتی هر دو 1 باشند غیرصفر است

$$= F_X(x,x;t,s) \Longrightarrow$$ شرط b: $\langle\langle F_X(x,x;t,s)\rangle_t\rangle_s = F_X^2(x)$ ✓

قضیهٔ (2): شرط لازم و کافی برای DE بودن فرآیندهای SSS مرتبه دوم عبارت است از:

$$\boxed{\langle F_X(x,x;\tau)\rangle_\tau = F_X^2(x)}$$

اثبات: از SSS مرتبه دوم، مرتبه اول هم نتیجه می گردد. پس شرط اول قضیهٔ (1) خود به خود برقرار است.

با توجه به SSS مرتبه دوم بودن فرآیند:

$$F_X(x,x;t,s) = F_X(x,x;\overbrace{t-s}^{\tau}) \longrightarrow \langle\langle F_X(x,x;t,s)\rangle_t\rangle_s = \langle F_X(x,x;\tau)\rangle_\tau$$

نظیر اثبات قضیهٔ (2) ME بودن

قضیهٔ (3): یک شرط کافی برای DE بودن مرتبه اول فرآیندهای SSS مرتبه دوم، استقلال متغیرهای تصادفی به فاصلهٔ $\tau \to \infty$ می باشد.

اثبات:

$$F_X(x,x;\tau) = F_X(x;t)\,F_X(x;s) = F_X(x)F_X(x) = F_X^2(x)$$

در صورت استقلال

SSS مرتبه اول

$$\rightarrow * C_{Z_x}(\infty) = F_X(x,x;\infty) - F_X^2(x) = F_X^2(x) - F_X^2(x) = 0$$

$$\rightarrow * C_{Z_x}(0) = F_X(x,x;0) - F_X^2(x) \neq \infty$$

چون CDF تابعی است با مقادیر بین 0 تا 1

پس طبق قضیهٔ (4) فرآیند $Z_x(t)$ یک فرآیند ME است، یعنی فرآیند $X(t)$ یک فرآیند DE است.

نکته: در فرآیندهای نرمال از CE+ME بودن فرآیند می توان DE بودن کامل فرآیند را نتیجه گرفت (یعنی ارگادیک بودن در کلیهٔ خصوصیات آماری) چرا که در فرآیندهای نرمال، ممان های اول و دوم یک توصیف کامل آماری فرآیند است.

(پایان مبحث دوم (پایان ترم تا این جا)

مبحث سوم: «طیف توان و بسط های متعامد فرآیندها»

1- معرفی طیف قدرت و طیف قدرت متقابل

1-1- مروری بر قدرت و طیف قدرت توابع یقینی

$g(t)$ تابع یقینی

$|g(t)|^2 = g(t)\,g(t)^*$ قدرت لحظه‌ای تابع

$P_g = \langle |g(t)|^2 \rangle_t$ قدرت تابع / $E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$ انرژی تابع

اگر $E_g \neq 0, \infty$ باشد تابع را از نوع انرژی گویند / اگر $P_g \neq 0, \infty$ باشد تابع را از نوع قدرت گویند.

تبدیل فوریه: $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$ / $G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$

$C_0 e^{j2\pi f_0 t}$ = مؤلفهٔ نوسانی با فرکانس f_0 و به مقدار C_0

طبق روابط تبدیل فوریه هر سیگنالی را می‌توان مجموع مؤلفه‌های نوسانی دانست. تبدیل فوریهٔ سیگنال $G(f)$ تابعی است که مقدار هر مؤلفه را می‌دهد. $C_0 = G(f_0)$

مقدار مؤلفهٔ با فرکانس f_0 موجود در سیگنال

$g(t) = a\cos(2\pi f_0 t + b) = \underbrace{\frac{a}{2} e^{jb}}_{C_0} e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{a}{2} e^{-jb}}_{C_0^*} e^{j2\pi(-f_0)t}$ یک مؤلفهٔ نوسانی حقیقی با فرکانس f_0

هر مؤلفهٔ نوسانی حقیقی با فرکانس f_0 از مجموع دو مؤلفهٔ نوسانی با فرکانس‌های f_0+ و f_0- تشکیل می‌گردد. به طوری که اگر مقدار یکی C_0 باشد مقدار دیگری C_0^* خواهد بود.

برخی خواص تبدیل فوریه:

(1) $g(t) \xrightarrow{FT} G(f) \Longrightarrow g(-t) \xrightarrow{FT} G(-f)$ *

یعنی تبدیل فوریه تقارن‌ها (زوج یا فرد) را حفظ می‌کند.

(2) $g(t) \xrightarrow{FT} G(f) \Longrightarrow g(t)^* \xrightarrow{FT} G^*(-f)$

پس در سیگنال های حقیقی که $g(t)=g^*(t)$ داریم: $\boxed{G(f)=G^*(-f)}$

مقدار مؤلفه با فرکانس $-f$

مزدوج مقدار مؤلفه با فرکانس $+f$

* ③ فرم کلی رابطه پارسوال: $\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\, g_2^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(f) \cdot G_2^*(f)\, df$

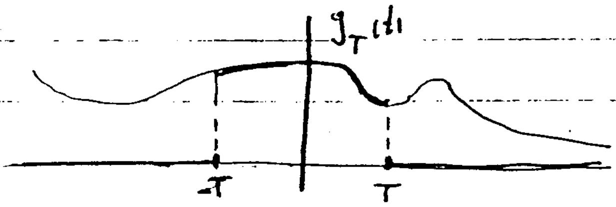
* فرم حالت خاص: $E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$

$G(f)$ مقدار مؤلفه با فرکانس f موجود در تابع / $|G(f)|^2$ طیف انرژی تابع

* طیف انرژی تابعی است که چگونگی توزیع انرژی E_g را بین فرکانس های مختلف نشان می دهد.

* برای سیگنال های از نوع انرژی $G(f)$ محدود خواهد بود، ولی برای غالب سیگنال های از نوع قدرت، $G(f)$ بی نهایت می گردد، یعنی این سیگنال ها نیز از مجموع مؤلفه های فرکانسی تشکیل می گردند منتهی مجموع مؤلفه های با دامنه نوسان نامحدود. به هر حال برای چنین سیگنال هایی نمی توان از تبدیل فوریه استفاده کرد.

* با محدود کردن سیگنال به یک بازه محدود غالباً از نوع انرژی می گردد و دارای تبدیل فوریه می گردد.



$g_T(t) \xleftrightarrow{FT} G_T(f) \Longrightarrow |G_T(f)|^2 \equiv$ طیف انرژی سیگنال محدود شده به بازه $(-T,T)$

* طیف قدرت سیگنال: $\boxed{S_g(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |G_T(f)|^2}$

چرا که داریم: $\int_{-\infty}^{+\infty} S_g(f)\,df = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2 df \overset{\text{پارسوال}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_T(t)|^2 dt =$

ص بعد

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|g_T(t)|^2 dt = \langle |g(t)|^2\rangle = P_g$$

یعنی $S_g(f)$ تابعی است که چگونگی توزیع قدرت (P_g) را بین فرکانس های مختلف نشان می دهد.

1-2- تبدیل فوریه و طیف قدرت فرآیندها

در این مبحث فرآیند را در حوزهٔ زمان با حروف کوچک نشان خواهیم داد. یعنی:

فرآیند حوزهٔ زمان $x(t) = x(t,\xi)$

قدرت لحظه‌ای فرآیند $E|x(t)|^2 \underset{\text{کلی}}{=} R_x(t,t) \underset{\text{WSS در}}{=} R_x(0)$

قدرت فرآیند $P_x \triangleq \langle E|x(t)|^2\rangle_t \underset{\text{کلی}}{=} \langle R_x(t,t)\rangle_t \underset{\text{WSS}}{=} \langle R_x(0)\rangle_t = R_x(0)$

$$\equiv E\langle |x(t)|^2\rangle_t$$

انرژی فرآیند $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} E|x(t)|^2 dt \underset{\text{کلی}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t,t)\,dt \underset{\text{WSS}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(0)\,dt = \infty$

در حالت کلی انرژی فرآیندهای WSS نامحدود است.

غالباً توابع زمانی فرآیندها از نوع قدرت هستند و دارای تبدیل فوریه نمی باشند ولی با محدود کردن فرآیندها به بازهٔ مثلاً $\pm T$ از نوع انرژی می گردند و دارای تبدیل فوریه می گردند.

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & , |t|<T \\ 0 & , |t|>T \end{cases} \longrightarrow X_T(f,\xi) = \mathcal{F}\{x_T(t,\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t,\xi) e^{-j2\pi ft} dt$$

با تبدیل فوریه، فرآیند به فرآیندی در حوزهٔ فرکانس بدل می گردد. یعنی فرآیندی که پارامتر آن f می باشد (فضای پارامتر آن محور فرکانس است). یعنی در هر نقطه از محور فرکانس یک متغیر تصادفی است.

مقدار مؤلفه با فرکانس f_1 موجود در فرآیند $= X_T(f_1) \longleftarrow$ متغیر تصادفی نقطهٔ f_1 از محور فرکانس

گر چه استفاده از تبدیل فوریه به صورت فوق مقدوری باشد، ولی چون در حالت کلی فرآیند جدید حاصل نسبت به فرآیند اصلی مزیت خاصی پیدا نمی کند. (مثلاً ناهمبسته شدن متغیرهای تصادفی آن)
لذا در عمل غالباً برای فرآیندها از تبدیل فوریه استفاده نمی گردد.
ولی یک تابع حوزهٔ فرکانسی مفید موسوم به طیف قدرت بسیار رایج است.

* $S_X(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E|X_T(f)|^2$: طیف قدرت فرآیند

* $S_X(f)$ طیف قدرت نامیده می شود، چرا که خواهیم دید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\,df = P_X$$

یعنی این تابع چگونگی توزیع P_X را بین فرکانس های مختلف نشان می دهد.

* طیف قدرت متقابل دو فرآیند تصادفی:

$$x_T(t) \xleftrightarrow{FT} X_T(f)$$
$$y_T(t) \xleftrightarrow{FT} Y_T(f)$$

* طیف قدرت متقابل $S_{XY}(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T^*(f)$

مقدار مؤلفهٔ با فرکانس f موجود در فرآیند y : $Y_T(f)$ متغیر تصادفی / مقدار مؤلفه با فرکانس f موجود در فرآیند x : $X_T(f)$ متغیر تصادفی

طیف قدرت متقابل $S_{XY}(f)$ تابعی است که همبستگی بین مقدار مؤلفه های فرکانسی موجود در دو فرآیند را بیان می کند.

1-3- رابطهٔ بین طیف قدرت (متقابل) و تابع همبستگی (متقابل)

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E|X_T(f)|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) X_T^*(f) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^*(t_2) e^{+j2\pi f t_2} dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E \int_{-T}^{T} x(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \cdot \int_{-T}^{T} x^*(t_2) e^{+j2\pi f t_2} dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{t_1=-T}^{T} \int_{t_2=-T}^{T} \underbrace{E\, x(t_1) x^*(t_2)}_{R_x(t_1,t_2)} e^{-j2\pi f(t_1-t_2)} dt_1\, dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^{T} \int_{\tau=-t-T}^{-t+T} R_x(t+\tau, t)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau\, dt =$$

$, t_2 = t$
$t_1 = t+\tau$

$$dt_1 dt_2 = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right| dt\, d\tau = dt\, d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^{T} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} R_x(t+\tau, t)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau\, dt =$$

$$= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f\tau} \underbrace{\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^{T} R_x(t+\tau, t)\, dt \right)}_{\langle R_x(t+\tau, t)\rangle_t} d\tau \longrightarrow$$

$$\longrightarrow S_x(f) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \langle R_x(t+\tau, t)\rangle_t\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau = F_\tau \langle R_x(t+\tau, t)\rangle_t$$

* پس:

$$\boxed{\langle R_x(t+\tau, t)\rangle_t \xleftrightarrow{FT} S_x(f)}$$

پس با داشتن تابع همبستگی فرآیند می‌توان طیف قدرت فرآیند را به صورت منحصر بفرد تعیین کرد. و با داشتن طیف قدرت فرآیند در حالت کلی می‌توان متوسط زمانی تابع همبستگی را پیدا کرد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = \langle R_x(t+\tau, t)\rangle_t \Big|_{\tau=0} = \langle R_x(t, t)\rangle_t = P_x$$

* در فرآیند WSS:

$$R_x(t+\tau, t) = R_x(\tau)$$

$$\longrightarrow \langle R_x(t+\tau, t)\rangle_t = \langle R_x(\tau)\rangle_t = R_x(\tau)$$

* ولذا:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{FT} S_x(f)$$

روابط وینر - خین چین
wiener _ Khin chin

$$\begin{cases} S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, e^{+j2\pi f\tau} df \end{cases}$$

در فرآیندهای WSS رابطهٔ طیف قدرت و تابع همبستگی یک رابطهٔ یک به یک است.
به همین ترتیب می توان نشان داد که در حالت کلی:

$$\langle R_{XY}(t+\tau,t)\rangle_t \xleftrightarrow{FT} S_{XY}(f)$$

* و در حالت توأماً WSS :

$$R_{XY}(\tau) \xleftrightarrow{FT} S_{XY}(f)$$

New

4-1- چند مثال از طیف قدرت

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E|X_T(f)|^2$$

$$= E \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2$$

وقتی تک‌تک توابع زمانی دارای طیف قدرت باشند.

$$\langle R_X(t+\tau,t)\rangle_t \xleftrightarrow[\tau]{FT} S_X(f)$$

$$\langle R_{XY}(t+\tau,t)\rangle_t \xleftrightarrow[\tau]{FT} S_{XY}(f) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T^*(f)$$

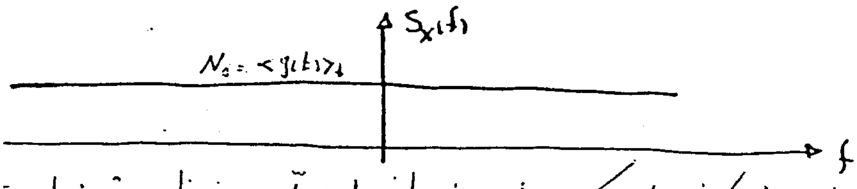
(1) فرآیند نویز سفید:

$$\begin{cases} m_X(t) = 0 \\ R_X(t+\tau,t) = C_X(t+\tau,t) = g(t)\,\delta(\tau) \end{cases}$$

$$\langle R_X(t+\tau,t)\rangle_t = \langle g(t)\,\delta(\tau)\rangle_t = \langle g(t)\rangle_t\,\delta(\tau) = N_0\,\delta(\tau)$$

مثلاً

$$\longrightarrow S_X(f) = \mathcal{F}\{N_0\,\delta(\tau)\} = N_0$$ مستقل از فرکانس



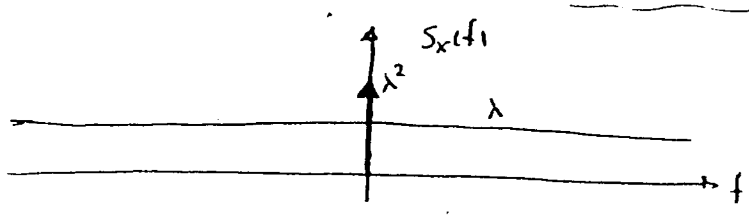
(2) در فرآیند نویز سفید همهٔ فرکانس‌ها و به یک میزان حضور دارند و این علت سفید نامیده شدن است.

فرآیند ضربه‌های پواسن با λ ثابت:

$$m_X(t) = \lambda$$

$$C_X(\tau) = \lambda\,\delta(\tau)$$

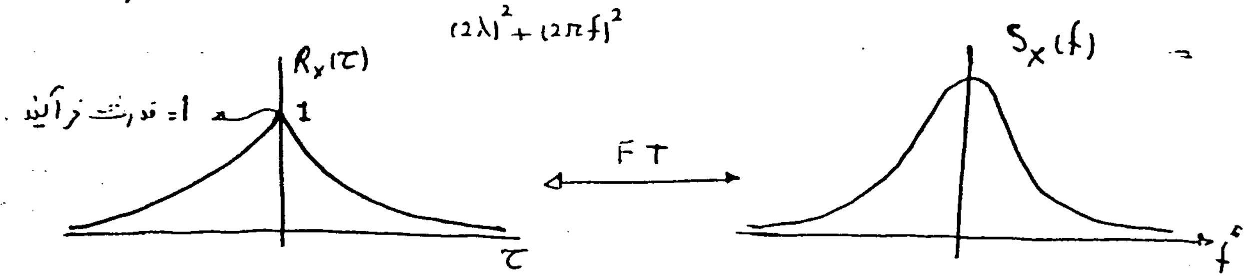
$$\longrightarrow R_X(\tau) = C_X(\tau) + |m_X(t)|^2 = \lambda\,\delta(\tau) + \lambda^2 \longrightarrow S_X(f) = \mathcal{F} R_X(t) = \lambda + \lambda^2 \delta(f)$$



این طیف نشان می‌دهد که این فرآیند دارای یک مؤلفهٔ DC قوی است و صرف نظر از آن بقیهٔ فرکانس‌ها با قدرت یکسان در فرآیند وجود دارند.

③ فرآیند سیگنال تلگرافی با λ ثابت

$$m_x(t)=0$$
$$R_x(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$$
$$S_x(f)=\mathcal{F}\, e^{-2\lambda|\tau|}=\frac{4\lambda}{(2\lambda)^2+(2\pi f)^2}$$

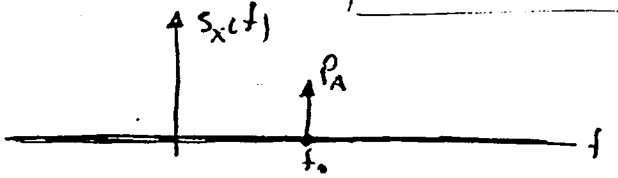


$S_x(f)$ گرچه نشان می‌دهد که در این فرآیند همهٔ فرکانس‌ها وجود دارند، ولی قدرت در حول فرکانس $f=0$ متمرکز است و فرکانس‌های مهم موجود در این فرآیند، فرکانس‌های پایین هستند.

④ یک مؤلفهٔ فرکانسی با فرکانس معلوم f_0 ولی دامنه و فاز تصادفی

$$X(t)=Ae^{j(2\pi f_0 t+\beta)}$$
$$\longrightarrow R_x(t+\tau,t)=E\,X(t+\tau)X^*(t)=E\,Ae^{j(2\pi f_0 t+2\pi f_0\tau+\beta)}\cdot Ae^{-j(2\pi f_0 t+\beta)}=$$
$$=EA^2e^{j2\pi f_0\tau}=P_A e^{j2\pi f_0\tau}$$

$$\xrightarrow{FT} S_x(f)=\mathcal{F}\{P_A e^{j2\pi f_0\tau}\}\longrightarrow \boxed{S_x(f)=P_A\,\delta(f-f_0)}$$



$S_x(f)$ نشان می‌دهد که در این فرآیند، هیچ فرکانسی به جز فرکانس $f=f_0$ وجود ندارد، یعنی همهٔ قدرت فرآیند در همین فرکانس متمرکز است. چیزی که از روی توابع زمانی فرآیند نیز واضح است.

(5) چند مؤلفهٔ فرکانسی با فرکانس معلوم و دامنه‌ها و فازهای تصادفی

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} A_i e^{j(2\pi f_i t+\theta_i)}$$

$$R_x(t+\tau,t)=E\sum_{i=1}^{n}A_i e^{j(2\pi f_i t+2\pi f_i\tau+\theta_i)}\cdot\sum_{K=1}^{n}A_K e^{j(2\pi f_K t+\theta_K)}=$$

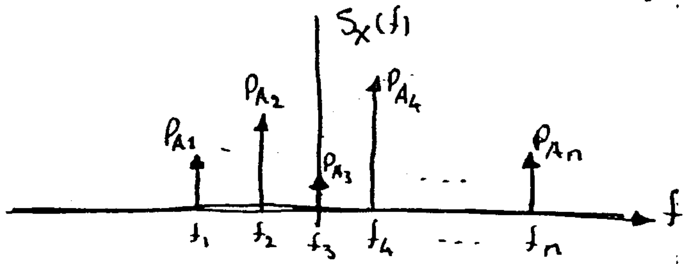
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{n} EA_iA_K e^{j2\pi f_i\tau}\, e^{j2\pi(f_i-f_K)t}\, e^{j(\theta_i-\theta_K)}\longrightarrow$$

$$\rightarrow\langle R_x(t+\tau,t)\rangle_t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{n} EA_iA_K e^{j2\pi f_i\tau}\langle e^{j2\pi(f_i-f_K)t}\rangle_t\, e^{j(\theta_i-\theta_K)}\longrightarrow$$

$$\langle e^{j2\pi f_0 t}\rangle_t=\begin{cases}0, & f_0\neq 0\\ \langle e^0\rangle=1, & f_0=0\end{cases}\longrightarrow\langle R_x(t+\tau,t)\rangle_t=\sum_{i=1}^{n}\left[0+EA_iA_i e^{j2\pi f_i\tau}\times 1\right]\times e^{j(\theta_i-\theta_i)}+0\,]=$$

$$\longrightarrow\langle R_x(t+\tau,t)\rangle_t=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{EA_i^2}_{P_{A_i}}e^{j2\pi f_i\tau}\longrightarrow S_x(f)=\mathcal{F}\left\{\sum_{i=1}^{n}P_{A_i}e^{j2\pi f_i\tau}\right\}\rightarrow$$

$$\longrightarrow S_x(f)=\sum_{i=1}^{n}P_{A_i}\,\delta(f-f_i)$$



(6) یک مؤلفهٔ فرکانسی حقیقی با دامنهٔ معلوم ولی فرکانس و فاز تصادفی :

تصادفی

$$x(t)=K\cos(2\pi A t+\theta)$$

$$R_x(t+\tau,t)=E\,x(t+\tau)x(t)=E\,K\cos(2\pi At+2\pi A\tau+\theta)\cdot K\cos(2\pi At+\theta)=$$

$$=\frac{K^2}{2}E\left[\cos(4\pi At+2\pi A\tau+2\theta)+\cos(2\pi A\tau)\right]$$

$$\longrightarrow S_x(f)=\mathcal{F}_\tau\left\{\left\langle\frac{K^2}{2}E\left[\cos(4\pi At+2\pi A\tau+2\theta)+\cos(2\pi A\tau)\right]\right\rangle_t\right\}=$$

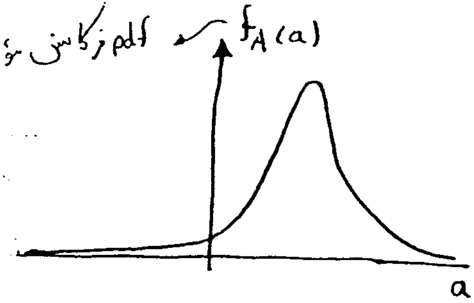
$$=\frac{K^2}{2}\mathcal{F}_\tau\left\{E\left(\langle\cos(4\pi At+2\pi A\tau+2\theta)\rangle_t+\cos(2\pi A\tau)\right)\right\}$$

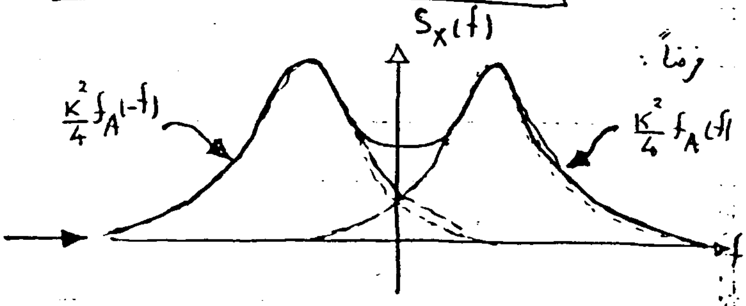
$$= \frac{K^2}{2} F_\tau \left\{ E[0 + \cos 2\pi A\tau] \right\} = \frac{K^2}{2} E\left[F_\tau \{ \cos 2\pi A\tau \} \right] =$$

pdf متغیر A

$$= \frac{K^2}{2} E\left[\frac{1}{2}\delta(f-A) + \frac{1}{2}\delta(f+A) \right] = \frac{K^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(\alpha) [\underbrace{\delta(f-\alpha)}_{\delta(\alpha - f)} + \delta(f+\alpha)] \, d\alpha =$$

$$= \frac{K^2}{4} [f_A(f) + f_A(-f)] \rightarrow \boxed{S_X(f) = \frac{K^2}{4} [f_A(f) + f_A(-f)]}$$





و $\boxed{P_X = \frac{K^2}{2}}$

---

7 فرآیند PAM فرب‌دای

یعنی فرآیند با تعریف روبرو:

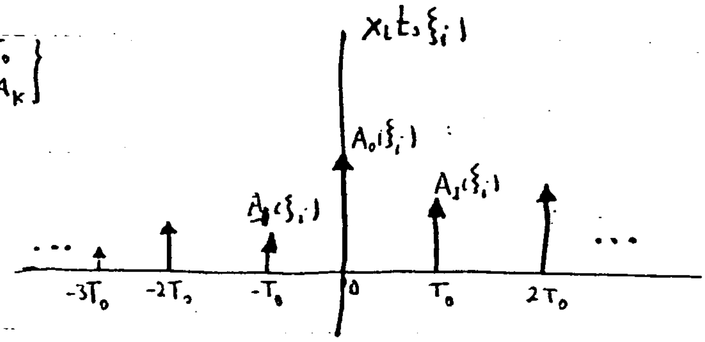
$$X(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} A_K \delta(t - KT_0)$$

T_0: معلوم

A_Kها یک رشته متغیر تصادفی WSS هستند یعنی:

$$m_A(K) = EA_K = m_A$$

$$R_A(K,n) = EA_K A_n = R_A(K-n)$$



$$m_X(t) = EX(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} EA_K \delta(t - KT_0) = m_A \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT_0) =$$

$$= \underline{m_A \, \text{Rep}_{T_0} \delta(t)}$$

$$R_X(t+\tau, t) = EX(t+\tau)X(t) = E \sum_{K=-\infty}^{+\infty} A_K \delta(t + \tau - KT_0) \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} A_\ell \delta(t - \ell T_0) =$$

$$= \sum_K \sum_\ell \underbrace{EA_K A_\ell}_{R_A(K-\ell)} \underbrace{\delta(t+\tau - KT_0) \delta(t - \ell T_0)}_{\delta(\ell T_0 + \tau - KT_0)\delta(t - \ell T_0)} =$$

$$= \sum_i \sum_K R_A(i)\,\delta(\tau - iT_0)\,\delta(t-lT_0)$$

$$\xrightarrow{K=i+l} R_X(t+\tau,t) = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_A(i)\,\delta(\tau-iT_0)\right]\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(t-lT_0) =$$

$$= \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_A(i)\,\delta(\tau-iT_0)\right] \operatorname{rep}_{T_0}\delta(t)$$

ملاحظه می‌گردد که $X(t)$ یک فرآیند ساکن دوری به مفهوم وسیع با پریود T_0 است.

$$\to S_X(f) = F_\tau\{\langle R_X(t+\tau,t)\rangle_t\} \to S_X(f) = F_\tau\left\{\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} R_A(i)\,\delta(\tau-iT_0)\right]\cdot\langle \operatorname{rep}_{T_0}\delta(t)\rangle\right\} \to$$

$$* \quad \langle \operatorname{rep}_{T_0}\delta(t)\rangle_t = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \operatorname{rep}_{T_0}\delta(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\,dt = \frac{1}{T_0}$$

$$* \longrightarrow \boxed{S_X(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_A(i)\,e^{-j2\pi f i T_0}} \longrightarrow$$

تابعی پریودیک با پریود $f = \frac{1}{T_0}$

2- نکاتی در مورد طیف قدرت و تابع همبستگی

2-1- نکاتی در مورد طیف قدرت

* ① طیف قدرت در حالت کلی تابعی حقیقی و غیرمنفی است. (یعنی حتی برای فرآیندهای مختلط)
در فرآیندهای حقیقی، طیف قدرت تقارن زوج خواهد داشت.

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{E|X_T(f)|^2}{2T}$$

قسمت اول (حقیقی و غیرمنفی بودن) واضح است.

در فرآیندهای حقیقی:

$$x_T(t) \text{ حقیقی} \Longrightarrow X_T(-f) = X_T^*(f) \quad : \text{تقارن هرمیتیک}$$

$$\to S_X(-f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E|X_T(-f)|^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E|X_T^*(f)|^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E|X_T(f)|^2 = S_X(f)$$

باید توجه داشت که در حالات خاص، فرآیند مختلط نیز ممکن است طیف قدرت با تقارن زوج داشته باشد.

② طیف قدرت متقابل در حالت کلی تابعی است مختلط (حتی برای فرآیندهای حقیقی)
در فرآیندهای حقیقی، طیف قدرت متقابل دارای تقارن هرمیتیک خواهد بود.

$$S_{XY}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T^*(f)$$

در فرآیندهای حقیقی:

$$\left.\begin{array}{l} Y_T(-f) = Y_T^*(f) \\ X_T(-f) = X_T^*(f) \end{array}\right\}$$

$$S_{XY}(-f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(-f) Y_T^*(-f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T^*(f) Y_T(f) = \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T^*(f)\right]^*$$

$$= S_{XY}^*(f)$$

③ طیف قدرت $(S_X(f))$، تابعی است که چگونگی تقسیم قدرت فرآیند را بین فرکانس های مختلف نشان می دهد
و انتگرال آن کل قدرت را نشان می دهد.

$$P_X = \int S_X(f)\, df$$

④ طیف قدرت متقابل، $S_{XY}(f)$ تابعی است که همبستگی مقدار مؤلفه های فرکانسی موجود در
دو فرآیند را نشان می دهد.

$$S_{XY}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T^*(f)$$

همبستگی بین دو متغیر تصادفی زیر را:

$X_T(f) \equiv$ مقدار مؤلفهٔ با فرکانس f موجود در فرآیند X

$Y_T(f) \equiv$ مقدار مؤلفهٔ با فرکانس f موجود در فرآیند Y

و در حالت کلی نامساوی زیر هم برقرار است:

$$|S_{XY}(f)|^2 \leqslant S_X(f) \cdot S_Y(f)$$

که در واقع همان نامساوی شوارتز است که برای دو متغیر تصادفی $X_T(f)$ و $Y_T(f)$ نوشته شده باشد.

⑤ در حالت کلی طیف قدرت مجموع دو فرآیند به صورت زیر است:

$$S_{X+Y}(f) = S_X(f) + S_Y(f) + \underbrace{S_{XY}(f) + S_{YX}(f)}_{\text{مزدوج هم}}$$

حقیقی

و در فرآیندهای متعامد داریم:

(*)

$$1)\ S_{XY}(f)=0$$
$$2)\ S_{(X+Y)}(f)=S_X(f)+S_Y(f)$$

باتوجه به:

$$|X_T(f)+Y_T(f)|^2=|X_T(f)|^2+|Y_T(f)|^2+X_T(f)Y_T^*(f)+X_T^*(f)Y_T(f)$$

قسمت اول واضح می گردد.

در فرآیندهای متعامد:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{نماد} & X(\cdot)\perp Y(\cdot)\\ \text{شرط} & R_{XY}(t,s)=0\\ & \forall t,s\end{array}\right\}\longrightarrow \underset{\forall t,\tau}{R_{XY}(t+\tau,t)=0}\longrightarrow \underset{\forall t,\tau}{\langle R_{XY}(t+\tau,t)\rangle_t=0}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow S_{XY}(f)=F_\tau\{\langle R_{XY}(t+\tau,t)\rangle_t\}=0\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{قسمت اول}} S_{X+Y}(f)=S_X(f)+S_Y(f)+0+0=S_X(f)+S_Y(f)$$

New

(6) در حالت کلی طیف قدرت یک فرآیند را می توان به صورت زیر نوشت:

(*) $$S_X(f)=S_{m_X}(f)+S_{\tilde{X}}(f)$$

و در حالت WSS به صورت زیر است:

(*) $$S_X(f)=|m_X|^2\delta(f)+S_{\tilde{X}}(f)$$

اثبات:

می دانیم $X(t)=m_X(t)+\tilde{X}(t)$. هر فرآیند گوسی با هر تابع یقینی (به عنوان حالت خاص از فرآیند) متعامد است.

چرا که:

$$R_{m_X,\tilde{X}}(t,s)=E\,m_X(t)\,\tilde{X}^*(s)=m_X(t)\underbrace{E\tilde{X}^*(s)}_{0}=0\quad,\forall t,s$$

پس طبق نکته 5 داریم:

$$\boxed{S_X(f)=S_{m_X}(f)+S_{\tilde{X}}(f)}$$

در فرآیند WSS داریم:

$$m_X(t)=m_X\ ,\ S_{m_X}(f)=F_\tau\langle R_{m_X}(t+\tau,t)\rangle_t=$$
$$=F_\tau\langle \underbrace{E\,m_X(t+\tau)\,m_X^*(t)}_{m_X(t+\tau)\,m_X^*(t)}\rangle_t=$$

$$=F_\tau\langle \underbrace{m_X(t+\tau)}_{m_X}\underbrace{m_X^*(t)}_{m_X^*}\rangle_t=F_\tau|m_X|^2=|m_X|^2\delta(f)$$

پس:

$$\boxed{S_X(f)=|m_X|^2\delta(f)+S_{\tilde{X}}(f)}$$

مهم (7) در فرآیندهای WSS از نبودن تابع ضربه در مبدأ طیف قدرت ($f=0$) می‌توان صفر بودن تابع متوسط فرآیند را نتیجه گرفت. (*)

اثبات : با توجه به نکتهٔ 6 داریم :

$$S_X(f) = |m_X|^2 \delta(f) + S_{\tilde{X}}(f)$$

و چون طیف قدرت ($S_{\tilde{X}}(f)$) تابعی غیر منفی است ، از نبودن تابع $\delta(f)$ در $S_X(f)$ می‌توان نتیجه گرفت :

$$|m_X|^2 = 0 \Longrightarrow m_X = 0$$

(8) در دو فرآیند توأماً WSS از نبودن مؤلفهٔ فرکانسی مشترک بین دو فرآیند یعنی (K)

$$S_X(f)\, S_Y(f) = 0 \quad , \forall f \in \mathbb{R}$$

می توان تعامد و ناهمبستگی دو فرآیند را نتیجه گرفت .

اثبات : نامساوی زیر را داریم :

$$|S_{XY}(f)|^2 \leqslant S_X(f)\, S_Y(f) = 0$$

(در اینجا $\forall f \in \mathbb{R}$)

توأماً WSS .

$$\longrightarrow |S_{XY}(f)|^2 \leqslant 0 \xrightarrow{\text{مربع اندازه غیرمنفی است}} \left.\begin{matrix} S_{XY}(f) = 0 \\ \forall f \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} R_{XY}(\tau) = F^{-1} S_{XY}(f) = 0 \\ \forall \tau \in \mathbb{R} \end{matrix}\right.$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{matrix} R_{XY}(\tau + t, t) = 0 \\ \forall \tau, t \end{matrix}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} R_{XY}(t, s) = 0 \\ \forall t, s \end{matrix}\right. \longrightarrow X(\cdot) \perp Y(\cdot)$$

برای اثبات ناهمبستگی کافی است ثابت کنیم که متوسط لااقل یکی از دو فرآیند صفر است .

$$\left.\begin{matrix} S_X(f)\, S_Y(f) = 0 \\ \forall f \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \xRightarrow{f=0} S_X(0)\, S_Y(0) = 0$$

پس هر دو طیف $S_X(f)$ و $S_Y(f)$ نمی‌توانند در $f=0$ دارای تابع ضربه باشند . پس طبق نکتهٔ 7 لااقل متوسط یکی از دو فرآیند صفر است .

* به همین دلیل است که در عمل غالباً در ها ابتدا نویز خارج باند را با یک فیلتر حذف می‌کنند و خیالشان راحت است که با این کار هیچ اطلاعاتی را در مورد سیگنال داخل باند از دست نداده‌اند . البته باید توجه داشت که ناهمبستگی فقط به معنی عدم وابستگی خطی است و نه استقلال کامل و لذا ممکن است بتوان به کمک سیگنال خارج باند کیفیت سیگنال داخل باند را بهبود بخشید . البته نه با یک پردازشگر خطی (فیلتر خطی) بلکه با یک پردازشگر غیرخطی !!!

2-2 - نکاتی در مورد تابع همبستگی

① تابع همبستگی در حالت کلی تابعی است با تقارن هرمیتیک، یعنی

$$* \quad \begin{cases} R_X^*(t,s)=R_X(s,t) & \text{در حالت کلی} \\ R_X^*(\tau)=R_X(-\tau) & \text{در WSS} \end{cases}$$

و برای فرآیندهای حقیقی دارای تقارن زوج است، یعنی:

$$\begin{cases} R_X(t,s)=R_X(s,t) & \text{در حالت کلی} \\ R_X(-\tau)=R_X(\tau) & \text{در WSS} \end{cases}$$

② در حالت کلی تابع همبستگی $R_X(t,s)$ به‌ازای $t=s=t_0$ قدرت متغیر تصادفی لحظهٔ t_0 را می‌دهد و به‌ازای $t=t_1$, $s=t_2$ همبستگی بین متغیرهای تصادفی لحظهٔ t_1 و لحظهٔ t_2 را می‌دهد.

③ در حالت کلی تابع همبستگی، تابعی nnd است، یعنی

$$* \quad \begin{cases} \forall g(\cdot) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g^*(s)R_X(t,s)\,dt\,ds \geq 0 \end{cases}$$

* و درصورتی که بین متغیرهای تصادفی فرآیند رابطهٔ خطی نباشد، pd است، یعنی انتگرال فوق صفر هم نخواهد شد.

اثبات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g^*(s)\,E X(t)X^*(s)\,dt\,ds = E\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)X(t)\,dt\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)X(s)\,ds\right)^* =$$

$$= E\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)X(t)\,dt\right|^2 \geq 0$$ متوسط غیرمنفی، غیرمنفی است.

اگر به‌ازای تابعی مثل $g(t)=h(t)$ انتگرال صفر گردد:

$$E\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)X(t)\,dt\right|^2=0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)X(t)\,dt=0 \longrightarrow$$ که در واقع یک رابطهٔ خطی بین متغیرهای تصادفی فرآیند است.

④ در حالت کلی داریم:

$$* \quad |R_X(t,s)|^2 \leq R_X(t,t)R_X(s,s)$$

و در فرآیندهای WSS:

$$* \quad |R_X(\tau)|^2 \leq R_X^2(0)$$

که در واقع همان نامساوی شوارتز است که برای متغیرهای تصادفی لحظات t را نوشته شده باشد.

شرط $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ نشان می‌دهد که تابع همبستگی فرآیندهای WSS در مبدأ $(\tau=0)$ بیشترین مقدار را دارند.

(5) در فرآیندهای WSS حقیقی از تساوی $R_X(T_0)=R_X(0)$ می‌توان پریودیک بودن تابع همبستگی را نتیجه گرفت. یعنی:

$$R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

اثبات:

$$R_X(T_0)=|R_X(T_0)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, e^{j2\pi f T_0}\, df\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|S_X(f)|}_{S_X(f)}\, \underbrace{|e^{j2\pi f T_0}|}_{1}\, df$$

از تساوی دو طرف می‌توان نتیجه گرفت که:

$$S_X(f)\, e^{j2\pi f T_0} = |S_X(f)\, e^{j2\pi f T_0}| \quad \forall f \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} S_X(f)\, e^{j2\pi f T_0} = S_X(f) \\ \forall f \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل فوریه معکوس}} \begin{cases} R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau) \\ \forall \tau \end{cases}$$

(6) در فرآیندهای WSS حقیقی، از پریودیک بودن تابع همبستگی می‌توان پریودیک بودن فرآیند را نتیجه گرفت، و بالعکس. یعنی:

$$\left.\begin{matrix} R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau) \\ \forall \tau \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} X(t+T_0)=X(t) \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

اثبات:

$$E|X(t+T_0)-X(t)|^2 = 2R_X(0)-2R_X(T_0) = 2\left(R_X(0)-R_X(T_0)\right)$$

درصورتیکه $X(t+T_0)\overset{ms}{=}X(t)$ داریم:

$$0 = 2(R_X(0)-R_X(T_0)) \longrightarrow R_X(T_0)=R_X(0) \xrightarrow{\text{نکته (5)}} \begin{cases} R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau) \\ \forall \tau \end{cases}$$

درصورت پریودیک بودن تابع همبستگی داریم:

$$R_X(0+T_0)=R_X(0) \longrightarrow E|X(t+T_0)-X(t)|^2 = 2(0)=0 \longrightarrow X(t+T_0)\overset{ms}{=}X(t)$$

اصولاً تحلیل فوریه ((اینکه سیگنال‌ها یا فرآیندها را بصورت مجموع مؤلفه‌های فرکانسی درنظر گیریم.)) برای سیستم LTI خیلی مفید است. چراکه سیستم خطی است و قانون جمع آثار حاکم است و پاسخ سیستم LTI به یک مؤلفه فرکانسی یک مؤلفه فرکانسی با همان فرکانس است. (سیستم فقط مقدار مؤلفه را تغییر می‌دهد.)

3- طیف قدرت در ورودی خروجی سیستم LTI

13- رابطه طیف های قدرت

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \xrightarrow{y(t)}$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow y(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{j2\pi f_0 (t-\alpha)} d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{-j2\pi f_0 \alpha} d\alpha \; e^{j2\pi f_0 t} =$$

$$= H(f_0) e^{j2\pi f_0 t}$$

کلی $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \xrightarrow[\text{جمع آثار}]{} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f) H(f)}_{Y(f)} e^{j2\pi f t} df \longrightarrow \boxed{Y(f) = X(f) H(f)}$

$$\xrightarrow[x(t)]{\text{فرآیند ورودی}} \underset{h(t),\, H(f)}{\boxed{LTI}} \xrightarrow[y(t)]{\text{فرآیند خروجی}}$$

داشتیم: *

$$* \; R_{YX}(t,s) = h(t) * R_X(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) R_X(t-\alpha, s) d\alpha$$

$$* \; R_{XY}(t,s) = R_X(t,s) * h^*(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t, s-\beta) h^*(\beta) d\beta$$

$$* \; R_Y(t,s) = h(t) * R_X(t,s) * h^*(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) h^*(\beta) R_X(t-\alpha, s-\beta) d\alpha d\beta$$

با $\begin{cases} t \to t+\tau \\ s \to t \end{cases}$ و متوسط گیری نسبت به t داریم:

$$\langle R_{YX}(t+\tau, t) \rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \langle R_X(t+\tau-\alpha, t) \rangle_t d\alpha$$

$$\langle R_{XY}(t+\tau, t) \rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\langle R_X(t+\tau, t-\beta) \rangle_t}_{\langle R_X(t+\beta+\tau,\, t+\beta-\beta) \rangle_t} h^*(\beta) d\beta$$

$$\langle R_Y(t+\tau, t) \rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) h^*(\beta) \cdot \underbrace{\langle R_X(t+\tau-\alpha, t-\beta) \rangle_t}_{\langle R_X(t+\beta+\tau-\alpha,\, t+\beta-\beta) \rangle_t} d\alpha d\beta$$

با تبدیل فوریه نسبت به τ داریم:

$$S_{YX}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) S_X(f) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = H(f) S_X(f)$$

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) e^{+j2\pi f \beta} h^*(\beta) d\beta = S_X(f) H^*(f)$$

$$S_Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) h^*(\beta) S_X(f) e^{j2\pi f(\beta-\alpha)} d\alpha d\beta = S_X(f) H(f) H^*(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2$$

یعنی در سیستم LTI داریم:

$$* \quad \begin{cases} S_{YX}(f) = H(f) S_X(f) \\ S_{XY}(f) = S_X(f) H^*(f) \\ S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2 \end{cases}$$

2-3- چند مثال

* مثال 1، مشتق فرآیند

$$y(t)=x'(t)=\delta'(t)*x(t)$$

مدل ریاضی:

$$x(t)\longrightarrow\boxed{LTI}\longrightarrow y(t)=x'(t)$$

$$h(t)=\delta'(t)\longrightarrow H(f)=j2\pi f$$

$$S_{x'x}(f)=j2\pi f\,S_x(f)\quad,\quad S_{xx'}(f)=-j2\pi f\,S_x(f)\qquad S_{x'}(f)=|j2\pi f|^2 S_x(f)$$
$$=4\pi^2 f^2 S_x(f)$$

* مثال 2، طیف قدرت فرآیند PAM با شکل پالس $p(t)$

$$X(t)=\sum_{K=-\infty}^{+\infty} A_K\, p(t-KT_0)$$

$$X(t)=\underbrace{\left[\sum_{K=-\infty}^{+\infty} A_K\,\delta(t-KT_0)\right]}_{D(t)} * \underbrace{p(t)}_{h(t)}$$

$$D(t)\longrightarrow\boxed{LTI}\longrightarrow X(t)\qquad h(t)=p(t)$$

مدل ریاضی

$$S_X(f)=S_D(f)\cdot|H(f)|^2=S_D(f)\cdot|P(f)|^2$$

* $S_D(f)$ قبلاً بدست آمده بود. (طیف قدرت PAM ضربه‌ای)

New

4- سیستم LTI با تابع تبدیل کسری و فرآیند WSS با طیف کسری

4-1- سیستم LTI با تابع تبدیل کسری

$$x(t)\longrightarrow\boxed{LTI}\longrightarrow y(t)$$

یک مدل ریاضی مناسب برای بررسی سیستم‌های خطی به صورت زیر است:

$$y(t)+a_1 y'(t)+a_2 y''(t)+\dots+a_N y^{(N)}(t)=b_0 x(t)+b_1 x'(t)+\dots+b_M x^{(M)}(t)$$

البته این معادله یک توصیف کامل سیستم نیست و برای تکمیل توصیف سیستم، اطلاعات اضافی لازم است.

- این اطلاعات اضافی می‌تواند شرایط اولیه باشد.
- این اطلاعات اضافی می‌تواند علّی بودن سیستم باشد.
- " " " پایداری سیستم باشد.

با تبدیل لاپلاس دوطرفه :

$$\left(\sum_{i=0}^{N} a_i s^i\right) Y(s) = \left(\sum_{K=0}^{M} b_K s^K\right) X(s) \Longrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_K s^K}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

تابع تبدیل متناظر با این مدل یک تابع کسری است. (نسبت دو چند جمله‌ای)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} H(s) \quad , \quad \text{ضابطهٔ سیستم } y(t) = h(t) * x(t)$$

البته برای تبدیل لاپلاس دوطرفهٔ معکوس ناحیهٔ همگرایی (ROC) لازم است.

$$H(s) = \frac{B_M(s)}{A_N(s)} = \frac{B_M(s)}{\prod_{K=1}^{N}(s-p_K)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{s-p_n} + \underbrace{\sum_{i=0}^{M-N} c_i s^i}_{\text{در صورتی وجود دارد که } M \geq N \text{ است.}}$$

بسط به کسور جزئی (قطب‌های ساده)

$$\boxed{r_n = \frac{B_M(p_n)}{\prod_{\substack{K=1 \\ K \neq n}}^{N} (p_n - p_K)}}$$

$$\longrightarrow h(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-p_n}\right) + \sum_{i=1}^{M-N} c_i \mathcal{L}^{-1}\{s^i\}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^i\} = \delta^{(i)}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_n}\right\} = \begin{cases} e^{p_n t} \cdot u(t) & \text{جواب راست‌گرا} \\ -e^{p_n t} \cdot u(-t) & \text{جواب چپ‌گرا} \end{cases}$$

در سیستم علّی، ROC سمت راست همهٔ قطب‌ها است ولذا همهٔ جواب‌ها راست‌گرا انتخاب می‌گردد.

در سیستم پایدار، ROC ناحیه‌ای است که شامل محور $j\omega$ باشد.

و از بین دو جواب، جواب نزولی باید انتخاب شود. یعنی:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_n}\right\} = \begin{cases} e^{p_n t} u(t) \ , & \text{اگر } Re\{p_n\} < 0 \text{ (قطب LHP)} \\ -e^{p_n t} \cdot u(-t) & \text{اگر } Re\{p_n\} > 0 \text{ (قطب RHP)} \end{cases}$$

فرض پایداری سیستم را درنظر خواهیم گرفت.
سیستم پایدار وقتی علّی خواهد بود که همهٔ قطب هایش در LHP باشند.
که در این صورت:

$$h(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n e^{p_n t} u(t) + \sum_{i=0}^{M-N} c_i \delta^{(i)}(t)$$

در سیستم های پایدار:

$$H(f) = \mathbb{H}(s)\Big|_{s=j2\pi f} = \mathbb{H}(j2\pi f)$$ پاسخ فرکانسی

4-2- فرآیند WSS با طیف کسری

تابع کسری تابع مفیدی برای تقریب انواع دیگر توابع است. لذا در عمل غالباً طیف فرآیندها به صورت تابع کسری تقریب زده می شود.

$$S_X(f) = \frac{Q(f)}{P(f)} = K^2 \frac{\prod_{i=1}^{M} (j2\pi f - z_i)(-j2\pi f - z_i^*)}{\prod_{K=1}^{N} (j2\pi f - p_K)(-j2\pi f - p_K^*)}$$

بسط به حاصلضرب عوامل درجه یک
(با توجه به حقیقی و غیرمنفی بودن)

ریشه های صورت $S = j2\pi f = \begin{cases} z_i \\ -z_i^* \end{cases}$

ریشه های مخرج $S = j2\pi f = \begin{cases} p_K \\ -p_K^* \end{cases}$

از هر دو ریشه، صورت یا مخرج یکی در LHP و دیگری در RHP خواهد بود.
می توان z_i ها و p_K ها را ریشه های LHP فرض کرد.

$$R_X(\tau) = F^{-1}\{S_X(f)\}$$

$$S_X(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{j2\pi f - p_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^*}{-j2\pi f - p_i^*} + a_0$$

بسط به کسور جزئی

با فرض $S_X(\infty) \neq \infty$ $\longrightarrow$ $a_0 = S_X(\infty) = \begin{cases} 0 & , M < N \\ K^2 & , M = N \end{cases}$

$$\boxed{R_X(\tau) = F^{-1}\{S_X(f)\} = \sum_{i=1}^{N} a_i e^{p_i \tau} u(\tau) + \sum_{i=1}^{N} a_i^* e^{-p_i^* \tau} u(-\tau) + a_0 \delta(\tau)}$$

همان طور که انتظار می رود، $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

شبیه‌سازی فرآیند با طیف کسری

$$\xrightarrow{V(t)} \boxed{LTI} \xrightarrow{X(t)}$$

فرآیند سفید — مفروض $S_x(f)$

$h(t) \longleftrightarrow H(f)$

$$S_X(f) = S_V(f)\cdot|H(f)|^2 = N_0\cdot|H(f)|^2$$

$$\longrightarrow |H(f)|^2 = H(f)\cdot H^*(f) = S_X(f)_{\text{مفروض}} = K^2\,\frac{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f - z_i)(-j2\pi f - z_i^*)}{\prod_{K=1}^{N}(j2\pi f - p_K)(-j2\pi f - p_K^*)}$$

* در هر زوج عامل مشترکی می‌توان یکی را به اختیار برای $H(f)$ انتخاب کرد. (دیگری را برای $H^*(f)$ کنار گذاشت.)
برای $H(f)$ جواب‌های مختلفی بدست می‌آید.

* البته برای علّی بودن سیستم لازم است در مخرج عوامل با ریشهٔ LHP را اختیار کنیم.
البته جواب علّی نیز منحصر به فرد نیست.

- یک جواب علّی:

$$H(f) = K\,\frac{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f - z_i)}{\prod_{K=1}^{N}(j2\pi f - p_K)} \quad , \quad h(t) = F^{-1}\{H(f)\}$$

رابطهٔ شبیه‌سازی $X(t) = h(t) * V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,V(t-\alpha)\,d\alpha$

5- بسط متعامد فرآیند تصادفی

5-1- کلیات

اگر $\{\varphi_n(t)\}$ یک مجموعهٔ متعامد در فاصلهٔ $t\in(a,b)$ باشد یعنی:

$$\int_a^b \varphi_i(t)\cdot\varphi_K^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , K\neq i \\ \int_a^b |\varphi_i(t)|^2\,dt = E_i & , K=i \end{cases}$$

می‌توان هر تابعی مثل $g(t)$ را در فاصلهٔ فوق با روابط خطی برحسب $\varphi_n(t)$ ها بسط داد. یعنی:

$$\hat{g}(t) = \sum_n a_n\varphi_n(t)$$

و ضرایب بسط را به نحوی انتخاب کرد که متوسط مربع خطا می‌نیمم گردد.

$$\rho = \int_a^b |g(t) - \hat{g}(t)|^2\,dt = Min$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که برای این منظور باید:

$$a_n = \frac{1}{E_n} \int_a^b g(t)\, \varphi_n^*(t)\, dt$$

وقتی $\rho = 0$ شود، یعنی $\hat{g}(t) \overset{ms}{=\!=} g(t)$ می‌توان ثابت کرد که دیگر هیچ تابعی وجود ندارد که بر $\varphi_n(t)$ ها عمود باشد، ولی جزء مجموعه فوق منظور نشده باشد. یعنی مجموعهٔ فوق یک مجموعهٔ کامل متعامد در فاصلهٔ $t \in (a,b)$ نامیده می‌شود. چنین بسطی را می‌توان در مورد فرآیندها نیز بکار برد.

$$\hat{X}(t) = \sum_n C_n \varphi_n(t)$$

$$C_n = \frac{1}{E_n} \int_a^b X(t)\, \varphi_n^*(\alpha)\, d\alpha$$

با چنین بسطی فرآیند که در فاصلهٔ فوق دارای تعداد غیر قابل شمارش متغیر تصادفی است، به یک رشته متغیر تصادفی $\{C_n\}$ تبدیل می‌کردد.

اگر فرآیند نرمال باشد، ضرایب نیز یک رشته متغیر تصادفی توأماً نرمال خواهند بود.

ممکن است بتوان توابع متعامد را به‌طوری اختیار کرد که بسیاری از ضرایب واریانس خیلی کوچکی داشته باشند، به‌طوری که بتوان آنها را یک مقدار ثابت فرض کرد.

یعنی یک توصیف تحلیلی تقریبی برای فرآیند بدست آورد.

می‌توان توابع متعامد را طوری انتخاب کرد که ضرایب بسط ناهمبسته شوند و در نرمال، توأماً مستقل گردند.

2-5 بسط سری فوریه فرآیند WSS پریودیک

تابع همبستگی پریودیک با پریود T_0 در نظر می‌گیریم:

$$R_X(\tau + T_0) = R_X(\tau) \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

$*$ بسط به سری فوریه

$$\begin{cases} R_X(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n e^{jn\omega_0 t}, & \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \\ \lambda_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} R_X(\alpha)\, e^{-jn\omega_0 \alpha}\, d\alpha \end{cases}$$

در واقع مجموعهٔ توابع متعامد $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ برای توابع پریودیک با پریود T_0، یک مجموعهٔ کامل متعامد است.

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \varphi_n(t)\, \varphi_k^*(t)\, dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j(n-k)\omega_0 t}\, dt =$$

$$= T_0 \operatorname{Sinc}(n-k) = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ E_n = T_0, & n = k \end{cases}$$

* بسط سری فوریهٔ فرآیند

$$\begin{cases} \hat{X}(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} \\ C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} X(\alpha)\, e^{-jn\omega_0\alpha}\, d\alpha \end{cases}$$

خواص بسط سری فوریهٔ فوق:

* ① کلیهٔ ضرایب بسط متعامد و ناهمبسته خواهد بود.

② در حالت کلی: $\hat{X}(t) \overset{ms}{=} X(t)$

① اثبات: $E C_n C_m^* = \frac{1}{T_0^2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{E X(\alpha)X^*(\beta)}_{R_X(\alpha-\beta)}\, e^{-jn\omega_0\alpha}\, e^{jn\omega_0\beta}\, d\alpha\, d\beta =$

$$= \int_{\beta=-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{T_0^2}\left(\int_{\alpha=-T_0/2}^{T_0/2} R_X(\alpha-\beta)\, e^{-jn\omega_0(\alpha-\beta)}\, d\alpha\right) e^{j(m-n)\omega_0\beta}\, d\beta =$$

$$\alpha-\beta=\tau \quad = \frac{1}{T_0^2}\int_{\beta=-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{\left(\int_{\alpha=-T_0/2}^{T_0/2} R_X(\tau)\, e^{-jn\omega_0\tau}\, d\tau\right)}_{T_0\lambda_n} e^{j(m-n)\omega_0\beta}\, d\beta =$$

* $$= \frac{\lambda_n}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j(n-m)\omega_0\beta}\, d\beta = \lambda_n \operatorname{Sinc}(n-m) = \begin{cases} 0, & n\neq m \\ \lambda_n, & n=m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C_n \perp C_m \\ \forall n\neq m \\ E|C_n|^2 = \lambda_n \end{cases} \longrightarrow$$ حال کافی است ثابت کنیم متوسط یکی از آنها صفر است.

$$\to E C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{E X(\alpha)}_{m_X}\, e^{-jn\omega_0\alpha}\, d\alpha = m_X \operatorname{Sinc}(n) = \begin{cases} 0, & n\neq 0 \\ m_X, & n=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow E C_n = 0, \quad n\neq 0$$

$E C_0 = m_X$ ⟶ فقط یکی می‌تواند C_0 باشد

پس از تعامد، ناهمبستگی هم نتیجه می‌گردد.

New

یادآوری :

$$\left.\begin{array}{l} R_X(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda_i e^{j\omega_0 i \tau} \\ \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{X}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\ C_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha=-T_0/2}^{T_0/2} X(\alpha) e^{-jn\omega_0 \alpha} d\alpha \end{array}\right.$$

نکات :

$$P_{C_n} = \operatorname{Var}(C_n) = \lambda_n, \ \forall n \neq 0 \ / \ P_{C_0} = \operatorname{Var}(C_0) + m_X^2 = \lambda_0 \ / \ C_n \perp C_m \ / \ C_n \perp C_m \ ① \ \forall n \neq m$$

اثبات ② :

$$E|X(t) - \hat{X}(t)|^2 = R_X(t,t) + R_{\hat{X}}(t,t) - R_{\hat{X}X}(t,t) - R_{X\hat{X}}(t,t)$$

فرآیند ایستان :
$$\longrightarrow R_X(t,t) = R_X(0) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda_i$$

$$R_{\hat{X}}(t,t) = E\,\hat{X}(t)\hat{X}^*(t) = E \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m^* e^{-jm\omega_0 t} =$$

$$= \sum_n \sum_m E\, C_n C_m^* \cdot e^{j(n-m)\omega_0 t} =$$

$$\overset{m=n}{=} \sum_n \Big(0 + \underbrace{E\, C_n C_n^*}_{\lambda_n} \underbrace{e^{j(n-n)\omega_0 t}}_{1} + 0\Big) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n$$

$$R_{\hat{X}X}(t,t) = E\,\hat{X}(t) X^*(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} X^*(t) = \sum_n \frac{1}{T_0} \int_{\alpha=-T_0/2}^{T_0/2} X(\alpha) e^{-jn\omega_0 \alpha} d\alpha \, e^{jn\omega_0 t} X^*(t) =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_n \underbrace{E\, X(\alpha) X^*(t)}_{R_X(\alpha - t)} e^{-jn\omega_0 (\alpha - t)} d\alpha \underset{\alpha = t + \beta}{=} \sum_n \frac{1}{T_0} \int_{-t-T_0/2}^{-t+T_0/2} R_X(\beta) e^{-jn\omega_0 \beta} d\beta$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n$$

$$\lambda_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} R_X(\alpha) e^{-jn\omega_0 \alpha} d\alpha$$

$$R_{X\hat{X}}(t,t) = R_{\hat{X}X}^*(t,t) = \Big(\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n}_{\underbrace{R_X(0)}_{E|X(t)|^2}}\Big)^* = R_X(0)$$

?

اله دارد؟!

$$\Longrightarrow E|X(t) - \hat{X}(t)|^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{\hat{X}(t) \overset{ms}{=} X(t)}$$

3-5- بسط Karhunen_Loeve ≡ KL

در بسط KL به عنوان توابع متعامد، از توابع ویژهٔ تابع همبستگی فرآیند استفاده می‌گردد.

* نکاتی در مورد توابع ویژهٔ تابع همبستگی :

(1) این توابع جواب‌های غیرصفر معادلهٔ انتگرالی زیر است :

$$* \quad \int_a^b R_x(t,s)\,\varphi(s)\,ds = \lambda\,\varphi(t) \quad , \quad \forall t \in [a,b]$$

جواب همبستگی $\varphi(t)$ را تابع ویژه می‌نامند.

اگر تابع $\varphi(\,)$ در رابطه صدق کند، مضربی از آن $(k\varphi(\,))$ نیز صدق خواهد کرد. می‌توان ضریب ثابت k را به قسمی اختیار کرد که توابع ویژه، نرمالیزه شوند، یعنی :

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt = 1$$

این معادلهٔ انتگرالی شبیه معادلهٔ ماتریسی زیر است :

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$$

که جواب‌های غیرصفر آن را بردارهای ویژه می‌نامند.

در اینجا نیز معادلهٔ انتگرالی به ازای بعضی از مقادیر λ موسوم به مقادیر ویژه، دارای جواب غیرصفر است.

(2) در حالت کلی مقادیر ویژهٔ تابع همبستگی، اعدادی حقیقی و غیرمنفی می‌باشند و اگر رابطهٔ خطی بین متغیرهای تصادفی فرآیند وجود نداشته باشد مقدار ویژهٔ صفر هم نخواهیم داشت.

(3) در حالت کلی، تعداد مقادیر ویژه قابل شمارش است و تعداد توابع ویژهٔ متناظر با یک مقدار ویژهٔ ثابت می‌تواند بیش از یک عدد باشد، ولی به هر حال این تعداد محدود خواهد بود.

(4) به ازای $\lambda_i \neq \lambda_j$ داریم :

$$\int_a^b \varphi_i(t)\,\varphi_j^*(t)\,dt = 0$$

* یعنی توابع ویژهٔ مربوطه متعامد خواهند بود. و در حالتی که به ازای یک مقدار ویژهٔ واحد، چند تابع ویژه داریم، این توابع ویژه را نیز می‌توان متعامد اختیار کرد.

(5) با احتساب کلیهٔ توابع ویژهٔ مستقل از هم، یک مجموعهٔ اُرتونرمال کامل $\{\varphi_n(t)\}$ برای فاصلهٔ مورد نظر $t \in [a,b]$ تشکیل می‌گردد.

(6) اگر تابع همبستگی پیوسته باشد، توابع ویژه نیز پیوسته خواهند بود و رابطهٔ زیر موسوم به رابطهٔ مرسر (Mercer) نیز برقرار است :

$$* \quad R_x(t,s) = \sum_n \lambda_n\,\varphi_n(t)\,\varphi_n^*(s) \quad , \quad \forall t,s \in [a,b]$$

رابطهٔ مرسر

* در بسط KL:

$$
* \begin{cases} \hat{X}(t) = \sum_n C_n \varphi_n(t) , & t \in [a,b] \\ C_n = \int_a^b X(\alpha) \cdot \varphi_n^*(\alpha)\, d\alpha \end{cases}
$$

* خواص :

① در حالت کلی ضرایب بسط متعامد خواهند بود.

اثبات:

$$
E C_n C_m^* = E \int_a^b X(\alpha) \varphi_n^*(\alpha) d\alpha \times \int_a^b X^*(\beta) \varphi_m(\beta) d\beta = \int_a^b \int_a^b \underbrace{E X(\alpha) X^*(\beta)}_{R_X(\alpha,\beta)} \varphi_n^*(\alpha) \varphi_m(\beta) d\alpha d\beta
$$

$$
= \int_{\alpha=a}^{b} \left(\int_{\beta=a}^{b} R_X(\alpha,\beta) \varphi_m(\beta) d\beta \right) \varphi_n^*(\alpha) d\alpha =
$$

$$
= \lambda_m \int_a^b \varphi_m(\alpha) \varphi_n^*(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0 , & m \neq n \\ \lambda_m , & m = n \end{cases}
$$

$$
* \longrightarrow C_n \perp C_m , \forall n \neq m
$$

و

$$
E|C_n|^2 = \lambda_n
$$

② در حالت کلی داریم:

$$
\hat{X}(t) = X(t) \quad , t \in [a,b]
$$

$$
E|X(t) - \hat{X}(t)|^2 = R_X(t,t) + R_{\hat{X}}(t,t) - R_{\hat{X}X}(t,t) - R_{X\hat{X}}(t,t)
$$

$$
* \; R_X(t,t) = \sum_n \lambda_n |\varphi_n(t)|^2 , \; t \in [a,b]
$$

قضیه Mercer

$$
* \; R_{\hat{X}}(t,t) = E \hat{X}(t) \hat{X}^*(t) = E \sum_n C_n \varphi_n(t) \sum_m C_m^* \varphi_m^*(t) = \sum_n \sum_m E C_n C_m^* \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) =
$$

$$
\xrightarrow{m=n} = \sum_n [0 + \underbrace{E|C_n|^2}_{\lambda_n} \cdot \varphi_n(t) \varphi_n^*(t) + 0] = \sum_n \lambda_n \cdot |\varphi_n(t)|^2
$$

$$
* \; R_{\hat{X}X}(t,t) = E \hat{X}(t) X^*(t) = E \sum_n C_n \varphi_n(t) X^*(t) = \sum_n \left(\int_a^b X(\alpha) \varphi_n^*(\alpha) d\alpha \right) \varphi_n(t) X^*(t) =
$$

$$= \sum_n \int_a^b \underbrace{R_X(\alpha,t)}_{R_X^*(t,\alpha)} \varphi_n^*(\alpha)\, \varphi_n(t)\, dt = \sum_n \left(\int_a^b R_X(t,\alpha)\varphi_n(\alpha)\, d\alpha \right)^* \varphi_n(t) =$$

$$= \sum_n (\underbrace{\lambda_n \varphi_n(t)}_{\lambda_n^* \varphi_n^*(t)})^* \varphi_n(t) = \sum_n \lambda_n |\varphi_n(t)|^2 \quad \checkmark$$

$t\in[a,b]$ ، $\lambda_n^* = \lambda_n$

$$* \quad R_{X\hat{X}}(t,t) = R_{\hat{X}X}^*(t,t) = \left(\sum_n \lambda_n |\varphi_n(t)|^2\right)^* = \sum_n \lambda_n |\varphi_n(t)|^2$$

$$\Longrightarrow E|X(t) - \hat{X}(t)|^2 = 0 \Longrightarrow \hat{X}(t) = X(t) \quad , t\in[a,b]$$

$t\in[a,b]$

(3) اگر متوسط فرآیند صفر باشد (یا اینکه بسط را برای فرآیند مرکزی $\tilde{X}(t)$ در نظر بگیریم.) متوسط ضرایب بسط نیز صفر خواهد بود. و از تعامد ضرایب، ناهمبستگی ضرایب نیز نتیجه خواهد شد:

$$E\,C_n = E \int_a^b X(\alpha)\, \varphi_n^*(\alpha)\, d\alpha = \int_a^b \underbrace{m_X(\alpha)}_{0}\, \varphi_n^*(\alpha)\, d\alpha = 0$$

(4) اگر فرآیند نرمال باشد، به دلیل خطی بودن بسط، ضرایب نیز توأماً نرمال خواهند بود.
و در صورت صفر بودن متوسط فرآیند، ضرایب یک رشته متغیر تصادفی توأماً نرمال و مستقل خواهند بود.

مثال: بسط KL فرآیند وینر در فاصلهٔ $t\in[0,T_0]$

$$X(t) \sim N(0, N_0 \operatorname{Min}(t,s))$$

معادلهٔ انتگرالی:
$$\int_0^{T_0} N_0 \operatorname{Min}(t,s)\, \varphi(s)\, ds = \lambda \varphi(t) \quad , t\in[0,T_0]$$

با d/dt داریم:

$$\operatorname{Min}(t,s) = t\,u(s-t) + s\,u(t-s)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Min}(t,s) = u(s-t) + 0$$

$$\longrightarrow \int_0^{T_0} N_0\, u(s-t)\, \varphi(s)\, ds = \lambda \varphi'(t) \quad , t\in[0,T_0]$$

$$\xrightarrow{d/dt} \int_0^{T_0} N_0 (-\delta(s-t))\, \varphi(s)\, ds = \lambda \varphi''(t) \quad , t\in[0,T_0] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -N_0\,\varphi(t) = \lambda \varphi''(t) \longrightarrow \varphi''(t) + \frac{N_0}{\lambda}\varphi(t) = 0 \longrightarrow$$
$$t \in [0, T_0]$$

$$\Longrightarrow \varphi(t) = a\cos\left(\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,t\right) + b\sin\left(\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,t\right)$$

طبق معادلهٔ انتگرالی : $\int_0^{T_0} N_0 \operatorname{Min}(0,s)\,\varphi(s)\,ds = \lambda\varphi(0) \longrightarrow \varphi(0) = 0 \Rightarrow \underline{a=0}$

$$\Longrightarrow \varphi(t) = b\sin\left(\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,t\right)$$

طبق مشتق معادلهٔ انتگرالی : $\int_0^{T_0} N_0 \underbrace{U(s-T_0)}_{0}\varphi(s)\,ds = \lambda\varphi'(T_0) \longrightarrow \varphi'(T_0) = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow b\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\cos\left(\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,T_0\right) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,T_0 = (2n-1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow \\ b=0 \Longrightarrow \cancel{\varphi(t)=0 \text{ جواب}} \quad \text{تابع ویژه نیست} \end{cases}$$

پس برای جواب غیرصفر لازم است : $\longrightarrow \sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,T_0 = (2n-1)\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{4N_0T_0^2}{(2n-1)^2\pi^2} \quad n=1,2,3,\dots}$$

پس فقط به ازای مقادیر فوق (مقادیر ویژه) جواب غیرصفر داریم .

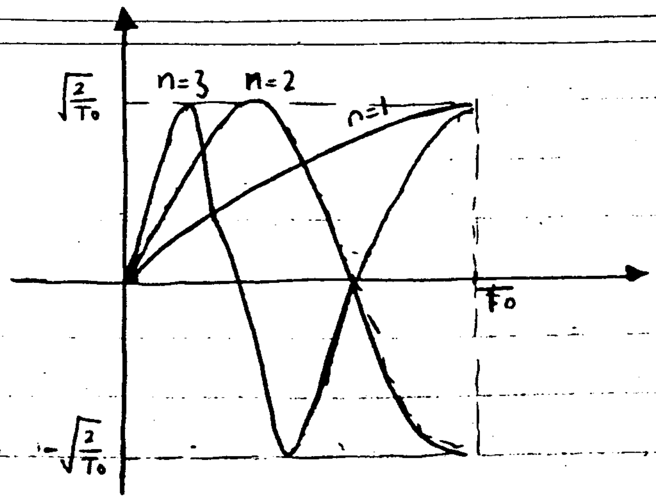
پس :

$$\varphi_n(t) = b\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T_0}\right)$$

نرمالیزه کردن : $\int_0^{T_0} |\varphi_n(t)|^2\,dt = 1 \longrightarrow \underline{b = \sqrt{\frac{2}{T_0}}}$

$$\longrightarrow \boxed{\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T_0}}\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T_0}\right) \quad n=1,2,3,4,\dots}$$

رسم توابع ویژه :



پس :

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{\frac{2}{T_0}} \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T_0}\right) \quad , \quad t \in [0, T_0]$$

$$C_1 \perp\!\!\!\perp C_2 \perp\!\!\!\perp C_3 \perp\!\!\!\perp \cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} C_n \sim N(0, \lambda_n) \\ \lambda_n = \dfrac{4 N_0 T_0^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

با افزایش n ، واریانس $\to 0$
یعنی از یه جایی به بعد می شه از جملات صرف نظر کرد.

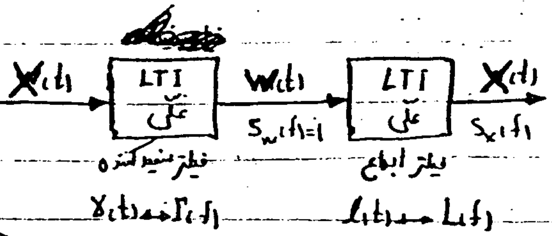
6 - بسط فرآیندهای WSS برحسب فرآیند ابداعی

6-1- تعریف فرآیند ابداع و شرط پالی وینر

فرآیند ابداع (Innovation) : فرآیندی است سفید و نرمالیزه که با فرآیند اصلی، به طور خطی و علّی معادل است. یعنی معلوم بودن هر یک، دیگری را با رابطه ای خطی و علّی مشخص می کند.

فرآیند ابداع $W(t)$

$S_W(f) = 1$



روابط خطی و علّی :

$$W(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{t} \gamma(t-\alpha) X(\alpha)\, d\alpha$$

$$X(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{t} l(t-\alpha) W(\alpha)\, d\alpha$$

مهم

* شرایط فیلترها:

$$* \ \Gamma(f)\cdot L(f)=1 \Longrightarrow \boxed{\Gamma(f)=\frac{1}{L(f)}}$$

$$* \ S_x(f)=S_w(f)\cdot|L(f)|^2 \Longrightarrow \boxed{S_x(f)=|L(f)|^2} \Longrightarrow \boxed{|L(f)|=\sqrt{S_x(f)}}$$

برای تابع اندازهٔ فوق باید فازی در نظر گرفت که آن را علّی کند. (مهم) ضمناً وارون هم باید علّی باشد.

شرط پالی وینر: شرط لازم و کافی برای اینکه برای تابع اندازهٔ $|H(f)|$ بتوان تابع فازی $\beta(f)$ پیدا کرد که حاصل را $H(f)=|H(f)|e^{j\beta(f)}$ یک فیلتر علّی کند، یعنی ($h(t)=0,\ t<0$) عبارت است از:

$$* \ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|H|}{1+f^2}\,df\neq\pm\infty$$

* وقتی شرط پالی وینر برقرار است، برای $\beta(f)$ جواب های مختلفی می توان پیدا کرد. چراکه اگر $\beta(f)$ یک جواب باشد و $\beta_a(f)$ فاز یک سیستم تمام گذر علّی باشد، $\beta(f)+\beta_a(f)$ نیز یک جواب خواهد بود چراکه

$$\left.\begin{array}{l} |H|e^{j(\beta(f)+\beta_a(f))}=\underbrace{H(f)}_{\text{علّی}}e^{j\beta_a(f)} \\ H_a(f)=\underbrace{|H_a|}_{1}e^{j\beta_a(f)} \end{array}\right\} \Longrightarrow |H|e^{j(\beta(f)+\beta_a(f))}=\underbrace{H(f)}_{\text{علّی}}\cdot\underbrace{H_a(f)}_{\text{علّی}}$$

چراکه کاسکاد دو سیستم علّی، علّی است.

— در بین جواب ها فقط یک جواب وجود دارد که هم $H(f)$ و هم وارون آن را علّی می نماید.

این جواب را جواب می نیمم فاز گویند.

New

شرط پالی وینر:

$$\text{شرط}: \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|L(f)|}{1+f^2}\,df\neq\pm\infty$$

برحسب طیف قدرت:

$$* \ \text{شرط}: \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln S_x(f)}{1+f^2}\,df\neq\pm\infty$$

* فرآیندهایی که طیف قدرت آن ها در رابطهٔ فوق صدق می کنند را فرآیند عادی Regular گویند. چنین فرآیندهایی دارای فرآیند ابداع می باشند، فرآیند سفید و نرمالیزه ای که منحصر به فرد بوده و به طور خطی و علّی با فرآیند اصلی معادل است.

$$x(t)=w(t)*l(t)=\int_{\alpha=-\infty}^{t}w(\alpha)\,l(t-\alpha)\,d\alpha$$

$$w(t)=x(t)*\gamma(t)=\int_{\alpha=-\infty}^{t}x(\alpha)\,\gamma(t-\alpha)\,d\alpha$$

رابطهٔ اول :
$$X(t)=\int_{\alpha=-\infty}^{t} w(\alpha)\,l(t-\alpha)\,d\alpha$$

را می توان ~~[illegible]~~ بسط خطی برای متغیرهای تصادفی فرآیند X برحسب متغیرهای تصادفی فرآیند ابداعش یعنی W دانست.

در بسط KL نیز داشتیم: $X(t)=\sum_n C_n\varphi_n(t)$, $t\in[a,b]$,

در هر دو بسط، ضرایب بسط $\{w(\alpha)\}$ و $\{C_n\}$ متغیرهای تصادفی متعامدی باشند.

و هر دو بسط خطی هستند به طوری که در صورت نرمال بودن فرآیند، ضرایب بسط نیز توأماً نرمال خواهند بود.

6-2- روش کلی تعیین فیلترهای $L(f)$ و $\Gamma(f)$ برای فرآیند با طیف کسری

$$S_X(f)=\frac{Q(f)}{P(f)} \quad \text{طیف کسری}$$

$$=K^2\frac{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f-z_i)(-j2\pi f-z_i^*)}{\prod_{n=1}^{N}(j2\pi f-p_n)(-j2\pi f-p_n^*)}=L(f)L^*(f)$$

به دلیل حقیقی و غیرمنفی بودن آنکه تجزیه شده

باید $L(f)$ علّی باشد، یعنی از عوامل مخرج، عوامل با ریشه‌های LHP ($j2\pi f-p_n$ ها) را اختیار کنیم.

باید $\Gamma(f)=\frac{1}{L(f)}$ علّی باشد، یعنی از عوامل صورت، عوامل با ریشه های LHP ($j2\pi f-z_i$ ها) را اختیار کنیم.

یعنی انتخاب منحصر به فرد است (جواب می نیمم فاز).

$$L(f)=K\frac{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f-z_i)}{\prod_{n=1}^{N}(j2\pi f-p_n)} \quad \text{و} \quad \Gamma(f)=\frac{1}{K}\frac{\prod_{n=1}^{N}(j2\pi f-p_n)}{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f-z_i)}$$

مثال: بسط فرآیند سیگنال تلگرافی برحسب فرآیند ابداعش

$$R_X(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$$

$$S_X(f)=\frac{4\lambda}{4\lambda^2+4\pi^2 f^2}=\frac{(\sqrt{4\lambda})^2}{(2\lambda-j2\pi f)(2\lambda+j2\pi f)}=L(f)L^*(f)$$

جواب می نیمم فاز $\Longrightarrow$
$$\begin{cases} L(f)=\dfrac{\sqrt{4\lambda}}{2\lambda+j2\pi f} \\ \Gamma(f)=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{4\lambda}}+\dfrac{j2\pi f}{\sqrt{4\lambda}} \end{cases} \qquad \begin{cases} l(t)=\sqrt{4\lambda}\,e^{-2\lambda t}u(t) \\ \gamma(t)=\sqrt{\lambda}\,\delta(t)+\dfrac{1}{\sqrt{4\lambda}}\delta'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = w(t) * l(t) \\ w(t) = x(t) * \gamma(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_{\alpha=-\infty}^{t} w(\alpha) e^{-2\lambda(t-\alpha)} d\alpha \\ w(t) = \sqrt{\lambda}\, x(t) + \dfrac{1}{\sqrt{4\lambda}} x'(t) \end{cases}$$

مبحث چهارم (فرآیندهای باباند محدود و فرآیندهای گسسته زمان)

1- فرآیند های WSS با باند محدود و برخی خصوصیات آن

تعریف - فرآیند را با باند محدود به $|f|<W$ گوییم هرگاه: $S_x(f)=0,\ \forall |f|\geq W$

به تعبیری هرگاه فرآیند هیچ مؤلفهٔ فرکانسی در خارج باند فوق نداشته باشد.

* برخی خصوصیات چنین فرآیندی عبارت است از:

(1) دارای سرعت تغییرات محدودی است و هر چه W کمتر باشد سرعت تغییرات فرآیند کمتر است.

(2) دارای تابع همبستگی تحلیلی است. یعنی تابعی که همهٔ مشتقات آن پیوسته است.

(3) با یک رشته از متغیرهای تصادفی معادل است.

(4) قابل پیشگویی است.

1-1- محدود بودن سرعت تغییرات

$$E|x(t+\tau)-x(t)|^2 = E|y(t)|^2 = R_y(0) = P_y$$

$$y(t) = x(t+\tau)-x(t) \xrightarrow{\text{WSS } x} y(t):\text{WSS}$$

$$= h(t) * x(t) \quad \text{که} \quad h(t) = \delta(t+\tau)-\delta(t) \Longrightarrow \underline{H(f) = e^{j2\pi f\tau}-1}$$

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,|H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,|e^{j2\pi f\tau}-1|^2 df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 4S_x(f)\,\sin^2(\pi f\tau)df = 4\int_{-W}^{W} S_x(f)\,\underbrace{\sin^2(\pi f\tau)}_{\pi^2 f^2\tau^2 \operatorname{sinc}^2(f\tau)} df =$$

$$= 4\pi^2\tau^2 \int_{-W}^{+W} f^2 S_x(f)\operatorname{sinc}^2(f\tau)df \underset{\substack{f^2\leq W^2 \\ \operatorname{sinc}^2(f\tau)\leq 1}}{\leq} 4\pi^2\tau^2\int_{-W}^{+W} W^2 S_x(f)df \longrightarrow$$

$$\longrightarrow E|x(t+\tau)-x(t)|^2 \leq 4\pi^2\tau^2 W^2 \int_{-W}^{+W} S_x(f)df \longrightarrow$$

پس:

$$\longrightarrow \boxed{E\left|\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau}\right|^2 \leq 4\pi^2 W^2 P_x}$$

پس اگر قدرت فرآیند P_X محدود باشد، سمت چپ ولذا سرعت تغییرات فرآیند محدود خواهد بود، و هرچه W کمتر باشد، سرعت تغییرات هم کمتر خواهد بود.

1-2- تحلیلی بودن تابع همبستگی

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d^n}{d\tau^n} R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (j2\pi f)^n S_X(f) e^{j2\pi f\tau}\, df \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{d^n}{d\tau^n} R_X(\tau)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (j2\pi f)^n S_X(f) e^{j2\pi f\tau}\, df\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|j2\pi f|^n}_{|2\pi f|^n} \cdot \underbrace{|S_X(f)|}_{S_X(f)} \cdot \underbrace{|e^{j2\pi f\tau}|}_{1}\, df$$

$$= \int_{-W}^{W} |2\pi f|^n \cdot S_X(f)\, df \leqslant$$

$$\underset{|f|<W}{\leqslant} (2\pi W)^n \int_{-W}^{W} S_X(f) = (2\pi W)^n P_X$$

پس :

$$\left|\frac{d^n}{d\tau^n} R_X(\tau)\right| \leqslant (2\pi W)^n P_X$$

اگر قدرت فرآیند محدود باشد سمت راست ولذا سمت چپ مقدار محدودی خواهد داشت. لذا، کلیهٔ مشتقات $R_X(\tau)$ لزوماً پیوسته هستند، چرا که در ناپیوستگی یکی از مشتقات، مشتق بعدی به ضربه تبدیل خواهد شد که تابعی بی کران است.

1-3- قضیهٔ نمونه برداری

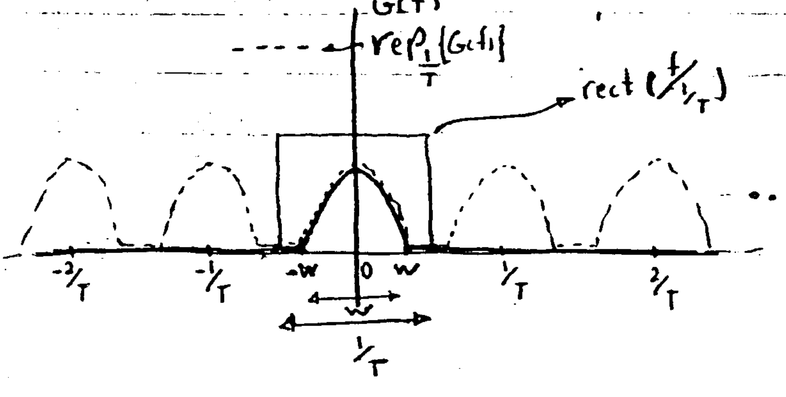
(الف) مروری بر قضیهٔ نمونه برداری در سیگنال های یقینی

$g(t) \longleftrightarrow G(f)$ تابع یقینی

$$* \; G(f)=0 \;;\; \forall |f|>W \Longrightarrow g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kT)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

به عبارت معادل، یک سیگنال با باند محدود $|f|<W$ با تعداد $2W$ نمونه در ثانیه اش، کاملاً توصیف می شود.

یک روش اثبات :



با توجه به شکل و با فرض اینکه $2W < 1/T$ باشد، می توان نوشت :

$$(\mathrm{rep}_{1/T}\, G(f)) \cdot \mathrm{rect}(fT) = G(f)$$

$$\Downarrow$$

ص بعد

$$\xrightarrow{F^{-1}} g(t) = T\,\mathrm{Comb}_T\, g(t) * \frac{1}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(KT)\,\delta(t-KT) * \mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{T}\right) =$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(KT)\,.\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-KT}{T}\right) \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{g(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(KT)\,.\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-KT}{T}\right)}$$

این رابطه به وضوح نشان می دهد که اگر مقدار نمونه ها (یعنی رشته اعداد $g(KT)$) معلوم باشند، می توان مقدار تابع را در هر لحظهٔ دلخواهی مثل t، $g(t)$ را محاسبه نمود.

با توجه به اینکه شیفت زمانی یا انعکاس تابع باند را تغییر نمی دهد لذا از رابطهٔ فوق می توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$g(t-s) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} g(KT-s)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-KT}{T}\right)$$

$$g(s-t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(s-KT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-KT}{T}\right)$$

ب) قضیهٔ نمونه برداری برای فرآیند تصادفی

$$* \quad S_X(f)=0,\ \forall |f|>W \xrightarrow{T\le\frac{1}{2W}} \begin{cases} (1)\ R_X(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\tau-nT}{T}\right) \\ (2)\ C_X(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_X(nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau-nT}{T}\right) \\ (3)\ X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\tau-nT}{T}\right) \end{cases}$$

اثبات (1): $R_X(\tau) \xleftrightarrow{FT} S_X(f)$ تابع یقینی

چون رابطهٔ اول همان قضیه نمونه برداری برای تابع یقینی $R_X(\tau)$ است.

این رابطه بیان می کند که در یک فرآیند باند محدود، چنانچه همبستگی بین متغیرهای تصادفی به فاصلهٔ مضارب T فرآیند را بدانیم ($T \le \frac{1}{2W}$) می توان همبستگی بین هر دو متغیر تصادفی فرآیند (دلخواه) را پیدا کرد.

اثبات (2): می دانیم:

$$C_X(\tau) = R_{\tilde{X}}(\tau) \quad , \quad S_X(f) = S_{\tilde{X}}(f) + S_{m_X}(f)$$

به دلیل غیر منفی بودن طیف ها از باند محدود بودن طیف $S_X(f)$، باند محدود بودن $S_{\tilde{X}}(f)$ نیز نتیجه می گردد.

$$C_x(\tau) = R_{\tilde{x}}(\tau) \xleftrightarrow{FT} S_{\tilde{x}}(f) = 0 \,,\ |f| \geq w$$

پس رابطهٔ دوم نیز همان قضیهٔ نمونه برداری برای تابع یقینی $C_x(\tau)$ می باشد.
این رابطه نیز بیان می کند که اگر کوواریانس متغیرهای تصادفی به فاصلهٔ مضارب T فرآیند را داشته باشیم.
کوواریانس بین هر دو متغیر تصادفی دلخواه فرآیند را نیز می توانیم بدست آوریم.
اثبات (3) که در واقع قضیه اصلی نمونه برداری فرآیند های تصادفی است.

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$ حکم

$$E|x(t) - \hat{x}(t)|^2 = R_x(t,t) + R_{\hat{x}}(t,t) - R_{x\hat{x}}(t,t) - R_{\hat{x}x}(t,t)$$

$$* \ R_x(s,t) = R_x(s-t) \Longrightarrow R_x(t,t) = R_x(0) \ \checkmark$$

$$* \ R_{\hat{x}x}(s,t) = E\,\hat{x}(s)\,x^*(t) = E\sum_n x(nT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{s-nT}{T}\right) x^*(t) =$$

$$= \underbrace{\sum_n \underbrace{E\,x(nT)\,x^*(t)}_{R_x(nT-t)}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{s-nT}{T}\right)}_{\text{قضیهٔ } R_x(\tau)} = R_x(s-t) \Longrightarrow R_{\hat{x}x}(t,t) = R_x(t-t) = R_x(0)$$

$$g(s-t) = \sum_n g(nT-t)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{s-nT}{T}\right)$$

$$* \ R_{x\hat{x}}(t,t) = R^*_{\hat{x}x}(t,t) = R_x^*(0) = R_x(0) \ \checkmark$$

$$* \ R_{\hat{x}}(t,s) = E\,\hat{x}(t)\,\hat{x}^*(s) = E\left(\sum_n x(nT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)\right)\left(\sum_m x^*(mT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{s-mT}{T}\right)\right) =$$

$$= \sum_n \sum_m \underbrace{E\,x(nT)\,x^*(mT)}_{R_x(n-m)T} \cdot \mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \cdot \mathrm{Sinc}\left(\frac{s-mT}{T}\right) =$$

$$= \sum_m \underbrace{\left(\sum_n R_x(nT-mT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)\right.}_{R_x(t-mT)} \mathrm{Sinc}\left(\frac{s-mT}{T}\right) =$$

$$= \sum_m R_x(t-mT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{s-mT}{T}\right) = R_x(t-s) \Longrightarrow R_{\hat{x}}(t,t) = R_x(t-t) = R_x(0)$$

$$\Longrightarrow E|x(t) - \hat{x}(t)|^2 = 0 \Longrightarrow x(t) \overset{ms}{=} \hat{x}(t) \Longrightarrow \boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)}$$

ج) بحث در مورد تکنیک نمونه برداری

① مجموعهٔ توابع $\left\{sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right)\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ یک مجموعه توابع متعامد برای بازهٔ $t\in(-\infty,+\infty)$ می باشند، چراکه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(t)\,\varphi_m^*(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right)sinc\left(\frac{t-mT}{T}\right)dt=$$

از کلی
رابطهٔ پارسوال

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(T\,rect(fT))\,e^{-j2\pi fnT}\cdot\left(T\,rect(fT)\,e^{-j2\pi fmT}\right)^*df=$$

$$=T^2\int_{-\infty}^{+\infty}rect^2(fT)\cdot e^{j2\pi f(m-n)T}\,df=$$

$$=T^2\int_{f=-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}}e^{j2\pi fT(m-n)}\,df=T^{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2j}\,\sin\{(m-n)\pi\}}{\cancel{j2\pi T}(m-n)}=$$

$$=T\cdot Sinc\{(m-n)\pi\}=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ E_n=T & ,m=n\end{cases}$$

پس در حالت کلی هر تابعی مثل $g(t)$ را می توان برحسب این توابع بسط داد:

$$\begin{cases}\hat{g}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\,Sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right), & t\in\mathbb{R}\\ C_n=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right)dt\end{cases}$$

و برای مینیمم شدن مربع خطا باید:

برای دسته توابع با باند محدود به $|f|<W$ و $W\leq\frac{1}{2T}$ مربع خطای این بسط صفر می گردد،
یعنی مجموعهٔ فوق یک مجموعهٔ کامل متعامد را تشکیل خواهد داد و در این حال:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right)dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)\cdot\left(T\,rect(fT)\,e^{-j2\pi fnT}\right)^*df=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)\cdot rect(fT)\,e^{j2\pi fnT}\,df=\int_{-1/2T}^{1/2T}G(f)\cdot e^{j2\pi fnT}\,df=$$

$$=\int_{-W}^{W}G(f)\,e^{j2\pi fnT}\,df=g(nT)$$

$W\leq\frac{1}{2T}$

حل:

$$g(t)=\hat{g}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

② برای فرآیند تصادفی نیز رابطهٔ زیر برای توان یک رابطهٔ خطی برای فرآیند داشت.

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right),\quad t\in\mathbb{R}$$

و در مقایسه با بسط KL:

$$\begin{cases} X(t)=\sum_n C_n\,\varphi_n(t), & t\in[a,b] \\ C_n=\int_a^b X(\alpha)\,\varphi_n^*(\alpha)\,d\alpha \end{cases}$$

✓* حسن بسط KL، متعامد بودن ضرایب بسط (C_n ها) است.

✓* حسن بسط بر اساس قضیهٔ نمونه برداری آن است که با داشتن خصوصیات آماری فرآیند، در واقع خصوصیات آماری ضرایب بسط را نیز داریم، چرا که همان نمونه های فرآیند است، در حالی که پیدا کردن خصوصیات آماری (توابع احتمال) ضرایب بسط KL از روی خصوصیات آماری فرآیند، کار ساده ای نیست.

③ با توجه به رابطهٔ زیر:

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right),\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

ملاحظه می‌گردد که کلیهٔ متغیرهای تصادفی فرآیند با باند محدود را می‌توان با رابطهٔ دقیق فوق از روی رشته متغیرهای تصادفی $\{X(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ دقیقاً محاسبه نمود.

* یعنی فرآیند با باند محدود، معادل است با یک رشته متغیر تصادفی یا به عبارت معادل با یک فرآیند گسسته زمان.

* آقای پاپولیس با یک مثال نشان داده است که در فرآیندهای با باند محدود از روی نمونه های گذشته فرآیند به شرط $T<\frac{1}{6W}$ می توان آینده فرآیند را پیشگویی نمود.

New

2- مروری بر سیگنال ها و سیستم های گسسته زمان

2-1- سیگنال گسسته زمان

سیگنال گسسته زمان را می توان معادل یک رشته عدد دانست:

$$\{\dots,g_{-2},g_{-1},g_0,g_1,g_2,\dots\}=\{\dots,g(-2),g(-1),g(0),g(1),g(2),\dots\}=$$

$$=\underset{\text{به اختصار}}{\{g(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}}=\underset{\text{به اختصار تر}}{\{g(n)\}}=\underset{\text{به اختصار تر تر}}{g(n)}$$

یعنی عدد صفرم : نماد

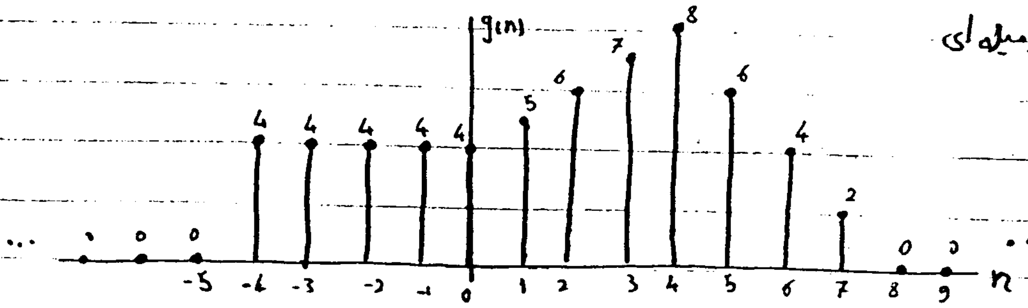
مثال :

$$g(n)=\{\ldots,0,0,0,4,4,4,4,\hat{4},5,6,7,8,6,4,2,0,0,\ldots\}$$

ضابطه سیگنال : در مثال فوق

$$g(n)=\begin{cases}0, & n\leq -5\ ,\ n\geq 8\\ 4, & -4\leq n\leq 0\\ 4+n & 0\leq n\leq 4\\ 16-2n & 4\leq n\leq 8\end{cases}$$

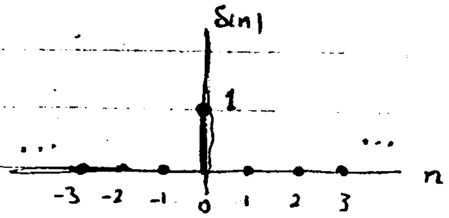
نمودار میله ای



چند مثال :

① ضربه واحد

$$\delta(n)=\{\ldots,0,0,\hat{1},0,0,\ldots\}$$



ضابطه :

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

هر سیگنال گسسته زمان دلخواهی را می‌توان برحسب توابع ضربه واحد بسط داد.

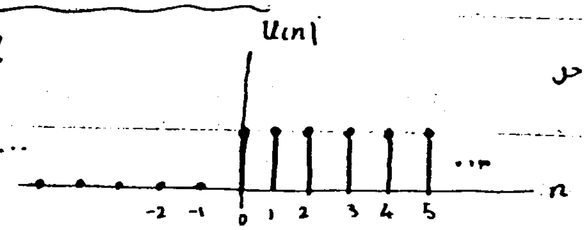
$$g(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k)\,\delta(n-k)$$

رابطه بالا، رابطه‌ای است مشابه رابطه پیوسته زمان زیر:

$$g(t)=\int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} g(\alpha)\,\delta(t-\alpha)\,d\alpha$$

② پله واحد

$$u(n)=\{\ldots,0,0,0,\hat{1},1,1,1,\ldots\}$$



ضابطه :

$$u(n)=\begin{cases}1\ , & n\geq 0\\ 0\ , & n\leq -1\end{cases}$$

رابطه با ضربه واحد :

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

مشابه رابطه پیوسته زمان زیر است :

$$u(t)=\int_{\alpha=-\infty}^{t}\delta(\alpha)\,d\alpha$$

$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

در پیوسته زمان مشابه این رابطه، داریم :

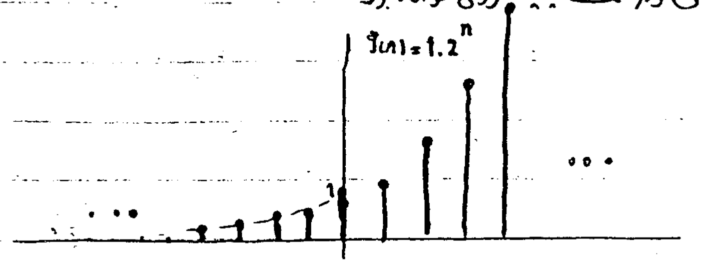
$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$

③ سیگنال نمائی

$$g(n) = \{\dots, z_0^{-2}, z_0^{-1}, \hat{z_0^{0}}, z_0^{1}, z_0^{2}, z_0^{3}, \dots\}$$

ضابطه : $g(n) = z_0^n$ ، تک ضابطه‌ای است.

اگر $|z_0|>1$ باشد، در سمت راست صعودی و در سمت چپ نزولی خواهد بود



اگر $|z_0|<1$ باشد، در سمت چپ صعودی و در سمت راست نزولی خواهد بود.

④ نمائی راست‌گرا : $g(n) = \{\dots, 0, 0, \hat{1}, z_0, z_0^2, z_0^3, \dots\}$

ضابطه : $g(n) = \begin{cases} z_0^n, & n \geq 0 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases} = z_0^n u(n)$

در حالت $|z_0|>1$ صعودی و برای $|z_0|<1$ نزولی است.

⑤ نمائی متقارن $g(n) = \{\dots, z_0^3, z_0^2, z_0, \hat{1}, z_0, z_0^2, z_0^3, \dots\}$

ضابطه : $= \begin{cases} z_0^{n} & n \geq 0 \\ z_0^{-n} & n \leq 0 \end{cases} = z_0^{|n|}$

در حالت $|z_0|>1$ سیگنال در دو طرف صعودی خواهد بود.

در حالت $|z_0|<1$ سیگنال در دو طرف نزولی خواهد بود.

⑥ مؤلفهٔ فرکانسی

ضابطه: $g(n) = e^{j2\pi f_0 n}$

$\equiv Z_0^n \quad , \quad Z_0 = e^{j2\pi f_0} \quad , \quad |Z_0| = 1$

همان نمائی

مؤلفهٔ فرکانسی در پیوسته‌زمان بصورت $g(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ بود.

مؤلفهٔ فرکانسی گسسته‌زمان با پیوسته‌زمان دارای اختلافاتی است.

در پیوسته‌زمان دو مؤلفهٔ فرکانسی با فرکانس متفاوت $f_1 \neq f_2$، دو تابع متفاوت هستند. اما در گسسته‌زمان اگر اختلاف دو فرکانس $f_1 - f_2$ یک عدد صحیح باشد، آن دو رشته عدد هیچ تفاوتی باهم نخواهند داشت.

f_1 عدد n-اُم مؤلفهٔ با فرکانس $= e^{j2\pi f_1 n}$

f_2 عدد n-اُم مؤلفهٔ با فرکانس $= e^{j2\pi f_2 n} = e^{j2\pi (f_1+K) n} = e^{j2\pi f_1 n} \cdot \underbrace{e^{j2\pi K n}}_{1} = e^{j2\pi f_1 n} =$ عدد n-اُم مؤلفه با فرکانس f_1

$f_2 = f_1 + K$

$K \in \mathbb{Z}$

پس در حالت گسسته‌زمان مجموعهٔ مؤلفه‌های فرکانسی $\left\{ e^{j2\pi f n} \right\}_{f=-1/2}^{1/2}$ شامل همهٔ انواع مختلف مؤلفه‌های فرکانسی گسسته‌زمان می‌باشد، درحالی‌که در پیوسته‌زمان برای اینکه مجموعه شامل همهٔ انواع مؤلفه‌های فرکانسی باشد باید از $f=-\infty$ تا $f=+\infty$ را شامل گردد.

$\left\{ e^{j2\pi f t} \right\}_{f=-\infty}^{+\infty}$

* متوسط زمانی:

تعریف: $\quad \langle g(n) \rangle_n = \lim_{N\to\infty} \dfrac{\sum_{n=-N}^{N} g(n)}{2N+1}$

قدرت عدد n‌اُم یا قدرت لحظه‌ای سیگنال $|g(n)|^2$

انرژی سیگنال $E_g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g(n)|^2$ / قدرت سیگنال $P_g = \langle |g(n)|^2 \rangle_n$

در گسسته‌زمان نیز می‌توان رشته اعداد را به صورت مجموع مؤلفه‌های فرکانسی در نظر گرفت. ⇐ تحلیل فوریه

$$\left\{ \begin{aligned} g(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} G(f)\, e^{j2\pi f n}\, df \\ G(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)\, e^{-j2\pi f n} \end{aligned} \right\}$$

روابط تبدیل فوریهٔ گسسته‌زمان
(DTFT)

$G(f)$ در حالت کلی پریودیک با پریود $f=1$ خواهد بود، لذا کافی است در یک بازه به عرض 1 تعریف گردد.
معمولاً $f\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

* تبدیل Z رشته عدد:

$$G(Z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)\,Z^{-n} \quad , \quad \underbrace{|Z|\in R_1}_{\text{شرط تقارب}}$$

با داشتن تبدیل Z و ROC آن، می‌توان رشته عدد را معلوم کرد. (با رابطهٔ تبدیل Z معکوس) یا مثلاً با بسط $G(Z)$ به توانی Z).

* اگر $|Z|=1$ یعنی دایرهٔ به شعاع واحد، جزو ناحیهٔ تقارب تبدیل Z باشد، می‌توان از تساوی $Z=e^{j2\pi f}$ استفاده کرد.

$$G(e^{j2\pi f})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)\,e^{-j2\pi fn}=G(f)$$

یعنی از تبدیل Z به تبدیل فوریه رسید.

رابطهٔ پارسوال در گسسته زمان:

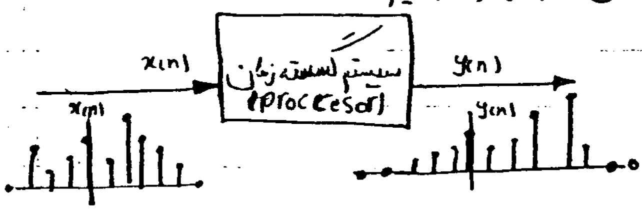
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_1(n)\,g_2^*(n)=\int_{f=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_1(f)\,G_2^*(f)\,df$$

حالت خاص:

$$E_g=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|g(n)|^2=\int_{f=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|G(f)|^2\,df$$

$|G(f)|^2$ طیف انرژی سیگنال

2-2- سیستم گسسته زمان ≡ یک مدل ریاضی برای یک سیستم فیزیکی که ورودی و خروجی آن را یک رشته عدد (سیگنال گسسته زمان) در نظر گرفته باشیم.



ضابطهٔ سیستم:

خروجی nام عدد: $y(n)=g(n,\{x(i)\})=\dots$

تابعی از n و کلیهٔ اعداد ورودی

$$\dots=\underbrace{g(n,\{x(i)\}_{i\le n})}_{\text{سیستم علی}}=\underbrace{g(n,x(n))}_{\text{سیستم بدون حافظه}}$$

تابعی از n و کلیهٔ اعداد تا شمارهٔ n ام ورودی

تابعی از n و عدد n ام ورودی

* در سیستم تغییرناپذیر با شیفت (زمان)، با شیفت رشته عدد ورودی، رشته عدد خروجی نیز تنها شیفت پیدا می‌کند. (به همان مقدار)

* در سیستم خطی هر یک از اعداد خروجی ترکیبی خطی از اعداد ورودی می‌باشد. چرا که:

$\text{ورودی} = \delta(n) \Longrightarrow \text{خروجی} = h(n)$

$\text{ورودی} = \delta(n-k) \longrightarrow \begin{cases} h(n-k) = \text{خروجی} & \text{در حالت } TI \\ h(n-k;n) = \text{خروجی} & \text{در حالت غیر } TI \end{cases}$

ورودی دلخواه

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \xrightarrow{\text{جمع آثار}} \begin{cases} y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) & \text{در حالت } TI \\ y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k;n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)h(k;n) & \text{در حالت غیر } TI \end{cases}$$

پس در سیستم خطی داریم:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n;k)\, x(n-k)$$ عدد n ام خروجی

یعنی عدد n ام خروجی، ترکیبی خطی از اعداد ورودی است.

* $x(n) \longrightarrow \boxed{\text{سیستم خطی}} \longrightarrow y(n)$ ، h

$$y(n) = h\,x(n) \overset{\text{در حالت کلی}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k;n)\, x(n-k) = \underset{TI}{=} h(n) * x(n)$$

در LTI: $y(n) = h(n) * x(n) \xrightarrow{\text{با تبدیل فوریه}} Y(f) = H(f).X(f)$

$\xrightarrow{\text{با تبدیل } Z} Y(Z) = H(Z).X(Z)$

3-2- سیستم LTI با تابع تبدیل کسری

$x(n) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(n)$

معادله تفاضلی خطی زیر مدل مناسبی است برای بررسی بسیاری از سیستم های LTI که در عمل مطرح می‌گردند.

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \cdots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \cdots - a_N y(n-N)$$

با گرفتن تبدیل Z (دوطرفه) از دو طرف: (ص بعد)

$$Y(z)\left[1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}\right]=X(z)\left[b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}\right]\Longrightarrow$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}=\frac{B_M(z)}{A_N(z)}$$ تابع کسری

البته معادلهٔ تفاضلی گفته شده، یک توصیف کامل از سیستم نیست. برای تکمیل توصیف سیستم، اطلاعات دیگری لازم است. مثلاً شرایط اولیه، فرضاً مقادیر $y(-1)$، $y(-2)$، ... و $y(-N)$.

یا مثلاً فرض علی بودن سیستم. یا مثلاً فرض پایداری سیستم. (خواهیم دید)

$$h(n)=Z^{-1}H(z)\Longrightarrow y(n)=h(n)*x(n)$$

برای تبدیل Z معکوس، لازم است ROC را بدانیم.

$$H(z)=\frac{B_M(z)}{\prod_{i=1}^{N}(1-p_iz^{-1})}=\sum_{i=1}^{N}\frac{r_i}{1-p_iz^{-1}}+\underbrace{\sum_{i=0}^{M-N}c_iz^{-i}}_{\text{وقتی وجود خواهد داشت که } M\geq N \text{ باشد.}}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h(n)=\sum_{i=1}^{N}r_iZ^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_iz^{-1}}\right\}+\sum_{i=0}^{M-N}c_iZ^{-1}\{z^{-i}\}\xrightarrow{\qquad}Z^{-1}(z^{-i})=\delta(n-i)$$

اگر بدانیم سیستم علی است باید جواب های راست گرا انتخاب کنیم

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_iz^{-1}}\right\}=\begin{cases}p_i^n u(n) & \text{جواب راست گرا}\\ -p_i^n u(-n-1) & \text{جواب چپ گرا}\end{cases}$$

$$\boxed{h(n)=\sum_{i=1}^{N}r_ip_i^nu(n)+\sum_{i=1}^{M-N}c_i\delta(n-i)}$$

* از بین دو جواب فوق، یکی صعودی و دیگری نزولی است. اگر بدانیم سیستم پایدار است، باید جواب نزولی را اختیار کرد. یعنی:

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_iz^{-1}}\right\}=\begin{cases}p_i^n u(n), & |p_i|<1 \quad \text{قطب داخل دایرهٔ واحد}\\ -p_i^n u(-n-1), & |p_i|>1 \quad \text{قطب خارج دایرهٔ واحد}\\ \frac{1}{2}\left(u(n)-u(-n-1)\right)p_i^n, & |p_i|=1 \quad \text{قطب روی دایرهٔ واحد}\end{cases}$$

میانگین جواب خارج و داخل دایره (متوسط داخل و خارج)

(ما سیستم ها را پایدار در نظر می گیریم.)

New

3- فرآیند گسسته زمان، ممان ها و طیف قدرت آن

$X(n,\xi) = X(n) \quad , \quad \underset{\text{معمولاً}}{n \in \mathbb{Z}}$

به اختصار

در واقع در حالت کلی : $\mathbb{Z}\times\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$

pdf ، k بعدی :

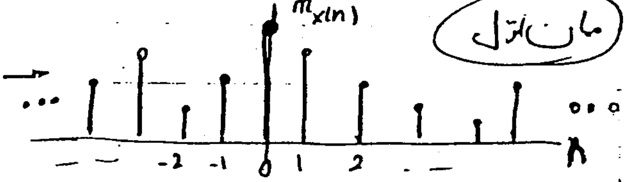
$$f_X(\underline{x}; n_1, n_2, \dots, n_k) = f_X(\underline{x}; \underline{n})$$

3-1- ممان های فرآیند گسسته زمان

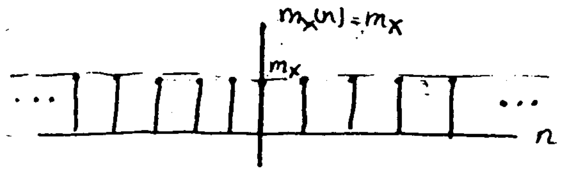
ممان اول

$$m_X(n) = \{\dots, m_{-1}, \hat{m}_0, m_1, m_2, \dots\} \longrightarrow$$

حالت کلی



WSS در حالت $\longrightarrow m_X(n) = m_X$



* در حالت کلی ممان دوم یک رشته عددی 2 بعدی است.

$$R_X(n,l) = E X(n) X^*(l)$$

$$C_X(n,l) = E\tilde{X}(n)\tilde{X}^*(l) = R_X(n,l) - m_X(n) m_X^*(l)$$

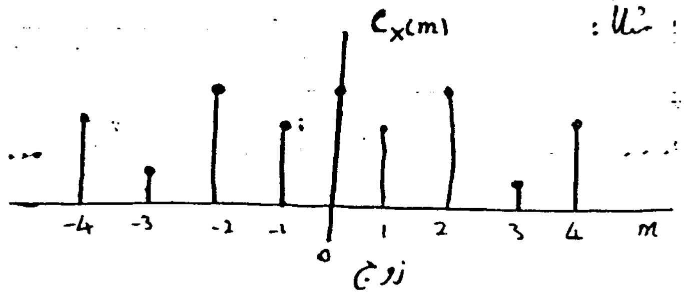
و در حالت WSS داریم :

$$\boxed{R_X(n+m, n) = R_X(m) \quad , \quad C_X(n+m,n) = C_X(m) = R_X(m) - |m_X|^2}$$

که در WSS رشتهٔ یک بعدی می شوند. (از m)

$$* \quad \text{تقارن ها} \longrightarrow \left.\begin{cases} R_X^*(n,l) = R_X(l,n) \\ C_X^*(n,l) = C_X(l,n) \end{cases}\right\} \text{کلی} \qquad \left.\begin{cases} R_X^*(m) = R_X(-m) \\ C_X^*(m) = C_X(-m) \end{cases}\right\} \text{WSS}$$

مثلاً :



برای 2 زآیند تصادفی :

$$\begin{cases} R_{XY}(n,l) = E\,x(n)y^*(l) \\ C_{XY}(n,l) = E\,\tilde{x}(n)\tilde{y}^*(l) = R_{XY}(n,l) - m_X(n)m_Y^*(l) \end{cases}$$

و در حالت توأماً WSS داریم :

$$\begin{cases} R_{XY}(n+m,n) = R_{XY}(m) \\ C_{XY}(n+m,n) = C_{XY}(m) = R_{XY}(m) - m_X m_Y^* \end{cases}$$

3_2_ طیف قدرت و طیف قدرت متقابل

قدرت زآیند $P_X = E\langle|X(n)|^2\rangle_n = \langle E|X(n)|^2\rangle_n \underset{\text{حالت کلی}}{=} \langle R_X(n,n)\rangle_n \underset{\text{WSS در حالت}}{=} \langle R_X(0)\rangle_n = R_X(0)$

$$x_N(n) = \begin{cases} x(n), & |n| \leq N \\ 0, & |n| \geq N+1 \end{cases}, \quad X_N(f) \triangleq F\{x_N(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_N(n)e^{-j2\pi fn}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} x(n)e^{-j2\pi fn}$$

$E|X_N(f)|^2 \rightarrow$ طیف انرژی محدود شده به متغیرهای تصادفی از $x(-N)$ تا $x(+N)$

طیف قدرت زآیند : $S_X(f) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E|X_N(f)|^2$

طیف قدرت متقابل زآیند : $S_{XY}(f) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E\,X_N(f)Y_N^*(f)$

در حالت کلی می‌توان نشان داد که :

$$S_X(f) \underset{\text{کلی}}{=} F_m\{\langle R_X(n+m,n)\rangle_n\} \underset{\text{WSS در}}{=} F_m\{\langle R_X(m)\rangle_n\} = F_m\{R_X(m)\}$$

یعنی در WSS رابطهٔ یک به یک داریم :

$$\begin{cases} S_X(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_X(m)e^{-j2\pi fm} \\ R_X(m) = \int_{f=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_X(f)e^{j2\pi fm}\,df \end{cases}$$

$$\longrightarrow \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f)\,df = \langle R_x(n+m,n)\rangle_n \Big|_{m=0} = \langle R_x(n,n)\rangle_n = P_x$$

به همین ترتیب:

$$S_{xy}(f) \overset{\text{کلی}}{=} F_m \langle R_{xy}(n+m,n)\rangle_n \underset{\text{در حالت توأماً wss}}{=} F_m\langle R_{xy}(m)\rangle_n = F_m\{R_{xy}(m)\}$$

یعنی در توأماً wss رابطه یک به یک می گردد

$$\begin{cases} S_{xy}(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(m)\, e^{-j2\pi f m} \\ R_{xy}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{xy}(f)\, e^{+j2\pi f m}\, df \end{cases}$$

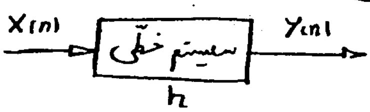
طیف قدرت در حوزهٔ Z نیز تعریف می گردد:

$$\boxed{\mathbb{S}_x(z) \underset{\text{کلی}}{=} Z_m\langle R_x(n+m,n)\rangle_n \underset{\text{در حالت wss}}{=} Z_m R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x(m)\, z^{-m}}$$

طیف قدرت در حوزهٔ Z را تابع مولد (متوسط زمانی) تابع همبستگی نیز گویند، چراکه با بسط آن به قوای Z، از روی ضرایب بسط (متوسط زمانی) همبستگی ها بدست می آیند.

$$\mathbb{S}_{xy}(z) \overset{\text{کلی}}{=} Z_m \langle R_{xy}(n+m,n)\rangle_n \overset{\text{در توأماً wss}}{=} Z_m R_{xy}(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(m)\, z^{-m}$$

$$\boxed{S_x(f) = \mathbb{S}_x(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f}} \quad , \quad \mathbb{S}_x(z) = S_x(f)\Big|_{e^{j2\pi f}=z}}$$



3-3- رابطهٔ ورودی خروجی سیستم خطی

$$y(n) = h\,x(n) \underset{\text{کلی}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k;n)\, x(n-k) \underset{\text{TI}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, x(n-k) = h(n) * x(n)$$

* رابطهٔ ممان ها:

$$\begin{cases} m_y(n) = h\, m_x(n) \\ R_{yx}(n,l) = h_n R_x(n,l) \\ R_{xy}(n,l) = h_l^* R_x(n,l) \\ R_y(n,l) = h_n h_l^* R_x(n,l) \end{cases} \xrightarrow[\text{عملگر * است}]{\text{در حالت TI}} \begin{cases} m_y(n) = m_x(n) * h(n) \\ R_{yx}(n,l) = R_x(n,l) * h(n) \\ R_{xy}(n,l) = R_x(n,l) * h^*(l) \\ R_y(n,l) = R_x(n,l) * h(n) * h^*(l) \end{cases}$$

- در سیستم LTI با ورودی WSS، ورودی و خروجی توأماً WSS می‌گردند.

$$m_Y = m_X \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) = m_X \cdot H(0)$$

$$R_{YX}(m) = h(m) * R_X(m)$$

$$R_{XY}(m) = R_X(m) * h^*(-m)$$

$$R_Y(m) = R_X(m) * h(m) * h^*(-m)$$

* رابطهٔ طیف‌های توان در سیستم LTI (ورودی WSS یا غیر WSS)

$$x(n) \longrightarrow \boxed{LTI} \xrightarrow{\;y(n)\;}$$

$$R_{YX}(n+m,n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K) R_X(n+m-K, n)$$

$$R_{XY}(n+m,n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} R_X(n+m, n-K) h^*(K)$$

$$R_Y(n+m,n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(K) R_X(n+m-K, n-i) h^*(i)$$

با متوسط‌گیری زمانی نسبت به n و تبدیل فوریه نسبت به m داریم:

$$S_{YX}(f) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K) S_X(f) e^{-j2\pi f K} = H(f) S_X(f)$$

به همین ترتیب ←

$$\left.\begin{aligned} S_{XY}(f) &= S_X(f) . H^*(f) \\ S_Y(f) &= S_X(f) . |H(f)|^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{پیوسته‌زمان}]{\text{دقیقاً مثل روابط}} \boxed{\begin{aligned} S_{YX}(f) &= H(f) S_X(f) \\ S_{XY}(f) &= S_X(f) H^*(f) \\ S_Y(f) &= S_X(f) . |H(f)|^2 \end{aligned}}$$

در حوزهٔ Z:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{S}_{YX}(z) &= \mathbb{H}(z) . \mathbb{S}_X(z) \\ \mathbb{S}_{XY}(z) &= \mathbb{S}_X(z) . \mathbb{H}^*\left(\tfrac{1}{z}\right) \end{aligned}}$$

$$H(f) = \mathbb{H}(e^{j2\pi f}) \Longrightarrow H^*(f) = \mathbb{H}^*(e^{-j2\pi f}) = \mathbb{H}^*(z^{-1})\Big|_{z=e^{j2\pi f}}$$

$$\boxed{\mathbb{S}_Y(z) = \mathbb{S}_X(z) \, H(z) H^*\left(\tfrac{1}{z}\right)}$$

۴- مدلسازی فرآیندهای گسسته زمان ساکن

یک روش کارکردن با فرآیندها استفاده از مدل برای فرآیندی است که در عمل مطرح می باشد یعنی درنظرگرفتن یک مدل و تعیین پارامترهای مدل با روش های آماری و سپس جایگزین کردن این مدل به جای فرآیند واقعی.

(روش های مبتنی بر مدل = Model Based Approach)

۴-۱- معرفی چند مدل مفید.

الف) مدل iid

این مدل، ساده ترین مدلی است که می توان درنظرگرفت یعنی اینکه فرض کنیم همهٔ متغیرهای تصادفی فرآیند توأماً مستقل هستند و دارای توابع احتمال یکسان می باشند.

چنین فرآیندی با یک تابع احتمال یک بعدی (مثلاً pdf) کاملاً توصیف می گردد.

($f(x)$: pdf یک بعدی فرآیند)

pdf K بعدی

$$\Longrightarrow f_X(\underline{x};\underline{n}) = \prod_{i=1}^{K} f(x_i)$$

و درحالت کلی چنین فرآیندی SSS کامل است .

$$m_X = m_X(n) = EX(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$R_X(n,l) = EX(n)X(l) = \begin{cases} EX(n)\,EX(l) = m_X^2 , & n\neq l \\ EX^2(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \rho_X , & n=l \end{cases}$$

$m=n-l$

$$= R_X(m) = \begin{cases} m_X^2 , & m\neq 0 \\ \rho_X , & m=0 \end{cases} = (\rho_X - m_X^2)\,\delta(m) + m_X^2 = \boxed{\sigma_X^2\,\delta(m) + m_X^2}$$

$$\boxed{S_X(f) = \sigma_X^2 + m_X^2\,\delta(f) \quad f\in\{-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\}}$$ و $\boxed{\text{در حوزهٔ Z طیف قدرت ندارد.}}$

ب) مدل نویز سفید

در این مدل فرض می گردد هر متغیر تصادفی جدید فرآیند با متغیرهای تصادفی قبلی فرآیند، متعامد و ناهمبسته است. روشن است که در این صورت هر متغیر تصادفی جدید فرآیند با متغیرهای تصادفی بعدی فرآیند نیز متعامد و ناهمبسته خواهد بود.

$$R_X(m) = C_X(m) = 0 \quad , m\neq 0$$

$$R_X(0) = C_X(0) = E|\tilde{X}(n)|^2 = \sigma^2 \quad , m=0$$

$$R_x(m) = C_x(m) = \sigma^2 \delta(m) \longrightarrow S_x(f) = \sigma^2 \ , \ S_z(f) = \sigma^2$$

ج) مدل میانگین متحرک (Moving Average $\equiv$ MA)

در مدل MA مرتبهٔ M (MA(M)) هر متغیر تصادفی جدید فرآیند به صورت ترکیبی خطی از M
متغیر تصادفی اخیر نویز سفید و یک متغیر تصادفی جدید نویز سفید فرض می‌گردد. یعنی:

فرآیند نویز سفید $V(n)$: $R_V(m) = C_V(m) = \sigma^2 \delta(m)$

$$\Longrightarrow X(n) = [b_1 V(n-1) + b_2 V(n-2) + \dots + b_M V(n-M)] + V(n)$$

روشن است که متغیر تصادفی جدید نویز سفید $V(n)$ با متغیرهای تصادفی قبلی فرآیند ناهمبسته خواهد بود، یعنی بعنوان یک عامل تصادفی جدید تلقی می‌گردد. چرا که در متغیرهای تصادفی قبلی مثلاً: $X(n-i) = [b_1 V(n-i-1) + \dots + b_M V(n-i-M)] + V(n-i)$

$V(n)$ وجود ندارد و $V(n)$ بر کلیهٔ متغیرهای تصادفی دیگر فرآیند فوق عمود است.

با تبدیل Z از طرفین این رابطه:

$$H(z) = \frac{X(z)}{V(z)} = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \quad , \quad b_0 = 1$$

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}$$

$$S_x(z) = S_V(z) H(z) H^*\left(\frac{1}{z}\right) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \sum_{k=0}^{M} b_k^* z^{+k} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{S_x(z) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=0}^{M} b_i b_k^* z^{k-i}}$$

طیف قدرت چنین فرآیندی یک چندجمله‌ای از z با توان‌های از $-M$ تا $+M$ می‌باشد. با توجه به رابطهٔ کلی:

$$S_x(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x(m) z^{-m} \Longrightarrow R_x(m) = 0 \ , \ \forall |m| \geq M+1$$

یعنی این مدل یک مدل M-همبسته است.

$$\Longrightarrow S_x(f) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=0}^{M} b_i b_k^* e^{j2\pi f(k-i)}$$

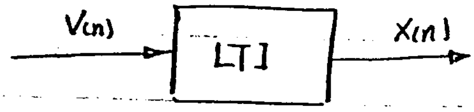
۱-۲) مدل خودبازگشتی (Auto Recursive $\equiv AR$)

در مدل $AR(N)$ هر متغیّر تصادفی جدید فرآیند بصورت ترکیبی خطّی از N متغیّر تصادفی اخیر خودش و یک متغیّر تصادفی نویز سفید زمان می‌گردد.

$$X(n) = -\left[a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2) + \dots + a_N X(n-N)\right] + V(n)$$

با تبدیل Z داریم:

$$\mathbb{H}(z) = \frac{X(z)}{V(z)} = \frac{1}{1+a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} \quad , \quad a_0 = 1$$



$$\mathbb{H}(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} a_i z_i^{-i}} \longrightarrow = 0 : AR \text{ معادلهٔ}$$

$$h(n) = Z^{-1}\,\mathbb{H}(z) \quad , \quad X(n) = h(n) * V(n) \longrightarrow \boxed{X(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K)\, V(n-K)}$$

اگر همهٔ ریشه‌های معادلهٔ AR ($\sum_{i=0}^{N} a_i z_i^{-i} = 0$) داخل دایرهٔ واحد باشند، سیستم علّی شده و
- اقطاب‌های سیستم)

خواهیم داشت:

$$X(n) = \sum_{K=0}^{\infty} h(K)\, V(n-K) =$$

$$= h(0) V(n) + \left[h(1) V(n-1) + h(2) V(n-2) + \dots\right]$$

$$\Longrightarrow \mathbb{H}(z) = \sum_{K=0}^{\infty} h(K) z^{-K} \quad , \quad \underbrace{\mathbb{H}(\infty)}_{\frac{1}{a_0}=1} = h(0)$$

(به شرط داخل دایرهٔ واحد.)

مدل $AR(N)$ معادل یک مدل $MA(\infty)$ خواهد بود و در این حالت $V(n)$ را می‌توان یک متغیّر تصادفی ناهمبسته با متغیّرهای تصادفی قبلی فرآیند X دانست. (یک عامل تصادفی جدید)

طیف قدرت:

$$S_X(f) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N}\sum_{K=0}^{N} a_i a_K^* e^{j2\pi f(K-i)}}$$

$$S_X(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N}\sum_{K=0}^{N} a_i a_K^* z^{(K-i)}}$$

(۹) مدل ARMA ($AR+MA\equiv$)

در مدل $ARMA(N,M)$ هر متغیر تصادفی جدید فرآیند به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$X(n) = -[a_1X(n-1)+\cdots+a_NX(n-N)] + [b_1V(n-1)+\cdots+b_MV(n-M)] + V(n)$$

با تبدیل Z داریم:

$$H(z) = \frac{X(z)}{V(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{K=0}^{N} a_K z^{-K}} \quad , \quad b_0 = a_0 = 1$$

$$V(n) \longrightarrow \boxed{LTI}_{H(z)} \longrightarrow X(n)$$

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1} H(z)$$

$$\Longrightarrow \boxed{X(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K)V(n-K)}$$

در اینجا نیز اگر همهٔ ریشه‌های معادلهٔ AR داخل دایرهٔ واحد باشند، فرآیند معادل یک فرآیند $MA(\infty)$ خواهد بود و $V(n)$ را می‌توان یک عامل تصادفی جدید تلقی کرد.

اگر ریشه‌های صورت (معادلهٔ MA) همگی داخل دایرهٔ واحد باشند، وارون سیستم فوق:

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} \longrightarrow$$ علّی می‌گردد و خواهیم داشت:

$$V(n) = g(n) * X(n) = \sum_{K=0}^{\infty} g(K)X(n-K) = g(0)X(n) + g(1)X(n-1) + \cdots \Longrightarrow$$

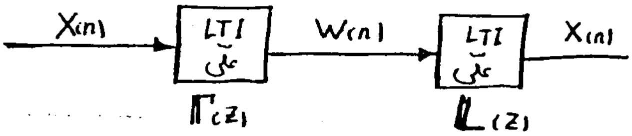
$$\Longrightarrow X(n) = -\left[\frac{g(1)}{g(0)}X(n-1) + \frac{g(2)}{g(0)}X(n-2) + \cdots\right] + \frac{1}{g(0)}V(n)$$

فرآیند معادل یک فرآیند $AR(\infty)$ خواهد بود.

$$S_X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M}\sum_{K=0}^{M} b_i b_K^* z^{K-i}}{\sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} a_l a_n^* z^{n-l}} \quad , \quad S_X(f) = S_X(e^{j2\pi f})$$

4-2- مدلسازی فرآیند های با طیف کسری برحسب فرآیند ابداع

فرآیند ابداع = فرآیندی سفید و نرمالیزه که با فرآیند مورد نظر به صورت خطی و علّی معادل است.



شرط پالی وینر در حالت گسسته زمان به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{f=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(S_x(f))\,df \neq \pm\infty$$

تابع کسری $\quad S_x(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$

$$S_x(f)=S_x(e^{j2\pi f}) = K^2\,\frac{\prod_{i=1}^{M}(e^{j2\pi f}-z_i)(e^{-j2\pi f}-z_i^*)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j2\pi f}-p_k)(e^{-j2\pi f}-p_k^*)}$$

فرم کلی تجزیه شده با توجه به حقیقی و غیرمنفی بودن

$$z=e^{j2\pi f}=\begin{cases} z_i \\ \frac{1}{z_i^*}\end{cases}$$ یا از هر دو ریشهٔ صورت

$$z=e^{j2\pi f}=\begin{cases} p_k \\ \frac{1}{p_k^*}\end{cases}$$ از هر دو ریشهٔ مخرج

یکی داخل و دیگری خارج دایرهٔ واحد خواهد بود.

z_i ها و p_k ها را داخل دایرهٔ واحد فرض می‌کنیم. $(|z_i|<1\,,\ |p_k|<1)$

$$S_x(z)=\overbrace{S_w(z)}^{1}\,L(z)\,L^*(z^{*-1}) = L(z).L^*\left(\frac{1}{z}\right) = K^2\,\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)\left(\frac{1}{z}-z_i^*\right)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)\left(\frac{1}{z}-p_k^*\right)}\,z^{K}z^{-K}$$

باید هم $L(z)$ و هم وارون آن علّی باشد و لذا:

$$L(z)=K\,\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}\,z^{K}$$

البته لازم است در ∞ نیز صفر یا قطب نداشته باشیم، یعنی صورت و مخرج برحسب z هم درجه باشند

(ضرب صورت و مخرج در z^{-N}) $\quad K=N-M$

$$\boxed{L(z)=\frac{K\prod_{i=1}^{M}(1-z^{-1}z_i)}{\prod_{k=1}^{N}(1-z^{-1}p_k)}}$$

$$\mathbb{L}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \equiv \frac{\mathbb{X}(z)}{\mathbb{W}(z)}$$

با طرفین وسطین و تبدیل Z معکوس:

$$X(n) = b_0 W(n) + [b_1 W(n-1) + \dots + b_M W(n-M)] - [a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2) + \dots + a_N X(n-N)]$$

که مدل $ARMA(N,M)$ برحسب زآیند W است.

$$l(n) = \sum_{k=0}^{\infty} l(k)\,\delta(n-k)\ , \quad X(n) = W(n) * l(n) \longrightarrow$$

علّی بودن

$$\longrightarrow X(n) = l(0)W(n) + [l(1)W(n-1) + l(2)W(n-2) + \cdots]$$

که مدل $MA(\infty)$ برحسب W است.

$$\gamma(n) = Z^{-1}\left(\frac{1}{\mathbb{L}(z)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(k)\,\delta(n-k)\ , \quad W(n) = X(n) * \gamma(n) \Longrightarrow$$

علّی بودن

$$\longrightarrow X(n) = \frac{1}{\gamma(0)}W(n) - \left[\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}X(n-1) + \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)}X(n-2) + \cdots\right]$$

که مدل $AR(\infty)$ برحسب زآیند W است.

تمرین: تابع همبستگی زآیند با طیف قدرت زیر را تعیین کنید و مدل های AR، MA و $ARMA$ آن را برحسب زآیند ابواع بدست آورید.

$$S_X(f) = \frac{5-4\cos 2\pi f}{10-6\cos 2\pi f}$$

جواب ها:

$$S_X(z) = \frac{2z^2-5z+2}{3z^2-10z+3} = \frac{2}{3} - \frac{5/27}{(1-z/3)(1-z^{-1}/3)}$$

(1) $R_X(m) = \frac{2}{3}\delta(m) - \frac{5}{24}\left(\frac{1}{3}\right)^{|m|}$

(2) $X(n) = \frac{2}{3}W(n) + \frac{1}{3}X(n-1) - \frac{1}{3}W(n-1)$

(3) $X(n) = \frac{2}{3}W(n) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} W(n-k)$

(4) $X(n) = \frac{2}{3}W(n) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} X(n-k)$

$$\boxed{z_0^{|m|} \xleftrightarrow{ZT} \frac{1-z_0^2}{(1-z_0 z)(1-z_0 z^{-1})} \qquad |z_0|<1}$$

«مبحث پنجم: تئوری تخمین»

۱- مقدمه و معرفی معیار MMS

۱-۱- مقدمه

تخمین یعنی پیدا کردن یک مجهول S از روی داده‌های آماری X.

تعداد داده‌ها می‌تواند یکی باشد (تخمین برحسب یک متغیر تصادفی) یا n تا باشد (تخمین برحسب یک بردار تصادفی) و یا اینکه نامحدود باشد. (تخمین برحسب یک یا چند فرآیند تصادفی)

مثلاً ← * تخمین مقدار یک مجهول به کمک نتیجهٔ n اندازه‌گیری آلوده به نویز آن.

* تخمین ورودی سیستم در یک لحظه از روی مقادیر خروجی مشاهده شده تا به حال سیستم.

* تخمین آیندهٔ فرآیند (پیشگوئی) از روی مقادیر مشاهده شدهٔ آن تا بحال

۱-۲- معیار MMS

ما مقدمتاً تعداد داده‌ها را محدود می‌گیریم و بعداً نتایج را به تعداد داده نامحدود تعمیم خواهیم داد.

$\underline{X}$

به صورت تابعی از داده‌ها به طوری که $\hat{S} = g(\underline{X}) \approx S$ تخمین S:

یعنی در تخمین دنبال پیدا کردن یک رابطهٔ تقریبی بین S و داده‌ها $\underline{X}$ هستیم. $S \approx g(\underline{X})$

* یک راه حل کلی مسأله آن است که با توجه به کاربرد، برای هر خطائی ($\hat{S} \neq S$) هزینه‌ای درنظر بگیریم و تخمینی بدست آوریم که متوسط این هزینه را می‌نیمم کند.

تابع هزینه ⇐ $C(S,\hat{S})$

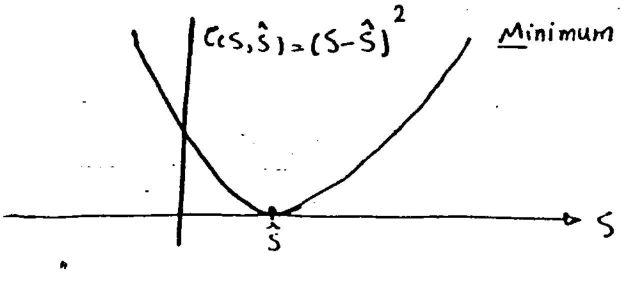
منطقاً این تابع یک تابع غیرمنفی درنظر گرفته می‌شود- تابعی که به ازای $\hat{S}=S$ مقدار صفر دارد.

$$\rho = E\,C(S,\hat{S}) = Min \Longrightarrow \hat{S}$$

$$\rho = E\,C(S,\hat{S}) = E_X\left[E_S\, C(S,g(\underline{X}))\,|\,\underline{X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_X(\underline{x})}_{\text{غیرمنفی}}\ \underbrace{E_S\left[\underbrace{C(S,g(\underline{x}))}_{\text{غیرمنفی}}\,|\,\underline{X}=\underline{x}\right]}_{\text{غیرمنفی}}\,d\underline{x} = Min$$

$$E_S\left[C(S,g(\underline{x}))\,|\,\underline{X}=\underline{x}\right] = Min \Longrightarrow g(\underline{x}) \Longrightarrow \hat{S} = g(\underline{X})$$

در معیار MMS = Minimum Mean Square



$$E_S\left[(S-g(\underline{x}))^2 \,\middle|\, \underline{X}=\underline{x}\right] = \text{Min} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{سمت چپ} = E(S^2|\underline{X}=\underline{x}) + E(g^2(\underline{x})|\underline{X}=\underline{x}) - 2E(g(\underline{x})S|\underline{X}=\underline{x}) =$$

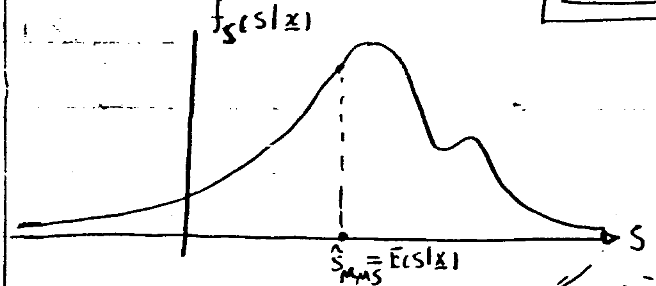
$$= \text{Var}(S|\underline{X}=\underline{x}) + (E(S)|\underline{X}=\underline{x})^2 + g^2(\underline{x}) - 2g(\underline{x})E(S|\underline{X}=\underline{x}) =$$

$$= \text{Var}(S|\underline{X}=\underline{x}) + [g(\underline{x}) - E(S|\underline{X}=\underline{x})]^2 = \text{Min} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g(\underline{x}) = E(S|\underline{X}=\underline{x}) \Longrightarrow \boxed{\hat{S}_{MMS} = E(S|\underline{X})}$$ متوسط پسین مجهول

$$P_{min} = \int_{\underline{x}=-\infty}^{+\infty} f_X(\underline{x}).\text{Var}(S|\underline{X}=\underline{x}) \Longrightarrow \boxed{P_{min} = E\,\text{Var}(S|\underline{X})}$$ امید واریانس پسین مجهول

مثال :



درحالت کلی متوسط پسین، تابعی غیرخطی از $\underline{X}$ می گردد. (تخمین غیرخطی)

واریانس پسین نیز تابعی از $\underline{X}$ می گردد و P_{min} متوسط این واریانس بازای $\underline{X}$ های مختلف است.

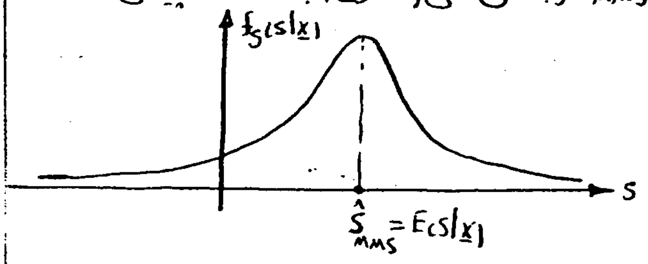
معرفی نماد:

$$\hat{S}_{MMS} = E(S|\underline{X}) \longleftarrow$$ بهترین تخمین S برحسب X

کمترین متوسط مربع خطای تخمین S برحسب X $\longrightarrow$ $$P_{MMS} = P(S|\underline{X})$$

نکته: اگر S و $\underline{X}$ توأماً نرمال باشند، $\hat{S}_{MMS}$ رابطه‌ی خطی (مستوی) با داده‌ها $\underline{X}$ پیدا کند.

اثبات: $S|\underline{X}$ نیز نرمال خواهد بود. لذا متوسط آن همان محل پیک آن خواهد بود، چون:



$$f_{S,\underline{X}}(s,x) = f_X(\underline{x})f_S(s|\underline{x})$$

لذا کافی است محل پیک pdf توأم (برای $\underline{x}$ معلوم) را تعیین کنیم.

$$f_{S,\underline{X}}(S,\underline{x}) = K e^{(\text{نما})} = Max \Longrightarrow (\text{نما}) = Max$$

$$\frac{\partial}{\partial S}(\text{نما}) = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial S}\Big[\alpha_{00}(S-m_S)^2 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{0i}(S-m_S)(x_i-m_i) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i0}(x_i-m_i)(S-m_S) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)\Big] = 2\alpha_{00}(S-m_S) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{0i}(x_i-m_i) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i0}(x_i-m_i) + 0 = 0$$

$$\Longrightarrow S = m_S - \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_{0i}+\alpha_{i0}}{2\alpha_{00}}(x_i-m_i) \Longrightarrow \boxed{\hat{S}_{MMS} = m_S + \sum_{i=1}^{n}\beta_i(X_i-m_i)}$$

ملاحظه می گردد که حاصل تابعی خطی با مقدار ثابت (تابع مستوی یا affine) از داده ها خواهد بود.

1-3- معیار LMMS

$$\left.\begin{array}{l} P = E|S-\hat{S}|^2 = Min \\ \hat{S} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \ \text{قید خطی بودن} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{a}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \hat{S}_{LMMS} \\ P_{min} = P_{LMMS} \end{cases}$$

LMMS ≡ Linear MMS

علت اضافه کردن قید خطی اینکه اولاً پیدا کردن $\hat{S}$ ساده تر شود، چرا که در تخمین MMS نیاز به معلوم بودن pdf چیسین (که دارای n پارامتر است.) یا pdf توأم مجهول و داده ها (که n+1 بعدی است.) داریم، در حالی که خواهیم دید که در تخمین LMMS فقط به ممان ها نیاز خواهیم داشت.

ثانیاً پیاده سازی عملی تخمین MMS به یک سیستم (فیلتر) غیرخطی نیاز دارد ولی تخمین LMMS را می توان با یک سیستم (فیلتر) خطی پیاده سازی نمود.

البته روشن است که در حالت کلی: $P_{MMS} \leq P_{LMMS}$

در عمل غالباً از معیار LMMS استفاده می گردد و آن را نیز به اختصار تخمین خطی گویند.

چند نماد:

بهترین تخمین خطی S برحسب $\underline{X}$ $\quad \hat{S}_{LMMS} = \hat{E}(S|\underline{X})$

خطای بهترین تخمین S برحسب $\underline{X}$ $\quad P_{LMMS} = \hat{P}(S|\underline{X})$

2- کلیاتی در مورد تخمین خطی

2-1- اصل تعامد ـ شرط لازم و کافی برای اینکه $\hat{S}=\sum_i a_i X_i$ بهترین تخمین S بر حسب X باشد، تعامد خطای تخمین $(S-\hat{S})$ بر تک تک داده ها است.

یعنی: $(S-\hat{S}) \perp X_1, X_2, \ldots, X_n$

با اعمال اصل تعامد می توان ضرایب تخمین خطی را پیدا کرد.

$$\begin{cases} (S-\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) \perp X_j \\ j=1,2,\ldots,n \end{cases} \Longrightarrow E(S-\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) X_j^* = 0 \Longrightarrow \quad j=1,2,\ldots,n$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (E X_i X_j^*) a_i = (E S X_j^*)}_{j=1,2,\ldots,n}}$$

در این معادلات امید ها معلوم هستند و ضرایب یعنی a مجهول است.

با حل این دستگاه معادلات خطی موسوم به معادلات یول واکر a ها می توان ضرایب و لذا تخمین خطی را پیدا کرد.

اثبات اصل تعامد:

تخمینی که با رعایت اصل تعامد حاصل می گردد را به صورت $\hat{S}_\perp=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ فرض می کنیم.

یک تخمین خطی دیگر نیز به صورت $\hat{S}=\sum_{i=1}^{n} b_i X_i$ در نظر می گیریم.

$$P=E|S-\hat{S}|^2 = E|S-\hat{S}_\perp+\hat{S}_\perp-\hat{S}|^2 = \underbrace{E|S-\hat{S}_\perp|^2}_{P_\perp}+E|\hat{S}_\perp-\hat{S}|^2+E(S-\hat{S}_\perp)(\hat{S}_\perp-\hat{S})^* + \text{درج جملهٔ سوم}$$

$$\text{جملهٔ سوم} = E(S-\hat{S}_\perp).\sum_{i=1}^{n}(a_i^*-b_i^*)X_i^* = \sum_{i=1}^{n}(a_i^*-b_i^*)\underbrace{E(S-\hat{S}_\perp)X_i^*}_{\substack{\parallel \\ 0}} = 0$$

صفر به دلیل رعایت اصل تعامد

$$\Longrightarrow \text{جملهٔ چهارم} = 0 \Longrightarrow$$

چنین جملهٔ سوم و چهارم برابر صفر خواهند شد.

$$\longrightarrow P = P_\perp + E|\hat{S}_\perp-\hat{S}|^2 \geq P_\perp$$

چون $P_\perp \leq P$ است، پس رعایت اصل تعامد یک شرط کافی است.

برای اینکه $P=P_\perp$ لازم است: $E|\hat{S}_\perp-\hat{S}|^2=0$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{S}=\hat{S}_\perp}$$

یعنی شرط تعامد لازم نیز می باشد.

نکات :

① با توجه به اصل تعامد، خطای تخمین LMMS را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{P_{LMMS} = \hat{P}(S|\underline{X}) = E(S-\hat{S})S^*}$$

اثبات:

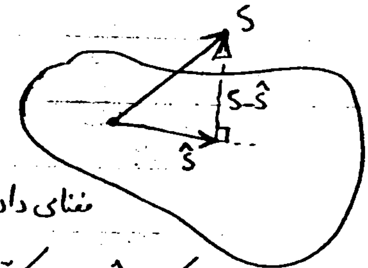
$$P_{LMMS} = E|S-\hat{S}|^2 = E(S-\hat{S})S^* - \cancel{E(S-\hat{S})\hat{S}^*}^{\,0} = E(S-\hat{S})S^* \checkmark$$

$$\text{جمله دوم} = E(S-\hat{S})\sum_{i=1}^{n} a_i^* X_i^* = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \underbrace{E(S-\hat{S})X_i}_{\text{صفر ← رعایت اصل تعامد}} = 0$$

② تعبیر هندسی اصل تعامد

فضای داده ها را بعنوان یک مجموعه ای شامل کلیه داده ها X_1 و X_2 و ... و X_n و کلیه ترکیبات خطی آنها تعریف می کنیم.

در حالت کلی مجهول S داخل این فضا (جزء مجموعه فوق) قرار ندارد. در تخمین خطی دنبال یکی از اعضای آن مجموعه هستیم (نقطه ای از فضای فوق) به طوری که: $E|S-\hat{S}|^2 = Min$



طبق اصل تعامد، بهترین تخمین، تخمینی است که $S-\hat{S}$ را بر کلیه داده ها و لذا بر کلیه ترکیبات خطی داده ها یعنی بر فضای داده ها عمود کند. یعنی $\hat{S}_{LMMS}$ در واقع تصویر S روی فضای داده هاست.

New

یادآوری: $\hat{S} = \hat{E}(S|\underline{X}) = \sum_i a_i X_i$

$$P_{min} = \hat{P}(S|\underline{X}) = Min(E|S-\sum_i a_i x_i|^2)$$

$$S-\hat{S} = S-\hat{E}(S|X) \perp \underline{X}$$

$$\hat{P}(S|\underline{X}) = E(S-\hat{E}(S|X))S^*$$

3-2- معرفی اپراتور $\hat{E}$ و برخی خواص آن

با توجه به اصل تعامد $\hat{E}$ را می توان یک عملگر خطی دانست، عملگری که S را روی فضای داده ها تصویر می کند. بعبارت ریاضی عملگری که با دو شرط زیر تعریف می گردد:

$$\begin{cases} (1)\ \hat{E}(S|\underline{X}) = \sum_i a_i X_i \\ (2)\ S - \hat{E}(S|\underline{X}) \perp \underline{X} \end{cases}$$

* برخی از خواص عملگر $\hat{E}$:

$$(1)\quad S \perp \underline{X} \Longrightarrow \hat{E}(S|\underline{X}) = 0$$

$$(2)\quad S = S_1 + S_2 \Longrightarrow \hat{E}(S|\underline{X}) = \hat{E}(S_1|\underline{X}) + \hat{E}(S_2|\underline{X})$$

$$(3)\quad \underline{X} \overset{\text{خطی}}{\equiv} \underline{Y} \Longrightarrow \hat{E}(S|\underline{X}) = \hat{E}(S|\underline{Y})$$

$$(4)\quad \underline{X} \perp \underline{Y} \Longrightarrow \hat{E}(S|\underline{X},\underline{Y}) = \hat{E}(S|\underline{X}) + \hat{E}(S|\underline{Y})$$

برای اثبات هر یک، کافی است دو شرط عملگر $\hat{E}$ را بررسی کنیم.

اثبات (1):

(1) $0 \overset{?}{=} \sum a_i X_i \xrightarrow{\checkmark}$ با ضرایب صفر صحیح است

(2) $S - 0 \perp \underline{X} \xrightarrow{\checkmark}$ صحیح است، چون فرض این خاصیت است.

اثبات (2):

(1) $\hat{E}(S_1|\underline{X}) + \hat{E}(S_2|\underline{X}) \overset{?}{=} \sum_i a_i X_i \longrightarrow$ صحیح است چون هر یک از دو جزء سمت چپ ترکیب خطی از داده ها هستند.

(2) $S - (\hat{E}(S_1|\underline{X}) + \hat{E}(S_2|\underline{X})) \perp \underline{X} \longrightarrow$ صحیح است چون:

سمت چپ: $S_1 + S_2 - \hat{E}(S_1|X) - \hat{E}(S_2|X) = (S_1 - \hat{E}(S_1|\underline{X})) + (S_2 - \hat{E}(S_2|\underline{X}))$

که تک تک دو جمله فوق بر $\underline{X}$ عمودند.

اثبات (3): به طور خطی معادل بودن یعنی اینکه معلوم بودن هر طرف طرف دیگر را با رابطه‌ای خطی مشخص می‌کند. یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{Y} = A\underline{X} \\ \det(A) \neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{X} = A^{-1}\underline{Y}$$

(1) $\hat{E}(s|\underline{Y}) \overset{?}{=} \sum a_i x_i$

صحیح است چون سمت چپ ترکیبی خطی از $\underline{Y}$ است و $\underline{Y}$ نیز ترکیبی خطی از $\underline{X}$ است.

(2) $S - \hat{E}(s|\underline{Y}) \perp \underline{X}$

صحیح است چون سمت چپ بر $\underline{Y}$ عمود است ولذا بر کلیهٔ ترکیبات خطی $\underline{Y}$ عمود است و $\underline{X}$ نیز ترکیبی خطی $\underline{Y}$ است.

اثبات (4):

(1) $\hat{E}(s|\underline{X}) + \hat{E}(s|\underline{Y}) \overset{?}{=} \sum_i a_i x_i + \sum_i b_i y_i$

صحیح است چون هر یک ترکیبی خطی از داده های مربوط است.

(2) $S - \left(\hat{E}(s|\underline{X}) + \hat{E}(s|\underline{Y})\right) \underset{?}{\perp} \underline{X}, \underline{Y}$

صحیح است چون مثلاً:

$$\text{سمت چپ} = \underbrace{[S - \hat{E}(s|\underline{X})]}_{\text{بر } \underline{X} \text{ عمود است}} + \underbrace{\hat{E}(s|\underline{Y})}_{\text{ترکیبی خطی از } \underline{Y} \text{ است ولذا بر } \underline{X} \text{ عمود است، چون } \underline{Y} \perp \underline{X}}$$

پس سمت چپ بر $\underline{X}$ عمود است و به همین ترتیب بر $\underline{Y}$ نیز اثبات می‌گردد.

2-3- تخمین مستوی

$$\text{تخمین مستوی}\begin{cases} P = E|S-\hat{S}|^2 = \text{Min} \xrightarrow{\text{قید مستوی بودن}} \underline{a}, a_0 \\ \hat{S} = \sum_i a_i x_i + a_0 \end{cases} \Longrightarrow \hat{S}, P_{min}$$

چون در اینجا یک درجه آزادی اضافه داریم، روشن است که خطای تخمین مستوی کوچکتر یا مساوی خطای تخمین خطی خواهد بود.

با یک ابتکار ساده می‌توان تخمین مستوی را به تخمین خطی بدل نمود تا بتوان به کمک اصل تعامد و خواص عملگر $\hat{E}$، تخمین مستوی را نیز محاسبه نمود.

$$\begin{cases} X_0(\xi)=1 \\ \forall \xi \in \Omega \end{cases}$$

واین کار با تعریف یک متغیر تصادفی کمکی مقدور است .

درواقع $X_0=1$ یک مقدار ثابت معلوم است که می توان آن را بعنوان حالت خاص از یک متغیر تصادفی وارد روابط کرد .

تخمین مستوی : $\hat{S}=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a_0 X_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X_i \equiv \hat{E}(S|\underline{X}, X_0)$

$$\hat{S}=\hat{E}(S|\underline{X},X_0)=\hat{E}(S|\underline{\tilde{X}},X_0)=\hat{E}(S|\underline{\tilde{X}})+\hat{E}(S|X_0)$$

$\{\underline{X},X_0\} \overset{\text{خطی}}{\equiv} \{\underline{\tilde{X}},X_0\}$ زیرا که $X_i=(1)\tilde{X}_i+(m_i)X_0$ و یا $\tilde{X}_i=(1)X_i+(-m_i)X_0$

$\underline{\tilde{X}} \perp X_0$ زیرا $E\tilde{X}_i X_0^* = E\tilde{X}_i = 0$

$\star\ \hat{E}(S|\underline{\tilde{X}})=\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})+\hat{E}(m_S|\underline{\tilde{X}})=\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})+0$

$S=\tilde{S}+m_S$

$m_S \perp \underline{\tilde{X}}$

$E m_S \tilde{X}_i^* = m_S E\tilde{X}_i^* = 0$ زیرا

$\star\ \hat{E}(S|X_0)=a X_0$

اصل تعامد $(S-aX_0) \perp X_0 \Rightarrow E(S-aX_0)X_0^*=0 \Rightarrow E(S-a)=0 \rightarrow$

$\Longrightarrow a=ES=m_S$

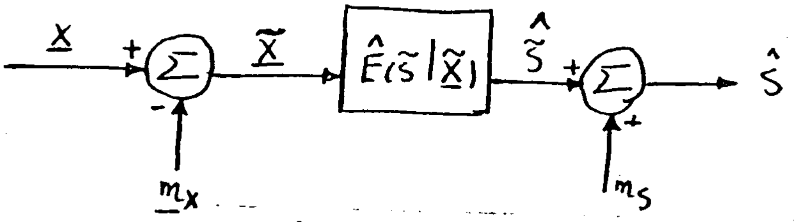
پس :

تخمین مستوی : $\hat{S}=\hat{E}(S|\underline{X},X_0)=\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})+m_S$

خطای تخمین مستوی : $P_{min}=\hat{P}(S|\underline{X},X_0)=E|S-\hat{S}|^2=E|S-\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})-m_S|^2=E|\tilde{S}-\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})|^2=$

$=\hat{P}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})$

پس برای تخمین مستوی می‌توان مدل ریاضی زیر را در نظر گرفت.



$$\hat{P}(s|\underline{X}, X_0) = \hat{P}(\tilde{s}|\tilde{\underline{X}})$$

3 - تخمین خطی برحسب بردار داده‌ها

3-1 - تخمین یک مجهول برحسب بردار داده‌ها

$$\hat{S} = \hat{E}(s|\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i = \underline{g}^h \underline{X}$$

اصل تعامد: $(S - \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) \perp X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\Longrightarrow (S - \underline{g}^h \cdot \underline{X}) \perp \underline{X} \longrightarrow E(S - \underline{g}^h \cdot \underline{X})\underline{X}^h = 0 \Longrightarrow E\, S\underline{X}^h - E\, \underline{g}^h \underline{X}\,\underline{X}^h = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow R_{SX} - \underline{g}^h R_X = 0 \Longrightarrow \underline{g}^h = R_{SX} R_X^{-1}$$

پس:

$$\boxed{\hat{S} = \hat{E}(s|\underline{X}) = R_{SX} R_X^{-1} \underline{X}}$$

$$P_{min} = \hat{P}(s|\underline{X}) = E(S - \hat{S})S^* = E(S - R_{SX} R_X^{-1} \underline{X})S^* = E|S|^2 - E R_{SX} R_X^{-1} \underline{X} S^* =$$

$$= P_S - R_{SX} R_X^{-1} \underbrace{E\underline{X}S^*}_{R_{XS}} \Longrightarrow \boxed{\hat{P}(s|\underline{X}) = E|S|^2 - R_{SX} R_X^{-1} R_{XS}}$$

نکات:

① اگر R_X سینگولار باشد این به معنی وجود یک رابطهٔ خطی بین داده‌ها است یعنی اینکه یکی از داده‌ها خود ترکیبی خطی از بقیهٔ داده‌ها است، یعنی در واقع فضای داده‌ها (n-1) بعدی است. بعبارت معادل، آن داده‌ای که خود ترکیبی خطی از بقیهٔ داده‌ها است، با معلوم بودن بقیه هیچ کمکی به تخمین خطی نخواهد کرد. لذا می‌توان آن را از جمع داده‌ها کنار گذاشت و تخمین خطی را برحسب بقیهٔ داده‌ها بدست آورد. این به معنی حذف سطر و ستون مربوطه در R_X است.

آن را از حالت سینگولار خارج کند. اگر لازم بود باید همین کار را تکرار نمود.

② به کمک مدل ریاضی گفته شده، به راحتی می توان روابط تخمین مستوی را نیز پیدا کرد.

$$\hat{S} = \hat{E}(s|\underline{X}, X_0) = m_s + \hat{E}(\tilde{s}|\tilde{\underline{X}}) = m_s + R_{\tilde{s}\tilde{x}} R_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\underline{X}} \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{S} = \hat{E}(s|\underline{X}, X_0) = m_s + C_{sx} C_x^{-1} (\underline{X} - \underline{m}_x)}$$

$$\hat{P}(s|\underline{X}, X_0) = \hat{P}(\tilde{s}|\tilde{\underline{X}}) = E|\tilde{s}|^2 - R_{\tilde{s}\tilde{x}} R_{\tilde{x}}^{-1} R_{\tilde{x}\tilde{s}} \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{P}(s|\underline{X}, X_0) = \sigma_s^2 - C_{sx} C_x^{-1} C_{xs}}$$

③ می توان روابط را بر حسب بردار ابداع داده ها نیز نوشت که در این صورت فرم ساده تری پیدا می کند چرا که:

$$\underline{X} \overset{\text{خطی}}{\equiv} \underline{W}$$

$$\begin{cases} \underline{m}_w = 0 \\ R_w = C_w = I \Longrightarrow R_w^{-1} = I \end{cases}$$

$$\hat{S} = \hat{E}(s|\underline{X}) = \hat{E}(s|\underline{W}) = R_{sw} R_w^{-1} \underline{W} = \boxed{R_{sw} \underline{W}}$$

$$\hat{P}(s|\underline{X}) = \hat{P}(s|\underline{W}) = E|s|^2 - \underbrace{R_{sw} R_w^{-1} R_{ws}}_{\substack{R_{sw} R_{ws} \\ R_{ws}^{*}}} = \boxed{E|s|^2 - \|R_{sw}\|^2}$$

3-2- تخمین چند مجهول (بردار مجهول) بر حسب بردار داده ها

تخمین مثلاً m مجهول $S_1, S_2, \ldots, S_m$ را بر حسب بردار داده ها $\underline{X}$ در نظر می گیریم.

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}_1 &= \hat{E}(S_1|X) = R_{S_1X} R_X^{-1} \underline{X} \\ \hat{S}_2 &= \hat{E}(S_2|X) = R_{S_2X} R_X^{-1} \underline{X} \\ &\vdots \\ \hat{S}_m &= \hat{E}(S_m|X) = R_{S_mX} R_X^{-1} \underline{X} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

(ادامه در ص بعد)

وبه‌طور خلاصه:

$$\underline{\hat{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{S_1X} \\ R_{S_2X} \\ \vdots \\ R_{S_mX} \end{pmatrix} R_X^{-1} \underline{X} = E \begin{pmatrix} S_1 X^h \\ S_2 X^h \\ \vdots \\ S_m X^h \end{pmatrix} R_X^{-1} \cdot \underline{X} =$$

$$= E(\underline{S}\,\underline{X}^h) R_X^{-1} \underline{X} \Longrightarrow \underline{\hat{S}} = R_{SX} R_X^{-1} \underline{X} \Rightarrow \boxed{\underline{\hat{S}} = \hat{E}(\underline{S}|\underline{X}) = R_{SX} R_X^{-1} \underline{X}}$$

درواقع تخمین m مجهول را می‌توان m مسألهٔ مستقل از هم دانست که جواب آن‌ها با فرمول سادهٔ زیر خلاصه می‌گردد:

$$\underline{\hat{S}} = \hat{E}(\underline{S}|\underline{X}) = R_{SX} R_X^{-1} \underline{X}$$

برای مجموع خطای تخمین این m مجهول نیز می‌توان رابطهٔ ساده‌ای پیدا کرد.

$$P_{min} = \hat{P}(\underline{S}|\underline{X}) \triangleq \sum_{i=1}^{m} E|S_i - \underbrace{\hat{E}(S_i|\underline{X})}_{\hat{S}_i}|^2 = E\sum_{i=1}^{n}|S_i - \hat{S}_i|^2 =$$

$$= E\|\underline{S} - \underline{\hat{S}}\|^2 = E\,\mathrm{Trace}(\underline{S} - \underline{\hat{S}})(\underline{S} - \underline{\hat{S}})^h = \mathrm{Trace}\left(E(\underline{S} - \underline{\hat{S}})\underline{S}^h - E(\underline{S} - \underline{\hat{S}})\underline{\hat{S}}^h\right)$$

$$= \mathrm{Trace}(E\,\underline{S}\,\underline{S}^h - E\,\underline{\hat{S}}\,\underline{S}^h) - \mathrm{Trace}(E(\underline{S} - \underline{\hat{S}})\underbrace{(R_{SX}R_X^{-1}\underline{X})^h}_{X^h R_X^{-1} R_{SX}^h}) =$$

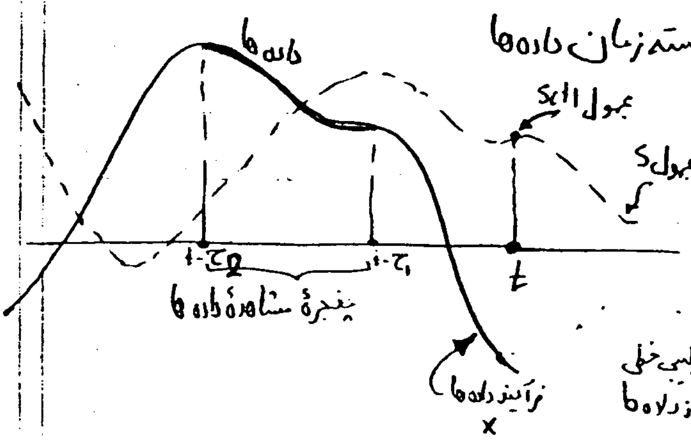
که طبق اصل تعامد $= 0$

$$= \mathrm{Trace}(R_S) - \mathrm{Trace}(E R_{SX} R_X^{-1} \underline{X}\,\underline{S}^h) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{P}(\underline{S}|\underline{X}) = \mathrm{trace}(R_S) - \mathrm{trace}(R_{SX} R_X^{-1} R_{XS})}$$

4 - تخمین خطی برحسب فرآیند پیوسته‌زمان داده‌ها

4-1 کلیات



$$\hat{S}(t) = \hat{E}\left(S(t) \,|\, X(t-\alpha), \alpha \in [\tau_1, \tau_2]\right)$$

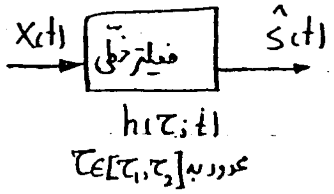
$$= \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha; t) X(t-\alpha)\, d\alpha$$

به‌صورت ترکیبی خطی از داده‌ها

ص بعد

$$= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)\,X(t-\alpha)\,d\alpha \quad , \quad h(\alpha;t)=0 \ \text{for}\ \alpha \notin [\tau_1,\tau_2]$$

ملاحظه می گردد که می توان تخمین خطی را، معادل مسأله پیدا کردن یک فیلتر خطی دانست، فیلتری که:



و خطای زیر را می نیمم کند:

$$P = E|S(t)-\hat{S}(t)|^2$$

به کمک اصل تعامد می توان پاسخ ضربه این فیلتر را پیدا کرد.

$$S(t) - \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t)\,X(t-\alpha)\,d\alpha \perp X(t-\tau) \quad \text{for } \forall \tau \in [\tau_1,\tau_2]$$

یعنی:

$$E\left(S(t) - \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t)\,X(t-\alpha)\right) X^*(t-\tau) = 0 \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} R_{SX}(t,t-\tau) = \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t)\,R_X(t-\alpha,t-\tau)\,d\alpha \\ \forall \tau \in [\tau_1,\tau_2] \end{cases}$$

در این معادله انتگرالی، معمولاً (R_X و R_{SX}) معلوم فرض می گردند و مجهول پاسخ ضربه فیلتر $h(\alpha;t)$ است.

راه حل کلی معادله انتگرالی فوق روش عددی است که این معادله را به یک دستگاه معادلات خطی بدل کند.

* اگر فرآیند داده ها، همان فرآیند مجهول باشد $X=S$ و $\tau_1>0$ باشد، معادله را پیشگوئی خالص گویند.
اما در حالت کلی و با $\tau_1>0$ مسأله را فیلترینگ + پیشگوئی گویند.
در حالت $\tau_1=0$ معادله را فیلترینگ خالص گویند.

اگر $\tau_1<0$ باشد، لحظه t نمی تواند زمان واقعی باشد، یعنی با یک مسأله غیرزمان واقعی سروکار داریم و فیلتر حاصل نیز یک فیلتر غیرعلی می گردد.

(مسأله غیرزمان واقعی یعنی مسأله ای که در آن پارامتر t زمان نیست و یا این که زمان واقعی نیست و زمان قراردادی است.)

* در حالتی که فرآیندهای داده و فرآیند مجهول توأماً WSS باشند، فیلتر لازم نیز یک فیلتر LTI می گردد چرا که معادلهٔ انتگرالی به صورت زیر در می آید:

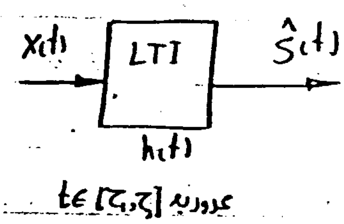
$$R_{SX}(\tau) = \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t)\, R_X(\tau-\alpha)\, d\alpha \qquad \forall \tau \in [\tau_1,\tau_2]$$

در این معادله صحبت های معلوم به t بستگی ندارد، پس جواب معادله یعنی $h(\alpha;t)$ نیز به t بستگی نخواهد داشت، یعنی:

* برای فرآیندهای توأماً ساکن:

$$\hat{S}(t) = \hat{E}\left(S(t) \mid X(t-\alpha),\ \alpha\in[\tau_1,\tau_2]\right) =$$

$$= \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha)\, X(t-\alpha)\, d\alpha \equiv h(t) * X(t)$$



معادلهٔ وینر هوف
$$\begin{cases} R_{SX}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha) R_X(\tau-\alpha)\, d\alpha \\ \forall \tau \in [\tau_1,\tau_2] \end{cases} \Longrightarrow h(t)$$

$$P_{min} = E\left((S(t)-\hat{S}(t))\, S^*(t)\right)$$

New جلسهٔ آخر ///

4-1- کلیات

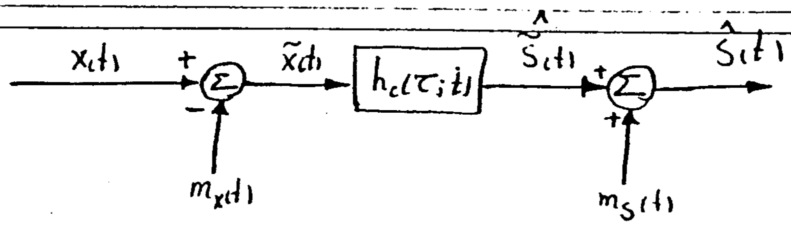
نکات:

1) با تعیین پاسخ ضربهٔ فیلتر لازم، محاسبهٔ متوسط مربع خطا از رابطهٔ زیر به راحتی مقدور خواهد بود:

$$P_{min} = E(S(t)-\hat{S}(t))S^*(t) = E\left(S(t) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t)\, X(t-\alpha)\, d\alpha\right) S^*(t) =$$

$$= \underbrace{R_S(t,t) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t) R^*_{SX}(t,t-\alpha)\, d\alpha}_{\text{به طور کلی}} \underset{\text{در توأماً WSS}}{=} R_S(0) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t) R^*_{SX}(\alpha)\, d\alpha$$

2) با استفاده از مدل ریاضی گفته شده تخمین مستوی را می توان بدست آورد.



مثلاً در حالت توأماً WSS داریم:

$$\hat{S}(t) = m_S + \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_c(\alpha)\left(X(t-\alpha) - m_X\right) d\alpha$$

و معادلهٔ انتگرالی برای تعیین $h_c(t)$:

$$C_{SX}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_c(\alpha)\, C_X(\tau-\alpha)\, d\alpha , \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$$

③ در حالت توأماً WSS با توجه به رابطهٔ زیر:

$$\hat{S}(t) = h(t) * X(t) \Longrightarrow \hat{S}(t+\lambda) = h(t+\lambda) * X(t) = h_0(t) * X(t)$$

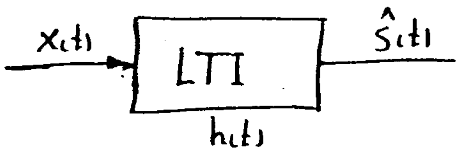
پس برای تعیین $S(t+\lambda)$ کافی است تعیین $S(t)$ را برای پنجرهٔ مشاهدهٔ داده‌های با $\tau_1' = \tau_1 + \lambda$ و $\tau_2' = \tau_2 + \lambda$ در نظر گیریم و سپس از روی این پاسخ ضربه $h(t)$ پاسخ ضربهٔ مورد نیاز $h_0(t)$ را بدست آوریم

$$h_0(t) = h(t+\lambda)$$

4-2- حالت ساکن و مشاهدهٔ کامل

$$\hat{S}(t) = \hat{E}\left(S(t) \mid X(t-\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\right) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, X(t-\alpha)\, d\alpha = h(t) * X(t)$$

مسأله معادل است با مسألهٔ پیدا کردن یک فیلتر LTI که هیچ قیدی روی پاسخ ضربه آن نداریم.



به طوری که: $E|S(t) - \hat{S}(t)|^2 = Min$

فیلتر لازم در حالت کلی یک فیلتر غیرعلّی می‌گردد و به فیلتر وینر غیرعلّی معروف است.

با نوشتن اصل تعامد:

$$\begin{cases} \left(S(t) - \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, X(t-\alpha)\, d\alpha\right) \perp X(t-\tau) \\ \forall \tau \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} R_{SX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) R_X(\tau-\alpha)\, d\alpha = h(\tau) * R_X(\tau) \\ \forall \tau \in \mathbb{R} \end{cases}$$

چون دو طرف تساوی به ازای جمیع مقادیر τ مساوی هستند، پس تبدیل فوریه دو طرف نیز مساوی خواهد بود.

$$\Longrightarrow S_{SX}(f) = H(f) \cdot S_X(f) \Longrightarrow \boxed{H(f) = \frac{S_{SX}(f)}{S_X(f)}} \quad , \quad h(t) = F^{-1}\{H(f)\}$$

$$P_{min} = E\Big(\big(S(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) x(t-\alpha)\, d\alpha\big) S^*(t)\Big) =$$

$$= R_S(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) R^*_{SX}(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} S_S(f)\, df - \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S^*_{SX}(f)\, df =$$

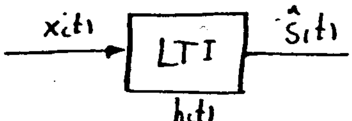
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(S_S(f) - \frac{S_{SX}(f)}{S_X(f)} S^*_{SX}(f)\Big) df \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{min} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(S_S(f) - \frac{|S_{SX}(f)|^2}{S_X(f)}\Big) df}$$

4-3- حالت ساکن و مشاهده از $-\infty$ تا لحظهٔ $t-\tau_1$

$$\hat{S}(t) = \hat{E}\big(S(t) \,|\, x(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)\big) = \int_{\alpha=\tau_1}^{\infty} h(\alpha) x(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) x(t-\alpha)\, d\alpha$$

مسأله معادل است با مسألهٔ پیدا کردن یک فیلتر LTI که پاسخ ضربهٔ آن از لحظهٔ τ_1 شروع می‌گردد.



$h(t)$
(محدود به فاصلهٔ $t \geq \tau_1$)

اگر $\tau_1 = 0$ درنظر گرفته شود (یعنی حالتی که فرآیند داده‌ها از لحظهٔ $-\infty$ تا خود لحظهٔ t مشاهده شده است و می‌خواهیم تخمین فرآیند مجهول را در همان لحظهٔ t بدست آوریم.) قیدی که روی فیلتر خواهیم داشت قید علّی بودن خواهد بود و فیلتر مربوطه را فیلتر وینر علّی گویند.

به کمک اصل تعامد:

$$\begin{cases} R_{sx}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\infty} h(\alpha) R_x(\tau-\alpha)\, d\alpha \\ \forall \tau \geq \tau_1 \end{cases}$$

چون دو طرف به ازای جمیع مقادیر τ مساوی نیستند، پس لزوماً تبدیل فوریه های یکسان نخواهند داشت.

یک راه حل سادهٔ مسأله، استفاده از فرآیند ابداع ~~داده~~ داده ها است. فرآیندی سفید و نرمالیزه که با فرآیند داده ها بطور خطی و علّی معادل است ولذا:

$$\{X(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)\} \overset{\text{خطی}}{\equiv} \{w(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)\}$$

یعنی:

$$\hat{S}(t) = \hat{E}\{s(t) | x(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)\} = \hat{E}(s(t) | w(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)) =$$

$$= \int_{\alpha=\tau_1}^{\infty} h_w(\alpha) w(t-\alpha)\, d\alpha$$

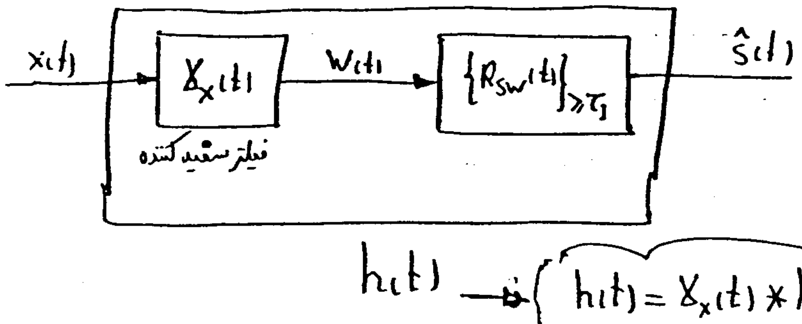
$$\text{اصل تعامد} \longrightarrow \begin{cases} R_{sw}(\tau) = \int_{\tau_1}^{+\infty} h_w(\alpha) R_w(\tau-\alpha)\, d\alpha \\ \forall \tau \geq \tau_1 \end{cases}$$

$$S_w(f) = 1 \Longrightarrow R_w(\tau) = \delta(\tau)$$

پس:

$$R_{sw}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\infty} h_w(\alpha) \delta(\tau-\alpha)\, d\alpha \underset{\tau \geq \tau_1}{=} h_w(\tau) \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} h_w(t) &= R_{sw}(t), & t \geq \tau_1 \\ &= 0, & t < \tau_1 \end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{h_w(t) = \{R_{sw}(t)\}_{\geq \tau_1}}$$



$$h(t) \longrightarrow \begin{cases} h(t) = \gamma_x(t) * h_w(t) = \\ = \gamma_x(t) * \{R_{sw}(t)\}_{\geq \tau_1} \end{cases}$$

در حوزهٔ زکامش :

$$H(f) = \Gamma_x(f) . \{ S_{sw}(f) \}_{\geq \tau_1}$$

حوزهٔ زمان

به راحتی دیده می‌شود که با $\tau_1 = -\infty$ داریم:

$$H(f) = \Gamma_x(f) . \{ S_{sw}(f) \}_{\geq -\infty} =$$

$$= \Gamma_x(f) . S_{sw}(f) = \Gamma_x(f)\, S_{sx}(f)\, \Gamma_x^*(f) = S_{sx}(f) . |\Gamma_x(f)|^2 = \frac{S_{sx}(f)}{S_x(f)}$$

$w = \gamma_x * x$

که نتایج گذشته را تصدیق می‌کند. (همان جواب قسمت (2-4

رابطهٔ مفید $\longrightarrow$ $\boxed{S_{sw}(f) = S_{sx}(f)\, \Gamma_x^*(f)}$

هم

$$P_{min} = R_s(0) - \int_{\tau_1}^{\infty} h(\alpha) R_{sx}^*(\alpha) d\alpha = R_s(0) - \int_{\tau_1}^{\infty} h_w(\alpha) R_{sw}^*(\alpha) d\alpha$$

* تبصره: برای تابع کسری $G(f)$ محاسبهٔ $\{G(f)\}_{\geq \tau_1}$ در همان حوزهٔ زکامش مقدور است:

تابع کسری قابل تفکیک به کسور جزئی است $\longrightarrow$

$$G(f) = \underbrace{\sum_{LHP} \frac{a_i}{j2\pi f - p_i}}_{\text{سمت علی}} + \underbrace{\sum_{RHP} \frac{b_i}{j2\pi f - q_i}}_{\text{سمت ضد علی}} + \underbrace{\sum_i c_i (j2\pi f)^i}_{t=0 \text{ پاسخ واقع در}}$$

$$\{G(f)\}_{\geq \tau_1} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{LHP} \frac{a_i}{j2\pi f - p_i} e^{-\tau_1 (j2\pi f - p_i)} & , \tau_1 > 0 \\[2ex] \displaystyle\sum_{LHP} \frac{a_i}{j2\pi f - p_i} + \sum_i c_i (j2\pi f)^i & , \tau_1 = 0 \\[2ex] \displaystyle G(f) - \sum_{RHP} \frac{b_i}{j2\pi f - q_i} e^{-\tau_1 (j2\pi f - q_i)} & , \tau_1 < 0 \end{cases}$$

4-4 - حالت ساکن، پیشگوئی خالص

$$\hat{S}(t)=\hat{E}\left(s(t)\mid s(t-\alpha):\alpha\in[\tau_1,\infty]\right)$$

(البته با $\tau_1>0$) و

حالت خاص 4-3-4 می باشد با تبدیل x به s و اینکه $\tau_1>0$.

$$H(f)=\Gamma_s(f)\{S_{sw}(f)\}_{\geq\tau_1}\longrightarrow$$

$$S_{sw}(f)=S_s(f)\,\Gamma_s^*(f)=L_s(f)\,\cancel{L_s^*(f)\,\Gamma_s^*(f)}=L_s(f)$$

$$\longrightarrow\ \boxed{H(f)=\Gamma_s(f)\cdot\{L_s(f)\}_{\geq\tau_1}}$$

$$P_{min}=R_s(0)-\int_{\tau_1}^{\infty}h_w(\alpha)R_{sw}^*(\alpha)\,d\alpha\longrightarrow P_{min}=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{S_s(f)}_{|L_s(f)|^2}df-\int_{\tau_1}^{\infty}|l_s(\alpha)|^2d\alpha\longrightarrow$$

$$h_w(t)=\{R_{sw}(t)\}_{\geq\tau_1}=\{l_s(t)\}_{\geq\tau_1}$$

$$R_{sw}(t)=l_s(t)$$

$$\xrightarrow[\text{پارسوال}]{}\ P_{min}=\int_{-\infty}^{+\infty}|l_s(\alpha)|^2d\alpha-\int_{\tau_1}^{\infty}|l_s(\alpha)|^2d\alpha\longrightarrow$$

$$\longrightarrow P_{min}=\int_{-\infty}^{\tau_1}|l_s(\alpha)|^2d\alpha\underset{\text{علّی بودن}}{=}\int_{0}^{\tau_1}|l_s(\alpha)|^2d\alpha\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\ \boxed{\begin{cases}h(t)=\gamma_s(t)*\{l_s(t)\}_{\geq\tau_1}\\ H(f)=\Gamma_s(f)\cdot\{L_s(f)\}_{\geq\tau_1}\\ P_{min}=\int_{0}^{\tau_1}|l_s(t)|^2dt\end{cases}}$$

مثال: پیشگوئی وینر با تابع همبستگی

$$R_s(\tau)=e^{-\beta|\tau|}$$

$$\longrightarrow S_s(f)=\frac{2\beta}{\beta^2+(2\pi f)^2}=\frac{2\beta}{(\beta+j2\pi f)(\beta-j2\pi f)}=L_s(f)L_s^*(f)\longrightarrow$$

جواب نیم ناز:

$$L_s(f) = \frac{\sqrt{2\beta}}{\beta + j2\pi f} \Longrightarrow \Gamma_s(f) = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}(\beta + j2\pi f)$$

$$H(f) = \Gamma_s(f)\left\{L_s(f)\right\}_{\geq \tau_1} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\beta}}}(\beta + j2\pi f)\left\{\frac{\cancel{\sqrt{2\beta}}}{\beta + j2\pi f}\right\}_{\geq \tau_1} =$$

$$\overset{\tau_1 > 0}{=} \cancel{(\beta + j2\pi f)}\frac{e^{-\tau_1(\beta + j2\pi f)}}{\cancel{\beta + j2\pi f}} \Longrightarrow H(f) = e^{-\tau_1(j2\pi f + \beta)} = e^{-\beta\tau_1} e^{-j2\pi f \tau_1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h(t) = e^{-\beta\tau_1} \cdot \delta(t - \tau_1) \Longrightarrow \hat{S}(t) = S(t) * h(t) = e^{-\beta\tau_1} S(t - \tau_1)$$

پس برای فرآیند با تابع همبستگی $e^{-\beta|\tau|}$ بهترین پیشگوئی خطی آینده بصورت مضربی از آخرین مقدار مشاهده شده است و به عبارت معادل:

$$\hat{E}(S(t) \mid S(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty]) = \hat{E}(S(t) \mid S(t - \tau_1))$$

چنین فرآیندی را فرآیند مارکوف به مفهوم وسیع گویند.

---

4 - 5 - حالت ساکن با مدل خطی

(الف) کلیات ~~[illegible]~~

منظور ما از مدل خطی، مدل زیر است:

$$\left\{\begin{array}{l} X(t) = S(t) + V(t) \\ R_V(\tau) = N_0\,\delta(\tau) \Longleftrightarrow S_V(f) = N_0 \\ V(\cdot) \perp S(\cdot) \end{array}\right\}$$

$*$ $S_X(f) = S_S(f) + S_V(f) = S_S(f) + N_0$

$*$ $S_{SX}(f) = S_{SS}(f) + S_{SV}(f) = S_S(f) + 0 = (S_X(f) - N_0)$

$*$ $S_{SW}(f) = S_{SX}(f)\,\Gamma_X^*(f) = (S_X(f) - N_0)\,\Gamma_X^*(f) = L_X(f) - N_0\,\Gamma_X^*(f) \Longrightarrow$

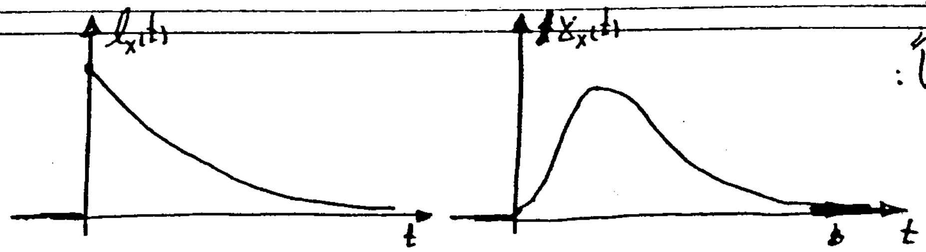
$$\Longrightarrow R_{SW}(t) = l_X(t) - N_0\,\gamma_X^*(-t)$$

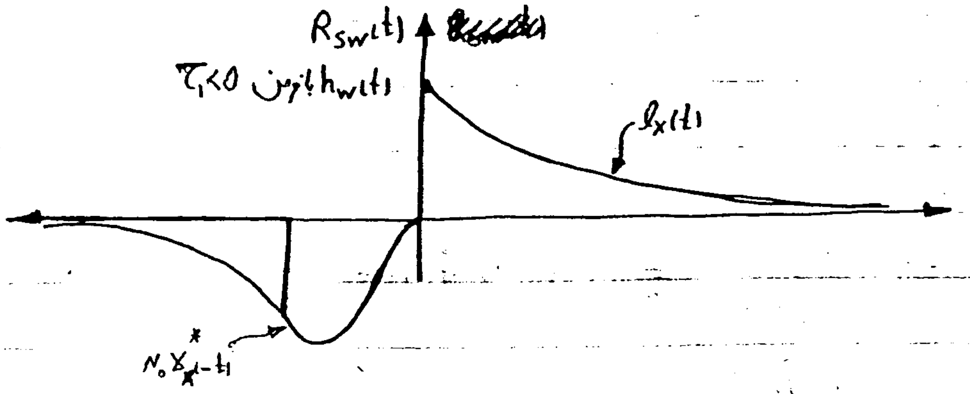
برای مشاهده از $-\infty$ تا $t - \tau_1$:

$$h_W(t) = \left\{R_{SW}(t)\right\}_{\geq \tau_1} \Longrightarrow h(t) = \gamma_X(t) * h_W(t)$$

$$P_{min} = R_S(0) - \int |R_{SW}(\alpha)|^2\, d\alpha$$

مثلاً :





الف) مشاهده کامل

$$H(f)=\frac{S_{sx}(f)}{S_x(f)}\ ,\quad P_{min}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(S_s(f)-\frac{|S_{sx}(f)|^2}{S_x(f)}\right)df$$

$$\Longrightarrow \boxed{H(f)=\frac{S_s(f)}{S_s(f)+N_0}} \Longrightarrow h(t)=F^{-1}\{H(f)\}$$

$$P_{min}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(S_s(f)-\frac{S_s^2(f)}{S_s(f)+N_0}\right)df=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0 S_s(f)}{S_s(f)+N_0}\,df=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}H(f)\,df=N_0\,h(0)$$

$$\longrightarrow \boxed{P_{min}=N_0\,h(0)}$$

ج) فیلترینگ + پیشگویی

یعنی حالتی که مشاهدات به خود لحظه t نرسیده است، یعنی $\tau_1>0$ است.

$$\{R_{sw}(t)\}_{\geq\tau_1}=\{\ell_x(t)\}_{\geq\tau_1}-N_0\{\gamma_x^*(-t)\}_{\geq\tau_1}\overset{\tau_1>0}{=}\{\ell_x(t)\}_{\geq\tau_1}-0$$

$$h(t)=\gamma_x(t)*h_w(t)=\gamma_x(t)*\{\ell_x(t)\}_{\geq\tau_1}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l} h(t)=\gamma_x(t)*\{\ell_x(t)\}_{\geq\tau_1}\\ H(f)=\Gamma_x(f)\cdot\{L_x(f)\}_{\geq\tau_1}\\ P_{min}=R_s(0)-\int_{\tau_1}^{\infty}|\ell_x(\alpha)|^2d\alpha\end{array}\right\}$$

د) فیلترینگ خالص (فیلتر وینر علّی)

یعنی حالتی که $\tau_1=0$ است.

تفاوتی که این حالت با حالت قبل ($\tau_1>0$) دارد اینکه اگر $\gamma_x(t)$ در $t=0$ دارای تابع ضربه باشد، $\{\gamma_x^*(-t)\}_{\geq 0}$ صفر نخواهد بود، بلکه همان ضربه باقی می‌ماند.

$$|\Gamma_x(f)|^2 = \frac{1}{S_x(f)} = \frac{1}{S_s(f)+N_0}$$

$$|\Gamma_x(\infty)|^2 = \frac{1}{S_s(\infty)+N_0} = \frac{1}{N_0} \Longrightarrow \Gamma_x(\infty) = \frac{1}{N_0} \longrightarrow$$

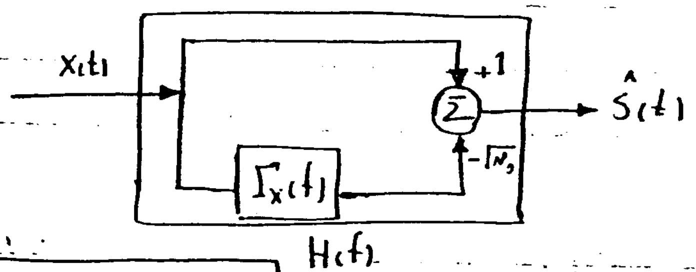
با فرض $S_s(\infty)=0$

$$\longrightarrow \Gamma_x(f) = \sum \frac{r_i}{j2\pi f - p_i} + \frac{1}{\sqrt{N_0}} \Longrightarrow \gamma_x(t) = \sum r_i e^{p_i t} + \frac{1}{\sqrt{N_0}}\delta(t)$$

$$h_w(t) = \{\ell_x(t)\}_{\geq 0} - N_0\{\gamma_x^*(-t)\}_{\geq 0} = \ell_x(t) - N_0\frac{1}{\sqrt{N_0}}\delta(t) = \ell_x(t) - \sqrt{N_0}\,\delta(t)$$

$$h(t) = \gamma_x(t) * h_w(t) = \gamma_x(t) * \ell_x(t) - \sqrt{N_0}\,\gamma_x(t) * \delta(t) \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{h(t) = \delta(t) - \sqrt{N_0}\,\gamma_x(t)} \Longleftrightarrow \boxed{H(f) = 1 - \sqrt{N_0}\,\Gamma_x(f)}$$



$$\Longrightarrow \boxed{\hat{S}(t) = X(t) - \sqrt{N_0}\,W(t)}$$

می‌توان نشان داد که در این فیلتر نیز:

$$\boxed{P_{min} = N_0\,h(\alpha)}$$

$$g^*(t) \longleftrightarrow G^*(-f)$$

پارسوال : $\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t) g_2^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(f) G_2^*(f)$

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E|X_T(f)|^2 \xleftrightarrow{F.T} \langle R_x(t+\tau,t)\rangle_t \to R_x(\tau)$$

$$S_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T(f) \xleftrightarrow{F.T} \langle R_{xy}(t+\tau,t)\rangle_t \text{ و } R_{xy}(\tau)$$

$$S_x(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_A(i)\, e^{-j2\pi f i T_0}$$

مدولاسیون PAM

$$|S_{xy}(f)|^2 \leq S_x(f) S_y(f)$$

$$S_{x+y}(f) = S_x(f) + S_y(f) + S_{xy}(f) + S_{yx}(f)$$

متعامد $x, y \Longrightarrow 0$

مؤلفهٔ زمانی دامنه با فاز φ, f : $K\cos(2\pi A + B)$

$$\Longrightarrow S_x(f) = \frac{K^2}{4}\left(f_A(f) + f_A(-f)\right)$$

$$S_x(f) = S_{m_x}(f) + S_{\tilde{x}}(f) \xrightarrow{WSS} S_x(f) = |m_x|^2 \delta(f) + S_{\tilde{x}}(f)$$

x, y WSS و $S_x(f) S_y(f) = 0 \longrightarrow$ متعامد و ناهمبسته x, y

$$\begin{cases} R_x^*(t,s) = R_x(s,t) \\ R_x^*(\tau) = R_x(-\tau) \end{cases}$$

$$0 \leq \iint_{-\infty}^{+\infty} g(t) g^*(s) R_x(t,s)\,dt\,ds$$ تابع همبستگی مثبت معین است

$$|R_x(t,s)|^2 \leq R_x(t,t) R_x(s,s) \xRightarrow{WSS} |R_x(\tau)|^2 \leq R_x^2(0)$$

در WSS حقیقی

$R_x(T_0) = R_x(0) \Longrightarrow$ $R_x(\tau)$ پریودیک با T_0

$R_x(\tau)$ پریودیک با T_0 $\Longrightarrow$ $x(t)$ پریودیک با T_0

$$S_{yx}(f) = H(f) S_x(f)$$

$$S_{xy}(f) = S_x(f) H^*(f)$$

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$$

$$L^{-1}\{s^i\} = \delta^{(i)}(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_n}\right\} = \begin{cases} e^{p_n t} u(t) & \text{راست گرا} \\ -e^{p_n t} u(-t) & \text{چپ گرا} \end{cases}$$

$$\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_k^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ \int_a^b |\varphi_i(t)|^2\,dt = E_i & k = i \end{cases}$$

$$\hat{g}(t) = \sum_n G_n \varphi_n(t), \quad \rho = \int_a^b |g(t) - \hat{g}(t)|^2\,dt = \min = 0$$

$$G_n = \frac{1}{E_n} \int_a^b g(t) \varphi_n^*(t)\,dt$$

بسط فوریهٔ فرایند WSS پریودیک

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \sum_n \lambda_n e^{jn\omega_0 t} \varphi_n(t) \\ \lambda_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} R_x(\alpha) e^{-jn\omega_0 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} \\ C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} X(\alpha) e^{-jn\omega_0 \alpha} \end{cases}$$

کلیهٔ C_n ها متعامد و ناهمبسته

$$E\, C_n C_m^* = \lambda_n \operatorname{sinc}(n-m)$$

KL با :

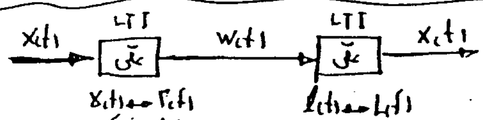
$$\int_a^b R_x(t,s) \varphi(s)\,ds = \lambda \varphi(t)$$

(شرط فرایند مثبت ⇐ از تعامد و ناهمبستگی ضرایب نتیجه می‌شود)

$$\int_a^b |\varphi_i(t)|^2\,dt = 1, \quad \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j^*(t)\,dt = 0$$

تابع همبستگی پیوسته $\Longrightarrow R_x(t,s) = \sum_n \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n^*(s)$

رابطهٔ مرسر $\quad \forall t, s \in [a,b]$



$x(t) \leftrightarrow \Gamma(f)$ فیلتر سفیدکننده

$\ell(t) \leftrightarrow L(f)$ فیلتر ایجاد

$$\Gamma(f) L(f) = 1, \quad S_x(f) = |L(f)|^2$$

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_n C_n \varphi_n(t) \\ C_n = \int_a^b X(\alpha) \varphi_n^*(\alpha)\,d\alpha \end{cases}$$

کلیهٔ ضرایب بسط متعامدند.

$$E\, C_n C_m^* = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \lambda_m \end{cases}$$

$$R_{\hat{x}}(t,t) = \sum_n \lambda_n |\varphi_n(t)|^2 = R_{x\hat{x}} = R_{\hat{x}x}$$

شرط پالی وینر $\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|H|}{1+f^2}\,df \neq \pm\infty \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln S_x(f)}{1+f^2}\,df \neq \pm\infty$ یا $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|L(f)|}{1+f^2}\,df \neq \pm\infty$

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau - nT}{T}\right) \\ C_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau - nT}{T}\right) \\ X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau - nT}{T}\right) \end{cases}$$

$$T \geq \frac{1}{2W}$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

$$g(t-s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kT-s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

$$g(s-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(s-kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

$$g(n) = \int_{-1/2}^{1/2} G(f) e^{j2\pi f n}\,df$$

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) e^{-j2\pi f n}$$

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_1(n) g_2^*(n) = \int_{-1/2}^{1/2} G_1(f) G_2^*(f)\,df$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_i z^{-1}}\right\} = \begin{cases} p_i^n u(n) & \text{راست گرا} \\ -p_i^n u(-n-1) & \text{چپ گرا} \end{cases} \Rightarrow Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_i z^{-1}}\right\} = \begin{cases} p_i^n u(n) & |p_i|<1 \\ -p_i^n u(-n-1) & |p_i|>1 \\ \frac{1}{2}(u(n)-u(-n-1))p_i^n & |p_i|=1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} m_Y(n) &= m_X(n) * h(n) \\ R_{YX}(n,l) &= R_X(n,l) * h(n) \\ R_{XY}(n,l) &= R_X(n,l) * h^*(l) \\ R_Y(n,l) &= R_X(n,l) * h(n) * h^*(l) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{ورودی و خروجی توأماً WSS می شوند}]{\text{در LTI ها ورودی WSS}} \left\{\begin{aligned} m_Y &= m_X H(0) \\ R_{YX}(m) &= h(m) * R_X(m) \\ R_{XY}(m) &= R_X(m) * h^*(-m) \\ R_Y(m) &= R_X(m) * h(m) * h^*(-m) \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} S_{YX}(Z) &= H(Z) S_X(Z) \\ S_{XY}(Z) &= S_X(Z) \cdot H^*\left(\tfrac{1}{Z}\right) \\ S_Y(Z) &= S_X(Z) \cdot H(Z) H^*\left(\tfrac{1}{Z}\right) \end{aligned}\right\} \qquad S_X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(m) Z^{-m}$$

$$iid \Longrightarrow f_X(\underline{x};\underline{n}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$ SSS کامل مدلسازی

$$S_X(f) = \sigma_X^2 + m_X^2 \delta(f) \quad f \in \{-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\}$$

نویز سفید $\Longrightarrow$ $R_X(m) = C_X(m) = 0$

$$R_X(0) = C_X(0) = E|\tilde{X}(n)|^2 = \sigma^2$$

$MA^{(M)} \longrightarrow X(n) = [b_1 V(n-1) + \dots + b_M V(n-M)] + V(n)$ $\qquad V(n) \to \boxed{LTI} \to X(n)$

$AR^{(N)} \longrightarrow X(n) = -[a_1 X(n-1) + \dots + a_N X(n-N)] + V(n)$ $\qquad V(n) \to \boxed{LTI} \to X(n)$

$ARMA(M,N) \Longrightarrow X(n) = -[a_1 X(n-1) + \dots + a_N X(n-N)] + [b_1 V(n-1) + \dots + b_M V(n-M)] + V(n)$

شرط پالی وینر گسسته — $\int_{-1/2}^{1/2} \ln(S_X(f))\,df \neq \pm\infty$

باند محدود

$$\left|\frac{X(t+\tau)-X(t)}{\tau}\right|^2 \leqslant 4\pi^2 w P_X$$ سرعت تغییرات

$$\left|\frac{d^n}{d\tau^n} R_X(\tau)\right| \leqslant (2\pi w)^n P_X$$ دلیل3

$f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}')=f_X(\underline{x};\underline{t})\cdot f_Y(\underline{y};\underline{t}')$, $\forall \underline{t}\in T^n, \forall \underline{t}'\in T'^m, \forall n,m$ $\Longrightarrow X(\cdot)\perp\!\!\!\perp Y(\cdot)$

$R_{XY}(t,t')=0$, $\forall t\in T, \forall t'\in T'$ $\Longrightarrow X(\cdot)\perp Y(\cdot)$

$C_{XY}(t,t')=0$, $\forall t\in T, \forall t'\in T'$ $\Longrightarrow X(\cdot)\angle Y(\cdot)$

$C_{XY}(t,t')=E\tilde{X}(t)\tilde{Y}^*(t')=R_{XY}(t,t')-m_X(t)m_Y^*(t')$ (تعریف)

$C^*_{XY}(t,t')=C_{YX}(t',t)$, $C^*_X(t,s)=C_X(s,t)$ → همین طور برای R

$X(t)\perp\!\!\!\perp X(s)$, $\forall |t-s|>a$ → a-dependent

$C_X(t,s)=0$, $\forall |t-s|>a$ → a-correlated

$\rho_X(t,s)=\frac{C_X(t,s)}{\sqrt{C_X(t,t)C_X(s,s)}}$

Markov → $f_{X_{n+1}}(x_{n+1}|\underline{X}=\underline{x})=f_{X_{n+1}}(x_{n+1}|X_n=x_n)$

Martingel → $E(X_{n+1}|\underline{X}=\underline{x})=x_n$

BNM ← بانو مستقل

① BNM → Markov / ② BNM, $m_X(t)=cte$ → Martingel

③ Markov → توصیف مرتبه ۲ کامل ④ BNM → مرتبه اول خود و توابع کامل

⑤ BNM → $C_X(t,T)=C_X(t,t)=\sigma^2_X(t)$

شرایط WSS: $m_X(t)=m_X$, $R_X(t+\tau,t)=R_X(\tau)$

SSS مرتبه n ← توابع احتمال n بعدی مستقل از t

در SSCS و WSCS ← به جای مستقل از t، با دوره تناوب T

شرایط WSS توأم X و Y: WSS تک تک، $R_{XY}(t+\tau,t)=R_{XY}(\tau)$

SSS ← توابع توأم مستقل از t

① SSS مرتبه دو $\Longrightarrow$ WSS / ② $X\sim T$ SSCS و WSCS با دوره تناوب ③ $\Phi\sim U(0,T_0)$، $\Phi\perp\!\!\!\perp X(\cdot)$ $\Longrightarrow Y(t)\triangleq X(t+\Phi)$ ↓ SSS مرتبه n، WSS

فرآیند پواسن ⟸ فرآیند شمارش رخدادها

← با نمو مستقل

BNM → $f(\underline{x};\underline{t})=f(x_1;t_1)\prod_2^n f_X(x_i|x_{i-1}=x_{i-1})=f_{\Delta X}(x_i-x_{i-1};t_{i-1},t_i)$

$X(s)-X(t)\sim P(a_{t,s})$ * نمو ها مستقل از هم

$a_{t,s}=\int_t^s\lambda dt=\lambda(s-t)$ λ ثابت

$P_X(\underline{i};\underline{t})=P_X(i_1;t_1)\prod_{k=2}^n P_{\Delta X}(i_k-i_{k-1};t_{k-1},t_k)$ توابع احتمال n بعدی

$$=e^{-a_{0,t_1}}\frac{a_{0,t_1}^{i_1}}{(i_1)!}\prod_{k=2}^n e^{-a_{t_{k-1},t_k}}\frac{(a_{t_{k-1},t_k})^{(i_k-i_{k-1})}}{(i_k-i_{k-1})!}$$

$m_X(t)=\lambda t=a_{0,t}$

$C_X(t,s)=\lambda\cdot\min\{t,s\}=a_{0,\min(t,s)}$

$T_1\sim E(\lambda)$, $T_i\sim E(i,\lambda)$, $T_i-T_{i-1}\sim E(\lambda)$

فرآیند سیگنال تلگرافی ← مارکوف و SSS کامل (در صورت λ ثابت) و ME (در صورت λ ثابت)

$P(X(t)=+1)=P(X(t)=-1)=\frac12$

$P(X(s)=\pm1|X(t)=\pm1)=\frac12[1+e^{-2a_{t,s}}]$

$P(X(s)=\pm1|X(t)=\mp1)=\frac12[1-e^{-2a_{t,s}}]$

توابع احتمال n بعدی

$$P_X(\underline{i};\underline{t})=P\{X(t_1)=i_1\}\prod_{k=2}^n P\{X(t_k)=i_k|X(t_{k-1})=i_{k-1}\}=\frac12\prod_{k=2}^n\frac12[1+i_{k-1}i_ke^{-2a_{t_{k-1},t_k}}]$$

$\lambda=cte$ → $a_{t_{k-1},t_k}=\lambda(t_k-t_{k-1})$

$m_X(t)=0$, $C_X(t,s)=e^{-2a_{t,s}}\overset{\lambda\text{ ثابت}}{=}e^{-2\lambda|\tau|}$

فرآیند نرمال ← ممان اول و دوم = توصیف کامل (WSS ⟸ SSS کامل)

① $X(t)$ نرمال، $Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t,\alpha)X(\alpha)d\alpha$ $\Longrightarrow$ $Y(t)$ فرآیند نرمال

② $f_X(\underline{x};\underline{t})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det(C_X)}}e^{-\frac12\tilde{x}^TC_X^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_X)}$ توصیف مرتبه n ام

③ n متغیر تصادفی فرآیند ← بردار نرمال n بعدی

فرآیند نویز سفید ← ① کلیه متغیرهای تصادفی ← متعامد + ناهمبسته (اگر مستقل هم باشد ← فرآیند نویز سفید اکید)

$X(\cdot)=N(0,q(s)\delta(t-s))$: فرآیند نویز سفید نرمال

$N(0,N_0\delta(\tau))$ ← فرآیند نویز سفید ساکن

($N_0=1$ ← نویز سفید نرمالیزه)

$m_X(t)=0$, $R_X(t+\tau,t)=q(t)\delta(\tau)$

$w(\cdot)\sim S(0,N_0\delta(\tau))$

وینر $X(\cdot)\triangleq\int_0^t w(\alpha)d\alpha\sim N(0,N_0\min(t,s))$

فرآیند وینر ← فرآیندی نرمال است / بانو مستقل / مارکوف / مارتینگل

$m_X(t)=0$, $C_X(t,s)=N_0\min\{t,s\}$ ← با ممان های اول و دوم = کاملا توصیف

$f_{X(t)}(x)=f_X(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0t}}e^{-x^2/2N_0t}$

$f_{\Delta X}(x;t,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0|t-s|}}e^{-x^2/2N_0|t-s|}$

n بعدی pdf

$$f_X(\underline{x},\underline{t})=\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0t_1}}e^{\frac{-x^2}{2N_0t_1}}\prod_{k=2}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0(t_k-t_{k-1})}}e^{\frac{-(x_k-x_{k-1})^2}{2N_0(t_k-t_{k-1})}}$$

$t_n\geq\dots\geq t_k\geq\dots$

سیستم خطی (LTI):

$m_Y(t)=h(t)*m_X(t)$ $\overset{WSS}{=}$ $m_X\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)d\alpha=m_XH(0)$

$R_{YX}(t,s)=h(t)*R_X(t,s)$ = $h(\tau)*R_X(\tau)$

$R_{XY}(t,s)=R_X(t,s)*h^*(s)$ = $R_X(\tau)*h^*(-\tau)$

$R_Y(t,s)=h(t)*R_X(t,s)*h^*(s)$ = $h(\tau)*R_X(\tau)*h^*(-\tau)$

روابط کلی

$R_{h*X,g*Y}(t,s)=h_tg^*_sR_{XY}$

$R_{h*X,g*Y}(t,s)=h(t)*g^*(s)*R_{XY}$

$$y(t)=\frac{d}{dt}x(t)\Rightarrow\begin{cases}m_y(t)=m'_x(t) & =0\\ R_{yx}(t,s)=\frac{\partial}{\partial t}R_x(t,s) & =R'_x(\tau)\\ R_{xy}(t,s)=\frac{\partial}{\partial s}R_x(t,s) & =-R'_x(\tau)\\ R_y(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_x(t,s) & \underset{WSS}{=}-R''_x(\tau)\end{cases}$$

مشتق پواسن : $m_x(t)=\lambda$, $R_y(t,s)=R_y(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$, $C_y(\tau)$

فرآیند فریه های پواسن (ME ، ثابت)

ارگادیک بودن ← ME: $\langle x(t)\rangle_t\overset{ms}{=}m_x$

① شرط لازم و کافی بودن ME ← $\begin{cases}m_x(t)=m_x\\ \langle\langle C_x(t,s)\rangle_t\rangle_s=0\end{cases}$ ، $\lim\frac{1}{4T^2}\iint_{-T}^{T}E\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(s)\,dt\,ds$

② شرط لازم و کافی ME بودن WSS ← $\langle C_x(\tau)\rangle_\tau=0$ / ③ کافی ME بودن WSS ← $\int_{-\infty}^{+\infty}C_x(\tau)d\tau<\infty$; ④ کافی ME بودن WSS ← $\begin{cases}C_x(0)\neq\infty\\ C_x(\infty)=0\end{cases}$

⑤ شرط لازم و کافی CE ← $\begin{cases}R_x(t+\tau,t)=R_x(\tau) & \text{یکی بودن تابع همبستگی}\\ \langle\langle E x(t+\tau)x^*(t)x^*(s+\tau)x(s)\rangle_t\rangle_s=|R_x(\tau)|^2\end{cases}$

$CE: R_x(t+\tau,t)=E\,x(t+\tau)x^*(t)=\langle x(t+\tau)x^*(t)\rangle_t$

⑥ شرط لازم و کافی DE و متعادل ← $\begin{cases}F_x(x;t)=F_x(x) & \text{sss مرتبه اول بودن}\\ \langle\langle F_x(x,x;t,s)\rangle_t\rangle_s=F_x^2(x)\end{cases}$

⑦ شرط لازم و کافی DE بودن sss مرتبه دوم ← $\langle F_x(x,x;\tau)\rangle_\tau=F_x^2(x)$

⑧ شرط کافی DE بودن مرتبه اول فرآیند sss مرتبه دوم ← استقلال متغیرهای تصادفی به فاصلهٔ $\tau\to\infty$

⑨ در فرآیندهای نرمال $\left.\begin{matrix}CE\\ ME\end{matrix}\right\}\to DE$

$$f_{xy}(x,y|A)=\begin{cases}\frac{1}{P(A)}f_{xy}(x,y), & (x,y)\in A\\ 0 & (x,y)\notin A\end{cases}$$

$F_x(x|y\le y)=\frac{F_{xy}(x,y)}{F_y(y)}$, $f_x(x|y=y)=\frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}$

نکته ۱: ① $E\,g(x,y)|A=\frac{1}{P(A)}\iint_A g(x,y)f_{xy}(x,y)dxdy$ ② $E\,g(X,Y)=E_y\left(E_x(g(x,y)|y)\right)$

$\rho_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ / تعمیم یافته چبی‌شف : $P\{|W|\ge a\}\le\frac{E|W|^2}{a^2}$ ، مارکوف : $P\{x\ge Km_x\}\le\frac{1}{K}$ ، متعارف چبی‌شف : $P\{|X-m_x|\ge K\sigma_x\}\le\frac{1}{K^2}$ ، شوارتز: $|E\,xy|^2\le Ex^2\,Ey$

$\Phi_x(\omega)=E\,e^{j\omega x}\to f_x(x)\xrightarrow{FT}\Phi_x^*(\omega)$ / $\Phi_x^{(n)}(\omega)|_{\omega=0}=j^nEx^n$, $|\Phi_x(\omega)|\le\Phi_x(0)$

$\Gamma_x(z)=E\,z^x$, $P_x(i)\xrightarrow{ZT}\Gamma_x(z^{-1})$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^2)}}e^{-\frac{\sigma_y^2\tilde{x}^2+\sigma_x^2\tilde{y}^2-2\sigma_{xy}\tilde{x}\tilde{y}}{2(\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^2)}}$$

اگر x و y توأماً نرمال باشند x|y نرمال است و داریم: $m_{x|y}=\rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)+m_x$, $\sigma_{x|y}^2=\sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2)$

تخمین S : $\boxed{\begin{matrix}\hat{S}=m_S\\ P_{min}=\sigma_S^2\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}\hat{S}=\rho_{sx}\frac{\sigma_s}{\sigma_x}(x-m_x)+m_s\\ P_{min}=\sigma_s^2(1-\rho_{sx}^2)\end{matrix}}$ بهترین : $\boxed{\begin{matrix}\hat{S}=g(x)=m_{S|x}\\ P_{min}=E(S-\hat{S})^2=\int_{-\infty}^{+\infty}f_x(x)\sigma^2_{S|x}dx=E\,\sigma^2_{S|x}\end{matrix}}$ $P(X\approx x_0)\triangleq f_x(x)\cdot\Delta x$

$\|A\|^2=trace(A^hA)=trace(AA^h)$, $[A]_{n\times m}$

برای بردار $\underline{a}$: $\|\underline{a}\|^2=\sum_{i=1}^n|a_i|^2=\underline{a}^h\cdot\underline{a}=trace(\underline{a}\,\underline{a}^h)$

ماتریس یکانی: $A^h=A^{-1}$

$q_A(\underline{z})=\underline{z}^tA\,\underline{z}$, $h_A(\underline{z})=\underline{z}^hA\,\underline{z}$

ردار تصادفی: اگر ناهمبسته $R_{xy}=0$: $\underline{x}\perp\underline{y}\to R_{x+y}=R_x+R_y$ ؛ اگر $C_{xy}=0$: $\underline{x}\perp\underline{y}\to C_{x+y}=C_x+C_y$

رابطهٔ خطی بین : $\underline{v}^h\cdot\tilde{\underline{x}}=0\leftrightarrow\tilde{\underline{x}}\perp\underline{v}$

شرط لازم و کافی برای وجود رابطهٔ خطی : $\det(C_x)=0\to\lambda_i=0\to\underline{v}_i$ امتداد نرمال

خواص C_x : ① $C_x^h=C_x$ ← مقادیر ویژه حقیقی ← بردار ویژه ها متعامد و نرمالیزه

$V=(\underline{v}_1|\underline{v}_2|\dots|\underline{v}_n)$ ← یکانی

$\forall i,\ \lambda_i\ge0\to h_{C_x}(\underline{z})\ge0$ نیمه معین مثبت است C_x

$\forall i,\ \lambda_i>0$ ← pd است ← $\det C_x\neq0$ اگر

$C_x=LL^h\to L=(\sqrt{\lambda_1}\,\underline{v}_1|\sqrt{\lambda_2}\,\underline{v}_2|\dots|\sqrt{\lambda_n}\,\underline{v}_n)$ ، L یک جواب ؛ U یکانی دلخواه ← LU یک جواب

تبدیل خطی $\underline{Y}=A\underline{X}+\underline{b}$ ← $f_y(\underline{y})=\frac{f_x(A^{-1}(\underline{y}-\underline{b}))}{|\det A|}$

$\left.\begin{matrix}y_1=g_1(\underline{x})\\ \vdots\\ y_n=g_n(\underline{x})\end{matrix}\right\}\to f_y(\underline{y})=\sum_{i=1}^{K}\frac{f_x(\underline{x})}{|J|}\Big|_{\underline{x}=(\underline{a})_i}$

بردار سفید نرمالیزه : $\begin{cases}m_w=0\\ R_w=C_w=I\end{cases}$

تبدیل سفید کننده : $\underline{W}=\Gamma(\underline{X}-\underline{m}_x)$, $\Gamma=L^{-1}$, $C_x=LL^h$

عکس : $\underline{X}=L\underline{W}+\underline{m}_x$ / شرط سفید پذیری ← $\det(C_x)\neq0$

جواب پایین مثلثی $[\diagdown]$ برای L از همه بهتر ، جواب علّی

$$f_x(\underline{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det(C_x)}}e^{-\frac{1}{2}q_{C_x^{-1}}(\underline{x}-\underline{m}_x)}$$

نرمال توأم مجموعه

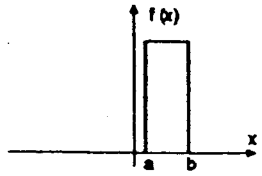
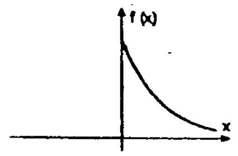
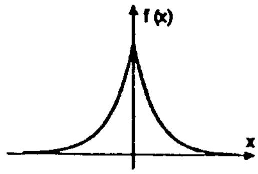
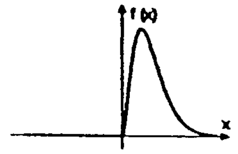
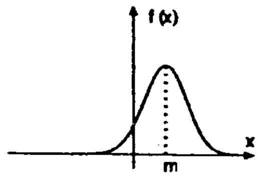
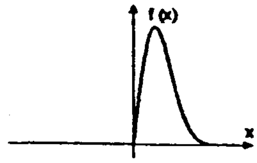
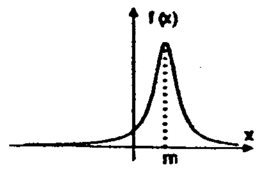
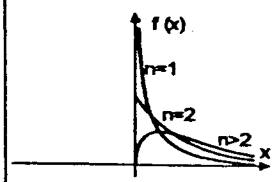
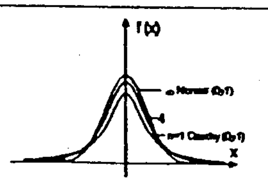
$$\to e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)}\ ,\quad C_x^{-1}=[\alpha_{ij}]_{n\times n}$$

x_1 و x_2 ، x_3 ، x_4 توأماً نرمال: $Ex_1x_2x_3x_4=Ex_1x_2Ex_3x_4+Ex_1x_3Ex_2x_4+Ex_1x_4Ex_2x_3-2Ex_1Ex_2Ex_3Ex_4$

$Var(Y)=E(var(Y|X))+Var(E(Y|X))$

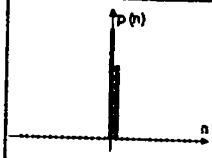
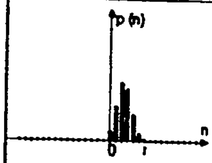
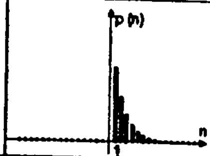
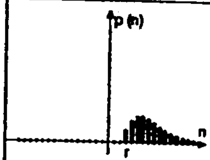
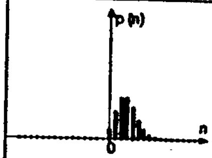
$(\{x_n\}\xrightarrow{e}x)\Rightarrow ae\Rightarrow P\Rightarrow dist$ / $ms\to P\to dist$

$\{x_n\}\xrightarrow{e}x$ ، $\{x_n(\zeta)\}\to x(\zeta)$ | $\{x_n\}\xrightarrow{P}X$ ، $P\{|x_n-x|>\epsilon\}\to0$ | $\{x_n\}\xrightarrow{dist}X$ ، در نقاط پیوستگی $F\to F$ | $\{X_n\}\xrightarrow{ms}X$ | $R_{XY}=C_{XY}+\underline{m}_X\underline{m}_Y^h$

نام متغیر تصادفی و نماد متغیر تصادفی	تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع مشخصه $\phi(\omega)$	نمودار تابع چگالی احتمال	متوسط m_X و واریانس σ_X^2
یکنواخت (Uniform) $X \sim \mathcal{U}(a,b)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & otherwise \end{cases}$ $\phi(\omega) = \exp[j(a+b)\frac{\omega}{2}]\frac{\sin(\omega(b-a)/2)}{\omega(b-a)/2}$		$m_X = \frac{(a+b)}{2}$ $\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
نمایی (Exponential) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \cdot u(x)$ $\phi(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$		$m_X = \frac{1}{\lambda}$ $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
لاپلاس (Laplace) $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$	$f(x) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda \lvert x \rvert)$ $\phi(\omega) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \omega^2}$		$m_X = 0$ $\sigma_X^2 = \frac{2}{\lambda^2}$
ارلانگ (Erlange) $X \sim \mathcal{E}(r,\lambda)$	$f(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} \cdot x^{r-1} \cdot \exp(-\lambda x) \cdot u(x)$ $\phi(\omega) = (\frac{\lambda}{\lambda - j\omega})^r$		$m_X = \frac{r}{\lambda}$ $\sigma_X^2 = \frac{r}{\lambda^2}$
نرمال (Normal) $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ $\phi(\omega) = \exp(jm\omega) \cdot \exp(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2})$		$m_X = m$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$
رایلی (Rayleigh) $X \sim \mathcal{R}(\sigma^2)$	$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \cdot u(x)$ $\phi(\omega) = (1 + j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\omega) \cdot \exp(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2})$		$m_X = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ $\sigma_X^2 = (2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2$
کوشی (Cauchy) $X \sim \mathcal{C}(m,a)$	$f(x) = \frac{(a/\pi)}{(x-m)^2 + a^2}$ $\phi(\omega) = \exp(jm\omega) \cdot \exp(-a\lvert\omega\rvert)$		$m_X = m$ $\sigma_X^2 = \infty$
مربع خی (Chi-square) $X \sim \chi^2(n)$	$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot \exp(-\frac{x}{2})}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot u(x)$ $\phi(\omega) = \frac{1}{(1-j2\omega)^{n/2}}$		$m_X = n$ $\sigma_X^2 = 2n$
استیودنت تی (Student-T) $X \sim \mathcal{T}(n)$	$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x^2/n)^{n+1}}}$ $\phi(\omega)$ برحسب توابع بسل بدست می آید		$m_X = 0$ $\sigma_X^2 = \begin{cases} \infty, & n = 1,2 \\ \frac{n}{n-2}, & n > 2 \end{cases}$

در جدول فوق: $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},\quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

چند متغیر تصادفی گسستهٔ مهم

نام متغیر تصادفی و نماد متغیر تصادفی	تعریف متغیر تصادفی X و تابع جرم احتمال آن $p(n)$	نمودار تابع جرم احتمال	تابع مولد احتمال $\Gamma(z)$ متوسط m_X و واریانس σ_X^2
برنولی (Bernoulli) $X \sim \mathcal{B}(p)$	X = تعداد رخداد پیشامد $\mathbf{E}$ در یک آزمایش $p(n) = \begin{cases} p, & n=1 \\ 1-p, & n=0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$		$\Gamma(z) = (1-p)+pz$ $m_X = p$ $\sigma_X^2 = p(1-p)$
دوجمله‌ای (Binomial) $X \sim \mathcal{B}(r,p)$	X = تعداد رخداد پیشامد $\mathbf{E}$ در r آزمایش مستقل از هم $p(n) = \begin{cases} \binom{r}{n} p^n (1-p)^{r-n}, & n=0,1,2,\cdots r \\ 0, & otherwise \end{cases}$		$\Gamma(z) = [(1-p)+pz]^r$ $m_X = rp$ $\sigma_X^2 = rp(1-p)$
هندسی (Geometric) $X \sim \mathcal{G}(p)$	X = تعداد آزمایش لازم برای اولین رخداد پیشامد $\mathbf{E}$ $p(n) = \begin{cases} p(1-p)^{n-1}, & n=1,2,3,\cdots \\ 0, & otherwise \end{cases}$		$\Gamma(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$ $m_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$
دوجمله‌ای منفی (Negative Binomial) $X \sim \mathcal{NB}(r,p)$	X = تعداد آزمایش لازم برای r امین رخداد پیشامد $\mathbf{E}$ $p(n) = \begin{cases} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, & n=r,r+1,\cdots \\ 0, & otherwise \end{cases}$		$\Gamma(z) = [\frac{pz}{1-(1-p)z}]^r$ $m_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r(1-p)/p^2$
پواسن (Poisson) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	X = حد دوجمله‌ای وقتی تعداد آزمایشها $r \to \infty$ و احتمال هر رخداد $p \to 0$ بطوریکه $rp = \lambda$ باشد $p(n) = \begin{cases} \exp(-\lambda)\cdot\frac{\lambda^n}{n!}, & n=0,1,2,3,\cdots \\ 0, & otherwise \end{cases}$		$\Gamma(z) = \exp[\lambda(z-1)]$ $m_X = \lambda$ $\sigma_X^2 = \lambda$

نکاتی در مورد چند متغیر تصادفی مهم

برخی روابط

(در عبارت‌های زیر چنانچه چند متغیر تصادفی مطرح باشند آن متغیرهای تصادفی مستقل فرض می‌شوند)

$\boxed{\begin{matrix}\mathcal{B}(1,p) \equiv \mathcal{B}(p) \\ \mathcal{E}(1,\lambda) \equiv \mathcal{E}(\lambda)\end{matrix}}$ $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{B}(p) \equiv \mathcal{B}(r,p)}$ $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{E}(\lambda) \equiv \mathcal{E}(r,\lambda)}$ $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{G}(p) \equiv \mathcal{NB}(r,p)}$ $\boxed{\lim_{r\to\infty, rp\to\lambda} \mathcal{B}(r,p) = \mathcal{P}(\lambda)}$

$\boxed{\sum \mathcal{B}(r_i,p) \equiv \mathcal{B}(\sum r_i, p)}$ $\boxed{\sum \mathcal{NB}(r_i,p) \equiv \mathcal{NB}(\sum r_i, p)}$ $\boxed{\sum \mathcal{E}(r_i,\lambda) \equiv \mathcal{E}(\sum r_i, \lambda)}$ $\boxed{|\mathcal{L}(\lambda)| \equiv \mathcal{E}(\lambda)}$

$\boxed{\begin{matrix}[\mathcal{N}(0,1)]^2 \equiv \mathcal{X}^2(1) \\ \sum_{i=1}^{n} [\mathcal{N}(0,1)]^2 \equiv \mathcal{X}^2(n)\end{matrix}}$ $\boxed{\frac{\mathcal{N}(0,1)}{\mathcal{N}(0,1)} \equiv \mathcal{C}(0,1)}$ $\boxed{\frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\mathcal{X}^2(n)/n}} \equiv \mathcal{T}(n)}$ $\boxed{\begin{matrix}\mathcal{T}(\infty) \equiv \mathcal{N}(0,1) \\ \mathcal{T}(1) \equiv \mathcal{C}(0,1)\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}\mathcal{X}^2(2k) \equiv \mathcal{E}(k,0.5) \\ \mathcal{X}^2(2) \equiv \mathcal{E}(0.5)\end{matrix}}$

$\boxed{\sqrt{\mathcal{X}^2(1)} \equiv |\mathcal{N}(0,1)|}$ $\boxed{[\mathcal{R}(\sigma^2)]^2 \equiv \mathcal{E}(1/2\sigma^2)}$ $\boxed{\sqrt{\mathcal{E}(\lambda)} \equiv \mathcal{R}(1/2\lambda)}$ $\boxed{Min(\mathcal{E}(\lambda_1),\mathcal{E}(\lambda_2),\cdots,\mathcal{E}(\lambda_n)) \equiv \mathcal{E}(\sum \lambda_i)}$

$\boxed{\sum \mathcal{N}(m_i,\sigma_i^2) \equiv \mathcal{N}(\sum m_i, \sum \sigma_i^2)}$ $\boxed{\sum \mathcal{P}(\lambda_i) \equiv \mathcal{P}(\sum \lambda_i)}$ $\boxed{\sum \mathcal{C}(m_i,a_i) \equiv \mathcal{C}(\sum m_i, \sum a_i)}$ $\boxed{\sum \mathcal{X}^2(n_i) \equiv \mathcal{X}^2(\sum n_i)}$

یک قضیه مفید

$$\begin{Bmatrix} X_1 = \rho\cos(\theta) \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \\ X_2 = \rho\sin(\theta) \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \\ X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \sim \mathcal{R}(\sigma^2) \\ \theta = tg^{-1}(X_2/X_1) \sim \mathcal{U}(0,2\pi) \\ \rho \perp\!\!\!\perp \theta \end{Bmatrix}$$

$S-\hat{E}(S|\underline{X}) \perp \underline{X}$

((برخی فرمولهای مبحث تخمین))

کلیات

تخمین(غیر)خطی $p = E(S-\hat S)^2 = \min,\ \hat S = g(\underline X) \Rightarrow \boxed{\hat S = E(S\mid\underline X)},\ \boxed{p_{\min} \triangleq p(S\mid\underline X) = E_X\{Var(S\mid\underline X)\}}$

تخمین خطی $p = E\left|S-\hat S\right|^2 = \min,\ \hat S = \sum_k a_k X_k \Rightarrow S-\hat S \perp \underline X \Rightarrow \boxed{\hat S \triangleq \hat E(S\mid\underline X)},\ \boxed{p_{\min} \triangleq \hat p(S\mid\underline X)}$

تخمین مستوی $p = E\left|S-\hat S\right|^2=\min,\ \hat S = a_0 + \sum_k a_k X_k \Rightarrow \boxed{\hat S = m_S + \hat E(\tilde S\mid\tilde{\underline X})},\ \boxed{p_{\min} = \hat p(\tilde S\mid\tilde{\underline X})}$

تخمین خطی و مستوی یک بردار تصادفی بر حسب بردار داده ها

تخمین خطی

$$\hat{\underline S} = \hat E(\underline S\mid\underline X) = R_{SX}R_X^{-1}\cdot\underline X \equiv R_{SW}\cdot \underline W$$

$$p(\underline S\mid\underline X) \triangleq \sum_i E\left|S_i-\hat S_i\right|^2 = E\|\underline S - \hat{\underline S}\|^2 = \text{trace}(R_S - R_{SX}R_X^{-1}R_{XS}) \equiv E\|\underline S\|^2 - \|R_{SW}\|^2$$

$= E|S|^2 - R_{SX}R_X^{-1}R_{XS}$

تخمین مستوی

$$\hat{\underline S} = \hat E(\underline S\mid\underline X, X_0) = \underline m_S + \hat E(\tilde{\underline S}\mid\tilde{\underline X}) = \underline m_S + C_{SX}C_X^{-1}\cdot(\underline X - \underline m_X) \equiv C_{SW}\cdot\underline W$$

$$p(\underline S\mid\underline X, X_0) \triangleq \sum_i E\left|S_i-\hat S_i\right|^2 = E\|\tilde{\underline S}-\hat{\tilde{\underline S}}\|^2 = \text{trace}(C_S - C_{SX}C_X^{-1}C_{XS}) \equiv E\|\tilde{\underline S}\|^2 - \|C_{SW}\|^2$$

$= C_S - C_{SX}C_X^{-1}C_{XS}$

$E|\tilde S|^2$

تخمین خطی بر حسب فرایند پیوسته زمان داده ها

وینر-هوف $R_{SX}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha) R_X(\tau-\alpha)\,d\alpha,\ \tau\in[\tau_1,\tau_2]$

$P_{min} = R_S(0) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha) R_{SX}^*$

مشاهده تا $t-\tau_1$

$$\hat S(t) = \hat E(S(t)\mid X(t-\alpha):\alpha\ge\tau_1) = h(t)*X(t)$$

$$h(t) = \cancel{\gamma_X}(t) * \underbrace{\{R_{SW}(t)\}_{\ge\tau_1}}_{h_w(t)} \Big/ H(f) = \Gamma_X(f)\cdot\{S_{SW}(f)\}_{\ge\tau_1} \Big/ p_{\min} = R_S(0) - \int_{\tau_1}^\infty |R_{SW}(\alpha)|^2\, d\alpha$$

$|h_w(\alpha)|^2$

مشاهده کامل

$$\hat S(t) = \hat E(S(t)\mid X(t-\alpha):\alpha\in\mathbf R) = h(t)*X(t)$$

$$h(t) = \cancel{\gamma_X}(t) * R_{SW}(t) \Big/ H(f) = \frac{S_{SX}(f)}{S_X(f)} \Big/ p_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_S(f) - \frac{|S_{SX}(f)|^2}{S_X(f)}\right)df \equiv R_S(0) - \int_{-\infty}^\infty |R_{SW}(\alpha)|^2\, d\alpha$$

مدل خطی

$$\boxed{X(t) = S(t)+V(t),\ S(\cdot)\perp V(\cdot),\ R_V(\tau) = N_0\delta(\tau)}$$

کلی $\Rightarrow\ \hat S(t) = \hat E(S(t)\mid X(t-\alpha):\alpha\ge\tau_1) = h(t)*X(t),\ h(t) = \gamma_X(t) * \{l_X(t) - \gamma_X^*(-t)\}_{\ge\tau_1}$

مشاهده کامل $\tau_1 = -\infty \Rightarrow$ فیلتر وینر غیرعلی $\rightarrow$ $H(f) = \dfrac{S_S(f)}{N_0+S_S(f)},\ p_{\min} = N_0 h(0)$

فیلترینگ + پیشگوئی $\tau_1>0 \Rightarrow H(f) = \Gamma_X(f)\cdot\{L_X(f)\}_{\ge\tau_1},\ p_{\min} = R_S(0) - \int_{\tau_1}^\infty |l_X(\alpha)|^2\, d\alpha$

پیشگوئی خالص $X(\cdot)=S(\cdot),\ \tau_1>0 \Rightarrow H(f) = \Gamma_S(f)\cdot\{L_S(f)\}_{\ge\tau_1},\ p_{\min} = \int_0^{\tau_1}|l_S(\alpha)|^2\, d\alpha$

فیلترینگ خالص $\tau_1 = 0 \Rightarrow$ فیلتر وینر علی $\rightarrow$ $H(f) = 1 - N_0\Gamma_X^*(\infty)\cdot\Gamma_X(f),\ p_{\min} = N_0 h(0)$

تخمین خطی بر حسب فرایند گسسته زمان داده ها

مشاهده تا نمونه $n-m_1$ ام

$$\hat S[n] = \hat E(S[n]\mid X[n-k]:k\ge m_1) = h[n]*X[n]$$

$$h[n] = \gamma_X[n]*\{R_{SW}[n]\}_{\ge m_1},\ \mathbb H(z) = \Gamma_X(z)\cdot\{\mathbb S_{SW}(z)\}_{\ge m_1},\ p_{\min} = R_S[0] - \sum_{k=m_1}^\infty |R_{SW}[k]|^2$$

مشاهده کامل

$$\hat S[n] = \hat E(S[n]\mid X[n-k]:k\in\mathbf Z) = h[n]*X[n]$$

$$h[n] = \gamma_X[n]*R_{SW}[n],\ \mathbf H(z) = \frac{\mathbf S_{SX}(z)}{\mathbf S_X(z)},\ p_{\min} = \int_{-0.5}^{0.5}\left(S_S(f) - \frac{|S_{SX}(f)|^2}{S_X(f)}\right)df \equiv R_S[0] - \sum_{k=-\infty}^\infty |R_{SW}[k]|^2$$

مدل خطی

$$\boxed{X[n] = S[n]+V[n],\ S[\cdot]\perp V[\cdot],\ R_V[m] = N_0\delta[m]}$$

کلی $\Rightarrow\ \hat S[n] = \hat E(S[n]\mid X[n-k]:k\ge m_1) = h[n]*X[n],\ h[n] = \gamma_X[n]*\{l_X[n] - \gamma_X^*[-n]\}_{\ge m_1}$

مشاهده کامل $m_1=-\infty\Rightarrow\ \mathbf H(z) = \dfrac{\mathbf S_S(z)}{N_0+\mathbf S_S(z)},\ p_{\min} = N_0h[0]$

فیلترینگ + پیشگوئی $m_1>0\Rightarrow\ \mathbf H(z) = \Gamma_X(z)\cdot\{\mathbf L_X(z)\}_{\ge m_1},\ p_{\min} = R_S[0] - \sum_{k=m_1}^\infty |l_X[k]|^2$

پیشگوئی خالص $X[\cdot]=S[\cdot],\ m_1>0 \Rightarrow\ \mathbf H(z) = \Gamma_S(z)\cdot\{\mathbf L_S(z)\}_{\ge m_1},\ p_{\min} = \sum_{k=0}^{m_1-1}|l_S[k]|^2$

فیلترینگ خالص $m_1=0 \Rightarrow\ \mathbf H(z) = 1 - N_0\Gamma_X^*(\infty)\,\Gamma_X(z),\ p_{\min} = N_0h[0]$

$E(S-\hat S)X_i^* = 0$

$S_{SW}(f) = S_{SX}(f)\cdot\Gamma_X^*(f)$

$S\perp X \rightarrow \hat E(S|X) = 0$

$S = S_1 + S_2 \rightarrow \hat E(S|X) = \hat E(S_1|\underline X) + \hat E$

P ...

$$\{G(f)\}_{\geq \tau_1} = \Big\{\sum_{\text{LHP}} \frac{a_i}{j2\pi f - p_i} + \sum_{\text{RHP}} \frac{b_i}{j2\pi f - q_i} + \sum_i c_i (j2\pi f)^i \Big\}_{\geq \tau_1} = \begin{cases} \sum_{\text{LHP}} \frac{a_i\, e^{-(j2\pi f - p_i)\tau_1}}{j2\pi f - p_i}, & \tau_1 > 0 \\ \sum_{\text{LHP}} \frac{a_i}{j2\pi f - p_i} + \sum_i c_i (j2\pi f)^i, & \tau_1 = 0 \\ G(f) - \sum_{\text{RHP}} \frac{b_i\, e^{-(j2\pi f - q_i)\tau_1}}{j2\pi f - q_i}, & \tau_1 < 0 \end{cases}$$

$$\{G(z)\}_{\geq m_1} = \Big\{\sum_{|z_i|<1} \frac{a_i}{1 - z_i z^{-1}} + \sum_{|y_i|>1} \frac{b_i}{1 - y_i z^{-1}} + \sum_i c_i z^{-i} \Big\}_{\geq m_1} = \begin{cases} \sum_{|z_i|<1} \frac{a_i (z_i z^{-1})^{m_1}}{1 - z_i z^{-1}} + \sum_{i \geq m_1} c_i z^{-i}, & m_1 > 0 \\ \sum_{|z_i|<1} \frac{a_i}{1 - z_i z^{-1}} + \sum_i c_i z^{-i}, & m_1 = 0 \\ G(z) - \sum_{|y_i|>1} \frac{b_i (y_i z^{-1})^{m_1}}{1 - y_i z^{-1}}, & m_1 < 0 \end{cases}$$

((جدول خواص تبدیل Z و زوجهای مهم آن))

$g[n]$	$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k] \cdot z^{-k}$,	$\lvert z \rvert \in R$
$g[-n]$	$G(z^{-1})$,	$\lvert z^{-1} \rvert \in R$
$g[n - n_0]$	$G(z) \cdot z^{-n_0}$,	$\lvert z \rvert \in R$ (بـــجز احتمال حذف یا اضافه شدن 0 و ∞)
$n \cdot g[n]$	$-z \frac{d}{dz} G(z)$,	$\lvert z^{-1} \rvert \in R$
$g^*[n]$	$G^*(z^*)$,	$\lvert z \rvert \in R$
$z_0^{-n} \cdot g[n]$	$G(z_0 z)$,	$\lvert z_0 z \rvert \in R$
$g[n] - g[n-1]$	$(1 - z^{-1}) G(z)$,	$\lvert z \rvert \in R \cap \lvert z \rvert \neq 0$ (لااقـــل)
$\sum_{k=-\infty}^{n} g[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} G(z)$,	$\lvert z \rvert \in R \cap \lvert z \rvert > 1$ (لااقـــل)
$a g_1[n] + b g_2[n]$	$a G_1(z) + b G_2(z)$,	$\lvert z \rvert \in R_1 \cap R_2$ (لااقـــل) (بـــجز احتمال حذف یا اضافه شدن 0 و ∞)
$g_1[n] * g_2[n]$	$G_1(z) \cdot G_2(z)$,	$\lvert z \rvert \in R_1 \cap R_2$ (لااقـــل)
$\begin{cases} g[\frac{n}{k}], & \frac{n}{k} \in \mathbf{Z} \\ 0, & \text{در سایر موارد} \end{cases}$	$G(z^k)$,	$\lvert z^k \rvert \in R$

$\delta[n]$	1,	All z
$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$,	$\lvert z \rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$,	$\lvert z \rvert < 1$
$z_0^n \cdot u[n]$	$\frac{1}{1 - z_0 z^{-1}}$,	$\lvert z \rvert > \lvert z_0 \rvert$
$-z_0^n \cdot u[-n-1]$	$\frac{1}{1 - z_0 z^{-1}}$,	$\lvert z \rvert < \lvert z_0 \rvert$
$n \cdot z_0^n \cdot u[n]$	$\frac{z_0 z^{-1}}{(1 - z_0 z^{-1})^2}$,	$\lvert z \rvert > \lvert z_0 \rvert$
$-n \cdot z_0^n \cdot u[-n-1]$	$\frac{z_0 z^{-1}}{(1 - z_0 z^{-1})^2}$,	$\lvert z \rvert < \lvert z_0 \rvert$
$z_0^{\lvert n \rvert}$, $\lvert z_0 \rvert < 1$	$\frac{1 - z_0^2}{(1 - z_0 z^{-1})(1 - z_0 z)}$,	$\lvert z_0 \rvert < \lvert z \rvert < \frac{1}{\lvert z_0 \rvert}$
$\cos(\omega_0 n) \cdot u[n]$	$\frac{1 - (\cos\omega_0) z^{-1}}{1 - (2\cos\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$,	$\lvert z \rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n) \cdot u[n]$	$\frac{(\sin\omega_0) z^{-1}}{1 - (2\cos\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$,	$\lvert z \rvert > 1$
$r^n \cdot \cos(\omega_0 n) \cdot u[n]$	$\frac{1 - (r\cos\omega_0) z^{-1}}{1 - (2r\cos\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$,	$\lvert z \rvert > 1$
$r^n \cdot \sin(\omega_0 n) \cdot u[n]$	$\frac{(r\sin\omega_0) z^{-1}}{1 - (2r\cos\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$,	$\lvert z \rvert > 1$
$\delta[n-k]$	z^{-k},	All $z \neq 0$, $k > 0$ All $z \neq \infty$, $k < 0$
$r[n] = \begin{cases} n+1, & n \geq 0 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - z^{-1})^2}$,	$\lvert z \rvert > 1$

((تبدیل فوریه گسسته زمان برخی سیگنالهائی که تبدیل Z ندارند))

$g[n] = 1$		$G(f) = 2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$,	$f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
$g[n] = e^{j2\pi f_0 n}$,	$f_0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	$G(f) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) = \delta(f - f_0)$,	$f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
$g[n] = \cos(2\pi f_0 n)$,	$f_0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	$G(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$,	$f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
$g[n] = \sin(2\pi f_0 n)$,	$f_0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	$G(f) = \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$,	$f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

* $\sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ * $\cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ * $D(\sinh x) = \cosh x$ * $D(\cosh x) = \sinh x$

* $D(\tgh x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tgh^2 x$ * $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

* $ch(a+b) = ch(a)\cdot ch(b) + sh(a)\cdot sh(b)$ * $sh(a+b) = sh(a)\cdot ch(b) + ch(a)\cdot sh(b)$

* $ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a) = 2ch^2(a)-1$ * $sh(2a) = 2\,sh(a)\cdot ch(a)$

* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}x + C = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$ * $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C$ $\quad x \geq 1$

* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$ * $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$ $\quad |x| > |a|$

دامنه $= (-1,1) \rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$ $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tg^{-1}x$

$\displaystyle\int \sec x\,dx = \tanh^{-1}(\sin x) = \ln|\sec x + \tg x|$, $\displaystyle\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x|$

مساحت ناحیه‌ای از شعاع به زاویه α تا β : $A = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_{(\theta)}^{2}\, d\theta$

محاسبه طول قوس : $\boxed{(ds)^2 = (r\,d\theta)^2 + (dr)^2 \rightarrow ds = \sqrt{r_{(\theta)}^{2} + r'^{2}_{(\theta)}}\, d\theta} \xrightarrow{\text{سطح دوران}} dA = 2\pi \rho\, ds$

ρ: $r\sin\theta$ یا $r\cos\theta$

$\boxed{\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}}$

$W = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow \boxed{\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho}\cdot CiS\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$

n ضلعی منتظم $\leftarrow$ $K = 0, 1, \dots, n-1$

فرمول تیلور : f در بازهٔ باز حاوی a ، n بار مشتق پذیر است ـــ برای هر x:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt}_{E_{n-1}(x)}$$

$a=0$ ـــ مک لورن

$P(a) = f(a)$
$\vdots$
$P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

که یک و تنها یک چندجمله‌ای موجود است (از درجه نابیشتر از n) که در $(n+1)$ شرط زیر صدق کند.

* تعیین خطا : $|f^{(n)}(t)| \leq M \Longrightarrow |E_{n-1}(x)| \leq M \dfrac{|x-a|^n}{n!}$

شکل لاگرانژ باقی مانده : $E_{n-1} = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n = O((x-a)^{n-1})$ $\quad x \to a$

$c \in [a,b]$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})\ (x\to 0) \qquad |E_{2n}(x)| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\ (x\to 0) \to \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underbrace{E_n(x)}_{o(x^n)\ (x\to 0)}$$

$$\boxed{E_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}\cdot x^{n+1}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)\ (x\to 0)} \quad , \quad \boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}} + o(x^n)\ (x\to 0)$$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \cdots$

آزمون برای نوع اول ← آ) $\{f$ و g بر $[a,b]$ $\forall b$ انتگرال پذیر و نامنفی (1) $\}$ و $g(x) \leqslant f(x) \leqslant 0$ به ازای $\forall x > M$ که $M \geqslant a$ (2): مقایسه

$\boxed{I_{\text{تابع}} = \int_a^\infty \text{تابع}}$

الف) I_g همگرا ← I_f همگرا ، ب) I_f واگرا ← I_g واگرا

2) f و g بر $[a,b]$ $\forall b$ انتگرال پذیر و مثبت ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$: مقایسه حدی

الف) $0 < L < \infty$ ← هردوی I_f و I_g در واگرایی و همگرایی شل هستند . ب) $L=0$ ← (I_g همگرا ← I_f همگرا)

ج) $L = \infty$ ← (I_g واگرا ← I_f واگرا)

• آزمون برای نوع دوم ← آ) f و g بر $[a+\varepsilon, b]$ به ازای هر $\varepsilon > 0$ انتگرال پذیر ... مقایسه

$\boxed{I_{\text{تابع}} = \int_a^b \text{تابع}\, dx}$

2) الی $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ + مقایسه حدی

لایب نیتز ← $\{a_n\}$ نزولی (3) / $\lim a_n = 0$ (2) / $\{a_n\}$ مثبت (1) ← $\sum (-1)^{k+1} a_k$ همگراست

* اگر سری متناوب در قضیهٔ لایب نیتز صدق کند و مقدار آن S باشد داریم: $|S - S_n| < a_{n+1}$

حاصلضرب کوشی : $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ که $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

فرمول استرلینگ : $n! \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

نیما ترابی جای ۸۱۰۱۸۲۲۴۲
nimator@yahoo.com

بسمه تعالی

مسایل سری اول

مساله ۱- ثابت کنید $$\mathrm{E}(Y \mid X \le 0) = \frac{1}{F_X(0)} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{E}(Y \mid X = x) \cdot f_X(x) \cdot dx$$

مساله ۲- توابع توزیع و چگالی شرطی X با شرط $\{a < X \le b\}$ را برحسب توابع توزیع $F_X(x)$ و چگالی $f_X(x)$ آن بدست آورید.

مساله ۳- فرض کنید یک نیرو گاه به قدرت 10^6 KW برق ناحیه ای را تامین میکند و حد اکثر قدرت لازم برای آن ناحیه را بتوان با یک متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f(x) = k^2 x \exp(-kx) \cdot u(x)$ مدل کرد که در آن x با واحد کیلو وات بوده و $k = 5 \times 10^{-6}$ میباشد.

الف) احتمال خاموشی در ناحیه فوق چقدر است؟

ب) برای اینکه احتمال خاموشی در آن ناحیه از 0.005 تجاوز نکد قدرت نیروگاه را به چه میزان باید رسانید؟

مساله ۴ – فرض کنید تابع چگالی احتمال عمر یک دستگاه بر حسب ماه بصورت زیر باشد (توزیع رایلی):

$$f(x) = \frac{x}{100} \exp(\frac{-x^2}{200}) \cdot u(x)$$

الف) متوسط عمر دستگاه چند ماه است؟

ب) احتمال اینکه عمر دستگاه بیش از دو سال باشد چقدر است؟

ج) احتمال اینکه دستگاهی که در طول سال اول سالم مانده است در طول سال دوم هم سالم بماند چقدر است؟

مساله ۵-یک متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x) = \exp(-2|x|)$ در نظر بگیرید بر حسب این متغیرتصادفی دو متغیر تصادفی $Y \triangleq \begin{cases} |X|, & |X| \le 1 \\ 1, & |X| \ge 1 \end{cases}$ و $Z \triangleq X^2$ را تعریف میکنیم.

الف) تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی Y و Z را پیدا کنید.

ب) احتمال پیش آمد $A = \{2 > Y > \frac{1}{2}\}$ را تعیین کنید.

ج) احتمال پیش آمد $B = \{Y > Z\}$ را بدست آورید.

مساله ۶- فرض کنید ممانهای یک متغیر تصادفی از رابطه زیر بدست می آیند:

$$EX^n = n!2^n, \quad n = 1,2,3,4,5,\cdots$$

تابع مشخصه (cf) و تابع چگالی احتمال این متغیر تصادفی را بدست آورید.

مساله ۷- ثابت کنید: $Var(Y) = E(Var(Y \mid X)) + Var(E(Y \mid X))$ میباشد.

مساله ۸- چراغ راهنمائی چهارراهی بمدت یک دقیقه سبز و بمدت نیم دقیقه قرمز می‌شود اتومبیلی در لحظه‌ای کاملا تصادفی و مستقل از کار چراغ به چهارراه رسیده است، توابع چگالی(pdf) و توزیع (CDF) و مشخصه (cf) و همچنین مقادیر متوسط و واریانس زمان انتظار را برای اتومبیل بدست آورید.

مساله۹- متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی نرمال $X \sim N(m, \sigma^2)$ می باشد با متغیر تصادفی Y با متغیر تصادفی X رابطه $Y = e^X$ را دارد.

الف) متوسط واریانس Y را برحسب m و σ^2 بدست آورید.

ب) تابع چگالی احتمال Y را بدست آورید.

مسالهٔ ۱۰- یک زیردریائی تصمیم دارد که ناو هواپیمابری را غرق نماید فرض کنید برای غرق شدن آن لااقل باید ۲ عدد اژدر بآن اصابت نماید و احتمال اصابت هر اژدر نیز 0.4 است.

الف) اگر ۳ عدد اژدر پرتاب نماید احتمال غرق ناو هواپیمابر چقدر است؟

ب) بطور متوسط چند عدد اژدر باید پرتاب نماید تا باعث غرق ناوهواپیمابر شود؟

مساله ۱۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی هندسی است و متوسط آن $EX = 3$ میباشد. بر حسب آن متغیر تصادفی $Y \triangleq \cos(\frac{\pi}{2}X)$ را تعریف میکنیم

الف) Y چه مقادیری و با چه احتمالاتی اختیار میکند؟

ب) متوسط و واریانس Y را بدست آورید.

مساله ۱۲- فرض کنید V یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه [-1,1] بوده و $X \in \{0,1\}$ یک متغیر تصادفی باینری مستقل از V و با جرم احتمال های $P\{X = 1\} = q$ و $P\{X = 0\} = 1 - q$ میباشد. بر حسب ایندو متغیر تصادفی $Y \triangleq \begin{cases} |V|, & X = 1 \\ -|V|, & X = 0 \end{cases}$ را تعریف میکنیم.

الف) $m_Y = EY$ را تعیین کنید.

ب) چگالی احتمال شرطی $f_Y(y \mid x)$ را به ازای $x = 1$ و $x = 0$ بدست آورید.

ج) تابع توزیع و تابع چگالی احتمال Y را پیدا کنید.

مساله ۱۳- فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت در فاصله 0 تا 1 است و متغیر تصادفی شرطی $Y \mid X$ دارای توزیع یکنواخت در فاصله X تا 1 میباشد.

الف) $m_Y = EY$ را پیدا کنید.

احتمال $P\{Y > 2X\}$ را محاسبه کنید.

مساله ۱۴- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی تواما نرمال با متوسطهای صفر و واریانسهای σ^2 و ضریب همبستگی ρ میباشند.

الف) ثابت کنید متغیرهای $U \triangleq X - Y$ و $V \triangleq X + Y$ مستقل از هم هستند.

ب) فرض کنید $Z \triangleq X + 3Y$ است و تابع چگالی احتمال Z را بدست آورید.

ج) ثابت کنید متغیر های تصادفی W_1 و W_2 که بصورت زیر تعریف می گردند مستقل از هم می باشند.

$$W_1 \triangleq \frac{X+Y}{2}$$
$$W_2 = (X - W_1)^2 + (Y - W_1)^2$$

مساله ۱۵- تابع چگالی احتمال توام X و Y بصورت زیر می باشد:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2\exp(-x-y), & 0 < x < y \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

دو متغیر تصادفی $V \triangleq X + Y$ و $W \triangleq \frac{Y}{X}$ را تعریف می کنیم. تابع چگالی احتمال توام V و W را بدست آورید. آیا V و W مستقل از هم هستند؟

مساله ۱۶- دو متغیر تصادفی X و Y با pdf زیر در نظر بگیرید.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{16}x^2y, & 0 < y < x \le 2 \\ 0, & \text{Otherwize} \end{cases}$$

الف) تابع چگالی احتمال شرطی و کناری X و Y را بدست آورید

ب) واریانس X و واریانس Y و همچنین ضریب همبستگی بین X و Y را بدست آورید.

ج) بهترین تخمینی X بدون اطلاع از Y چیست و متوسط مربع خطای آن چقدر است؟

د) بهترین تخمینی X برحسب Y کدام است و متوسط مربع خطای چنین تخمینی چقدر است؟

ه) بهترین تخمینی X بصورت رابطه‌ای خطی برحسب Y و همچنین متوسط مربع خطای آنرا نیز حساب کنید.

مسالهٔ ۱۷- سه متغیر تصادفی X_1 و X_2 و Y مفروض هستند می‌خواهیم با مشاهده X_1 و X_2 مقدار Y را با رابطه‌ای بفرم $\hat{Y} = a_1 X_1 + a_2 X_2$ تخمین بزنیم بطوریکه $p = \mathrm{E}(Y-\hat{Y})^2$ حداقل شود.

مقادیر a_1 و a_2 و همچنین می‌نیمم خطا p_{min} را برحسب ممانهای X_1 و X_2 و Y بدست آورید.

مسالهٔ ۱۸- توزیع احتمال سه متغیر تصادفی باینری X و Y و Z در جدول زیر داده شده است.

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$\Pr\{X=x, Y=y, Z=z\}$	0	0.125	0.300	0.075	0.100	0.025	0	0.375

الف) آیا X و Y مستقل هستند؟

ب) آیا Z و Y مستقل هستند؟

ج) آیا X و Z مستقل هستند؟

د) توزیع احتمال متغیرهای تصادفی شرطی $X \mid Z=0$ و $X \mid Z=0$ را بدست آورید و در مورد استقلال آندو نیز اظهارنظر فرمائید.

مساله ۱۹- pdf توام X و Y و Z بصورت زیر است:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} 8xyz, & 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) ضرایب همبستگی ρ_{XY} و ρ_{YZ} و ρ_{XZ} را تعیین کنید.

ب) چگالی احتمال شرطی $f_{XYZ}(x,y,z\,|_{Y+Z>1})$ را پیدا کنید.

ج) چگالی احتمال شرطی $f_X(x\,|_{Y+Z>1})$ را بدست آورید.

مساله ۲۰- فرض کنید pdf توام X و Y و Z بصورت زیر است:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \exp-\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - \sqrt{2}xy\right)$$

الف) آیا X و Y و Z تواما نرمال هستند؟

ب) متوسط و ماتریس کواریانس بردار $(X,Y,Z)^t$ را بنویسید.

ج) تابع چگالی احتمال کناری بردار $(X,Z)^t$ را پیدا کنید.

مسأله ۲۱- متغیرهای تصادفی X_1 ، X_2 ، X_3 و . . . مستقل از هم بوده و توزیع یکسانی دارند (iid)، متغیر تصادفی Y نیز یک متغیر تصادفی پواسن مستقل از X_iها و با متوسط $m_Y = a$ می‌باشد. مجموع تعداد تصادفی Y از متغیرهای تصادفی X_i را S می‌نامیم

$$S \triangleq \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_Y, & Y \neq 0 \\ 0, & Y = 0 \end{cases}$$

الف) مقدار متوسط و واریانس هر یک از X_iها را m و σ^2 بنامید و مقدار متوسط و واریانس S را بدست آورید.

ب) تابع مشخصه هر یک از X_iها را $\phi_X(\omega)$ بنامید و تابع مشخصه متغیر تصادفی S را پیدا کنید.

مسأله ۲۲- فرض کنید X_1 و X_2 و X_3 سه متغیر تصادفی تواما مستقل پواسن با متوسط های $EX_1 = 1$ و $EX_2 = 2$ و $EX_3 = 3$ می باشند بر حسب آنها سه متغیر تصادفی زیر را تعریف میکنیم

$$Y_1 = X_1$$
$$Y_2 = X_2 - X_1$$
$$Y_3 = X_3 - X_2$$

$e^{\lambda(\frac{z_1}{z_2}-1)} \cdot e^{2(\frac{z_2}{z_3}-1)} \; e^{3(z_3-1)}$

الف) ماتریس همبستگی بردار $\underline{X}$ را بنویسید.

ب) ماتریس کواریانس بردار $\underline{Y}$ را بنویسید

ج) تابع مولد احتمال بردار $\underline{Y}$ یعنی $\Gamma_Y(\underline{z}) = E(z_1^{Y_1} \cdot z_2^{Y_2} \cdot z_3^{Y_3})$ را پیدا کنید

د) احتمال پیش آمد $\{Y_1 = Y_2 = Y_3 = 3\}$ چقدر است؟

مسأله ۲۳- فرض کنید X_1 و X_2 و . . . و X_n متغیرهای تصادفی تواما مستقل بوده و متوسط و واریانس هر یک نیز $m_i = EX_i$ و $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i)$ معلوم است. در رابطه با آنها بردار $\underline{Y}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$Y_1 = X_1$$
$$Y_2 = X_1 + 2X_2$$
$$Y_3 = X_1 + 2X_2 + 3X_3$$
$$\vdots$$
$$Y_n = X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n$$

الف) متوسط شرطی Y_n مشروط به معلوم بودن Y_1 و Y_2 و . . . و Y_{n-1} را پیدا کنید

ب) واریانس شرطی Y_n مشروط به معلوم بودن Y_1 و Y_2 و . . . و Y_{n-1} را پیدا کنید

ج) تابع چگالی احتمال X_i ها را معلوم $f_{X_i}(x_i) = f_i(x_i)$ فرض کنید و تابع چگالی احتمال بردار $\underline{Y}$ را بر حسب توابع $f_1(.)$ و $f_2(.)$ و . . . و $f_n(.)$ بدست آورید.

مسأله ۲۴- فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1 ، X_2 و . . . X_n مستقل از یکدیگر بوده و توزیع یکسانی داشته باشند (*iid*)، مثلا

$$(F_{X_i}(x_i) = F(x_i)\ ,\ f_{X_i}(x_i) = f(x_i))$$

تابع چگالی احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی $Y_1 = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ و $Y_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ و $Y_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ را بر حسب توابع $f(.)$ و/یا $F(.)$ بیان کنید.

مسأله ۲۵- n متغیر تصادفی X_1 ، X_2 ، . . . ، X_n مستقل از هم و با تابع های احتمال معلوم و مشابه در نظر بگیرید درهر نقطه از فضای نمونه مقادیری که این متغیرهای تصادفی اختیار می‌کنند را از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم و بزرگترین آنها را به متغیر تصادفی Z_1 و دومی را به متغیر تصادفی Z_2 و . . . و کوچکترین آنها را به متغیر تصادفی Z_n نسبت می‌دهیم تابع چگالی احتمالی k امین متغیر تصادفی Z_k و همچنین تابع چگالی احتمال $Z=Z_1-Z_n$ را بدست آورید.

مسالهٔ ۲۶- سه متغیر تصادفی X_1 و X_2 و X_3 با ممانهای اول و دوم زیر در نظر بگیرید

$$\mathbf{m_X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R_X} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

ثابت کنید بین این سه متغیر یک رابطه خطی برقرار است و این رابطه را نیز بدست آورید.

مسالهٔ ۲۷- فضای نمونه‌ای بصورت بازهٔ بسته $\Omega = [0, 1]$ در نظر بگیرید و در فضای فوق اندازهٔ احتمال را نیز یکنواخت فرض کنید. تعیین کنید در هر یک از موارد زیر رشته‌های تصادفی تعریف شده روی فضای فوق به چه مفهومی متقارب هستند و به چه مفهومی متقارب نیستند

الف) $$X_n(\xi) = \begin{cases} 1, & (n \text{ even } \& \ \xi > 1/2) \ or \ (n \text{ odd } \& \ \xi < 1/2) \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

ب) $$X_n(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 1/n \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

ج) $$X_n(\xi) = \begin{cases} n, & \xi < 1/n \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

د) $$X_n(\xi) = \begin{cases} 1, & 2^{-k} l \le \xi \le 2^{-k}(l+1) \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases} \qquad , n = 2^k + l \ , \ k = 0,1,2,\cdots \ , \ l = 0,1,2,\cdots,2^k - 1$$

$-4 \ -3 \ -12 \ -20$ $\qquad C_x -$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (2 \ -1 \ 0) = \begin{bmatrix} 4 & +2 & 0 \\ +2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$C - 2 ..$

سمنانی

(حل تمرین سری اول)

مسأله ۱:

$$E(Y|X\le 0)=\frac{1}{P(X\le 0)}\int_{x=-\infty}^{0}\int_{y=-\infty}^{\infty} y\, f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

$$=\frac{1}{F_X(0)}\int_{x=-\infty}^{0} f_X(x)\Big(\int_{y=-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y|x)\,dy\Big)dx=\frac{1}{F_X(0)}\int_{x=-\infty}^{0} f_X(x)\,E(Y|X=x)\,dx$$

مسأله ۲

$$F_X(x|a<X\le b)=\frac{P(X\le x,\ a<X\le b)}{P(a<X\le b)}=\begin{cases}0 & , x\le a\\ \dfrac{P(a<X\le x)}{P(a<X\le b)}=\dfrac{F_X(x)-F_X(a)}{F_X(b)-F_X(a)} & , a\le x\le b\\ 1 & , x\ge b\end{cases}$$

$$f_X(x|a<X\le b)=\begin{cases}\dfrac{f_X(x)}{P(a<X\le b)}=\dfrac{1}{F_X(b)-F_X(a)}f_X(x) & , a\le x\le b\\ 0 & , \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مسأله ۳ (الف)

$$1-F_X(x)=(kx+1)e^{-kx}u(x)\quad ,\quad P(X>10^6)=1-F_X(10^6)=0.0404$$

(ب)

$$1-F_X(x)\le 0.005\xrightarrow{\text{روش عددی}} x\ge 1.486\times 10^6\ \text{KW}$$

مسأله ۴ (الف) با استفاده از جدول وایبل $X\sim R(100)$ است

$$m_X=\sqrt{\pi/2}\times 10=12.53 \quad \text{ماه}$$

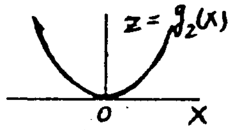
(ب)

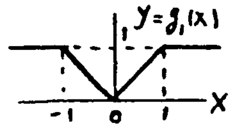
$$P(X>24)=\int_{24}^{\infty} f_X(x)\,dx=e^{-\frac{24^2}{200}}=0.056$$

(ج)

$$P(X>24|X>12)=\frac{P(X>24,X>12)}{P(X>12)}=\frac{P(X>24)}{P(X>12)}=e^{-\frac{24^2}{200}+\frac{12^2}{200}}=0.115$$

مسأله ۵





(الف) برای y مفروض

$$g_1(x)=y\Rightarrow x=\begin{cases}\text{جواب ندارد} & , y<0 \text{ یا } y>1\\ \pm y & , 0<y<1\\ [1,\infty) & , y=1\end{cases}$$

پس برای $y<0$ یا $y>1$ داریم $f_Y(y)=0$

پس برای $0<y<1$ داریم

$$f_Y(y)=\frac{f_X(y)}{|1|}+\frac{f_X(-y)}{|-1|}=2e^{-\lambda y}$$

پس برای $y=1$ داریم

$$P\{Y=1\}=P\{|X|\ge 1\}=2\int_1^{\infty} e^{-2x}\,dx=e^{-2}$$

و در مجموع

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-2}\delta(y-1)+2e^{-\lambda y} & , 0<y\le 1\\ 0 & , y<0 \text{ یا } y>1\end{cases}$$

برای z مفروض

$$g_2(x)=z\implies x=\begin{cases}\pm\sqrt{z} & , z\ge 0\\ \text{جواب ندارد} & , z<0\end{cases}$$

پس برای $z<0$ داریم $f_Z(z)=0$ و برای $z>0$ داریم

$$f_Z(z)=\frac{f_X(\sqrt{z})}{|2\sqrt{z}|}+\frac{f_X(-\sqrt{z})}{|-2\sqrt{z}|}=\frac{e^{-2\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$$

پس در مجموع

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}e^{-2\sqrt{z}}u(z)$$

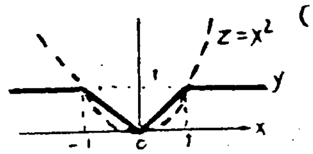
(ب)

(ج)

$$P\{Z>Y>\tfrac{1}{2}\}=P\{|X|>\tfrac{1}{2}\}=2\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-2x}\,dx=e^{-1}$$

بنابر شکل

$$P\{Y>Z\}=P\{|X|<1\}=2\int_0^1 e^{-2x}\,dx=1-e^{-2}$$



مسئله ۶: از بسط مکلورن $\Phi_X(\omega)$ میتوان آن را پیدا کرد و با تبدیل فوریه معکوس آن pdf را بدست آورد.

$$\Phi_X(\omega)=\Phi_X(0)+\frac{\Phi_X'(0)}{1!}\omega+\frac{\Phi_X''(0)}{2!}\omega^2+\cdots = 1+(j2)\omega+(j2)^2\omega^2+(j2)^3\omega^3+\cdots$$

$$\Phi_X(0)=1,\quad \Phi_X^{(n)}(0)=j^n EX^n=j^n n!\,2^n$$

$$\Phi_X(\omega)=\frac{1}{1-j2\omega}\Rightarrow f_X(x)=F^{-1}\Phi_X^*(\omega)=F^{-1}\frac{1}{1+j2\omega}=\frac{1}{2}e^{-x/2}u(x)$$

در واقع $X\sim E(\frac{1}{2})$ است

مسئله ۷

$$E\,Var(Y|X)+Var(EY|X)=E(EY^2|X)-E(EY|X)^2+E[E(Y|X)]^2-(E\,E(Y|X))^2$$

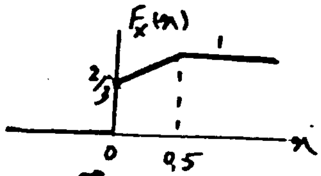
$$=EY^2-\cancel{E(EY|X)^2}+\cancel{E(EY|X)^2}-(EY)^2=EY^2-(EY)^2=Var(Y)$$

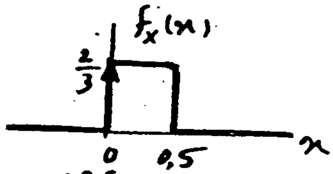
مسئله ۸: زمان انتظار را متغیر تصادفی X میگیریم

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ P\{G\}P\{X\le x|G\}+P\{R\}P\{X\le x|R\}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le 0.5\\ 1, & x\ge 0.5\end{cases}$$

$$f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=\frac{2}{3}\delta(x)+\begin{cases}0, & x<0\\ 2/3, & 0<x<0.5\\ 0, & x\ge 0.5\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{3}\delta(x)+\frac{2}{3}, & 0\le x\le 0.5\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

چون در $x=0$ ناپیوسته است





$$\Phi_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega x}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{3}e^{j\omega x}\delta(x)dx+\int_0^{0.5}\frac{2}{3}e^{j\omega x}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{j\omega/4}\frac{\sin(\omega/4)}{(\omega/4)}$$

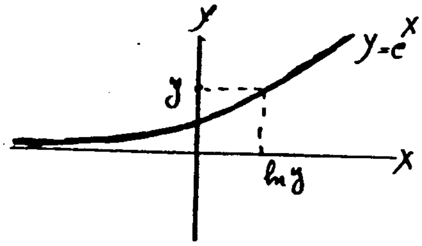
$$m_X=EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\frac{1}{12},\quad P_X=EX^2=\frac{1}{36},\quad \sigma_X^2=\frac{1}{36}-\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{48}$$

مسئله ۹: الف

$$X\sim N(m,\sigma^2)\xrightarrow{\text{تعریف}}\Phi_X(\omega)=e^{jm\omega}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$$

$$m_Y=EY=Ee^X=\Phi_X\left(\frac{1}{j}\right)=e^{m}e^{\sigma^2/2}$$

$$P_Y=EY^2=Ee^{2X}=\Phi_X\left(\frac{2}{j}\right)=e^{2m}e^{\sigma^2}\Rightarrow\sigma_Y^2=P_Y-m_Y^2=e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$$



ب) به ازای $y<0$ معادله $e^x=y$ جواب ندارد پس $f_Y(y)=0$ است

به ازای $y>0$ معادله $e^x=y$ تنها جواب $x=\ln y$ دارد پس

$$f_Y(y)=\frac{f_X(\ln y)}{|y|}=\frac{1}{y}f_X(\ln y)$$

پس

$$f_Y(y)=\frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(\ln y-m)^2/2\sigma^2}u(y)$$

توزیع احتمال Y را توزیع Log-Normal گویند چون لگاریتم آن نرمال است. مثلاً اگر یک متغیر تصادفی برحسب دسیبل (dB) نرمال باشد، آن متغیر تصادفی لگ نرمال است. این توزیع مدل مناسبی برای پدیده فیدینگ است

مسئله ۱۰: مسئله تکرار مستقل از هم یک آزمایش تصادفی است که در آن احتمال پیش آمد E (اصابت) $p=0.4$ است

(الف) احتمال غرق ناو یعنی اصابت لااقل دو از در ۳ پرتاب $(n=3)$

$$P\{X\ge 2\}=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{n}{0}p^0(1-p)^n-\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}=0.352$$

(ب) تعداد پرتاب‌های لازم برای دومین اصابت یک متغیر تصادفی $Y\sim NB(2,0.4)$

۵۷ - ۳ - ۲ - ۳

مسأله ۱۱

چون x متغیر تصادفی هندسی است

$M_x = EX = 3 \equiv 1/p \Rightarrow p = \frac{1}{3}$

$X \in \{1,2,3,\dots\}$, $P\{X=i\} = (1-p)^{i-1}p = (\frac{2}{3})^{i-1}(\frac{1}{3})$

(الف)

$$y = \cos(\frac{\pi}{2}x) = \begin{cases} 0, & x=1,3,5,7,\dots \\ 1, & x=4,8,12,16,\dots \\ -1, & x=2,6,10,14,\dots \end{cases} \longrightarrow y \in \{0,1,-1\}$$

$$P\{y=0\} = (\tfrac{2}{3})^0\tfrac{1}{3} + (\tfrac{2}{3})^2\tfrac{1}{3} + (\tfrac{2}{3})^4\tfrac{1}{3} + (\tfrac{2}{3})^6\tfrac{1}{3} + \dots = 0.6$$

$$P\{y=1\} = (\tfrac{2}{3})^3\tfrac{1}{3} + (\tfrac{2}{3})^7\tfrac{1}{3} + (\tfrac{2}{3})^{11}\tfrac{1}{3} + \dots = \tfrac{8}{65}$$

$$P\{y=-1\} = 1 - P\{y=0\} - P\{y=1\} = \tfrac{18}{65}$$

(ب)

$$\left.\begin{array}{l} m_y = EY = 0(0.6) + 1(\frac{8}{16}) + (-1)\frac{18}{65} = \frac{-2}{13} \\ P_y = EY^2 = 0^2(0.6) + 1^2(\frac{8}{16}) + (-1)^2\frac{18}{65} = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_y^2 = \frac{2}{5} - (\frac{-2}{13})^2 = \frac{318}{845}$$

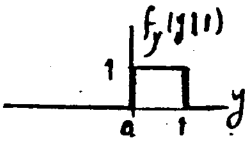
مسأله ۱۲ (الف)

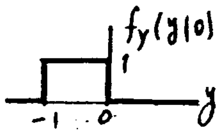
$$m_y = EY = E(EY|X) = P(x=1)E(Y|X=1) + P(X=0)E(Y|X=0)$$
$$= g\,E|V| + (1-g)E(-|V|) = (2g-1)E|V| = g - 1/2$$
$$V \sim U(-1,1) \Longrightarrow |V| \sim U(0,1) \Longrightarrow E|V| = \frac{1}{2}$$

(ب)

$y|X=1 = |V| \sim U(0,1)$

$y|X=0 = -|V| \sim U(-1,0)$





(ج)

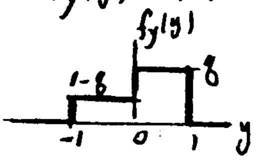
$$f_y(y) = P(x=1)f_y(y|1) + P(x=0)f_y(y|0) = g f_y(y|1) + (1-g)f_y(y|0)$$

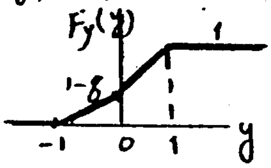
قضیه احتمال کلی

$$F_y(y) = P(x=1)F_y(y|x=1) + P(x=0)F_y(y|x=0) = gF_y(y|x=1) + (1-g)F_y(y|x=0)$$

یا می‌توانستیم بگوییم $F_y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_y(y)dy$.

شکل این دو تابع نیز در روبرو نشان داده شده است.





مسأله ۱۳ (الف)

$$Y|X \sim U(X,1) \quad , \quad X \sim U(0,1) \Rightarrow \begin{cases} EX = \frac{1}{2} \\ E\,Y|X = \frac{1}{2}(X+1) \end{cases}$$

$$m_y = EY = E(EY|X) = E(\frac{X+1}{2}) = \frac{1}{2}m_x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

(ب)

$$P\{y>2X\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,P\{y>2X|X=x\}\,dx = \int_0^1 P\{y>2X|X=x\}\,dx$$

قضیه احتمال کلی

$$= \int_0^{1/2} \frac{1-2x}{1-x}dx + \int_{1/2}^{1} 0\,dx = \int_0^{1/2}(2 - \frac{1}{1-x})dx = 1 - \ln 2 = 0.307$$

$$P\{Y>2X|X=x\} = P\{U(x,1)>2x\} = \begin{cases} 0, & 2x \geq 1 \\ \frac{1-2x}{1-x}, & 2x<1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x>\frac{1}{2} \\ \frac{1-2x}{1-x}, & x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

۴/

۱۴- الف) U و V هم توأماً نرمال خواهند بود. پس کافی است ثابت کنیم ناهمبسته هستند

$$EUV = E(X^2-Y^2) = EX^2-EY^2 = (\sigma^2+0^2)-(\sigma^2+0^2)=0$$

$$EUEV = E(X-Y)E(X+Y) = (EX-EY)(EX+EY) = (0-0)(0+0)=0 \Big\} \Rightarrow EUV = EUEV$$

پس $U \perp V$ و لذا $U \perp\!\!\!\perp V$

ب) Z یک متغیر تصادفی نرمال خواهد بود (ترکیب خطی از X و Y توأماً نرمال) پس کافی m_Z و σ_Z^2 را تعیین کنیم

$$m_Z = EZ = E(X+3Y)=0$$

$$\sigma_Z^2 = EZ^2 - 0 = E(X+3Y)^2 = EX^2+9EY^2+6EXY = \sigma^2+9\sigma^2+6\rho\sigma^2$$

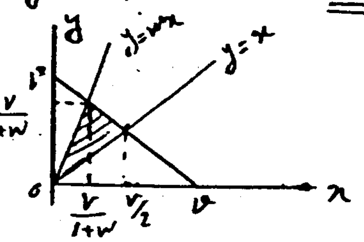
$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{EXY-0}{\sqrt{\sigma^2\sigma^2}} \Rightarrow EXY = \rho\sigma^2$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(10+6\rho)\sigma^2}}\, e^{-z^2/2(10+6\rho)\sigma^2}$$

ج) اگر W_1 و W_2 را برحسب U و V بدست آوریم خواهیم داشت $W_1 = \frac{1}{2}V$ و $W_2 = \frac{U^2}{4} - \frac{U^3}{8}$

چون U و V مستقل از هم هستند هر تابعی از U (مثل W_2) نیز مستقل از هر تابعی از V (مثل W_1) خواهد بود

۱۵- شرط ضابطه $0<x<y$ برحسب V و W بصورت $v>0$ و $w>1$ درمی آید



$$F_{WV}(w,v) = P\{W\le w, V\le v\} = P\{Y/X \le w, X+Y\le v\}$$

$$= \int_0^{\frac{v}{1+w}}\int_x^{wx} 2e^{-x-y}\,dy\,dx + \int_{\frac{v}{1+w}}^{\frac{v}{2}}\int_x^{v-x} 2e^{-x-y}\,dy\,dx$$

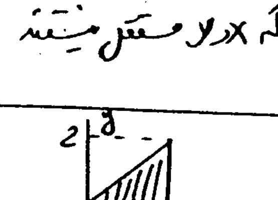
$$= 2[1-(v+1)e^{-v}]\,\frac{w-1}{2(w+1)}, \quad w>1, v>0$$

$$\Rightarrow f_{WV}(w,v) = \frac{\partial^2}{\partial w\,\partial v}F_{WV}(w,v) = ve^{-v}\frac{2}{(w+1)^2} \quad w>1, v>0$$

$$= 2[ve^{-v}, v>0]\times\left[\frac{1}{(w+1)^2}, w>1\right]$$

چون متغیرها در تابع pdf توأم تفکیک پذیرند پس $W \perp\!\!\!\perp V$ است (توجه شود که X و Y مستقل هستند
چون شرط ضابطه pdf توأم اجازه تفکیک نمی دهد)

۱۶- ناحیه $0<y<x<2$ در شکل روبرو نشان داده شده است



الف)

$$f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases}\int_0^x \frac{5}{16}x^2y\,dy = \frac{5}{32}x^4, & 0<x\le 2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_y^2 \frac{5}{16}x^2y\,dx = \frac{5}{48}(8-y^3)y, & 0<y<2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 2y/x^2, & 0<y<x\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 3\frac{x^2}{8-y^3}, & y<x\le 2\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

۱۰/

$$EX=\int_0^2 5x^5/32\,dx=5/3,\quad EX^2=\int_0^2 5x^6/32\,dx=20/7 \Longrightarrow \sigma_x^2=\frac{5}{63}=0.0794$$ (ب)

$$EY=\int_0^2 5y^2(8-y^3)/48\,dy=\frac{10}{9},\quad EY^2=\int_0^2 5y^3(8-y^3)/48\,dy=10/7 \Rightarrow \sigma_y^2=\frac{110}{567}=0.194$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{xy}(x,y)=\int_0^2 dx\int_0^x \frac{5}{16}x^2y\,xy\,dx\,dy=\frac{5}{48}\int_0^2 x^3x^3\,dx=\frac{40}{21}$$

$$\sigma_{xy}=EXY-EXEY=\frac{10}{189}\Longrightarrow \rho_{xy}=\sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y=0.426$$

(ج)

$$\hat{X}=EX=5/3,\quad P_{min}=\sigma_x^2=0.0794$$

(د)

$$\hat{x}=EX|y=\int_{-\infty}^{\infty}x f_x(x|y)\,dx=\frac{3}{8-y^3}\int_y^2 x^3\,dx=\frac{3}{4}\,\frac{16-y^4}{8-y^3}$$

$$EX^2|y=\frac{3}{8-y^3}\int_y^2 x^4\,dx=\frac{3}{5}\,\frac{32-y^5}{8-y^3}\longrightarrow \sigma_{x|y}^2=\frac{3}{5}\,\frac{32-y^5}{8-y^3}-\frac{9}{16}\left(\frac{16-y^4}{8-y^3}\right)^2$$

$$P_{min}=E\,\sigma_{x|y}^2=\frac{5}{48}\int_0^2 y(8-y^3)\left[\frac{3}{5}\,\frac{32-y^5}{8-y^3}-\frac{9}{16}\,\frac{(16-y^4)^2}{(8-y^3)^2}\right]dy\simeq 0.033$$

محاسبه با روش عددی

(ه)

$$\hat{x}=\rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})+\bar{x}=0.27227y-1.3636$$

$$P_{min}=\sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2)\simeq 0.065$$

همانطور که انتظار میرود از خطای بند ج کمتر ولی از خطای بند (د) بیشتر است.

۱۷

$$\hat{y}=a_1X_1+a_2X_2,\quad P=E(y-\hat{y})^2=E(y-a_1X_1-a_2X_2)^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial a_1}=0\Longrightarrow EX_1(y-a_1X_1-a_2X_2)=0\Longrightarrow a_1EX_1^2+a_2EX_1X_2=EX_1Y$$

$$\frac{\partial P}{\partial a_2}=0\Longrightarrow EX_2(y-a_1X_1-a_2X_2)=0\Longrightarrow a_2EX_2^2+a_1EX_1X_2=EX_2Y$$

$$\longrightarrow\begin{cases}a_1=\dfrac{EX_1Y\,EX_2^2-EX_2Y\,EX_1X_2}{EX_1^2EX_2^2-(EX_1X_2)^2}\\[2ex] a_2=\dfrac{EX_2Y\,EX_1^2-EX_1Y\,EX_1X_2}{EX_1^2EX_2^2-(EX_1X_2)^2}\\[2ex] P_{min}=E(y-a_1X_1-a_2X_2)(y-a_1X_1-a_2X_2)=Ey(y-a_1X_1-a_2X_2)-0-0=Ey^2-a_1EyX_1-a_2EY\end{cases}$$

۱۸ـ جرم احتمالهای کناری را بکمک روابط مقابل حساب می‌کنیم

$$p_{xy}(x,y)=\sum_z p_{xyz}(x,y,z)=p_{xyz}(x,y,0)+p_{xyz}(x,y,1)$$

$$p_x(x)=\sum_y p_{xy}(x,y)=p_{xy}(x,0)+p_{xy}(x,1)$$

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$p_{xy}(x,y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

x	0	0	1	1
z	0	1	0	1
$p_{xz}(x,z)$	0.3	0.2	0.1	0.4

y	0	0	1	1
z	0	1	0	1
$p_{yz}(y,z)$	0.1	0.15	0.3	0.45

x	0	1
$p_x(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	0	1
$p_y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

z	0	1
$p_z(z)$	0.4	0.6

(الف) چون به ازای جمیع مقادیر x و y داریم $p_{xy}(x,y)=p_x(x)p_y(y)$ پس $X \perp\!\!\!\perp Y$

(ب) با دلیلی شبیه دلیل بند الف داریم $Y \perp\!\!\!\perp Z$

(ج) چون مثلاً به ازای $x=0$ و $z=0$ داریم $p_{xz}(0,0)\neq p_x(0)p_z(0)$ پس $X \not\perp\!\!\!\perp Z$ هر دو با Y مستقل بودن با یکدیگر مستقل نیستند

(د) چون مثلاً به ازای $x=0$ و $y=0$ داریم $\overbrace{p_{xy}(0,0|z=0)}^{0}\neq \overbrace{p_x(0|z=0)}^{\frac{0.3}{0.4}}\overbrace{p_y(0|z=0)}^{\frac{0.1}{0.4}}$ لذا $(X|z=0)\not\perp\!\!\!\perp(Y|z=0)$
پس X و Y که مستقل بودند وقتی شرط $z=0$ را اضافه کنیم بهم وابسته می‌گردند

۱۹ - چون تابع چگالی را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب نوشت ($f_{XYZ}(x,y,z)$) پس $X \perp\!\!\!\perp Y \perp\!\!\!\perp Z$ اند.

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \left(\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{غیره} \end{cases}\right) \times \left(\begin{cases} 2y, & 0<y<1 \\ 0, & \text{غیره} \end{cases}\right) \times \left(\begin{cases} 2z, & 0<z<1 \\ 0, & \text{غیره} \end{cases}\right) = f_X(x) f_Y(y) f_Z(z)$$

برای هر یک ضریب 2 را از آن گرفتیم که سطح زیر واحد داشته باشد.

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0<y<1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2z, & 0<z<1 \\ 0, & \text{غیره} \end{cases} \quad \text{و} \quad f_{YZ}(y,z) = f_Y(y) f_Z(z) = \begin{cases} 4yz, & 0<y<1,\ 0<z<1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(الف) چون X، Y و Z مستقل هستند لذا ناهمبسته هم هستند یعنی $\rho_{yz} = \rho_{xz} = \rho_{xy} = 0$

(ب)

$$f_{XYZ}(x,y,z \mid y+z>1) = \begin{cases} \frac{1}{K} f_{XYZ}(x,y,z), & y+z>1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases} = \begin{cases} 9.6xyz, & 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1,\ 1<y+z \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$K = P\{Y+Z>1\} = \int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{y=1-z}^{\infty} f_{YZ}(y,z)\,dy\,dz = \int_0^1 \int_{1-z}^1 4yz\,dy\,dz = \frac{5}{6}$$

(ج) چون Y و Z مستقل از X هستند پس Y+Z هم مستقل از X است لذا

$$f_X(x \mid Y+Z>1) = f_X(x)$$

---

۲۰ - (الف) بلی توأماً نرمال هستند چرا که pdf توأم آنها نمائی با نمای درجه دوم است.

(ب)

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} e^{-(x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2-\sqrt{2}xy)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det C_X}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)}$$

متغیرها را مرتب کنیم

که در آن $x=x_1$ و $y=x_2$ و $z=x_3$ است. از مقایسه دیده می‌شود که

$$\underline{m}_X = (0,0,0)^t \quad \text{و} \quad C_X^{-1} = [\alpha_{ij}]_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_X = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ج) با حذف سطر و ستون مربوط به y داریم (سطر و ستون دوم)

$$\underline{m} = E(X\ Z)^t = (0,0)^t$$

$$C = E\binom{X}{Z}(X, Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{XZ}(x,z) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+z^2)/2}$$

پس X و Z نرمال مستقل با متوسط صفر و واریانس ۱ هستند

---

۲۱ - (الف)

$$m_S = ES = E(E(S|Y)) = E\left(\sum_{i=1}^{Y} EX_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^{Y} m\right) = EmY = ma$$

$$\sigma_S^2 = Var(S) = E(Var(S|Y)) + Var(E(S|Y)) = E\left(\sum_{i=1}^{Y} Var(X_i)\right) + Var\left(\sum_{i=1}^{Y} EX_i\right)$$

به دلیل استقلال X_iها

$$= E\left(\sum_{i=1}^{Y} \sigma^2\right) + Var\left(\sum_{i=1}^{Y} m\right) = E(Y\sigma^2) + Var(mY) = \sigma^2 a + m^2 Var(Y)$$

$$= \sigma^2 a + m^2 a = (\sigma^2+m^2)a$$

(ب)

$$\Phi_S(\omega) = Ee^{j\omega S} = EE(e^{j\omega S}|Y) = E\left(E\left(e^{j\omega\sum_{i=1}^{Y}X_i}\Big|Y\right)\right)$$

$$= E\left(E\left(\prod_{i=1}^{Y} e^{j\omega X_i}\Big|Y\right)\right) = E\prod_{i=1}^{Y}\left(Ee^{j\omega X_i}\right) = E\prod_{i=1}^{Y}\Phi_X(\omega)$$

بدلیل استقلال X_iها

$$= E(\Phi_X^Y(\omega)) = \Gamma_Y(\Phi_X(\omega)) = e^{a[\Phi_X(\omega)-1]}$$

۳۲ - الف) چون X_i ها پواسن با $\sigma_i^2 = m_i$ هستند پس $EX_i^2 = m_i + m_i^2$ و برای $i \neq j$ داریم $EX_iX_j = m_i m_j$ پس

$$R_X = E\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}(X_1\ X_2\ X_3) = \begin{pmatrix} m_1+m_1^2 & m_1m_2 & m_1m_3 \\ m_1m_2 & m_2+m_2^2 & m_2m_3 \\ m_3m_1 & m_3m_2 & m_3+m_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix},$$

ب) داریم $\tilde{Y}_1 = \tilde{X}_1$ و $\tilde{Y}_2 = \tilde{X}_2 - \tilde{X}_1$ و $\tilde{Y}_3 = \tilde{X}_3 - \tilde{X}_2$ ولذا

$$C_Y = E\,\tilde{Y}\tilde{Y}^t = E\begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2-\tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_3-\tilde{X}_2 \end{pmatrix}(\tilde{X}_1\quad \tilde{X}_2-\tilde{X}_1\quad \tilde{X}_3-\tilde{X}_2) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0-\sigma_1^2 & 0-0 \\ 0-\sigma_1^2 & \sigma_2^2+\sigma_1^2 & -\sigma_2^2 \\ 0-0 & -\sigma_2^2 & \sigma_3^2+\sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_Y(z) = E\,z_1^{Y_1}z_2^{Y_2}z_3^{Y_3} = E\,z_1^{X_1}z_2^{X_2-X_1}z_3^{X_3-X_2} = E\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{X_1}\left(\frac{z_2}{z_3}\right)^{X_2}z_3^{X_3}$$

ج)

$$= E\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{X_1}E\left(\frac{z_2}{z_3}\right)^{X_2}E\,z_3^{X_3} = \Gamma_{X_1}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\Gamma_{X_2}\left(\frac{z_2}{z_3}\right)\Gamma_{X_3}(z_3) = e^{\left(\frac{z_1}{z_2}+2\frac{z_2}{z_3}+3z_3-6\right)}$$

$$P\{Y_1=Y_2=Y_3=3\} \equiv P\{X_1=3,\ X_2=6,\ X_3=9\} = P\{X_1=3\}P\{X_2=6\}P\{X_3=9\} = e^{-6}\frac{1^3 2^6 3^9}{3!\,6!\,9!} = 1.992\times10^{-6}$$ (د)

---

۳۳ - باتوجه به روابط داده شده داریم $Y_n = Y_{n-1} + nX_n$ همچنین آمده معلوم بودن Y_1 الی Y_{n-1} معادل است با معلوم بودن X_1 الی X_{n-1} یعنی

$\{Y_{n-1}, Y_{n-2}, \dots, Y_1\} \equiv \{X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1\} = A$

الف)

$$E(Y_n|A) = E\,(Y_{n-1}+nX_n)|A = \underbrace{E\,Y_{n-1}|A}_{Y_{n-1}\ \text{طبق شرط معلوم است}} + \overbrace{nEX_n|A}^{X_n\ \text{مستقل از شرط است}} = Y_{n-1} + nEX_n = Y_{n-1} + nm_n$$

ب)

$$Var(Y_n|A) = E([Y_n - E(Y_n|A)]^2|A) = E((Y_n - Y_{n-1} - nm_n)^2|A) = E((nX_n - nm_n)^2|A)$$

$$= n^2E(X_n - m_n)^2 = n^2\sigma_n^2$$ چون X_n مستقل از A است

ج) به دلیل استقلال $f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$

بردار Y با بردار X رابطهٔ خطی دارد

$Y = AX$ که در آن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ضمناً جواب معادله $y = Ax$ بصورت

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = (y_2 - y_1)/2 \\ x_3 = (y_3 - y_2)/3 \\ \vdots \\ x_n = (y_n - y_{n-1})/n \end{cases}$$

میباشد پس

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\det(A)|}f_X(A^{-1}y) = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} f_i\left[(y_i - y_{i-1})/i\right]$$

۳۴

$$Y_1 = \max\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \Rightarrow F_{Y_1}(y) = P(Y_1 \le y) = P\{X_1 \le y, X_2 \le y, \dots, X_m \le y\}$$

$$\xrightarrow{\text{استقلال}\ X_i\ \text{ها}} F_{Y_1}(y) = \prod_{i=1}^{m} P(X_i \le y) = \prod_{i=1}^{m} F_{X_i}(y) = F_X^m(y) \Rightarrow f_{Y_1}(y) = mF_X^{m-1}(y)f_X(y)$$

$$Y_2 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \Rightarrow P\{Y_2 > y\} = P\{X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_m > y\} = \prod_{i=1}^{m} P(X_i > y)$$

$$F_{Y_2}(y) = P(Y_2 \le y) = 1 - \prod_{i=1}^{m} P(X_i > y) = 1 - [1 - F_X(y)]^m \Rightarrow f_{Y_2}(y) = m[1 - F_X(y)]^{m-1}f_X(y)$$

$$Y_3 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \Rightarrow \Phi_{Y_3}(\omega) = E[e^{j\frac{\omega}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i}] = \prod_{i=1}^{m} E(e^{j\frac{\omega}{m}X_i}) = \Phi_X^m\left(\frac{\omega}{m}\right)$$

$$\left[\Phi_X\left(\frac{\omega}{m}\right) \Leftrightarrow mf_X(mx)\right] \Rightarrow f_{Y_3}(y) = m^m\ \underbrace{f_X(my) * f_X(my) * \cdots * f_X(my)}_{m\ \text{بار}}$$

$$f_{Z_k}(z)\,dz = P\left\{\begin{array}{l} k-1 \text{ تا از } x_i \text{ ها بزرگتر از } z \text{ و } n-k \text{ تا} \\ x_i \text{ ها کوچکتر از } z \text{ و یکی از } x_i \text{ ها در فاصله } z \text{ تا } z+dz \end{array}\right\} = \binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{n-k}\binom{1}{1}\left[1-F_X(z)\right]^{k-1} F_X^{\,n-k}(z)\, f_X(z)\,dz$$ ۲۵

$$\Longrightarrow f_{Z_k}(z) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, F_X^{\,n-k}(z)\left[1-F_X(z)\right]^{k-1} f_X(z)$$

حال چگالی احتمال توأم Z_1 و Z_n را بدست می‌آوریم

$$f_{Z_1Z_n}(z_1,z_n)\,dz_1 dz_n = \begin{cases} P\left\{\begin{array}{l} \text{یکی از } X_i \text{ ها در فاصله } z_1 \text{ تا } z_1+dz_1 \text{ یکی دیگر از } X_i \text{ ها} \\ \text{در فاصله } z_n \text{ تا } z_n+dz_n \text{ و بقیه در فاصله } z_1 \text{ تا } z_n \end{array}\right\}, & z_n \le z_1 \\ 0, & z_n > z_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n(n-1)\, f_X(z_1) f_X(z_n)\left[F_X(z_1)-F_X(z_n)\right]^{n-2} dz_1 dz_n, & z_n \le z_1 \\ 0, & z_n > z_1 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P\{Z_1 - Z_n \le z\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z+z_n} f_{Z_1Z_n}(z_1,z_n)\,dz_1\,dz_n$$

$$= \begin{cases} n(n-1)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z_n)\int_{z_n}^{z+z_n} f_X(z_1)\left[F_X(z_1)-F_X(z_n)\right]^{n-2} dz_1\,dz_n, & z \ge 0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z_n)\left\{\left[F_X(z+z_n)-F_X(z_n)\right]^{n-1} - \left[\cancel{F_X(z_n)-F_X(z_n)}\right]^{n-1}\right\} dz_n, & z \ge 0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \begin{cases} n(n-1)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z_n) f_X(z+z_n)\left[F_X(z+z_n)-F_X(z_n)\right]^{n-2} dz_n, & z \ge 0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$$

$$C_X = R_X - m_X m_X^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}(2\ \ -1\ \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$ ۲۶

$\det C_X = 6-2-4 = 0 \Longrightarrow$ x_i ها رابطه خطی دارند

برای روشن شدن رابطه بردار ویژه صفر ضریب رابطه خطی را میدهد

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_1 = v_2 = v_3 = K$$

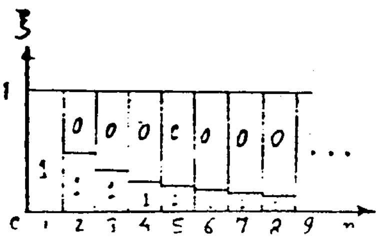
$$K(x_1-2) + K(x_2+1) + K(x_3-0) = 0 \Longrightarrow \boxed{x_1+x_2+x_3 = 1}$$

---

۲۷ (الف) در کلیه نقاط $\xi < 1/2$ رشته‌ای $\{10101\cdots\}$ و در کلیه نقاط $\xi > 1/2$ رشته‌ای $\{01010\cdots\}$ و در $\xi = 1/2$ رشته $\{00000\cdots\}$ داریم. واضح است در همه جا بجز $\xi = 1/2$ رشته‌ها نوسانی هستند

پس تقارب با احتمال ۱ و $\xrightarrow{e}$ و $\xrightarrow{ae}$ نداریم. اگر با توجه به تشابه نقاط Ω فرض کنیم $X(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi = 1/2 \\ a, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$

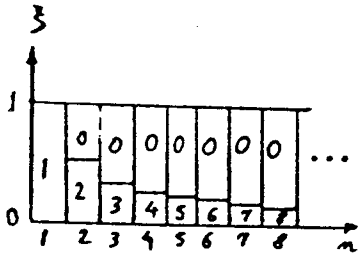
تقارب ملاکی $P\{|X_n - X| > \varepsilon\}$ مستقل از n و مخالف صفر است (به ازای $a \ne 0, 1$ برابر یک و به ازای $a = 0$ یا 1 برابر $\frac{1}{2}$ است) پس $\xrightarrow{P}$ و بالطبع $\xrightarrow{ms}$ نداریم. ولی چون $f_{X_n}(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$ مستقل از n میباشد خود آنهم حدی بوده و تقارب با توزیع $\xrightarrow{dist}$ داریم.



(ب) با توجه به شکل روبرو که بطور شماتیک رشته‌ای نقاط مختلف فضای $\Omega = [0, 1]$ را نشان میدهد واضح است که در همه جا تقارب به $X(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \ne 0 \\ 1, & \xi = 0 \end{cases}$ داریم با تقارب $\xrightarrow{e}$ تقاربهای $\xrightarrow{ae}$ و $\xrightarrow{P}$ و $\xrightarrow{dist}$ هم نتیجه میگردد. ضمناً در توزیع به

$f_X(x)=\delta(x)$ متقارب میگردد ($P(X=1)=0$ است) . تقارب در ms هم داریم زیرا

$$E(X_n-X)^2=(1-\tfrac{1}{n})\times 0^2+\tfrac{1}{n}\times 1^2=\tfrac{1}{n}\longrightarrow 0$$

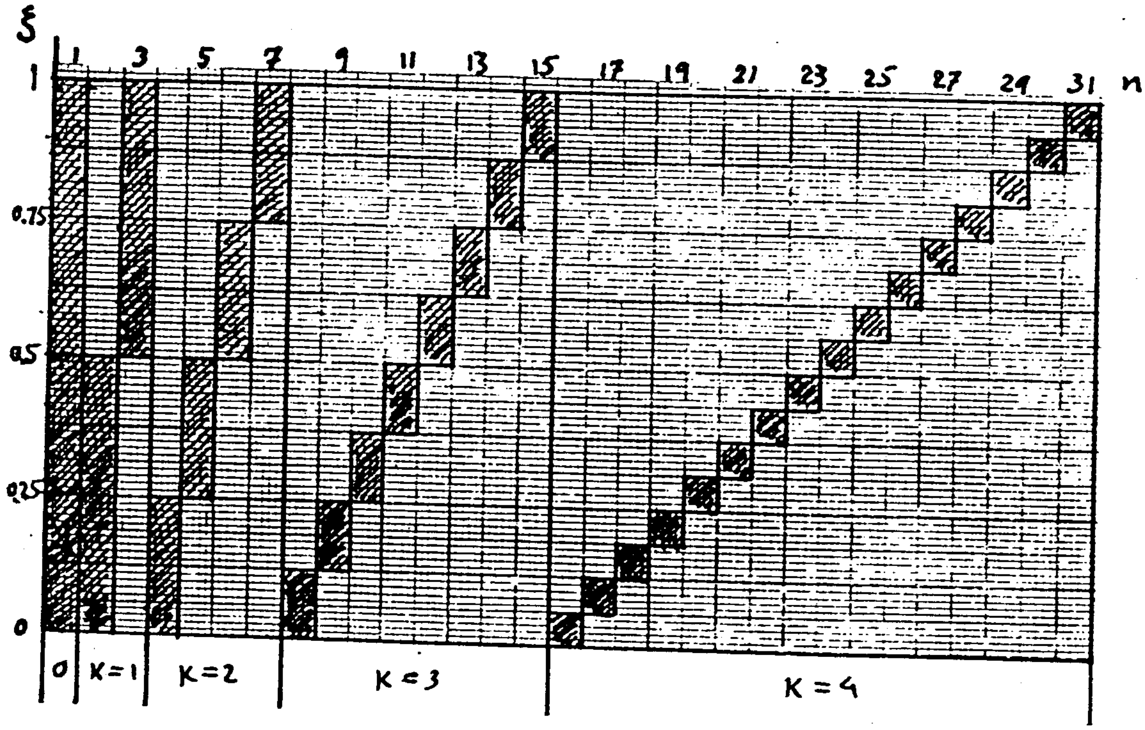


ج) در اینجا نیز با توجه به شکل روبرو واضح است که بجز در $\xi=0$ در بقیه نقاط تقارب به $X(\xi)=0$ داریم. در $\xi=0$ چون همواره $X_n(0)=n$ است تقارب نداریم پس تقارب $\xrightarrow{ae}$ و لذا $\xrightarrow{p}$ و $\xrightarrow{d}$ داریم. در اینجا هم تقریباً در توزیع به $f_X(x)=\delta(x)$ متقارب میگردد. ولی در اینجا تقارب در ms نداریم چون رشته:

$$E(X_n-X)^2=(1-\tfrac{1}{n})\times 0^2+\tfrac{1}{n}\,n^2=n$$

بنابراین تقارب به صفر ندارد.

د) در شکل زیر نقاط هاشور خورده نقاطی هستند که در آنها $X_n(\xi)=1$ است و در سایر نقاط $X_n(\xi)=0$ است.



همانطور که از شکل دیده می‌شود در هیچ جای مقدار ξ رشته متقارب نداریم ولی تقارب در احتمال داریم چون با در نظر گرفتن متغیر تصادفی حدی $X(\xi)=0$ داریم

$$P(A_n)=P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=2^{-K}\longrightarrow 0\quad,\ \forall\varepsilon>0$$

به دلیل تقارب در احتمال تقارب در توزیع هم داریم و حد توزیع (pdf) بصورت $f_X(x)=\delta(x)$ است

تقارب در ms هم داریم چون با متغیر تصادفی حدی $X(\xi)=0$ داریم

$$E(X_n-X)^2=E(X_n-0)^2=EX_n^2=0^2(1-2^{-K})+1^2(2^{-K})=2^{-K}\longrightarrow 0$$

بسمه تعالی

مسائل سری دوم

مسالهٔ ۱- اگر $X(t)$ یک فرایند ساکن به مفهوم وسیع WSS با متوسط صفر $(m_X = 0)$ باشد، WSS بودن کدامیک از دو فرایند $Y(t) \triangleq X(t)$ و $Z(t) \triangleq |X(t)|$ را میتوان نتیجه گرفت و چرا؟

مسالهٔ ۲- بردار سه بعدی $\mathbf{X}^t = (X_1, X_2, X_3)$ را در نظر بگیرید که در آن $X_1 = X(t_0)$ و $X_2 = X(2t_0)$ و $X_3 = X(4t_0)$ متغیرهای تصادفی از یک فرایند پواسن با چگالی یکنواخت λ می باشند.

الف) تابع مولد احتمال بردار $\mathbf{X}$ را بدست آورید.

ب) احتمال پیش آمدهای شرطی $\{X_3 = 4n \mid X_1 = n\}$ و $\{X_1 = n \mid X_3 = 4n\}$ که در آن n یک عدد طبیعی معلوم است را محاسبه کنید.

مسالهٔ ۳ - فرایند نویز سفید غیر ساکن $V(t)$ با تابع همبستگی $R_V(t+\tau, t) = N_0(t)\cdot\delta(\tau)$ تعریف می‌گردد که در ان $N_0(t)$ یک تابع حقیقی غیر منفی است.

الف) با فرض آنکه داشته باشیم $X(t) \triangleq \int_0^t V(\alpha)d\alpha,\ t \geq 0$ تابع همبستگی $X(t)$ را بدست آورید.

ب) با فرض آنکه $Y(t)$ خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ (در حالت کلی مختلط) باشد تابع همبستگی فرایند Y و همبستگی‌های متقابل فرایند V و Y رابدست آورید.

مسالهٔ ٤ - فرض کنید $X(t)$ یک فرایند با نموهای متعامد بوده و ضمنا $X(0) = 0$ باشد.

الف) ثابت کنید تابع همبستگی $R_X(t_1, t_2)$ در سه حالت $t_1 \leq t_2 \leq 0$ و $t_1 \leq 0 \leq t_2$ و $0 \leq t_1 \leq t_2$ بترتیب برابر با مقادیر $EX^2(t_2)$ و 0 و $EX^2(t_1)$ می‌باشد.

ب) با فرض آنکه $m_X(t) = 0$ و $E[X(t_1) - X(t_2)]^2 = a|t_1 - t_2|$ باشد که در آن a مقدار ثابتی است ثابت کنید فرایند $Y(t) = \frac{1}{\varepsilon}[X(t+\varepsilon) - X(t)]$ ساکن می‌باشد و $R_Y(\tau) = \frac{a}{\varepsilon}\Lambda(\frac{\tau}{\varepsilon})$ است.

✓ مسالهٔ ۵- فرض کنید $X(t)$ یک فرایند پواسن با چگالی نقاط λ میباشد. متغیر تصادفی A نیز مستقل از فرایند $X(t)$ بوده و دارای تابع چگالی احتمال زیر است.

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{e^{\lambda}-1}e^{\lambda a}, & 0<a<1\\ 0\ , & \text{Otherwise}\end{cases}$$

احتمال $P\{X(A)=n\}$ را حساب کنید.

✓ مسالهٔ ٦ - یک فرآیند نرمال $X(t)$ با متوسط صفر و تابع همبستگی $R_X(\tau)=4e^{-|\tau|}$ در نظر بگیرید.

الف) توابع چگالی احتمال کناری و توام دو نمونه بفاصله یک ثانیه از فرایند را بنویسید.

ب) اگر مقدار فعلی فرایند a باشد بهترین پیشگوئی مقدار یک ثانیه بعد فرایند چیست و متوسط مربع خطای چنین تخمینی چقدر است؟

✓ مسالهٔ ۷- $X(t)$ یک فرایند نرمال ساکن با تابع همبستگی $R_X(\tau)=\dfrac{\sin^2(4\pi\tau)}{\pi^2\tau^2}$ میباشد و تابع متوسط آن صفر است $m_X(t)=0$.

الف) متغیر های تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ این فرایند به ازای چه مقادیری از t_1 و t_2 مستقل از هم میباشند و چرا؟

ب) دو متغیر تصادفی $Y_1=X(t)-X(t-0.5)$ و $Y_2=X(t)+X(t+0.5)$ را در نظر بگیرید و تابع چگالی تک تک (کناری) و همچنین تابع چگالی احتمال توام آندو را بدست آورید.

ج) تابع مشخصهٔ (cf) توام سه متغیر تصادفی $Z_1=X(t-0.25)$ و $Z_2=X(t)$ و $Z_3=X(t+0.25)$ را پیدا کنید.

✓ مسالهٔ ۸- فرایند سیگنال تلگرافی $X(t)$ با چگالی نقاط پواسن ثابت λ را در نظر بگیرید. سه متغیر تصادفی آنرا $X_1=X(1)$ و $X_2=X(2)$ $X_3=X(3)$ مینامیم.

الف) ماتریس همبستگی بردار $X^t=(X_1,X_2,X_3)$ را بدست آورید.

ب) احتمال پیش آمد $P\{X_1=X_2=X_3\}$ را تعیین کنید.

ج) متغیر تصادفی لحظهٔ تصادفی $t=2+X_1$ فرآیند را $X_4=X(2+X_1)$ مینامیم. متوسط و واریانس X_4 را تعیین کنید.

مسأله ۹ - فرض کنید اطلاعات $X(t)=g(t)+V(t)$ در دست است که در آن $g(t)$ یک تابع یقینی ولی مجهول است و $V(t)$ نویز سفید با تابع همبستگی $R_V(\tau)=N_0\delta(\tau)$ می‌باشد. با استفاده از این اطلاعات می‌خواهیم تخمینی از مقدار $S(t)=\int_0^t g(\alpha)d\alpha$ داشته باشیم. ضمناً می‌دانیم $S(T)=0$ است. نشان دهید که اگر برای تخمین فوق از رابطه $\hat{S}(t)=Z(t)-\frac{t}{T}Z(T)$ استفاده کنیم که در آن $Z(t)=\int_0^t X(\alpha)d\alpha$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}\hat{S}(t)=S(t)$$

$$\sigma^2_{\hat{S}(t)}=\mathrm{E}[\hat{S}(t)-S(t)]^2=N_0 t\,|1-\frac{t}{T}|$$

مسأله ۱۰ - فرایند وینری با تعریف $X(t)=\int_0^t W(\alpha)d\alpha$ و برای $t\in(-\infty,\infty)$ در نظر بگیرید که در آن $W(t)$ فرایند نویز سفید نرمال با همبستگی $R_W(\tau)=N_0\delta(\tau)$ می‌باشد.

الف) ثابت کنید:

$$R_X(t_1,t_2)=\begin{cases}N_0\mathrm{Min}(|t_1|,|t_2|)\,, & t_1t_2\ge 0\\ 0\,, & t_1t_2\le 0\end{cases}$$

ب) ME بودن یا نبودن فرایند فوق را تعیین کنید.

مسأله ۱۱-فضای نمونه ای شامل دو نقطه $\Omega=\{\xi_1,\xi_2\}$ و با توزیع احتمال یکنواخت $\mathrm{P}\{\xi_1\}=\mathrm{P}\{\xi_2\}=\frac{1}{2}$ در نظر بگیرید.

در این فضا فرآیند $X(t)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$X(t,\xi)\overset{\Delta}{=}\begin{cases}\mathrm{Sin}^2(t), & \xi=\xi_1\\ \mathrm{Cos}^2(t), & \xi=\xi_2\end{cases}$$

الف) آیا این فرایند در متوسط ارگادیک است (ME) ؟ چرا؟

ب) آیا این فرآیند در تابع همبستگی ارگادیک است (CE)؟ چرا؟

مسأله ۱۲- فرض کنید $X(t)$ یک فرایند با تابع متوسط $m_X(t)=0$ و تابع همبستگی $R_X(t+\tau,t)=e^{-t^2}\delta(\tau)$ میباشد.

الف) آیا این فرایند از نظر متوسط ارگادیک (ME) است؟ چرا؟

ب) آیا این فرایند از نظر همبستگی ارگادیک (CE) است؟ چرا؟

(حل مسائل سری دوم)

مسأله ۱:

$$m_y(t) = E\, e^{\alpha t} X(t) = m_x(t)\, e^{\alpha t} = 0$$

$$R_y(t+\tau, t) = E\, e^{\alpha(t+\tau)} X(t+\tau)\, e^{-\alpha t^*} X^*(t) = e^{\alpha\tau} E X(t+\tau) X^*(t) = e^{\alpha\tau} R_x(\tau)$$

$\Rightarrow$ $Y(t)$ فرایند WSS است

چون رابطه $Z(t)$ با $X(t)$ یک رابطه غیرخطی ولی تغییرناپذیر با زمان است اگر فرایند $X(t)$ یک فرایند SSS کامل بود فرایند $Z(t)$ هم یک فرایند SSS کامل میشد. در مورد WSS بودن ولی اطمینان نیست چراکه ممانهای مرتبه اول و دوم فرایند جدید به ممانهای مرتبه بالاتر فرایند $X(t)$ بستگی پیدا میکنند و این ممانها ممکن است با گذشت زمان تغییر کنند.

مسأله ۲: (الف)

$$\Gamma_X(\underline{z}) = E\, z_1^{X_1} z_2^{X_2} z_3^{X_3} = E\, z_1^{X_1} z_2^{(X_2-X_1)+X_1} z_3^{(X_3-X_2)+(X_2-X_1)+X_1}$$

$$= E\, (z_1z_2z_3)^{X_1} (z_2z_3)^{X_2-X_1} (z_3)^{X_3-X_2} \xrightarrow{\text{با نموهای مستقل}} = E(z_1z_2z_3)^{X_1}\, E(z_2z_3)^{X_2-X_1}\, E\, z_3^{X_3-X_2}$$

$$= \Gamma_{X_1}(z_1z_2z_3)\, \Gamma_{X_2-X_1}(z_2z_3)\, \Gamma_{X_3-X_2}(z_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda t_0) \\ X_2 - X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda t_0) \\ X_3 - X_2 \sim \text{Poisson}(2\lambda t_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma_{X_1}(z) = \Gamma_{X_2-X_1}(z) = e^{\lambda t_0(z-1)} \;\; \text{و} \;\; \Gamma_{X_3-X_2}(z) = e^{2\lambda t_0(z-1)}$$

$$\Gamma_X(\underline{z}) = e^{\lambda t_0(z_1z_2z_3 + z_2z_3 + 2z_3 - 4)}$$

ب)

$$P\{X_3 = 4n \mid X_1 = n\} = P\{X_3 - X_1 = 3n \mid X_1 = n\} = P\{X_3 - X_1 = 3n\} = e^{-3\lambda t_0} \frac{(3\lambda t_0)^{3n}}{(3n)!}$$

$$X_3 - X_1 \sim \text{Poisson}(3\lambda t_0)$$

$$P\{X_1 = n \mid X_3 = 4n\} = \frac{P\{X_1 = n\} P\{X_3 = 4n \mid X_1 = n\}}{P\{X_3 = 4n\}} = \frac{e^{-\lambda t_0} \frac{(\lambda t_0)^n}{n!}\, e^{-3\lambda t_0} \frac{(3\lambda t_0)^{3n}}{(3n)!}}{e^{-4\lambda t_0} \frac{(4\lambda t_0)^{4n}}{(4n)!}}$$

$$= \frac{(4n)!}{n!\,(3n)!} \frac{3^{(3n)}}{4^{(4n)}}$$

مسأله ۳: (الف)

$$R_X(t_1, t_2) = E X(t_1) X^*(t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} E\, V(\alpha) V^*(\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} N_0(\beta)\,\delta(\alpha-\beta)\, d\alpha\, d\beta = \int_0^{t_1} N_0(\beta)[u(t_2-\beta) - u(-\beta)]\, d\beta = \int_0^{t_1} N_0(\beta)\, u(t_2-\beta)\, d\beta$$

$$= \int_0^{\min(t_1,t_2)} N_0(\beta)\, d\beta$$

ب)

$$R_{yv}(t_1,t_2) = h(t_1) * R_v(t_1,t_2) = h(t_1) * \delta(t_1-t_2) N_0(t_2) = N_0(t_2)\, h(t_1-t_2)$$

$$R_{vy}(t_1,t_2) = R_v(t_1,t_2) * h^*(t_2) = [N_0(t_2)\,\delta(t_1-t_2)] * h^*(t_2) = [N_0(t_1)\,\delta(t_1-t_2)] * h^*(t_2) = N_0(t_1)\, h^*(t_2-t_1)$$

$$R_y(t_1,t_2) = h(t_1) * R_{vy}(t_1,t_2) = h(t_1) * [N_0(t_1)\, h^*(t_2-t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\alpha) N_0(\alpha)\, h^*(t_2-\alpha)\, d\alpha$$

مسأله ٤: (الف)

$$t_1 \le t_2 \le 0: \quad E[X(t_1) - X(t_2)][\cancel{X(0)}^{0} - X(t_2)] = 0 \Longrightarrow R_X(t_1,t_2) = E X^2(t_2)$$

$$t_1 \le 0 \le t_2: \quad E[X(t_1) - \cancel{X(0)}^{0}][X(t_2) - \cancel{X(0)}^{0}] = 0 \Longrightarrow R_X(t_1,t_2) = 0$$

$$0 \le t_1 \le t_2: \quad E[X(t_1) - \cancel{X(0)}^{0}][X(t_2) - X(t_1)] = 0 \Longrightarrow R_X(t_1,t_2) = E X^2(t_1)$$

(ب)

$$m_y(t) = \frac{1}{\varepsilon} E[x(t+\varepsilon) - x(t)] = \frac{1}{\varepsilon}(m_x(t+\varepsilon) - m_x(t)) = 0$$

با توجه به تعاریف فرایند $x(t)$ به عنوان تعداد ... و اینکه $E\{y(t)\}$ فرایند در بازه $(t, t+\varepsilon)$ است و اینکه ... با Δt برابر $a\Delta t$ است پس

$t_1 \text{———} t_1+\varepsilon$

$t_2 \text{———} t_2+\varepsilon$

$$R_y(t_1,t_2) = \begin{cases} 0, & t_2 > t_1+\varepsilon \text{ یا } t_1 > t_2+\varepsilon \\ \frac{a}{\varepsilon^2}(t_1+\varepsilon-t_2), & t_2 < t_1+\varepsilon \\ a/\varepsilon^2\,(t_2+\varepsilon-t_1), & t_1 < t_2+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow R_y(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau<-\varepsilon \text{ یا } \tau>\varepsilon \\ a/\varepsilon^2(\tau+\varepsilon), & \tau>-\varepsilon \\ a/\varepsilon^2(\varepsilon-\tau), & \tau<\varepsilon \end{cases} = \frac{a}{\varepsilon}\Lambda\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$$

مسأله ۵:

$$P\{x(A)=n\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a) P\{x(A)=n \mid A=a\}\, da = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a) P\{x(a)=n \mid A=a\} \underset{X \perp A}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a) P\{x(a)=n\}\, da$$

احتمال کل

$$= \int_0^1 \frac{\lambda}{e^{\lambda}-1} e^{\lambda a}\left(\frac{(\lambda a)^n}{n!} e^{-\lambda a}\right) da = \frac{\lambda^{n+1}}{(e^{\lambda}-1)n!}\int_0^1 a^n\, da = \frac{\lambda^{n+1}}{(e^{\lambda}-1)(n+1)!}$$

مسأله ۶:

(الف)

$$m_x(t) = m_x(t+1) = 0,\quad \sigma_{x(t)}^2 = \sigma_{x(t+1)}^2 = C_x(0) = R_x(0) = 4$$

$$\sigma_{x(t),x(t+1)} = C_x(1) = R_x(1) = 4e^{-1},\quad \rho = \frac{4e^{-1}}{4} = 1/e$$

پس توسط ماتریس کوواریانس بردار دو بعدی معلوم است

$$m_X^t = (0,0),\quad C_X = \begin{pmatrix} 4 & 4/e \\ 4/e & 4 \end{pmatrix}$$

$$f_{x(t),x(t+1)}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \begin{vmatrix} 4 & 4/e \\ 4/e & 4 \end{vmatrix}}} e^{-\frac{1}{2}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 4 & 4/e \\ 4/e & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}} = \frac{1}{8\pi\sqrt{1-1/e^2}} e^{-\frac{x_1^2 - 2/e\, x_1x_2 + x_2^2}{8(1-1/e^2)}}$$

$$f_{x(t)}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2} e^{-x_1^2/8},\quad f_{x(t+1)}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2} e^{-x_2^2/8}$$

چگالی احتمال کناری

ب) بهترین تخمین، متوسط $x(t+1)$ است (با دانستن $x(t)=a$). چون توزیع نرمال است، بهترین تخمین یک رابطه خطی با معیار شاهد شده دارد.

$$\hat{X}(t+1) = \rho\frac{\sigma_{x(t+1)}}{\sigma_{x(t)}}[x(t)-0]+0 = \frac{1}{e}x(t) \longrightarrow \hat{X}(t+1) = \frac{1}{e}a$$

$$P_{min} = \sigma_{x(t+1)}^2(1-\rho^2) \Longrightarrow P_{min} = 4(1-1/e^2)$$

مسأله ۷:

الف) چون متغیرها تصادفی فرایند گوسی نرمال هستند برای استقلال، کواریانس باید صفر باشد.

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) - |m_x|^2 = R_x(\tau) = 0 \Longrightarrow \tau = \begin{cases} n/4, & n\in Z, n\neq 0 \\ \infty \end{cases}$$

ب) y_1 و y_2 نیز گوسی نرمال هستند. کوواریانس آنها را باید حساب کنیم

$$m_{y_1} = m_x - m_x = 0,\quad m_{y_2} = m_x + m_x = 0$$

$$\sigma_{y_1}^2 = E(x(t)-x(t-0.5))^2 = 2R_x(0) - 2R_x(0.5) = 32,\quad \sigma_{y_2}^2 = E[x(t)+x(t+0.5)]^2 = 2R_x(0)+2R_x(0.5) = 32$$

$$\sigma_{y_1y_2} = E(x(t)-x(t-0.5))(x(t)+x(t+0.5)) = R_x(0)+R_x(0.5)-R_x(0.5)-R_x(1) = 16$$

$$f_{y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{64\pi}}e^{-y_1^2/64},\quad f_{y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{64\pi}}e^{-y_2^2/64},\quad f_{y_1y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{32\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{y_1^2+y_2^2-y_1y_2}{48}}$$

ج) طبق بند الف z_1, z_2, z_3 مستقل از هم می‌باشند و لذا

$$\Phi_{z_1z_2z_3}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \prod_{i=1}^{3}\Phi_{z_i}(\omega_i) = \prod_{i=1}^{3} e^{-8\omega_i^2} = e^{-8(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{z_1} = m_{z_2} = m_{z_3} = m_x = 0 \\ \sigma^2 = \ldots = R_x(0) = 16 \end{array}\right\} \Longrightarrow \Phi_{z_1}(\omega) = \Phi_{z_2}(\omega) = \Phi_{z_3}(\omega) = e^{-8\omega^2}$$

مسأله ۸: (الف)

$$R_X = E\begin{pmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{pmatrix}(X(1), X(2), X(3)) = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(1) & R_X(2) \\ R_X(1) & R_X(0) & R_X(1) \\ R_X(2) & R_X(1) & R_X(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\lambda} & e^{-4\lambda} \\ e^{-2\lambda} & 1 & e^{-2\lambda} \\ e^{-4\lambda} & e^{-2\lambda} & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$$

(ب)

$$P\{X_1 = X_2 = X_3\} = P\{X_1 = X_2 = X_3 = 1\} + P\{X_1 = X_2 = X_3 = -1\} = 2P\{X_1 = X_2 = X_3 = 1\}$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})\,\tfrac{1}{2}(1+e^{-2\lambda}) = \tfrac{1}{4}(1+e^{-2\lambda})^2$$

(ج)

$$m_{X_4} = E\,X(2+X_1) = P(X_1=1)\,E\,X(2+X_1)|_{X_1=1} + P(X_1=-1)\,E\,X(2+X_1)|_{X_1=-1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,E\,X(3)|_{X_1=1} + \tfrac{1}{2}E\,X(1)|_{X_1=-1} = \tfrac{1}{2}E\,X_3|_{X_1=1} + \tfrac{1}{2}E\,X_1|_{X_1=-1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(1)P(X_3=1|X_1=1) + (-1)P(X_3=-1|X_1=1)\right] + \tfrac{1}{2}(-1) = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(1+e^{-4\lambda}) - \tfrac{1}{2}(1-e^{-4\lambda})\right] - \tfrac{1}{2}$$

$$= (e^{-4\lambda}-1)/2$$

$$r_{X_4} = E\,X^2(2+X_1) = 1$$ چون $X \in \{1,-1\}$ است پس $X^2=1$ است

$$\sigma^2_{X_4} = r_{X_4} - m^2_{X_4} = 1 - \frac{(e^{-4\lambda}-1)^2}{4}$$

مسأله ۹:

$$\hat{S}(t) = \int_0^t [g(\alpha)+v(\alpha)]\,d\alpha - \frac{t}{T}\int_0^T [g(\alpha)+v(\alpha)]\,d\alpha = S(t) - \frac{t}{T}S(T) + \int_0^t v(\alpha)\,d\alpha - \frac{t}{T}\int_0^T v(\alpha)\,d\alpha$$

$$S(T) = 0 \Longrightarrow \hat{S}(t) = S(t) + \int_0^t v(\alpha)\,d\alpha - \frac{t}{T}\int_0^T v(\alpha)\,d\alpha$$

$$E\,\hat{S}(t) = S(t) + E\int_0^t v(\alpha)\,d\alpha - \frac{t}{T}E\int_0^T v(\alpha)\,d\alpha = S(t)$$ چون $S(t)$ غیرتصادفی و $E\,v(t)=0$ است

$$\sigma^2_{\hat{S}(t)} = E[\hat{S}(t) - E\hat{S}(t)]^2 = E[\hat{S}(t)-S(t)]^2 = E\left[\int_0^t v(\alpha)\,d\alpha - \frac{t}{T}\int_0^T v(\alpha)\,d\alpha\right]\left[\int_0^t v(\beta)\,d\beta - \frac{t}{T}\int_0^T v(\beta)\,d\beta\right]$$

$$= \int_0^t\int_0^t R_v(\alpha-\beta)\,d\alpha\,d\beta + \frac{t^2}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_v(\alpha-\beta)\,d\alpha\,d\beta - \frac{t}{T}\int_0^t\int_0^T [R_v(\alpha-\beta)+R_v(\beta-\alpha)]\,d\alpha\,d\beta$$

$$= N_0\int_0^t [u(t-\beta)-u(-\beta)]\,d\beta + N_0\frac{t^2}{T^2}\int_0^T [u(T-\beta)-u(-\beta)]\,d\beta - \frac{2t}{T}\int_0^t [u(T-\beta)-u(-\beta)]\,d\beta$$

$$= N_0\left\{r(t) - \cancel{r(0)} - \cancel{r(0)} + r(-t) + \frac{t^2}{T^2}[r(T) - \cancel{r(0)} - \cancel{r(0)} + r(-T)] - \frac{2t}{T}[r(T) - r(T-t) - \cancel{r(0)} + r(-t)]\right\}$$

$$= \begin{cases} N_0\left[t + \frac{t^2}{T^2}T - \frac{2t}{T}(T-T+t)\right] = N_0 t\left(1-\frac{t}{T}\right), & 0<t<T \\ N_0\left[t + \frac{t^2}{T} - \frac{2t}{T}(T)\right] = N_0 t\left(t/T - 1\right), & 0<T<t \end{cases} = N_0 t\left|1-\frac{t}{T}\right|$$

مسأله ۱۱: (الف)

$$m_X(t) = E\,X(t) = \tfrac{1}{2}\sin^2 t + \tfrac{1}{2}\cos^2 t = \tfrac{1}{2}$$

$$\langle X(t)\rangle = \begin{cases} \langle \sin^2(t)\rangle = \tfrac{1}{2}, & \zeta = \zeta_1 \\ \langle \cos^2(t)\rangle = \tfrac{1}{2}, & \zeta = \zeta_2 \end{cases} \Longrightarrow E\,X(t) = \langle X(t)\rangle$$ پس فرایند ME است

(ب)

$$\langle X(t+\tau)X(t)\rangle = \begin{cases} \langle \sin^2(t+\tau)\sin^2(t)\rangle = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\cos(2\tau), & \zeta = \zeta_1 \\ \langle \cos^2(t+\tau)\cos^2(t)\rangle = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\cos(2\tau), & \zeta = \zeta_2 \end{cases}$$

$$R_X(t+\tau, t) = E\,X(t+\tau)X(t) = \tfrac{1}{2}\sin^2(t+\tau)\sin^2(t) + \tfrac{1}{2}\cos^2(t+\tau)\cos^2(t)$$

$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\cos(2\tau) + \tfrac{1}{4}\cos(4t+2\tau)$$

$$\langle X(t+\tau)X(t)\rangle \neq E\,X(t+\tau)X(t)$$ پس CE نیست

توجه شود که اگرچه $\langle X(t+\tau)X(t)\rangle$ در نقاط مختلف فضای نمونه یکسان بود ولی فرایند CE نیست

٤/٤

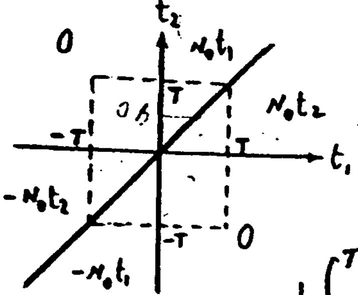
مسئله ۱۰: (الف)

$$R_X(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} E\,W(\alpha)W(\beta)\,d\alpha\,d\beta=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} N_0\,\delta(\alpha-\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$=N_0\int_0^{t_1}[u(t_2-\beta)-u(0-\beta)]\,d\beta=N_0[r(t_2)-r(t_2-t_1)-r(0)+r(-t_1)]$$

که در آن $r(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ t & ,t>0\end{cases}$ است

$$R_{XX}(t_1,t_2)=\begin{cases}N_0[0-(t_2-t_1)-0-t_1]=-N_0t_2 & ,\ t_1<t_2<0\\ N_0[t_2-(t_2-t_1)-0-t_1]=0 & ,\ t_1<0<t_2\\ N_0[t_2-(t_2-t_1)-0-0]=N_0t_1 & ,\ 0<t_1<t_2\end{cases}=\begin{cases}N_0\min[|t_1|,|t_2|] & ,\ t_1,t_2 \text{ هم علامت}\\ 0 & t_1,t_2 \text{ مختلف العلامه}\end{cases}$$



(ب) چون $m_X(t)=0$ است لذا $C_{XX}(t_1,t_2)=R_{XX}(t_1,t_2)$ و در شکل روبرو مقدار تابع فوق در نواحی مختلف صفحه t_1,t_2 نوشته شده است.

با توجه به تقارن

$$\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_{XX}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta=\frac{2}{4T^2}\int_0^T\int_0^T C_{XX}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$=\frac{1}{2T^2}\int_0^T d\beta\left[\int_0^{\beta}N_0\alpha\,d\alpha+\int_{\beta}^{T}N_0\beta\,d\alpha\right]=\frac{N_0}{4T^2}\int_0^T\beta(2T-\beta)\,d\beta=\frac{N_0T}{6}$$

چون مقدار آن وقتی $T\to\infty$ نامحدود است پس فرایند ونیز ME نیست.

مسئله ۱۲:

(الف) چون فرایند در متوسط ساکن است و

$$C_X(t+\tau,t)=R_X(t+\tau,t)-m_X(t+\tau)m_X^*(t)=R_X(t+\tau,t)=e^{-t^2}\delta(\tau)$$

$$\langle\langle C_X(t+\tau,t)\rangle_t\rangle_\tau=\langle\langle e^{-t^2}\delta(\tau)\rangle_t\rangle_\tau=\langle e^{-t^2}\rangle_t\langle\delta(\tau)\rangle_\tau=(0)(0)=0$$

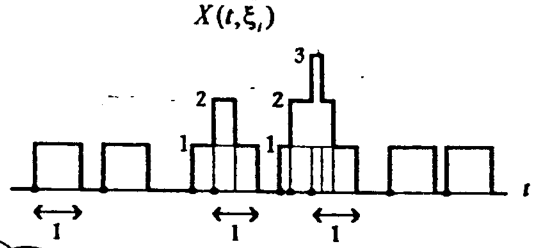
پس ME است

(ب) چون فرایند در تابع همبستگی ساکن نیست پس CE نمی‌تواند باشد.

بسمه تعالی

مسائل سری سوم

مساله ۱ - فرایند تصادفی $X(t)$ مرکب است از پالسهائی با عرض ۱ و ارتفاع ۱ که بطور تصادفی در زمان پراکنده هستند. زمان شروع این پالسها را نقاط پواسن تشکیل می‌دهند یک تابع نمونه فرایند در شکل روبرو نشان داده شده است.



تابع متوسط $m_X(t)$ و تابع همبستگی $R_X(t_1,t_2)$ و طیف قدرت $S_X(f)$ و قدرت متوسط P_X را بدست آورید. دانسیته نقاط پواسن را λ و مستقل از زمان در نظر بگیرید.

مساحت زیر Sinc(f) برابر 1 است.

مساله ۲ - یک سیگنال PAM با شکل پالس $h(t)$ و دامنه‌های A_k که مستقل از هم و با متوسط و واریانس یکسان $m_{A_k}=m$ و $\sigma^2_{A_k}=\sigma^2$ می‌باشند در نظر بگیرید و رابطه زیر را برای طیف قدرت آن بدست آورید.

$$S_X(f)=\frac{\sigma^2}{T_0}|H(f)|^2+\frac{m^2}{T_0^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|H(\frac{i}{T_0})|^2\,\delta(f-\frac{i}{T_0})$$

در رابطه فوق ~~T_X~~ T_0 فاصله بین دو پالس مجاور می‌باشد.

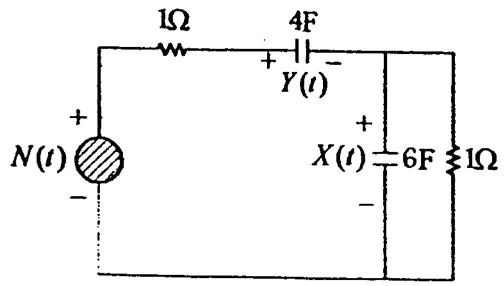
مساله ۳ - در این مساله چگالی نقاط پواسن را بصورت تابع $\lambda=a\cos^2(\omega_0 t)$ در نظر بگیرید.

الف) ممانهای اول و دوم فرایند پواسن با فضای پارامتر $t\in[0,\infty)$ را بدست آورید.

ب) ممانهای اول و دوم فرایند ضربه‌های پواسن با فضای پارامتر $t\in(-\infty,\infty)$ را بدست آورید و ساکن یا ساکن دوری بودن آنرا مشخص نمائید.

ج) طیف قدرت فرایند ضربه‌های پواسن را تعیین کنید.

مساله ٤ - در شکل روبرو $N(t)$ یک فرایند سفید با تابع همبستگی $R_X(\tau)=\delta(\tau)$ میباشد. ولتاژ دو سر ~~[illegible]~~ خازنها را فرایند $X(t)$ و ~~[illegible]~~ فرایند $Y(t)$ مینامیم.



الف) طیف قدرت فرایند $X(t)$ و طیف قدرت متقابل فرایندهای $X(t)$ و $Y(t)$ را پیدا کنید.

ب) قدرت فرایند $Y(t)$ چقدر است؟

ج) ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی $X(1)$ و $Y(1)$ را محاسبه کنید.

$R_{XY}(1,1)$

✓ مسالهٔ ۵ - فرض کنید $X(t)$ یک فرایند نرمال $X(\cdot) \sim N(1, \exp(-\frac{\tau^2}{2}))$ میباشد. مشتق این فرایند را نیز $X'(t)$ مینامیم.

الف) ماتریس همبستگی بردار سه بعدی متشکل از متغیرهای تصادفی $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ و $X'(t_0 - 1)$ را محاسبه کنید.

ب) طیف قدرت فرایند $X'(t)$ و طیف قدرت متقابل دو فرایند $X(t)$ و $X'(t)$ را پیدا کنید.

ج) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ را بدست آورید.

د) متغیرهای تصادفی $X'(t_1)$ و $X'(t_2)$ به ازای چه مقادیری از t_1 و t_2 مستقل از هم میباشند و چرا؟

✓ مسالهٔ ۷ - فرایند $W(t)$ نویزی سفید با تابع همبستگی $R_W(\tau) = \delta(\tau)$ می‌باشد. در رابطه با آن فرایند $X(t)$ را بصورت $X(t) = \int_{2t}^{2t+T} W(\alpha) d\alpha$ تعریف می‌کنیم.

الف) توابع همبستگی و همبستگی متقابل فرایندهای X و W را بدست آورید و در مورد ساکن بودن دو فرایند W و X اظهار نظر فرمائید.

ب) طیف قدرت و طیف قدرت متقابل فرایندهای X و W را بدست آورید.

✓ مسالهٔ ۸ - ثابت کنید در حالت کلی برای یک فرایند ساکن رابطه زیر برقرار است.

$$R_X(0) - R_X(\tau) \geq \frac{1}{4^n}[R_X(0) - R_X(2^n \tau)]$$

راهنمائی: میدانیم $1 - \cos(\alpha) \geq \frac{1}{4}(1 - \cos(2\alpha))$.

c/d

مسأله ۹ - سیستمی با تابع تبدیل $H(f)=\dfrac{1}{-4\pi^2 f^2+j4\pi f+5}$ در نظر بگیرید. ورودی سیستم با فرایند ساکنی با قدرت $P_X=1$ در نظر بگیرید تابع همبستگی ورودی $R_X(\tau)$ را به قسمتی تعیین کنید که قدرت خروجی P_Y ماکزیمم شود.

مسأله ۱۰ - طیف قدرت فرایند ساکن $X(t)$ بصورت زیر در دست است.

$$S_X(f)=\frac{(2\pi f-1)^2}{(2\pi f)^2+1}$$

الف) تابع همبستگی و تابع کواریانس فرایند را بدست آورید.

ب) فرایند $X(t)$ را بصورت رابطه‌ای خطی و علی برحسب یک فرایند سفید $W(t)$ بیان کنید.

مسأله ۱۱ - فرض کنید که $R_N(\tau)=N\delta(\tau)$ و $X(t)=A\cos(\omega_0 t)+N(t)$ و $H(f)=\dfrac{1}{\alpha+j2\pi f}$ و $Y(t)=B\cos(\omega_0 t+\varphi)+Y_N(t)$ باشد که در آن $Y_N(t)$ پاسخ سیستم به $N(t)$ است. مقدار α را به نحوی انتخاب کنید که نسبت سیگنال به نویز خروجی $\dfrac{S}{N}=\dfrac{|B|^2}{\mathrm{E}(Y_N^2(t))}$ ماکزیمم شود.

مسأله ۱۲ - نشان دهید که اگر $R_X(\tau)=e^{-c|\tau|}$ باشد در اینصورت بسط K-L فرایند X در فاصله $t\in(-a,a)$ بصورت $\hat{X}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n b_n\cos(\omega_n t)+\beta_n' b_n'\sin(\omega_n' t))$ خواهد بود که در آن $\tan(a\omega_n)=\dfrac{c}{\omega_n}$ و $\cot(a\omega_n')=\dfrac{-c}{\omega_n'}$ و $\beta_n=(a+\dfrac{\lambda_n}{2})^{-1/2}$ و $\beta_n'=(a-\dfrac{\lambda_n'}{2})^{-1/2}$ و $\mathrm{E}b_n^2=\lambda_n=\dfrac{2c}{c^2+\omega_n^2}$ و $\mathrm{E}b_n'^2=\lambda_n'=\dfrac{2c}{c^2+\omega_n'^2}$ می‌باشد.

(بسمه تعالی)

(حل مسائل سری ششم)

مسأله ۱: فرایند $x(t)$ را میتوان نتیجه عبور فرایند ضربه‌های پواسن (مثلاً $x_1(t)$) از سیستم با پاسخ ضربه‌ای چهارگوش به عرض ۱ و ارتفاع یک دانست

$$h(t)=\mathrm{rect}(t) \leftrightarrow H(f)=\mathrm{Sinc}(f)$$

$$m_x(t)=h(t)*m_{x_1}(t)=\mathrm{rect}(t)*\lambda=\lambda\,,\quad S_{xx}(f)=S_{x_1x_1}(f)\,|H|^2=[\lambda+\lambda^2\delta(f)]\,\mathrm{Sinc}^2(f)$$

$$S_{xx}(f)=\lambda\,\mathrm{Sinc}^2(f)+\lambda^2\delta(f)\leftrightarrow R_{xx}(\tau)=\lambda\Lambda(\tau)+\lambda^2\,,\quad P_x=R_{xx}(0)=\lambda+\lambda^2$$

مسأله ۲:

$$R_{AA}(i)=E\,A_{k+i}A_k=\begin{cases}EA_{k+i}\,EA_k=m^2 & \text{و } i\neq 0\\ E\,A_k^2=\sigma^2+m^2 & \text{و } i=0\end{cases}$$

(با توجه به فرمول ۱٫۲) $S_{DD}(f)=\frac{1}{T_0}\sum_i R_{AA}(i)\,e^{j2\pi f iT_0}=\frac{\sigma^2}{T_0}+\frac{m^2}{T_0}\sum_{i=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi f iT_0}$

$S_{DD}(f)=\frac{\sigma^2}{T_0}+\frac{m^2}{T_0^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(f-i/T_0)$ با استفاده از فرمول جمع پواسن

$S_{xx}(f)=S_{DD}(f)|H|^2=\frac{\sigma^2}{T_0^2}|H(f)|^2+\frac{m^2}{T_0^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|H(\frac{i}{T_0})|^2\delta(f-\frac{i}{T_0})$ برای شکل پالس $h(t)\leftrightarrow H(f)$ داریم

مسأله ۳: (الف) فرایند پواسن را $x(t)$ می‌نامیم

$$m_x(t)=a_{0,t}=\int_0^t a\cos^2\omega_0 t\,dt=at/2+\frac{a}{4\omega_0}\sin 2\omega_0 t$$

$$C_{xx}(t_1,t_2)=a_{0,\min(t_1,t_2)}=m_x(t_1)u(t_2-t_1)+m_x(t_2)u(t_1-t_2)$$

(ب) فرایند ضربه‌ای پواسن را $y(t)$ می‌نامیم و می‌دانیم $y(t)=x'(t)$ است

$$m_y(t)=m_x'(t)=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos 2\omega_0 t=a\cos^2\omega_0 t$$

$$C_{yy}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}C_{xx}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_2}[m_x'(t_1)u(t_2-t_1)-m_x(t_1)\delta(t_2-t_1)+\cancel{m_x(t_2)\delta(t_1-t_2)}]$$

$$=m_x'(t_1)\delta(t_2-t_1)=a\cos^2(\omega_0 t_2)\,\delta(t_2-t_1)$$

$$R_{\tilde y\tilde y}(t+\tau,t)=C_{yy}(t+\tau,t)=a\cos^2\omega_0 t\,\delta(\tau)$$

$$R_{yy}(t+\tau,t)=a\cos^2\omega_0 t\,\delta(\tau)+m_y(t+\tau)m_y(t)=a\cos^2\omega_0 t\,\delta(\tau)+a^2\cos^2\omega_0 t\cos^2\omega_0(t+\tau)$$

روشن است که فرایند ساکن نیست ولی ساکن دوره‌ای با پریود $\frac{2\pi}{2\omega_0}$ است

(ج)

$$m_y(t)=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos 2\omega_0 t\leftrightarrow M_y(f)=\frac{a}{2}\delta(f)+\frac{a}{4}\delta(f-2f_0)+\frac{a}{4}\delta(f+2f_0)$$

$$S_{m_ym_y}(f)=\frac{a^2}{4}\delta(f)+\frac{a^2}{16}\delta(f-2f_0)+\frac{a^2}{16}\delta(f+2f_0)$$

$$\langle R_{\tilde y\tilde y}(t+\tau,t)\rangle=\frac{a}{2}\delta(\tau)\leftrightarrow S_{\tilde y\tilde y}(f)=\frac{a}{2}\,,\quad S_{yy}(f)=S_{\tilde y\tilde y}(f)+S_{m_ym_y}(f)$$

(دنباله حل مسائل سری سوم)

مسأله ۴: (الف)

$$H_1(f)=\frac{X(f)}{N(f)}=\frac{\frac{4j\omega}{1+4j\omega}}{\frac{4j\omega}{1+4j\omega}+1+6j\omega}=\frac{4j\omega}{1+14j\omega-24\omega^2}$$

$$S_X(f)=S_N(f)|H_1|^2=|H_1|^2=\frac{16\omega^2}{(1-24\omega^2)^2+14^2\omega^2}=\frac{16\omega^2}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}$$

$$H_2(f)=\frac{Y(f)}{N(f)}=\frac{1/4j\omega}{1/4j\omega+1+\frac{1}{1+6j\omega}}=\frac{1+6j\omega}{1+14j\omega-24\omega^2}$$

$$S_{YX}(f)=H_2(f)H_1^*(f)S_N(f)=H_2(f)H_1^*(f)=\frac{-4j\omega+24\omega^2}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}$$

(ب)

$$S_Y(f)=S_N(f)|H_2|^2=|H_2|^2=\frac{1+36\omega^2}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}=\frac{8/35}{1+4\omega^2}+\frac{27/35}{1+144\omega^2}$$

$$R_Y(\tau)=\frac{2}{35}e^{-\frac{1}{2}|\tau|}+\frac{9}{280}e^{-\frac{1}{12}|\tau|}\Longrightarrow P_Y=R_Y(0)=\frac{5}{56}$$

(ج)

$$m_N=0\Longrightarrow m_X=m_Y=0\Longrightarrow C_X(\tau)=R_X(\tau),\quad C_Y(\tau)=R_Y(\tau),\quad C_{YX}(\tau)=R_{YX}(\tau)$$

$$\rho_{Y(1),X(1)}=\frac{C_{YX}(0)}{\sqrt{C_X(0)C_Y(0)}}=\frac{R_{YX}(0)}{\sqrt{R_X(0)R_Y(0)}}$$

$$R_{YX}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{YX}(f)\,df=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-4j\omega\,d\omega}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{24\omega^2\,d\omega}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}=0+\frac{24}{16}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)\,df$$

$$=\frac{3}{2}R_X(0)$$

$$S_X(f)=\frac{4/35}{1+4\omega^2}+\frac{-4/35}{1+144\omega^2}\Longrightarrow R_X(\tau)=\frac{1}{35}e^{-\frac{1}{2}|\tau|}-\frac{1}{210}e^{-\frac{1}{12}|\tau|}\Longrightarrow R_X(0)=\frac{1}{42}$$

$$\rho_{Y(1),X(1)}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{42}}{\sqrt{\frac{1}{42}\cdot\frac{5}{56}}}=\sqrt{0.6}=0.775$$

مسأله ۵: (الف)

$$R_X(\tau)=|m_X|^2+C_X(\tau)=1+e^{-\tau^2/2}$$

$$R_{XX'}(\tau)=-\frac{d}{d\tau}R_X(\tau)=\tau e^{-\tau^2/2},\quad R_{X'}(\tau)=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_X(\tau)=(1-\tau^2)e^{-\tau^2/2}$$

$$R=E\begin{pmatrix}X(t_0)\\X'(t_0)\\X'(t_0-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X(t_0)&X'(t_0)&X'(t_0-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_X(0)&R_{XX'}(0)&R_{XX'}(1)\\R_{XX'}(0)&R_{X'}(0)&R_{X'}(1)\\R_{X'X}(-1)&R_{X'}(-1)&R_{X'}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&e^{-0.5}\\0&1&0\\e^{-0.5}&0&1\end{pmatrix}$$

(ب)

$$S_{X'}(f)=|H|^2S_X(f)=|j\omega|^2S_X(f)=\omega^2\left(\delta(f)+\sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2f^2}\right)=\sqrt{2\pi}\,4\pi^2f^2e^{-2\pi^2f^2}$$

$$S_{X'X}(f)=H\,S_X(f)=j\omega S_X(f)=j\omega\left(\delta(f)+\sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2f^2}\right)=j2\pi f\sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2f^2}$$

$$S_{XX'}(f)=H^*S_X(f)=-j\omega S_X(f)=-j2\pi f\sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2f^2}$$

(ج) چون $X(t)$ نرمال است $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ توأماً نرمال هستند و چون $R_{XX'}(0)=0$ است متعامدند
و چون $EX'(t_0)=m'_X(t_0)=0$ است پس $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ ناهمبسته و بدلیل نرمال بودن مستقل هستند

$$Var\,X'(t_0)=C_{X'}(0)=R_{X'}(0)=1\Longrightarrow f_{X'(t_0)}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_1^2/2}$$

$$EX(t_0)=1,\ Var\,X(t_0)=C_X(0)=1\Longrightarrow f_{X(t_0)}(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x_2-1)^2/2}$$

$$\rightarrow f_{X'(t_0)X(t_0)}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x_1^2+(x_2-1)^2}{2}}$$

(د) چون $X'(t_1)$ و $X'(t_2)$ توأماً نرمال هستند برای استقلال کافیست ناهمبسته باشند و چون متوسط صفر دارند کافیست متعامد باشند یعنی

$$R_{X'}(\tau)=0\Longrightarrow\tau=1,\infty$$

یعنی بازای $|t_1-t_2|=1,\infty$ مستقل هستند

مسأله ۷:

(الف)

$$m_X(t) = E\int_{2t}^{2t+T} W(\alpha)\,d\alpha = \int_{2t}^{2t+T} \underbrace{EW(\alpha)}_{0}\,d\alpha = 0$$

$$R_X(t+\tau,t) = E\int_{2t+2\tau}^{2t+2\tau+T} W(\alpha)\,d\alpha \int_{2t}^{2t+T} W(\beta)\,d\beta = \int_{\alpha=2t+2\tau}^{2t+2\tau+T}\left(\int_{\beta=2t}^{2t+T}\delta(\beta-\alpha)\,d\beta\right)d\alpha$$

$$= \int_{2t+2\tau}^{2t+2\tau+T}\left[u(2t+T-\alpha) - u(2t-\alpha)\right]d\alpha = r(T-2\tau) - r(-2\tau) + r(-2\tau+T) - r(-2\tau)$$

$$= \begin{cases} 0, & \tau > \frac{T}{2} \\ T-2\tau, & \frac{T}{2} > \tau > 0 \\ T+2\tau, & 0 > \tau > -\frac{T}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2} > \tau \end{cases} = T\Lambda\left(\frac{2\tau}{T}\right)$$

پس فرایند X به معنای وسیع ساکن است

$$R_{XW}(t+\tau,t) = \int_{2t+2\tau}^{2t+2\tau+T} E\,W(\alpha)W(t)\,d\alpha = \int_{2t+2\tau}^{2t+2\tau+T}\delta(\alpha-t)\,d\alpha = u(t+2\tau+T) - u(t+2\tau) = \begin{cases} 1, & -2\tau-T < t < -2\tau \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

$$R_{WX}(t+\tau,t) = R_{XW}(t,t+\tau) = u(t-\tau+T) - u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau-T < t < \tau \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

پس فرایندهای W، X توأماً ساکن نیستند

(ب)

$$S_W(f) = \mathcal{F}R_W(\tau) = \mathcal{F}\,\delta(\tau) = 1$$

$$S_X(f) = \mathcal{F}\,T\Lambda\left(\frac{2\tau}{T}\right) = T\,\frac{T}{2}\,\mathrm{Sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right) = \frac{T^2}{2}\,\mathrm{Sinc}^2\left(\frac{Tf}{2}\right)$$

$$\langle R_{XW}(t+\tau,t)\rangle_t = 0 \Longrightarrow S_{XW}(f) = \mathcal{F}(0) = 0\,,\quad S_{XW}(f) = S^*_{WX}(f) = 0$$

مسأله ۸:

$$R_{XX}(0)-R_{XX}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{j2\pi f\tau})S_{XX}(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos 2\pi f\tau)S_{XX}(f)df$$

$$1-\cos 2\pi f\tau=2\sin^2\pi f\tau\geqslant 2\sin^2\pi f\tau\cos^2\pi f\tau=\frac{1}{2}\sin^2 2\pi f\tau=\frac{1}{4}(1-\cos 4\pi f\tau)\cdots\geqslant\frac{1}{4^n}(1-\cos 2^n 2\pi f\tau)$$

طرفین را در $S_{XX}(f)$ غیرمنفی ضرب و انتگرال بگیریم (نامساوی همچنان برقرار خواهد بود).

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos 2\pi f\tau)S_{XX}(f)df\geqslant\frac{1}{4^n}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos 2^n 2\pi f\tau)S_{XX}(f)df\Rightarrow R_{XX}(0)-R_{XX}(\tau)\geqslant\frac{1}{4^n}\left(R_{XX}(0)-R_{XX}(2^n\tau)\right)$$

مسأله ۹:

$$P_y=\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}|H|^2S_{XX}(f)df$$

اگر پیک $|H|^2$ در $f=f_0$ بوده و برابر $|H_m|^2$ باشد داریم

$$|H|^2\leq|H_m|^2\xrightarrow{S_X(f)\geqslant 0}|H|^2S_{XX}(f)\leqslant|H_m|^2S_{XX}(f)\xrightarrow{\int_{-\infty}^{\infty}}P_y\leq|H_m|^2\int_{-\infty}^{\infty}S_{XX}(f)df=|H_m|^2$$

پس حداکثر قدرت خروجی $|H_m|^2$ است و این حداکثر وقتی حاصل می‌گردد (حالت تساوی) که

$$\forall f;\ |H(f)|^2S_{XX}(f)=|H_m|^2S_{XX}(f)=|H(f_0)|^2S_{XX}(f)\Rightarrow S_{XX}(f)=K\,\delta(f-f_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_{XX}(f)df=1\Rightarrow K=1,\ S_{XX}(f)=\delta(f-f_0)$$

$$|H(f)|^2=\frac{1}{(5-4\pi^2f^2)^2+16\pi^2f^2}\xrightarrow{\partial|H|^2/\partial f=0}\begin{cases}f=f_0=\sqrt{3}/2\pi\\|H_m|^2=\frac{1}{16}\end{cases}$$

پس $P_y=\frac{1}{16}$, $S_{XX}(f)=\delta(f-\frac{\sqrt{3}}{2\pi})$

مسأله ۱۰: الف)

$$S_{XX}(f)=1+\frac{-j}{j2\pi f+1}+\frac{-j}{j2\pi f-1}\leftrightarrow R_{XX}(\tau)=\delta(\tau)-je^{-\tau}u(\tau)+je^{\tau}u(-\tau)$$

$$X(t):WSS,\ S_{XX}(0)\neq\infty\Rightarrow m_X=0\Rightarrow C_{XX}(\tau)=\delta(\tau)-je^{-\tau}u(\tau)+je^{\tau}u(-\tau)$$

ب)

$$S_{XX}(f)=\frac{(2\pi f-1)(2\pi f-1)}{(j2\pi f+1)(-j2\pi f+1)}=H(f)H^*(f)$$

مثلاً $H(f)=\frac{2\pi f-1}{j2\pi f+1}=-j+\frac{j-1}{j2\pi f+1}\leftrightarrow h(t)=-j\delta(t)+(j-1)e^{-t}u(t)$

$$X(t)=h(t)*W(t)\Rightarrow X(t)=-jW(t)+(j-1)\int_0^{\infty}e^{-\alpha}W(t-\alpha)d\alpha$$

مسأله ۱۱:

$$B^2=A^2|H(f_0)|^2=\frac{A^2}{\alpha^2+4\pi^2f_0^2},\ Ey_m^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_{NN}(f)|H(f)|^2df$$

$$R_{NN}(\tau)=N\delta(\tau)\Rightarrow S_{NN}(f)=N\Rightarrow Ey_m^2=N\int_{-\infty}^{\infty}|H|^2df=N\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2dt$$

$$H(f)=\frac{1}{j2\pi f+\alpha}\leftrightarrow h(t)=e^{-\alpha t}u(t)\Rightarrow Ey_m^2=N\int_0^{\infty}e^{-2\alpha t}dt=N/2\alpha$$

$$B^2/Ey_m^2=\frac{2A^2}{N}\frac{1}{\alpha+4\pi^2f_0^2/\alpha}\xrightarrow{\partial_{\alpha}(B^2/Ey_m^2)=0}\alpha=2\pi f_0,\ \left.\frac{B^2}{Ey_m^2}\right|_{max}=\frac{A^2}{2\pi f_0N}$$

پس فیلتر اپتیمال درجه اول که سیگنال - نویز را ماکزیمم کند $H(f)=\frac{1/2\pi f_0}{\ldots}$ می‌باشد.

0/5

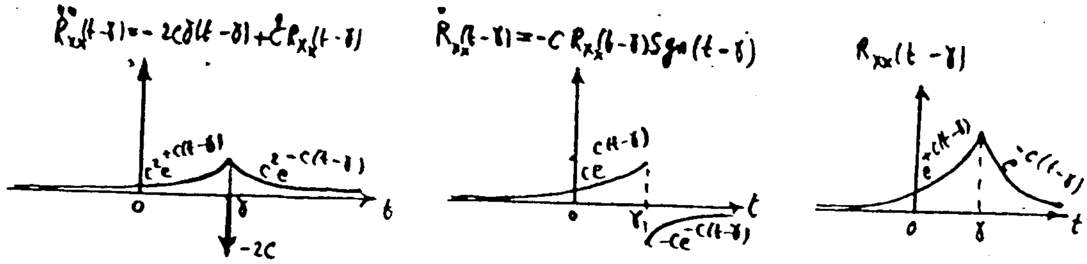
مسأله ۱۳: توابع ویژه تابع همبستگی $R_{xx}(\tau)=e^{-c|\tau|}$ را برای فاصله $|t|<a$ را بدست میآوریم

$$\int_{-a}^{a} R_{xx}(t-\gamma)\Phi(\gamma)\,d\gamma=\lambda\Phi(t)\quad,\quad |t|<a$$

دو بار نسبت به t مشتق میگیریم

$$\int_{-a}^{a} \dot R_{xx}(t-\gamma)\Phi(\gamma)\,d\gamma=\lambda\dot\Phi(t)\quad,\quad |t|<a$$

$$\int_{-a}^{a} \ddot R_{xx}(t-\gamma)\Phi(\gamma)\,d\gamma=\lambda\ddot\Phi(t)\quad,\quad |t|<a$$



$$\int_{-a}^{a}[c^2R_{xx}(t-\gamma)-2c\delta(t-\gamma)]\Phi(\gamma)\,d\gamma=\lambda\ddot\Phi(t)\Rightarrow c^2\lambda\Phi(t)-2c\Phi(t)=\lambda\ddot\Phi(t)$$

$$\left.\begin{array}{l}\ddot\Phi(t)+\omega^2\Phi(t)=0\\ \omega=\sqrt{2c/\lambda-c^2}\end{array}\right\}\Rightarrow\Phi(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$$

برای تعیین ضرایب ثابت مثلاً مشتق آن تساوی دو طرف معادله دوم در بالا را بازای $t=a$ و $t=-a$ در نظر گرفت

$$\begin{cases} t=a\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a}-cR_{xx}(a-\gamma)\underbrace{\mathrm{Sgn}(a-\gamma)}_{\text{در ناحیه انتگرال گیری ۱ است}}\phi(\gamma)\,d\gamma=\lambda\dot\Phi(a)\Rightarrow -c\lambda\Phi(a)=\lambda\dot\Phi(a)\\ t=-a\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a}-cR_{xx}(-a-\gamma)\mathrm{Sgn}(-a-\gamma)\Phi(\gamma)\,d\gamma=\lambda\dot\Phi(-a)\Rightarrow c\lambda\Phi(-a)=\lambda\dot\Phi(-a)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\omega\sin\omega a-c\cos\omega a)A-(\omega\cos\omega a+c\sin\omega a)B=0\\ (\omega\sin\omega a-c\cos\omega a)A+(\omega\cos\omega a+c\sin\omega a)B=0\end{cases}$$

ملاحظه میگردد که ضرایب A و B و لذا $\Phi(t)$ صفر خواهد بود (که مورد نظر نیست) مگر آنکه $\omega\sin\omega a-c\cos\omega a=0$ باشد و یا آنکه $\omega\cos\omega a+c\sin\omega a=0$ باشد. حالت اول شرط زیر وجود دارد

$$\mathrm{tg}\,\omega a=c/\omega\Rightarrow\omega=\omega_1,\omega_2,\omega_3,\dots\Rightarrow\underbrace{\lambda=\lambda_n}_{\text{مقادیر ویژه}}=\frac{2c}{c^2+\omega_n^2}\ ,\ n=1,2,3,\dots$$

و بنابراین

$$B=0\Rightarrow\Phi(t)=\varphi_n(t)=A_n\cos\omega_n t$$

$$\int_{-a}^{a}|\varphi_n(t)|^2=1\Rightarrow A_n=\frac{1}{\sqrt{a+\lambda_n/2}}$$

که یکدسته از مقادیر ویژه و توابع ویژه متناظر را بدست میدهد.

حالت دوم شرط زیر وجود دارد

$$\mathrm{Cotg}\,\omega a=\frac{-c}{\omega}\Rightarrow\omega=\omega'_1,\omega'_2,\omega'_3,\dots\Rightarrow\underbrace{\lambda=\lambda'_n}_{\text{مقادیر ویژه}}=\frac{2c}{c^2+\omega_n'^2}\ ,\ n=1,2,3,\dots$$

و بنابراین $A=0$ خواهد بود

$$\Phi(t)=\varphi'_n(t)=B_n\sin(\omega'_n t)$$

$$\int_{-a}^{a}|\varphi'_n(t)|^2dt=1\Rightarrow B_n=\frac{1}{\sqrt{a-\lambda'_n/2}}$$

پس کلاً توابع ویژه $\{\varphi_n(t),\varphi'_n(t)\}$ و مقادیر ویژه متناظر آنها $\{\lambda_n,\lambda'_n\}$ را داریم و بسط فرایند بصورت زیر خواهد بود

$$\hat x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\cos\omega_n t}{\sqrt{a+\lambda_n/2}}+\sum_{n=1}^{\infty}b'_n\frac{\sin\omega'_n t}{\sqrt{a-\lambda'_n/2}}\ ,\ \begin{cases}b_n=\int_{-a}^{a}x(\gamma)\varphi_n^*(\gamma)\,d\gamma\\ b'_n=\int_{-a}^{a}x(\gamma)\varphi_n'^*(\gamma)\,d\gamma\end{cases}$$

$$E|b_n|^2=\lambda_n=\frac{2c}{c^2+\omega_n^2}\ ,\ E|b'_n|^2=\lambda'_n=\ 2c$$

۵

بسمه تعالی

مسائل سری چهارم

مساله ۱ - فرایند $X(t)$ ساکن بمفهوم وسیع و با باند محدود به $|f| < W$ می‌باشد با فرض آنکه بدانیم متوسط آن $m_X(t)=m$ و قدرت متوسط آن $E|X(t)|^2 = P$ بوده، و ضمنا نمونه‌های آن، $\{X(n/2W)\}$، ناهمبسته هستند، طیف قدرت آنرا بدست آورید.

مساله ۲ - فرض کنید $X[n]$ فرایندی ساکن بمفهوم وسیع با تابع همبستگی $R_X[m] = 5\delta[m]$ می‌باشد در دو حالت زیر $EY^2[n]$ و $R_{XY}[n_1,n_2]$ و $R_Y[n_1,n_2]$ را بدست آورید.

الف)
$$Y[n] = 0.5Y[n-1] + X[n]$$

ب)
$$Y[n] = \begin{cases} 0.5Y[n-1] + X[n], & n \ge 0 \\ 0, & n \le -1 \end{cases}$$

مساله ۳ - فرض کنید $S[n]$ یک فرایند با تابع همبستگی $R_S[m] = 2^{-|m|}$ بوده و $V[n]$ نویز سفیدی عمود بر آن با تابع همبستگی $R_V[n] = 5\delta[n]$ باشد. نشان دهید که فرایند $X[n]=S[n]+V[n]$ یک فرایند ARMA است و طیف قدرت $X[n]$ را در حوزه فرکانس و در حوزه Z بدست آورید. معادل ARMA را نیز بدست آورید.

مساله ۴ - $V[n]$ نویز سفید نرمالیزه (با واریانس واحد) و فرایند $X[n]$ رابطه $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^{-k}X[n-k] = V[n]$ برقرار است.

الف) $X[n]$ را بر حسب نمونه های فرایند $V[n]$ بدست آورید و نشان دهید که فرایند $X[n]$ یک فرایند MA است و معادله MA را بنویسید.

ب) تابع همبستگی و طیف قدرت فرایند $X[n]$ را بدست آورید.

مساله ۵ - فرایند $X[n]$ فرایندی با نمونه‌های مستقل از هم بوده و هر نمونه یکی از دو مقدار ۱+ و یا ۱- را با احتمال ½ اختیار می‌نماید. در ارتباط با آن فرایند دیگری بصورت $Y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X[n-k]$ تعریف می‌گردد.

الف) تابع همبستگی و طیف قدرت فرایند $X[n]$ را بدست آورید.

ب) مقدار متوسط، تابع همبستگی و طیف قدرت فرایند $Y[n]$ را بدست آورید.

ج) تابع مشخصه نمونه n ام فرایند X، و همچنین تابع مشخصه نمونه n ام فرایند Y را بدست آورید.

د) تابع چگالی احتمال شرطی نمونهٔ n ام فرآیند Y وقتی کلیهٔ نمونه های قبلی آن معلوم است را نیز حساب کنید.

مسأله ۷ - $X[n]$ یک فرایند AR با معادله تفاضلی $\sum_{k=0}^{N} a_k X[n-k] = b_o V[n]$ میباشد که در آن $a_o = 1$ ، $V[n]$ نویز سفید با واریانس واحد است. ثابت کنید که اگر ریشه‌های معادله $\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0$ همگی داخل دایره بشعاع واحد باشند. رابطه زیر برقرار است.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k R_X[m-k] = \begin{cases} 0, & m \ge 1 \\ |b_o|^2, & m = 0 \end{cases}$$

مسئله ۵- طیف قدرت یک فرایند گسسته زمان ساکن $X(n)$ بصورت $S_X(f) = \frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\pi f}$ در دست است. متوسط فرایند را صفر و α را عددی کوچکتر از واحد بگیرید.

(الف) تابع همبستگی فرایند را بدست آورید و ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی مجاور یکدیگر فرایند را محاسبه کنید.

(ب) چگونه میتوان این فرایند را بصورت تابعی از یک فرایند سفید تولید کرد؟

(ج) تابع همبستگی فرایند $Y(n)$ که با رابطه

$$y(n) = X(n) - 2\alpha X(n-1) + \alpha^2 X(n-2)$$

تعریف می‌شود را بدست آورید.

$$1-2\alpha z^{-1}+\alpha^2 z^{-2} = (1-\alpha z^{-1})^2$$

حل سری چهارم 1/4

بسمه تعالی

(حل مسائل سری چهارم)

مسأله ۱: میدانیم طیف قدرت $x(t)$ و لذا طیف قدرت $\tilde{x}(t)$ محدود به باند $|f|<W$ است پس قانون نمونه برداری در مورد تابع کواریانس $C_X(\tau)=R_{\tilde{X}}(\tau)$ را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$C_X(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_X(kT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\tau-kT}{T}\right) \underset{T=\frac{1}{2W}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_X\left(\frac{k}{2W}\right)\mathrm{Sinc}\left(\frac{\tau-k/2W}{1/2W}\right)$$

$$C_X\left(\frac{k}{2W}\right)=\begin{cases}0, & k\neq 0\\ P-|m|^2, & k=0\end{cases} \Longrightarrow C_X(\tau)=0+C_X(0)\,\mathrm{Sinc}\,\frac{\tau-0}{1/2W}+0$$

$$C_X(\tau)=(P-|m|^2)\,\mathrm{Sinc}(2W\tau) \Longrightarrow R_X(\tau)=C_X(\tau)+|m|^2=(P-|m|^2)\,\mathrm{Sinc}(2W\tau)+|m|^2$$

$$\Longrightarrow S_X(f)=\frac{P-|m|^2}{2W}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)+|m|^2\delta(f)$$

مسأله ۲: (الف)

$$S_X(f)=\frac{1}{1+\alpha^2-\alpha e^{j2\pi f}-\alpha e^{-j2\pi f}} \Rightarrow S_X(z)=\frac{1}{1+\alpha^2-\alpha z-\alpha z^{-1}}$$

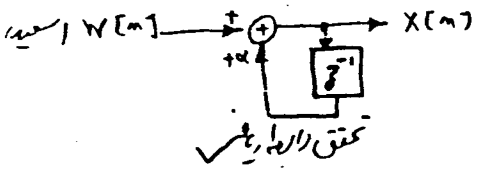
$$S_X(z)=\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}=\frac{-z^{-1}/\alpha}{(1-z^{-1}/\alpha)(1-\alpha z^{-1})}=\frac{\frac{-1}{1-\alpha^2}}{1-z^{-1}/\alpha}+\frac{\frac{1}{1-\alpha^2}}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$S_X(z)\leftrightarrow R_X(m)=\frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^{-m}u[-m-1]+\frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^{m}u[m] \Rightarrow \boxed{R_X[m]=\frac{\alpha^{|m|}}{1-\alpha^2}}$$

$$m_X[n]=0 \Rightarrow C_X[m]=R_X[m] \Longrightarrow \boxed{\rho=\frac{C_X[1]}{\sqrt{C_X[0]C_X[0]}}=\alpha}$$

(ب)

$$S_X(z)=\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}=H_X(z)H_X^*(1/z) \Longrightarrow H_X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$ فیلتر ایجاد



$$h_X[n]=\alpha^n u[n]$$

$$\boxed{X[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k w[n-k]}$$ رابطه بیان

(ج)

$$Y[n]=\left(\delta[n]-2\alpha\delta[n-1]+\alpha^2\delta(n-2]\right) * X[n]$$ پس $Y[n]$ هم یک فرآیند با طیف قدرت

$$S_Y(z)=(1-2\alpha z^{-1}+\alpha^2 z^{-2})(1-2\alpha z+\alpha^2 z^2)\,S_X(z)$$

$$=(1-\alpha z^{-1})^2(1-\alpha z)^2\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}=1+\alpha^2-\alpha z-\alpha z^{-1}$$

$$S_Y(z)\leftrightarrow \boxed{R_Y[m]=(1+\alpha^2)\delta[m]-\alpha\delta[m-1]-\alpha\delta[m+1]}$$

مسأله ۲ الف) میتوان $y[n]$ را خروجی سیستم LSI با تابع تبدیل $H(z)$ به ورودی $x[n]$ دانست:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}/2} \longleftrightarrow h[n] = 2^{-n} u[n] \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x(n-k)$$

ورودی ساکن و سیستم LSI لذا خروجی و ورودی توأماً ساکن میگردند

$$R_{xy}(n+m,n) = R_{xy}[m] = R_{xx}(m) * h^*(-m) = 5\, h^*(-m) = 5 \times 2^{m} u(-m)$$

به ازای m مثبت صفر است یعنی هر نمونه x بر نمونه‌های قبلی y عمود است

$$R_{yy}[n+m,n] = R_{yy}[m] = h[m] * R_{xy}[m] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \times 5 \times 2^{m-k} u(k-m)$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\geq m}}^{\infty} 5 \times 2^{m} \times 2^{-2k} = \begin{cases} 5\times 2^{m} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} = 5 \times 2^{m} \dfrac{1}{1-1/4}, & m \leq 0 \\ 5 \times 2^{m} \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-2k} = 5 \times 2^{m} \dfrac{2^{-2m}}{1-1/4}, & m \geq 0 \end{cases}$$

$$R_{yy}[m] = \frac{20}{3} 2^{-|m|}, \qquad E|y(n)|^2 = R_{yy}[0] = \frac{20}{3}$$

ب)

$$y[0] = \tfrac{1}{2} y[-1] + x[0] = x[0]$$
$$y[1] = \tfrac{1}{2} y[0] + x[1] = \tfrac{1}{2} x[0] + x[1]$$
$$y[2] = \tfrac{1}{2} y[1] + x[2] = \tfrac{1}{4} x[0] + \tfrac{1}{2} x[1] + x[2]$$

بطور کلی

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} x[n-k], \quad n \geq 0$$

$$R_{xy}[n_1,n_2] = E \sum_{k=0}^{n_2} 2^{-k} x^*[n_2-k]\, x[n_1] = \sum_{k=0}^{n_2} 2^{-k} R_{xx}[n_1-n_2+k] = 5 \sum_{k=0}^{n_2} 2^{-k} \delta(k+n_1-n_2)$$

$$= \begin{cases} 5 \times 2^{-(n_2-n_1)}, & 0 \leq n_2-n_1 \leq n_2 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases} = \begin{cases} 5 \times 2^{-(n_2-n_1)}, & n_2 \geq n_1 \geq 0 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$R_{yy}[n_1,n_2] = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} 2^{-k-l} R_{xx}[n_1-n_2-k+l] = 5 \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} 2^{-k-l} \delta(n_1-n_2-k+l)$$

$$= 5 \sum_{\substack{k=0\\ 0 \leq k-n_1+n_2 \leq n_2}}^{n_1} 2^{-k-(k-n_1+n_2)} = 5 \times 2^{n_1-n_2} \sum_{\substack{k=0\\k \geq n_1-n_2}}^{n_1} 2^{-2k} = \begin{cases} 5 \times 2^{n_1-n_2} \dfrac{1-2^{-2n_1-2}}{1-1/4}, & n_1 - n_2 \leq 0 \\ 5 \times 2^{n_1-n_2} \dfrac{2^{-2n_1+2n_2} - 2^{-2n_1-2}}{1-1/4}, & n_1-n_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5 \times 2^{n_1-n_2} \dfrac{1-2^{-2n_1-2}}{1-1/4}, & n_1-n_2 \leq 0 \\ 5 \times 2^{n_1-n_2} \dfrac{2^{-2n_1+2n_2} - 2^{-2n_1-2}}{1-1/4}, & n_1-n_2 \geq 0 \end{cases} = \frac{20}{3}\left[2^{-|n_1-n_2|} - 2^{-2-n_1-n_2}\right]$$

این روابط برای $n_1 \geq 0$ و $n_2 \geq 0$ بدست آمده است و در حالتیکه n_1 یا n_2 منفی باشند نمونه‌های آنها صفرند لذا تابع همبستگی هم صفر است.

$$E|y(n)|^2 = R_{yy}(n,n) = \frac{20}{3}\left[1 - 4^{-1-n}\right], \quad n \geq 0$$
$$= 0, \quad n < 0$$

سری چهارم ۳/۴

مسأله ۳ :

$$R_s(m)=2^{-|m|}=0.5^{|m|}\Longrightarrow S_s(z)=\frac{1-(0.5)^2}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$$

چون $s(n)$ و $v(n)$ ناهمبسته $\Longrightarrow$ $S_x(z)=S_v(z)+S_s(z)=5+\dfrac{3/4}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}=\dfrac{28-10z-10z^{-1}}{5-2z-2z^{-1}}$

$$S_x(f)=S_x(e^{j2\pi f})=\frac{28-20\cos 2\pi f}{5-4\cos 2\pi f}$$

$$S_x(z)=\begin{cases}0\Rightarrow z=\begin{cases}z_0=0.42020\\ 1/z_0^{*}=2.37979\end{cases}\\ \infty\Rightarrow z=\begin{cases}z_1=0.5\\ 1/z_1^{*}=2\end{cases}\end{cases}\Longrightarrow S_x(z)=\frac{\frac{10}{z_0}(1-z_0z^{-1})(1-z_0z)}{\frac{2}{0.5}(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}=L_x(z)\ldots$$

$$L_x(z)=\sqrt{\frac{10}{4z_0}}\;\frac{1-z_0z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}=\frac{2.439-1.025z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\equiv\frac{X(z)}{W(z)}$$

ب) صفر و قطب داخل دایره واحد

با ضرب طرفین و تبدیل z معکوس $\Longrightarrow x(n)=2.439w(n)+0.5x(n-1)-1.025w(n-1)$ مدل $ARMA(1,1)$

مسأله ۴ : تبدیل z می‌گیریم

الف)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^{-k}z^{-k}X(z)=V(z)\Longrightarrow\frac{V(z)}{X(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\gamma^{k}=\frac{d}{d\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^{(k+1)},\quad \gamma=\frac{1}{2z}$$

$$\frac{V(z)}{X(z)}=\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)=\frac{1}{(1-\gamma)^2}=\frac{1}{(1-z^{-1}/2)^2}\Longrightarrow X(z)=(1-z^{-1}+z^{-2}/4)\,V(z)$$

$$x[n]=v[n]-v[n-1]+\tfrac{1}{4}v[n-2]\Longrightarrow x[n]\sim MA(2)$$

$$S_{xx}(z)=(1-z^{-1}/2)^2(1-z/2)^2S_v(z)=(5/4-z^{-1}/2-z/2)^2=\frac{33}{16}-\frac{5}{4}z^{-1}-\frac{5}{4}z+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{2}$$

$$S_{xx}(z)\overset{z}{\longleftrightarrow}R_{xx}[m]=\tfrac{1}{4}\delta[m+2]-\tfrac{5}{4}\delta[m+1]+\tfrac{33}{16}\delta[m]-\tfrac{5}{4}\delta[m-1]+\tfrac{1}{4}\delta[m-2]$$

$$S_x(f)=S_{xx}(e^{j2\pi f})=(5/4-\cos 2\pi f)^2$$

مسأله ۶ : الف)

$$R_{xx}[n_1,n_2]=E\,x[n_1]x^{*}[n_2]=\begin{cases}\bar{x}^2=0, & n_1\neq n_2\\ |\bar{x}|^2=1, & n_1=n_2\end{cases}$$

$$R_{xx}[m]=\delta[m]\longleftrightarrow S_{xx}(f)=1$$

ب)

$$y[n]=(2^{-n}u[n])*x[n]\Longrightarrow Y(z)=\frac{X(z)}{1-z^{-1}/2}\Rightarrow S_{yy}(z)=\frac{S_{xx}(z)}{(1-z^{-1}/2)(1-z/2)}$$

$$S_{yy}(z)=\frac{1}{(1-z/2)(1-z^{-1}/2)}\Longrightarrow S_{yy}(f)=\frac{1}{5/4-\cos 2\pi f}$$

$$S_{yy}(z)=\frac{4/3}{1-z^{-1}/2}+\frac{-4/3}{1-2z^{-2}}\longleftrightarrow R_{yy}[m]=\frac{4}{3}\,2^{-|m|}$$

$$\left.\begin{array}{l}m_y[n]=h[n]*m_x[n]\\ m_x[n]=0\end{array}\right\}\Rightarrow m_y[n]=0$$

حل سری چهارم ۴۴

(ج)

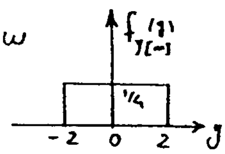
$$\Phi_{X[m]}(\omega) = E\, e^{j\omega X[m]} = \frac{1}{2} e^{j\omega} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} = \cos\omega$$

$$\Phi_{Y[m]}(\omega) = E\, e^{j\omega \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X[m-k]} = \prod_{k=0}^{\infty} E\, e^{j\omega 2^{-k} X[m-k]} = \prod_{k=0}^{\infty} \Phi_{X[m-k]}(2^{-k}\omega) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(2^{-k}\omega)$$

استقلال نمونه‌های x

$$\Phi_{Y[m]} = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=0}^{N} \cos 2^{-k}\omega = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sin(2^{-N}\omega)} \sin(2^{-N}\omega)\cos 2^{-N}\omega \cos 2^{-N+1}\omega \cdots \cos\omega$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-N-1}\sin 2\omega}{\sin 2^{-N}\omega} = \frac{\sin 2\omega}{2\omega} = \operatorname{sinc} 4f \longleftrightarrow f_{Y[m]}(y) = \frac{1}{4}\operatorname{rect}(y/4)$$



(د) از تعریف داریم

$$X(z) = (1 - z^{-1}/2)\, Y(z) \Rightarrow y[m] - \frac{1}{2} y[m-1] = x[m]$$

یعنی فرایند y یک AR مرتبه اول است

$$P\{y[m] \le y \mid y[m-1] = y_{m-1}, y[m-2] = y_{m-2}, \cdots\} = P\{y[m] - \tfrac{1}{2} y[m-1] \le y - \tfrac{1}{2} y_{m-1} \mid y[m-1] = y_{m-1}, \cdots\}$$

$$= P\{x[m] \le y - \tfrac{1}{2} y_{m-1} \mid y[m-1] = y_{m-1}, \cdots\} = P\{x[m] \le y - \tfrac{1}{2} y_{m-1} \mid x[m-1] = y_{m-1} - \tfrac{1}{2} y_{m-2}, \cdots\}$$

$$= P\{x[m] \le y - \tfrac{1}{2} y_{m-1}\} = F_{x[m]}(y - \tfrac{1}{2} y_{m-1})$$

استقلال نمونه‌های x

از طرفین نسبت به y مشتق میگیریم

$$f_{y[m]}(y \mid y_{m-1}, y_{m-2}, \cdots) = f_{x[m]}(y - \tfrac{1}{2} y_{m-1}) = \frac{1}{2}\delta(y - \tfrac{1}{2} y_{m-1} - 1) + \frac{1}{2}\delta(y - \tfrac{1}{2} y_{m-1} + 1)$$

مسئله ۷: فرایند x را میتوان خروجی سیستم علّی پایدار زیر به ورودی V دانست و چون قطبهای سیستم همگی داخل دایره واحد $|z|=1$ قرار دارند این سیستم علّی است

$$H(z) = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = h[0] + h[1] z^{-1} + h[2] z^{-2} + \cdots$$

ضمناً از تساوی فوق به ازای $z^{-1}=0$ داریم $h[0] = \frac{b_0}{a_0} = b_0$

$$S_{xx}(z) = H(z) H^*(1/z) = \frac{b_0}{\sum a_k z^{-k}} (b_0^* + h^*[1] z + h^*[2] z^2 + \cdots)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} S_{xx}(z) = |b_0|^2 + b_0 h^*[1] z^{+1} + b_0 h^*[2] z^{+2} + \cdots$$

به حوزه زمان میبریم

$$\sum_{k=0}^{N} a_k R_{xx}[m-k] = |b_0|^2 \delta[m] + b_0 h^*[1] \delta[m+1] + b_0 h^*[2] \delta[m+2] + \cdots$$

روشن است که

$$\sum_{k=0}^{N} a_k R_{xx}[m-k] = \begin{cases} 0 & , m > 0 \\ |b_0|^2 & , m = 0 \end{cases}$$

یعنی همبستگی‌ها در رابطه AR مشابه صدق میکنند. همبستگی‌ها قابل سنجش هستند و روابط بالا بصورت یک دستگاه معادلات خطی روشی برای تعیین پارامترهای معادله AR یعنی a_k و b_0 نشان میدهد

بسمه تعالی

مسائل سری پنجم

مسالهٔ ۱ - تخمین بهینهٔ درجه دوم متغیر تصادفی S را برحسب متغیر تصادفی X (یعنی به فرم $\hat{S} = a + bX + cX^2$) و با معیار MMS بدست آورید .

مسالهٔ ۲ - فرض کنید S=GW می باشد. در این رابطه $\mathbf{W}^T = \{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ یک بردار تصادفی سفید نرمالیزه است که دو مولفهٔ اول آن یعنی W_1 , W_2 مشاهده شده است و G ماتریسی به قرار زیر است:

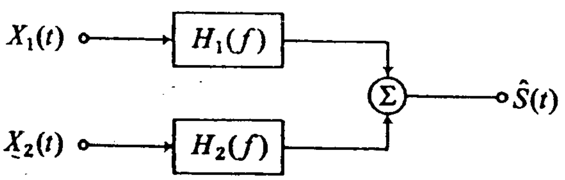
$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

الف) تخمینی با معیار LMMS دو مولفه دیگر یعنی W_3 , W_4 چیست و متوسط مربع خطای این تخمینی چقدر است؟

ب) تخمینی بامعیار LMMS بردار S را نیز بدست آورید و متوسط مربع خطای این تخمینی را نیز حساب کنید.

سخت

مسالهٔ ۳ - برای تخمین خطی با معیار MMS فرآیند ساکن $S(t)$ برحسب دو فرآیند ساکن قابل مشاهده $X_1(t)$, $X_2(t)$ سیستمی بصورت روبرو در نظر بگیرید و فرض کنید زمان مشاهده از $t = -\infty$ تا $t = \infty$ باشد.



الف) تابع تبدیل فیلترها $H_1(f)$, $H_2(f)$ را بدست آورید.

ب) با فرض آنکه $X_1(t)=S(t)+V_1(t)$ و همچنین $X_2(t)=S(t)+V_2(t)$ بوده که درآن $S(.) \perp V_2(.)$ و $S(.) \perp V_1(.)$ و $V_1(.) \perp V_2(.)$ است. تابع تبدیل فیلترها و متوسط مربع خطای تخمین را برحسب طیف قدرت فرایندهای $S(t)$ و $V_2(t)$ و $V1(t)$ بیان کنید.

مسالهٔ ۴ - ثابت کنید که اگر $Z = \int_0^T S(t)dt$ باشد تخمین خطی Z برحسب $S(T)$ و $S(0)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$\hat{Z} = \hat{\mathrm{E}}\{Z \mid S(0), S(T)\} = \frac{\int_0^T R_S(t)dt}{R_S(0) + R_S(T)}[S(0) + S(T)]$$

مسالهٔ ۵ - نشان دهید که اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد می‌توان نتیجه گرفت که $R_S(\tau)=Ie^{-\alpha|\tau|}$ می‌باشد.

$$\hat{E}\{S(t+\lambda)||S(t),S(t-\tau)\}=\hat{E}\{S(t+\lambda)|S(t)\}$$

مسالهٔ ۶ - رشته تصادفی $\{X_n\}$ را مارتینگل گویند هرگاه داشته باشیم:

$$E\{X_n\mid X_{n-1},X_{n-2},\cdots,X_1\}=X_{n-1}$$

ثابت کنید که اگر متغیرهای تصادفی Y_i مستقل از هم بوده و متوسط صفر داشته باشند آنگاه مجموع آنها $X_n=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ تولید یک رشته تصادفی مارتینگل می‌نماید.

مسالهٔ ۷ - یک رشته تصادفی $\{X_n\}$ را مارتینگل به مفهوم وسیع گویند هرگاه داشته باشیم:

$$\hat{E}\{X_n\mid X_{n-1},X_{n-2},\cdots,X_1\}=X_{n-1}$$

الف) ثابت کنید که اگر رشته‌ای را بتوان بصورت $X_n=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ نوشت که در آن Y_i ها متغیرهای تصادفی متعامد هستند این رشته $\{X_n\}$ مارتینگل به مفهوم وسیع خواهد بود.

ب) ثابت کنید که اگر رشته $\{X_n\}$ مارتینگل به مفهوم وسیع باشند خواهیم داشت: $EX_n^2\ge EX_{n-1}^2\ge\cdots\ge EX_1^2$

راهنمائی : $X_n=(X_n-X_{n-1})+X_{n-1}$ و $(X_n-X_{n-1})\perp X_{n-1}$

مسالهٔ ۸ - فرض کنید $X(t)=S(t)+V(t)$ بوده و $R_{SV}(\tau)=0$ و $R_S(\tau)=A\dfrac{\sin^2(a\tau)}{\tau^2}$ و $R_V(\tau)=N\delta(\tau)$ باشد. فیلترهای لازم $H_2(f),H_1(f)$ برای تخمین به ترتیب $S(t)$ و $S'(t)$ و برحسب $\{X(\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\}$ را بدست آورید.

حت **مسالهٔ ۹** ثابت کنید که اگر $S_S(f)=\dfrac{1}{1+(2\pi f)^4}$ باشد آنگاه بهترین تخمین خطی $S(t+\lambda)$ برحسب $\{S(t-\alpha):\alpha\ge 0\}$ برابر خواهد بود با $\hat{S}(t+\lambda)=b_oS(t)+b_1S'(t)$ که در آن $b_o=e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}(\cos\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}})$ و $b_1=\sqrt{2}e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\sin\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}$ می‌باشد.

مسالهٔ ۱۰ - (الف) تابعی $h(t)$ پیدا کنید بطوریکه در معادله انتگرالی زیر (معادله وینر-هوف) صدق نماید.

$$R(\tau)=\frac{3}{2}e^{-\tau}+\frac{11}{3}e^{-3\tau}\qquad \int_0^\infty h(\alpha)R(\tau-\alpha)d\alpha=R(\tau+\ln 2),\ \ \tau\ge 0$$

ب) تابع $H(s)$ یک تابع کسری است که قطبهای آن در سمت چپ صفحه S قرار دارندو تابع $Y(s)$ هم در سمت چپ صفحه S تحلیلی است (یعنی هیچ قطبی ندارد) اگر بین ایندو تابع رابطه زیر برقرار باشد ایندو تابع را پیدا کنید.

$$[H(s)-2^{s}]\frac{49-25s^2}{9-10s^2+s^4}=Y(s)$$

ج) چه ارتباطی بین بند الف و بند ب وجود دارد؟

مسالهٔ ۱۱ - می‌خواهیم تخمین خطی سیگنال تلگرافی $S(t)$ را برحسب $X(t)=S(t)+V(t)$ و گذشته آن بدست آوریم که در آن $R_{SV}(\tau)=0$ و $R_V(\tau)=N\delta(\tau)$ و $R_S(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$ می‌باشد.

ثابت کنید $\hat{S}(t)=(c-2\lambda)\int_0^{\infty}X(t-\alpha)e^{-c\alpha}d\alpha$ خواهد بود که در آن $c=2\lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda N}}$ می‌باشد.

مسالهٔ ۱۲ - اگر $X(t)=S(t)+V(t)$ باشد که در آن $R_{SV}(\tau)=0$ و $R_V(\tau)=5\delta(\tau)$ و $R_S(\tau)=5e^{-0.2|\tau|}$ است

تخمینهای خطی زیر را بدست آورده و خطای آنها را پیدا کنید.

الف) تخمین $S(t)$ برحسب کل $X(t)$

ب) تخمین $S(t)$ برحسب $X(t)$ و گذشتهٔ آن

ج) تخمین $S(t+2)$ برحسب $S(t)$ و گذشتهٔ آن

د) تخمین $S(t+2)$ برحسب $X(t)$ و گذشتهٔ آن

مسالهٔ ۱۳ - یک فرایند AR(N) در نظر بگیرید.

$$S(n)=-a_1S(n-1)-a_2S(n-2)-\cdots-a_NS(n-N)+b_0V(n)$$

و فرض کنید که همه ریشه های معادله AR یعنی معادله $1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}=0$ داخل دایره واحد است.

الف) ثابت کنید $V(n)$ بر $S(n-1)$ و $S(n-2)$ و $S(n-3)$ و $\cdots$ یعنی بر کلیه نمونه های قبلی فرایند S عمود است.

ب) با استفاده از بند الف و بکمک اصل تعامد ثابت کنید که یک قدم پیشگوئی $S(n)$ از روی کل گذشته آن از رابطه زیر بدست می آید.

$$\widehat{S_1}(n)=\widehat{E}[S(n)\mid S(n-k):k\geq 1]=-\sum_{i=1}^{N}a_iS(n-i)$$

ج) با استفاده از بند الف و ب و بکمک اصل تعامد ثابت کنید که دو قدم پیشگوئی $S(n)$ از روی کل گذشته آن از رابطه زیر بدست می آید.

$$\widehat{S_2}(n)=\widehat{E}[S(n)\mid S(n-k):k\geq 2]=-a_1\widehat{S_1}(n-1)-\sum_{i=2}^{N}a_iS(n-i)$$

(سری ۵)

حل مسائل سری پنجم

مسأله ۱: نمونه رقابتی را تحقیق میکنیم

$$P = E(s-\hat{s})^2 = E(s-a-bx-cx^2)^2$$

$$\partial P/\partial a = 0 \Rightarrow E[-2(s-a-bx-cx^2)] = 0 \Rightarrow a + b\bar{x} + c\overline{x^2} = \bar{s}$$

$$\partial P/\partial b = 0 \Rightarrow E[-2x(s-a-bx-cx^2)] = 0 \Rightarrow a\bar{x} + b\overline{x^2} + c\overline{x^3} = \overline{sx}$$

$$\partial P/\partial c = 0 \Rightarrow E[-2x^2(s-a-bx-cx^2)] = 0 \Rightarrow a\overline{x^2} + b\overline{x^3} + c\overline{x^4} = \overline{sx^2}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & \overline{x^2} \\ \bar{x} & \overline{x^2} & \overline{x^3} \\ \overline{x^2} & \overline{x^3} & \overline{x^4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \overline{sx} \\ \overline{sx^2} \end{pmatrix}$$

تخمین خطی به نویز مرتبه اول و دوم نیاز داشت. ملاحظه میگردد تخمین درجه دوم به نویز تا مرتبه چهارم نیاز دارد.

مسأله ۲: (الف) مولفه‌های بردار سفید متعامد هستند و روشن است که هیچیک نمی‌توانند کمکی به تخمین خطی دیگری کنند. لذا

$$\hat{E}(w_3|w_1,w_2) = 0,\ \hat{E}(w_4|w_1,w_2) = 0 \Rightarrow \hat{P}(w_3|w_1,w_2) = E(w_3-0)^2 = 1,\ \hat{P}(w_4|w_1,w_2) = E(w_4-0)^2 = 1$$

فقط بردار نویزه   فقط بردار نویزه

(ب)

$$S_1 = 6w_1 + 2w_2 + 3w_3 \Rightarrow \hat{E}(S_1|w_1,w_2) = \hat{E}(6w_1+2w_2+3w_3|w_1,w_2) = 6w_1 + 2w_2 + 3\hat{E}(w_3|w_1,w_2)$$
$$= 6w_1 + 2w_2 + 0$$

بهمین ترتیب

$$S_2 = w_1 + 6w_2 + 2w_3 + 3w_4 \Rightarrow \hat{E}(S_2|w_1,w_2) = w_1 + 6w_2 + 0 + 0$$

$$S_3 = w_2 + 6w_3 + 2w_4 \Rightarrow \hat{E}(S_3|w_1,w_2) = w_2 + 0 + 0$$

$$S_4 = w_3 + 6w_4 \Rightarrow \hat{E}(S_4|w_1,w_2) = 0 + 0 \quad \Rightarrow \hat{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 6w_1+2w_2 \\ w_1+6w_2 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = E\|\underline{S} - \hat{\underline{S}}\|^2 = E\left\|\begin{matrix} S_1 - 6w_1 - 2w_2 \\ S_2 - w_1 - 6w_2 \\ S_3 - w_2 \\ S_4 \end{matrix}\right\|^2 = E\left\|\begin{matrix} 3w_3 \\ 2w_3 + 3w_4 \\ 6w_3 + 2w_4 \\ w_3 + 6w_4 \end{matrix}\right\|^2 = E\left(9|w_3|^2 + |2w_3+3w_4|^2 + |6w_3+2w_4|^2 + |w_3+6w_4|^2\right)$$
$$= [9 + (4+9+0) + (36+4+0) + (1+36+0)] = 99$$

مسأله ۳: (الف)

$$\hat{S}(t) = \hat{E}(s(t)|x_1(\alpha), x_2(\alpha),\ \alpha \in R) = h_1(t) * x_1(t) + h_2(t) * x_2(t)$$

تخمین خطی از کلیه داده‌ها است. چون حدود مشاهده از $-\infty$ تا $+\infty$ است $h_1(t)$ و $h_2(t)$ میتوانند از $-\infty$ تا $+\infty$ ادامه داشته باشند. شرط تعامد را مینویسیم

$$\begin{cases} s(t) - \hat{s}(t) \perp x_1(t-\tau),\ \forall \tau \in R \Rightarrow R_{sx_1}(\tau) = R_{\hat{s}x_1}(\tau) \\ s(t) - \hat{s}(t) \perp x_2(t-\tau),\ \forall \tau \in R \Rightarrow R_{sx_2}(\tau) = R_{\hat{s}x_2}(\tau) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{sx_1}(\tau) = h_1(\tau) * R_{x_1}(\tau) + h_2(\tau) * R_{x_2x_1}(\tau),\ \forall \tau \in R \\ R_{sx_2}(\tau) = h_1(\tau) * R_{x_1x_2}(\tau) + h_2(\tau) * R_{x_2}(\tau),\ \forall \tau \in R \end{cases} \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \begin{cases} H_1(f) S_{x_1}(f) + H_2(f) S_{x_2x_1}(f) = S_{sx_1}(f) \\ H_1(f) S_{x_1x_2}(f) + H_2(f) S_{x_2}(f) = S_{sx_2}(f) \end{cases}$$

در معادله دو مجهول داریم:

$$H_1(f) = \frac{S_{sx_1}(f) S_{x_2}(f) - S_{sx_2}(f) S_{x_2x_1}(f)}{S_{x_1}(f) S_{x_2}(f) - |S_{x_1x_2}(f)|^2},\quad H_2(f) = \frac{S_{sx_2}(f) S_{x_1}(f) - S_{sx_1}(f) S_{x_1x_2}(f)}{\text{همان مخرج } H_1(f)}$$

(ب) در این سوال داریم

$$\begin{cases} S_{sx_1}(f) = S_{sx_2}(f) = S_{x_1x_2}(f) = S_{x_2x_1}(f) = S_s(f) \\ S_{x_1}(f) = S_s(f) + S_{v_1}(f),\quad S_{x_2}(f) = S_s(f) + S_{v_2}(f) \end{cases}$$

جایگزین میکنیم

$$H_1(f) = \frac{S_s(f) S_{v_1}(f)}{S_s(f) S_{v_1}(f) + S_s(f) S_{v_2}(f) + S_{v_1}(f) S_{v_2}(f)},\quad H_2(f) = \frac{S_s(f) S_{v_2}(f)}{\text{همان مخرج } H_1(f)}$$

$$P = E[s(t) - \hat{s}(t)] s^*(t) = R_s(0) - R_{\hat{s}s}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} [S_s(f) - S_{\hat{s}s}(f)]\, df$$

$$S_s(f) - S_{\hat{s}s}(f) = S_s(f) - [H_1(f) S_{x_1s}(f) + H_2(f) S_{x_2s}(f)] = S_s(f)[1 - H_1(f) - H_2(f)]$$
$$= S_s(f)\left[\frac{S_{v_1}(f) S_{v_2}(f)}{\text{همان مخرج } H_1(f)}\right]$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(f) S_{v_1}(f) S_{v_2}(f)}{S_s(f) S_{v_1}(f) + S_s(f) S_{v_2}(f) + S_{v_1}(f) S_{v_2}(f)}\, df$$

مسأله ۴:

$$z-\hat{z} \perp s(0) \longrightarrow \int_0^T R_s(t)\,dt - aR_s(0) - bR_s(T) = 0$$

$$z-\hat{z} \perp s(T) \longrightarrow \int_0^T R_s(t-T)\,dt - aR_s(T) - bR_s(0) = 0$$

برای فرایند حقیقی $R_s(\tau)=R_s(-\tau)$ است ولذا

$$\begin{cases} aR_s(0) + bR_s(T) = \int_0^T R_s(t)\,dt \\ aR_s(T) + bR_s(0) = \int_0^T R_s(t)\,dt \end{cases} \Longrightarrow a = b = \frac{\int_0^T R_s(t)\,dt}{R_s(0)+R_s(T)}$$

مسأله ۵: برای $\tau>0$

$$\hat{E}[s(t+\lambda)\mid s(t), s(t-\tau)] = \hat{E}[s(t+\lambda)\mid s(t)] = a\,s(t)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} s(t+\lambda) - as(t) \perp s(t) \\ s(t+\lambda) - as(t) \perp s(t-\tau) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R_s(\lambda) = aR_s(0) \\ R_s(\tau+\lambda) = aR_s(\tau) \end{cases}$$

پس میتوان نوشت

$$R_s(\tau+\lambda) = \frac{R_s(\lambda)}{R_s(0)} R_s(\tau); \quad \tau>0$$

نسبت به λ مشتق میگیریم و برای λ مقدار $\lambda=0^+$ قرار میدهیم

$$R_s'(\tau) = \frac{R_s'(0^+)}{R_s(0)} R_s(\tau), \quad \tau>0$$

با فرض $\frac{R_s'(0^+)}{R_s(0)} = -\alpha$ که در آن α عدد مثبتی است (چون حداکثر $R(\tau)$ در مبدا است شیب در مبدا نزولی است)

$$R_s'(\tau) + \alpha R_s(\tau) = 0,\ \tau>0 \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل}} R_s(\tau) = ke^{-\alpha\tau},\ \tau>0$$

با تبدیل τ به $-\tau$ و با توجه به تقارن هرمیتیک (یا الحاقی) $R_s(-\tau)=R_s^*(\tau)$ خواهیم داشت

$$R_s(-\tau) = ke^{\alpha\tau},\ -\tau>0 \Longrightarrow R_s^*(\tau) = ke^{\alpha\tau},\ \tau<0 \Longrightarrow R_s(\tau) = ke^{\alpha\tau},\ \tau<0$$

$$R_s(\tau) = ke^{-\alpha|\tau|}$$

این در ضابطه را میتوان با یک ضابطه هم نمایش داد:

مسأله ۶:

$$X_n = y_n + y_{n-1} + \cdots + y_1 = y_n + X_{n-1} = \text{نمونه قبلی} + \text{نمو}$$

$$E\{X_n \mid X_{n-1}=x_{n-1}, X_{n-2}=x_{n-2}, \ldots, X_1=x_1\} = E\{y_n \mid X_{n-1}=x_{n-1}, X_{n-2}=x_{n-2}, \ldots, X_1=x_1\} + x_{n-1}$$

$$= E\,y_n + x_{n-1} = x_{n-1}$$

چراکه دو پیش آمد زیر معادل هستند و y ها نیز مستقل هستند ولذا شرط روی امید ریاضی اول حذف شد.

$$\{X_{n-1}=x_{n-1}, X_{n-2}=x_{n-2}, \ldots, X_1=x_1\} \equiv \{y_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}, y_{n-2}=x_{n-2}-x_{n-1}, \ldots, y_2=x_2-x_1, y_1=x_1\}$$

مسأله ۷: اگر مارتینگل به مفهوم وسیع باشد داریم

$$X_n - X_{n-1} \perp X_i, \quad i=1,2,\ldots,n-1$$

اگر $y_1=X_1$ تعریف شود و تفاضل X_i و X_{i-1} را $y_i \triangleq X_i - X_{i-1}$ نامیم داریم

$$X_n = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$$

$$\begin{cases} X_n - X_{n-1} \perp X_1 = y_1 & \Rightarrow & y_n \perp y_1 \\ X_n - X_{n-1} \perp X_2 = y_1+y_2 & \Rightarrow & y_n \perp y_2 \\ X_n - X_{n-1} \perp X_3 = y_1+y_2+y_3 & \Rightarrow & y_n \perp y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & & y_n \perp y_{n-1} \end{cases}$$

حال فرض میکنیم شرط تعامد فوق برقرار باشد در اینصورت

$$\begin{cases} y_n \perp y_1 & \Longrightarrow & X_n - X_{n-1} \perp X_1 \\ y_n \perp y_2 & \Longrightarrow & y_n \perp y_1+y_2 \Rightarrow X_n - X_{n-1} \perp X_2 \\ \vdots & & \vdots \\ y_n \perp y_{n-1} & \Longrightarrow & y_n \perp y_1+y_2+\cdots+y_{n-1} \Rightarrow X_n - X_{n-1} \perp X_{n-1} \end{cases}$$

پس

$$\hat{E}(X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_1) = X_{n-1}$$

ب)

$$E X_n^2 = E(X_n - X_{n-1} + X_{n-1})^2 = E X_{n-1}^2 + E(X_n - X_{n-1})^2 + 2E(X_{n-1}(X_n - X_{n-1}))$$

جمله سوم طبق بند الف صفر است ولذا

$$E X_n^2 = E X_{n-1}^2 + E(X_n - X_{n-1})^2 \geq E X_{n-1}^2$$

سوال ۸ :

$$H_1(f)=\frac{S_{sx}(f)}{S_x(f)}=\frac{S_s(f)}{N+S_s(f)}\quad\Longrightarrow\quad H_1(f)=\frac{\Lambda(\frac{\pi f}{a})}{\Lambda(\frac{\pi f}{a})+\frac{N}{Aa\pi}}$$

$$R_s(\tau)=Aa^2\,\mathrm{Sinc}^2(\tfrac{a\tau}{\pi})\longleftrightarrow S_s(f)=Aa\pi\,\Lambda(\tfrac{\pi f}{a})$$

$$H_2(f)=\frac{S_{s'x}(f)}{S_x(f)}=\frac{j2\pi f\,S_{sx}(f)}{S_x(f)}=\frac{j2\pi f\,S_s(f)}{N+S_s(f)}\quad\Longrightarrow\quad H_2(f)=\frac{j2\pi f\,\Lambda(\frac{\pi f}{a})}{\Lambda(\frac{\pi f}{a})+\frac{N}{Aa\pi}}$$

سوال ۹ :

$$S_s(f)=\frac{1}{1+s^4}=\frac{1}{(1+\sqrt2 s+s^2)(1-\sqrt2 s+s^2)}\ ,\quad s=j2\pi f$$

$$=L_s(f)L_s^*(f)\Longrightarrow L_s(f)=\frac{1}{1+\sqrt2 s+s^2}$$ باید جواب مینیمم فاز انتخاب شود یعنی

$$L_s(f)=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}\ ,\quad p_1,p_2=-\frac{\sqrt2}{2}\pm j\frac{\sqrt2}{2}\ ,\quad r_{1,2}=\mp j\frac{\sqrt2}{2}\Longrightarrow l_s(t)=(r_1e^{p_1t}+r_2e^{p_2t})u(t)$$

$$h_w(t)=\{l_s(t+\lambda)\}_{\ge0}=\{(r_1e^{p_1(t+\lambda)}+r_2e^{p_2(t+\lambda)})u(t+\lambda)\}_{\ge0}=(r_1e^{p_1\lambda}e^{p_1t}+r_2e^{p_2\lambda}e^{p_2t})u(t)$$

$$H(f)=\Gamma_s(f)H_w(f)=(1+\sqrt2 s+s^2)\left[\frac{r_1e^{p_1\lambda}}{s-p_1}+\frac{r_2e^{p_2\lambda}}{s-p_2}\right]=-r_1p_2e^{p_1\lambda}-r_2p_1e^{p_2\lambda}+(r_1e^{p_1\lambda}+r_2e^{p_2\lambda})s$$

$$=b_0+b_1s=b_0+b_1j2\pi f\Longrightarrow h(t)=b_0\delta(t)+b_1\delta'(t)\Longrightarrow\hat{s}(t+\lambda)=h(t)*s(t)=b_0s(t)+b_1s'(t)$$

$$b_0=-r_1p_2e^{p_1\lambda}-r_2p_1e^{p_2\lambda}=e^{-\frac{\lambda}{\sqrt2}}\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt2}+\sin\frac{\lambda}{\sqrt2}\right)\ ,\quad b_1=r_1e^{p_1\lambda}+r_2e^{p_2\lambda}=\sqrt2\,e^{-\frac{\lambda}{\sqrt2}}\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt2}\right)$$ که در آن

سوال ۱۰ : (الف) معادله داده شده مربوط به پیشگویی خالص $\lambda=\ln2$ ثانیه بعد است لذا جواب آن بصورت زیر است

$$h(t)=\gamma(t)*h_w(t)\ ,\quad h_w(t)=\{l(t+\ln2)\}_{\ge0}$$

$$S(f)=\mathcal{F}R(\tau)=\frac{\frac32\times2\times1}{1+4\pi^2f^2}+\frac{\frac{11}{3}\times2\times3}{9+4\pi^2f^2}\underset{s=j2\pi f}{=}\frac{49-25s^2}{(1-s^2)(9-s^2)}=\frac{(7-5s)(7+5s)}{(1-s)(1+s)(3-s)(3+s)}=L(f)L^*(f)$$

$$L(f)=\frac{7+5s}{(1+s)(3+s)}=\frac{1}{1+s}+\frac{4}{3+s}\Longrightarrow l(t)=(e^{-t}+4e^{-3t})u(t)$$ باید جواب مینیمم فاز انتخاب شود یعنی

$$h_w(t)=\{l(t+\ln2)\}_{\ge0}=(e^{-t-\ln2}+4e^{-3t-3\ln2})u(t)=(\tfrac12e^{-t}+\tfrac12e^{-3t})u(t)$$

$$H(f)=\Gamma(f)H_w(f)=\frac{(1+s)(3+s)}{7+5s}\left(\frac{1/2}{1+s}+\frac{1/2}{3+s}\right)=\frac{2+s}{7+5s}=0.2+\frac{0.6}{7+5s}=0.2+\frac{0.12}{1.4+s}$$

$$h(t)=0.2\,\delta(t)+0.12\,e^{-1.4t}u(t)$$

(ب)

$$(H(s)-2^s)\frac{49-25s^2}{9-10s^2+s^4}=Y(s)\Longrightarrow\underbrace{H(s)\frac{7+5s}{(3+s)(1+s)}}_{\text{قطب و صفر LHP دارد لذا علّی}}-\underbrace{Y(s)\frac{(3-s)(1-s)}{7-5s}}_{\text{قطب و صفر RHP دارد لذا ضد علّی}}=2^s\frac{7+5s}{(3+s)(1+s)}$$

$$H(s)\frac{7+5s}{(3+s)(1+s)}=\left\{2^s\frac{7+5s}{(3+s)(1+s)}\right\}_{\ge0}=\left\{e^{(\ln2)s}\frac{7+5s}{(3+s)(1+s)}\right\}_{\ge0}=H_w(s)$$

$$H(s)=\frac{(3+s)(1+s)}{7+5s}H_w(s)=\Gamma(s)H_w(s)$$ همانطور که دیده میشود جواب مثل بند الف است.

سوال ۱۱ : فیلتر وینر علّی مورد نظر است. با توجه به اینکه مدل خطی با نویز سفید در نظر گرفته شده است میتوان نوشت

$$H(f)=1-N\,\Gamma_x^*(\infty)\Gamma_x(f)$$

$$S_x(f)=N+S_s(f)=N+\frac{4\lambda}{4\lambda^2+4\pi^2f^2}=\frac{(4\lambda^2N+4\lambda)+4\pi^2f^2N}{4\lambda^2+4\pi^2f^2}=N\frac{c^2+4\pi^2f^2}{4\lambda^2+4\pi^2f^2}=\frac{1}{\Gamma_x(f)\Gamma_x^*(f)}$$

با انتخاب جواب مینیمم فاز $\Gamma_x(f)=\frac{1}{\sqrt N}\frac{2\lambda+j2\pi f}{c+j2\pi f}\Longrightarrow H(f)=1-\frac{\sqrt N}{\sqrt N}\frac{2\lambda+j2\pi f}{c+j2\pi f}=\frac{c-2\lambda}{c+j2\pi f}\Longrightarrow h(t)=(c-2\lambda)e^{-ct}u(t)$

$$\hat{S}(t)=h(t)*x(t)=(c-2\lambda)\int_{\alpha=0}^{\infty}e^{-c\alpha}x(t-\alpha)\,d\alpha$$

در روابط فوق $c^2=4\lambda^2+\frac{4\lambda}{N}$ است یعنی $c=2\lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda N}}$

مسئله ۱۲: مدل خطی با نویز سفید است.

$$S_s(f)=\frac{2}{0.04+(2\pi f)^2}=L_s(f)L_s^*(f),\qquad S_x(f)=N_0+S_s(f)=\frac{2.2+5(2\pi f)^2}{0.04+(2\pi f)^2}=L_x(f)L_x^*(f)$$

$$L_s(f)=\frac{\sqrt{2}}{0.2+j2\pi f},\qquad L_x(f)=\sqrt{5}\,\frac{\sqrt{0.44}+j2\pi f}{0.2+j2\pi f}=\sqrt{5}\left[1+\frac{\sqrt{0.44}-0.2}{0.2+j2\pi f}\right]$$

$$l_s(t)=\sqrt{2}\,e^{-0.2t}u(t),\qquad l_x(t)=\sqrt{5}\left[\delta(t)+(\sqrt{0.44}-0.2)e^{-0.2t}u(t)\right]$$

الف) فیلتر وینر غیرعلی

$$H(f)=\frac{S_{sx}(f)}{S_x(f)}=\frac{S_s(f)}{S_x(f)}=\frac{2}{2.2+20\pi^2 f^2}\Rightarrow h(t)=\frac{1}{\sqrt{11}}e^{-\sqrt{0.44}|t|}$$

$$\hat{s}(t)=h(t)*x(t)=\frac{1}{\sqrt{11}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sqrt{0.44}|\alpha|}x(t-\alpha)\,d\alpha,\qquad P_{min}=N_0h(0)=1.51$$

ب) فیلتر وینر علی

$$H(f)=1-N_0 l_x^*(\infty)\Gamma_x(f)=1-\sqrt{5}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{0.2+j2\pi f}{\sqrt{0.44}+j2\pi f}=\frac{\sqrt{0.44}-0.2}{\sqrt{0.44}+j2\pi f}$$

$$h(t)=(\sqrt{0.44}-0.2)e^{-\sqrt{0.44}t}u(t)\Longrightarrow\hat{s}(t)=(\sqrt{0.44}-0.2)\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{0.44}\alpha}x(t-\alpha)\,d\alpha,\qquad P_{min}=N_0h(0)=2.31$$

ج) پیشگویی کالمن $\lambda=2$ ثانیه بعد

$$h_w(t)=\{l_s(t+2)\}_{\geq 0}=\sqrt{2}\,e^{-0.2(t+2)}u(t)$$

$$H(f)=H_w(f)\Gamma_s(f)=\sqrt{2}\,e^{-0.4}\frac{1}{0.2+j2\pi f}\,\frac{0.2+j2\pi f}{\sqrt{2}}=e^{-0.4}\Rightarrow h(t)=e^{-0.4}\delta(t)$$

$$\hat{s}(t+2)=h(t)*s(t)=e^{-0.4}s(t),\qquad P_{min}=\int_0^2|l_s(t)|^2dt=(\sqrt{2})^2\int_0^2 e^{-0.4t}dt=2.75$$

د) فیلتر نویزی + $\lambda=2$ ثانیه پیشگو

$$h_w(t)=\{l_x(t+2)\}_{\geq 0}=\sqrt{5}(\sqrt{0.44}-0.2)e^{-0.2(t+2)}u(t)$$

$$H(f)=\Gamma_x(f)H_w(f)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{(0.2+j2\pi f)}{(\sqrt{0.44}+j2\pi f)}\sqrt{5}(\sqrt{0.44}-0.2)e^{-0.4}\frac{1}{(0.2+j2\pi f)}=\frac{0.3106}{\sqrt{0.44}+j2\pi f}$$

$$h(t)=0.3106\,e^{-\sqrt{0.44}t}u(t)\Longrightarrow\hat{s}(t+2)=0.3106\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{0.44}\alpha}x(t-\alpha)\,d\alpha,\qquad P_{min}=R_s(0)-\int_2^{\infty}|l_x(t)|^2dt=3.79$$

در هر سه حالت فیلتر بهینه لست داین طبیعی است.

مسئله ۱۳: الف) با توجه به اینکه همه ریشه‌های معادله AR داخل دایره واحد است فیلتری که فرایند $v(n)$ را به فرایند $s(n)$ تبدیل می‌کند یک فیلتر علی خواهد بود. اگر پاسخ ضربه این فیلتر را $h(n)$ بنامیم می‌توان نوشت:

$$s(n)=h(n)*v(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)v(n-k)=h(0)v(n)+h(1)v(n-1)+h(2)v(n-2)+\cdots$$

$$\rightarrow\quad s(n-i)=h(0)v(n-i)+h(1)v(n-i-1)+h(2)v(n-i-2)+\cdots$$

برای $i\geq 1$ تمام جملات سمت راست بر $v(n)$ عمود است پس مجموع آنها یعنی $s(n-i)$ نیز برای $i\geq 1$ بر $v(n)$ عمود است یعنی

$$v(n)\perp s(n-1),s(n-2),s(n-3),\cdots$$

ب) کافی است اصل تعامد را چک کنیم

$$s(n)-\hat{s}_1(n)=s(n)+\sum_{i=1}^{N}a_i s(n-i)=b_0v(n)\perp s(n-1),s(n-2),s(n-3),\ldots$$

بنا به معادله AR — طبق بند الف

ج) باز هم کافیست اصل تعامد را چک کنیم

$$s(n)-\hat{s}_2(n)=s(n)+a_1\hat{s}_1(n-1)+\sum_{i=2}^{N}a_i s(n-i)$$

$$=b_0v(n)-a_1s(n-1)+a_1\hat{s}_1(n-1)+b_0v(n)+a_1\left[s(n-1)-\hat{s}_1(n-1)\right]$$

جمله اول یعنی $b_0v(n)$ که طبق بند الف بر $s(n-2)$، $s(n-3)$ و ... عمود است جمله دوم نیز که خطای پیشگویی است که بر داده‌های دورتر یعنی $s(n-2)$، $s(n-3)$ و ... عمود است. پس اصل تعامد صادق است.

ردیف‌بندی مطالب

فصل اول : مقدمه‌ای بر فرآیندهای تصادفی

۱- مفاهیم اساسی در تئوری احتمال

۱-۱ : تعریف فضای نمونه و پیشامد

۱-۲ : تعریف احتمال ، فضای پیشامدها و فضای احتمال

۱-۳ : احتمال شرطی و استقلال پیشامدها (۱)

الف - احتمال شرطی

ب - استقلال پیشامدها

۱-۴ : قضیه احتمال کلی و فرمول بیز (۲)

۲ - متغیر تصادفی

۲-۱ : تعریف متغیر تصادفی (۳)

الف - تعریف متغیر تصادفی

ب - تعریف تابع توزیع احتمال (CDF)

ج - تعریف تابع چگالی احتمال (pdf)

د - تعریف متغیر تصادفی گسسته و تابع جرم احتمال

۲-۲ : انواع متغیر تصادفی (۴)

۲-۳ : دو متغیر تصادفی و توابع CDF ، pdf توأم و کناری آنها

الف - دو متغیر تصادفی و توابع CDF و pdf کناری آنها

ب - CDF توأم دو متغیر تصادفی

ج - pdf توأم دو متغیر تصادفی

۲-۴ : تعریف توزیع احتمال شرطی ، و تعریف استقلال دو متغیر تصادفی (۷)

الف - pdf ، CDF شرطی

ب - استقلال دو متغیر تصادفی

۳ - آمار ریاضی (۹)

۳-۱ : کلیات

۳-۲ : همانندها

۳-۳ : چند نامساوی مفید

۳-۴ : تساوی دو متغیر تصادفی

الف - تساوی با احتمال در همه‌جا (e)

ب - تساوی با احتمال میانگین مربع (ms)

ج - تساوی در توزیع (dist)

۳-۵ : تابع مشخصه و تابع مولد احتمال

الف - تابع مشخصه (cf) یک متغیر تصادفی

ب - تابع مولد احتمال (pgf) یک متغیر تصادفی

ج - cf و pgf توأم دو متغیر تصادفی

۴ - آشنایی در بیشتر با متغیر تصادفی

۴-۱ : معرفی چند متغیر تصادفی گسسته مهم

۴-۲ : معرفی چند متغیر تصادفی پیوسته مهم

۴-۳ : مثال دو متغیر تصادفی توأماً نرمال (نرمال دو بعدی)

۴-۴ : [illegible]

۴-۵ : مقایسه‌های برآوردی

الف - تخمین با مقدار ثابت (بدون استفاده از X)

ب - تخمین خطی (به فرم $\hat{S}=a_1X+a_2$)

ج - بهترین تخمین

۵- بردار تصادفی

۵-۱ : مروری بر ماتریس و بردار و ذکر چند قرارداد

۵-۲ : توابع احتمال بردار تصادفی (CDF و pdf و cf)

۵-۳ : ممان‌های اول و دوم بردار تصادفی

۵-۴ : رابطه خطی بین اعضا بردار تصادفی و خواص C_X و R_X

الف - رابطه خطی بین اعضا بردار تصادفی

ب - خواص ماتریس کوواریانس C_X