دانشگاه آزاد اسلامی
واحد زنجان
گروه آموزشی مهندسی نرم افزار کامپیوتر

جزوه درس:

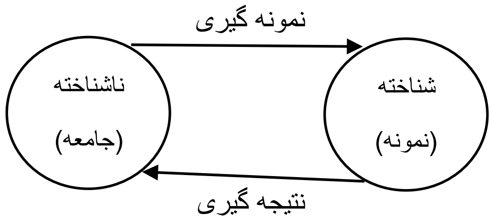
آمار و احتمالات

استاد :
مهدی افشار

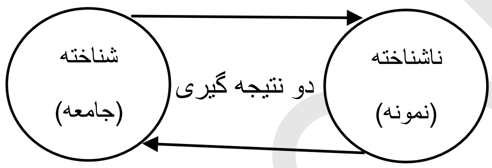
گردآورنده:
علی بیگدلی

فصل اول: آمار توصیفی

آمار: مجموعه ای ازمفاهیم و روشهاست که در هر زمینه پژوهش، گردآوری وتعبیر اطلاعات مربوط به آن و انجام نتیجه گیری ها، درشرایطی که عدم حتمیت و تغییر وجود دارد،به کارمی رو**د.**

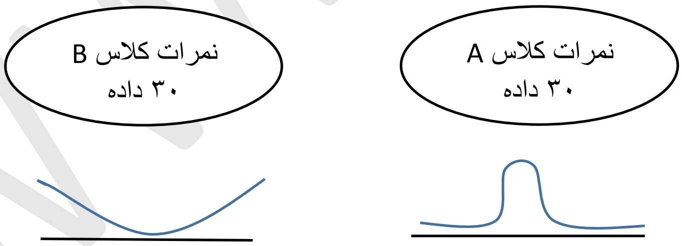


احتمال: وقوع یک پیشامد که به معنای شانس وقوع آن پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی است.



آمار توصیفی: ثبت، جمع آوری و خلاصه سازی احتمالات

مثال:



جامعه آماری: به مجموعه ای از اشیاء یا افراد که حداقل یک ویژگی مشترک آنها مورد مطالعه قرار میگیرد جامعه آماری گویند. ویژگی های مشترک جامعه آماری از عضوی به عضو دیگر تغییر می کند، که به آنها را متغیر می نامند.

متغیر های آماری: صحت یا ویژگی هایی که علاقمندیم در مورد جامع بدانیم به دو دسته: کمی(قابل اندازه گیری) و کیفی (صفت و ویژگی هستند که به آنها عدد نسبت می دهیم) تقسیم می شوند.

هدف آمار توصیفی: خلاصه کردن اطلاعات عددی فراوان در چند شاخص به طوری که هرگاه بخواهیم اطلاعات مورد نیاز خود را از داده ها بدست آوریم کافی است آن شاخص ها را بدست آوریم.

سلسله مراتب کار کردن با اطلاعات: ۱-جمع آوری اطلاعات و داده ها **۲**- بدست آوردن شاخص های آماری

جمع آوری اطلاعات و داده ها:

اطلاعات به دو دسته گسسته و پیوسته تقسیم بندی می شود. که برای این ما ابتدا جنس داده را مشخص می کنیم.

در حالت گسسته: جمع آوری این اطلاعات ساده تر از پیوسته است و در این حالت فقط کافی است که جدول فراوانی رسم کنید.

x	۱	۲	۳	۴
	f_1	f_2	f_3	f_4

در حالت پیوسته:

۱. تعداد رده ها: از روی تعداد اطلاعات بدست می آید به طوری که هرگاه د عدد داشته باشیم تعداد رده ها از دستور استورگس بدست می آید.($k=1+3.322\log_{10}^{n}$) مثال:

$n=40 \rightarrow k=1+3.322\log_{10}^{40}=6.3 \simeq 7$ رده

۲. معمولا در ابتدا برای ثبت اطلاعات یک میزان حساسیت (تغییر پذیری) را در نظر می گیریم. مثلا: هرگاه اطلاعات وزن یک جسم را نشان دهند تصمیم می گیریم همه داده ها را به عدد صحیح نزدیک گرد کنیم در این صورت واحد گرد شده داده ها $\boldsymbol{\Phi}$ است. مثال) $30.57 \rightarrow 31$ تغییرپذیری داده ها = $\frac{\text{واحد گرد شده}}{2}$

۳. بزرگترین داده ها و کوچکترین داده ها را مشخص می کنیم

Max= M + تغییر پذیری داده ه ها   Min= m – تغییر پذیری داده ها   R=Max – Min

۴. طول هر رده (W) $w=\frac{R}{K}$

نکته: در طول رده w و تعداد رده ها k اگر عدد ممیز داشت به عدد بزرگتر گرد می کنیم. $6.32 \rightarrow 7$ اطلاعات به صورت یک جدول آماده شده است.

حال می خواهیم اطلاعات را در چند عدد خلاصه کنیم که هر شخص با دانستن آن اعداد اطلاعات قابل قبولی در مورد آن داده ها بدست بیاورید. به این اعداد مهم شاخص آماری گفته می شود.

- **شاخص های آماری**
  - **تمرکزی**
    - **میانگین**
    - **میانه**
    - **مد**
  - **پراکندگی**
    - **واریانس**
    - **چولگی**

- میانگین
  - گسسته: $$x=\frac{f1x1+f1x2+\cdots+fkxk}{f1+f2+\cdots+fk}$$
  - پیوسته: $$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{k} fixi}{\sum_{i=1}^{k} fixi}=\frac{\sum_{i=1}^{k} fixi}{n}$$

داده ها به تعداد n تا و از نوع k هستند.

درحالت پیوسته:

$x_1^{(1)} \to x_1^{(2)}$	$x_2^{(1)} \to x_2^{(2)}$	$x_3^{(1)} \to x_3^{(2)}$	....	$x_1^{(1)} \to x_1^{(1)}$
F1	F2	F3	....	fk

$$x1 = \frac{x_1^{(1)} \to x_1^{(2)}}{2} \qquad x2 = \frac{x_2^{(1)} \to x_2^{(2)}}{2}$$

میانه: ارزش عددی واقع شده در وسط یک مجموعه داده پس از حذف بزرگترین و کوچکترین داده از مجموعه

2 , 2 , 3 , 7 , 7 , 9 , 11 , 11 , 12 , 12 , 12 فرد

2 , 2 , 3 , 7 , 7 , 9 , 11 , 11 , 12 , 12 زوج

فرد← $M = \frac{x_{11}+1}{2} * 6 = 9$

زوج ← $m = \frac{\frac{x10}{2}+\frac{x12}{2}}{2} = \frac{x5+x6}{2} = \frac{7+9}{2} = 8$

گسسته:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, X_n \begin{cases} n \text{ فرد } \to m = x(\frac{n+1}{2}) \\ n \text{ زوج } \to m = (\frac{x\left(\frac{n+1}{2}\right) + x\left(\frac{n+2}{2}\right)}{2}) \end{cases}$$

پیوسته:

$$m = L_{0.5} + \frac{(0.5n - g_{0.5})w}{f_{0.5}}$$

$L_{0.5}$= کران پایین رده میانه

$F_{0.5}$= فراوانی رده میانه

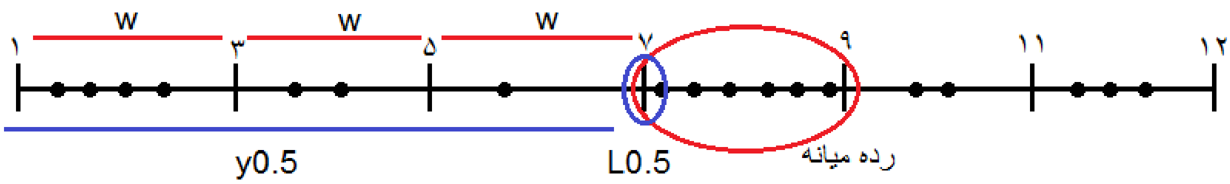
Xi	Fi	gi
X1	F1	g1
X2	F2	g2
X3	F3	g3
Xk	Fk	g4

$g_{0.5}$= فراوانی تجمعی رده ما قبل میانه

N=تعداد داده ها

W=طول رده ها

رده میانه: رده ایی که تعداد عناصر تا آن رده از $\frac{n}{2}$ بیشتر شود را رده میانه گویند.



$$m = L_{0.5} + \frac{(0.5n - g_{0.5})w}{f_{0.5}}$$

$$(0.5 - g_{0.5})\frac{w}{f_{0.5}}$$

مد (نما): پر تکرارترین ارزش در یک مجموعه داده

برای داده های گسسته:

10 , 7 , 9 , 7 , 1 , 3 , 7 , 5 , 6 , 10 , 9

نما = 7 = M

10 , 7 , 9 , 7 , 1 , 3 , 4 , 7 , 5 , 6 , 10 , 9 , 10

دو مد یا نما = 10, 7 = $M = \frac{10+7}{2} = 8.5$

برای داده های پیوسته:

$$M = Lm + \left(\frac{w}{D1 + D2}\right) w$$

F0.5 = فراوانی رده میانه

Lm = کران پایین رده نمایی

D2 = اختلاف رده نمایی در رده بعدی

D1 = اختلاف رده نمایی در رده ما قبل

W = طول رده ها

مثال: در جدول زیر میانگین، رده و میانه رو بیابید.

رده ها	x_i	f_i	g_i	$f_i x_i$
۸-۱۰	۹	۳	۳	۲۷
۱۰-۱۲	۱۱	۶	۹	۶۶
۱۲-۱۴	۱۳	۴	۱۳	۵۲
۱۴-۱۶	۱۵	۲	۱۵	۳۰

پراکندگی : شاخصی است که نشان دهنده پراکندگی داده ها نسبت به میانگین است مهم ترین شاخص پراکندگی ، واریانس است. هرگاه واریانس برابر صفر باشد یعنی همه داده ها برابر با میانگین هستند. هر چه واریانس بیشتر باشد پراکندگی نسبت به میانگین بیشتر است و هرچه واریانس کم تر باشد یعنی داده ها به میانگین نزدیکترند.(فرمول واریانس)

$$s^2 = \frac{\sum_1^k f_i (x_i - x)^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} = (\sum f_i X_i^2 - \frac{(\sum f_i x_i)^2}{n})$$

مثال: واریانس جدول زیر را حساب کنید.

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
۹	۳	۲۷	۲۴۳
۱۱	۶	۶۶	۷۲۶
۱۳	۴	۵۲	۶۷۶
۱۵	۲	۳۰	۴۵۰
		۱۷۵	۲۰۹۵

روش تبدیل داده ها: a= تغییر مبداء B= تغییر واحد اندازه گیری

$y_i = \frac{xi-a}{b}$ $s_x^2 = b^2 s_y^2$

$\bar{x} = a + \bar{y}$ $s_x = b\, s_y$

ضریب تغییر: $\mathrm{cv} = \frac{\mathrm{s}}{\bar{\mathrm{x}}}$

مثال: کارخانه ایی دو نوع لامپ تولید می کند: نوع اول) میانگین عمر ۲۰۰ ساعت و انحراف معیار ۱۱ ساعت و نوع دوم) میانگین عمر ۲۴۰ ساعت و انحراف معیار ۱۲ ساعت. کدام نوع بهتر است؟

احتمال:

شمارش: شمردن بدون انجام شمارش

اصل ضرب: هرگاه کاری در دو مرحله اولی به m طریق و دومی به n طریق صورت گیرد آن کار به $m * n$ طریق انجام پذیر است.

مثال: چند عدد سه رقمی داریم؟

مثال:چند عدد سه رقمی زوج و بدون تکرار ارقام داریم؟

نتایج اصل ضرب:

۱- ترتیب : شمارش جای گشت ها یا ترتیب ها یا صف ها $p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال: چند صف ۳ نفره با ۵ نفر می توان ساخت؟

مثال: چند صف ۵ نفره با ۵ نفر می توان ساخت؟

۲- ترکیب: $\binom{n}{r} =$ روش های انتخاب r شی از بین n تا

$$c(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{p(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال: چند تیم ۳ نفره با ۵ نفر می توان ساخت؟

۳-ترتیب با تکرار: $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ $\quad n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$

مثال: با sss و uu چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت؟

مثال: با sss و uu و tttt چند کلمه ۹ حرفی می توان ساخت؟

۴-ترکیب با تکرار:

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n}$$

مثال: می خواهیم ۵ شاخه گل بخریم و گل فروش ۳ نوع گل دارد؟

مثال: روش های خرید ۳۰ گل از ۵۰ نوع کدامند؟

مثال: روش های خرید ۵۰ گل از ۳۰ نوع کدامند؟

مثال: خرید ۵ گل از ۳ نوع کدام است؟

مثال: خرید ۱۰ گل از ۷ نوع کدامند؟

مثال: خرید ۱۰ گل از ۳ نوع به طوری که از نوع اول بیش از ۳ تا و از نوع دوم بیش از ۲ تا حتما باشد؟

مثال: مطلوبست $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 36$

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 \geq 3 \\ x_3 > 4 \\ x_5 > 1 \end{cases}$$

نکته:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

جایگشت های دایره ای:

تعداد جایگشت های دایره ای $= (n-1)!$

مثال: به چند طریق ۵ دور یک میز گرد می نشینند؟

مثال: با ارقام ۱،۲،۳،۴،۵،۶ و بدون تکرار ارقام چند تا عدد ۶ رقمی می توان ساخت به طوری که: الف)محدودیتی نباشد. ب) تمام رقمهای فرد کنار هم باشند. ج) هیچ کدام از ارقام فرد کنار هم نباشند.

مثال: فرض کنید ۲ تهرانی، ۵ زنجانی و ۳ اصفهانی در یک صف کنارهم قرار بگیرند مطلوب است محاسبه تعداد حالات صف ایستادن به طوری که ۲ تهرانی اول و آخر صف قرار گیرند. اگر الف) هم شهری ها متمایز فرض شوند. ب)هم شهری ها متمایز فرض نشوند.

مثال: با حروف کلمه TALLAHASSEE چند کلمه ۱۱ حرفی می توان ساخت به طوری که الف) بدون محدودیت ب) هر ۳ حرف A کنار هم باشند. ج) هیچ کدام از حروف A کنار هم نباشند.

مثال: فرض کنید ۱۰ مهره نامتمایز را می خواهیم در ۷ جعبه با شماره های ۷، ... ،۱،۲ قرار دهیم به چند حالت ممکن است هرگاه الف) بدون محدودیت ب) در هر جعبه حداقل ۱ مهره قرار گیرد ج) جعبه ۱ خالی بماند د) فقط یکی از جعبه ها خالی بماند.

فصل دوم: احتمال

آزمایش تصادفی: آزمایشی که نتیجه آن قبل از وقوع مشخص نیست

مثل: پرتاب سکه ، پرتاب دو تاس و ...

فضای نمونه ای: فضایی است که حاوی تمام بر آوردهای ممکن آزمایش باشد (S)

نمونه: پرتاب سکه ← $s = \{$خط , شیر$\}$

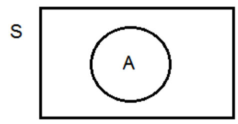
پرتاب دو تاس $s = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$

دمای بدن انسان $s = [35$و$42]$

فضای نمونه
- پیوسته [۴۲و۳۵]
- گسسته ۳۶ حالت

پیشامد: خر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می گوئیم.

نمونه: در پرتاب دو تاس پیشامد مجموع دو تاس ۶ می باشد.

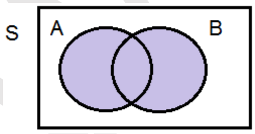


$s = \{(1,1), \dots, (6,6)\}$ حالت36 $\quad |s| = 36$

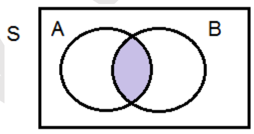
$A = \{(3,3), (2,4), (4,2), (1,5), (5,1)\} \quad |A| = 5$

عمل روی پیشامد:

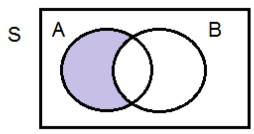
AUB: A یا B اتفاق بیافتد.



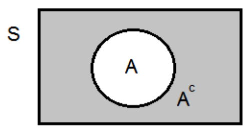
A∩B: هم A و هم B اتفاق بیافتد.

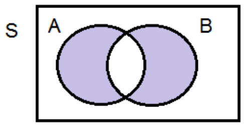


A-B: فقط A اتفاق بیافتد و B اتفاق نیافتد.



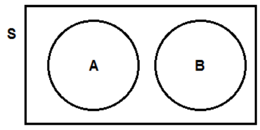
A^c: A اتفاق نیافتد.





AΔB : تفاضل متقارن فقط یکی A یا B اتفاق بیافتد.

$(A \cup B) - (A \cap B)$ و $(A - B) \cup (B - A)$



نمونه: دو پیشامد ناسازگار A,B

$A \cap B = \emptyset$

مثال: در پرتاب یک تاس:

A: پیشامد زوج آمدن

B: پیشامد کوچکتر از ۴ آمدن

C: پیشامد فرد آمدن

هر تابع P که این ۳ خاصیت را دارا باشد را تابع احتمال می گوئیم.

۱. $P(s) = 1$

۲. $0 \leq P(A) \leq 1$

۳. $A \cap B = \emptyset \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

قواعد احتمال:

$$p(\emptyset) = 0$$

$$P(A^{`}) = 1 - P(A)$$

$P(A - B) = P(A) - P(B)$ هرگاه $B \subseteq A$ باشد.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

تعریف تابع احتمال
- **S متناهی** (فضای نمونه ای گسسته)
- **S نامتناهی**
  - **نامتناهی گسسته** (شمارش پذیر)(فضای نمونه ای گسسته)
  - **نامتناهی پیوسته** (شمارش ناپذیر)(فضای نمونه ای پیوسته)

تعریف تابع احتمال
- **گسسته**
  - **متناهی**
  - **نامتناهی**
- **پیوسته** **(احتمال هندسی)**

احتمال روی فضای نمونه ای متناهی:

$s = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$

S	e_1	$e_2 \dots$	e_n
P	p_1	$p_2 \dots$	p_n

مثال: محاسبه $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ $P(A) = P_1 + P_2 + P_3$

مثال: در پرتاب تاس هرگاه تاس نصف باشد احتمال هر کدام از اتفاقات $\frac{1}{6}$ است.

احتمال رخ دادن برآورد زوج A در پرتاب یک تاس چقدر است؟

مثال:یک تاس طوری ساخته شده که احتمال مشاهده هر عدد متناسب است با عدد روی آن مطلوب است احتمال زوج آمدن؟

مثال:۱۰ مهره نامتمایز در ۷ جعبه پخش شده اند $(1,2,3,\dots,7)$ مطلوبست احتمال آنکه:

الف) در هر جعبه حداقل یک مهره قرار گیرد

ب) جعبه شماره ۱ خالی باشد

ج) فقط یکی از جعبه ها خالی بماند.

احتمال روی فضای نمونه ای نا متناهی شماره۱:

$$s = \{e_1, e_2, \dots\} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} P(e_i) = 1$$

مثال: فرض کنید تاس سالمی را آنقدر پرتاب کنیم تا ۶ بیاید. مطلوبست احتمال آنکه تعداد پرتاب های لازم تا رسیدن به ۶ عددی زوج باشد؟

نکته: $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ $\qquad |x| < 1$

مثال: احتمال روی فضای نمونه ای پیوسته (ناشمار۱)

احتمال روی فضای نمونه ای پیوسته (ناشمار۱)(احتمال هندسی):

$$P(A) = \begin{cases} \frac{A}{S}\ \text{طول} & \text{۱ بعدی} \\ \frac{A}{S}\ \text{مساحت} & \text{۲ بعدی} \\ \frac{A}{S}\ \text{حجم} & \text{۳ بعدی} \end{cases}$$

مثال: فرض کنید عددی از بازه [۰و۲] انتخاب کرده ایم. مطلوبست احتمال آنکه عدد در بازه $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ باشد؟

مثال: فرض کنید از درون مکعبی به ضلع ۳a نقطه ای به تصادف انتخاب کنیم. مطلوبست احتمال آنکه فاصله نقطه انتخاب شده از هر وجه مکعب بزرگتر از a باشد؟

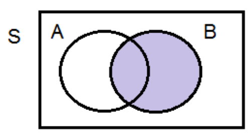
مثال:فرض کنید ۳ پیشامد باشد، پیشامدهای زیر را برحسب این ۳ پیشامد یا متمم های آنها بنویسید.

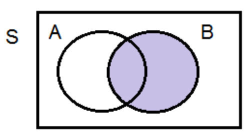
الف) فقط a اتفاق بیافتد. ب)حداکثر ۲ تا از این ۳ پیشامد اتفاق بیافتد. ج) حداقل ۲ تا از این سه پیشامد اتفاق بیافتد. د)دقیقاً ۲ تا از این ۳ پیشامد اتفاق بیافتد.

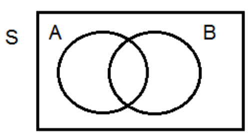
مثال: یک مدار شامل ۳ فیوز است و به گونه ای طراحی شده که حداقل باید ۲ فیوز سالم باشد تا کار کند و در غیر اینصورت مدار قطع می شود. اگر این ۳ فیوز به طور مستقل عمل کنند و احتمال سالم ماندن آن ها به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ باشد احتمال اینکه مدار متصل باشد را بیابید.

مثال: مطلوبست محاسبه احتمال آنکه در یک جمع ۵۰ نفری حداقل ۲ نفر دارای ۱ روز تولد باشند.

احتمال شرطی و استقلال پیشامد ها:







تعریف احتمال شرطی: $P.(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ احتمال A به شرط B

مفهوم استقلال دو پیشامد:

تعریف استقلال : $\begin{cases} P(A|B)=P(A) \\ P(B|A)=P(B) \end{cases}$ A و B مستقلند

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A) \ \rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

A و B مستقل اند هرگاه نوع یکی هیچ تأثیری در محاسبه احتمال وقوع دیگری نداشته باشد. استقلال اصلاً به معنی این نیست که A وB اشتراکی نداشته باشند ۲ پیشامدی که اشتراک نداشته باشند را ناسازگار گوئیم($A\cap B=\emptyset$) پس استقلال و ناسازگاری دو مفهوم کاملاً جدا هستند.

استقلال دو پیشامد (A،B):

1) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

2) $P(B|A)=\frac{P(A|B)}{P(A)}$

3) $P(B|A)=P(A|B).\frac{P(B)}{P(A)}$

دوپیشامد مستقل:

$$P(A|B)=P(A) \quad \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A) \quad P.(A\cap B)=P(A)*P(B)$$

استقلال و ناسازگاری ارتباطی به هم ندارند

$P(A\cap B)=\emptyset$ ناسازگاری

$P(A\cap B)=P(A)*P(B)$ استقلال

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)*P(B|A)*P(C|A\cap B)$$

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=P(A)*P(B|A)*P(C|A\cap B)*P(D|A\cap B\cap C)$$

مثال: در یک جعبه تعدادی مهره وجود دارد ۲R ، ۴B ، ۳W ، ۱ مهره به تصادف خارج کنیم.

اگر این مهره سفید نباشد احتمال آنکه مهره سیاه باشد چقدر است؟

از این جعبه ۳ مهره یک به یک و بدون جایگذاری خارج می کنیم مطلوبست:

الف) احتمال مهره اول قرمز ، دوم سفید و سومی قرمز باشد را بیابید.

ب) احتمال اینکه دو قرمز و یک سفید باشد را بیابید.

مثال:یک ایستگاه آتش نشانی دارای ۲ ماشین آتش نشانی است که به طور مستقل کار می کند و احتمال اینکه یک ماشین آتش نشان در موقع نیاز موجود باشد ۹۹ درصد است .

الف) احتمال اینکه موقع نیاز حداقل یکی از این ماشین موجود باشد را بیابید.

ب) هر دو در دسترس باشند.

ج) هیچ کدام از آنها در دسترس نباشند

د) فقط یکی از آن ها در دسترس باشد.

قاعده احتمال:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$$

$$= P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + \cdots$$

قاعده احتمال کل $\boldsymbol{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A|B_i)}$

مثال: فرض کنید در ظرف B_1 ۳ مهره سفید و ۵ مهره قرمز وجود دارد . در ظرف B_2 ۴ مهره سفید و ۲ مهره قرمز وجود دارد. به تصادف ظرف را انتخاب و مهره هایی از آن خارج می کنیم احتمال اینکه مهره سفید باشد چقدر است؟

قاعده بیز:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)}$$

$$\boldsymbol{P(B_j|A) = \frac{P(B_j).P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A|B_i)}}$$

مثال: در مثال قبل مطلوبست محاسبه احتمال آنکه مهره از ظرف B_1 استخراج شده باشد به شرط آنکه بدانی مهره سفید است؟

روش ساده:

مثال: یک آزمایش تشخیص سرطان با احتمال ۹۹ درصد برای بیماران سرطانی پاسخ مثبت می دهدو با احتمال ۵ درصد برای بیماران غیر سرطانی پاسخ مثبت می دهد. از بین بیماران یک بیمارستان که ۷ درصد آنها سرطانی هستند بیماری را به تصادف انتخاب کرده و مشاهده نمودیم که آزمایش فوق برای وی پاسخ مثبت داده است احتمال اینکه این بیمار سرطانی باشد را بیابید؟

مثال: در ظرف A ۵ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه وجود دارد و در ظرف B ۴ تا مهره قرمز و ۸ تا مهره سیاه و در ظرف c ۳ مهره قرمز و ۶ مهره سیاه وجود دارد یک مهره از A خارج و رد B قرار می دهیم و سپس یک مهره از B خارج و در c قرار می دهیم.حال اگر یک مهره از c خارج کنیم ، احتمال قرمز بودن آن را بیابید.

مثال: جعبه A ۳ مهره سفید و ۴ تا قرمز ، جعبه B ۲ مهره سفید و ۳ تا قرمز یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده مهره ایی از آن خارج و در جعبه بعدی قرار می دهیم سس از این جعبه ۲ مهره بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر این ۲ مهره سفید باشند، احتمال آنکه مهره منتقل شده قرمز باشد را بیابید؟

مثال:فروشگاهی ۱۰۰ دستگاه کامپیوتر از عرضه کننده های A,B,C,D خریداری می کند:

الف) اگر یک دستگاه کامپیوتر از بین کل کامپیوترها اتخاب شود. احتمال معیوب بودن آن چقدر است؟

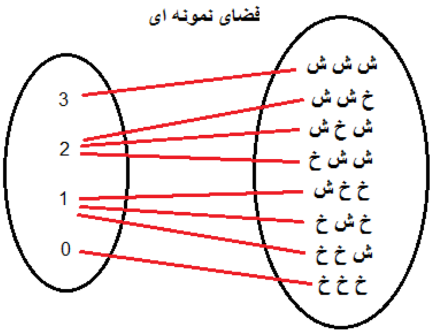
ب) احتمال آنکه دستگاه معیوب که به تصادف انتخاب شده مربوط به A باشد چقدر است؟

ج) احتمال آنکه دستگاه انتخاب شده یا سالم باشد و یا به عرضه کننده A تعلق نداشته باشد چقدر است؟

	A	B	C	D
سالم	۲۱	۱۶	۱۹	۲۹
معیوب	۲	۳	۴	۶

مثال:جعبه ای شامل ۳ مهره قرمز و ۷ مهره سیاه و افراد A و B مهره ها را به ترتیب ، یکی یکی و بدون جایگذاری خارج می کنند تا اینکه یک مهره قرمز انتخاب شود احتمال اینکه مهره قرمز توسط A انتخاب شود؟

فصل سوم: متغیر های تصادفی



فرض کنید ۳ سکه با هم پرتاب شده باشند

$X : \Omega \to R_x$ زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی

متغیر تصادفی : تابعی است از فضای نمونه ای به زیر مجموعه ای از اعداد

$$R_x = \{0,1,2,3\}$$

$$X \begin{cases} R_x \ [0,1] & \text{پیوسته} \\ R_x \ \{0,1,2,3\} & \text{گسسته} \end{cases}$$

$$P(x = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(x = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(x = 2) = \frac{3}{8}$$

$$P(x = 3) = \frac{1}{8}$$

مثال:از داخل دایره ای به شعاع R نقطه ای به تصادف انتخاب می کنیم متغیر تصادفی Y را برابر فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره می گیریم : مطلوبست احتمال اینکه فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره از $\frac{1}{3}$ شعاع دایره کم تر باشد؟

توزیع احتمالات گسسته:

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم (متغیر تصادفی ط را برار مجموع دو تاس می گیریم

الف) احتمال آنکه مجموع ۲ تاس برابر ۴ شود.

ب) احتمال آنکه مجموع ۲ تاس بین ۹ و ۴ باشد.

مثال: در هر کدام از توابع زیر مقدار K را چنان تعیین کنید که تابع $f_{x(x)}$ تابع توزیع احتمال شود:

الف $\begin{cases} f_{x(x)} = k\left(\frac{1}{5}\right)^x \\ x = 1,2,3,\ldots \end{cases}$

ب $\begin{cases} f_{x(x)} = k\binom{20}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{20-x} \\ x = 1,2,3,\ldots,20 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f_{x(x)} = \frac{kv^x}{x!} \\ x = 1,2,3,\ldots \end{cases}$

تعریف: تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X

نکته: تابع توزیع تجمعی برای x های حقیقی هم تعریف می شود.

1. $x_1 < x_2 \rightarrow F_x(x_1) \leq F_x(x_2)$
2. $F_x(-\infty) = 0$
3. $F_x(+\infty) = 1$
4. $f_x(x) = F_x(x) - F_x(\bar{x})$

خواص دیگر $F_x(x)$:

1. $P(a < x \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$
2. $P(a < x < b) = F_x(\bar{b}) - F_x(a)$
3. $P(a \leq x < b) = F_x(\bar{b}) - F_x(\bar{a})$
4. $P(a \leq x \leq b) = F_x(b) - F_x(\bar{a})$
5. $P(x > a) = 1 - P(x \leq a) = 1 - F_x(a)$

6. $P(x=b)=F_x(b)-F_x(\bar{b})$

مثال: یک کلاس آمار ۸ شاگرد دارد که ۵ نفر آن ها ۱۹ ساله و ۳ نفر ۲۱ ساله از این کلاس ۲ شاگرد به تصادف انتخاب می کنیم و متغیر تصادفی X را برابر میانگین سن ۲ شاگرد در نظر می گیریم. تابع احتمال و تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورده و مقادیر زیر را حساب کنید.

$P(19<x<21)$

$P(20\leq x<22)$

متغیر تصادفی پیوسته:

تابع چگالی احتمال:

$$f_x(x)\quad \begin{cases} f_x(x)\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx=1 \end{cases}$$

$$F_x(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)dt$$

$$P(X\in C)=\int_c f_x(x).dx$$

$$P(a<x<b)=\int_a^b f_x(x).dx$$

مثال: هرگاه متغیر تصادفی x دارای چگالی $f_x(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & x\geq 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ باشد مطلوبست:

الف) مقدار k ب) $P(x<5)$, $P([x]=2)$

مثال: نقطه ای به تصادف از داخل دایره ای به شعاع R انتخاب می کنیم و متغیر تصادفی X برابر فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره را در نظر می گیریم:

الف) تابع توزیع احتمال x را بدست آورید؟

ب) تابع احتمال x را بدست آورید و $P(\frac{R}{3} < x < \frac{R}{2})$ را حساب کنید؟

توزیع توأم x و y:

بررسی x و y به صورت همزمان و نتیجه گیری در مورد هر دو متغیر

حالت گسسته: x و y متغیر تصادفی

نمونه: $f_{x,y}(x,y) = P(X = x , Y = y)$ تابع توأم x و y

خواص
$$\begin{cases} 1)\ F_{x,y}(x,y) \geq 0 \\ 2)\ \sum_{x}\sum_{y} f_{x,y}(x,y) = 1 \end{cases}$$

گزاره: $P\big((x,y) \in C\big) = \sum_C \sum f_{x,y}(x,y)$

مثال: جعبه ای شامل ۴ ترانزیستور است و می دانیم ۲ تا از آنها معیوب است. ترانزیستور ها را یک به یک آزمایش می کنیم تا هر دو معیوب مشخص شود.

X: تعداد آزمایش ها تا مشخص شدن اولین معیوب

Y: تعداد آزمایش های اضافی تا دومین معیوب

الف) $F_{x,y}(x,y) =?$ ب) $P(x + y \leq 3) =?$

توزیع احتمال حاشیه ایی:

در جدول به دست آمده از مثال حاشیه ای که از روی y به xها می رسیم.

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
3	$\frac{1}{6}$	0	0

$f_x(1)=\frac{1}{2}\quad f_x(2)=\frac{1}{3}\quad f_x(3)=\frac{1}{6}$

$$F_x(x)=\sum_y f_{x,y}(x,y)\quad x=\text{ثابت}\;,y=\text{متغیر}$$

$$f_y(y)=\sum_x f_{x,y}(x,y)\quad x=\text{متغیر}\;,y=\text{ثابت}$$

استقلال ۲ متغیر تصادفی x و y :

$$f_{x,y}(x,y)=f_x(x).f_y(y)$$

آیا در مثال ترانزیستور های x و y مستقل اند؟

$$f_{x,y}(1,1)=\frac{1}{6}\quad f_{x,y}=\frac{1}{2}\quad F_y(1)=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad\frac{1}{2}*\frac{1}{2}\neq\frac{1}{6}$$

مثال: فرض کنید متغیر های تصادفی x و y دارای تابع احتمال $f_{x,y}(x,y)=k\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)$ باشند. x,y=1,2,3,..

الف) تعداد k ب) $f_x(x)$, $f_y(y)$ ج) آیا x,y مستقل هستند؟

د) $P(X=2,Y=0)$ $\quad P(x\leq y)$ $\quad P(X=x)$ $\quad P(X+Y\leq 2)$

توزیع توأم پیوسته: متغیر تصادفی yوx:

$$\begin{cases} f_{x,y}(x,y) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dx.dy = 1 \end{cases}$$

$$P(x,y| \in A) = \iint_A f_{x,y}(x,y)dx.dy$$

مشابه حالت گسسته:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dy$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dx$$

تعریف: استقلال ۲ پیشامد

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x).f_y(y)$$

مثال: فرض کنید متغیر های تصادفی x,y دارای تابع چگالی

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} cx(1+2y) & 0<x<3\ ,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

الف) c ؟

ب) $P(1 < x < 2 , 0 < y < \frac{1}{2})$، $(x + 3y \geq 3)$،

مثال: x و y دارای تابع چگالی توأم

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} ke^{-x} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار ثابت k

ب) $f_x(x)$, $f_y(y)$ ج) آیا x و y مستقل اند؟

توزیع شرطی:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(x = a, y = b)}{P(Y = y)} = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)} = f_{x|y}(x|y)$$

$$P_{x|y}(x|y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$$

گسسته $P(a < x < b)|Y = c) = \sum_{a<x<b} f_{x|y}(x|y)$

$P(a < x < b|Y = c) = \int_a^b f_{x|y}(x|c)dx$ پیوسته

مثال: ترانزیستور (س س خ خ) مطلوبست: $P(X \leq 2|Y = 1)$

X: تعداد آزمایشها تا اولین معیوب

Y: تعداد آزمایش های اضافی تا دومین معیوب

مثال: x وy دارای تابع چگالی توأم

الف) $P(x \leq 2\,, y \leq 2)$

ب) $P(X \leq 2|Y = 3)$

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y}\,(1 - e^{-x}) & 0 < x < y < \infty \\ e^{-x}\,(1 - e^{-y}) & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

مثال: ۲سوخته یا سالم، ۸ لامپ، ۳ لامپ از جعبه انتخاب می کنیم:

X: تعداد لامپ های سوخته

الف) تابع احتمال ب)امید ریاضی x

مثال: X متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_x(x) = c\left(\frac{1}{x}\right)^{\Theta+1} \quad x > 1, \Theta > 1$

باشد مقدار C و واریانس X را بدست آورید؟

مثال: x ورودی تابع چگالی احتمال $f_x(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ هرگاه $E(x) = \frac{3}{5}$ باشد مقادیر a و b را بدست آورید.

واریانس متغیر تصادفی:

$$Var\ X = E\left(X - E_{(x)}\right) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2$$

$$Var\ (a) = 0$$

$$Var\ (aX) = a^2 Var\ X$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var\ X$$

کد واریانس ۲ متغیر تصادفی x و y:

$$Cov\ (X,Y) = E\ \left(\left(X - E(x)\right)\left(y - E(y)\right)\right) = E(xy) - E(x)E(y)$$

$$Cov\ (x,y) = 0\ \rightarrow x, y$$

فقط در حالت استقلال x وy : $E(xy) - E(x)E(y)$

ضریب همبستگی: $f(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x).Var(y)}}$

مثال: هرگاه x وy دارای تابع چگالی توأم $f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$ باشند ضریب همبستگی x وy را بدست آورید؟

مثال: ۴ مهره داریم از این جعبه ۲ مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم مطلوبست $P(x,y)$ ؟

Y \ x					$P_y(y)$
$P_x(x)$					

متغیر های تصادفی :

گسسته $\leftarrow$ تابع احتمال $f_x(x)$

پیوسته $\leftarrow$ تابع چگالی $f_x(x)$

گسسته: برنولی، دو جمله ای، هندسی، پواسون

پیوسته: نمایی و نرمال

۱. **برنولی:**

X	0	1
	$1-P$	P

$$E(x) = 0x(1-P) + 1 * P = P$$

$$E(x^2) = 0^2 * (1-P) + 1^2 * P = P$$

$$Var\ X = E(x^2) - E(x^2) = P - P^2 = P(1-P) = pq$$

$$Var\ (x) = P - P^2 = pq \ \rightarrow \ E(x) = P$$

آزمایش برنولی: یعنی پیشامدی با دو حالت (شکست و پیروزی)

۲. **توزیع دوجمله ای:** n آزمایش برنولی داریم و x تعداد پیروزی ها

X	0	1	2	. . .	k	. . .	n
$f_x(x)$	$\binom{n}{0} q^n$	$\binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$			$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$		$\binom{n}{n} \mathrm{p^n}$

گزاره: $P(X = k) = P_x(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$E(x) = np$$

$$Var(x) = npq$$

$X \sim B(n, p)$ n=آزمایش برنولی p=احتمال موفقیت

$$X \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$$

۳. **توزیع هندسی** $\boldsymbol{(X \sim G(p))}$

یک آزمایش برنولی را آنقدر ادامه می دهیم تا اولین پیروزی بدست آید.

X : تعداد آزمایش ها تا رسیدن به اولین موفقیت

X	1	2	3	...	n
$f_x(x)$	P	qp	q^2p		$q^{n-1}p$

$$E(x) = \frac{1}{p}$$

$$Var\ (x) = \frac{q}{p^2}$$

$$E(x) = p + 2q + 3q^2p + 4q^3p + \cdots$$

$$= p(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots)$$

$$= p\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

۴. توزیع پواسن:

X: توزیع پیشامد ها یا حوادث در بازه مکانی معین یا بازه زمانی معین

$$f_x(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\boldsymbol{\lambda}^{x}}{\boldsymbol{x}!}$$

$\boldsymbol{\lambda}$: متوسط تعداد حوادث رخ داده

$$E(x) = \boldsymbol{\lambda}$$

$$Var\ (x) = \boldsymbol{\lambda}$$

$$X \sim P(\boldsymbol{\lambda})$$

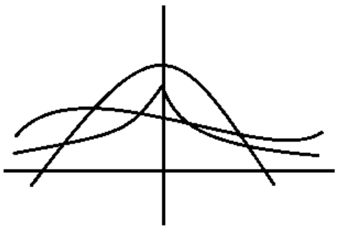
مثال: شخص فراموشکاری به خاطر نمی آورد که کدامیک از ۱۲ کلیدش مربوط به دفتر کارش است؟ اگر او کلیدها را یکی یکی آزمایش کند، انتظار دارید در چندمین بار در دفتر باز شود؟

مثال: فرض کنید به طور متوسط در هر ۱۰ دقیقه ۱۰ تلفن به مرکز مخابرات اداره ای زده می شود. مطلوبست:

الف) احتمال آنکه در یک دقیقه معین هیچ تلفنی به مرکز زده نشود؟

ب) در طول ۵ دقیقه حداقل یک تلفن زده شود؟

توزیع نرمال: (**پیوسته**) $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \vartheta^2)}$ واریانس: ϑ میانگین: μ



$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta^2}} \, . \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\vartheta}\right)^2}$$

قضیه: هرگاه X توزیع (μ, ϑ^2) N باشد. $Z = \frac{X-\mu}{\vartheta}$ دارا توزیع نرمال استاندارد است یعنی $Z \sim N(0,1)$

کار کردن با جدول توزیع نرمال:

$$P(Z < 2.75) = 0.9970$$

$$P(Z < -5) = 0$$

$$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772$$

$$P(-1 < Z < 3) = \emptyset(3) - \emptyset(-1) = 0.9987 - 0.151$$

مثال: نیروی چسبندگی یک قطره چسب دارای توزیع نرمال $\mu = 50$ است و $\frac{kg}{cm^2}$ $\vartheta = 1$ انحراف معیار است یک قطعه شکسته را با این چسب می چسبانیم و سپس آن را با بار $49\ kg$ آزمایش می کنیم مطلوبست: احتمال آنکه چسبندگی از بین برود؟

مثال: فرض کنید شرکتی کالاهایی تولید می کند که طول عمر آنها دارای میانگین ۱۰۰ و انحراف معیار ۵ ماه است اگر این شرکت تولیدات خود را ۹۰ ما گارانتی کرده باشد. چند درصد از تولیدات خود را باید تعویض کند؟