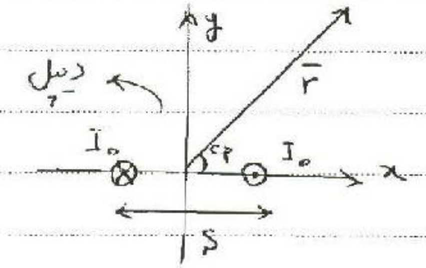
آیا منبعی وجود دارد که میدانی به صورت زیر تولید کند؟

$$E_z = \dots H_1^{(2)}(k_0 r) \qquad n=1$$



$$A_z = \frac{I_0}{4j} H_0^{(2)}\left[k_0\left(\bar{r} - \frac{S}{2}\hat{x}\right)\right] + \frac{-I_0}{4j} H_0^{(2)}\left[k_0\left(\bar{r} + \frac{S}{2}\hat{x}\right)\right]$$

$$\frac{f\left(\left|\bar{r} - \frac{d}{2}\hat{u}\right|\right) - f\left(\left|r + \frac{d}{2}\hat{u}\right|\right)}{d} = \bar{\nabla} f \cdot \hat{u} \longrightarrow$$ تعریف مشتق جهتی در جهت $\hat{u}$

$$\Rightarrow A_z = \bar{\nabla} H_0^{(2)}(k_0|\bar{r}|) \cdot \hat{x}\left(\frac{+I_0}{4j} S\right) \qquad \text{for } |\bar{r}| \gg S$$

$$\Rightarrow A_z = \frac{+I_0 S}{4j} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} H_0^{(2)}(k_0|\bar{r}|)}_{k_0 H_0^{(2)'}(k_0 r)} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{x}}_{\cos\varphi} = \frac{I_0 S}{4j} k_0 H_1^{(2)}(k_0 r)\cos\varphi$$

اگر فیلامان های جریان روی محور y ها قرار گیرند، رابطه A_z مانند فوق است

با این تفاوت که به جای $\cos\varphi$ ، $\sin\varphi$ داریم.

برای تولید $H_n^{(2)}$ تعداد $2n$ فیلامان جریان را روی یک دایره به صورت یکی در میان

$$\Psi = H_n^{(2)}(k_0 r)\left[A\cos(n\varphi) + B\sin(n\varphi)\right]$$ قرار می‌دهیم.

Subject:
Year. Month. Date.

اگر $I(z) = I_0 e^{-j\beta z} \longrightarrow \Psi = H_n^{(2)}(k_r r)\left[A\cos(n\varphi) + B\sin(n\varphi)\right] e^{-j\beta z}$

اگر جریان در راستای z محدود بود. این جریان را به صورت ترکیب خطی از $e^{-j\beta_n z}$ ها می‌نویسیم. به عبارتی از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم.

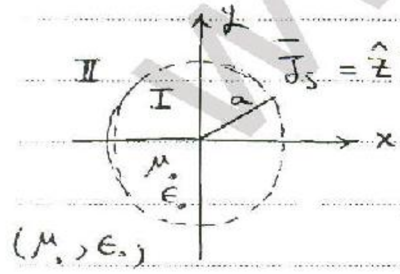
$$I(z) = \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} I_0(\beta) e^{-j\beta z}\, d\beta$$

$$k_r^2 + \beta^2 = k_0^2$$

$$\longrightarrow A_z = \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \frac{I_0(\beta)}{4j} H_0^{(2)}(k_r r) e^{-j\beta z}\, d\beta$$

$$\lim_{r \to 0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} H_\varphi \Big|_{r,\varphi,z} r\, d\varphi = I(z) = I_0 e^{-j\beta z}$$

$$\Psi = C H_0^{(2)}(k_r r) e^{-j\beta z} \longrightarrow H_\varphi \text{ را می‌یابیم} \xrightarrow{\text{رابطهٔ فوق}} C = \frac{I_0}{4j}$$



$\bar{J}_s = \hat{z} J_0 \ [A/m]$

می‌توان جریان سطحی را به یک سری فیلامان تقسیم کرد و میدان‌های ناشی از هر یک را محاسبه کرده و با هم جمع کنیم. راه دیگر این است که حل‌های کامل ناحیهٔ درون و بیرون را نوشته و جریان را به صورت شرط مرزی به روابط اعمال کنیم.

تک تک المان ها در راستای z هستند ← مود TM_z تولید می‌کنند.

$$TM_z \longrightarrow A = \hat{z}\,\psi_{1,2}$$

$$\psi = \begin{cases} \psi_1 = C_1 J_0(k_0 r) & 0 \le r \le a \\ \psi_2 = C_2 H_0^{(2)}(k_0 r) & r \ge a \end{cases}$$

E_z پیوستگی $\longrightarrow$ ψ پیوستگی

در $r=a$

H_φ ناپیوستگی $\longrightarrow \hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{J}_s$

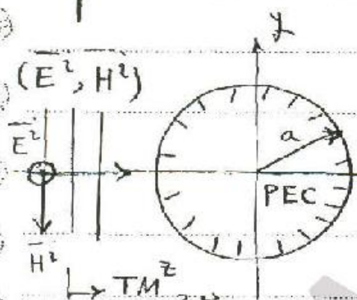
پلاریزاسیون تابش $= TM_z$

۱۰-۳) پراکندگی امواج توسط استوانه

* پراکندگی امواج صفحه‌ای

استوانه‌ی PEC در راستای z از $-\infty$ تا $+\infty$

موج صفحه‌ای به استوانه تابانده‌ایم.

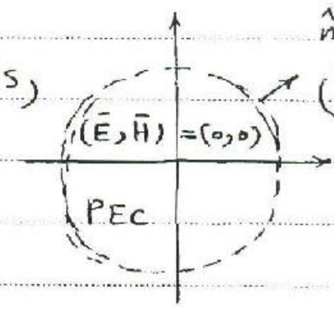


در حالت موج صفحه‌ای TE^z و TM^z را بررسی می‌کنیم.

$$\hat{n} \times (\bar{H}^s - \bar{H}) = \bar{J}$$

$$(\bar{E}^s - \bar{E}) \times \hat{n} = \bar{M}$$

$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{E}^i + \bar{E}^s \\ \bar{H} = \bar{H}^i + \bar{H}^s \end{cases} \xrightarrow[\text{قضیه‌ی القا}]{\text{با استفاده از}} (\bar{E}^s, \bar{H}^s)$$



$$\bar{E}^i = \hat{z}\, E_0\, e^{-jk_0 x} \qquad x = r\cos\varphi \longrightarrow$$

$\bar{E}^i$ در راستای z است و تابعیت z ندارد بنابراین ψ_s هم تابعیت z ندارد.

$$\psi_s^m = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r)\left[A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)\right] \qquad r > a$$

$$\psi_s^m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H_n^{(2)}(k_0 r)\, e^{jn\varphi} \qquad r > a$$

Subject:

Year. Month Date. ( )

به جای استفاده از قضیهٔ الحاق می توان موج تابش را نیز برحسب مجموعی از ψ_n^s ها نوشت و سپس $\bar{E}^s$ و $\bar{E}^i$ را با هم جمع کرده و شرط مرزی PEC را برای به دست آوردن ضرایب اعمال کنیم.

مولد تابع بسل $\longrightarrow e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, t^n$

$$\Rightarrow E_0 e^{-jk_0 r\cos\varphi} =$$

$$t = -je^{j\varphi} \qquad e^{-j\frac{x}{2}(e^{j\varphi}+e^{-j\varphi})} = e^{-jx\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)(-je^{j\varphi})^n$$

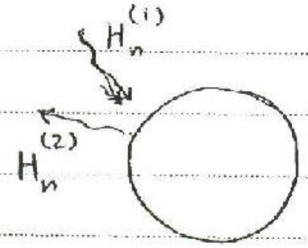
$$\longrightarrow E_0 e^{-j\overbrace{k_0 r}^{x}\cos\varphi} = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-j)^n J_n(k_0 r)\, e^{jn\varphi}$$

$$\bar{E}_s \cdot \hat{z} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)\psi_s = \frac{k_0^2}{j\omega\epsilon_0}\psi_s$$

$$\Rightarrow \underbrace{E}_{\text{میدان کل}} = \hat{z}\left[E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-j)^n J_n(k_0 r)\, e^{jn\varphi} + \frac{k_0^2}{j\omega\epsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H_n^{(2)}(k_0 r)\, e^{jn\varphi}\right]$$

$$E_z(r=a) = 0 \dashrightarrow C_n = -\frac{E_0(-j)^n J_n(k_0 a)}{k_0^2 H_n^{(2)}(k_0 a)}\, j\omega\epsilon_0$$

اگر امپدانس عالی داشته باشیم و یک موج صفحه‌ای به صورت مایل بتابد.



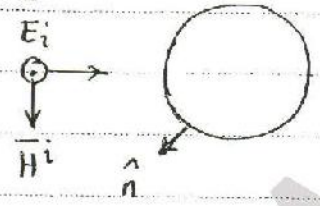
اگر پلاریزاسیون تابش TE_z بود ψ_s^e را نوشته و موج پراکنده را نیز

$$\bar{H}^i = \hat{z}\,\frac{E_0}{\eta}\, e^{-jk_0 r\cos\varphi}$$

TE در نظر می‌گیریم.

$$\psi_s^e \longrightarrow H_z^s \longrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left[H_z^i + H_z^s\right]\Big|_{r=a} = 0$$

برای حالت TM_z اگر $k_0 a \ll 1$



$$\psi_s \longrightarrow E_s, H_s \qquad \bar{H} = \bar{H}_s + \bar{H}^i$$

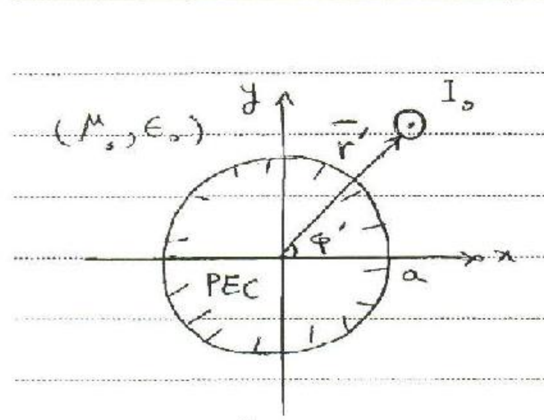
$$\bar{J} = \hat{n}\times\bar{H} = \hat{r}\times\hat{\varphi}\,H_\varphi = \hat{z}\,J_z$$

اگر $k_0 a \to 0 \longrightarrow$ جمله $n=0$ مهم است $\longrightarrow C_0$

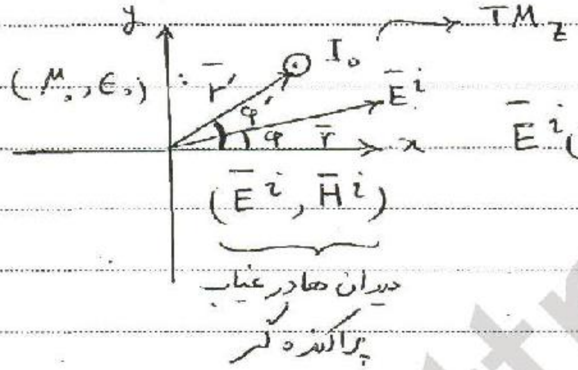
بنابراین جریان $\bar{J}$ ایجاد شده روی PEC نسبت به موج تابشی 90° اختلاف فاز دارد.

اگر موج تابشی را بچرخانیم و بعد بتابانیم در این صورت جریان القایی در جهت $\hat{\varphi}$ خواهد بود.

* پراکندگی امواج استوانه‌ای



$$\bar{r}' = (r', \varphi', 0)$$



$$\bar{E}^i(\bar{r}) = \hat{z}\,\frac{-\omega\mu_0 I_0}{4}\, H_0^{(2)}(k_0|\bar{r}-\bar{r}'|)$$

فرمولاسیون E^s و H^s با حالت قبل تفاوتی ندارد. فقط ضرایب است که متفاوت است.

$$\bar{A}_s = \psi_s \hat{z} \qquad \psi_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H_n^{(2)}(k_0 r)\, e^{jn\varphi}$$

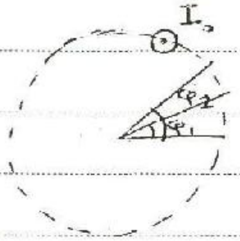
$\bar{E}^i$ را بسط می‌دهیم.

$$\bar{E}^i(\bar{r}) = \hat{z}\,\frac{-\omega\mu_0 I_0}{4}\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(k_0 r')\, J_n(k_0 r)\, e^{jn(\varphi-\varphi')} & r<r' \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_0 r')\, H_n^{(2)}(k_0 r)\, e^{jn(\varphi-\varphi')} & r>r' \end{cases}$$

در رابطه فوق، همه چیز نسبت به متغیرهای پریم دار و بدون پریم متقارن است

این موضوع به خاطر قضیه تقابل می‌باشد.

Subject:
Year. Month. Date ( )



$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J_s \, r' \, d\varphi'$$

$$\bar{J}_s = \frac{I_0}{r'} \delta(\varphi - \varphi') \hat{z}$$

$$\hat{r} \times \left(\bar{H}\Big|_{r'+0} - \bar{H}\Big|_{r'-0} \right) = \bar{J}_s$$

$$\delta(\varphi - \varphi') = \sum C_n \underbrace{e^{jn\varphi}}_{} \longrightarrow C_n = e^{-jn\varphi'}$$

توابع متعامد و کامل که می توانند دلتا را بسط دهند.

حال $\bar{E}^s$ را به دست می آوریم.

$$\bar{E}^s = \hat{z} \frac{k_0^2}{j\omega\epsilon_0} \cdot \psi_s = -\hat{z} \, j\omega\mu_0 \psi_s$$

$$\hat{z} \cdot \left(\bar{E}^s\Big|_{r=a} + \bar{E}^i\Big|_{r=a} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -j\omega\mu_0 C_n H_n^{(2)}(k_0 r)\Big|_{r=a} e^{jn\varphi}$$

$$+ \frac{-\omega\mu_0 I_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(k_0 r') J_n(k_0 r)\Big|_{r=a} e^{jn(\varphi - \varphi')} = 0$$

$$\forall \; 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\Rightarrow C_n = -\frac{\frac{-\omega\mu_0 I_0}{4} e^{-jn\varphi'} J_n(k_0 a) H_n^{(2)}(k_0 r')}{-j\omega\mu_0 H_n^{(2)}(k_0 a)}$$

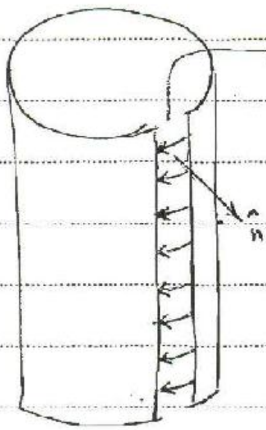
اگر $r' = a$ باشد، در این صورت $\bar{E}^s = -\bar{E}^i \leftarrow \bar{E}^s + \bar{E}^i = 0$

جریان الکتریکی روی PEC تشعشع نمی کند.

Subject :

Year . Month . Date . ( )

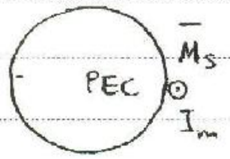
اگر جریان به جای I_0 به صورت $I_0 e^{-j\beta z}$ باشد یا تابعیت نسبت به z داشته باشد، باید از تبدیل فوریه نسبت به z استفاده کرد. (مباحثی مشابه مباحث مولد امواج استوانه‌ای خواهیم داشت)



$\bar{E}_{ap} \longrightarrow$ میدان کل است

یک جریان مغناطیسی معادل قرار داده و روزنه را با PEC جایگزین می‌کنیم.

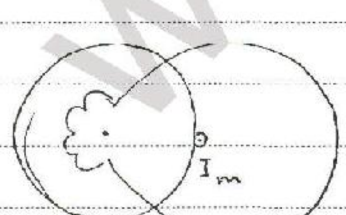
$$\left(\bar{E}\Big|_{a+0} - \bar{E}\Big|_{a-0} \right) \times \hat{n} = \bar{M}_S \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$



$$\bar{F} = \hat{z}\, \psi_s$$

$$\psi_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H_n^{(2)}(k_0 r)\, e^{jn\varphi}$$

$$\bar{H}^i(\bar{r}) = \hat{z}\, \frac{-\omega \epsilon_0 I_m}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\bar{r} - \bar{r}'|)$$



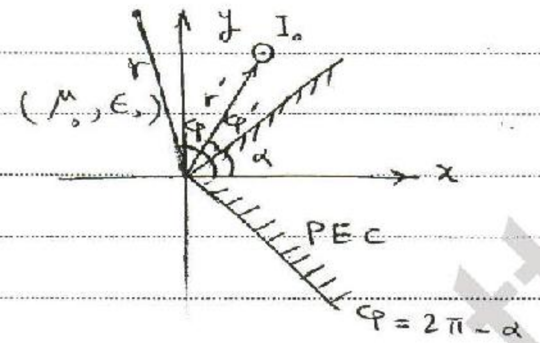
با زیاد کردن شعاع استوانه، گین آنتن بیشتر می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱۱-۳) پراکندگی امواج توسط گوه (Wedge)

جواب های پراکندگی امواج استوانه ای در حالت خاص همان پراکندگی امواج صفحه ای می باشد. حالت خاص یعنی دور کردن منبع جریان

به همین دلیل در رابطه با گوه فقط پراکندگی امواج استوانه ای را بررسی می کنیم.



$$\bar{E}^i(\bar{r}) = \hat{z}\,\frac{-\omega\mu_0 I_0}{4}\,H_0^{(2)}(k_0|\bar{r}-\bar{r}'|)$$

کارهایی که در رابطه با addition پراکندگی امواج توسط استوانه استفاده کردیم، در اینجا قابل استفاده نیست زیرا در آنجا $e^{jn(\varphi-\varphi')}$ داشتیم و این نوع تغییر نسبت به φ برای فاصله $[0, 2\pi]$ مناسب است.

← توابع کامل در فاصله $[0, 2\pi]$

در اینجا به دنبال توابع کامل در فاصله $[-\alpha, \alpha]$ هستیم.

ابتدا TM_z را فرض می کنیم و در نهایت آن را بررسی می کنیم و می بینیم که فرض غلط نیست

$$\bar{A}_s = \hat{z}\,\psi_s \longrightarrow (\bar{E}^s, \bar{H}^s)$$

$$\psi_s = R(r)\,F(\varphi) \qquad \frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)} = \text{ثابت} = -k_\varphi^2$$

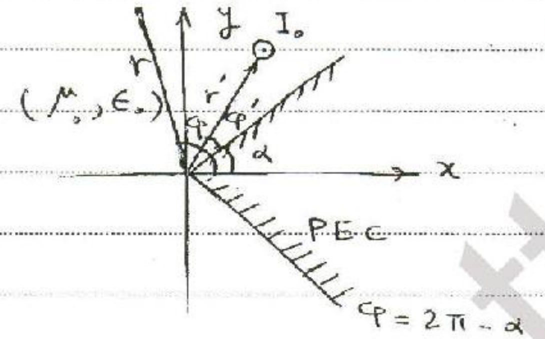
$$F(\alpha) = F(2\pi - \alpha) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳-۱۱) پراکندگی امواج توسط گوه (Wedge)

جواب های پراکندگی امواج استوانه ای در حالت خاص همان پراکندگی امواج صفحه ای می باشد، حالت خاص یعنی دور کردن منبع جریان

به همین دلیل در رابطه با گوه فقط پراکندگی امواج استوانه ای را بررسی می کنیم.



$$\bar{E}^i(\bar{r}) = \hat{z}\,\frac{-\omega\mu_0 I_0}{4}\,H_0^{(2)}(k_0|\bar{r}-\bar{r}'|)$$

کارهایی که در رابطه با addition پراکندگی امواج توسط استوانه استفاده کردیم، در اینجا قابل استفاده نیست زیرا در آنجا $e^{jn(\varphi-\varphi')}$ داشتیم و این نوع تغییر نسبت به φ برای فاصله $[0, 2\pi]$ مناسب است

← توابع کامل در فاصله $[0, 2\pi]$

در اینجا به دنبال توابع کامل در فاصله $[-\alpha, \alpha]$ هستیم.

ابتدا TM_z را فرض می کنیم و در نهایت آن را بررسی می کنیم و می بینیم که فرض غلطی نیست.

$$\bar{A}_s = \hat{z}\,\psi_s \longrightarrow (\bar{E}^s, \bar{H}^s)$$

$$\psi_s = R(r)\,F(\varphi) \qquad \frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)} = -\nu^2 = -k_\varphi^2$$

$$F(\alpha) = F(2\pi - \alpha) = 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\left(H_{\varphi}\Big|_{r=r'+0} - H_{\varphi}\Big|_{r=r'-0} \right) = \frac{I_0}{r'}\,\delta(\varphi-\varphi') \qquad H_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r}\psi$$

$$\frac{I_0}{r'}\,\delta(\varphi-\varphi') = \frac{I_0}{r'}\sum \sin\nu(\varphi-\alpha)\,\sin\nu(\varphi'-\alpha)$$

با به دست آوردن d_ν ، میدان های کل کاملاً مشخص می شوند. یعنی دیگر نیازی به ψ_s ، $\bar{H}^s$، $\bar{E}^s$ و $\bar{H}^i$، $\bar{E}^i$ و تفکیک میدان تابش و میدان پراکنده نمی باشد.

استخراج نتایج مربوط به پراکندن امواج صفحه ای

$$\bar{E}^i = -\frac{\omega\mu_0 I_0}{4} H_0^{(2)}(k_0|\bar{r}-\bar{r}'|)\,\hat{z}$$

$k_0|\bar{r}'| \to \infty \longrightarrow$ یک موج صفحه ای که تحت زاویه φ' به کوه تابیده می شود.

$$|\bar{r}-\bar{r}'|^2 = |\bar{r}|^2 + |\bar{r}'|^2 - 2\,\bar{r}\cdot\bar{r}' = |\bar{r}'|^2\left(1 + \frac{|\bar{r}|^2}{|\bar{r}'|^2} - 2\frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{|\bar{r}'|^2}\right)$$

$$\underset{k_0 x \to \infty}{H_0^{(2)}(k_0 x)} \longrightarrow \frac{e^{-jk_0 x}}{\sqrt{k_0 x}} \qquad r'\underbrace{\left(1 - \frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{|\bar{r}'|^2}\right)}_{\dfrac{r r' \cos(\varphi-\varphi')}{r'^2}}$$

$$\Rightarrow \bar{E}^i = E_0\, e^{-jk_0|\bar{r}'|}\, e^{+jk_0 r\cos(\varphi-\varphi')}\,\hat{z}$$

حال با یستی از رابطهٔ ψ برای $r < r'$ استفاده کنیم و میدان کل را در مقابل به دست آوردیم . از تفاضل میدان کل و $\bar{E}^i$ فوق می توان میدان پراکنده را به دست آورد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

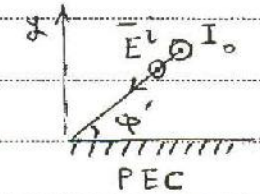
مقدمه‌ای بر تئوری diffraction

ساختاری که فقط با زاویه تعریف می‌شود دارای ثابت scale شدن بی‌نهایت است.

یعنی برای این ساختار موج با فرکانس‌های مختلف، تفاوتی نمی‌کند.

تمرین سری 15

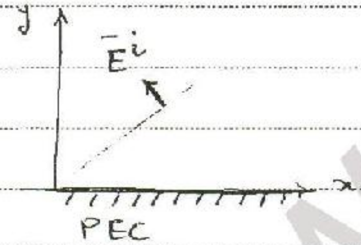
تمرین ۱:



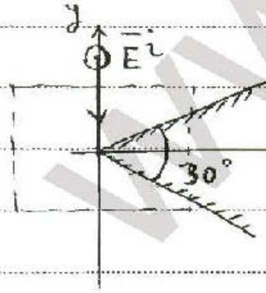
الف) $E_z, H_\phi, H_r \rightarrow \frac{1}{r^{\gamma}}$ اگر $\alpha = 0 \rightarrow$

H_ϕ و H_r در نزدیکی لبه چگونه با فاصله تغییر می‌کنند. ($r \sim 0$) $\alpha = 0 \rightarrow \nu = \frac{m\pi}{2\pi} = \frac{m}{2}$

ب) $E_r, E_\phi, H_z \rightarrow \frac{1}{r^{\gamma}}$



تمرین ۲: فرم میدان‌ها را در مستطیل رسم کنید.



← تداخل امواج

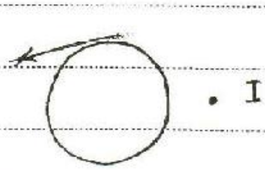
تمرین ۳: 5.39

در تمرین ۱ قسمت الف) E_z در $r \sim 0$ صفر می‌شود ولی میدان H بی‌نهایت است. بنابراین جریان‌های قوی در نوک گوه داریم

PAPCO

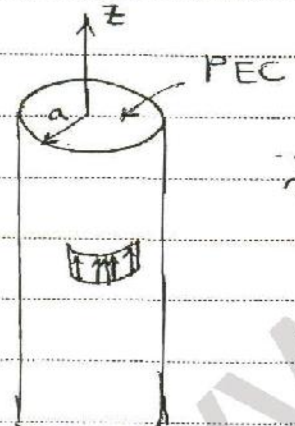
Subject:
Year. Month. Date. ( )

این جریان‌ها تشعشع می‌کنند. این تشعشع را تورق گویند.



لبه‌های اشکال‌دار نیز diffraction ایجاد می‌کنند.

$$|\bar{E}^s| = D_{\perp,\parallel}(\varphi,\varphi')\,|\bar{E}^i|$$



۱۲-۳) روزنه‌ها بر روی استوانه و لوله

میدان روی روزنه داده شده است. تشعشع از روزنه را حساب کنید.

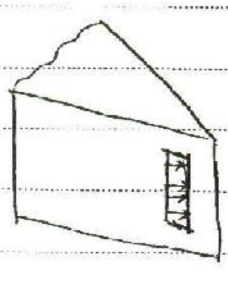
$$k_r^2 + k_z^2 = k_0^2$$

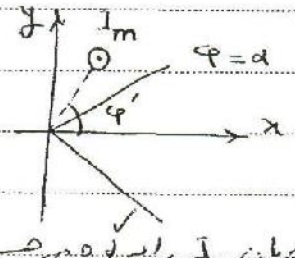
$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_n(k_z) H_n^{(2)}(k_r r)\, e^{jn\varphi} e^{-jk_z z}\, d$$

for $r \geq$

حال میدان روزنه را به صورت شرط مرزی اعمال می‌کنیم

$$\bar{E}_a \times \hat{n} = \bar{M}_s \longrightarrow E_{z,\varphi} = \begin{cases} 0 & r=a,\ z,\varphi \notin S_a \\ E^a_{z,\varphi} & r=a,\ z,\varphi \in S_a \end{cases}$$





$$\nu = \frac{m\pi}{2(\pi-\alpha)} \qquad m=0,1$$

جریان I_m را با لبه محاسبه می‌کنیم $\longrightarrow \varphi' = \alpha$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\bar{F} = \hat{z}\,\psi \qquad \longrightarrow k_r^2 + k_z^2 = k_0^2$

$$\psi = \begin{cases} \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} A_\nu(k_z) J_\nu(k_r r) \cos \nu(\varphi - \alpha) e^{-jk_z z} dk_z & r \leq a \\ & r \geq a \end{cases}$$

روش دیگر، استفاده از تعمیم تقابل می باشد. $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$

برای بدست آوردن میدان دور، می توان المان جریان در راستای z و φ

در نظر گرفت و میدان ناشی از این المان را در محل روزنه به دست آورد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل چهارم : امواج کروی

۴-۱) مقدمه

_ تحلیل میدان ها در این دستگاه متفاوت با قبل است.

در این دستگاه می توان میدان ها را به TE_r و TM_r تحلیل کرد.

فرض بردار $\hat{r}$ با مکان تغییر می کند.

_ انتشار کروی

۴-۲) معادلهٔ موج در دستگاه کروی

ابتدا معادلهٔ هلمهولتز را حل می کنیم: $\bar{\nabla}^2 \psi + k_0^2 \psi = 0$

$$\bar{\nabla} \psi = \frac{\partial}{\partial r}\psi\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\psi\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\psi\,\hat{\varphi}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r F_\varphi)\right)$$

$$\rightarrow \bar{\nabla}^2 \psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\psi\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{r}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\psi\right)\right]$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}^2 \psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,T(\theta)\,F(\varphi)$$

$$\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)} = \text{ثابت} \longrightarrow m^2$$

$$\frac{1}{T}\sin\theta\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d}{d\theta}T\right) - m^2 = \text{ثابت}\times\sin^2\theta = \lambda\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d}{d\theta}T\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = \lambda$$

$$u = \cos\theta \longrightarrow \frac{dT}{d\theta} = \frac{dT}{du}\,\frac{du}{d\theta} = -\sin\theta\,\frac{dT}{du}$$

$$\Rightarrow +\frac{1}{T}\,\frac{d}{du}\left((1-u^2)\frac{d}{du}T\right) - \frac{m^2}{1-u^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{d}{du}\left[\underbrace{(1-u^2)}_{P(u)}\frac{dT}{du}\right] - \frac{m^2}{1-u^2}T = \lambda T \longrightarrow$$

این معادله، یک معادلهٔ مقدار ویژه است.
(معادلهٔ اشتورم لیوویل)

با اعمال شرایط مرزی، λ بدست می‌آید. $\leftarrow$ λها حقیقی هستند

روی ریشه‌های $P(u)$ شرط مرزی لازم نداریم.

$$P(u) = 0 \longrightarrow 1-u^2 = 0 \longrightarrow u = \pm 1 \longrightarrow \theta = 0, \pi$$

$m = 0 \longrightarrow \lambda = -n(n+1) \longrightarrow$ برای این حالت $T(u)$ را به صورت چند جمله‌ای درنظر گرفته و در معادلهٔ اشتورم لیوویل فوق جایگذاری کرده‌ایم.

$\leftarrow n$ مرتبهٔ چند جمله‌ای است.

$T(u) = C_1 u + C_2$ $\leftarrow$ چند جمله‌ای درجهٔ یک

برای حالت $n = 1$ $\Rightarrow C_2 = 0 \; ; \; \lambda = -2$

PAPCO

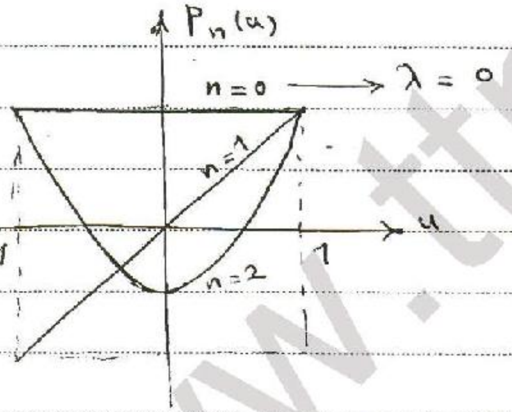
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$T(u) = P_n(u) \longrightarrow$ چند جمله‌ای لژاندر

$P_0(u) = 1 \qquad P_1(u) = u \qquad P_2(u) = \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2} \quad \ldots$

$T(u) = P_n(u) , Q_n(u)$

$Q_n(u)$ فرم لگاریتمی دارد که در $u = \pm 1$ بی‌کران می‌شود. بنابراین اگر فضای حل ما شامل $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ باشد، دراین صورت فقط $P_n(u)$ جواب است.



$$L_{m,n} = (-1)^m (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u)$$ Associated Legendre Func

$L_{m,n} = L_n^m(u) \longrightarrow$ این توابع برای $m > n$ صفر می‌شوند.
زیرا $P_n(u)$ یک چند جمله‌ای مرتبهٔ n است.

بنابراین با انتخاب n، برای m محدودیت خواهیم داشت. $m = 0, 1, 2, \ldots, n$

$m \leq n \longrightarrow$ معادلهٔ تفکیک دستگاه کروی
تغییرات θ ← ← تغییرات φ

PAPCO

Subject:
Year Month Date ( )

حال معادلهٔ حاکم بر $R(r)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R\right) - n(n+1) + k_0^2 r^2 = 0$$

$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$ این عبارت را در معادلهٔ فوق جایگذاری می‌کنیم →

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{r}}{f(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{f'(r)}{\sqrt{r}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{r}}}{r} f(r)\right)\right] - n(n+1) + k_0^2 r^2 = 0$$

$$\ldots \Rightarrow r^2 f''(r) + r f'(r) + \left(k_0^2 r^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right) f(r) = 0$$

$$\Rightarrow f(r) = B_{n+\frac{1}{2}}(k_0 r) \Rightarrow R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} B_{n+\frac{1}{2}}(k_0 r)$$

$$R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}}\, B_{n+\frac{1}{2}}(k_0 r) = b_n(k_0 r)$$

تابع بسل استوانه‌ای ← → تابع بسل کروی

$$\Rightarrow \psi(r,\theta,\varphi) = b_n(k_0 r)\, L_n^m(\cos\theta)\, e^{\pm jm\varphi}$$

$$b_0(k_0 r) \longrightarrow j_0(k_0 r) = \frac{\sin(k_0 r)}{(k_0 r)} \qquad n_0(k_0 r) = -\frac{\cos(k_0 r)}{(k_0 r)}$$

در معادله $n=0$ را قرار داده و در معادله $R(r) = \frac{1}{r} g(r)$ را در معادله جایگذاری کرده و

j_0 و n_0 را به دست می‌آوریم. j_0 در $r=0$ کران‌دار و n_0 بی‌کران است.

PAPCO

Subject:
Year Month Date ( )

۳-۴) توابع پتانسیل

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\times\bar{E} = -j\omega\mu_0 \bar{H} \\ \bar{\nabla}\times\bar{H} = j\omega\epsilon_0 \bar{E} \end{cases} \qquad \begin{cases} TM \text{ to } r = TM_r \\ \bar{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\,\hat{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{\nabla}\times\bar{A} \\ \bar{E} = -j\omega\mu_0\bar{A} - \bar{\nabla}\varphi_a \end{cases}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = j\omega\epsilon_0(-j\omega\mu_0\bar{A} - \bar{\nabla}\varphi_a$$

در این مرحله $\bar{\nabla}\cdot\bar{A}$ را تعیین نمی کردیم .

$$\bar{\nabla}\varphi_a = \frac{\partial}{\partial r}\varphi_a\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_a\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\varphi_a\hat{\varphi}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[r\hat{\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - r\sin\theta\,\hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r\hat{\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\hat{\varphi}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r\right)\right]$$

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)\hat{\theta}$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r\right)\hat{\varphi}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

=> پس سه تا معادله ($\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ و $\hat{\varphi}$) بدست می‌آید

$$\hat{r} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}A_r + k_0^2A_r = 0 \qquad ①$$

که این معادله حل بشه
معادله موج است.

$$\hat{\theta} \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}A_r = -j\omega\epsilon_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_a \qquad ②$$

$$\hat{\varphi} \rightarrow \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}A_r = -j\omega\epsilon\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\varphi_a \qquad ③$$

$$② \rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-j\omega\epsilon_0\varphi_a - \frac{\partial}{\partial r}A_r\right) = 0$$

$$③ \rightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-j\omega\epsilon_0\varphi_a - \frac{\partial}{\partial r}A_r\right) = 0$$

بنابراین $\left(-j\omega\epsilon_0\varphi_a - \frac{\partial}{\partial r}A_r\right)$ تابعیت θ و φ ندارد.

درجه آزادی برای انتخاب gauge بی نهایت است. بنابراین عبارت

مستقل از θ و φ را خودمان صفر انتخاب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}A_r = -j\omega\epsilon_0\varphi_a \longrightarrow$$

با انتخاب این gauge به
رابطه ① می‌رسیم.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A_r}{r}\right)\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r}\quad\frac{A_r}{r^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A_r}{\partial r}-A_r\right]=\frac{1}{r^2}\left[\cancel{\frac{\partial A_r}{\partial r}}+r\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2}-\cancel{\frac{\partial A_r}{\partial r}}\right]$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2}$$

بنا براین معادله ① را به شکل زیر می توان نوشت :

$$\nabla^2\left(\frac{A_r}{r}\right)+k_0^2\left(\frac{A_r}{r}\right)=0$$

بنا براین $\frac{A_r}{r}$ در معادله موج کروی صدق می کند. بنا براین داریم :

$$\frac{A_r}{r}=b_n(k_0r)\,L_n^m(\cos\theta)\,e^{\pm jm\varphi}$$

$$r\,b_n(k_0r)\longrightarrow\hat{B}_n(k_0r)=\sqrt{\frac{\pi}{2}k_0r}\;B_{n+\frac{1}{2}}(k_0r)$$

تابع بسل شلکونوف

Schellkunoff Bessel Functions $\longrightarrow$ این توابع در نقاط دور رفتار سینوسی دارند

$$TM_r\longrightarrow\bar{A}=\hat{r}\;\hat{B}_n(k_0r)\,L_n^m(\cos\theta)\,e^{\pm jm\varphi}$$

اگر تفکیک متغیرها را در معادله ① انجام می دادیم : یعنی

$$A_r=\hat{R}(r)\,T(\theta)\,F(\varphi)\longrightarrow$$ در این صورت $\hat{B}$ در هم معادله ای صدق می کند.

$$\frac{d^2}{dr^2}\hat{R}+k_0\hat{R}-\frac{n(n+1)}{r^2}\hat{R}=0\longrightarrow\hat{R}=\hat{B}_n(k_0r)$$

PAPCO

اگر $n=0\longrightarrow\hat{R}=\sin(k_0r)\;,\;\cos(k_0r)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال که پتانسیل ها را داریم، می خواهیم میدان ها را به دست آوریم:

$$TM_r: \quad \bar{A} = A_r \hat{r} \longrightarrow H = \nabla \times \bar{A} \qquad \bar{E} = \frac{\nabla \times H}{j\omega\epsilon}$$

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} \\ H_\varphi = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_r = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2\right) A_r \\ E_\theta = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\dfrac{\partial^2}{r\,\partial r\,\partial\theta} A_r \\ E_\varphi = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi} A_r \end{cases}$$

$$E_r = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\,\frac{-1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\right]$$

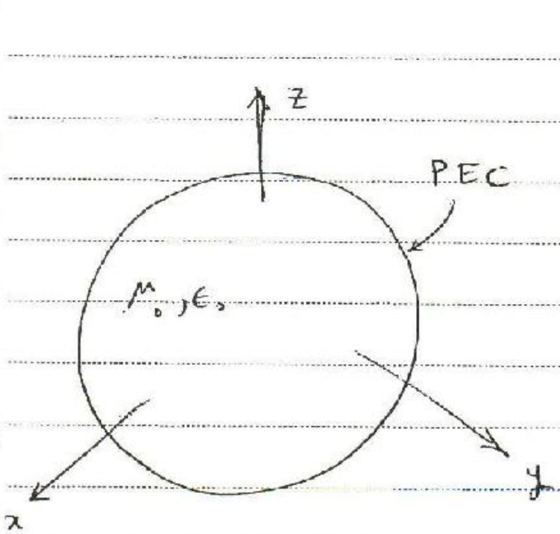
$$= \frac{-1}{j\omega\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}A_r\right]$$

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2\right) A_r$$

میرایی در توابع پتانسیل نمی باشد، بلکه در روابط میدان ها، عوامل میرایی اعمال می شوند.

$$TE_r: \quad \bar{F} = F_r \hat{r}$$

۴-۴) رزوناتورهای کروی



می‌خواهیم مودهای رزوناتور (یعنی جواب‌های بدون منبع) را مشخص کنیم

به دنبال ترکیب‌هایی هستیم که در کره بدون وجود منبع، میدان وجود داشته باشد. TE_r & TM_r

$\longrightarrow \bar{F} = F_r \hat{r}$ $F_r = \hat{B}_n(k_0 r)\, P_n^m(\cos\theta)\, e^{\pm jm\varphi}$

n عدد صحیح است زیرا $\theta=0$, $\theta=\pi$ عضو فضای حل است

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$m = 0, 1, \ldots, n$

$$\begin{cases} E_\theta = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} F_r \\ E_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} F_r \end{cases}$$

$$E_\theta\Big|_{r=a} = E_\varphi\Big|_{r=a} = 0 \longrightarrow \hat{B}_n(k_0 a) = 0$$

$r=0 \in$ فضای حل $\longrightarrow \hat{J}_n(k_0 a) = 0 \qquad k_0 a = u_{np} \Rightarrow k_0 = \dfrac{u_{np}}{a}$

اگر $n=0 \longrightarrow m=0 \longrightarrow$ تمام مؤلفه‌های میدان‌ها صفر می‌شوند

$\Rightarrow n = 1, 2, \ldots \quad \& \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{u_{np}}{a} \Rightarrow \omega_{mnp} = \frac{c}{a} u_{np} \longrightarrow TE^r_{mnp}$$

$\varphi \quad \theta \quad r$

Subject:
Year. Month. Date.

به ازای هر n ، یک تعداد فرکانس رزونانس داریم و این فرکانس رزونانس ها

با تغییر m از صفر تا n تغییر نمی کنند زیرا فرکانس رزونانس مستقل از m است

← degeneracy داریم

در صورتی که هادی کامل (PEC) داشته باشیم ، تمام این مودها درون کره

وجود خواهند داشت ، ولی در صورتی که هادی اندکی تلف داشته باشد ، مودهای

رزونانس موجود در کره وابسته به مود تفکیک می شود.

اگر $n = p = 1 \longrightarrow TE_{m,1,1} \qquad u_{11} = 4.49$

$$F_r = \hat{J}_1\left(\frac{4.49}{a} r\right) P_1^m(\cos\theta)\, e^{\pm jm\varphi}$$

$$m = 0 \longrightarrow TE_{0,1,1} = \hat{J}_1\left(\frac{4.49}{a} r\right) \cos\theta \qquad *$$

$$m = 1 \longrightarrow TE_{1,1,1} = \hat{J}_1\left(\frac{4.49}{a} r\right) \sin\theta\, e^{\pm j\varphi}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \hat{J}_1\left(\frac{4.49}{a} r\right) \sin\theta \cos\varphi \longrightarrow TE^{even}_{1,1,1} \; * \\ \hat{J}_1\left(\frac{4.49}{a} r\right) \sin\theta \sin\varphi \longrightarrow TE^{odd}_{1,1,1} \; * \end{cases}$$

$\omega_{m,1,1} = \frac{c}{a}(4.49) \qquad m = 0, 1 \longrightarrow$ فرکانس رزونانس هر سه مود فوق یکسان است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

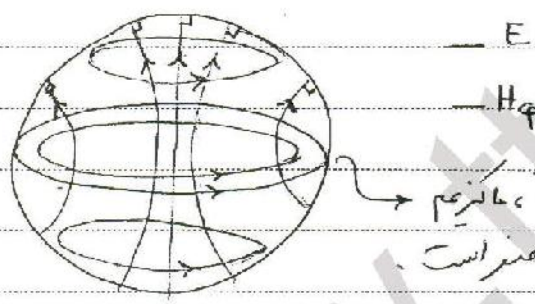
$\Rightarrow k_0 = \frac{u'_{np}}{a} \longrightarrow \omega_{m,n,p} = \frac{c}{a}\, u'_{np} \longrightarrow TM_{m,n,p}$

u'_{11} از تمام u_{np} ها و u'_{np} ها کوچکتر است، بنابراین مود $TM_{m,1,1}$

مود غالب رزوناتور کروی است. $u'_{11} = 2.741$

$TM_{0,1,1} \longrightarrow H_r = H_\theta = 0 \;;\; H_\varphi = \frac{1}{r}\sin\theta\, \hat{J}_1\left(\frac{2.741}{a} r\right)$

$\longrightarrow E_\varphi = 0$



در اینجا $\bar{H}$، ماکزیمم است و E صفر است.

ولی در وسط کره $\bar{E}$ ماکزیمم و $\bar{H}$ صفر است.

در هر رزوناتوری، بردار پوینتینگ موهومی محض می‌شود.

آرایش میدان‌ها برای $TM^{even}_{odd\;1,1,1}$ مانند $TM_{0,1,1}$ است، البته با دوران

محورهای مختصات

برای هادی کامل ← Q بی‌نهایت است.

برای هادی غیرکامل ← $Q_{unloaded}$ برابر است با: $TM_{0,1,1}$

$$Q = 2\pi\omega \frac{\overset{2W_m}{W}}{P_d}$$

$Q_{loaded} < Q_{unloaded}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

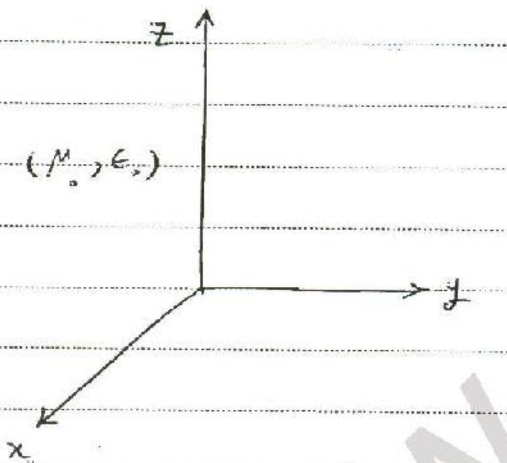
$$W_m = \int \frac{1}{4} \mu_0 |H_\varphi|^2 \, dv \qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

فازور   خود رابطه

$$P_d = \oint \frac{1}{2} R_s |H_\varphi|^2 \, ds$$

$$Q_{\text{کره}} > Q_{\text{استوانه}} > Q_{\text{مکعب}}$$

۴-۵) انتشار امواج کروی



$$EM = TE_r + TM_r$$

$$TM_r \longrightarrow \bar{A} = A_r \hat{r}$$

$$A_r = \hat{H}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) e^{\pm jm\varphi}$$

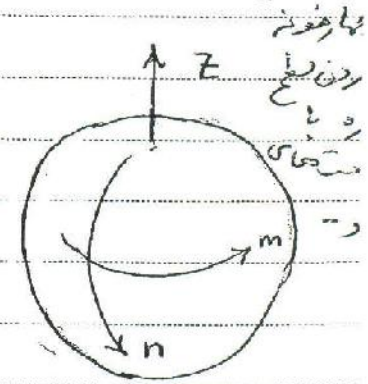
نقاط حل $\in (\theta = 0, \pi)$

$$A_r \longrightarrow \begin{cases} \overbrace{\hat{H}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi}^{T^e_{m,n}(\theta,\varphi)} \\ \underbrace{\hat{H}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) \sin m\varphi}_{T^o_{m,n}(\theta,\varphi)} \end{cases}$$

the tesseral harmonics

هارمونیک [illegible]

$n=1$	$m=0$	$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$	1
$n=1$	$m=0$	$\cos\theta$	1
$n=1$	$m=1$	$\sin\theta$	$\cos\varphi$ $\sin\varphi$



$$P_n^m(\cos\theta) \longrightarrow \text{Zonal harmonics}$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f(\theta,\varphi)$ را می‌توان بر حسب tesseral harmonics بسط داد.

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a_{mn}\,T^{e}_{mn}(\theta,\varphi)+b_{mn}\,T^{o}_{m,n}(\theta,\varphi)$$

بسط فوریه-لژاندر

$$\ldots\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, f(\theta,\varphi)\,T^{e}_{m,n}(\theta,\varphi)\,d\theta\, d\varphi=a_{mn}$$

$$\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta)\,P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta=\begin{cases}\dfrac{2}{2n+1} & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$$

حال می‌خواهیم میدان‌ها را به دست آوریم:

$$TM_{01}\ \longrightarrow\ A_r=\hat{H}_1^{(2)}(k_0 r)\cos\theta$$

$m \quad n$

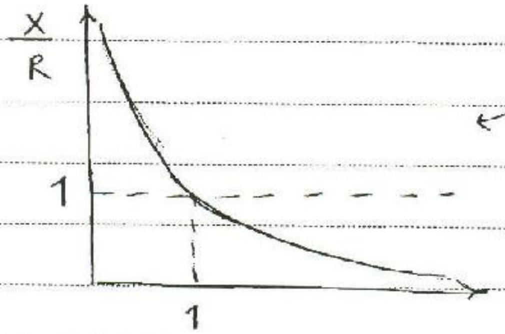
$$E_r=\frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k_0^2\right)A_r=\frac{2}{r^2}A_r\times\frac{1}{j\omega\epsilon_0}$$

$$E_\theta=\frac{1}{j\omega\epsilon_0}\frac{\partial^2}{r\,\partial r\,\partial\theta}A_r=\frac{1}{j\omega\epsilon_0}\frac{k_0}{r}(-\sin\theta)\,\hat{H}_1^{(2)\prime}(k_0 r)$$

$$E_\varphi=0\qquad H_r=0\qquad H_\theta=0\qquad H_\varphi=\frac{-1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}=\frac{\sin\theta}{r}\hat{H}_1^{(2)}(k_0 r)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+k_0^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)\hat{B}_n(k_0 r)=0$$

$$Z^{+}_{TM}=\frac{E_\theta}{H_\varphi}=j\eta_0\frac{\hat{H}_1^{(2)\prime}(k_0 r)}{\hat{H}_1^{(2)}(k_0 r)}=R+jX$$ مشابه در خط انتقال است

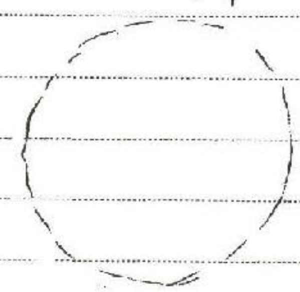


n
↓
cut-off Radius

توان راکتیو ← اختلاف فاز $90°$

توان اکتیو ← هم‌فاز هستند
(موج منتشر می‌شود)

cut-off Radius ← این شعاع قطع، تیز نمی‌باشد.



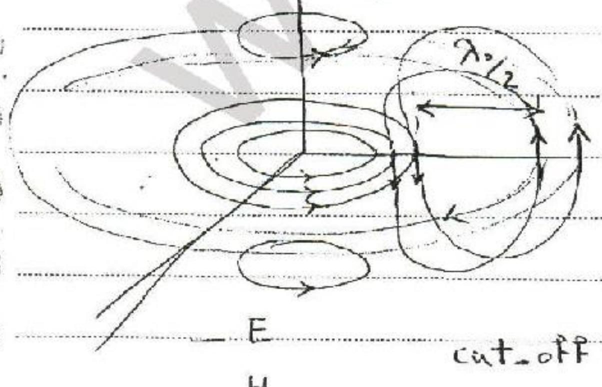
در ناحیه درون دایره کش راکتیو بزرگتر از کش اکتیو است و در ناحیه خارج دایره برعکس است.

$$r = \frac{\lambda_0}{2\pi}$$

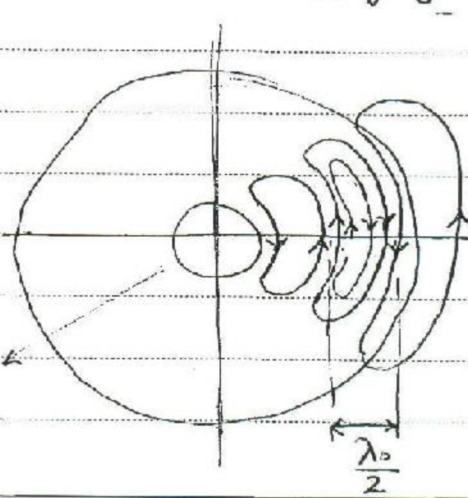
$$H_1^{(2)}(k_0 r) \rightarrow e^{-jk_0 r}$$

$$k_0 r \rightarrow \infty$$

$E_r \propto \frac{1}{r^2} \rightarrow E_\theta$ سریع‌تر از E_r به صفر میل می‌کند.



دایره cut-off



در نقاط دور رفتار E_θ مشابه H_φ است. زیرا در نقاط دور $\hat{H}_0^{(2)}(k_0 r)$

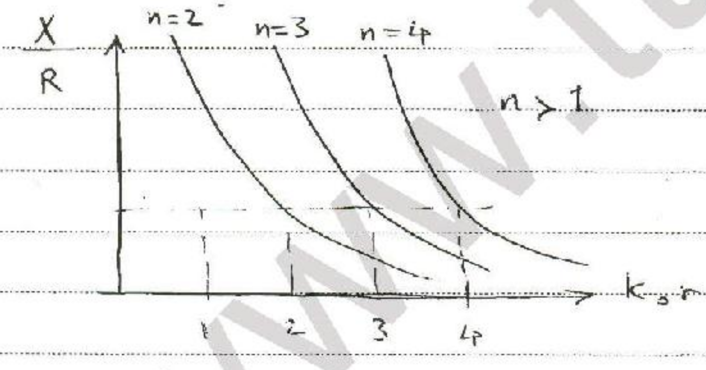
تابع نمایی است و برای نمایی مشتق و خودش یکسان است.

میدان های TE_{01} دوگان میدان های TM_{01} است زیرا تمام فضا (μ_0, ϵ_0)

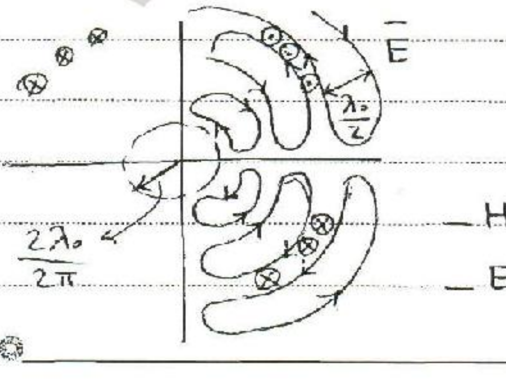
است.

$$TM_{mn} \longrightarrow Z^{+}_{TM} = j\eta_0 \frac{\hat{H}_n^{(2)\prime}(k_0 r)}{\hat{H}_n^{(2)}(k_0 r)}$$

$$Z^{-}_{TM} = -\frac{E_\varphi}{H_\theta} = j\eta_0 \frac{\hat{H}_n^{(2)\prime}(k_0 r)}{\hat{H}_n^{(2)}(k_0 r)}$$



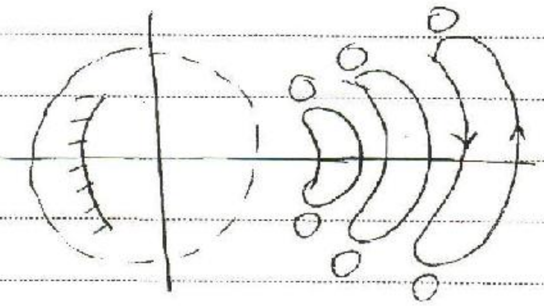
$$TM_{02} \longrightarrow A_r = \hat{H}_2^{(2)}(k_0 r)\, P_2(\cos\theta)$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\bar{E} = \sum\sum a_{mn} TM_{m,n} + b_{mn} TE_{m,n}$$

میدان تشعشعی ← میدان تولید شده
توسط هر آنتن

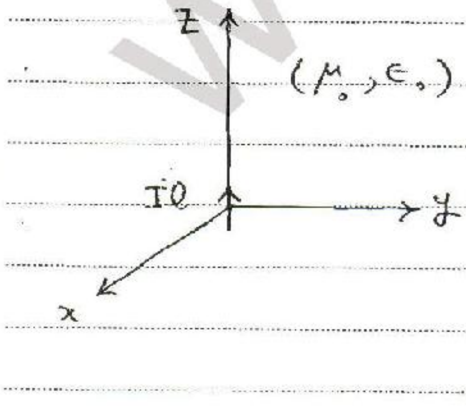


اگر سایز آنتن ها کوچک شود، Q زیاد می شود ولی در عوض آنتن نمی تواند پهنای باند زیاد داشته باشد.

۴-۶) منابع امواج کروی

دیپل های بی نهایت کوچک الکتریکی و مغناطیسی، منابع امواج کروی هستند.

Il مود TM_{01} تولید می کند.



$$\bar{A} = \hat{z}A_z = \hat{z}\,\frac{Il}{4\pi r}\,e^{-jk_0 r}$$

$$\begin{cases} j_0(k_0 r) = \dfrac{\sin(k_0 r)}{k_0 r} \\[2ex] n_0(k_0 r) = -\dfrac{\cos(k_0 r)}{k_0 r} \end{cases}$$

Subject:
Year Month Date

$$h_0^{(2)}(k_0 r) = j_0(k_0 r) - j\, n_0(k_0 r) = \frac{e^{-jk_0 r}}{-jk_0 r}$$

$$\bar{H} = \bar{\nabla} \times \bar{A} = \frac{Il}{4\pi}\, \bar{\nabla}\left(\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\right) \times \hat{z}$$

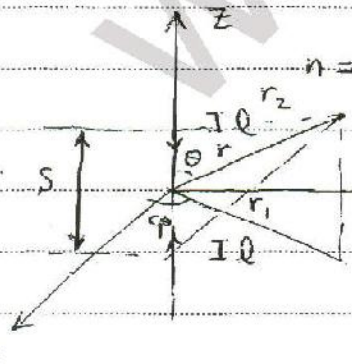
$$= \frac{I\ell}{4\pi}\left[-jk_0 - \frac{1}{r}\right]\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\, \underbrace{\hat{r}\times\hat{z}}_{-\sin\theta\,\hat{\varphi}} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} TM_{01} \to C\, \hat{H}_1^{(2)}(k_0 r)\cos\theta \\ H_\varphi = \dfrac{-1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} A_r = C\dfrac{\sin\theta}{r}\hat{H}_1^{(2)}(k_0 r) \qquad (**) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{*,\ **} \quad C\hat{H}_1^{(2)}(k_0 r) = \frac{I\ell}{4\pi}\left(jk_0 + \frac{1}{r}\right)e^{-jk_0 r}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}_1^{(2)}(k_0 r) &= \hat{J}_1(k_0 r) - j\hat{N}_1(k_0 r) \\ \hat{H}_1^{(2)}(k_0 r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}k_0 r}\; H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(k_0 r) \end{aligned}\right\}$$

$\hat{H}_1^{(2)}(k_0 r)$ بایستی با یکی از این دو رابطه سازگار باشد



$n = 2\,;\ m = 0$

$$A_z = \frac{I\ell}{4\pi r_1}e^{-jk_0 r_1} - \frac{I\ell}{4\pi r_2}e^{-jk_0 r_2}$$

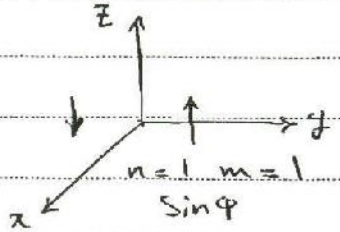
$$\bar{A} = \hat{z}A_z \qquad k_0 S \ll 1$$

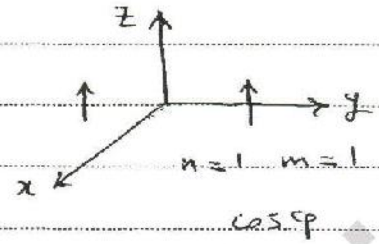
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{I\ell}{4\pi r}e^{-jk_0 r}\right)\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\longrightarrow \hat{H}_2^{(2)}(k_0 r)$$

Papco

اگر دو دیپل در صفحه $z=0$ و روی محور y قرار دهیم:





پنجم

معادله انتگرالی فردهلم نوع اول و دوم } همگن یا غیرهمگن
" " ولترا نوع اول و دوم

روش‌های حل عددی که سرعت همگرایی‌شان بالاست.

پنجم

معادله‌ی انتگرالی فردهلم نوع اول و دوم } خطی یا غیرخطی

〃 〃 ولترا نوع اول و دوم

روش‌های حل عددی که سرعت همگرایی‌شان بالاست -

سری ۱۲	سری ۱۳
۵-۱	۵-۱۰
۵-۲	۵-۱۲
۵-۳	۵-۱۳
	TM01-

تئوری الکترومغناطیس (۱)

فصل اول: مقدمه

۱-۱: اهداف درس: $\vec{H}, \vec{E}$

حل میدانهای الکترومغناطیس در دستگاههای مختصات اصلی (دکارتی - استوانه‌ای - کروی)

← روش‌های تحلیلی (مسائل محدود)

← مرور پایه. این هدف ابتدا در فصل دوم قضیه‌های اصلی مرور خواهند شد.

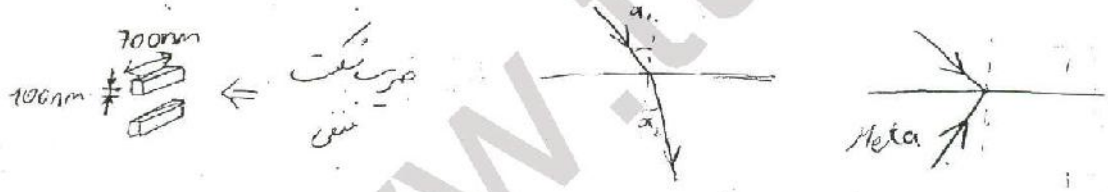
۱-۲- کاربردهای مطالب این درس:

۱- مسائل مخابراتی و راداری

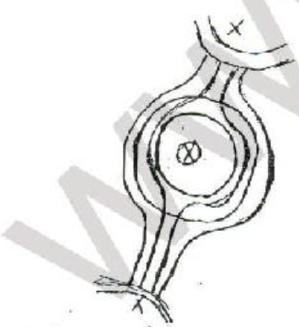
۲- مسائل مربوط به فیزیک‌های مدرن (اپتیک - نانواپتیک - کوانتوم مکانیک)

۳- متریک

Optical Metamaterial



مثلاً: Cloaking



۱-۳: منابع:

[1] R.F Harrington, "Time-Harmonic electromagnetic fields," 1961 chapter 3 to 7.

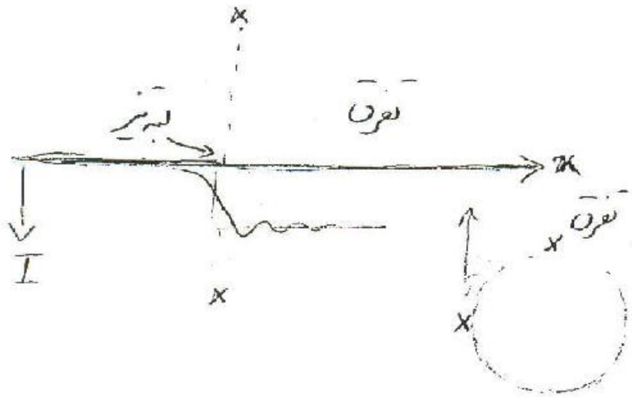
[2] R.E. Collin, "Field theory of guided waves," 1991

[3] C.A. Ballanis, "Advanced Engineering electromagnetics," 1989

۱-۴: grading:

* HW: 20%
* Final 40%

پردازه‌های عددی می‌توانند از گره‌های زیر اتمی ب شوند.



- مسائل مرتبط با پردازش‌های عددی.
- مسائل تفرق و پراکندگی

clocking شدید پراکندگی

- مسائل شبیه‌سازی
- موجبرهای آتی

ارتباط تئوری الکترومغناطیس با تئوری نسبیت

فصل دوم: قضایای بنیادی الکترومغناطیس.

۲-۱- مقدمه: معادلات maxwell

$\vec{\mathcal{E}}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{J}, e$

فارادی: ماهیت مستقل دارند و صورتی دیگر از ماده هستند.

در این درس جنبه فیزیکی آنها کاری نداریم

و فرض می‌کنیم که تمام مشخصات فیزیکی در میدان‌ها جمع شده است.

معادلات ماکسول

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}} = \dots \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho(\vec{r};t) \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{D} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \dots \end{cases}$$

$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r};t)$

فقط معادله هم‌هنگ از ریاضی داریم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی با ۴ معادله کرل و دیورژانس قابل توصیف است

روابط اساسی (Constitutive Relations):

$\vec{D} = f(\vec{\mathcal{E}}, \vec{H})$.

$\vec{B} = f(\vec{\mathcal{E}}, \vec{H})$

البته با یک فرمول نمی‌توان تمام خصوصیات را توضیح داد. وفقط تنها بخشی از حوزه کاربرد را پوشش می‌دهد

این به خاطر این است که فرمول‌های ریاضی تنها قسمتی از حقیقت را در خود دارند.

تفسیر معادلات ماکسول:

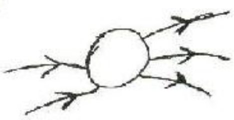
معادله ۱: اگر در میدان الکتریکی، گردابی باشد

رابطه مشتق زمانی است

میدان B در این جهت زمان کم می‌شود

حاصل از تغییرات میدان B با زمان بوده است.

معادله ۲: $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$



این رابطه نسبت به زمان مستقل است

معادله ۳: چون تغییرات زمانی بردار جابجایی

گرداب در $\vec{H}$ ایجاد می‌کند

معادله ۴: هیچ شارژی در مغناطیس نداریم.

این فرمها به صورت مشتقی هستند. به همین دلیل کلیت خود را از دست می‌دهند (به علت مشتق آن به پیوستگی نیاز دارند)

به همین دلیل و ذات دوایی آنها، به فرم انتگرالی بیان می‌شوند (در واقع فرم نقطه‌ای از انتگرالی پیش آمده است)

$$\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\Psi(t)\longleftarrow\Psi(t)=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{s}$$

از فرم انتگرالی برای مسائل شرایط مرزی استفاده می‌گردد.

$$\oint_{\partial V}\vec{D}\cdot d\vec{s}=\int_V\rho\, dV$$

۸۴/۷/۳

ادامه فصل دوم:

- روابط اساسی:

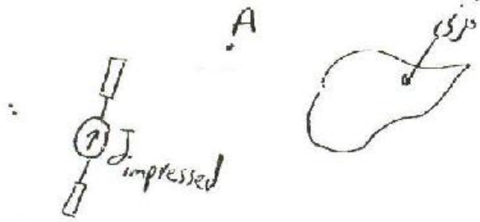
$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{H})$$
$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{H})$$

اجزای J:

اعمال شده توسط خودما (بارها را حرکت داده‌ایم) توسط منبع

ناشی از $\vec{\mathcal{E}}$ کل در آن نقطه است. خلاء در فضا ... $\vec{H}$

$$\vec{J}_{impressed}(\vec{r},t) + \vec{J}_{conduction}$$



$$\vec{J}_c = \hat{\sigma}\,\vec{E}$$

رسانایی

میدان الکتریکی کل $\vec{E}$ در آن نقطه می‌باشد

conduction

$$\Rightarrow \vec{J}_c = \vec{J}_c(\vec{\mathcal{E}}, \vec{H})$$

حالت خاص اول: فضای خالی:

$$\vec{D}(\vec{r};t) = \epsilon_0\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) \qquad \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\ F/m$$
$$\vec{B}(\vec{r};t) = \mu_0\,\vec{H}(\vec{r},t) \qquad \mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\ H/m$$
$$\vec{J}_c(\vec{r};t) \equiv 0$$

حالت خاص ۲: عایق بدون پاشندگی (زمانی + مکانی) (نه پاشندگی در زمان و نه در مکان)

غیر مغناطیسی

عایق $\leftrightarrow$ الکترون‌ها نمی‌توانند آزادانه حرکت کنند. در قطبی‌ها یا جزء دوقطبی‌ها اتفاق می‌افتد

بدون پاشندگی: تغییرات $\vec{\mathcal{E}}$ بدون فاصله زمانی به $\vec{D}$ منتقل گردد.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r};t) \longrightarrow \boxed{\epsilon} \longrightarrow \vec{D}(\vec{r};t)$$

اگر عایق غیر مغناطیسی باشد:

$$\vec{B}(\vec{r};t) = \mu_0\,\vec{H}(\vec{r},t)$$

اگر تلف نداشته باشد.

$$\boxed{\vec{J}_c \equiv 0}$$

حالت خاص ۳: عایق با پاشندگی زمانی (سیستم دینامیکی)

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r};t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \vec{D}(\vec{r},t) \qquad \vec{D}(\vec{r};t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)\,d\tau$$

ممکن است دوقطبی‌ها نتوانند با همان سرعت تغییرات $\vec{\mathcal{E}}$ تغییر کنند

5/

$$\overrightarrow{E}_{\text{کل}} = \overrightarrow{E}_{\text{اولیه}} + \overrightarrow{E}_{\text{سطحی}}$$

$$\overrightarrow{D} = \hat{\epsilon}\,\overrightarrow{E}_{\text{کل}}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r};t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r};\omega)\, e^{+j\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}$$

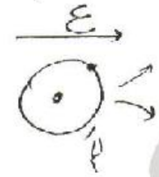
$$E(\vec{r};\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r};t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

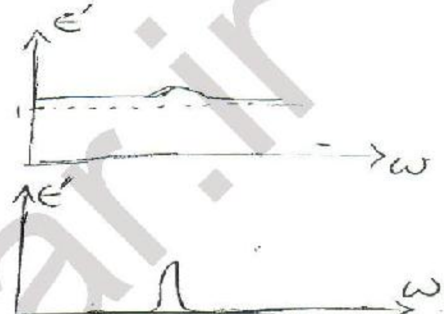
$$\vec{D}(\vec{r},t) \longleftrightarrow \vec{D}(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \hat{\epsilon}(\omega)\, \vec{E}(r,\omega)$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''$$

تبدیل فوریه تابع ضربه ← Complex Permitivity





* ϵ'' تبدیل هیلبرت ϵ' است.

به همین ترتیب

$$\vec{B}(\vec{r},\omega) = \hat{\mu}(\omega)\, \vec{H}(\vec{r};\omega)$$

Complex Permeability

حالت خاص ۴: عایق با پاشندگی مکانی (Spatial)

$\vec{E}$ کل در یک جا، $\vec{D}$ را در دیگر نقاط مشخص می‌کند

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \int h(\vec{r},\vec{r}')\, \vec{E}(\vec{r}')\, dv'$$

به عنوان مثال در ساده‌ترین حالت داریم:

$$\vec{D} = \hat{\epsilon}\vec{E} + C\, \vec{\nabla}\times\vec{E}$$

یعنی به گرداب E در آن نقطه هم بستگی دارد.

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{P}_i}{\Delta V}$$

پلاریزاسیون

$$\boxed{\vec{P}_{\text{کل}} = \epsilon_0\, \chi\, \vec{E}_{\text{کل}}}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\omega)\, \mathcal{E}(r,\omega) \qquad \vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\chi(t) * \vec{\mathcal{E}}(r,t) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{\text{بار آزاد}}$$

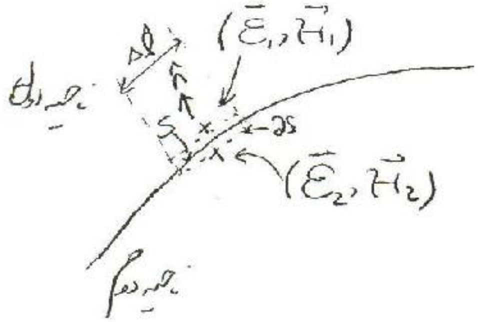
حالت خاص ۵: عایق غیرخطی

Non Linear optics ← کاربرد در

$$\vec{D}(r,t) = \epsilon\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) + \alpha|\mathcal{E}|^2\mathcal{E} + \cdots$$

شرایط مرزی: (با از فرم انتگرالی استفاده می‌کنیم)

با فرض تحلیل (حالت دائمی سینوسی یا حالت دائمی)



فارادی:

$$\oint_{\partial s} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

اگر B در آن نقطه تابع ضربه نباشد انتگرال صفر می‌شود

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \Delta \vec{l} + \vec{\mathcal{E}}_2 (-\Delta \vec{l}) = 0$$

برابری مؤلفه‌های مماسی

$$\hat{n} \times (\vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_2) = 0 \qquad \vec{\mathcal{E}}_1 = Re\{\vec{E}_1(\vec{r})e^{j\omega t}\}$$

$$\boxed{\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0}$$

$$\mathcal{E}_{tan} = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}})$$

$$= \underbrace{-\hat{n}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n})}_{\vec{\mathcal{E}}_n} + \vec{\mathcal{E}}(\hat{n} \cdot \hat{n}) = \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}_n$$

$$\oint_{\partial s} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_s \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} + \int \underbrace{\vec{J}}_{(A/m^2)} \cdot d\vec{s}$$

$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \rightarrow$ درصورتی چون صفر باشد یا محیط نباشد

$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \underbrace{J_s}_{(A/m)} \rightarrow$ Ex: اثبات روابط : HW

ادامه فصل دوم :

۱-۲- مقدمه

۲-۲- دوگانگی معادلات ماکسول

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}+\vec{J} \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$E_x(\bar{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}_x(\bar{r},t)e^{-j\omega t}\,dt$$

با فرض تک فرکانس بودن

$$\mathcal{E}_x(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\{E_x(\vec{r})e^{j\omega_0 t}\}$$

$$\bar{\mathcal{E}}(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\{\bar{E}(\vec{r})\,e^{j\omega_0 t}\}$$

$$\mathcal{J}(\bar{r},t) \qquad J(\vec{r})$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega_0\vec{B}(\vec{r}) \\ \nabla\times H(\vec{r}) = j\omega_0\vec{D}(\vec{r})+J(\vec{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot D = \rho \\ \nabla\cdot B = 0 \end{cases}$$

از دو رابطه $\nabla\times$ می‌توان روابط دیورژانس را بدست آورد.

اگر در حوزه فرکانس به صورت تک فرکانس ω بررسی کنیم. (فازور)

اما در حالت کلی دو معادله پایین هم در حالت کلی مستقل از معادلات بالا است.

و اما در حالت فازور چون تنها تغییرات زمانی از حالت‌های معادلات پیروی می‌کند

— یک محیط خطی + ایزوتروپ فرض می‌کنیم (پاشندگی مهم نیست)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{\mu}(\omega)\,\vec{H}(\vec{r})$$

$$\hat{\mu}(\omega) = \mu'(\omega) - j\,\mu''(\omega)$$

اگر غیر ایزوتروپ باشد:

داریم تانسوری که در نظر است
(دستگاه دوگان)

$$B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z$$

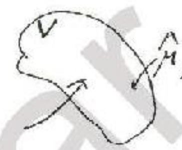
$$\vec{D}(\vec{r}) = \hat{\epsilon}(\omega)\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\hat{\mu}\vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = j\omega\hat{\epsilon}E + \vec{J}$$

حالت ۱: فرض کنیم در نقطه‌ای هستیم که منبع در آن نباشد.

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\hat{\mu}\vec{H}\\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = j\omega\hat{\epsilon}\vec{E}\end{cases} \qquad \vec{J} = 0$$



در داخل حجم V: $\hat{\mu}, \hat{\epsilon}$

$(\vec{E}, \vec{H})$ بدست آمده

اگر مسئله دیگر تعریف کنیم

داخل حجم V

(b)

اگر شرط مرزی را نیز دوگان کنیم

$$\begin{cases}\hat{\mu}_b = \hat{\epsilon}\\ \hat{\epsilon}_b = \hat{\mu}\end{cases}$$

جای $\hat{\epsilon}$ با $\hat{\mu}$ در مسئله تعویض شده است
و $\hat{\mu}$ با $\hat{\epsilon}$

* از حل مسئله استفاده می‌کنیم، به طوری که جای $\vec{E}$ و $\vec{H}$ را تعویض کنیم. (به طریقه درست توضیح داده می‌شود)

شرط مرزی دوگان:

$$\hat{n}\times E = 0 \qquad \hat{n}\times\vec{H} = 0$$

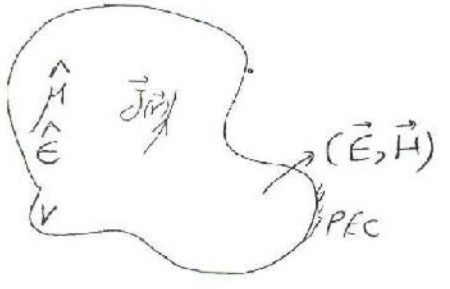
چگونگی تعویض صحیح $\vec{E}$، $\vec{H}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}^b = -j\omega\hat{\epsilon}\vec{H}^b$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}^b = j\omega\hat{\mu}\vec{E}^b$$

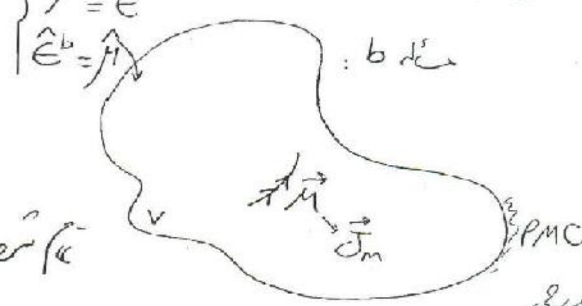
$$\begin{cases}\vec{E}_b = \vec{H}\\ \vec{H}_b = -\vec{E}\end{cases}$$

حالت ۲: فرض کنیم که منبع $\vec{M}$ (غیرصفر) وجود داشته باشد



$$\begin{cases}\hat{\mu}^b = \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon}^b = \hat{\mu}\end{cases}$$

مسئله b:



تمام شرایط مرزی هم به همین ترتیب دوگان می‌شود.

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\hat{\mu}\vec{H} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = j\omega\hat{\epsilon}\vec{E} + \vec{J}\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{E}^b = -j\omega\hat{\epsilon}\vec{H}^b - \vec{M} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H}^b = -j\omega\hat{\mu}\vec{E}^b\end{cases}$$

منبع مغناطیسی

* اگر $\vec{M}$ دقیقاً با $\vec{J}$ برابر باشد، با هم مانند حالت ۱ با جابجایی $\vec{E}$، $\vec{H}$ به جواب مسئله b برسیم.

بنابراین از این به بعد معادلات Maxwell را به این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\hat{\mu}\vec{H} - \vec{M} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = j\omega\hat{\epsilon}\vec{E} + \vec{J}\end{cases}$$

تبدیلاتی که دو معادله را به هم تبدیل می‌کند:

$$\begin{cases}\vec{E} \longleftrightarrow \vec{H} & \hat{\mu} \longleftrightarrow \hat{\epsilon} \\ \vec{H} \longleftrightarrow -\vec{E} & \hat{\epsilon} \longleftrightarrow \hat{\mu} \\ \vec{M} \longleftrightarrow \vec{J} & \end{cases}$$

حالت خاص ۳: در مسئله اولیه هم $\vec{M}$ و $\vec{J}$ وجود داشته باشد.

فضای خالی:

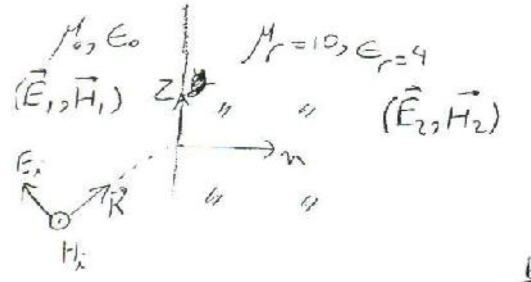
$\vec{H} = \nabla\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\vec{F}$

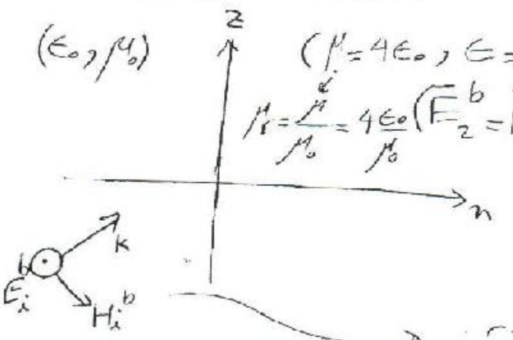
$$A(\vec{r}) = \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')\, e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dv' = \frac{I\,dl\, e^{-jkr}}{4\pi r}$$

$$J(\vec{r}')\, dv' = I\, dl$$

مثال: مسئله دوگان را برای ساختار زیر بیابید.

مسئله b

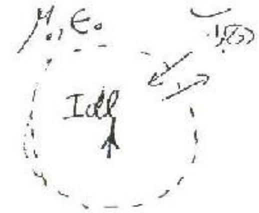




$(\mu = 4\epsilon_0,\ \epsilon = 10\mu_0)$

$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{4\epsilon_0}{\mu_0}$ $\left(\vec{E}_2^b = \vec{H}_2,\ \vec{H}_2^b = -\vec{E}_2\right)$

۳-۲- قضیه یکتایی : Uniqueness Theory



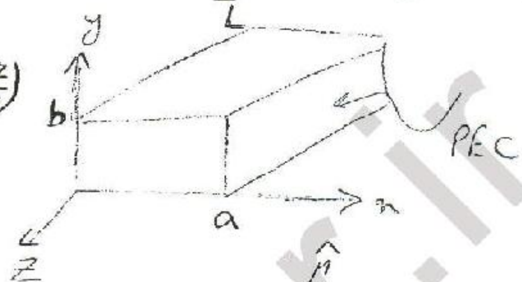
در الکترودینامیک اگر از فیزیک مسئله (منابع) تنها را حذف کنیم،

یکتایی مسئله زیر سوال می‌رود
جواب

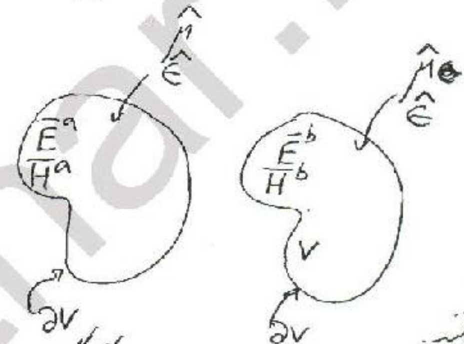
مثال: Cavity در داخل یک PEC

$$E_y = A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

به ازای هر m, n که در تمام معادلات صدق می‌کند.



$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}^a = -j\omega\hat{\mu}\,\bar{H}^a \\ \bar{\nabla} \times \bar{H}^a = j\omega\hat{\epsilon}\,\bar{E}^a \end{cases}$$



فرض کنیم دو جواب معادلات صدق می‌کنند

* روی ∂V چه شرطی قرار دهیم تا این یکتایی برقرار شود.

۸۴/۷/۱۰

ادامه قضیه یکتایی: دو حل a و b را فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E}^a = -j\omega\hat{\mu}\vec{H}^a - \vec{M} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H}^a = j\omega\hat{\epsilon}(\bar{r})\vec{E}^a + \bar{J} \end{cases} \quad \forall \bar{r} \in V$$

فرض نادره در فرکانس ω همچنان پابرجاست

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E}^b = -j\omega\hat{\mu}(\bar{r})\bar{H}^b - \vec{M} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H}^b = j\omega\hat{\epsilon}(\bar{r})\bar{E}^b + \vec{J} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\vec{E} = \bar{E}^a - \bar{E}^b \\ \delta\vec{H} = \bar{H}^a - \bar{H}^b \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \times (\delta\vec{E}) = -j\omega\hat{\mu}(\bar{r})(\delta\bar{H}) \\ \nabla \times (\delta\vec{H}) = +j\omega\hat{\epsilon}(\bar{r})(\delta E) \end{cases} \quad \forall \bar{r} \in V$$

11/

$$\bar\nabla\cdot(\delta\vec E\times\delta\vec H^*)=\delta\vec H^*\cdot(\overset{-j\omega\mu(r)\delta H}{\nabla\times\delta E})-\delta\bar E\cdot(\overset{+j\omega\epsilon(\bar r)\delta E^*}{\nabla\times\delta\bar H^*})$$

در حجم

$$=-j\omega\hat\mu(\hat r)|\delta\bar H|^2+j\omega\,\hat\epsilon^*(\bar r)|\delta\bar E|^2\quad\forall\bar r\in V$$

$$\oint_{\partial V}(\delta E\times\delta\bar H^*)\cdot d\bar s=-j\omega\int_V\left(\hat\mu(r)|\delta\bar H|^2-\hat\epsilon^*(\bar r)|\delta\bar E|^2\right)dv$$

حال اگر ∂V شرایطی داشته باشد که : $\hat n\cdot(\delta\bar E\times\delta\bar H)=0\quad\forall\vec r\in\partial V$

اگر تغییرات زمانی $e^{+j\omega t}$ در نظر بگیریم : $\begin{cases}\hat\mu=\mu'-j\mu''\\ \hat\epsilon=\epsilon'-j\epsilon''\end{cases}$

$$\int_V(\underset{\mu'-j\mu''}{\hat\mu}|\delta\bar H|^2-\underset{\epsilon'+j\epsilon''}{\hat\epsilon^*}|\delta\bar E|^2)\,dv=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}\int_V\mu'|\delta H|^2dv-\int_V\epsilon'|\delta E|^2dv=0\\ \int\mu''|\delta\bar H|^2dv+\int_V\epsilon''|\delta\bar E|^2dv=0\end{cases}$$

* در حالت خاص اگر تلف کمی داشته باشد، به وجود ضرایب (مستقل از انتگرال‌ها) $\int|\delta\bar H|^2dv$, $\int|\delta\bar E|^2dv$ باید صفر باشد

یکی از شرط‌های لازم : $\hat n\cdot(\delta\bar E\times\delta\bar H^*)=0\quad\forall\bar r\in\partial V$ روی سطح

$$\begin{cases}\delta\bar H^*\cdot(\hat n\times\delta\bar E)=0\\ \delta\bar E^*\cdot(\hat n\times\delta\bar H)=0\end{cases}$$

مؤلفه‌های مماسی $\bar E^a,\bar E^b$ و $\bar H^b,\bar H^a$ روی سطح از تابع واحدی تبعیت کنند.

$$\begin{cases}\hat n\times\bar E^a=F_1\\ \hat n\times\bar E^b=F_1\end{cases}$$

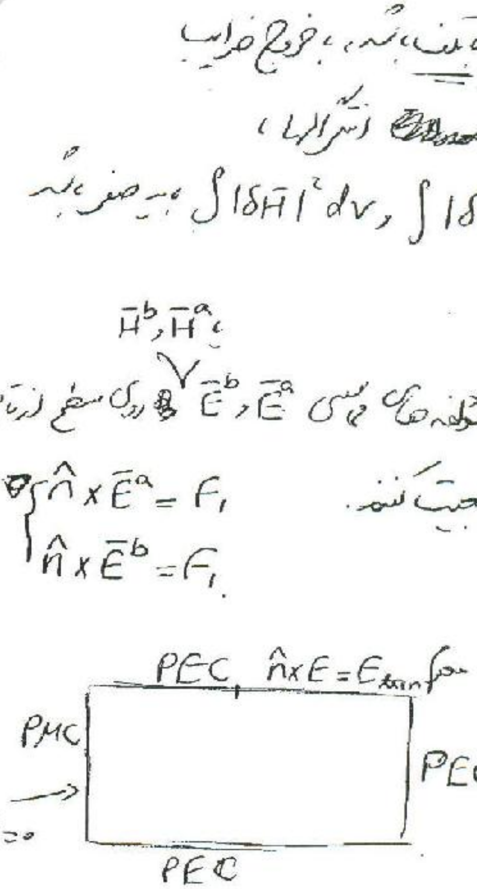
برای حجم بی‌نهایت داریم :

در بی‌نهایت نقاط دور روی مرز میدان‌ها $\boxed{\partial V\to\infty}$

به دلیل اینکه منابع صفر هستند

منابع finite باشند

$$\delta\vec E\sim\frac{1}{r}e^{-jkr}$$ → به صورت کروی، فرم میرا دارد.



$$\Longrightarrow \oint_{\partial V} (\delta E \times \delta H^*) . ds = 0 \qquad K = K' - jK''$$

مثبت می‌شود

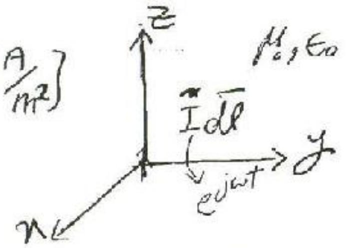
شرط radiation Sommerfeld: در بی‌نهایت

$$\xrightarrow{\partial V \to \infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r}\psi + jK\psi\right) \longrightarrow 0$$

اگر در میدان راه دور میدان‌های E_r ، E_θ ، H_φ ، E_φ ، H_θ ، H_r (مؤلفه‌ها)

در شرط Sommerfeld صدق کنند، جواب یکتای مسئله هستند.

$J \Rightarrow [A/m^2]$



μ_0, ϵ_0

$$\bar\nabla \times \bar E = -j\omega\mu_0 \bar H$$

$$\bar\nabla \times \bar H = j\omega\epsilon_0 \bar E + \bar J$$

بدون تلف

$$\nabla . \bar H = 0 \Rightarrow \bar H = \bar\nabla \times \bar A \qquad k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

$$A(\bar r) = \int \frac{J(\bar r')e^{-jk_0|r-r'|}}{4\pi|\vec r - \vec r'|} dv'$$

* اگر این علامت ⊕ هم باشد تمام شرایط را برقرار می‌کند غیر از شرط Sommerfeld.

نکته: اما اگر در مسئله‌ای بدون تلف، چند جواب بدست آمد، در یک محیط تلفاتی می‌توان با اضافه کردن تلف ناچیز

جواب یکتای مسئله را که در Sommerfeld صدق می‌کند را (بدون صدق دادن) تعیین کرد.

$$\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \ll 1$$

$$\bar A(\vec r) = \hat z \frac{I d\vec l}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \quad [A]$$

$$\vec H = \bar\nabla \times \bar A = \vec\nabla \times \left(\frac{I dl\, e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\hat z\right)$$

$$\bar\nabla \times (\Phi \vec F) = \bar\nabla\Phi \times \vec F + \Phi\, \bar\nabla \times F$$

$$\to \vec H = \frac{I dl}{4\pi}\left(-jk_0\frac{e^{-jk_0 r}}{r} - \frac{e^{-jk_0 r}}{r^2}\right)\underbrace{\hat r \times \hat z}_{-\sin\theta\,\hat\varphi}$$

$$+ \frac{I dl\, e^{-jk_0 r}}{\quad} \cancel{\nabla \times \hat z}$$

حل a: $\vec{H}$ کل ← $\vec{H} = \frac{Idl}{4\pi}\left(jk_0 + \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\sin\theta\,\hat{\varphi}$

$$\vec{H}_{ff} = \frac{Idl\,(jk_0)}{4\pi r}\, e^{-jk_0 r}\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

حال اگر در فرمول ابتدایی $\hat{A}(\vec{r})$ ← $e^{+jk_0 r}$ قرار دهیم حل b به شکل زیر بدست می‌آید.

$$\bar{H}_{ff}^{\,b} = -j\frac{k_0}{4\pi r}\, Idl\, e^{+jk_0 r}\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

که هر دو در معادلات صدق می‌کنند. (دو راه داریم: شرط Sommerfeld ؛ یا داخل کردن تلفات اندک)

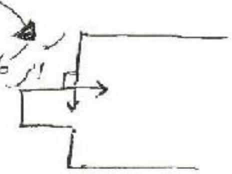
$$\delta\bar{H} = H^a - H^b = \dots \sin(k_0 r)$$

نکته مهم: $\delta\bar{H}$ در $k_0 r = n\pi$ صفر هم می‌گردد (اگر در مسأله‌ای فقط شرط مرزی را داشتیم، شروط را ارضا می‌کند ولی یکتا نیست)

حالت ابتدایی و ایده‌آل گرایی بردن تلف بودن محیط (جنس محیط) است.
حالت دوم ایده‌آل بردن، ایده‌آل بودن شکل محیط می‌باشد.
⟸ دو حالت ایده‌آل که یکتایی را از بین می‌برد.

پس برای علاوه بر B.C به Edge Condition را هم باید قرار داد.

اگر کاملاً ۹۰° باشد باز هم جواب مسأله یکتا نیست.

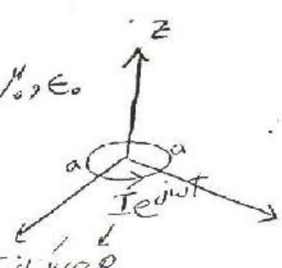


HW#2: (الف

$\bar{E}_{ff}, \bar{H}_{ff} = ?$

$\frac{a}{\lambda_0} \ll 1$

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \omega\sqrt{\mu\epsilon_0}$

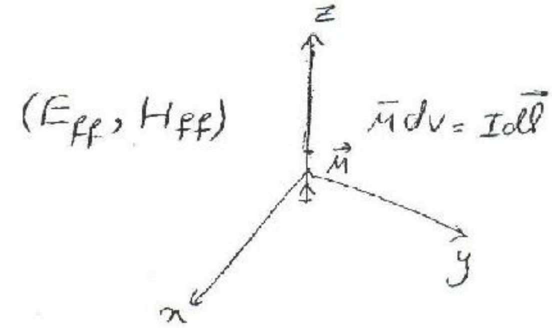


ب) همان مسأله الف برای

$\frac{b}{\lambda} \ll 1$

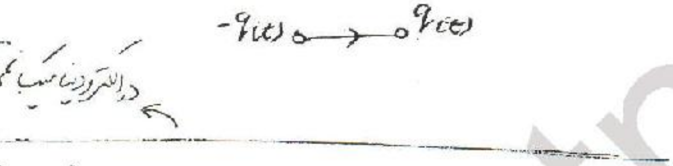
د) چه ارتباطی بین I_m و I و a و dl برقرار باشد تا میدان های دور برای مسئله الف و ج یکسان شوند؟

ج)

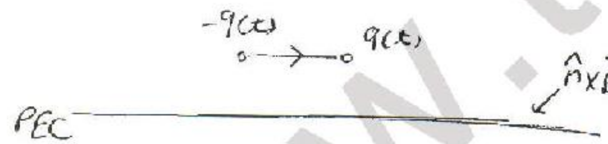


۴-۲- قضیه تصاویر:

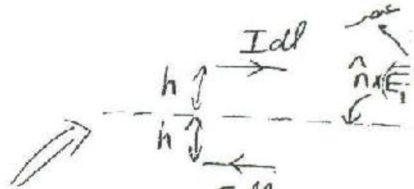
در الکترواستاتیک از قضیه تصاویر در حالت تحلیل الکترواستاتیک استفاده می شد.



در الکترودینامیک نمی توان فرمول دقیق برای این ساختار بدست آورد



می توان به مسئله غیر شرایط مرزی (فضای خالی) برد.

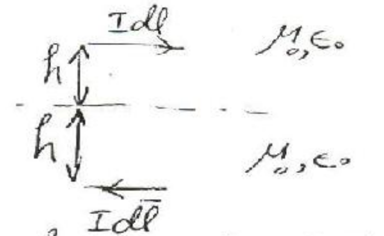


* در صورتی که در الکترواستاتیک می توان برای پرسش های E_r هم فرمول تصادفی را بدست آورد. که در الکترودینامیک این طور نیست.

۸۴/۷/۱۵

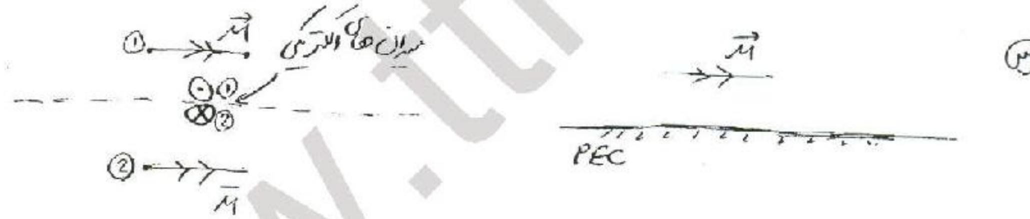
درسیم که تصویر المان جریان $I\,d\bar{l}$ تنها در حالتی می‌توان به وجود آید که سطح آن PEC باشد.

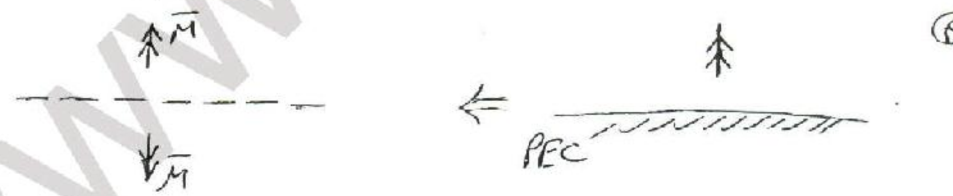
چون مولفه‌ی مماسی E روی سطح صفر است



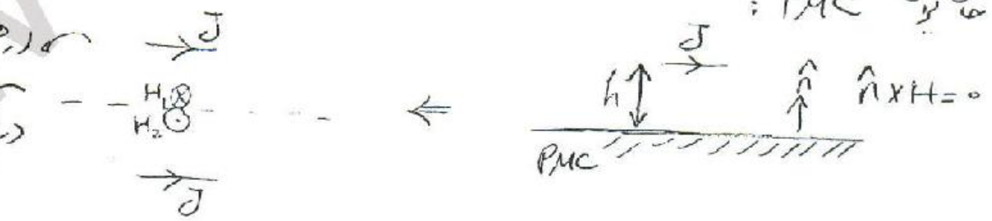
در فضای بالا

$$\bar{A}(\bar{r}) = \int \frac{\bar{J}(\bar{r}')\, e^{-jk_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|}\, dv'$$





حال برای PMC:



در هر جهت بردن تصویر می‌توان

در این جهت دارد بیشتر بالا

و استفاده می‌کنیم در PEC (در برخی فرکانس‌ها عمل می‌کند)

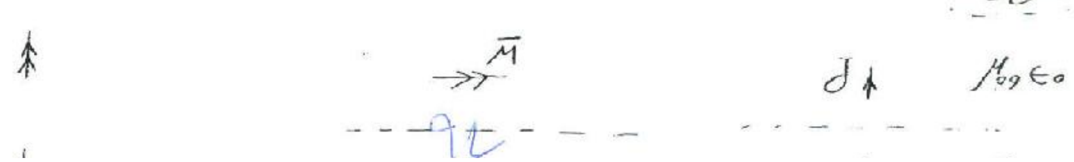
کف مصنوعی PMC

(در برخی از فرکانس‌ها و برخی زوایا عمل کند)

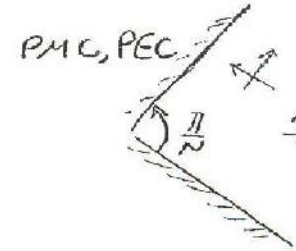
PMC یعنی امپدانس بالا است

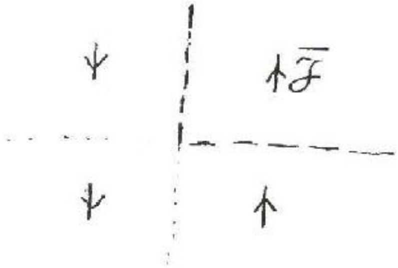
(High Impedence)

به طور کلی

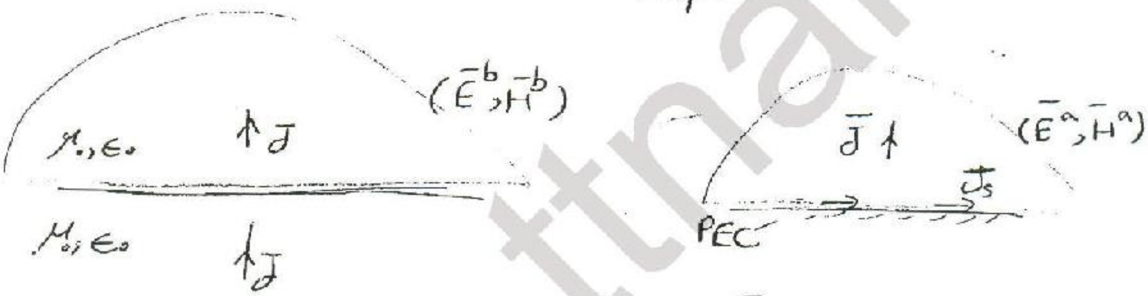


(2N) منبع لازم دارد.

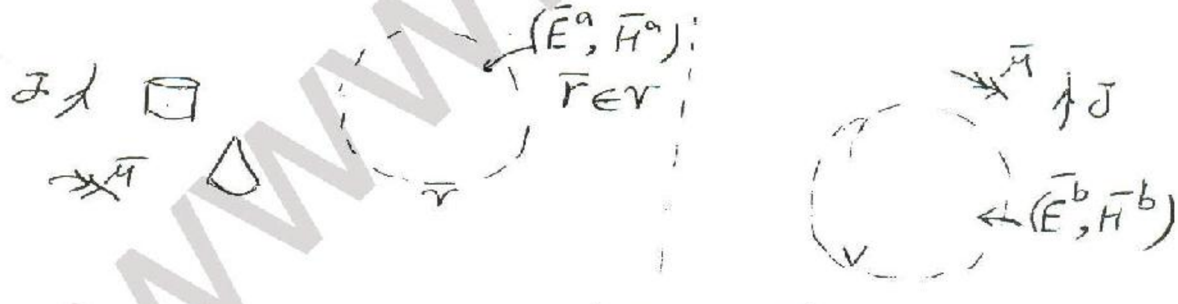




۵-۲- اصل هم ارزی Equivalent Principle



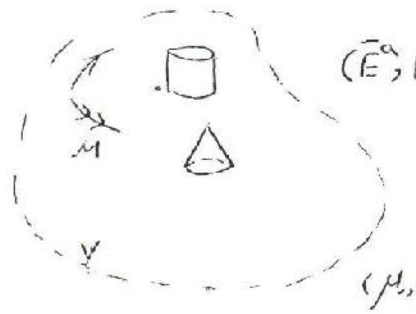
میدان ها با هم، هم ارز هستند.



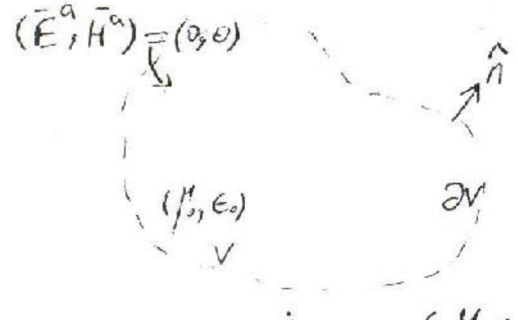
میدان در محیط فضای V، با هم متناظرند.

اصل هم ارزی معادل اصل هویگنس در نور است. (که در Optic به بیان دیگری بیان می‌شود)

و چون براساس معادلات ماکسول بیان می‌شود. (شلکونف)



می‌خواهیم مسئله‌ای را ثابت آوریم به طوری که
بیرون از V همراه با مسئله روبرو باشد.



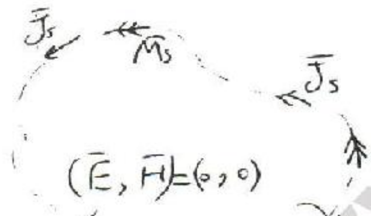
$$(\bar{E}^b, \bar{H}^b) = (\bar{E}^a, \bar{H}^a)$$

میدانهای b درون و بیرون، معادلات ماکسول را ارضا می‌کنند.

فقط ناپیوستگی در روی ∂V مسئله است.

بنابراین شرایط مرزی را برقرار کنیم (روی ∂V)

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\bar{H}^a - 0) = \bar{J}_s \\ -\hat{n} \times (\bar{E}^a - 0) = \bar{M}_s \end{cases}$$



$$(\bar{E}, \bar{H}) = (\bar{E}^a, \bar{H}^a)$$

می‌توان درون را با PEC پر کرد (این هم جواب می‌کند)

نکته: بنابراین کافیست تا میدانهای E, H را فقط روی سطح بدانیم. بنابراین می‌توان $\bar{J}_s$ و $\bar{M}_s$ را حساب کرد. بعد از آن توسط $\bar{J}_s$ و $\bar{M}_s$ مانند منابع تابش میدان‌ها را بیرون محاسبه می‌کنند.

* مانند تکنیک Aperture در آنتن.

$(\mu_0, \epsilon_0) \quad \hat{n} \quad (\mu_0, \epsilon_0)$

$\bar{J}_s$, $\bar{M}_s$

$$\bar{J}_s = \hat{n} \times (\bar{H}_{ape} - 0)$$
$$\bar{M}_s = (\bar{E}_{ape} - 0) \times \hat{n}$$

$\equiv$ PEC $\bar{J}_s$ $\bar{M}_s$

اگر PEC قرار دهیم
باز هم همان $\bar{J}_s$ و $\bar{M}_s$

خیالی $\bar{J}_s$ در مجاورت PEC
تشعشع ندارد، بنابراین
$\bar{M}_s$ تأثیرگذار است
تنها $\bar{E}_{ape}$ را لازم داریم

۸۶/۷/۱۷

HW # 3 ۳-۱، ۳-۲، ۳-۳، ۳-۷، ۳-۹

ادامه اصل هم ارزی:

استفاده از قضیه تصاویر: PEC را با فضای خالی جایگزین می‌کنیم. μ_0, ϵ_0 μ_0, ϵ_0

تنها M_s اثر گذار است.

$\bar{E}^a, \bar{H}^a$

بنابراین تنها $\bar{E}^a$ کافیست.

این مسئله با اطلاعات کمتر قابل حل است. به این دلیل که در این مسئله با $\hat{n}\times\bar{E}$

در شرط Sommerfeld جریان میدان کل را ارضا می‌کند

جریان $\hat{n}\times H$ را نیز داشت در این صورت فضای سمت چپ را ابتدا با PEC، سپس با PMC پر کرد

در نهایت تنها تاثیر $\bar{J}_s$ را بدست آورد.

هم ارزی این استدلال‌ها در OPTIC کاربرد دارد.

نکته: $\bar{J}_s$ اگر به صورت فیزیکی ایجاد شود، مانند جریان [illegible] بی‌حجمی مسطح خواهد کرد.

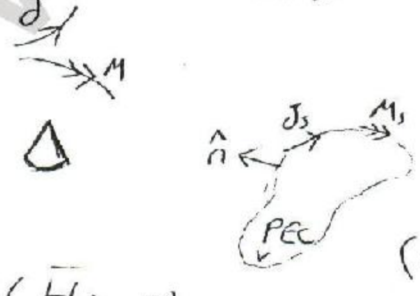
ولی در اینجا $\bar{J}_s$، اعمال impressed است که میدان ناشی از آن در جدار PEC صفر می‌گردد.

(a)

مثال دیگر از اصل هم ارزی

(b)

میدان V ثابت بماند.



در مسئله (b) میدان [illegible] تغییر نکند.

$$(\bar{E}^a, \bar{H}^a) = (\bar{E}^b, \bar{H}^b)$$

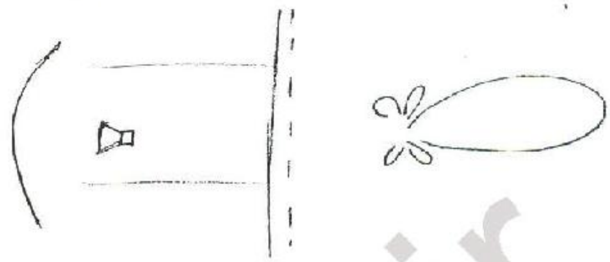
$$\bar{J}_s = \hat{n} \times (\bar{H} - 0)$$

$$\bar{M}_s = \hat{n} \times (0 - \bar{E})$$

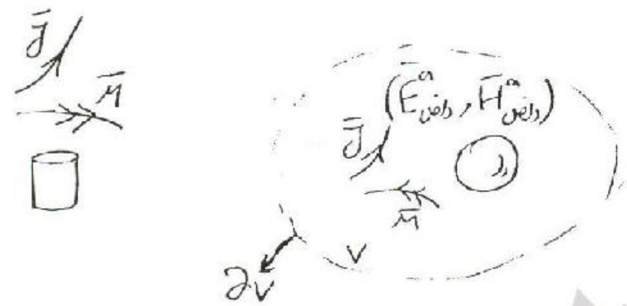
حال اگر بخواهیم ثابت کنیم که $\bar{J}$ (اگر impressed باشد) در مجاورت PEC با هر شکلی که باشد،
میدان ناشی از آن صفر می‌شود. (در قضیه هم پایستی)

از دوگانی نیز می‌توانیم ثابت کنیم که $\bar{M}$ نیز در مجاورت PMC تشعشع نمی‌کند.

Near-Field
Antenna Measurment

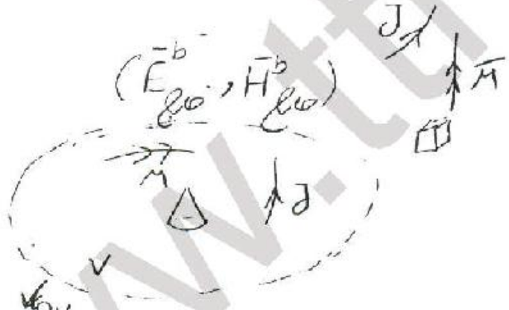


مسئله (a):

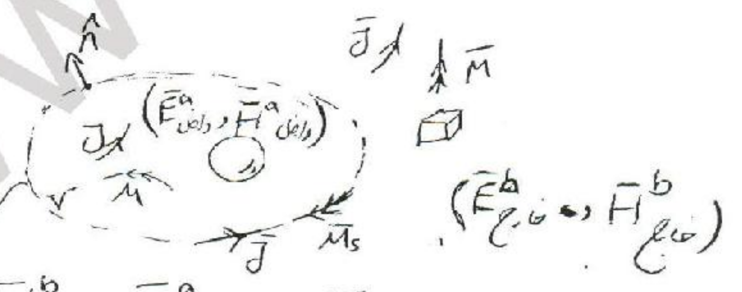


مسئله a و b هیچ ربطی به هم ندارند
تنها ∂V در آنها یکی است.

مسئله (b):



درون مانند a
بیرون مانند b



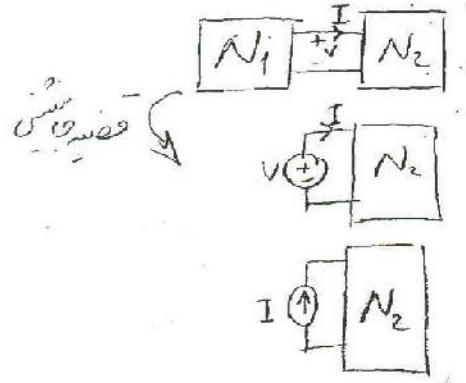
$$\begin{cases} \hat{n} \times (\bar{H}^b_{خارج} - \bar{H}^a_{داخل}) = J_s \\ (\bar{E}^b_{خارج} - \bar{E}^a_{داخل}) \times \hat{n} = M_s \end{cases}$$

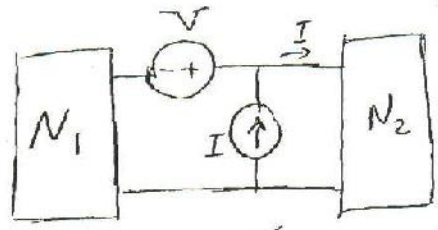
تمام ترکیبات مختلف مسئله a و b نیز قابل اعمال به بیرون و درون هستند

مثال: مثالی از مشابه بودن

تعمیم هم ارزی در مدار و الکترومغناطیس

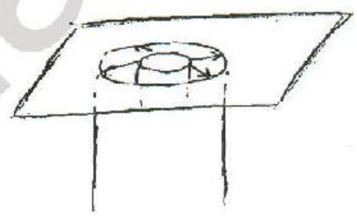
قضیه جانشینی





از یکتایی جواب در مدارها می‌توان گفت که هم ارزی برقرار است.

مثال: می‌خواهیم تشعشع را ببینیم. (ترن و تفاوت تشعشعی)



تقریب: از مودهای بالاتر صرف نظر می‌کنیم در دهانه میدان را TEM در نظر می‌گیریم

$$\bar{E}_{aperture} = \bar{E}_{TEM}$$

$$-\hat{n} \times E_{ap} = \bar{M}_s$$

قسمت پایین را هم PEC

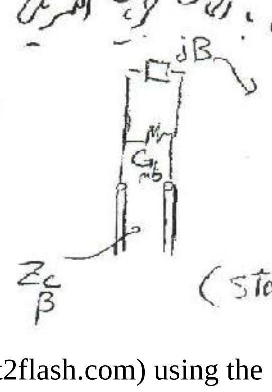
راه اول: استفاده از قضیه تصاویر: M_s دو برابر می‌شود.

μ_0, ϵ_0

$\Rightarrow$ جریان مغناطیسی $= 2 E_{ap} \times \hat{n}$

μ_0, ϵ_0

راه دوم: جایگزینی با جریان الکتریکی



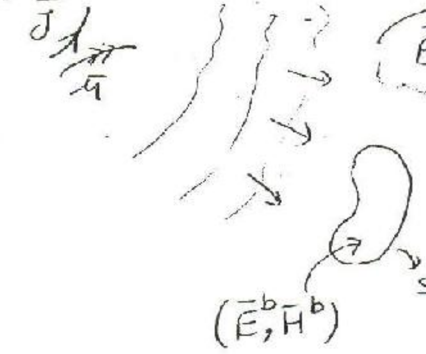
قسمت‌هایی تشعشع نکردن مودهای بالاتر و ذخیره شدن انرژی

(Standing Wave)

۲-۴ - قضیه القاء: Induction Theory

(کاربرد در مسائل scattering)

(a) مسئله:



$$\bar{E} = \bar{E}^i + \bar{E}^s_{\text{scattered}}$$

(غیاب جسم)

یک میدان ناشی از منابع

دیگر میدان جواب داده شده توسط جسم

scatterer

$(\bar{E}^b, \bar{H}^b)$

مسائل Scattering: معلوم $E^i, \bar{H}^i$، مجهول $\bar{E}^s, \bar{H}^s$.

(b) مسئله

$\bar{E}^i, \bar{H}^i$

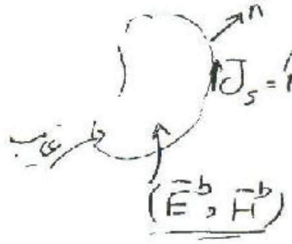
غیاب

* از ترکیب (a) و (b) و قضیه هم‌ارزی، مسئله معلوم را داریم (زیر)

$(\bar{E}^s, \bar{H}^s)$

$$\bar{J}_s = \hat{n}\times(\bar{H}^s - \bar{H}^b)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{J}_s &= \bar{H}^i \times \hat{n} \\ \bar{M}_s &= \hat{n}\times\bar{E}^i \end{aligned}}$$



$\hat{n}$

$\bar{J}_s = \hat{n}\times(\underbrace{\bar{H}^s - \bar{H}^b}_{-H^i})$

ظرف غیاب

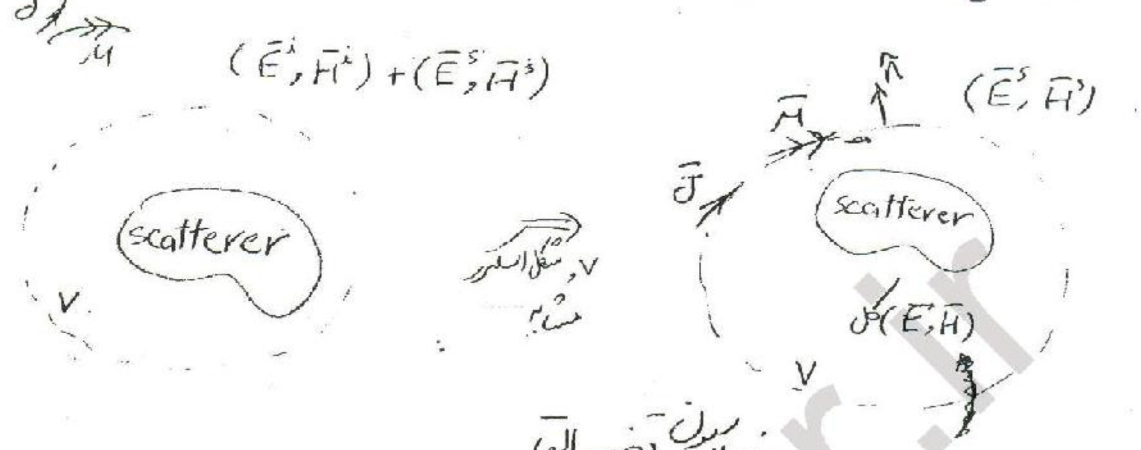
$(\bar{E}^b, \bar{H}^b)$

بنابراین ابتدا مسئله (b) را حل می‌کنیم و با استفاده از آن می‌توان در مسئله معلوم میدان scattered خارجی و داخلی را تعیین کنیم.

۸۹/۷/۲۲

ادامه قضیه الف:

به عبارتی دیگر مسئله را به طرز دیگری می‌توان بیان نمود.



در مسئله بیرون قضیه الف

$$\bar J_s = \bar H^i \times \hat n$$

$$\bar M_s = (\underbrace{\bar E^s - \bar E}_{-\bar E^i}) \times \hat n$$

$\bar E^i, \bar H^i$ میدان‌های تحریک‌اند

بنابراین در این مسئله $\bar M$ و $\bar J$ کاملاً میدان تحریک است. (که در بیرون قرار دارند)

* چون در مسئله جدید V بیرون را از تفاضل منابع داخل و اجسام بیرون حاصل می‌شود که در نهایت به طرف شد منابع ... V میدان [illegible]

* حال فرض می‌کنیم حجم V در بالا روی حجم scatterer قرار گیرد.

حال:

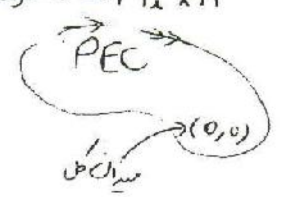
impressed هستند.

$\bar M_s = \hat n \times \bar E_i$

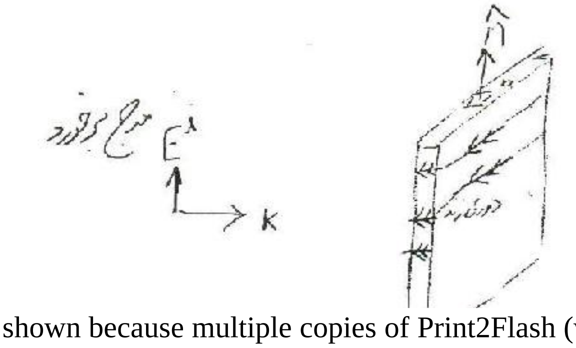
$\bar J_s = \bar H_i \times \hat n$

در واقع جریان‌های سطحی ناشی از $(-H_i), (-E_i)$ خواهند بود.

فقط لازم است جریان‌های ناشی از $\bar M$ را حساب کنیم

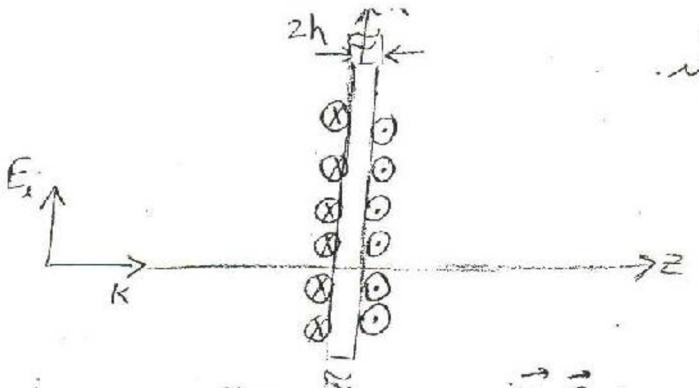


مثال (خاص):



حال کافیست تشعشع ناشی از $\bar M_s$ را بدست آوریم

فرض کنید در راستای y و z ها بی‌نهایت باشد.

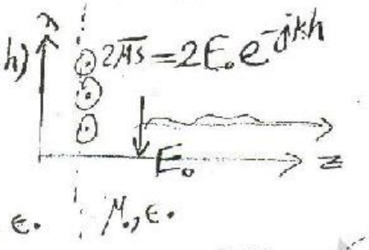


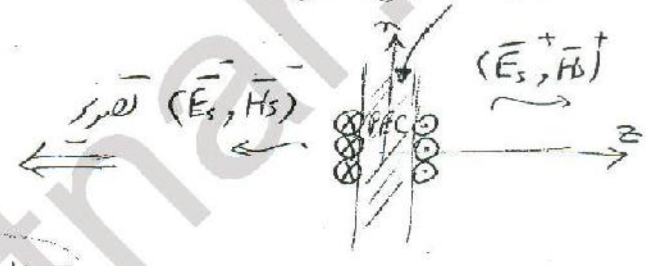
$$\bar{E}^i = E_0\,\hat{n}\,e^{-jk_0 z} = \hat{n} E_0 e^{-j\vec{k}_0\cdot\vec{r}}$$

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

$$\begin{cases}\bar{M}_s = \left(E_0 e^{-jk_0 h}\right)\hat{y} & \text{روی صفحه } z=h \\ \bar{M}_s = \left(E_0 e^{+jk_0 h}\right)(-\hat{y}) & \text{روی صفحه } z=-h\end{cases}$$

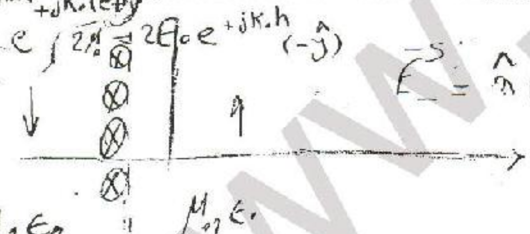
$$\bar{E}_s^+ = 2E_0\, e^{-jk_0 h}\, e^{+jk(z-h)}$$





$$\bar{E}^s_+ = -\hat{n}\, E_0\, e^{-jk_0 z}$$

$$\bar{E}^s_- = -\hat{n} E_0 e^{+jk_0 h} e^{+jk_0(z+h)}$$



$$\bar{E}^s_- = \hat{n} E_0 e^{-jk_0(z+h)} e^{+jk_0 h}$$

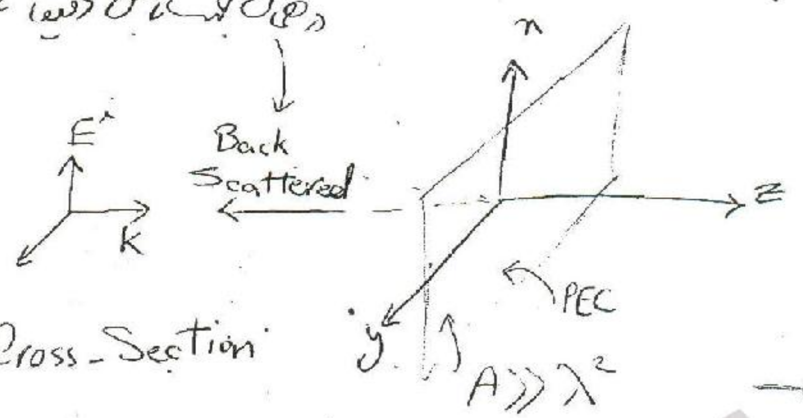
$$\bar{E}^s = \begin{cases} -\hat{n} E_0 e^{-jk_0 z} & z>h \\ -\hat{n} E_0 e^{+jk_0 z} e^{-j2k_0 h} & z<-h \end{cases}$$

* که در سمت راست، میدان کل صفر تولید می‌کند.

جمع کل: $\bar{E} = E_0 e^{-jk_0 z}\,\hat{n} - \hat{n} E_0 e^{+jk_0 z}\, e^{+j2k_0 h}$

مثال کتاب:

در همان جهت تابش دقیقاً بازتابش شود.



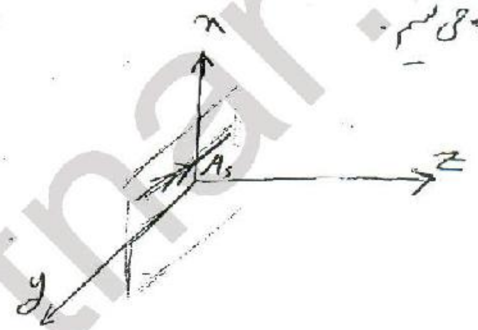
RCS: Radar Cross-Section $\quad A \gg \lambda^2$

به طور تقریبی برای تابش نرمال، برای محاسبه Back Scattered، از جریان‌های مربوط به یک صفحه نامتناهی استفاده می‌کنیم.

نکته: مقدار $\bar{M}_s$ را مانند صفحه نامتناهی بدست می‌آوریم.

اما میدان تشعشعی آن را دیگر تقریب نمی‌زنیم

(لبه‌های صفحه را در نظر نمی‌گیریم)



البته در میدان دور تقریباً هم داریم و در محاسبه $\bar F$ از تقریب‌های میدان دور استفاده می‌کنیم.

$$\bar{M}_s \to 2\bar{M}_s \to \bar F \to \bar E^s$$

$$\bar F = \int \frac{\bar M_s(\bar r') e^{-jk_0|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} ds \qquad |\bar r - \bar r'| \simeq r - \hat r \cdot \bar r'$$

ff

$$\bar F_{ff} = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int \bar M_s(\bar r') e^{+jk_0 \hat r \cdot r'} \cdot ds'$$

صفر

فقط اگر حالت mono static باشد

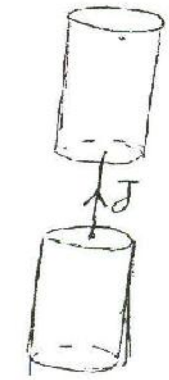
یعنی کل فرستنده و گیرنده یک جا باشد $\hat r, r'$ عمود هستند

$$\bar F_{ff} = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \bar M_s \times (\text{مساحت})(-\hat y) \to d\bar E_{ff}$$

از آن ثابت باشد

$$\left(\bar E^s_{backscattered}\right)_{ff} = -\bar\nabla \times \bar F = -\bar\nabla \times \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_A \bar M_s(\bar r') ds'\right)$$

مسئله آنتن دو قطبی:



تبدیل به مسئله scattering می گردد.

$\bar{J} \rightarrow \begin{matrix} E_i \\ H_i \end{matrix} \xrightarrow{\text{قضیه الف}}$ PEC $\rightarrow (\bar{E}^s, \bar{H}^s)$

$\bar{M}_s = \hat{n} \times \bar{E}_i$

* جریانهای سطحی معادل حل مسئله هستند.

(μ_0, ϵ_0)

قضیه هم‌ارزی $\Longrightarrow$ $(\bar{E}^s, \bar{H}^s)$

میدان بیرونی: E^s

میدان درونی: 0

نکته: در مسئله بالا $\bar{M}_s$ معلوم است.

اما در مسئله روبرو $\bar{J}_s$ مجهول است.

$\bar{J}_s$ از معادله انتگرال به دست می آید

به صورت روبرو

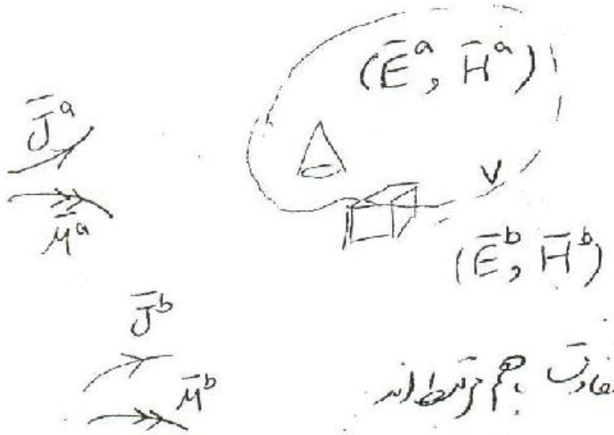
$$\bar{J}_s = \hat{n} \times (\bar{E}^i + \bar{E}^s)$$

که $\bar{E}^s$ ناشی از J_s است. $\bar{J}_s$ را طوری به دست می آوریم که شرایط مرزی بالا صادق باشد.

به همین ترتیب در علم آنتن هدف به دست آوردن جریان J_s است و بعد از آن فرمولاسیون و محاسبات کاملاً در فضای خالی انجام می گردد.

$\bar{J}_s$ چون ناشی از $\bar{E}$ کل می باشد.

۲-۷- قضیه تقابل Reciprocity



فرض کنیم که منابع $\bar J^a$، $\bar M^a$ به تنهایی $\bar E^a$ و منابع $\bar J^b$ و $\bar M^b$ به تنهایی $\bar E^b$ را تولید می‌کنند.

در واقع اگر محیط ثابت باشد، جواب منابع متفاوت به هم مرتبط‌اند.

$$\begin{cases} \bar\nabla \times \bar E^a = -j\omega\mu(\bar r)\bar H^a - \bar M^a \\ \bar\nabla \times \bar H^a = j\omega\epsilon(\bar r)\bar E^a - \bar J^a \end{cases}$$

فعلاً ایزوتروپ بودن را فرض کرده‌ایم، چون $\mu(\bar r)$ و $\epsilon(\bar r)$ اسکالرند.

$$\begin{cases} \bar\nabla \times \bar E^b = -j\omega\mu(\bar r)\bar H^b - \bar M^b \\ \bar\nabla \times H^b = +j\omega\epsilon(\bar r)\bar E^b + \bar J^b \end{cases}$$

ترتیب این رابطه به بردار بستگی ندارد.

$$\bar\nabla\cdot(\bar E^a \times \bar H^b) = \bar H^b\cdot\bar\nabla\times\bar E^a - \bar E^a\cdot\bar\nabla\times\bar H^b$$

$$= \bar H^b\cdot(-j\omega\mu\bar H^a - \bar M^a) - \bar E^a\cdot(j\omega\epsilon(\bar r)\bar E^b + \bar J^b)$$

$$\bar\nabla\cdot(\bar E^b \times \bar H^a) = \dots$$

$$\bar\nabla\cdot(\bar E^a\times\bar H^b - \bar E^b\times\bar H^a) = +\bar H^b\cdot\bar M^a - \bar E^a\cdot\bar J^b - \bar H^a\bar M^b + \bar E^b\bar J^a$$

اگر آن را در ناحیه‌ای فاقد منبع در نظر بگیریم

$$\begin{cases} \bar\nabla\cdot(\bar E^a\times\bar H^b - \bar E^b\times\bar H^a) = 0 \\ \oint_{\partial V}(\bar E^a\times\bar H^b - \bar E^b\times\bar H^a)\cdot d\bar s = 0 \end{cases}$$

فرم نقطه‌ای تقابل لورنتس

فرم انتگرالی 〃 〃

نکته: در صورت وجود رسانا، اضافه کردن جمله $\bar E\sigma(\bar r)$ به معادلات، باز هم عبارات فوق برقرار است.

حال فرض کنیم حجم تمام فضا باشد :

$$\boxed{\oint_{\partial V}^{\infty} (\bar{E}^a \times \bar{H}^b - \bar{E}^b \times \bar{H}^a) \cdot d\bar{s} = 0}$$

باز هم صفر می شود زیرا در ∂V که بی نهایت است امواج حاصل از منابع مانند موج کروی بوده

$$\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

و مانند موج صفحه ای

$$\frac{1}{K_0} \cdot \frac{\vec{k} \times \bar{E}^a}{\eta_0} = \bar{H}^a$$

HW #4 : ثابت کنید ... تمامی

$$\oint_{\infty \, \partial V} (\bar{E}^a \times \bar{H}^b - \bar{E}^b \times \bar{H}^a) \cdot d\bar{s} = 0$$

3-20
3-22
3-24

$$-\oint_{\partial V} (\bar{E}^a \times \bar{H}^b - \bar{E}^b \times \bar{H}^a) \cdot ds = \int_V (\bar{E}^a \cdot \bar{J}^b - \bar{H}^a \cdot \bar{M}^b - \bar{E}^b \cdot \bar{J}^a + \bar{H}^b \cdot \ldots$$

نکته مهم : فرض هم منابع محدود در مسئله است

$$\underbrace{\int_{V_b \,(\text{حجم منبع } b)} (\bar{E}^a \cdot \bar{J}^b - \bar{H}^a \cdot \bar{M}^b)\, dv}_{\text{Reaction of field "a" on source "b"}} = \int_{V_a} (\bar{E}^b \cdot \bar{J}^a - \bar{H}^b \cdot \bar{M}^a)\, dv$$

Reaction of field "a"
on source "b"

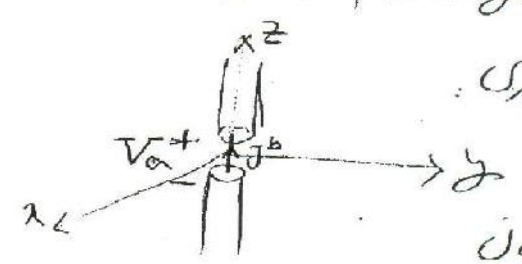
$\langle a, b \rangle$
میدان   منبع

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$$

در فضای reciprocity برقرار است

$$\int_{V_b} \bar{E}^a \cdot \bar{J}^b \, dv$$

منابع جریانی :



المنت جریان

$$\bar{J}^b = \begin{cases} \hat{z} I^b l & -\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2} \\ 0 & |z| > \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$\int_{V_b} \bar{E}^a \cdot \bar{J}^b \, dv = \int_{V_b} \bar{E}^a \cdot (\hat{z} I^b \delta(x)\delta(y)) \, dx\, dy\, dz$$

$$I^b \underbrace{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} E^a(0,0,z) \cdot d\ell}_{\text{اختلاف ولتاژ ناشی از منبع } a} = -I^b V^a$$

وقتی b وجود ندارد.

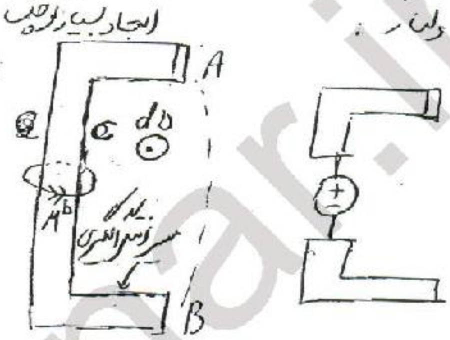
۲) منبع ولتاژ.

* در واقع منبع ولتاژ با جریان $\vec{M}$ مدل سازی می‌شود.

$\hat{M}$ loop

در صورتی که $\bar{M}=0$، اتصال کوتاه می‌شود.

ایجاد یک میدان کوچک



$$\oint_{\partial S} \bar{E} \cdot \bar{d\ell} = -j\omega \int_S \mu \vec{H} \cdot ds - \int \bar{M} \cdot \bar{ds}$$

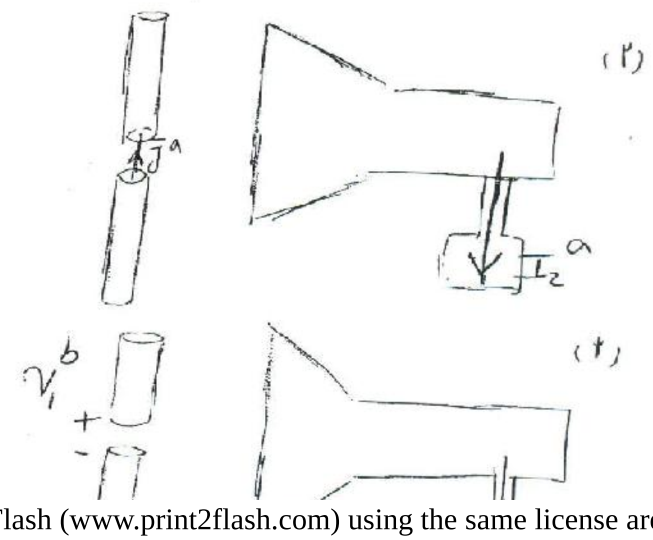
اگر در $\bar{H}$ فرض نباشد (کوچک است)

که صفر نیست.

$$\int_A^B \bar{E} \cdot d\ell + \int_{ACB}^{B} E \cdot d\ell = 0 - \int \bar{M} \cdot \bar{ds}$$

$$\int (\bar{H}^a \cdot \bar{M}^b) \, dv = \oint V^b I^a$$

$H \bar{d\ell}$ $\quad d\ell \rightarrow \quad \vec{M}$ در



$$I_1^a V_1^b = I$$

$$\frac{V_1^b}{V_2^b} = \frac{I_2^a}{I_1^a}$$

نکته بسیار مهم :

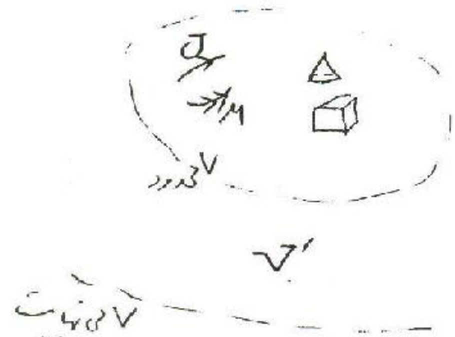
نتیجه گیری : برای برابر بودن reaction

حتماً باید این شرط تساوی را برقرار کنیم: $\oint_{S=\partial V} (\bar{E}^a \times \bar{H}^b - \bar{E}^b \times \bar{H}^a)\cdot d\bar{s} = 0$

در غیر این صورت $\langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle$

* نکته فوق واقعاً باید دقت گردد

چون صفر شدن انتگرال فوق، برای هر سطح بسته ای اتفاق می افتد



ادامه ۷-۲- قضیه تقابل :

$$\begin{cases} \mu(\bar{r}) & \text{ایزوتروپ غیر همگن} \\ \epsilon(\bar{r}) & \text{ایزوتروپ غیر همگن} \end{cases} \Rightarrow \nabla\cdot(\bar{E}^a \times \bar{H}^b - \bar{E}^b \times \bar{H}^a) = 0$$

سؤال : می خواهیم در صورت عدم ایزوتروپ بودن محیط، قضیه تقابل را بررسی کنیم.

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} & \text{ایزوتروپ} \\ \vec{D} = \bar{\bar{\epsilon}}\cdot\bar{E} & \text{غیر ایزوتروپ} \end{cases}$$

ضرب نقطه ای

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_{xx}\hat{x}\hat{x} + \epsilon_{xy}\hat{x}\hat{y} + \dots + \epsilon_{zz}\hat{z}\hat{z}$$

$\hat{x}\hat{y}$: Dyad . به تنهایی بی معنی است.

$\hat{x}\hat{y}\cdot\hat{x} - \hat{x}(\hat{y}\cdot\hat{x})$ ترتیب مهم است.

$\hat{x}\cdot\hat{x}\hat{y}$

از فرم ماتریسی استفاده می شود

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$\bar{B} = \bar{\bar{\mu}} \cdot \bar{H}$

حال با بررسی دوگانی به تقابل :

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E}^a = -j\omega \bar{\bar{\mu}} \cdot \bar{H}^a - \bar{M}^a \\ \bar{\nabla} \times \bar{H}^a = j\omega \bar{\bar{\epsilon}} \cdot E^a + \bar{J}^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E}^b = -j\omega \bar{\bar{\mu}} \cdot \bar{H}^b - \bar{M}^b \\ \bar{\nabla} \times \bar{H}^b = j\omega \bar{\bar{\epsilon}} \bar{E}^b + \bar{J}^b \end{cases}$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{E}^a \times \bar{H}^b) = \bar{H}^b \cdot \bar{\nabla} \times \bar{E}^a - \bar{E}^a \cdot (\nabla \times \bar{H}^b)$$

$$= -j\omega H^b \cdot (\bar{\bar{\mu}} \cdot \bar{H}^a) - j\omega \bar{H} \cdot \bar{M}^a - \bar{E}^a \cdot (j\omega \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \bar{E}^b + \bar{J}^b)$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{E}^b \times \bar{H}^a) = -j\omega \bar{H}^a \cdot (\bar{\bar{\mu}} \cdot \bar{H}^b) - \cdots$$

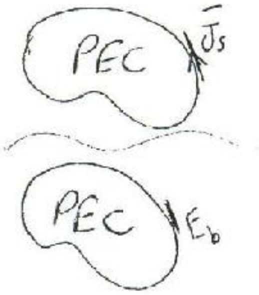
می‌توانیم حالات خاصی را پیدا کنیم که در آن قضیه لورنتس برای آنها برقرار باشد.

به عنوان مثال اگر $\bar{\bar{\epsilon}}$ و $\bar{\bar{\mu}}$ تانسورهای متقارن باشند، تقابل برقرار است.

در غیر این صورت نیست.

حالات خاص دیگر نیز وجود دارد که نیاز به تکنیک زیادی دارد.

اثبات اینکه $J_{impresed}$ روی PEC (با هر شکلی) تشعشع نمی‌کند.



$\times E_a$

(E^a, H^a)

$$\int E^a \cdot J^b \, dv = \int E^b \cdot J^a \, dv$$

چون مماسی روی PEC صفر است.

J^b

چون صفر

حال J^b را در همه جهت قرار دهیم، هر بار مؤلفه $\bar{E}^a$ صفر می‌شود.