مرکز آموزش الکترونیکی دانشگاه علم و صنعت ایران

طراحی و تحلیل الگوریتمها

فصل دوم: استقرای ریاضی

اهداف یادگیری

* آشنایی با نقش استقرا در طراحی الگوریتمها
* معرفی روش استقرا
* آشنایی با روش استقرای قوی و مضاعف و کاربرد آنها
* بررسی مسائل متنوع
  - شمارش نواحی در صفحه
  - مساله رنگ آمیزی
  - کدهای خاکستری (Gray Codes)
  - فرمول اولر

مقدمه(۱)

- ارتباط تنگاتنگی بین استقرا و روابط بازگشتی، تقسیم وغلبه و سایر روشهای طراحی الگوریتم وجود دارد
- استقرا در فرایند ساخت و اثبات درستی بسیاری از الگوریتمها استفاده می شود
- فرض کنید P قضیه یا عبارتی است که می خواهیم آنرا اثبات کنیم و شامل پارامتری مانند n است که می تواند هر مقدار عدد طبیعی به خود بگیرد.
- برای اینکه ثابت کنیم P(n) به ازای همه مقادیر n درست کار می کند، کافی است دو شرط را اثبات کنیم

مقدمه(۲)

- ابتدا باید ثابت کنیم P(1) درست است. یعنی مسئله به ازای n=1 درست می باشد (مبنای استقرا)
- سپس برای هر n>=1، با فرض اینکه P(n-1) صحیح است (فرض استقرا) باید ثابت کنیم P(n) صحیح است (حکم استقرا)
- n در مسئله ای که صرفاً یک پارامتر دارد، عبارت است از همان پارامتر(اکثر مسائل)
- در مسایلی که بیشتر از یک پارامتر دارند، انتخاب n نیاز به دقت بیشتری دارد

مثال

- ثابت کنید برای هر $n>=1$ تساوی زیر برقرار است.

$$1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2$$

- مبنای استقرا: اگر $n=1$ آنگاه تساوی مقابل برقرار است
- فرض استقرا: فرض کنیم به ازای $n=k$ تساوی بالا برقرار باشد، یعنی: $1+2+\ldots+k=k(k+1)/2$
- حالا باید ثابت کنیم تساوی فوق به ازای $n=k+1$ نیز برقرار است، یعنی $1+2+\ldots+k+(k+1)=(k+1)(k+2)/2$

مثال (ادامه)

- سمت چپ تساوی فوق را در نظر بگیرید:

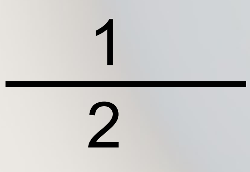
$$1+2+\ldots+k+(k+1)=k(k+1)/2+(k+1)=$$

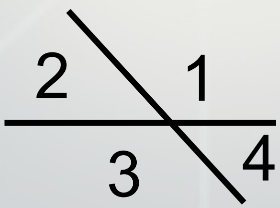
$$[k(k+1)+2(k+1)]/2=[(k+1)(k+2)]/2$$

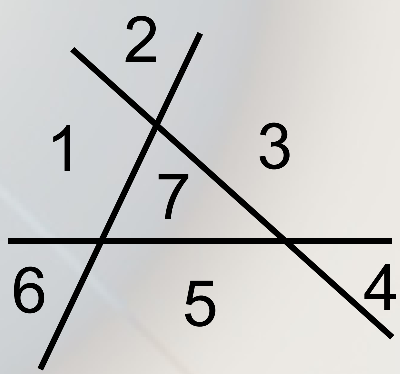
- چون تساوی فوق برای $n=k+1$ اثبات شد، پس تساوی فوق همیشه برقرار است

شمارش نواحی در صفحه

- مجموعه ای از خطوط که دو به دو متقاطع می باشند (هیچ دو خطی موازی نیست) را در نظر بگیرید و همچنین هیچ ۳ خطی در نقطه مشترکی همدیگر را قطع نمی کنند. هدف محاسبه تعداد نواحی تشکیل شده توسط n خط در صفحه می باشد







شمارش نواحی در صفحه(ادامه)

- حدس: به نظر می رسد که اضافه کردن ۱ خط به n-1 خط، باعث می شود که n ناحیه به نواحی موجود افزوده می شود
- اگر S(n-1) تعداد نواحی ایجاد شده توسط n-1 خط باشد آنگاه $S(n)=S(n-1)+n$ و $S(1)=2$
- حال حدس فوق را با استقرا اثبات می کنیم
  – مبنای استقرا: دیدیم که برای $n<=3$ رابطه فوق صادق است یعنی $S(2)=S(1)+2$ یعنی $S(2)=4$ و $S(3)=7$

شمارش نواحی در صفحه(ادامه)

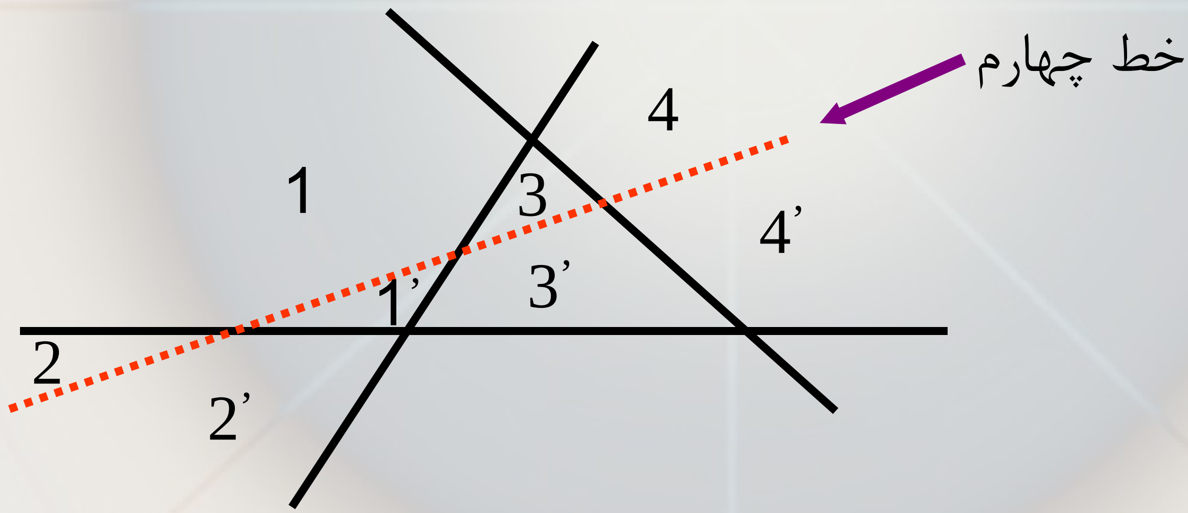
- اضافه کردن یک خط جدید یا باعث تقسیم شدن یک ناحیه به دو ناحیه جدید می شود یا با آن هیچ وجه اشتراکی نخواهد داشت
- فرض کنید nخط با شرایط ذکر شده در مسئله موجود باشد. یکی از آن خطوط را به دلخواه برمی داریم. n-1 خط باقیمانده تشکیل (S(n-1 ناحیه را میدهد (طبق فرض استقرا)
- حال خط n ام را مجدداً سرجای خودش قرار می دهیم

شمارش نواحی در صفحه(ادامه)

- طبق مفروضات مسئله خط n ام باید همه n-1 خط باقیمانده را قطع کند.
- پس در اثر این تقاطع ها، n-2 پاره خط و ۲ نیم خط بر روی خط n ام تشکیل می شود که هرکدام از این پاره خطها یا نیم خطها در درون یکی از نواحی قبلی قرار می گیرد و بنا براین هرکدام از آنها را به دو ناحیه تقسیم می کند پس دقیقاً n ناحیه جدید اضافه شده است
- اگر رابطه بازگشتی را با روش جایگذاری با تکرار حل کنیم داریم: $S(n)=n(n+1)/2 + 1$

مثال

* چنانکه در شکل زیر دیده می شود اضافه کردن ۱ خط به ۳ خط موجود، (خط چهارم) ۴ ناحیه جدید اضافه می کند



مسئله رنگ آمیزی

- n خط متمایز (موازی یا متقاطع) را در صفحه در نظر بگیرید. می خواهیم نواحی ایجاد شده را با استفاده از ۲ رنگ طوری رنگ آمیزی کنیم که هیچ ۲ ناحیه مجاوری همرنگ نباشد (دو ناحیه مجاور است اگر در یالی مشترک باشند)
- ثابت کنید رنگ آمیزی نواحی تشکیل شده به وسیله هر تعداد از خطوط در صفحه، تنها توسط ۲ رنگ با شرایط فوق امکان پذیر است

مسئله رنگ آمیزی(ادامه)

- اثبات از طریق استقرا و روی n انجام می شود
- مبنای استقرا: بدیهی است برای n=1، رنگ آمیزی با دو رنگ امکان پذیر است
- فرض استقرا: فرض می کنیم رنگ آمیزی برای n-1 خط با دو رنگ امکان پذیر است
- خط n ام را اضافه می کنیم.
- حکم استقرا: حالا باید ثابت کنیم رنگ آمیزی با دو رنگ برای n خط نیز امکان پذیر است

مسئله رنگ آمیزی(ادامه)

- نواحی موجود را بر اساس اینکه در کدام طرف خط n ام باشند به دو دسته تقسیم می کنیم
- سپس رنگ همه نواحی واقع در یک سمت خط n ام را به همان صورت قبلی نگاه داشته و رنگ نواحی موجود در سمت دیگر خط n ام را معکوس می نماییم
- برای اینکه ثابت کنیم این رنگ آمیزی صحیح است دو ناحیه مجاور و دلخواه A و B را در نظر بگیرید

مسئله رنگ آمیزی(ادامه)

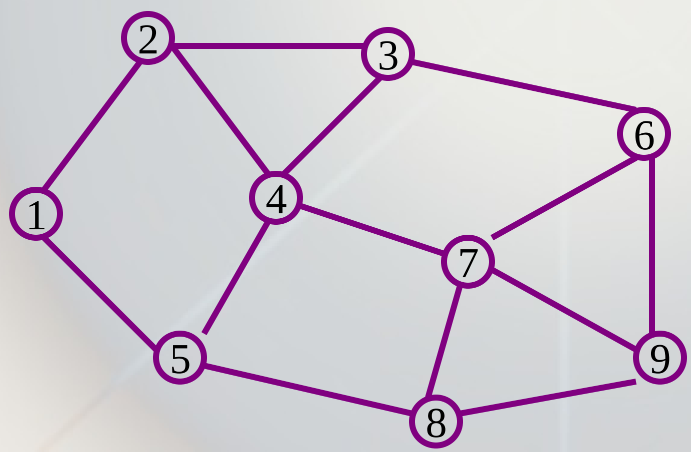
- اگر این دو ناحیه در یک طرف خط n ام باشند چون قبل از اضافه کردن خط n ام رنگ آمیزی شده بودند، طبق فرض استقرا دارای دو رنگ متفاوت اند (اگر چه ممکن است رنگها معکوس شده باشند)
- اما اگر یال بین این دو ناحیه قسمتی از خط n ام باشد آنگاه قبل از اضافه کردن خط n ام این دو ناحیه متعلق به یک ناحیه بوده و درنتیجه همرنگ بوده اند و چون ما رنگ یکی از این دو ناحیه را معکوس کرده ایم پس هم اکنون آنها دارای دو رنگ متفاوت می باشند

فرمول اولر

- یک گراف همبند و مسطح را در نظر بگیرید
- گراف همبند گرافی است که بین هر دو گره آن یک مسیر وجود داشته باشد
- گراف مسطح گرافی است که یالهای آن را بتوان به شکلی روی صفحه رسم کرد که همدیگر را قطع نکنند
- فرض کنید گراف مورد نظر دارای v راس، e یال و f وجه باشد(ناحیه خارجی به عنوان یک وجه در نظر گرفته می شود)

فرمول اولر(ادامه)

- ثابت کنید رابطه زیر بین تعداد رئوس (v)، تعداد وجوه (f) و تعداد یالها (e) در یک گراف همبند و مسطح برقرار است: $v+f=e+2$



به عنوان مثال در گراف مقابل $v=9, e=14$ و $f=7$
در این مثال چنانکه دیده می شود $9+7=14+2$

فرمول اولر(ادامه)

- برای اثبات این مسئله از استقرای مضاعف استفاده می کنیم
- در استقرای مضاعف، به جای یک پارامتر از دو پارامتر برای تعریف استقرا استفاده می کنیم
- گاهی استقرای مضاعف بر مبنای ترکیبی از مقادیر چندین پارامتر استوار است و گاهی نیز به طور همزمان بر روی دو پارامتر مختلف استوار است
- در این مثال استقرا را بر روی دو پارامتر تعداد رئوس و تعداد یالها تعریف می کنیم

فرمول اولر(ادامه)

- در این مثال برای مبنای استقرا از تعداد رئوس استفاده می کنیم و برای حکم استقرا از تعداد وجوه
- مبنای استقرا: گرا فی با تعداد وجه برابر ۱ در نظر بگیرید، چنین گرافی اصطلاحاً درخت نامیده می شود(گرافی همبند و فاقد دور)
- فرض استقرای اول: حال در چنین گرافی اگر v راس و e یال موجود باشد، باید داشته باشیم v+1=e+2

فرمول اولر(ادامه)

- اما در این مثال، فرض استقرا خود نیاز به اثبات دارد، چون رابطه v+1=e+2 بدیهی نیست و به پارامترهای v و e بستگی دارد
- پس ابتدا با روش استقرا فرض مسئله را اثبات می کنیم
- اگر رابطه فوق را ساده کنیم به صورت مقابل تبدیل می شود v=e+1، پس باید حالا ثابت کنیم در هر درخت رابطه فوق بر قرار است (هر گرافی که یک وجه دارد)
- مبنای استقرا: اگر v=1 باشد (درخت فقط یک گره داشته باشد) تعداد یالها صفر است و در رابطه فوق صادق است

فرمول اولر(ادامه)

- فرض استقرا: فرض کنید در هر درخت با n گره، تعداد یالها در رابطه n=e+1 صدق کند یا به عبارتی e=n-1
- حکم استقرا: حال باید ثابت کنیم درختی که دارای n+1 راس است دارای n یال می باشد
- در هر درخت حتماً یک گره از درجه ۱ وجود دارد (چون در غیر اینصورت دور ایجاد می شود)
- حال فرض کنید این گره را به همراه یال متصل به آن از درخت حذف کنیم. گراف حاصل دارای n گره خواهد بود

فرمول اولر(ادامه)

- گراف حاصل با n گره همچنان یک درخت است با این تفاوت که یک یال و یک گره کمتر دارد
- یعنی تفاوت درخت با n راس طبق مفروضات مسئله در یک یال و یک گره است. پس حکم ثابت شد
- حالا در اصل می توان گفت مبنای استقرای اول صحیح است یعنی در هر گراف با یک وجه داریم $v+1=e+2$ (این استقرا بر f (تعداد وجوه استوار است))

فرمول اولر(ادامه)

- فرض استقرا: فرض کنید برای گراف مسطح با f وجه داریم: v+f=e+2
- حکم استقرا: باید ثابت کنیم برای گراف مسطحی با f+1 وجه نیز رابطه گفته شده برقرار است
- گراف با f+1 وجه دارای وجه خاصی مثلاً F است که مجاور با ناحیه خارجی است. این ناحیه توسط یک دور احاطه شده است
- در این ناحیه، یالی را حذف می کنیم که با ناحیه خارجی همجوار است

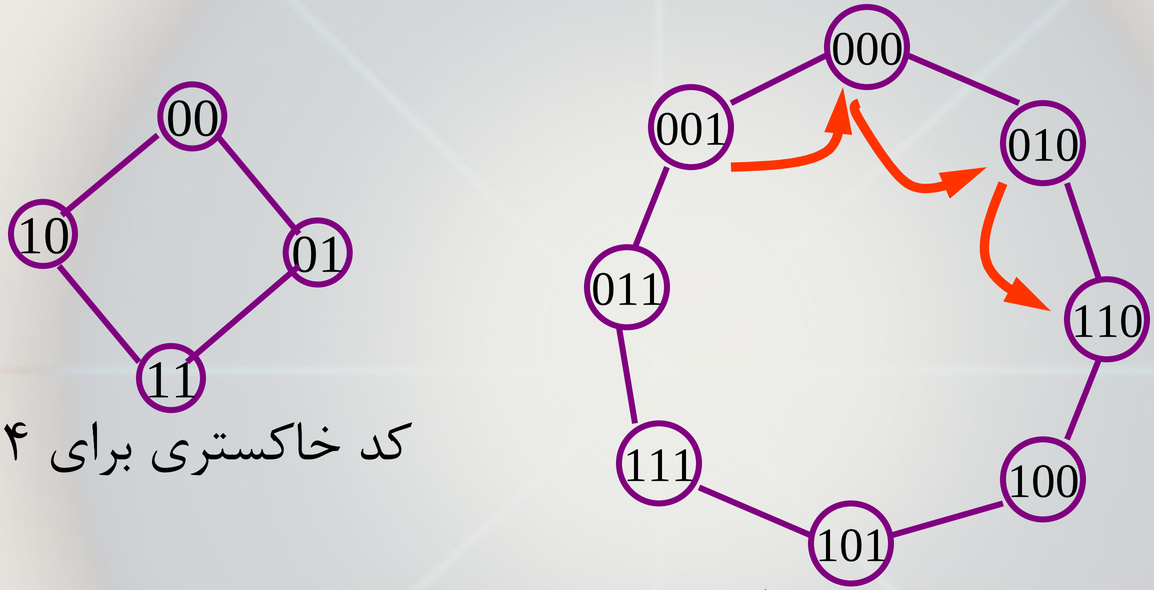
فرمول اولر(ادامه)

- در اثر حذف این یال، دو ناحیه F و ناحیه خارجی در هم ادغام می شوند، یعنی از گراف فوق دقیقاً یک یال و یک وجه کم شد
- اما طبق فرض استقرا برای گرافی با f وجه داریم $v+f=e+2$، یعنی در گرافی با $f+1$ وجه نیز این رابطه برقرار است.چون اگر از آن ۱ وجه کم کنیم، یک یال هم کم می شود و درنتیجه تساوی بازهم برقرار خواهد بود و حکم ثابت می شود

کدهای خاکستری

- مجموعه ای از n شیئ داده شده و می خواهیم آنها را کدگذاری کنیم
- یک روش برای کدگذاری به این صورت است که از تعداد ثابتی بیت برای کد گذاری استفاده نماییم به قسمی که بتوان این n شیئ را به گونه ای بر روی یک لیست مدور قرار دهیم که کد هر شیئ را بتوان از روی کد شیئ قبلی آن و با تغییر دادن صرفاً یک بیت بدست آورد
- به عنوان مثال اگر از ۲ بیت برای کدگذاری استفاده نماییم آنگاه کدها عبارتند از 00,01,11,10

کدهای خاکستری(Gray Codes)



کد خاکستری برای ۴ شئ

کد خاکستری برای ۸ شئ

- قضیه: ثابت کنید برای هر عدد صحیح k>0 یک کد خاکستری به طول 2k وجود دارد(2K تعداد اشیاء است)

کدهای خاکستری(ادامه)

- مبنای استقرا: برای k=1 چنانکه دیدیم کد خاکستری برای ۲ شئ وجود دارد
- فرض استقرا: فرض کنید برای 2k شئ، کدهای خاکستری وجود دارد
- حکم استقرا: باید ثابت کنیم برای 2(k+1) نیز کدخاکستری وجود دارد
- طبق فرض کد خاکستری برای 2k شئ وجود دارد. فرض کنید این کدها عبارتند از: S_1،S_2،S_3،...،S_{2k}

کدهای خاکستری(ادامه)

- اگر به ابتدای این کدها صرفاً یک صفر یا یک ۱ اضافه کنیم باز هم یک کدخاکستری خواهند بود
- حال کدهای قبلی را کنار هم قرار می دهیم و هر کد را دو بار تکرار می کنیم. برای یکی از آنها صفر و برای دیگری ۱ به ابتدای آن اضافه می کنیم

$$0s_1, 1s_1, 1s_2, 0s_2, 0s_3, 1s_3, \ldots, 0s_{2k}$$

- کدهای فوق یک دنباله کدخاکستری به طول 2(k+1) خواهد بود

استقرا قوی

- در استقرا قوی مبنای استقرا مانند استقرا معمولی است
- اما در فرض استقرا فرض می کنیم که مسئله برای مقادیری تا مثلاً k برقرار است
- در حکم استقرا باید ثابت کنیم که مسئله برای n>k نیز برقرار است که n الزاماً k+1 نیست
- در بعضی مواقع برای محاسبه پیچیدگی توابع مجبوریم ابتدا پاسخ را حدس بزنیم و سپس با استقرا قوی آنرا ثابت کنیم

استقرا قوی(ادامه)

- با استقرا قوی ثابت کنید تابع زیر از O(n logn) است

$T(n)=T(n/4)+n \log n$, nتوانی از 4 است

$T(1)=1$

- یعنی باید ثابت کنیم: $T(n)<=C.n \log n$
- مبنای استقرا: اگر $n=4$ آنگاه $T(4)= T(1)+2=3$ اما $C.n \log n$ به ازای $n=4$ برابر است با $C.8$ اگر مثلاً $C=4$ انتخاب شود آنگاه نامساوی فوق برابر خواهد بود
- فرض استقرا: فرض کنیم رابطه فوق برای مقادیر کوچکتر مساوی $n/4$ برقرار است یعنی $T(n/4)<=C.n/4. \log n/4$

استقرا قوی(ادامه)

- حکم استقرا: باید ثابت کنیم رابطه فوق به ازای n نیز برقرار است یعنی T(n)<=C.n logn

$T(n/4)<=C.n/4.\log n/4 \Rightarrow$

$T(n/4)+n\log n<= C.n/4.\log n/4 + n\log n$

$T(n)<= C.n/4.\log n/4 + n\log n \Rightarrow$

$T(n)<= C.n/4(\log n-2)+n\log n \Rightarrow$

$T(n)<=C.n/4.\log n+n\log n-2 \Rightarrow$

$T(n)<=(C/4+1)n\log n-2$

استقرا قوی(ادامه)

- حالا اگر ثابت کنیم $(C/4+1)n\log n-2 <= C.n\log n$ عملاً ثابت کرده ایم $T(n) <= C.n\log n$ چون دیدیم که $T(n) <= (C/4+1)n\log n-2$

$(C/4+1)n\log n-2 <= C.n\log n \Rightarrow C=4$

$2n\log n-2 <= 4n\log n \Rightarrow -2 <= 2n\log n \Rightarrow$

رابطه فوق به ازای هر $n >= 1$ برقرار است

- در نتیجه عملاً ثابت شد $T(n) <= C.n\log n$ یعنی $T(n)=O(n\log n)$