## درس اول :

**معرفی نماد سیگما($\sum$) :** به بیان ساده سیگما یعنی جمع کن. در حقیقت سیگما یک نوع خلاصه نویسی ریاضی است.

a1+a2+a3+…+a100=$\sum_{i=1}^{100} ai$

**مثال):** مطلوب است :

الف) $$\sum_{i=1}^{\sum 4} i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

ب) $$\sum_{i=1}^{5} \binom{2}{i} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

ج) $$\frac{\sum_{i=1}^{4}(i-4)^2}{6} =$$
$$= \frac{(1-4)^2}{6} + \frac{(2-4)^2}{6} + \frac{(3-4)^2}{6} + \frac{(4-4)^2}{6} + \frac{(5-4)^2}{6} + \frac{(6-4)^2}{6}$$
$$= \frac{9}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{19}{6} = 3/16$$

**یاد آوری :** عدد صفر تقسیم بر هر عدد غیر صفر =صفر ، عدد غیر صفر تقسیم بر صفر معنی ندارد.

ب) $$\frac{\sum_{i=1}^{4} xi}{4} = \frac{x1+x2+x3+x4}{3}$$

الف) $$\frac{\sum_{i=1}^{3} xi\,(x1-\bar{x})^2}{3} = \frac{(x1-\bar{x})^2+(x2-\bar{x})^2+(x3-\bar{x})^2}{3}$$

**٭نکته :** اگر جای x در عبارات فوق عدد باشد عبارت را حل می کنیم ولی چون عدد داده نشده به همین صورت باقی می ماند.

اعداد زیر را نام گذاری کنید؟ 2,5,1,8,11 جواب = x1=2,x2=5,x3=1,x4=8,x5=11

**مثال):** فوق را می توان به صورت زیر نیز نوشت: xi=2,5,1,8,11

**مثال) :** فرض کنیم fi=2,3,9,1,5 و xi=2,4,6,8,10مطلوب است :

الف) $$\frac{\sum_{i=1}^{5} fi\,xi}{5} = \frac{4+12+54+8+50}{20} = \frac{128}{20} = 6/4$$

ب) $$\frac{\sum_{i=1}^{5} fi\,xi}{\sum_{i=1}^{5} fi} = \frac{F1\,x1+F2\,x2+F3\,x3+F4\,x4+F5\,x5}{F1+f2+f3+f4+f5} = \frac{(2\times2)+(3\times4)+(6\times9)+(1\times8)+(5\times10)}{2+3+9+1+5}$$

$$= \frac{128}{20} = 6/4$$

اگر فرض کنیم $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5} fi\ xi}{\sum_{i=1}^{5} fi}$ در آن صورت عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$\text{(الف}\ \frac{\sum_{i=1}^{5} fi\ (xi-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{5} fi} = \frac{2(2-6/4)^2+3(4-6/4)^2+9(6-6/4)^2+1(8-6/4)^2+5(10-6/4)^2}{2+3+9+1+5} =$$

$$\frac{2(19/36)+3(5/76)+9(0/16)+1(12/56)+5(12/96)}{2+3+9+1+5}=\frac{38/72+17/28+1/44+2/56+64/8}{2+3+9+1+5} = \frac{124/8}{20}$$

$$\text{(ب}\ \frac{\sum_{i=1}^{5} fi\ xi^2}{\sum_{i=1}^{5} fi}-(\bar{x})^2 = \frac{2(2)^2+3(4)^2+9(6)^2+1(8)^2+5(10)^2}{2+3+9+1+5} = \frac{8+48+324+64+500}{20} = \frac{944}{20}-(6/42)^2 = 6/24$$

## درس دوم :

**تعریف علم آوار :** به مجموعه روشهای علمی اطلاق می شود که برای جمع آوری اطلاعات اولیه ، مرتب کردن و خلاصه کردن و طبقه بندی و تجزیه و تحلیل اطلاعات اولیه و بالاخره نتیجه گیری از آنها به کار می رود (به بیان بسیار ساده علم آمار ، بیان حقایق به زبان عدد و رقم است.)

**تقسیم بندی علم آمار:**
- آمار توصیفی : سر شماری و آمار گیری و بردن روی نمودار ها بروی جوامع آماری.
- آمار استنباطی : (آنالیز و تجزیه و تحلیل) نمونه آماری را بررسی می کند.

تعریف آمار توصیفی: مجموعه ایی از روشها که برای تلخیص ، تنظیم ، ارائه و توصیف دادهای آماری به کار می روند را گویند.ابزارهای مهم مورد استفاده در آمار توصیفی عبارتند از جدولها و نمودارها و بعضی شاخص های مهم آماری .

**تعریف آمار استنباطی :** شامل مجموعه روشهایی است که بوسیله آنها می توان نتایج حاصل از یک نمونه را به کل جامعه تعمیم داد و برخی از ویژگی های جامعه را پیش بینی کرد.

**تعریف جامعه آماری :** به مجموعه ایی از افراد یا اشیاء که ویژگی مشترکی داشته باشند را گویند. مانند جامعه لامپهای تولید شده توسط کارخانه پارس در سال ۸۸ یا جامعه دانشجویان کلاس ۱۰۲ و یا جامعه ماشین های تولید شده سایپا در سال۸۰.

**مفهوم متغییر :** در یک جامعه آماری متغییر صفت یا ویژگی است از یک فرد جامعه به فرد دیگر تغییر می کند.

**❊نکته :** در حقیقت یکی از اهداف علم آماری بررسی متغییر های آماری است.

**مثال )** دانشجویان کلاس ۱۰۲ را بعنوان یک جامعه آماری در مظر بگیرید در این جامعه آماری وزن افراد می تواند یک متغییر باشد چون از شخصی به شخصی دیگر متفاوت است همچنین سن ، قد ، گروه خونی ، میانگین درآمد ماهیانه ،رنگ چشم و... می تواند آماری درنظر گرفته شود.

**مثال )** لامپهای تولید شده توسط کارخانه پارس در سال ۸۰ را بعنوان یک جامعه آماری در نظر می گیریم در اینجا طول عمر لامپ می تواند یک متغییر آماری باشد.

**تعریف نمونه :** نمونه بخشی از یک جامعه آماری است که با روشهای علمی و اصولی برایس مطالعه ویژگی های یک جامعه انتخاب می شود.

**ویژگی های یک نمونه مناسب چیست ؟** یک نمونه مناسب باید اولاَ بطور تصادفی (شانسی) انتخاب شده باشد و دوماَ اینکه یک نمونه خوب باید با اندازه جامعه متناسب باشد.

**حجم جامعه :** تعداد عضوهای یک جامعه را حجم جامعه و تعداد عضوهای یک نمونه را حجم نمونه می گویند.

**مفهوم دادهادر آمار :** در هر بررسی آماری ابتدا باید اطلاعاتی را جمع آوری کنیم این اطلاعات اولیه را داده های آماری (داده های خام) می گویند.

**روشهای جمع آوری داده ها در آمار:** برای جمع آوری داده ها در آمار معمولاَ از 3ه روش زیر استفاده می شود :

۱: اجرای سرشماری ۲: اجرای طرح نمونه گیری(نمونه گیری) ۳: مراجعه به داده ها ی ثبتی

**تعریف سرشماری :** سر شماری به معنای مرجعه به تک تک عناصر جامعه و گردآوری مشاهده ها و اندازه ها در مورد آنهاست.

یکی از محاسن سرشماری ، دقت بالای آن است.

اما معایب زیادی دارد که بشرح زیر است :

۱: هزینه بالا ۲: زمانبر بودن ۳: عدم دسترسی به همه عناصر جامعه در بعضی جوامع آماری

٤: از بین رفتن جامعه در صورت سرشماری (در بعضی جوامع) مثال مطالعه طول عمر لامپها

**نمونه گیری :** هر گاه در جامعه ایی امکان سرشماری بنابه دلایل بالا نباشد در این صورت مجموعه ایی از جامعه با روش های علمی به عنوان نمونه انتخاب شده و سپس با پردازش روی آن نمونه نتیجه حاصل به جامعه تعمیم داده می شود توضیح اینکه در نمونه گیری تئوری احتمالات نقش مهمی در اجرای صحیحی آن ندارد.

**مثال )** ترکیب سنی یک کلاس با مراجعه دادهای ثبتی و خروجی ها می توان سریع پیدا کرد.

امروزه هر موسسه یا سازمانی اقدام به ثبت بسیاری از دادهای آماری می کند مثلاَ دانشگاه هنگام ثبت نام بسیاری از اطلاعات فردی دانشجویان مثل سن و جنس و معدل دیپلم و وضعیت تأهل و... ثبت می کنند به چنین داده هایی ، داده های ثبتی می گویند این داده های ثبتی می تواند به عنوان یکی از روشهای دسترسی به داده های آماری در نظر گرفته شود.

**دو ویژگی از جمع آوری اطلاعات به روش داده های ثبتی را بیان کنید ؟** ۱ : سرعت ۲: دقت

**تقسیم بندی متغییرها:**

۱ : متغییر های کیفی : غیر قابل اندازه گیری ، غیر قابل شمارش مثلاَ گروه خونی

۲ : متغییر های کمی : قابلیت شمارش و اندازه گیری دارند مثلاَ وزن ، قد ، سن ، سطح ، حجم

**متغییر های کیفی:** این متغییر یا خصوصیت را بیان می کنند و قابل شمارش نیست مثل:رنگ چشم،میزان تحصیلات،اعضای یک خانواده،گروه خونی و...

**متغییر های کمی :** این متغییر ها معمولاً قابل اندازه گیری یا شمارش هستند مثل زمان،حجم،مساحت،وزن و...

**تقسیم بندی متغییرها کمی:**
۱ : متغییر های کمی گسسته
۲ : متغییرهای کمی پیوسته

**متغییر های کمی گسسته :** متغییرهایی هستند که قابل شمارشند مثل تعداد خانواده های ساکن گنبد،تعداد دانشجویان این کلاس و...

**متغییرهای پیوسته :** متغییرهایی هستند که معمولاً اندازه گیری اند و بطور کلی بین هر دو و کمیت پیوسته می تواند کمیتهای پیوسته دیگری هم باشد مثل زمان ، مساحت ، طول و...

***نکته :** داده های حاصل از یک متغییر کمی متغییر کمی پیوسته را داده های پیوسته و داده های حاصل از یک متغییر کمی گسسته را داده های گسسته می گویند.

## درس سوم :

### مقدمه ایی بر آمار توصیفی (جدولهای توزیع فراوانی ،نمودارها و شاخص ها)

**مقدمه :** همان طور که قبلاً گفته شد برای تحقیق در مورد یک موضوع ابتداء باید جامعه هدف را انتخاب کرده سپس متغییر مربوط به موضوع را انتخاب و سپس با یکی از روش های گفته شده (سرشماری یا نمونه گیری یا استفاده از داده های ثبتی) اطلاعات مورد نظر را جمع آوری کنیم اما این اطلاعات (یا داداه های خام) نمی تواند ابزار مفیدی برای موضوع مورد بررسی باشد لذا ضروری است که داده ها را دسته بندی ، تنظیم و خلاصه کنیم این کار وعمل ، در جدولهایی موسوم به جدول توزیع فراوانی انجام می شود.

### معرفی چند اصطلاح آماری :

**الف) فراوانی مطلق یک داده :** به تعداد دفعاتی که یک داده تکرار می شود را فراوانی مطلق آن داده می گویند.مثلاً داده های زیر را در نظر می گیریم در اینجا فراوانی مطلق عدد ۲ برابر ۳ است زیرا عدد ۲،۳ بار تکرار شده است.فراوانی مطلق ۱ برابر ۲ است زیرا عدد ۱ دوبار تکرار شده

مثال) xi=2,2,2,1,1,8,8,8,8= فراوانی مطلق۸برابر۴و فراوانی مطلق۲برابر۳و فراوانی مطلق۱برابر۲ می باشد.

**ب) فراوانی نسبی یک داده :** هرگاه فراوانی مطلق یک داده را بر تعداد کل فراوانی ها(حجم جامعه یا نمونه)تقسیم کنیم فراوانی نسبی آن داده به دست می آید.یعنی:

$$\textbf{فراوانی نسبی یک داده} = \frac{\textbf{فراوانیهامطلق آن داده}}{\textbf{حجم کل فراوانی}}$$

**مثال)** در داده های زیر فراوانی نسبی عدد ۵ را بیابید: xi=2,2,3,<u>5,5,5,5</u>,7=

(جواب) $\text{فراوانی نسبی یک داده} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

**ج) در صد فراوانی نسبی یک داده :** هرگاه فراوانی نسبی یک داده را در ۱۰۰ ضرب کنیم درصد فراوانی نسبی آن داده به دست می آید .

**یعنی:** $\text{درصد فراوانی نسبی یک داده} = \frac{\text{فراوانیهامطلق داده}}{\text{جمع کل فراوانی}} \times ۱۰۰$

**طریقه تشکیل جدول توزیع فراوانی برای داده های کیفی :** این بحث را با یک مثال آغاز می کنیم و هر جا لازم شد اصطلاحات مورد نیاز را معرفی می نمائیم.

**مثال )** جدول زیر مربوط به گروه خونی ۲۰ دانشجو می باشد.جدول توزیع فراوانی را برای این داده ها تشکیل دهید.

A,B,O,O,O

B,AB,O,A,A

O,O,O,O,A

AB,A,B,A,O

| فراوانی مطلق Fi | چوب خط نشان | داده ها (گروه خونی) |
|---|---|---|
| 9 | ~~IIII~~ IIII | O |
| 6 | ~~IIII~~ I | A |
| 3 | III | B |
| 2 | II | AB |
| جمع کل فروانی =20 | | |

**تعریف فروانی تجمعی :** هرگاه فروانی مطلق یک دسته (داده) را با فراوانی های مطلق قبل از آن جمع کنیم فروانی تجمعی آن داده(دسته) به دست می آید.

**فروانی نسبی تجمعی :** هرگاه فروانی تجمعی یک داده (دسته) را بر کل فراوانی ها تقسیم کنیم فراوانی نسبی تجمعی به دست می آید.

**در صد فروانی نسبی تجمعی :** هرگاه فروانی نسبی تجمعی را در عدد۱۰۰ ضرب کنیم درصد فراوانی نسبی تجمعی به دست می آید.

**مثال)** در مثال مربوط به گروه خونی ۲۰ دانشجو مطلوب است:

**الف )** فروانی نسبی **ب)** درصد فروانی نسبی **ج)** فراوانی تجمعی **د)** فراوانی نسبی تجمعی **ه)** درصد فراوانی نسبی تجمعی

**و)** چند درصد دانشجویان دارای گروه خونی O هستند؟ 45%

**ز)** چند درصد دانشجویان دارای گروه خونی O یا A هستند؟ 75%

**ح)** چند درصد دانشجویان دارای گروه خونی O یا A یا B هستند؟ 90%

**ط)** چند درصد دانشجویان دارای گروه خونی O یا A یا B یا AB هستند؟ 100%

**ی)** چند درصد دانشجویان دارای گروه خونی O یا AB هستند؟ $2+9=11 \Rightarrow \frac{11}{20} \times 100 = 55\%$

**جواب )**

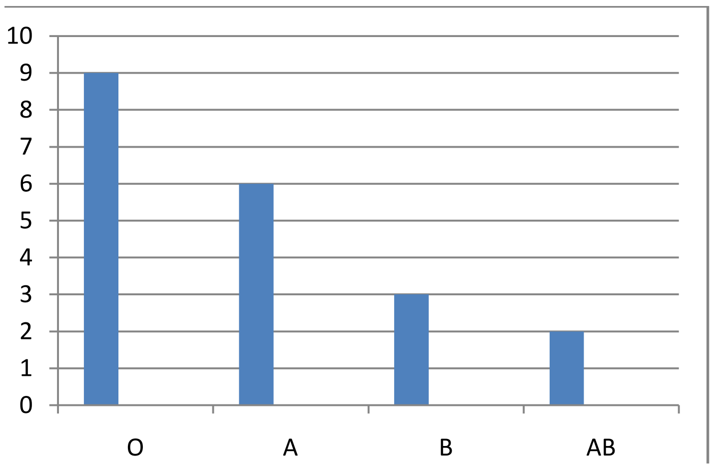
| داده ها (گروه خونی) | چوب خط نشان | فراوانی مطلق Fi | فراوانی نسبی Ri | درصد فروانی نسبی | فراوانی تجمعی | فروانی نسبی تجمعی | درصد فروانی نسبی |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O | 𝍸 IIII | 9 | $\frac{9}{20}$ | $\frac{9}{20}\times 100 = 45\%$ | 9 | $\frac{9}{20}$ | $\frac{9}{20}\times 100 = 45\%$ |
| A | 𝍸 I | 6 | $\frac{6}{20}$ | $\frac{6}{20}\times 100 = 30\%$ | 15 | $\frac{15}{20}$ | $\frac{15}{20}\times 100 = 75\%$ |
| B | III | 3 | $\frac{3}{20}$ | $\frac{3}{20}\times 100 = 15\%$ | 18 | $\frac{18}{20}$ | $\frac{18}{20}\times 100 = 90\%$ |
| AB | II | 2 | $\frac{2}{20}$ | $\frac{2}{20}\times 100 = 10\%$ | 20 | $\frac{20}{20}$ | $\frac{20}{20}\times 100 = 100\%$ |
| | | جمع کل فروانی =20 | | 100%جوع کل | | | |

**رسم نمودار:** نمودار ها ابزاری هستند که به وسیله آن می توانیم داده های موجود در یک جدول توزیع فروانی را به صورت هندسی نمایش دهیم در حقیقت به وسیله نمودار می توانیم داده ها را خلاصه کنیم در این قسمت به دو نمودار اشاره می کنیم.

**الف ) نمودار میله ایی(ستونی)** **ب) نمودار میله ایی**

**نمودار میله ایی :** برای رسم نمودار میله ایی ابتداء یک دستگاه مختصات رسم کرده سپس داده ها را روی محور X ها و فروانی مطلق را روی محور Y ها قرار داده آن گاه روی هر داده میله (ستونی) می سازیم به طوری که ارتفاع آن برابر با فروانی مطلق آن داده باشد.

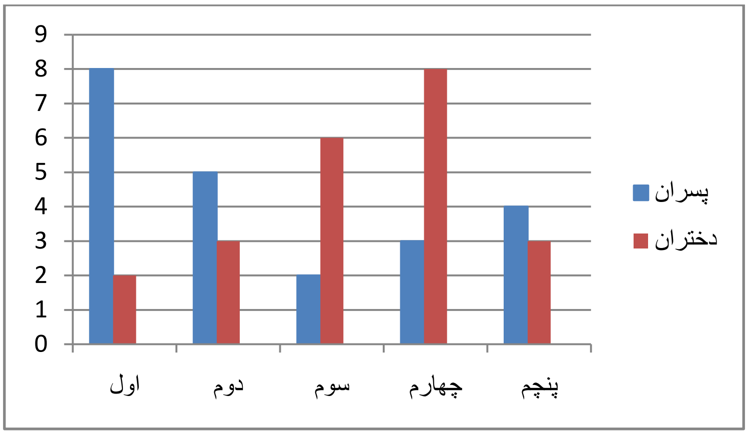
**مثال )** نمودار میله ایی را برای گروه خونی ۲۰ دانشجو رسم کنید:




***نکته :** گاهی اوقات از نمودار میله ایی برای مقایسه دو گروه از داده ها نیز استفاده کنیم در این صورت می توانیم از رنگهای مختلف و یا ستونهای هاشو زده در نمودار میله ایی استفاده کنیم.

**مثال )** جدول زیر تعداد دانش آموزان ابتدایی را در یک مدرسه روستایی نشان می دهد مطلوب است رسم نمودار میله ایی (مقایسه ایی) این جدول؟

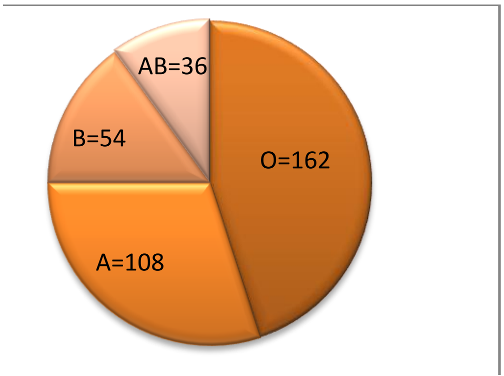
**جواب:**




| دختران | پسران | مقطع تحصیلی |
|---|---|---|
| ۲ | ۸ | پایه اول |
| ۳ | ۵ | پایه دوم |
| ٦ | ۲ | پایه سوم |
| ۸ | ۳ | پایه چهارم |
| ۳ | ۳٤ | پایه پنجم |

**ب) نمودار دایره ایی :** برای رسم نمودارز دایره ایی ابتداء باید فراوانی نسبی هر داده را در عدد ۳٦ ضرب می کنیم عدد دست آمده نشان دهنده مقدار درجه(تعداد درجاتی) است که با روی دایره به آن اختصاص می دهیم.

**مثال )** نمودار دایره ایی را برای مثال ۲۰ دانشجو بنوسید؟




$O=\frac{9}{20}\times 360 = 162^{0}$

$A=\frac{6}{20}\times 360 = 108^{0}$

$B=\frac{3}{20}\times 3600 = 54^{0}$

$AB=\frac{2}{20}\times 360 = 46^{0}$

**مثال)**اگر دریک جدول توزیع فراوانی،محجم برابر۴۰وفراوانی مطلق طبقه ی(دسته ی)،طبقه سوم برابر۵ باشد درصدفراوانی نسبی آن چقدر است؟

الف:۵٪     ب:۱۲۵٪     ج:۸٪     د:۱۲/۵٪

$$\text{درصدفراوانی نسبی دسته سوم} = \frac{\text{فراوانی مطلق دسته سوم}}{\text{حجم کل داده ها}}\times 100 \Rightarrow \frac{5}{40}\times 100 = 12/5$$

**مثال)** اگر در یک جدول توزیع فراوانی ،با حجم ۲۵(تعداد کل داده ها) فراوانی نسبی طبقه چهارم برابر۴/. باشد مطلق طبقه چهارم چقدر است؟

| فراوانی سبی | فراوانی مطلق FI | داده ها |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| $\frac{4}{10}$ | Fi | |

الف:۱۲     ب: ۱۰     ج: ۸     د: ۹

$$\frac{F}{25} = \frac{F}{10} \Rightarrow 10F = 100 \Rightarrow F = 100$$

Fدر چه عددی ضرب شده تا عدد ۱۰۰ به دست آمده ؟ در ۱۰ ضرب شده

**مثال )** اگر در یک جدول توزیع فراوانی ، فراوانی مطلق طبقه ای ۱۰ باشد و فراوانی نسبی آن٤/. باشد حجم جامعه چقدر است؟

الف : ۲۰      <u>ب : ۲۵</u>      ج : ۳۰      د : ٤٥

فراوانی نسبی $= \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{حجم}} \Rightarrow \frac{10}{N} = \frac{4}{10} \Rightarrow N = \frac{10\times 10}{4} = \frac{100}{4} = 25$

**مثال )** در یک نمودار دایره ایی مربوط به ٦۰ داده آماری کمانی به اندازه ۳۰درجه به یک طبقه تعلق دارد فروانی مطلق آن طبقه چقدر است؟

الف : ۷      <u>ب : ٥</u>      ج : ۸      د : ۱۰

فراوانی نسبی$\times 360 =$ درجه $\Rightarrow \frac{F}{60} \times 360 = 30 \Rightarrow 6 \times F \Rightarrow F = \frac{30}{6} = 5$

**مثال )** دریک روستا ٥۰خانوار به طور تصادفی انتخاب <u>وتعداد</u> اعضای هر یک ازاین خانوارها مشخص شده داداه های حاصل به صورت زیر است:

5-6-2-7-5-4-5-3-5-4-2-5-4-5-4-3-6-5-4-5-6-4-2-5-3-5-7-4-5-6-3-2-5-7-5-4-5-6-4-5-4-4-3-4-7-5-5-3-3-2

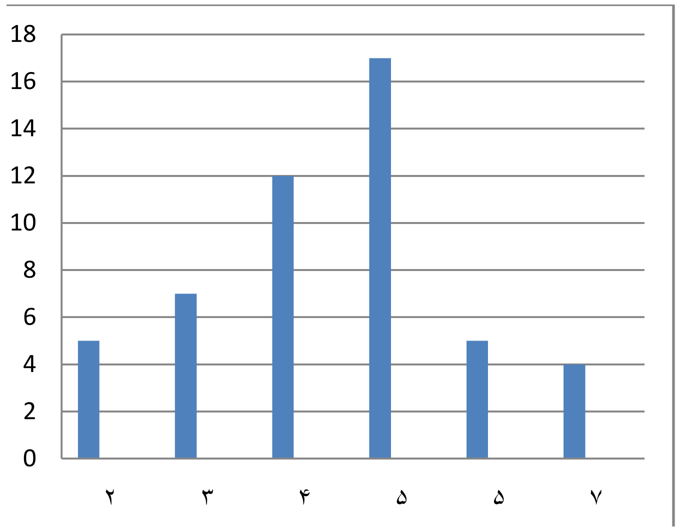
مطلوب است : **الف)** فروانی نسبی و درصد فراوانی نسبی

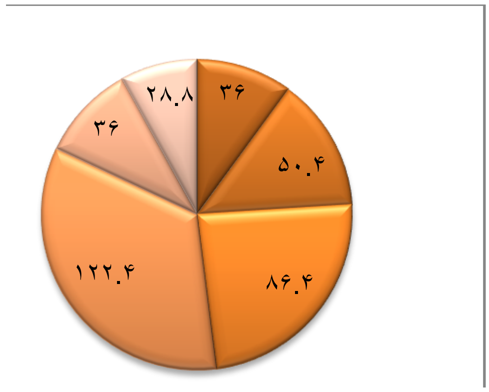
**ب)** فراوانی نسبی و درصد فراوانی نسبی

**ج)** فراوانی تجمعی و درصد تجمعی در صد تجمعی

**د)** نمودار میله ایی و دایره ایی

| داده ها و تعداد اعضای خانواده ها | چوب خط نشان | فراوانی مطلق Fi | فراوانی نسبی Ri | درصد فروانی نسبی | درجه | فروانی تجمعی | فروانی نسبیتجمعی | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | ~~IIII~~ IIII | 5 | $\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ | $\frac{5}{50} \times 100 = 10\%$ | $\frac{10}{10} \times 360 = 36^{o}$ | 5 | $\frac{5}{50} =/1$ | $\frac{5}{50} \times 100 = 10$ |
| 3 | ~~IIII~~ II | 7 | $\frac{7}{50} =/14$ | $\frac{7}{50} \times 100 = 14\%$ | $\frac{14}{10} \times 360 = 50/4^{o}$ | 12 | $\frac{12}{50} =/24$ | $\frac{12}{50} \times 100 = 24$ |
| 4 | ~~IIII~~ IIII | 12 | $\frac{12}{50} =/24$ | $\frac{12}{50} \times 100 = 24\%$ | $\frac{12}{50} \times 360 = 86/4^{o}$ | 24 | $\frac{24}{50} =/48$ | $\frac{24}{50} \times 100 = 48$ |
| 5 | ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ | 17 | $\frac{17}{50} =/34$ | $\frac{17}{50} \times 100 = 34\%$ | $\frac{34}{10} \times 360 = 122/4^{o}$ | 41 | $\frac{41}{50} =/82$ | $\frac{41}{50} \times 100 = 82$ |
| 6 | ~~IIII~~ | 5 | $\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ | $\frac{5}{50} \times 100 = 10\%$ | $\frac{1}{10} \times 360 = 36^{o}$ | 46 | $\frac{46}{50} =/92$ | $\frac{46}{50} \times 100 = 92$ |
| 7 | IIII | 4 | $\frac{4}{50} =/08$ | $\frac{4}{50} \times 100 = 8\%$ | $\frac{8}{10} \times 360 = 28/8^{o}$ | 50 | $\frac{50}{50} = 1$ | |
| | | جمع کل فروانی =50 | | | | | | |




**تشکیل جدول توزیع فراوانی برای داده های پیوسته :**هرگاه داده های آماری از نوع کمی و پیوسته باشند در این صورت برای تشکیل جدول توزیع فراوانی لازم است با طی مراحل داده ها را در دسته بندی کنیم . برای درک بهتر این موضوع مطلب را باذکر یک مثال پی می گیریم.

**مثال )** داده های زیر مربوط به طول عمر ۲۵ لامپ بر حسب ساعت می باشد:

100-101-97-104-102-110-103-106-110-104-103-98-105-100-109-103-104-99-98-109-105-103-110-104-105

R=MAX – MIN $\Rightarrow$ R = 110-97 = 13 }

**مرحله اول :** تعیین دامنه تغییرات داده (R)

**مرحله دوم :** تعیین تعداد دسته ها(طبقات) (K) :

در این مرحله باید تعداد دسته ها را مشخص کنیم بطور کلی تعیین تعداد دسته ها به تجربه آمارگر بستگی داردو تابع قانون خاصی نیست اما یک اصل کلی که همراه باید رعایتشودآن است که تعداد دسته ها نباید کمتر از ۵ و بیشتر از ۳۰ باشد بااین حال ما می توانیم در این درس از دو قانون زیر برای تعداد دسته ها استفاده کنیم این دستورها عبارتند از :

الف ) دستور استور جس　　　　　　　　ب) قائده توان

دردستوراستورجس اگرK تعدادطبقات وN تعدادکل داده هاباشددراین صورت می توانیم ازفرمول زیر(موسوم به فرمول استرجس)استفاده کنیم.

K=1+3/322Log n

**مثال )** هرگاه بخواهیم ۱۰۰ داده آماری را در یک جدول دسته بندی کنیم در آن صورت با توجه به فرمول استورجس تعداد دسته ها را بیابید Log100=2

K=1+3/322Log100 $\Rightarrow$ K=1+(3/322)(2) $\Rightarrow$ K=1+6/644 $\Rightarrow$ K=7/644 $\simeq$ 8

**٭نکته :** اگر عددK به صورت اعشاری به دست آید آن را به بالا گرد کنید.

**مثال )** در مثال مربوط به طول عمر ۲۵ لامپ اگر بخواهیم تعداد دسته ها را با استفاده از فرمول استورجس به دست آوریم خواهیم داشتLog25=1/4

K=1+3/322log25 $\Rightarrow$ k=1+(3/322)(1/4) $\Rightarrow$ 4=1+4/6=5/6 $\simeq$ 6

**ب)** قائده توان : در قائده توان اگرK تعداد دسته ها وN تعداد کل داده ها باشد در این صورتK را باید اولین عددی انتخاب کنیم که رابطه زیر را برقرار می سازد.

**مثال)** اگر بخواهیم ۱۰۰ داده آماری را در جدول توزیع فروانی دسته بندی کنیم در آن صورت با استفاده از قائده توان به صورت زیر عمل می کنیم

$$2^{k} \geq n \Rightarrow 2^{k} \geq 100$$

$$k = 1, k = 20{,}000 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow 2^{7} \geq 100 \Rightarrow k = 7$$

**مثال)** به عنوان یک مثال دیگر با استفاده از دستور توان تعداد طبقات را برای طول عمر ۲۵لامپ به دست آورید.

$$2^{k} \geq n \Rightarrow 2^{5} \geq 25 \Rightarrow k=5$$

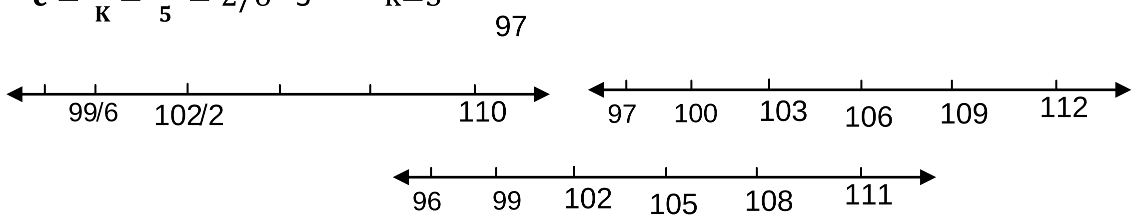
**مرحله سوم :** تعیین فاصله دسته ها :(c)با استفاده از فرمول زیرc را در این مرحله به دست می آوریم

C=فاصله دسته ها -- R=دامنه متغییر ها -- K=تعداد دسته ها

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{K}}$$

مثال ) مثال مربوط به طول عمر ۲۵ لامپ می توان نوشت :

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}} = 2/6 \simeq 3 \qquad k=5$$




**مرحله چهارم :** تشکیل جدول :

| داده ها و تعداد اعضای خانواده ها | چوب خط نشان | فراوانی مطلق Fi |
|---|---|---|
| 96-99 | III | 3 |
| 99-102 | IIII | 4 |
| 102-105 | ~~IIII~~ IIII | 9 |
| 105-108 | IIII | 4 |
| 108-111 | IIII | 5 |
| | | جمع کل**25** |

***نکته :** در هر دسته سمت چپ را حد پایین و عدد سمت راست را حد بالای آن دسته می نامند توضیح اینکه هیچ دسته ایی حد بالای خود را شامل نمی شود بخ جز دسته آخر.

**نشان دسته یا مرکز دسته :** میانگین حد بالا و حد پایین هر دسته را نشان آن دسته گویند.

مرکز دسته یکم را باX1 و مرکز دسته دوم راX2 و ... مرکز دسته i را باXiمی دهیم.

$$x1 = \frac{L1 + u1}{2} \qquad x2 = \frac{L2 + u2}{2} \qquad x_i = \frac{Li + ui}{2}$$

در حقیقت:

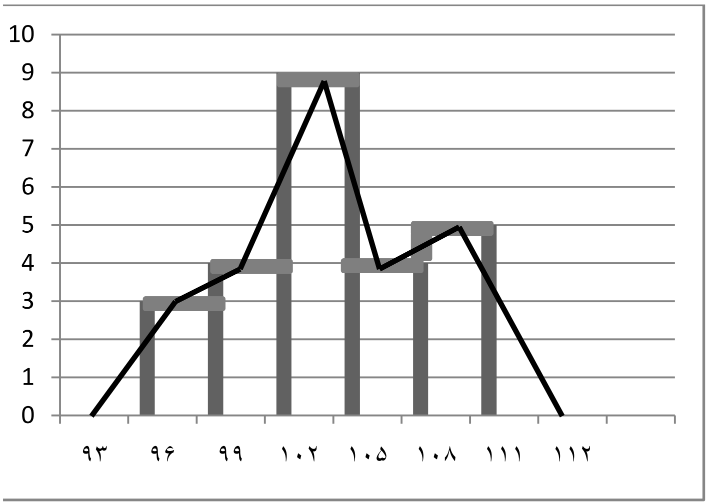
**مثال )** در مثال مربوط به طول عمر ۲۵لامپ مطلوب است:

الف : مرکز دسته ها ب: فراوانی نسبی ج:درصد فراوانی نسبی د:فراوانی تجمعی ه: درصد فراوانی تجمعی

| فراوانی نسبی‌تجمعی | فروانی تجمعی | درصد فروانی نسبی | فراوانی نسبی | مرکز دسته ها xi | فراوانی مطلق Fi | چوب خط نشان | داده ها و تعداد اعضای خانواده ها |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{25} \times 100 = 12\%$ | 3 | $\frac{3}{25} \times 100 = 12\%$ | $\frac{3}{25}$ | $\frac{96+99}{2} = 97/5$ | 3 | III | 96-99 |
| $\frac{7}{25} \times 100 = 28\%$ | 7 | $\frac{4}{25} \times 100 = 16\%$ | $\frac{4}{25}$ | 100/5 | 4 | IIII | 99-102 |
| $\frac{16}{25} \times 100 = 64\%$ | 16 | $\frac{9}{25} \times 100 = 36\%$ | $\frac{9}{25}$ | 103/5 | 9 | ~~IIII~~ IIII | 102-105 |
| $\frac{20}{25} \times 100 = 80\%$ | 20 | $\frac{4}{25} \times 100 = 16\%$ | $\frac{4}{25}$ | 106/5 | 4 | IIII | 105-108 |
| $\frac{25}{25} \times 100 = 100\%$ | 25 | $\frac{5}{25} \times 100 = 20\%$ | $\frac{5}{25}$ | 109/5 | | IIII | 108-111 |

**نمودار هیستو گرام و نمودار چند ضلعی:** برای آنکه داده های پیوسته دسته بندی شده را بصورت هندسی نشان دهیم می توانیم از دو نمودار زیر استفاده کنیم: الف : نمودار هستوگرام ب: نمودار چند ضلعی

**نمودار هیستوگرام :** برای رسم نمدار ابتدا یک دستگاه مختصات رسم کرده سپس دسته ها را روی محورX ها و فراوانی مطلق را روی محور y ها درجه بندی می کنیم.




اینک روی هر دسته مستطیلی می سازیم بطوری که ارتفاع مستطیل برابر با فروانی مطلق آن دسته باشد به این ترتیب نمودار هیستوگرام به دست می آید.

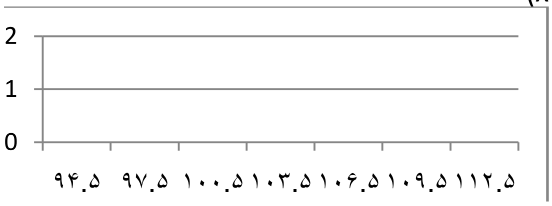
**نمودار چند ضلعی:** برای رسم نمدار چند ضلعی می توانیم به دوصورت عمل کنیم:

روش اول استفاده از نمودار هیستوگرام

روش دوم روش مستقیم

**روش اول (هیستوگرام) :** ابتداء دو دسته مجازی با فراوانی صفر به ابتدا و انتهای دسته ها اضافه می کنیم سپس در نمودار هیستوگرام نقطه وسط بالای مستطیل ها را مشخص کرده و سپس این نقاط را با پاره خط هایی به هم وصل می کنیم نمودار چند ضلعی به دست می آید مثلاً در شکل بالا نمودار چند ضلعی مربوط به طول عمر ۲۵ لامپ دیده می شود.

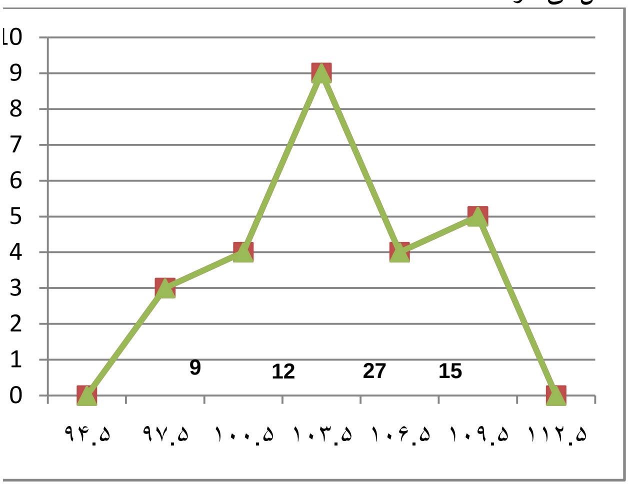
**روش مستقیم :** دراین روش ابتدا نقاط (x0, 0)(x1,f1)( x2,f2),…,( x5,f5)( x5,0)



را مشخص کرده و سپس با وصل کردن این نقاط به یکدیگر نقاط چند ضلعی حاصل می شود.

**※نکته :** مساحت زیر نمودار چندضلعی همواره با مجموع مساحت مستطیل ها

در نمودار هیستوگرام مساوی است.




**تمرین :** در مثال مربوط به طول عمر ۲۵ لامپ مساحت زیر نمودار چند ضلعی چقدر است؟

S=9+12+27+15=63

| دسته ها | |
|---|---|
| 96-99 | 12% |
| 99-102 | 16% |
| 102-105 | 36% |
| 105-108 | 16% |
| 108-111 | 20% |

**تمرین:** در مثال مربوط به طول عمر ۲۵لامپ مطلوب است:

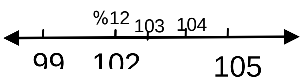
الف : صول عمر چند درصد از لامپها بین ۹۶تا۹۹ساعت می باشد؟ ٪۱۲

ب : طول عمر چند درصد از لامپها بین ۹۹ تا ۱۰۵ ساعت می باشد؟

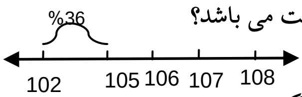
%36+%12+%16=%64

ج : طول عمر چند درصد از لامپها بین ۹۹تا ۱۰۳ ساعت می باشد؟

%12+%16=%28




ب : طول عمر چند درصد از لامپها بین ۱۰۲ تا ۱۰۷/۵ ساعت می باشد؟




$$x=\frac{\%16\times 5}{6} \Rightarrow \frac{\frac{16}{100}\times\frac{5}{1}}{\frac{6}{1}}=\frac{16\times 5}{100\times 6}=\frac{80}{600}=\frac{8}{60}$$

**تمرین :** داده های زیر وزن ۵۰ ورزشکار را بر حسب کیلوگرم نشان می دهد ؟

59-48-60-49-61-63-50-64-52-65-66-53-67-54-64-63-55-64-56-65-66-55-65-58-66-67-60-66-62-65-75-60-76-59-75-74-61-73-58-68-69-70-71-72-71-70-69-69-69-68-70

مطلوب است : الف جدول توزیع فراوانی (تعداد دسته ها را از فرمول توان به دست آورید).

R=76-48=28

$$2^k \geq n \Rightarrow 2^k \geq 50$$

ب: مرکز دسته ها یا نشان دسته ها :

$$2^6 \geq 50$$

ج: فراوانی نسبی و درصد فراوانی تجمعی:

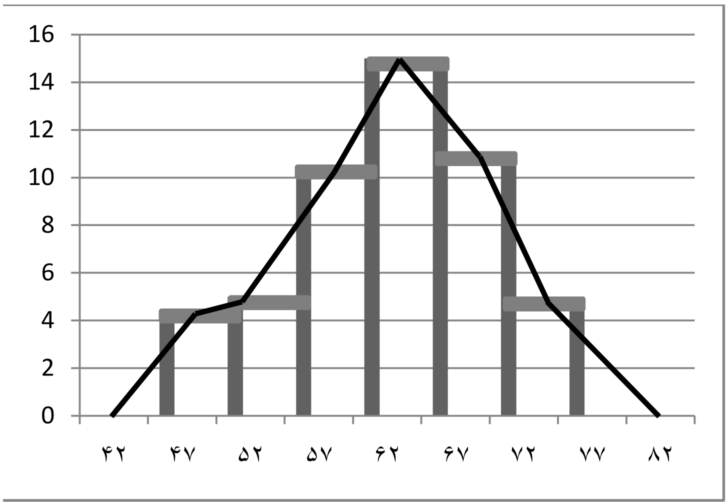
$$c=\frac{R}{k}=\frac{28}{6}=4/6\simeq 5$$

د: فراوانی تجمعی و در صد فراوانی تجمعی:

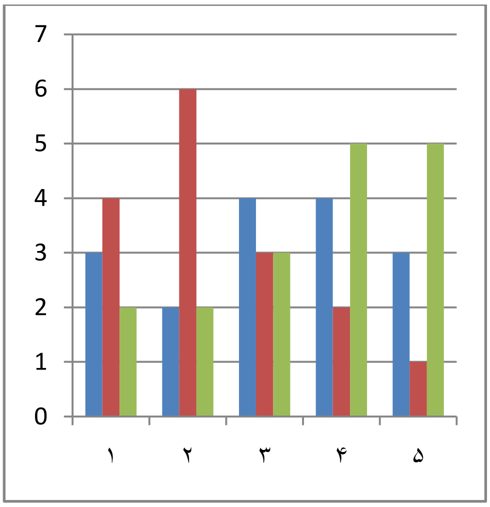
و: نمودار هیستوگرام و نمودار چند ضلعی

جواب مسئله قبلی :

| دسته ها | چوب خط نشان | فراوانی مطلق Fi | مرکز دسته ها xi | فراوانی نسبی | درصد فروانی نسبی | فروانی تجمعی | درصد فروانی تجمعی |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 47-52 | IIII | 4 | $\frac{47+52}{2}=49/5$ | $\frac{4}{50}$ | $\frac{4}{50}\times 100 = 8\%$ | 4 | $\frac{4}{50}\times 100 = 8\%$ |
| 52-57 | IIII | 5 | 54/5 | $\frac{5}{50}$ | $\frac{5}{50}\times 100 = 10\%$ | 9 | $\frac{9}{50}\times 100 = 18\%$ |
| 57-62 | IIII IIII | 10 | 59/5 | $\frac{10}{50}$ | $\frac{10}{50}\times 100 = 20\%$ | 19 | $\frac{19}{50}\times 100 = 38\%$ |
| 62-67 | IIII IIII IIII | 15 | 64/5 | $\frac{15}{50}$ | $\frac{15}{50}\times 100 = 30\%$ | 34 | $\frac{34}{50}\times 100 = 68\%$ |
| 67-72 | IIII IIII I | 10 | 69/5 | $\frac{10}{50}$ | $\frac{10}{50}\times 100 = 22\%$ | 45 | $\frac{45}{50}\times 100 = 90\%$ |
| 72-77 | IIII | 5 | 74/5 | $\frac{5}{50}$ | $\frac{5}{50}\times 100 = 100\%$ | 50 | $\frac{50}{50}\times 100 = 100\%$ |
| | | 50جمع کل | | | | | |




**منحنی توزیع فراوانی:** هرگاه در یک مسئله آماری تعداد دسته ها را خیلی زیاد انتخاب کنیم در آن صورت در نمودار هیستو گرام مستطیل های بسیار باریک و نزدیک به هم ایجاد می شود در نتیجه نمودار چند ضلعی به یک منحنی نزدیک می شود ایم منحنی را توزیع فراوانی برای آن جامعه آماری می نامند منحنی توزیع فراوانی نقش بسیار مهمی در تحلیل های آماری و تئوری احتمال (احتمالات)دارد.



**درس چهارم**

**شاخص های آماری:**

**مقدمه :** در درسهای گذشته توضیح دادیم که چگونه می توانیم با استفاده از جدول های توزیع فراوانی و نمودارها داده های آماری را دسته بندی و خلاصه کنیم اما اینها به تنهایی قادر به بیان همه ویژگی های یک مجموعه از داده ها نمی باشد به ویژه زمانی که هدف ما مطالعه دقیق جوامع آماری و مقایسه آنها باشد در چنین مواردی علاوه بر جدولها و نمودارها از نمودارها از ابزار دیگری بنام شاخص های آماری استفاده می کنیم در حقیقت شاخص های آماری ابزاری برای خلاصه سازی اطلاعات می باشد.

**تعریف شاخص های آماری :** عددی که بخشی از اطلاعات یک جامعه آماری را در خود خلاصه کرده باشد شاخص های آماری می نامند.

**انواع شاخص های آماری :** بطور کلی شاخص های آماری به سه دسته کلی زیر تقسیم می شوند:

الف: شاخص های مرکزی ب: شاخص های پراکنده ج: شاخص های فرورفتگی و کشیدگی

**تعریف شاخص های مرکزی :** شاخص های مرکزی اعدادی هستند که میزان تجمع و فشردگی داده ها را در نزدیکی یک عدد نشان می دهد

مهمترین شاخص های مرکزی عبارتند از:میانگین$\bar{x}$ . میانه Md . مد Mo

در بین این سه شاخص مرکزی،اهمیت میانگین از بقیه بیشتر است.

**تعریف میانگین :** فرض کنیم: X1,x2,...,xn . N داده آماری باشد در این صورت میانگین اینN را با علامت$\bar{x}$ نشان داده و بصورت زیرمی باشد:

$$\bar{x}=\frac{x1+x2+\cdots+xn}{n} \text{ یا } \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

**مثال)** میانگین عددهای زیر حقدر است؟ Xi=2,5,9,1,8

$$\bar{x}=\frac{2+5+9+1+8}{5}=\frac{25}{5}=5$$

**مثال)** فرض کنیم میانگین داده های X1,x2,x3,...,x10 برابر ۵ باشد در این صورت میانگین داده های X1,x2,x3,...,x10,16 چقدر است؟

$$\bar{x}=\frac{X1+x2+x3+\cdots+x10}{10}=5 \Rightarrow \bar{x}=X1+x2+x3+\cdots+x10=5 \Rightarrow \bar{x}=\frac{X1+x2+x3+\cdots+x10+16}{11}=\frac{50+16}{11}=\frac{66}{11}=6$$

**مثال )** اگر میانگین اعدادX1,x2,x3,...,xn برابر ۲۰ باشد :

آنگاه حاصل عبارت $(\sum_{i=1}^{n} xi)-20n$ را بیابید.

$$\bar{x}=\frac{x1+x2+\cdots+xn}{n}=\frac{20}{1} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}=\frac{20}{1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} xi=20n \text{ یا } (\sum_{i=1}^{n} xi)-20n=20n-20n=0$$

مثال )میانگین ۱۰عدد برابر۱۲است اگریک عددرا کناربگذاریم میانگین عددباقی مانده مساوی۱۱می شودعددی که کنار گذلاشتیم چقدر است؟

$$\frac{x1+x2+x3\ldots+x9+x10}{10}=\frac{12}{1} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} x1+x2+x3\ldots+x9+x10=120 \Rightarrow \frac{x1+x2+x3\ldots+x9}{9}=\frac{11}{1} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$x1+x2+x3\ldots+x9=99 \qquad x10=120-99=21$$

**تمرین )** میانگین ۱۰عدد برابر ۱۲ می باشد در محاسبه میانگین ۲عدد را اشتباهاً به جای ٤و۸برابر ١٤و۱۸ گرفته ایم میانگین صحیح چقدراست؟

$$\bar{x}=\frac{x1+x2+\cdots+x10}{10}=12 \Rightarrow x1+x2\ldots+x10=120 \Rightarrow \bar{x}=\frac{x10+20}{10}=\frac{120+20}{10}=\frac{140}{10}=14$$

**تمرین )** در یک شرکت میانگین حقوق ماهیانه کارمندان هرد۱۲۰۰۰۰تومان و کارکنان زن۷۰۰۰۰تومان و و همه کارکنان ۱۰۰۰۰۰ تومان است چند درصد کارکنان زن هستند؟

مردان $\bar{x}=120000$ زنان $\bar{x}=70000$ کل $\bar{x}=100000$

$$\bar{x}=\frac{x1+x2+\cdots+xn}{\text{تعداد کارکنان}\,n}=100000 \qquad \frac{70000}{120000}=\frac{x}{100000} \qquad \frac{100000\times 70000}{120000}=\frac{583}{3}$$

**میانگین وزن دار:** مثال:

| درس | نمرهxi | واحد یا ضریبfi |
| --- | --- | --- |
| A | 16 | 3 |
| B | 12 | 4 |
| C | 18 | 1 |

$$\bar{x}=\frac{x1w1+x2w2+x3w3}{w1+w2+w3} \text{ یا } \frac{\sum_{i=1}^{3}xiwi}{4wi}=\frac{(16\times 3)(12\times 4)(18\times 1)}{3+4+1}=\frac{114}{8}$$

**میانگین وزن دار :** فرض کنیم X1,x2,...,xn . N داده آماری با وزن W1,W2,...Wn باشد در این صورت برای محاسبه میانگین این داده ها از فرمول میانگین وزن دار استفاده می کنیم که بصور زیر می باشد.

$$\bar{x}=\frac{x1w1+x2w2+x3w3+\cdots+xnwn}{w1+w2+w3+\cdots+wn} \text{ یا } \frac{\sum_{i=1}^{n}xiwi}{\sum_{i=1}^{n}wi}$$

**میانگین با فراوانی ها :** در مواردی که داده ها را در جدول توزیع فراوانی دسته بندی می کنیم برای محاسبه میانگین از جدول توزیع فراوانی استفاده می کنیم برای محاسبه میانگین از جدول توزیع فراوانی ابتداء نشان دسته ها را محاسبه می کنیم (ستونxi)و سپس از فرمول زیر استفاده می نمائیم.

$$\bar{x}=\frac{f1x1+f2x2+f3x3+\cdots+fnxn}{f1+f2+f3+\cdots+fn} \text{ یا } \frac{\sum_{i=1}^{n}fixi}{\sum_{i=1}^{n}fi}$$

**مثال )** با استفاده از فرمول میانگین با فراوانی میانگین جدول توزیع فراوانی زیر را که مربوط به طول عمر ۲۵لامپ می باشدرا محاسبه کنید.

| داده ها و تعداد اعضای خانواده ها | fi | fi | fi xi |
| --- | --- | --- | --- |
| 96-99 | 3 | 97/5 | 292/5 |
| 99-102 | 4 | 100/5 | 402 |
| 102-105 | 9 | 103/5 | 931/5 |
| 105-108 | 4 | 106/5 | 426 |
| 108-111 | 5 | 109/5 | 547/5 |
| | جمع کل25 | | |

$$xi=\frac{96+99}{2}=97/5$$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}fixi}{\sum_{i=1}^{5}fi}=\frac{2599/5}{25}=103/98$$

**روش کد گذاری در محاسبه میانگین :** در این روش در ستون مربوط مرکز دسته عدد دلخواهی را به عنوان  انتخاب می کنیم (حد امکانAرا از دسته ی وسط انتخاب کنیم بهتر است)سپس ستون جدیدی به نامUi  تشکیل می دهیم در ستونUi سطح مربوط بهA را صفر و سطح بالا را از۱- و۲- و۳- و سطح های پایین را ۱و۲و۳ و...در نظر می گیریم اینک $\bar{u}$ را محاسبه می کنیم: $\bar{u}=\dfrac{f1u1+f2u2+f3u3+\cdots+fnun}{f1+f2+f3+\cdots+fn}$

توضیح اینکه برای محاسبه $\bar{u}$ بهتر است سطونی به نامfiوUi در جدول تشکیل دهیم بعد از محاسبه $\bar{x}$ با توجه به فرمول زیر را به دست می آوریم: $\bar{x}=c+\bar{u}a$

**مثال )** میانگین مربوط به طول عمر ۲۵ لامپ را به روش کد گذاری محاسبه کنید.

| دسته ها | fi | Ui |
|---|---|---|
| 96-99 | 3 | -2 |
| 99-102 | 4 | -1 |
| 102-105 | 9 | 0 |
| 105-108 | 4 | 1 |
| 108-111 | 5 | 2 |
| | جمع کل25 | |

$$a=\frac{102+105}{2}=\frac{207}{2}=103/5$$

$$\bar{u}=\frac{f1u1+f2u2+f3u3+\cdots+fnun}{f1+f2+f3+\cdots+fn}\Rightarrow\frac{-6-4+0+4+10}{25}$$

$$=\frac{4}{25}\Rightarrow\bar{u}=./16$$

C=99-96=3

$$\bar{x}=c+\bar{u}a\Rightarrow 3\times./16+103/5\Rightarrow\bar{x}=./48+103/5=103/98$$

**مثال )** جدول زیر مربوط به ۵۰ پیچ بر حسب سانتی متر می باشد میانگین قطرهای پیچ را تعیین کنید.

| داده ها و تعداد اعضای خانواده ها | fi | Ui |
|---|---|---|
| 1/45-1/95 | 4 | -2 |
| 1/95-2/45 | 6 | -1 |
| 2/45-2/95 | 20 | 0 |
| 2/95-3/45 | 7 | 1 |
| 3/45-3/95 | 10 | 2 |
| 3/95-4/45 | 3 | 3 |

$$u1=a=\frac{2/4+2/95}{2}=2/7$$

C=1/95-1/45=0/5

$$\bar{u}=\frac{\sum fixi}{\sum fi}=\frac{-8-6+0+7+20+9}{50}=\frac{22}{5}=./44$$

$$\bar{x}=c+\bar{u}a\Rightarrow./5\times./44+2/7\Rightarrow\bar{x}=./22+2/7=2/92$$

**دو ویژگی از میانگین:**

**ویژگی اول :** اگر داده های آماری را در عددثابتی ضرب کنیم میانگین نیز در آن عدد ثابت ضرب می شود.

یعنی اگر میانگین داده های زیر $\bar{x}$ باشد: X1,x2,x3,...,xn آنگاه میانگین داده های cX1,cx2,cx3,...,cxn برابر $c\bar{x}$ خواهد بود.

**مثال)** می دانیم میانگین داده های  Xi=3,4,5,6,7  برابر است با: $\bar{x}=\dfrac{3+4+5+6+7}{5}=\dfrac{25}{5}=5$

در این صورت برای محاسبه میانگین اعداد زیر : 6Xi=18,24,30,36,42  میانگین قبلی را در عدد٦ ضرب کنیم یعنی: $5\times6=30$ آنگاه عدد۳۰ میانگین داده های جدید است.

ادامه مثال) میانگین داده های زیر را حساب کنید: 9,12,15,18,21 ⇦ $\bar{x} = 3 \times 5 = 15$ چون اعداد سه برابر شده بود در۳ضرب کردیم.

**ویژگی دوم میانگین:** هرگاه همه داده های آماری با عدد ثابتی جمع شود در آن صورت میانگن نیز با آن عدد ثابت جمع می شود.

**مثال)** میانگین داده های زیر را حساب کنید؟ 7,8,9,10,11 وXi=3,4,5,6,7

میانگین =5+4=9 ⇨ $xi + 4 = 7,8,9,10,11$ ⇨ $\bar{x} = 5$

**مثال)** میانگین داده های زیر را حساب کنید؟ Xi=7,9,11,13,15 وyi=3,4,5,6,7

$\bar{y} = 5$

$(5 \times 2) + 1 = 11$ ⇨ $(4 \times 2) + 1 = 9$ ⇨ $(3 \times 2) + 1 = 7$ ⇨ $\bar{x} = 2 \times 5 + 1 = 11$ ⇨ Xi=2yi=7,9,11,13,15

**مثال )** فرض کنیم میانگین داده های X1,x2,x3,...,xn برابر ۸باشد در این صورت میانگین داده های $\frac{1}{2}x1 + 7, \frac{1}{2}x2 + 7 + \cdots \frac{1}{2}xn + 7$ چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \times 8 + 7 = 4 + 7 = 11$$

**میانه :** میانه یک مجموعه از داده های آماری را با علامتmb نشان می دهیم میانه عددی است که ۵۰درصد داده هاکوچک تر یا مساوی آن و۵۰در صد دیگر یا مساوی آن می باشد.

**طریقه محاسبه میانه:** برای محاسبه میانه ابتداء داده ها را بصورت صعودی (عنی از کوچک به بزرگ)مرتب می کنیم سپس دو حالت در نظر می گیریم : الف : اگر تعداد داده ها فرد باشد در آن صورت عدد وسط میانه است.

ب:اگر تعداد داده ها زوج باشد در آن صورت از دو داده وسط میانگین می گیرم این میانگین همان میانه است .

**مثال)** میانه داده های زیر را حساب کنید؟

الف: 7,9,1,11,16 ⇨ 1,7,9,11,16 ⇨ mb=9

ب: 3,3,1,5,16,70 ⇨ 1,3,3,5,16,70 ⇨ $\frac{3+5}{2} = 4$

**طریقه محاسبه میانه در جدول توزیع فراوانی :** در جدول توزیع فراوانی به صورت زیر عمل می کنیم:

الف: $\frac{n}{2}$ را محاسبه می کنیم: (n تعداد کل داده هاست)

ب: ستون فراوانی تجمعی را محاسبه می کنیم سپس اعداد این ستون را با $\frac{8}{2}$ مقایسه می کنیم اولین دسته ایی که فراوانی آن بزرگتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ می شود طبقه میانه دار نام دارد این طبقه را مشخص می کنیم.

ج: با استفاده از فرمول زیر میانه را حساب می کنیم: $mb = Li + (\frac{\frac{n}{2} - fi}{fi} \times c)$

$L =$ در این فرمول حد پایین طبقه میانه دار

$fi =$ فرمول مطلق طبقه ی میانه دار

$\frac{n}{2} =$ نصف تعداد کل داده هاست

$c =$ طول دسته (فاصله دسته)

$f =$ فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه میانه دار

**مثال)** جدول زیر مربوط به طول عمر۲۵لامپ است میانه این جدول را حساب کنید:

| دسته ها | fi | Fi فراوانی تجمعی |
|---|---|---|
| 96-99 | 3 | 3 |
| 99-102 | 4 | 7 |
| طبقه میانه 102-105 | 9 | 16 |
| 105-108 | 4 | 20 |
| 108-111 | 5 | 25 |
| | جمع کل25 | |

N=25

$\frac{n}{2}$

L=102

C=96-99=3

Fi=7

Fi=9

$$md=Li+(\frac{\frac{n}{2}-fi-1}{fi}\times c) \Rightarrow 102+(\frac{12/7-7}{9}\times 3) \Rightarrow 102+(\frac{5/5}{9}\times 3)$$

$$\Rightarrow 102+(\frac{16/5}{9}) \Rightarrow 102+1/83=103/83$$

**مثال )** جدول زیر مربوط به وزن ۵۰ورزشکار بر حسب کیلوگرم می باشد میانگین و میانه را حساب کنید؟

| دسته ها | fi | |
|---|---|---|
| 47/5-52/5 | 4 | |
| 52/5-57/5 | 6 | |
| 57/5-62/5 | 10 | |
| 62/5-67/5 | 15 | |
| 67/5-72/5 | 10 | |
| 72/5-77/5 | 5 | |

**❋نکته:** گاهی اوقات یک مجموعه از داده ها ممکن است شامل ۱ یا چندعدد خیلی کوچک و یا عدد خیلی بزرگ باشدچنین داده هایی را داده های پرت می نامند.

مثلاً اگر داده های3,1/5,4,2,16 حقوق ماهیانه ۵نفر برحسب (۱۰۰هزار تومان)باشد در آن صورت عدد۱۶ یک داده پرت نامیده می شود.

یکی از معایب میانگین آن است که داده ی پرت هیچ تأثیری روی میانه نخواهد داشت.

**مد یا(نما):** داده ایی که بیشترین فراوانی را داشته باشد مد نام دارد مد را با mo نشان می دهد.

**طریقه محاسبه مد:** در بین داده ها داده ایی فراوانی را داشته باشد مد آن مجموعه از داده ها محسوب می شود یک مجموعه از داده های آماری ممکن است فقط یک مد داشته باشد یا اینکه اصلاً مد نداشته باشد و یا اینکه دارای چند نوع مد باشد.

**مثال :** مد داده های زیر را بیابید؟

الف: 5,1,2,3,3,1,1, ⇨ mo=1

ب: 6,2,7,9,8 ⇨ mo=موجود نیست

ج: 3,3,4,1,3,1,7,1 ⇨ mo=3,1

**طریقه محاسبه مد در جدول توزیع فراوانی:** برای محاسبه مد در جدول توزیع فراوانی ابتداء طبقه ایی که دارای بیشترین فراوانی مطلق می باشد را مشخص می کنیم این طبقه مد دار انمیده می شود سپس با توجه فرمول زیر مدرا به دست می آوریم:

$$mo=Li+(\frac{d1}{d1+d2} \times c)$$

$L1 =$ برای حد پایین مد دار

$d1 =$ تفاضل فراوانی مطلق طبقه مد دار و طبقه قبلی

$d2 =$ تفاضل فراوانی مطلق طبقه مد دار و طبقه بعدی

$c =$ طول دسته

**مثال )** جدول زیر مربوط به طول عمر ۲۵ لامپ می باشد مد این جدول را بیابید؟

| دسته ها | fi | Fi فراوانی تجمعی |
|---|---|---|
| 96-99 | 3 | 3 |
| 99-102 | 4 | 7 |
| طبقه میانه 102-105 | 9 | 16 |
| 105-108 | 4 | 20 |
| 108-111 | 5 | 25 |
| | جمع کل 25 | |

D1=9-4=5

D2=9-4=5

C=96-99=3

$$mo=Li+(\frac{d1}{d1+d2} \times c) \Rightarrow 102+(\frac{5}{5+5} \times 3) \Rightarrow 102+\frac{5}{5+5} \times 3$$

$$\Rightarrow 102+(\frac{5}{5+5} \times 3) \Rightarrow 102+1/5=103/5$$

**پارانزهای پراکندگی:**

الف: دامنه تغییرات داداه ها (R) R=Max-Min

**مثال)** دامنه تغییرات داده های زیر را حساب کنید. Xi=5,9,1,8,1000 $\Rightarrow$ R=Max-Min $\Rightarrow$ R=1000-1=999

ب: واریانس: $(s^2)$

فرض کنیم N,x1,x2,...xn داده آماری باشد در این صورت واریانس این داده ها را با علامت نشان داده و بصورت زیر محاسبه می کنیم:

$$s \quad \frac{(x1-\bar{x})^2+(x2-\bar{x})^2+\cdots+(xn-\bar{x})^2}{n}$$

**مثال)** واریانس داده های زیر را حساب کنید؟ Xi=3,9,5,7,1

$$\bar{x} = \frac{3+9+5+7+1}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$s^2 = \frac{4+16+0+4+16}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

**نکته:** فرمول دیگری نیز برای محاسبه واریانس وجود دارد که این فرمول معمولاً در جاهایی که اعداد بصورت اعشاری باشند مناسب است.

$$s^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x^2}{fi}\right) - (\bar{x})^2$$

**تمرین:** واریانس داده های زیر را حساب کنید؟ Xi=3,9,5,7,1

$$\bar{x} = \frac{3+9+5+7+1}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$s^2 = \frac{3^2+9^2+5^2+7^2+1^2}{5} - (5)^2 \Rightarrow \frac{9+81+25+49+1}{5} - 25 \Rightarrow \frac{165}{5} - 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33 - 25 = 8$$

**تمرین:** واریانس داده های زیر را حساب کنید؟ Xi=5,9,2,4

$$\bar{x} = \frac{5+9+2+4}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$s^2 = \frac{(5-5)^2+(9-5)^2+(2-5)^2+(4-5)^2}{4} \Rightarrow s^2 = \frac{0+16+9+2}{4} = \frac{19}{4}$$

**انحراف معیار:** انحراف معیار یکی از مهمترین شاخص های پراکنده می باشد که آن را با علامت s نشان می دهیم برای محاسبه انحراف معیار کافیست چند واریانس را حساب کنیم : یعنی:

انحراف=$\sqrt{\text{واریانس}}$ $\Rightarrow s = \sqrt{s^2}$

**مثال)** انحراف معیار داده های زیر را حساب کنید؟ Xi=5,1,4,7,9

$$\bar{x} = \frac{5+1+4+7+9}{5} = \frac{26}{5} = 5/2$$

$$s^2 = \frac{(5-5/2)^2+(1-5/2)^2+(4-5/2)^2+(7-5/2)^2+(9-5/2)^2}{5} \Rightarrow s^2 = \frac{(./2)^2+(-4/2)^2+(-1/2)^2+(1/8)^2+(3/8}{4}$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{./4+17/64+1/44+3/24+14/44}{5} \Rightarrow s^2 = \frac{37/16}{5} = 7/432 \qquad s = \sqrt{7/432} = 2/726$$

یا روش دوم:

$$\bar{x} = \frac{5+1+4+7+9}{5} = \frac{26}{5} = 5/2$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} x^2}{5} \Rightarrow \frac{5^2+1^2+4^2+7^2+9^2}{5} \Rightarrow \frac{25+1+6+49+81}{5} \Rightarrow \frac{172}{5} = 34/4$$

$$s^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x^2}{fi}\right) - (\bar{x})^2 \Rightarrow 34/4 - (5/2)^2 \Rightarrow s^2 = 3/4 - 27/04 \Rightarrow s^2 = 7/36$$

$$s = \sqrt{7/36}$$

ضریب تغییرات آماری را اب علامت cv نشان می دهیم از ضریب تغییرات برای مقایسه پراکندگی دو جمعیت استفاده می شود برای محاسبه ضریب تغیرات کافی است انحراف معیار را بر میانگین تقسیم کنیم یعنی: $cv = \frac{s}{\bar{x}}$ یا $\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}} = \text{ضریب تغییرات}$

**❋نکته :** ممکن است ضریب تغییرات بر حسب درصد بیان شود در چنین حالتی کافی است ضریب تغییرات را در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم تا درصد آن به دست آید؟

**مثال)** فرض کنید انحراف طول قد دانشجویان دو کلاس به صورت زیر باشد پراکندگی طول قد دانش جویان با هم مقایسه کنید.

| کلاس ب | کلاس الف |
|---|---|
| $\bar{x}= 175$ | $\bar{y}= 160$ |
| S=5 | S=5 |

$cvx = \frac{5}{175} =$ ./.28 یا 2/8%

$cvy = \frac{5}{160} =$ ./.31 یا 3/1%

پراکندگی طول قد دانش آموزان الف کمتر است

**مثال )** ضریب تغییرات داده های زیر را حساب کنید؟ Xi=5,1,4,7,9

$\bar{x} = 2/5$

$s = 2/76$

$cv = \frac{s}{\bar{x}} \Rightarrow cv = \frac{2/76}{52/} =$ ./52یا 52%

محاسبه واریانس در حالتی که داده ها دارای فراوانی هستند (مثل حالتی که در جدول توزیع فراوانی دارد)فرض کنیم X1,x2,...,xn - N داده ابی آماری به ترتیب با فراوانی هایF1,f2,...fn باشد در آن صورت :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi - (xi - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} fi}$$

همچنان می توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$s^2 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} xi)^2}{\sum fi} - (\bar{x})^2$$

**تذکر:** استفاده از فرمول های بالا در جدول توزیع فراوانی ممکن است منجر به محاسبات طولانی گردد لذا می توانیم برای محاسبه ارزش کد گذاری نیز استفاده کنیم و بصورت زیر عمل می کنیم:

الف :ابتداء همانند میانگین ،توان$ui$ را تشکیل می دهیم.

ب: سپس توان$ui^2$ را می سازیم.

ج: آنگاه توان$fi\, ui^2$ را تکمیل می دهیم.

د: با توجه به فرمول:$s^2u = \frac{\sum fi\, u^2}{\sum fi} - (\bar{u})^2$ $s^2u$ را حساب می کنیم.

ه: از فرمول زیر $s^2x = c^2 \times s^2u$ را حساب می کنیم.

**مثال )** جدول زیر مربوط به طول عمر ۲۵ لامپ می باشد ،ضریب تغییرات این جدول را حساب کنید؟

دسته شاخص

| **دسته ها** | fi | ui | fiui | | $fi\,u^2i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 96-99 | 3 | -2 | -6 | 4 | 3(4)=12 |
| 99-102 | 4 | -1 | -4 | 1 | 4(1)=4 |
| 102-105 | 9 | 0 | 0 | 0 | 9(0)=0 |
| 105-108 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4(1)=4 |
| 108-111 | 5 | 2 | 10 | 4 | 5(4)=20 |
| | جمع کل**25** | | $\sum$ fi ui=4 | | |

$$A = \frac{102+105}{2} = \frac{207}{2} = 103/5$$

$$\bar{u} = \frac{\sum fi\,ui}{\sum fi} = \frac{4}{25} = ./16$$

$$\bar{x} = c \times \bar{u} + A \Rightarrow 3 \times ./16 + 103/5 \Rightarrow ./48 + 103/5 \Rightarrow 103/98$$

$$s^2u = \frac{\sum fis^2i}{\sum fi} - (\bar{u})^2 \Rightarrow 1/6 - (./16)^2 \Rightarrow 1/5744$$

$$s^2x \quad c^2 \times s^2u \Rightarrow 3^2 \times 1/5744 \Rightarrow 14/1696$$ واریانس

$s = \sqrt{14/1696} = 3/764$ انحراف معیار

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3/764}{103/98} \Rightarrow ./.362 \Rightarrow 3/62\%$$