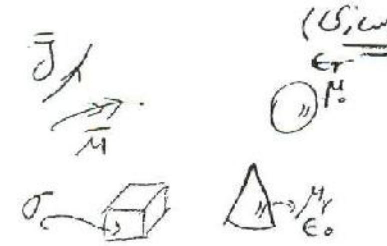
۸-۲- معادلات انتگرال و جریان های مؤثر (effective currents)

می خواهیم بررسی کنیم که اگر بخواهیم کل فضا را خالی کنیم (همگن سازی) $\epsilon_0 \; \mu_0$



چه تغییری لازم است در معادلات ماکسول ایجاد کنیم.

$$\begin{cases} \bar\nabla \times \bar E = -j\omega\mu(\bar r)\bar H - \bar M \\ \bar\nabla \times \bar H = +j\omega\epsilon(\bar r)\bar E + \bar J \end{cases}$$

$$\bar\nabla \times \bar E = -j\omega(\mu-\mu_0+\mu_0)\bar H - \bar M = -j\omega\mu_0\bar H - \bar M_e - \bar M$$

$$\bar M_e = +j\omega\left(\mu(\bar r)-\mu_0\right)\bar H$$

$\bar M_e$ تنها در جاهایی غیر صفر است که ماده مغناطیسی باشد $\mu(\bar r) \neq \mu_0$

مسئله جدید :

جریان های مجهولی در scatterer ها

که فقط در حجم مواد غیر صفر هستند

برای رسانای کامل $\sigma \to \infty$

$\bar J_e = \sigma \bar E$

(μ_0, ϵ_0)

$$\bar J_e = +j\omega\left(\epsilon(\bar r)-\epsilon_0\right)\bar E + \bar J$$

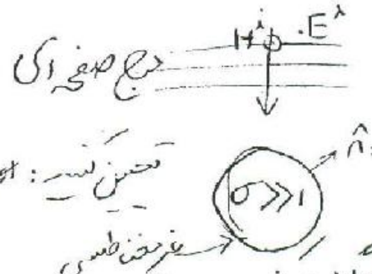
$$\bar\nabla \times \bar H = +j\omega\epsilon_0\bar E + \bar J_e + \bar J_0$$

$\bar J_e$ هم تنها در scatter ها غیر صفر هستند.

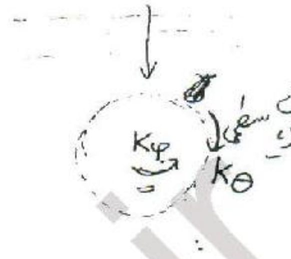
تا این جا تنها محیط را همگن کردیم و مسئله هنوز حل نشده.

* واضح است که جریان های مؤثر منشأ میدان های scattered هستند

مثال ۱ : صفحه ای ... به کمک نوشتن معادله انتگرال (جریان‌های روی کره)



جریان روی کره $\bar{K} = K_\varphi(\theta,\varphi)\hat{\varphi} + K_\theta(\theta,\varphi)\hat{\theta}$



اپراتور تعیین میدان در فضا ناشی از جریان $\mathcal{L}\{\bar{K}\} = \bar{E}^s$

$$\mathcal{L} \rightarrow \int_{\text{سطح کره}} \frac{\bar{K}(\bar{r}')\,ds'\,e^{-jk_0|r-r'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|} = A^{[A]}$$

$\bar{\nabla}\cdot\bar{H} = 0$

$\bar{H}^s = \bar{\nabla}\times\bar{A}$, $E^s = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}(\bar{\nabla}\times\bar{H}^s) \longrightarrow$ می‌توان از Mixed Potential هم استفاده کرد ($\nabla\cdot E \neq 0$)

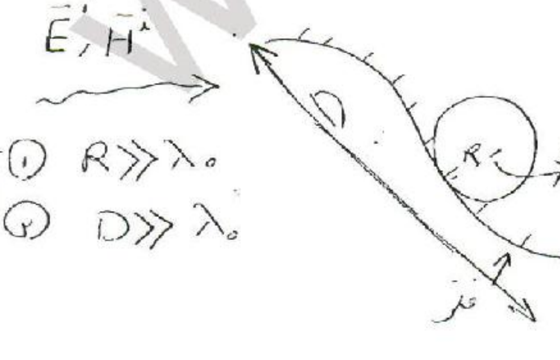
$\bar{E}^s = -\bar{\nabla}\phi + \bar{\nabla}\times\bar{F}$ → MPIE

شرط مرزی E مماسی برابر صفر $\longrightarrow$ $\hat{n}\times(\mathcal{L}\{\vec{K}\}) = -\hat{n}\times E^i$ $r=a$

منجر به یک معادله انتگرال

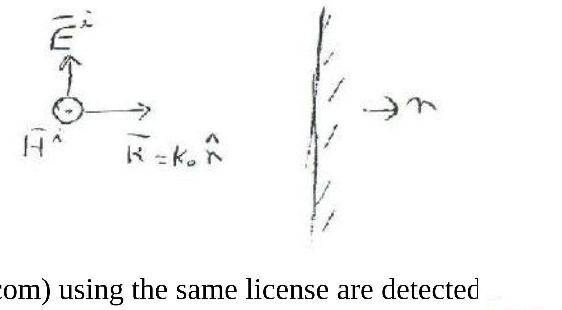
برای بدست آوردن $\vec{K}$ خواهد بود.

۱-۸-۲ : روش نور فیزیکی: (Physical Optics), (PO)



شرایط
① $R \gg \lambda_0$
② $D \gg \lambda_0$

$J_e = 2\hat{n}\times H^i$



$\bar{M}_e = j\omega(\mu-\mu_0)\bar{H} \rightarrow$ میدانهای کل

$\bar{J}_e = j\omega(\epsilon-\epsilon_0)\bar{E}$

۸۴/۸/۱

تقریب نور فیزیکی (مناسب برای Backscattering)

به طور تقریبی $J_s = \hat{n} \times 2\bar{H}_i$

$$J_s = \hat{n} \times \bar{H}_{tot}$$

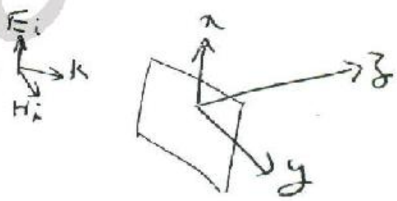
جواب برای ناحیه محدود درست است.

در $J_s = 0$

در واقع حل ما در وضعیتی است که ما در هر (k) سطح شکل میدان $\bar{H}$ برخوردی را داریم.

مثال: صفحه‌ای محدود داریم

$$\bar{E}^s = \frac{e^{-jk.r}}{r} f(\theta,\varphi)$$



$$\vec{A}(\bar{r}) = \int \frac{J_s(r')\, ds'\, e^{-jk_0|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$$

چون جریان‌ها فاز دارند.

$$dA = \frac{2\hat{n} \times \bar{H}^i\, dx dy}{4\pi r} e^{-jk_0 r}$$

$$\bar{H}^s = \bar{\nabla} \times \bar{A} = \nabla \times \left(\bar{C}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\right) = \bar{\nabla}(\ ) \times \bar{C} \Rightarrow d\bar{H}^s = \frac{-2\hat{n}\times\bar{H}^i\, dx dy}{4\pi} \times \nabla\left(\frac{e}{r}\right.$$

$$d\bar{H}^s = \frac{2\hat{n}\times\bar{H}^i\, dx dy}{4\pi} \times \left(-jk\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\hat{r}\right)$$

صفحه الف فقط در جهت سطح تابشی

جواب یکسانی با حل فیزیکی بالا می‌دهد. $\bar{M} = 2\hat{n}\times\bar{E}^i$

در قضیه الف و چون $\bar{M}$ دقیق بود ولی تصویر کردن دقیق نبود. ولی در تقریب فیزیکی خود جریان تقریب دارد. نور فیزیکی برای حل جوابش درست است.

در کل از هر دو جریان برای مبدأیابی می‌توان استفاده کرد.

(Backscattering)

میدانها TE و TM :

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} \qquad \bar{E}\begin{cases}E_x\\E_y\\E_z\end{cases} \qquad \bar{H} = \begin{cases}H_x\\H_y\\H_z\end{cases}$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega\epsilon \bar{E}$$

$$\bar{\nabla}.\bar{E} = 0 \longrightarrow \bar{E} = -\bar{\nabla}\times\bar{F}$$

$$\bar{\nabla}.\bar{H} = 0 \rightarrow \bar{H} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$$

$$\bar{H} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$$

$$\nabla\times E = -j\omega\mu\bar{H} = -j\omega\mu\,\nabla\times A \Rightarrow \nabla\times(\bar{E} + j\omega\mu\bar{A}) = 0$$

$$\bar{E} + j\omega\mu\bar{A} = -\bar{\nabla}\Phi^a$$

$$\Rightarrow \bar{E} = -\bar{\nabla}\Phi^a - j\omega\mu\bar{A} \xrightarrow{\bar{\nabla}.} 0 = -\nabla^2\Phi^a - j\omega\mu(-j\omega\epsilon)\Phi^a$$

معادله دیفرانسیل

$$\longrightarrow \nabla\times(\nabla\times A) = j\omega\epsilon(-\bar{\nabla}\Phi^a - j\omega\mu\bar{A})$$

$$\bar{\nabla}(\bar{\nabla}.A) - \nabla^2 A = \omega^2\mu\epsilon A - j\omega\epsilon\nabla\Phi^a$$

$$\nabla.A = -j\omega\epsilon\Phi^a$$

معادله موج — wave potential

$$\Rightarrow \nabla^2 A + \omega^2\mu\epsilon A = 0$$

Φ^a هم حل معادله موج است.

$$\Rightarrow \begin{cases}\bar{\nabla}^2\bar{A} + k^2 A = 0\\ \nabla^2\Phi^a + k^2\Phi^a = 0\end{cases}$$

ندا   ۸۹/۸/۱۴

۹-۲- تفکیک میدانها به میدانهای TE و TM

$$\begin{cases}\bar\nabla\times\bar E=-j\omega\mu\bar H\\ \bar\nabla\times\bar H=j\omega\epsilon E\end{cases}$$

$$\Downarrow\quad \bar\nabla\cdot\bar E=0$$

$$\bar\nabla\cdot\bar H=0\Rightarrow\boxed{\bar H=\bar\nabla\times\bar A\Rightarrow\bar E=-j\omega\mu\bar A-\nabla\Phi^a}$$

$$\begin{cases}\bar\nabla^2\bar A+k^2A=0\\ \bar\nabla\cdot\bar A=-j\omega\epsilon\Phi^a\end{cases}$$

wave potential $\bar A=A_x\hat x+A_y\hat y+A_z\hat z$

اگر: $\bar A=A_x\hat x \qquad \nabla^2A_x+k^2A_x=0$

$\xrightarrow{\text{در این صورت}} H_x=0$

$\xrightarrow[\text{در جهت } x]{\text{فقط } A \text{ دارای}} \bar H=\bar\nabla\times\bar A$

$$\frac{\partial}{\partial x}A_x$$

$$E=-j\omega\mu\bar A+\bar\nabla\left(\frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\cdot A\right)$$

$$\rightarrow\begin{cases}H_{x_m}=0\\ H_{y_m}=\frac{\partial}{\partial z}A_x\\ H_{z_m}=-\frac{\partial}{\partial y}A_x\end{cases}$$

$$\begin{cases}E_{x_m}=\frac{1}{j\omega\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial x^2}A_x-j\omega\mu A_x\\ E_{y_m}=\frac{1}{j\omega\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}A_x-\underbrace{\cancel{j\omega\mu A_y}}_{0}\\ E_{z_m}=\frac{1}{j\omega\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}A_x-\underbrace{\cancel{j\omega\mu A_z}}_{0}\end{cases}$$

حال برای اینکه میدان های ورودی نداشته باشیم، $\bar F$ در کنار $\bar A$ را تعریف می‌کنیم.

$$A\rightarrow\begin{cases}\bar E_m\\ \bar H_m\end{cases}$$

$$\boxed{F\rightarrow\begin{cases}\bar E_e=-\bar\nabla\times\bar F\\ \bar H_e=\frac{1}{j\omega\mu}\bar\nabla(\bar\nabla\cdot\bar F)-j\omega\epsilon\bar F\end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar E_m&=\frac{1}{j\omega\epsilon}\bar\nabla(\bar\nabla\cdot\bar A)-j\omega\mu\bar A\\ \bar H_m&=\bar\nabla\times\bar A\end{aligned}}$$

maxwell

$$\nabla\times(\underbrace{\bar H+j\omega\epsilon\bar F}_{-\bar\nabla\Phi^f})=0$$

حال با مجموعه معادلات کل میدان‌ها (هر میدان دلخواهی) را می‌توان تولید کرد.

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{A} &= A_x \hat{x} \\ \bar{F} &= F_x \hat{x}\end{aligned}}$$

یک مجموعه کامل

پس تنها دو مؤلفه اسکالر (به جای ۶ مؤلفه H, E) نیاز داریم.

فقط F_x:

$$\begin{cases} H_{xe} = \dfrac{1}{j\omega\mu}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \underbrace{k^2}_{\omega^2\mu\epsilon}\right) F_x \\ H_{ye} = \dfrac{1}{j\omega\mu}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}\right) F_x \\ H_{ze} = \dfrac{1}{j\omega\mu}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial x}\right) F_x \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{xe} = 0 \\ E_{ye} = -\dfrac{\partial}{\partial z} F_x \\ E_{ze} = \dfrac{\partial}{\partial y} F_x \end{cases}$$

از آنجایی که F_x مؤلفه E_x تولید نمی‌کند ← از $E_{xm} = E_x^{\text{کل}}$ ← A بدست می‌آید.

" " A_x " H_x " ← " $H_{xe} = H_x^{\text{کل}}$ ← F بدست می‌آید.

← جواب فوق در صورتی است که:

$$① \rightarrow \begin{cases} E = \text{داده شده} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \\ H = \text{داده شده} = H_x \hat{x} + H_y \hat{y} + H_z \hat{z} \end{cases}$$

$② \rightarrow E_x$

$③ \Rightarrow \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} A_x + k^2 A_x = j\omega\epsilon E_x$ حل دیفرانسیل

به همراه شرایط مرزی اگر حل شود ← A_x بدست می‌آید.

$$\rightarrow (E - E_m) \cdot \hat{x} = 0$$

$$④ \rightarrow \bar{H} - \bar{H}_m = \bar{H}_e \rightarrow \bar{H}_e \cdot \hat{x}$$

$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right) F_x = j\omega\mu (\bar{H}_e \cdot \hat{x})$ حل معادله.

به همراه شرایط مرزی $\Leftarrow F_x$

نکته مهم:

$$A = \vec{c}\,\psi \rightarrow E_m, H_m$$

اسکالر صدق کنند در معادله هلمهولتز $\Rightarrow \bar{H}_m \cdot \bar{c} = 0$

$$\begin{cases} \bar{E}_e = \bar{E} - \bar{E}_m \\ \bar{H}_e = \bar{H} - \bar{H}_m \end{cases} \qquad F = \vec{c}\, \psi_2 \rightarrow E_e \ H_e \rightarrow E_e \cdot \bar{c} = 0$$

$$A \rightarrow H_m \cdot \bar{c} = 0 \implies \text{Transverse Magnetic to } \bar{c}$$

$$F \rightarrow \bar{E}_e \cdot \bar{c} \implies \text{Transverse Electric to } \bar{c}$$

$$: \quad \bar{E} = \underbrace{\bar{E}_e}_{TE} + \underbrace{\bar{E}_m}_{TM}$$

ـ در مورد موج‌های صفحه‌ای یا دیگر امواجی که TEM هستند می‌توان با در نظر گرفتن هر راستای دیگری غیر از راستای انتشار، ~~[illegible]~~ میدانهای TE و TM را استخراج نمود.

در صورتی که راستای انتشار را در نظر بگیریم مجهول‌های ψ_1 و ψ_2 به یک مجهول تقلیل می‌یابد

نقطه دریافت

$$A_e = 4\pi r^2 \frac{|E_s|^2/\eta}{|E_i|^2/\eta}$$

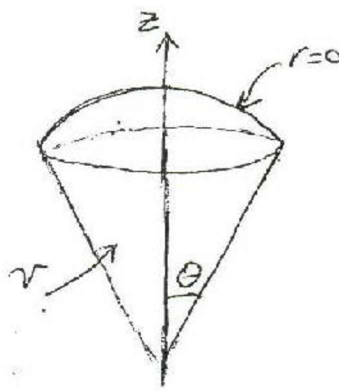
نکته :

فصل سوم: توابع موج صفحه‌ای

۱-۳- مقدمه:

مسائل کانونیک: فضای حل دارای مرزهایی است که بر سطوح مختصات یک سیستم شناخته شده مختصات منطبق است.

۱- راستگوشه $x=cte$
۲- استوانه‌ای $\rho=cte$
۳- کروی $r=cte$



از روش‌های تحلیلی: مهمترین آنها روش تفکیک متغیرها

صورت مسئله:

۱- مسائل Scattering
۲- Resonators ← توابع دیگر دقیقاً در دایره.

۱- روش تفکیک متغیرها
۲- مسائل مرجع یا رزوناتوری و همچنین پراکندگی
۳- تکنیک‌های دیگر

۲-۳- توابع موج در دستگاه دکارتی.

$$\left.\begin{matrix}\bar{E}\\ \bar{H}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\bar{E}_{TE}+\bar{E}_{TM}=\bar{E}\\ \nabla^2\psi+k^2\psi=0\end{matrix}}$$

۸۴/۸/۸

دیدیم که ψ_1 که در معادله هلمهولتز صدق کند می‌تواند مثلاً تمام میدانهای TM

و ψ_2 می‌تواند تمام میدانهای TE را تولید کند.

ما برای ارائه به بعد روی $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$ تمرکز می‌کنیم.

در دکارتی: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\psi=0$

$$\xrightarrow{\text{جداسازی متغیرها}} \psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}+k^2=0$$

$$\frac{X''}{X}=\text{ثابت}=-k_x^2 \text{ یا } v^2$$

مانند یک مسئله مقدار ویژه است

$$\Downarrow$$

$$L\{X\}=\lambda X$$

$$\begin{cases} X(x)= \begin{matrix}\cos k_x x\\ \sin k_x x\end{matrix} \\ X(x)=e^{\pm v x}\end{cases}$$

مقادیر ویژه پیدا می‌شوند مگر با استفاده از

شرایط مرزی: $\begin{cases}X(a)\\ X(b)\end{cases}$

اگر اپراتور L، selfadjoint باشد (خودالحاقی)

$$\Downarrow$$

$$\langle L\{X_1\},X_2\rangle \underset{\text{تعریف خودالحاقی}}{\triangleq} \langle X_1,L\{X_2\}\rangle$$

درنتیجه: ① λها حقیقی

② مجموعه φ_nها کامل است

③ دو به دو بر هم عمودند

نکته مهم: شرایط مرزی هستند که اپراتور را خودالحاقی می‌کنند

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n(x)=0 \Rightarrow C_n=0$$

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n(x)$$

	Complete	
λ_1	$\varphi_1(x)$	$L\{\varphi_1\}=$
λ_2	$\varphi_2(x)$	
$\vdots$		

۵۲

$$L\left\{\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{d}{dx}X(x)\right)+q(x)X(x)\right\} = L\{X\}$$

$$\begin{cases} A X(a) + B X'(a) = 0 \\ C X(b) + D X'(b) = 0 \end{cases}$$

همگی نباید صفر باشند

خیلی خیلی مهم است که شرایط مرزی به طور متقابل باشد وگرنه به مسئله اشتورم لیوویل منتهی نمی‌شود

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{d}{dx}X(x)\right) + q(x)X(x) - \underbrace{W(x)}_{\text{نامنفی}}\lambda X(x) = 0$$

به این فرم معادله اشتورم لیوویل گویند

$$\Rightarrow W=1,\ q=0,\ P=1$$ در صورتی باشد $\Rightarrow$ این مسئله تعداد زیادی را در بر می‌گیرد.

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = \text{ثابت} \\ A X(a) + B X'(a) = 0 \\ C X(b) + D X'(b) = 0 \end{cases}$$

شرایط مرزی روی ψ

$$X(x) = \sum C_n \varphi_n$$

با توجه به شرایط مرزی ممکن است k_n ها طیف پیوسته باشند

$$\int_{k_{x1}}^{k_{x2}} A(k_x)\cos(k_x x)\,dk_x$$

$$(k_{x1} < k_x < k_{x2})$$

۳-۳- موج صفحه‌ای Plane Wave

معادلات ماکسول بدون منبع در محیط همگن

$$\begin{cases} \nabla\times\bar{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla\times\bar{H} = j\omega\epsilon\bar{E} \end{cases}$$

مستقل از مکان

$$A = \psi\,\hat{z}$$ همواره TM در جهت z است.

تابع موج صفحه‌ای: $\psi = e^{-j\vec{k}\cdot\bar{r}} = e^{-jk_x x}\,e^{-jk_y y}\,e^{-jk_z z}$

سطوح ثابت آن صفحاتی است، موج صفحه‌ای

$\vec{K}\cdot\bar{r} = cte$: صفحاتی که بر $\vec{K}$ نرمال است.

از بین k_y و k_x و k_z، دوتا کاملاً آزادند.

$$\nabla^2\psi + \omega^2\mu\epsilon\psi = 0 \qquad k_x^2+k_y^2+k_z^2 = k^2 = \omega^2\mu\epsilon$$

$\bar{A} = \psi\hat{z} \rightarrow (\bar{E}, \bar{H})$ میدان منبع صفحه‌ای

$$\begin{cases}\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0\\ \bar{\nabla}\cdot\bar{H} = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar{E}\cdot\bar{k} = 0\\ \bar{H}\cdot\bar{k} = 0\end{cases}$$

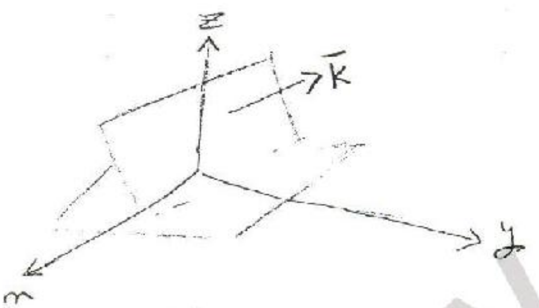
امواج صفحه‌ای TEM to $\vec{k}$ هستند

ولی در روش فوق TM to $\hat{z}$ می‌باشد

همان تابع موج صفحه‌ای

$$\bar{F} = \psi\hat{z} \Rightarrow (E_e, H_e) \rightarrow TE \text{ to } \hat{z}$$

$|\vec{k}| = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ فاصله دو صفحه فاز ثابت با فاز برابر به اندازه $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$ می‌باشد



به یک ψ معادل زیادی از میدان بدست می‌آید (از)

اگر $A = \psi\hat{z}$ روی $\hat{z}$ نشین

$TM_z \qquad A = \psi\hat{z}$

$\begin{cases}H_x\\ H_y\end{cases}$ میدان TM_z

مسأله ۱: H ها

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{H}_{TM}| \\ |\vec{H}_{TE}| \end{pmatrix}$$

مطلوب است تعیین مؤلفه‌های TE_z و TM_z یک موج صفحه‌ای که در بردار موج آن $\vec{k}$ معلوم باشد.

نکته مهم: ($\vec{k}$ هم جهت با $\hat{z}$ نیست) چرا؟

مسأله ۲: H_x, E_x

$H_y = \ldots \qquad E_y = \mathcal{L}\{E_x, H_x\}$

$H_z = \ldots \qquad E_z = \ldots$ (ربطی به موج صفحه‌ای ندارد)

بقیه مؤلفه‌ها را بدست آورید

اگر محیط همگن باشد: و تحقیق کنید که آیا $\begin{cases}\nabla\cdot E = 0\\ \nabla\cdot H = 0\end{cases}$ برقرار هست یا نه؟

مثلاً اگر بخواهیم میدانی تولید کنیم که فقط E_x داشته باشد.

$TE_z \qquad F = \Psi \hat{z} \qquad E_z = 0$

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial y} F_z = -\frac{\partial}{\partial y}\Psi$$

$$E_y = \frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

اگر: $F = \Psi(y,z)\hat{z} \qquad \Psi(y,z) = e^{-jk_y y} e^{-jk_z z}$

$\Rightarrow E_y = E_z = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla}(\Psi) \times \hat{z}}$$

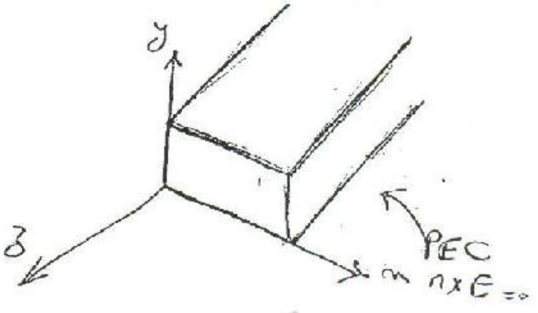
$$\Psi = e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \Rightarrow \vec{\nabla}\Psi = -j\vec{k}\Psi$$

$$\vec{E} = (jk\Psi)\underbrace{(\vec{k} \times \hat{z})}_{\text{عمود بر } \vec{k}, \hat{z}}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_y)\, e^{-jk_y y} e^{-jk_z z}\, dk_y$$

۸۶/۸/۱۳

۴-۲- موجبر راستگوشه با دیواره‌های رسانا:



باز هم از رابطه پتانسیل برداری کمک می‌گیریم.

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0$$

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

$\hat{z}$: TM to z ، TE to z

$$A = \psi \hat{z}$$

$$\bar{H} = \nabla \times A \longrightarrow \begin{cases} H_{TM_x} = \partial/\partial y \, \psi \\ H_{TM_y} = -\partial/\partial x \, \psi \\ H_{TM_z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{TM_x} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \psi \\ E_{TM_y} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \psi \\ E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left(\partial^2/\partial z^2 + k_0^2 \right) \psi \end{cases}$$

از آنجایی که مسئله‌ی ما یک موجبر است، حل به صورت زیر در می‌آید:

$$\psi(x,y,z) = X(x) Y(y) \underbrace{e^{-j\beta z}}_{\text{موجی در راستای } z}$$

نکته: حل‌های ما جواب‌های رزونانسی است (یعنی ما معادلات ماکسول بدون منبع را حل می‌کنیم)

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}(k_0^2 - \beta^2)\underbrace{\psi}_{\psi \text{ متناسب } E_z \text{ است.}} \Longrightarrow$$

ضمناً شرایط مرزی به این معنی است که ($\psi = 0 \quad \bar{r} \in \partial V$) ارضا شود

$$\frac{X''}{X} = \text{ثابت} \qquad \frac{Y''}{Y} = \text{ثابت}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0 \Rightarrow \lambda = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \rightarrow m = \cancel{0}, 1, 2, \dots \\ X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases} \rightarrow X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

به خاطر قضیه‌ی اشتورم لیوویل می‌دانیم که این مجموعه کامل است.

[illegible] شرایط مرزی را ارضا می‌کند.

۱۰ ک

هر دو درجه آزادی در این قسمت از بین می‌رود.

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2 \\[2mm] \dfrac{Y''}{Y} = -\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2 \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}Y(y) + \lambda Y(y) = 0$$

$$Y(0) = 0$$

$$Y(b) = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3$$

بین صفر تا b کامل $\rightarrow Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-\beta^2} + k_0^2 = 0$$

$$\boxed{\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

به عنوان مثال TM_{11} را بررسی می‌کنیم:

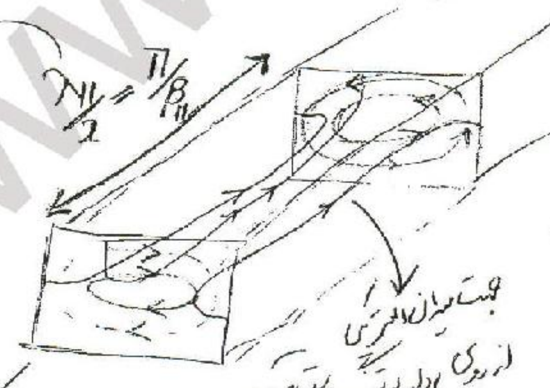
$$\psi = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_{11}z}$$

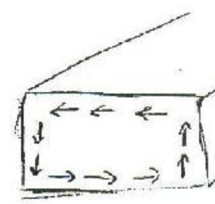
$$\begin{cases} H_x = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left(+\frac{\pi}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_{11}z} \\ H_y = -\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_{11}z} \end{cases}$$

این λ_{11} در واقع $\lambda/2$ است

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\frac{\lambda_{11}}{2} = \frac{\pi}{\beta_{11}}$$



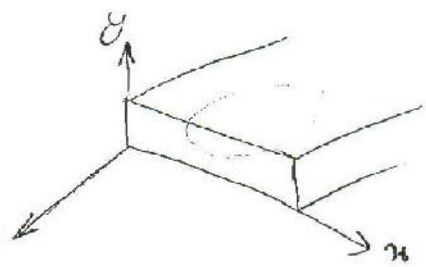


E_x ، E_y و ψ هم فاز است

ولی E_z ، $\pi/2$ اختلاف فاز دارد

اگر TE_n را هم ببندیم:

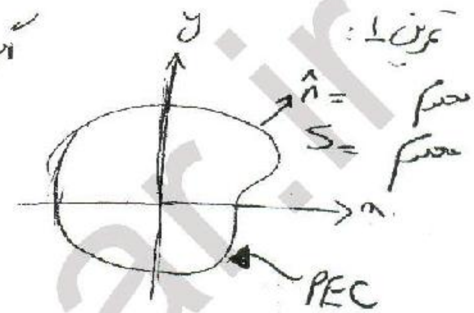
ما نتیجتن به یک تجزیه کامل می‌رسیم.



: HW#7

تمرین ۱: اگر میدانها را به TE_z و TM_z تفکیک کنیم.

شرایط مرزی مناسب برای هر کدام از TE و TM روی S چیست.



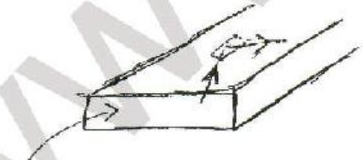
تمرین ۲: 4-6

تمرین ۳: 4-7

تمرین ۴: 4-8

۵-۳- موجبر تخته عایقی: (برای فرکانس‌های بالا)

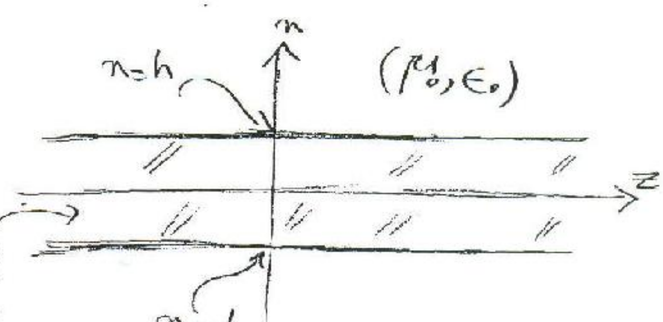
Dielectric Slab Waveguide



$\epsilon_r > 1$
$\mu_r = 1$

Total Internal Reflection TIR

نسبت به y هم تغییری ندارد.



۸۴/۸/۲۰

ادامه موجبر تشدیدگر عایقی :

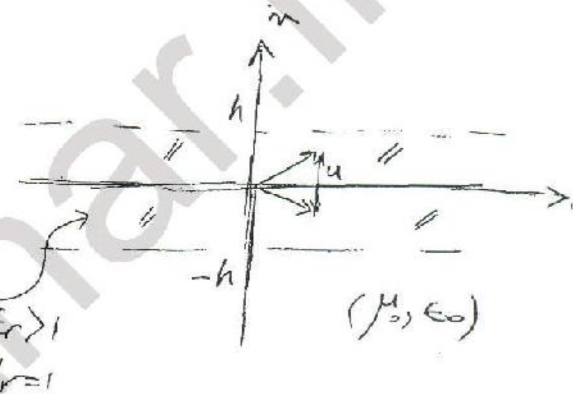
- TM_z (even)

$$X_1(x) = A\cos(ux)$$

TM_z (odd)

$$X_1(x) = A'\sin(ux)$$

از این مرحله $TM_z(\text{even})$ را ادامه می‌دهیم.

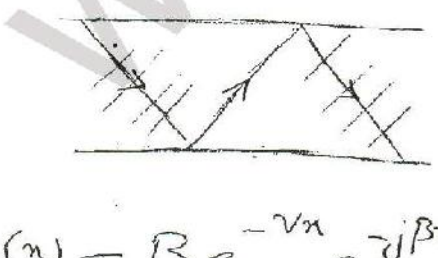


$$\underbrace{\frac{X_1''}{X_1}}_{-u^2} - \beta^2 + k_0^2\epsilon_r = 0$$

$$\psi_1(x) = A\cos ux \qquad u^2 + \beta^2 = k_0^2\epsilon_r$$

$$\psi_1 = A\left(\frac{1}{2}e^{-jux} + \frac{1}{2}e^{+jux}\right)e^{-j\beta z}$$

$$\frac{A}{2}e^{-jux}e^{-j\beta z} + \frac{A}{2}e^{jux}e^{-j\beta z}$$



دو موج صفحه‌ای مایل

$$\begin{cases} \psi_2(x) = Be^{-vx}e^{-j\beta z} & x > h \\ \psi_2(x) = Ce^{+vx}e^{-j\beta z} & x < -h \end{cases}$$

خارج از عایق:

بیان شرط مرزی:

$$x=h: \quad E_z\Big|_{x=h^-} = E_z\Big|_{x=h^+} \quad (1)$$

$$x=h: \quad H = \nabla\times A$$

$$\Rightarrow H_z=0 \quad H_x=0 \quad H_y\neq 0$$

$$\Rightarrow H_y\Big|_{x=h^-} = H_y\Big|_{x=h^+} \quad (2)$$

اگر شرط مرزی های را رعایت کنیم، شرایط مرزی زیر به طور خودکار مشخص می‌کند.

$$E_x, H_y, E_z \neq 0 \qquad E_y=0$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\epsilon_r\right)\psi$$

$$\Rightarrow E_z\Big|_{|x|<h} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}(-\beta^2+k_0^2\epsilon_r)\psi_1 = \frac{u^2}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\psi_1$$

$$E_z\Big|_{|x|>h} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\overbrace{(-\beta^2+k_0^2)}^{-v^2} B e^{-vx} e^{-j\beta z}$$

شرط مرزی برابری E_z در $x=h$ $\Rightarrow \frac{u^2}{\epsilon_r} A\cos(uh)\cancel{e^{-j\beta z}} = -v^2 B e^{-vh}\cancel{e^{-j\beta z}} \quad \forall z \quad \star$

$$H_y = \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z = -\frac{\partial}{\partial x}\psi$$

شرط مرزی برابری H_y در $x=h$ $\Rightarrow -uA\sin(uh)\cancel{e^{-j\beta z}} = -vBe^{-vh}\cancel{e^{-j\beta z}} \quad \forall z \quad \star'$

* اگر در $x=-h$ هم بنویسیم نتیجه می‌گردد که $B=C$ می‌شود.

$$\frac{\star}{\star'} = \boxed{\frac{uh}{\epsilon_r}\cot g(uh) = -vh}$$

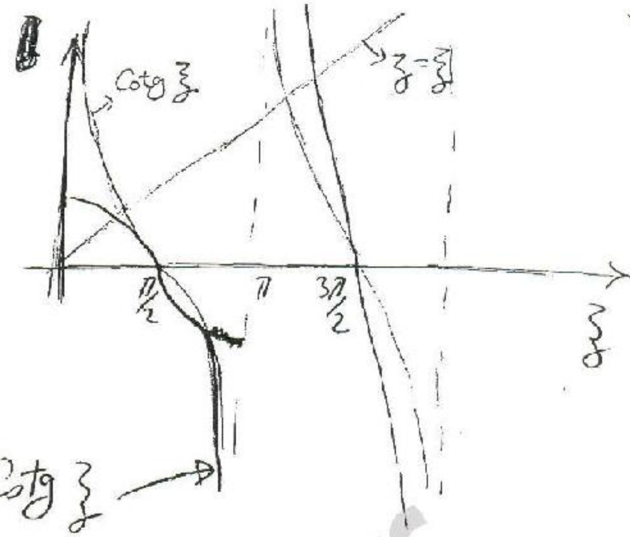
از این معادله مشخصه مقدار برای بدست آوردن u, v بهره می‌برد

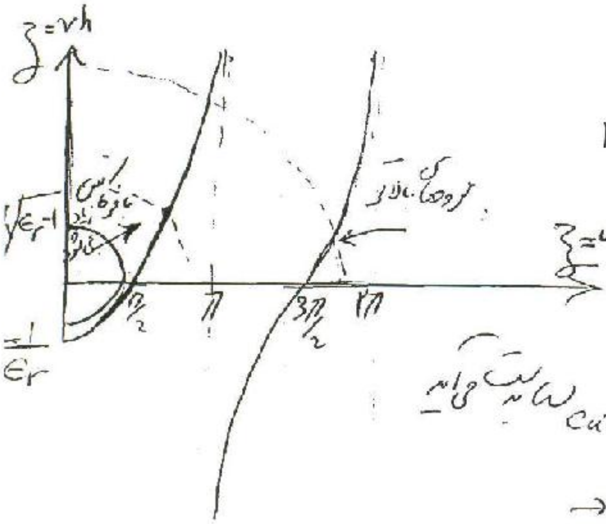
$$u^2+v^2 = k_0^2(\epsilon_r-1)$$

مودهای TM_z زوج

$uh=\xi \qquad vh=\zeta$

$\Rightarrow \frac{-1}{\epsilon_r}\,\xi\,\mathrm{Cotg}\,\xi=\zeta$





دایره‌ای به شعاع $k_0h\sqrt{\epsilon_r-1}$

هرگاه از $\frac{\pi}{2}$ بالاتر باشد جواب داریم

مثلاً اگر $k_0h\sqrt{\epsilon_r-1}=\frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$ ω_{cutoff} به آن می‌گوییم

$\to \nu=0 \Rightarrow \beta=k_0$

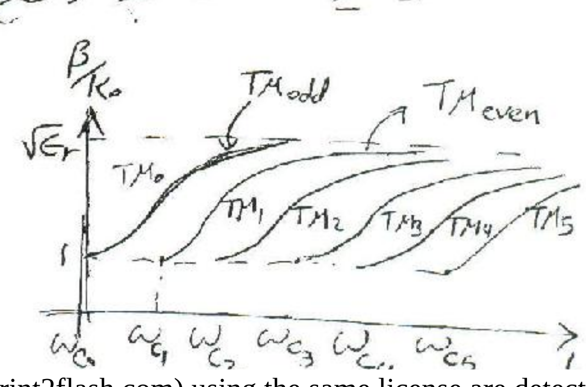
ν همواره باید مثبت باشد $\Leftarrow$ جواب‌های بالای محور را مورد توجه قرار دهیم.

با زیاد شدن فرکانس ξ به عدد ثابتی (π) میل می‌کند (در شاخه اول)

بنابراین در حد $u^2+\beta^2=k_0^2\epsilon_r$ $\Leftarrow$ $\underset{\omega\to\infty}{\beta=k_0\sqrt{\epsilon_r}}$

$\Rightarrow k_0<\beta<k_0\sqrt{\epsilon_r}$

اگر دایره شاخه‌های بعدی را قطع کند، مودهای دیگری نیز انتشار می‌یابند.



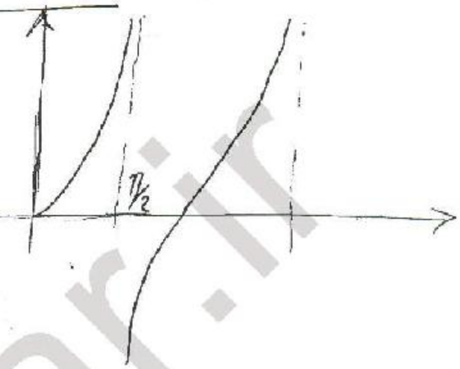
51

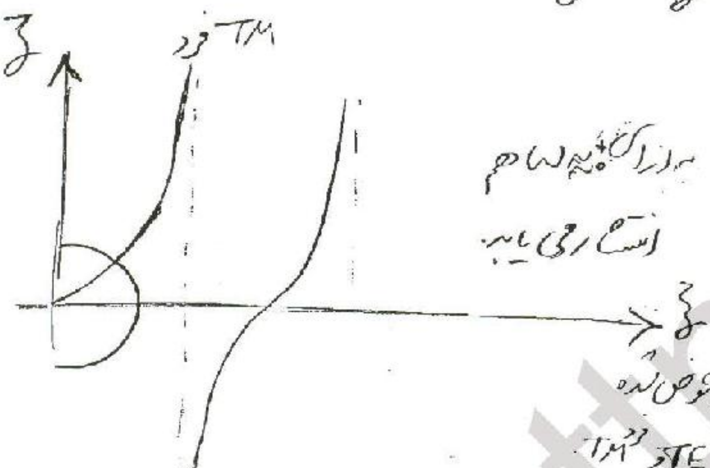
حال برای مودهای فرد:

$$TM_z\ (odd)\quad \bar{A}=\begin{cases} A\sin(ux)\,e^{-j\beta z} & |x|<h \\ Be^{-vx}e^{-j\beta z} & x>h \\ Ce^{+vx}e^{-j\beta z} & x<-h \end{cases}$$

معادله مشخصه مودهای TM_z با تقارن فرد برای ψ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{uh}{\epsilon_r}(tg\,uh)=vh}$

$\xi \tan \xi \rightarrow$





به ازای هر ω هم

انتشار می‌یابد

نتیجه TM فقط جای ϵ_r و μ_r عوض شده

به همین ترتیب "TE" و "TM"

$TE_z\ (even)\quad \Rightarrow \boxed{(-uh)\,Ctg(uh)=\mu_r(vh)}$

$H_x,\ E_y,\ H_z\neq 0$

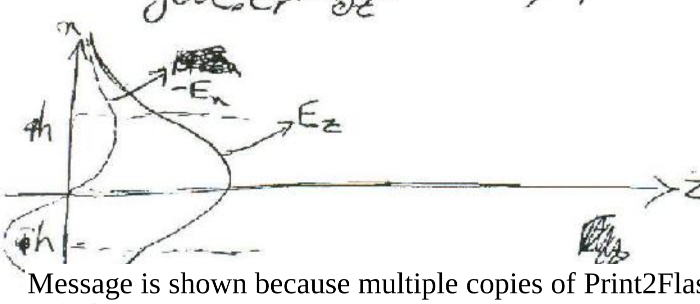
$TE_z\ (odd)\quad \Rightarrow \boxed{(+uh)\,tg(uh)=\mu_r(vh)}$

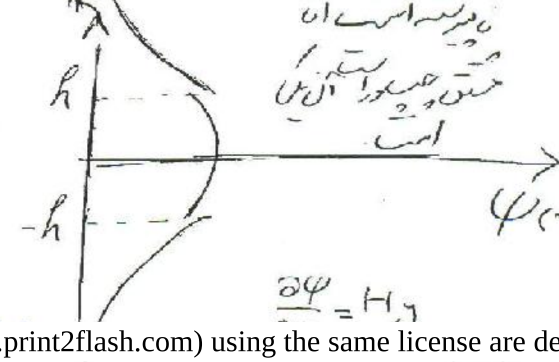
این هم به ازای همه ωها که می‌تواند انتشار یابد.

- در صورتی که در دفعه V برابر صفر باشد موج ایستاده عرضی تولید می‌کند

که با اضافه کردن تلف رفتار واقعی موج قابل ملاحظه است.

$$E_z=\frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\epsilon_r\right)\psi$$





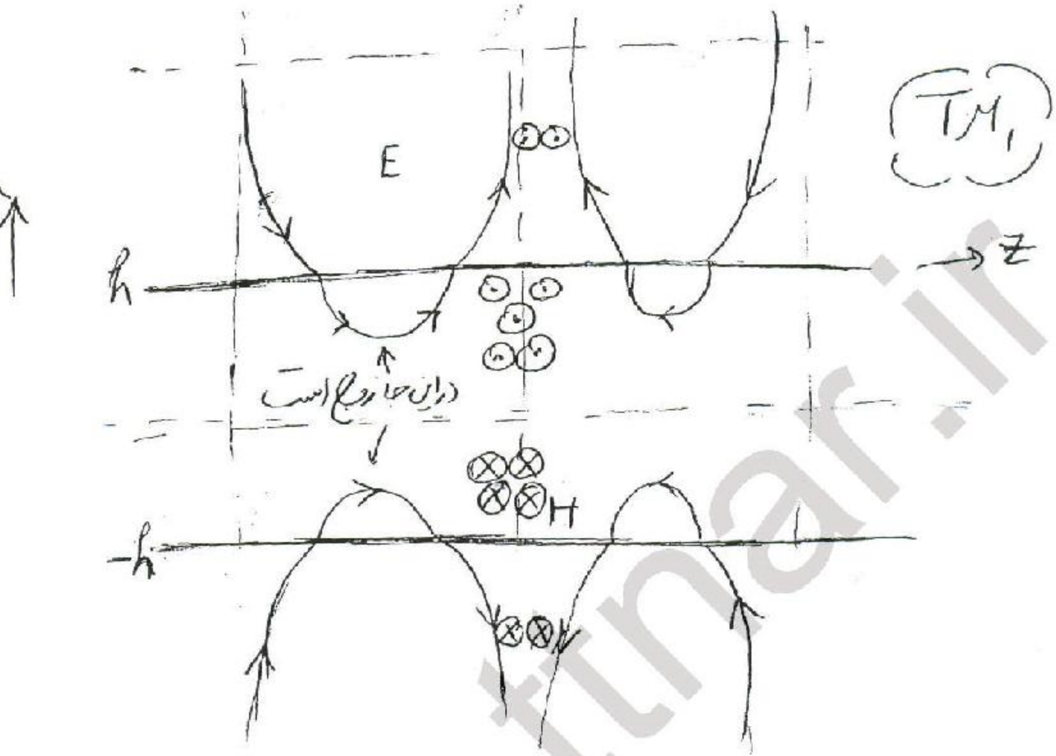
پایین‌تر است اما

شکل چپیده‌تر آن زوج

است

$\frac{\partial \psi}{\partial x}=H_y$

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0} \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\partial}{\partial z} \psi & \text{با } \psi \text{ هم فاز است.} \; E_x \\ E_z = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0} (-\beta^2 + k_x^2)\, \psi & \longrightarrow E_z \text{ با } \psi \text{، } \pi/2 \text{ اختلاف فاز دارد.} \end{cases}$$

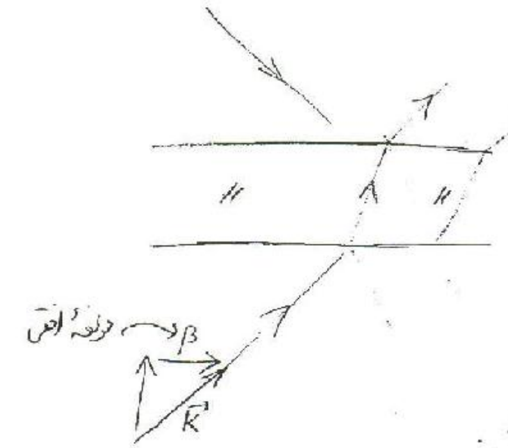


که تغییر فضایی تندی دارد بنابراین حرکت نقطه پاسخ سریعی دارد.

نکته: TE_n و TM_n در کانال است

نقاط صفر E و H هم عوض می‌کند.

۸۶/۸/۲۲



اگر به این تصویر از بیرون موج صفحه‌ای بتابانیم:

به ازای هر ω

$(\omega) \longrightarrow k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

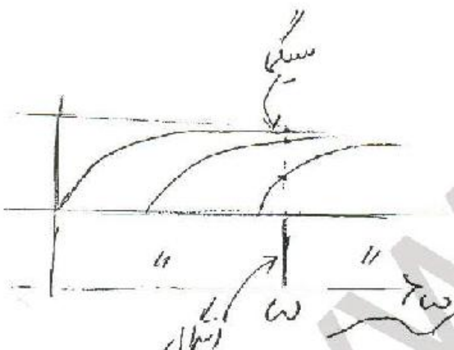
* موج از هر زاویه‌ای می‌تواند بتابد.

و من می‌توانم مودهای پیوسته در جهت z منتشر کنیم.

که بستگی آن با z به صورت $e^{-jk_z z}$ است.

بنابراین مودها، طیف پیوسته‌ای وجود دارد. $0 < \beta < k_0$

بر خلاف قبل که مودهای آن discrete بود.

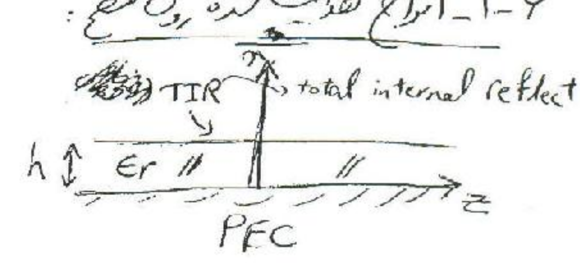


مودهای قبلی به ازای مودهای گسسته، Σ با هم جمع می‌گردند

در مودهای پیوسته در یک فرکانس خاص با ∫ جمع می‌گردد.

۳-۶- امواج هدایت شده روی سطح:

در محیط قبلی چون محدود نبود برای تحریک یک مود خاص لازم بود که در یک مقطع عرضی از $-\infty$ تا $+\infty$ تحریک را اعمال کنیم



surface guided wave

تعدادی از مودهای موجبر تخت قبل (که روی PEC مؤلفه‌ای ندارند) برای این موجبر قابل اعمال است.

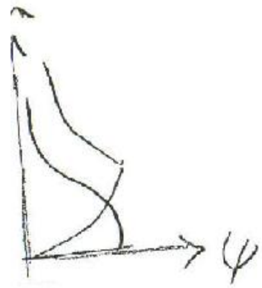
مثلاً TM_0 قابل اعمال است. تا به E_z روی $x=0$ برابر صفر باشد.

ولی TM_1 این طور نیست. بنابراین $TM(even)$ قابل انتشار نیست

~~TE_0~~ TM_0

بنابراین مود غالب در این قسمت فقط TM_0 است.

در صورتی که در هر دو قسمت ϵ هم TM_0 و TE_0 مود غالب هستند.



Cos un

$$\xi \tan \xi = \zeta$$

$$\xi^2 + \zeta^2 = k_0^2 h^2$$

فرکانس مشخص است.

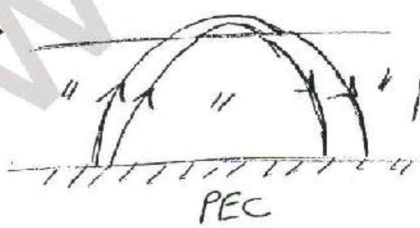
هر چه که h در این سیستم کوچک باشد ← شعاع دایره تقاطع آن‌ها کم شود

بنابراین ζ کم به دست آمده، پخش میدان باید به باعث کم گردد: میدان بیرون slab کاسته شود

h کم $\longrightarrow$

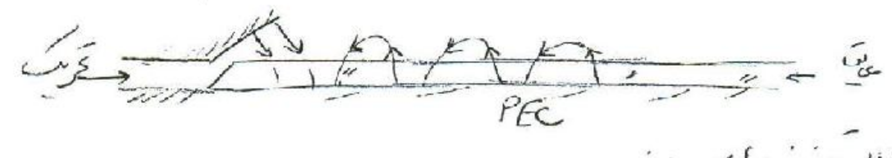
$\beta \to k_0$ گویی در هوا میدان منتشر می‌شود

h زیاد $\longrightarrow$



$\beta \to k_0\sqrt{\epsilon_r}$ گویی در محیط با ϵ_r منتشر می‌شود

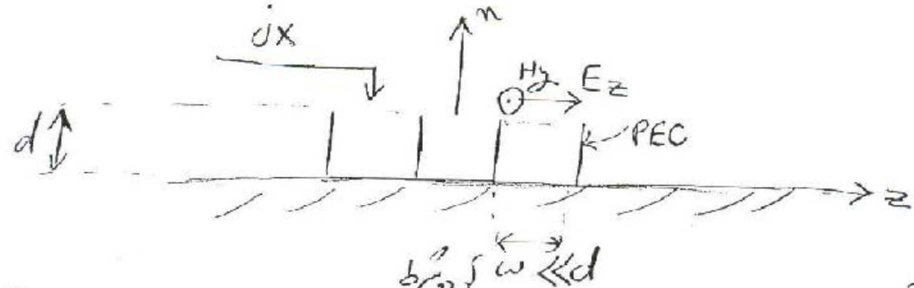
تحریک عملی:



عایق‌ها در فرکانس بالا تلف زیادی دارند.

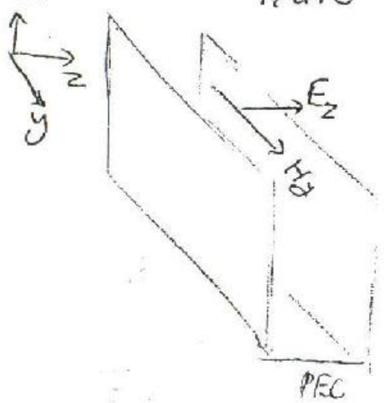
(گرچه تفلون تا فرکانس 150 GHz هم تلف کمی دارد)

بنابراین باید به فکر ایده جدیدی باشیم تا از تلف انرژی بکاهیم.



$\omega \ll d$ ، $\omega \ll \lambda$: دو شرط (فضای خالی)

Paralel Plate Waveguide



به ازای مود TM_0:
تنها E_x, H_y, E_z داریم

به خاطر وجود دو هادی امکان انتشار مود TEM را دارد. (در غیر این صورت ندارد)

مود غالب این سیستم TEM است. که در این جا پایین آن اتصال کوتاه شده است.

بنابراین: $Z = \frac{E_z}{H_y} = jX$ (امپدانس دیده شده، موهومی محض) ← امپدانس راکتیو دیده می‌شود.

همان طور که برای یک خط انتقال اتصال کوتاه شده داریم:

$jX = Z_{in}$

$$Z = \frac{E_z}{H_y} = jK_c \tan(k_0 d) = j\eta_0 \tan(k_0 d)$$

η_0: امپدانس مشخصه — چون TEM است

کلا سطوح لبه‌دار (Corrugated) برای ایجاد امپدانس های راکتیو مناسب اند.

برای همان موجبر عایق روی PEC داریم → TM:

E_z متناسب با: $\psi = \begin{cases} B\, e^{-\nu x}\, e^{-j\beta z} \\ A \sin(ux)\, e^{-j\beta z} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -\nu^2+\beta^2 = k_0^2 \\ u^2+\beta^2 = k_0^2\epsilon_r \end{cases}$

عبارات E_z, H_y برای موجبر عایق روی PEC: $x = h \rightarrow$

$$\begin{cases} E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(-\beta^2 + k_0^2\right)\psi = \frac{-\nu^2}{j\omega\epsilon_0}\psi \\ H_y = -\frac{\partial}{\partial x}\psi = \nu\psi \end{cases}$$

$$Z = \frac{E_z}{-H_y} = \frac{+\gamma}{j\omega\epsilon_0} = \frac{1}{j\,\omega\frac{\epsilon_0}{\gamma}}$$

← c بالا را القائی شده است.

برای دلیل $(-H_y)$ گذاشتیم که امپدانس را در جهت $n>0$ ببینیم

دقیقاً منظور این است که در سیستم قبلی از این جهت خازن‌ها کامل دیده می‌شود.

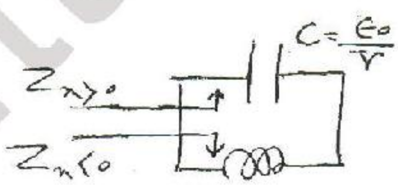
بنابراین: گاهاً برای هر مرحله ... محدود که بخواهیم از خازن بعد میرا شود لازم است به سمت بالا را القائیش دیده شود.

ضمناً در حالت PEC از سمت پایین هم اتصال کوتاه بوده است بنابراین القایی دیده می‌شود

$$(Z_{x>0}+Z_{x<0})H_y=0$$

شرط ارتفاع در را طوری انتخاب کنیم که سلفی دیده شود

می‌توان جمع دو امپدانس را صفر کرد.



می‌توان دوباره معادله مشخصه را استخراج کرد

: Transverse Resonance دید

⇓

method ی است برای بدست آوردن ثابت انتشار در موجبرها.

⇓

ایده این دید آن است که برای استخراج رزونانس ... محیط باید در مقاطع عرضی انرژی را ذخیره کند

$$-\frac{1}{\epsilon_r}\zeta \cot\zeta = \zeta$$

سلفی که از پایین دیده می‌شود $= jZ_c\tan(uh)$

بدست آورده

برای موجبری که عایق روی PEC دارد.

حال در این صفحه لایه دار اگر بخواهیم شرایط را اعمال کنیم -

$$\underbrace{jZ_0 \tan(k_0 d)}_{Z_{m<0}} + \underbrace{\frac{1}{\frac{j\omega\varepsilon_0}{\nu}}}_{Z_{m>0}} = 0$$ شرط رزونانس عرضی

معادله فوق ν را به ما می‌دهد $\longrightarrow$ به این ترتیب β بدست می‌آید.

معادله dispersion در این حالت ~~...~~ خود دیگر پیچیده است.

تفاوت لایه دار و صفحه روی PEC:

۱- β با d قابل کنترل است در اینجا با h. (چیزی که در دستمان هست)

۲- موجبر لایه دار فقط و تنها فقط مودهای TM را می‌تواند انتقال داد.

۳- منحنی dispersion در این دو با هم متفاوت است.

در مورد مسئله roughness که در موجبر سطحی مطرح بود، در اینجا چون TEM است حساسیت آن نسبت به صیقلی بودن سطح کاملاً کمتر است.

:HW#8

تمرین ۱: الف) مطلوبست منحنی پاشندگی dispersion diagram:

$\beta(\omega)_{TE_1}$ $\beta(\omega)_{TE_0}$ $\beta(\omega)_{TM_1}$ $\beta(\omega)_{TM_0}$

برای یک موجبر صفحه عایقی

ب) مطلوبست رسم خطوط میدان‌های $\vec{E}$ ، $\vec{H}$ برای چهار مود فوق،

5

تمرین ۲۰: ترسیم دیاگرام پاشندگی موجبر Corrugated و موجبر امواج سطحی و مقایسه آنها برای در مود اول و مشترک

اختیاری: تفرق را در صورتی که لبه‌ها دارای ضخامت باشند. (HFSS)

۸۶/۸/۲۷

۷-۲ موجبر با پرشدگی عایقی

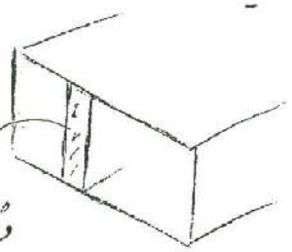
Partially filled Waveguide

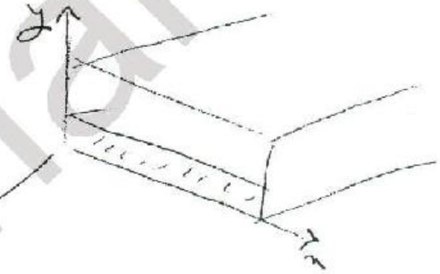
این شکل جابجاگر فاز Φ shifter

... استفاده است

میدان را در خود جمع می‌کند

و ثابت انتشار را تغییر می‌دهد.

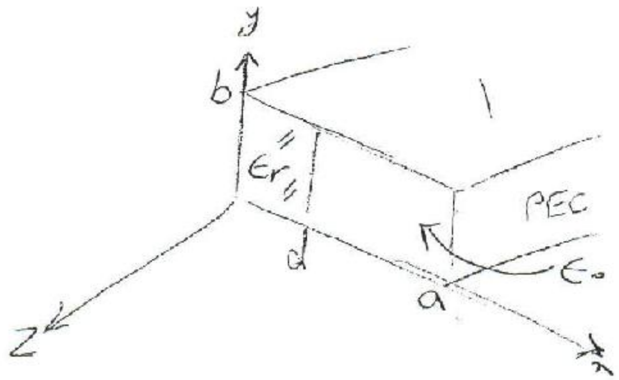




* شکل فوق Φ shifter بهتری است.

با قرار دادن فریت در ترکیب Isolator.

حال به حل مسئله می‌پردازیم:



$$\vec{C} = \hat{z}$$

$$\vec{A} = \psi_1 \hat{z}$$

نکته: هیچ تابع ψ_1 را نمی‌توان پیدا کرد

- طوری که تمام شروط مرزی مسئله را اقناع کند

مجهول

$$\psi_1 = \begin{cases} A \sin(k_{x_1} x) \sin(\frac{n\pi}{b} y) e^{-j\beta z} & 0 < x < d \\ B \sin(k_{x_2}(x-a)) \sin(\frac{n\pi}{b} y) e^{-j\beta z} & d < x < a \end{cases}$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\epsilon_r\right)\psi_1$$

$$\begin{cases} k_{x_1}^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + \beta^2 = k_0^2 \epsilon_r \\ k_{x_2}^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + \beta^2 = k_0^2 \end{cases}$$

HW: شرایط مرزی در $x=d$ را نوشته و تحقیق کنید که اقناع آن با ایجاد مود TE_z یا TM_z به تنهایی قابل بدست آوردن نیست.

بنابراین ترکیبی از این دو مود خواهد بود (مودهای هیبرید)

$$\text{هر مود ساختار فوق} = C_1\{TE_z\} + C_2\{TM_z\} \qquad \begin{matrix} C_1 \neq 0 \\ C_2 \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} E_z \neq 0 \\ H_z \neq 0 \end{cases}$$

مسان

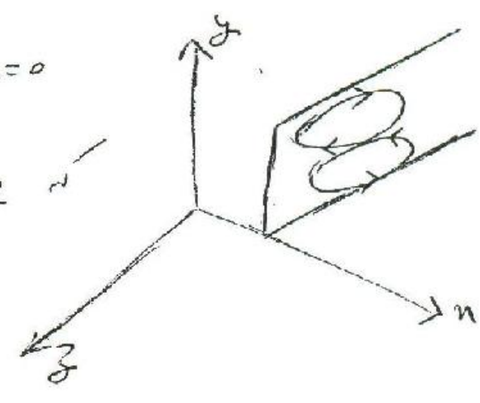
حال مطلب جهت $\hat{c}$ است که لازم است به ازای آن تابع ψ قابل تعیین باشد.

این جهت معمولاً عمود بر discontinuity انتخاب می‌شود (در این جا $\hat{x}$)

$$\vec{C} = \hat{x} \Rightarrow A = \psi \hat{x}$$

$$TM_x \rightarrow H_x = 0$$

که $E_z , H_z \neq 0$



$0<y<b$

$$\psi=\begin{cases} A\cos(k_{x_1}x)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta z} & 0<x<d \\ B\cos(k_{x_2}(x-a))\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta z} & d<x<a \end{cases}$$

می‌دانیم مؤلفه‌های نرمال
باید مشتق صفر داشته باشند.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$$

$$E_x=\frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_0^2\epsilon_r\right)\psi$$

در عبارات مقابل
ثابت می‌باشند:

$$\begin{cases} k_{x_1}^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\beta^2=k_0^2\epsilon_r \\ k_{x_2}^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\beta^2=k_0^2 \end{cases}$$

$$E_y=\frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\psi\right)\begin{cases} \xrightarrow{0<x<d} \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\left(+\frac{n\pi}{b}\right)(k_{x_1})A\sin(k_{x_1}x)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \rightarrow \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\frac{n\pi}{b}\right)(-k_{x_2})B\sin(k_{x_2}(x-a))\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z} \end{cases}$$

$$E_z=\frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\psi\right)\begin{cases}\rightarrow - - \\ \rightarrow - - \end{cases}$$

از تساوی

① $E_{y_1}=E_{y_2}\quad (x=d$ در$)$

$E_{z_1}=E_{z_2}\quad (x=d$ در$)$

منجر به روابط مشابهی می‌گردد که وجود این حل را میسر می‌کند.

$$① \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_r}k_{x_1}A\sin(k_{x_1}d)=k_{x_2}B\sin(k_{x_2}(d-a))$$

$$\begin{cases} H_y=\frac{\partial}{\partial z}\psi \\ H_z=-\frac{\partial}{\partial y}\psi \end{cases}$$

* باز هم مثل بالا مشتقاتی بر حسب y و دیگری بر حسب z هستند
که دیگر رفتار یکسانی دارند.

$$\hookrightarrow\quad A\cos(k_{x_1}d)=B\cos(k_{x_2}(d-a))$$

[illegible]

• تقسیم معادلات منجر می‌گردد به معادله مشخصه

$$\begin{cases} \frac{1}{\epsilon_r} K_{x_1} \tan(K_{x_1} d) = -K_{x_2} \tan\left(K_{x_2}(a-d)\right) \\ K_{x_1}^2 - K_{x_2}^2 = K_0^2 (\epsilon_r - 1) \end{cases}$$

می‌توان جواب قابل نمایش به ما می‌دهد.

نکته: رابطه تشابه

$$\frac{1}{\epsilon_r} K_{x_1} \tan(K_{x_1} d) + K_{x_2} \tan(K_{x_2}(a-d))$$

در واقع همان ایده Transverse resonance می‌باشد.

امپدانسی که هر دو سمت دیده می‌شود را match کرده است.

اتصال کوتاه از هر طرف

$$j Z_c \tan(K_{x_1} d) + j Z_c' \tan\left(K_{x_2}(a-d)\right) = 0$$

هر دو امپدانس reactive است.

در سیستم ما $\frac{E_z}{H_y}$, $\frac{E_y}{H_z}$ برابر بود با توجه به آن می‌توان ثابت کرد:

$$Z_c = \frac{K_{x_1}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \qquad Z_c' = \frac{K_{x_2}}{\epsilon_0}$$

• به این مود TM_n یا مود LSM گویند

نحوه طیفی در برش طولی

می‌توان مود TE_n را نیز این گونه نوشت LSE ← اتصال باز از هر طرف

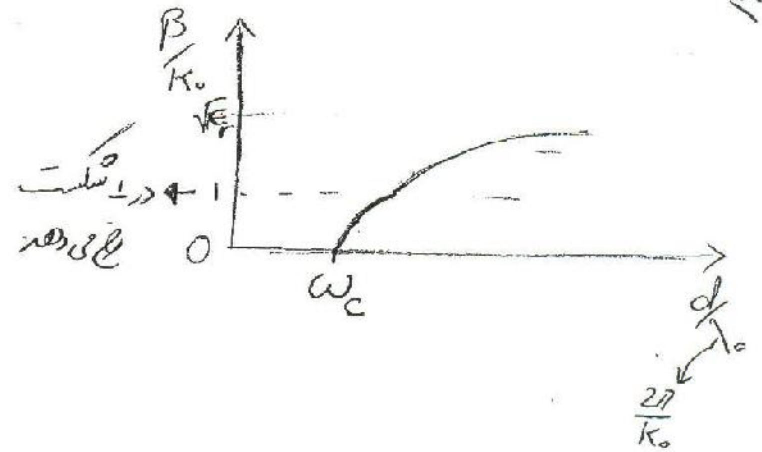
$$\bar{F} = \psi_{20} \hat{x}$$

در راستای عرضی $\{TM$ ← اتصال کوتاه از دو طرف

در حالتی فرکانس خیلی زیاد شود

$\beta \to k_0\sqrt{\epsilon_r}$

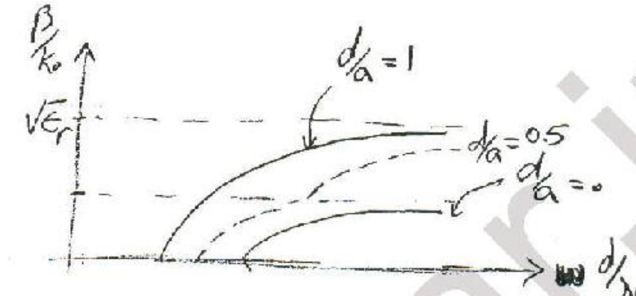
و تمام نور از عایق عبور می کند. (در TIR هم اتفاق می افتد)



شکل کتاب:

$$\begin{cases} \frac{d}{a} = 1 \\ \epsilon_r = 2.45 \\ \frac{a}{b} = 0.45 \end{cases}$$

$d/a \to 0$



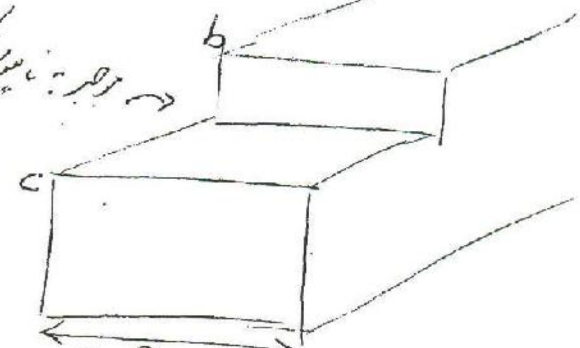
اختیاری: منحنی ها را با نرم افزار Matlab reproduce کنیم

(کنترل کردن عبور با ضخامت دی الکتریک d)

۸-۳- آنالیز مودی : Modal Analysis

و بسط به مودها Modal Expansion

در راهنما: ناپیوستگی پله

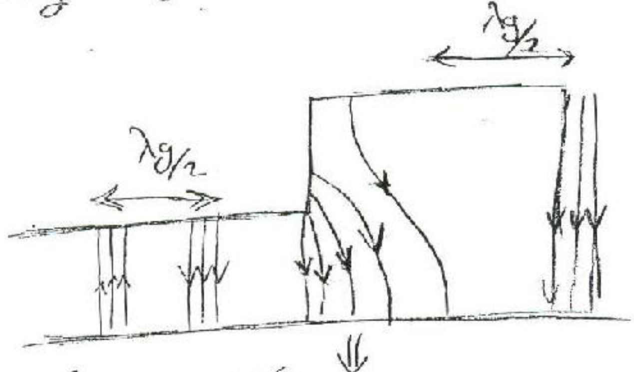


ابتدا توسط آنالیز مودی، مودها را در هر کدام از دو قسمت تقسیم می کنیم (در حوزه مکان)

سپس با بسط مودی در هر طرف، آنها را با یکدیگر match می کنیم

3/

برای مود TE_{10} چون β تنها به a بستگی دارد $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$ در هر دو قسمت یکسان است.

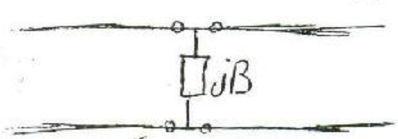


$\Downarrow$

در این جا مودهای بالاتری ایجاد می‌شود (ولی اگر در cutoff باشند در همان محدوده به صورت راکتیو منتشر می‌شوند)

اثر این مودها باید توسط $[S]$ مدل شود:

مدل مداری:



با انتخاب مناسب ولتاژها و ... ممکن است

ولی به صورت General Scattering Matrix در نظر می‌گیرد

اصول تطبیق مودها:

برای این مثال چون شکل دو قسمت در صفحه کناری یکسان است، باز هم می‌توان از LSE و LSM استفاده کرد.

$$TE_x \quad F=\psi\hat{x}$$

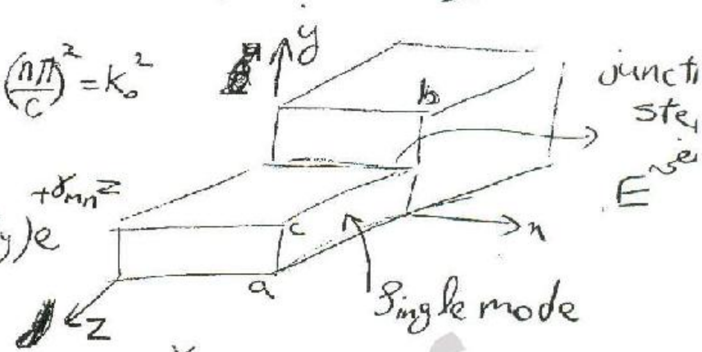
$\Downarrow$

$$\psi = \sum_{m,n} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{c}\right) e^{+\gamma_{mn} z} \qquad z>0$$

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 - \gamma_{mn}^2 = k_0^2$$

ادامه: آنالیز مودی وسط به مودها

TE$_x$ $\quad -\gamma_{mn}^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 = k_0^2$



مشابه H_m

$$\Psi_{z>0} = \sum_m \sum_n \overset{\text{مجهول}}{A_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{c}\right) e^{+\gamma_{mn} z}$$

$$+ \overset{\text{مجهول}}{B_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{c}\right) e^{-\gamma_{mn} z}$$

رابطه مودها

$$\Longrightarrow \gamma_{mn} = \begin{cases} +j\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} & k_0 > \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \\ \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 - k_0^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

میرایی برای سایر مودها میرا می گردد

$$\left.\begin{matrix} m=1 \\ n=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow TE_{x_{10}} \equiv TE_{z_{10}}$$

سایر A_{mn} ها $= 0$

به دلیل Single mode

$(\text{به طور فرض})\ B_{10} \neq 0 \ \Leftarrow\ $ معلوم داده شده : A_{10}

⇐ سایر B_{mn} ها در ارتباط به مودهای بالا هستند و صفر می شوند.

$$\Psi_{z<0} = \sum_m \sum_n \overset{\text{مجهول}}{C_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{+\tilde{\gamma}_{mn} z}$$

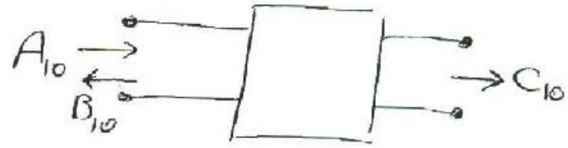
$$-\tilde{\gamma}_{mn}^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_0^2$$

فرض ساده کننده: سمت دیگر را

نمی توان هم چنان Single mode

فرض کرد. (یعنی b آن قدر بزرگ نباشد)

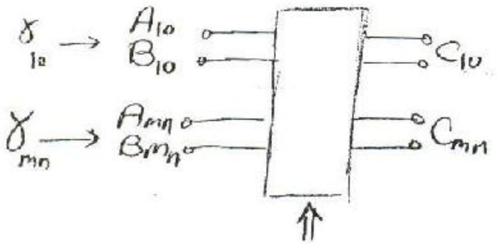
$$\begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ B_{mn} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vdots \\ C_{mn} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{mn} \\ \\ \end{pmatrix}$$



که دیگر مودها در این پارامتر S تأثیری ندارند

زیرا صفحه مرجع را در محلی قرار داده‌ایم که تنها

یک مود غالب داشته باشد. (یعنی به اندازه کافی دور از $Z=0$)



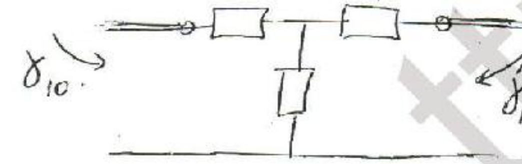
junction مدل

در حالت کلی می‌توان به این صورت نوشت:

که هر کدام به صورت خط انتقال دیده شوند

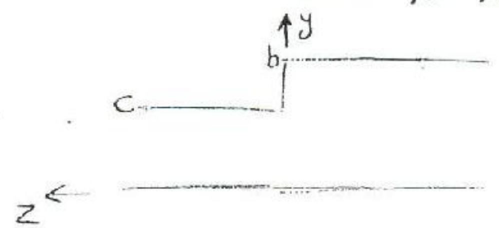
ضمناً برای مودهای دیگر امپدانس مشخصه، مرجع‌های مختلفی دارند

و منتشر نمی‌شوند.



$$E_{tan} \overset{\text{در این حالت}}{=} E_y$$

در صفحه $Z=0$:



$$E_{y_{z<0}} = \begin{cases} E_{y(z>0)}\Big|_{z=0} & 0 \leqslant y \leqslant c \\ 0 & c \leqslant y \leqslant b \end{cases}$$

می‌توان تحقیق کرد که اگر شروط مرزی E

را برقرار نماییم، شرط مرزی ★ خود به خود

اقناع می‌شود.

(بنابراین سه شرط اول کافیست)

$$\begin{cases} H_{n,y_{z=0^-}} = H_{n,y_{z=0^+}} & 0 \leqslant y \leqslant c \\ \dfrac{\partial}{\partial z} H_{n,y}\Big|_{z=0^-} = 0 & c \leqslant y \leqslant b \quad ★ \end{cases}$$

TE_m

$$F = \psi \hat{x}$$

$$E_y = \frac{\partial}{\partial z}\psi$$

پس دیگه برای E باید برقرار گردد.

$$\begin{cases} \sum_{m,n} \left(\gamma_{mn} A_{m} - \gamma_{mn} B_{mn}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{c}\right) & 0 < y < c \\ 0 & c < y < b \end{cases}$$

$$= \sum_{m',n'} \tilde{\gamma}_{m'n'} C_{m'n'} \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n'\pi y}{b}\right)$$

$$\xrightarrow[\sin]{\text{استفاده از تعامد}} \sum_{n'=0}^{\infty} \tilde{\gamma}_{kn'} C_{k,n'} \cos\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{kn} \left(A_{kn} - B_{kn}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{c}\right) \\ 0 \end{cases}$$

$$K = 1, \dots, \infty$$

$$\int_0^b ()\cos\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right)dy \xrightarrow{\text{Cos تعامد}} \frac{b}{2}\tilde{\gamma}_{k,\ell} C_{k\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{kn}\left(A_{kn} - B_{kn}\right) \int_0^c \cos\left(\frac{n\pi y}{c}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right)dy$$

$$\ell = 0, 1, \dots, \infty$$

می‌توان بصورت (۱)
ماتریس با درایه‌های ℓ, n
نوشت

برای یک K مشخص

$$\begin{array}{c|c} & n \rightarrow \\ \ell \downarrow & \begin{pmatrix} \bigcirc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{k,0} - B_{k,0} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{k,0} \\ \vdots \\ C_{k,\ell} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\frac{2}{b}\frac{\gamma_{k,n}}{\tilde{\gamma}_{k,\ell}} \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi y}{c}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right)dy$$

حال برای تمام K ها ok داریم

ضرایب برای $k=1$ $\quad$ برای $K=1$ $\quad$ برای $K=2$

$$\begin{array}{c|c} & K \rightarrow \\ K \downarrow & \begin{pmatrix} [\ ] & [\ 0\ ] & \cdots \\ 0 & [\ ] & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{10} - B_{10} \\ A_{11} - B_{11} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{k,0} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

این ⊥ رابطه برای C ها، B ها
است که از شرط مرزی

$$E_y = \begin{cases} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & 0 \leq y \leq c \\ 0 & c \leq y \leq b \end{cases} \Leftarrow$$ این را فرض کرده

کتاب هرینگتون مسئله را این گونه حل کرده است

$\Downarrow$

از کتاب حتماً مطالعه شود

$$\Psi_{z<0} = \sum C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma_{mn} z}$$

$$\vec{P} = \underbrace{Re\{\vec{S}\}}_{\text{توان متوسط منتقل شده حقیقی}} + j\underbrace{Im\{\vec{S}\}}_{\text{توان مختلط که در جهت برگشت می‌شود}}$$

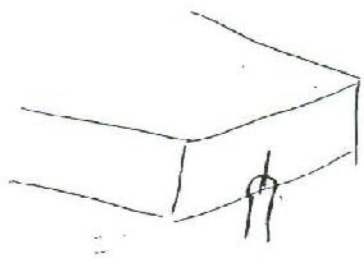
HW#: 4-12 / 4-14
4-17 / 4-27

$$\sum_{mn} C_{mn} \Phi_{mn}(x,y) = \begin{cases} \sum C'_{mn} \Psi_{mn}(x,y) \\ 0 \end{cases}$$

۱-۳- جریان در موجبرها.

$\vec{J}$ را می‌دانیم، می‌خواهیم میدان را در دو طرف حساب کنیم.

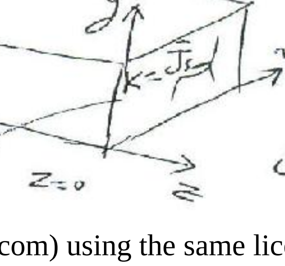
در این جا برای موجبر مستطیلی حل می‌شود، اما برای موجبرهای دیگر که میدان آن را بدانیم قابل اعمال است.



$$\vec{J}_s = \vec{K}(x,y) = K_x(x,y)\,\hat{x} + K_y(x,y)\,\hat{y}$$

معلوم

$\vec{J}_s$



چون را در این صفحه می‌دانیم.

فعلاً فرض می‌کنیم ها را در دو طرف به طور یکنواخت

ضرب کرونیکر :

$$[A]\otimes[B]=\begin{bmatrix} a_{11}[B] & a_{12}[B] \\ a_{21}[B] & a_{22}[B] \end{bmatrix}$$

سعی کنید به خاطر مشتق H_x و H_y نوشته شود:

نکته مهم: H_x و E_y متناسب اند

$$H_x=\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_0^2\right)\psi$$

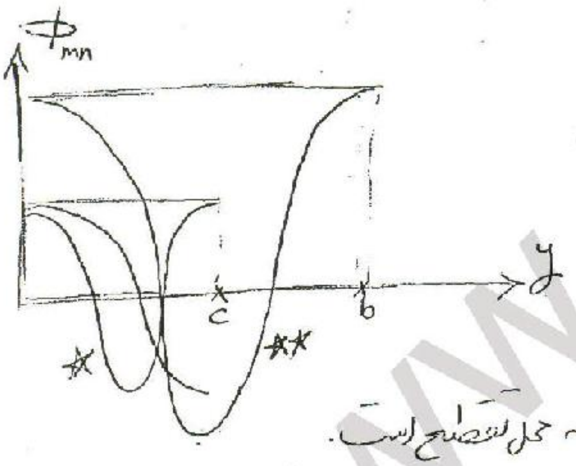
بنابراین چیز جدیدی نشان نمی دهد

$$H_y=\frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\psi$$

اصول روش Mode Matching

از آن جایی که تمام آنها ماتریس ها بی نهایت هستند

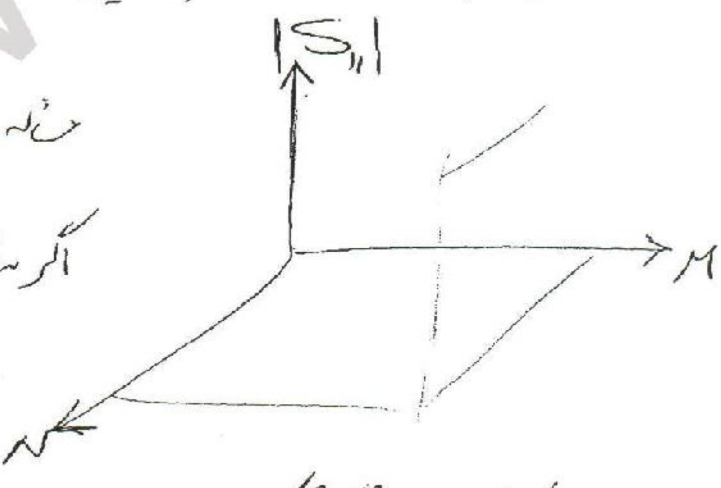
باید در یک جا Trancation (برش) دهیم.



مسئله حل تقریبی است.

اگر بدون توجه به دو جمله را آسان در نظر بگیریم:

جواب همگرا نمی شود.

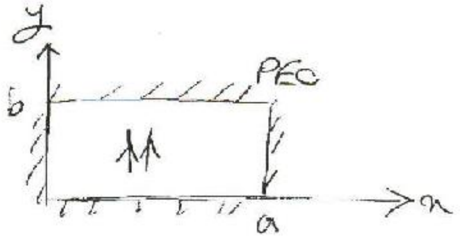


زیرا فرکانس فضایی شکل (*) $(0,c)$ زیادتر است بنابراین تعداد $(0,b)$ که انتخاب می کنیم

باید نسبت $\frac{b}{a}$ بیشتر شود

$$\frac{b}{a}=\frac{M}{N}$$

* یعنی تنها روی یک خط ممکن است همگرا برسیم



مثال دوم: صفحه جریانی را در نظر بگیریم

جریان در کل صفحه x و y، جاری

الا روند وجود دارد. به همین دلیل مد ایجاد شده از $K_y \leftarrow TM_y$ است.

$$K_y(x,y) \longrightarrow TM_y \qquad \bar{A} = \psi \hat{y}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \iint_{\text{روی سطح}} \frac{\bar{J}_s(x',y') e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} dx' dy'$$

$$\begin{cases} \psi_+(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma_{mn} z} & z>0 \\ \psi_-(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{+\gamma_{mn} z} & z<0 \end{cases}$$

معادله هلمهولتز $\Rightarrow \; -\gamma_{mn}^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = K_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$

$$E_x\Big|_{z=0^\pm} , \quad E_y\Big|_{z=0} , \quad H_x\Big|_{z=0^\pm} \Leftarrow B_{mn}, A_{mn} \text{ بدست آوردن}$$

(پیوستگی) (پیوستگی) (با استفاده از شرط مرزی)

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\psi \\ E_y &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + K_0^2\right)\psi \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_{mn} = B_{mn}$$

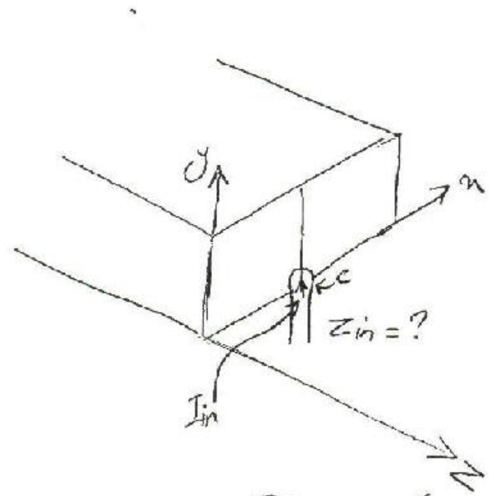
$$\vec{K} = \hat{z} \times (H^+ - H^-) \Rightarrow \boxed{H_x^{0^+} - H_x^{0^-} = K_y(x,y)}$$

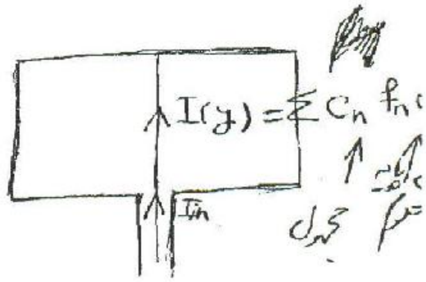
$$H_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \Rightarrow K_y(x,y) = \sum\sum \gamma_{mn} (A_{mn} + B_{mn}) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cancel{e^{-\gamma_{mn} z}}$$

$$\left.\begin{aligned} 2 \quad & n \neq 0 \\ 1 \quad & n = 0 \end{aligned}\right\} \text{نرمالیزه}$$

I

مثال کتاب :





⇐ از طرفی $I(y)$ می‌توان بسط داد. را ... می‌توان محاسبه کرد و از آن با صفر قرار دادن E_y روی سیم ضرایب C_n را بدست آورد.

حل تقریبی برای $I(y)$:

با این شکل تقریباً میدان E_y در آن نقطه صفر می‌شود (تحقیق شود).

$$I(y) \approx I_0 \cos(k_0(y-b)) \qquad 0<y<b$$

جریان در این نقطه max است، مانند یک خط انتقال اتصال کوتاه شده

$$I_{in} = I_0 \cos(k_0 b) \Rightarrow I_0 \text{ بدست می‌آید}$$

$$K_y(x,y) = I_0 \cos(k_0(y-b))\,\delta(x-c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} Z_{in} |I_{in}|^2 = P = f(A_{mn}) = \dots$$

رابطه‌اش نوشته شود

توان مختلط

$$\Rightarrow Z_{in} = R_{in} + j X_{in}$$

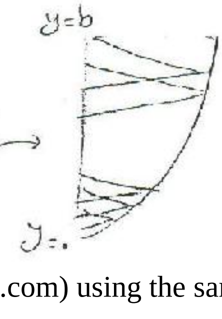
∞ می‌شود: دلیل به بی‌نهایت بردن سیم انرژی بسیار ... ترم‌های دیگر آن جمع می‌کند

Mixed Potential در نظر گرفته شود.

سری توان المان‌های جریان را تا اطراف تشکیل داده و سعی کرد E_y صفر شود در $x=c$ و $z=0$

راه دیگر

تحقیق

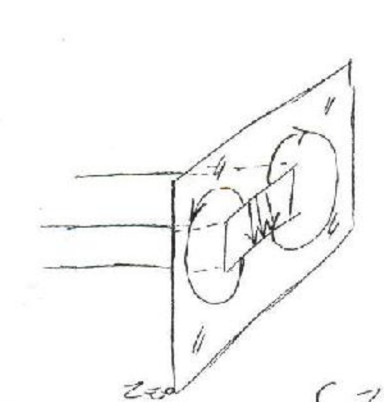


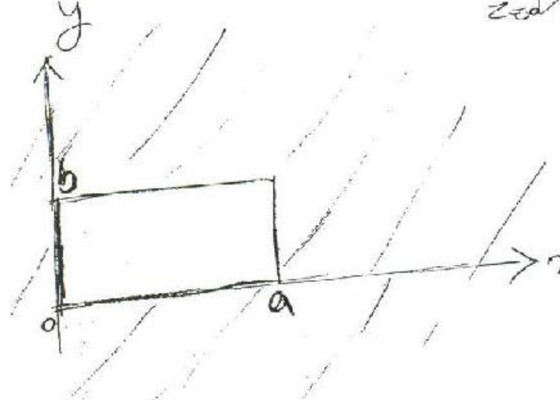
۱۰-۳- روزنه در صفحه‌ی هادی

بنا بر شکل‌ها در صفحه‌ی بزرگ رسانا

در میدان‌ها خارج شده ff

نقاط تأثیر زیادی دارد.





$$\begin{cases} z<0 & \text{میدان معلوم} \\ z>0 & \text{میدان مجهول} \end{cases}$$

تفکیک به دو مورد

$$\begin{cases} A = \psi_1 \hat{z} & TE_z, \\ F = \psi_2 \hat{z} & TM_z \end{cases}$$

ψ_1 و ψ_2 در رابطه $\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0$

یعنی اجازه می‌دهیم k_x و k_y از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کنند

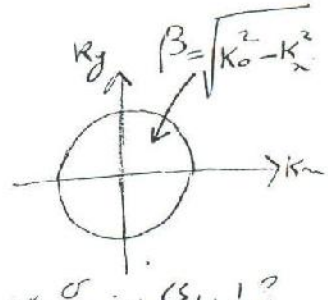
$$z>0 \quad \psi_{1,2}(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x,k_y)\, e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-j\beta z}\, dk_x\, dk_y$$

از فرض نیم موج برگشتی نداریم

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} & k_x^2 + k_y^2 < k_0^2 \\ -j\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2} & k_x^2 + k_y^2 > k_0^2 \end{cases}$$

ψ در همه جا صدق می‌کند، اگر β رابطه فوق را داشته باشد.

در جهت z میرا است



$\beta = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$

مجهول: $A(k_x,k_y) \longrightarrow$ میدان مماسی را پیوسته می‌آوریم $\longrightarrow$ شرط برای میدان‌های مماسی را تصدیق می‌کنیم.

$$\psi_1, \psi_2 \Rightarrow E_{y,x} = \begin{cases} 0 & \text{خارج از روزنه} \\ \sum_{\text{مودهای موجبر}} & \text{روی روزنه} \end{cases}$$

۸۴/۹/۴

$\bar{A} = \Psi_1 \hat{z}$: TM_z

spatial domain

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Psi_1(x,y,z) \\ E_y = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0} \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial z} \Psi_1 \\ E_z = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_1} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right) \Psi_1 \end{cases}$$

$$\Psi_{1,2}(x,y,z) = \iint dk_x\, dk_y\, \underbrace{A(k_x,k_y)}_{\Downarrow}\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}\, e^{-j\beta z}$$

spectral domain $\leftarrow \tilde{\Psi}_{1,2}(k_x,k_y)$

به نوع دیگر می‌توان بیان کرد ← بعداً از آن استفاده می‌کنیم

$$\Rightarrow \Psi_1(x,y,z) = \iint dk_x\, dk_y\, \tilde{\Psi}(k_x,k_y;z)\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}$$

نوشتن روابط بالای صفحه در حوزه طیف:

$$\tilde{E}_x(k_x,k_y) = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}(-jk_x)(-j\beta)\tilde{\Psi}_1$$

جای مشتق گیری و انتگرال گیری را عوض کردیم

بنابراین لازم است مشتق همگی پیوسته باشند

$$\tilde{E}_y(k_x,k_y) = \dots$$

$$\tilde{E}_z(k_x,k_y) = \dots$$

بنابراین در حوزه طیف، روابط جبری می‌شوند.

حل در مسئله اصلی:

یکی از شرایط مرزی: پیوستگی E_x :

$$E_x(x,y,z^{0^+}) = \begin{cases} 0 & \text{خارج از روزنه} \\ E(x,y,z^{0^-}) = \sum \left(A_{mn} e^{-j\beta_{mn} z} + B_{mn} e^{+j\beta_{mn} z}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\Big|_{z=} & \begin{matrix} 0<x<a \\ 0<y<b \end{matrix} \end{cases}$$

$$= \iint \frac{1}{j\omega\epsilon_0}(-jk_x)(-j\beta)\,\tilde{\Psi}_1(k_x,k_y)\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}$$

$$+ \iint \dots \tilde{\Psi}_2 \dots$$

TE_y : $E_x = -\left(\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y\right) = \frac{\partial}{\partial z}\Psi \qquad H_y = \frac{1}{j\omega\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2\right)\Psi$

$$E_x(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-j\beta)\,\tilde{\Psi}(k_x)\, e^{-jk_x x}\, e^{-j\beta z}\, dk_x \qquad z \geq 0$$

در $z=0$ مساوی

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2\pi} E_0 e^{+jk_x x}\, dx}_{\text{Sinc تابع}} = \int (-j\beta)\,\tilde{\Psi}(k_x)$$

$\tilde{\Psi}(k_x) \Leftarrow$ بدست می آید

* بنابراین تمام مؤلفه ها قابل محاسبه اند، از جمله توانی که از روزنه تشعشع می کند:

$$S = \frac{1}{2}\iint \underset{\text{روزنه}}{(E \times H^*)}\, ds \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{2}\iint E_x H_y^*\, dx\, dy \xrightarrow{\text{با انتگرال حوزه طیف برد}}$$

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_x(k_x)\, \tilde{H}_y^*(k_x)\, dk_x\, dk_y$$

رابطه پارسوال

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = -j\beta\tilde{\Psi} \\ \tilde{H}_y = \dfrac{k_0^2}{j\omega\mu}\tilde{\Psi} = \dfrac{1}{\eta_0}\left(\dfrac{k_0}{\beta}\right) \end{cases}$$

یا

امپدانس خط صفحه موازی بدست می آید

$$\frac{\Delta S}{\Delta y} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{E}_x|^2}{Z}\, dk_x = \frac{\Delta P}{\Delta y} + j\frac{\operatorname{Im}\{\Delta S\}}{\Delta y}$$

Z امپدانس خط ساده که به β بستگی دارد

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-k_0}^{+k_0}$$

$$\int_{-\infty}^{-k_0} + \int_{k_0}^{+\infty}$$

چون β موهومی است توان ذخیره می کند.

$\frac{1}{2} Y_a^{*} |V_a|^2$

$V_a \to E_0 a \left(\int E \cdot dl\right)$

$B_a \Rightarrow$ بزرگتر از صفر در می آید — روزنه خازنی است

مثال:

این را فرض می کنیم، فقط این مولفه است چون

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{x} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \xleftarrow{\text{برای}} Y_a = ?$$

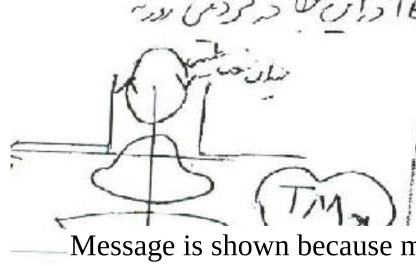
$\Leftarrow$ سطحی است زیرا وقتی مود TE_{10} داریم $\vec{E}$ در مرکز روزنه

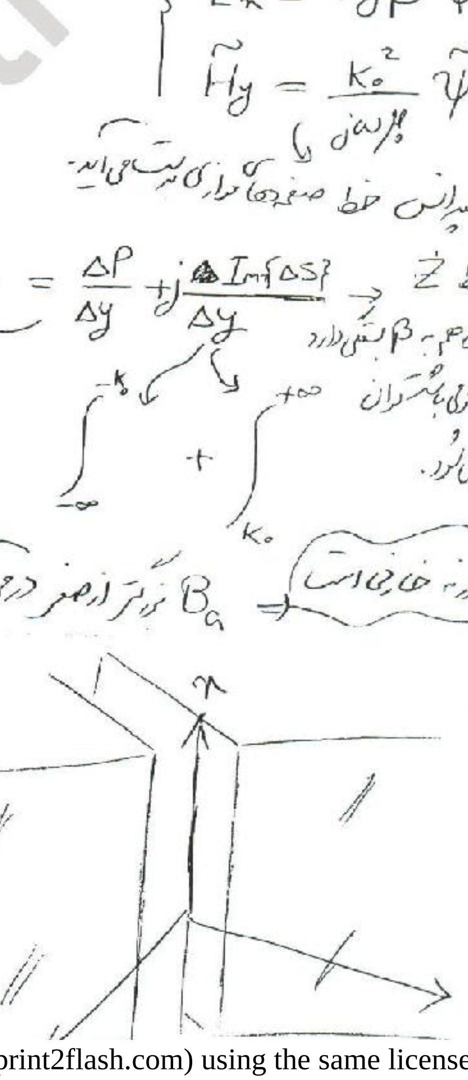
میدان صفحه طیفی ترسیم می آید

میدان صفحه

حفاظ در دو شکل این است

(TM_x)





ψ_2 : شرایط مرزی مشابه

$$+\frac{1}{j\omega\epsilon_0}(-jk_x)(-j\beta)\tilde{\psi}_1(k_x,k_y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\sum(A_{mn}+B_{mn})\int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{+jk_x x}\,dx$$

$$\times\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{+jk_y y}\,dy$$

• ۳ معادله دیگر شرایط مرزی E

می‌توان $\tilde{\psi}_1$ و $\tilde{\psi}_2$ را از معادلات حذف کرده و A_{mn}, B_{mn} بر حسب یکدیگر بدست آورد.

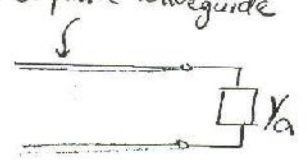
$$\left(\quad\right)\left(A_{mn}\right)=\left(\quad\right)\left(B_{mn}\right)$$

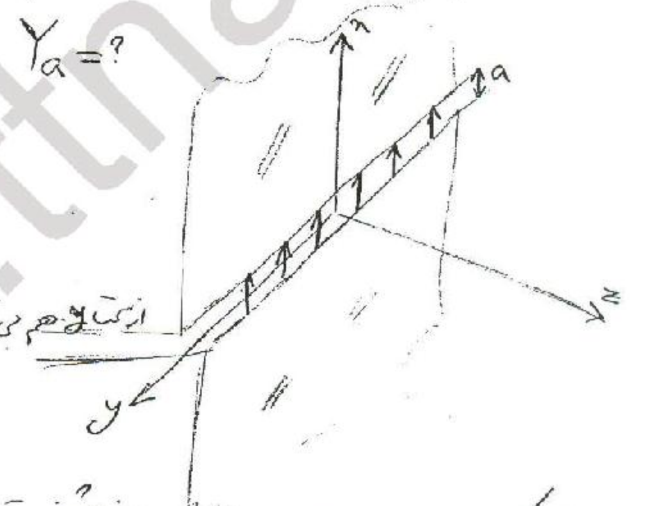
مثال خاص: ادمیتانس دهانه از این روزنه مطلوب است.

*- ادمیتانس معادل یک مودی تعریف می‌شود که مود غالب این سیستم TEM است.

$Y_a = ?$

parallel plate waveguide





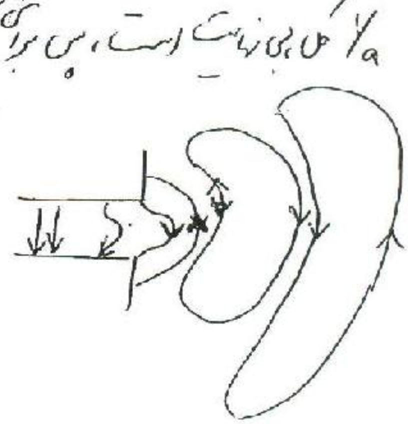
از شکل هم پیداست.

$\partial/\partial y = 0$

Y_a کمی بی‌نهایت است، پس برای یک عرض مشخص تعریف می‌کنند

$E_x(x, z=0)$

$$E_x=\begin{cases}E_0 & |x|<a/2\\ 0 & |x|>a/2\end{cases}$$



جواب: $TE_y \Rightarrow F=\psi\hat{y}$

$\psi(x,z)$

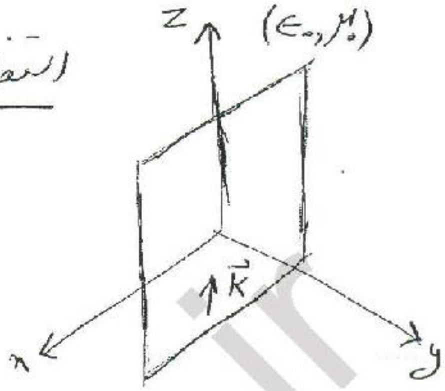
* عرض محدود ... از روزنه

$$\psi(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}(k_x)e^{-jk_x x}e^{-j\beta z}\,dk_x$$

$$\tilde{\psi}(k_x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\psi(x,0)e^{+jk_x x}\,dx$$

$$\beta=\begin{cases}\sqrt{k_0^2-k_x^2} & k_x^2<k_0^2\\ -j\sqrt{k_x^2-k_0^2} & k_x^2>k_0^2\end{cases}$$

۱۱-۲- جریان های سطحی:



استفاده از روش طیفی

در ناحیه $y>0$: فرض میشود جریان سطحی K در راستای z

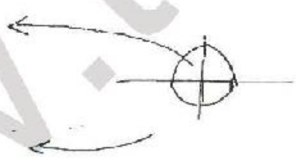
$$\bar{A} = \hat{z}\,\psi_1$$

spacial harmonics

$$y>0: \quad \psi_1(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, k_z)\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_z z}\, e^{-jk_y y}\, dk_x\, dk_z$$

$$v(t) = \int V(f)\, e^{+j2\pi f t}\, df \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2$$

$$k_y = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2} \\ -j\sqrt{k_x^2 + k_z^2 - k_0^2} \end{cases}$$



در ناحیه $y<0$:
$$A = \psi_2\, \hat{z}$$

$$\psi_2(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} B(k_x, k_z)\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_z z}\, e^{+jk_y y}\, dk_x\, dk_z$$

شرایط مرزی:

* $y=0$ روی: پیوسته E_z, E_x

* $\hat{y} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{K}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ به این ترتیب A, B بدست می‌آیند

$$\bar{K}(x,z) = \hat{z}\, f(x,z)$$

مثلاً اگر f را داشته باشیم

در این حالت توسط spectral domain معادلات جبری می‌شوند.

$$E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \psi$$

فوریه می‌گیرد

در $z=0$ $\longrightarrow$ $\tilde{E}_x(k_x, k_z) = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} (-jk_x)(-jk_z) A(k_x, k_z)$

$$E_x(x,y,z) = \iint \tilde{E}_x(k_x, k_z)\, e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} \cancel{e^{-jk_y y}}\Big|_{y=0} \, dk_x\, dk_z$$

به تبدیل فوریه هر یک تبدیل می‌شود که می‌توانیم درون آن‌ها را در دو طرف با هم برابر قرار دهیم

$$\hat{y} \times (H_{x_1}\hat{x} - H_{x_2}\hat{x}) = -\hat{z}(H_{x_1} - H_{x_2}) = \hat{z} f(x,z)$$

$$\tilde{H}_{x_1} - \tilde{H}_{x_2} = -\tilde{f}$$

$$H_{x_{1,2}} = \frac{\partial}{\partial y} \psi$$

$$H_{x_1} = \iint -jk_y A(k_x, k_z) e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} e^{-jk_y y}\Big|_{y=0} dk_x\, dk_z$$

$$H_{x_2} = \iint +jk_y B(k_x, k_z) e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} e^{+jk_y y}\Big|_{y=0} dk_z\, dk_x$$

$$H_{x_1} - H_{x_2} = -f$$

$$\Rightarrow -jk_y A - jk_y B = -\tilde{f}(k_x, k_z)$$

$$f(x,z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x, k_z)\, e^{-jk_x x} e^{-jk_z z}\, dk_x\, dk_z$$

(از دو شرط مرزی)

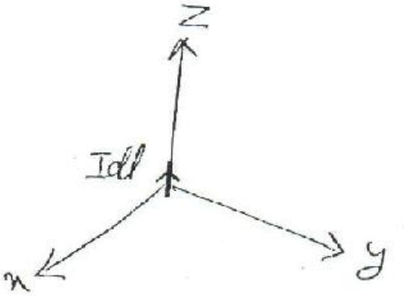
$$\Longrightarrow \begin{cases} A = B & (1) \\ -jk_y A - jk_y B = -\tilde{f}(k_x, k_z) & (2) \end{cases} \Longrightarrow \underset{A(k_x,k_z)}{A} = B = \frac{1}{2jk_y} \tilde{f}$$

بنابراین مسئله حل شده است

$$\tilde{f}(k_x, k_z) = \left(\frac{1}{\;}\right)^2 \iint f(x,z)\, e^{-jk_x x} e^{-jk_z z}\, dk_x\, dk_z$$

یک مثال مناسب از این روش، محاسبه میدان ناشی از دیپل است.

$$\vec{A} = \frac{I\ell}{4\pi r} e^{-jk_0 r}\,\hat{z}$$



یک موج کروی داریم

می خواهیم به نوعی عمل کنیم که این دیپل را با جریان صفحه ای مدل کنیم.

$$\vec{K} = \underbrace{I\ell\,\delta(x)\,\delta(z)}_{f(x,z)}\,\hat{z} \Rightarrow \tilde{f} = \frac{I\ell}{(2\pi)^2}$$

$$\rightarrow \tilde{f} \rightarrow A, B \xrightarrow{\text{تطابق با حل انتگرال پتانسیل}}$$

$$\Rightarrow A = B = \frac{1}{j2k_y}\,\frac{I\ell}{(2\pi)^2}$$

$$\psi_1(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{I\ell}{j2k_y(2\pi)^2} e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} e^{-jk_y y}\, dk_x dk_z = \frac{I\ell\, e^{-jk_0 r}}{4\pi r}$$

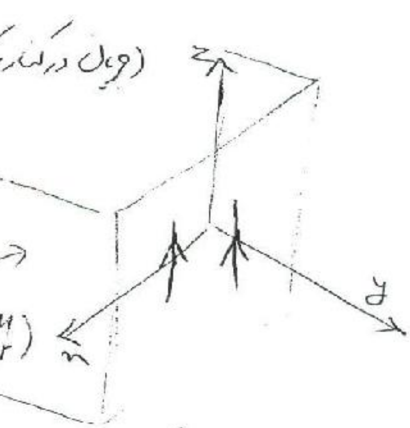
سایر موجها همه به یک اندازه ضعیف تمام تکمیل هستند

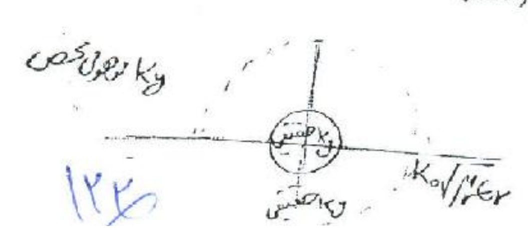
$\tilde{k}_y$ تحت چپ و راست یکسان نیست

(دیپل در کنار سطح زمین)

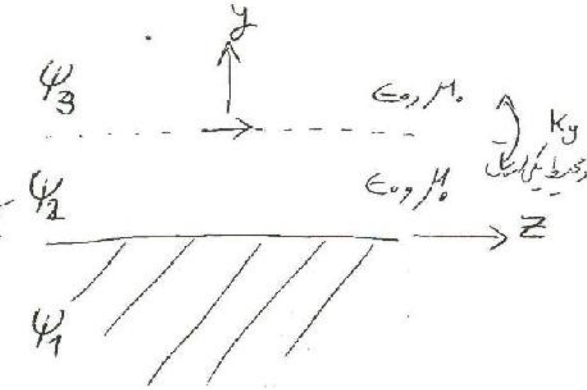
در سمت $y<0$: $k_x^2 + \tilde{k}_y^2 + k_z^2 = k_0^2 \epsilon_r \mu_r$

$$\psi_2 = \iint B(k_x, k_y)\, e^{-jk_x x} e^{-j\tilde{k}_y y} e^{-jk_z z}\, dk_z dk_x$$





مسئله : Sommerfeld



ψ_2 ← در عبارت ψ_2 امواج برگشتی هم دخیل هستند

$$\psi_2(x,y,z)=\iint\left[A(k_x,k_y)e^{-jk_y y}+B(k_x,k_y)e^{+jk_y(y)}\right]e^{-jk_x x}\,e^{-jk_z z}\,dk_x$$

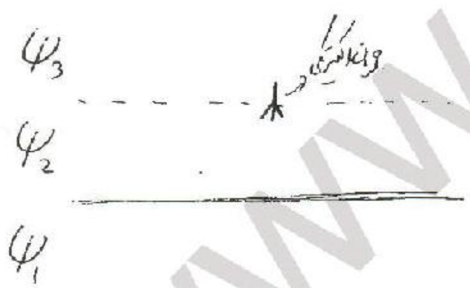
$$\psi_3(x,y,z)=\iint C_3(k_x,k_z)e^{-jk_y y}\,e^{-jk_x x}\,e^{-jk_z z}\,dk_x\,dk_z$$

$$\psi_1(x,y,z)=\iint C_1(k_x,k_z)e^{+j\tilde{k}_y y}\,e^{-jk_x x}\,e^{-jk_z z}\,dk_x\,dk_z$$

درحقیقت شرط مرزی داریم و ۴ ضریب مجهول.

بنابراین مسئله‌هایی که در حوزه مکان بسیار سخت است، به راحتی قابل حل است.

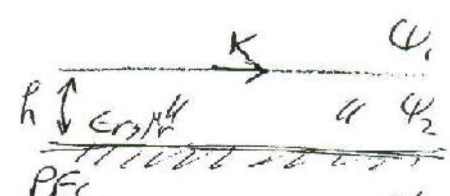
مسئله ۳ :



با تبدیل جریان الکتریکی به جریان مغناطیسی

مسطح به جواب می‌رسیم.

مسئله ۴ :



آنتن‌های مایکرواستریپ

مجهول A، B، C

در شرط مرزی

دو تا شرط مرزی در PEC

که A و B را به هم مرتبط می‌کند.

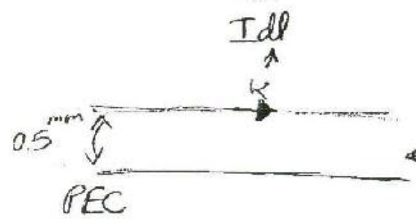
در مسائلی هم که جواب را نداشته باشیم، با داشتن بردارهای در ورودی، و تشخیص با توجه به جواب با ضرایب

مجهول، در روابط قرار داده شرط مرزی، ضرایب جواب بدست می‌آید.

در واقع برای بدست آوردن تابع گرین هم در نرم‌افزار ADS هم از همین Method

استفاده می‌کنند از Mixed potential هم استفاده می‌کنند.

$(\varphi, \bar{A})$



emitance

پروژه اختیاری:

HW#10

4-31
4-33
4-36
4-41

در مورد پروژه اختیاری

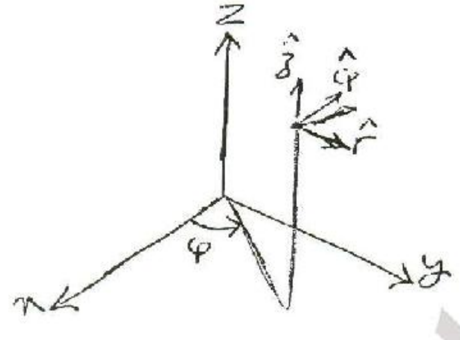
فصل چهارم :

امواج استوانه‌ای

۱-۴ ـ مقدمه   * روش تحلیل قبلی‌ها

* مسائل خاص این دستگاه: مثال: امواج شعاعی Radial waves

۱-۴ ـ میدان‌های الکترومغناطیسی در دستگاه استوانه‌ای



r, φ, z

$\hat{z}$ ثابت است بنابراین همیشه سعی می‌کنیم

که بصورت TM_z و TE_z بنویسیم

$$\nabla^2\psi + \underset{\substack{\downarrow \\ \omega^2\mu\epsilon}}{k^2}\psi = 0 \qquad \psi(r,\varphi,z)$$

$$TE_z : \bar{F} = \psi\hat{z}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi + k^2\psi = 0$$

$$\nabla\psi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\psi\,\bar{a}_1 + \cdots$$

$$\bar{\nabla}\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla . F = \frac{1}{h_1 h_r h_r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(h_1 h_r F_r)\right)$$

$$\bar{\nabla}.\bar{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right)$$

میدان φ ثابت و r ثابت :

$$\frac{Z''}{Z} = k^2$$

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R\right) + \frac{1}{r^2F}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}F + \frac{1}{Z}\frac{d^2}{dz^2}Z + k^2 = 0$$

$$\frac{Z''}{Z} = -k_z^2 \qquad \frac{F''}{F} = -k_\varphi^2$$

نسبت به k_z ، k_φ جواب‌های مختلفی داریم

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R\right) - \frac{1}{r^2}k_\varphi^2 - k_z^2 + k^2 = 0$$

حالت خاص اول:

$$\frac{F''}{F} = -n^2 \quad n=0,1,\dots \quad \Leftarrow \quad 0<\varphi<2\pi$$

$$\begin{cases} F(\varphi) = F(\varphi+2\pi) \\ F'(\varphi) = F'(\varphi+2\pi) \end{cases}$$

پروژه اختیاری: در جلسه استورم لیوویل بررسی کنید که با شرایط مرزی بالا، باز هم مسئله لوویل است. مقادیر ویژه حقیقی

مجموعه کامل متعامد بود.

$$F(\varphi) = C_1\cos(n\varphi) + C_2\sin(n\varphi)$$

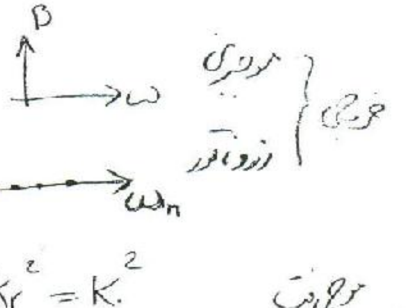
سیستم ← موجبری ← $Z(z) = e^{-j\beta z}$ با شرایط مرزی روی $R(r)$ ، β (مقدار ویژه z) بدست می‌آید

← رزوناتور

← با توجه به شرایط مرزی روی ψ به ازای $\begin{cases}\psi(r,\varphi,z=z_0)\\ \psi(r,\varphi,z=z_1)\end{cases}$ مقدار ویژه k_z تعیین می‌شود.

سازگاری با شرایط مرزی برای R ← ω_n ها بدست می‌آید

← فرکانس رزونانس رزوناتور



$k_\varphi = n \to$ مرتبه بسل

$$R(r) = C_3 J_n(k_r r) + C_4 N_n(k_r r) \qquad k_z^2 + k_r^2 = k^2$$

موج رفت

۱۲۴ $\begin{cases} H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - jN_n(x) \\ \quad (1) \end{cases}$

$H_n^{(2)}(k_r r) \qquad H_n^{(1)}(k_r r)$

حالت خاص دوم : $0 \leqslant \varphi < \varphi_0$

باید شرایط مرزی روی $\varphi = 0$ و φ_0 را اعمال کنیم.

$$\frac{F''}{F} = -\nu^2$$

شرایطی که باید داشته باشیم

$$\begin{cases} C_1 F(0) + C_2 F'(0) = 0 \\ C_3 F(\varphi_0) + C_4 F'(\varphi_0) = 0 \end{cases}$$

تا ν تعیین شود

$F_\nu(\varphi)$

$$\sum_\nu A_\nu F_\nu(\varphi) \longleftarrow$$ طیف این اپراتور گسسته می‌شود

برای $R(r)$:

$h(k_z z)$,

$$\rightarrow h(k_z z)$$

$$R(r) = B_\nu J_\nu(k_r r) + C_\nu N_\nu(k_r r)$$

حال می‌خواهیم از روی Ψ ؛ $\bar{H}$ و $\bar{E}$ را بدست آوریم.

TM_z :

$$\bar{H} = \nabla \times \bar{A} = \nabla \times (\Psi \hat{z}) = (\bar{\nabla}\Psi) \times \hat{z}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial r} \Psi(r,\varphi,z)\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi(r,\varphi,z)\,\hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}\Psi(r,\varphi,z)\,\hat{z} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} H_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Psi(r,\varphi,z) \\ H_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r}\Psi(r,\varphi,z) \\ H_z = 0 \end{cases}}$$

$$E = \frac{1}{j\omega\epsilon}\left(\bar{\nabla} \times \bar{H}\right)$$

$$E_r = \frac{1}{j\omega\epsilon}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(H_z) - \frac{\partial}{\partial z}(rH_\varphi)\right)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{j\omega\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial z}(H_r) - \frac{\partial}{\partial r}(H_z)\right)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(H_r)\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\psi$$

$$= \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi$$

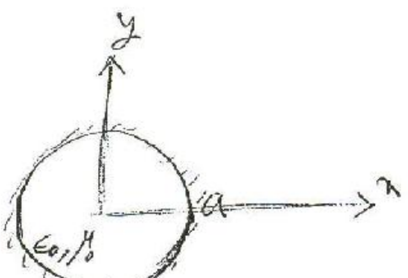
$$\boxed{\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{j\omega\epsilon}\,\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\psi \\ E_\varphi &= \frac{1}{j\omega\epsilon}\,\frac{\partial^2}{r\partial\varphi\partial z}\psi \\ E_z &= \frac{1}{j\omega\epsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\psi \end{aligned}}$$

برای TE_z هم همین طور:

دوال
$$\begin{cases} H_r = \dfrac{1}{j\omega\mu}\,\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial z}\psi \\ H_\varphi = \dfrac{1}{j\omega\mu}\,\dfrac{\partial^2}{r\partial\varphi\partial z}\psi \\ H_z = \dfrac{1}{j\omega\epsilon}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r,\varphi,z) \\ E_\varphi = -\dfrac{\partial}{\partial r}\psi \\ E_z = 0 \end{cases}$$

۳-۴- موجبرهای استوانه‌ای توخالی



الف) موجبرهای با سطح مقطع دایروی

ب) سایر موجبرها

مطلوب $\beta(\omega)$ است.

$$\begin{cases} \beta_{TE}(\omega) \\ \beta_{TM}(\omega) \end{cases}$$

تا به این جا این دو را از هم تفکیک کرده‌ایم

TM_z: $\quad A = \psi \hat{z}$

$$\psi(r, \varphi, z) = R(r)\, F(\varphi)\, Z(z)$$

موجبر $\quad Z(z) = e^{-j\beta_{TM} z} = e^{-j\beta z}$

$$0 < \varphi \leq 2\pi \Rightarrow F(\varphi) = \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix}$$

$$R(r) = J_n(k_r r) \qquad k_r^2 + \beta^2 = k_0^2$$

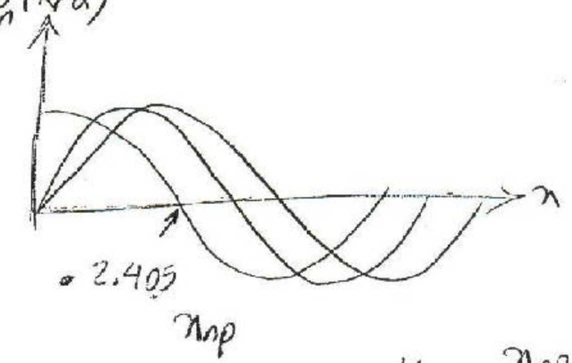
از شرط‌های مرزی k_r بدست می‌آید و از روی آن β تعیین می‌گردد.

$$\text{مماسی E صفر} \begin{cases} E_\varphi = \cdots \\ E_z = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right)\psi \end{cases} \Rightarrow R(r)\Big|_{r=a} = 0$$

E_z: ضریبی از ψ

از این جا k_r بدست می‌آید

$$J_n(k_r a) = 0$$



TM

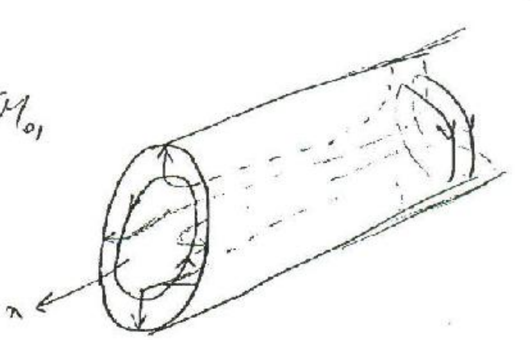
n_p ← شماره صفر تابع بسل

متغیرات

$$K_r = \frac{\chi_{np}}{\cdots}$$

شکل میدان انتشاری

TM_{01}



$$\psi = J_n(k_r r)\,\sin(n\varphi)\, e^{-j\beta z}$$

$TE: \quad F = \psi \hat{z}$

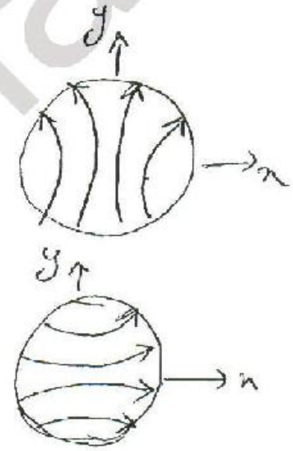
$$\psi \propto H_z \Rightarrow \left.\frac{\partial \psi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$$

$TE_{np} \rightarrow J_n'(x_{np}') = 0$

$$k_r = \frac{x_{np}'}{a}$$

$J_n(k_r r) \leftarrow TE_{11}$

(TM_{01} پایین‌تر از cutoff) کمترین



بستگی به این دارد φ را sin بگیریم یا cos

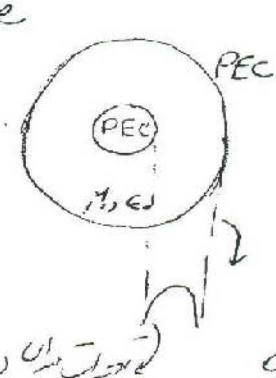
• در این فضا (k_r) برای TE_{11} کمتر از TM_{01} است.

ب) سایر موجبرها

$$\psi(r,\varphi,z) = \left[A\,J_n(k_r r) + B\,N_n(k_r r)\right] \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}\, n\varphi\; e^{-j\beta z}$$

⇐ با شرایط مرزی A و B و دستگاه آنها k_r به دست می‌آید

مشاهده می‌شود که فرم β تغییر نمی‌کند.

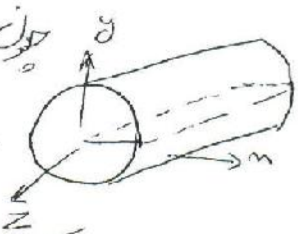


با تغییرات میدان در مورد TM

اگر ثابت برود در TEM مد می‌گیرد

سعی شود که شکل مد اول ترسیم گردد

چون به صورت تک هادی است مود TEM ندارد.



ولی مودهای TE و TM مستقل:

$$\Psi(r,\varphi,z) = J_{\frac{n}{2}}(k_r r)\sin\left(\frac{n\pi(\varphi-\alpha)}{2\pi}\right)e^{-j\beta z}$$

α : زاویه‌ای که تیغه در آن قرار گرفته

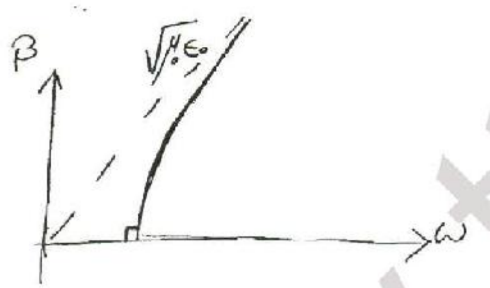
$$TM_z: \quad A = \Psi \hat{z}$$

$$\boxed{k_r^2 + \beta^2 = k_0^2}$$

$$E_z \propto \Psi$$

برای بدست آوردن k_r:

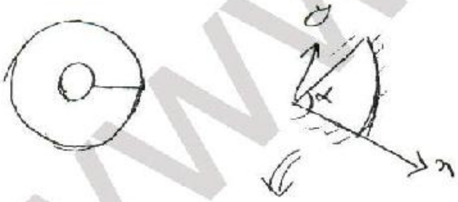
$$J_{\frac{n}{2}}(\underbrace{k_r a}_{x_{np}}) = 0 \quad \text{یا} \Rightarrow k_r = \frac{x_{np}}{a}$$



بنابراین باز هم رفتار β تغییر نمی‌کند

$\frac{d\beta}{d\omega} =$ سرعت گروه $\Rightarrow$ اعوجاج سیگنال داریم

دو نوع دیگر از این دسته:



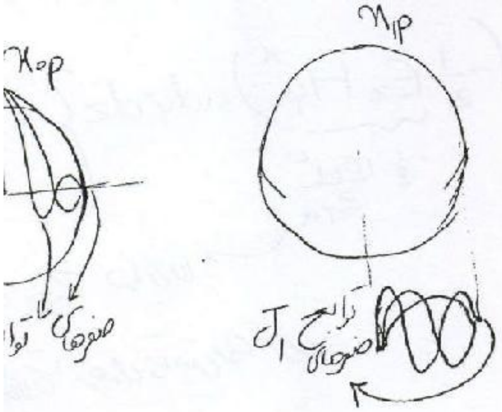
$$\begin{cases} \Psi = J_{(\frac{n\pi}{\alpha})}(k_r r)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}e^{-j\beta z} \\ k_r^2 + \beta^2 = k_0^2 \end{cases}$$

$$k_r \to J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(x_{np}) = 0$$

کلاً با تغییر این اشکال فرم کلی β تغییر نمی‌کند

ولی با این تغییرات ω_{cutoff} تغییر می‌کند.

Radial Waves امواج شعاعی

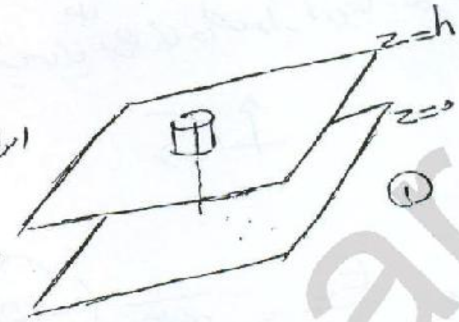


TM

در واقع توابع بسل ترکیب امواج شعاعی رونده و برگشتی می‌باشند.

امواج بصورت شعاعی منتشر می‌گردد

در جهت z موج ایستاده خواهد بود.



(2)

slab wave guide مانند

برای شکل ۱:

$TM_z \qquad A = \psi\hat{z}$

به دلیل وجود منبع متقارن در مبدأ دارد

در اینجا برعکس چیزی که قبلاً به جای β تحویل بود m باید داده شود تا K_r تعیین گردد

موج رونده — تعیین کننده m

$$\psi = H_n^{(2)}(k_r r)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n\varphi)\cdot\cos\left(\frac{m\pi z}{h}\right)$$

$m=0,1,\dots$

بستگی به محل تحریک — $n=0,1,2,\dots$

$$K_r^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 = k_0^2$$

$$H_n^{(2)}(k_r) = J_n(k_r r) - jN(k_r r)$$

اگر ناپیوستگی نداشتیم $H^{(2)}$، اگر ناپیوستگی داشتیم: ترکیب خطی $H^{(1)}, H^{(2)}$

منبع

ناپیوستگی

فقط $H^{(2)}$

حال می‌خواهیم مشتقه فرکانس قطع را بررسی کنیم.

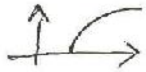
$r=a$ عبوری از

$$Power = \frac{1}{2} Re\left\{ \int_0^h \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \underbrace{E_z H_\varphi^*}_{\frac{1}{2}\frac{|E_z|^2}{Z_{TM}}}\right) a\, d\varphi\, dz \right\}$$

$$Z_{TM} = -\frac{E_z}{H_\varphi}$$

بنابراین Z_{TM} در اینجا کل اطلاعات مربوط به توان تشعشعی را در خود دارد.

در خطوط انتقال مدل تک فازی داشتیم: امپدانس از یک جایی موهومی خالص و از آن جا به بعد حقیقی خالص



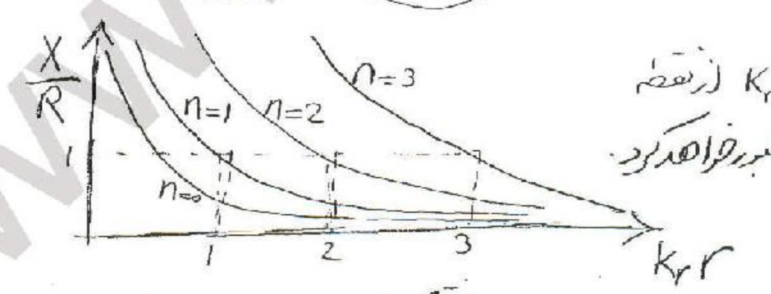
پس در اینجا داریم:

$$Z_{TM} = \frac{E_z}{H_\varphi} = \frac{\frac{1}{j\omega\epsilon_0}\overbrace{\left(-\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + k_0^2\right)}^{k_r^2}\psi}{-\frac{\partial}{\partial r}\psi}$$

$$\Rightarrow Z_{TM} = \frac{k_r^2}{j\omega\epsilon_0}\,\frac{H_n^{(2)}(k_r r)}{k_r H_n^{(2)'}(k_r r)} = R + jX$$

تشعشعی

تابعی است از r



برای n از نقطه $k_r r = n$ عبور خواهد کرد $\frac{X}{R} = 1$

$k_r > n$: $R > X$: انتشار می‌یابد

بنابراین n و m داده می‌شود و از روی آن شعاعی بدست می‌آید که بعد از آن شعاع،

$R > X$ و به سمت استفاده می‌رود. در r های کم به صورت راکتیو

این شکل برای گیج کردن

راحت تر است برای ⊙ مانند ⊙

امپدانس

انرژی داشتیم

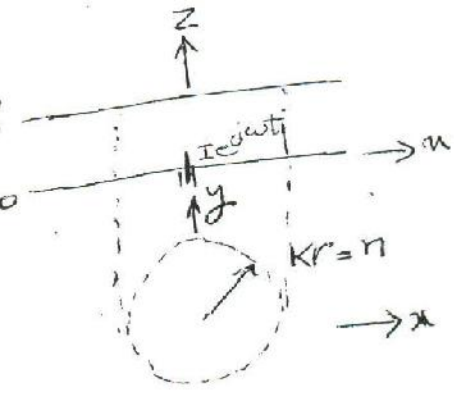
برای $m = n = 0$ ، TEM_r

TM_{mn}

$Ae^{j\varphi}$ بخش ارتعاشی دورانی

بدون ψ را تعیین کرده

$$\psi = \overbrace{H_n^{(2)}(kr)}^{Ae^{j\varphi}} \begin{matrix} \sin(n\varphi) \\ \cos(n\varphi) \end{matrix} \cos\left(\frac{m\pi z}{a}\right)$$



$$k_r^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 = k_0^2$$

$m = 0$ برای مودهای مرتبه پایین

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} r = n \Rightarrow \underline{2\pi r = n\lambda_0}$$

سطوح هم فاز دایره ای هستند.

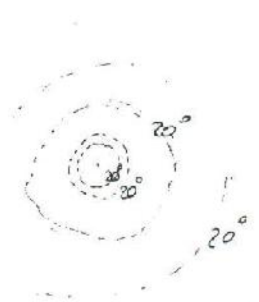
$$J_n(k_r r) - j N_n(k_r r)$$

$$e^{j\varphi} \rightarrow \varphi(k_r r) = -\tan^{-1}\left(\frac{N_n(k_r r)}{J_n(k_r r)}\right)$$

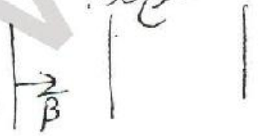
نقاط φ ثابت در صورت ثابت [illegible]

بودن r آنها ثابت می باشد

فاصله سطوح فاز ثابت در شعاع های پایین کم و متغیر است و در r های بزرگ ثابت می شود



$e^{j\varphi(z)}$



برای منبع صفحه ای

نکته: سطوح هم فاز $\underline{\psi}$

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}_{\beta : \text{نرخ تغییرات فاز}} z + \cdots$$

به همین ترتیب برای منبع سطحی داریم:

$$e^{-j\varphi(z)} = e^{-j\varphi(0)} e^{-j\overbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}^{\beta} z}$$ منبع صفحه ای

مرجع شعاعی : $Ae^{j\varphi} = A(r)\, e^{j\varphi(r_0)}\, e^{j \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=r_0} (r-r_0)}$

(درنقطه مفروض r_0) — دارای حالت جابجایی تقریبی (با چیزی) تغییر فاز می‌دهد.

$$\Rightarrow \boxed{\beta_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}}$$

ثابت موج در جهت r

$$\beta_r = \frac{d}{dr}\left[\tan^{-1}\left(\frac{N_n(k_r r)}{J_n(k_r r)}\right)\right]$$

$$= \frac{N_n' J_n - J_n' N_n}{J_n^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\left(\frac{N_n(k_r r)}{J_n(k_r r)}\right)^2\right)} = \frac{2\pi k_r r}{J_n^2(k_r r)+N_n^2(k_r r)}$$

$2\pi k_r r =$ رونسکین

بنابراین به r وابسته است

$$\beta_r \xrightarrow[r\to\infty]{} K_0 \Rightarrow$$ این جبهه به تخت می‌شود

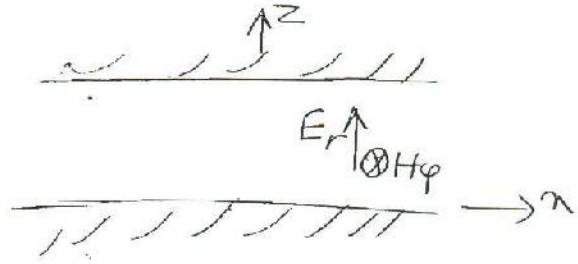
ضمناً طبیعی است زیرا به موج صفحه‌ای تشبیه می‌شود

سؤال: آیا برای مسئله‌ی بعدی هم برقرار است؟

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)\psi :$$

اگر مدار ثابت $\left(\frac{\partial}{\partial z}=0\right)$ ، $E_z \neq 0$ ، فقط تابع ψ است

$$H_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r}\psi$$



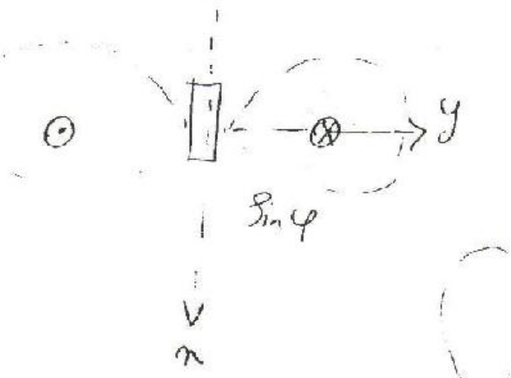
(در کل فاز آن H را از آن استخراج کرده بنابراین در rهای کوچک تقریباً داریم ولی در rهای بزرگ باز هم مانند موج صفحه‌ای E_z و H_φ هم فاز می‌شوند

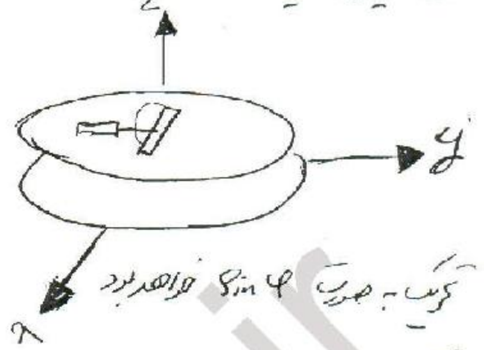
در حالت مود TEM_r $\left(\begin{smallmatrix}E_r=0\\ H_r=0\end{smallmatrix}\right)$ فقط E_z, H_φ داریم
$\uparrow$
TM_{00}

ولی آن مانند یک خط انتقال برای آن L و C بدست آورد.

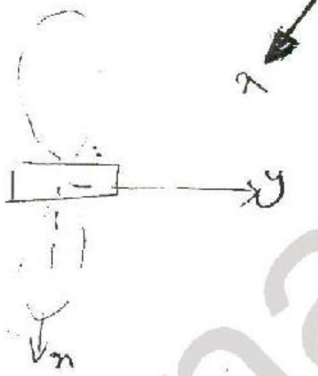
اگر به شکل فوق تحریک شود $n=0$

نوع دیگر تحریک :





تحریک به صورت $\sin\varphi$ خواهد بود

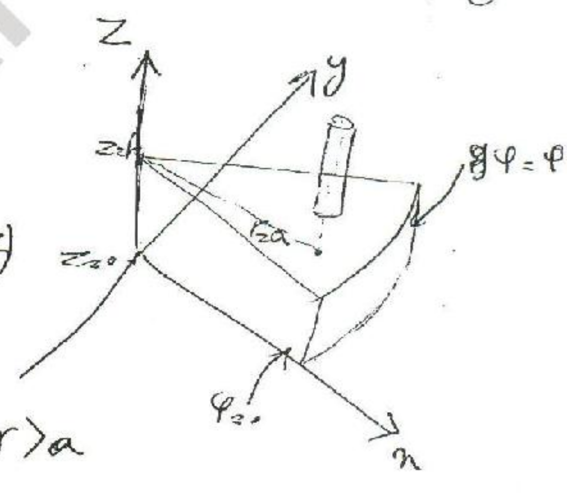


در صورت تحریک این دو اطراف ...

$: 90^\circ$

جهت انتشار موج

TM_z



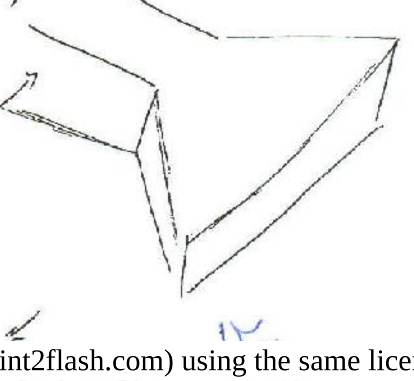
$$\Psi(r,\varphi,z) = \ldots \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right)\cos\left(\frac{m\pi z}{h}\right)$$

$$\Psi(r,\varphi,z) = H^{(2)}_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(k_r r)\sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right)\cos\left(\frac{m\pi z}{h}\right) \quad r>a$$

در $r<a$ ، J داریم.

در نرم مستطیلی

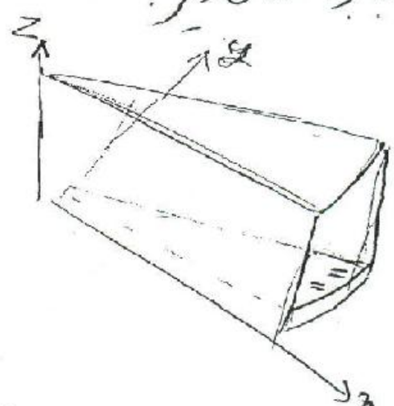
$\beta \neq k_0$, $\beta = \sqrt{k_0^2 - (\cdot\cdot) - (\cdot\cdot)}$ Hplane Sectral Horn Antenna

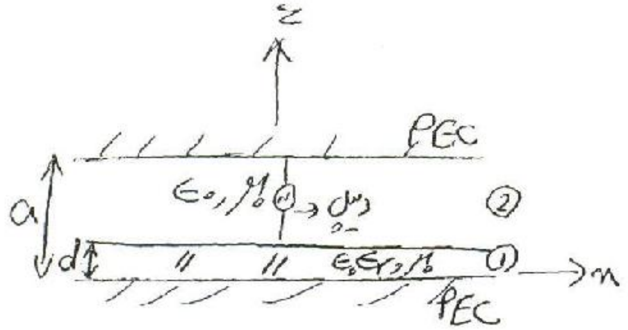


در این جا صفحات فاز ثابت استوانه ای است.

در این شکل حالت تقریباً بدیهی داریم که β به k_0 برابر و می تواند در فضا منتشر شود.

۵-۴- موجبرهای شعاعی دیگر:





حل مسئله برای بردن موجبرهای استوانه‌ای برای شکل روبرو است.

TM_z

بستگی به تحریک

$$0<z<d \quad \psi_1 = A H_n^{(2)}(k_{r_1} r) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n\varphi) \cos(k_{z_1} z) \qquad k_{r_1}^2 + k_{z_1}^2 = k_0^2 \epsilon_r$$

$$d<z<a \quad \psi_2 = B H_n^{(2)}(k_{r_2} r) \begin{matrix}\sin(n\varphi)\\ \cos(n\varphi)\end{matrix} \cos(k_{z_2}(z-a)) \qquad k_{r_2}^2 + k_{z_2}^2 = k_0^2$$

حل شرایط مرزی: پیوستگی $H_r, H_\varphi, E_\varphi, E_r$

$$① \; E_r = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial r}\psi_1\right)\Big|_{z=d} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\psi_2\Big|_{z=d} \qquad \forall r, \forall \varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{r_1} = k_{r_2} = k_r \\ \text{داشتن } \varphi \text{ در هر دو یکسان باشد} \end{cases}$$

⇐ k_r, n ها هم در روابط‌اند.

⇓

چون $H_n^{(k_r r)}$ ها باید با هم یکسان باشند

$$② \; E_\varphi = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{\partial^2}{r\partial\varphi\partial z}\psi_1\right)\Big|_{z=d} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\frac{\partial^2}{r\partial\varphi\partial z}\right)\psi_2\Big|_{z=d}$$

⇐ اطلاعات تکراری می‌دهند

$$①,② \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\epsilon_r} k_{z_1} \sin(k_{z_1} z)\Big|_{z=d} A = B\, k_{z_2} \sin(k_{z_2}(z-a))\Big|_{z=d}}$$

$$H_r = \frac{+\partial}{r\partial\varphi}\psi_1 = \frac{\partial}{r\partial\varphi}\psi_2 \rightarrow \psi_1 = \psi_2\Big|_{d \text{ در}}$$

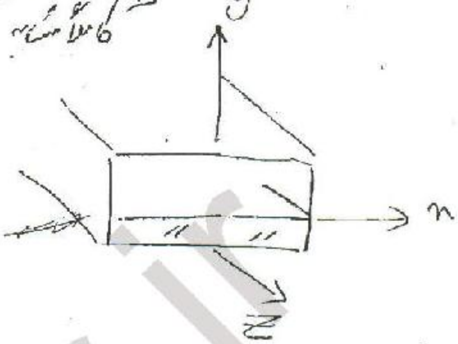
$H_\varphi \Rightarrow$ رابطه جدیدی نمی‌دهد.

ترکیب دو معادله $\rightarrow$

$$\frac{K_{z_1}}{\epsilon_r}\tan(K_{z_1}d) = -K_{z_2}\tan K_{z_2}(a-d)$$

کاملاً مشابه روابط برای محیط پر است

$$K_{z_1}^2 - K_{z_2}^2 = K_0^2(\epsilon_r - 1)$$



دلیل شد:

در محیط باز شده $\rightarrow$ تابع نمایی $e^{j\beta z}$

در محیط اولیه $\rightarrow$ تابع کسینوسی $\cos(\frac{m\pi z}{a})$

و تنها در آن تفاوت است.

بنابراین برای slab با درج شیارهای لازم نیست دوباره کار کنیم

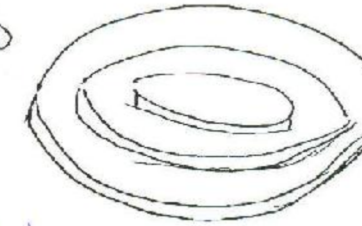
صفحه مشخصه را $\hat{n}$ برابر با صفحه مشخصه را $\hat{z}$ خواهد داد.

ولی شرایط اشاره این دو با هم برابر نیستند.

به همین ترتیب محیط corrugated در موجبرها شیارهای قابل اعمال است.

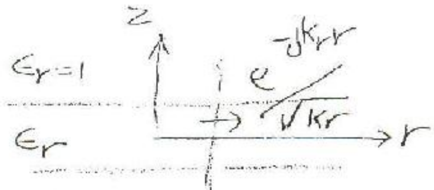
در این جاها E_φ باید وجود داشته باشد

در هر حلقه مانند موجبر coax خواهد بود که اینها کوتاه می‌شوند



۸۶/۹/۲۲

۴-۵- موجبر شعاعی دیگر



$$\begin{cases} k_r^2 + k_{z_1}^2 = k_0^2 \epsilon_r \\ k_r^2 + k_{z_2}^2 = k_0^2 \end{cases}$$

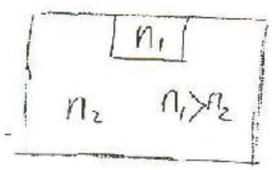
$$k_x^2 + \beta^2 = k_0^2 \epsilon_r$$

$$k_{x_2}^2 + \beta = k_0^2$$

$-\gamma^2$

۴-۶- امواج محیطی Circumferential Waves

optic مثل



اگر این موجبر را به این شکل درآوریم

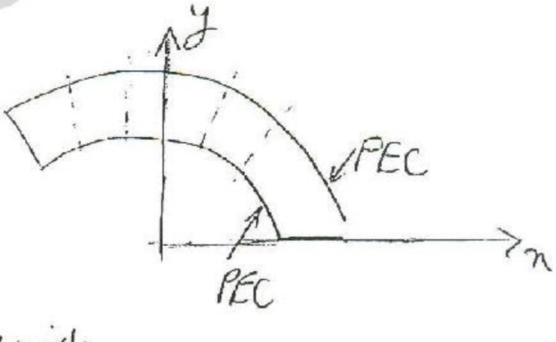
Ring Resonator

$e^{-jk_\varphi \varphi}$

در این موجبر امواج شعاعی در جهت r، standing wave خواهد بود.

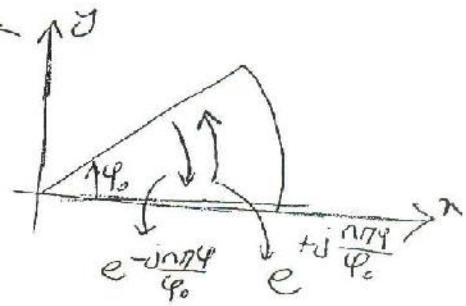
$$k_r^2 + \cancel{k_z^2} = k_0^2$$

$$\psi = \left(A J_\nu(k_0 r) + B N_\nu(k_0 r)\right) e^{-j\nu\varphi}$$



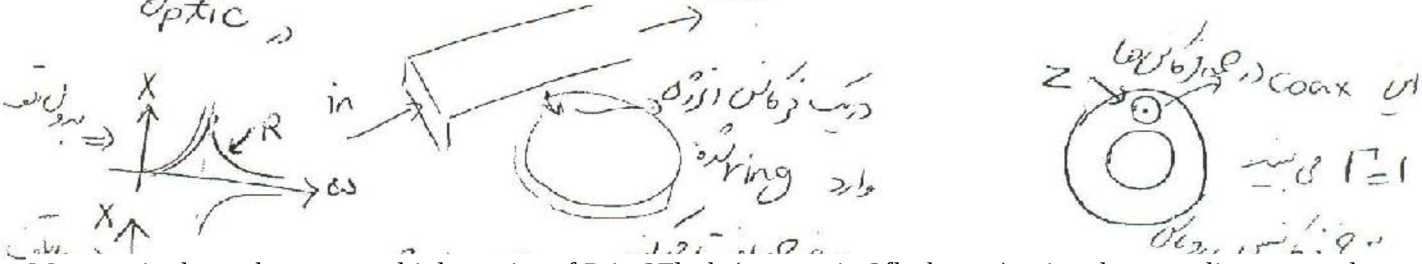
در این موجبر هم امواج محیطی تشکیل می‌شود که standing wave در

$$J_\nu(k_r r)\, \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right) e^{-j\beta z}$$



استفاده از Ring Resonator در

Optic در



به دلیل نبودن تحریک

$$
\begin{array}{r l}
 & \quad\text{مقدار دارد} \qquad \text{صفر} \\
E_z \text{ پیوستگی} \rightarrow & \\
H_z \text{ پیوستگی} \rightarrow & \\
E_\varphi \text{ ״} \rightarrow & \\
H_\varphi \text{ ״} \rightarrow &
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix} \square & 0 & \square & 0 \\ 0 & \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}}
\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$\det[\quad] = 0 \Longrightarrow Eq\,(5\text{-}74)$$

ص 221

زوج دیگری که در این قالب می‌گنجد.

$K_n \leftarrow$ تابع Modified بسل

موهومی محض

$$\psi_2^m = C\, H_n^{(2)}(k_r' r)\, \sin(n\varphi)\, e^{-j\beta z}$$

(״ ״) $\rightarrow k_r^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1$

میرا شونده نمایی

کلاً شرط مرزی خارجی ارتباط بین توابع بسل را می‌دهد.

$k_0 < \beta < k_1$

$\Rightarrow k_r \rightarrow$ موهومی محض

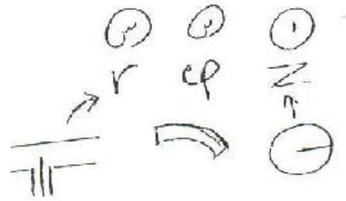
فقط برای $n=0$ ماتریس ذکر شده صورت جدیدی به دست می‌آید ـ بطوریکه دو مود TE و TM

کاملاً از یکدیگر جدا می‌شوند.

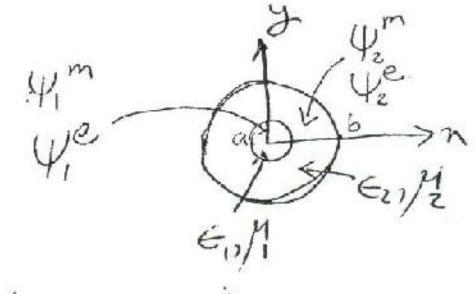
شکل 11 (کتاب)

۷-۴- موجبر دو دی‌الکتریک

Two-Dielectric Waveguide



این موجبر هم از جنس ① است.



$TE_z + TM_z$

در این موجبر می‌خواهیم مودهای هیبرید بگیریم.

$$\psi_1^m(r,\varphi,z) = A\, J_n(k_r r)\, \underline{\sin(n\varphi)}\, e^{-j\beta z}$$

* یکی باید Sin و دیگری باید Cos باشد

$$\psi_1^e(r,\varphi,z) = B\, J_n(k_r r)\, \underline{\underline{\cos(n\varphi)}}\, e^{-j\beta z}$$

$$\psi_2^m(r,\varphi,z) = \left[C_1 J_n(k_r' r) + D_1 N_n(k_r' r)\right] \sin n\varphi\, e^{-j\beta z}$$

$$\psi_2^e(r,\varphi,z) = \left[C_2 J_n(k_r' r) + D_2 N_n(k_r' r)\right] \cos n\varphi\, e^{-j\beta z}$$

$$\begin{cases} k_r^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \\ k_r'^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 \end{cases}$$

$TM \longrightarrow$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right)\psi_1^m + \underbrace{0}_{TE}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{j\omega\epsilon_1}\left(\frac{\partial^2}{r\,\partial\varphi\,\partial z}\right)\psi_1^m + \frac{\partial}{\partial r}\psi_1^e$$

دلیل اینکه Sin را هنگام مشتق‌گیری Cos گرفتیم!

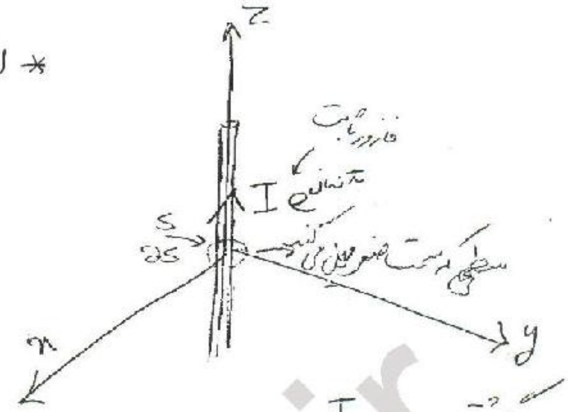
فرض می‌کنیم شرط مرزی در $r=b$ نیز داده شده باشد.

اگر توابع بسل را که شرط مرزی فوق در آن اعمال شده باشد را به صورت تابع $B(r)$ بنویسیم

ترکیب خطی

۸-۴- منابع امواج استوانه‌ای :

* ابتدا فرض می‌کنیم نسبت به φ تغییری نداشته باشد



$$I\hat{z} \rightarrow A = \psi \hat{z}$$

$$\Rightarrow TM_z$$

چون در φ مستقل است — ضریب

$$\psi(r,\varphi) = \psi(r) = C H_0^{(2)}(k_0 r)$$

$I =$ ثابت

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega\epsilon_0 \bar{E}$$

$$\rightarrow \oint_{\partial s} H \cdot dl = \underbrace{\int_s \bar{J} \cdot \bar{ds}}_{I} + j\omega\epsilon_0 \int_s \overline{E} \cdot \overline{ds} \quad (s \rightarrow 0)$$

$$H = H_\varphi \hat{\varphi} \qquad H_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} A_r - \frac{\partial}{\partial r} A_z = -\frac{\partial}{\partial r} A_z$$

$$\Rightarrow H_\varphi = -\frac{d}{dr}\psi \Rightarrow H = -\frac{d}{dr}\left(C H_0^{(2)}(k_0 r) \right)$$

$$\lim_{r \to 0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} k_0 C \underbrace{H_0^{(2)\prime}(k_0 r)}_{\text{در } r\to 0 \text{ تابعیت } 1/r \text{ دارد}} r \, d\varphi = I$$

$$N_{\nu}(x) \underset{\nu \neq 0}{=} -\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}$$

$$H_0^{(2)}(k_0 r) = J_0(k_0 r) - j N_0(k_0 r)$$

$$H_0^{(2)\prime}(k_0 r) = k_0 \left(-J_1 - j(-N_1) \right) \Rightarrow \boxed{\bar{A} = \frac{I}{4j} H_0^{(2)}(k_0 r) \hat{z}}$$

از روی A بدست آمده

$$\boxed{E_z = -\frac{\omega_0 \mu I}{\ldots} H_0^{(2)}(k_0 r)}$$