بسمه تعالی

جزوه

تئوری الکترو مغناطیس

دانشگاه

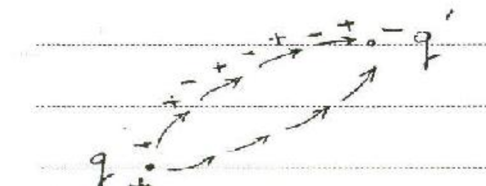
تهران

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تئوری الکترومغناطیس

* مقدمه

$\bar{E}$ و $\bar{B}$ ← معادلات ماکسول، بخشی از تئوری الکترومغناطیس است.



ε_0 $\cdot q'$

$q \cdot$

$$\bar{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

← ماکسول این حالت را با فرض وجود اتر در فضا توجیه کرد.

در این حالت، الکترون ها فوتون هایی از خود ساطع می‌کنند. با این تئوری نیرو ← نظریه QED ← مابین وارد کردن دو بار در خلأ را توجیه می‌کنند.

QED

معادلات ماکسول

در این درس فراتر از معادلات ماکسول نگاه می‌کنیم.

در واقع معادلات ماکسول، محدودیت های خودش را دارد.

به عبارتی معادلات ماکسول در حالت های کوانتومی و انرژی های پایین مشکل دارد. همچنین در رابطه با اندازه های کوچک نیز مشکل دارد.

* معادلات ماکسول ← با میدان های برداری سروکار داریم مانند $\bar{E}$

ما از طبیعت، یک دید احتمالی داریم، زیرا تمام پارامترهای موثر در یک متغیر را هیچ گاه نمی‌توانیم لحاظ کنیم. مثلاً پارامترهایی هستند که اصلاً ثابت نـ

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

عدد در آمدن را ندارند. $\overline{V}(x, y, z, t)$

توصیف دنیا، فقط با عدد، غیر ممکن است!

ماکسول توجیه وارد شدن نیرو در خلأ را با چرخ دنده کرد.

فارادی از تجربه خطوط میدان استفاده کرد.

توصیف هر چیز با $\overline{E}(x,y,z,t)$ و $\overline{B}(x,y,z,t)$ ← Macroscopic

۱ـ محدودیت دارد.
۲ـ یک سیر تکاملی داشته است.

متغیرها در معادلات ماکسول deterministic هستند ولی در تئوری QED

احتمالی هستند.

اهداف این درس

۱ـ تعریف مفاهیم اساسی حاکم بر میدان‌های الکترومغناطیس

۲ـ مسائل پراکندگی و توصیف در دستگاه‌های مختصات سه‌گانه

معادلات ماکسول وقتی که منبع وجود ندارد ← معادلات ماکسول وقتی که منبع وجود دارد.

← فرمولاسیون‌های تحلیلی

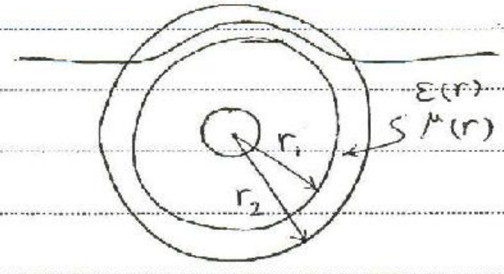
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳- پایه تئوری روش‌های عددی در الکترومغناطیس

۴- مسائل مرتبط با اپتیک متریکی، پلازمونیک و ... Cloaking

استتار کردن الکترومغناطیسی



پیش نیازهای این درس

۱- میدان و امواج ۲- آنتن ۱ ۳- مایکروویو

فصول درس

۱- مفاهیم بنیادی الکترومغناطیس ← ۱۰ جلسه

۲- توابع موج صفحه‌ای ← ۱۰ جلسه

۳- توابع موج استوانه‌ای ← ۶ جلسه

۴- توابع موج کروی ← ۴ جلسه

ساعت رفع اشکال ← سه‌شنبه‌ها - ساعت ۴ تا ۵

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مراجع

[1] R. F. Harrington, Time-Harmonic Electromagne
Fields, 1961, chapters 3 to 6

[2] R. E. Collin, Field Theory of Guided Waves, 19

[3] C. A. Balanis, Advanced Engineering
Electromagnetics, 1989, chapters 7 to 10

[4] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, 194

نمره

Homework	20 %
Midterm	20 %
Final	30 %
Project	30 %

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل اول : مفاهیم بنیادی در الکترومغناطیس

۱-۱) مقدمه

* معادلات ماکسول ← مفهوم هلمهولتز برای $\bar{E}$, $\bar{B}$

بنابراین احتیاج به ۴ معادله است.

$\bar{\mathcal{E}}(\underbrace{x, y, z}_{\text{مکان}}, t)$ $\qquad$ $\bar{\mathcal{E}}(\bar{r}, t) \in \mathbb{R}^3$ ← حالت کلی

حالت خاص: تغییرات زمانی هارمونیک

$$\bar{\mathcal{E}}(\bar{r};t) = Re\{\bar{E}(\bar{r})e^{j\omega t}\} \qquad \underbrace{\bar{E}(\bar{r})}_{\text{فازور}} \in \mathbb{C}^3$$

دوتایی
$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{\mathcal{E}}(\bar{r};t) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\bar{B}(\bar{r};t) \\ \nabla \cdot \bar{D}(\bar{r};t) = \rho(\bar{r};t) \qquad [C/m^3] \end{cases}$$

دوتایی
$$\begin{cases} \nabla \times \bar{H}(\bar{r};t) = \underbrace{\bar{J}(\bar{r};t)}_{\bar{J}_{impressed} + \bar{J}_{conduction}} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{D}(\bar{r};t) \\ \nabla \cdot \bar{B}(\bar{r};t) = 0 \end{cases}$$

* روابط اساسی Constitutive Relations

$$\bar{D} = \bar{f}_1(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{H}}) \qquad \bar{B} = \bar{f}_2(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{H}})$$

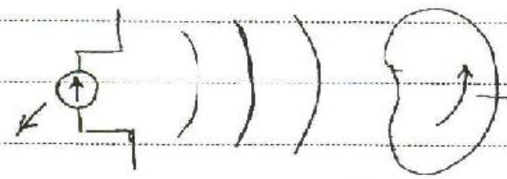
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در نقطه‌ای که خالی از هر ماده‌ای است ← $\bar{D}(\bar{r};t)=\varepsilon_0\,\bar{\mathcal{E}}(\bar{r};t)$

(در فضای خالی)

$\bar{B}(\bar{r};t)=\mu_0\,\bar{H}(\bar{r};t)$ $\qquad \bar{J}_c=0$



$\bar{J}_{conduction}$ (جریان‌های القایی)

$\bar{J}_{impressed}$ (منابع جریان)

روابط اساسی، روابطی هستند که ماده تحمیل می‌کند.

معادلات ماکسول، روابطی هستند که در هر صورت بین میدان‌ها برقرار است.

* روابط اساسی

$\bar{D}=\underline{\underline{D}}(\bar{\mathcal{E}},\bar{H})$

$\bar{B}=\underline{\underline{B}}(\bar{\mathcal{E}},\bar{H})$ $\longrightarrow$ اپراتور هستند

$\bar{J}_c=\underline{\underline{J_c}}(\bar{\mathcal{E}},\bar{H})$

یعنی $\bar{D}$ و $\bar{B}$ و $\bar{J}_c$ در زمان و مکان مشخص فقط به $\mathcal{E}$ و H در آن زمان و مکان مشخص بستگی ندارد.

محیط فرضی: محیط بدون پاشندگی (زمانی)

پاشندگی زمانی، تأخیری است بین تغییر علت و تغییر معلول

ولی اگر رابطه آنی بین تغییرات علت و معلول وجود داشته باشد،

محیط را بدون پاشندگی گویند.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

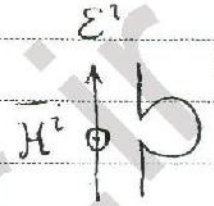
← در این حالت پاشندگی مکانی هم نداریم؟

$\bar{D}(\bar{r};t) = \bar{\bar{f}}(\bar{\mathcal{E}}, \bar{H}) \rightarrow$ تابع است.

اگر علاوه بر بدون پاشندگی بودن، خطی بودن را نیز فرض کنیم

$$\bar{D}(\bar{r};t) = \underline{\underline{\epsilon}}\, \bar{\mathcal{E}}(\bar{r};t) + \gamma_m \bar{H}(\bar{r};t)$$

عددی ثابت و حقیقی است



$$\bar{B}(\bar{r};t) = \mu \bar{H}(\bar{r};t) + \gamma_e \bar{\mathcal{E}}(\bar{r};t)$$

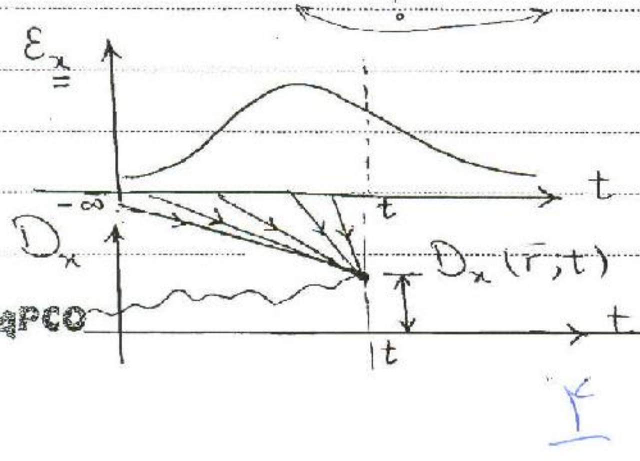
$$\bar{J}_c(\bar{r};t) = \sigma \bar{\mathcal{E}}(\bar{r},t) + \gamma_c \bar{H}(\bar{r},t)$$

روابط فوق در صورتی صادق است که در روابط کل میدان را در هر نقطه و در هر لحظه لحاظ کنیم (معادلات ماکسول هم اینچنین می باشند)

محیط های خطی رایج : ← محیط هایی که پاشندگی (زمانی) دارند.

مثلاً اگر $\bar{H}$ ردی $\bar{D}$ را در نظر بگیریم!

$$\mathcal{L}\{\bar{D}(\bar{r};t)\} \overset{?}{=} \bar{\mathcal{E}}(\bar{r};t)$$



PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

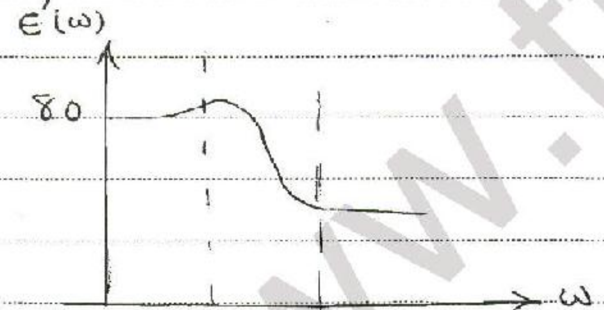
$\bar{D}(\bar{r};t) = h(t) * \bar{\mathcal{E}}(\bar{r};t)$ ⟵ برای محیط خطی ایزوتروپ و بدون پاشندگی مکانی

اگر: $\bar{D}(\bar{r};t) = Re\{\bar{D}(\bar{r},\omega)e^{j\omega t}\}$

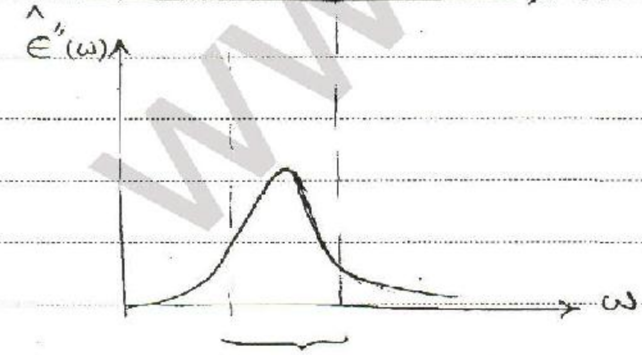
$\rightarrow \bar{D}(\bar{r},\omega) = \hat{\epsilon}(\omega)\,\bar{E}(\bar{r},\omega)$

complex permittivity $= \hat{\epsilon}(\omega) = \hat{\epsilon}'(\omega) - j\,\hat{\epsilon}''(\omega)$

$\hat{\epsilon}(\omega)$ تبدیل فوریه $h(t)$ است، بنابراین قسمت حقیقی آن زوج و قسمت موهومی آن فرد است. همچنین رابطه هیلبرت بین قسمت حقیقی و موهومی برقرار است.



تغییرات شدید $\hat{\epsilon}'(\omega)$ منجر به تلفات زیاد می‌شود.



آب در این فرکانس‌ها بیشترین تلفات را دارد.

مشابه مباحث فوق را برای تأثیر $\bar{H}$ روی $\bar{D}$ و همچنین در رابطه با روابط بین $\bar{B}$ و $\bar{\mathcal{H}}$ نیز خواهیم داشت.

PAPCO

محیط با پاشندگی فضایی — spatial dispersion

یعنی محیطی که $\bar{D}(\bar{r},t)$ تنها به $\bar{\mathcal{E}}(r,t)$ بستگی ندارد مانند مثال زیر:

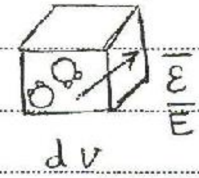
$$\bar{D}(\bar{r};t) = \epsilon\,\bar{\mathcal{E}}(\bar{r};t) + \bar{\nabla}\times\bar{\mathcal{E}}$$

در این درس با محیطهای خطی و با پاشندگی زمانی سروکار داریم.
همچنین محیطهای مورد بررسی بدون پاشندگی فضایی می‌باشند.

← بنابراین می‌توان معادلات ماکسول را در حوزه فرکانس بازنویسی کرد.

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \bar{\nabla}\times\bar{E} = -j\omega\bar{B} \\ \bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + j\omega\bar{D} \end{array}\right\} \rightarrow \text{شرایط مرزی مماسی} \\ \left.\begin{array}{l} \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{شرایط مرزی قائم} \end{cases}$$

میدان های ماکروسکوپیک از معادلات ماکسول خواهیم داشت
در واقع این میدان ها شامل جزئیات میکروسکوپی نمی‌باشند.



نکته ۱: میدان ها ماکروسکوپیک هستند. یعنی میانگین‌گیری بین میدان های میکروسکوپیک می‌باشد و باید میدان ها پیوسته باشند تا مشتقات آنها مفهوم داشته باشند ← در صورت تغییر محیط و پیوسته نبودن میدان ها مشکل به وجود می‌آید

نکته ۲: اگر از حوزه زمان به حوزه فرکانس برویم، دو تا معادله دیورژانس بدون استفاده می‌شوند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر میدان ها ناپیوستگی هایی داشته باشند که دیگر نتوان مشتقات آنها را

حساب کرد، در این صورت نمی توان از فرم نقطه ای معادلات ماکسول

استفاده کرد.

$$\oint_{\partial S} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$$

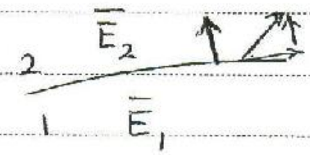
قانون آمپر ← فرم انتگرالی معادلات ماکسول کلی تر از فرم نقطه ای است

زیرا در صورت وجود ناپیوستگی باز هم صادق هستند.

$$\oint_{\partial S} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S \bar{J}(\bar{r};t) \cdot d\bar{s} + \frac{d}{dt}\int_S \bar{D}(\bar{r};t) \cdot d\bar{s}$$

* شرایط مرزی

$$\hat{n} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = 0$$



$\bar{E}_2$ مؤلفه مماسی : $-\hat{n} \times (\hat{n} \times \bar{E}_2)$

$$\hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{J}_s \quad [A/m]$$

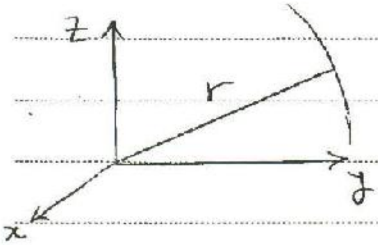
* اثبات روابط شرایط مرزی

PAPCO

* شرط مرزی تشعشع Sommerfeld

این شرط مرزی در ارتباط با نقاط خیلی دور است.

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r}\Psi + jK\Psi\right) = 0 \qquad K = \frac{\omega}{c}$$



$$\Psi \sim \frac{e^{-jKr}}{r}$$

شرط مرزی تشعشع، یک شرط فیزیکی است.

و برای محیط های متناهی هم باید چنین منابع و اشیاء محدود باشند.

۲-۱) دوگانی در معادلات ماکسول

قرار شد که با نازورها کار کنیم!

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E} = -j\omega\bar{B} \\ \bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + j\omega\bar{D} \end{cases}$$

حالت خاص ۱: معادلات بدون منبع $\bar{J}=0$ در محیط همگن خطی

(خطی که می تواند پاشنده هم باشد)

$\bar{B} = \hat{\mu}\bar{H} = \mu(j\omega)\bar{H} \qquad \mu \in \mathbb{C}$

$\bar{D} = \hat{\epsilon}\bar{E} = \epsilon(j\omega)\bar{E} \qquad \epsilon \in \mathbb{C}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\nabla}\times \bar{E}^a = -j\omega\mu^a \bar{H}^a \\ \bar{\nabla}\times \bar{H}^a = j\omega\epsilon^a \bar{E}^a \end{cases}$$

در مسئله a ← ϵ^a ، μ^a ، $\underbrace{(\bar{H}^a , \bar{E}^a)}_{\text{جواب ها}}$

نفوذپذیری مغناطیسی ← گذردهی الکتریکی

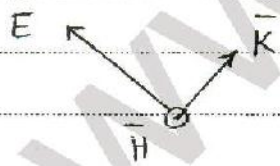
در مسئله b ← $\epsilon^b = \mu^a$, $\mu^b = \epsilon^a$, $\bar{E}^b = -\bar{H}^a$, $\bar{H}^b = \bar{E}^a$

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times \bar{E}^b = -j\omega\mu^b \bar{H}^b = -j\omega\epsilon^a \bar{H}^b \\ \bar{\nabla}\times \bar{H}^b = j\omega\epsilon^b \bar{E}^b = j\omega\mu^a \bar{E}^b \end{cases}$$

مثال: محیط بی کران $\mu^a = 1 \ H/m$, $\epsilon^a = 5 \ F/m$

یک جواب بدون منبع معادلات ماکسول است.

فرض کنید موج صفحه‌ای در یک امتداد مشخص منتشر می‌شود.



$$\bar{E}^a = \bar{U} e^{-j\bar{K}\cdot\bar{r}} \qquad K = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

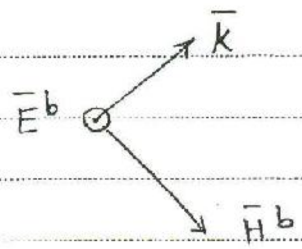
$$\bar{H}^a = \bar{V} e^{-j\bar{K}\cdot\bar{r}}$$

$$\bar{\nabla}\times \bar{E}^a = \bar{\nabla}\times \left(e^{-j\bar{K}\cdot\bar{r}} \bar{U}\right) = -j\bar{K} e^{-j\bar{K}\cdot\bar{r}} \times \bar{U} = -j\omega\mu^a \bar{V} e^{\ldots}$$

به اندازهٔ یک دامنه و یک جهت آزادی داریم. که این دامنه و این جهت بستگی به منبع دارد!

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\mu^b = 5\ H/m \qquad \epsilon^b = 1\ F/m$



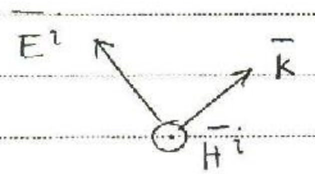
$\bar{H}^b = -\bar{E}^a = -\bar{U}\, e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$

$\bar{E}^b = \bar{H}^a = \bar{V}\, e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$

مثال ۲ :
مطلوب است تعیین
ساختار دوگان شکل مقابل

$\mu_1 = 10\ H/m \qquad \mu_2 = 5\ H/m$

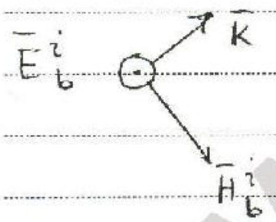
$\epsilon_1 = 4\ F/m \qquad \epsilon_2 = 1\ F/m$



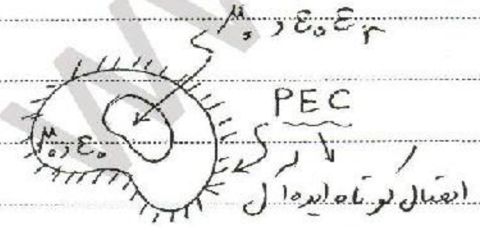
دوگان شکل فوق :

$\mu_1 = 4\ H/m \qquad \mu_2 = 1\ H/m$

$\epsilon_1 = 10\ F/m \qquad \epsilon_2 = 5\ F/m$

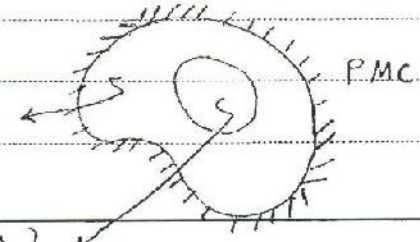


مثال ۳ : $(\bar{E}^a_{m,n} , \bar{H}^a_{m,n})$



دوگان این سیستم چیست ؟

مطلوب است دوگان این موجبر ← با اصطلاح PMC است
← مدار باز ایده آل



$\left.\begin{array}{l}\epsilon = \mu_0 \\ \mu = \epsilon_0\end{array}\right\}$

PAPCO

$\left.\begin{array}{l}\epsilon = \mu_0 \\ \mu = \epsilon_0\epsilon_r\end{array}\right\}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در کاملی دیگری به صورت $\epsilon E^a = \mu H^b$ $J^a = M^b$ $H^a = -E^b$

حالت خاص ۲ : معادلات در حضور منبع $\bar{J}$ در محیط همگن خطی

← در این حالت معادله $\bar{\nabla} \times \bar{E}$ یه چیزی کم دارد !

بنابراین منبع $\bar{M}$ را که هیچ تعبیر فیزیکی اش ندارد به معادله اضافه میکنیم.

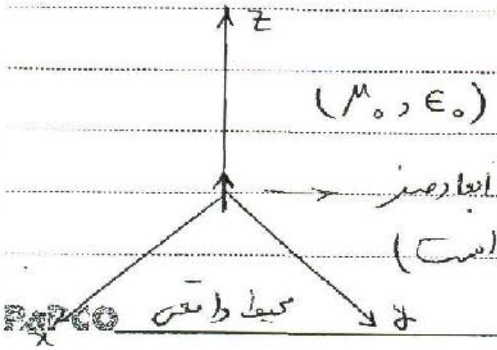
$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} - \bar{M} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H} = j\omega\epsilon \bar{E} + \bar{J} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E}^a = -j\omega\mu^a \bar{H}^a \\ \bar{\nabla} \times \bar{H}^a = j\omega\epsilon^a \bar{E}^a + \bar{J}^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E}^b = -j\omega\mu^b \bar{H}^b - \bar{M}^b \\ \bar{\nabla} \times \bar{H}^b = j\omega\epsilon^b \bar{E}^b \end{cases}$$

می‌خواهیم $\begin{cases} \bar{E}^b = -\bar{H}^a \\ \bar{H}^b = +\bar{E}^a \end{cases}$ $\longrightarrow$ بایستی $\begin{cases} \mu^b = \epsilon^a \\ \epsilon^b = \mu^a \\ \bar{M}^b = \bar{J}^a \end{cases}$

مثال ۱ :



منبع با ابعاد صفر (دیپل است) $\longrightarrow$ $\bar{J}$ $[A/m^2]$

ممان دیپل $I\bar{dl}$ $[A.m]$

$\bar{J}$ متناظر با $I\bar{dl}$ را به دست آورید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

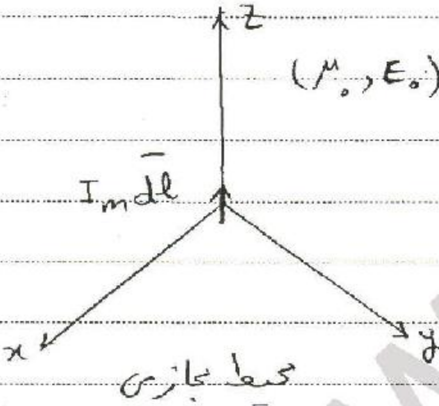
$$\bar{H} = \bar{\nabla} \times \bar{A} \qquad \bar{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{J}(\bar{r}')\, e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, dv'$$

پتانسیل تأخیری

$$\bar{A} = \frac{I\,d\bar{l}}{4\pi r}\, e^{-jk_0 r}$$

$$\bar{H} = \bar{\nabla} \times \bar{A} = \bar{\nabla} \times \left(\frac{I\,dl}{4\pi r}\, e^{-jk_0 r}\, \hat{z} \right)$$

$$= \left(-jk_0 - \frac{1}{r}\right) \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\, I\, \underbrace{\hat{r} \times \hat{z}}_{-\sin\theta\, \hat{\varphi}}$$



(μ_0, ϵ_0) E_φ

H_r $\quad$ Il $\quad$ Kl

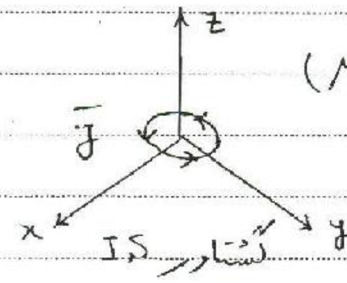
دوقطبی الکتریکی $\quad$ دوقطبی مغناطیسی

H_θ $\quad$ محیط با منبع الکتریکی $\quad$ محیط با منبع مغناطیسی

این دو مسئله دوگان هم می باشند.

$I_m d\bar{l}$ جریان مجازی مشکوک است که اصلاً وجود ندارد. ولی اگر وجود می‌داشت میدان های E_φ و H_r و H_θ را تولید می کرد.

یک راه تحقق دادن جریان مجازی $I_m d\bar{l}$ ، حلقه جریان است.

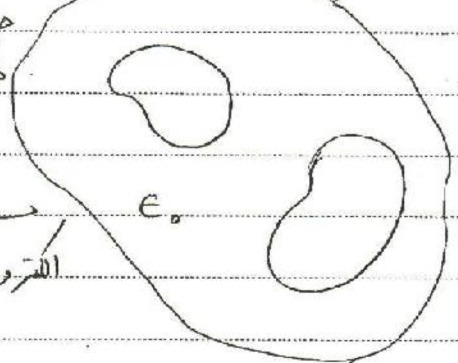


(μ_0, ϵ_0)

ممان دیپل $= I\,d\bar{s}$

دوقطبی مغناطیسی Kl تعبیر فیزیکی ندارد ولی تحقق فیزیکی دارد ← حلقه کوچک جریان الکتریکی با گشتاور IS

۳-۱) قضیه یکتایی



(μ_0, ϵ_0)

$I\,\overline{dl}$ ↑

مسئله الکترودینامیک

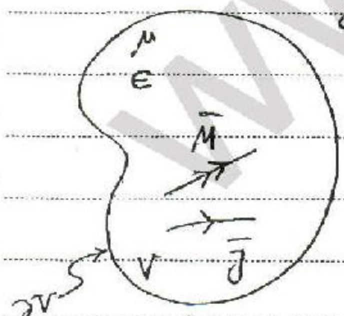
در مسائل الکترودینامیک، اگر اتلاف را در نظر نگیریم، پاسخ معادلات ماکسول یکتا نمی‌باشد.

$$\bar{A} = \frac{I\,dl}{4\pi r}\, e^{\pm j k_0 r} \qquad \begin{cases} \epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \\ \mu = \mu' - j\mu'' \end{cases}$$

اگر ϵ'' و μ'' صفر باشند، جواب منحصر به فرد برای معادلات ماکسول به دست نمی‌آید.

البته با استفاده از شرط مرزی زومرفلد نیز می‌توان جواب منحصر به فرد را به دست آورد.

محیط بدون تلفات نیست. یعنی از بین ϵ'' و μ'' حداقل یکی غیرصفر است.



$(\bar{E}^a, \bar{H}^a)$

$(\bar{E}^b, \bar{H}^b)$

فرض $\begin{cases} \mu = \mu' - j\mu'' \\ \epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \end{cases}$

شرایط چگونه باشد که میدان داخل حجم V یکتا باشد؟

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E}^{a,b} = -j\omega\mu \bar{H}^{a,b} - \bar{M} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H}^{a,b} = j\omega\epsilon \bar{E}^{a,b} + \bar{J} \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} \delta \bar{E} = \bar{E}^a - \bar{E}^b \\ \delta \bar{H} = \bar{H}^a - \bar{H}^b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times (\delta \bar{E}) = -j\omega\mu(\delta \bar{H}) \\ \bar{\nabla} \times (\delta \bar{H}) = j\omega\epsilon(\delta \bar{E}) \end{cases}$$

چه شرایطی باید روی ∂V قرار دهیم که جواب یکتا به دست آید؟

به جمله هایی مانند $|\delta \bar{E}|^2 = \delta \bar{E} . \delta \bar{E}$ احتیاج داریم.

$$\bar{\nabla} . (\delta \bar{E} \times \delta \bar{H}^*) = \delta \bar{H}^* . \underbrace{(\bar{\nabla} \times \delta \bar{E})}_{-j\omega\mu(\delta \bar{H})} - \delta \bar{E} . \underbrace{(\bar{\nabla} \times \delta \bar{H}^*)}_{-j\omega\epsilon^*(\delta \bar{E}^*)}$$

از دو طرف رابطه فوق روی حجم V انتگرال می‌گیریم:

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} (\delta \bar{E} \times \delta \bar{H}^*) . \underbrace{\bar{ds}}_{\hat{n}\, ds} = -j\omega\left(\int_V \mu |\delta \bar{H}|^2 dv - \int_V \epsilon^* |\delta \bar{E}|^2 dv \right)$$

معمولاً برای آنکه اطلاعات درون حجم و اطلاعات روی سطح را به هم مرتبط کنیم، از ایده فوق استفاده می‌کنیم.

با فرض آنکه بتوان روی ∂V، انتگرال سمت چپ را صفر کرد، بنابراین باید:

$$\int_V \mu |\delta \bar{H}|^2 dv - \int_V \epsilon^* |\delta \bar{E}|^2 dv = 0$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_V \mu' |\delta \bar{H}|^2 dV - \int_V \epsilon' |\delta \bar{E}|^2 dV = 0 & (1) \\ \int_V \underbrace{\mu''}_{+} |\delta \bar{H}|^2 dV + \int_V \underbrace{\epsilon''}_{+} |\delta \bar{E}|^2 dV = 0 & (2) \end{cases}$$

یک حالت خاص: محیط همگن باشد، یعنی μ و ϵ تابع r نباشند.
بنابراین μ' و ϵ' و μ'' و ϵ'' از زیر انتگرال بیرون می‌آیند.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mu' & -\epsilon' \\ \mu'' & \epsilon'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_V |\delta \bar{H}|^2 dV \\ \int_V |\delta \bar{E}|^2 dV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با شرط: $\mu' \epsilon'' + \epsilon' \mu'' \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \int_V |\delta \bar{H}|^2 dV = 0 \\ \int_V |\delta \bar{E}|^2 dV = 0 \end{cases}$

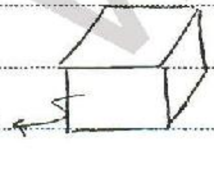
μ'' و ϵ'' نشان دهندهٔ اتلاف هستند و رابطهٔ هیلبرت بین قسمتهای حقیقی و موهومی μ و ϵ برقرار است.

بنابراین جواب‌ها یکتا خواهد بود.

در حالت غیر همگن، از آنجایی که $\mu'' > 0$ و $\epsilon'' > 0$ است، بنابراین

از رابطهٔ (۲) یکتایی جواب‌ها را می‌توان نتیجه گرفت.

ولی در حالت بی اتلاف، جواب‌ها یکتا نمی‌باشد.



PEC
بدون تلف

$$\begin{cases} \hat{n} \times \bar{E}_1 = 0 \\ \hat{n} \times \bar{E}_2 = 0 \end{cases}$$

PaPCO

$$\oint_{\partial V} (\delta \bar{E} \times \delta \bar{H}^*) \cdot \underbrace{d\bar{s}}_{\hat{n}\,ds} = \oint_{\partial V} \hat{n} \cdot (\delta \bar{E} \times \delta \bar{H}^*)\, ds = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \delta \bar{H}^* \cdot (\hat{n} \times \delta \bar{E}) \Big|_{r\in\partial V} ds = 0 \qquad \begin{cases} \hat{n}\times \bar{E}_1 = \bar{T} & r\in\partial V \\ \hat{n}\times \bar{E}_2 = \bar{T} & r\in\partial V \end{cases}$$

$$\oint_{\partial V} \delta \bar{E} \cdot (\delta \bar{H}^* \times \hat{n})\, ds = 0 \qquad \longrightarrow \hat{n}\times \delta\bar{E} = 0$$

$$\partial V = S_1 \cup S_2 \qquad \begin{cases} \hat{n}\times \bar{E} = \bar{T} \Big|_{r\in S_1} \\ \hat{n}\times \bar{H} = \bar{G} \Big|_{r\in S_2} \end{cases}$$

بنابراین اگر حجم V ، محیط با اتلاف باشد و شرایط مرزی (مولفه های مماسی

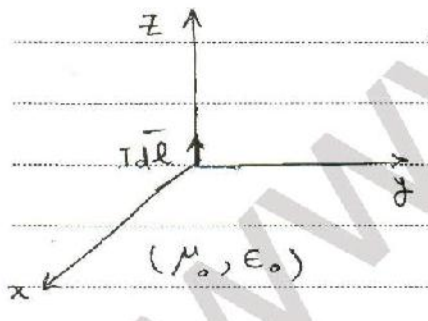
$\bar{E}$ یا $\bar{H}$) روی ∂V داده شده باشد، آنگاه میدان ها داخل حجم V

یکتا هستند. به عبارتی پاسخ معادلات ماکسول با منابع $\bar{M}$ و $\bar{J}$ یکتا است.

مثال: محیط همگن است و فضا نامتناهی است.

میدان را بدست آورید.

این مسئله، مسئله شرایط مرزی نیست



$$\bar{A} = \int \frac{\bar{J}(\bar{r}')\, e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi |\bar{r}-\bar{r}'|}\, dv'$$

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{\nabla}\times \bar{A} \\ \bar{E} = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0} \bar{\nabla}\times \bar{H} \end{cases} \qquad k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

$$\bar{A} = \frac{I d\bar{l}}{4\pi r} e^{-jk_0 r}$$

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times \bar{E} = -j\omega\mu_0 \bar{H} \\ \bar{\nabla}\times \bar{H} = j\omega\epsilon_0 \bar{E} + \bar{J} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{H}_1 = \frac{I}{4\pi r}\left(jk_0 + \frac{1}{r}\right) e^{-jk_0 r} \sin\theta\, \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \bar{H}_{ff_1} = \frac{jk_0 I}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \sin\theta\, \hat{\varphi}$$

اگر در رابطهٔ $\bar{A}$ بجای $e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}$ قرار دهیم $e^{+jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}$ جواب های

دیگری به دست می آوریم که در معادلات ماکسول هم صدق می کنند.

$$\Rightarrow \bar{H}_{ff_2} = \frac{-jk_0 I}{4\pi r} e^{+jk_0 r} \sin\theta\, \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \delta\bar{H} = \bar{H}_{ff_2} - \bar{H}_{ff_1} = \hat{\varphi}\frac{k_0 I}{2\pi}\sin\theta\, \frac{\sin(k_0 r)}{r}$$

در دایره‌ای به شعاع $r=a$ در بی نهایت، به طوری که $k_0 a = m\pi$ باشد

در این صورت $\delta\bar{H} = 0$ است.

مشاهده می شود با وجود آنکه نقطی پیدا شده روی آن نقطه $\delta\bar{H}=0$ است

ولی جوابها یکتا نمی باشد. علت این مشکل آن است که محیط را

بدون اتلاف در نظر گرفتیم و نقض شرط $\oint_{\partial V} (\delta\bar{E}\times\delta\bar{H}^*)\cdot d\bar{s} = 0$

را ارضا کردیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اما اگر محیط دارای اتلاف باشد، برای آنکه جواب‌ها یکتا باشند، به جای شرط مرزی که روی ∂V قرار می‌دادیم، در این حالت (فضای نامتناهی) یا از شرط زومرفلد استفاده می‌کنیم و یا از شرط زیر:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_R (\bar{E}\times\bar{H}^*)\cdot d\bar{s} = 0$$

* حل مسأله در فضای نامتناهی

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \\ \bar{\nabla}\times\bar{H} = j\omega\epsilon\bar{E} + \bar{J} \end{cases}$$

محاسبهٔ $\bar{A}$ ← دو تا جواب به دست می‌دهد.

$$\bar{A} = \int_V \frac{\bar{J}(\bar{r}')\, e^{\pm jk|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|}\, dV'$$

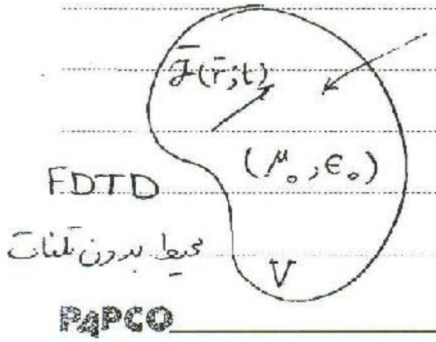
در واقع با وجود تلف، باز هم دو تا جواب داریم.

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{(\mu'-j\mu'')(\epsilon'-j\epsilon'')}$$

از بین این دو جواب، جوابی را انتخاب می‌کنیم که شرط مرزی زیر را در بی‌نهایت ارضا کند.

$$\lim_{R\to\infty} \oint_R (\bar{E}\times\bar{H}^*)\cdot d\bar{s} = 0$$

تمرین سری سوم:



$\bar{\mathcal{E}}(\bar{r};t)$, $\bar{H}(\bar{r};t)$ مطلوب

چه شرایطی را اعمال کنیم (چه شرط اولیه و چه شرط مرزی‌ای)

$\bar{\mathcal{J}}(\bar{r};t)$ معلوم

تا جواب یکتا داشته باشیم.

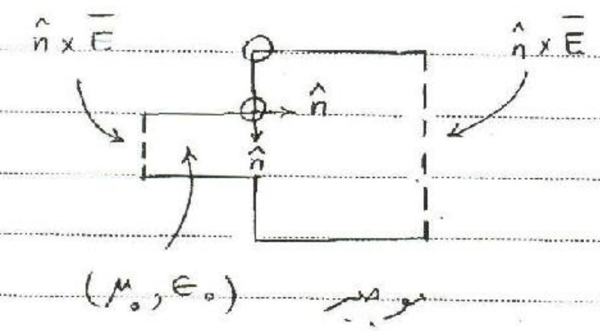
مطلوب است یک شرط اولیه و یا یک شرط مرزی که برای یکتایی جواب کفایت کند.

PAPCO

روابط بایستی در حوزهٔ زمان نوشته شود.

Subject:
Year. Month. Date.

تصادیر در الکترودینامیک ← چرا؟

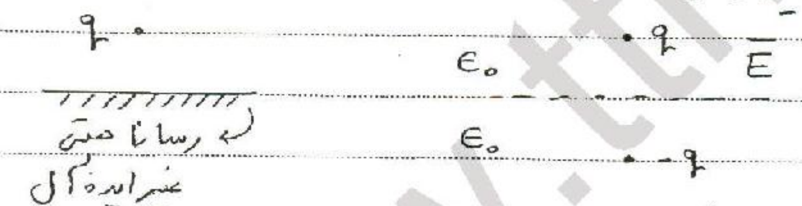


در حالت زیر، با وجود در نظر گرفتن اتلاف و اعمال شرایط مرزی $\hat{n}\times\bar{E}$ در دو دهانه، باز هم میدان داخل موجبر یگانه نمی‌باشد.

علت وجود لبه‌ها می‌باشد زیرا این لبه‌ها باعث می‌شود که در قسمت‌هایی $\hat{n}$ قابل تعریف نباشد ← برای یکتایی جواب‌ها، Edge Condition نیاز است.

۴-۱) تصویر تصاویر (Image)

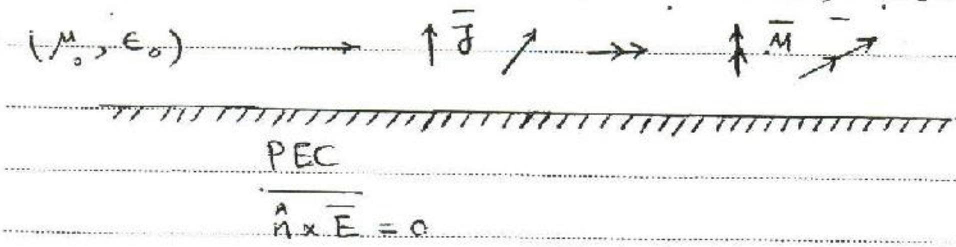
— در الکترواستاتیک



* تصویر تصاویر در الکترودینامیک:

۱- فقط برای سطوح مسطح و صفحات که با هم زاویه خاصی می‌سازند به کار می‌رود.

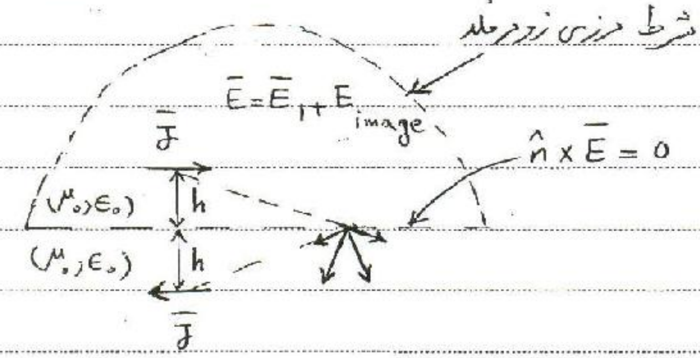
۲- سطح حتماً باید PEC باشد.



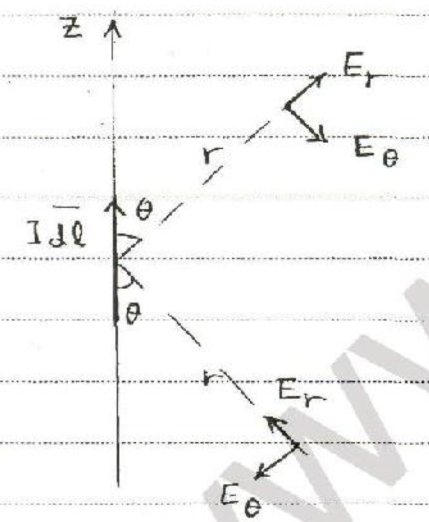
PEC $\hat{n} \times \bar{E} = 0$ $\hat{n} \times \bar{H} = 0$ PMC

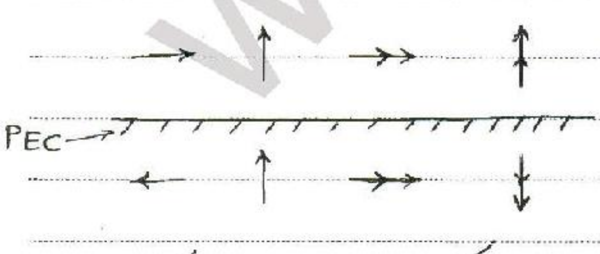
شرط مرزی برقرار شد

جواب در محیط بالایی باید یکتا باشد.



h و r که دو دیدی از نظر مقدار ندارند.

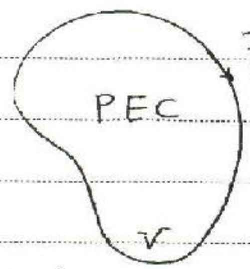




اگر $\bar{J} \rightarrow$ به PEC بچسبد، دیگر تشعشع نمی‌کند. در اصطلاح می‌گویند اتصال کوتاه شده است ← جریان اعمالی کنار هادی کامل بسبب اتصال کوتاه می‌شود.

$J_{impressed}$

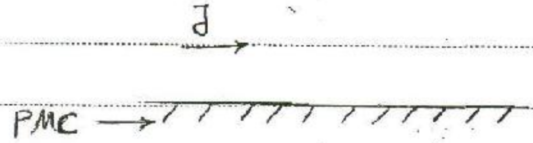
Subject:
Year. Month. Date. ( )



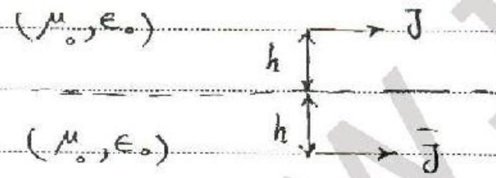
$\bar{J} \longrightarrow \bar{E} = 0$

$\bar{J}$ اتصال کوتاه است ← تشعشع نمی کند.

در تقسیم تصاویر، منبع تصویر مسئول ایجاد کردن میدان ناشی از جریان القایی روی PEC می باشد.

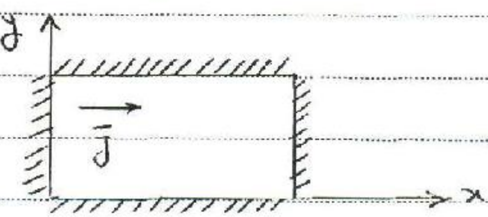


High Z
Magnetic Mirror



$\hat{n} \times \bar{H} = 0$

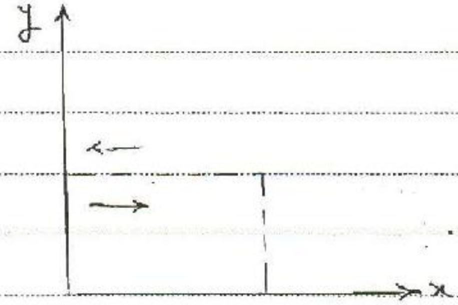
بحث فوق را برای صفحات دو سطح متقاطع با زاویه $\frac{\pi}{N}$ نیز می توان به کار برد.



در این حالت هم می توان از تقسیم تصاویر استفاده کرد، ولی تعداد تصاویر بی نهایت می شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یکتایی جواب در داخل حجم V درصورتی که اتلاف نداریم؟
طبق یکتایی ثابت کنید که میدان داخل حجم V صفر می‌شود.



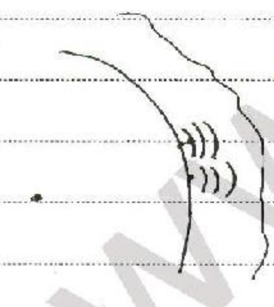
با بستن شرط مرزی $\hat{n}\times\bar{E}=0$ را
روی هر چهارتا دیوارهٔ موجبر
برقرار کرد
→ تعداد تشدیدها بی‌نهایت می‌شود.

تشدیدهای دورتر، میدان‌های ضعیف‌تری
ایجاد می‌کنند بنابراین در حل این مسئله با
استفاده از تقسیم تشدیدها، از یک جایی به
بعد، از آن‌ها صرف نظر می‌شود.

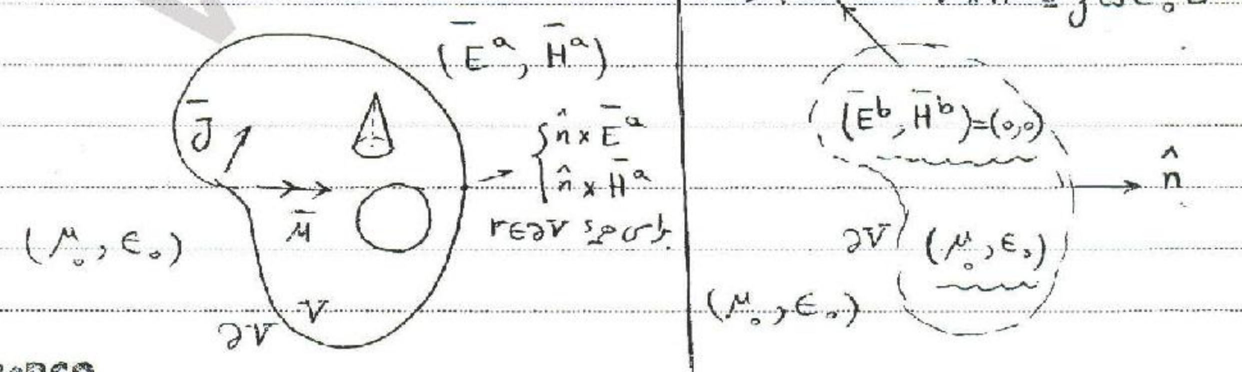
۵-۱) اصل هم ارزی (Principle of Equivalence)

دنبال میدان‌های هم ارز می‌گردیم. Schelkunoff, 1936

اگر اطلاعات روی مرز را داشته باشیم → Huggens Principle
به داخل مرز کاری نداریم



$\nabla\times\bar{E}^b=-j\omega\mu_0\bar{H}^b$ درنقطه‌ها درون V
$\nabla\times\bar{H}^b=j\omega\epsilon_0\bar{E}^b$ دستان باز است



مسئله اول → دنبال هم ارز این مسئله هستیم. مسئله دوم

Subject: چرا در قضیه هم‌ارزی هم احتیاج به داشتن $\bar{E}$ روی مرز است هم $\bar{H}$
Year. Month. Date. ( )

شرط مرزی در مرحله برای هر دو مسئله یکسان است. بنابراین اگر شرط مرزی

روی ∂V برای هر دو مسئله یکسان باشد ($\hat{n}\times\bar{E}$, $\hat{n}\times\bar{H}$) در این

صورت جواب میدان‌ها در هر دو مسئله برای ناحیه خارج V یکسان است

(براساس قضیه یکتایی)

← در مسئله دوم روی ∂V، جریان‌های سطحی قرار می‌دهیم.

← در مسئله دوم ناپیوستگی داریم.

$$\bar{J}_S = \hat{n}\times(\bar{H}^a - 0) = \hat{n}\times\bar{H}^a$$

$$\bar{M}_S = (\bar{E}^a - 0)\times\hat{n} = -\hat{n}\times\bar{E}^a$$

حال با قرار دادن $\bar{J}_S$ و $\bar{M}_S$ روی ∂V در مسئله دوم، میدان‌ها در حجم فرضی

V صفر و در خارج حجم فرضی V برابر میدان‌ها در خارج حجم V در مسئله

اول است.

می‌توانستیم حجم V را PEC در نظر بگیریم. در این صورت منابع $\bar{J}_S$ و $\bar{M}_S$

روی ∂V قرار می‌گیرند، ولی منبع $\bar{J}_S$ روی PEC همان طور که گفته شد،

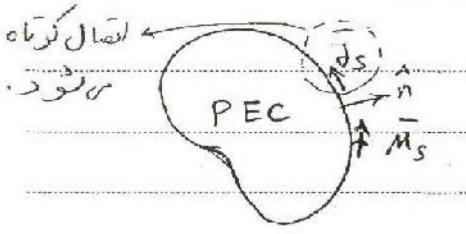
اتصال کوتاه است ← یعنی این است که فقط $\hat{n}\times\bar{E}^a$ را برای هر $r\in\partial V$

اندازه‌گیری کردیم.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چرا در قضیه هم ارزی هم احتیاج به داشتن $\bar{E}$ روی ...

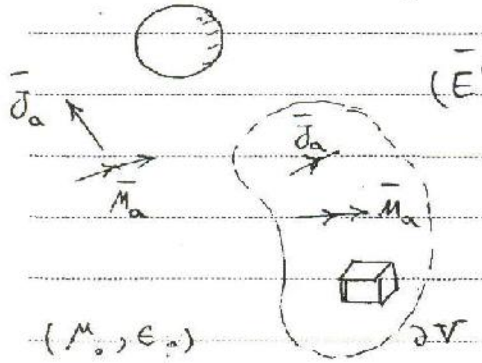


شرط مرزی روی مرز برای هر دو مسئله با

روی ∂V برای هر دو مسئله یکسان باشد

صورت جواب میدان ها در هر دو مسئله یکسان می شود!

(براساس قضیه یکتایی)

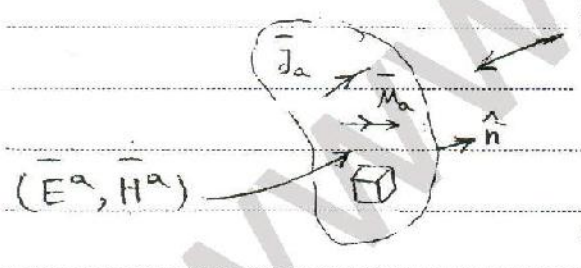


← در مسئله دوم روی ∂V ، جریان

← در مسئله دوم ناپیوستگی داریم

$= \hat{n} \times \bar{H}^a$

$= -\hat{n} \times \bar{E}^a$



حال با قرار دادن $\bar{J}_s$ و $\bar{M}_s$ روی ∂V

V صفر و در خارج حجم فرضی V برابر

در داخل ، در آن نقطه از ∂V ... اول است.

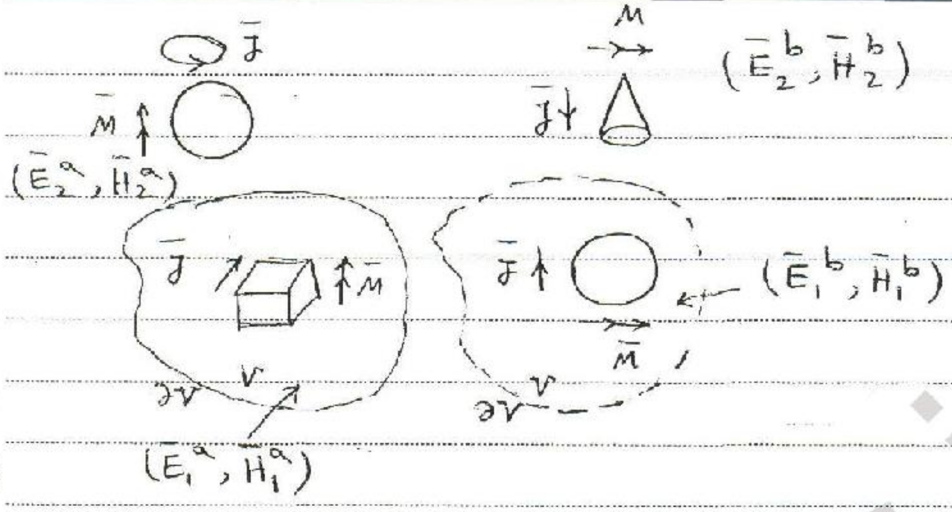
می توانستیم حجم V را در مقابل PEC ... ان های $(\bar{E}^b, \bar{H}^b)$ را خواهیم داشت

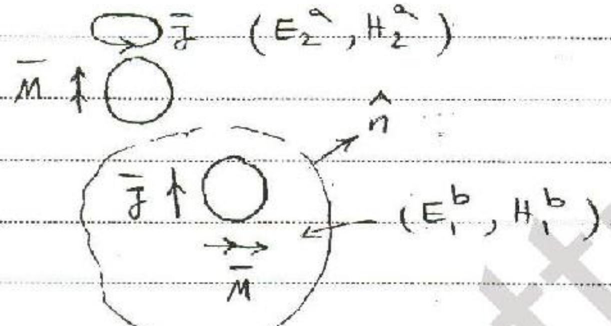
روی ∂V قرار می گیرند، ولی منبع $\bar{J}_s$ روی ... بیرون را از مسئله (a) در مقابل گرفتیم

اتصال کوتاه است ← مانند این است که ... دهیم

اندازه گیری کردیم.

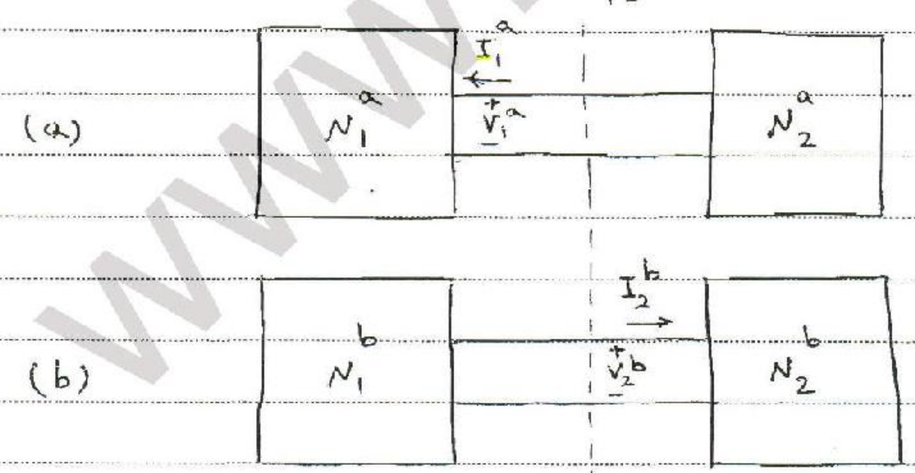
Subject:
Year. Month. Date. ( )





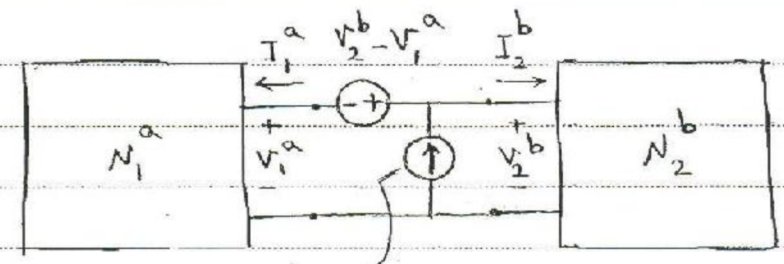
$$\begin{cases} \bar J_S = \hat n \times (\bar H_2^a - \bar H_1^b) \\ \bar M_S = (\bar E_2^a - \bar E_1^b) \times \hat n \end{cases}$$

اصل هم ارزی را در مدار نیز داریم :



هر یک از شبکه‌های فوق (N_1^a و N_2^a و N_1^b و N_2^b) می‌توانند شامل منابع ولتاژ یا جریان ، سلف ، خازن و مقاومت باشند و با توپولوژی‌های مختلف !

Subject:
Year. Month. Date. ( )



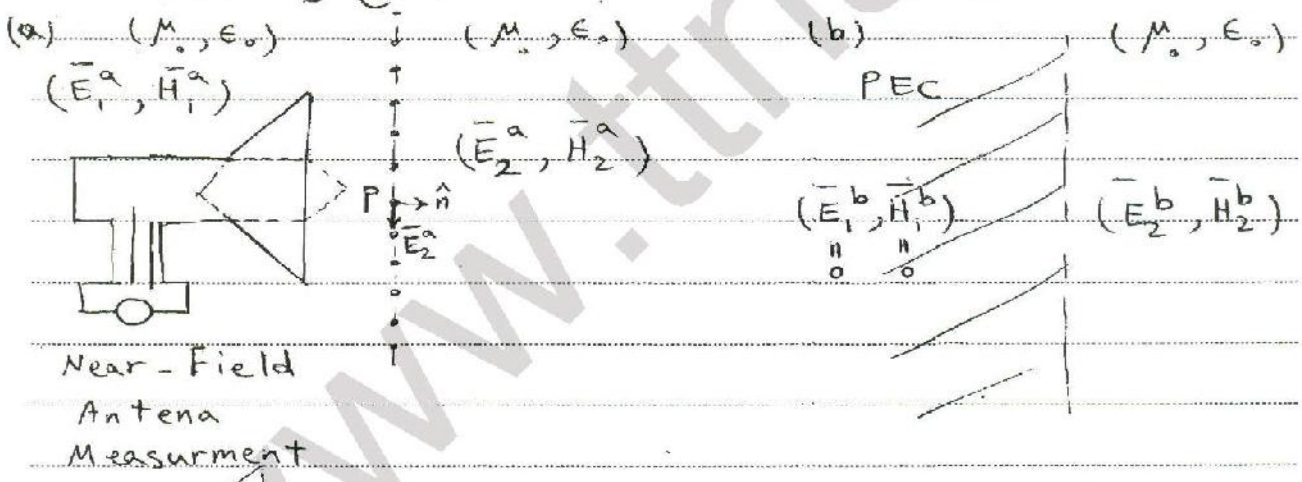
$I_1^a + I_2^b$

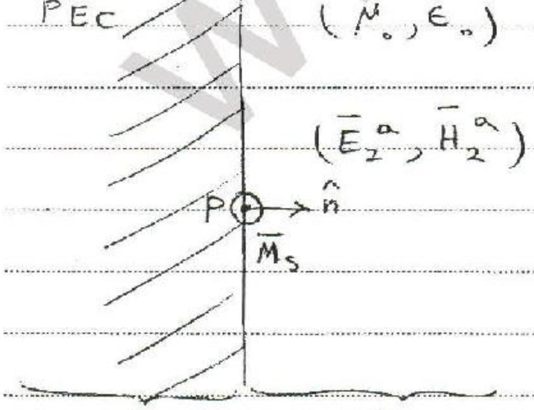
$I_2^b - I_2^a$

در حالت خاص :

۱ـ N_1^a اتصال کوتاه باشد ← $V_1^a = 0$ ← فقط به منبع ولتاژ نیاز است.

۲ـ N_1^a مدار باز باشد ← $I_1^a = 0$ ← فقط به منبع جریان نیاز است.





از شکل (b)   از شکل (a)

در نقطه P :

$$\begin{cases} \bar{J}_s = \hat{n} \times (\bar{H}_2^a - 0) \\ \bar{M}_s = (\bar{E}_2^a - 0) \times \hat{n} = \bar{E}_2^a \times \hat{n} \end{cases}$$

$\bar{J}_s$ حاصل با PEC اتصال کوتاه می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال از قضیه تصاویر استفاده کرده و PEC را حذف می‌کنیم.

(μ_0, ϵ_0) | (μ_0, ϵ_0)

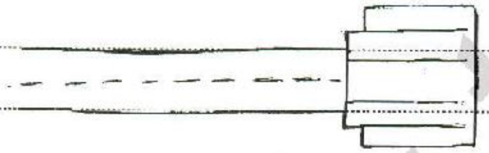
بنابراین فقط $\bar{E}_2^a$ را ثبت می‌کنیم.

$$\odot \quad \bar{M}_s = 2\,\bar{E}_2^a \times \hat{n}$$

البته مشکل این است که $\bar{E}_2^a$ فازور است و بایستی هم اندازه و هم فاز آن را ثبت کرد.

$$\begin{cases} \bar{F} = \displaystyle\int \frac{\bar{M}_s(\bar{r}')\, e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|}\, ds' \\ \bar{E} = -\bar{\nabla}\times\bar{F} \end{cases}$$

مثال:

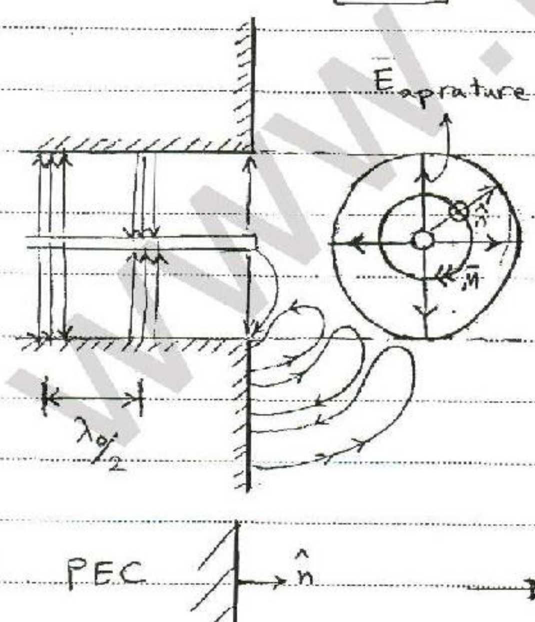


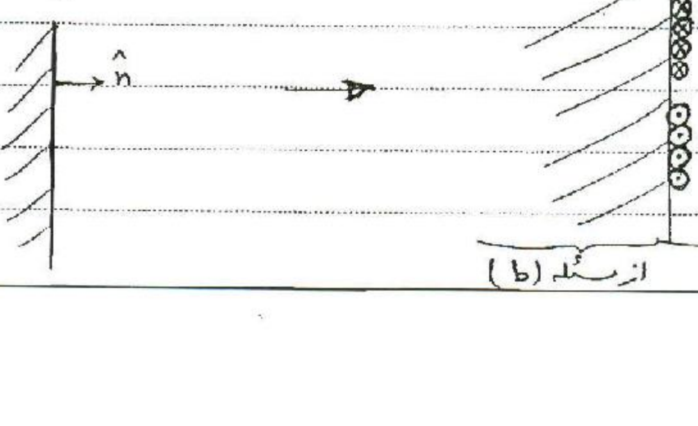
ساده سازی می‌کنیم:

با فرض اینکه قطر کابل نسبت به طول موج کوچک باشد.

→ موج تشعشع شده تقریباً فقط مود TEM است.

(a)

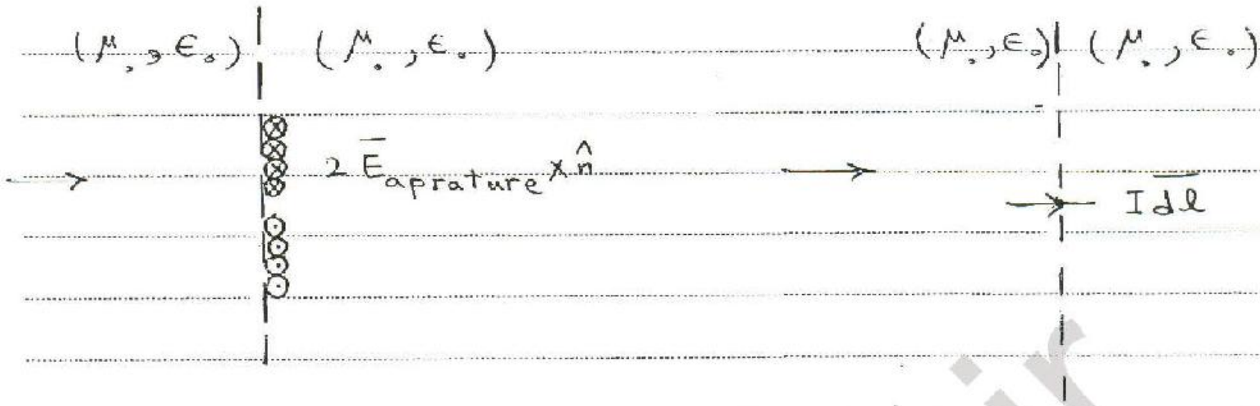




از شکل (b)   از شکل (a)

Subject:

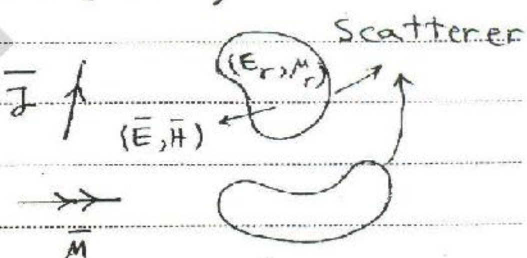
Year. Month. Date. ( )



۶-۱) قضیه القاء (Induction Theorem)

مسئله پراکندگی:
E^i: میدان تابشی اولیه
E^s: میدان ناشی از پراکندگی امواج توسط اجسام در درون مسئله

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E} = -j\omega\mu_0\mu_r \bar{H} - \bar{M} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r \bar{E} + \bar{J} \end{cases}$$



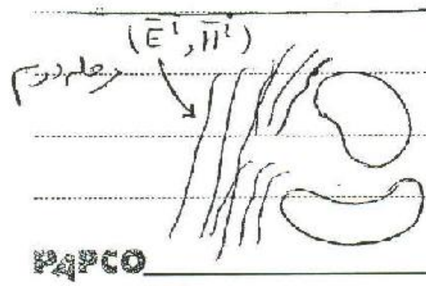
مسئله (a)

$$\bar{E} = \bar{E}^i + \bar{E}^s$$

در غیاب اجسام پراکنده کننده:

مرحله اول
$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E}^i = -j\omega\mu_0 \bar{H}^i - \bar{M} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H}^i = j\omega\epsilon_0 \bar{E}^i + \bar{J} \end{cases}$$

$\bar{J}$ $\quad (\mu_0, \epsilon_0)$ $\quad (\bar{E}^i, \bar{H}^i)$ $\quad \bar{M}$



$(\bar{E}^s, \bar{H}^s)$

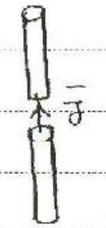
در مرحله دوم، $(\bar{E}^i, \bar{H}^i)$ به عنوان ورودی هستند و $(\bar{E}^s, \bar{H}^s)$ پاسخ اجسام به این ورودی ها می باشد

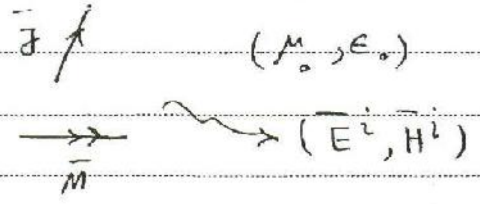
PAPCO

این رابطه برای هر نقطه ← $\bar{H} = \bar{H}^i + \bar{H}^s$

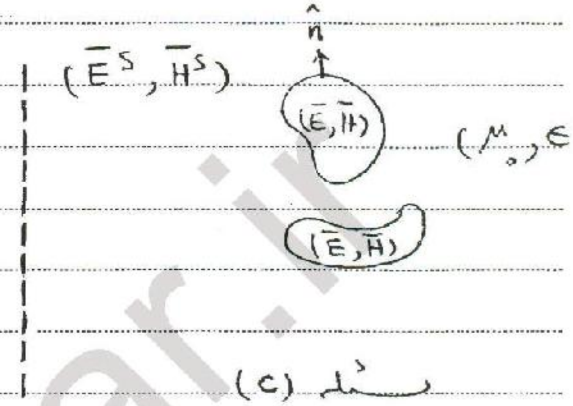
صادق است $H^s(r_0^+) - H(r_0^-) \overset{?}{=} H^i(r_0)$

مثال از مسئله پراکندگی ← آنتن





مسئله (b)



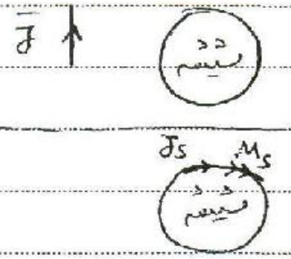
مسئله (c)

$$\begin{cases} \bar{J}_s = \hat{n} \times (\bar{H}^s - \bar{H}) \\ \bar{M}_s = (\bar{E}^s - \bar{E}) \times \hat{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{H}^i + \bar{H}^s \\ \bar{E} = \bar{E}^i + \bar{E}^s \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \bar{J}_s = -\hat{n} \times \bar{H}^i \\ \bar{M}_s = -\bar{E}^i \times \hat{n} \end{cases}$$

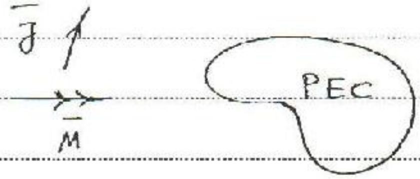
اجسام پراکنده‌کننده حفره هستند. ولی می‌توانند پراکندگی داشته باشند.

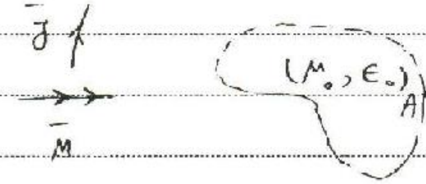
تقسیم القا به نوعی تقسیم هم ارزی است که محیط خارج از تفاضل مسائل a و b در نظر گرفته شده است.
و محیط داخل از مسئله a است.
← مسئله c حاصل شده است.



Subject:
Year. Month. Date. ( )

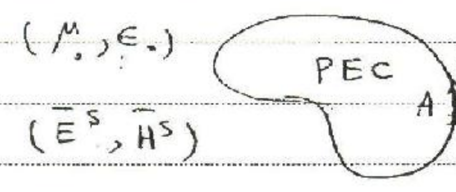
حالت خاص: جسم پراکنده‌کننده PEC باشد.





$\bar H^i, \bar E^i$ را روی مرز PEC حساب می‌کنیم.

$$A \begin{cases} \bar J_s = \hat n \times \bar H^i \\ \bar M_s = \bar E^i \times \hat n \end{cases}$$



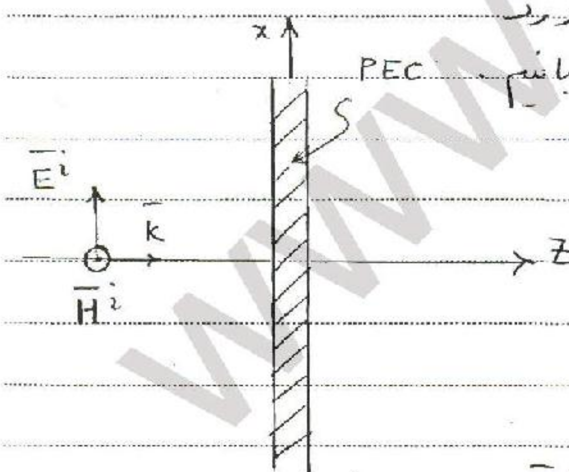
$\bar J_s$ مماس با PEC اتصال کوتاه است.

← فقط $\bar M_s$ را خواهیم داشت.

مثال: صفحه از جنس PEC بی‌نهایت بزرگ

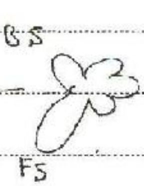
موج صفحه‌ای (که جهت مشخص دارد) به صفحه می‌تابانیم.

مطلوب است: back scatter

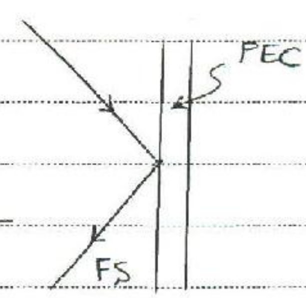


میدانی که در راستای تابش بر می‌گردد.

" " " " $\hat z$ منتشر می‌شود.



پترن $\bar E^s$ در ناحیهٔ دور



← در این حالت اگر PEC بی‌نهایت باشد، B.S نداریم ولی اگر PEC محدود باشد، B.S خواهیم داشت.

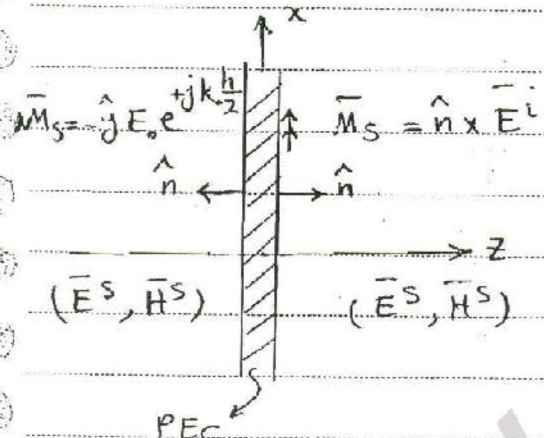
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در غیاب صفحه PEC ، $\bar{E}^i$, $\bar{H}^i$ را داریم که در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E}^i = -j\omega\mu_0\bar{H}^i \\ \bar{\nabla}\times\bar{H}^i = j\omega\epsilon_0\bar{E}^i \end{cases} \longrightarrow \text{روابط در کل فضا برقرار است}$$

$$\bar{E}^i = \hat{x}E_0 e^{-jk_0 z} \qquad k_0=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \longrightarrow \bar{H}^i = \hat{y}\frac{E_0}{\eta_0}e^{-jk_0 z}$$



$$\bar{M}_s = \hat{n}\times\bar{E}^i = \hat{z}\times\hat{x}E_0 e^{-jk_0\frac{h}{2}} = \hat{y}E_0 e^{-jk_0\frac{h}{2}}$$

$(\bar{E}^s,\bar{H}^s)$ در سمت راست PEC باید به گونه‌ای به دست آید که مجموع $(\bar{E}^s,\bar{H}^s)$ و $(\bar{E}^i,\bar{H}^i)$ در سمت راست PEC صفر شود.

حال اگر PEC را محدود در نظر بگیریم میدان ها را تقریبی می‌توان حساب کرد.

$$\text{Radar Cross Sction} = RCS = \lim_{r\to\infty}\frac{r^2|S^s|}{r^2|S^i|}$$

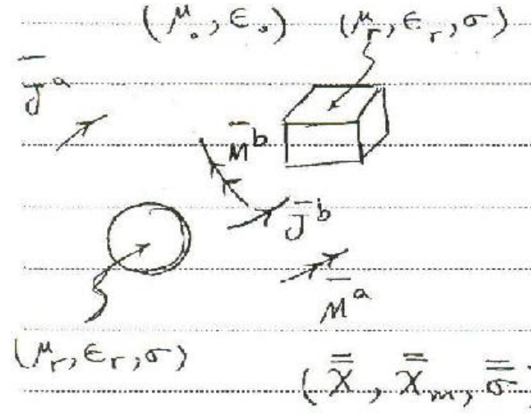
هر منبع محدودی در دور ، کروی است.

رابطه RCS برای نواحی دور است. در نواحی دور $\bar{H}^s$, $\bar{E}^s$ بر هم عمود بوده و $S^s \propto \frac{1}{r^2}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱-۷) قضیه تقابل (Reciprocity)



میدان‌ها در حالتی که منابع $\bar{J}^a$ و $\bar{M}^a$ را داریم → $(\bar{E}^a, \bar{H}^a)$

میدان‌ها در حالتی که منابع $\bar{J}^b$ و $\bar{M}^b$ را داریم → $(\bar{E}^b, \bar{H}^b)$

قضیه تقابل می‌گوید که بین $(\bar{E}^a, \bar{H}^a)$ و $(\bar{E}^b, \bar{H}^b)$ رابطه‌ای برقرار است.

این ارتباط به مواد موجود در محیط بستگی دارد → مواد را بررسی می‌کنیم.

dyad دوتایی → $\hat{x}\hat{y}$ $\bar{a}\bar{b}$

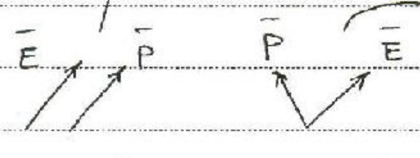
$\hat{x}\hat{y}$ → دو بردار کنار هم $\hat{x}\hat{y}\cdot\bar{E} = E_y\hat{x}$

محیط غیرایزوتروپ → خواص ماده به جهت بستگی دارد.

در این محیط‌ها احتمال برقرار نبودن تقابل وجود دارد.

فرض کنیم محیط غیرایزوتروپ باشد. $\bar{P} = \epsilon_0 X \bar{E}$

$$\bar{P} = \epsilon_0 \bar{\bar{X}} \cdot \bar{E}$$



$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} X_{xx} & X_{xy} & X_{xz} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

ایزوتروپ غیرایزوتروپ

($\bar{E}$ و $\bar{P}$ کل میدان می‌باشند)

$$\bar{\bar{X}} = X_{xx}\,\hat{x}\hat{x} + X_{xy}\,\hat{x}\hat{y} + X_{xz}\,\hat{x}\hat{z} + \dots + X_{zz}\,\hat{z}\hat{z}$$

از آنجایی که از فرم ماتریسی نمی‌توان در معادلات ماکسول استفاده کرد، از فرم فوق استفاده می‌کنیم.

چه شرایطی برقرار باشد تا میدان‌ها متقابل باشند؟

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E}^a = -j\omega\bar{\bar{\mu}}\cdot\bar{H}^a - \bar{M}^a \\ \bar{\nabla}\times\bar{H}^a = j\omega\bar{\bar{\epsilon}}\cdot\bar{E}^a + \bar{J}^a \end{cases}$$

$$\underbrace{\bar{\bar{I}}}_{\text{تانسور واحد}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$$

$\bar{\bar{\mu}}$ و $\bar{\bar{\epsilon}}$ توابعی از r هستند. مثلاً در نقطه‌ای از فضا که خالی است و (μ_0, ϵ_0) را داریم، این گونه هستند:
$\bar{\bar{\mu}} = \mu_0\bar{\bar{I}}$ $\quad \bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_0\bar{\bar{I}}$

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E}^b = -j\omega\bar{\bar{\mu}}\cdot\bar{H}^b - \bar{M}^b \\ \bar{\nabla}\times\bar{H}^b = j\omega\bar{\bar{\epsilon}}\cdot\bar{E}^b + \bar{J}^b \end{cases}$$

نمایش نقطه‌ای لورنتس:

$$\bar{\nabla}\cdot(\bar{E}^a\times\bar{H}^b) = \bar{H}^b\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{E}^a) - \bar{E}^a\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{H}^b)$$

$$= \bar{H}^b\cdot(-j\omega\bar{\bar{\mu}}\cdot\bar{H}^a - \bar{M}^a) - \bar{E}^a\cdot(j\omega\bar{\bar{\epsilon}}\cdot\bar{E}^b + \bar{J}^b$$

$$\nabla\cdot(\bar{E}^b\times\bar{H}^a) = \bar{H}^a\cdot(-j\omega\bar{\bar{\mu}}\cdot\bar{H}^b - \bar{\bar{M}}^b) - \bar{E}^b\cdot(j\omega\bar{\bar{\epsilon}}\cdot\bar{E}^a + \bar{J}^a$$

دو رابطه فوق را از هم کم می‌کنیم.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\nabla\cdot(\bar{E}^a\times\bar{H}^b-\bar{E}^b\times\bar{H}^a)=-\bar{H}^b\cdot\bar{M}^a-\bar{E}^a\cdot\bar{J}^b+\bar{H}^a\cdot\bar{M}^b+\bar{E}^b\cdot\bar{J}^a$$

این رابطه تحت دو شرطی که باعث شود روابط زیر ارضاء شوند، برقرار است

$$\begin{cases}\bar{H}^b\cdot(\bar{\bar{\mu}}\cdot\bar{H}^a)=\bar{H}^a\cdot(\bar{\bar{\mu}}\cdot\bar{H}^b)\\ \bar{E}^a\cdot(\bar{\bar{\epsilon}}\cdot\bar{E}^b)=\bar{E}^b\cdot(\bar{\bar{\epsilon}}\cdot\bar{E}^a)\end{cases}$$

حالت های خاصی که روابط فوق برقرار می‌شوند : $\left.\begin{matrix}\text{محیط ایزوتروپ}\\ [X]^T=[X]\end{matrix}\right\}$

در نقاطی که منبع وجود ندارد (نه منابع a و نه منابع b) داریم :

$$\bar{\nabla}\cdot(\bar{E}^a\times\bar{H}^b-\bar{E}^b\times\bar{H}^a)=0\longrightarrow \text{Lorentz Reciprocity}$$

اگر سطح بسته S را به صورتی در نظر بگیریم که تمام نقاط داخل آن و روی آن منبعی وجود نداشته باشد، داریم :

$$\oint_S(\bar{E}^a\times\bar{H}^b-\bar{E}^b\times\bar{H}^a)\cdot\bar{ds}=0$$

اگر حجمی که در نظر می‌گیریم، منابع را شامل شود (حجم بی‌نهایت)، داریم :

$$\oint_{S=\partial V}(\bar{E}^a\times\bar{H}^b-\bar{E}^b\times\bar{H}^a)\cdot\bar{ds}=-\left[\int_V(\bar{E}^a\cdot\bar{J}^b-\bar{H}^a\cdot\bar{M}^b)\,dV-\int_V(\bar{E}^b\cdot\bar{J}^a-\bar{H}^b\cdot\bar{M}^a)\,dV\right]=-\left[\langle a,b\rangle-\langle b,a\rangle\right]$$

$S=\partial V$ ↓ کره‌ای به شعاع بی‌نهایت

PAPCO

$r\to\infty$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\langle b , a \rangle = \int_V (\bar E^b \cdot \bar J^a - \bar H^b \cdot \bar M^a)\, dV$$

$\underbrace{(\bar E^b , \bar H^b)}_{\text{field}}$ $\underbrace{(\bar J^a , \bar M^a)}_{\text{source (Impressed)}}$ reaction میدان‌های b بر روی منابع a

در نواحی دور $(\bar E^a , \bar H^a)$ برهم در هر نقطه‌ای عمود هستند و هر یک متناسب با $\frac{1}{r}$

وقتی منابع و اجسام محدود باشند. در نواحی دور

هستند. بنابراین: $\langle a , b \rangle = \langle b , a \rangle$ $\bar E^a = E^a_\theta \hat\theta + E^a_\varphi \hat\varphi$

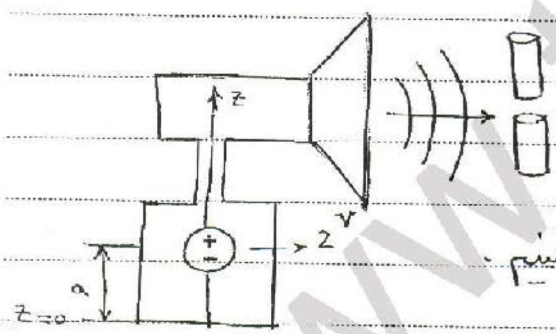
$\bar H^a = \frac{E^a_\theta}{\eta_0}\hat\varphi - \frac{E^a_\varphi}{\eta_0}\hat\theta$

در روابط فوق منابع $\bar J^a$ و $\bar J^b$ و $\bar M^a$ و $\bar M^b$، منابع اعمالی هستند یعنی جریان‌های

القایی بر روی اجسام محیط منظور نمی‌باشد.

$$\begin{cases} \nabla \times \bar E^a = -j\omega\mu \bar H^a - \bar M^a \\ \nabla \times \bar H^a = j\omega\epsilon \bar E^a + \sigma \bar E^a + \bar J^a \end{cases}$$

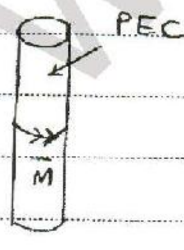
* مدل سازی منابع

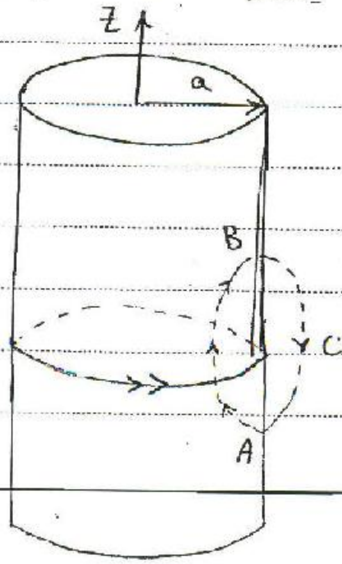


الف) منبع ولتاژ ایده‌آل (با امپدانس)

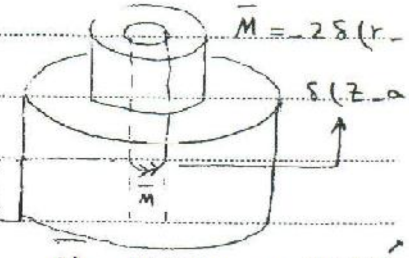
منبع ولتاژ را باید توسط $\bar J$ و $\bar M$ مدل کنیم.

منبع ولتاژ ایده‌آل، نیروی اختلاف ولتاژ را بین دو نقطه، مستقل از بار ثابت نگه دارد.





$Z = 0$ صفحه



$\bar M = -2\delta(r-$

$\delta(z-a$

$$\underbrace{\bar M}_{\frac{V}{m^2}} = \underbrace{K}_{V}\,\underbrace{\delta(r-a)}_{1/m}\,\underbrace{\delta(z)}_{1/m}\hat\varphi$$

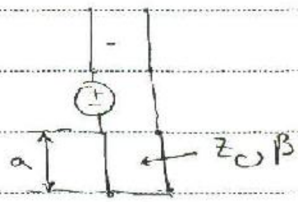
PAPCO

چرا $\int_S \mu \bar{H} \cdot d\bar{s} = 0$ وقتی $S \to 0$

ایجاد منبع ولتاژ با منبع جریان ایده‌آل

فاصله a کم است

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} - \bar{M}$$



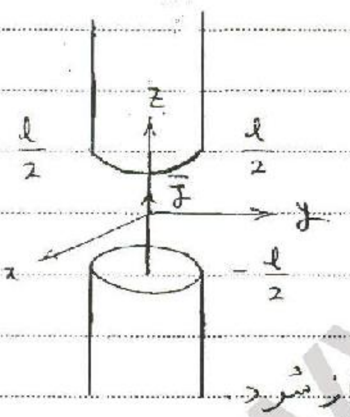
$$\underbrace{\oint_{ABCA}}_{\partial S} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -j\omega \int_S \mu \bar{H} \cdot d\bar{s} - \int_S \bar{M} \cdot d\bar{s}$$

$$\Rightarrow \int_{BCA} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 - \int_S \bar{M} \cdot \underbrace{d\bar{s}}_{dr\,dz\,\hat{\varphi}}$$

با فرض $S \to 0$

$$\Rightarrow \int_{BCA} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_{S \to 0} K \delta(r-a)\, \delta(z)\, dr\, dz = -K = V_B - V_A$$

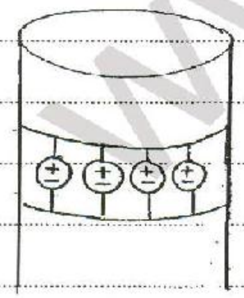
ب) منبع جریان ایده‌آل (با ابعاد صفر)

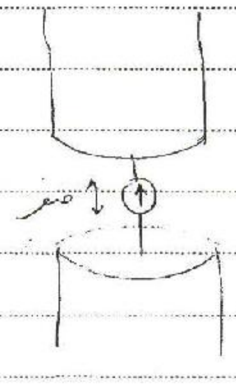


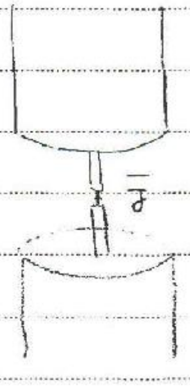
$$\bar{J} = I\, \delta(x)\, \delta(y)\, \hat{z}$$

منبع جریان ایده‌آل، وقتی خاموش شود، بایستی مدار باز شود.

منبع ولتاژ ایده‌آل، وقتی خاموش شود بایستی اتصال کوتاه شود.







Subject:
Year. Month. Date. ( )

توضیح مطلب پایین صفحه

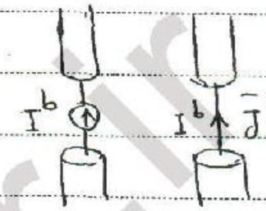
ج) روابط reaction برای منابع ایده‌آل

$$\langle a,b\rangle = \int_V \bar{E}^a \cdot \bar{J}^b \, dv$$

$$= \iiint \bar{E}^a \cdot (I^b \delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z})\, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{0^-}^{0^+} I^b \bar{E}^a (x=0, y=0, z) \cdot (\hat{z}\,dz) = -I^b V^a$$

$$V^a = -\int_{0^-}^{0^+} \bar{E}^a \cdot \bar{dl}$$



$$\langle a,b\rangle = -\int_V \bar{H}^a \cdot \bar{M}^b \, dV = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \bar{H}^a \cdot \bar{M}^b \, r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$\bar{M}^b = K^b \,\delta(r-a)\,\delta(z)\,\hat{\varphi} \qquad [V/m^2] \qquad dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

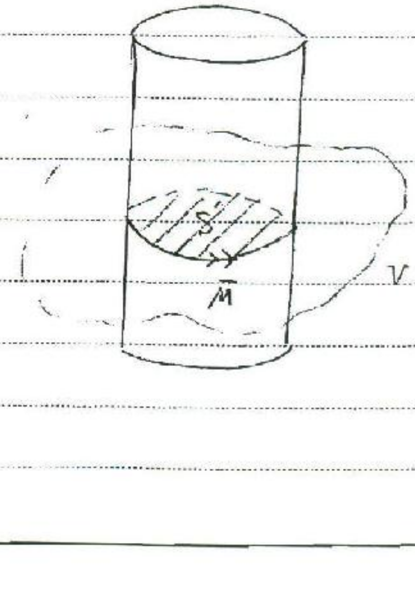
$$\bar{H}^a(r,\varphi,z)$$

$$\Rightarrow \langle a,b\rangle = \underbrace{-K^b}_{V^b} \int_0^{2\pi} \bar{H}^a (a,\varphi,0) \cdot \underbrace{a\,d\varphi\,\hat{\varphi}}_{\bar{dl}} = V^b I^a$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H}^a = j\omega\epsilon \bar{E}^a + \bar{J}^a \Rightarrow \oint_{\partial S'} \bar{H}^a \cdot \bar{dl} = \int_{S'} \bar{J}^a \cdot \bar{ds} = I^a$$

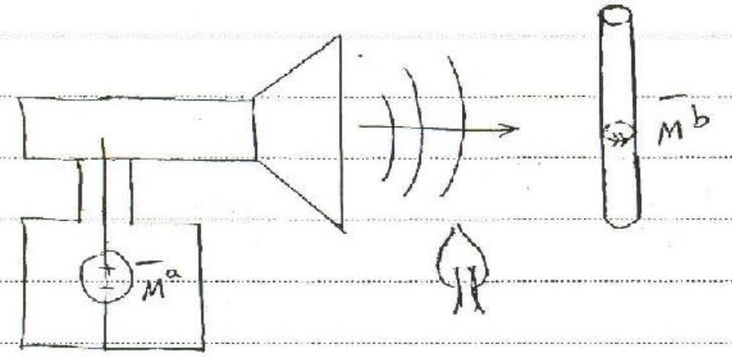
این نتیجه به شرط آن است که حلقه جریان به PEC بسته باشد

$$\int_{S'} j\omega\epsilon\, \bar{E}^a \cdot \bar{ds} = 0 \quad \text{یعنی}$$



PAPCO

مسئله (a)
مسئله (b)



$$\underbrace{\langle a,b\rangle} = \langle b,a\rangle = \int_V (\bar E^b \cdot \bar J^a - \bar H^b \cdot \bar M^a) = V^a I^b$$

$$\bar J^a = 0$$

$$\int_V (\bar E^a \cdot \bar J^b - \bar H^a \cdot \bar M^b)\,dV = I^a V^b \Rightarrow V^a I^b = I^a V^b$$

$$\bar J^b = 0$$

M^a

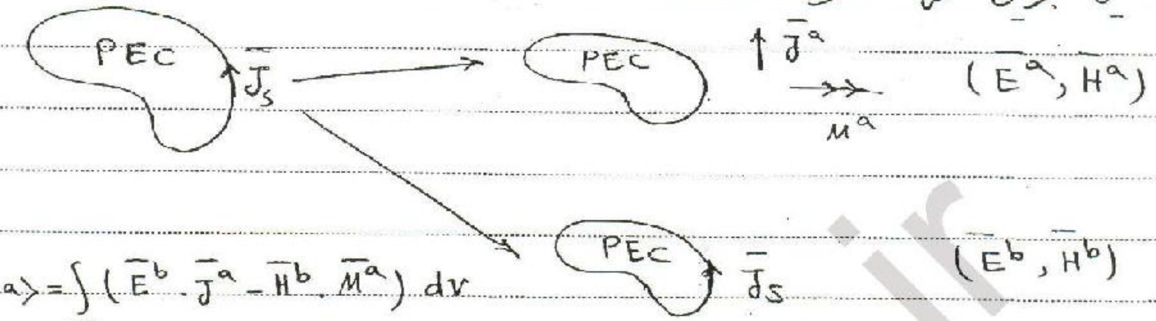
$$\Rightarrow \frac{V^b}{I^b} = \frac{V^a}{I^a} \longrightarrow \frac{I^a}{V^a} = \frac{I^b}{V^b} \longrightarrow Y_{21} = Y_{12}$$

منابع را در هر جایی می‌توان قرار داد. اگر چه مهم فقط آن است که شکل مسئله به هم نریزد. مثلاً در جایی که بدون وجود منابع، مدار باز است نمی‌توان منبع ولتاژ قرار داد.

3.22
3.25 ← تمرین حل شده
3.34

$\bar{J}_{imp}$ را به یک PEC چسبانده‌ایم. می‌خواهیم نشان دهیم که تشعشع

این جریان سطحی صفر است.

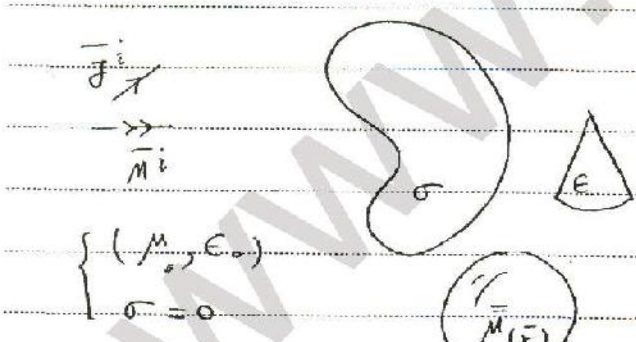


$$\langle b,a\rangle = \int_V (\bar{E}^b \cdot \bar{J}^a - \bar{H}^b \cdot \bar{M}^a)\, dv$$

$$\int_V (\bar{E}^a \cdot \bar{J}^b - \bar{H}^a \cdot \bar{M}^b)\, dv = \langle a,b\rangle = \int_V (\bar{E}^a \cdot \bar{J}^b)\, dv = 0$$

$\bar{E}^a$ مماس بر سطح است ← حاصل ضرب نقطه‌ای مؤلفه‌های مماسی را بر می‌دارد که صفر است (زیرا مماس بر PEC است)

۸-۱) جریان‌های مؤثر و معادلات انتگرال Effective Currents



$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E} = -j\omega \bar{\bar{\mu}}(\bar{r}) \cdot \bar{H} - \bar{M}^i \\ \bar{\nabla} \times \bar{H} = +j\omega \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{r}) \cdot \bar{E} + \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{E} \end{cases}$$

اگر می‌توانستیم مسئله فوق را در فضای آزاد حل کنیم خیلی خوب بود.

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E} = -j\omega \mu_0 \bar{H} \overbrace{- j\omega (\bar{\bar{\mu}} - \mu_0 \bar{\bar{I}}) \cdot \bar{H} - \bar{M}^i}^{\bar{M}_{effective}} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H} = j\omega \epsilon_0 \bar{E} \underbrace{+ j\omega (\bar{\bar{\epsilon}} - \epsilon_0 \bar{\bar{I}}) \cdot \bar{E} + \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{E} + \bar{J}^i}_{\bar{J}_{effective}} \end{cases}$$

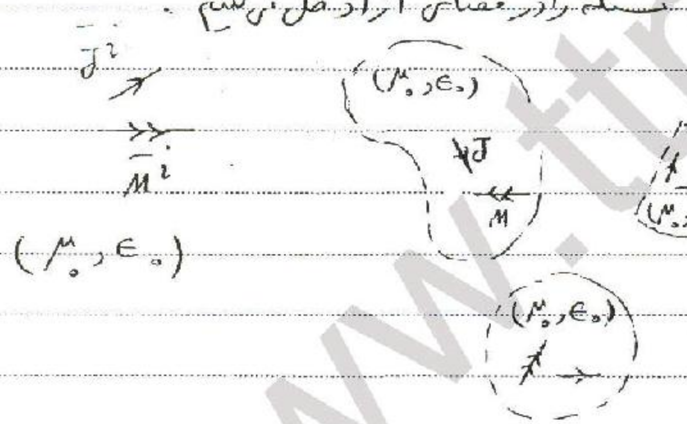
$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E} = -j\omega\mu_0\bar{H} - \bar{M}_{effective} & \bar{M}^i \\ \bar{\nabla}\times\bar{H} = j\omega\epsilon_0\bar{E} + \bar{J}_{effective} & +\bar{J}^i \end{cases}$$

در این رابطه ها دو سری روابط فوق $\bar{E}$ و $\bar{H}$ میدان های کل در فضا می باشند.

$\bar{M}_{eff}$ و $\bar{J}_{eff}$ خودشان مجهول هستند. در واقع متغیرهای کمکی هستند.

این دو متغیر فقط درون اجسام مقدار دارند و در خارج اجسام که فضای آزاد است. این دو متغیر صفر هستند.

بنابراین می توان مسئله فوق را به مسئله زیر تبدیل کرد:
به عبارتی همگن سازی می کنیم. مسئله را در فضای آزاد حل می کنیم.
در درون مرزهای اجسام $\bar{M}_{eff}$ و $\bar{J}_{eff}$ داریم.



$$\bar{E} = \bar{E}^i + \bar{E}^s$$
$$\bar{H} = \bar{H}^i + \bar{H}^s$$

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E}^i = -j\omega\mu_0\bar{H}^i - \bar{M}^i \\ \bar{\nabla}\times\bar{H}^i = j\omega\epsilon_0\bar{E}^i + \bar{J}^i \end{cases}$$

این رابطه را از رابطه فوق کم می کنیم

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E}^s = -j\omega\mu_0\bar{H}^s - \bar{M}_{eff} \\ \bar{\nabla}\times\bar{H}^s = j\omega\epsilon_0\bar{E}^s + \bar{J}_{eff} \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بنابراین اگر $\bar{M}_{eff}$ و $\bar{J}_{eff}$ برای ما معلوم باشد. با حل دو مسئله زیر،

میدان‌های $\bar{E}$ و $\bar{H}$ کل را به دست می‌آوریم.

① فقط منابع $\bar{J}^i$ و $\bar{M}^i$ را داریم و $\bar{E}^i$، $\bar{H}^i$ را در کل فضای (μ_0, ϵ_0) به دست می‌آوریم.

② منابع $\bar{J}_{eff}$ و $\bar{M}_{eff}$ را در نظر گرفته و $\bar{E}^s$، $\bar{H}^s$ را در کل فضای (μ_0, ϵ_0)

به دست می‌آوریم.

$$\longrightarrow \bar{E} = \bar{E}^i + \bar{E}^s \qquad \bar{H} = \bar{H}^i + \bar{H}^s$$

از آنجایی که در هر دو مسئله فوق، میدان‌ها در فضای آزاد را بایستی به دست آوریم

از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$\bar{A}(\bar{r}) = \int_V \frac{\bar{J}_{eff}(\bar{r}')\, e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|}\, dv'$$

$$\longrightarrow k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

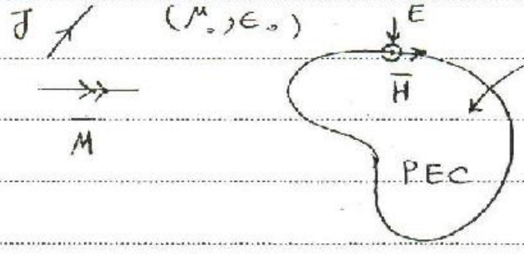
$$\bar{F}(\bar{r}) = \int_V \frac{\bar{M}_{eff}(\bar{r}')\, e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|}\, dv'$$

$$\longrightarrow \bar{E}^s = -\bar{\nabla}\times\bar{F} + \frac{\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A}}{j\omega\epsilon_0}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

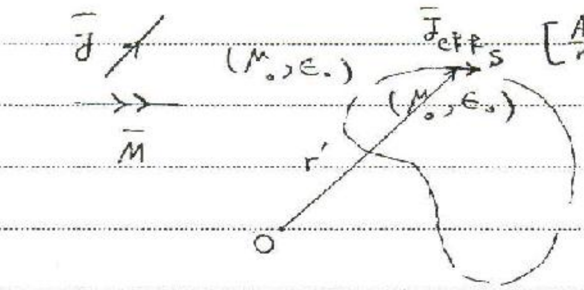
مثال: (حالت خاص) ← scatter یک PEC است.



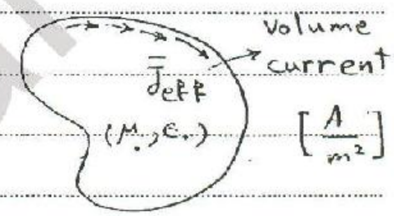
$(\bar{E},\bar{H})=(0,0) \Rightarrow \begin{cases}\bar{M}_{eff}=0\\ \bar{J}_{eff}=0\end{cases}$

درون PEC ولی روی سطح PEC

$\bar{M}_{eff}$ و $\bar{J}_{eff}$ داریم. $\bar{J}_{eff_s}$ $\left[\frac{A}{m}\right]$



اگر هادی کامل نداشته باشیم.



برای رسانایی محدود

مولفه های مماسی $\bar{E}$ و $\bar{H}$ روی سطح PEC باید پیوسته باشد ← $\bar{J}_{eff_s}$ و $\bar{M}_{eff_s}$

$\bar{E}$ نیاز است. ولی $\bar{E}$ روی سطح PEC مولفه مماسی ندارد. درون PEC هم $\bar{E}=0$

است. بنابراین نیازی به $\bar{M}_{eff_s}$ نمی باشد.

$$\bar{A}(\bar{r}) = \int_{\text{سطح جانبی PEC}} \frac{\bar{J}_{eff_s}(\bar{r}')\, e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|}\, ds' \qquad \bar{E}^S = \frac{\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A}}{j\omega\epsilon_0}$$

$\bar{E}$ حل معادله ماکسول است. $\longrightarrow \bar{E} = \underbrace{\bar{E}^i}_{\text{معلوم}} + \underbrace{\bar{E}^S}_{\text{مجهول}}$

همچنین شرط مرزی روی PEC باید اقناع شود.

معادله انتگرالی زیر به دست می‌آید ⟵ $\hat{n}\times(\bar{E}^i+\bar{E}^s)=0$ ⟵ شرط مرزی

$$\Rightarrow \hat{n}\times\left[\frac{1}{j\omega\epsilon_0}\,\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\int_{S}\frac{\bar{J}_{eff_s}\,e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|}\,ds'\right]=-\hat{n}\times\bar{E}^i$$

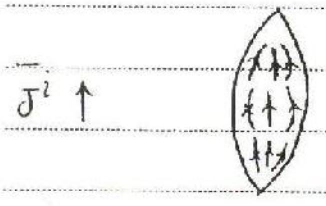
سطح جانبی PEC

معلوم

اگر از شرط مرزی $\hat{n}\times(\bar{H}^i+\bar{H}^s)=\bar{J}_s$ استفاده کرده و معادله انتگرالی را به دست آوریم. در این صورت معادله انتگرالی که به دست می‌آید، در دو طرف مجهول دارد.

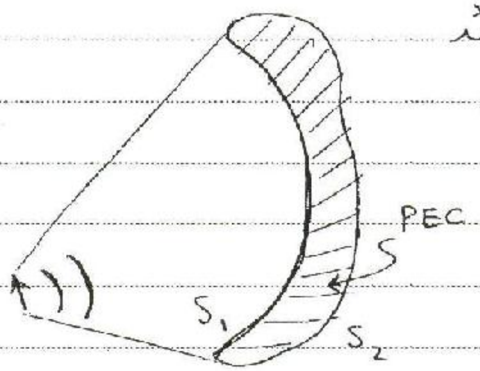
در صورتی که معادله انتگرالی به دست آمده در بالا، یک طرف معادله معلوم است.

$\bar{J}_{eff_s}$ و $\bar{M}_{eff_s}$ را هنگامی که مؤلفه‌های $\bar{E}$ و $\bar{H}$ مماسی ناپیوسته است روی سطح قرار می‌دهیم. مثلاً در رابطه با این لبه چون مؤلفه‌های مماسی $\bar{E}$ و $\bar{H}$ پیوسته هستند بنابراین $\bar{M}_{eff_s}$ و $\bar{J}_{eff_s}$ نخواهیم داشت.



۱-۸-۱) تقریب نور فیزیکی برای جریان‌های مؤثر روی رساناها

(Physical - optics approximation)

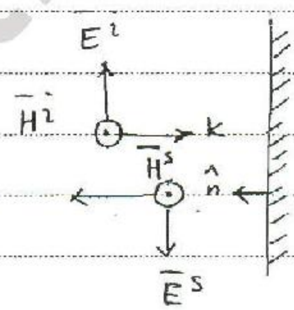


درصورتی که آنتن ابعاد بزرگی داشته باشد به جای حل معادله انتگرالی می‌توان $\bar{J}_{eff_S}$ را به صورت تقریبی روی سطح جانبی PEC تعیین کرد.

$S = S_1 \cup S_2$ (shadow: S_2)

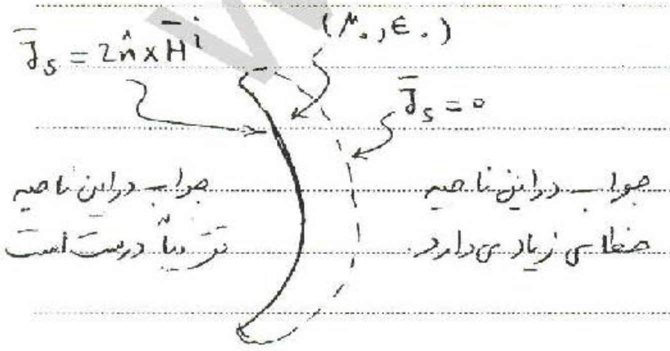
سطح S_1 نسبت به طول موج خیلی بزرگ است. میدانی که به سطح S_1 می‌رسد یک موج صفحه‌ای باشد.

$$\begin{cases} S_1 \longrightarrow \bar{J}_{eff_S} \cong 2\hat{n} \times \bar{H}^i \\ S_2 \longrightarrow \bar{J}_{eff_S} \cong 0 \end{cases}$$



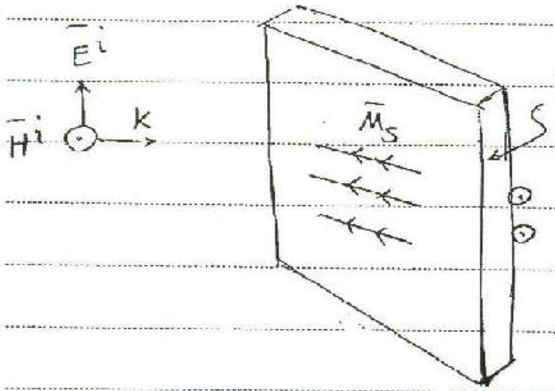
$\bar{H} = \bar{H}^i + \bar{H}^s \qquad \bar{H}^s \cong \bar{H}^i$

$\bar{H} \cong 2\bar{H}^i \qquad \hat{n} \times (\bar{H} - 0) = \bar{J}_S$



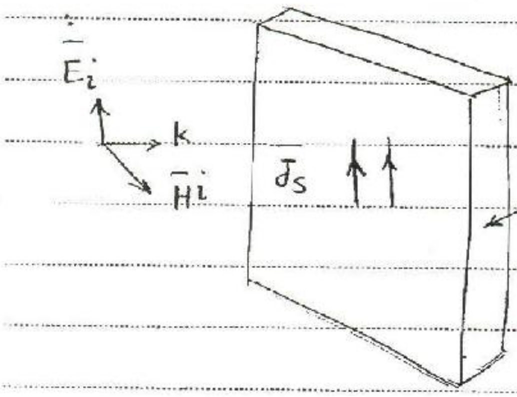
Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل یک مسئله به دو روش :



Induction

با فرض صفحه بزرگ نسبت به طول موج
توانستیم از قضیه تصاویر استفاده کنیم



(μ_0, ϵ_0) PO approximation

جواب‌های تقریب PO
در نظر بیم پشت صفحه قابل
استفاده می‌باشد.

اگر موج صفحه‌ای با هر زاویه‌ای به PEC بتابانیم و موج Back scatter را
اندازه گیری (محاسبه) کنیم. هر دو روش Induction و تقریب PO
جواب یکسان و سطح موثر A_e یکسانی را نتیجه می‌دهند.

ولی غیر از موج Back scatter ، امواجی که در جهت‌های دیگر منتشر می‌شوند
سطح موثرهای A_e یکسانی را نتیجه نمی‌دهند.

۹-۱) تفکیک میدان‌ها به مودهای TE و TM

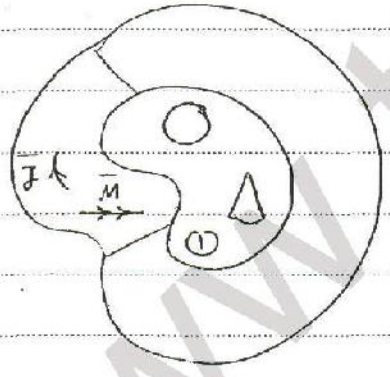
$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} - \bar{M} \\ \bar{\nabla}\times\bar{H} = +j\omega\epsilon\bar{E} + \sigma\bar{E} + \bar{J} \end{cases}$$

E_x H_x
E_y H_y
E_z H_z

۶ مجهول فوق را می‌توان به ۲ مجهول تقلیل داد.

چنین موارد پیش می‌آید که می‌خواهیم حل را بسازیم.

مسائل { finite / infinite } فضا را به دو محدوده تفکیک می‌کنیم { محدوده‌ای که منبع ندارد / محدوده‌ای که منبع دارد.



منابع را می‌توان به صورت شرایط مرزی مدل کرد.

در ناحیه بدون منبع معادلات ماکسول به صورت زیر است:

در ناحیه ①
$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \\ \bar{\nabla}\times\bar{H} = j\omega\epsilon\bar{E} \end{cases}$$

دنبال توابعی هستیم که در معادلات فوق صدق کند.

در محدوده‌ای از فضا که محیط همگن است (μ و ϵ تابع مکان نمی‌باشد) داریم:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 \longrightarrow \bar{E} = -\bar{\nabla}\times\bar{F} \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{H} = 0 \longrightarrow \bar{H} = \bar{\nabla}\times\bar{A} \end{cases}$$

$\bar{F}$ و $\bar{A}$ پتانسیل‌های برداری هستند.

ابتدا رابطه $\bar{H}=\bar{\nabla}\times\bar{A}$ را کنار گذاشته و از $\bar{E}=-\bar{\nabla}\times\bar{F}$ استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} & \text{(I)} \\ \bar{\nabla}\times\bar{H} = -j\omega\epsilon\,\bar{\nabla}\times\bar{F} & \Rightarrow \nabla\times(\bar{H} + j\omega\epsilon\bar{F}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{H} + j\omega\epsilon\bar{F} = -\bar{\nabla}\varphi_F \Rightarrow \bar{H} = -j\omega\epsilon\bar{F} - \bar{\nabla}\varphi_F$$

تابع پتانسیل اسکالر

از آنجایی که می‌خواهیم با تعیین $\bar{F}$ ، $\bar{E}$ را از رابطه $\bar{E} = -\bar{\nabla}\times\bar{F}$ به دست آوریم ،

بنابراین بایستی شرط‌هایی روی $\bar{F}$ قرار دهیم تا بتوان $\bar{F}$ را تعیین کرد.

طبق قضیه هلمهولتز برای تعیین $\bar{F}$ احتیاج به داشتن $\bar{\nabla}\times\bar{F}$ و $\bar{\nabla}\cdot\bar{F}$ می‌باشد.

$\bar{F}$ رابطه‌ی ساده‌تری نسبت به $\bar{E}$ دارد. زیرا $\bar{F}$ میدان برداری است.

$$\text{(I)} \Rightarrow -\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{F} = -j\omega\mu(-j\omega\epsilon\bar{F} - \bar{\nabla}\varphi_F)$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{F}) - \omega^2\mu\epsilon\bar{F} = -j\omega\mu\bar{\nabla}\varphi_F$$

این معادله خیلی شبیه به معادله موج است.

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{H} = 0 \Rightarrow j\omega\epsilon\,\bar{\nabla}\cdot\bar{F} + \bar{\nabla}^2\varphi_F = 0 \quad \text{(II)}$$

خوب است که بتوان این معادله را به یک معادله موج تبدیل کرد.

$$\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{F}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{F}) - \bar{\nabla}^2\bar{F} \longrightarrow$$

لاپلاسین برداری از این رابطه به دست می‌آید.

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{F}) - \bar{\nabla}^2\bar{F} - k^2\bar{F} = -j\omega\mu\,\bar{\nabla}\varphi_f \\ k^2 = \omega^2\mu\epsilon \end{cases}$$

از اینجا به بعد همه چیز عوض می‌شود. (خاص می‌شود)

با این فرض هم φ_f و هم $\bar{F}$ در معادله موج صدق می‌کنند $\longrightarrow$ $\bar{\nabla}\cdot\bar{F} = -j\omega\mu\varphi_f$: فرض

$$\therefore\quad \underbrace{\bar{\nabla}^2\varphi_f + k^2\varphi_f = 0}_{\text{با توجه به فرض و رابطه (I)}} \quad ; \quad \bar{\nabla}^2\bar{F} + k^2\bar{F} = 0$$

تابع پتانسیل برداری $\bar{F}$ = پتانسیل موجی wave potential

پس از تعیین F، $\bar{E}$ و $\bar{H}$ را با استفاده از روابط زیر می‌توان تعیین کرد:

$$\bar{E}_f = -\bar{\nabla}\times\bar{F} \qquad -j\omega\mu\bar{H}_f = -\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{F})$$

حال اگر $\bar{E} = \bar{\nabla}\times\bar{F}$ را کنار گذاشته و از $\bar{H} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$ استفاده کرده و $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$ را در روابط تحمیل کنیم، روابط مشابهی به دست خواهیم آورد.

$$\Rightarrow \bar{\nabla}^2\bar{A} + k^2\bar{A} = 0 \qquad \bar{\nabla}^2\varphi_a + k^2\varphi_a = 0$$

$$\Rightarrow H_a = \bar{\nabla}\times\bar{A} \qquad \bar{E}_a = \frac{1}{j\omega\epsilon}\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A})$$

در واقع از دو مسیر رفته‌ایم، از هر یک، یک سری جواب برای معادلات ماکسول پیدا کرده‌ایم. بنابراین ترکیب خطی این جواب‌ها نیز پاسخی برای معادلات ماکسول است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{A} \rightarrow (\bar{E}_a, \bar{H}_a) \\ \bar{F} \rightarrow (\bar{E}_F, \bar{H}_F) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{E} = \bar{E}_a + \bar{E}_F \\ \bar{H} = \bar{H}_a + \bar{H}_F \end{cases}$$

← حل های ممکن در محیط همگن و بدون منبع آماده شده است.
ولی هنوز شرایط مرزی را اعمال نکرده ایم.

مثال: $\bar{A} = \psi \hat{z} \qquad \bar{F} = 0$

$$\bar{\nabla}^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = 0 \longrightarrow (\bar{E}_a, \bar{H}_a)$$

$$\bar{A} = \psi \hat{z} \Rightarrow \bar{\nabla}^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

$$\bar{H}_a = \bar{\nabla} \times \bar{A} \Rightarrow \begin{cases} H_x = \frac{\partial}{\partial y} \psi \\ H_y = -\frac{\partial}{\partial x} \psi \\ H_z = 0 \longrightarrow TM \text{ to } z \longrightarrow TM_z \end{cases}$$

$$E_a = \frac{\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{A})}{j\omega\epsilon} = \frac{\bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{A}) + k^2 \bar{A}}{j\omega\epsilon}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi \right) \\ E_y = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi \right) \\ E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + k^2 \psi \right) \end{cases}$$

این مثال نشان می دهد که با شرایط در نظر گرفته شده، حل نشان می دهد که H_z نداریم.

PAPCO

مثال:

$\bar{F} = \varphi \hat{z} \qquad \bar{A} = 0$

$$\bar{E}_F = -\bar{\nabla} \times \bar{F} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\partial/_{\partial y}\, \varphi \\ E_y = +\partial/_{\partial x}\, \varphi \\ E_z = 0 \longrightarrow TE \text{ to } z \longrightarrow TE_z \end{cases}$$

$$H_F: \begin{cases} H_x = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \varphi \\ H_y = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \varphi \\ H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \varphi \end{cases}$$

فرض کنید یک میدان کلی داریم که در تمام جهات مؤلفه دارد.

کامل‌ترین حل است. $\longleftarrow \bar{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$

1) $j\omega\epsilon E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi$

2) ψ حل

3) $\bar{A} = \psi \hat{z} \qquad \bar{F} = 0 \longrightarrow TM_z$

4) $H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \varphi \longrightarrow \varphi$ حل

5) $\bar{F} = \varphi \hat{z} \qquad \bar{A} = 0 \longrightarrow TE_z$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3.36
3.38
4.8

تمرین های سری ۷

بنابراین تمام میدان را با استفاده از دو تابع اسکالر ψ و φ که در معادله درج صدق می‌کنند، می‌توان به دست آورد.

سوال: $\bar{E} = (2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z})\, e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$

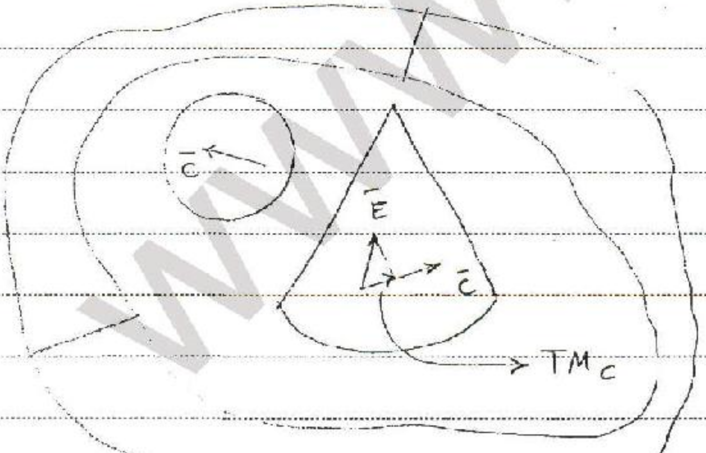
$\bar{E}$ فوق در فضای آزاد حل معادله ماکسول است. $\bar{k}$ را به دست آورید.

$|\bar{k}| = k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

فرض کنید بخواهیم TE یا TM نسبت به جهت $\bar{c} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$ باشد.

$$\bar{E} = \bar{E}_{TM_c} + \bar{E}_{TE_c}$$

$\bar{A} = \psi\hat{c}$ $\qquad \bar{F} = \varphi\hat{c}$



$\underbrace{\bar{E} - \bar{TM}_c = \bar{TE}_c}$

این رابطه تلفیقی از E و H است.

در هر ناحیه همین نقطه یک جهت $\bar{c}$ در نظر می‌گیریم.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل دوم : توابع موج صفحه ای

۲-آ) مقدمه

○ روش های تعیین حل برای نواحی با مرزهای مسطح (صفحه ای)

○ روش تفکیک متغیر (Separation of Variables)

○ روش های حوزه طیف (Spectral Domain)

$$\bar{E} = \bar{E}_{TE_c} + \bar{E}_{TM_c}$$

$\bar{F}$ $\bar{A}$

در اینجا $\bar{A}$ منحصراً ناشی از $\bar{J}$ و $\bar{F}$ منحصراً ناشی از $\bar{M}$ می باشد.

اما در فضای آزاد که هیچ منبعی وجود ندارد و محیط کاملاً همگن است داریم:

(μ_0 , ϵ_0) $\quad \bar{J} \not\to \rightsquigarrow \bar{A}$

$\xrightarrow[\bar{M}]{} \rightsquigarrow \bar{F}$

معادلات موج مربوط به $\bar{A}$ و $\bar{F}$ را برای هر ناحیه حل می کنیم:

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{A}_i + k_i^2 \bar{A}_i = 0 \\ \nabla^2 \bar{F}_i + k_i^2 \bar{F}_i = 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

این دو معادله از نظر شرایط مرزی متفاوت هستند.

شرایط مرزی را برحسب پتانسیل بیان می کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

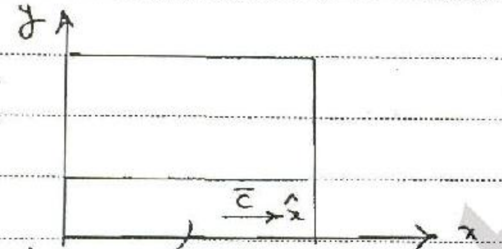
$$\begin{cases} \bar{A}_i = \psi_i^m \, \bar{C}_i & TM \\ \bar{F}_i = \psi_i^e \, \bar{C}_i & TE \end{cases}$$

این جواب کامل‌ترین جواب است ←

حل‌ها باید کامل باشد. به عبارتی $\bar{A}_i$ و $\bar{F}_i$ باید مجموعی از کل حل‌های ممکن باشد تا با اعمال شرایط مرزی به پاسخ صحیح برسیم.

انتخاب $\bar{C}$ به نوع مسئله وابسته است:

۲-۲) پتانسیل‌های موج صفحه‌ای



ناحیه i

در ناحیه i
$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{A}_i + k_i^2 \bar{A}_i = 0 \\ \nabla^2 \bar{F}_i + k_i^2 \bar{F}_i = 0 \end{cases}$$

در این گونه مسائل:
$$\bar{C}_i = \hat{x} \ \text{یا} \ \hat{y} \ \text{یا} \ \hat{z}$$

$$\begin{cases} \bar{A}_i = \psi_i^m \, \hat{x} \\ \bar{F}_i = \psi_i^e \, \hat{x} \end{cases} \longrightarrow \nabla^2 \psi + k_i^2 \psi = 0$$

برای حل این معادله از روش تفکیک متغیرها استفاده می‌شود.

$$\psi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$ ← از این تفکیک می‌توانیم استفاده کنیم زیرا می‌دانیم تمام مرزها مسطح (صفحه‌ای) می‌باشند.

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k_i^2 = 0 \qquad k_i = \omega \sqrt{\mu_i \epsilon_i}$$

separation معادله

PAPCO

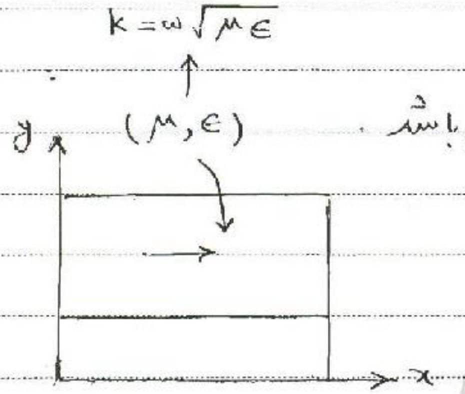
Subject:
Year. Month. Date. ( )

① $\lambda_n \in \mathbb{R}$

② $\begin{cases} \lambda_m \longrightarrow y_m(x) \\ \lambda_n \longrightarrow y_n(x) \end{cases}$ $\qquad \int_a^b \omega(x)\, y_m(x)\, y_n(x)\, dx = \| y_m \| \, \delta_{m,n}$

③ $\sum_m C_m y_m(x) = f(x) \qquad a < x < b$

۳-۲) امواج صفحه‌ای (Plane Wave)



امواج صفحه‌ای برای تحلیل است که همگن می‌باشد.

$$\bar{E} = \bar{E}_{TE} + \bar{E}_{TM}$$

$$\begin{cases} \bar{A} = \psi^m \hat{x} \\ \bar{F} = \psi^e \hat{x} \end{cases}$$

$\psi = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$

$$\Rightarrow \psi^m, \psi^e = e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}\, e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\, z} = \psi$$

$\psi = e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ فقط در فضای نامحدود از موج صفحه‌ای صحبت می‌کنیم.

در فضای نامحدود به دلیل نداشتن مرز و شرایط مرزی، محدودیتی روی k_x و k_y نداریم.

$-\infty < k_x < +\infty \qquad -\infty < k_y < +\infty$

← دو درجه آزادی داریم (max درجه آزادی)

$$\bar{A} = \psi^m \hat{x} \longrightarrow \bar{E}_{TM} \cdot \hat{x} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right)\psi \qquad (k^2 - k_x^2) A e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

$$\bar{E}_{TM} = \frac{\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A})}{j\omega\epsilon} \qquad \bar{E}_{TM} \cdot \hat{y} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\psi$$

P4PCO

$$\bar{E}_{TM} \cdot \hat{z} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\psi$$

با استفاده حل کامل را ارائه داد. ولی ارائه حل کامل منوط به مشخص بودن شرایط مرزی است.

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -k_{ix}^2 = -k_x^2 \\ X(x_0) = \\ X(x_1) = \end{cases} \qquad X(x) = \begin{cases} ax+b & k_x = 0 \\ e^{\pm j k_x x} & k_x \in \mathbb{R} \\ e^{\pm v x} & k_x = jv \end{cases}$$

← معمولاً در محیطهای با اتلاف (k_i موهومی) رخ میدهد

$$h(k_x x) = e^{-jk_x x}$$

حل کامل شامل جمع حل های معلوم فوق می باشد.

$$\Rightarrow X(x) = \sum_m A_m h(k_{x_m} x) + B_m h(-k_{x_m} x)$$

از سه عبارت $\psi(x,y,z)$، دوتا را به دست آورده و سومی را برحسب آنها با توجه

به معادله‌ی separation به دست می‌آوریم. ← دو درجه آزادی وجود دارد.

TM یا TE بودن را شرایط مرزی تعیین میکند.

قضیه‌ی اشتورم - لیوویل:

در رابطه با معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم صحبت میشود.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right) + q(x)y(x) - \lambda w(x)y(x) = 0$$

$$\begin{cases} Ay(a) + By'(a) = 0 \\ Cy(b) + Dy'(b) = 0 \end{cases} \quad a \leq x \leq b \xrightarrow[\text{مرزی}]{\text{با این شرایط}} \begin{cases} \lambda_n \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\int_a^b w(x)y_n(x)y_m(x)\,dx = 0 \quad n \neq m \end{cases}$$

$\psi^m = A\psi \qquad \psi^e = B\psi$

$\bar{F} = \psi^e \hat{x} \longrightarrow \bar{E}_{TE} \cdot \hat{x} = 0$

$\bar{E}_{TE} = -\bar{\nabla}\times\bar{F} \qquad \bar{E}_{TE}\cdot\hat{y} = -\frac{\partial}{\partial z}\psi^e$

$\bar{E}_{TE}\cdot\hat{z} = \frac{\partial}{\partial y}\psi^e$

ψ حل معادلات ماکسول در فضای بی منبع است. به عبارتی این ψها مودهای رزونانسی فضای بی نهایت است.

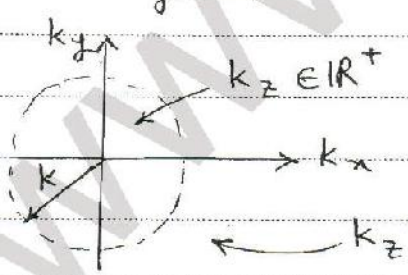
رزوناتوری با مرز در بی نهایت

k_x و k_y و k_z در روابط ψ^m و ψ^e یکی است. زیرا پتانسیل های ناشی از $\bar{A}$ و $\bar{F}$

$\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ باید باهم جمع شوند و $\bar{E}$ به صورت روبرو را تشکیل دهند.

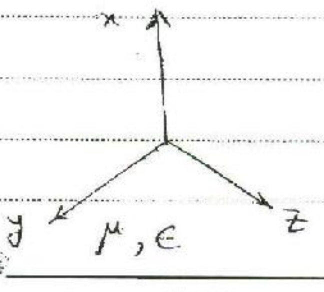
$$\psi(x,y,z) = \int_{k_y=-\infty}^{+\infty}\int_{k_x=-\infty}^{+\infty} dk_x\, dk_y\, A(k_x,k_y)\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}\, e^{-jk_z z}$$

$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$



$k_x, k_y \in IR$

$\longleftarrow k_z = -jv \longrightarrow v = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$



$e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} = e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}\, e^{-jk_z z}$

$\bar{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z} = \bar{\beta} - j\bar{\alpha}$

$\bar{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$

سطوح فاز ثابت را β تعیین می‌کند.

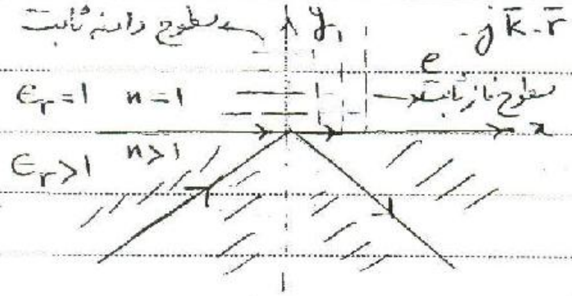
سطوح دامنه ثابت را α تعیین می‌کند.

Subject:

Year. Month. Date.

در ناحیه $\epsilon_r=1$ ← $\vec{k}$ موهومی است ← $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

تضعیف داریم. TIR



$$k_x^2+k_y^2=k_0^2$$

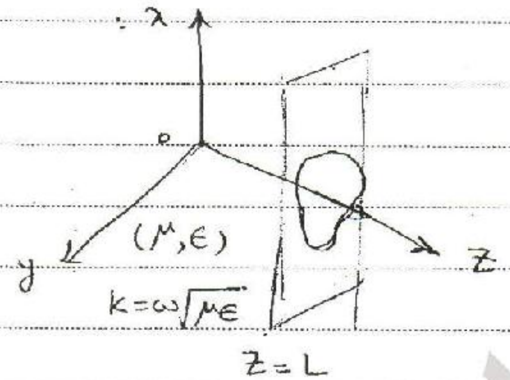
$$k_0=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

$e^{-jk_x x}$ $e^{+jk_y y}$

در ناحیه $\epsilon_r=1$، یک موج صفحه‌ای در جهت $\hat{x}$ منتشر و در جهت $\hat{y}$ تضعیف می‌شود.

در ناحیه ۱، یک میدان میرا داریم ⇐ $\hat{x}\cdot\hat{y}=0$

کامل‌ترین حل بین $Z=0$ و $Z=L$

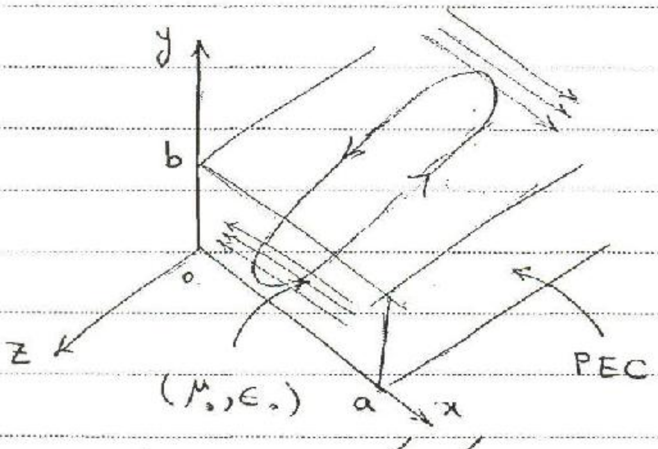


$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}+k^2=0 \longrightarrow -k_x^2-k_y^2+\frac{Z''}{Z}+k^2=0$$

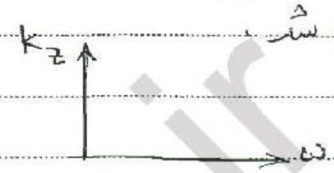
$$\Rightarrow \quad Z(z)=Ae^{-jk_z z}+Be^{+jk_z z}$$

PAPCO

۴-۲) موجبر راست گوشه Rectangular Waveguide



در مسئله موجبری هدف تعیین منحنی dispertion موجبر (ω برحسب k_z) می‌باشد.



در موجبر حل‌های بدون منبع را می‌خواهیم پیدا کنیم که در جهت z آزادی نداریم

یعنی حل‌هایی از نوع e^{-jk_zz} می‌خواهیم داشته باشیم.

$$\begin{cases} \bar{A} = \psi \hat{z} \\ \bar{F} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} E_x = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} \psi + 0 \\ E_y = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0} \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial z} \psi + 0 \\ E_z = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \psi + 0 \end{cases}$$

$$\bar{H} = \bar{\nabla} \times \bar{A} \longrightarrow \begin{cases} H_x = \dfrac{\partial}{\partial y} \psi + 0 \\ H_y = \dfrac{-\partial}{\partial x} \psi + 0 \\ H_z = 0 \end{cases}$$

$$\psi(x,y,z) = X(x) Y(y) e^{-jk_z z} \Rightarrow E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} (k_0^2 - k_z^2) \psi$$

?

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} - k_z^2 + k_0^2 = 0 \longrightarrow$$ یک درجه آزادی داریم

شرایط مرزی را روی ψ بیان می‌کنیم.

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}X\right) + k_x^2 X = 0$$ معادله اشتورم لیوویل

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \qquad m = 1, 2, \dots$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0 \qquad Y(0) = 0 \qquad Y(b) = 0$$

$$\Rightarrow Y(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_{TM_z} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^{TM_z} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z} \\ k_z = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \end{cases}$$

حل فوق کامل‌ترین حل است و تنها بایستی شرایط مرزی را اعمال کنیم.

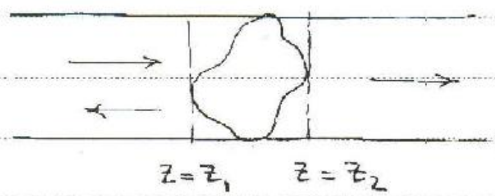
مثلاً اگر جسمی درون موجبر باشد، کلی‌ترین جواب را برای قبل از جسم

و بعد از جسم به دست آورده‌ایم و تنها باید شرایط مرزی را اعمال کرد.

$$H_z \propto \psi_{TE_z} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^{TE_z} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کامل‌ترین حل برای نواحی $z<z_1$ و $z>z_2$ به صورت زیر است:



$z<z_1 \longrightarrow$

$z>z_2 \longrightarrow$

در رابطه با موجبر راست‌گوشه، بردار $\bar{A}$ را در جهت $\hat{z}$ در نظر گرفتیم ولی می‌توان در جهت‌های دیگر نیز $\bar{A}$ را در نظر گرفت:

موجبر $\longrightarrow e^{-jk_z z}$ $\quad \begin{cases} \bar{A} = \psi\,\hat{x} \\ \bar{F} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+k_0^2\right)\psi + 0 = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(k_0^2-k_x^2\right)\psi \\ E_y = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\psi + 0 \\ E_z = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\psi + 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = \\ H_z = \end{cases}$$

$$\psi(x,y,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^{TM_x} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_{z_{mn}} z}$$

$$\longrightarrow TM_{x_{0,1}} \longrightarrow \psi_{0,1} = \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-jk_{z_{0,1}} z}$$

$$\psi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,e^{-jk_z z} \longrightarrow \frac{X''}{X} = -k_x^2 \longrightarrow X_n = \cos\frac{n\pi x}{a}$$

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(a) = 0 \end{cases}$$

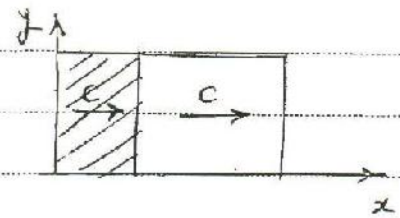
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\psi_{0,1} = \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j k_{z_{0,1}} z}$$

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{k_0^2}{j\omega\epsilon_0}\psi \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = \dfrac{\partial}{\partial z}\psi \\ H_z = -\dfrac{\partial}{\partial y}\psi \end{cases}$$

TM_x ترکیب خطی از TM_z و TE_z می‌باشد.

← یک حل است که می‌توان از روی TM_z و TE_z به دست آید.



اگر موجبر به صورت زیر باشد:
(انتشار در جهت $\hat{z}$)
مناسب است $\vec{c}$ را در جهت $\hat{x}$ در نظر بگیریم. یعنی بردار $\vec{c}$ را در جهت عمود بر ناپیوستگی در نظر گیریم. زیرا در این صورت TE_x به تنهایی یا TM_x به تنهایی یک پاسخ کامل می‌باشد ولی اگر $\vec{c}$ را در جهت $\hat{z}$ در نظر بگیریم هم احتیاج به TE_z است و هم به TM_z.

تمرین سری ۸	تمرین سری ۹	تمرین سری ۱۰	سری 11
4-6	4-19	4-27	4-32
4-12	4-21		4-33
...	4-22		4-40