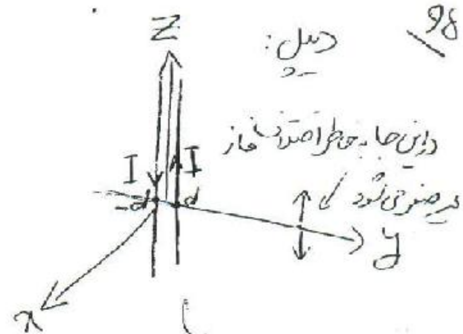
دیپل:



در $\varphi = 0$ ⇐ میدان صفر دارد.

⇐ تبعیت آن $(\sin\varphi)$ خواهد داشت

$$\psi = H_1^{(2)}(k_0 r)\sin(\varphi)$$

$\boxed{I\,2d = \text{گشتاور}}$

جمع آثار ⇒ $\bar{A}_1 = \frac{I}{4j} H_0^{(2)}(k_0|\bar{r} - d\hat{y}|)\,\hat{z}$

$$\bar{A}_2 = \frac{-I}{4j} H_0^{(2)}(k_0|\bar{r} + d\hat{y}|)\,\hat{z}$$

چنین ترکیب $d \ll 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y}\right|_{y=0} \times 2d = \bar{A}^{dp}$

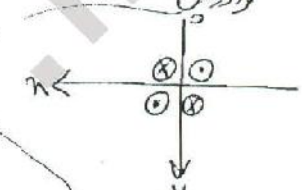
$$= 2d \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{I}{j4} H_0^{(2)}(k_0|\bar{r} - y\hat{y}|)\right]\hat{z}\Bigg|_{y=0}$$

ثابت

$\frac{\partial}{\partial y}|\bar{r}_0 - y\hat{y}|$ $\qquad |\bar{r}_0 - y\hat{y}|^2 = (\bar{r}_0 - y\hat{y})(\bar{r}_0 - y\hat{y})$

این مشتق گیری $\sin\varphi$ را ایجاد می‌کند

کوادراپل

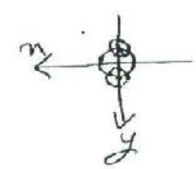


$\bar{A} = 0 \quad x=0,\ y=0$

$\sin 2\varphi$ ⇐ بوجود می‌آید

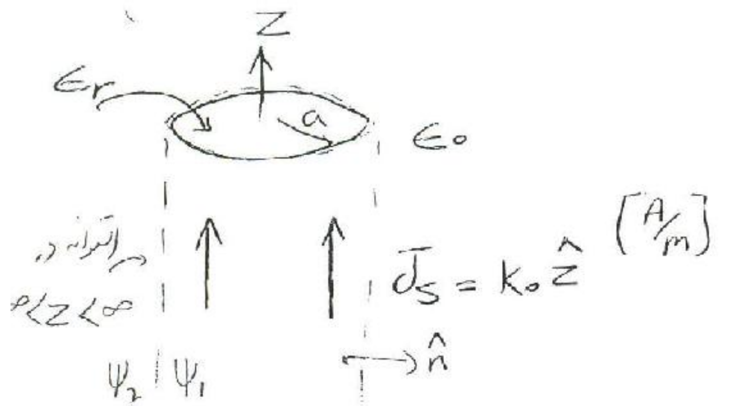
راه دیگر

جریان‌ها را با هم ترکیب نمی‌نویسیم



۸۶/۹/۲۵

ادامه: ۱۴۸ـ منابع امواج استوانه‌ای



فرض می‌کنیم TM_z باشد.

$$\begin{cases} \psi_1 & r<a \quad \bar{A}_1 = \psi_1 \hat{z} \\ \psi_2 & r>a \quad \bar{A}_2 = \psi_2 \hat{z} \end{cases}$$

$$\psi_1(r, \varphi, \cancel{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n J_n(k_0 \sqrt{\epsilon_r}\, r)\, e^{+jn\varphi}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

اگر n غیر صحیح باشد

$$\psi_2(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_n H_n^{(2)}(k_0 r)\, e^{jn\varphi}$$

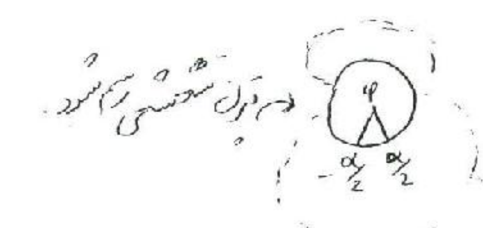
$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} k_0^2 \psi \Rightarrow \psi_1 = \psi_2 \Big|_{\text{روی } a} \Rightarrow 0 \leq \varphi < 2\pi$$

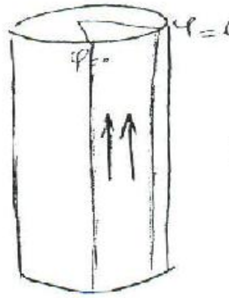
$$\Rightarrow C_n J_n(k_0 \sqrt{\epsilon_r}\, a) = \tilde{C}_n H_n^{(2)}(k_0 a)$$

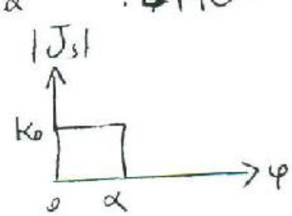
$$\begin{cases} \hat{n} \times (\bar{H}_{\text{خارج}} - \bar{H}_{\text{داخل}}) = \bar{J}_s \\ H_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r} \psi \end{cases}$$

مسأله زیر نیز قابل حل است:

HW:







۱۴۴

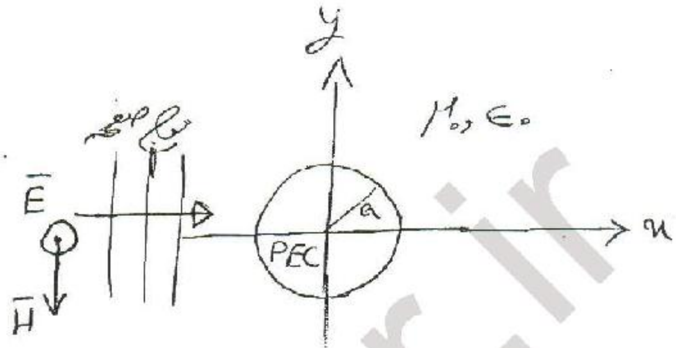
۹-۴- پراکندگی امواج توسط اجسام استوانه‌ای :

۱) امواج صفحه‌ای

۲) امواج تولید شده توسط منابع استوانه‌ای .

$$\bar{E}_{tot} = \bar{E}^i + \bar{E}^s$$

در غیاب شیء



$$\bar{E}^i = E_0 e^{-jk_0 x}\hat{z} = E_0 e^{-jk_0(r\cos\varphi)}\hat{z}$$

$$\bar{E}^s(r,\varphi) : \quad \bar{A}^s = \psi^s \hat{z}$$

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\cancel{\partial^2/\partial z^2} + k_0^2\right)\psi^s$$

$$\psi^s(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H_n^{(2)}(k_0 r) e^{jn\varphi}$$

generative function : $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, t^n$

تابع مولد

$$t = -je^{+j\varphi} \Rightarrow e^{\frac{x}{2}(-je^{+j\varphi} - je^{-j\varphi})} = \sum J_n(x)(-j)^n e^{jn\varphi}$$

با تبدیل موج صفحه‌ای به فرم توابع استوانه‌ای $\rightarrow$ $e^{-jx\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-j)^n J_n(x) e^{jn\varphi}$

با ضرب $e^{-jn\varphi}$ می‌توان فرم انتگرالی تابع بسل را بدست آورد .

$$\Rightarrow \bar{E}^i(r,\varphi) = \hat{z} E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-j)^n J_n(k_0 r) e^{jn\varphi}$$

$$\psi^s(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H_n^{(2)}(k_0 r) e^{jn\varphi}$$

۹۱/

$$\bar{E}^s(r,\varphi) = \hat{z}\,\frac{k_0^2}{j\omega\epsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H_n^{(2)}(k_0 r)\, e^{jn\varphi}$$

$$\bar{E}^i + \bar{E}^s = 0 \Big|_{\substack{r=a \\ \varphi = 0 \sim 2\pi}} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[(-j)^n J_n(k_0 a) E_0 + \frac{k_0^2}{j\omega\epsilon} C_n H_n^{(2)}(k_0 a)\right] e^{jn\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow C_n = -\frac{(-j)^n J_n(k_0 a)}{\frac{k_0^2}{j\omega\epsilon_0} H_n^{(2)}(k_0 a)} E_0$$

$k_0 a \ll 1$ خیلی کوچک → سیم باریک

$k_0 a \gg 1$ خیلی بزرگ → optical می‌توان تحقیق کرد پرتو...

$k_0 a$: متوسط

↳ resonanse درجات

↳ diffraction →

Long Wave مثلاً

برای کره زمین، زمین را دور می‌زند

در سیم باریک: C_n به ازای n های کوچک غالب می‌شود

$n=1 \Rightarrow C_n , E_0$ هم‌فاز $\Rightarrow \bar{E}^s , \bar{E}_0$ 90° اختلاف فاز دارند

⇐ موج اسکتر شده در میدان الکتریکی 90° با موج برخورد اختلاف فاز دارد.

اگر پلاریزاسیون را TE_z کنیم

$$H^i = \hat{z} H_0 e^{-jk_0 x} = \hat{z} H_0 e^{-jk\rho\cos\varphi}$$

$$\bar{F}^s = \psi^s \hat{z} \qquad H_z^s = \frac{1}{j\omega\mu_0} k_0^2 \psi^s$$

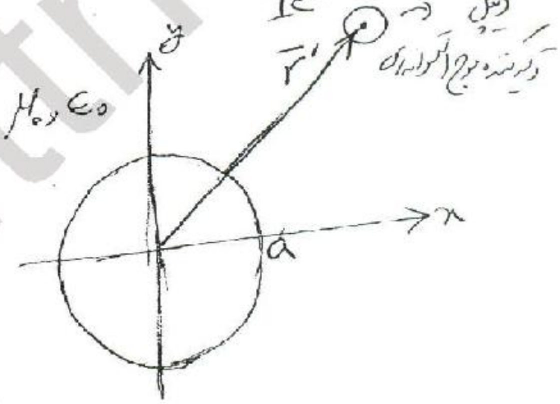
شرط مرزی: $\frac{\partial}{\partial n}(H_z)\Big| = 0$ ۱۴۴

در فرمول C_n برحسب مشتقات ظاهر می‌شود

این به، جریان در PEC در جهت φ القا می‌شود

فرمول C_n ها نوشته شود.

۲) منابع استوانه‌ای:



$$\bar{E}^i = -\frac{\omega\mu_0 I}{4} H_0^{(2)}(k_0|\bar{r}-\bar{r}'|)\,\hat{z}$$

TM_z: چون H_z توسط منبع تولید نمی‌شود پس احتمالاً توسط استوانه هم تولید نمی‌شود

$$\bar{E}^s = \frac{k_0^2}{j\omega\epsilon_0} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H_n^{(2)}(k_0 r) e^{jn\varphi}}_{\psi}\,\hat{z}, \quad r \geq a$$

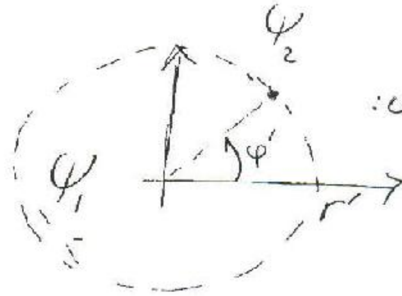
فرمول Addition ⇓ برای توابع هنکل

$$H_0^{(2)}(k|\bar{r}-\bar{r}'|) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r') J_n(k_0 r) e^{jn(\varphi-\varphi')} & r < r' \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0 r') H_n^{(2)}(k_0 r) e^{jn(\varphi-\varphi')} & r > r' \end{cases}$$

تذکر: برای بسط تابع H_0، توابع بسل و هنکل از تمامی مراتب n مورد نیاز است.

بیان فرمول
برای الکترومغناطیسی:

$$\bar{K} = \bar{J}_s = \hat{z}\,\frac{1}{r}\,\delta(\varphi-\varphi')\ [A/m]$$



$$\hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{J}_s$$

$$\delta(\varphi-\varphi') = \sum_n \underbrace{a_n}_{1} e^{+jn\varphi}$$

در امتحان این حل، حل تابع ضربه‌ای را در نظر می‌گیریم. و اگر منبع در تابع ضربه‌ای
به بی‌نهایت ببریم.

• ادامه داده شود

۸۶/۹/۲۷

ناشی از منبع — ناشی از اسکتر

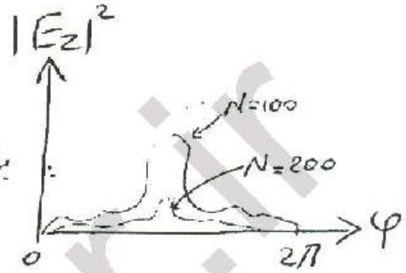
$$E_z = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[C_{1n} J_n(k_0 r) + C_{2n} H_n^{(2)}(k_0 r) \right] e^{jn\varphi} & r<r' \\ \sum C_{3n} H_n^{(2)}(k_0 r)\, e^{jn\varphi} & r>r' \end{cases}$$

$E_z \to E_z^i + E_z^s$

که هر دو همگی تولید شده

$$\xrightarrow{r=a} \sum_{n=-N}^{N} \left(C_{1n} J_n(k_0 a) + C_{2n} H_n^{(2)}(k_0 a) \right) = 0$$

به ازای $N=\infty$ صفر خواهد شد (در نزدیکی ها مرز ولی مرزی محدود دارد)



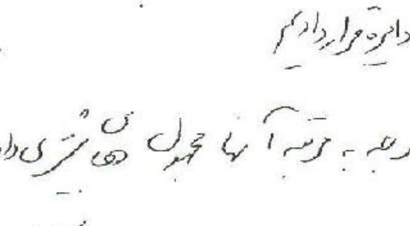
هدف حداقل کردن میزان خطا خواهد بود

Generalized Multiple Technique : GMT

در واقع تحلیل فرق این است که ... می‌باشد Multipole را در مبدأ قرار داده‌ایم ($H_n^{(2)}(k_0 r)$) در مبدأ

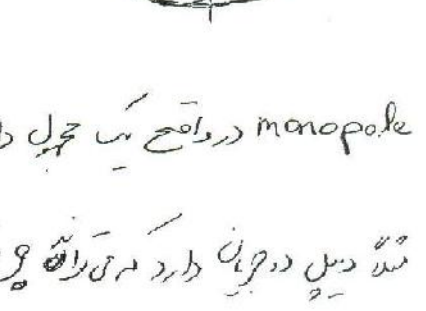
این روش پیشنهاد می‌کند که تعداد محدودی Multipole با مرتبه n کمتر در جاهای غیر از مبدأ قرار دهیم

با الهام از روش Moment، Point Matching، میدان مماسی را روی سطح صفر قرار می‌دهیم



حالت حدی این روش تکنیک ... است که monopole ها H_0 را روی محیط دایره قرار دادیم

GMT



monopole در واقع یک تحلیل دارد و multipole با مرتبه n تحلیل های بیشتری دارد

مثلاً دیپل دو جریان دارد که می‌تواند چرخش نیز داشته باشد. C_{1n} و C_{2n} ها اینجا در نظر گرفت.

بنابراین درجه آزادی مرتبه multipole ها و مکان قرارگیری آنها است (میدان روی سطح صفر شود)

برای اشکال غیر منتظم نمی‌توان از این روش در درجه آزادی استفاده کرد

البته Bose فرزین این روش‌ها مانند حال کامل نیست

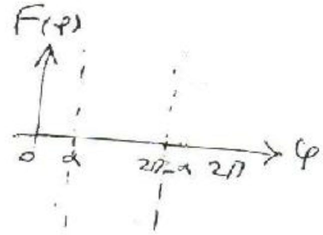
نیاز به سعی و خطای زیادی دارد.

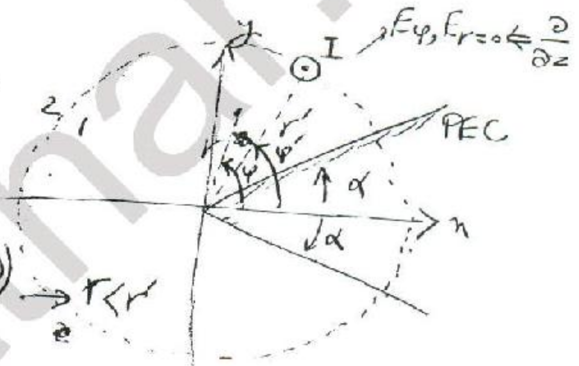
برای اشکال پیشرفته این تحقیق بسیار مشکل است.

F-10 _ تئوری امواج انتشاری از لبه‌ها (Wedges) $\varphi =$ ثابت

$A = \psi \hat{z}$

TM_z





$$\psi = \begin{cases} \sum_\nu A_\nu J_\nu(k_0 r) \sin\left(\underbrace{\frac{n\pi}{2(\pi-\alpha)}}_{\nu}(\varphi-\alpha)\right) & \rightarrow r<r' \\ \sum_\nu B_\nu H_\nu^{(2)}(k_0 r) \sin(\nu(\varphi-\alpha)) & \rightarrow r>r' \end{cases}$$

$n \neq 0, n = 1, 2, \ldots$

بخاطر پیوستگی $A_\nu J_\nu(k_0 r') = B_\nu H_\nu(k_0 r')$

$$\Rightarrow \psi = \begin{cases} \sum_\nu C_\nu H_\nu^{(2)}(k_0 r') J_\nu(k_0 r) \sin(\nu(\varphi-\alpha)) \\ \sum_\nu C_\nu J_\nu^{2}(k_0 r') H_\nu^{(2)}(k_0 r) \sin(\nu(\varphi-\alpha)) \end{cases}$$

Hr چون جریان به ما نمی‌دهد (مشتق نسبت به φ)

$$H_\varphi \begin{cases} \hat{n}\times(\bar{H}_2-\bar{H}_1)=\vec{K}=\frac{I}{r}\delta(\varphi-\varphi')\hat{z} \\ H_\varphi\Big|_{r'^+}-H_\varphi\Big|_{r'^-}=\frac{I}{r'}\delta(\varphi-\varphi') \end{cases}$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\psi$$

$$|\vec{K}|\, r'd\varphi = \ldots \Rightarrow \vec{K}=\frac{1}{r}\delta(\varphi-\varphi')\hat{z}$$

رونسکین

$$\sum_\nu\Big[C_\nu J_\nu(k_0r')\,.\,k_0 H_\nu^{(2)'}(k_0r') + C_\nu k_0 J'_\nu(k_0r') H_\nu^{(2)}(k_0r')\Big]\sin(\nu(\varphi-\alpha))$$

$$=\frac{I}{r'}\delta(\varphi-\varphi')$$

ضرایب C_ν را بدهد.

$$\sum_\nu d_\nu \sin(\nu(\varphi-\alpha))=\frac{I}{r'}\delta(\varphi-\varphi') \longrightarrow$$

از تعامد توابع sin استفاده کرده و ضرب و انتگرال بین α و $2\pi-\alpha$

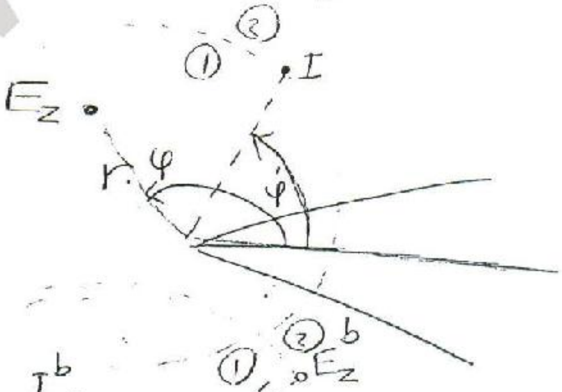
* در d_ν فرمول $\sin(\nu(\varphi'-\alpha))$ وجود دارد

$$d_{\tilde{\nu}}\left(\frac{2\pi-2\alpha}{2}\right)=\frac{I}{r'}\sin\tilde{\nu}(\varphi'-\alpha)$$

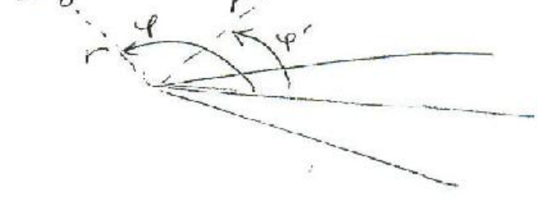
نسبت φ و φ' نیز تقارن پیدا می‌کند.

معنای این قضیه reciprocity است.

$$\int \bar{E}^a\cdot\bar{J}^b\,dv=\int \bar{E}^b\cdot\bar{J}^a\,dv$$



وقتی منبع در ناحیه ① و گیرنده در ناحیه ② است.



میدان در فرمول ... نسبت به φ و φ' و r و r' متقارن باشد

$\to (K_0 r)^{\nu}$

$E_z = 0 \quad K_0 r \to 0$

$H_\varphi = 0 \quad K_0 r \to 0$

اما H_φ عدد بزرگی است که به α بستگی دارد. زیرا α ، ν را ... در رفتار تابع بسل در $K_0 r \to 0$ برای ν های مختلف متفاوت است (با به برای ... ← می‌تواند در لبه H_φ بی‌نهایت شود:

۸۹/۱۰/۲

ادامه ۴-۱۰ - پراکندگی امواج توسط گوه

این تئوری قصد دارد تا بتواند Geometrical Theory of Diffraction : GTD

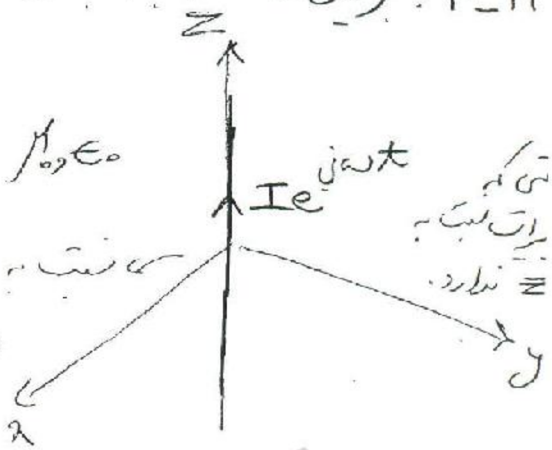
Geometrical Optics

ضرایب تفرق را برای زاویه‌های مختلف در جهت تغییر داده برداشت موج حساب کرده و به صورت ماتریسی در آورد. بنابراین این ضرایب را در موج برخورد (با توجه به پلاریزاسیون) ضرب کرده و در زاویه مربوط به آن اثر را نشان دهیم

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

۱۲۷

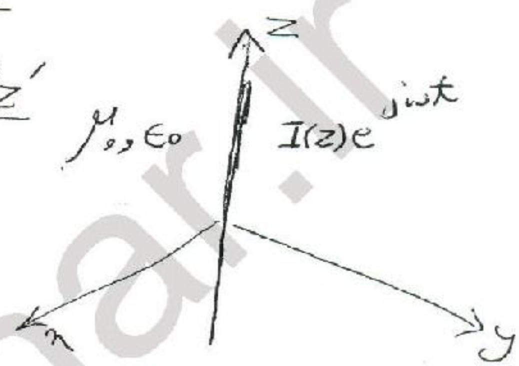
۴-۱۱: جریان‌های وابسته به z



$$\bar{A} = \hat{z}\,\frac{I}{4j} H_0^{(2)}(k_0 r)$$

نسبت به z با جریان مطابق هم فاز تغییر می‌کند

حتی که جریان نسبت به z تغییر ندارد



$$\bar{A}(r,z) = \hat{z}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(z') e^{-jk_0\sqrt{r^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\,dz'$$

$$\psi\hat{z} = \bar{A}$$

$$\psi(r,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, H_0^{(2)}(k_r r)\, e^{j\omega z}\, d\omega$$

حاصل جمع spectral در مختصات استوانه‌ای گسترش

$$k_r^2 + \omega^2 = k_0^2$$

در این حالت در ناحیه‌ای که k_r موهومی شده و در حول سیم امواج میرا دیده شده (میدان نزدیک) دیده می‌شود و هر جا از آن k_r حقیقی شده و تشعشع می‌کند.

$$H_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r}\psi$$

$$\lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi} H_\varphi^{(a,z)}\, a\, d\varphi = I(z) \qquad \nabla\times H = J + j\omega\epsilon E$$

a را به سمت صفر میل می‌دهیم تا این ترم ظاهر شود

$$I(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{I}(\omega)\, e^{j\omega z}\, d\omega$$

بنابراین ضرایب بسط در انتگرال را برابر قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow \psi(r,z) = \frac{1}{2\pi}\int^{+\infty} \tilde{I}(\omega)\; H_0^{(2)}\left(\sqrt{k^2-\omega^2}\, r\right) e^{j\omega z}$$

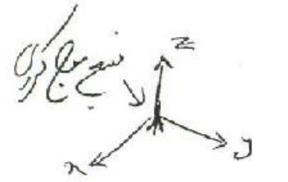
با مساوی قرار دادن $\bar{A}$ ها از دو روش انتگرال تبدیل و روش فوق داریم:

$$\frac{1}{8\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{I}(w)\,H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2-w^2}\,r\right)e^{+jwz}\,dw=\int_c \frac{I(z')\,e^{-jk_0\sqrt{r^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{r^2+(z-z')^2}}$$

به روش فوق می‌توان امواج را به یکدیگر تبدیل کرد.

مثلاً در این جا می‌توان جریان را صفحه‌ی نازک (سیم کردن) و آن را توسط بی‌نهایت منبع استوانه‌ای که در راستای z هم‌جهت هستند، بدست آورد.

تبدیل موج کروی به استوانه‌ای:



$$\psi=\frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r},\quad r\to\sqrt{\rho^2+z^2}$$

کروی

* (در این به جای r در دستگاه استوانه‌ای ρ می‌گیریم.)

$$=\frac{1}{8\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{I}(w)\,H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2-w^2}\,\rho\right)e^{jwz}\,dw$$

$$I(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}I(z)\,e^{-jwz}\,dz \xRightarrow{\text{در این جا}} \tilde{I}(w)=Il$$

نکته جالب: وقتی $\rho\to\infty$

فرمول انتگرال تبدیل به فرم انتگرال فوریه در می‌آید و بدین ترتیب می‌توان رابطه‌ای بین تبدیل فوریه

و انتگرال تابع هنکل به فرم بالا بدست آورد.

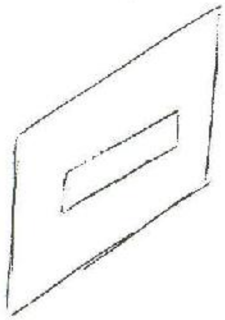
$\boxed{Eq\ (5\text{-}142)}$

در کتاب Harington

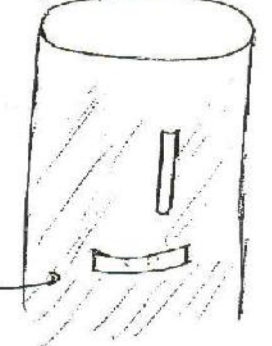
مراجعه به لیست 1

۱۲۸

12-4: تشعشع از روزنه‌ها :

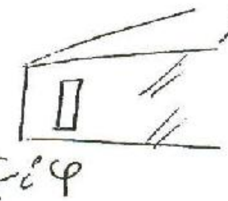


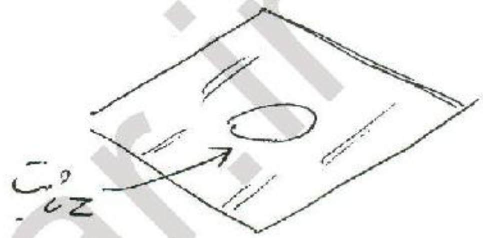
Method 1



(تنوع روزنه‌ها را افزایش دادیم)

Method 2





: Method 1

$e^{jn\varphi}$: تغییرات نسبت به φ

e^{jwz} : z // //

داده‌های مسئله :

$$\bar{E}_{ap}\begin{cases} E_z(\varphi,z)\Big|_{\text{روی روزنه}} \\ E_\varphi(\varphi,z)\Big|_{\text{روی روزنه}} \end{cases}$$

حل میدان برای $r>a$: $TE_z + TM_z$

$$\begin{cases} \psi^{e}_{TE}(r,\varphi,z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{w=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(w)\,H_n^{(2)}(k_r r)\,e^{jn\varphi}\,e^{jwz}\,dw \\ \psi^{m}_{TM}(r,\varphi,z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{w=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(w)\,H_n^{(2)}(k_r r)\,e^{jn\varphi}\,e^{jwz}\,dw \end{cases}$$

بنابراین $\bar{E}^{ap}$ را که برحسب به صورت یک انتگرال فوریه و سری $e^{jn\varphi}$ در می‌آوریم.

$$E_{z_{ap}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_n(w)\, e^{jn\varphi}\, e^{jwz}\, dw$$

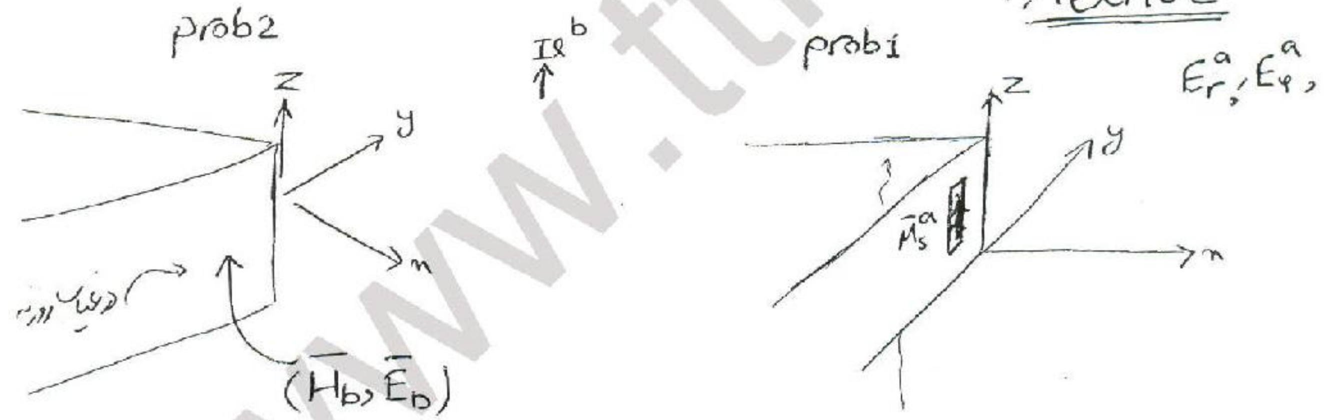
$$\rightarrow\ g_n(w) = \tilde{E}_n(w)$$

بنابراین w که افزایش می‌یابد تابع هنکل موجود علاوه بر این که دامنه را تضعیف می‌کند، فاز را نیز تغییر می‌دهد

در واقع نوع این که موج که از روزنه بیرون می‌آید چگونه عوض می‌شود، فقط به آن تابع هنکل بستگی دارد.

تغییر فازی که به وجود می‌آید (درون سری و انتگرال) شکل رابطه خطی را بهم می‌زند

Method:



$$\int \bar{E}^a \cdot \bar{J}^b dv = -\int H^b \cdot \bar{M}^a dv$$

$\vec{E}^a \cdot \hat{z}\, I\ell\, \delta_3(r - r_{ff})\, dv \leftarrow$ ابتدا جریان I^b را در جهت $\hat{z}$

$I\ell\ \bar{E}^a(r_{ff}) \cdot \hat{z}$

قرار می‌دهیم ولی لازم است برای پیدا کردن

دیگر مولفه‌های E در جهت $\hat{\rho}, \hat{\varphi}$

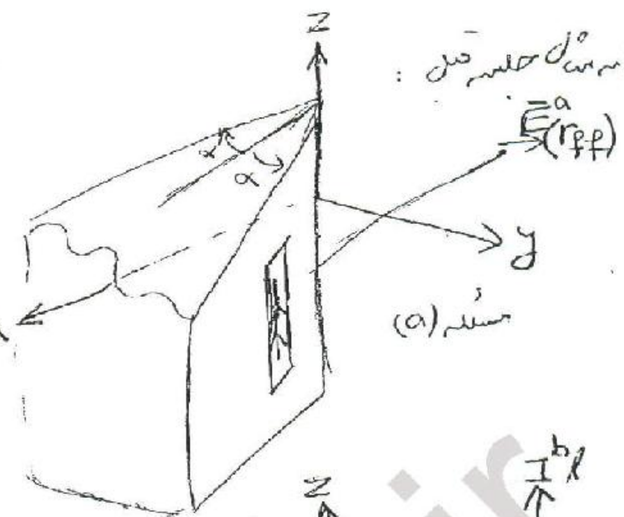
هم بگذاریم

ادامه تشعشع از روزنه ها (۱۲-۴)　　　　۸۶/۱۰/۴

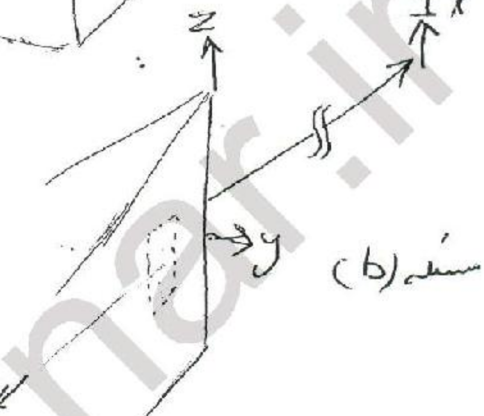
ادامه مثال جلسه قبل :

$$\frac{F''}{F} = \text{ثابت}$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{2(\pi-\alpha)}\right)\varphi$$



$$\int_V \bar{H}^b \cdot \bar{M}^a \, dv = \int E^a(r_{ff}) \cdot \hat{z} I^b \, dl$$



بنابراین اگر $\bar{H}^b$ (میدان ناشی از جریان I^b در جهت $\hat{z}$) را

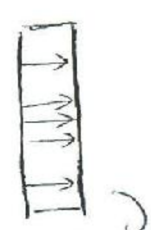
در محل جریان $\bar{M}$ در مسئله (a) بدست آوریم:

با بدست آوردن انتگرال فوق می توان $E^a(r_{ff})$ در راستای

$\hat{z}$ را بدست آورد.

برای بدست آوردن مولفه های دیگر میدان I^b را لازم است در دو جهت اصلی

دیگر نیز بدست آوریم.

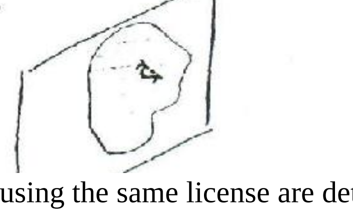


حل ما آن لازم است تا میدان E^{ap} از روی آن روزنه را پیدا کرده و جریان های $\bar{M}$ معادل را قرار می دهیم

برای مثال پیچیده تر می توان از المان های ساده تری برای میدان روزنه E^{ap} استفاده کرد.

سطح را به المان های ساده تر تقسیم کرده و میدانهای جلو و عقب آنها را می دانیم و در خود روزنه

با هم قرار می دهیم تا در نهایت کل میدان روی روزنه در شکل پیچیده بدست آید



حل مسئله (ط) را می‌خواهیم برای المان جریان بر تر در تعریف لب به z بدست آوریم.

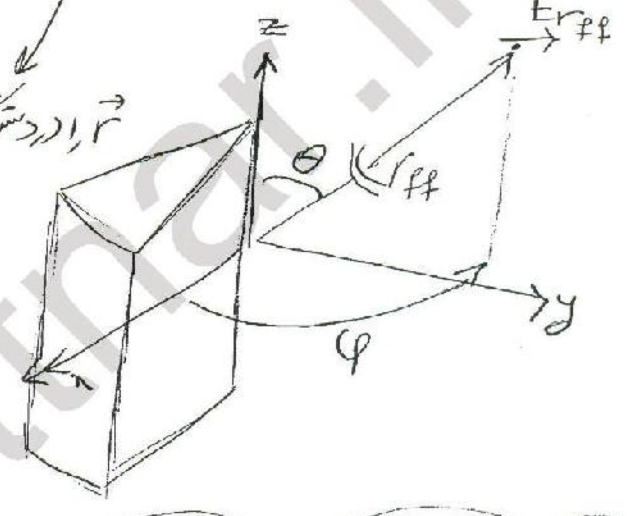
$$\bar{A}^i = \psi \hat{z} \qquad \psi^i = \frac{I^b \ell e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}_{ff}|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_{ff}|}$$

$$|\bar{r}_{ff}| \gg |\vec{r}| \Rightarrow |\bar{r}-\bar{r}_{ff}| = |r_{ff}| - \hat{r}_{ff}\cdot\vec{r}$$

$$\psi^i = \frac{I^b \ell e^{-jk_0|\bar{r}_{ff}|}}{4\pi|r_{ff}|} \cdot e^{+j\vec{K}\cdot\vec{r}} \qquad \vec{K} = k_0 \hat{r}_{ff}$$

که کل مقدار ثابت و مشخص است

$\vec{r}$ را در دستگاه استوانه‌ای می‌نویسیم ولی $|r_{ff}|$ را در دستگاه کروی



$$\vec{r} \rightarrow (\rho', \varphi', z')$$

$$\vec{K} = K_0 \hat{r}_{ff} = k_0 \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + k_0\sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + k_0\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{r} = \rho'\cos\varphi'\,\hat{x} + \rho'\sin\varphi'\,\hat{y} + z'\hat{z}$$

$$\psi^i = \frac{I^b \ell e^{-jk_0|\bar{r}_{ff}|}}{4\pi|r_{ff}|} e^{+jk_0\rho'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')} e^{jk_0 z'\cos\theta}$$

$\Downarrow$

موج برخوردی در جهت $(-\hat{z})$ با زاویه θ و $(-\hat{\rho})$ با زاویه φ

به صورت موج صفحه‌ای منتشر می‌شود.

حال می‌خواهیم ψ^s مربوط به پراکنده شدن را بنویسیم.

$$\psi^s = \sum A_\nu J_\nu(k_r\rho')\sin\left(\frac{n\pi}{2(\pi-\alpha)}\varphi'\right) e^{\underbrace{jk_0\cos\theta}_{k_z} z'}$$

تغییرات ψ^i و ψ^s

نسبت به z' باید یکسان باشد

$$K_r^2 + K_z^2 = k^2$$

۱۲۰

حال جمع میدانهای ناشی از ψ^{s} و ψ^{i} باید روی گوه صفر شود. به این ترتیب می‌توان

A_v ها بدست آورد $\Leftarrow$ $\hat{H}^{b}$ را می‌توان بدست آورد.

فصل پنجم : امواج کروی

۵-۱- مقدمه

در مورد نوشتن TE و TM نسبت به
مختصات ثابت میدان مولفه‌ها

ثابت θ

ثابت r

ـ حل‌های معادله موج اسکالر :

$$\nabla^2\psi + k_0^2\psi = 0$$

$$\nabla\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial}{\partial r}\psi\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi\,\hat{\varphi}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta F_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(rF_\varphi)\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,T(\theta)\,F(\varphi)$$

$$\frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R\right) + \frac{1}{Tr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,T'(\theta)\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta F}F'' + k_0^2 = 0$$

$$\frac{F''}{F} = -m^2 \qquad m = 0,1,2,\dots \qquad 0<\varphi<2\pi \text{ اگر } \Rightarrow F(\varphi) = e^{\pm jm\varphi}$$

$$\frac{1}{T}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,T'\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = \text{ثابت} = \lambda$$

$$\text{اگر } m=0 \Rightarrow \quad u=\cos\theta \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \frac{d}{\sin\theta\, d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{du}\frac{du}{d\theta}\right) - \lambda T = 0$$

$$\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(-\sin^2\theta\,\frac{dT}{du}\right)-\lambda T=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{du}\left((1-u^2)\frac{d}{du}T\right)-\lambda T=0}$$ به فرم اشتورم لیویل

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{d}{dx}y(x)\right)+q(x)y(x)+\lambda W(x)y(x)=0$$ مسئله اشتورم لیویل

مقدار ویژه - تابع ویژه

$$\begin{cases} Ay(a)+By'(a)=0 \\ Cy(b)+Dy'(b)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{self adjoint}$$ خواهد شد

$y(a)=y(b)$ و $y'(a)=y'(b)$

اگر $P(x)$ دو ریشه داشته باشد ← به ازای $<x<$ معادله را داشته باشیم

دو ریشه

حل های معادله فوق کامل خواهند شد. (بدون شرایط مرزی)

فقط لازم است تا λ را بدست آوریم.

که در این $u=\cos\theta \Leftarrow -1<u<1$ دو ریشه است بنابراین

از شرایط مرزی a و b کاملاً معاف می شویم.

اگر شرایط فوق را در نظر بگیریم (برقرار باشند) ← $\lambda=-n(n+1)$: مقدار ویژه

جواب این مسئله در جلسه بعد آمده است

۸۹/۱۰/۹

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\right)\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi+K_0^2\psi=0$$

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\,T(\theta)\,F(\varphi)$$

$$\frac{F''}{F}=-m^2$$

$$\frac{1}{T\sin\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}T\right)\right)-\frac{m^2}{\sin\theta}=c$$

$m=0$ $\qquad\qquad \lambda \longrightarrow T_\lambda$

$u=\cos\theta$

$$\frac{d}{du}\left((1-u^2)\frac{d}{du}T(u)\right)+\lambda T(u)=0 \quad ✶$$

صادر $0\leq\theta\leq\pi$:

$$T(u)=a_n u^n+a_{n-1}u^{n-1}+\dots+a_0$$

$\lambda=n(n+1)$

$$\begin{cases} n=0 & T(u)=a_0 & \lambda=0 \\ n=1 & T(u)=a_1u+\cancel{a_0}\to 0 & \lambda=2 \\ n=2 & T(u)=a_2u^2+a_1u+a_0 & \lambda=6 \end{cases}$$

در ✶ داریم $\xRightarrow{n=1}$ $-2a_1u+\lambda(a_1u+a_0)=0 \Rightarrow \lambda=2\ ;\ a_0=0$

تمام جواب فوق در حالتی است که $0<\theta<\pi$، اشکال شرودینگر حل‌های فیزیکی می‌یابد

از این حل تبعیت می‌شد.

$T(u) = P_n(u) \rightarrow P_0(u) = 1$ در واقع T(u) ها چون

$P_1(u) = u$

$P_2(u) = \frac{3}{2}(u^2 - 1)$ چند جمله ای های لژاندر خواهد بود:

فرمول رودریگز توابع لژاندر $\Longrightarrow$ $$\boxed{P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n}(1-u^2)^n} \Rightarrow \boxed{f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta)}$$

از آن به بعد هرگاه محدوده θ (π تا 0) باشد تابع به صورت مجموعه کاملی از توابع لژاندر خواهد بود.

تا اینجا $m=0$ بود و تغییرات نسبت به φ نداشتیم.

$m \neq 0$ ولی صحیح باشد

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\frac{d}{du}\left((1-u^2)\frac{d}{du}T(u)\right) - \frac{m^2}{1-u^2} = \text{ثابت} \rightarrow \lambda = n(n+1)$$

⇐ باز هم $T_\theta(u)$ به صورت چند جمله ای خواهد بود.

$P_n^m(u)$: چند جمله ای های لژاندر الحاقی

Associated Legendre

$$P_n^m(u) = (-1)^m (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u)$$

نکته: $P_n^m(u) \equiv 0 \leftarrow m > n$

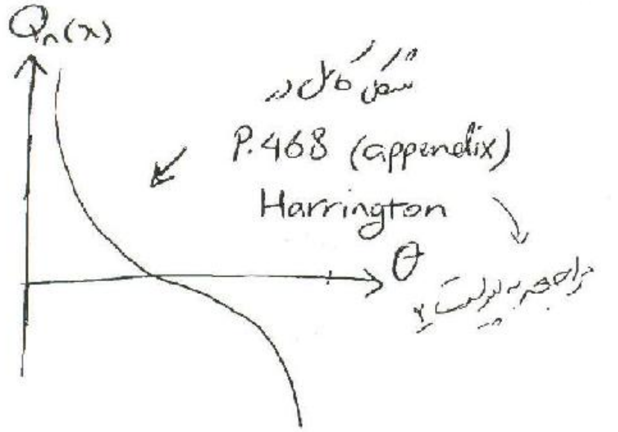
بنابراین تغییر نسبت به φ که m را مشخص می کند، T(θ) را تغییر می دهد

در صورتی که ν غیرصحیح باشد کاملاً از P مستقل می شوند. (باید در هر مسئله بر این مورد توجه کرد)

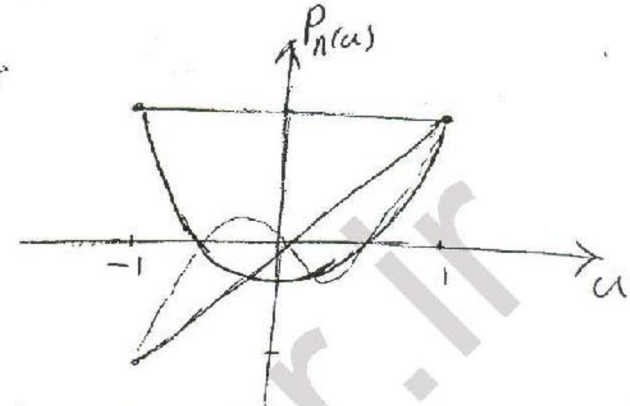
اگر θ ناحیه $[0, \pi]$ را شامل نشود:

$$\begin{cases} Q_\nu = C_1 P_\nu + C_2 P_{-\nu} \\ Q_n(x) = \lim_{\nu \to n} Q_\nu(x) \end{cases} \xleftrightarrow[\text{بسل}]{\text{شباهت توابع}} \begin{cases} N_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \end{cases}$$

بنابراین حل کاملاً کلی که به ازای حالت $m=0$ برای $T(\theta)$ می‌توان نوشت:



$$T(u) = b_1 P_n(u) + b_2 Q_n(u)$$



نکته: اگر محدوده $\alpha<\theta<\pi-\alpha$ باشد، صفر قرار دارد محدوده $\pi-\alpha$ تا α نیز می‌توان تابع $f(\theta)$ را

با $P_n(u)$ ها نیز توصیف کرد (زیرا یک مجموعه کامل‌اند) ولی حل مسئله نیستند.

بنابراین اضافه کردن $Q_n(u)$ ها نیز لازم است زیرا در صورت مسئله شرایط طوری است که

که ν غیر صحیح می‌شود و توابع $P_n(u)$ به تنهایی نمی‌توانند حل مسئله باشند.

$\nu(\nu+1) \leftarrow$ (ثابت) طرف دوم

* در صورتی که $m\neq 0$ باشد باز هم توابع Q_n^m الحاقی قابل تعریف‌اند.

نیز هم $Q_n^m \equiv 0 \leftarrow m>n$

برای تابع $R(r)$ داریم:

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R\right) + \left(-n(n+1)\right) + k_0^2 = 0$$

$n=0 \Rightarrow$

$$R(r) = \frac{1}{r} f(r) \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} e^{-jk_0 r} \text{ جواب } f(r)$$

پیدا می‌کند $\quad f'' + k_0^2 f = 0$

$$\Rightarrow \boxed{R(r) = \frac{1}{r} e^{\pm jk_0 r}}$$

$n \neq 0 \Rightarrow$

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$$

معادله‌ای که $f(r)$ در آن صدق می‌کند

معادله بسل با مرتبه $n+1/2$ خواهد بود.

$$r^2 f'' + r f' + \left(k_0^2 r^2 - (n+\tfrac{1}{2})^2\right) f = 0 \quad (**)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(r) = B_{n+1/2}(k_0 r)}$$

توابع بسل دلخواه استوانه‌ای

n وابسته به $T(\theta)$ است

و $F(\varphi)$ هم روی $T(\theta)$ اثری ندارد

* در استوانه‌ای kr بود ولی در اینجا k_0 است.

توابع بسل کروی $\rightarrow$

$$\boxed{b_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\, B_{n+1/2}(r)}$$

به عنوان مثال $b_0(r) = \frac{1}{r} e^{-jk_0 r}$

$$\begin{cases} j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{1/2}(x) = \frac{\sin x}{x} \\ n_0(x) = \cdots = \frac{-\cos x}{x} \\ h_0^{(2)}(x) = \frac{e^{-jx}}{-jx} \end{cases}$$

اگر معادله $(**)$ را حل کنیم

پاسخ‌ها به صورت $\left(\frac{1}{k_0 r}\right)^n$

خواهند بود.

$$j_1(x) = \left(\cdots + \frac{1}{x^n}\right)$$

۲-۵ - حل های معادلات ماکسول در دستگاه کروی

$\leftarrow TM_r , TE_r$

$$TM_r \begin{cases} \vec{A} = r\psi\,\hat{r} \\ \vec{H} = \bar{\nabla}\times\bar{A} \quad \rightarrow H_r = 0 \\ \bar{E} = \dfrac{1}{j\omega\epsilon}(\nabla\times\bar{H}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = r\varphi\,\hat{r} \\ \bar{E} = -\bar{\nabla}\times\bar{F} \quad \rightarrow E_r = 0 \\ \bar{H} = -\dfrac{1}{j\omega\mu}(\nabla\times E) \end{cases}$$

اثبات مطلب فوق:

$$\bar{A} = A_r\,\hat{r} = A_r(r,\theta,\varphi)\,\hat{r}$$

$$\begin{cases} \bar{E} = \dfrac{\nabla\times\nabla\times\bar{A}}{j\omega\epsilon} \\ \nabla\times\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \end{cases} \Rightarrow \bar{E} = -j\omega\mu\bar{A} - \bar{\nabla}\Phi_a$$

$$\begin{cases} \Rightarrow H_r = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi) - \dfrac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\right) = 0 \\ H_\theta = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(A_r) - \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\right) = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}A_r \\ H_\varphi = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \dfrac{\partial}{\partial\theta}(A_r)\right) = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}A_r \end{cases}$$

$$(\nabla\times\nabla\times A)_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\,\frac{-1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{r}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r\right)\right)$$

$$= \omega^2\mu\epsilon A_r - j\omega\epsilon\frac{\partial}{\partial r}\Phi_a$$

$$(\nabla\times\nabla\times A)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\,\frac{-1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)\right] = -j\omega\epsilon\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi_a$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r}A_r = -j\omega\epsilon\,\Phi_a} \Rightarrow$$ رابطه که هر دو شرط برای اشباع

هم که برای φ هم برای θ ...

$$\circledast\quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}A_r+k_0^2A_r=$$

معادله فوق شبیه معادله اسکالر است غیر از عبارت اول $\frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r \leftarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi\right)$

می‌توان ثابت کرد که دقیقاً معادله بالا $\Longleftarrow \quad \underset{\text{کروی}}{\nabla^2}\left(\frac{A_r}{r}\right)+k_0\left(\frac{A_r}{r}\right)=0$

صفحه قبل می‌شود. بنابراین

$$\psi=\frac{A_r}{r}$$

در معادله هلمهولتز صدق می‌کند.

بنابراین ψ را در قسمت‌های قبلی گفته شده است. مثلاً

$$\psi=b_n(k_0r)P_n^m(\cos\theta)e^{\pm jm\varphi}\to\bar{A}=r\psi\hat{r}$$

حل معادله ماکسول را به دست می‌آورند.

ایده دیگر آن است که معادله بالای صفحه $\circledast$ را به همان شکل و قابلیت جداسازی متغیرها حل کنیم.

ترم‌های دوم و سوم معادله بالا با آنچه که قبلاً حل کردیم یکسان است.

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{T}\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}T\right)\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{F''}{F}+k_0^2=0$$

۸۴/۱۰/۱۱

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}A_r+k_0^2A_r=0$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\left(k_0^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R(r)=0} \quad \oplus$$

در معادلات قبلی که

$$\psi=\tilde{R}(r)\,T(\theta)\,F(\varphi)$$

$$\tilde{R}(r)\doteq b_n(k_0r)$$

$R(r)$ به فرم معادل میشد:

بنابراین در اینجا نیز حل معادله $\oplus$ به فرم تابع بسل Schelkunoff خواهد بود

$$R(r)=\hat{B}_n(k_0r) \quad : \oplus \text{ حل معادله}$$

$$b_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,B_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$\boxed{\hat{B}_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}x}\,B_{n+\frac{1}{2}}(x)}$$

نکته مهم آن است تابع $\hat{B}_n(x)$ در $x\to\infty$ رفتار نوسانی غیر میرا دارد.

به ازای $n=0$

$$R(r)=\hat{B}_0(k_0r)=Ce^{\pm j}$$

که همخوانی دارد با

$$b_0(x)=\frac{e^{-jk_0r}}{r}$$

* در واقع فرق تابع $b_n(x)$ ندارد غیر از ضرب r در آن.

بنابراین حل نهایی به صورت زیر خواهد بود

$$A_r=\underbrace{\hat{B}_n(k_0r)}\;\underbrace{L_n^m(\cos\theta)}_{\text{تغییرات }\theta}\;\overbrace{e^{\pm jm\varphi}}^{\text{تغییرات }\varphi}$$

۸۴/۱۰/۱۱

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}A_r + k_0^2 A_r = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \left(k_0^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)R(r) = 0} \quad \oplus$$

$$\Psi = \tilde{R}(r)\,T(\theta)\,F(\varphi)$$ درصورتی که

$$\tilde{R}(r) \doteq b_n(k_0 r)$$ $R(r)$ ، فرم معادل می‌شود:

بنابراین در این جا جواب معادله $\oplus$: فرم تابع بسل Schelkunoff خواهد بود

$$R(r) = \hat{B}_n(k_0 r)$$: $\oplus$ حل معادله

$$b_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,B_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$\boxed{\hat{B}_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}x}\,B_{n+\frac{1}{2}}(x)}$$

نکته مهم آن است تابع $\hat{B}_n(x)$ در $x \to \infty$ رفتار نوسانی غیر صفر دارد.

به ازای $n = 0$

$$R(r) = \hat{B}_0(k_0 r) = Ce^{\pm j}$$

فاصله هم دارد؛

$$b_0(x) = \frac{e^{-jk_0 r}}{r}$$

* در واقع فرق تابع $b_n(x)$ با [illegible] ضرب r در آن.

بنابراین حل نهایی به صورت زیر خواهد بود

$$A_r = \hat{B}_n(k_0 r)\,\underbrace{\hat{L}_n^m(\cos\theta)}_{\text{تغییرات } \theta}\,\overbrace{e^{\pm jm\varphi}}^{\text{تغییرات } \varphi}$$

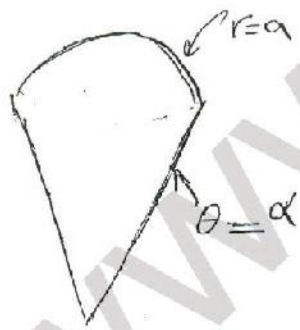
حال بدست آوردن عبارت میدان های $\bar{E}$ و $\bar{H}$

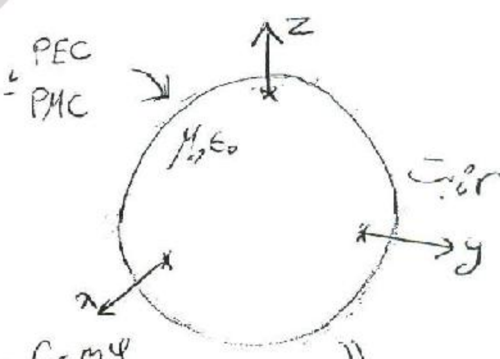
: TM_r

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} A_r \\ H_\varphi = \cancel{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r A_\theta)} - \dfrac{\partial}{\partial\theta}(A_r) = -\dfrac{\partial}{\partial\theta} A_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2\right) A_r \\ E_\theta = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\dfrac{\partial^2}{r\partial\theta\partial r} A_r \\ E_\varphi = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\dfrac{\partial^2}{r\sin\theta\,\partial\varphi\partial r} A_r \end{cases}$$

۳-۵- رزوناتورهای کروی





$$TE_r: \quad F_r(r,\theta,\varphi) = \hat{B}_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}$$

$\hat{J}_n(k_0 r) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} k_0 r}\; J_{n+1/2}(k_0 r)$: چون در مبدا است تابع نیومان نداریم

- دیل تقارن، ۲ حل متعامد دارد.

اگر $n=0$ باشد برای حل غیرصفر $m=0$ ⇐ تبعیت φ و θ نداریم

⇐ $E_\varphi = E_\theta = E_r = 0$ خواهند شد. بنابراین $n=0$ غیرمجاز است.

$n = 1, 2, 3, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

در صورتی که $m = 0 \leftarrow E_\theta = 0$ ولی جایز است.

در کل اندیس‌ها محدوداند (TE_{rn}) . $m \leq n$ در هر مرحله.

شرط مرزی روی $r = a$:

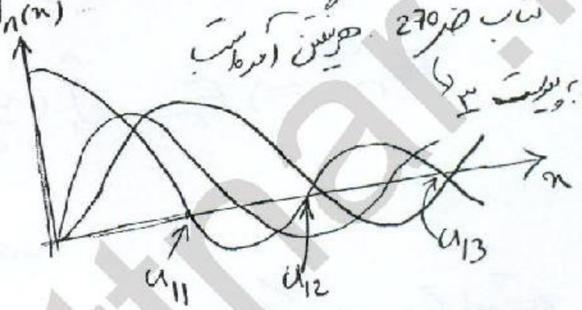
$$E_\theta, E_\varphi \Big|_{r=a} = 0$$

فرکانس‌هایی که این شرط را برقرار کنند

$$\Rightarrow \hat{B}_n(k_0 a) \longrightarrow \hat{J}_n(k_0 a) = 0$$

مقدار دقیق این اعداد در کتاب ص 270 هرینگتون آمده است جدول پیوست ۳

$$J_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$



ریشه‌های J و $\hat{J}$ یکی هستند.

وقتی اختلاف ریشه‌ها به π میل می‌کند
n زیاد شود

$\hat{J}_n(u_{np})$

$p \backslash n$	1	2	3
1	4.493		
2			
3			

برای مشخص شدن مودها لازم است m, n, p را داشته باشیم (هر سیستم سه بعدی)

$$TE_{r\,m,n,p}^{\text{even}} \rightarrow F_r = \hat{J}_n\left(\frac{u_{np}}{a} r\right) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi .$$

برای $TE_{r\,m,n,p}^{\text{odd}} \leftarrow \sin(m\varphi)$ لازم است.

$$TE_{0,1,1} \rightarrow F_r = \hat{J}\left(\frac{u_{11}}{a} r\right) \underbrace{P_1^0(\cos\theta)}_{\cos\theta}$$

$$E_\theta = 0 \Rightarrow E_\varphi = +\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} F_r = -\frac{\hat{J}_1(u_{11}\frac{r}{a})}{r}\sin\theta$$

۱۴۲

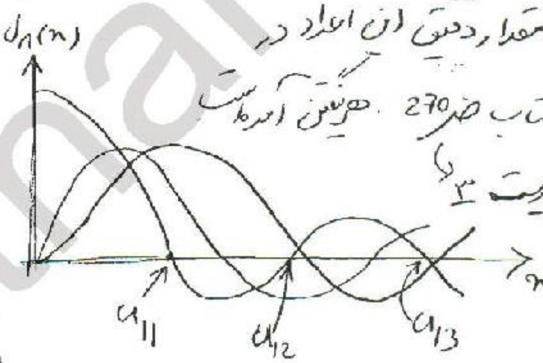
. نتایج $n = 1, 2, 3, \ldots$ و $m = 0, 1, 2, \ldots$

در صورتی که $m = 0 \leftarrow E_\theta = 0$ $(TE_{r_{0n}})$ ولی مجاز است.

در کل اندیس‌ها محدودند $m \leq n$ در هر مرحله.

شرط مرزی روی $r = a$: $\quad E_\theta, E_\varphi \Big|_{r=a} = 0$

زمانی که این شرط را برقرار کند $\Rightarrow \hat{B}_n(k_0 a) \longrightarrow \hat{J}_n(k_0 a) = 0$



مقدار دقیق این اعداد در کتاب صفحه 270 . همچنین آمده است

صفر ایست ۳ را

$J_0(x) = \frac{\sin x}{x}$

ریشه‌های J و $\hat{J}$ یکی هستند

وقتی اختلاف ریشه‌ها به π میل می‌کند (p زیاد گردد)

$\hat{J}_n(u_{np})$

$p \backslash n$	1	2	3
1	4.493		
2			
3			

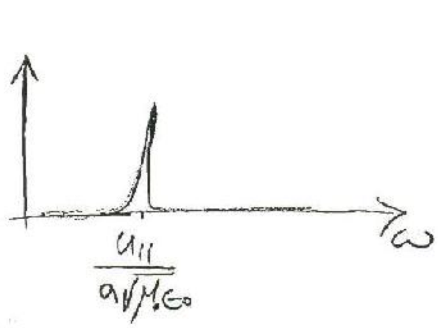
برای مشخص شدن مودها لازم است p, n, m را داشته باشیم (هر سیستم سه بعدی)

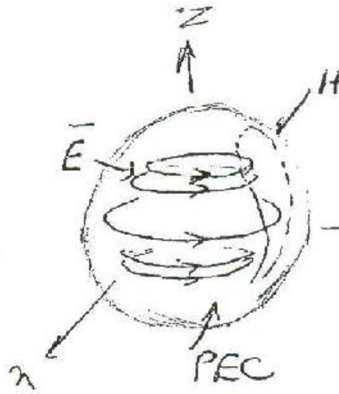
$$TE_{r\,m,n,p}^{even} \rightarrow F_r = \hat{J}_n\left(\frac{u_{np}}{a} r\right) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi$$

برای $TE_{r\,m,n,p}^{odd} \leftarrow \sin(m\varphi)$ لازم است.

$$TE_{0,1,1} \rightarrow F_r = \hat{J}\left(\frac{u_{11}}{a} r\right) \underbrace{P_1^0(\cos\theta)}_{\cos\theta}$$

$E_\theta = 0 \Rightarrow E_\varphi = +\frac{1}{}\ \frac{\partial}{} F_r\ \ \hat{J}_1(u_{11}\frac{r}{a})a\ \ldots$ ۱۴۲





$m=1$

$$\rightarrow TE_{r\,1,1,1}^{even} \Rightarrow F_r = \hat{J}_1\left(\frac{u_{11}r}{a}\right)\sin\theta\cos\varphi$$

$$P_n^m(u) = (-1)^m (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u)$$

$$\rightarrow P_1^1(u) = -\sqrt{1-u^2}$$

مفهوم: $\sin\theta\cos\varphi$ جهت x است

دو حلقه مشابه بالا است که در جهت x چرخیده است.

$$TE_r^{odd} \Rightarrow F_r = \hat{J}_1\left(\frac{u_{11}r}{a}\right)\sin\theta\sin\varphi$$

در جهت y می‌چرخد.

بنابراین هر سه رزونانس در یک فرکانس رخ می‌دهد بنابراین برای یک مود لازم است، تحریک را مناسب قرار دهیم.

مودهای غالب در کره TM است چون مشتق این توابع سریعتر اتفاق می‌افتد.

البته ریشه‌های مشتق $\hat{J}'$ با J' یکی نیست زیرا r در J ضرب شده است.

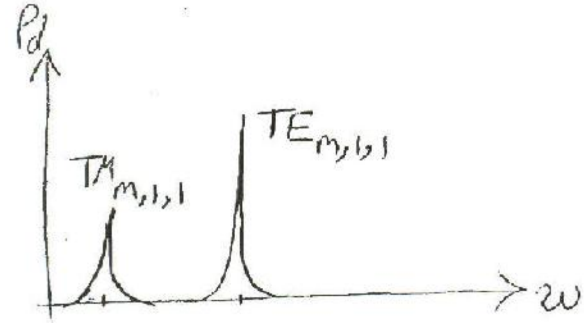
$TM_{m,n,p}$

$$A_r^{e}(r,\theta,\varphi) = \hat{J}_n\left(\frac{u'_{np}}{a}r\right)P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi)$$

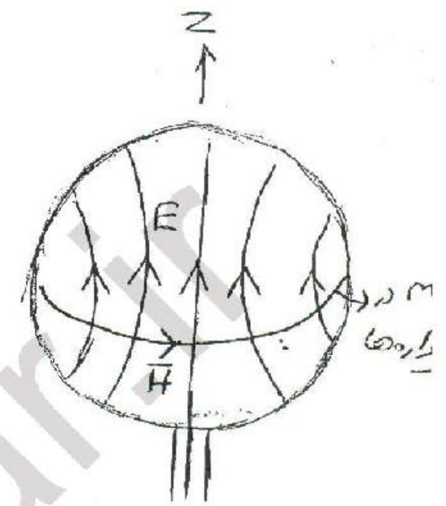
$$\rightarrow E_r = \frac{1}{\cdots}\frac{\partial^2}{\cdots}A_r$$

$$K_0 a = u'_{np}$$

$p \backslash n$	1	2
1	2.744	3.870
2	6.117	



$$TM_{0,1,1} : A_r = \hat{J}_1\left(\frac{u'_{11}}{a} r\right) \cos\theta$$



فاکتور Q برای هر رزوناتور دیگری با این حجم در هر دستگاه دیگر بالاتر است

زیرا با حجم ثابت، کره کمترین سطح را دارد.

$$\frac{1}{Q} = \frac{P}{W} \rightarrow min$$ برای کره min است

$$TM^{e,o}_{m,n,p} : A_r = \hat{J}_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$$

$$TE^{e,o}_{m,n,p} \quad F_r =$$

$m = 0, 1, 2, \ldots n$ در

$n = 1, 2, 3$

موردی مناسب است که مشتق آن صفر شود ← صفر مشتق زودتر ظاهر می‌شود.

← پایین‌ترین مودها:

$TM_{0,1,1}$

$1,1,1$

$1,1,1$

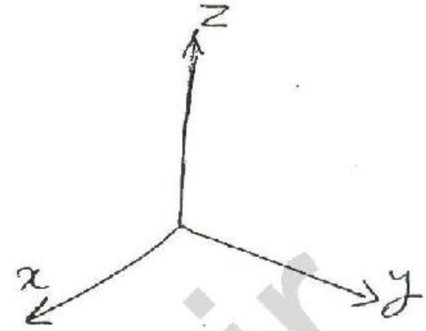
۸۹/۱۰/۱۴

۴-۵- انتشار امواج کروی در فضای همگن :

$$\begin{matrix} A_r \\ F_r \end{matrix} = \hat{B}_n(k_0 r)\, \underbrace{\overbrace{P_n^m(\cos\theta)}^{\text{zonal}} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}}_{\text{tesseral}}$$

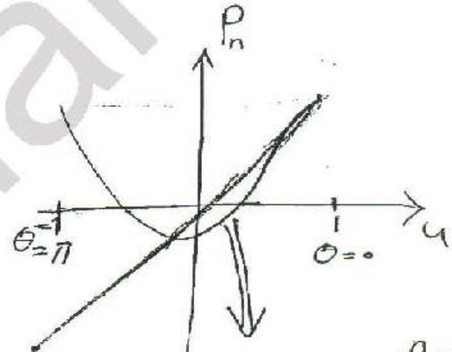
$m=0,1,\dots,n$

$n=1,2,\dots$

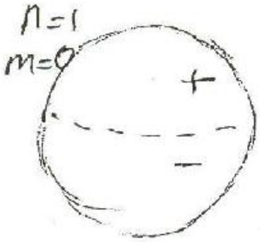


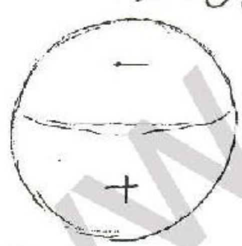
در مورد توابع زونال : (zonal)

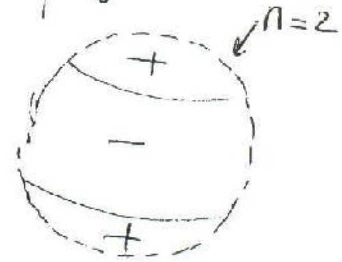
$P_1^0 = \cos\theta \qquad P_1^1 = -\sin\theta$



هر کدام از توابع مرتبه بالاتر نیز قسمت خاصی از کره (Zone) را پوشش می دهد.







حال اگر توابع $\begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$ نیز در این توابع ضرب گردند از نظر عرضی نیز

یعنی سطح کره را به خانه های تقسیم می کنند

tesseral Harmonics

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{m,n}\left(a_{mn}T^{e}_{m,n}(\theta,\varphi)+b_{mn}T^{o}_{mn}(\theta,\varphi)\right)$$

حال انتشار موج در دهانه های خالی را بررسی می کنیم.

، $TM_{r_{m,n}}$

$$A_r = \hat{H}^{(2)}_n(k_0 r)\, T^{e,o}_{mn}(\theta,\varphi)$$

در نظر بگیر $P_1(\cos\theta)$

مثال: TM_r $\longrightarrow$ $A_r = \hat{H}^{(2)}_1(k_0 r)\, P_1(\cos\theta)$

از θ و φ ... نسبت به φ تغییر نمی‌کند

$$\Rightarrow \begin{cases} E_r = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2\right) A_r \\ E_\theta = \dfrac{1}{j\omega\epsilon_0}\,\dfrac{\partial^2 A_r}{r\,\partial\theta\,\partial r} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\varphi = -\dfrac{\partial A_r}{r\,\partial\theta} \end{cases}$$

نکته مهم است که: E_r با $\frac{1}{r^2}$ متناسب می‌شود

ولی E_θ, H_φ با $\frac{1}{r}$ متناسب است.

بنابراین در $r\to\infty$ ، E_θ و H_φ باقی می‌ماند

بنابراین در r های بالاتر فقط قضیه pointing خارج از سطح کره به بیرون تشعشع می‌کند.

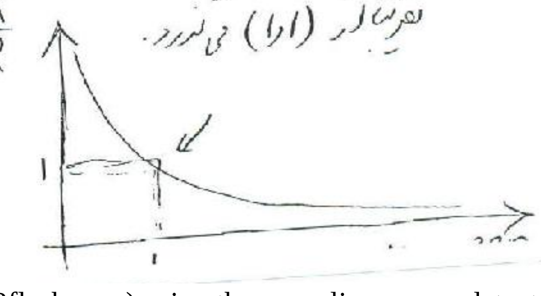
$$Z_{TM_r^+} = \frac{E_\theta}{H_\varphi} = \frac{k_0}{j\omega\epsilon_0}\,\frac{\hat{H}^{(2)\prime}_1(k_0 r)}{\hat{H}^{(2)}_1(k_0 r)} = -j\eta_0\,\frac{\hat{H}^{(2)\prime}_1(k_0 r)}{\hat{H}^{(2)}_1(k_0 r)}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k_0^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\hat{B}_n(k_0 r) = 0$$

$$\hat{H}^{(2)}_1(k_0 r) = \hat{J}_1(k_0 r) - j\hat{N}_1(k_0 r)$$

بنابراین در اینجا نیز تشعشع Cut off داریم.

تقریباً از (1,1) می‌گذرد.



۱۴۰

به این ترتیب می‌توان کره radiation تعریف کرد: به طوریکه محیط آن برابر طول موج باشد.

به طوریکه درون آن بیشتر راکتانس دیده می‌شود. ولی بیرون از آن اختلاف فاز H_φ و E_θ تقریباً ثابت شده

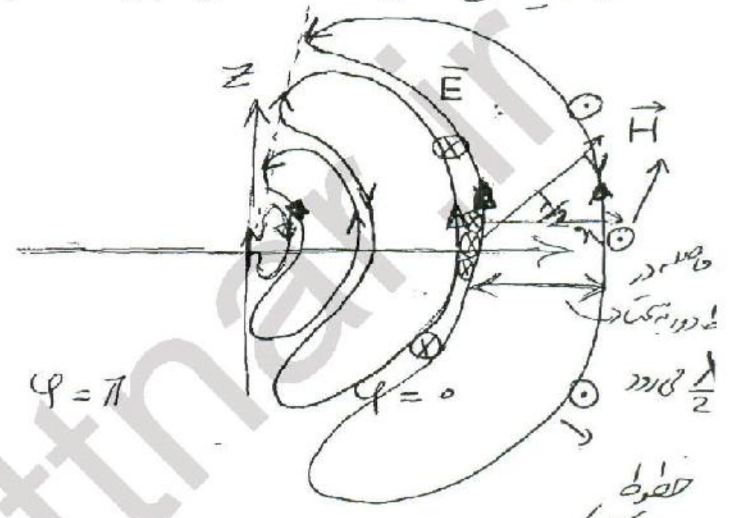
و باعث می‌شود انرژی الکتریکی و انرژی مغناطیسی تقریباً با هم مساوی گردند.

در حالت نزدیک سطح انرژی مغناطیسی بیشتر از الکتریکی است.

در $\theta=0$ ⇐ فقط E_r داریم

در $\theta=\frac{\pi}{2}$ ⇐ فقط E_θ داریم

H_φ و E_θ max در $\theta=\frac{\pi}{2}$ اتفاق می‌افتد



نکته مهم: برای $m\neq 0$ عبارات E_θ و H_φ تغییری نمی‌کنند. بنابراین نسبت $Z_{TM_r^+}$ (نسبت به هم)

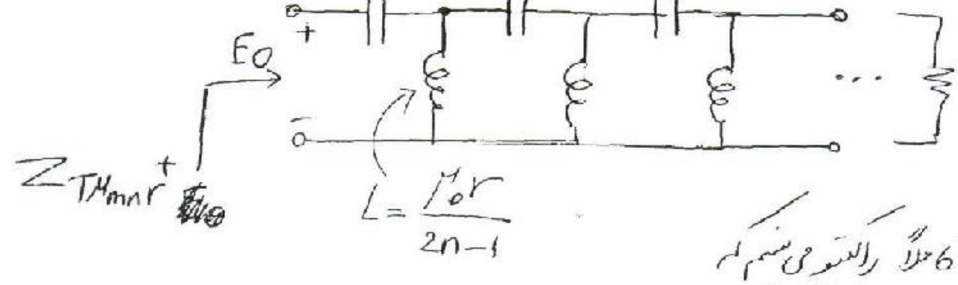
ثابت می‌ماند. بنابراین B تشعشع به تغییرات φ بستگی ندارد.

$$Z_{TM_r^+} = \eta_0 \left\{ \frac{n}{jk_0 r} + \frac{1}{\dfrac{2n-1}{jk_0 r} + \dfrac{1}{\dfrac{2n-3}{jk_0 r}}} \right\}$$

صفحه 279 کتاب

الگو برگشته به

Chu



در یک r مشخص مدار کاملاً راکتیو می‌بینیم که